



**MODELAGEM E AVALIAÇÃO DO CAMINHO DE PROPAGAÇÃO DE
MÚLTIPLAS TRINCAS CRÍTICAS EM MATERIAIS FRÁGEIS**

ALAN DA SILVA MOURA

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

FACULDADE DE TECNOLOGIA

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

**MODELAGEM E AVALIAÇÃO DO CAMINHO DE PROPAGAÇÃO DE
MÚLTIPLAS TRINCAS CRÍTICAS EM MATERIAIS FRÁGEIS**

ALAN DA SILVA MOURA

ORIENTADOR: DR. GILBERTO GOMES

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM ESTRUTURAS E
CONSTRUÇÃO CIVIL**

**PUBLICAÇÃO: /23
BRASÍLIA/DF – MAIO/2023**

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL

MODELAGEM E AVALIAÇÃO DO CAMINHO DE PROPAGAÇÃO DE
MÚLTIPLAS TRINCAS CRÍTICAS EM MATERIAIS FRÁGEIS

ALAN DA SILVA MOURA

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL DA FACULDADE DE TECNOLOGIA DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL.

APROVADO POR:

Prof. Gilberto Gomes, *Dr.* (ENC-UnB)

(Orientador)

Prof. Eder Lima de Albuquerque, *Dr.* (ENM-UnB)

(Examinador Externo ao PECC)

Prof. Sérgio Gustavo Ferreira Cordeiro, *Dr.* (IEI-ITA)

(Examinador Externo à UnB)

BRASÍLIA/DF, 31 DE MAIO DE 2023.

FICHA CATALOGRÁFICA

MOURA, ALAN DA SILVA

MODELAGEM E AVALIAÇÃO DO CAMINHO DE PROPAGAÇÃO DE MÚLTIPLAS TRINCAS CRÍTICAS EM MATERIAIS FRÁGEIS

[Distrito Federal] 2022.

xx, 96p., 297 mm (ENC/FT/UnB, Mestre, Estruturas e Construção Civil, 2023)

Dissertação de Mestrado - Universidade de Brasília. Faculdade de Tecnologia.

Departamento de Engenharia Civil e Ambiental.

1. Propagação de Trincas

2. BEMCRACKER2D

3. Elementos de Contorno

4. Mecânica da Fratura Linear Elástica

5. Materiais Frágeis

I. ENC/FT/UnB

II. Título (Mestre)

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

MOURA, A. S. (2023). MODELAGEM E AVALIAÇÃO DO CAMINHO DE PROPAGAÇÃO DE MÚLTIPLAS TRINCAS CRÍTICAS EM MATERIAIS FRÁGEIS. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-graduação em Estruturas e Construção Civil, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 103p.

CESSÃO DE DIREITOS

AUTOR: Alan da Silva Moura.

TÍTULO: MODELAGEM E AVALIAÇÃO DO CAMINHO DE PROPAGAÇÃO DE MÚLTIPLAS TRINCAS CRÍTICAS EM MATERIAIS FRÁGEIS

GRAU: Mestre em Estruturas e Construção Civil ANO: 2023

É concedida à Universidade de Brasília a permissão para reproduzir cópias desta monografia de Projeto Final e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. A autora reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desta dissertação de mestrado pode ser reproduzida sem a autorização por escrito da autora.

Alan da Silva Moura.

Bairro Planalto, Rua Ely Murilo Cláudio, Número 125, Residencial Itapuã, Bloco 04 Ap. 101, CEP: 31.720-020 Belo Horizonte – MG – Brasil

e-mail: engcivil.alansvm@gmail.com

*“Mas graças a Deus, que sempre nos conduz vitoriosamente em Cristo e por
nosso intermédio exala em todo lugar a fragrância do seu conhecimento”*

– 2 Coríntios 2:14.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente à Deus por ter nos dado a oportunidade de chegar até aqui. Mesmo durante um evento tão catastrófico como a pandemia, ainda assim, Ele nos permitiu prosseguir, mesmo com diversas perdas que sofremos e dificuldades que tivemos que enfrentar. Torço e oro por aqueles que perderam seus familiares e amigos, que possam por Ele ser fortalecidos para que nunca desistam desse dom tão fabuloso que é a vida. Também sou grato a Ele porque, mesmo no meio todas essas circunstâncias, me permitiu me casar com a pessoa mais incrível com quem já me deparei, minha esposa Ruth Ester. Passamos por diversos momentos de dificuldade, ansiedade e até desolação, mas sou grato, porque em todos eles estávamos juntos, sendo a base e a força um do outro. Muito obrigado minha pequena. Eu te amo e sei que sem você não teria conseguido chegar até aqui. Você é e sempre será minha maior conquista!

Agradeço também aos meus irmãos Daniel Hansen, Philipe Rodrigues e a tia Maria, que sem questionar sempre se fizeram presentes e me possibilitaram prosseguir na realização deste sonho. Sou extremamente grato a vocês, porque por meio de tudo o que fizeram, Deus mudou a minha vida! Muito obrigado! Me apropriando de um pequeno trecho da carta de Isaac Newton destinada à Robert Hooke: "Se vi mais longe foi por estar de pé sobre ombros de gigantes". De forma alguma eu poderia deixar de agradecer aos meus professores de cada etapa até aqui por tamanha importância em minha vida, pois por meio deles pude acreditar, entender e aplicar minhas capacidades. Esta conquista é apenas um pequeno e ínfimo reflexo da competência, do esforço e dos frutos gerados por estes heróis que diariamente alcançam novas gerações de profissionais, mestres e doutores. Agradeço ao professor Gilberto Gomes, o qual me orientou e direcionou durante esse longo período. Obrigado pela compreensão, persistência e por todas as oportunidades que me confiou, pois sem elas eu certamente não conseguiria finalizar esta etapa.

Agradeço ao Programa de Pós-Graduação em Estruturas e Construção Civil – PECC, Departamento de Engenharia Civil, Faculdade de Tecnologia, Universidade de Brasília, pela oportunidade de realizar esse mestrado.

Agradeço ao CNPq pelo apoio financeiro.

Por fim, sendo Ele o alfa e o ômega, o princípio e o fim, findo meus agradecimentos exaltando ao Deus da minha vida, que um dia olhou para um rapaz sem nenhuma capacidade e o fez alcançar grandes vitórias através de caminhos inimagináveis a ele. Obrigado meu Deus!

RESUMO

MODELAGEM E AVALIAÇÃO DO CAMINHO DE PROPAGAÇÃO DE MÚLTIPLAS TRINCAS CRÍTICAS EM MATERIAIS FRÁGEIS

Autor: Alan da Silva Moura

Orientador: Gilberto Gomes

Programa de Pós-graduação em Estruturas e Construção Civil

Brasília, Maio de 2023.

Em seu notável progresso, a Mecânica da Fratura Linear Elástica (MFLE) munida da Mecânica Computacional, explicitou a enorme carência das normas estruturais frente às falhas estruturais concebidas em materiais frágeis. Caracterizado pela disposição arbitrária de seus constituintes granulares, o concreto é o material frágil mais utilizado no mundo, composto anisotrópico e sujeito a fenômenos singulares, tais como, o efeito de tamanho. Macroscopicamente, é tomado como material resultante da união entre pasta cimentícia, agregados e uma zona de transição entre estes, que corresponde a uma porção de material já fragilizado antes da atuação mecânica, em virtude da presença de inúmeras microfalhas decorrentes da porosidade ocasionada pelo alto acúmulo de água na região. Desta forma, fundamentando-se em conceitos da Mecânica da Fratura, propõe-se o desenvolvimento de uma metodologia aplicável na análise dos fenômenos de múltiplos trincamentos críticos em materiais frágeis, mediante o emprego dos *softwares* caseiros de processamento, BEMCRACKER2D, e de pré- e pós-processamento, a interface BEMLAB2D, ambos baseados no Método dos Elementos de Contorno Dual (MECD). A metodologia proposta baseia-se num processo iterativo composto pela utilização dos *softwares* BEMCRACKER2D e BEMLAB2D na realização dos procedimentos de análise e obtenção incremental do caminho de propagação de múltiplas trincas cisalhantes, baseado em conceitos da MFLE. Ao todo, dez problemas da literatura são considerados para verificação, validação e aplicação da metodologia desenvolvida, apresentando resultados plenamente coerentes com o esperado.

Palavras-Chave: Propagação de Trincas; BEMCRACKER2D; Elementos de Contorno; Mecânica da Fratura Linear Elástica; Materiais Frágeis;

ABSTRACT

METHODOLOGY FOR SIMULATION AND EVALUATION OF COHESIVE FRACTURE AND PROPAGATION OF MULTIPLE CRITICAL CRACKS IN BRITTLE MATERIALS

Author: Alan da Silva Moura

Supervisor: Gilberto Gomes

Postgraduate Program in Structures and Civil Construction

Brasília, May 2023

In its remarkable progress, Linear Elastic Fracture Mechanics (LEFM), armed with Computational Mechanics, has highlighted the lack of reference in normative standards in the face structural failures in brittle materials. Characterized by the arbitrary arrangement of its granular constituents, concrete is the most widely used brittle material in the world, an anisotropic composite subject to unique phenomena such as the size effect. Macroscopically, it is considered as a material resulting from the union between cementitious paste, aggregates, and a transition zone between them, that corresponds to a portion of material already weakened prior to the mechanical action due to the presence of numerous microcracks resulting mainly from the high accumulation of water in the region. Thus, based on concepts from Fracture Mechanics, the development of a methodology applicable to the analysis of multiple critical crack phenomena in brittle materials is proposed, using in-house processing software, BEMCRACKER2D, the pre- and post-processing interface BEMLAB2D, both based on the Dual Boundary Element Method (DBEM). The proposed methodology relies on an interactive process involving the use of BEMCRACKER2D and BEMLAB2D software for conducting the analysis procedures and obtaining the incremental propagation paths of multiple shear cracks based on LEFM concepts. In total, ten literature problems are considered for verification, validation, and application of the developed methodology, presenting results fully consistent with the expected outcomes.

Keywords: Crack Propagation; BEMCRACKER2D; Boundary Elements; Linear Elastic Fracture Mechanics; Brittle Materials;

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Triângulo da Mecânica da Fratura (Medina - Adaptado, 2014).....	8
Figura 2 – a) Fratura Dúctil; b) Fratura Frágil (MEDINA, 2014)	11
Figura 3 – Zona de Fratura Dúctil (RUGGIERI <i>et al</i> - Adaptado, 1996).....	12
Figura 4 – Fratura por Clivagem (Anderson - Adaptado, 2005)	12
Figura 5 – Fratura Intergranular (Anderson - Adaptado, 2005)	13
Figura 6 – Definição dos Três Modos de Abertura de Trinca (KUNA, 2013).....	15
Figura 7 – Sistema de Coordenadas e Componentes de Tensão Antes da Ponta de uma Trinca (BARSOM e ROLFE – Adaptado, 1999).....	17
Figura 8 – Sistema de referência de coordenadas e caminho de contorno para J-integral (PORTELA <i>et al</i> – Adaptado, 1992).....	21
Figura 9 – Contornos arbitrários Γ_1 e Γ_2 ao redor da trinca conectados por Γ_3 e Γ_4 formando um contorno fechado (MIRANDA – Adaptado, 2003).....	22
Figura 10 – Tensões na Ponta da Trinca em Coordenadas Polares (MIRANDA, 2003)	24
Figura 11 - Seção polida de um corpo de prova de concreto - fotografia cedida por Fordon Vrdoljak (MEHTA e MONTEIRO, 2008)	26
Figura 12 - Resposta típica do concreto sob ensaio de tração direta (KARIHALOO – Adaptado, 1995)	29
Figura 13 - Curva de tensão na compressão VS deformação axial (MEHTA e MONTEIRO – Adaptado, 2008)	30
Figura 14 - Resposta do concreto ao carregamento uniaxial cíclico (MEHTA e MONTEIRO – Adaptado, 2008)	31
Figura 15 - Mecanismos resistentes na zona de fraturamento em concretos (SURENDRA <i>et al</i> ,1995).....	33
Figura 16 - Modelagem de trincas em concreto usando elementos coesivos após Mahabadi <i>et al</i> (2014): a) modelo conceitual de uma trinca de tração em concreto plano; b) modelo teórico da zona de processo de fratura (FPZ) de Hillerborg <i>et al</i> (1976). (DURANT e DA SILVA – Adaptado, 2019)	34

Figura 17 - (a) Viga sob cisalhamento de concreto e desenvolvimento de fissuras; (b) Modo de abertura da fratura devido à trinca de flexão central; (c) Fratura de modo misto devido à propagação de trincas diagonais (PARVANOVA e GOSPODINOV, 2007)	36
Figura 18 - Curva tensão coesiva σ_c versus descontinuidades de deslocamento da seção fraturada, ou, Δu , para concretos (CORDEIRO – Adaptado, 2015)	37
Figura 19 – Malha do MEC e Malha do MEF para Estrutura de uma Aeronave X-Core (ALIABADI, 2002).	42
Figura 20 – Diagrama de Classes do Programa BEMCRACKER2D (GOMES <i>et al</i> , 2016-b).	47
Figura 21 – Diagrama de Sequência do Crescimento da Trinca (GOMES <i>et al</i> , 2016-b)	48
Figura 22 – Interface Gráfica do BEMLab2D – Área de Trabalho.....	49
Figura 23 – Metodologia Desenvolvida	51
Figura 24 – Viga profunda com duas fissuras: a fissura diagonal esquerda com cinco pontas diferentes; a trinca direita é vertical com uma ponta. (a) Dados geométricos e materiais (PARVANOVA e GOSPODINOV – Adaptado, 2007)	54
Figura 25 – Modelo I: Carregamentos e restrições.....	54
Figura 26 – Viga sob cisalhamento de borda única com quatro pontos: (a) Dados geométricos, carregamento e suportes de limite (PARVANOVA e GOSPODINOV – Adaptado, 2007)	55
Figura 27 – Modelo II: Carregamentos e restrições	55
Figura 28 – Viga de concreto sob flexão em três pontos (CORDEIRO – Adaptado, 2015)....	56
Figura 29 – Modelo III: Carregamentos e restrições.....	57
Figura 30 – Viga de concreto com um entalhe submetida a modo misto de fratura (I e II) (CORDEIRO – Adaptado, 2015)	57
Figura 31 – Modelo IV: Carregamentos e restrições.....	57
Figura 32 – Viga de concreto com dois entalhes submetida a modo misto de fratura (I e II) (CORDEIRO – Adaptado, 2015)	58
Figura 33 – Modelo V: Carregamentos e restrições	58
Figura 34 – Geometria e condições de contorno do ensaio de flexão em três pontos. (MOJIRI – Adaptado, 2010)	59
Figura 35 – Modelo VI: Carregamentos e restrições.....	59

Figura 36 – Configuração do teste para uma viga típica apresentada por Roesler <i>et al.</i> (2007) (DURAND – Adaptado, 2019).....	59
Figura 37 – Modelo VII: Carregamentos e restrições	60
Figura 38 – Diagrama teste de espécime de placa retangular com duplo entalhe (DURAND – Adaptado, 2019)	60
Figura 39 – Modelo VIII: Carregamentos e restrições	61
Figura 40 – Diagrama teste para o espécime de placa quadrada com duplo entalhe (DURAND – Adaptado, 2019)	61
Figura 41 – Modelo IX: Carregamentos e restrições.....	62
Figura 42 – Diagrama do teste para o espécime de placa quadrada com duplo entalhe (DURAND – Adaptado, 2019).....	62
Figura 43 – Modelo X: Carregamentos e restrições	63
Figura 44 – Caminho de propagação da trinca de flexão e das trincas críticas.....	65
Figura 45 – Malha deformada	66
Figura 46 – Modelo I: Evolução dos FIT's em Função do Número de Incrementos	66
Figura 47 – Modelo I: Evolução dos FIT's em Função do Número de Incrementos	67
Figura 48 – Caminho de propagação da trinca crítica	67
Figura 49 – Malha deformada	68
Figura 50 – Modelo II: Evolução dos FIT's em Função do Número de Incrementos.....	68
Figura 51 – Caminho de propagação da trinca de flexão	69
Figura 52 – Malha deformada	70
Figura 53 – Modelo III: Evolução dos FIT's em Função do Número de Incrementos	70
Figura 54 – Caminho de propagação da trinca crítica	71
Figura 55 – Malha deformada	71
Figura 56 – Modelo IV: Evolução dos FIT's em Função do Número de Incrementos	72
Figura 57 – Caminho de propagação de trincas críticas	72
Figura 58 – Malha deformada	73

Figura 59 – Modelo V: Evolução dos FIT's em Função do Número de Incrementos	73
Figura 60 – Caminho de propagação da trinca de flexão	74
Figura 61 – Malha deformada	74
Figura 62 – Modelo VI: Evolução dos FIT's em Função do Número de Incrementos	75
Figura 63 – Caminho de propagação da trinca de flexão	75
Figura 64 – Malha deformada	76
Figura 65 – Modelo VII: Evolução dos FIT's em Função do Número de Incrementos.....	76
Figura 66 – Caminho de propagação de trincas críticas.....	77
Figura 67 – Malha deformada	77
Figura 68 – Modelo VIII: Evolução dos FIT's em Função do Número de Incrementos	78
Figura 69 – Caminho de propagação de trincas críticas.....	78
Figura 70 – Malha deformada	79
Figura 71 – Modelo IX: Evolução dos FIT's em Função do Número de Incrementos	79
Figura 72 – Caminho de propagação de trincas críticas.....	80
Figura 73 – Malha deformada	80
Figura 74 – Modelo X: Evolução dos FIT's em Função do Número de Incrementos	81
Figura A.1 - Lei constitutiva do concreto considerando curva coesiva linear (CORDEIRO – Adaptado, 2015)	90
Figura A.2 - Lei constitutiva do concreto considerando curva coesiva bi-linear (CORDEIRO – Adaptado, 2015)	91
Figura A.3 - Lei constitutiva do concreto considerando curva coesiva exponencial (CORDEIRO – Adaptado, 2015)	92
Figura B. 1 – Interface Gráfica do BEMLAB2D – Configurações Iniciais	93
Figura B. 2 – Interface Gráfica do BEMLAB2D – Módulo I – GEOMETRY – Parte 1	93
Figura B. 3 – Interface Gráfica do BEMLAB2D – Módulo I – GEOMETRY – Parte 2.....	94
Figura B. 4 – Interface Gráfica do BEMLAB2D – Módulo II – MESH.....	94

Figura B. 5 – Interface Gráfica do BEMLAB2D – Módulo III – BOUNDARY CONDITIONS	95
Figura B. 6 – Interface Gráfica do BEMLAB2D – Módulo IV – ELASTOSTATIC ANALYSIS	95
Figura B. 7 – Interface Gráfica do BEMLAB2D – Módulo V – GRAPHICAL RESULTS....	96

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Principais Classes, Instâncias e Finalidades (GOMES et al – Adaptado, 2016-b).	48
Tabela 2 - Propriedades das Trincas e Materiais Presentes nos Modelos Analisados	52
Tabela 3 - Propriedades das Trincas e Materiais Presentes nos Modelos Analisados	56

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

1- Abreviaturas

ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
BEMLAB2D	<i>Boundary Element Method Laboratory 2D</i>
CMOD	Crack Mouth Opening Displacement
C-S-H	Silicato de Cálcio Hidratado
ELS	Estado Limite de Serviço
ELU	Estado de Limite Último
GUI	Interface Gráfica de Usuário
K, FIT	Fatores de Intensidade de Tensão
MATLAB	<i>Matrix Laboratory</i> - Linguagem de Programação Utilizada
MDED	Mínima Densidade da Energia de Deformação
MEC	Método dos Elementos de Contorno
MECD	Método dos Elementos de Contorno Dual
MEF	Método dos Elementos Finitos
MF	Mecânica da Fratura
MFLE	Mecânica da Fratura Linear Elástica
MTC	Máxima Tensão Circunferencial
MTLEP	Máxima Taxa de Liberação de Energia Potencial
NBR	Norma Brasileira Registrada no INMETRO
PECC	Programa de Pós-Graduação em Estruturas e Construção Civil
UnB	Universidade de Brasília
ZPI	Zona de Processos Inelásticos

2- Letras Maiúsculas como Símbolos Principais

E	Módulo de Young
E'	Transformações para o Estado Plano de Tensão ($E' = E$) e para o Estado Plano de Deformação ($E' = E/(1 - \nu^2)$)
G	Taxa de Liberação de Energia
G_f	Energia Necessária à Fratura em Modo I

G_{Ic}	Energia para Superação da Superfície da Fissura ou Energia Crítica de Fraturamento frágil
G_q	Taxa de Energia Total Liberada
G_σ	Energia da Zona Coesiva
J	Valor da Integral-J
J^I	Parcela Desacoplada do Valor da Integral-J do Modo I
J^{II}	Parcela Desacoplada do Valor da Integral-J do Modo II
K, FIT	Fatores de Intensidade de Tensão
K_c	Tenacidade à Fratura
K_I	Fator de Intensidade de Tensão para o Modo I de Propagação
K_{II}	Fator de Intensidade de Tensão para o Modo II de Propagação
K_{III}	Fator de Intensidade de Tensão para o Modo III de Propagação
$K_I(\theta)$	Fator de Intensidade de Tensão para o Modo I de Propagação em Função da Direção Radial da Ponta da Trinca
$K_{II}(\theta)$	Fator de Intensidade de Tensão para o Modo II de Propagação em Função da Direção Radial da Ponta da Trinca
$K_{III}(\theta)$	Fator de Intensidade de Tensão para o Modo III de Propagação em Função da Direção Radial da Ponta da Trinca
$K_{m\acute{a}x}$	Máximo valor de K em uma Análise Cíclica de Trinca por Fadiga
$K_{m\acute{i}n}$	Mínimo valor de K em uma Análise Cíclica de Trinca por Fadiga
N	Número de Elementos no Contorno
S	Densidade de Energia de Deformação
S_{cr}	Densidade de Energia de Deformação Crítica
$S_{\theta m\acute{i}n}$	Densidade de Energia de Deformação na Direção de Mínima Densidade de Energia de Deformação
T_{ij}, U_{ij}	Soluções Fundamentais de Kelvin para Força de Superfície e Deslocamento
W	Densidade de Energia
W_{pl}	Largura da Placa

3- Letras Minúsculas como Símbolos Principais

a	Comprimento da Trinca
c_{ij}	Coefficiente Geométrico

dA	Infinitesimal de Área
dN	Número Infinitesimal de Ciclos de Carga
dW	Densidade Infinitesimal de Energia
da	Comprimento Infinitesimal da Trinca
dr	Comprimento Infinitesimal de Raio
$d\theta$	Infinitesimal Angular da Direção Radial da Ponta da Trinca
f, f_1	Função Adimensional
f_c	Resistência à Compressão do Concreto
f_{ij}	Função Adimensional de θ
f_t	Resistência à Tração do Concreto
$g_{ij}^{(m)}$	Função de θ para o m -ésimo Termo
$i, j e k$	Representação das Coordenadas Cartesianas ou Índices de notação indicial
n_i	Componentes do Versor Normal ao Contorno
k	Constante de Proporcionalidade
n	Número de Nós do Contorno
t_i	Equações Integrais de Contorno das Forças de Superfície
t_j	Componentes Definidas ao Longo do Contorno
u_j	Deslocamentos em x
u, p	Vetores Deslocamento e Força e Superfície
$u_{j,k}$	Componente de Deformação na Direção $j-k$
v	Deslocamentos em y
w	Deslocamentos em z

4- Letras Gregas Maiúsculas e Símbolos Principais

Γ, ξ	Contorno Arbitrário Utilizado na Análise
Γ_c	Contorno da Trinca
Γ_j	Superfície do Elemento j
Δu_{cr}	Deslocamento Crítico da Abertura da Trinca ou Descontinuidade de Deslocamento
Δu	Deslocamento da Abertura da Trinca
\mathcal{G}	Taxa de Liberação de Energia

$\mathcal{G}(\theta)$	Taxa de Liberação de Energia Total em Função da Direção Radial da Ponta da Trinca
$\mathcal{G}_{\theta máx}$	Taxa Máxima de Liberação de Energia

5- Letras Gregas Minúsculas como Símbolos Principais

δ	Delta de Dirac
δ_{ij}	Delta de Kronecker
ε	Tensor de Deformação
ε_c	Deformação Crítica em $\sigma = f_t$
ε_{ij}	Tensor de Deformação
θ	Direção Radial da Ponta da Trinca
μ	Módulo de Elasticidade Cisalhante
ρ	Raio de Entalhe
σ	Tensão Aplicada
$\sigma_c(\Delta u)$	Tensão Coesiva
σ_f	Máximo Esforço Transmitido por um Material Integro
σ_{ij}	Tensor de Tensões
σ_{nom}	Tensão Nominal da Seção Bruta
σ_r	Tensão Circunferencial
$\sigma_{rmáx}$	Tensão Circunferencial Máxima
σ_x	Componente de Tensão na Direção x
σ_y	Componente de Tensão na Direção y
σ_z	Componente de Tensão na Direção z
σ_θ	Tensão Principal
$\sigma_{\theta máx}$	Tensão Máxima Principal
$\tau_{r\theta}$	Tensão Cisalhante
τ_{xy}	Componente Cisalhante sobre o Plano xy
τ_{xz}	Componente Cisalhante sobre o Plano xz
τ_{yz}	Componente Cisalhante sobre o Plano yz
ν	Coefficiente de Poisson
ϕ	Função de Interpolação dos N Elementos de Contorno

6- Símbolos Matemáticos

dx	Diferencial de x
$\frac{\partial}{\partial x}$	Derivada Parcial com Relação a x
\int	Integral
\lim	Limite
\sum	Somatório
$CPV \int_{\Gamma}$	Valor Principal da Integral de Cauchy
$HPV \int_{\Gamma}$	Valor Principal da Integral de Hadamard

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1: INTRODUÇÃO.....	1
1.1 MOTIVAÇÃO	4
1.2 OBJETIVO GERAL.....	5
1.3 ORGANIZAÇÃO DA DISSERTAÇÃO.....	6
CAPÍTULO 2: MECÂNICA DA FRATURA.....	7
2.1 CONCEITOS FUNDAMENTAIS	9
2.1.1 Falha em Elementos Estruturais.....	9
2.1.2 Fratura	10
2.1.2.1 Ductilidade.....	11
2.1.2.2 Tenacidade à Fratura, Kc	13
2.1.3 Trincamento.....	14
2.1.4 Modos de Abertura de Trinca.....	14
2.2 MECÂNICA DA FRATURA LINEAR ELÁSTICA – MFLE	16
2.2.1 Fatores de Intensidade de Tensão.....	16
2.2.2 Integral J.....	20
2.3 CRITÉRIOS PARA DIREÇÃO DE PROPAGAÇÃO NO CAMPO DA MFLE.....	23
CAPÍTULO 3: CONCRETO E PROCESSOS DE FRATURA	26
3.1 COMPORTAMENTO DO CONCRETO SOB DIFERENTES ESTADOS DE TENSÃO	28
3.1.1 Comportamento do Concreto Quando Sujeito à Esforços Axiais de Tração	28
3.1.2 Comportamento do Concreto Quando Sujeito à Esforços Axiais de Compressão	29
3.1.3 Comportamento do Concreto Quando Sujeito à Esforços Cíclicos	31
3.2 ZONA DE FRATURAMENTO.....	32
3.3 TRINCAS DE FLEXÃO E DE CISALHAMENTO (CRÍTICA)	35
3.4 MODELOS DE FRATURA COESIVA.....	36
3.5 MODELO DE FRATURA FICTÍCIA	38
CAPÍTULO 4: O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO E O PROGRAMA	
BEMCRACKER2D.....	40
4.1 IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO (MEC)	42
4.2 MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO DUAL (MECD).....	44
4.2.1 Formulação do Método dos Elementos de Contorno Dual (MECD)	45
4.3 SOBRE OS <i>SOFTWARES</i>	46
4.3.1 Software BEMCRACKER2D	46
4.3.2 Software BEMLAB2D.....	48
CAPÍTULO 5: METODOLOGIA DESENVOLVIDA.....	51
5.1 CAMINHO DE TRINCAMENTO DE MÚLTIPLAS TRINCAS CRÍTICAS	52
5.1.1 Escolha do Método	52
5.1.2 Verificação da Metodologia Aplicada.....	52

5.1.3	Modelos Padrão para Verificação de Capacidade dos <i>Softwares</i>	53
5.1.3.1	Modelo I.....	53
5.1.3.2	Modelo II	54
5.2	OUTROS CASOS	55
5.2.1	Modelo III	56
5.2.2	Modelo IV	57
5.2.3	Modelo V	58
5.2.4	Modelo VI	58
5.2.5	Modelo VII	59
5.2.6	Modelo VIII	60
5.2.7	Modelo IX	61
5.2.8	Modelo X	62
CAPÍTULO 6:	RESULTADOS E DISCUSSÃO	64
6.1	VERIFICAÇÃO DA METODOLOGIA DO CAMINHO DO TRINCAMENTO DE MÚLTIPLAS TRINCAS CRÍTICAS:	64
6.1.1	Modelo I	64
6.1.2	Modelo II	67
6.2	APLICAÇÃO DA METODOLOGIA DE ANÁLISE DE PROPAGAÇÃO DE MÚLTIPLAS TRINCAS CRÍTICAS EM MATERIAIS FRÁGEIS SOBRE OS DEMAIS CASOS:	69
6.2.1	Modelo III	69
6.2.2	Modelo IV	70
6.2.3	Modelo V	72
6.2.4	Modelo VI	73
6.2.5	Modelo VII	75
6.2.6	Modelo VIII	76
6.2.7	Modelo IX	78
6.2.8	Modelo X	80
CAPÍTULO 7:	CONCLUSÕES E SUGESTÕES FUTURAS	82
7.1	CONCLUSÕES.....	82
7.2	SUGESTÕES FUTURAS	83
BIBLIOGRAFIA	84
APÊNDICE A – TRÊS LEIS CONSTITUTIVAS DO CONCRETO: LINEAR, BI-LINEAR E		
EXPONENCIAL	90
APÊNDICE B – FLUXOGRAMAS DE ITERAÇÃO COM A <i>GUI</i> DO BEMLAB2D	93

CAPÍTULO 1: INTRODUÇÃO

Atualmente, os elementos estruturais são projetados e avaliados em torno de normativas fundamentadas na probabilidade de ocorrência de falhas por colapso plástico, levando-se em consideração critérios, tais como, o Estado de Limite Último (ELU) e o Estado Limite de Serviço/Utilização (ELS) (ABNT NBR 7190:1997 - item 4; ABNT NBR 8800:2008 – item 4; ABNT NBR 6118:2014 - item 10).

No entanto, com o advento da Mecânica da Fratura e seu notável progresso, decorrente de sua colaboração com a Mecânica Computacional, tornou-se perceptível a carência destas normas frente às falhas estruturais concebidas em materiais frágeis, ainda alocados sob tensões inferiores à tensão limite de projeto. Em geral, essas falhas manifestam-se no elemento por meio da ocorrência de falha por fratura frágil, tratada futuramente neste trabalho (BREBBIA, 1978 *apud* GOMES *et al*, 2016-a; RODRIGUES, 2018).

De todo modo, o termo falha conceitua-se como toda e qualquer interferência em um componente estrutural que o impeça de resistir ou transferir às cargas ou esforços previstos em projeto, ou ainda, que impeçam sua utilização segura ou que o incapacite de exercer a totalidade de suas respectivas funções, expondo-o, por fim, à elevada possibilidade de fratura abrupta, resultante de características intrínsecas ao material (MEDINA, 2009; RODRIGUES, 2018).

Cabe ainda ressaltar que a fratura é tida como um estágio final do processo de trincamento, decorrendo na separação final do elemento, geralmente, de forma abrupta, em duas partes (BROEK, 1984; BROEK, 1988; MIRANDA, 2003). De acordo com Broek (1984) e Medina (2014), a fratura em um dado material ocorre em formato Fratura Dúctil ou Fratura Frágil. Basicamente, a Fratura Dúctil é caracterizada em três estágios, sendo eles a Nucleação, o Crescimento e a Coalescência dos Vazios. Por sua vez, a Fratura Frágil é caracterizada por dois mecanismos, sendo eles a Fratura por Clivagem e a Fratura Intergranular.

Caracterizada pela ágil propagação de trincas e pelo possível colapso abrupto do elemento, o mecanismo de falha por fratura frágil tem ganho cada vez mais notoriedade perante seu acentuado número de recorrência em elementos estruturais, normativamente, bem dimensionados, o que expressa claramente um alto risco ao usuário final. Ainda cabe ressaltar que esse fato está diretamente relacionado às presentes soluções estruturais que, mais do que nunca, buscam por elementos estruturais perceptivelmente mais esbeltos, tornando-os

estritamente dependentes da adoção de materiais cada vez mais resistentes e confiáveis (GOMES *et al*, 2016-a; DIETER, 1981; CALLISTER e RETHWISCH, 2012).

Neste contexto, é assumida a necessidade de se entender mais adequadamente o comportamento do elemento estrutural em situações de trincamento e desenvolvimento da fratura pela influência direta de atributos intrínsecos ao material. Sendo assim, a Mecânica da Fratura, a qual parte do pressuposto primordial de que todo e qualquer componente, assim como o material que o compõe, possui, inevitavelmente, falhas disseminadas por todo sua extensão, tem sido de extrema importância, se propondo a descrever esse comportamento com a intenção de prever e prevenir o instante em que a estrutura torna-se mais suscetível a tais eventos (KUMAR, 2009; BAZANT e PLANAS, 1998; KUNA, 2013).

Para tal, a Mecânica da Fratura se equipara de dois ramos principais, a Mecânica da Fratura Linear Elástica (MFLE) e a Mecânica da Fratura Não-Linear (elasto-plástica, coesiva, etc.), estabelecendo-se, respectivamente, como a solução para as limitações dos fundamentos convencionais da Resistência dos Materiais diante de descontinuidades em elementos estruturais (ANDERSON, 2005; MEDINA, 2014).

Neste trabalho será adotada a perspectiva fornecida pela MFLE, dado que, de acordo com Kumar (2009), 80% das falhas que ocorrem no mundo atual são falhas por fadiga, ou seja, provenientes de cargas flutuantes, sendo ainda enfatizado por Miranda (2003), que a maior parte dos episódios de trincamentos acontecem sob o domínio da MFLE, até mesmo em casos em que a fratura final esteja sob grande plasticidade.

Resumidamente, o postulado fundamental da MFLE assume os Fatores de Intensidade de Tensão (FIT), K , como singularmente responsáveis pela determinação do comportamento de trincas em elementos estruturais constituídos por materiais elástico-lineares. Em outras palavras, o valor de K crescerá a luz da lei de Hook, em configuração estável, até que se alcance seu limite de Tenacidade à Fratura, K_c , após isso, continuando a dilatar-se, porém, de forma instável (GOMES, 2016-a; GOMES e MIRANDA, 2018; DOWLING, 2013; CARASEK *et al*, 2018).

Geralmente, a obtenção dos valores K é realizada por meio da aplicação de métodos numéricos de domínio, tais como o Método dos Elementos Finitos (MEF), que na maior parte das formulações, requerem um refinamento da malha na ponta da trinca para que os campos de tensões, necessários para a extração dos valores de K , sejam devidamente capturados.

Alternativamente, podem ser utilizados os métodos de contorno, tais como o Método dos Elementos de Contorno Convencional (MEC) e o Método dos Elementos de Contorno Dual (MECD), fundamentados em equações integrais de contorno, comumente, adotando-se em conjunto a técnica da Integral J para extração dos FIT's (OLIVEIRA *et al*, 2019; GOMES *et al*, 2016-a; GOMES e MIRANDA; 2018).

Entretanto, em casos de problemas em que haja a presença de singularidades, o MEF convencional apresenta diversas complicações, destacando-se a necessidade de constante remalhamento e a excessiva pobreza de precisão nas resoluções de problemas em que haja saltos, descontinuidades ou singularidades nos campos de deslocamentos, deformações e tensões. O MEC convencional também não apresenta grandes soluções para estes problemas, requerendo que haja a discretização do domínio em células internas que, embora forneçam resultados atrativamente precisos, elimina a maior vantagem do método que é a discretização somente no contorno (GAO, 2002; GOMES, 2006; TELLES, 1983).

Apresentado por Oliveira *et al* (2019) como o mais vantajoso dentre os métodos mencionados, o Método dos Elementos de Contorno Dual, MECD, adotado neste trabalho, destaca-se dos demais por sua simplificada modelagem da área de fissuração, cálculo direto dos Fatores de Intensidade de Tensão, FIT, menor tempo de processamento e simulação precisa da propagação da trinca. De acordo com Portela *et al* (1993), o MECD ainda resolve os problemas de remalhamento encontrados, tipicamente, em métodos de elementos finitos e de elementos de contorno multirregionais, uma vez que não necessita da geração de novas malhas para solução de problemas de propagação incremental de fissura. Por sua vez, Parvanova e Gospodinov (2007) expressam como principal vantagem do MECD a possibilidade de solução de problemas de propagação de múltiplas trincas em modo misto por uma formulação de região única, evitando a abordagem ineficaz de sub-região.

Ainda neste contexto, surge o programa BEMCRACKER2D, idealizado por Gomes *et. al* (2016-b), que o apresenta como um *software* de análise elastostática bidimensional que fornece soluções para casos mais gerais de análise via MEC convencional e, de mesmo modo, para casos envolvendo trincas em um contexto de MEFL, com ou sem propagação, via MECD. Complementarmente, Delgado Neto (2017) desenvolve a interface gráfica do tipo GUI para o *software* BEM CRACKER2D, denominada BEMLAB2D, responsável pelos processos de pré e pós-processamento.

Deste modo, considerando-se toda esta conjuntura, tem-se que à luz do trabalho de Parvanova

e Gospodinov (2007), que analisou a propagação de múltiplas trincas cisalhantes/críticas em vigas simples ou vigas parede, compostas de concreto simples, este trabalho tem por finalidade propor uma metodologia única que agregue a utilização dos *softwares* BEMCRACKER2D e BEMLAB2D às análises de trincamento de múltiplas trincas críticas destinadas à matérias quase-frágeis, sendo em especial o concreto simples.

Tais objetivos serão alcançados, primeiramente, por meio do estudo, modelagem e análise do caminho de propagação de múltiplas trincas críticas em vigas simples ou vigas parede, compostas por concreto simples, mediante utilização dos *softwares* BEMLAB2D e BEMCRACKER2D. Já num segundo momento, serão esboçados os gráficos de evolução dos FIT's em função do número de incrementos a partir do caminho de propagação obtido via *software* BEMCRACKER2D.

Finalmente, para a validação da metodologia adotada e a viabilização da utilização dos *softwares* para as respectivas abordagens, serão estudados problemas de fratura bastante difundidos na academia, sendo os dois modelos expressos pelo trabalho de Parvanova e Gospodinov (2007) e, posteriormente, outros oito modelos, derivados dos trabalhos de Cordeiro (2015), Mojiri (2010), Oliveira (2013) e Durand (2019), totalizando dez modelos analisados.

1.1 MOTIVAÇÃO

Este trabalho fomenta-se na atual necessidade de implementação de métodos numéricos para a análise de elementos estruturais que estejam sujeitos a situações que propiciem a propagação de trincas e possível fratura frágil (KUMAR, 2009; MEDEIROS, 2012). Como este, Kumar (2009) lista mais nove causas capazes de ocasionar falhas em elementos estruturais, dos quais todos são passíveis de acontecer em estruturas de concreto, partindo desde problemas relacionados à geometria do componente, até problemas intrinsecamente relacionados ao material adotado.

Tais fatos, unidos à tendência arquitetônica atual, de projetar-se estruturas cada vez mais esbeltas e, portanto, menos rígidas, tem requerido cada vez mais resistência aos materiais, porém, de igual modo, aumentado a sensibilidade estrutural quanto à presença de falhas, que de acordo com o princípio fundamental da Mecânica da Fratura, é inerente a todo e qualquer material. Sendo assim, faz-se imprescindível não somente o estudo dos esforços resistentes e solicitantes da estrutura, mas também o estudo do comportamento dos materiais que a compõe

frente a singularidades, tais como, trincas, entalhes, etc (BROEK, 1984; MEDINA, 2014; CALLISTER e RETHWISCH, 2012).

Neste contexto, este trabalho, provido dos conceitos vinculados à Mecânica da Fratura, em especial, a MFLE e MECD, assim como, do trabalhos fornecidos por Parvonova e Gospodinov (2007), busca atestar o *software* BEMCRACKER2D como uma eficaz ferramenta na predição da propagação de múltiplas trincas críticas em elementos, simples ou de vigas parede, compostos por materiais frágeis, tais como o concreto. Deste modo, intenta-se sanar uma grande lacuna presente no Programa de Pós-Graduação em Estruturas e Construção Civil da Universidade de Brasília, PECC-UnB, que é a ausência de *softwares* de predição de propagação de múltiplas trincas críticas em elementos estruturais de concreto simples constituídos por materiais quase-frágeis, em um contexto de MFLE com a abordagem do MECD.

1.2 OBJETIVO GERAL

Este trabalho tem como objetivo principal apresentar uma metodologia para modelagem e análise de propagação de trincas cisalhantes em vigas simples ou vigas parede constituídas de materiais quase-frágeis, tais como o concreto simples, utilizando o *software* BEMCRACKER2D, sua GUI BEMLAB2D.

Os objetivos específicos prospectados caracterizam-se em:

- Identificar as intervenções necessárias na Interface Gráfica BEMLAB2D para a devida compatibilização dos modelos estudados;
- Averiguar a aplicabilidade, tanto da Interface Gráfica do BEMLAB2D quanto do processamento do BEMCRACKER2D, em situações de trincas de cisalhamento/críticas em vigas simples e vigas parede;
- Elaborar e analisar o gráfico de evolução dos FIT's em função do número de incrementos;
- Aplicar a metodologia concebida a modelos de propagação de trincas em elementos de concreto simples;

1.3 ORGANIZAÇÃO DA DISSERTAÇÃO

Este trabalho organiza-se como: No Capítulo 2 serão apresentados os conceitos referentes à Mecânica da Fratura; no Capítulo 3 serão apresentados os conceitos empregues no estudo do concreto simples e dos processos de fratura; no Capítulo 4 serão apresentados o método numérico e os *softwares* adotados; no Capítulo 5 será apresentada a metodologia desenvolvida para a análise de múltiplos trincamentos críticos em elementos de concreto simples; no Capítulo 6 serão apresentados os resultados e as discussões; e, por fim; no Capítulo 7 serão apresentadas as considerações finais, discorrendo sobre a eficácia e o desempenho obtido por meio da metodologia adotada, bem como sugestões para trabalhos futuros correlatos ao tema.

CAPÍTULO 2: MECÂNICA DA FRATURA

De modo normativo, no Brasil, ao se projetar elementos estruturais, sejam eles compostos por aço, concreto ou até mesmo madeira, é necessária a verificação do estado limite último (ELU) e do estado limite de serviço/utilização (ELS), onde o primeiro vincula-se à segurança da estrutura mediante às piores combinações de ações normais, especiais ou excepcionais, que possam atuar durante toda a vida útil da estrutura, e o segundo ao desempenho da estrutura diante de condições normais de utilização (ABNT NBR 7190:1997 - item 4; ABNT NBR 8800:2008 – item 4; ABNT NBR 6118:2014 - item 10).

Ambas as verificações têm por escopo a falha por colapso plástico, supondo que o mesmo não seja atingindo desde que haja a aplicação de fatores de segurança, devidamente especificados em cada norma, os quais buscam majorar as cargas e minorar as resistências com intento de que seja estabelecida uma região de tensões seguras à utilização da estrutura, limitada pela tensão de projeto. Essa região de tensões adicionais, geralmente, é considerada como abrangente dos fenômenos de fratura frágil. Sendo percebida em materiais frágeis, essa região apresenta um aumento gradativo e espontâneo de tensões devido à ausência de escoamento localizado que continua ainda que não haja aumento na magnitude da tensão aplicada. Resultando na formação de trincas em um ou mais pontos de concentração de tensão que propagam-se rapidamente por toda a seção do corpo, conseqüentemente atingindo a falha de forma abrupta (GOMES *et al*, 2016-a; DIETER, 1981; CALLISTER e RETHWISCH, 2012).

Para Brebbia (1978, *apud* GOMES *et al*, 2016-a), é possível haver fratura frágil por tensões abaixo da tensão limite de projeto em componentes estruturais que possuam trincas. Dessa forma, tem-se que a presença de trincas pode afetar a estrutura de tal maneira que o elemento apresente desde debilidades estruturais, até a ruptura inesperada para carregamentos inferiores aos de projeto (RODRIGUES, 2018).

De acordo com Inglis (1913), essa influência destrutiva da trinca é particularmente pronunciada em materiais frágeis (não dúcteis). À exemplo, ele apropria-se do processo de corte do vidro, onde é feito um fino arranhão em sua superfície e esse produz tamanha fraqueza local que a menor aplicação de forças sobre o restante da placa, já é o suficiente para desencadear uma fratura frágil no elemento (INGLIS, 1913).

Ainda neste contexto, cabe ressaltar que apesar dos materiais dúcteis, normalmente,

apresentarem deformação plástica acentuada com elevada absorção de energia antes da falha e, que os materiais frágeis, convencionalmente, possuem pouca ou nenhuma deformação plástica com baixa absorção de energia. Tem-se que as condições às quais o material está submetido podem interferir diretamente em seu comportamento, fazendo-se alternar entre material dúctil ou frágil. Essa variação ocorre, fundamentalmente, em função da temperatura do material, de sua taxa de deformação e/ou do seu estado de tensão, ou seja, o tipo de fratura está intrinsecamente interligado com o mecanismo de propagação da trinca (CALLISTER e RETHWISCH, 2012).

Ciente de que estes fatos, e outros além destes, direcionavam os projetistas a atentarem-se para o comportamento intrínseco do material na presença de trincas, surge a Mecânica da Fratura que, segundo Anderson (2005) e Medina (2014), divide-se em dois ramos principais: a Mecânica da Fratura Linear Elástica (MFLE), a qual resolve as limitações dos conceitos convencionais da resistência dos materiais com a presença de descontinuidades (trincas) em elementos consideravelmente frágeis e que será o enfoque deste trabalho; e a Mecânica da Fratura Não-Linear (MFNL), englobando análises elastoplásticas, coesivas, dinâmicas, etc. Ampliando a aplicação dos critérios da MFLE à materiais dúcteis.

Tanto Medina (2014) quanto Oliveira (2019) apresentam uma ilustração semelhante a Figura 1, a qual expressa o conhecido triângulo da fratura, que traz em seus vértices, caracterizados neste trabalho por círculos, os principais componentes de investigação aplicáveis a uma estrutura diante de uma análise de fratura.

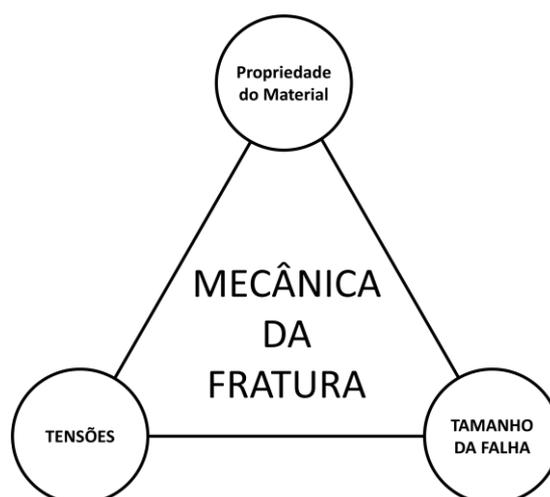


Figura 1 – Triângulo da Mecânica da Fratura (Medina - Adaptado, 2014)

No vértice inferior esquerdo deste triângulo, encontram-se as tensões atuantes no elemento, obtidas mediante a análise estrutural realizada para as solicitações aplicadas à estrutura. Já no

vértice superior, manifestam-se as propriedades do material no ato da falha, sendo adquiridos experimentalmente e, por fim, no vértice inferior direito, são avaliadas as dimensões dos defeitos existentes na estrutura em comparação com as suas dimensões (MEDINA, 2014; RODRIGUES, 2018). Medina (2014) ainda expressa que a aplicação do triângulo da Mecânica da Fratura resulta na possibilidade de se avaliar a tenacidade do material e a força motriz de crescimento da trinca, os quais serão melhor explanados posteriormente, objetivando-se, principalmente, a determinação do(a):

- Tamanho de trinca tolerável para uma carga de serviço almejada;
- Tamanho permitido para uma descontinuidade já existente no começo da vida útil de um elemento estrutural;
- Frequência em que se deve realizar inspeções à estrutura;

2.1 CONCEITOS FUNDAMENTAIS

Atualmente, a Mecânica da Fratura é o ramo da pesquisa responsável por estudar os processos de falha e fratura, com os quais se torna possível determinar a probabilidade de propagação de uma trinca, bem como, seus possíveis efeitos e o comportamento estrutural até o colapso. Sua aplicação é alicerçada no pressuposto de que todo componente, assim como o material que o constitui, inevitavelmente, possui falhas que encontram-se disseminadas por toda a estrutura; e consiste, basicamente, no emprego de critérios baseados em balanços energéticos, podendo ou não haver a assimilação de critérios de plasticidade (KUMAR, 2009; BAZANT e PLANAS, 1998; KUNA, 2013).

Por utilizar critérios de propagação baseados na MFLE para a avaliação do caminho de propagação de trinca em elementos estruturais de concreto simples, neste trabalho torna-se imprescindível a compreensão dos conceitos básicos da MFLE, como visto a seguir (ANDERSON, 2005; MEDINA, 2014).

2.1.1 Falha em Elementos Estruturais

A definição de falha pode ser dada como a presença de qualquer limitante que impeça um dado elemento estrutural de resistir à transferência das cargas ou esforços previstos em projeto, ou seja, a estrutura ou parte dela, falha quando se perde a segurança necessária para sua utilização

ou, ainda que utilizável, apresenta-se incapaz de realizar a função para qual foi engendrada (MEDINA, 2009; RODRIGUES, 2018).

Kumar (2009) delimita as causas mais comuns para falha em elementos estruturais, sendo estas compostas principalmente por fenômenos vinculados ao dimensionamento, fadiga, fluência, dinâmica e estado de conservação impostos ao elemento. Ainda para ele, ações antropológicas, tais como furos, entalhes, trincas, chanfros, assim como defeitos de fabricação, como inclusão de escória, trincas em soldas e tensões residuais, entre outros, propiciam, inevitavelmente, o surgimento de falhas. De igual modo, Anderson (2005) firma que tais causas de falhas podem ser combinadas em duas categorias:

- Negligencia, imprudência ou imperícia no decurso da fase de projeto, na execução ou durante o uso e operação da estrutura; e
- Alterações no design ou material originário da estrutura;

Para ele, a primeira categoria se adequa a situações em que a tecnologia e as metodologias necessárias estão dispostas, mas não são devidamente empregadas por falha humana. Já a segunda categoria, em concordância com o também exposto por Carasek *et al* (2018), englobaria falhas muito mais difíceis de se prever, dado que por melhor que seja o projeto de alteração, sempre haverá, inevitavelmente, aspectos não contemplados pelo projetista. Segundo ele, apesar de não poder ser prevista ou eliminada, a segunda categoria de falhas pode ser reduzida com a sujeição dos novos designs e/ou materiais a serem aplicados após extensos testes e análises.

Por sua vez, Kuna (2013) acrescenta ainda que as falhas na estrutura podem se estabelecer durante sua utilização comum, quando submetida a carregamento de serviço mecânico, térmico ou corrosivo. Consonantemente a todos os fatos supracitados, Rodrigues (2018) descreve a origem do processo de falha como o acúmulo de danos que, conseqüentemente, resulta na iniciação de uma ou mais trincas que, caso não sejam tratadas, propagam-se até a fratura.

2.1.2 Fratura

A fratura é conceituada como a separação final do material em duas partes, normalmente, ocorrendo muito rapidamente, em decorrência da iniciação e do processo de propagação da trinca, aqui denominado fraturamento, assim como da coalescência de vazios (BROEK, 1984; BROEK, 1988; MIRANDA, 2003).

Em geral, fenômenos inelásticos acontecem em uma zona de processos do material situada nas proximidades da trinca. Na fratura elástica, quase toda a região inelástica é englobada pela própria região de falha, ao passo que, na fratura plástica, mesmo que não influencie diretamente na ruptura, formam-se grandes regiões na frente da fissura nas quais o material encontra-se escoando até que o material alocado no plano de fratura esteja pronto para fragmentar-se (BROEK, 1984).

2.1.2.1 Ductilidade

A ductilidade de um material possibilita a sua classificação mediante seu grau de tenacidade, termo utilizado para descrever a resistência intrínseca do material frente ao surgimento de trincas e seus respectivos processos de propagação. Dessa forma, os materiais podem ser classificados, em um contexto mais amplo, como dúcteis e frágeis, onde os materiais dúcteis são aqueles que apresentam alta tenacidade, ou seja, acentuada deformação plástica que ocorre antes da fratura, como visto na Figura 2 (a), e os materiais frágeis, aqueles que apresentam baixa tenacidade, isto é, pouquíssima ou nenhuma deformação plástica ocorre antes da fratura, como na Figura 2 (b) (BROEK, 1984; MEDINA, 2014).

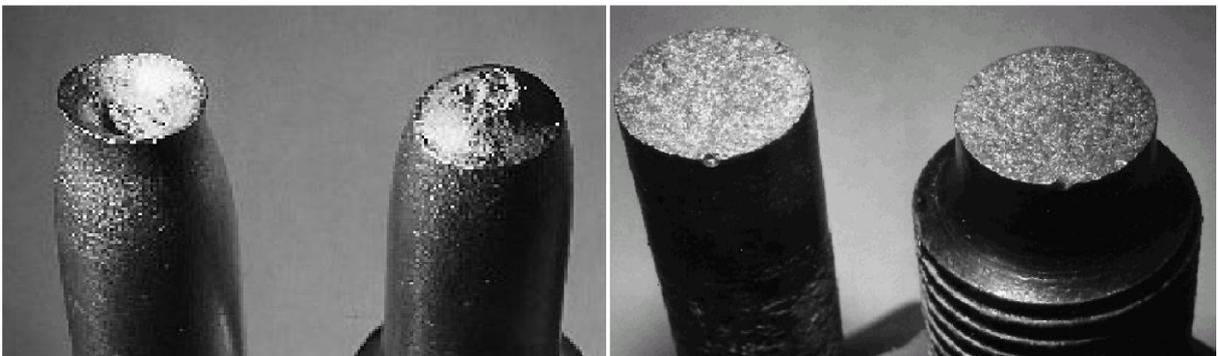


Figura 2 – a) Fratura Dúctil; b) Fratura Frágil (MEDINA, 2014)

Ruggieri *et al* (1996) retratou todo o processo de fissuração dúctil por meio da Figura 3. Nela pode-se ver uma chapa submetida a forças externas que, por meio dos fenômenos já apresentados, vão, progressivamente, fraturando a peça sob a região ativa, representada pela faixa amarela, até que ocorra o colapso do elemento. As demais regiões, não delimitadas pelas regiões ativa e de fratura, experimentam um acréscimo insignificante de vazios, não apresentando nenhum agravamento ao estado atual da peça (Ruggieri *et al*, 1996).

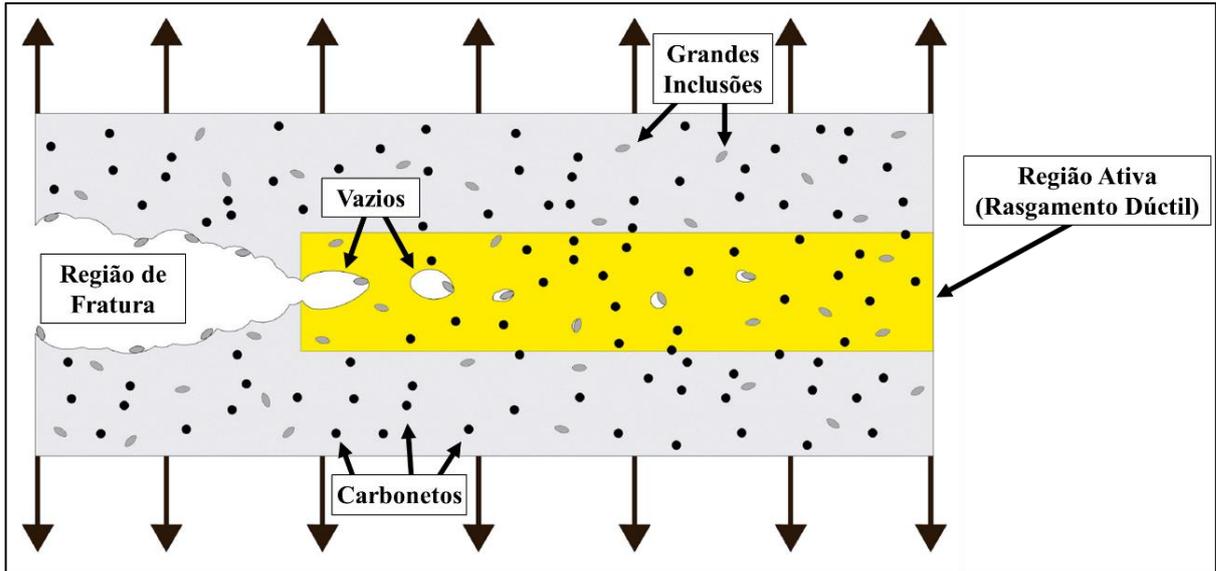


Figura 3 – Zona de Fratura Dúctil (RUGGIERI *et al* - Adaptado, 1996)

Por sua vez, os dois mecanismos de falha por fratura frágil observados mais frequentemente são a Fratura por Clivagem e a Fratura Intergranular. A Fratura por Clivagem possui seu trajeto definido pela região com menor densidade de empacotamento, a qual é expressa pelo caminho com menor número de ligações a serem quebradas, vide Figura 4 (ANDERSON, 2005; MEDINA, 2014; DIETER, 1981; BROEK, 1988).

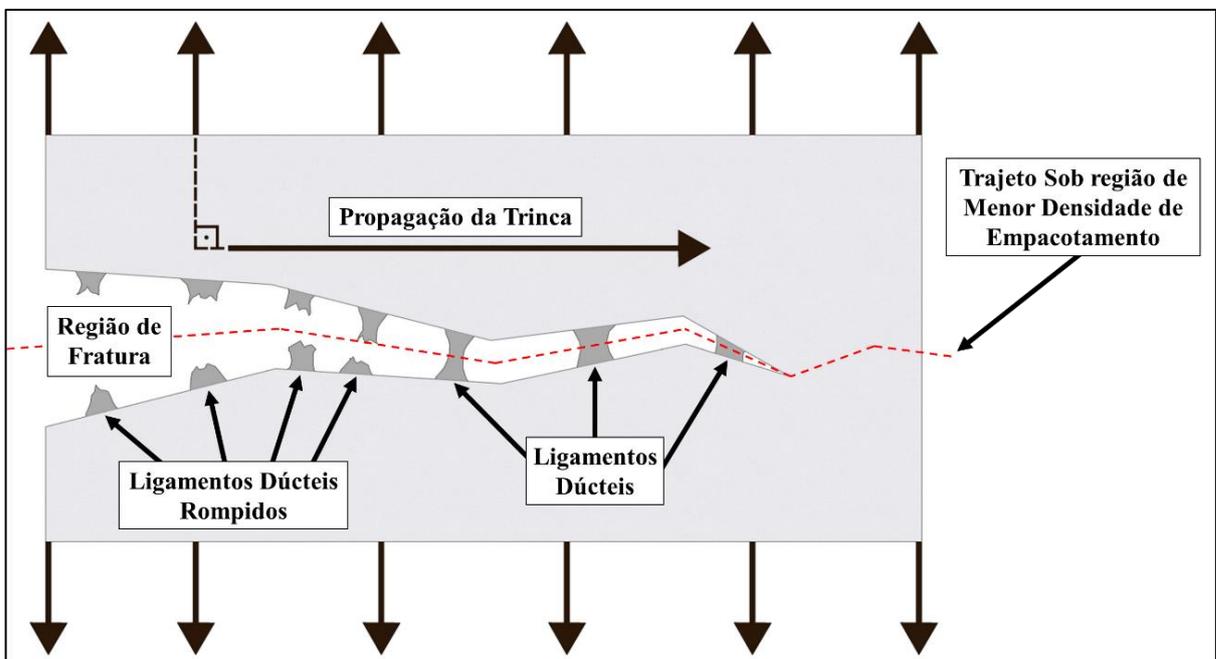


Figura 4 – Fratura por Clivagem (Anderson - Adaptado, 2005)

Já a Fratura Intergranular, manifestando-se quando o caminho preferencial da trinca se encontra ao longo dos limites dos grãos, ou seja, quando a resistência do material presente no contorno

do grão é mais frágil do que àquele em sua composição, assim como pode ser visto na Figura 5 (ANDERSON, 2005; KUMAR, 2009; MEDINA, 2014; MIRANDA, 2003; DIETER, 1981; BROEK, 1988; CALLISTER e RETHWISCH, 2012).

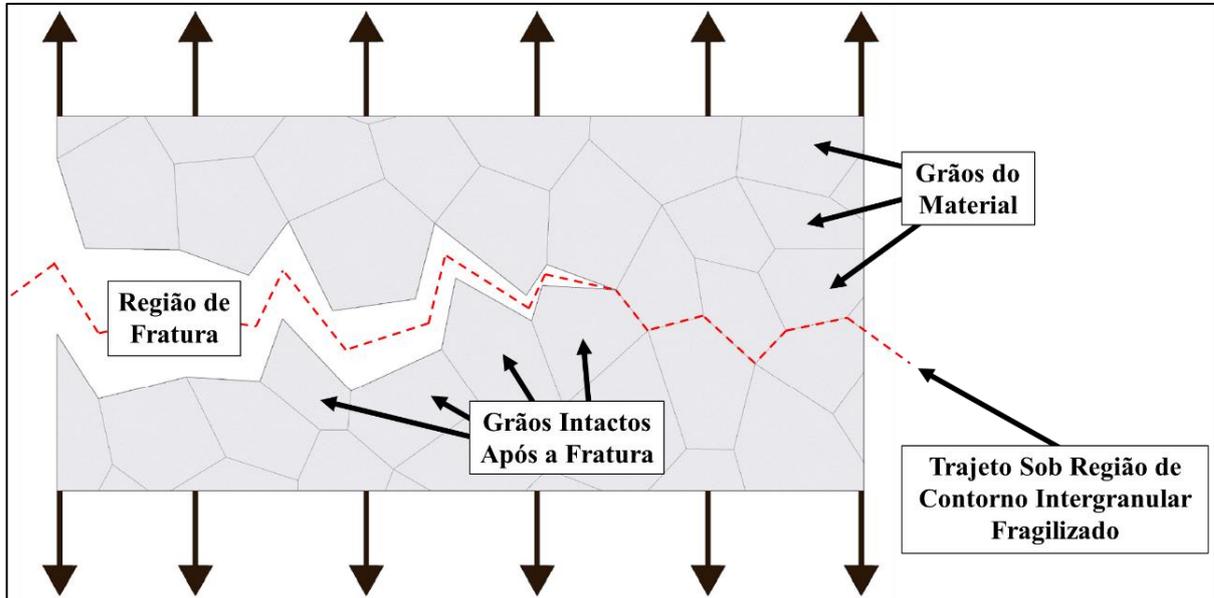


Figura 5 – Fratura Intergranular (Anderson - Adaptado, 2005)

2.1.2.2 Tenacidade à Fratura, K_c

É uma propriedade mecanicamente descritiva da capacidade resistente de um material submetido à presença de trincas ou atuação de algum outro defeito concentrador de tensões, à propagação das trincas e à sua provável fratura. Partindo-se de um dos principais pilares da mecânica da fratura, que é a existência de defeitos inerentes a todos os materiais, como já discutido anteriormente, a tenacidade é um dos principais critérios a serem observados quando cogitada a utilização de algum material em função estrutural (BROEK, 1984; MEDINA, 2014; CALLISTER e RETHWISCH, 2012).

Outro conceito já bastante difundido, remete-se à tenacidade como a capacidade de um material em absorver e dissipar energia ao passo em que deformar-se plasticamente antes e durante o desenvolvimento da fratura (BROEK, 1984; CARASEK *et al*, 2018; CALLISTER e RETHWISCH, 2012). Essa definição resulta na expressão por Wang *et al* (2015), que apresenta a tenacidade como o valor médio das energias consumidas por unidade de volume até a falha, J/m^3 , crescendo proporcionalmente à área sob a curva de tensão-deformação do elemento.

Resumidamente, para que um material seja classificado como tenaz, é necessário que esse

apresente, em conjunto, altas resistência e ductilidade, expressa pelas elevadas deformações nas proximidades da trinca, permitindo, assim, que mesmo materiais frágeis com resistência à tração mais elevada, expressem valores de tenacidade inferiores quando comparados a um material dúctil (DIETER, 1981; CALLISTER e RETHWISCH, 2012). Seus valores variam consideravelmente de material para material, sendo afetados diretamente pela temperatura, taxa de carregamento imposta e espessura da peça, expressando valores tipicamente proporcionais a espessura da peça (DOWLING, 2013).

2.1.3 Trincamento

O processo de propagação da trinca, também conhecida como trincamento, ocorre estável e lentamente, em decorrência de carregamentos normais de serviço que, geralmente se propagam em um trajeto quase retilíneo (BROEK, 1988; MIRANDA, 2003; WILLIAMS, 1957). Cabe destacar que o trincamento é um processo de falha proveniente de regiões do componente com alta concentração de deslocamentos, em que a debilidade na capacidade de endurecimento de trabalho, juntamente com as tensões triaxiais na ponta da trinca, podem ou não resultar em fratura (GOODS e BROWN, 1979). Os critérios necessários para propagação e possível fratura do material serão apresentados em futuros tópicos deste trabalho.

Os principais mecanismos de falha decorrentes do processo de trincamento (BROEK, 1988; MIRANDA, 2003; RODRIGUES, 2018), são:

- Fadiga, devido a carregamentos cíclicos;
- Corrosão sob tensão, devido a carregamentos contínuos;
- Fluência; e
- Trincamento induzindo por hidrogênio ou metal líquido;

2.1.4 Modos de Abertura de Trinca

Para Kunar (2013), em um contexto da Mecânica do Contínuo, a Mecânica da Fratura apresenta o comportamento das trincas por meio de um olhar macroscópico, considerando-as idealmente como separações puramente geométricas de um corpo, com pontas pontiagudas de raio de entalhe $\rho = 0$. Dessa forma, mediante a deformação da trinca e a proeminente movimentação independente das suas faces, uma em relação à outra, os modos de abertura da trinca,

precedentes à ruptura, apresentam-se como explicitado na Figura 6 (BROEK, 1984; KUNAR, 2013; DOWLING, 2013; ANDERSON, 2005; BARSOM e ROLFE; 1999), definem-se como:

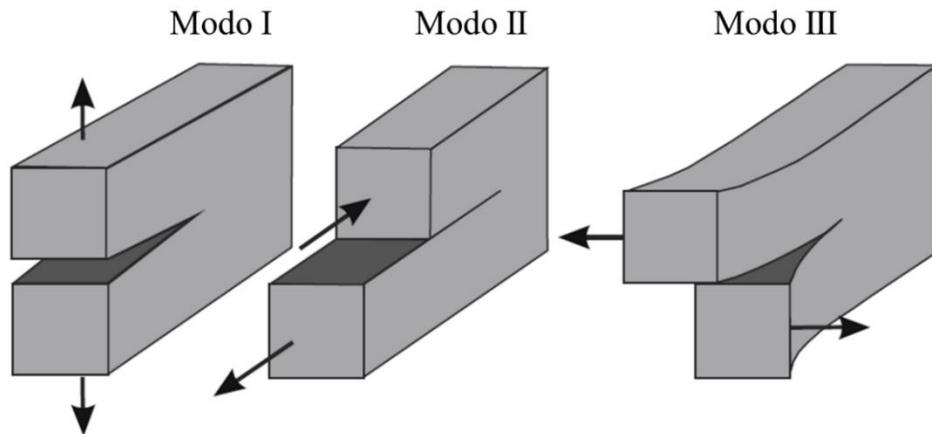


Figura 6 – Definição dos Três Modos de Abertura de Trinca (KUNA, 2013)

- **Modo I – Modo de Abertura:** apresentado por Dowling (2013) como o problema mais recorrente na engenharia, esse modo aparece quando as faces da trinca deslocam-se perpendicularmente ao plano da trinca, resultante da aplicação de carregamentos de tração;
- **Modo II – Modo Deslizante no Plano:** quando as faces da trinca deslocam-se longitudinalmente ao plano da trinca, devido à aplicação de carregamentos de cisalhamento transversal;
- **Modo III – Modo de Ruptura Fora do Plano:** quando as faces da trinca deslocam-se paralelamente ao plano da trinca, resultante da aplicação de carregamentos de cisalhamento longitudinal;

De acordo com Anderson (2005) e Dowling (2013), um corpo trincado pode ser carregado por um destes modos ou por uma combinação de dois ou três deles. Barsom e Rolfe (1999), por sua vez, vão além, enfatizando que o explicitado por Anderson e Dowling também se aplica aos campos de tensões nas proximidades da trinca.

Como complementação, Barsom e Rolfe (1999), ainda afirmam que os deslocamentos do modo I são simétricos em relação aos planos xy e xz , enquanto os deslocamentos do modo II são simétricos ao eixo xy e simétricos inclinados em relação ao plano xz e, por fim, os deslocamentos locais do modo III são simétricos inclinados em relação aos planos xy e xz . Dessa forma, cada um dos modos de abertura de trinca mencionados, possuem associado, especificamente, um campo de tensões na ponta da trinca, os quais serão abordados futuramente.

2.2 MECÂNICA DA FRATURA LINEAR ELÁSTICA – MFLE

Originada por Griffith, em 1920, e destacadamente complementada por Williams e Irwin, em 1957, e também por Rice, em 1968, a Mecânica da Fratura Linear Elástica (MFLE) é a especialidade da Mecânica da Fratura responsável pela análise de materiais frágeis, realizada de forma altamente simplificada, porém potencializada, sanando as limitações dos conceitos tradicionais empregados em resistência dos materiais, no concernente à presença de descontinuidades. A MFLE pode ser aplicada a qualquer material, entretanto, será válida apenas enquanto a deformação estiver restringida a deformações elásticas, ou seja, uma região plástica de dimensões desprezíveis em relação ao comprimento total da trinca ou às dimensões da peça, permitindo que os fenômenos plásticos sejam desprezados (KUMAR, 2009; MEDINA, 2014; ANDERSON, 2005; BAZANT e PLANAS, 1998).

Deste modo, a análise de uma trinca com a abordagem da MFLE tem por finalidade a determinação da possibilidade de ocorrência de sua propagação e, caso propague, de seu caminho de propagação, para isso requisitando ciência sobre os campos de tensão e de deslocamento situados próximos à sua ponta. Isso ocorre por meio do emprego de parâmetros de caracterização, tais como os Fatores de Intensidade de Tensão, FIT, que caracterizam os campos e da taxa de liberação de energia, G , que permite avaliar se a fissura irá se propagar ou não (KUMAR, 2009; MEDINA, 2014; BAZANT e PLANAS, 1998; SERENZA *et al*, 2020).

2.2.1 Fatores de Intensidade de Tensão

De acordo com os conceitos da MFLE, os Fatores de Intensidade de Tensão (FIT) são, particularmente, os responsáveis por determinar o comportamento da trinca. Os Fatores de Intensidade de Tensão, comumente representados por K , permitem ainda a avaliação da situação de integridade de componentes estruturais na presença de trincas. Os FITs podem variar em detrimento das dimensões da trinca, da geométrica da estrutura e do carregamento atuante sobre a peça (GOMES *et al*, 2016-a; DOWLING, 2013).

Por definição, o cálculo do K parte do pressuposto de que o material comporta-se de forma linear-elástica. Dentro desse conceito, o aumento no valor de K persistirá de forma estável até que se alcance o limite crítico, já retratado neste trabalho como Tenacidade à Fratura do Material, K_c . Após esse ponto, o valor de K continua a elevar-se, porém, agora, de forma instável, progredindo mesmo que não haja o acréscimo de carregamentos externos e resultando,

consequentemente, em uma fratura frágil do componente (GOMES e MIRANDA, 2018; DOWLING, 2013; CARASEK et al, 2018).

O parâmetro K geralmente é associado a um modo de abertura de trinca, descrito por subscritos característicos de cada modo, apresentados, para o Modo I, Modo II e Modo III, respectivamente, por K_I , K_{II} e K_{III} (ANDERSON, 2005). Barsom e Rolfe (1999), ainda trazem o parâmetro $K_{eq} = f(K_I, K_{II} e K_{III})$ como o único caracterizador do campo de tensão de um elemento estrutural na presença de uma trinca aguda. Complementarmente, Anderson (2005) declara que, expresso um eixo de coordenadas polares com a origem na ponta da trinca (ver Figura 7), pode-se definir o campo de tensões nas proximidades da ponta da trinca como:

$$\sigma_{ij}^{(I,II,III)} = \left(\frac{k}{\sqrt{r}}\right) f_{ij}(\theta) + \sum_{m=0}^{\infty} A_m r^{\frac{m}{2}} g_{ij}^m(\theta) \quad (2.1)$$

onde $\sigma_{ij}^{(I,II,III)}$ é o tensor de tensões para os respectivos modos I, II ou III; r e θ são definidos como na Figura 7; k é uma constante de proporcionalidade, convenientemente, substituída pela relação: $K = k\sqrt{2\pi}$; f_{ij} é uma função adimensional de θ ; A_m é a amplitude e; $g_{ij}^{(m)}$ é uma função de θ para o m -ésimo termo (ANDERSON, 2005).

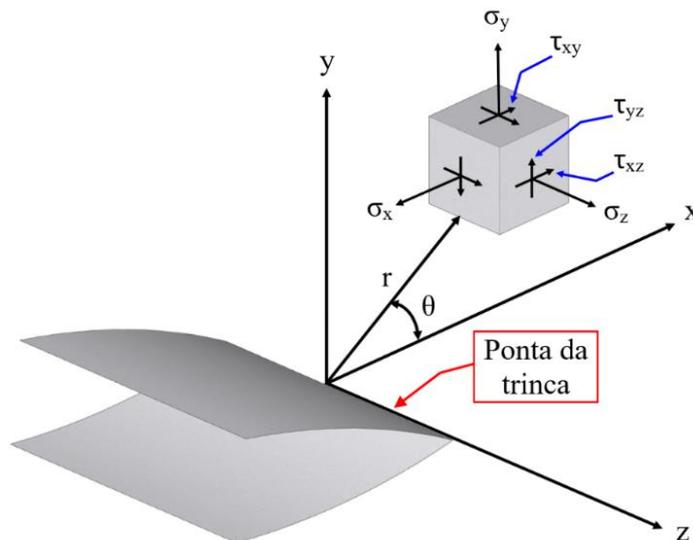


Figura 7 – Sistema de Coordenadas e Componentes de Tensão Antes da Ponta de uma Trinca (BARSOM e ROLFE – Adaptado, 1999)

Com isto, utilizando-se do método atribuído à Westergaard (1939) e Irwin (1957), por Barsom e Rolfe (1999) e além desses, Sneddon (1946) e Williams (1957), por Anderson (2005), tem-se que o campo de tensão da ponta da trinca de um material elástico linear isotrópico, pode ser

obtido por meio das expressões:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \sigma_{ij}^{(I)} = \frac{K_I}{(2\pi r)^{1/2}} f_{ij}^{(I)}(\theta) \quad (2.2)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \sigma_{ij}^{(II)} = \frac{K_{II}}{(2\pi r)^{1/2}} f_{ij}^{(II)}(\theta) \quad (2.3)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \sigma_{ij}^{(III)} = \frac{K_{III}}{(2\pi r)^{1/2}} f_{ij}^{(III)}(\theta) \quad (2.4)$$

Aplicando-se o princípio da superposição linear, obtemos a seguinte expressão:

$$\sigma_{ij}^{(TOTAL)} = \sigma_{ij}^{(I)} + \sigma_{ij}^{(II)} + \sigma_{ij}^{(III)} \quad (2.5)$$

Por fim, é possível obter-se que os campos singulares de tensão e deformação nas adjacências da ponta da trinca para os três modos de abertura de trinca, são dados por:

- Modo I:

$$\sigma_x^{(I)} = \frac{K_I}{(2\pi r)^{1/2}} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right]$$

$$\sigma_y^{(I)} = \frac{K_I}{(2\pi r)^{1/2}} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right]$$

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y)$$

$$\tau_{xy}^{(I)} = \frac{K_I}{(2\pi r)^{1/2}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \quad (2.6)$$

$$\tau_{xz}^{(I)} = \tau_{yz}^{(I)} = 0$$

$$u^{(I)} = \frac{K_I}{\mu} \left[\frac{r}{2\pi} \right]^{1/2} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 - 2\nu + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right]$$

$$v^{(I)} = \frac{K_I}{\mu} \left[\frac{r}{2\pi} \right]^{1/2} \sin \frac{\theta}{2} \left[1 - 2\nu - \cos^2 \frac{\theta}{2} \right]$$

$$w^{(I)} = 0$$

- Modo II:

$$\sigma_x^{(II)} = -\frac{K_{II}}{(2\pi r)^{1/2}} \sin \frac{\theta}{2} \left[2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right]$$

$$\begin{aligned}
\sigma_y^{(II)} &= \frac{K_{II}}{(2\pi r)^{1/2}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \\
\sigma_z^{(II)} &= \nu(\sigma_x + \sigma_y) \\
\tau_{xy}^{(II)} &= \frac{K_{II}}{(2\pi r)^{1/2}} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] \\
\tau_{xz}^{(II)} &= \tau_{yz}^{(II)} = 0 \\
u^{(II)} &= \frac{K_{II}}{\mu} \left[\frac{r}{2\pi} \right]^{1/2} \sin \frac{\theta}{2} \left[2 - 2\nu + \cos^2 \frac{\theta}{2} \right] \\
v^{(II)} &= \frac{K_I}{\mu} \left[\frac{r}{2\pi} \right]^{1/2} \cos \frac{\theta}{2} \left[-1 + 2\nu + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] \\
w^{(II)} &= 0
\end{aligned} \tag{2.7}$$

- Modo III:

$$\begin{aligned}
\sigma_x^{(III)} &= \sigma_y^{(III)} = \sigma_z^{(III)} = \tau_{xy}^{(III)} = 0 \\
\tau_{xz}^{(III)} &= -\frac{K_{III}}{(2\pi r)^{1/2}} \sin \frac{\theta}{2} \\
\tau_{yz}^{(III)} &= \frac{K_{III}}{(2\pi r)^{1/2}} \cos \frac{\theta}{2} \\
u^{(III)} &= v^{(III)} = 0 \\
w^{(III)} &= \frac{K_{III}}{\mu} \left[2 \frac{r}{\pi} \right]^{1/2} \sin \frac{\theta}{2}
\end{aligned} \tag{2.8}$$

onde ν é o coeficiente de Poisson; μ é o módulo de elasticidade cisalhante; u , v e w são os deslocamentos em x , y e z , respectivamente, e; os demais termos permanecem conforme apresentado anteriormente (BARSOM e ROLFE, 1999). Retomando sobre o parâmetro K , tem-se que a parte singular do campo de tensões e deslocamentos nas proximidades de uma trinca, para qualquer sólido elástico linear, define-se por:

$$K = \sigma_{nom} \sqrt{\pi a} f \left(\frac{a}{W_{pl}} \right) \tag{2.9}$$

onde σ_{nom} é a tensão nominal da seção bruta; a é o comprimento da trinca; W_{pl} é a largura da placa, tido também como comprimento da fenda possível, e; f é uma função adimensional que

correlaciona a geometria, as configurações de carregamento, a orientação e a forma da trinca (BROEK, 1984; DOWLING, 2013; RODRIGUES, 2018).

A estimativa dos valores dos FIT's pode ser realizada tanto por meio de técnicas analíticas, quanto por meio de técnicas numéricas. Com isso, os métodos se distinguem por sua complexibilidade, sendo os métodos analíticos os mais intrincados, porém, capazes de apresentar soluções para trincas de diversos comprimentos. Em contra partida, as técnicas numéricas necessitam da determinação do campo de tensão para cada seguimento da trinca, prolongando, deste modo, o processo de obtenção dos resultados (GOMES *et al*, 2016-a).

2.2.2 Integral J

Como discutido anteriormente, a MFLE pode ser aplicada a qualquer material, porém, apenas terá validade enquanto a deformação estiver contida por uma região consideravelmente elástica. Isso significa que a MFLE deixa de ser aplicável caso haja uma região plástica de tamanho expressivo em relação ao comprimento total da trinca ou às dimensões da peça, tornado os fenômenos plásticos novamente relevantes. Tendo em vista essas limitações, surge em 1951 o princípio matemático obtido por Eshelby e que mais tarde permitiria ao Rice, no ano de 1968, definir o conceito matemático da integral J.

Sumariamente, Eshelby (1951) definiu uma integral de contorno para a determinação da distribuição de tensões em uma singularidade alocada sobre um material elástico, independentemente do caminho, dado o uso do teorema de conservação de energia. Esse processo ocorria por meio da descrição da alteração da energia total do sistema, ou seja, por meio de uma função de tensões resultantes das imperfeições provenientes de forças de corpo e/ou de carregamentos externos induzidos (BROEK, 1988; MANESCHY, 1998).

Todavia, como esta definição não abrangia casos de sólidos trincados, àquela apresentada por Rice (1968) mostrou-se mais eficiente, pois com ela tornou-se possível que a teoria da Mecânica da Fratura permanesse válida, mesmo em casos de elasto-plasticidade (MANESCHY, 1998).

Rice (1968) apresentou a integral J como uma integral de linha, cujo resultado se relaciona diretamente com a taxa de liberação de energia potencial, que percorre as extremidades do entalhe por um contorno curvilíneo arbitrário, Γ , no sentido anti-horário. Obtendo-se os mesmos valores para qualquer que seja o caminho escolhido ao redor de uma classe de entalhes, justapostos em um campo de deformação bidimensional de materiais elástico lineares ou não

lineares, assim como na Figura 8.

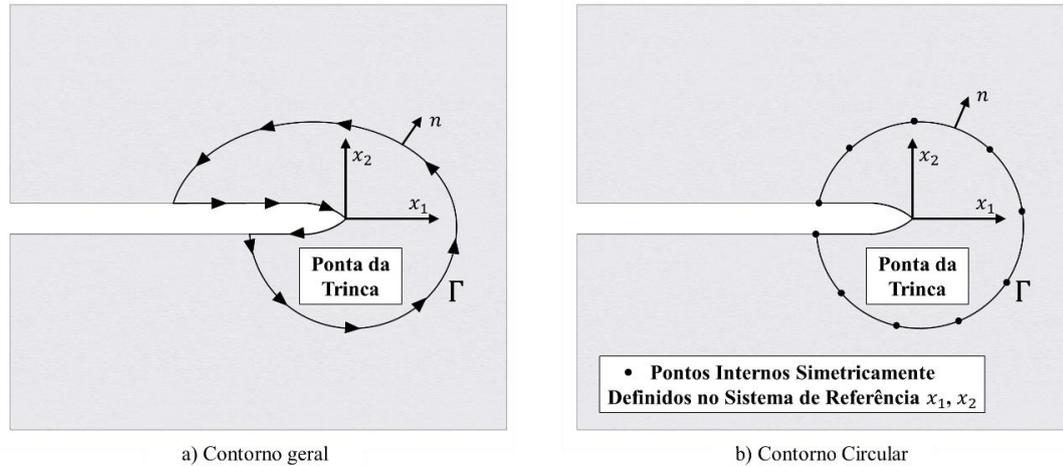


Figura 8 – Sistema de referência de coordenadas e caminho de contorno para J-integral (PORTELA *et al* – Adaptado, 1992)

Capaz de lidar até mesmo com grandes deformações plásticas, Dowling (2013) retrata que a aplicação da integral J requer que o material seja tomado como linear ainda que, mesmo desse modo, a curva tensão-deformação possa não ser linear-elástica, sendo suficiente definir o valor J como uma generalização da taxa de liberação de energia de deformação, G .

Adicionalmente, Portela *et al* (1992) faz menção da eficácia e precisão do emprego da integral J para a obtenção dos fatores de intensidade de tensão com o auxílio dos métodos dos elementos de contorno. Considerando um sistema de referências cartesianas alocado sobre a ponta de uma trinca sem a influência de carregamentos de tração e desconsiderando as tensões do corpo, assim como na Figura 7, Rice definiu a taxa de energia liberada por unidade de translação de trinca na direção x_k , introduzindo a integral J para qualquer caminho como:

$$J_k = \int_{\Gamma} (W n_k - t_j u_{j,k}) d\Gamma \quad (2.10)$$

onde Γ é um contorno arbitrário ao redor da trinca; n_k são os componentes do versor normal ao caminho, na direção k ; t_j são os componentes de força de superfície definidas ao longo do caminho de integração por meio da relação $t_j = \sigma_{ij} n_i$, na qual σ_{ij} é o tensor tensão e n_i são componentes unitários normais e externos ao caminho do contorno; $u_{j,k}$ é a componente do gradiente dos deslocamentos, e; W é a densidade de energia de deformação, definida como $W = 0,5 \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}$, onde ε_{ij} é o tensor de deformação. De acordo com Portela *et al* (1992), tem-se ainda que as relações entre a integral J e o parâmetro K são dadas por:

$$J_1 = \frac{K_I^2 + K_{II}^2}{E'} \quad J_2 = -\frac{2K_I K_{II}}{E'} \quad (2.11)$$

onde E' expressa diferentes equações para condições planas de tensão e deformação, sendo elas, respectivamente, $E' = E$ e $E' = E/(1 - \nu^2)$. Na Figura 9 é apresentado um trajeto formado pelos contornos curvilíneos, Γ_1 e Γ_2 , e pelos contornos lineares que os ligam, Γ_3 e Γ_4 , formando um contorno fechado. Aplicando-se o princípio da superposição sobre os resultados integrais provenientes da implementação da integrais J em cada seguimento do contorno Γ , obtém-se que a soma de toda a energia dos contornos que o compõe será igual a zero (MIRANDA, 2003; ANDERSON, 2005), ou seja:

$$J = J_1 + J_2 + J_3 + J_4 = 0 \quad (2.12)$$

Sabe-se ainda, que na face da trinca o vetor tração $T_i = d_y = 0$ e, desse modo, obtém-se duas relações, $J_1 = -J_2$ e $J_3 = J_4 = 0$. Abreviadamente, Moura (2019) diz que a implementação da integral J tem por objetivo a formação de dois percursos, um mais próximo à trinca e outro, ligeiramente, mais distante, respectivamente representados por Γ_1 e Γ_2 , como já mencionado anteriormente sobre a Figura 9. Sendo Γ_1 , tido como o percurso mais complexo de um caminho fechado e Γ_2 , o menos complexo, ao aplicar sobre eles as relações supracitadas, é possível obter o valor de J_1 por meio dos cálculos utilizados para determinação de J_2 , tornando desnecessária a utilização de cálculos mais sofisticados.

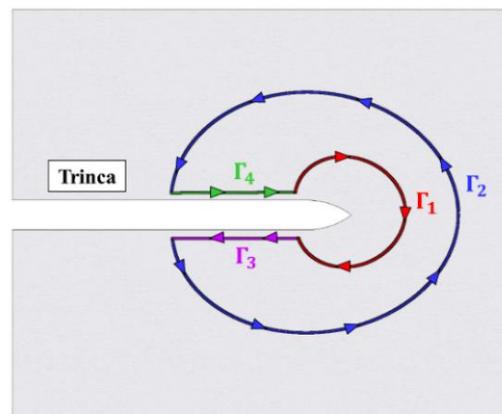


Figura 9 – Contornos arbitrários Γ_1 e Γ_2 ao redor da trinca conectados por Γ_3 e Γ_4 formando um contorno fechado (MIRANDA – Adaptado, 2003)

Outra forma de se representar a Integral J , apresentada na equação 2.12, é fornecida por Portela *et al* (1992) e faz pela decomposição da energia total em parcelas pertencentes à cada modo de abertura de trinca considerado em K , convertendo-se na seguinte expressão:

$$J = J^I + J^{II} \quad (2.13)$$

onde as parcelas são fornecidas por:

$$J^I = \frac{K_I^2}{E'} \quad J^{II} = \frac{K_{II}^2}{E'} \quad (2.14)$$

2.3 CRITÉRIOS PARA DIREÇÃO DE PROPAGAÇÃO NO CAMPO DA MFLE

Os critérios mais comumente utilizados para o cálculo da direção de propagação de trincas dentro do campo da MFLE são os critérios da Máxima Tensão Circunferencial, MTC, da Máxima Taxa de Liberação de Energia Potencial, MTLEP, e da Mínima Densidade da Energia de Deformação, MDED. Tais critérios são imensamente importantes para métodos de abordagem numérica destinada à predição do caminho da propagação da trinca durante episódios de trincamento em elementos estruturais, pois sua adoção possibilita descrever mais assertivamente o trajeto percorrido pelo fenômeno (MIRANDA, 2003). De forma breve, os três critérios podem ser definidos, como:

- MTC, $\sigma_{\theta máx}$ (empregado no *software* BEMCRACKER2D): Esse método assume como direção da propagação da trinca aquela perpendicular à tensão máxima principal, $\sigma_{\theta máx}$, e normal à tensão circunferencial máxima, $\sigma_{r máx}$, definida pela Resistência dos Materiais, como expresso na Figura 10, como a alocada sobre os planos em que a tensão cisalhante, $\tau_{r\theta}$, é nula. Já as tensões na ponta da trinca para os modos I e II são definidas separadamente pela soma das tensões obtidas para cada respectivo modo, obtendo-se expressões resultantes em coordenadas polares (MOURA, 2019; MIRANDA, 2003), dadas por:

$$\sigma_r = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left\{ K_I \left[1 + \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] + \frac{3}{2} K_{II} \sin\theta - 2K_{II} \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \right\} \quad (2.15)$$

$$\sigma_\theta = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[K_I \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \frac{3}{2} K_{II} \sin\theta \right] \quad (2.16)$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) [K_I \sin\theta + K_{II}(3\cos\theta - 1)] \quad (2.17)$$

Tomando-se o plano crítico mencionado, onde $\tau_{r\theta} = 0$, as Equações 2.16 e 2.17, tornam-se:

$$\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\left[K_I \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \frac{3}{2}K_{II} \sin\theta\right] = \sigma_\theta \sqrt{2\pi r} \quad (2.18)$$

$$0 = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\left[K_I \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + K_{II}(3\cos\theta - 1)\right] \quad (2.19)$$

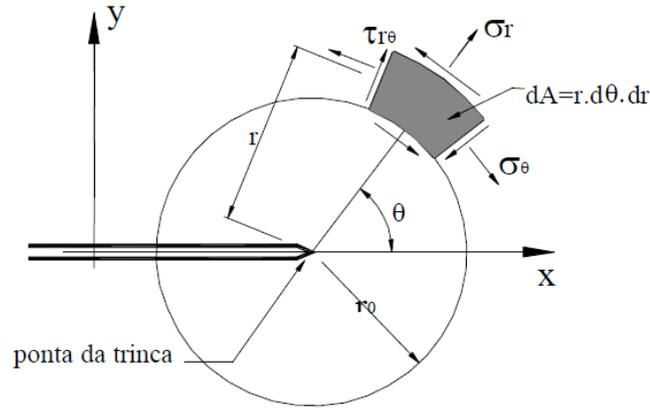


Figura 10 – Tensões na Ponta da Trinca em Coordenadas Polares (MIRANDA, 2003)

As soluções dessas equações fornecem uma solução trivial e uma solução não trivial, das quais serão extraídos os valores de θ (MIRANDA, 2003).

- MTLEP, $\mathcal{G}_{\theta_{\text{máx}}}$: Esse critério alicerça-se sobre a taxa de alívio de energia, \mathcal{G} , responsável pela mensuração da energia potencial liberada durante o processo de fraturamento, podendo ser facilmente relacionada com o FIT, quando a trinca apresentar propagações colineares e estiver alocada sobre um regime elástico linear. Em casos de trincamento em modo misto, o caminho da propagação será àquele que resulte na taxa de liberação de energia máxima, $\mathcal{G}_{\theta_{\text{máx}}}$, obtida através do emprego da equação \mathcal{G} , advinda de uma função de mapeamento com variáveis complexas, com θ definido como a direção angular da ponta da trinca corrente (MIRANDA, 2003). A aplicação dessa técnica resulta na Equação 2.20 e, quando aplicada aos FIT, nas Equações 2.21 e 2.22:

$$\mathcal{G}(\theta) = \frac{4}{E} \left(\frac{1}{3 + \cos^2\theta} \right)^2 \left(\frac{1 - \theta/\pi}{1 + \theta/\pi} \right)^{\theta/2\pi} \left(K_I \cos\theta + \frac{3}{2} K_{II} \sin\theta \right) \quad (2.20)$$

$$K_I(\theta) = \left(\frac{4}{3 + \cos^2\theta} \right) \left(\frac{1 - \theta/\pi}{1 + \theta/\pi} \right)^{\theta/2\pi} \left(K_I \cos\theta + \frac{3}{2} K_{II} \sin\theta \right) \quad (2.21)$$

$$K_{II}(\theta) = \left(\frac{4}{3 + \cos^2\theta} \right) \left(\frac{1 - \theta/\pi}{1 + \theta/\pi} \right)^{\theta/2\pi} \left(K_{II} \cos\theta - \frac{1}{2} K_I \sin\theta \right) \quad (2.22)$$

Essas equações fornecem o instrumentário necessário para relacionar-se \mathcal{G} e os FIT em função de θ , obtendo, por fim, que a taxa de liberação total de energia será:

$$\mathcal{G}(\theta) = \mathcal{G}(\theta)_I + \mathcal{G}(\theta)_{II} \quad (2.23)$$

onde:

$$\mathcal{G}(\theta)_I = \frac{K_I^2(\theta)}{E'} \quad \mathcal{G}(\theta)_{II} = \frac{K_{II}^2(\theta)}{E'} \quad (2.24)$$

- MDED, $S_{\theta_{\min}}$: Por final, nesse método, a direção do trincamento é sujeita ao valor da densidade de energia de deformação, S , justaposto às margens da trinca. As componentes de deslocamentos na direção radial e circunferencial são obtidas através das respectivas equações (ANDERSON, 2005 *apud* MIRANDA, 2003):

$$u_r = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{r}{2\mu}} \{K_I[(2k-1)\cos(\theta/2) - \cos(3\theta/2)] - K_{II}[(2k-1)\sin(\theta/2) - 3\sin(3\theta/2)]\} \quad (2.25)$$

$$v_\theta = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{r}{2\mu}} \{K_I[-(2k-1)\sin(\theta/2) - \sin(3\theta/2)] - K_{II}[(2k-1)\cos(\theta/2) - 3\cos(3\theta/2)]\} \quad (2.26)$$

onde a energia de deformação do elemento infinitesimal de área $dA = r d\theta dr$ é fornecida por meio de uma equação de dW , resultando na seguinte expressão:

$$\frac{dW}{dA} = \frac{1}{r} (a_{11}K_I^2 + 2a_{12}K_I K_{II} + a_{22}K_{II}^2) \quad (2.27)$$

Com funções específicas para o cálculo dos coeficientes a_{11} , a_{12} e a_{22} , a Equação 2.28 fornece, entre parênteses, a equação do conceito de S , caracterizado pela Equação 2.29. Portanto, tem-se que a trinca apenas se propagará em situações em que $S(\theta)$ for igual ou superior a um valor crítico, S_{cr} , e que se dará na direção de mínima densidade de energia de deformação.

$$S(\theta) = a_{11}K_I^2 + 2a_{12}K_I K_{II} + a_{22}K_{II}^2 \quad (2.28)$$

CAPÍTULO 3: CONCRETO E PROCESSOS DE FRATURA

Evidenciado pela conformação arbitrária de seus constituintes granulares e tipificado como um material frágil, compósito anisotrópico sujeito a fenômenos singulares, tais como, o *size effect*, o concreto, com microestrutura ilustrada na Figura 11, pode ser macroscopicamente tomado como material derivado da aglutinação entre pasta cimentícia (com ou sem adições ou aditivos), agregados e uma zona de interface medial, também conhecida com o zona de transição, constituída por um material já fragilizado antes da atuação mecânica em virtude da presença de inúmeras microfalhas decorrentes, principalmente, do alto acúmulo de água na região (WILLIAMS, 1957; ROTS e BLAAUWENDRAAD, 1989; MEHTA e MONTEIRO, 2008).

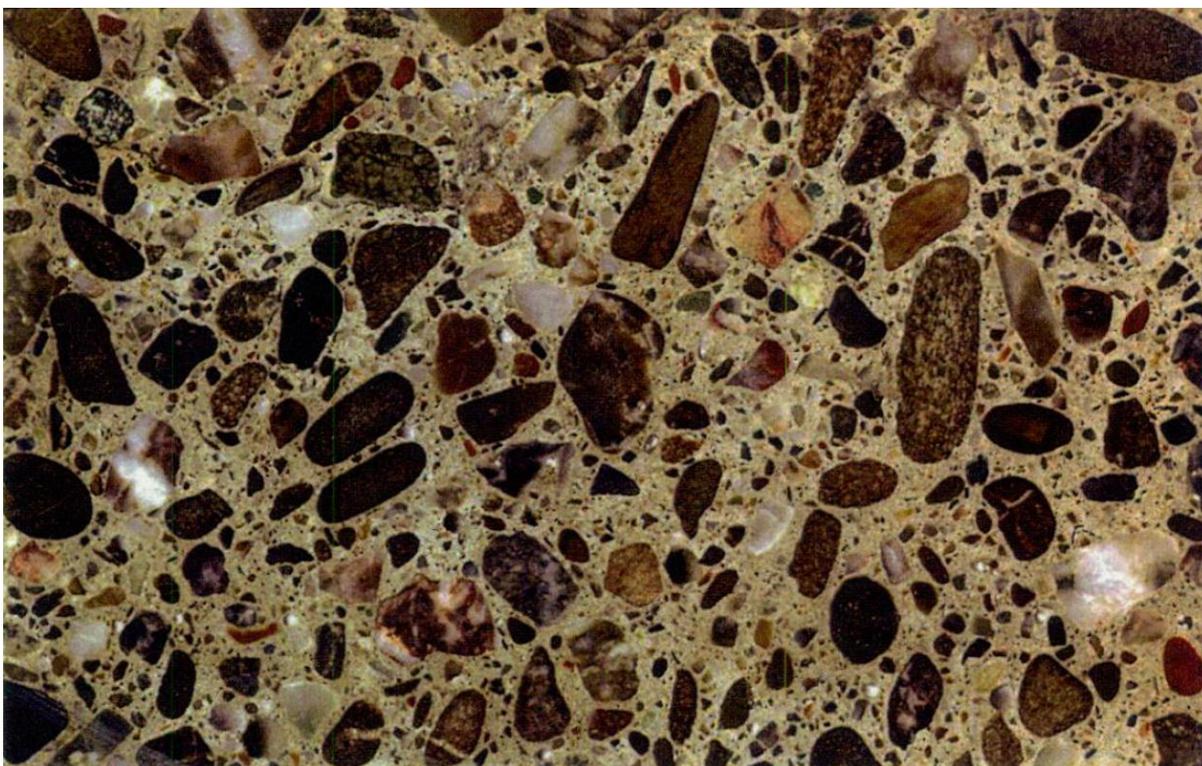


Figura 11 - Seção polida de um corpo de prova de concreto - fotografia cedida por Fordon Vrdoljak (MEHTA e MONTEIRO, 2008)

Mehta e Monteiro (2008) classificam este acúmulo de água presente no material em quatro diferentes possibilidades que dependem unicamente da dificuldade ou facilidade em que esta pode ser retirada da pasta cimentícia. A primeira possibilidade seria a água capilar, cuja a remoção poderia resultar em retração do sistema; a segunda, a água absorvida, em que sua perda é a principal responsável pela retração da pasta de cimento hidratada; a terceira, a água interlamelar, em que sua redução ocasiona consideráveis eventos de retração na estrutura do

silicato de cálcio hidratado (C-S-H), e; a quarta, a água quimicamente combinada, que integra a parte da microestrutura de diversos produtos de hidratação do cimento e que não pode ser perdida pelo processo de secagem, sendo liberada apenas na decomposição dos hidratos por aquecimento.

Apesar de mais expressivas na zona de transição, tem-se que todo o material apresenta descontinuidades inerentes à qualidade de seus constituintes, implicando diretamente: na facilidade para o surgimento do fenômeno de exsudação, que está diretamente ligado ao tamanho e esbeltez dos agregados graúdos; na porosidade e permeabilidade dos próprios agregados, assim como; no desenvolvimento de fissuras em decorrência de vazios na pasta de cimento hidratada, em decorrência dos processos de retração e secagem na forma de espaço interlamelar, de vazios capilares e/ou de ar incorporado no C-S-H. Existem ainda outros fatores, os quais podem, como já referido, levar o material a fratura antes mesmo de que lhe haja a imposição de solicitações mecânicas (MEHTA e MONTEIRO, 2008; OLIVEIRA, 2013).

Entender as especificidades provenientes do material proporciona compreender como estas influenciam em seu comportamento mecânico, o qual é tido por Rots *et al* (1985) como principalmente interligado aos processos de trincamento e fratura, desencadeados principalmente pela formação de microfissuras. Segundo eles, ao se aplicar tensão sob um corpo de prova de concreto, um número limitado de trincas se desenvolve em um local arbitrário do corpo de prova, mas caso se suceda que em algum destes locais a tensão de tração exceda um determinado limite de resistência, toda a deformação adicional proveniente das microfissuras se situará dentro da chamada zona de processo (ROTS *et al*,1985; LEONEL, 2009; CORDEIRO, 2015).

Ainda é retratado por Rots *et al* (1985) que a região do material interna à zona de fratura manifesta uma diminuição gradual dos valores de tensão e um aumento similar de deformação, como pode ser visto nas Figuras 12, 13 e 14, e ainda que ao aproximar-se do ponto de ruptura, ocorre no material o fenômeno de coalescência sobre suas microfissuras, resultando em uma microfissura contínua. Assim, torna-se evidente a correlação entre a localização das deformações dentro da zona de fratura, tida como a concentração de uma banda estreita de fissurações na região, e o descarregamento do material alocado na região externa a ela, obtendo-se nessa última, uma certa retenção ou até mesmo fechamento das microfissurações (ROTS *et al*,1985; LEONEL, 2009; CORDEIRO, 2015).

3.1 COMPORTAMENTO DO CONCRETO SOB DIFERENTES ESTADOS DE TENSÃO

Dada as necessidades deste trabalho, a sua intencionalidade de se observar as diferentes respostas do material para cada situação a qual é submetido, e os esforços normalmente requisitados para os ensaios de resistência comuns ao material objeto deste trabalho, serão retratados, a seguir, o comportamento do concreto submetido à carregamentos uniaxiais de tração, compressão e normais cíclicos.

3.1.1 Comportamento do Concreto Quando Sujeito à Esforços Axiais de Tração

O concreto, assim como algumas rochas e cerâmicas, quando submetido à esforços uniaxiais de tração é classificado como material frágil, dado que não apresenta módulos de encruamento e amolecimento consideráveis em sua curva carregamento-deformação, apresentando falhas em níveis de tensão muito inferiores quando comparados àqueles obtidos sob compressão. Em suma, quando solicitado à esforços de tração, o concreto apresenta resistência entre 8 e 15% daquela obtida para esforços de compressão. De forma geral, a direção do trincamento característico para fratura de um elemento estrutural de concreto sob regime de tração é perpendicular à tensão aplicada (OLIVEIRA, 2013; SURENDRA, SWARTZ e OUYANG, 1995 *apud* CORDEIRO, 2015).

Retratado por Karihaloo (1994) e Cordeiro (2015), como visto na Figura 12, o concreto apresenta um comportamento à tração subdividido em 4 fases. A primeira, demarcada entre a origem e o ponto A, expressa uma resposta aproximadamente linear. A segunda fase, delimitada entre os pontos A e B, representa a região de encruamento, caracterizada por um ligeiro desvio do comportamento linear próximo a obtenção da resistência à tração do concreto (f_t).

Por sua vez, na terceira fase, situada entre os pontos B e C, o concreto exprime um expressivo aumento em suas deformações, ao passo em que diminui exponencialmente sua capacidade resistente, o que acentua-se quando alcançada a quarta fase, retratada por meio dos pontos C e D. Esse comportamento final do concreto, representado pelas regiões limitadas pelos pontos B, C e D, descrevem o amolecimento sofrido pelo concreto (KARIHALOO, 1995; MEHTA e MONTEIRO, 2008; OLIVEIRA, 2013).

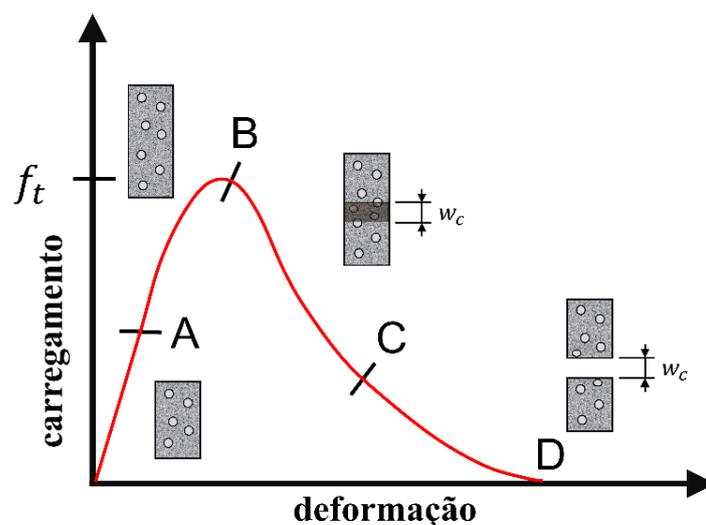


Figura 12 - Resposta típica do concreto sob ensaio de tração direta (KARIHALOO – Adaptado, 1995)

De modo geral, as microfissuras presentes na primeira fase não apresentam nenhum tipo de influência sobre o comportamento global do elemento. Porém, a partir deste ponto, essas falhas começam a expandir-se, de tal forma que na região delimitada pelos pontos B, C e D, o elemento começa a apresentar evoluções nos processos de fratura, como ilustrados na Figura 12 (KARIHALOO, 1995; MEHTA e MONTEIRO, 2008; OLIVEIRA, 2013).

3.1.2 Comportamento do Concreto Quando Sujeito à Esforços Axiais de Compressão

Como referido no item anterior, o concreto apresenta um comportamento resistente diferente quando submetido a tensões de tracionamento ou compressão. Outra diferença percebida é na direção de trincamento característica para cada esforço, onde ocorre perpendicularmente à tensão aplicada, para o esforço de tração axial puro, e paralelamente à tensão aplicada, para o esforço de compressão axial puro (SURENDRA, SWARTZ e OUYANG, 1995 *apud* CORDEIRO, 2015).

A Figura 13 apresentada a curva tensão-deformação do concreto quando submetido à esforços axiais de compressão, onde é percebido um comportamento similar ao retratado anteriormente. Porém, existem algumas disparidades que requisitam um certo cuidado. Para análise sobre esforços axiais de compressão pura, o comportamento do concreto será subdividido em 5 fases. A primeira fase correspondente ao seguimento entre a origem e o ponto A, caracteriza-se por um comportamento linear-elástico que acomoda cerca de 30% da resistência à compressão do material (f_c), sendo resposta a sujeição do elemento a um carregamento de curto prazo que

expressa microfissuras na zona de transição da interface em regime inalterado (MEHTA e MONTEIRO, 2008; OLIVEIRA, 2013; CORDEIRO, 2015).

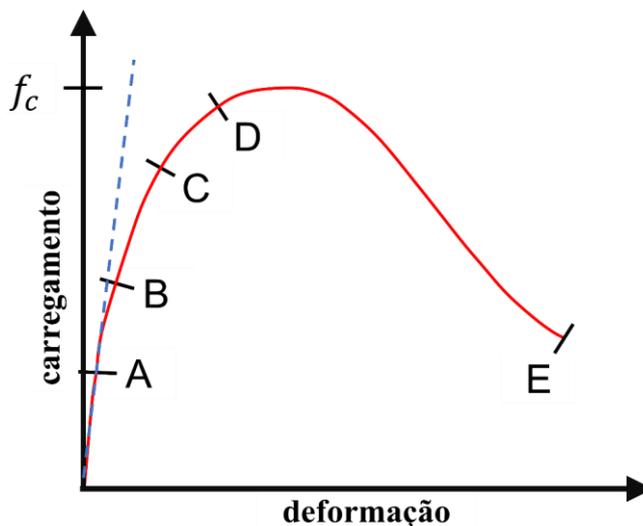


Figura 13 - Curva de tensão na compressão VS deformação axial (MEHTA e MONTEIRO – Adaptado, 2008)

Para a segunda fase, entre os pontos A e B, há um aumento gradual na inclinação da curva, elucidando um breve estiramento das microfissuras na zona de transição, assumindo-se que o material esteja sob um trincamento estável, mas não suficiente para que ocorra fissuração na matriz da argamassa. A partir da terceira fase, delimitada pelos pontos B e C, o comportamento do concreto começa a apresentar instabilidades que tendem a ser cada vez mais ressaltadas à medida que as fissuras da zona de transição voltam a propagar-se (MEHTA e MONTEIRO, 2008; OLIVEIRA, 2013; CORDEIRO, 2015).

A quarta fase, expressa entre os pontos C e D, é caracterizada por um aumento consideravelmente acentuado na inclinação da curva, evidenciando a aceleração abrupta e instável do processo de trincamento do elemento. Essa fase ocorre em níveis de tensão próximos à 75% da f_c , estando, acima deste nível, sob efeitos de propagação instável da fissuração. A tensão corresponde a este limite é representada na curva tensão-deformação do concreto à esforços axiais de compressão, pela letra D, sendo este limite de tensão denominado de *tensão crítica*, correspondendo também à máxima deformação volumétrica. Por fim, a quinta fase, entre os pontos D e E, representa o comportamento do material frente a esse trincamento instável até que se suceda a fratura (MEHTA e MONTEIRO, 2008; OLIVEIRA, 2013; CORDEIRO, 2015).

3.1.3 Comportamento do Concreto Quando Sujeito à Esforços Cíclicos

O concreto comum apresenta um comportamento típico quando submetido a um carregamento uniaxial cíclico. Na Figura 14, é apresentado esse comportamento para o concreto comum sob carregamento uniaxial de compressão cíclico. Nele, temos o comportamento do concreto seccionado em três fases. A primeira fase, demarcada pela origem e o ponto A, para o primeiro ciclo, tem-se que demonstra o comportamento elástico linear do concreto (MEHTA e MONTEIRO, 2008; OLIVEIRA, 2013).

Já na segunda fase, alocada entre os pontos A e B, ocorre uma degradação crescente sobre a rigidez, composta pelo módulo de elasticidade e a resistência à compressão, podendo ser atribuída ao processo de fissuração tanto sobre a zona de transição quanto na matriz aglomerante. Essa degradação, munida do aumento de ciclos de carregamento, resulta na presença de não-linearidade ao longo das curvas de descarregamento que, conjuntamente com a curva de carregamento, formam uma curva característica de histerese (MEHTA e MONTEIRO, 2008; OLIVEIRA, 2013).

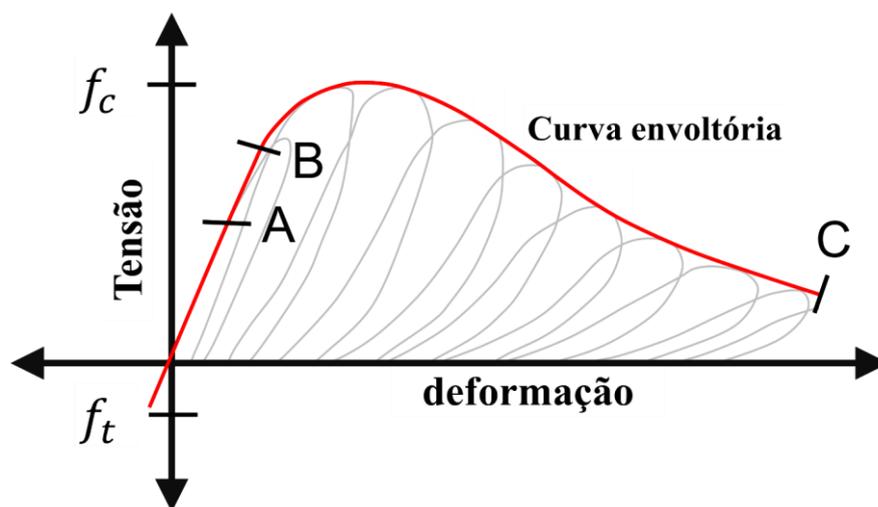


Figura 14 - Resposta do concreto ao carregamento uniaxial cíclico (MEHTA e MONTEIRO – Adaptado, 2008)

Por fim, a terceira fase, entre os pontos B e C, tem-se que nas proximidades do ponto B, ambas as curvas, de carga e de descarga, apresentam forte não-linearidade expressa numa expressiva deterioração da propriedade elástica do material. Inicialmente, a área da curva de histerese diminui sucessivamente com a adição de ciclos, porém, decorre em um breve aumento antes de fraturar por fadiga. Destaca-se ainda, por meio da Figura 14, que a curva tensão-deformação para carregamento monotônico supre satisfatoriamente como uma curva envoltória de valores

máximos de tensões no concreto quando sujeito a carregamentos cíclicos (MEHTA e MONTEIRO, 2008; OLIVEIRA, 2013).

3.2 ZONA DE FRATURAMENTO

Um entendimento já bastante difundido sobre o estudo de propagação de trincas é o surgimento, durante o processo de fratura, de uma zona de processos inelásticos (ZPI) à frente da extremidade da fissura que, inicialmente, possuem proporções e forma desconhecidas. Assim, evocando o já referido sobre o comportamento do concreto, tem-se que o comportamento mecânico do material também influi sobre as características da zona de processo. Denota-se ainda que interno à zona de processos de um dado material, existe uma região de alta concentração de tensões, em proporções em relação à ZPI que variam a depender da ductilidade do material em análise, mas que possui capacidade de alterar sua forma inicial, sendo denominada de zona de processo de fraturamento ou apenas de zona de fraturamento (KARIHALOO, 1995; LEONEL, 2009; OLIVEIRA, 2013; CORDEIRO, 2015).

Em materiais dúcteis, a zona de fraturamento é pequena quando comparada a ZPI, que apresenta grandes dimensões em relação ao comprimento da fissura, sendo determinante na ordenação do processo de fratura, ocorrendo a liberação de energia inicialmente por meio da plastificação devido a tensão de escoamento do material e não do trincamento da região. Já em materiais frágeis, a ZPI apresenta dimensões consideravelmente menores quando justapostas ao comprimento da fissura, estando praticamente ausente nesses materiais (KARIHALOO, 1995; LEONEL, 2009; OLIVEIRA, 2013).

Por sua vez, os materiais quase-frágeis, categoria na qual se enquadra o concreto, objeto deste estudo, apresenta um comportamento intermediário aos dois supracitados. Possuindo uma zona de fraturamento que abrange praticamente toda a ZPI, que expressa grandes dimensões quando comparada àquelas apresentadas pela fissura, e uma resistência coesiva significativamente alta nas partículas frente à extremidade da fissura, o que permite que o concreto manifeste sua liberação de energia inicialmente por meio do trincamento ao invés da plastificação da região (KARIHALOO, 1995; LEONEL, 2009; OLIVEIRA, 2013).

Afirmativamente, Surendra, Swartz e Ouyang (1995), declaram a existência de mecanismos resistentes no material alocado frente à extremidade da trinca que intentam dissipar a energia potencial concentrada nessa região. De acordo com eles, estes mecanismos são mais complexos

em materiais heterogêneos, tais como o concreto, do que em matérias com composição mais singular, como por exemplo, metais. Na Figura 15 são apresentados os principais mecanismos.

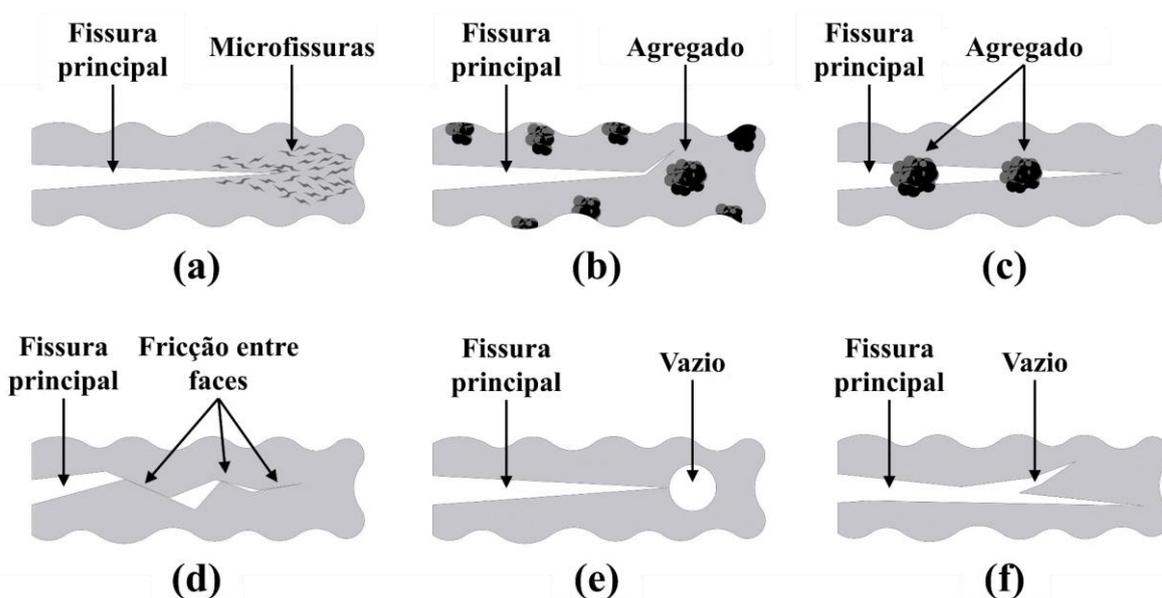


Figura 15 - Mecanismos resistentes na zona de fraturamento em concretos (SURENDRA *et al.*,1995)

Inicialmente, na Figura 15 (a), pode ser vista uma elevada concentração de microfissuras distribuídas randomicamente nas proximidades da ponta da trinca devido as também elevadas tensões na região, dissipando uma parcela significativa da energia externa ocasionada pelo carregamento aplicado. Na Figura 15 (b), é expressa a deflexão imposta sobre a fissura principal devido a presença de agregados rígidos na projeção do percurso da trinca, que a faz buscar pela direção de maior conservação energética. Na Figura 15 (c), é expresso o evento denominado de interconexão de grãos, que de forma sucinta, ocorre quando há a transferência de esforços entre as faces da trinca por meio de um agregado entre elas. Na Figura 15 (d), é apresentado o evento de fricção entre as faces da trinca, governante durante o evento de amolecimento do concreto. Na Figura 15 (e), temos a suavização das tensões na ponta da trinca devido à presença de vazios. E, por fim, na Figura 15 (f), tem-se a representação da ramificação do caminho de propagação da trinca principal (SURENDRA *et al.*,1995 *apud* CORDEIRO, 2015; LEONEL, 2009).

Dessa forma, baseado na conclusão obtida por Hillerborg, Modéer e Petersson (1976), de que o modelo de fratura fictícia apresenta boas aproximações na análise da influência da zona de fraturamento no processo de fratura de elementos de concreto, e nos alicerces conceituais formados até aqui, torna-se possível modelar a fissura em materiais frágeis por meio da utilização do modelo de fissura coesiva, assim como evidenciado na Figura 16. A resistência da ZPI é representada pela tensão coesiva, $\sigma_c(\Delta u)$, que tende ao fechamento da fissura e cujo

módulo está em função do deslocamento da abertura da trinca, Δu (CMOD do termo em inglês), sendo igual à f_t do material ao fim da ZPI e decaindo ao passo em que se aproxima da extremidade da fissura real (HILLERBORG, MODÉER e PETERSSON, 1976; SALEH e ALIABADI, 1998; LEONEL, 2009; COORDEIRO, 2015).

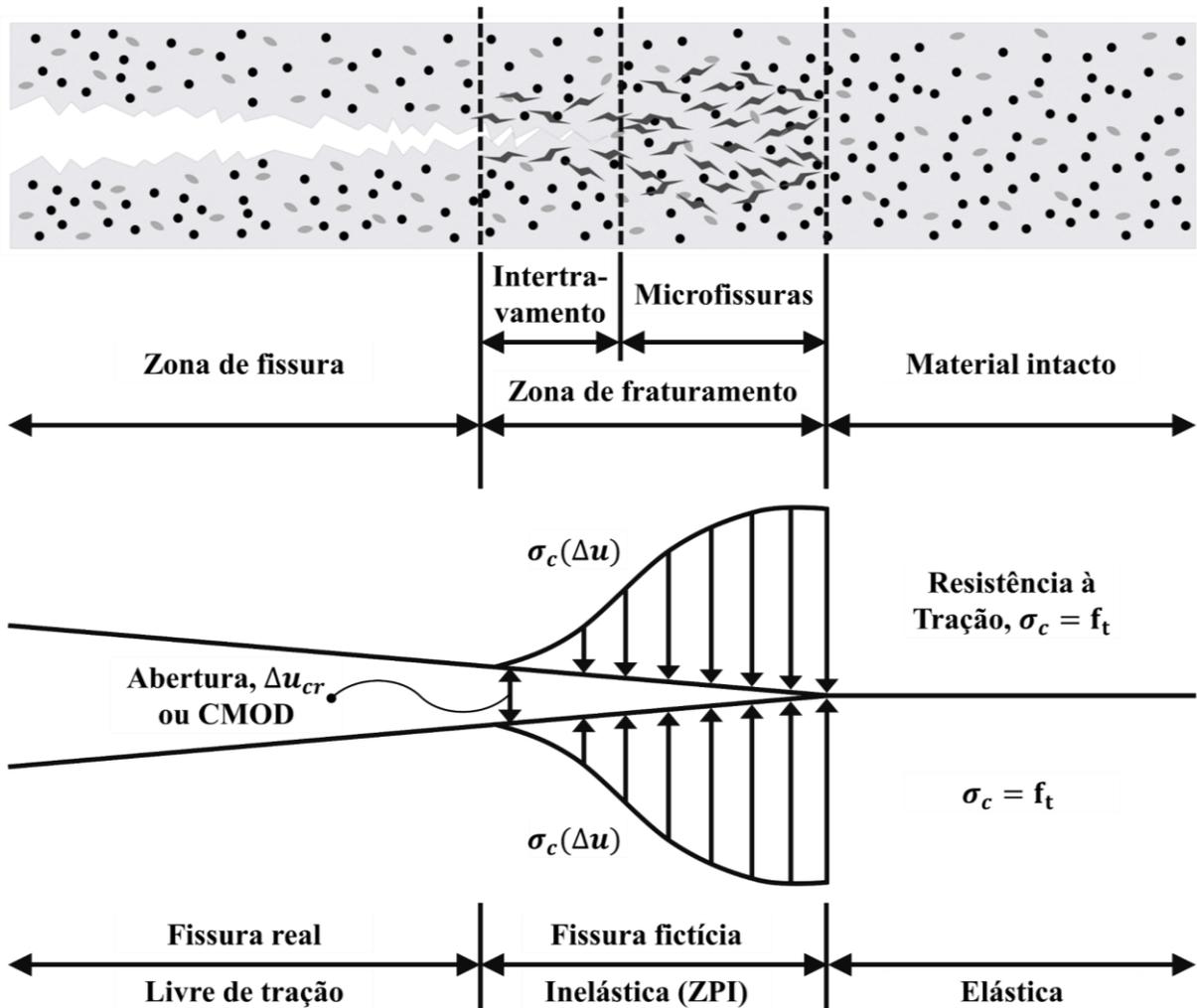


Figura 16 - Modelagem de trincas em concreto usando elementos coesivos após Mahabadi *et al* (2014): **a**) modelo conceitual de uma trinca de tração em concreto plano; **b**) modelo teórico da zona de processo de fratura (FPZ) de Hillerborg *et al* (1976). (DURANT e DA SILVA – Adaptado, 2019)

Empregando-se a concepção ilustrada para a análise de fissuras em materiais quase-frágeis, tem-se que, em decorrência da carga aplicada, a taxa de energia total liberada, G_q , é dissipada tanto por uma parcela consumida durante o processo de fraturamento, na geração de novas superfícies de fissura, nomeada de energia para superação da superfície da fissura, G_{Ic} , quanto por uma parcela necessária para vencer a tensão coesiva, nomeada de energia da zona coesiva, G_σ , e assim propagar a fissura (LEONEL, 2009). Com isso, tem-se que:

$$G_q = G_{Ic} + G_\sigma \quad (3.1)$$

A partir desta equação surgindo duas possibilidades de análise, sendo elas a análise da descrição da propagação de fissuras para materiais quase-frágeis e a análise das aproximações sobre o mecanismo de dissipação de energia e obtenção de diferentes modelos de predição de trincamentos. De posse de seus resultados, torna-se necessário a classificação dos modelos da mecânica da fratura não-linear de matérias quase-frágeis em fissura fictícia ou fissura elástica equivalente (LEONEL, 2009).

Leonel (2009) descreve que o modelo de fratura fictícia assume que a G_{Ic} é consideravelmente pequena quando comparado com a energia necessária para separá-las, deste modo, podendo se admitir que $G_{Ic} = 0$. Já os modelos de fissura elástica, são descritos por ele como passíveis de determinação da zona de processo de materiais quase frágeis por meio do critério de energia de Griffith, onde a fissura é governada por um parâmetro da MFLE e sendo os modelos disponíveis destoantes apenas no quesito de comprimento da trinca.

Ambos métodos foram comparados por Planas e Elices (1990), apresentando, segundo eles, a capacidade necessária de representar assertivamente o comportamento de estruturas em dimensões comuns à utilização em laboratório, mas isso, desde que definidos assertivamente as propriedades de fratura do material. Para estruturas de concreto com dimensões significativamente além dessas, eles afirmam que os modelos apresentam valores discrepantes que, dentre as razões mais significantes, pode ser certamente atribuída a sua forma, que geralmente não apresenta consistência suficiente para obtenção do efeito de escala.

3.3 TRINCAS DE FLEXÃO E DE CISALHAMENTO (CRÍTICA)

Como pode ser visto anteriormente, o concreto é um material quase-frágil de resposta não linear dominada por trincamento progressivo que perdura até que se atinja a fratura. Um exemplo desse processo é o de vigas parede, também conceituadas como vigas profundas ou de cisalhamento. Elas podem ser constituídas por concreto simples ou armado, sob configuração biapoiada e estando ou não submetidas a carregamentos iniciais. Ainda assim, é possível que haja o surgimento abrupto de trincas expressivas de tração diagonal justaposta aos apoios que governem o processo de falha do elemento estrutural até sua ruptura, conforme pode ser visto na Figura 17 (a) (PARVANOVA e GOSPODINOV, 2007).

Entretanto, ao se considerar a aplicação de carregamento inicial sobre a viga de cisalhamento, advém a expectativa do surgimento de trincas de flexão que se propaguem no modo I de abertura, como percebido na Figura 17 (b). A análise e a determinação dos K destes dois primeiros casos isolados torna-se relativamente fácil quando submetidos ao modelo de trinca discreta e a MFLE. Contudo, o mesmo não sobrevém em episódios em que há o surgimento de falhas ocasionadas pela combinação da abertura da trinca com grandes esforços de deslizamento e fricção, gerados pelo intertravamento do agregado sobre as faces da trinca, resultando, nesse caso, no desenvolvimento de uma falha em modo misto, associada a uma diagonal, apresentada na Figura 17 (c) e designada como trinca crítica ou de cisalhamento (PARVANOVA e GOSPODINOV, 2007).

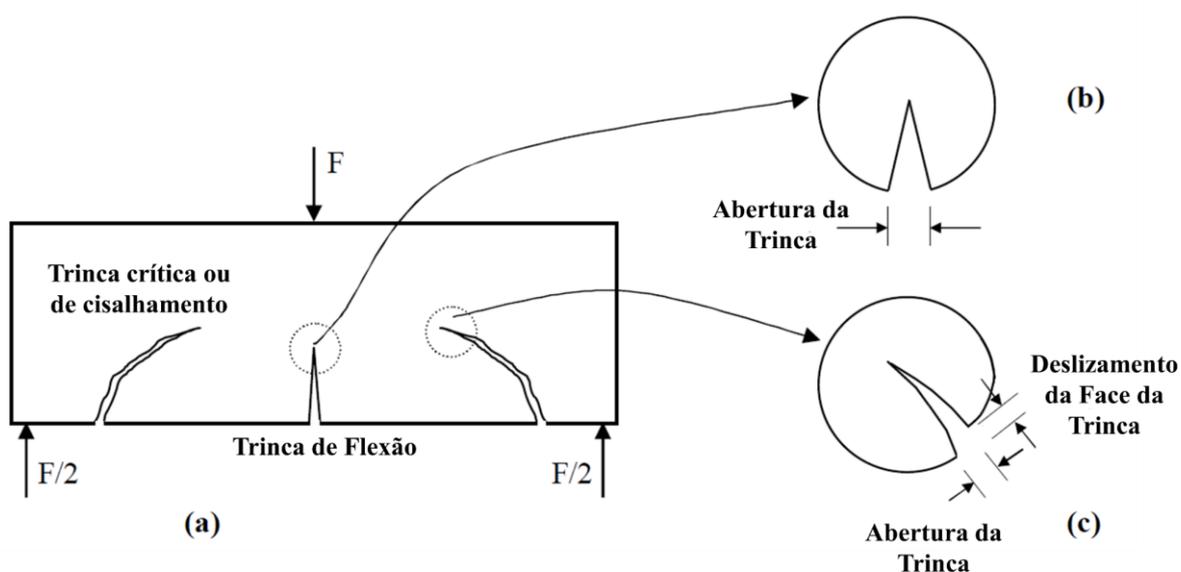


Figura 17 - (a) Viga sob cisalhamento de concreto e desenvolvimento de fissuras; (b) Modo de abertura da fratura devido à trinca de flexão central; (c) Fratura de modo misto devido à propagação de trincas diagonais (PARVANOVA e GOSPODINOV, 2007)

De acordo com Parvanova e Gospodinov (2007), tais problemas requisitam metodologias numéricas confiáveis para que se viabilize o estudo de problemas de propagação de múltiplas trincas durante o processo de carregamento progressivo aplicados ao concreto. Nesse intento, a seguir serão retratados alguns conceitos e metodologias já bastante difundidos e seguramente aceitos na pesquisa de fratura sobre elementos de concreto.

3.4 MODELOS DE FRATURA COESIVA

Como já visto, a MFLE possui esmero na resolução de problemas de fratura em materiais cujo

a ZPI expressem dimensões desprezíveis em relação às dimensões da fissura ou até mesmo do elemento analisado. Porém, essa afirmação não compreende a resolução de problemas de elementos compostos por materiais dúcteis ou quase-frágeis, requisitando adaptações teóricas para que possam ser solucionados (LEONEL, 2009; CORDEIRO, 2015).

Os modelos coesivos surgem em resposta a essa necessidade, apresentando aproximações sobre o comportamento da zona de fratura dos mais diversos materiais. Resumidamente, esses modelos expõem a zona de fratura à tensão coesiva, σ_c , como já explanado a qual tende a fechar a fissura, atuando somente em uma porção da fissura onde ainda hajam mecanismos da zona de fraturamento capazes de transmitir esforços, sendo essa nomeada de zona coesiva (LEONEL, 2009; CORDEIRO, 2015).

Enfim, pode-se determinar a energia de fratura exigida para que se ocorra o processo de amolecimento do concreto submetido à tração. Para isso, torna-se necessária a apropriação do ensaio de tração uniaxial do concreto, o qual apresenta seu gráfico resultante similar ao visto na Figura 12, porém, para essa análise, torna-se necessária apenas a região que descreve o amolecimento do concreto, adotando-se, por tanto, a seção do gráfico retratada através da Figura 18 (LEONEL, 2009; CORDEIRO, 2015).

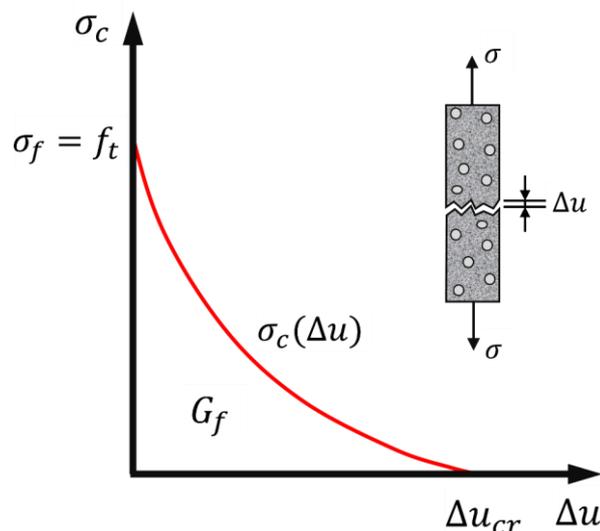


Figura 18 - Curva tensão coesiva σ_c versus descontinuidades de deslocamento da seção fraturada, ou, Δu , para concretos (CORDEIRO – Adaptado, 2015)

Nela são expressas algumas relações importantes, tais como a relação tensão-descontinuidades de deslocamento na zona de amolecimento e a igualdade entre o máximo esforço transmitido por um material íntegro, σ_f , e a f_t , que é um parâmetro material do concreto, obtido por meio

do ensaio realizado. Torna-se ainda perceptível que a curva de amolecimento é demarcada pelo percurso da σ_c em função da Δu , $\sigma_c(\Delta u)$, que em seu valor crítico, Δu_{cr} , não manifesta mais transmissão de esforços entre as faces da fissura, ou seja, tem-se que $\sigma_c(\Delta u_{cr}) = 0$. Por último, a definição da energia necessária à fratura em modo I, G_f , é determinada como o valor da área sob a curva de amolecimento (LEONEL, 2009; CORDEIRO, 2015). Portanto, temos que:

$$G_f = \int_0^{\Delta u_{cr}} \sigma_c(\Delta u) d\Delta u \quad (3.2)$$

onde, assim como a resistência à tração do concreto, f_t , G_f também é um parâmetro material do concreto, devendo ser determinado experimentalmente com ensaios de tração controlada (OLIVEIRA, 2013; CORDEIRO, 2015).

Porém, apesar de ser um parâmetro relacionado ao material, Bazant e Planas (1998) destacam que a energia de fratura pode ser diretamente influenciada pelas dimensões do elemento analisado, já que, matematicamente, possui relação inversamente proporcional à área principal da banda fissurada e diretamente proporcional ao trabalho total de fratura, estando este, também, em detrimento das dimensões do elemento. Por meio disso, os mecanismos resistentes na zona de fratura atuam mais intensamente sobre elementos com pequenas dimensões, que acabam por manifestar maiores resistências à fratura do que aqueles com dimensões mais elevadas.

3.5 MODELO DE FRATURA FICTÍCIA

O modelo de fratura coesiva é tido como uma importante ferramenta para modelagem numérica da zona de fraturamento tanto para matérias dúcteis, quanto para materiais quase-frágeis. De acordo com Leonel (2009), o modelo baseia-se nas seguintes hipóteses:

- 1- O início da zona de fraturamento é demarcado pela equiparação entre a máxima tensão principal na extremidade da ponta da fissura fictícia e a resistência à tração teórica do material;
- 2- O processo de trincamento ocorre perpendicularmente à direção de atuação da máxima tensão principal;
- 3- Mesmo que parcialmente danificada durante o processo de trincamento, a zona de fraturamento ainda possui capacidade de transferir tensões as quais encontram-se em função da abertura entre as faces da trinca;

4- O material fora da zona de fraturamento permanece com propriedades elástico lineares;

É importante ressaltar que a hipótese 2 ocorre quando a tensão na ponta da fissura coesiva supera a resistência à tração do material, porém, caso a abertura da fissura ultrapasse o valor limite, a fissura coesiva torna-se uma fissura física com suas superfícies livres de forças coesivas, como apresentado anteriormente na Figura 16. Dado que não pertencem ao objeto deste estudo, as três leis constitutivas utilizadas na determinação das forças coesivas atuantes na zona de fraturamento são apresentadas no Apêndice A.

CAPÍTULO 4: O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO E O PROGRAMA BEMCRACKER2D

Geralmente, os problemas de engenharia são expressos por leis da física na forma de equações diferenciais e/ou integrais que, por várias vezes, requisitam soluções analíticas de difícil ou impossível resolução. Por esse motivo, torna-se imprescindível o emprego de métodos numéricos, na atualidade, cada vez mais interligados à Mecânica Computacional. Dentre esses métodos, aquele que apresenta a mais geral e efetiva técnica de solução de equações integrais é o método dos Elementos de Contorno (MEC) (ALIABADI, 2002; KZAM e CODA, 2010).

O MEC originou-se no ano de 1960, por meio da aplicação de equações integrais de contorno com a intenção de se alcançar resoluções diferentes daquelas fornecidas pelo Método dos Elementos Finitos, MEF. Inicialmente, ele apresentava soluções numéricas consideravelmente complexas, somente apresentando uma formulação de aplicação direta na engenharia com o trabalho de M. A. Jaswon em 1963. Passados os anos, diversos avanços foram conquistados e em meados de 1980, o MEC tomou destaque com sua eficiência em avaliar os FIT's e analisar trincamentos à luz da MFLE com uma abordagem que apenas utilizava-se da discretização do contorno do problema em elementos (ALIABADI e BREBBIA, 1996; GAO, 2002).

Por outro lado, sendo ainda amplamente utilizado, o MEF também tem evoluído constantemente com o emprego da Mecânica Computacional, na busca por abranger eventos ainda não descritos satisfatoriamente pelo método em sua configuração atual. O MEF é um método numérico de domínio que se provê de aproximações que são realizadas por meio de interpolações locais em cada elemento, garantindo sua continuidade pela conexão entre os nós.

Entre os problemas percebidos no MEF, destacam-se aqueles presentes em análises com grandes deformações e, de mesmo modo, aqueles em análises em que haja a necessidade de se determinar a geométrica do trajeto da trinca paralelamente à evolução do processo de trincamento (DUARTE, 1995; PINHEIRO, 2019; OLIVEIRA *et al*, 2019). Estes fatores ocorrem devido a necessidade de constante reformulação da malha, tornando tanto o estudo, quanto a aplicação do método, bastante custosos computacionalmente. Outra deficiência deste método, se mostra sob situações de saltos, descontinuidades ou singularidades nos campos de deslocamentos, deformações e tensões, possuindo polinômios de propriedades de aproximação fracas e, por conseguinte, expondo que o MEF apresenta, em geral, uma precisão bastante

deficiente para problemas que envolvam tais fenômenos (DUARTE, 1995; PINHEIRO, 2019; OLIVEIRA *et al*, 2019; SERENZA *et al*, 2020).

De acordo com Aliabadi (2002), atualmente, os métodos computacionais, tais como o MEC e o MEF, assim como suas derivações, tornaram-se indispensáveis para projetistas estruturais e, ainda que não possua a mesma aplicabilidade do MEF, o MEC estabeleceu-se eficazmente em diversas áreas importantes da análise de engenharia.

Isto aconteceu, pois, com o emprego do MEC, tornou-se possível a solução de problemas por meio da transformação de equações diferenciais parciais, descritivas do comportamento das incógnitas interna e externamente ao domínio do problema, em uma equação integral, relacionando-se apenas com os valores do seu contorno e, caso requisitados valores em pontos internos, esses seriam obtidos diretamente por meio de dados alocados sobre o contorno (GOMES, 2006; ALIABADI, 2002; KZAM e CODA, 2010).

Para que isto fosse possível, o MEC apoderou-se de instrumentos matemáticos discretos, denotados como elementos de contorno, o que permitiu a discretização de problemas bidimensionais apenas pela linha do limite do domínio e, de problemas tridimensionais, apenas por uma superfície, possibilitando trabalhar com sistemas de equações notadamente menor que aqueles empregados em métodos diferenciais (GOMES, 2006; ALIABADI, 2002; KZAM e CODA, 2010).

Deste modo, quando comparado com métodos de domínio, conforme pode ser contemplado na Figura 19, o MEC fornece reduções formidáveis em seu esforço de modelagem. Apresenta, no entanto, uma matriz de coeficientes totalmente preenchida e assimétrica, com o tempo de solução dado pela potência cúbica dos graus de liberdade totais, crescendo proporcionalmente à complexibilidade do modelo (ALIABADI, 2002; GOMES, 2006).

O MEC possui duas categorias de formulação, sendo a primeira, a categoria de formulação direta, determinada pela aproximação das variáveis reais do problema; e a segunda, a categoria de formulação indireta, determinada por fontes de densidade fictícias aproximadas (SCUCIATO, 2007; GOMES, 2006).

Uma das diversas soluções para os problemas presentes nos dois métodos supracitados, é o Método dos Elementos de Contorno Dual (MECD). Em uma breve comparação entre eles, o MECD apresenta diversas vantagens, como por exemplo, a modelagem simplificada da área de fissuração, o cálculo direto de K , tempos de execução reduzido e simulação precisa do

crescimento da trinca (OLIVEIRA *et al*, 2019). De acordo com Portela *et al* (1993), esse método, por se utilizar apenas de uma região de análise, resolve os problemas de remalhamento encontrados, tipicamente, em métodos de elementos, visto que em uma análise incremental, não necessita da geração de novas malhas. Maiores detalhes podem ser assistidos mais à frente, neste trabalho.

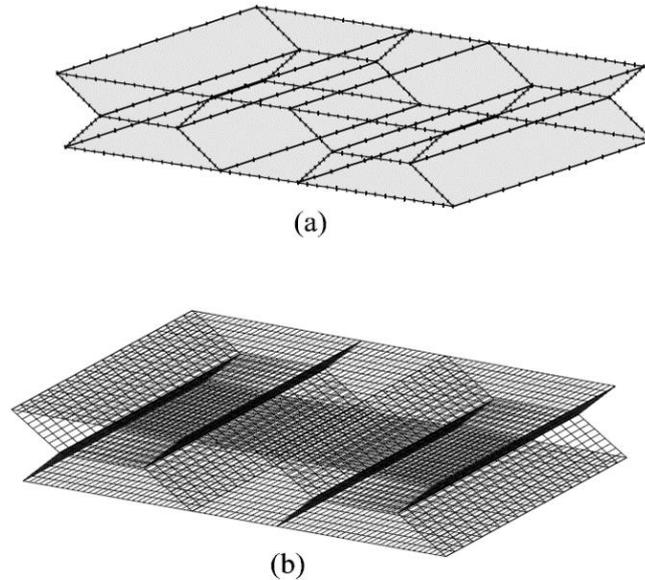


Figura 19 – Malha do MEC e Malha do MEF para Estrutura de uma Aeronave X-Core (ALIABADI, 2002).

4.1 IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO (MEC)

Firmando-se nas perspectivas de Moura (2019) e Gomes (2006), tem-se que a formulação fornecida para um procedimento numérico geral de problemas de contorno, é dada por:

$$c_{ij}(\xi)u_i(\xi) + \int_{\Gamma} p_{ij}^*(\xi, x) u_j(x) d\Gamma(x) = \int_{\Gamma} u_{ij}^*(\xi, x) p_j(x) d\Gamma(x) \quad (4.1)$$

Aplicada sobre o contorno Γ , para que a Equação 4.1 seja solucionada, adotam-se funções de interpolação capazes de seccioná-la em elementos de deslocamentos e trações aproximadas. Considerando n o número de nós do contorno do elemento, tem-se que as funções de interpolação são fornecidas como:

$$u = \Phi^T u^n \quad p = \Phi^T p^n \quad (4.2)$$

Substituindo um número N de elementos de contorno para a discretização geométrica e de

campos no contorno, a equação integral 4.1 resulta em:

$$c^i u^i = \sum_{j=1}^N \left(\int_{\Gamma_j} u^* \phi^T d\Gamma \right) p^n - \left(\int_{\Gamma_j} p^* \phi^T d\Gamma \right) u^n \quad (4.3)$$

onde Γ_j é a superfície do elemento j e ϕ é a função de interpolação dos N elementos de contorno. Assume-se para situações bidimensionais ($i = 1, 2$ e $j = 1, 2$), que as submatrizes 2×2 , h_{ij}^k e g_{ij}^k , onde o índice k varia de acordo com o número de nós no elemento. Assumindo $k = 1, 2$:

$$\begin{aligned} h_{ij}^1 &= \int_{\Gamma_j} \phi_1 p^* d\Gamma & h_{ij}^2 &= \int_{\Gamma_j} \phi_2 p^* d\Gamma \\ g_{ij}^1 &= \int_{\Gamma_j} \phi_1 u^* d\Gamma & g_{ij}^2 &= \int_{\Gamma_j} \phi_2 u^* d\Gamma \end{aligned} \quad (4.4)$$

Substituindo-se as Equações 4.4 na Equação 4.3, obtém-se a seguinte equação matricial:

$$c^i u^i = \sum_{j=1}^N \bar{H}_{ij} u_j = \sum_{j=1}^N \bar{G}_{ij} p_j \quad (4.5)$$

Incorporando o termo c^i na matriz H , a Equação 4.5 se torna:

$$\sum_{j=1}^N H_{ij} u_j = \sum_{j=1}^N G_{ij} p_j \quad (4.6)$$

Pode-se ainda transformar a equação 4.1 para sua forma matricial e generalizar u e p tomando-os como os próprios vetores de deslocamentos e trações. São ainda, u_{ij}^* e p_{ij}^* , considerados como suas respectivas matrizes na direção j , devido a uma força unitária no ponto adotado e atuando na direção i , temos que:

$$cu + \int_{\Gamma} p^* u d\Gamma = \int_{\Gamma} u^* p d\Gamma \quad (4.7)$$

Após a aplicação das condições de contorno, evidenciando-se como:

$$Hu = Gp \quad (4.8)$$

onde H e G são matrizes vinculadas às soluções fundamentais T_{ij} e U_{ij} ou às integrais S_{ijk} e D_{ijk} , expressas a seguir pelas equações 4.10 e 4.11. Deste modo, tem-se que a equação 4.8 é adequada para uma dada carga pontual alocada sobre o contorno ξ_1 e, por conseguinte, tem-se

como conhecidos os valores de u e p , como incógnita os valores de u^* e p^* , pertencentes ao contorno, e a incógnita c pode ser obtida analiticamente.

Abreviadamente, Moura (2019), resume o emprego da técnica do MEC em três passos: realização da discretização do contorno em vários elementos, aplicação da Equação 4.1 na forma discretizada para cada ponto do contorno, findando-se na aplicação das condições de contorno e resolução dos sistemas lineares gerados.

4.2 MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO DUAL (MECD)

O MEC, já retratado neste trabalho, é um método numérico bastante difundido para a resolução de problemas de engenharia, apresentando resultados acertadamente satisfatórios para problemas linear-elásticos de domínio contínuo. Entretanto, na presença de trincas matemáticas, ou seja, trincas perfeitamente sobrepostas, não possuindo área ou volume, mas apresentam um campo de deslocamento descontínuo, quando simétricas, apenas um dos lados da trinca pode ser modelado e somente uma análise de MEC de região única pode ser adotada (PORTELA *et al*, 1992).

Um quadro ainda mais desfavorável é aguardado no momento em que há a necessidade de se realizar análises unirregionais, pois com a coincidência das superfícies da trinca, surge um sistema singular de equações algébricas, o que não permite a aplicação do MEC. Como existem pontos de colocação coincidentes para os dois lados da trinca, as linhas da Matriz do sistema também serão iguais. Tais fatos corroboraram imensamente para iniciação de novos métodos que pudessem solucionar essa inaptidão do MEC convencional, sendo adotado como destaque para este trabalho, o Método dos Elementos de Contorno Dual, MECD (PORTELA *et al*, 1992; OLIVEIRA, 2019).

Elaborado para problemas bidimensionais por Portela, Aliabadi e Rook, em 1992, e estendido à problemas tridimensionais por Mi e Aliabadi, ainda no mesmo ano, o MECD é composto por duas equações integrais distintas aplicadas por colocação para cada uma das faces da trinca, ou seja, enquanto em uma face é aplicada a equação integral de contorno de deslocamento, na outra, aplica-se a equação integral de contorno de forças de superfícies, solucionando, dessa forma, a degeneração percebida no MEC. Outro aspecto interessante é que, com isso, o MECD exclui a necessidade de remalhamento devido à propagação da trinca, visto que, progressivamente, serão geradas apenas novas linhas e novas colunas inseridas à matriz já

existente (PORTELA *et al*, 1992, OLIVEIRA, 2019; ALIABADI e BREBBIA, 1996).

4.2.1 Formulação do Método dos Elementos de Contorno Dual (MECD)

Este tópico será inteiramente direcionado pela metodologia fornecida por Portela *et al* (1992). Como dito anteriormente, o MECD fundamenta-se nas equações integrais de contorno dos deslocamentos, u_i , e das forças de superfície, t_i , onde tem-se que na ausência de forças de corpo, a primeira é fornecida por:

$$u_i(X') + \int_{\Gamma} T_{ij}(X', x) u_j(x) d\Gamma(x) = \int_{\Gamma} U_{ij}(X', x) t_j(x) d\Gamma(x) \quad (4.9)$$

onde i, j e k permanecem como representação das coordenadas cartesianas; $U_{ij}(X', x)$ e $T_{ij}(X', x)$ são as respectivas soluções fundamentais de Kelvin para deslocamento e força de superfície; r é a distância entre os pontos X' e x . Dessa forma, as integrais presentes na Equação 4.9 permanecem regulares somente enquanto $r \neq 0$. Para casos em que a distância entre os pontos tende à zero ($X' \rightarrow x'$), o valor de r também tende à zero ($r \rightarrow 0$), decorrendo em uma singularidade na solução. Assumindo a continuidade dos deslocamentos sobre o ponto x' , para um dado ponto pertencente ao contorno, a Equação 4.9, torna-se:

$$c_{ij}(x') u_j(x') + CPV \int_{\Gamma} T_{ij}(x', x) u_j(x) d\Gamma(x) = \int_{\Gamma} U_{ij}(x', x) t_j(x) d\Gamma(x) \quad (4.10)$$

onde $c_{ij}(x')$ é um coeficiente dado por uma relação do Delta de Kronecker, $\delta_{ij}/2$, para um contorno suave sobre o ponto x' ; e $CPV \int_{\Gamma}$ representa a integral de valor principal de Cauchy. Na ausência de forças de superfície, é possível obter as componentes de tensão, σ_{ij} , por meio da diferenciação da Equação 4.9 e por seguinte aplicação da lei de Hooke:

$$\sigma_{ij}(X') + \int_{\Gamma} S_{ijk}(X', x) u_k(x) d\Gamma(x) = \int_{\Gamma} D_{ijk}(X', x) t_k(x) d\Gamma(x) \quad (4.11)$$

Os termos $S_{ijk}(X', x)$ e $D_{ijk}(X', x)$, obtidos nessa equação, são respectivas combinações lineares das derivadas de $T_{ij}(x', x)$ e $U_{ij}(x', x)$. Seguindo o mesmo raciocínio empregado na Equação 4.9, a Equação 4.11 permanece regular somente enquanto $r \neq 0$, expressando singularidades, agora em $S_{ijk}(X', x)$ e $D_{ijk}(X', x)$, para casos em que a distância entre os pontos tende à zero ($X' \rightarrow x'$) e o valor de r também tende à zero ($r \rightarrow 0$). Dessa vez, assumindo a continuidade da deformação e da tração sobre o ponto x' , para um dado ponto pertencente ao

contorno, a Equação 4.11, converte-se em:

$$\frac{1}{2}\sigma_{ij}(x') + HPV \int_{\Gamma} S_{ijk}(X', x) u_k(x) d\Gamma(x) = CPV \int_{\Gamma} D_{ijK}(X', x) t_K(x) d\Gamma(x) \quad (4.12)$$

Na Equação 4.12, o termo $HPV \int_{\Gamma}$ representa a integral de valor principal de Hadamard. De forma similar ao obtido até este momento, tem-se que as componentes de tensão, são dadas por:

$$\frac{1}{2}t_{ij}(x') + n_{ij}(x') HPV \int_{\Gamma} S_{ijk}(X', x) u_k(x) d\Gamma(x) = n_{ij}(x') \int_{\Gamma} D_{ijK}(X', x) t_K(x) d\Gamma(x) \quad (4.13)$$

Com $n_{ij}(x')$ representando o i -ésimo componente versor normal ao contorno, no ponto x' . Sendo as Equações 4.9 e 4.13, as referidas equações integrais de contorno que constituem o MECD, em uma trinca livres de trações, essas equações simplificam-se e tornam-se, respectivamente, as Equações 4.14 e 4.15, fornecidas abaixo.

$$c_{ij}(x')u_j(x') + CPV \int_{\Gamma_c} T_{ij}(x', x) u_j(x) d\Gamma(x) = 0 \quad (4.14)$$

$$n_i(x') HPV \int_{\Gamma_c} S_{ijk}(X', x) u_k(x) d\Gamma(x) = 0 \quad (4.15)$$

Por fim, Γ_c caracteriza o contorno de uma trinca. Ambas as integrais de valor principal de Cauchy e Hadamard são partes finitas de integrais impróprias.

4.3 SOBRE OS *SOFTWARES*

Esse capítulo tem por finalidade a exposição das metodologias associadas aos softwares empregados para este trabalho, bem como a aplicação dos mesmos para obtenção de resultados preliminares.

4.3.1 *Software* BEMCRACKER2D

Originalmente idealizado por Gomes *et al* (2016-b), no que se refere à modelagem do MEC convencional e complementado em sua estratégia de análise incremental por Aliabadi (2002), o programa BEMCRACKER2D é estruturado por meio da centralização dos processos para uma classe motora do programa, denominada *BemCrk_BEMSYS*, a qual possui a função de elo primordial entres os processos e a interface com o usuário, conforme pode ser visto na Figura

20 (GOMES *et al*, 2016-b).

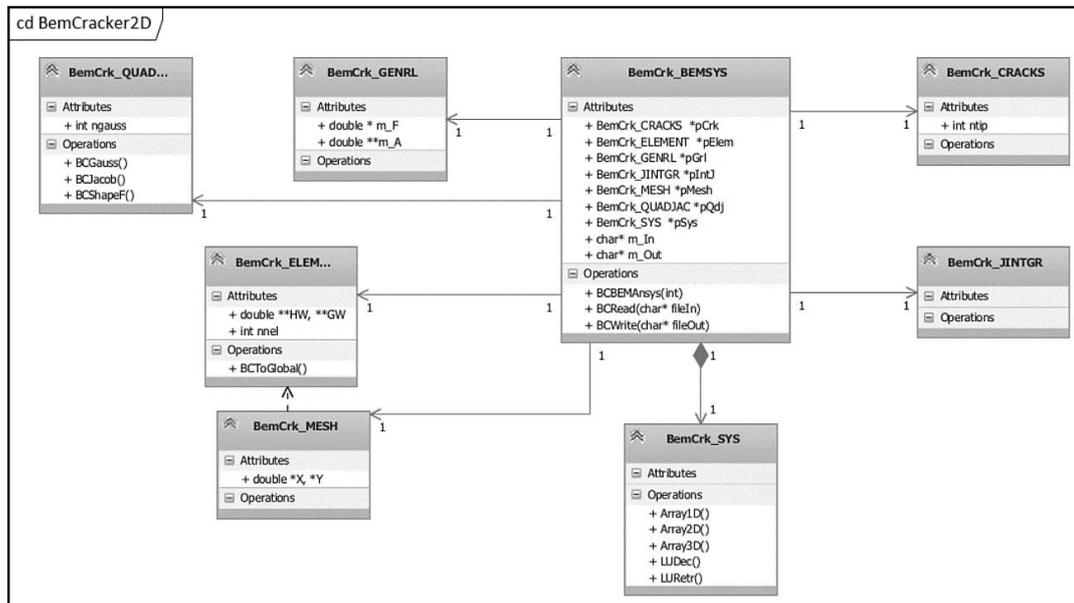


Figura 20 – Diagrama de Classes do Programa BEMCRACKER2D (GOMES *et al*, 2016-b).

O programa foi escrito com a utilização da linguagem de programação C++ e alicerça-se sobre os conceitos de Programação Orientada a Objetos (POO) para a realização de análises fundamentadas no MEC para problemas elastostáticos bidimensionais (GOMES *et al*, 2016-b). Basicamente, o BEMCRACKER2D envolve três módulos de processamento:

- Módulo I: MEC padrão;
 - Módulo II: MECD Sem Propagação;
 - Módulo III: Com Propagação;
- Análise de Tensões com MEC;
 - Avaliação de FIT por intermédio da Integral J;
 - Avaliação da Direção/Correção do crescimento da trinca por meio dos critérios da MTC, da MTLEP e da MDED;
 - Avaliação de coalescência (linkup) de múltiplas trincas;
 - Avaliação de Vida à Fadiga com o emprego da Lei de Paris;

Este trabalho, a exemplo de Gomes *et al* (2016-b), limita-se ao emprego do Módulo III e os seus três primeiros procedimentos. Na Tabela 1 é possível visualizar um breve resumo das finalidades de cada uma das classes, assim como, suas respectivas instâncias/objetos,

relacionados no esquema disposto na Figura 20.

De modo a facilitar a compreensão dos procedimentos realizados na predição de eventos de trincamento pelo BEMCRACKER2D, é explicitado, por meio da Figura 21, um diagrama representativo da sequência lógica adotada pelo *software*.

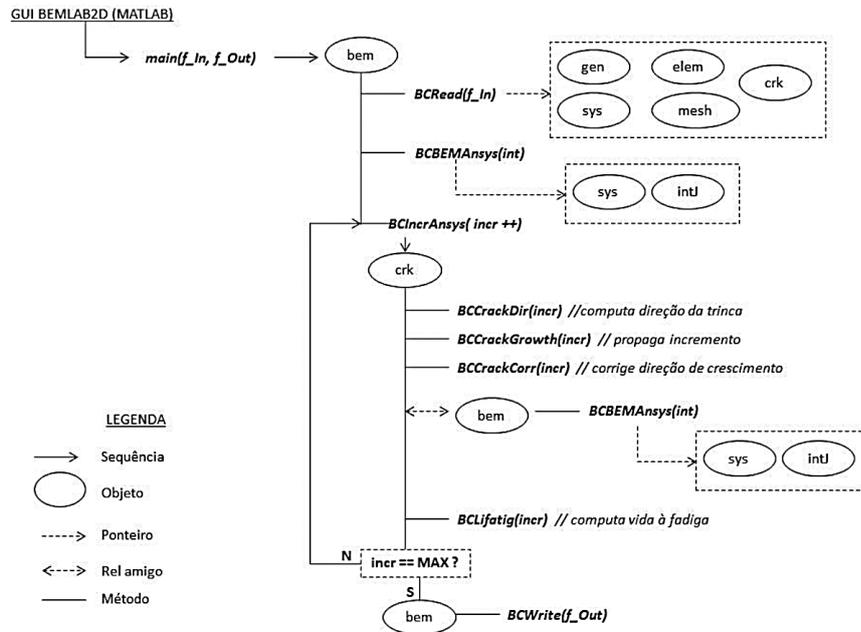


Figura 21 – Diagrama de Sequência do Crescimento da Trinca (GOMES *et al*, 2016-b)

Tabela 1 – Principais Classes, Instâncias e Finalidades (GOMES *et al* – Adaptado, 2016-b)

Nº	Classes	Instância ou Objeto	Finalidade
1	BemCrk_BEMSYS	bem	Leitura, análise, solução e impressão do modelo de trinca
2	BemCrk_GENRL	grl	Produção do sistema $Ax = By = f$
3	BemCrk_ELEMENT	elem	Composição do elemento quadrático contínuo e descontínuo
4	BemCrk_MESH	mesh	Montagem da malha do elemento
5	BemCrk_QUADJAC	quad	Gerar pontos de Gauss, Jacobiano e funções de forma
6	BemCrk_CRACKS	crk	Produção do incremento de propagação de trinca
7	BemCrk_JINTGR	jint	Calcular Fatores de Intensidade de Tensão
8	BemCrk_SYS	sys	Alocação de arrays e Solver LU

4.3.2 Software BEMLAB2D

Responsável pelos pré- e pós-processamentos, o BEMLAB2D é uma interface gráfica do tipo GUI, voltada para a geração e visualização de diferentes tipos de malha bidimensionais, assim

como, para a análise de problemas elastostáticos, por meio de sua ferramenta de implementação computacional, o MATLAB (DELGADO NETO, 2017).

Complementarmente ao BEMCRACKER2D, o BEMLAB2D fundamenta-se em ações definidas por intermédio da interface usuário-*software*, permitindo a atribuição de funções por meio de ferramentas de interação simples, tais como, de botões, mouse e diálogos. Ao executar o BEMLAB2D, será exibida sua área de trabalho, conforme visto na Figura 22.

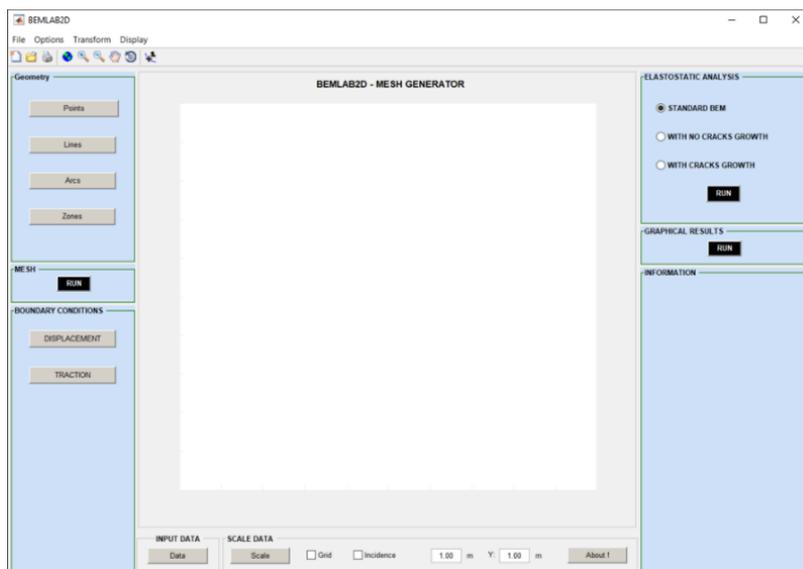


Figura 22 – Interface Gráfica do BEMLab2D – Área de Trabalho

Nesta tela é possível ver seus módulos e suas características, como definidos abaixo, entretanto, vale destacar que o processo expresso na Figura B.1 – Apêndice A, não é contemplado diretamente por nenhum dos módulos destacados, porém, possui a importante função de nomear e ajustar a área de trabalho para a inserção do problema (GOMES *et al*, 2016-b).

Gomes *et al* (2016-b) apresenta os já mencionados módulos presentes no BEMLAB2D, da seguinte forma:

- **Módulo I – GEOMETRY:** É independente dos demais módulos e destina-se à modelagem 2D através das ferramentas de desenho – Subdivididas neste trabalho, para melhor distinção dos processos apresentados pela Figura B.2 e Figura B.3 – Apêndice A, como, Parte 1 – POINTS, LINES e ARCS, e Parte 2 – ZONES;
- **Módulo II – MESH:** Após a definição da geometria pelo Módulo I, gera-se a malha, optativamente, selecionada dentre três opções – BEM (MEC), FEM (MEF) e MESHLESS (SEM MALHA), limitando-se para os dois últimos, apenas à geração, visualização e armazenamento da geometria da malha. Esse processo é melhor descrito

pela Figura B.4 – Apêndice A;

- **Módulo III – BOUNDARY CONDITIONS:** Específico para análise via MEC, sendo responsável por determinar as condições de contorno, conforme representado pela Figura B.5 – Apêndice A, sendo opções: DISPLACEMENTS (DESPLACAMENTOS), TRACTIONS (TRAÇÕES) e UNKNOWN (DESCONHECIDAS);
- **Módulo IV – ELASTOSTATIC ANALYSIS:** Também específico para o MEC, possibilita a execução de três tipos de análises, assim como visto na Figura B.6 – Apêndice A: STANDAR BEM (MEC PADRÃO), WITH NO CRACKS GROWTH (TRINCAS SEM PROPAGAÇÃO) e WITH CRACKS GROWTH (TRINCAS COM PROPAGAÇÃO);
- **Módulo V – GRAPHICAL RESULTS:** Específico para MEC, é responsável pela visualização dos referidos resultados gráficos, sendo expressa a disposição de sua área de trabalho pela Figura B.7 – Apêndice A: MESH DEFORMED (DEFORMADA DA MALHA), MESH STRESSES (MALHA DE TENSÕES), STRESS INTENSITY FACTORS (FATORES DE INTENSIDADE DE TENSÃO), CRACK GROWTH PATH (CAMINHO DE PROPAGAÇÃO DA TRINCA), FATIGUE LIFE (VIDA À FADIGA) e CRACKS SPREADING (TRINCAS PROPAGANDO);

CAPÍTULO 5: METODOLOGIA DESENVOLVIDA

A metodologia utilizada neste trabalho fundamenta-se nos princípios da MFLE e na formulação do MECD já implementados nos *softwares* BEMLAB2D e BEMCRACKER2D, aplicando-se em um importantíssimo pilar na análise de propagação de trincas em elementos de concreto simples, sendo esse relacionado a problemas de propagação de múltiplas trincas críticas ou de cisalhamento em vigas parede de concreto simples em materiais frágeis e quase-frágeis.

Em suma, este ramo possui o objetivo de estabelecer, tanto a interface gráfica do BEMLAB2D, quanto o processamento do BEMCRACKER2D, como ferramentas eficientes e eficazes na predição de múltiplos caminho de trincamento crítico em vigas parede de concreto simples, o que se soma às suas capacidades já atestadas em trabalhos anteriores de predição em elementos estruturais de constituição geométrica e constitutiva mais comumente encontrados. Os quais serão implementados assim como descrito nos procedimentos manifestos na Figura 23.

Metodologia para Análises de Propagação de Múltiplas Trincas Críticas Utilizando-se os *softwares* BEMLAB2D e BEMCRACKER2D

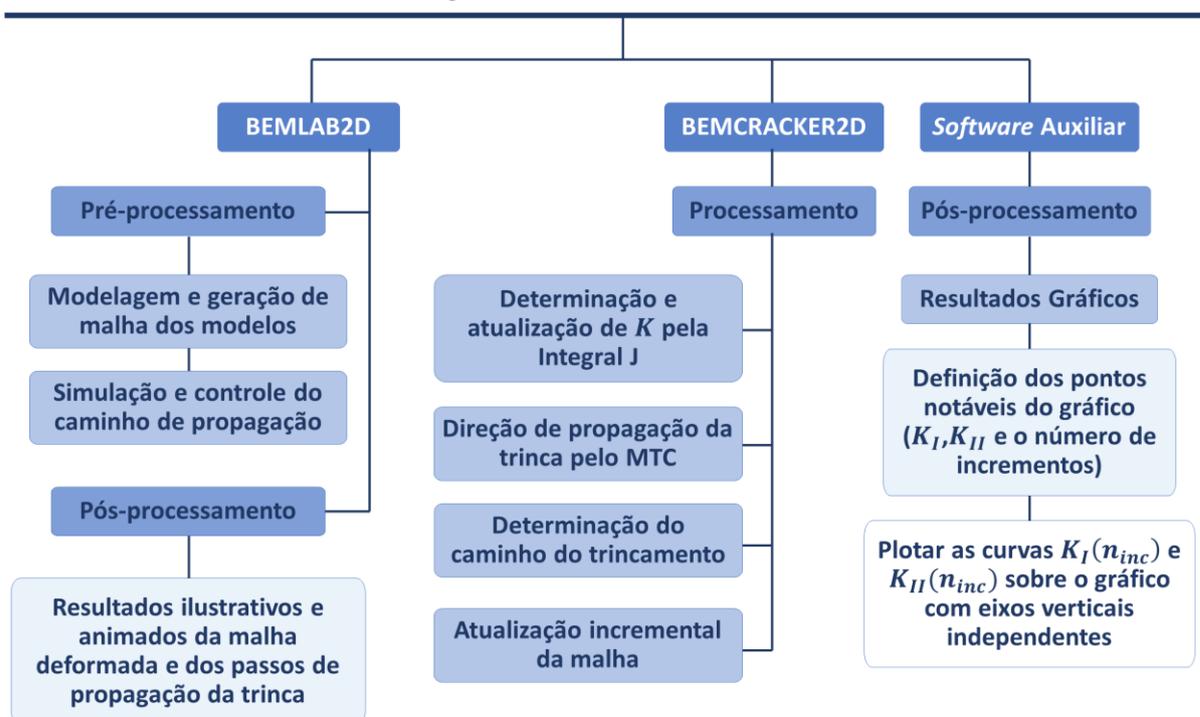


Figura 23 – Metodologia Desenvolvida

Logo, para uma melhor compreensão dos procedimentos metodológicos empregues, fez-se necessária a fragmentação destes em duas etapas principais, respectivamente denotadas como

“Caminho de Trincamento de Múltiplas Trincas Críticas” e “Outros Casos”, cada qual devidamente estabelecido como visto no próximo item.

5.1 CAMINHO DE TRINCAMENTO DE MÚLTIPLAS TRINCAS CRÍTICAS

5.1.1 Escolha do Método

A opção deste trabalho em utilizar-se daquele fornecido por Parvanova e Gospodinov (2007) para análise do caminho de trincamento em múltiplas trincas críticas em elementos de concreto simples se transcorreu da busca por um método que possuísse critérios e metodologias equivalentes ou ao menos aproximados daqueles inicialmente presentes nos *softwares* BEMLAB2D e BEMCRACKER2D. Deste modo, foram tomados como premissa necessária a possibilidade de aplicação do método em elementos de concreto simples, que se enquadrasse à MFLE e ao MECD, todos esses atendidos pelo trabalho de referência, não estendendo-se a metodologia adotada para determinação da zona de processos inelásticos da trinca. Na Tabela 2 são expressas todas as propriedades de trincas e dos materiais utilizadas durante a verificação dos referidos modelos destinados à determinação do caminho do trincamento de múltiplas trincas críticas.

Tabela 2 - Propriedades das Trincas e Materiais Presentes nos Modelos Analisados

PROPRIEDADES	Módulo de Young, E – GPa	Coefficiente de Poisson, ν	Número de incrementos	Comprimento dos incrementos – mm
Modelo I	100.0	0.30	8	100
Modelo II	24.8	0.18	10	20

5.1.2 Verificação da Metodologia Aplicada

Para a verificação do comportamento dos *softwares* BEMLAB2D e BEMCRACKER2D em problemas sujeitos à propagação de múltiplas trincas críticas ou de cisalhamento, foi realizada análise por meio de sua implementação aos modelos dispostos por Parvanova e Gospodinov (2007), constatando e equiparando ambos resultados, de saída dos *softwares* e presentes no trabalho fonte, referentes aos FITs, ao caminho de trincamento e a deformação para cada um dos casos. Os procedimentos realizados foram:

- Pré-processamento – estudo, identificação e adequação do *software* BEMLAB2D para simulação e controle do caminho de propagação de múltiplas trincas de

cisalhamento/críticas; modelagem, geração de malha e determinação das condições de contorno pelo *software* BEMLAB2D para os modelos de referência;

- Análise incremental – aplicação dos arquivos de saída do *software* de interface gráfica BEMLAB2D ao *software* de processamento BEMCRACKER2D para a execução de análises numéricas linear-elásticas ajustadas à MFLE e ao MECD, no fim de se obter os campos de tensão e deformação; os FITs, pelo significado da Integral J; as direções de propagação de trinca, pelo critério da MTC; as atualizações incrementais dos deslocamentos, das tensões, das forças, da geometria e da malha; assim como o avanço de cada incremento de trinca;
- Resultados gráficos e numéricos – utilização do *software* MATLAB para os respectivos, tratamento dos dados de saída do *software* BEMCRACKER2D e realização de suas representações gráficas; gerar os gráficos necessários para a análise da evolução dos FIT's em função do número de incrementos; ainda em posse dos dados de saída, retornar ao *software* BEMLAB2D para a devida geração das imagens e gifs do caminho de trincamento e deformada de cada modelo; compará-los com aqueles expressos por Parvanova e Gospodinov (2007), em seu primeiro procedimento de análise, também responsável por determinar o caminho de propagação de múltiplas trincas críticas;

5.1.3 Modelos Padrão para Verificação de Capacidade dos Softwares

A seguir, serão descritos os dois modelos assumidos do trabalho de Parvanova e Gospodinov (2007) na intenção de analisar o comportamento dos *softwares* BEMLAB2D e BEMCRACKER2D na realização de análises prospectivas do processo de trincamento de elementos de concreto submetidos à múltiplas trincas críticas ou de cisalhamento.

5.1.3.1 Modelo I

A geometria e as condições de contorno consideradas para o modelo estão expressas na Figura 24 e foram lançadas por meio do *software* BEMLAB2D, conforme a Figura 25.

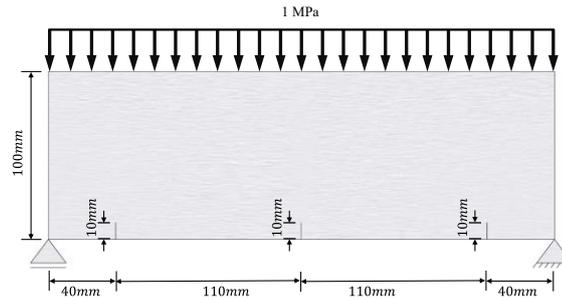


Figura 24 – Viga profunda com duas fissuras: a fissura diagonal esquerda com cinco pontas diferentes; a trinca direita é vertical com uma ponta. (a) Dados geométricos e materiais (PARVANOVA e GOSPODINOV – Adaptado, 2007)

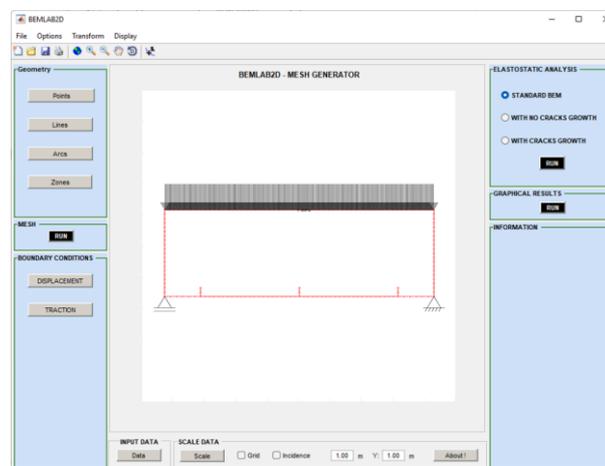


Figura 25 – Modelo I: Carregamentos e restrições

5.1.3.2 Modelo II

O segundo modelo impresso por Parvanova e Gospodinov (2007), similar ao terceiro exemplo encontrado no trabalho de Rots e Blaauwendraad (1989) e Yang (2006), foi caracterizado geometricamente assim como na Figura 26 e modelado conforme a Figura 27, conservando-se todos os dados fornecidos no modelo de referência. A disparidade entre a análise do modelo de referência e a realizada por este trabalho situam-se apenas na determinação dos FITs, os quais foram fixados no valor crítico de $K_c = 1,65 \text{ Mpa} \cdot \text{m}^{1/2}$ no trabalho referenciado, no entanto, neste estudo, foram definidos incrementalmente por meio do *software* BEMCRACKER2D.

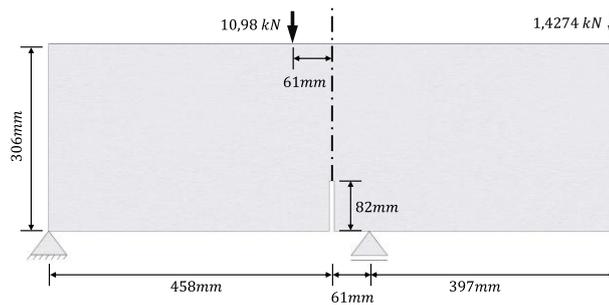


Figura 26 – Viga sob cisalhamento de borda única com quatro pontos: (a) Dados geométricos, carregamento e suportes de limite (PARVANOVA e GOSPODINOV – Adaptado, 2007)

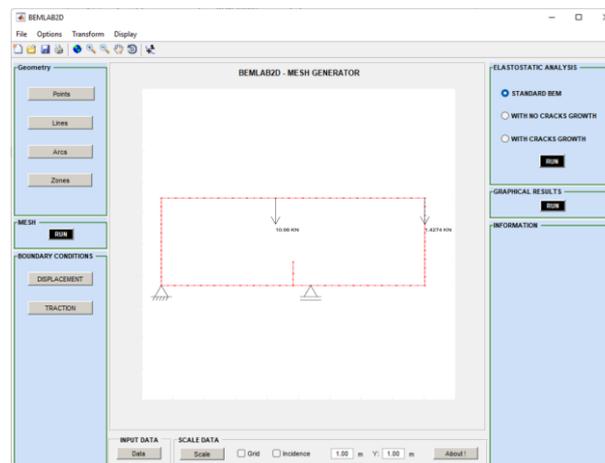


Figura 27 – Modelo II: Carregamentos e restrições

5.2 OUTROS CASOS

As verificações realizadas sobre os processos metodológicos assumidos neste estudo buscam viabilizar a utilização desta metodologia na análise de problemas de propagação de múltiplas trincas críticas, similares aos expressos nos Modelos I e II. Sendo os resultados das verificações favoráveis, serão realizadas novas aplicações da metodologia proposta no intento de proporcionar um número significativo de modelos de análise para futuras pesquisas. Destaca-se que essas aplicações consistirão no emprego da metodologia em sua completude, sendo assumidos desde problemas mais comuns de propagação de trincas simples, até problemas de propagação de múltiplas trincas críticas, visando averiguar também a capacidade dos *softwares* em distinguir espontaneamente entre tais possibilidades.

Num total de 10 modelos, obtidos por meio dos trabalhos de Parvanova e Gospodinov (2007), Leonel (2009), Mojiri (2010), Cordeiro (2015), Oliveira (2013) e Durand (2019). Frisa-se ainda, que em conformidade com as premissas assumidas para os Modelos I e II, os procedimentos

metodológicos de determinação do caminho de trincamento de múltiplas trincas críticas somente serão percebidos quando requisitados pela problemática do respectivo modelo. Desta forma, a seguir, encontram-se evidenciados os demais modelos estudados.

Complementarmente às propriedades retratadas pela Tabela 2, em que são manifestos os dados concernentes, respectivamente, aos Modelos I e II, tem-se que a Tabela 3 apresenta todas as propriedades de trincas e dos materiais empregues para os demais modelos acordados neste trabalho, sendo estes os Modelos III, IV, V, VI, VII, VIII, IX e X, como referidos anteriormente.

Tabela 3 - Propriedades das Trincas e Materiais Presentes nos Modelos Analisados

PROPRIEDADES	Módulo de Young, E – GPa	Coefficiente de Poisson, ν	Número de incrementos	Comprimento dos incrementos – mm
Modelo III	30.0	0.15	13	10
Modelo IV	37.0	0.20	10	10
Modelo V	27.0	0.10	19	10
Modelo VI	36.5	0.10	13	10
Modelo VII	32.0	0.20	10	10
Modelo VIII	31.0	0.20	16	20
Modelo IX	30.0	0.20	14	10
Modelo X	20.0	0.20	12	10

5.2.1 Modelo III

O primeiro modelo de aplicação da metodologia estipulada consta como o exemplo 8.3 presente no trabalho de Cordeiro (2015), estando presente também nos trabalhos de Oliveira (2013) e Leonel (2009). Foram utilizados os dados impressos na Figura 28 obtendo-se da modelagem o constante na Figura 29.

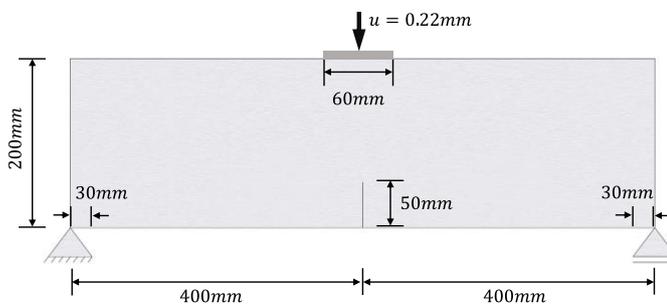


Figura 28 – Viga de concreto sob flexão em três pontos (CORDEIRO – Adaptado, 2015)

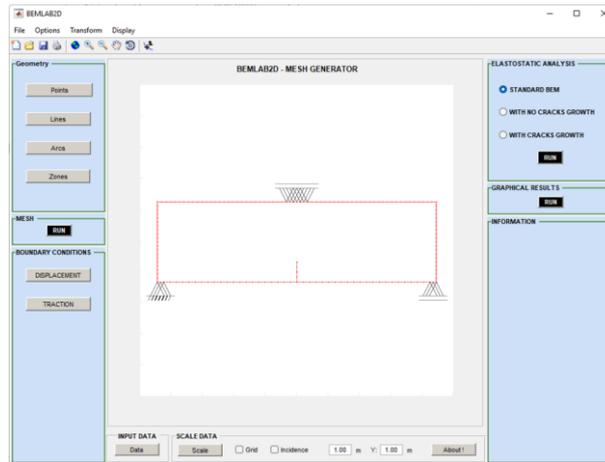


Figura 29 – Modelo III: Carregamentos e restrições

5.2.2 Modelo IV

Similarmente ao Modelo III, este segundo modelo de aplicação retrata o exemplo 8.4 do trabalho de Cordeiro (2015), também estando expressos nos trabalhos de Durand (2019), Oliveira (2013) e Leonel (2009). Tem-se da Figura 30 a modelagem presente na Figura 31.

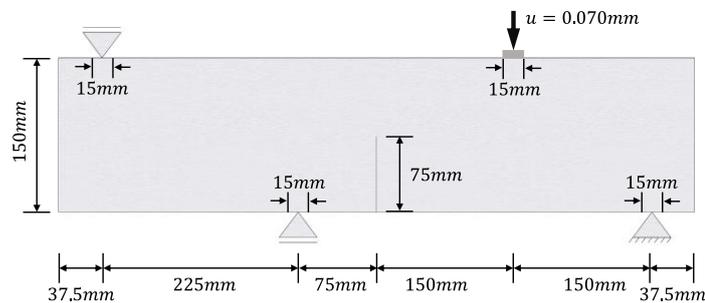


Figura 30 – Viga de concreto com um entalhe submetida a modo misto de fratura (I e II) (CORDEIRO – Adaptado, 2015)

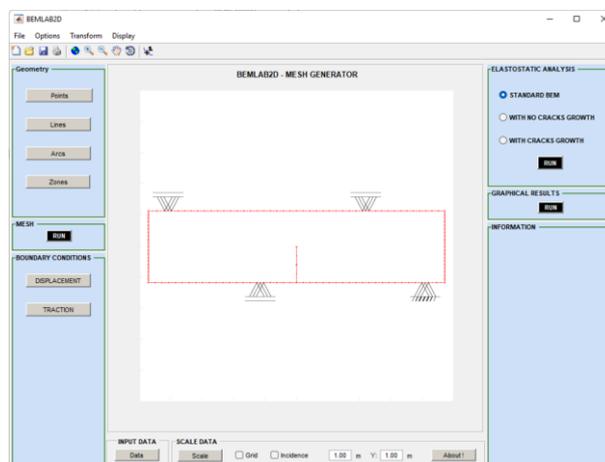


Figura 31 – Modelo IV: Carregamentos e restrições

5.2.3 Modelo V

Continuamente aos dois anteriores, este terceiro modelo de aplicação apresenta o exemplo 8.5 do trabalho de Cordeiro (2015) e, assim como os anteriores, também estando presente nos trabalhos de Oliveira (2013) e Leonel (2009). Assumiram-se os dados assim como representados na Figura 32, alcançando-se na modelagem o expresso na Figura 33.

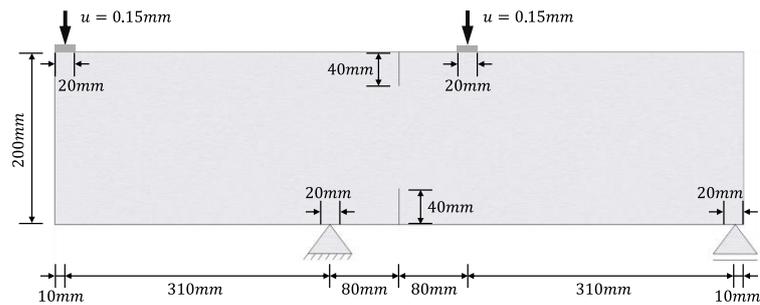


Figura 32 – Viga de concreto com dois entalhes submetida a modo misto de fratura (I e II) (CORDEIRO – Adaptado, 2015)

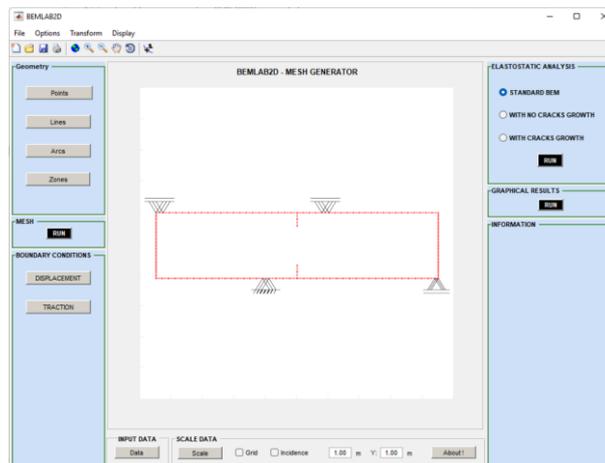


Figura 33 – Modelo V: Carregamentos e restrições

5.2.4 Modelo VI

Este quarto modelo apresenta o primeiro exemplo visto no trabalho de Mojiri (2010). Sendo necessário o fornecimento de estruturas isostáticas para devida análise via *softwares* utilizados, considerou-se que o apoio da esquerda também possuiria restrição horizontal. Já os dados assumidos estão presentes na Figura 34, alcançando-se na modelagem o expresso na Figura 35.

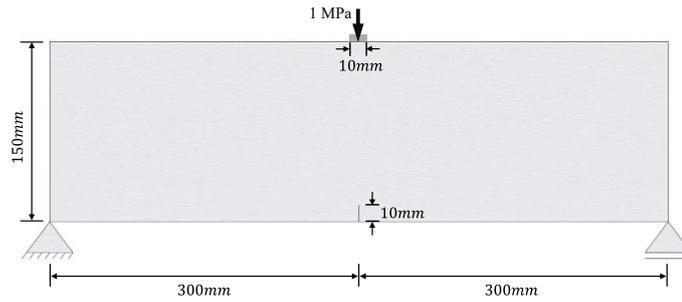


Figura 34 – Geometria e condições de contorno do ensaio de flexão em três pontos. (MOJIRI – Adaptado, 2010)

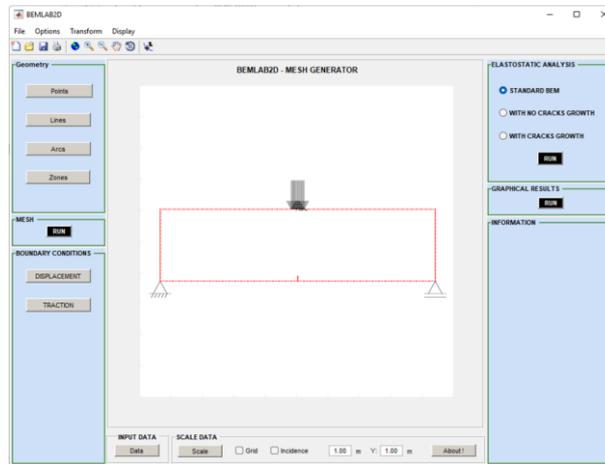


Figura 35 – Modelo VI: Carregamentos e restrições

5.2.5 Modelo VII

Como quinto modelo de aplicação, este apresenta o primeiro exemplo visto no trabalho de Durand (2019). Nele, possibilitava-se a aplicação de tensões ou deslocamentos sobre o contorno, adotando-se para esse a aplicação de tensões conforme assumindo na Figura 36 e modelando-se como expresso na Figura 37.

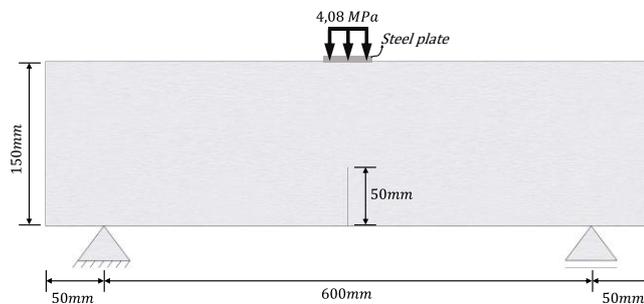


Figura 36 – Configuração do teste para uma viga típica apresentada por Roesler *et al.* (2007) (DURAND – Adaptado, 2019).

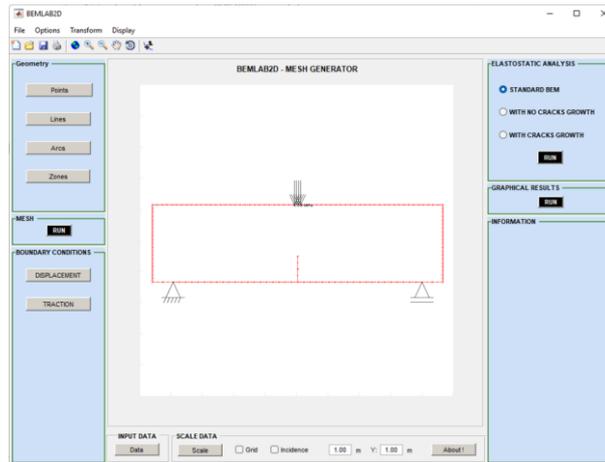


Figura 37 – Modelo VII: Carregamentos e restrições

5.2.6 Modelo VIII

Para o sexto exemplo abordando aplicações da metodologia, este modelo apresenta o terceiro exemplo descrito no trabalho de Durand (2019) e assim como no anterior, assumiu-se a aplicação de esforços de tensão sobre o contorno. Outra consideração necessária foi a modelagem de um comprimento de avanço de trinca inicial de 5mm a partir de cada entalhe, na direção central do elemento estrutural em análise. Essa consideração torna-se necessária devido ao *software* BEMCRACKER2D ser aplicável somente à prospecção de propagação de trincas a partir da locação de uma dada trinca a ser analisada. Deste modo, os dados tomados estão como presentes na Figura 38 e, a modelagem, tida como na Figura 39.

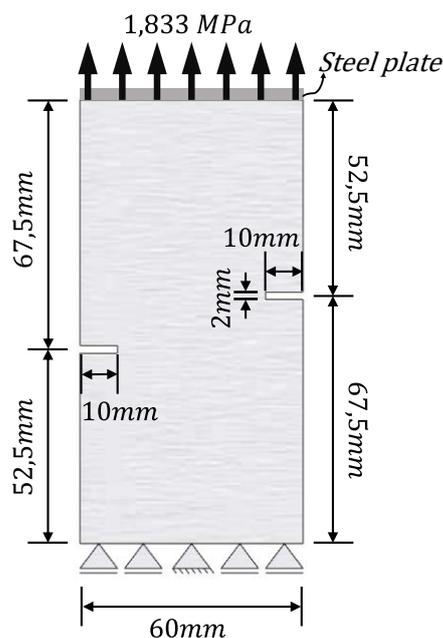


Figura 38 – Diagrama teste de espécime de placa retangular com duplo entalhe (DURAND – Adaptado, 2019)

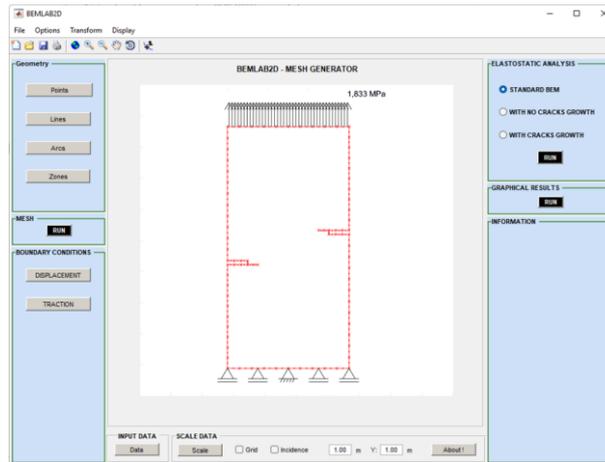


Figura 39 – Modelo VIII: Carregamentos e restrições

5.2.7 Modelo IX

Prosseguindo com o oitavo modelo de aplicação sobre metodologia, correspondente ao quinto exemplo expresso pelo trabalho de Durand (2019), e ainda fundamentando-se nas considerações assumidas aos três modelos anteriores, utilizou-se a aplicação de esforços de tensão sobre o contorno, sendo ainda requerida a modelagem da trinca diagonal inicial em comprimento de 5mm a partir de cada entalhe, na direção central do elemento estrutural analisado. Identicamente, os dados considerados estão impressos na Figura 40. O resultado da modelagem consta como ilustrado pela Figura 41, dando destaque a consideração das tensões e restrições de contato das chapas sobre o contorno do elemento.

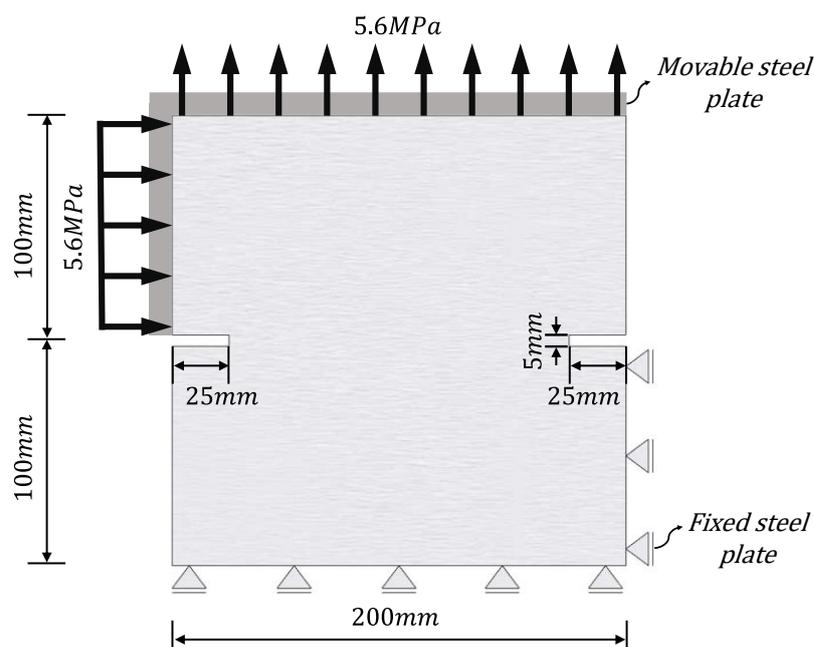


Figura 40 – Diagrama teste para o espécime de placa quadrada com duplo entalhe (DURAND – Adaptado, 2019)

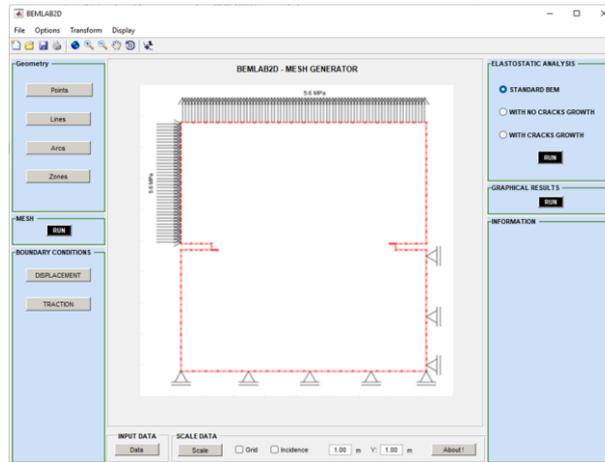


Figura 41 – Modelo IX: Carregamentos e restrições

5.2.8 Modelo X

Por último, como sétimo exemplo de aplicação metodológica, tem-se que este modelo retrata o quarto exemplo fornecido pelo trabalho de Durand (2019). Seguindo as premissas utilizadas nos dois modelos anteriores, tornou-se a aplicação de esforços de tensão sobre o contorno e, assim como a anterior, fez-se também necessária a modelagem do avanço de trinca inicial com comprimento de 1 mm e com inclinação de 45° sobre o ponto A. Deste modo, os dados constam na Figura 42 e, enfim, as condições de modelagem são vistas na Figura 43.

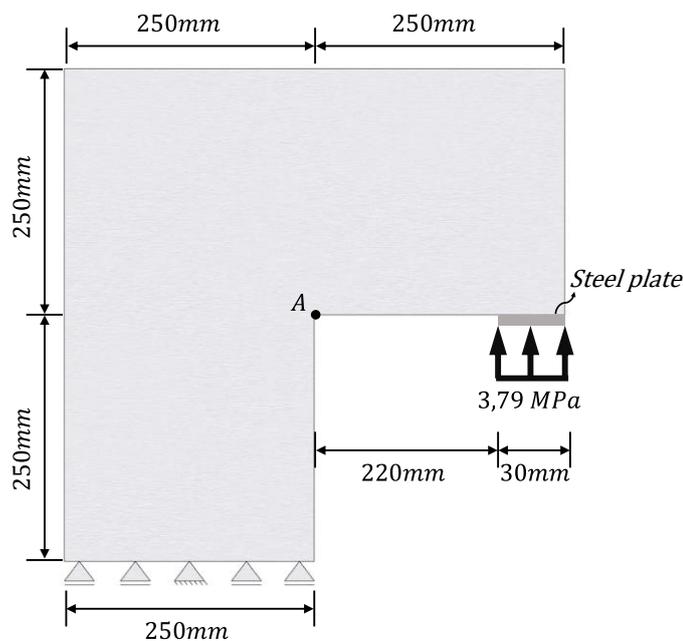


Figura 42 – Diagrama do teste para o espécime de placa quadrada com duplo entalhe (DURAND – Adaptado, 2019)

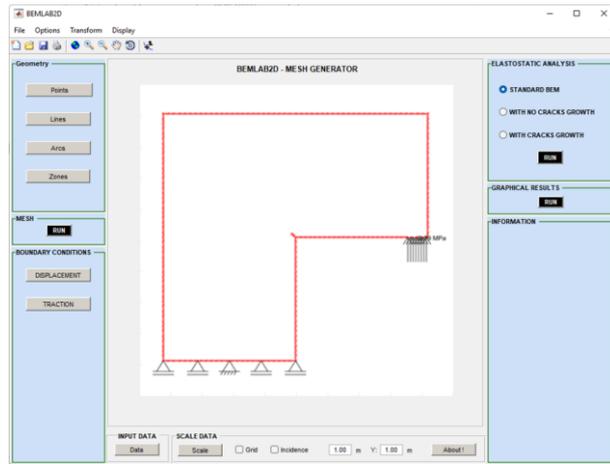


Figura 43 – Modelo X: Carregamentos e restrições

CAPÍTULO 6: RESULTADOS E DISCUSSÃO

A seguir, os resultados obtidos serão manifestos seguindo-se a plenitude da metodologia. Retomando o já referido, tem-se que os modelos de verificação da metodologia de determinação do caminho de trincamento de múltiplas trincas críticas, são os Modelos I e II. Já os modelos III, IV, V, VI, VII, VIII, XI e X, são outros modelos de aplicação da metodologia definida neste estudo à modelos já difundidos academicamente, expressando-se também como balizadores metodológicos alternativos.

6.1 VERIFICAÇÃO DA METODOLOGIA DO CAMINHO DO TRINCAMENTO DE MÚLTIPLAS TRINCAS CRÍTICAS:

6.1.1 Modelo I

1- Determinação do Caminho de Propagação de Múltiplas Trincas Críticas e de Trinca de Flexão

Através da modelagem realiza segundo os procedimentos metodológicos vistos no item anterior e expressa pela Figura 25, foram obtidos o caminho de propagação de múltiplas trincas críticas em uma viga de concreto simples, com propriedades geométricas e do material conforme já apresentado. Torna-se importante frisar que durante os procedimentos de modelagem, percebeu-se a necessidade do emprego de algumas adaptações ao amodelo. Inicialmente transcorridas da ausência de informações sobre as unidades de medida assumidas no trabalho de referência e, por fim, pelas dissemelhanças presentes nos métodos matemáticos assumidos pela referência em relação àqueles empregues pelo *software* de processamento BEMCRACKER2D, adota por este estudo.

No trabalho de Parvanova e Gospodinov (2007), por meio do princípio da simetria, realizou-se a discretização e análise de apenas metade da viga, representando a trinca de flexão por um seguimento “congelado” com comprimento de 0.5 mm e uma trinca crítica propagante com comprimento inicial de 0.1 mm. Têm-se ainda em vista, que no trabalho referência, tanto o comprimento, quanto a direção do trincamento foram escolhidos pelo usuário para cada incremento, distando-se dos valores obtidos através de análise realizada pelo emprego de rotinas numéricas, já devidamente implementadas no *software* BEMCRACKER2D e

evidenciadas neste estudo.

Portanto, as adaptações assumidas por este trabalho constam da modelagem da viga completa, com suas dimensões adotadas em mm, expressando o posicionamento das duas trincas críticas propagantes em comprimentos idênticos ao visto no modelo de referência e da trinca de flexão centralizada, assim como referido, porém estabelecida como propagante em comprimento inicial de 0.1 mm. A opção por esse comprimento caracterizou-se na concretização de testes de modelagem que possibilitaram a percepção dos comprimentos em que a trinca de flexão sofria uma demasiada influência das trincas críticas em seu caminho de propagação. Por sua vez, ao utilizar-se deste comprimento, tornou-se notório o comportamento independente dos caminhos de trincamento até o ponto em que a deformação e a diminuição da seção transversal do elemento fizeram-se significativas.

Em virtude das análises requisitadas para a averiguação da possibilidade de utilização da metodologia apresentada sobre problemas de trincamento de múltiplas trincas críticas, foram obtidas as ilustrações presentes nas Figuras 44 e 45, as quais exprimem o caminho de propagação da trinca de flexão e das trincas críticas, bem como a malha deformada do elemento submetido ao número de incrementos informados previamente. Como esperado, a trinca de flexão apresenta comportamento propagante retilíneo, com abertura em Modo I. No entanto, as trincas críticas apresentam um fluxo inicial direcionado aos vértices superiores da viga e permanece assim até aproximadamente meia altura, após isso se redirecionando ao centro, expressando em todo percurso abertura em Modo misto, somando abertura em Modo I da trinca com o deslizamento de suas faces.

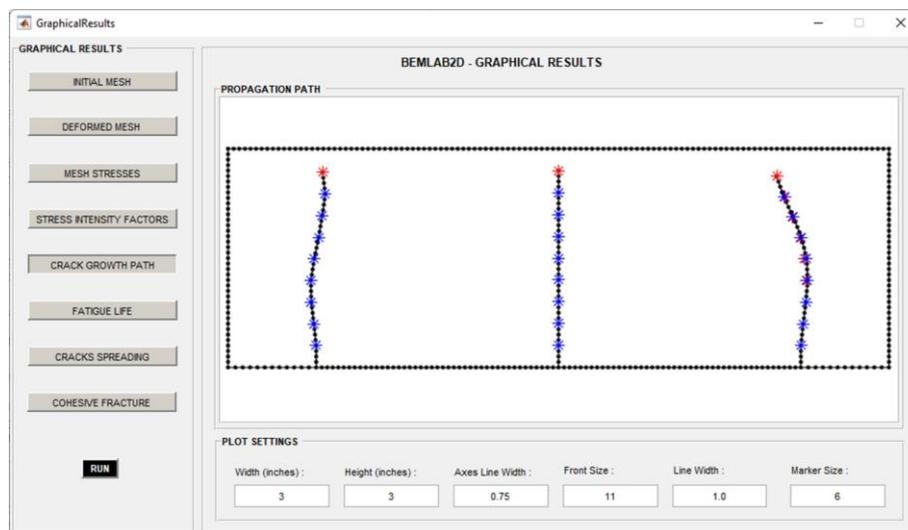


Figura 44 – Caminho de propagação da trinca de flexão e das trincas críticas

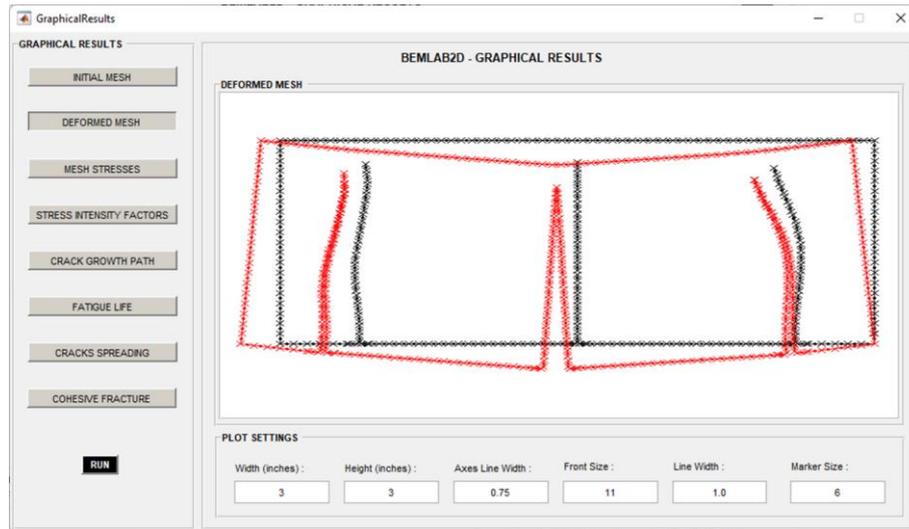


Figura 45 – Malha deformada

2- Análise da Progressão dos FIT's em Função do Número de Incrementos

Neste segundo momento, usando-se dos resultados obtidos pelo *software* de processamento, tornou-se possível a delimitação do gráfico de evolução dos FIT's para os modos I e II, respectivos parâmetros K_I e K_{II} , como expresso na Figura 46.

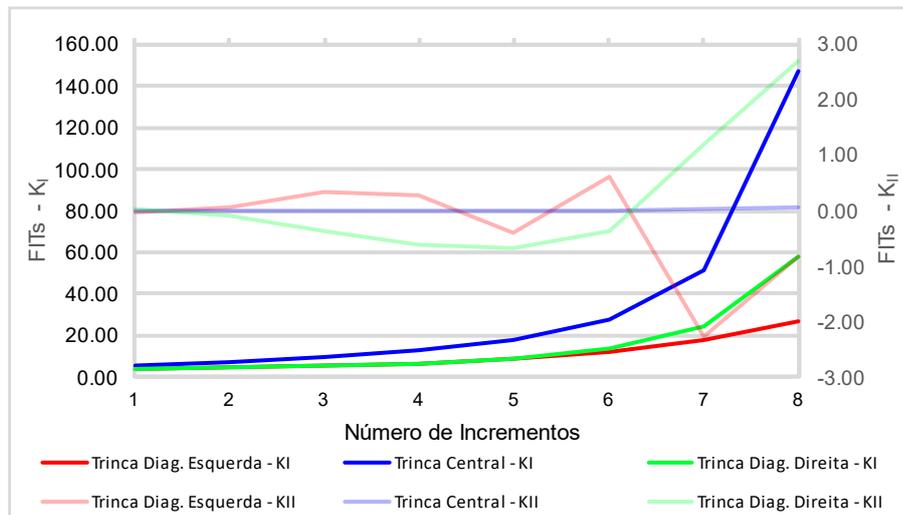


Figura 46 – Modelo I: Evolução dos FIT's em Função do Número de Incrementos

No gráfico presente na Figura 46 é apresentado o progresso dos parâmetros K_I e K_{II} em virtude do acréscimo do número de incrementos para as três trincas alocadas no elemento, conforme visto na Figura 25. Como percebido, o valor do parâmetro K_I se altera exponencialmente para as três trincas em conformidade com o aumento do número de incrementos, denotando a ação de abertura das trincas pelo modo I. Já o parâmetro K_{II} , enfatiza os deslizamentos longitudinais que ocorrem nas faces das duas trincas diagonais, caracterizando-as como críticas, ao passo que

a trinca central não expressa movimentação significativa, caracterizando-a como trinca de flexão simples.

De modo a corroborar para assertividade desta análise, Tem-se manifesto pela Figura 47 um comparativo entre os FIT's fornecidos por Parvanova e Gospodinov (2007) e aqueles obtidos por meio desta metodologia, tornando perceptível a aproximação entre os resultados esperados para ambas as trincas críticas.

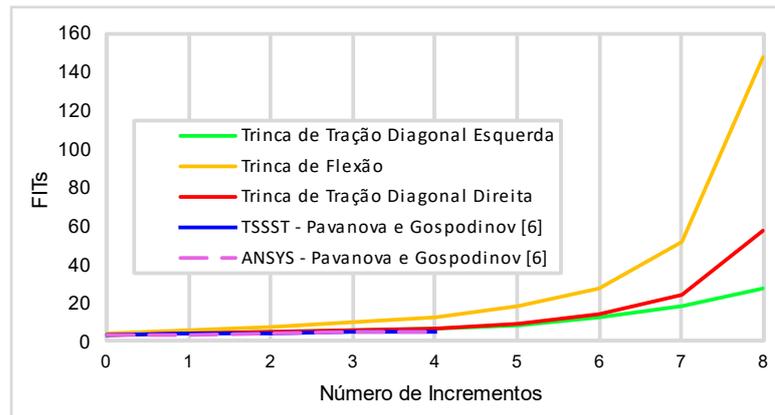


Figura 47 – Modelo I: Evolução dos FIT's em Função do Número de Incrementos

6.1.2 Modelo II

1- Determinação do Caminho de Propagação de Trinca Crítica

O caminho de propagação da trinca crítica e a malha deformada obtida podem ser vistos nas Figuras 48 e 49.

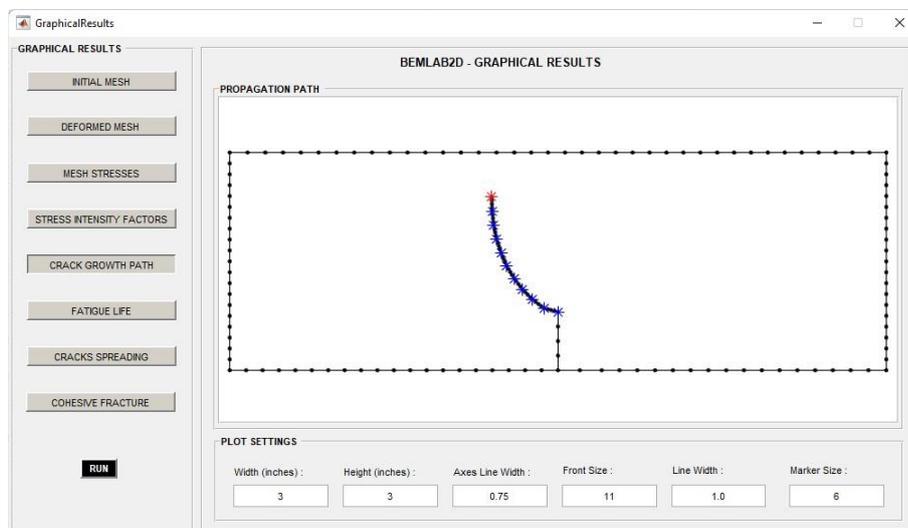


Figura 48 – Caminho de propagação da trinca crítica

Como percebido, o caminho de propagação sofre influência direta da movimentação do apoio simples, situado ligeiramente à sua direita, resultando em um trincamento diagonal em Modo misto que, conforme aumenta-se o comprimento da trinca ao longo da altura do elemento, distanciando sua ponta do apoio, menor torna-se a influência da parcela horizontal desse efeito de propagação diagonal, tornando-se plenamente vertical após um determinado momento.

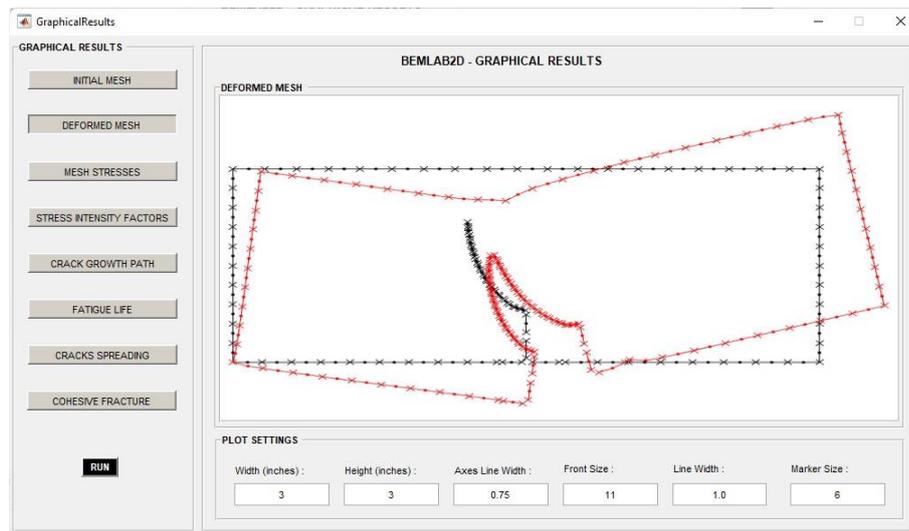


Figura 49 – Malha deformada

1- Análise da Progressão dos FIT's em Função do Número de Incrementos

Assim como no modelo anterior, a Figura 50 também apresenta o progresso dos parâmetros K_I e K_{II} devido ao acréscimo do número de incrementos.

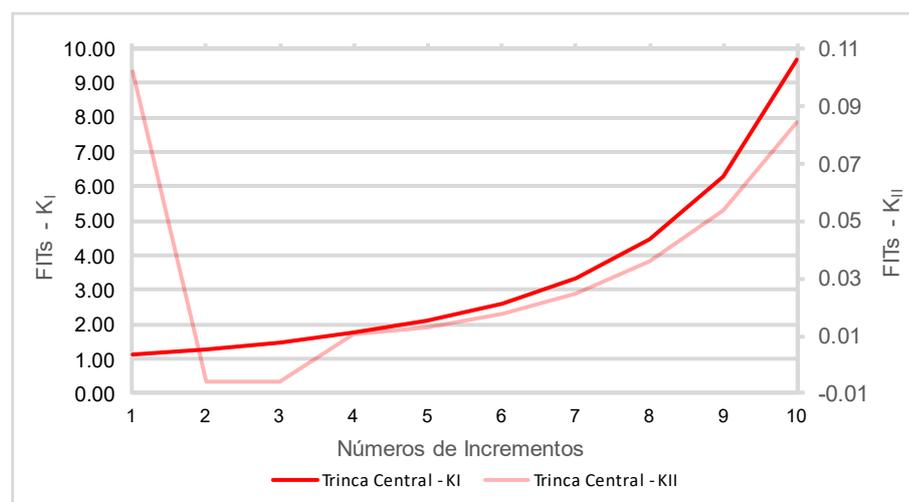


Figura 50 – Modelo II: Evolução dos FIT's em Função do Número de Incrementos

Como retratado pela Figura 27, este modelo possui uma trinca crítica central, onde a curva do parâmetro K_I se altera exponencialmente, salientando o movimento cada vez maior de abertura

da trinca em modo I. Enquanto isso, o parâmetro K_{II} traz notoriedade ao deslizamento longitudinal que se origina pela distância assimétrica dos apoios em relação à trinca, denotando-se como uma trinca crítica devido a abertura da trinca em modo misto.

6.2 APLICAÇÃO DA METODOLOGIA PARA OS DEMAIS CASOS:

Em continuidade aos resultados obtidos no item anterior para os Modelos I e II, são trazidos a seguir as demais aplicações metodológicas para a análise de propagação de múltiplas trincas críticas em materiais frágeis.

6.2.1 Modelo III

1- Determinação do Caminho de Propagação de Trinca de Flexão

Diferente dos vistos até agora, este modelo expressa uma única trinca de flexão que se propaga linearmente em Modo I ao longo de toda a altura do elemento. Esse comportamento encontra-se devidamente expresso nas Figuras 51 e 52, as quais apresentam respectivamente o caminho do trincamento de flexão e sua malha deformada.

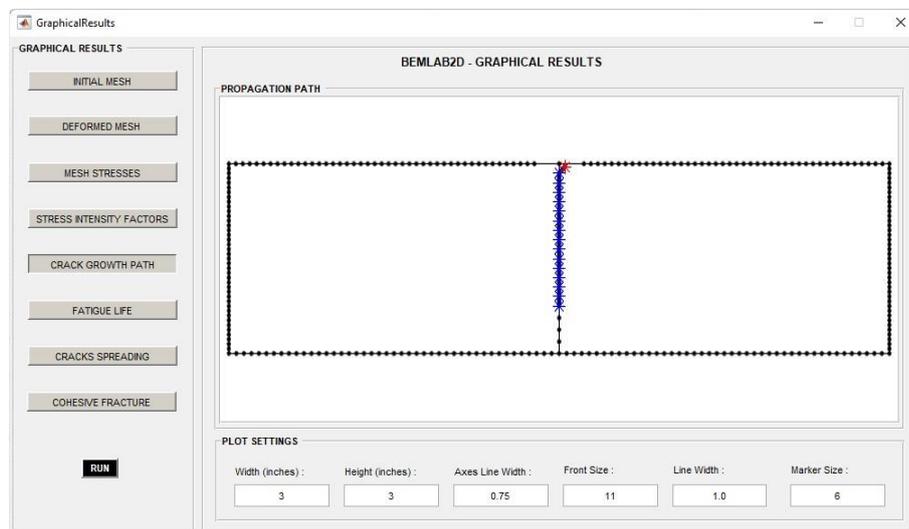


Figura 51 – Caminho de propagação da trinca de flexão

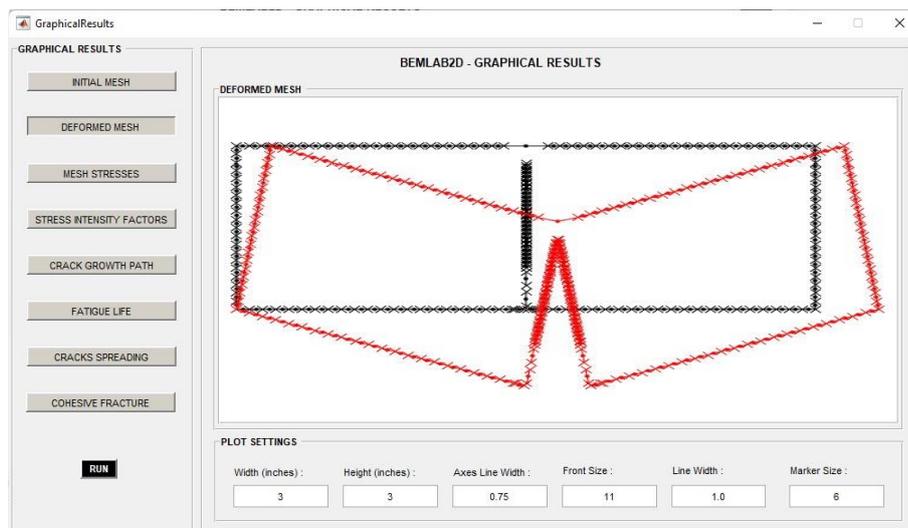


Figura 52 – Malha deformada

2- Análise da Progressão dos FIT's em Função do Número de Incrementos

O gráfico na Figura 53 retrata o comportamento de uma trinca de flexão simples, na qual a curva do parâmetro K_I apresenta comportamento exponencial e a curva do parâmetro K_{II} não manifesta movimentação perceptível.

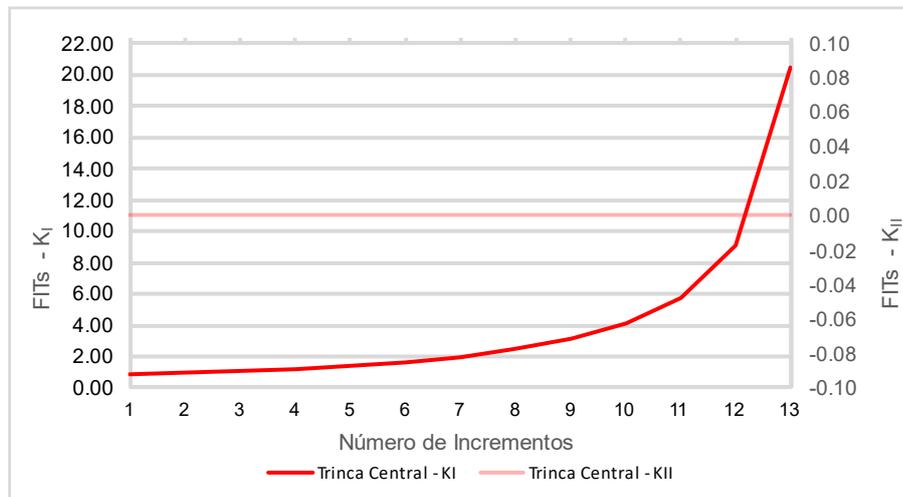


Figura 53 – Modelo III: Evolução dos FIT's em Função do Número de Incrementos

6.2.2 Modelo IV

1- Determinação do Caminho de Trincamento de Múltiplas Trincas Críticas

O modelo expressa uma única trinca central que se propaga diagonalmente em Modo misto ao longo de toda a altura do elemento, sofrendo influência direta do deslocamento do apoio simples

justaposta à sua esquerda e caminhando na direção do ponto de aplicação do deslocamento no contorno. Visualmente, esse comportamento se dispõe como visto nas Figuras 54 e 55, apresentando, respectivamente, o caminho do trincamento de flexão e a malha deformada.

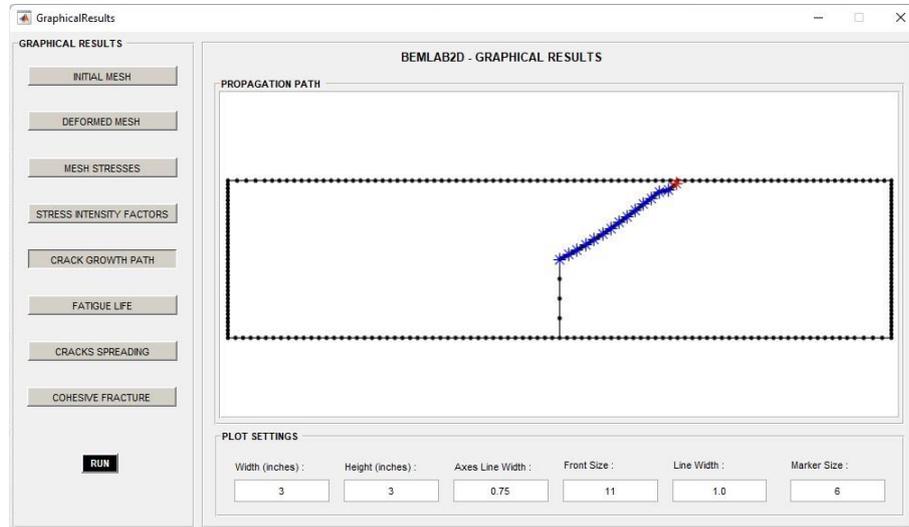


Figura 54 – Caminho de propagação da trinca crítica

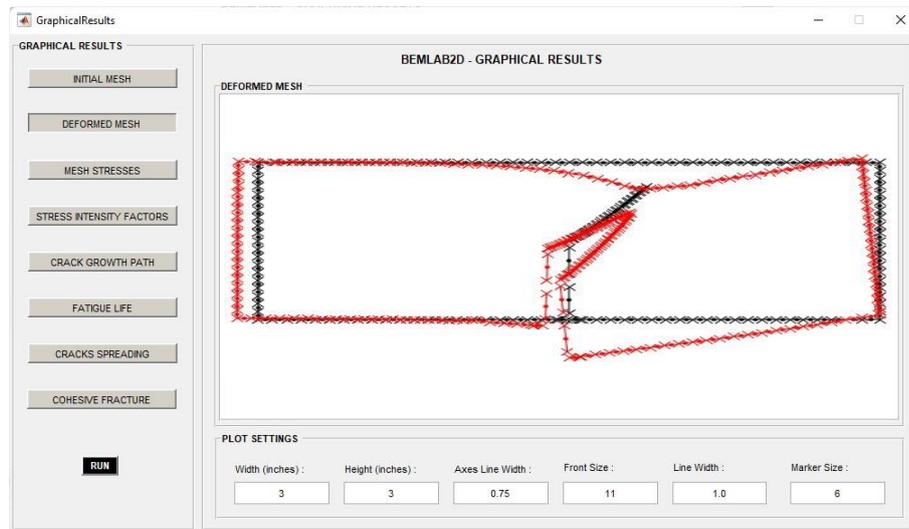


Figura 55 – Malha deformada

2- Análise da Progressão dos FIT's em Função do Número de Incrementos

O gráfico expresso na Figura 56 apresenta o progresso dos parâmetros K_I e K_{II} para uma trinca crítica. A curva do parâmetro K_I exprime comportamento exponencial que, somado ao comportamento da curva do parâmetro K_{II} , tipifica propagação de trinca em modo misto.

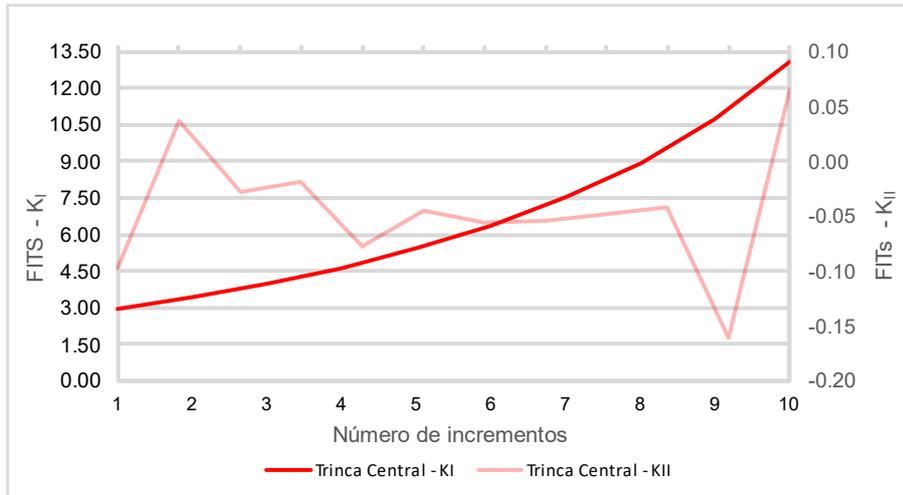


Figura 56 – Modelo IV: Evolução dos FIT's em Função do Número de Incrementos

6.2.3 Modelo V

1- Determinação do Caminho de Trincamento de Múltiplas Trincas Críticas

Tem-se um elemento com duas trincas contrapostas sobre contorno, centralizadas em relação ao elemento e que se propagam em Modo misto por um mesmo caminho exponencial que se estende por toda a altura do elemento, até que se alcance, para o caso da trinca inferior, o ponto de aplicação do deslocamento superior, ligeiramente a direita da trinca superior, e para o caso da trinca superior, o apoio justaposto a esquerda da trinca inferior, visto nas Figuras 57 e 58.

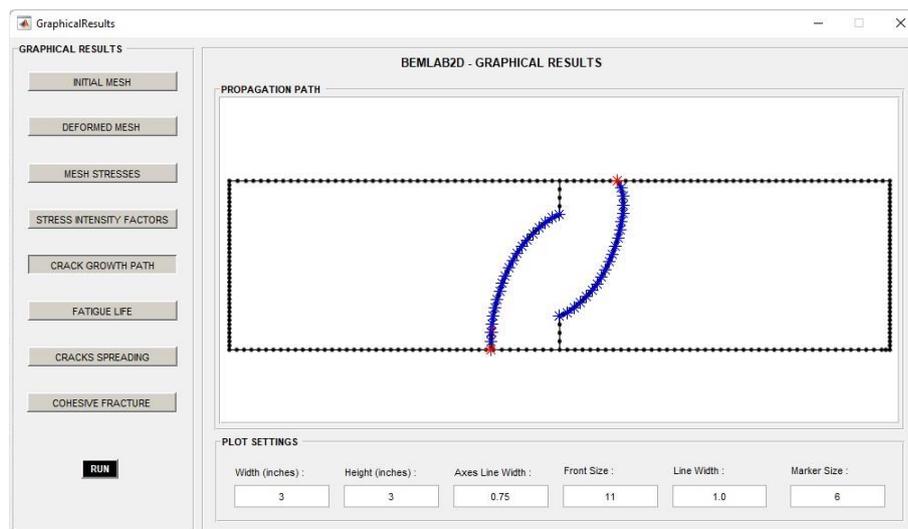


Figura 57 – Caminho de propagação de trincas críticas

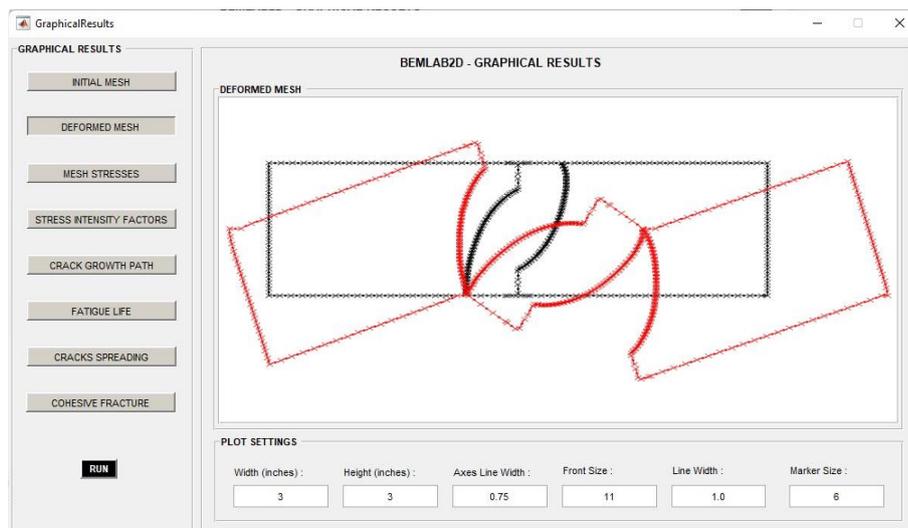


Figura 58 – Malha deformada

2- Análise da Progressão dos FIT's em Função do Número de Incrementos

A Figura 59 expõe a paridade entre o comportamento de ambas as trincas. Trazendo um comportamento parabólico, extremamente similar entre as trincas, por toda a curva do parâmetro K_I . Já o parâmetro K_{II} manifesta disparidades perceptíveis após o 17º incremento, realçando, para este modelo, o comportamento quase que linear do parâmetro K_{II} que provém do deslizamento quase que constante entre as faces de ambas as trincas.

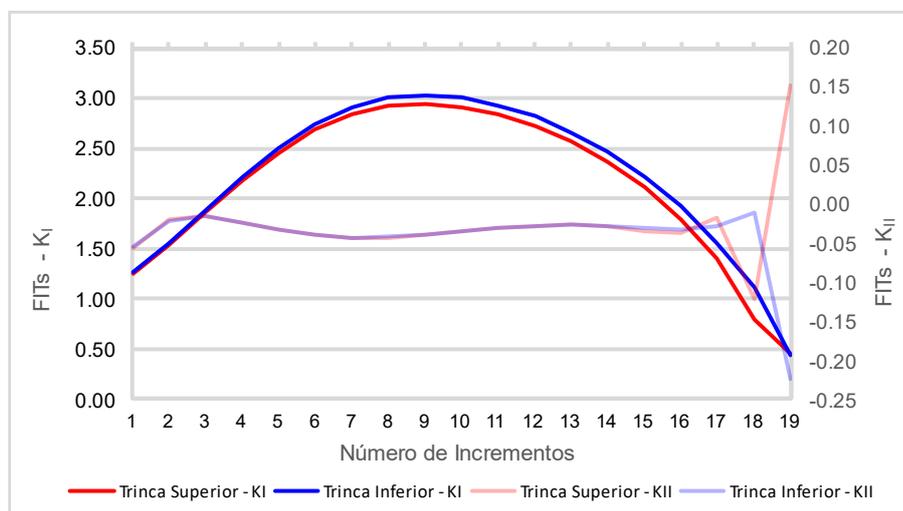


Figura 59 – Modelo V: Evolução dos FIT's em Função do Número de Incrementos

6.2.4 Modelo VI

1- Determinação do Caminho de Propagação de Trinca de Flexão

Este modelo é o primeiro modelo de aplicação da metodologia elaborada, sendo bastante similar ao Modelo III, alterando-se apenas na aplicação de tensão ao contorno ao invés de deslocamento e na ausência do alargamento dos apoios que, para este modelo, encontram-se justapostos apenas nas extremidades do elemento. Assim como no modelo referido, este possui uma trinca central em propagação retilínea em Modo I por toda amplitude da viga, assim como na modelagem manifesta pela Figura 34 e pelas Figuras 60 e 61.

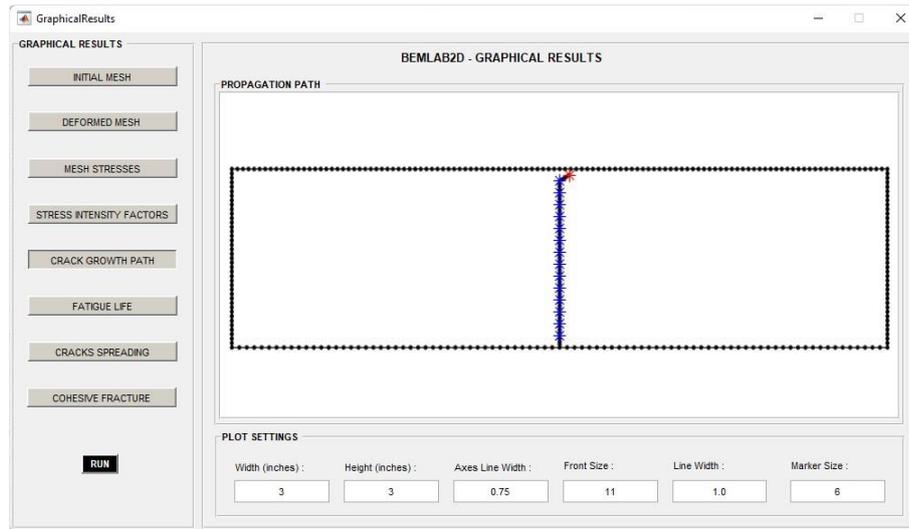


Figura 60 – Caminho de propagação da trinca de flexão

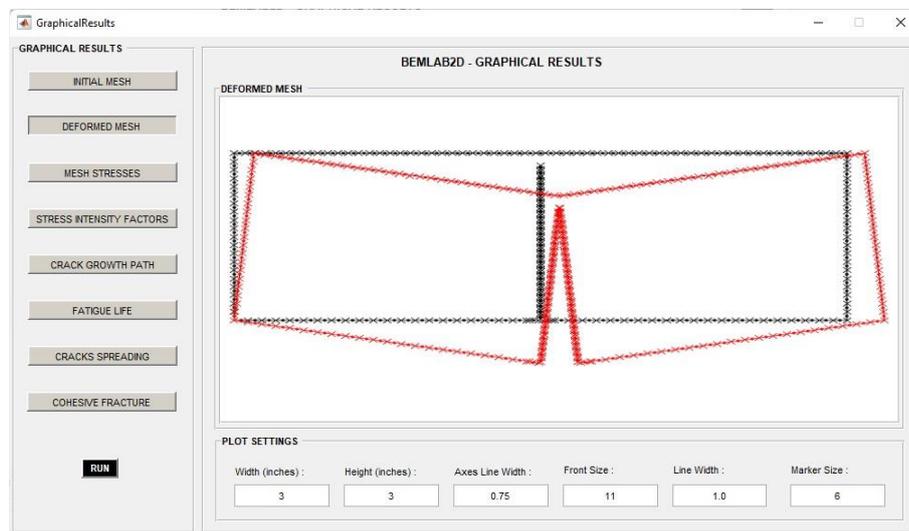


Figura 61 – Malha deformada

2- Análise da Progressão dos FIT's em Função do Número de Incrementos

Representado na Figura 62, o gráfico novamente retrata o comportamento de uma trinca de flexão simples, com a curva do parâmetro K_I exprimindo comportamento exponencial, enquanto a curva do parâmetro K_{II} não expressa movimentação perceptível.

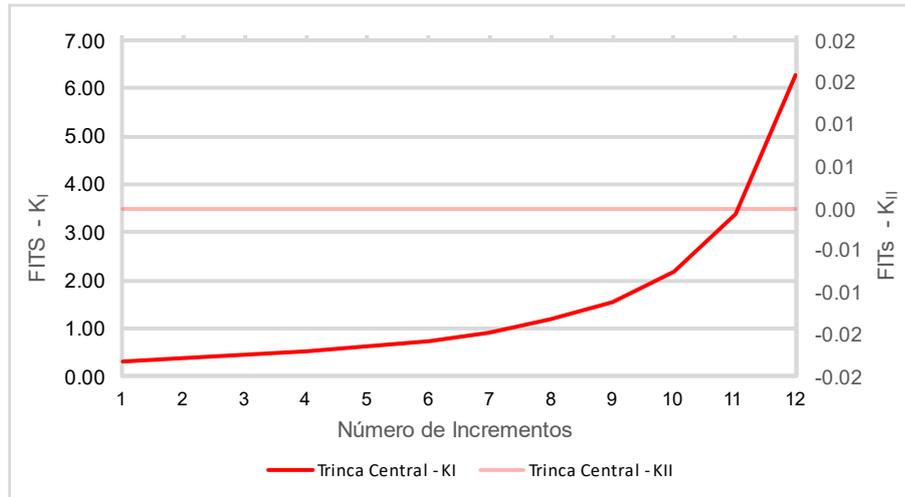


Figura 62 – Modelo VI: Evolução dos FIT's em Função do Número de Incrementos

6.2.5 Modelo VII

1- Determinação do Caminho de Propagação de Trinca de Flexão

Muito similar aos Modelos III e VII, este segundo modelo de aplicação da metodologia proposta se altera no posicionamento de seus apoios, modelados conforme a Figura 36, os quais se encontram próximos às extremidades do elemento, um tanto quanto deslocados ao centro. Estando também submetido a tensões no contorno, assim como no Modelo VII, possui uma trinca igualmente centralizada em propagação retilínea em Modo I que percorre toda a altura da viga, como expresso nas Figuras 63 e 64.

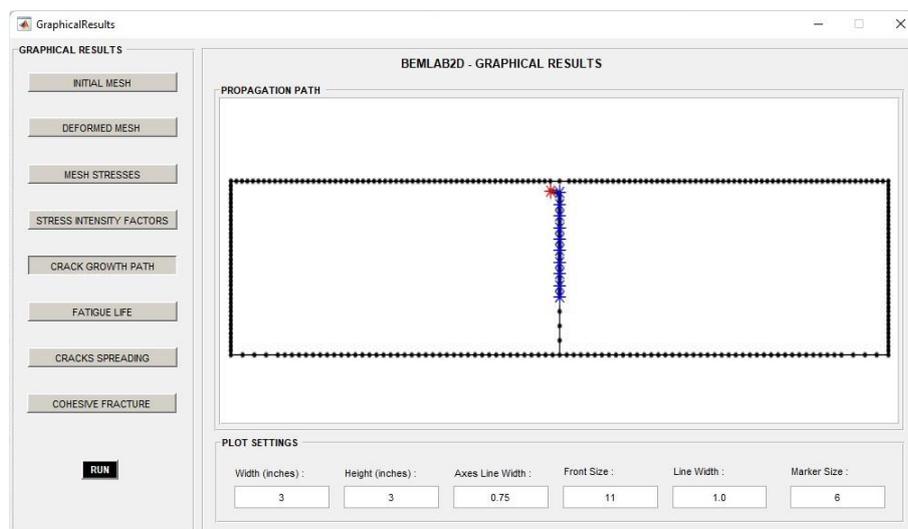


Figura 63 – Caminho de propagação da trinca de flexão

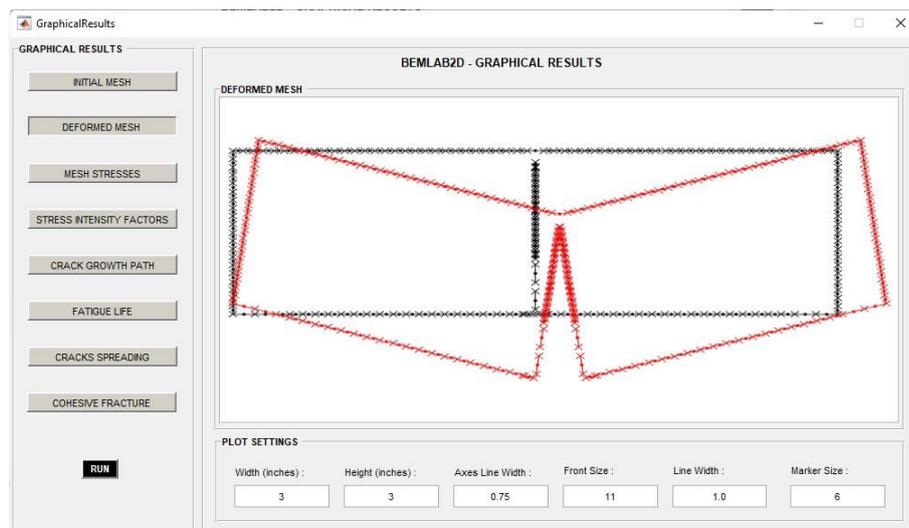


Figura 64 – Malha deformada

2- Análise da Progressão dos FIT's em Função do Número de Incrementos

Este é o terceiro modelo a retratar uma trinca de flexão simples e, dessa forma, como visto no gráfico da Figura 65, a curva do parâmetro K_I possui comportamento exponencial, destacando-se da curva do parâmetro K_{II} que não manifesta nenhuma movimentação visível.

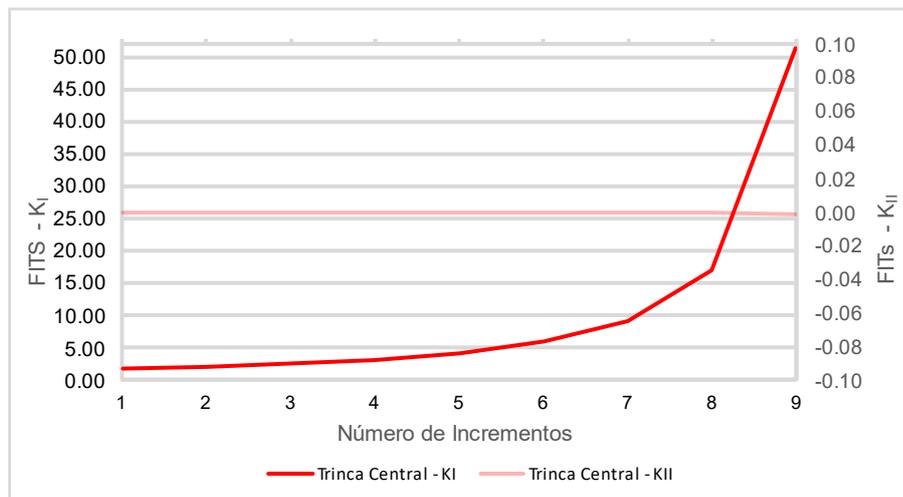


Figura 65 – Modelo VII: Evolução dos FIT's em Função do Número de Incrementos

6.2.6 Modelo VIII

1- Determinação do Caminho de Trincamento de Múltiplas Trincas Críticas

Sendo o primeiro modelo de aplicação a empregar a metodologia em sua completude, isso desconsiderando, é claro, aqueles utilizados para a verificação metodológica. Tem-se adaptada

a fixação da base do elemento em um outro elemento de placa por meio de um conjunto de apoios simples, com apenas um apoio duplo centralizado. Visto nas Figuras 66 e 67, o elemento possui dois entalhes laterais com um pequeno avanço de trinca em cada um deles, o que resulta na propagação horizontal e simétrica em Modo misto com leve inclinação direcionada aos extremos superior e inferior da peça. Devido a deformação proveniente do trincamento, as trincas começam a influenciar-se simultaneamente, gerando um desvio em ambos os caminhos, que mostram-se através de sua inclinação, agora voltada novamente ao centro.

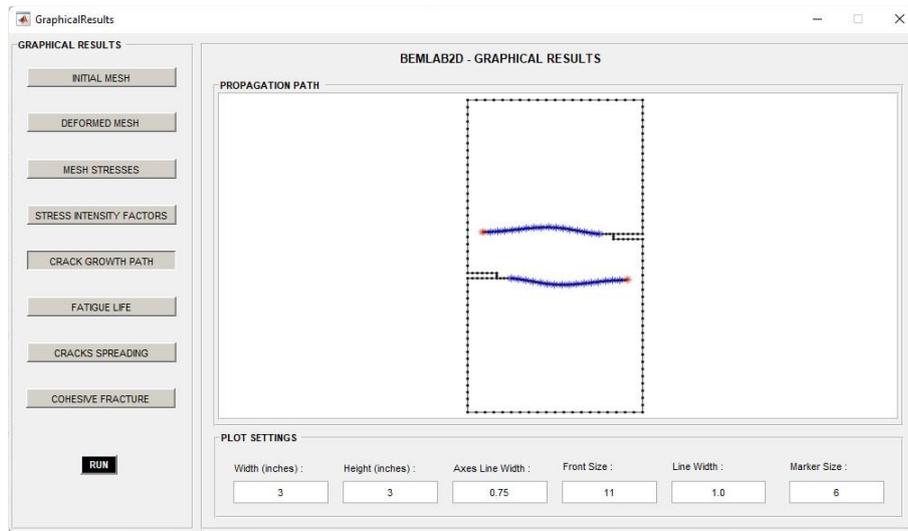


Figura 66 – Caminho de propagação de trincas críticas

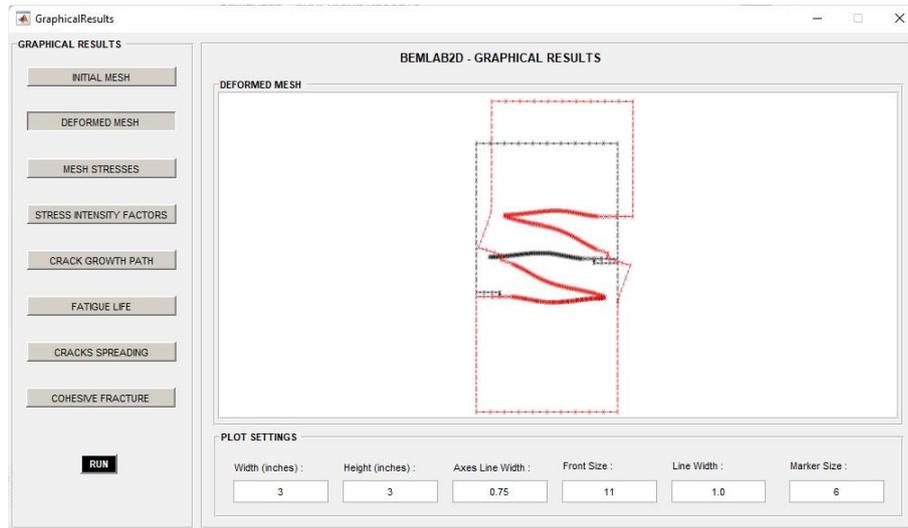


Figura 67 – Malha deformada

2- Análise da Progressão dos FIT's em Função do Número de Incrementos

A Figura 68 explicita o apresenta para ambas as trincas um comportamento exponencial simétrico na curva do parâmetro K_I , enquanto a curva para o parâmetro K_{II} imprime valores

inicialmente baixos e simétricos que ressaltam-se abruptamente após o 11º incremento, expressando assimetria após o 14º incremento.



Figura 68 – Modelo VIII: Evolução dos FIT's em Função do Número de Incrementos

6.2.7 Modelo IX

1- Determinação do Caminho de Trincamento de Múltiplas Trincas Críticas

Este modelo possui entalhes laterais alinhados com a meia altura do elemento onde encontram-se dois breves avanços de trinca que se propagam em Modo misto, em caminhos quase que simétricos que partem, no caso do entalhe esquerdo, do entalhe até o centro das restrições de deslocamento à direita inferior e, no caso do entalhe direito, do entalhe até o centro do contorno lateral submetido a tensões logo à esquerda superior, assim como avistado nas Figuras 69 e 70.

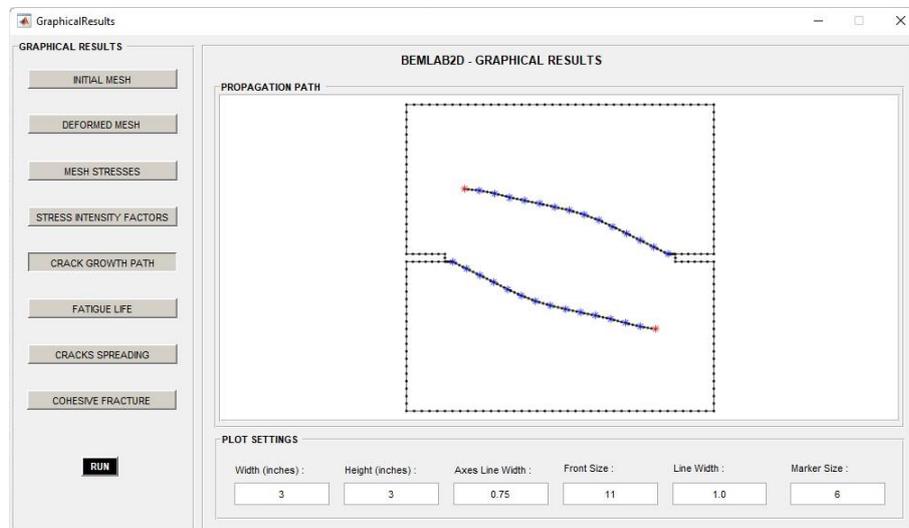


Figura 69 – Caminho de propagação de trincas críticas

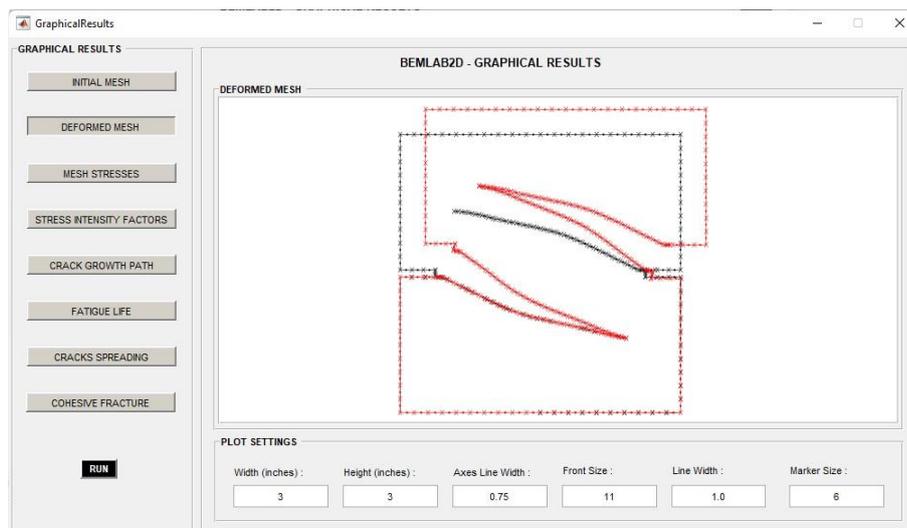


Figura 70 – Malha deformada

2- Análise da Progressão dos FIT's em Função do Número de Incrementos

O gráfico presente na Figura 71 apresenta um comportamento decrescente para a curva do parâmetro K_I , enquanto a curva para o parâmetro K_{II} se mostra com expressivos ressaltos tipificados pela alteração da inclinação das trincas diagonais. Como visto, a abertura de ambas as trincas apresentam acentuada simetria, porém demonstrando distinção em relação aos deslizamentos longitudinais percebidos em certos intervalos das curvas.

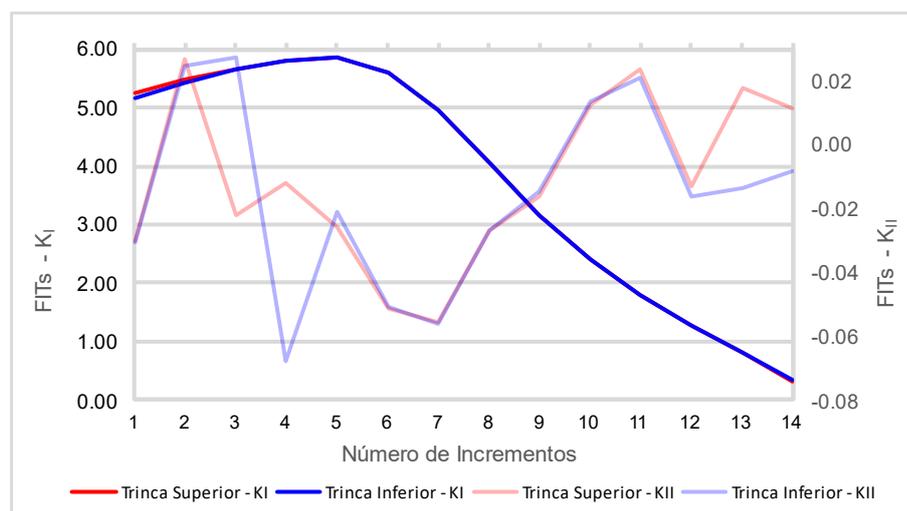


Figura 71 – Modelo IX: Evolução dos FIT's em Função do Número de Incrementos

6.2.8 Modelo X

1- Determinação do Caminho de Trincamento de Múltiplas Trincas Críticas

Representando um elemento único e sem entalhes, empregou-se um pequeno avanço de trinca à 45° localizado sobre o ponto A, que se propagam exponencialmente em Modo misto por um caminho quase que horizontal na direção do contorno à esquerda, vide Figuras 72 e 73.

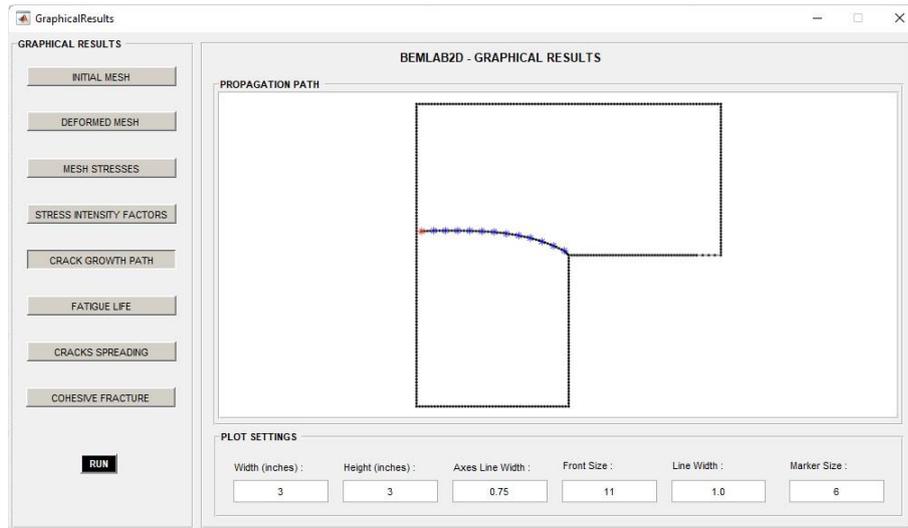


Figura 72 – Caminho de propagação de trincas críticas

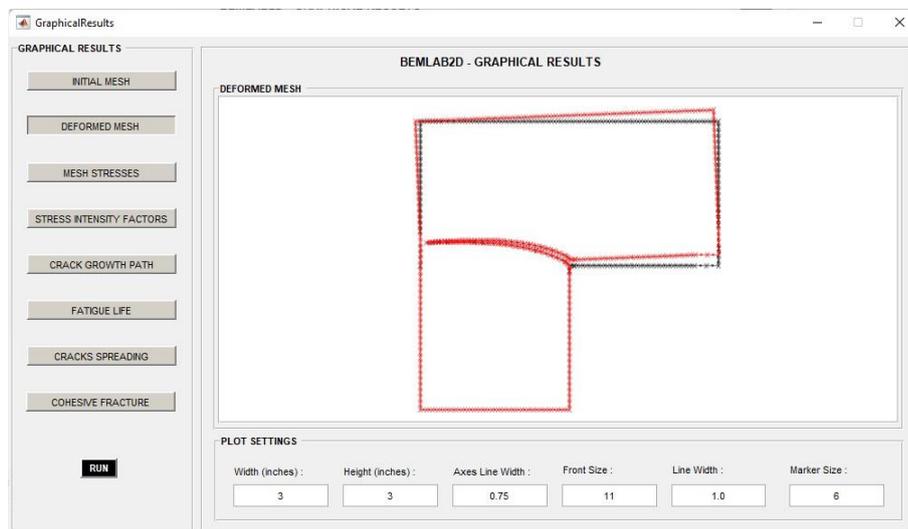


Figura 73 – Malha deformada

2- Análise da Progressão dos FIT's em Função do Número de Incrementos

Finalmente, a Figura 74 expressa a curva do parâmetro K_I para uma trinca crítica alterando-se de forma quase que inversa ao parâmetro K_{II} , salientando a alteração de sentido deste segundo parâmetro à medida que o primeiro apresenta redução.

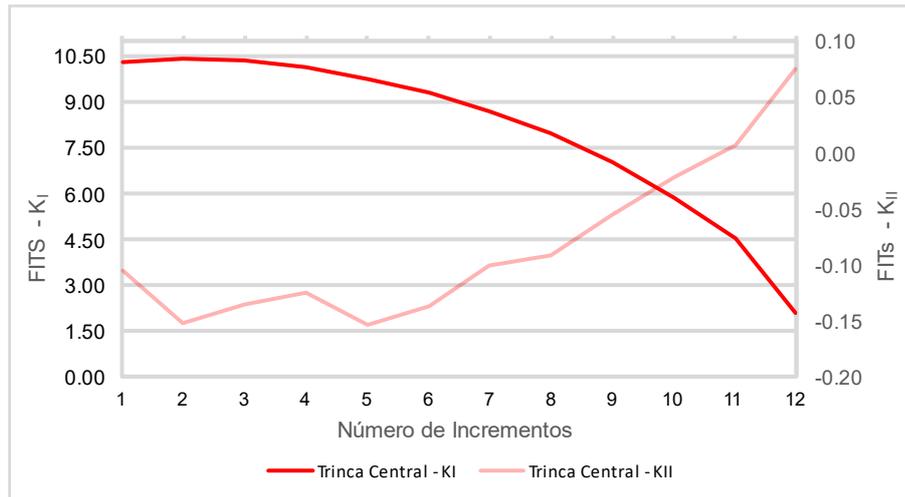


Figura 74 – Modelo X: Evolução dos FIT's em Função do Número de Incrementos

CAPÍTULO 7: CONCLUSÕES E SUGESTÕES FUTURAS

7.1 CONCLUSÕES

Os procedimentos metodológicos desenvolvidos por essa pesquisa se demonstraram suficientes para análise de propagação de múltiplas trincas críticas em materiais quase-frágeis, tais como o concreto simples, num contexto da MFLE. Sendo possível não somente averiguar o comportamento de elementos construídos com tais propriedades mecânicas e submetidos a condições de fissuração previstas, como também a possibilidade de se prospectar o comportamento mecânico do elemento durante sua fase de projeto, proporcionando maior segurança e conseqüente economia, dado que um projeto bem elaborado, executado e utilizado, apresenta maiores prazos de vida útil e, similarmente, maiores prazos de manutenção, tornando, em suma, extremamente tardia a necessidade de intervenções estruturais mais severas.

Buscando-se ampliar a compreensibilidade da metodologia construída e clarificar os procedimentos assumidos, fracionou-a em dois momentos, tendo-se o primeiro referente ao estudo de múltiplos trincamentos críticos e o segundo à aplicação da metodologia a modelos já bastante disseminados academicamente.

No que diz respeito ao primeiro momento, por meio dos procedimentos expressos por Parvanova e Gospodinov (2007), foi possível constatar que o método de definição do caminho de trincamento empregue pelo *software* BEMCRACKER2D é eficiente eficaz tanto para análise de elementos compostos por materiais frágeis, em dimensões mais habituais, quanto em elementos de viga parede. Destaca-se que Parvanova e Gospodinov (2007) também apresentam uma análise de propagação de múltiplas trincas críticas em materiais frágeis, porém, devido a atual relevância do método de fratura coesiva para análise em materiais frágeis, optou-se por seu emprego durante o prosseguimento da pesquisa.

Como aludido nos itens 5.1 e 7.1, a verificação do caminho dos múltiplos trincamentos críticos se deu pelos dois exemplos expressos por Parvanova e Gospodinov (2007). O Modelo I constou de uma viga bi-apoiada, submetida a carregamentos distribuídos de tensão, que haviam três avanços de trinca inicial, sendo as duas situadas próximas aos apoios tidas como cisalhantes e a central de flexão. O Modelo II apresentou uma viga também bi-apoiada, porém, desta vez, com seu apoio direito deslocado somente 61mm do centro da viga e com apenas um avanço de trinca no central elemento.

Para o Modelo I, algumas adaptações quanto às condições de contorno do elemento foram necessárias para que este pudesse ser submetido à análise via *software* BEMCRACKER2D. Entretanto, os ajustes mostraram-se convincentes, dado que os resultados expressos para ambos os modelos, ao serem contrastados aos presentes no trabalho de referência, apresentaram equiparidade no caminho de propagação e na malha deformada. Ressalta-se ainda, a assertividade manifesta na determinação do comportamento dos FIT's obtidos por meio da análise metodológica.

Finalmente, tomando o segundo momento da metodologia desenvolvida apresentou um total de dez modelos, todos com aplicação da metodologia desenvolvida para a análise de propagação de múltiplos trincamentos críticos em elementos compostos por materiais frágeis. Todos os dez modelos seguiram as diretrizes já referidas até aqui, onde todos apresentaram resultados suficientemente assertivos, representando com extrema precisão os problemas acordados.

Portanto, fundamentado em todo o trajeto desta pesquisa, tem-se que o *software* BEMCRACKER2D, munido do *software* BEMLAB2D e rotina computacional complementar, desenvolvida via *software* MATLAB, apresentou-se apto para realização de prospecções e predições do caminho de múltiplos trincamentos críticos em materiais frágeis, tais como o concreto, num contexto da MFLE.

7.2 SUGESTÕES FUTURAS

A metodologia empregue neste trabalho apresentou grande eficiência e eficácia em seus resultados, expressando excelente precisão à cada processo. No entanto, para que se alcance a excelência, alguns avanços ainda se fazem necessários e contam com o surgimento de novas pesquisas. São eles:

- Unificar computacionalmente toda a metodologia desenvolvida neste trabalho com aquela empregue pelos *softwares* BEMLAB2D e BEMCRACKER2D;
- Propiciar integração direta entre o *software* BEMCRACKER2D e sua interface gráfica, o BEMLAB2D;
- Possibilitar o salvamento interativo do modelo via plataforma gráfica de modelagem; desenvolver a possibilidade de análise às aplicações sobre elementos tridimensionais, e;
- Ampliar o campo de análise à elementos de composição material consideravelmente heterogênea, tais como elementos de concreto armado.

BIBLIOGRAFIA

ABNT NBR 6118:2014. **Projeto de Estruturas de Concreto – Procedimento**. Brasil: Associação Brasileira de Normas Técnicas, 10-11p, 2008.

ABNT NBR 7190:1997. **Projeto de Estruturas de Madeira**. Brasil: Associação Brasileira de Normas Técnicas, 6p, 2008.

ABNT NBR 8800:2008. **Projeto de estruturas de aço e de estruturas mistas de aço e concreto de edifícios**. Brasil: Associação Brasileira de Normas Técnicas, 14p, 2008.

ALIABADI, M. H. **The Boundary Element Method: Applications in Solids and Structures**. Volume 2, Wiley - John Wiley & Sons, Chichester, England, viii, 1, 4-5, 138p, 2002.

ALIABADI, M. H.; BREBBIA, C. A. **Boundary Element Formulations in Fracture Mechanics: A Review**. Transactions on Engineering Sciences, Volume 13, Southampton, UK, 3-5p, 1996.

ANDERSON, T. L. **Fracture Mechanics: Fundamentals and Applications**. Third edition, CRC Press - Taylor & Francis, New York, EUA, 1-10, 16-17, 42-45, 103, 156-158, 219-243, 249-250p, 2005.

BARSON, J. M.; ROLFE, S. T. **Fracture and Fatigue Control in Structures – Applications of Fracture Mechanics**. Third edition, American Society for Testing and Materials - ASTM, Massachusetts, EUA, 30-35p, 1999.

BAZANT, Z.; PLANAS, J. **Fracture and Size Effect in Concrete and Other Quasibrittle Materials**. CRC Press LLC, Florida, EUA, 1-10, 23, 45-47, 218-222, 257p, 1998.

BROEK, D. **Elementary Engineering Fracture Mechanics**. Martinus Nijhoff Publishers, Boston, EUA, 6-13, 24-48p, 1984.

BROEK, D. **The Practical Use of Fracture Mechanics**. Kluwer Academic Publishers, Ohio, EUA, 2-3, 8-14p, 1988.

CALLISTER, W.; RETHWISCH J. **Ciência e Engenharia dos materiais: Uma Introdução**. Oitava edição, GEN Grupo Editorial Nacional, Rio de Janeiro, RJ, 145, 204, 226p, 2012.

CARASEK, H.; FERRARETO, J.; BEJA, I.; CERATTI, J. **Materiais de Construção Civil e Princípios de Ciência e Engenharia dos Materiais – Introdução, Ciência dos Materiais,**

Rochas e Solos, Aglomerantes Minerais: Mecânica Fratura e Fraturamento do Concreto. IBRACON, Terceira edição, Volume 1, São Paulo, SP, 5-6, 11-12, 18-19p, 2018.

CORDEIRO, S. G. F. Formulações do Método dos Elementos de Contorno Aplicadas à Análise Elástica e à Fratura Coesiva de Estruturas Compostas Planas. Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, SP, 142-150p, 2015.

DELGADO NETO, A. M. BEMLAB2D: Interface Gráfica de Modelagem, Visualização e Análise com Elementos de Contorno – Uma Aplicação em Problemas Elastostáticos. Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, DF, 34, 36-63-p, 2017.

DIETER, G. E. Metalurgia Mecânica. Segunda edição, Guanabara Dois, 7-10, 168-169, 213-215, 225-228, 237p, 1981.

DOWLING, N. E. Mechanical Behavior of Materials. Fourth Edition, Pearson Education Limited, Harlow, England, 339, 344, 350, 393-394p, 2013.

DUARTE, C. A. A Review of Some Meshless Methods to Solve Partial Differential Equations. TICAM - Texas Institute for Computational and Applied Mathematics, Texas, EUA, 1, 18p, 1995.

DURAND, R.; DA SILVA, F. H. B. T. A Coulomb-based model to simulate concrete cracking using cohesive elements. International Journal of Fracture volume 220, 1-3p, 2019.

GAO, X. W. The Radial Integration Method for Evaluation of Domain Integrals with Boundary-Only Discretization. Elsevier Science, Engineering Analysis with Boundary Elements, Issue 26, The International Journal for Advances in Boundary Element and Other Mesh Reduction Methods, Mississippi, EUA, 905-906p, 2002.

GOMES, G. Aplicação dos Métodos de Elementos de Contorno e Reciprocidade Dual em Problemas de Plasticidade 2D Orientada à Objeto. Tese de Doutorado, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, DF, 2-5, 21, 27-p, 2006.

GOMES, G.; DELGADO NETO, Á. M. Modelling and 2D Cracks View Using Dual Boundary Integral Equation. XXXVII Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering - CILAMCE, Brasília, DF, 6-9p, 2016-b.

GOMES, G.; MIRANDA, A. C. O. Analysis of Crack Growth Problems Using the Object-

Oriented Program BEMCRACKER2D. Frattura Ed Integrità Strutturale, Volume XII, Issue 45, The International Journal of Gruppo Italiano Frattura - IGF, Lazio Meridionale, Italia, 67-69p, 2018.

GOMES, G.; Silva, G.; Paiva, G.; Martins, A. **Avaliação Numérica de FITs em Problemas de Múltiplas Trincas.** XXXVII Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering - CILAMCE, Brasília, DF, 1-6p, 2016-a.

GOODS, S. H.; BROWN, L. M. **The Nucleation of Cavities by Plastic Deformation.** Acta Metallurgical, Volume 27, Cambridge, United Kingdom, 2, 6p, 1979.

HILLERBORG, A.; MODÉER, M.; PETERSSON, P. E. **Analysis of Crack Formation and Crack Growth in Concrete by Means of Fracture Mechanics and Finite Elements.** Division of Building Materials. Cement and Concrete Research, vol 6, Lund, Sweden, 774-777p, 1976.

INGLIS, C. E. **Stresses in a Plate Due to the Presence of Cracks and Sharp Corners.** Institution Naval Architects, 219-220, 231-241p, 1913.

KARIHALOO, L. B. **Fracture Mechanics & Structural Concrete.** Harlow, Longman Scientific & Technical, 1-3; 49-66p, 1995.

KUMAR, P. **Elements of Fracture Mechanics.** McGraw Hill, New Delhi, India, 1-10, 35-36, 45-47, 69-71p, 2009.

KUNA, M. **Finite Elements in Fracture Mechanics: Theory – Numerics – Applications.** Springer, Solid Mechanics and Its Applications, Vol. 201, Freiberg, Germany, 5-9, 17-18, 21-23p, 2013.

KZAM, A. K. L.; CODA, H. B. **Tratamento das Integrais Singulares do Método dos Elementos de Contorno.** Cadernos de Engenharia de Estruturas, Volume 12, São Carlos, São Paulo, 18p, 2010.

LEONEL, E. D. **Modelos Não Lineares do Método dos Elementos de Contorno para Análise de Problemas de Fratura e Aplicação de Modelos de Confiabilidade e Otimização em Estruturas Submetidas à Fadiga.** Tese de Doutorado, Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, SP, 42-51p, 2009.

MANESCHY, J. E. **Integral-J para Carregamentos Cíclicos.** Tese de Doutorado, Instituto de Pesquisas Energéticas e Nucleares, Autarquia Associada à Universidade de São Paulo, SP, 8-9p, 1998.

MEDEIROS, A. **Estudo do Comportamento à Fadiga em Compressão do Concreto com Fibras**. Tese de Doutorado, Departamento de Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, RJ, 26p, 2012.

MEDINA, J. A. H. **Avaliação de Previsões e Fratura Elastoplástica**. Tese de Doutorado, Departamento de Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, RJ, 19, 26-33, 57-60p, 2014.

MEHTA, P. K.; MONTEIRO, P. J. M. **Concreto: Microestrutura, propriedades e materiais**. IBRACON, Terceira edição, Volume 1, São Paulo, SP, 21p, 2008.

MIRANDA, A. C. O. **Propagação de Trincas por Fadiga em Geometrias 2D Complexas Sob Cargas Cíclicas Variáveis**. Tese de Doutorado, Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, RJ, 1, 8-9, 17-18, 34-39p, 2003.

MOJIRI, S. **Numerical Analysis of Cohesive Crack Growth Using Extended Finite Element Method (X-FEM)**. Master of Science Thesis, École Centrale de Nantes, Institut de Recherche en Génie Civil et Mécanique, The International Center for Numerical Methods in Engineering, Nantes, FR, 35-58p, 2010.

MOURA, D. C. **Caminho de Propagação de Trinca: Modelagem Automática e Comparação de Diferentes Critérios com o Programa BEMCRACKER2D**. Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, DF, 17-18, 27-32p, 2018.

OLIVEIRA, H. L. **Uma Formulação Alternativa do Método dos Elementos de Contorno Aplicada à Análise da Propagação de Fissuras em Materiais Quase Frágeis**. Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, SP, 52-72p, 2013.

OLIVEIRA, T. A. A. **Análise Multiscale Via Método dos Elementos de Contorno Dual de Fuselagem de Aeronave**. Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, DF, 34-36p, 2019.

OLIVEIRA, T. A. A.; GOMES, G.; EVANGELISTA JUNIOR; F. **Multiscale Aircraft Fuselage Fatigue Analysis by the Dual Boundary Element Method**. Elsevier Science, Engineering Analysis with Boundary Elements, Issue 104, The International Journal for Advances in Boundary Element and Other Mesh Reduction Methods, Mississippi, EUA, 107p,

2019.

PARVANOV S.; GOSPODINOV, G. **A Dual Boundary Element Procedure for Analysis of Fracture in Concrete**. Journal of Theoretical and Applied Mechanics, Volume 37, Issue 1, Sofia, Bulgaria, 1p, 1993.

PINHEIRO, D. C. C. **Estratégias Baseadas na Participação da Unidade para Simulação do Comportamento de Meios Parcialmente Frágeis**. Tese de Doutorado, Departamento de Engenharia Civil, Universidade Federal de Minas Gerais, MG, 1p, 2019.

PLANAS, J.; ELICES, M. **Fracture Criteria for Concrete: Mathematical Approximations and Experimental Validation**. Engineering Fracture Mechanics, Volume 35, Nº 1-3, Madrid, Spain, 1-8p, 1990.

PORTELA, A.; ALIABADI, M. H.; ROOKE, D. P. **Dual Boundary Element Incremental Analysis of Crack Propagation**. Computers & Structures, Volume 46, Number 2, Southampton, UK, 239p, 1993.

PORTELA, A.; ALIABADI, M. H.; ROOKE, D. P. **The Dual Boundary Element Method: Effective Implementation for Crack Problems**. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Volume 33, Issue 6, New Jersey, EUA, 1270-1272, 1278-1280p, 1992.

RICE, J. R. **A Path Independent Integral and the Approximate Analysis of Strain Concentration by Notches and Cracks**. Journal of Applied Mechanics, Providence, EUA, 2-12, 9p, 1968.

RODRIGUES, W. M. **Simulação de Coalescência com Múltiplas Trincas Usando o BEMCRACKER2D**. Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, DF, 10-30, 33-34p, 2018.

RODRÍGUEZ, H. Z. **Efeito da Tensão Nominal no Tamanho e Forma da Zona Plástica**. Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, RJ, 15p, 2007.

ROTS, J. G.; BLAAUWENDRAAD, J. **Crack Models for Concrete: Discrete or Smeared? Fixed, Multi-Directional or Rotating?**. Heron, vol. 34, n. 1, 7-20p, 1989.

ROTS, J. G.; NAUTA, P.; KUSTERS, G. M. A.; BLAAUWENDRAAD, J. **Smeared Crack Approach and Fracture Localization in Concrete**. Heron, vol. 30, n. 5-10p, 1985.

- SALEH, A. L.; ALIABADI, M. H. **Crack Growth Analysis in Reinforced Concrete Using BEM**. Journal of Engineering Mechanics, Vol 124, N° 9, London, England, 949-952p, 1998.
- SERENZA, E. N.; SUAREZ, O. A. G.; ROSSI, R. **A Study About SIF Estimation Using XFEM**. XLI Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering - CILAMCE, Foz do Iguacu, Paraná, 1-2p, 2020.
- SURENDRA, P. S., SWARTZ, S. E., OUYANG, C. **Fracture mechanics of Concrete: Applications of Fracture Mechanics to Concrete, Rock, and other Quasi-brittle Materials**. John Wiley & Sons, New York, EUA, 1-2p, 2020.
- TELLES, J. C. F. **The Boundary Element Method Applied to Inelastic Problems**. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Southampton, UK, 5-6, 77p, 1983.
- WILLIAMS, M. L. **On the Stress Distribution at the Base of a Stationary Crack**. Journal of Applied Mechanics, California, EUA, 113p, 1957.

APÊNDICE A – TRÊS LEIS CONSTITUTIVAS DO CONCRETO: LINEAR, BI-LINEAR E EXPONENCIAL

A determinação das forças coesivas atuantes sobre a zona de fraturamento pode ser realizada relacionando a σ_c e o Δu por meio de leis constitutivas. São diversas as soluções disponíveis na literatura, entretanto, serão adotadas para este trabalho as três comumente utilizadas na modelagem numérica de fratura no concreto. A primeira lei constitutiva é lei linear, conforme visto na Figura 21. Devido sua simplicidade e facilidade de aplicação numérica, esta é a lei mais utilizada. Sua aplicação consiste em uma relação linear entre as tensões coesivas e a Δu , como visto a seguir:

$$\sigma = E\varepsilon \quad \text{se } \varepsilon \leq \varepsilon_c \quad (3.3-a)$$

$$\sigma(\Delta u) = f_t \left(1 - \frac{\Delta u}{\Delta u_{cr}}\right) \quad \text{se } 0 \leq \Delta u \leq \Delta u_{cr} \quad (3.3-b)$$

$$\sigma(\Delta u) = 0 \quad \text{se } \Delta u > \Delta u_{cr} \quad (3.3-c)$$

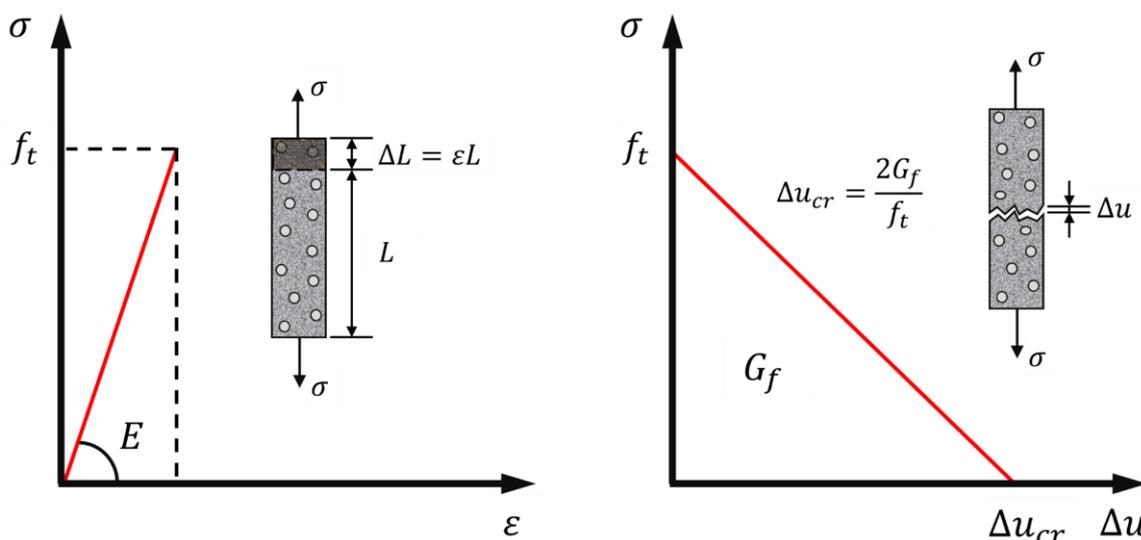


Figura A.1 - Lei constitutiva do concreto considerando curva coesiva linear (CORDEIRO – Adaptado, 2015)

A segunda lei constitutiva é lei bi-linear. Conforme visto na Figura 22, esta lei expressa duas diferentes relações lineares entre as forças coesivas presentes na zona de fraturamento e o Δu . Assim, podemos definir as tensões coesivas para essa lei como:

$$\sigma = E\varepsilon \quad \text{se } \varepsilon \leq \varepsilon_c \quad (3.4-a)$$

$$\sigma(\Delta u) = f_t - \left(\frac{f_t - f_t''}{\Delta u''} \right) \Delta u \quad \text{se } 0 \leq \Delta u \leq \Delta u'' \quad (3.4-b)$$

$$\sigma(\Delta u) = \frac{f_t'' \cdot \Delta u}{\Delta u'' - \Delta u_{cr}} + f_t'' \left(1 - \frac{\Delta u''}{\Delta u'' - \Delta u_{cr}} \right) \quad \text{se } \Delta u'' \leq \Delta u \leq \Delta u_{cr} \quad (3.4-c)$$

$$\sigma(\Delta u) = 0 \quad \text{se } \Delta u > \Delta u_{cr} \quad (3.4-d)$$

Os parâmetros necessários para devida utilização da lei coesiva bi-linear, f_t'' , $\Delta u''$ e Δu_{cr} , serão considerados de acordo com o modelo de Petersson (1981 *et al* LEONEL, 2009), o qual apresenta que:

$$f_t'' = \frac{f_t}{3} \quad (3.5-a)$$

$$\Delta u'' = \frac{0,8 \cdot G_f}{f_t} \quad (3.5-b)$$

$$\Delta u_{cr} = \frac{3,6 \cdot G_f}{f_t} \quad (3.5-c)$$

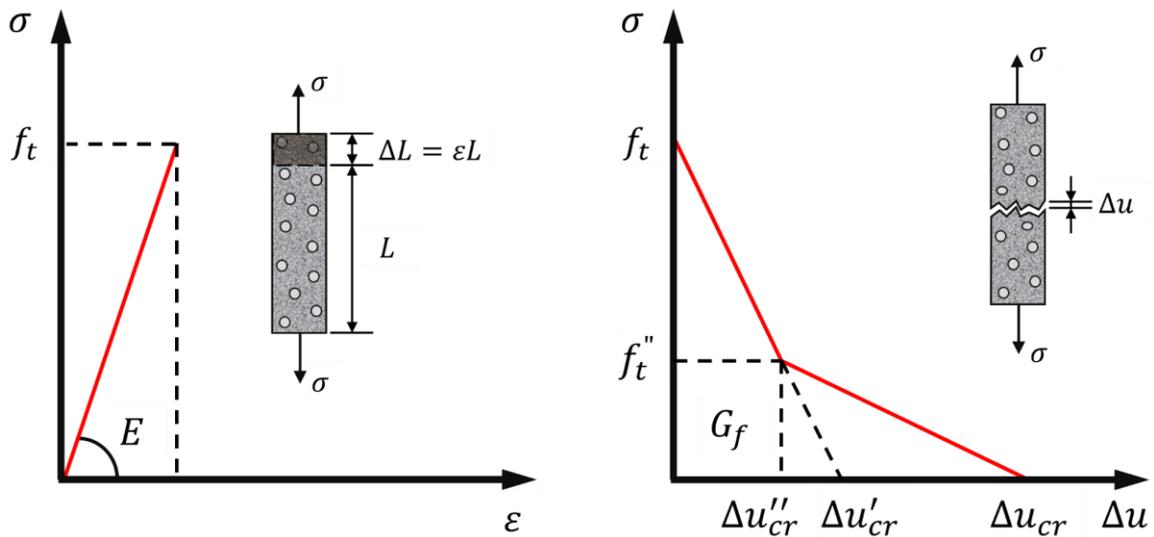


Figura A.2 - Lei constitutiva do concreto considerando curva coesiva bi-linear (CORDEIRO – Adaptado, 2015)

Por fim, é possível se modelar a zona coesiva por meio da lei exponencial. Como vista na Figura 23, essa lei possui comportamento de decréscimo exponencial, apresentando uma melhor aproximação dos valores experimentais quando comparado com as anteriores. Ela pode ser apresentada como:

$$\sigma = E\varepsilon \quad \text{se } \varepsilon \leq \varepsilon_c \quad (3.6-a)$$

$$\sigma(\Delta u) = f_t \cdot e^{-\frac{f_t \Delta u}{G_f}} \quad \text{se } 0 \leq \Delta u \leq \Delta u'' \quad (3.6-b)$$

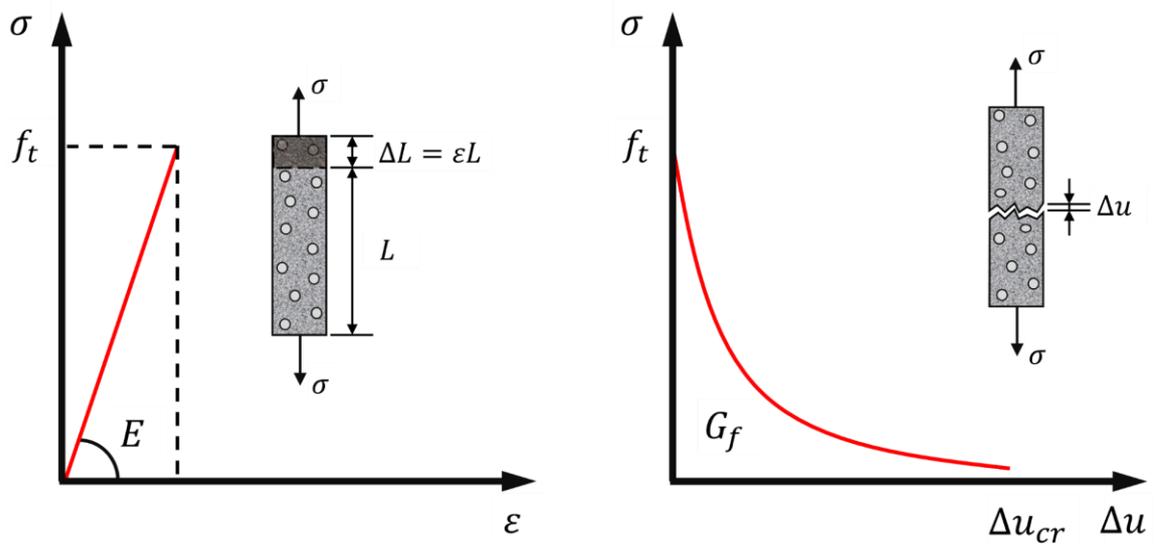


Figura A.3 - Lei constitutiva do concreto considerando curva coesiva exponencial (CORDEIRO – Adaptado, 2015)

APÊNDICE B – FLUXOGRAMAS DE ITERAÇÃO COM A GUI DO BEMLAB2D

As figuras presentes neste apêndice constam daquelas referidas sobre a utilização da interface gráfica BEMLAB2D, como descrito no item 4.3, em especial no seu subitem 4.3.2.

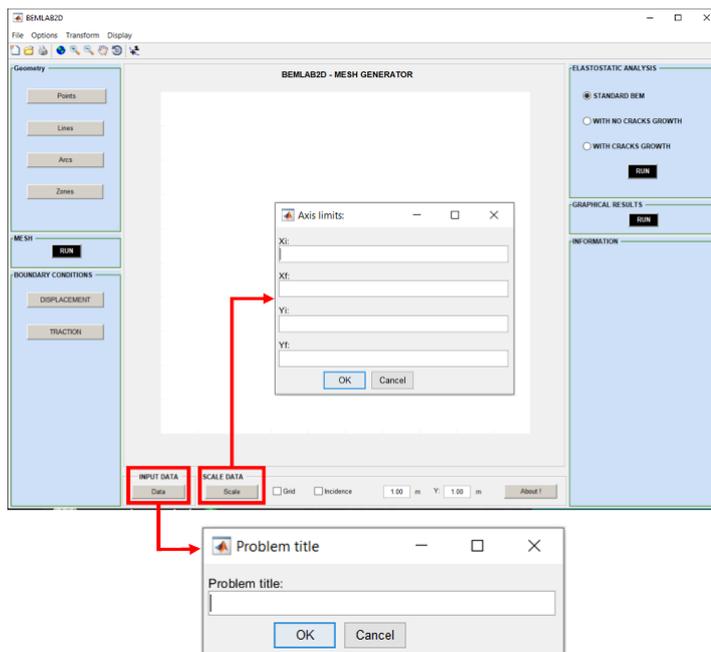


Figura B. 1 – Interface Gráfica do BEMLAB2D – Configurações Iniciais

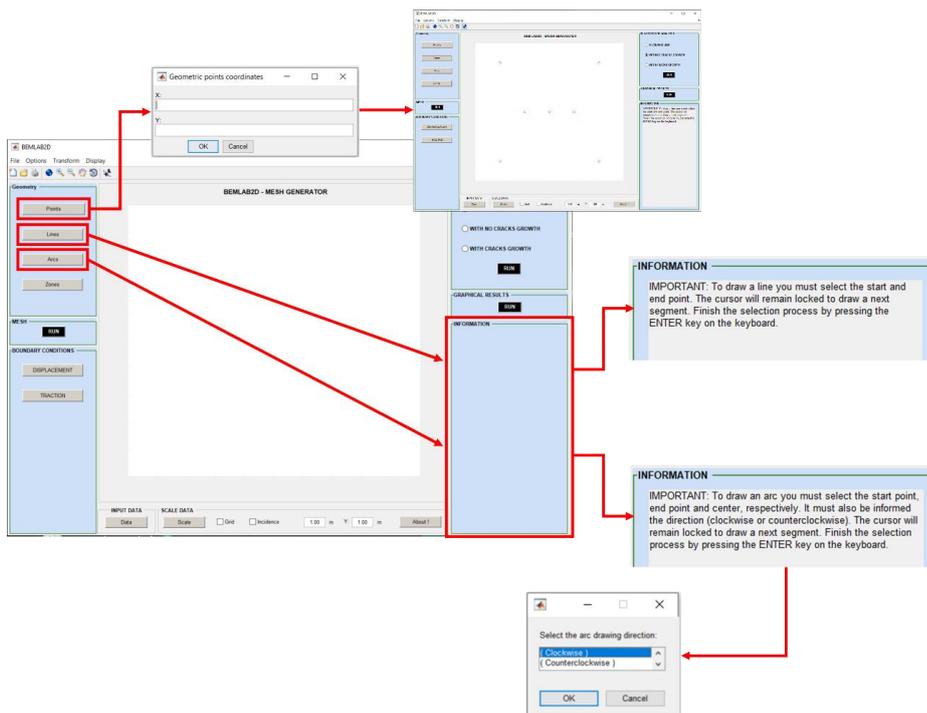


Figura B. 2 – Interface Gráfica do BEMLAB2D – Módulo I – GEOMETRY – Parte 1

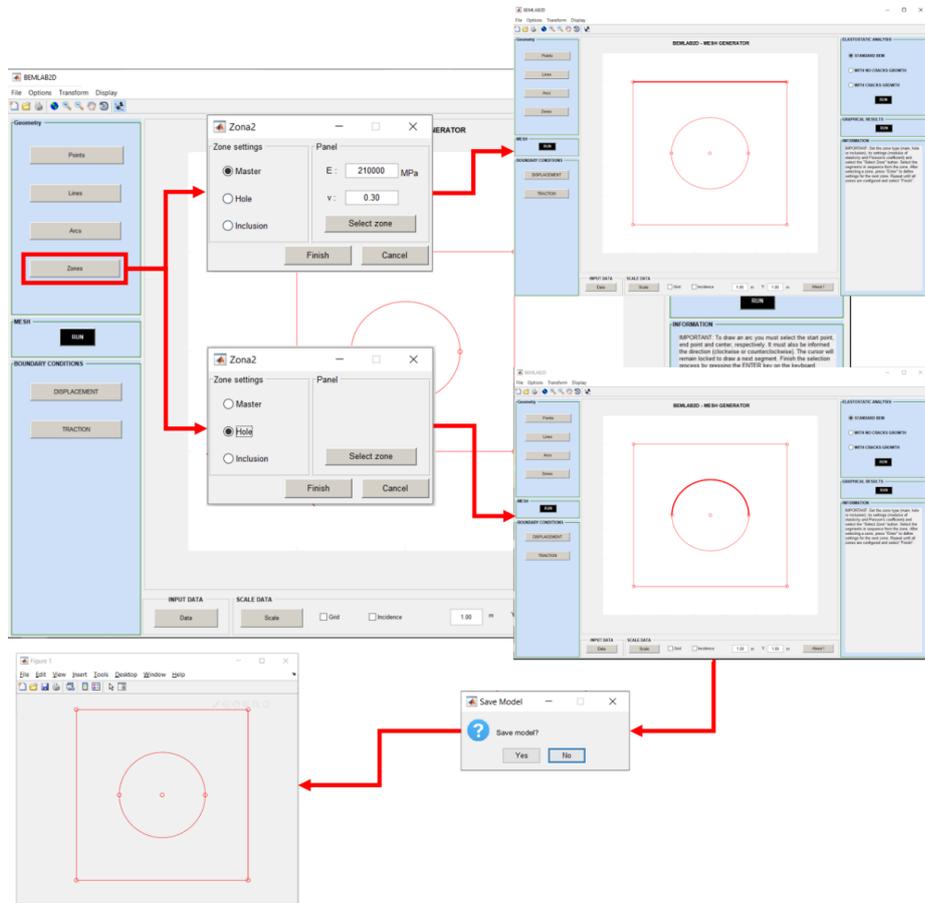


Figura B. 3 – Interface Gráfica do BEMLAB2D – Módulo I – GEOMETRY – Parte 2

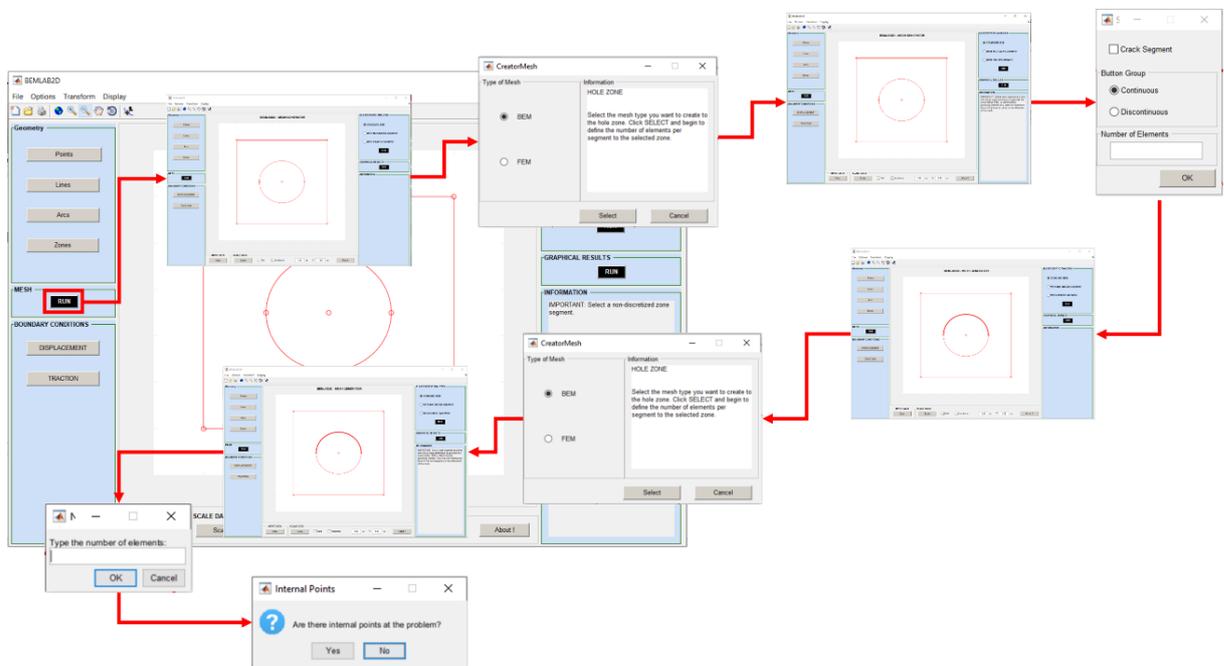


Figura B. 4 – Interface Gráfica do BEMLAB2D – Módulo II – MESH

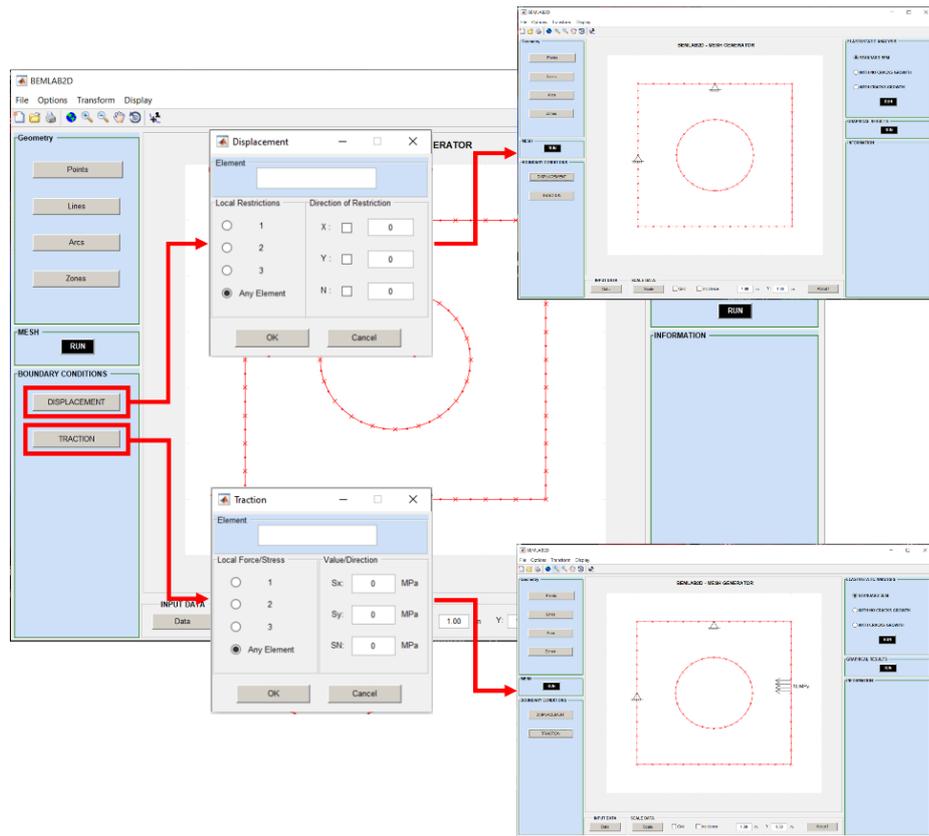


Figura B. 5 – Interface Gráfica do BEMLAB2D – Módulo III – BOUNDARY CONDITIONS

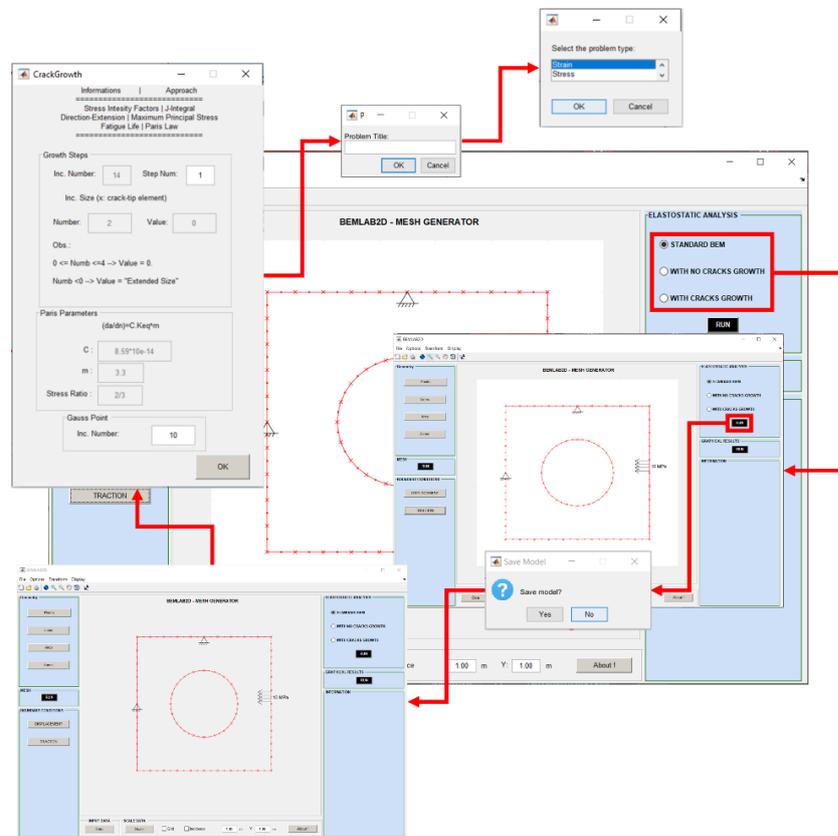


Figura B. 6 – Interface Gráfica do BEMLAB2D – Módulo IV – ELASTOSTATIC ANALYSIS

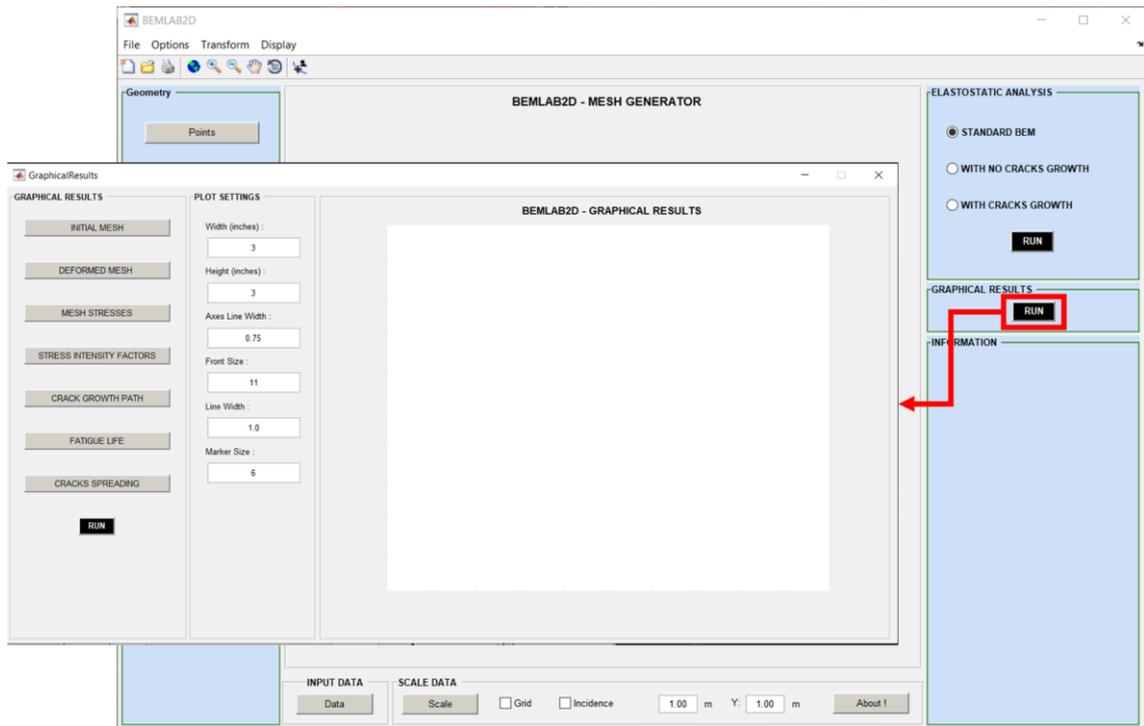


Figura B. 7 – Interface Gráfica do BEMLAB2D – Módulo V – GRAPHICAL RESULTS