Testando Propriedades de Grupos em Subgrupos pequenos

Raul Moreira Behs

Brasília, Brasil - Março de 2008

Resumo

Seja G um grupo. Na literatura há uma gama bastante ampla de teoremas que ensinam como inferir determinada propriedade $\mathfrak{X}$ para G, verificando $\mathfrak{X}$ apenas nos membros de uma família teste $\mathfrak{T}G$, formada por alguns subgrupos "pequenos". A presente Tese é uma contribuição que segue esta linha de pesquisa.

Abstract

Let G be a group. In the literature, there are various theorems which teach how to conclude a certain property $\mathfrak{X}$ for G, verifying $\mathfrak{X}$ at the members of a test family $\mathfrak{T}G$, which consists of some "small" subgroups only. The present Thesis is a contribution which follows this research line.

Índice

Lista de símbolos

$\langle \ldots \rangle$	subgrupo gerado por $\{ \ldots \}$
$Aut(G)$	grupo dos automorfismos de G
$H \cong_G K$	H e K são G-isomorfos
$N \times H$	produto direto de N e H
$[N]H$	produto semidireto de N por H $(N \trianglelefteq G)$
$N \wr H$	produto entrelaçado (restrito) de N e H
$H \leq G, \ \ H \trianglelefteq G,$	H é subgrupo, subgrupo normal de G,
$H \lhd G, \ \ H \trianglelefteq\trianglelefteq G$	H é subgrupo normal próprio, subnormal de G
$\lvert G \rvert$, $o(g)$	cardinalidade de G, ordem do elemento g
$C_G(N)\,, N_G(N)$	centralizador e normalizador de N em G, resp.
$x^y = y^{-1}xy$ e $[x,y] = x^{-1}x^y$	conjugado e comutador
$H^G = \langle x^g \mid x \in H,\ g \in G \rangle$	o fecho normal de H em G
$x^G = \{x^g \mid g \in G\}$	classe de conjugação de x em G
$\langle x^G \rangle = \langle x \rangle^G$	subgrupo normal gerado pelo elemento $x \in G$
$G' = \langle [x,y] \mid x, y \in G \rangle$	subgrupo comutador de G
$G^{(i)} = (G^{(i-1)})'$	o i-ésimo subgrupo comutador de G
$[g_1, \cdots, g_k] = [[g_1, \cdots, g_{k-1}], g_k]$	comutador de peso k
$\Gamma_k(G) = \langle [g_1, \ldots, g_k] \mid g_1, \ldots, g_k \in G \rangle$	o k-ésimo termo da série central descendente de G
$\mathbf{R}_2(G) = \{x \mid [x,g,g] = 1\, \forall\, g \in G\}$	subgrupo dos elementos 2-engelianos à direita de G
$\mathbf{O}\,(G)$	conjunto dos elementos de ordem ímpar de G
$\mathbf{H}(G)$	hipercentro de um grupo G
$\mathbf{K}(G)$	hipercentro local de um grupo G (ver I), pg. 23)
$Fit(G)$	subgrupo de Fitting de G
$\boldsymbol{\Phi}(G)$	subgrupo de Frattini de G
$\boldsymbol{\Phi}_p(G)$	ver pg. 5
$H_G = \bigcap_{g \in G} H^g$	Núcleo normal de H em G
$\zeta_k(G)$	k-ésimo centro de G $(k \geq 0)$
$\Lambda_{\mathfrak{N}}(G)$	o nil-preservador local de G (ver II), pg. 23)

$\mathfrak{X}$	classe ou propriedade $\mathfrak{X}$ de grupos
$\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$	classe dos $\mathfrak{X}$-por-$\mathfrak{Y}$ grupos
$\mathfrak{X}^2$	a classe dos meta $\mathfrak{X}$-grupos.
$L\mathfrak{X}$	classe dos $\mathfrak{X}$-grupos locais
$\mathfrak{X}^\infty$	classe dos poli-$\mathfrak{X}$ grupos
$H\mathfrak{X}$	classe dos hiper-$\mathfrak{X}$ grupos
$\mathfrak{U}$	classe universal de todos os grupos
$\mathfrak{E}$	classe dos grupos enumeráveis
$\mathfrak{G}$	classe dos grupos finitamente gerados
$\mathfrak{G}_n$	classe dos grupos gerados por $\leq n$ elementos
$\hat{\mathfrak{M}}$	classe dos grupos Noetherianos
$\mathfrak{A}\,, \mathfrak{F}\,, \mathfrak{Z}\,, \mathfrak{N}\,, \mathfrak{F}C$	classes dos grupos abelianos, finitos, cíclicos, nilpotentes e FC-grupos, resp.
$\mathbf{O}_{\mathfrak{X}}(G)$	O $\mathfrak{X}$-radical de G
$\mathbf{Fit}_{\mathfrak{X}}(G)$	Fitting $\mathfrak{X}$-subgrupo de G

Introdução

A filosofia desta tese é investigar quando uma determinada propriedade $\mathfrak{X}$ de grupos satisfeita por um dado grupo G pode ser inferida a partir de um conjunto adequado de subgrupos, denominado *família teste da propriedade* $\mathfrak{X}$ *em* G.

Um exemplo simples dessa filosofia é que a propriedade de um grupo G ser abeliano pode ser testada em seus subgrupos 2-gerados, i.e, se todos os subgrupos 2-gerados de G são abelianos então G será abeliano. Assim, a família dos subgrupos 2-gerados é uma família teste da propriedade de ser abeliano.

Em geral, pensemos que é dado um grupo G pertencente a um certo universo $\mathfrak{V}$ de grupos e uma propriedade $\mathfrak{X}$ a ser verificada para G, examinando $\mathfrak{X}$ somente nos membros de uma família teste $\mathfrak{T}G$, formada por alguns subgrupos "pequenos"de G. Os teoremas estabelecidos têm portanto a forma

$$G \in \mathfrak{V} \text{ e } \mathfrak{T}G \subseteq \mathfrak{X}G \implies G \in \mathfrak{X} .$$

Mencionando mais um exemplo: A nilpotência $\mathfrak{N}$ no universo $\mathfrak{F}$ dos grupos finitos, é testável na família $\mathfrak{G}_2G$ dos subgrupos 2-gerados. Em símbolos vem:

$$G \in \mathfrak{F} \text{ e } \mathfrak{G}_2G \subseteq \mathfrak{N}G \implies G \in \mathfrak{N} .$$

No capítulo I enunciaremos alguns resultados clássicos que serão úteis para o restante da tese.

Por definição, propriedades *locais* (ou localmente fechadas) são $\mathfrak{G}$-testáveis, i.e., detectáveis pela família $\mathfrak{G}G$ dos subgrupos finitamente gerados de qualquer grupo G.

Enquanto importantes propriedades básicas de grupos (nilpotência, solubilidade), não são propriedades localmente fechadas, investigaremos no capítulo II propriedades $\mathfrak{E}$-detectáveis, ou seja, propriedades para as quais a família $\mathfrak{E}G$ dos subgrupos *enumeráveis* forma uma família teste. Há um trabalho clássico de R. Baer [2], que versa sobre este assunto sob um aspecto bastante geral. Começamos o nosso capítulo II verificando que propriedades como nilpotência, solubilidade, etc. (ver proposição 1); são $\mathfrak{E}$-detectáveis.

Introduzimos operadores $\mathfrak{E}$-*compatíveis* (definição 4) e *classes de Fitting* (definição 5) com a finalidade de mostrar que outras propriedades além das da proposição 1, também são $\mathfrak{E}$-detectáveis. Por exemplo, $\mathfrak{N}\mathfrak{F}$ (de ser nilpotente-por-finito), $\mathfrak{A}^{\infty}\mathfrak{F}$ (de ser solúvel-por-finito), ou a propriedade de um grupo G ser policíclico sobre o n-ésimo centro $\zeta_n(G)$ $(n \geq 0)$, etc.

O capítulo II é, assim como o capítulo I, auxiliar. Alguns de seus resultados serão utilizados no capítulo III, capítulo este que tem como objetivo maior demonstrar o seu

Teorema Principal

a) *Suponhamos G solúvel-por-Noetheriano e seus subgrupos metabelianos enumeráveis sejam centrais-por-policíclicos. Então G é central-por-Noetheriano.*

b) *Suponhamos G é solúvel-por-finito e seus subgrupos metabelianos enumeráveis sejam centrais-por-finitos. Então G é central-por-finito.*

No capítulo IV estudaremos a $\mathfrak{H}\mathfrak{N}_c$-propriedade, i.e, a propriedade de um grupo ser hipercentral-por-(nilpotente de classe $\leq c$) ou, equivalentemente, a propriedade de um grupo G possuir seu subgrupo $\Gamma_{c+1}(G)$ um grupo hipercentral. Veremos primeiro, no teorema 8, que em grupos finitos a $\mathfrak{H}\mathfrak{N}_c$-$(= \mathfrak{N}\mathfrak{N}_c)$-propriedade pode ser testada na família $\mathfrak{G}_{c+2}G$, dos subgrupos de G que são (c+2)-gerados. No decorrer do capítulo generalizamos a validade deste teorema para algumas classes de grupos infinitos como, por exemplo, a dos grupos hiperfinitos, dos grupos hiper-policíclicos e outras ainda mais gerais (ver teorema 10).

Lembramos aqui que um grupo G é um *hiper-$\mathfrak{X}$-grupo*, se cada imagem não-trivial de G possui um $\mathfrak{X}$-subgrupo normal não-trivial. G é um *poli-$\mathfrak{X}$-grupo*, se ele possui uma série subnormal (finita) com fatores que são $\mathfrak{X}$-grupos.

Finalmente, no quinto e último capítulo, demonstraremos um resultado aparentemente inédito (Teorema Principal) que diz:

Em grupos supersolúveis a nilpotência pode ser testada pela família dos subgrupos metacíclicos.

Juntando este teorema a um outro resultado clássico, devido a BAER: *Todo grupo hipercíclico é localmente supersolúvel*, obtemos uma interessante caracterização dos grupos hipercentrais, a saber:

um grupo é hipercentral se e somente se é hipercíclico e todos os seus subgrupos metacíclicos são nilpotentes .

Já o grupo alternado $\mathbf{A}_4$ mostra que, em grupos solúveis, a nilpotência não pode ser testada pelos subgrupos metacíclicos.

Neste contexto veremos por fim um importante exemplo mostrando que, em grupos solúveis a nilpotência não é testável, mesmo pelos subgrupos *poli*-cíclicos. Isto mostra que a dificuldade de se ampliar o universo dos grupos supersolúveis no teorema principal deste último capítulo.

Capítulo I

Resultados Preliminares.

Neste primeiro capítulo enunciaremos alguns resultados auxiliares para a compreensão dos teoremas apresentados ao longo desta tese.

Os resultados que aqui apresentaremos são todos clássicos e na maioria dos casos não exporemos suas demonstrações colocando, no entanto as referências onde estas possam ser encontradas.

Ressaltamos também que os fatos aqui expostos poderão ser usados explicitamente mas também de maneira tácita, dependendo do contexto.
Vamos iniciar recordando um teorema clássico da teoreia dos grupos, a saber:

Teorema de Schreier

Sejam G um grupo finitamente gerado e $H \leq G$.
Se $|G : H| < \infty$ então H é finitamente gerado.
Demonstração. Uma demonstração deste pode ser encontrada em [9].

■

Também importante nesta tese será o

Teorema de Kuroš

Um grupo abeliano satifaz a condição minimal (sobre os seus subgrupos) se, e somente se, pode ser escrito como soma direta finita de grupos quasicíclicos (grupos de Prüfer) e grupos cíclicos de ordem potência de primo.
Demonstração. Ver em [14], 4.2.11, pg. 104.

■

Façamos, agora, alguns comentários a respeito de

§ 1.1- Classes de SCHUR

Definição 1. Uma classe $\mathfrak{X}$ de grupos é chamada *classe de Schur* sempre que:

$$G/\zeta(G) \in \mathfrak{X} \Rightarrow G' \in \mathfrak{X}.$$

É claro que a classe $\mathfrak{A}$ dos grupos abelianos é uma classe de Schur. Bem menos evidente é o:

Resultado 1. *As seguintes classes são classes de Schur:*

*a) A classe $\mathfrak{F}$ dos grupos finitos (*Schur, 1902 *[17]).*

b) A clase $\mathfrak{Z}^{\infty}$ dos grupos policíclicos

c) A classe $\mathfrak{Z}^{\infty}\mathfrak{F}$ dos grupos policíclicos-por-finito.

Demonstração. A demonstração do ítem a) se encontra em [14], 10.1.4, pg. 287; enquanto as dos ítens b) e c) podem ser encontradas em [15], pg. 115.

■

§ 1.2- O Hipercentro de um grupo.

Um importante subgrupo característico de um dado grupo G é o *hipercentro*, $\mathbf{H}(G)$, que pode ser defindo pela

Definição 2. Seja G um grupo qualquer. Considere a família:

$$\mathcal{F}_1(G) = \{N \trianglelefteq G : \zeta(G/N) = N/N\}.$$

Então o hipercentro de G é dado por:

$$\mathbf{H}(G) = \bigcap_{N \in \mathcal{F}_1(G)} N. \qquad (*)$$

É um exercício interessante mostrar que o hipercentro também pode ser descrito por:

$$\mathbf{H}(G) = \prod_{M \in \mathcal{F}_2(G)} M, \qquad (!)$$

onde

$$\mathcal{F}_2(G) = \left\{ M \trianglelefteq G \;\middle|\; \frac{M}{N} \cap \zeta\left(\frac{G}{N}\right) > \frac{N}{N}\,,\ \forall\, N \trianglelefteq G \text{ com } N < M \right\}\,.$$

Também é fato que $\mathbf{H}(G) \in \mathcal{F}_1(G) \cap \mathcal{F}_2(G)$.

Não é difícil verificar as seguintes propriedaes básicas do hipercentro de um grupo (ver por exemplo [11] e [13]):

I) $T \cap \mathbf{H}(G) \leq \mathbf{H}(T)$, $\forall\, T \leq G$.

II) $\mathbf{H}(G)N/N \leq \mathbf{H}(G/N)$, $\forall\, N \trianglelefteq G$.

III) $\mathbf{H}(G)/N = \mathbf{H}(G/N)$, $\forall\, N \trianglelefteq G$ com $N \leq \mathbf{H}(G)$.

Em particular, $\mathbf{H}(G/\mathbf{H}(G))$ é trivial.

Um grupo G é chamado *hipercentral* se $G = \mathbf{H}(G)$. Não é difícil a verificação do:

Lema 1. *Um grupo é hipercentral se, e somente se, $\zeta(G/N) \neq N/N$ para todo $N \triangleleft G$.*

A classe dos grupos hipercentrais é denotada por $\mathfrak{H}$.
Vamos agora enunciar, sem demonstração um teorema que diz respeito a cobertura de grupos, a saber o:

Teorema 1. *(Teorema de* B.H Neumann *[10])*

Se um grupo G possui uma cobertura finita de subgrupos dada por

$$G = \bigcup_{i=1}^{n} H_i$$

então G continua coberto por aqueles H_{is} para os quais $|G : H_i| < \infty$.

Demonstração. Pode ser encontrada em [15], L. 4.17, pgs. 105/106.

■

Lema 2. *Seja N um p-grupo finito e $G/\mathbf{C}_G(N)$ um p-grupo (finito). Então $N \cap \zeta(G) \neq \{1\}$.*

Demonstração. Faça $C = \mathbf{C}_G(N)$.

Como o p-grupo G/C age em N por conjugação, temos a decomposição em órbitas $N = \{1\} \,\dot\cup\, x_2^G \,\dot\cup\, x_3^G \,\dot\cup\, \dots \,\dot\cup\, x_r^G$ para certos $x_2, \dots, x_r \in N$. Como $|\,G : \mathbf{C}_G(x_k)| = p^{s_k}$ com $s_k \geq 0$ e $p \dagger |\,N - \{1\}|$, segue que existe k com $x_k^G = x_k$. Logo $x_k \in \zeta(G)$.

■

O importante teorema abaixo é devido a Baer e apresentaremos a sua demonstração utilizando uma técnica que será repetida em outro contexto no capítulo IV. (Veja também [15], Th. 4.18, pg. 107).

Teorema da cobertura de Baer

Um grupo G admite um cobertura finita por subgrupos hipercentrais se e somente se $G/\mathbf{H}(G)$ é finito.

Demonstração. ($\Rightarrow$) Faça $H = \mathbf{H}(G)$. Seja $G/H = \{H, Hx_2, \cdots, Hx_n\}$. Para cada $1 \leq i \leq n$, defina $H_i = H\langle x_i \rangle$. É claro que $G = \bigcup_{i=1}^{n} H_i$. Afirmamos que cada H_i é hipercentral. Pela propriedade I) segue que $H \leq \mathbf{H}(H_i)$ e como $H_i^{'} \leq H$ segue que $H_i/\mathbf{H}(H_i)$ é abeliano donde $H_i = \mathbf{H}(H_i)$, pois $\zeta(H_i/\mathbf{H}(H_i))$ é trivial. Ou seja, H_i é hipercentral.

($\Leftarrow$) Suponha que G admita uma cobertura de finitos subgrupos hipercentrais dada por

$$G = \bigcup_{i=1}^{n} H_i. \qquad (*)$$

Por B.H Neumann (Teorema 1) podemos supor $|\,G : H_i| < \infty$ para todo $1 \leq i \leq n$.

Primeiro vamos observar que a hipótese (do grupo ser coberto por finitos subgrupos hipercentrais) é fechada a quocientes. De fato, tomando $N \trianglelefteq G$ é claro que para G/N vale a seguinte cobertura de grupos hipercentrais

$$G/N = \bigcup_{i=1}^{n} H_i N/N.$$

Façamos agora $K = \bigcap_{i=1}^{n} (H_i)_G$. Temos que $|\,G : K| < \infty$ pois $|\,G : (H_i)_G| < \infty$ para todo $1 \leq i \leq n$. Basta, portanto, mostrarmos que $K \leq \mathbf{H}(G)$. Pela caracterização dada em (!) (ver página 2) e pelo fechamento da nossa hipótese a quocientes é suficiente verificar que $K \cap \zeta(G) \neq \{1\}$.

Bem, K é hipercentral e portanto $\zeta(K) \neq \{1\}$.

Caso 1: $\zeta(K)$ possui elementos de ordem finita.

Tomemos $x \in \zeta(K)$ tal que $o(x) = p$, um primo. Faça $C = C_G(x)$.
Já que $K \leq C$ e $|\,G : K|$ é finito, então $|\,G : C| < \infty$, ou seja, x é um $\mathfrak{F}C$- elemento de G. Como $\zeta(K) \trianglelefteq G$ segue que $\langle x^G \rangle$ é um p-grupo abeliano elementar e finito.

Vamos mostrar que $\langle x^G \rangle$ possui algum elemento $\neq 1$, central em G. Faça $A = \langle x^G \rangle$ e $D = C_G(A)$. Pelo lema 2 basta verificarmos que G/D é um p-grupo. Para isso suponha $Dy \in G/D$ é de modo que $o(Dy) = q$ onde q é um primo distinto de p. Por (*) temos que $y \in H_i$ para algum $1 \leq i \leq n$. Como $A \leq H_i$ e H_i é hipercentral segue que $A\langle y \rangle$ é nilpotente. Faça $L = A\langle y \rangle$
Temos que $y^q \in D$ e portanto $\langle y^q \rangle \trianglelefteq L$. Agora, $\langle y \rangle / \langle y^q \rangle$ é o q-grupo de Sylow de $L/\langle y^q \rangle$ e daí $\langle y \rangle \trianglelefteq L$.

Assim, fica claro que, caso y possua ordem infinita, L será um produto direto de dois grupos abelianos, logo y centraliza x. Por outro lado se y possuir ordem finita, vemos que o q-subgrupo de Sylow e também o q-complemento de $\langle y \rangle$ centralizam x. Portanto y centraliza x e encerramos este caso.

Caso 2: $\zeta(K)$ é livre de torção.

Tomemos $x \in \zeta(K)$ e faça $A = \langle x^G \rangle$. Temos assim que A é abeliano finitamente gerado e livre de torção.

Suponhamos, por exemplo, que A seja s-gerado. Temos agora que, para cada primo p , o índice $|\,A : \mathbf{\Phi}_p(A)| = p^s$ onde $\mathbf{\Phi}_p(A)$ é o p-Frattini de A, i.e. o menor subgrupo de A com quociente um p-grupo abeliano elementar.

Considerando em $A/\mathbf{\Phi}_p(A)$ uma série principal de G, concluímos, utilizando o Caso 1 e o fechamento a quocientes da nossa hipótese, que:

$$[A, \overbrace{G, G, ..., G}^{s\ vezes}] \leq \bigcap_{p\ primo} \mathbf{\Phi}_p(A) = 1$$

Dessa forma, temos que se i é o menor natural de modo que $[A, \overbrace{G, G, ..., G}^{i\ vezes}] \neq 1$ então $[A, \overbrace{G, G, ..., G}^{i\ vezes}] \leq A \cap \zeta(G)$ e o lema segue.

∎

§ 1.3- Os $\mathfrak{X}$-radicais de um grupo

Para cada classe $\mathfrak{X}$ de grupos e cada grupo G podemos definir o $\mathfrak{X}$-*radical de* G como sendo o conjunto

$$\mathbf{O}_{\mathfrak{X}}(G) = \{x \in G | \langle x^G \rangle \text{ é um } \mathfrak{X} - \text{grupo}\},$$

dos elementos de G *cujo fecho normal é um* $\mathfrak{X}$*-grupo.*

São válidas as seguintes propriedades básicas inerentes ao $\mathfrak{X}$-radical de um grupo$G$ quando $\mathfrak{X}$ é uma classe fechada fechada a subgrupos e quocientes:

(i) $\mathbf{O}_{\mathfrak{X}}(G) \cap S \subseteq \mathbf{O}_{\mathfrak{X}}(S)$.

(ii) $\mathbf{O}_{\mathfrak{X}}(G/N) \supseteq \mathbf{O}_{\mathfrak{X}}(G)N/N$.

Nem sempre o radical $\mathbf{O}_{\mathfrak{X}}(G)$ forma um subgrupo e quando o faz nada garante que $\mathbf{O}_{\mathfrak{X}}(G)$ seja um $\mathfrak{X}$-grupo. Por exemplo o $\mathfrak{N}$- radical, $\mathbf{O}_{\mathfrak{N}}(G) = Fit(G)$, mais conhecido como subgrupo de Fitting de G, não é, em geral, nilpotente. Mas vale:

Lema 3. *Seja* G *um grupo policíclico. Então* $Fit(G)$ *é nilpotente.*

Demonstração. É claro pela condição maximal nos subgrupos de G.

∎

Uma classe $\mathfrak{X}$ de grupos é usualmente chamada de **classe de Fitting** se ela for $\{S, Q, N_0\}$-fechada (fechada a subgrupos, quocientes e produto de finitos subgrupos normais). Neste caso não é difícil ver que $\mathbf{O}_{\mathfrak{X}}(G)$ é um subgrupo característico onde vale:

$$\mathbf{O}_{\mathfrak{X}}(G) = \prod_{N \in \mathfrak{X}G \cap nG} N = \{x \in G \,|\, \langle x^G \rangle \text{ é } \mathfrak{X} - \text{grupo}\}.$$

onde $\mathfrak{X}G \cap nG$ é a família dos $\mathfrak{X}$-subgrupos normais de G.
Neste caso o radical $\mathbf{O}_{\mathfrak{X}}(G)$ também é denotado por $\mathbf{Fit}_{\mathfrak{X}}(G)$ e é denominado $\mathfrak{X}$-*subgrupo de Fitting de* G. Ao longo desta tese usaremos tanto uma quanto a outra notação, dependendo do contexto.
Um grupo G é chamado *Fitting* $\mathfrak{X}-$*grupo* ($\mathfrak{X}$ uma classe de Fitting) se $G = \mathbf{Fit}_{\mathfrak{X}}(G)$. Não é difícil verificar que, para qualquer grupo G e para qualquer classe de Fitting $\mathfrak{X}$, vale:

$$\mathbf{Fit}_{\mathfrak{X}}(G) \text{ é um Fitting } \mathfrak{X}\text{-grupo.}$$

Também é válido que ser Fitting $\mathfrak{X}$-grupo é uma propriedade fechada a subgrupos. Se $L\mathfrak{X}$, a classe dos $\mathfrak{X}$-grupos locais, é uma classe de Fitting, então $\mathbf{Fit}_{L\mathfrak{X}}(G)$ é o maior $L\mathfrak{X}$-grupo normal de G.

Com respeito a este assunto, relevante para a nossa tese, será o

Resultado 2. *Para as seguintes classes $\mathfrak{X}$ de grupos $L\mathfrak{X}$ é uma classe de Fitting*

a) $\mathfrak{X}$=$\mathfrak{F}$.

b) $\mathfrak{X}$=$\mathfrak{N}$ *(Neste caso* $\mathbf{O}_{L\mathfrak{N}}(G) = \mathbf{Fit}_{L\mathfrak{N}}(G)$ *chama-se o radical de* Hirsch-Plotkin *de G).*

c) $\mathfrak{X}$=$\mathfrak{Z}^{\infty}$.

Demonstração. Ver em [14], pgs. 357, Ex. 12.5.3, pg. 384.

∎

§ 1.4- Subgrupos Subnormais

Vamos lembrar:

Definição 3. *Um subgrupo $H \leq G$ é chamado subnormal em G, $H \trianglelefteq\trianglelefteq G$ se existir uma cadeia finita de subgrupos*

$$H = H_0 \trianglelefteq H_1 \cdots \trianglelefteq H_{n-1} \trianglelefteq H_n = G$$

entre H e G.

Vamos nesta secção expor apenas os resultados relativos a estes subgrupos que necessitaremos para a nossa tese. Começaremos com o

Lema 4. *Em qualquer grupo policíclico G, para todo subgrupo nilpotente $H \trianglelefteq \trianglelefteq G$ vale*

$$H \leq Fit(G).$$

Demonstração. Considere uma cadeia entre H e G como na definição 3. Por hipótese de indução sobre n temos $H \leq Fit(H_{n-1}) \trianglelefteq G$. Pelo lema 3, $Fit(H_{n-1})$ é nilpotente, logo $H \leq Fit(G)$.

■

O forte resultado que segue abaixo é devido a Maier e Wielandt (1977/1981) (ver [8] e [18]). Sua demonstração pode ser encontrada em [7], Th. 7.7.1, pg. 239.

Lema 5. *Seja G um grupo finito tal que $G = AB$. Se $H \leq G$ é tal $H \trianglelefteq \trianglelefteq A$ e $H \trianglelefteq \trianglelefteq B$ então $H \trianglelefteq \trianglelefteq G$.*

Enunciaremos agora, outro resultado, esse devido a Kegel [6], cuja demonstração se encontra em [7], Th. 7.5.1, pg. 232,:

Lema 6. *Sejam G um grupo policíclico-por-finito e $K \leq G$ para o qual em todos os quocientes finitos $\frac{G}{N}$ vale $\frac{KN}{N} \trianglelefteq \trianglelefteq \frac{G}{N}$. Então $K \trianglelefteq \trianglelefteq G$.*

O lema 5 possui validade em todos os grupos policíclicos-por-finito. Este fato está presente no

Corolário 1. *Seja G um grupo policíclico-por-finito tal que A e B são dois subgrupos permatáveis. Se $H \leq G$ é tal que $H \trianglelefteq \trianglelefteq A$ e $H \trianglelefteq \trianglelefteq B$ então $H \trianglelefteq \trianglelefteq AB$.*

Demonstração. Podemos supor $G = AB$. Para qualquer quociente finito $\frac{G}{N}$ de G temos $\frac{HN}{N} \trianglelefteq \trianglelefteq \frac{AN}{N}$ e $\frac{HN}{N} \trianglelefteq \trianglelefteq \frac{BN}{N}$. Assim pelo lema 5 vale $\frac{HN}{N} \trianglelefteq \trianglelefteq \frac{AN}{N}\frac{BN}{N} = \frac{G}{N}$ e claro $HN \trianglelefteq \trianglelefteq G$. Do lema 6 vem $H \trianglelefteq \trianglelefteq G$. ■

§ 1.5- Elementos 2-Engelianos

Dado um grupo G vamos definir dois subconjuntos, a saber o conjunto;

$$\mathbf{L}_2(G) = \{x \in G \mid [g,x,x] = 1, \forall\, g \in G\}$$

dos elementos *2- engelianos a esquerda*
e o conjunto

$$\mathbf{R}_2(G) = \{x \in G \mid [x,g,g] = 1, \forall\, g \in G\}$$

dos elementos 2-engelianos a direita.

Se por um lado $\mathbf{L}_2(G)$ é, em geral, apenas um subconjunto de G por outro lado temos o:

Resultado 3. *(*KAPPE*[5]) Em qualquer grupo G o conjunto $\mathbf{R}_2(G)$, dos elementos 2-engelianos à direita, forma um subgrupo característico de G.*

Demonstração. A demonstração deste resultado pode ser encontrada em [16] pag. 44.

■

§ 1.6- Teorema de Maschke

Finalizamos este capítulo preliminar enunciando um importante teorema das representações dos grupos finitos, a saber

Teorema de Maschke

Seja G um grupo finito agindo em um espaço vetorial V sobre um corpo K cuja característica não divide a ordem de G. Então para todo subespaç o G-invariante $H \leq_G V$ existe um subespaço G-invariante que complementa H em V.

(Estaremos interessados neste resultado somente no caso quando um p'-grupo G age num p-grupo abeliano elementar V)

Demonstração. Ver [14] cap 8, pg. 216.

Capítulo II

Propriedades $\mathfrak{E}$-testáveis.

Neste segundo capítulo, também auxiliar, porém já dentro da filosofia da nossa tese, vamos estudar algumas propriedades de grupos que são detectáveis pelos seus subgrupos enumeráveis.

Há um trabalho clássico de R. Baer [2] que estuda este tipo de propriedades de um ponto de vista geral. Esta direção de pesquisa continua despertando interesse em trabalhos mais recentes (ver [4]). Aqui trataremos a nossa maneira alguns tipos de tais propriedades.

Diremos simplesmente que uma propriedade $\mathfrak{X}$ é $\mathfrak{E}$- testável ($\mathfrak{E}$- detectável), se ela fôr enumeravelmente detectável, ou seja, se para todo grupo G vale

$$\mathfrak{E}G \subseteq \mathfrak{X}G \Longrightarrow G \in \mathfrak{X} .$$

O método de demonstrar que determinada propriedade $\mathfrak{X}$ é $\mathfrak{E}$-testável será:

Supondo que o grupo não é $\mathfrak{X}$-grupo, construiremos nele um subgrupo enumerável que também não é $\mathfrak{X}$-grupo.

§ 2.1- Primeiros Exemplos de Propriedades $\mathfrak{E}$-testáveis

Antes vamos relembrar duas caracterizações conhecidas, uma para grupos hiperabelianos e outra para grupos hipercentrais:

Caracterização I (Baer, ver [15], Th. 2.15, pg. 47)
Um grupo G é hiperabeliano se, e somente se, para cada sequência $x_1, y_1, y_2\,, \cdots\,, y_n\,, \cdots$ em G, a sequência $(x_n)_{n\in I\!N}$, definida indutivamente por

$$x_{n+1} = [x_n, y_n, x_n],$$

atinge o elemento neutro 1 de G para algum $m \in I\!N$.

Demonstração. ($\Rightarrow$) Suponha, por absurdo, que exista uma sequência $(x_n)_{n \in I\!N}$ na forma indicada construída a partir de $x_1, y_1, y_2, \cdots, y_n, \cdots$ de tal modo que $x_n \neq 1 \; \forall \; n \in I\!N$.

Considere a família:

$$\mathcal{F} = \{N \trianglelefteq G \mid x_n \notin N \; \forall \; n \in I\!N\}.$$

Bem, claro que $\{1\} \in \mathcal{F}$ e pode-se verificar facilmente que $\mathcal{F}$ é indutivamente ordenada. Podemos considerar portanto M um elemento maximal de $\mathcal{F}$.

Como G é hiperabeliano e $M \neq G$ existe $M < L \trianglelefteq G$ e com L/M abeliano. Pela maximalidade de M segue que existe $n \in I\!N$ tal que $x_n \in L$, daí segue pela normalidade de L que $[x_n, y_n] \in L$ e pela abelianidade de L/M vem o absurdo $x_{n+1} = [[x_n, y_n], x_n] \in M$.

($\Leftarrow$) Como a hipótese das sequências é fechada a quocientes, basta mostrarmos que G possui um subgrupo abeliano normal não trivial.

Suponha, por absurdo, que G não possua tal subgrupo. Considere qualquer $1 \neq x_1 \in G$. Então $\langle x_1^G \rangle$ não é abeliano. Daí existe $y_1 \in G$ tal que $[x_1, y_1, x_1] = [x_1^{y_1}, x_1] \neq 1$. Faça $x_2 = [x_1, y_1, x_1]$ e da mesma maneira construa $x_3 = [x_2, y_2, x_2] \neq 1$. Prosseguindo indutivamente assim, construímos uma seqûencia $x_1, y_1, y_2, \cdots, y_n, \cdots$ de modo que $(x_n)_{n \in I\!N}$ contraria a hipótese. Portanto G é hiperabeliano.

■

Analogamente à caracterização I, temos o seguinte lema que caracteriza o hipercentro de um grupo através de sequências. Este, por sua vez, contém uma caracterização dos grupos hipercentrais (devida a Chernikov (1950)).

Lema 7. *Em qualquer grupo G são equivalentes:*

a) $x \in \mathbf{H}(G)$.

b) A cada sequência $y_1, y_2, \cdots, y_n, \cdots$ de elementos de G, a sequência

$(x_n)_{n\in I\!N}$ *definida indutivamente por*

$$x_1 = x\,, \quad x_{n+1} = [x_n, y_n]$$

atinge o elemento neutro 1 *de* G *para algum* $m \in I\!N$*.*

Demonstração. a) $\Rightarrow$ b)
Suponha, por absurdo, que exista uma sequência $(x_n)_{n\in I\!N}$ construída conforme a letra b) que nunca atinge a identidade. Considere a família:

$$\mathcal{F} = \{N \trianglelefteq G \,|N \leq \mathbf{H}(G)\; x_n \notin N \;\forall\, n \in I\!N\}.$$

Tal família contém $\{1\}$ e é claramente indutivamente ordenada. Assim sendo, o Lema de Zorn nos garante a existência de um elemento maximal, M de $\mathcal{F}$. Como $x \notin M$ temos que $M \neq \mathbf{H}(G)$. Assim, podemos tomar Z de modo que $Z/M = \zeta(G/M) \neq M/M$. Pela maximalidade de M segue que existe $n \in I\!N$ e modo que $x_n \in Z$. Daí vem a contradição $x_{n+1} = [x_n, y_n] \in M$.

b) $\Rightarrow$ a)

Suponha $x \notin \mathbf{H}(G)$. Pela definição 2 da introdução existe $N \trianglelefteq G$ com $\zeta(G/N) = N/N$ tal que $x \notin N$. Portanto existe $y_1 \in G$ de modo que vale

$$x_2 = [x, y_1] \;\notin N.$$

Da mesma forma encontramos $y_2 \in G$ de modo que vale

$$x_3 = [x_2, y_2] \;\notin N.$$

Procedendo indefinidamente, construimos uma sequência $(y_n)_{n\in I\!N}$ tal que a sequência $(x_n)_{n\in I\!N}$ construída conforme a letra b) esteja sempre fora de N, particularmente nunca atingindo 1. Uma contradição! Portanto $x \in \mathbf{H}(G)$ se vale b).

■

Segue como corolário a seguinte caracterização dos grupos hipercentrais:

Caracterização II (Chernikov (1950) ver [15], Th. 2.19, pg. 50)
Para qualquer grupo G *são equivalentes:*

a) G é hipercentral.

b) Associando-se a cada sequência $x_1, y_1, y_2, \cdots, y_n, \cdots$ de elementos de G a sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definida indutivamente por

$$x_{n+1} = [x_n, y_n]\,,$$

temos que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x_m = 1$.

Com relação a grupos solúveis e as derivadas iteradas $G^{(i)}$ de um grupo G observamos (ver [9]):

Seja G um grupo. Considere, para cada $i \geq 0$, as funções

$$c_i : \overbrace{G \times G \times \ldots \times G}^{2^i vezes} \longmapsto \overbrace{G \times G \times \ldots \times G}^{2^i vezes}$$

definidas indutivamente por

$$\begin{aligned} c_0 : G &\longmapsto G \\ x &\to c_0(x) = x \quad \forall \; x \in G \end{aligned}$$

e $\forall\, g_1, \cdots g_{2^{i+1}} \in G$:

$$c_{i+1}(g_1, \cdots, g_{2^{i+1}}) = [\ c_i(g_1, \cdots g_{2^i}), c_i(g_{2^i+1}, \cdots g_{2^{i+1}})\ ]\,.$$

Dessa forma segue que

$$G^{(i)} = \langle\ c_i(g_1,\ \cdots g_{2^i}) \mid g_1,\ \cdots, g_{2^i} \in G\ \rangle\,.$$

Conclui-se assim que

$G^{(i)} > 1 \Longleftrightarrow \langle\, g_1, g_2, \ldots, g_{2^i}\, \rangle^{(i)} > 1$ para certos elementos $g_1, g_2, \ldots, g_{2^i} \in G$.

Logo, para cada $d \geq 0$,

a propriedade $\mathfrak{A}^d$ de ser um grupo solúvel de comprimento $\leq d$, é uma propriedade $\mathfrak{G}_{2^d}$-testável,

ou seja, se todos os subgrupos 2^d-gerados de um grupo G forem solúveis de comprimento $\leq d$, então o grupo será solúvel de comprimento $\leq d$.

Estamos agora preparados para mostrarmos na seguinte proposição que algumas propriedades básicas de grupos são enumeravelmente testáveis. Mencionamos que nenhuma delas é $\mathfrak{G}$-testável (localmente fechada).

Proposição 1. *As seguintes propriedades de grupos são enumeravelmente testáveis:*

a) A nilpotência.

b) A hipercentralidade.

c) A solubilidade.

d) A hiperabelianidade.

e) A finitude.

f) A $\mathfrak{F}C$-propriedade.

g) A noetherianidade.

h) A artinianidade.

Demonstração. a) A nilpotência:
Seja G um grupo não nilpotente. Vamos construir um subgrupo de G enumerável (= enumeravelmente gerado) não nilpotente.
Para isto tome, para cada $n \in I\!N$, elementos $x_{1n}, x_{2n}, \cdots, x_{nn}$ de G de modo que

$$[\, x_{1n}, x_{2n}, \cdots, x_{nn} \,] \neq 1.$$

Isto é possível pois $\Gamma_n(G) \neq 1 \; \forall \; n \in I\!N$, lembrando que

$$\Gamma_n(G) = \langle \; [y_1, y_2, \ldots, y_n] \mid y_1, y_2, \ldots, y_n \in G \; \rangle \; .$$

Por fim está claro que o grupo

$$H = \langle x_{in} \,|\, i, n \in I\!N \;\; 1 \leq i \leq n \rangle$$

é enumerável e não nilpotente.

b) A hipercentralidade:

Novamente suponha G um subgrupo que não seja hipercentral. Pela Caracterização II existe uma sequência $(x_1, y_1, y_2, \cdots, y_n, \cdots)$ de elementos de G de tal maneira que $x_n \neq 1 \ \forall \ \ n \in I\!N$ onde $x_{n+1} = [x_n, y_n] \ \forall \ \ n \in I\!N$. Pela mesma Caracterização II vem que o subgrupo enumerável

$$K = \langle x_1, y_1, \cdots, y_n, \cdots \rangle$$

não é hipercentral, donde conclui-se a porposição.

c) A solubilidade:

Seja G um grupo não solúvel. Então $G \notin \mathfrak{A}^i$ para todo $i \ \geq 0$. Deste fato temos, pela observação acima, que para cada $i \geq 0$ existe um subgrupo $L_i \in \mathfrak{G}_{2^i}G$ que não é solúvel de comprimento $\leq i$. Disso e do fechamento da classe $\mathfrak{A}^i$ a subgrupos, vem que o subgrupo enumerável

$$L = \langle L_1, \cdots, L_i, L_{i+1}, \cdots \rangle$$

não é solúvel, encerrando esse ítem.

d) A hiperabelianidade:

Se G é um grupo não hiperabeliano então, pela Caracterização I, existem elementos

$x_1, y_1, y_2, \cdots y_n, \cdots$ de G de modo que a sequência $(x_n)_{n \in I\!N}$ definida indutivamente por $x_{n+1} = [x_n, y_n, x_n]$ nunca alcança 1. Pela mesma Caracterização I vem que o subgrupo enumerável

$$L = \langle \ x_1, y_1. \cdots y_n, \cdots \rangle$$

não é hiperabeliano.

e) É claro.

f) Se G possui uma classe de conjugação infinita x^G, tome $g_1, g_2, \ldots$ tais que os x^{g_i} são todos distintos. O subgrupo enumerável $\langle x, g_1, g_2, \ldots \rangle$ não é $\mathfrak{F}C$-grupo.

g) Se $M_0 < M_1 < M_2 < \ldots < M_i < M_{i+1} < \ldots$ é uma cadeia não estacionária de subgrupos, considere para cada $i \in I\!N$, elementos $x_i \in M_i - M_{i-1}$. Assim, no subgrupo enumerável $E = \langle x_1, x_2, \ldots \rangle$, existe a cadeia não estacionária

$$\langle x_1 \rangle < \langle x_1, x_2 \rangle < \langle x_1, x_2, x_3 \rangle < \ldots \ .$$

h) Análogo a g).

$\blacksquare$

É fácil observar que se Λ é um conjunto de índices e $\mathfrak{X}_\lambda$ são propriedades $\mathfrak{E}$-testáveis $\forall\ \lambda \in \Lambda$, então $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{X}_\lambda$ também é $\mathfrak{E}$-testável. Aplicando-se essa observação à solubilidade e à noetherianidade os ítens c) e g) nos dão que:

A policiclicidade $\mathfrak{Z}^\infty$ é uma propriedade enumeravelmente testável.

Faremos agora uma demonstração direta, a título de ilustração, que a finitude sobre o n-ésimo termo da série central ascendente, $\zeta_n(G)\quad(n \geq 0)$, é uma propriedade $\mathfrak{E}$-testável. A seguir veremos que a finitude sobre estes e sobre vários outros subgrupos são consequências de um resultado muito mais amplo que irá aparecerer no Teorema 2.

Proposição 2. *Para qualquer $n \geq 0$, a finitude sobre $\zeta_n(G)$ é uma propriedade $\mathfrak{E}$-testável.*

Demonstração. Tome $n \geq 0$. Primeiro lembremos que

$$\zeta_n(G) = \{x \in G \mid [x, g_1,\ \cdots, g_n] = 1\ \forall\ \ g_1,\ \cdots g_n \in G\}.$$

Seja G um grupo tal que $|\, G/\zeta_n(G)| = \infty$. Considere uma seqüência $(x_n)_{n \in I\!N}$ de elementos em G tal que

$$\zeta_n(G)x_i \neq \zeta_n(G)x_j\ \forall\ \ i \neq j,\ i, j \in I\!N$$

e coloque $q_{ij} = x_i x_j^- \notin \zeta_n(G)$. Temos que para cada $i, j \in I\!N$ existem $y_{ij}^{(1)},\ \cdots, y_{ij}^{(n)}$ de modo que $\left[q_{ij}, y_{ij}^{(1)},\ \cdots, y_{ij}^{(n)}\right] \neq 1$.

Agora, para o subgrupo enumerável

$$E = \left\langle x_i,\ y_{ij}^{(k)} \mid i, j \in I\!N,\ \ i \neq j\ ,\ 1 \leq k \leq n \right\rangle$$

temos que as classes $\zeta_n(E)x_1, \cdots \zeta_n(E)x_i \cdots$ são, por construção, todas distintas.

$\blacksquare$

§ 2.2- Operadores $\mathfrak{C}$-compatíveis

Para uma ampliação dos resultados abordados, vamos introduzir certo tipo de *operadores* definidos no universo $\mathfrak{U}$ de todos os grupos:

Definição 4. *Seja*

$$f : \mathfrak{U} \longmapsto \mathfrak{U}$$

uma função de tal maneira que para todo grupo G é associado um subgrupo $f(G) \leq G$ com as características abaixo:

(i) f(G) é subgrupo característico de G.

(ii) $f(G^\alpha) = f(G)^\alpha$ quando α é um isomorfismo de G sobre um outro grupo G^α.

(iii) Para todo $H \leq G$ vale $f(G) \cap H \leq f(H)$.

(iv) $\frac{f(G)N}{N} \leq f(G/N)$ para todo $N \trianglelefteq G$.

(v) Sempre que $x \in G - f(G)$ existirá um subgrupo enumerável $E \leq G$ tal que $x \in E - f(E)$.

Uma função f satisfazendo essas propriedades receberá o nome de *operador $\mathfrak{C}$-compatível.*

Claramente uma função que a cada grupo $G \in \mathfrak{U}$ associa o seu subgrupo trivial $\{1_G\}$, é um operador $\mathfrak{C}$-compatível.

Em contrapartida, a seguir vem uma função que não é um operador $\mathfrak{C}$-compatível.

Exemplo 1. *Considere, para cada grupo G, a família*

$$\mathcal{N}(G) = \{\, E \trianglelefteq G \mid E \text{ é enumerável} \,\}.$$

Seja $f : \mathfrak{U} \longmapsto \mathfrak{U}$ definida por

$$f : G \to f(G) \;\; onde \;\; f(G) = \prod_{N \in \mathcal{N}(G)} N.$$

*Afirmamos que f **não** é um operador $\mathfrak{E}$-compatível. Isto pois $f(E) = E$ para qualquer subgrupo enumerável de G. Porém, existem grupos G com $f(G) \neq G$, por exemplo, grupos simples não-enumeráveis.*

A partir da definição 4 vamos demonstrar agora um resultado bastante geral relativo às propriedades $\mathfrak{E}$-testáveis.

Teorema 2. *Seja $\mathfrak{X}$ uma classe de grupos fechada a subgrupos e quocientes e f um operador $\mathfrak{E}$-compatível. Suponha que $\mathfrak{X}$ seja enumeravelmente testável. Nessas hipóteses a propriedade de pertencer à classe*

$$\mathfrak{X}_f = \{G \mid G/f(G) \in \mathfrak{X}\}$$

é $\mathfrak{E}$-testável também.

Demonstração. Suponha que $G/f(G)$ não seja um $\mathfrak{X}$-grupo. Como $\mathfrak{X}$ é $\mathfrak{E}-$testável segue que existe L com $f(G) \leq L \leq G$ tal que $L/f(G)$ é enumerável e também não sendo um $\mathfrak{X}$-grupo.

Seja E um subgrupo enumerável de G para o qual $L = f(G)E$ (por exemplo, E gerado pelos representantes de $L/f(G)$). Pela propriedade (iii) da definição 4, tem-se $f(G) \cap E \ \leq f(E)$.

Vamos agora listar todos os elementos

$$x_1, x_2, \cdots x_n, \ \cdots \in f(E) - (f(G) \cap E).$$

Por (v) da definição 4 temos que para cada $i \in I\!N$ existe um subgrupo enumerável E_i para o qual $x_i \in E_i - f(E_i)$.

Considere agora o subgrupo enumerável

$$K = \langle E, E_i \mid i \in I\!N \rangle.$$

Bem, afirmamos que não existe elemento algum pertencente ao conjunto

$$(f(K) \cap E) - (f(G) \cap E).$$

De fato, se existisse, esse pertenceria a $(f(E) - (f(G) \cap E)) \cap f(K) = \emptyset$ pela construção de K. Como $f(G) \cap E \leq f(G) \cap K \leq f(K)$ segue que $f(G) \cap E = f(K) \cap E$.

Finalmente pelo fechamento da classe $\mathfrak{X}$ a subgrupos e pelo isomorfismo

$$L/f(G) \cong E/(f(G) \cap E) = E/(f(K) \cap E) \cong f(K)E/f(K) \leq K/f(K)$$

temos que $K/f(K)$ não é um $\mathfrak{X}$-grupo.

∎

Bem, é fácil verificar que a função $\zeta_n : G \to \zeta_n(G)$ que define o n-ésimo centro de G $(n \geq 0)$ é $\mathfrak{E}$-compatível. Juntando isso ao fato da policiclicidade ser enumeravelmente testável, temos o seguinte resultado que utilizaremos para $n = 1$ no Capítulo III:

Resultado 4. *A policiclicidade sobre $\zeta_n(G)$ é uma propriedade $\mathfrak{E}$-testável*

O Teorema 2 possui diversos outros corolários. Para começarmos a explorá-los vamos primeiro demonstrar o seguinte

Lema 8. *O operador $\mathbf{H} : G \to \mathbf{H}(G)$, onde $\mathbf{H}(G)$ é o hipercentro de G, é $\mathfrak{E}$-compatível.*

Demonstração.

Seja G um grupo qualquer. É fato conhecido que o hipercentro $\mathbf{H}(G)$ satisfaz as propriedades (i) a (iv) da definição 4 (ver também a seção § **1.2**). Deste modo mostraremos apenas o ítem (v).

Tome $x \notin \mathbf{H}(G)$. Pelo lema 7 temos que existe uma sequência $x, y_1, y_2, \cdots, y_n, \cdots$, de elementos de G a sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definida indutivamente por

$$x_1 = x\,, \quad x_{n+1} = [x_n, y_n]\,,$$

nunca atinge o elemento neutro 1 de G.

Assim, pelo mesmo lema 7 vem que $x \in E - \mathbf{H}(E)$ onde E é o subgrupo enumerável

$$E = \langle x, y_i \mid i \in \mathbb{N} \rangle.$$

∎

Aplicando o Lema 8 ao teorema 2, vemos o

Corolário 2. *A finitude (Noetherianidade, Artinianidade, etc.) sobre* $\mathbf{H}(G)$ *é* $\mathfrak{E}$*-detectável.*

§ 2.3- Operadores $\mathfrak{E}$-compatíveis e classes de Fitting

Agora vamos provar um lema, que permite a construção de operadores $\mathfrak{E}$-compatíveis de forma geral, a partir de algumas classes $\mathfrak{X}$:

Lema 9. *Seja* $\mathfrak{X}$ *uma* **classe de Fitting**. *Suponha que* $\mathfrak{X}$ *seja* $\mathfrak{E}$*-detectável. Então o operador:*

$$\mathbf{Fit}_{\mathfrak{X}} : G \to \mathbf{Fit}_{\mathfrak{X}}(G)$$

é $\mathfrak{E}$*-compatível.*

Demonstração.

Já sabemos (ver §1.3) pelos fechamentos da classe $\mathfrak{X}$ que vale:

$$(!) \quad x \in \mathbf{Fit}_{\mathfrak{X}}(G) \iff \langle x^G \rangle \text{ é } \mathfrak{X} - \text{grupo.}$$

As propriedades i)-iv) da definição 4 são de fácil verificação.
Vamos somente mostrar a propriedade (v):
Suponha $x \notin \mathbf{Fit}_{\mathfrak{X}}(G)$. Então por (!) acima segue que $\langle x^G \rangle$ não é um $\mathfrak{X}$-grupo e pela $\mathfrak{E}$-detectabilidade de $\mathfrak{X}$ temos que existem $g_1, \cdots, g_n, \cdots$ tais que $\langle x^{g_1}, \cdots, x^{g_n}, \cdots \rangle$ não é $\mathfrak{X}$-grupo.

Novamente por (!) e pelo fechamento a subgrupos temos que
$x \in E - \mathbf{Fit}_{\mathfrak{X}}(E)$ onde E é o subgrupo enumerável

$$E = \langle x, g_1, \cdots, g_n, \cdots \rangle,$$

observando-se que $\langle x^{g_1}, x^{g_2}, \ldots, \rangle \leq \langle x^E \rangle$.

$\blacksquare$

Agora aplicando o teorema 2 ao operador $\mathbf{Fit}_{\mathfrak{X}}$ onde $\mathfrak{X}$ é uma classe de Fitting $\mathfrak{E}$-detectável, e a qualquer classe $\mathfrak{Y}$ fechada a subgrupos, quocientes e enumeravelmente testável, segue o

Corolário 3. *A propriedade de pertencer a classe*

$$\mathfrak{Y}_{\mathbf{Fit}_{\mathfrak{X}}} = \{G \mid G/\mathbf{Fit}_{\mathfrak{X}}(G) \in \mathfrak{Y}\}$$

é enumeravelmente detectável.

São exemplos de **Classes de Fitting** as classes $\mathfrak{N}$ dos grupos nilpotentes, $\mathfrak{A}^{\infty}$ dos grupos solúveis, $\mathfrak{Z}^{\infty}$ dos grupos policíclicos, $L\mathfrak{N}$ dos grupos localmente nilpotentes e a classe $L\mathfrak{Z}^{\infty}$ dos grupos localmente policílcicos. Tais classes também são $\mathfrak{C}$-detectáveis. Deste modo do lema 9 segue diretamente o:

Corolário 4. *São exemplos de operadores $\mathfrak{C}$-compatíveis:*

a) $Fit : G \to Fit(G)$, *onde* $Fit(G)$ $(= \mathbf{Fit}_{\mathfrak{N}}(G))$ *é o subgrupo de Fitting (comum) de G.*

b) $\mathbf{Fit}_{\mathfrak{A}^{\infty}} : G \to \mathbf{Fit}_{\mathfrak{A}^{\infty}}(G)$.

c) $\mathbf{Fit}_{\mathfrak{Z}^{\infty}} : G \to \mathbf{Fit}_{\mathfrak{Z}^{\infty}}(G)$.

d) $\mathbf{Fit}_{L\mathfrak{N}} : G \to \mathbf{Fit}_{L\mathfrak{N}}(G)$, *onde* $\mathbf{Fit}_{L\mathfrak{N}}(G)$ *é o radical de* Hirsch-Plotkin.

e) $\mathbf{Fit}_{L\mathfrak{Z}^{\infty}} : G \to \mathbf{Fit}_{L\mathfrak{Z}^{\infty}}(G)$ *onde* $\mathbf{Fit}_{L\mathfrak{Z}^{\infty}}(G)$ *é o radical localmente policíclico de G.*

■

Aplicando agora o corolário 3 às classes $\mathfrak{X} = \mathfrak{F}$ $(\hat{\mathfrak{M}}, \check{\mathfrak{M}},$ etc.$)$ dos grupos finitos (Noetherianos, Artinianos, etc.), e aos operadores definidos no corolário 4, segue diretamente que:

Corolário 5. *Enumeravelmente testáveis são as seguintes propriedades:*

a) A finitude (Noetherianidade, Artinianidade, etc.) sobre $Fit(G)$.

b) A finitude (Noetherianidade, Artinianidade, etc.) sobre $\mathbf{O}_{L\mathfrak{N}}(G)$.

c) A finitude (Noetherianidade, Artinianidade, etc.) sobre $\mathbf{O}_{L\mathfrak{Z}^\infty}(G)$.

■

Conforme foi visto no parágrafo § **1.3** da introdução o radical localmente nilpotente $\mathbf{O}_{L\mathfrak{N}}(G) = \mathbf{Fit}_{L\mathfrak{N}}(G)$ de um grupo qualquer é o maior subgrupo normal localmente nilpotente de G, do mesmo modo que o radical localmente policíclico $\mathbf{O}_{L\mathfrak{Z}^\infty}(G) = \mathbf{Fit}_{L\mathfrak{Z}^\infty}$ é o maior subgrupo normal localmente policíclico de G.

Deste fato, segue diretamente dos corolários 1 e 2, que ser (localmente nilpotente)-por-finito ou (localmentepolicíclico)-por-finito são propriedades $\mathfrak{E}$-testáveis.

A verificação de que nilpotente(solúvel, policíclico)-por-finito são propriedades $\mathfrak{E}$- testáveis é mais delicada e, para compreende-la necessitaremos, primeiro, considerar o interessante:

Lema 10. *Seja* $\mathfrak{X}$ *uma classe de Fitting* $\mathfrak{E}$*-detectável. Então a propriedade* $\mathfrak{X}\mathfrak{F}$ *de ser um grupo* $\mathfrak{X}$*-por-finito, é* $\mathfrak{E}$*-testável.*

Demonstração. Seja G um grupos onde todos os seus subgrupo enumeráveis são $\mathfrak{X}\mathfrak{F}$ grupos. Então em todos os seus subgrupos enumeráveis E temos um $N \trianglelefteq E$ com $N \in \mathfrak{X}$ e $E/N \in \mathfrak{F}$. Como $N \leq \mathbf{Fit}_{\mathfrak{X}}(E)$, vale

$$|E/\mathbf{Fit}_{\mathfrak{X}}(E)| < \infty.$$

Aplicando o Corolário 5 (item a)) , temos que $|\,G/\mathbf{Fit}_{\mathfrak{X}}(G)| < \infty$.
Faça agora $F = \mathbf{Fit}_{\mathfrak{X}}(G)$. Pelos comentários feitos em §1.3 da introdução, temos que em todo subgrupo enumerável S de F vale $S = \mathbf{Fit}_{\mathfrak{X}}(S)$ e ainda que S é um $\mathfrak{X}\mathfrak{F}$-grupo. Seja $M \trianglelefteq S$ tal que $M \in \mathfrak{X}$ e S/M é finito. É claro que existem finitos elementos $x_1, x_2, \ldots, x_r \in S$ tais que $S = M\langle x_1^G\rangle\langle x_2^G\rangle \ldots \langle x_r^G\rangle$. Como S é Fitting $\mathfrak{X}$-grupo, vale $\langle x_i^G\rangle \in \mathfrak{X}$ para todo $i = 1, 2, \ldots, r$. Portanto S é $\mathfrak{X}$-grupo. Como $\mathfrak{X}$ é uma classe $\mathfrak{E}$-detectável segue que F é um $\mathfrak{X}$-grupo e daí G é um $\mathfrak{X}\mathfrak{F}$- grupo.

■

Agora, aplicando o lema 10 às classes $\mathfrak{A}^{\infty}\,\mathfrak{N}$, $\mathfrak{Z}^{\infty}$ obtemos diretamente o:

Corolário 6. *São propriedades $\mathfrak{E}$-testáveis:*

a) $\mathfrak{N}\mathfrak{F}$ a propriedade de ser nilpotente-por-finito.

b) $\mathfrak{A}^{\infty}\mathfrak{F}$ a propriedade de ser solúvel-por-finito.

c) $\mathfrak{Z}^{\infty}\mathfrak{F}$ a propriedade de ser policíclico-por-finito.

■

Em [11] (ver também [12]), dois novos subgrupos característicos canônicos, ligados ao hipercentro, foram introduzidos, a saber,

I) $\mathbf{K}(G) = \{x \in G \mid x \in \mathbf{H}(\langle x, x_1, \cdots x_n \rangle \ \forall\ x_1, \cdots, x_n \in G)\}$,

chamado de *hipercentro local de G.*

II)
$$\Lambda_{\mathfrak{N}}(G) = \bigcap_{H \in \mathcal{N}(G)} H ,$$
o chamado *nil-preservador local de G*, onde $\mathcal{N}(G)$ denota a família dos subgrupos localmente nilpotentes maximais.

Agora veremos que os dois operadores que definem estes novos subgrupos também são $\mathfrak{E}$-compatíveis. É o que nos diz a:

Proposição 3. *I) O operador $\mathbf{K} : G \longmapsto \mathbf{K}(G)$ é $\mathfrak{E}$-compatível.*

II) O operador $\Lambda_{\mathfrak{N}} : G \longmapsto \Lambda_{\mathfrak{N}}(G)$ é $\mathfrak{E}$-compatível.

Demonstração.
As afirmações de (i) a (iv) da definição podem ser encontradas em [11, 12, 13].

Seja $G \in \mathfrak{U}$.

I) Suponha, $x \notin \mathbf{K}(G)$. Assim existem $g_1, \cdots g_n \in G$ tal que $x \notin \mathbf{H}(\langle x, g_1, \cdots g_n\rangle) = \mathbf{K}(\langle x, g_1 \cdots g_n\rangle)$. Dessa forma construimos um subgrupo enumerável (de fato finitamente gerado)

$$E = \langle x, g_1, \cdots, g_n\rangle.$$

tal que $x \notin \mathbf{K}(E)$.

II) Se $x \notin \Lambda_{\mathfrak{N}}(G)$, existe $M \in \mathcal{N}(G)$ tal que $x \notin M$. Logo o subgrupo $L = \langle M, x \rangle$ não é localmente nilpotente, existindo assim $l_1, \ \ldots, \ l_n \in M$ de tal forma que o subgrupo enumerável $E = \langle x, l_1, \ldots, l_n \rangle$ não é nilpotente. Como $\langle l_1, \ldots, l_n \rangle$ é nilpotente, está num $M_1 \in \mathcal{N}(E)$ e vale $x \notin M_1$. Portanto $x \in E - \Lambda_{\mathfrak{N}}(E)$.

$\blacksquare$

E, como já vimos, segue imediatamente a

Proposição 4. *Em qualquer grupo G valem as seguintes assertivas:*

a) A finitude sobre $\mathbf{K}(G)$ é uma propriedade $\mathfrak{E}$- testável.

b) A finitude sobre $\Lambda_{\mathfrak{N}}(G)$ é uma propriedade $\mathfrak{E}$- testável.

Capítulo III

Testando algumas propriedades de finitude em certos universos de grupos.

Neste capítulo o foco principal será investigar algumas propriedades no universo $\widehat{\mathfrak{M}\mathfrak{A}}^{\infty}$ dos grupos noetherianos-por-solúveis. Como um primeiro exemplo vamos citar:

Resultado 5. *Se G é solúvel e todos os seus subgrupos abelianos são finitos, então G é finito.*

Este resultado é bem conhecido e pode ser enunciado de outra maneira, a saber: Em grupos solúveis, a finitude é abelianamente testável. Nos mesmos moldes, porém mais profundo, profundo temos o teorema clássico de HALL-KARGAPOLOV-KULATILAKA
(abreviaremos H.-K.-K.), (ver [3]), que vem destacado neste primeiro parágrafo:

§ 3.1 Extensões do Teorema de Hall-Kargapolov-Kulatilaka

O teorema de H.-K.-K. nos diz, semelhante ao resultado 5, que também no universo $L\mathfrak{F}$ dos grupos *localmente finitos*, a finitude é abelianamente testável. O teorema de H.-K.-K. pode ser generalizado de várias maneiras para universos mais amplos:

Teorema 3. *Seja G um grupo onde todos os seus subgrupos abelianos são finitos. Então valem:*

(a) *Se* $G \in (H(L\mathfrak{N}))\,(L\mathfrak{F})$*, i.e. se* G *é a extensão de um grupo hiper-localmente nilpotente por um localmente finito, (particularmente, se* G *é hiperabeliano-por localmente finito), então* G *é finito.*

Observamos que, pela existência do maior subgrupo normal localmente nilpotente de G, esse item engloba o caso de G ser *poli-localmente nilpotente-por localmente finito* (i.e. $G \in (L\mathfrak{N})^{\infty}(L\mathfrak{F})$).

(b) *Se* $G \in (H(L(\mathfrak{F}C)))(L\mathfrak{F})$*, i.e.* G *é a extensão de um hiper-localmente* $\mathfrak{F}C$*-grupo por um localmente finito, então* G *é finito.*

(c) Se $G \in (L(\mathfrak{F}C))^{\infty}(L\mathfrak{F})$, i.e. G é a extensão de um grupo poli$-\mathfrak{F}C$ local por um localmente finito, então G é finito.

Observamos que para a propriedade $L(\mathfrak{F}C)$ não existe o análogo do radical de Hirsch-Plotkin. Portanto, b) e c) são asserções independentes.

Indicamos também que grupos de Tarski (i.e grupos simples infinitos de expoente um primo "grande"p) são exemplos de grupos infinitos nos uqais todos os subgrupos abelianos são finitos. *Demonstração.* a) Seja $N \trianglelefteq G$ tal que N é hiper-localmente nilpotente e G/N localmente finito. Uma vez provado que N é finito, G será localmente finito e o teorema de H.-K.-K. junto com a hipótese garantem a finitude de G. Podemos portanto supor que $N = G$.
Seja $R = \mathbf{O}_{L\mathfrak{F}}(G)$ o $L\mathfrak{F}$-radical de G. Agora, R é localmente finito e se $R \neq G$ então existe $K \trianglelefteq G$ com $R < K$ tal que $\frac{K}{R}$ é localmente nilpotente. Sendo também de torção, $\frac{K}{R}$ é localmente finito. Como $L\mathfrak{F}$ é uma classe fechada a extensões segue que K é localmente finito e $K = R = G$. Segue por H.-K.-K. e pela hipótese que G é finito.

b) Primeiro observamos que um $\mathfrak{F}C$-grupo finitamente gerado de torção é finito. De fato, se K é um tal grupo e $x_1, ..., x_r$ são seus geradores então $\zeta(K) = \bigcap_{i=1}^{r} C_K(x_i)$ e portanto $\frac{K}{\zeta(K)}$ é finito. Agora, pelo Teorema de Schreier, $\zeta(K)$ é finitamente gerado. Além disso é abeliano e de torção, daí finito.
Podemos supor que G é um hiper$-\mathfrak{F}C$-grupo local. Considere agora, $R =$

$\mathbf{O}_{L\mathfrak{F}}(G)$. Se $R < G$ então existe $N \trianglelefteq G$ tal que $R < N$ e $\frac{N}{R}$ é $L(\mathfrak{F}C)$-grupo e pelo observado é localmente finito. Portanto $R = N = G$ e G é finito.

c) Podemos supor que $G \in (L(\mathfrak{F}C))^{\infty}$. Pela letra ($b$) podemos prosseguir por indução no comprimento de uma cadeia subnormal de comprimento mínimo com quocientes sendo $L(\mathfrak{F}C)$-grupos. Existe portanto, por indução, um subgrupo normal finito N de G com $\frac{G}{N}$ sendo um $L(\mathfrak{F}C)$-grupo. Sejam $C = C_G(N)$ e $Z = \zeta(N)$, então temos que $C \cap N = Z$ e de $\frac{C}{Z} \cong \frac{CN}{N}$ concluimos que $\frac{C}{Z}$ é um $\mathfrak{F}C$-grupo local. Agora $\frac{G}{C}$ é isomorfo a um subgrupo de $Aut(N)$ e por isso finito. Assim, basta mostrarmos a finitude de $\frac{C}{Z}$. Tome $\frac{M}{Z}$ um subgrupo abeliano de $\frac{C}{Z}$ segue que M é metabeliano, e, pelo Resultado 5, é finito. Logo, pela letra b) vem a finitude de $\frac{C}{Z}$. Portanto, G é finito.

■

§ 3.2 Noetherianidade e finitude sobre o centro.

Uma questão natural que surge a partir do resultado 5 é se, continuando no universo dos grupos solúveis qual seria a família adequada para testar, por exemplo, a *finitude sobre o centro.* A resposta é: a família dos grupos *metabelianos* serve como família teste:

Resultado conhecido (não publicado Maier.R.):
Seja G um grupo solúvel no qual todos os subgrupos metabelianos (enumeráveis) são finitos sobre seu centro. Então G é finito sobre o seu centro.

Este resultado está contido no seguinte Teorema Principal (item b)), cuja demonstração é o desafio deste capítulo.

A finalidade desta secção é a demonstração do seguinte

Teorema Principal

a) *Suponhamos que G seja um grupo solúvel-por-Noetheriano e que seus subgrupos metabelianos enumeráveis sejam centrais-por-policíclicos. Então G é central-por-Noetheriano.*

b) *Suponhamos que G seja um grupo solúvel-por-finito e que seus subgrupos metabelianos enumeráveis sejam centrais-por-finitos. Então G é central-por-finito.*

A parte mais substancial para a demonstração deste resultado está no

Teorema 4. *a) Seja G um grupo solúvel no qual todos os subgrupos metabelianos são policíclicos sobre seus centros. Então G é policíclico sobre o centro.*

b) Seja G um grupo solúvel no qual todos os subgrupos metabelianos são finitos sobre seus centros. Então G é finito sobre o centro.

Vamos primeiro a alguns lemas fundamentais.

Lema 11. *Seja G um grupo nilpotente de classe 2. Então, para cada $x \in G$, a função:*

$$\phi_x : G \to G^{'}$$

definida por $\phi_x(g) = [g, x]$, é um homomorfismo cujo núcleo é $C_G(x)$.

Demonstração. De fato, como $G^{'} \leq \zeta(G)$ vale, para todos $g_1, g_2 \in G$:

$$\phi_x(g_1 g_2) = [g_1 g_2, x] = [g_1, x]^{g_2}[g_2, x] = [g_1, x][g_2, x] = \phi_x(g_1)\phi_x(g_2) \ .$$

É claro que o núcleo da ϕ_x é $C_G(x)$.

$\blacksquare$

Lema 12. *Sejam G um grupo nilpotente de classe 2, $\mathfrak{X}$ uma classe $\{S, Q, N_0\}$ fechada e A um subgrupo abeliano maximal de G.*

Se $G^{'} \in \mathfrak{X}$ e $\frac{A}{\zeta(G)}$ é finitamente gerado então $\frac{G}{A} \in \mathfrak{X}$

Demonstração. Faça $Z = \zeta(G)$. É claro, pela maximalidade de A que $Z \leq A$. Sejam $Zx_1, ..., Zx_r$ geradores de $\frac{A}{Z}$. Temos, pelo lema 11, que

$$\frac{G}{C_G(x_i)} \cong \phi_{x_i}(G) \leq G' \in \mathfrak{X} \; \forall \; 1 \leq i \leq r.$$

Além disso, pela maximalidade de A temos $R = \bigcap_{i=1}^{r} C_G(x_i) = C_G(A) = A$.

Os fechamentos de $\mathfrak{X}$ nos garantem que $\frac{G}{A} \in \mathfrak{X}$, pois $\dfrac{G}{A}$ é isomorfo a um subgrupo de $\dfrac{G}{C_G(x_1)} \times \dfrac{G}{C_G(x_2)} \times \cdots \times \dfrac{G}{C_G(x_r)}$.

■

Lema 13. *Sejam G um grupo e $\mathfrak{X}$ uma classe de grupos fechada a subgrupos, quocientes e extensões tal que $\mathfrak{X} \subseteq \widehat{\mathfrak{M}}$, i.e todo $\mathfrak{X}$-grupo é noetheriano. Suponha que para todos os subgrupos metabelianos M de G vale $\dfrac{M}{\zeta(M)}$ é um $\mathfrak{X}$-grupo. Se G possui um grupo abeliano normal, A, com quociente $\dfrac{G}{A}$ um $\mathfrak{X}$-grupo, então G é um $\mathfrak{X}$-grupo sobre o seu centro.*

Demonstração. Faça $\dfrac{G}{A} = \langle Ax_1, ..., Ax_r \rangle$.

Para cada $1 \leq i \leq r$ temos que $A_i = A\langle x_i \rangle$ é metabeliano e portanto $\dfrac{A_i}{\zeta(A_i)}$ é um $\mathfrak{X}$-grupo. Desta forma segue que $\dfrac{A}{A \cap \zeta(A_i)} \cong \dfrac{A\zeta(A_i)}{\zeta(A_i)} \in \mathfrak{X} \; \forall \, 1 \leq i \leq r$.

Assim, podemos concluir que $\dfrac{A}{A \cap K} \in \mathfrak{X}$ onde $K = \bigcap_{i=1}^{r} \zeta(A_i)$. Agora $(A \cap K) \lhd G$ pois $(A \cap K) \leq \zeta(G)$, e como $\dfrac{G}{A} \in \mathfrak{X}$ e $\mathfrak{X}$ é uma classe fechada a extensões segue que $\dfrac{G}{A \cap K} \in \mathfrak{X}$. Finalmente do isomorfismo

$$\frac{G}{\zeta(G)} \cong \frac{G/(A \cap K)}{\zeta(G)/(A \cap K)}$$

segue que $\dfrac{G}{\zeta(G)}$ é $\mathfrak{X}$-grupo.

■

Podemos aplicar o lema 13 às classes $\mathfrak{X} = \widehat{\mathfrak{M}}$ dos grupos noetherianos e $\mathfrak{X} = \mathfrak{F}$ dos grupos finitos obtendo os

Corolário 7. *Seja G um grupo onde todos os subgrupos metabelianos são noetherianos sobre o centro. Se G possui um subgrupo abeliano normal com quociente noetheriano então G é central por noetheriano.*

Corolário 8. *Seja G um grupo onde todos os subgrupos metabelianos são finitos sobre o centro. Se G possui um subgrupo abeliano normal com quociente finito então G é central por finito.*

Observação 1. *Pela própria hipótese, e pelo fechamento a extensões de grupos Noetherianos (finitos) para concluirmos os corolários 7 e 8 basta de fato encontrarmos em G um metabeliano normal com quociente Noetheriano(finito).*

Para a demonstração do Teorema Principal precisaremos ainda do seguinte resultado devido a Baer, Malcev e Smirnov que enunciaremos sem demonstração:

Resultado 6. *Sejam G um grupo policíclico e H um subgrupo solúvel de $Aut(G)$. Então H é policíclico.*

Demonstração. A demonstração desse pode ser encontrada em [15], pgs. 82/83.

■

Demonstração. (do Teorema 4) a) Por indução sobre o comprimento da cadeia solúvel podemos supor que $\frac{G'}{\zeta(G')}$ policíclico. Seja $C = C_G\left(G'/\zeta(G')\right)$.

Temos que $C \trianglelefteq G$ e pelo resultado 6 temos que $\frac{G}{C}$ é policíclico pois G/C é isomorfo a um subgrupo de$Aut(G'/\zeta(G'))$.

Como a classe dos grupos policíclicos é fechada a extensões, a observação (1) informa que se encontrarmos um subgrupo $M \trianglelefteq C$ metabeliano com $\frac{C}{M}$ noetheriano (neste caso policíclico) o nosso teorema estará provado. De fato, feito isso, C será policíclico sobre $\zeta(C)$ e esse fará o papel do abeliano normal (em G) com quociente policíclico que o corolário requer.

Agora, temos por definição de C, que vale

$$[C^{'}, C] = [C, C^{'}] \leq [C, G^{'}] \cap C^{'} \leq \zeta(G^{'}) \cap C^{'} \leq \zeta(C^{'})$$

e portanto $\frac{C}{\zeta(C')}$ é nilpotente de classe 2. Aplicando novamente indução sobre o comprimento da cadeia solúvel segue que $\frac{C^{'}}{\zeta(C')}$ é policíclico. Tome agora Z como a pré-imagem de $\zeta(\frac{C}{\zeta(C')})$. Consideremos $\frac{M}{\zeta(C')}$ um subgrupo abeliano maximal de $\frac{C}{\zeta(C')}$. Temos então que $C^{'} \leq Z \leq M$.

Além disso M é metabeliano, logo $\frac{M}{\zeta(M)}$ é policíclico por hipótese.

Afirmação: $\zeta(M) \leq Z$

De fato, pois $[\zeta(M), C] \leq C^{'} \cap \zeta(M) \leq \zeta(C^{'})$.

Assim, conclui-se, através do isomorfismo $\frac{M}{Z} \cong \frac{M/\zeta(M)}{Z/\zeta(M)}$, que $\frac{M}{Z}$ é policíclico.

Agora, claro que também $\frac{M/\zeta(C^{'})}{Z/\zeta(C^{'})}$ é policíclico. Desta forma o lema 12 diz que $\frac{C/\zeta(C^{'})}{M/\zeta(C^{'})}$ é policíclico; ou seja $\frac{C}{M}$ é policíclico.

b) Pelo item a) temos que $\frac{G}{\zeta(G)}$ é policíclico. Se $\frac{G}{\zeta(G)}$ for cíclico então G é abeliano e não há nada a provar. Dessa forma, podemos supor, por indução sobre o comprimento (mínimo) de uma cadeia subnormal cíclica de $\frac{G}{\zeta(G)}$ que existe H com $\zeta(G) \leq H \lhd G$ tal que $\frac{G}{H}$ é cíclico. Como $\zeta(G) \leq \zeta(H)$, segue que $\frac{H}{\zeta(H)}$ é finito. Assim, o grupo $\frac{G}{\zeta(H)}$ é finito por cíclico. Portanto, existe nele um subgrupo $\frac{K}{\zeta(H)}$ cíclico e satisfazendo que $|G : K|$ é finito. Disso tudo segue que $K \leq G$ é metabeliano de índice finito em G e a observação 1 conclui este item.

■

Agora vem a:

Demonstração. (do Teorema Principal)

No Capítulo II vimos que a finitude e a policiclicidade sobre o centro, em qualquer grupo, são propriedades enumeravelmente testáveis. Usando isto temos que as hipóteses dos ítens a) e b) do Teorema Principal valem para **todos** os subgrupos metabelianos de G.

a) Seja $N \trianglelefteq G$ com N solúvel e G/N Noetheriano. Pelo teorema 4 item a), $N/\zeta(N)$ é policíclico. Então $G/\zeta(N)$ é Noetheriano. Pelo Corolario 7 segue o item.

b) Seja $N \trianglelefteq G$ solúvel tal que $\frac{G}{N}$ é finito. Pelo teorema 4 (item b)) segue que $\frac{N}{\zeta(N)}$ é finito. Portanto $\frac{G}{\zeta(N)}$ é finito e o ítem segue pelo corolário 8.

■

§ 3.3 Testando a finitude e a policiclicidade sobre outros subgrupos característicos.

Nesta última secção do capítulo III vamos, ainda no universo dos grupos solúveis (solúveis-por finito, solúveis-por noetheriano), pensar sobre a possibilidade de testar a finitude e/ou a policiclicidade (noetherianidade) sobre outros subgrupos característicos diferentes do centro.

Não vamos nos valer de nenhuma técnica diferente das utilizadas ao longo do capítulo. Nosso objetivo será justamente adaptá-las a outros subgrupos característicos de modo que, a partir de uma mudança adequada na família teste, possamos chegar a resultados semelhantes ao do Teorema principal.

Por exemplo, podemos obter um resultado inteiramente análogo ao Teorema Principal para testar a finitude sobre o radical de HIRSCH, $\mathbf{O}_{L\mathfrak{N}}(G)$ de um grupo G.

Semelhante, porém mais simples, que a demonstração do nosso Teorema Principal, prova-se o

Teorema 5. *a) Suponhamos G é solúvel-por-Noetheriano e seus subgrupos localmente nilpotentes-por-abeliano enumeráveis S ($S' \leq \mathbf{O}_{L\mathfrak{N}}(S)$) sejam localmente nilpotentes-por-policíclicos. Então G é localmente nilpotente-por-Noetheriano.*

b) Suponhamos G é solúvel-por-finito e seus subgrupos localmente nilpotentes-por-abeliano enumeráveis sejam localmente nilpotentes-por-finito.

Então G é localmente nilpotente-por-finito.

■

O teste da finitude sobre o hipercentro, em grupos solúveis-por finito, pelos subgrupos hipercentrais-por-abeliano S (i.e $\mathbf{H}(S') = S'$) se dá, também, de forma semelhante, porém apresenta algumas diferenças sutis e por isso iremos agora expor sua demonstração.

Para demonstrar que a família dos subgrupos enumeráveis hipercentrais-por-abeliano S é suficiente para, em grupos solúveis-por-finito, testar a finitude sobre o hipercentro necessitaremos de um resultado semelhante ao lema 13, a saber:

Lema 14. *Seja G um grupo solúvel e $L \leq G$ um subgrupo hipercentral de G satisfazendo $|G : L| < \infty$.*

Se cada um dos subgrupos hipercentrais-por-abeliano S de G forem finitos sobre (os seus) hipercentros, então $|G : \mathbf{H}(G)| < \infty$.

Demonstração. Podemos supor $L \trianglelefteq G$. Seja $G/L = \{Lx_1 = L,\ Lx_2,\ \cdots Lx_n\}$.

Para cada $1 \leq i \leq n$ temos que $L_i = L\langle x_i \rangle$ é hipercentral por abeliano e portanto, por hipótese vale $|L_i : \mathbf{H}(L_i)| < \infty \, \forall \ 1 \leq i \leq n$. Dessa forma, pelo **Teorema da Cobertura de Baer**, temos que cada L_i é finitamente coberto por subgrupos hipercentrais. Como $G = \bigcup_{i=1}^{n} L_i$ segue que G é finitamente coberto por subgrupos hipercentrais. Pelo mesmo teorema concluimos $|G : \mathbf{H}(G)| < \infty$.

■

E, finalmente vem o análogo do Teorema Principal item b):

Teorema 6. *Em grupos solúveis-por-finito a família dos subgrupos enumeráveis que são hipercentrais-por-abeliano "testa" a finitude sobre o hipercentro.*

Demonstração. Seja G um grupo solúvel-por-finito onde todos os seus subgrupos hipercentrais por abeliano enumeráveis são finitos sobre seus hipercentros. Conforme já foi visto no capítulo II a finitude sobre o hipercentro é uma propriedade $\mathfrak{C}$-detectável, e por isso, temos que todos os subgrupos hipercentrais-por-abeliano de G são finitos sobre o seu hipercentro.

Seja $N \trianglelefteq G$ solúvel com G/N finito.

É claro que se N é abeliano então N é particularmente hipercentral e o teorema segue. Portanto, por hipótese de indução sobre o comprimento da cadeia solúvel de N vale $N^{'}/\mathbf{H}(N^{'})$ é finito.

Faça $C = C_N(N^{'}/\mathbf{H}(N^{'}))$. Novamente aqui vale, pela definição de C que $C/\mathbf{H}(C^{'})$ é nilpotente de classe 2. Particularmente $C^{'}/\mathbf{H}(C^{'})$ é abeliano, logo, $C^{'} = \mathbf{H}(C^{'})$, pois $C^{'}/\mathbf{H}(C^{'})$ tem centro trivial. Disso segue que C é hipercentral por abeliano. Por hipótese temos que $|C : \mathbf{H}(C)| < \infty$ donde $|N : \mathbf{H}(C)| < \infty$ e também $|G : \mathbf{H}(C)| < \infty$.

Finalmente pelo lema 14 segue que $|G : \mathbf{H}(G)| < \infty$.

■

Mencionamos que para a finitude também sobre $\mathbf{R_2(G)}$ dos elementos 2-engelianos à direita de G (ver §1.5 da introdução), em grupos solúveis-por-finito, também temos um teorema análogo ao Teorema Principal, item b).
De forma semelhante demonstra-se

Teorema 7. *Seja G solúvel-por-finito e suponhamos que todos os subgrupos enumeráveis 2-engelianos-por-abeliano S de G (i.e. $\mathbf{R}_2(S') = S'$) satisfaçam $\left|\frac{S}{\mathbf{R}_2(S)}\right| < \infty$. Então $G/\mathbf{R}_2(G)$ é finito.*

O ingrediente principal para a demonstração (análogo ao Corolario 8) vem com o

Lema 15. *Seja G um grupo e $L \leq G$ um subgrupo 2-engeliano de G satisfazendo $|G : L| < \infty$.*

Se cada subgrupo 2-engeliano-por-abeliano S de G for finit sobre $\mathbf{R}_2(S)$, então $|G : \mathbf{R}_2(G)| < \infty$.

Demonstração. Faça $G/L = \{Lx_1 = L, \cdots, Lx_r\}$.

Para cada $1 \leq i \leq r$ defina $L_i = L\langle x_i \rangle$. Temos $\forall 1 \leq i \leq r$ que L_i é 2-engeliano-por-abeliano e, por hipótese,

$$\left| \frac{L_i}{\mathbf{R}_2(L_i)} \right| < \infty. \qquad (*)$$

Afirmamos agora que $\bigcap_{i=1}^{r} \mathbf{R}_2(L_i) \leq \mathbf{R}_2(G)$. De fato, tome $x \in \bigcap_{i=1}^{r} \mathbf{R}_2(L_i)$ e $g \in G$. É claro que existe $1 \leq i \leq r$ para o qual $g \in L_i$, logo, como $x \in \mathbf{R}_2(L_i)$ segue que $[x, g, g] = 1$. Como a escolha de g foi arbitrária segue que $x \in \mathbf{R}_2(G)$.

Como a escolha de x também foi arbitrária segue que $\bigcap_{i=1}^{r} \mathbf{R}_2(L_i) \leq \mathbf{R}_2(G)$ e, por (*) $|G : \mathbf{R_2}(\mathbf{G})| < \infty$.

$\blacksquare$

Terminamos este capítulo observando algumas problemáticas:

1) O teste da *noetherianidade* sobre estes dois subgrupos, $\mathbf{H}(G)$ e $\mathbf{R}_2(G)$, parecem problemas mais delicados, por não dispormos de um análogo do Corolario 7

2) O teste da *finitude* e da *noetherianidade* sobre os $\zeta_n(G)$ $(n > 1)$ - através dos subgrupos S que possuem derivada nilpotente de classe $\leq n$ - também parece complicado por não dispormos de Lemas análogos aos Corolários 7 e 8 do Lema 13.

Capítulo IV

Testando a $\mathfrak{H}\mathfrak{N}_c$-propriedade de grupos nos subgrupos $(c+2)$-gerados.

§ 4.1- A $\mathfrak{N}\mathfrak{N}_c$-propriedade em grupos finitos.

Vamos investigar neste capítulo a classe $\mathfrak{H}\mathfrak{N}_c$, i.e. a propriedade de um grupo G de ter seu $\Gamma_{c+1}(G)$ um subgrupo hipercentral.

Iniciamos, recordando um fato simples, a saber, que em qualquer grupo finito G vale:

G é nilpotente se e somente se cada dois elementos de ordens coprimas de G comutam.

Deste fato, segue que

uma condição necessária e suficiente para um grupo finito ser nilpotente é que seus subgrupos 2*-gerados o sejam.* (*)

O objetivo deste presente capítulo será generalizar primeiro, em grupos finitos, este fato via o teorema 7 abaixo. Também estenderemos a validade destes fatos para universos mais amplos de grupos infinitos, grupos hiperfinitos, entre eles.

Comecemos esta tarefa com o seguinte:

Lema 16. *Sejam G um grupo finito e $N \trianglelefteq G$ de modo que $N\mathbf{\Phi}(G)/\mathbf{\Phi}(G)$ é um grupo nilpotente. Então $N\mathbf{\Phi}(G)$ é nilpotente.*

Demonstração.

Faça $\Phi = \mathbf{\Phi}(G)$ e $K = N\Phi$.

Tome P um p-subgrupo de Sylow de K.

Como $K/\Phi \trianglelefteq G/\Phi$ é nilpotente e $P\Phi/\Phi \in Syl_p(K/\Phi)$ segue que $P\Phi/\Phi \trianglelefteq G/\Phi$ e daí $P\Phi \trianglelefteq G$. Aplicando o argumento de Frattini vem $G = \mathbf{N}_G(P)(P\Phi) = \mathbf{N}_G(P)\Phi$. Daí $G = \mathbf{N}_G(P)$. Logo, $P \trianglelefteq K$ e o lema segue.

■

Façamos um pequeno comentário: sabemos, pela classificação dos grupos simples finitos, que todo grupo simples é 2-gerado. Deste fato fica claro que, qualquer grupo (finito) cujos subgrupos 2-gerados são solúveis, é também solúvel (basta analisar um contraexemplo de ordem minimal).
Estamos agora aptos a generalizar, no seguinte, o resultado (*) acima:
(Lembrando: $\Gamma_1(G) = G$, e indutivamente, $\Gamma_{k+1}(G) = [\Gamma_k(G), G]$ para $k \geq 1$).

Teorema 8. *Seja $c \geq 0$ e G um grupo finito no qual todos os subgrupos $(c+2)$-gerados H possuem seu subgrupo $\Gamma_{c+1}(H)$ nilpotente. Então $\Gamma_{c+1}(G)$ é nilpotente.*

Em outras palavras:

No universo $\mathfrak{F}$ dos grupos finitos, a $\mathfrak{H}\mathfrak{N}_c(=\mathfrak{N}\mathfrak{N}_c)$-propriedade, é $\mathfrak{G}_{c+2}$-testável.

Observamos que, para $c = 0$ temos devolvido o resultado (*).

Demonstração. Seja G um contraexemplo de ordem minimal.

Temos, pelo comentário acima, que G é solúvel. Afirmamos que G possui somente um subgrupo normal minimal. De fato, se mais houvessem, digamos, N e L, então, ambos estariam dentro do subgrupo $\Gamma_{c+1}(G)$, pois, se por exemplo, $N \cap \Gamma_{c+1}(G) = \{1\}$, teríamos, devido ao isomorfismo

$$\Gamma_{c+1}(G) \cong \Gamma_{c+1}(G)N/N = \Gamma_{c+1}(G/N),$$

a nilpotência de $\Gamma_{c+1}(G)$. Daí como $\Gamma_{c+1}(G) \cong \Gamma_{c+1}(G)/L \cap N$ é isomorfo a um subgrupo de $\Gamma_{c+1}(G)/L \times \Gamma_{c+1}(G)/N$, o teorema seguiria.

Consideremos desta forma, N o único subgrupo normal minimal de G. Pela solubilidade de G temos que N é p-grupo abeliano elementar. Temos, graças ao lema 16, que $\mathbf{\Phi}(G) = 1$ e podemos tomar um subgrupo maximal C tal que $G = NC$. Como N é abeliano e normal minimal em G, segue $N \cap C = 1$, i.e. $G = [N]C$.

Vamos mostrar que $N = Fit(G) = F$. Temos $N \leq \zeta(F)$, pois $1 \neq \zeta(F) \trianglelefteq G$ e N é único. Supondo $N < F$ teríamos $1 \neq F \cap C \trianglelefteq N(F \cap C) = F$ e daí $F \cap C \trianglelefteq FC = G$, o que contraria a unicidade de N.

Afirmação: Todos os subgrupos maximais K de C satisfazem $\Gamma_{c+1}(K) = \{1\}$.

Seja $M/N = KN/N$ o subgrupo maximal de G/N correspondente ao K. Pelo isomorfismo $G/N \cong C$ basta mostrarmos que $\Gamma_{c+1}(M) \leq N$. A maneira pela qual G foi escolhido, nos garante a nilpotência de $\Gamma_{c+1}(M)$ e também de $\Gamma_{c+1}(G)/N$. Dessa última tiramos que $(\Gamma_{c+1}(G) \cap M)/N \trianglelefteq\trianglelefteq \Gamma_{c+1}(G)/N$, donde, $(M \cap \Gamma_{c+1}(G)) \trianglelefteq\trianglelefteq G$, e, como $\Gamma_{c+1}(M) \trianglelefteq (M \cap \Gamma_{c+1}(G))$, segue que $\Gamma_{c+1}(M) \trianglelefteq\trianglelefteq G$. Finalmente, $\Gamma_{c+1}(M) \leq F = N$.

Por fim, está claro que $C \cong G/N$ não é nilpotente de classe c. Portanto, existem $h_0, h_1, ..., h_c \in C$ tais que $[h_0, h_1, ..., h_{c-1}, h_c] = [[h_0, ..., h_{c-1}], h_c] \neq \{1\}$. Afirmamos que, $C = \langle h_0, h_1, \ldots, h_c \rangle$: De fato, caso contrário, qualquer subgrupo maximal K de C, contendo $\langle h_0, ..., h_c \rangle$ contrariaria à afirmação acima. Assim sendo, segue pela maximalidade de C, que G é $(c+2)$-gerado e o teorema segue.

∎

4.2- A $\mathfrak{H}\mathfrak{N}_c$-propriedade em algumas classes de grupos infinitos.

Vamos estender o teorema 8 para algumas classes de grupos infinitos. Primeiro vem o

Teorema 9. *No universo $\mathfrak{Z}^{\infty}\mathfrak{F}$ dos grupos policíclicos-por-finito a $\mathfrak{N}\mathfrak{N}_c$-propriedade é $\mathfrak{G}_{c+2}$-testável.*

Demonstração. Vamos nos valer de um Teorema de Hirsch[1]

[1] A nilpotência de um grupo polcíclico-por-finito é testável nos seus quocientes finitos. (ver em [14], 5.4.18, pg. 154)

Tome $N \trianglelefteq \Gamma_{c+1}(G)$ tal que $\Gamma_{c+1}(G)/N$ seja finito. Como também $\Gamma_{c+1}(G)/N_G$ é finito, podemos supor $N \trianglelefteq G$. Como $\Gamma_{c+1}(G/N) = \Gamma_{c+1}(G)/N$ e vale o fechamento da hipótese a quocientes, podemos supor $N = 1$, i.e. $\Gamma_{c+1}(G)$ é finito e devemos mostrar que esse é nilpotente. Fazendo $C = \mathbf{C}_G(\Gamma_{c+1}(G))$ temos que $\zeta(\Gamma_{c+1}(G)) = C \cap \Gamma_{c+1}(G)$. Além disso G/C é finito e novamente pelo fechamento da hipótese vem que $C\Gamma_{c+1}(G)/C = \Gamma_{c+1}(G/C)$ é nilpotente pelo teorema anterior. Finalmente do isomorfismo

$$C\Gamma_{c+1}(G)/C \cong \Gamma_{c+1}(G)/\zeta(\Gamma_{c+1}(G))$$

segue a nilpotência de $\Gamma_{c+1}(G)$.

■

Queremos provar em seguida, uma extensão deste resultado, a saber que a propriedade $\mathfrak{H}\mathfrak{N}_c$ de ser *hipercentral-por-(nilpotente de classe* $\leq c$), pode ser testada pelos subgrupos $(c+2)$-gerados até no universo $H(\mathfrak{Z}^\infty \cup \mathfrak{F})$ dos grupos hiper-(policíclicos ou finitos).
Primeiro observamos:

Não é difícil ver que a classe $H(\mathfrak{Z}^\infty \cup \mathfrak{F})$ coincide com a classe $H(\mathfrak{Z}^\infty\mathfrak{F})$ dos grupos hiper-(policíclicos-por-finito).
Uma outra caracterização da classe $H(\mathfrak{Z}^\infty\mathfrak{F})$ é:

Observação 2. *$G \in H(\mathfrak{Z}^\infty\mathfrak{F})$, se e somente se cada quociente G/N de G possui um subgrupo normal policíclico ou um $\mathfrak{F}C$- elemento não-trivial.*

Demonstração. Basta mostrar que um grupo com esta última propriedade é hiper-(policíclico-por-finito) [perceba que a recíproca é clara].
É suficiente mostrarmos que se G possui um $\mathfrak{F}C$-elemento $\neq 1$, então G possui um subgrupo normal policíclico-por-finito. Seja x um $\mathfrak{F}C$-elemento de G. Faça $L = \langle x^G \rangle$ e $C = \mathbf{C}_G(L)$. Assim feito, segue do isomorfismo $CL/C \cong L/C \cap L = L/\zeta(L)$, e do resltado 1 de §1.1 concluimos que $L' \trianglelefteq G$ é finito. Podemos, portanto, supor L abeliano e nesse caso $L \trianglelefteq G$ é policíclico.

■

Entretanto, nem todo grupo policíclico possui $\mathfrak{F}C$- centro não trivial, é o que nos mostra o:

Exemplo 2. Seja $G = [(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})]\langle A \rangle$ onde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Chamaremos essa matriz de *Matriz de Fibonacci*, pois, se considerarmos a sequência de Fibonacci abaixo:

$$a_0 = 0,\ a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 2, ..., a_{n+2} = a_n + a_{n+1}, ...$$

percebemos, calculando indutivamente as potências (positivas) de A, que

$$A^n = \begin{pmatrix} a_{n+2} & a_{n+1} \\ a_{n+1} & a_n \end{pmatrix}$$

$\forall\ n \geq 0$.

Claro que G é um grupo policíclico. Como a ação de A em $N = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ é fiel, temos $C_G(N) = N$. Suponha, o $\mathfrak{F}C$-centro $\mathfrak{F}C(G) > 1$. Então $\mathfrak{F}C(G) \cap N \neq 1$, i.e. existe $(0,0) \neq (x,y) \in \mathfrak{F}C(G) \cap N$. Daí alguma potência de A centraliza (x,y). Para verificar que isto não é possível, basta mostrar que para qualquer número natural n a matriz A^n (vista como transformação linear sobre $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$) não possui autovalor igual a 1. Mas ,de fato, se λ é um autovalor de A^n então

$$Det(A^n - \lambda I) = \lambda^2 - (a_{n+2} + a_n)\lambda + (a_{n+2}.a_n - a_{n+1}^2).$$

Calculando a raiz do discriminante dessa equação, vemos que esta vale $a_{n+1}.\sqrt{5}$ não podendo, assim, existir autovalores racionais para tais matrizes.

Para atacarmos nosso problema de testar $\mathfrak{H}\mathfrak{N}_c$ no universo $H(\mathfrak{Z}^\infty\mathfrak{F})$ pelos subgrupos $(c+2)$-gerados, vamos nos valer ainda do seguinte:

Lema 17. *Sejam G um hiper$-\mathfrak{X}$-grupo ($\mathfrak{X}$ uma classe fechada a subgrupos e quocientes) e $N \trianglelefteq G$, $N \neq 1$. Então existe $\mathfrak{X}$-subgrupo $\{1\} \neq L \leq N$ normal em G.*

Demonstração. Considere a família $\mathcal{F} = \{X \trianglelefteq G \mid X \cap N = \{1\}\}$. Temos que essa é indutivamente ordenada. O lema de Zorn então nos garante a existência de um subgrupo M maximal de $\mathcal{F}$.

Segue da hipótese que existe $M < K \trianglelefteq G$ satisfazendo $K/M \in \mathfrak{X}$. Agora, pela maximalidade de M, vem $L = N \cap K \neq \{1\}$. Claro que $L \trianglelefteq G$ e do isomorfismo $L = L/(L \cap M) \cong LM/M$ vem que $L \in \mathfrak{X}G$.

■

Decisivo para a demonstração do nosso assunto é:

Proposição 5. *Sejam G um grupo e $N \trianglelefteq G$ de modo que $N \leq \Gamma_{c+1}(G)$, $c \geq 0$. Suponha N é policíclico-por-finito e para cada $c+1$ elementos $x_0, \cdots, x_c$ de G e cada elemento $n \in N$ tenhamos $\Gamma_{c+1}(\langle x_0, \cdots x_c, n\rangle)$ é hipercentral.*

Então $N \cap \zeta(\Gamma_{c+1}(G)) \neq \{1\}$.

Demonstração. Primeiro, vamos verificar o fechamento dessa hipótese a quocientes. Para isso, tome $M \trianglelefteq G$. Temos $MN/M \cong N/M \cap N$ policíclico-por-finito e $MN/M \leq M\Gamma_{c+1}(G)/M = \Gamma_{c+1}(G/M)$. Para $x_0, \cdots, x_c \in G$ e $n \in N$, considere o subgrupo $(c+2)$-gerado $\langle Mx_0, \cdots Mx_c, Mn\rangle$ de G/M. Tal grupo também pode ser denotado por MK/M onde $K = \langle x_0, \cdots, x_c, n\rangle$.

Agora, já que $\Gamma_{c+1}(K)$ é, por hipótese, hipercentral segue que $\Gamma_{c+1}(MK/M) = \Gamma_{c+1}(K)M/M \cong \Gamma_{c+1}(K)/(\Gamma_{c+1}(K) \cap M)$ é hipercentral.

Caso 1: N é finito.

Bem, sabemos nesse caso, que N é solúvel, de modo que podemos supor $N = \langle x^G\rangle$ um p-grupo abeliano elementar.

Faça $D = \mathbf{C}_G(N)$ e $C = \mathbf{C}_{\Gamma_{c+1}(G)}(N) = D \cap \Gamma_{c+1}(G)$.

Como G/D é finito e $\Gamma_{c+1}(G/D) = \Gamma_{c+1}(G)D/D$ segue do fechamento da hipótese a quocientes e do Teorema 8 [caso finito] que $\Gamma_{c+1}(G)/C = \Gamma_{c+1}(G)/(\Gamma_{c+1}(G) \cap D) \cong \Gamma_{c+1}(G)D/D$ é nilpotente.

Como $N \leq \Gamma_{c+1}(G)$ então $N \leq C$. Assim, em vista do lema 2, basta mostrarmos que $\Gamma_{c+1}(G)/C$ não possui p'-parte. Agora, pela nilpotência desse quociente, é suficiente mostrar que todo gerador dele tem ordem potência de p.

Considere Ck onde $k = [d_0, \cdots, d_c]$ um gerador genérico de $\Gamma_{c+1}(G)/C$. Suponha $\mathbf{o}(Ck) = p^\ell r$; $\ell, r \in I\!N$ e com $(p, r) = 1$.

Tome $w = k^{p^\ell}$. Para cada $n \in N$ defina o grupo $L_n = \langle d_0, \cdots d_c, n\rangle$. Nesse temos que o subgrupo abeliano $\langle n^{L_n}\rangle \leq \mathbf{O}_{L\mathfrak{N}}(L_n)$, o radical localmente nilpotente de L_n, e também, por hipótese, $\Gamma_{c+1}(L_n) \leq \mathbf{O}_{L\mathfrak{N}}(L_n)$. Particularmente, então, tem-se $n, w \in \mathbf{O}_{L\mathfrak{N}}(L_n)$.

Disso segue $F = \langle n, w\rangle$ é nilpotente.

Vamos mostrar que F é de classe 2.

De fato $F/\langle n^F\rangle \cong \langle w\rangle/\langle w\rangle \cap \langle n^F\rangle$ é abeliano (cíclico) e portanto F' centraliza n.

Por outro lado, $\langle w^r\rangle \trianglelefteq F$, pois $w^r \in C$. Assim, $\langle w\rangle/\langle w^r\rangle$ é a p'-parte do grupo nilpotente $F/\langle w^r\rangle$; disso concluimos que $\langle w\rangle \lhd F$ e F' centraliza w.

Por fim, colocando $\mathbf{o}(\langle w\rangle \cap n^F) = p^t$ para algum $t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, vem:

$$[w^r, n] = [w, n]^r = 1$$

e

$$[w^{p^t}, n] = [w, n]^{p^t} = 1.$$

E, como, $(r, p) = 1$ segue que $[w, n] = 1\ \forall\ n \in N$; donde $w \in C$, i.e. $\mathbf{o}(kC) = p^\ell$.

Caso 2: N é policíclico.

Segue de forma análoga ao Caso 2 da demonstração do **Teorema da Cobertura de Baer**.

■

Como consequência direta desse lema vêm o nosso importante:

Teorema 10. *No universo dos grupos hiper(policíclicos-por-finito), a propriedade $\mathfrak{H}\mathfrak{N}_c$ é $\mathfrak{G}_{c+2}$-testável.*

Demonstração. Seja G um grupo em $H(\mathfrak{Z}^\infty\mathfrak{F})$ (=$H(\mathfrak{Z}^\infty \cup \mathfrak{F})$). Como a nossa hipótese é fechada a quocientes, basta mostrarmos que o centro de $\Gamma_{c+1}(G)$ é não trivial; mas, como o grupo possui um normal policíclico-por-finito, isso está claro pelo lema 17 e a proposição 5 acima.

■

O Teorema 10 possui importantes corolários. De fato, fica claro que a $\mathfrak{H}\mathfrak{N}_c$-propriedade é $\mathfrak{G}_{c+2}$-testável em grupos hiper-policíclicos e em grupos hiper-finitos.

Além disso, pelo Teorema de KUROŠ na página 1, da introdução, podemos perceber que todo grupo de Chernikov (ou hiper Chernikov) é hiper finito; de forma que também nesses grupos G, a hipercentralidade do $\Gamma_{c+1}(G)$ é testada pelos subgrupos $c+2$-gerados.

Fazendo $c = 0$ na proposição 5 temos o:

Corolário 9. *Sejam G um grupo e $N \trianglelefteq G$ de modo que N é policíclico-por-finito e para todos os elementos $x \in G$ e $y \in N$ tenhamos $\langle x, y\rangle$ nilpotente. Nesta situação $N \cap \zeta(G) \neq \{1\}$.*

O Teorema 10 diz para $c = 0$ que

Em todo grupo (hiper)policíclico-por-finito, a hipercentralidade ocorre se os seus subgrupos 2-gerados forem nilpotentes. (**)

Para ampliar ainda o universo de validade deste resultado específico, introduzimos:
Dada uma classe (propriedade) $\mathfrak{X}$ de grupos, um elemento $x \in G$ que satisfaz $G/\mathbf{C}_G(\langle x^G\rangle) \in \mathfrak{X}$ é chamado um $\mathfrak{X}C$-elemento. Com essa breve definição podemos enunciar e demonstrar a:

Proposição 6. *Seja G um grupo que possui um $(\mathfrak{Z}^\infty\mathfrak{F})C$-elemento e seus subgrupos 2-gerados são nilpotentes. Então o grupo possui centro.*

Demonstração. Seja $1 \neq x \in G$ tal que G/C é policíclico por finito; onde $C = \mathbf{C}_G(\langle x^G\rangle)$.

Suponhamos primeiro que $\langle x^G\rangle$ não seja abeliano. Bem, sabemos do isomorfismo $\langle x^G\rangle/\zeta(\langle x^G\rangle) \cong C\langle x^G\rangle/C$ e do fato de $\mathfrak{Z}^\infty\mathfrak{F}$ ser uma classe de Schur (ver resultado 1 em §1.1) que $\langle x^G\rangle'$ é policíclico por finito. Neste caso, o teorema segue do corolário 9.

Podemos, então, supor $\langle x^G\rangle$ abeliano. Seja $C \leq N \trianglelefteq G$ tal que N/C é policíclico e G/N é finito.

Vamos prosseguir por indução no comprimento mínimo de uma cadeia cíclica de N/C. Para tal reparemos, primeiro, que, caso G/C seja finito então x é um $\mathfrak{F}C$-elemento e $\langle x^G \rangle$ seria abeliano finitamente gerado (logo policíclico) encerrando a questão. De outro modo, considerando K como a pré imagem do penúltimo termo da série cíclica de N/C teríamos, por hipótese de indução, (claro que $x \in K$ e $K/\mathbf{C}_K\langle x^K \rangle)$ é policíclico) que $\zeta(K) \neq \{1\}$.

Faça $N/K = \langle Ky \rangle$. Tome agora $1 \neq z \in \zeta(K)$ e considere o grupo nilpotente $L = \langle y, z \rangle$. Temos que $z \in \zeta(K) \cap L \trianglelefteq L$ por isso existe $1 \neq h \in \zeta(L) \cap \zeta(K)$ e esse é central em N. Disso tudo, vem $G/\mathbf{C}_G(h)$ é finito e portanto $\langle h^G \rangle$ é abeliano finitamente gerado, portanto policíclico, e o teorema segue novamente por aplicação do corolário 9.

■

Apresentaremos, a seguir, uma segunda demonstração desta proposição que não necessita da propriedade de Schur da classe $\mathfrak{Z}^\infty\mathfrak{F}$:

Demonstração. Sejam x, N, C como na demonstração acima.

Caso $\langle x^G \rangle$ seja abeliano podemos utilizar os mesmos argumentos da demonstração acima. Caso contrário existe $g \in G$ satisfazendo $c = [x, x^g] \neq 1$, como G/N é cíclico segue que $c \in N$ e, finalmente de $C \leq \mathbf{C}_G(\langle c^G \rangle)$ vem que $G/\mathbf{C}_G(\langle x^G \rangle)$ é policíclico e estamos novamente aptos a aplicar indução e concluir, por argumentos novamente similares aos utilisados acima que existe $1 \neq h \ \in \zeta(N)$ e do mesmo modo $\langle h^G \rangle$ é abeliano e policíclico, com o corolário 9 encerrando a questão.

■

Podemos reunir as informações da proposição 6 e do resultado (**) em um único teorema. Para isso vamos definir o seguinte universo de grupos:

$$\mathfrak{V} = \Big\{ G : \forall\ N \lhd G,\ G/N \text{ possui um subgrupo } \mathfrak{Z}^\infty\mathfrak{F} \text{ normal não trivial}$$
$$\text{ou um } (\mathfrak{Z}^\infty\mathfrak{F})C\text{-elemento} \neq 1 \Big\}.$$

Desta forma podemos estabelecer uma forma mais geral dos nossos resultados, a saber:

Teorema 11. *Qualquer grupo pertencente a classe $\mathfrak{V}$ acima que possui todos os seus subgrupos 2-gerados hipercentrais (nilpotentes), é hipercentral.*

(No universo $\mathfrak{V}$, a propriedade $\mathfrak{H}$ é $\mathfrak{G}_2$-testável)

Para que o Teorema acima não pareça inócuo devemos lançar mão de um exemplo mostrando que a propriedade de ser hiper(policíclico-por-finito) não coincide com a propriedade de, em cada quociente, possuir um $\mathfrak{Z}^{\infty}C$-elemento $\neq 1$. Isto está comprovado pelo:

Exemplo 3. Considere o grupo

$$G = C_p \wr C_\infty \,.$$

Verifiquemos primeiro que G não é hiper(policíclico-por-finito). De fato, como a ação de C_∞ em B é transitiva, temos que para qualquer $\{1\} \neq L \trianglelefteq G$ vale $|L \cap B| = \infty$ e, como B é abeliano de torção, qualquer normal policíclico-por-finito de G intercepta B em um grupo finito. Portanto, o único subgrupo normal em G que é policíclico-por-finito, é o trivial.

Falta provar que, em cada quociente próprio de G existe um $(\mathfrak{Z}^{\infty}\mathfrak{F})C$-elemento não trivial. Seja B o grupo base de G e considere $N \lhd G$. Se $B \leq N$, a afirmação está clara. Caso contrário, pegue $x \in B - N$. Agora é claro que Nx é um $\mathfrak{Z}C$-elemento (particularmente um $(\mathfrak{Z}^{\infty}\mathfrak{F})C$)-elemento de G/N.

Capítulo V

Testando a hipercentralidade em grupos hipercíclicos.

§ 5.1- Hipercentralidade em grupos hipercíclicos.

O objetivo deste último capítulo da nossa tese é mostrar que a hipercentralidade de um grupo hipercíclico é consequência da nilpotência (= hipercentralidade) dos seus subgrupos metacíclicos. Em outras palavras:

$\mathfrak{H}$ *é* $\mathfrak{Z}^2$*-testável no universo* $H\mathfrak{Z}$ *dos grupos hipercíclicos.*

Como todo grupo hipercentral é hipercíclico, teremos portanto a seguinte caracterização dos grupos hipercentrais:

Um grupo G é hipercentral, se e somente se, ele é hipercíclico e todos seus subgrupos metacíclicos são nilpotentes. (I)

Obteremos este resultado a partir de dois outros, um devido a Baer, a saber,

Resultado 7. *Todo grupo hipercíclico é localmente supersolúvel.*

Demonstração. A demonstração deste resultado pode ser encontrada em [15], Cor. pg. 73.

■

Um outro, aparentemente inédito, cuja demonstração é o principal objetivo deste capítulo, a saber, que em grupos supersolúveis a nilpotência é testável pela família dos subgrupos metacíclicos.

Dito isso em outras palavras temos o:

Teorema Principal

Seja G um grupo supersolúvel onde todos os seus subgrupos metacíclicos são nilpotentes. Então G é nilpotente.

O grupo alternado $\mathbf{A}_4$ mostra que o mesmo teste não é válido em grupos policíclicos em geral.

Bem, para iniciar, lembramos que um grupo G é dito *supersolúvel* se possui uma cadeia normal de subgrupos com quocientes cíclicos, i.e. G é policiclico e hipercíclico ($G \in \mathfrak{Z}^{\infty} \cap H\mathfrak{Z}$).

O primeiro passo para a obtenção do teorema principal é resolver o **caso finito**. Isso decorre diretamente do

Lema 18. *Todo grupo supersolúvel finito, minimal não nilpotente, é metacíclico.*

Demonstração. Seja G um tal grupo. Sabemos que todo grupo minimal não nilpotente é da forma $G = [P]Q$ onde P é o p-subgrupo de SYLOW de G e Q é um q-subgrupo de SYLOW de G; além disso Q é cíclico. Resta apenas demonstrar que, no caso supersolúvel, P também é cíclico.
Não é difícil mostrar (usando o teorema de MASCHKE), que $P/\mathbf{\Phi}(P)$ é um fator principal de G. Como G é supersolúvel, concluimos que $|P/\mathbf{\Phi}(P)| = p$, de onde segue que P é cíclico.

∎

A demonstração do Teorema Principal no caso de um grupo supersolúvel infinito é bem mais sofisticada.

Veremos primeiro mais um caso particular do Teorema Principal, a saber:

Proposição 7. *Seja G um grupo supersolúvel e $M \trianglelefteq G$, tal que M é finito e G/M é cíclico infinito. Suponha, que seus subgrupos metacíclicos são nilpotentes. Então G é nilpotente.*

Demonstração. Façamos $\frac{G}{M} = \langle Mx \rangle$ e temos claramente $G = [M]\langle x \rangle$. Como M é um subgrupo finito de G, podemos prosseguir por indução sobre a sua ordem. Pelo **caso finito**, M é nilpotente e claramente, por hipótese, M não é cíclico.

Vamos primeiro observar que, caso M não seja um p-grupo, podemos tomar um primo p que divide $|M|$ e considerar P o p-subgrupo de SYLOW de M, obtendo $M = P \times D$ onde D é o p-complemento.

Como $M \trianglelefteq G$ e P é característico em M segue que $P \trianglelefteq G$. Também $D \trianglelefteq G$.

Assim, fazendo $L_1 = [P]\langle x\rangle$, temos, pelo fato de $|P| < |M|$, que L_1 é nilpotente. E, disso, temos que $\langle x\rangle \trianglelefteq\trianglelefteq L_1$.

Analogamente, $\langle x\rangle \trianglelefteq\trianglelefteq L_2 = [D]\langle x\rangle$. Portanto, pelo corolário 1 (ver introdução), segue que,

$\langle x\rangle \trianglelefteq\trianglelefteq L_1L_2 = G$. Daí $\langle x\rangle \leq Fit(G)$. Como também $M \leq Fit(G)$, temos que $G = Fit(G)$ é nilpotente.

Pelo que acabamos de provar podemos trabalhar com o caso em que M é um p-grupo finito (não-cíclico). Vamos a ele.

Antes de tudo, já sabemos, pela supersolubilidade, que existe $H < M$ tal que $H \trianglelefteq G$ e $|M : H| = p$.

Fazendo $C = C_{\langle x\rangle}(M)$ temos que $\frac{\langle x\rangle}{C}$ age, por conjugação, em M e induzidamente no espaço vetorial $\frac{M}{\mathbf{\Phi}(M)}$. Como M não é cíclico segue que $\mathbf{\Phi}(M) < H$.

Vamos verificar que a p'-parte de $\frac{\langle x\rangle}{C}$ é trivial. De fato, seja $\frac{K}{C}$ a p'-parte de $\frac{\langle x\rangle}{C}$.

Assim, como a característica p do espaço vetorial $\frac{M}{\mathbf{\Phi}(M)}$ não divide a ordem deste grupo temos, pelo Teorema de MASCHKE, que $\frac{H}{\mathbf{\Phi}(M)}$ possui um complemento, $\frac{L}{\mathbf{\Phi}(M)}$ que é $\frac{K}{C}$-invariante. Ou seja $K \leq \mathbf{N}_G(L)$ e portanto LK é um grupo.

Novamente a hipótese de indução nos dá a nilpotência de HK e LK. Assim é claro que os grupos finitos $\frac{HK}{C}$ e $\frac{LK}{C}$ também são nilpotentes.

Agora, como $\frac{K}{C}$ é o p-complemento dos grupos finitos $\frac{HK}{C}$ e $\frac{LK}{C}$, segue que $K \trianglelefteq HK$ e $K \trianglelefteq LK$ ou seja $K \trianglelefteq MK$. Quer dizer K *centraliza* M e portanto $K = C$ e era isso que queríamos verificar.

Bem, $\frac{G}{C}$ é, deste modo, um p-grupo, logo temos $\frac{\langle x\rangle}{C} \trianglelefteq\trianglelefteq \frac{G}{C}$ e claro $\langle x\rangle \trianglelefteq\trianglelefteq G$ e o teorema segue.

■

Enunciaremos e demonstraremos agora o

Lema 19. *Sejam G um grupo localmente nilpotente e $M, N \trianglelefteq G$ tais que $N \leq M$ e $\frac{M}{N}$ é cíclico infinito. Então $\frac{M}{N}$ é central em $\frac{G}{N}$.*

Demonstração. Pelo fechamento a quocientes podemos assumir $N = \{1\}$ e vamos mostrar que $M = \langle x\rangle \ \leq \zeta(G)$:

Tome $y \in G$; então $x^y = x$ ou $x^y = x^-$. Suponha, por absurdo que ocorra a segunda equação. Então $x^{y^2} = x$ e $o(y)$ vai ser infinita ou par.

Neste caso, é claro que $\langle x\rangle \cap \langle y\rangle = \{1\}$. De fato, fazendo $\langle x\rangle \cap \langle y\rangle = \langle x^n\rangle$, teremos

$$(x^n)^y = x^n = x^{-n},$$

donde $n = 0$ pois $o(x) = \infty$. Temos que $\langle y^2\rangle = C_{\langle y\rangle}(\langle x\rangle) \trianglelefteq \langle y\rangle.\langle x\rangle$. Mas daí surge a contradição $\frac{\langle x\rangle\langle y\rangle}{\langle y^2\rangle} \cong D_\infty$ que não é nilpotente.

Logo x centraliza y e o lema segue.

■

E também o

Lema 20. *Seja G um grupo, $M \trianglelefteq G$ e suponhamos M infinito e supersolu-velmente imerso em G, i.e., existe em M uma cadeia cíclica de subgrupos normais em G. Então G possui um subgrupo normal cíclico infinito, contido em M.*

Demonstração. Seja $\{1\} \triangleleft M_1 \triangleleft \cdots \triangleleft M_{r-1} = N \triangleleft M_r = M$ uma cadeia cíclica de M com subgrupos normais em G de comprimento mínimo. Se $r = 1$ então o lema segue. Podemos portanto prosseguir por indução sobre r.

Caso N seja infinito, nele, e claro em M, existirá um subgrupo cíclico infinito normal de G. Podemos, assim, supor N finito.

Fazendo $\dfrac{M}{N} = \langle Ny \rangle$, temos $M = [N]\langle y \rangle$ e portanto

$$|M : \langle y \rangle| = |N\langle y \rangle : \langle y \rangle| = |N : N \cap \langle y \rangle| = |N| = n < \infty.$$

Daí, como $M \trianglelefteq G$ tem-se $|M : (\langle y \rangle)^g| = n \; \forall \;\; g \in G$.
Quer dizer $M/(\langle y \rangle)_G$ é de expoente n.

Como M não é de expoente finito, segue que $(\langle y \rangle)_G \neq \{1\}$ e $(\langle y \rangle)_G$ é portanto o nosso subgrupo requerido.

■

Em qualquer grupo G consideremos

$\mathbf{O}\,(G)$ - *o conjunto dos elementos de G que possuem ordem ímpar.*

Auxiliados pelos lemas 19 e 20 demonstraremos o importante

Lema 21. *(*Zappa *[19]) Seja G um grupo supersolúvel. Então valem:*

a) Temos que $\mathbf{O}\,(G)$ é subgrupo característico e finito de G.

b) Existe uma cadeia de subgrupos normais de G:

$$\mathbf{O}\,(G) = R_0 < R_1 < \ldots < R_h < R_{h+1} < \ldots < R_{n-1} < R_n = G,$$

de tal maneira que R_i/R_{i-1} são cíclicos infinitos para $i = 1, 2, \ldots, h$ e 2-grupos cíclicos para $i = h+1, \ldots, n$.

*Demonstração.*a) Primeiro verificaremos que $\mathbf{O}(G)$ é subgrupo de G.

Começamos lembrando que todo grupo supersolúvel finito é 2-*nilpotente*, o que equivale à afirmação neste caso.

Sejam G um grupo supersolúvel e $x, y \in \mathbf{O}\,(G)$.

Podemos supor $G = \langle x, y \rangle$ e mostrar que G é finito e daí $G = \mathbf{O}\,(G)$ e o lema segue.

Por indução sobre comprimento mínimo de uma cadeia normal cíclica de G, podemos admitir a existência de um subgrupo normal cíclico de G, digamos $N = \langle z \rangle$ de modo que $\dfrac{G}{N}$ é finito. Temos que N é infinito. Então temos $z^x = z^-$ *ou* $z^x = z$. Mas, se ocorresse a primeira, teríamos $z^{x^2} = z$ e como a ordem de x é ímpar segue que x centraliza z. Pela mesma razão y centraliza z.

Logo $N \leq \zeta(G)$, e disso segue que G é central por finito. Como $\mathfrak{F}$ é uma clase de Schur temos que G' é finito. Ora, mas $\dfrac{G}{G'}$ é abeliano finitamente gerado e de torção. Por fim G é finito.

É claro que em qualquer grupo $\mathbf{O}(G)$ é um subconjunto característico. Além disso, em grupos supersolúveis este forma um subgrupo finito.

b) Seja G um grupo supersolúvel. Como $\mathbf{O}\,(G)$ é subgrupo normal de G e $\mathbf{O}\left(\frac{G}{\mathbf{O}(G)}\right) = \{1\}$ podemos considerar G infinito e $\mathbf{O}\,(G) = \{1\}$.

Pelo Lema 20 existe $R_1 = \langle x \rangle$, um subgrupo cíclico infinito normal de G. Suponha R_1 escolhido de forma maximal. Afirmamos que $\mathbf{O}(\dfrac{G}{R_1})$ também é trivial. De fato, caso contrário, existiria, por refinamento de uma cadeia normal cíclica de $\dfrac{G}{R_1}$, um subgrupo $\dfrac{K}{R_1} \trianglelefteq \dfrac{G}{R_1}$ cíclico de ordem p, um primo ímpar.

Faça $\dfrac{K}{R_1} = \langle R_1 y \rangle$; então segue $K = \langle x \rangle \langle y \rangle$ e como $y^p \in \langle x \rangle$ e p é ímpar temos que y centraliza x. Daí K é um grupo abeliano (não cíclico pela maximalidade de R_1). Temos assim o homomorfismo:

$$\psi : K \longmapsto K$$

dado por $\psi(z) = z^p \ \forall \ z \in K$.

Agora, posto que $y^p \in \langle x \rangle$ temos

$$Im(\psi) = K^p < \langle x \rangle,$$

e da não ciclicidade de K segue que $Nuc(\psi) \neq \{1\}$. Portanto existem em K, e logo em G, elementos de ordem p. Mas isso é um absurdo pois estamos admitindo $\mathbf{O}\,(G)$ trivial.

Continuando, se necessário, este processo, podemos tomar, também em $\dfrac{G}{R_1}$, um cílico infinito normal e maximal $\dfrac{R_2}{R_1}$ e assim prosseguindo tem-se, pela condição maximal, que em determinado momento, "pararemos"em um $R_h \trianglelefteq G$ com $\left|\dfrac{G}{R_h}\right| < \infty$. Como $\mathbf{O}\left(\dfrac{G}{R_h}\right)$ é trivial, vem $\dfrac{G}{R_h}$ é 2-grupo.

O lema então segue por refinamento da série normal de $\dfrac{G}{R_h}$.

■

O resulado deste Lema é devido a ZAPPA e uma demonstração alternativa à nossa apresentada pode ser encontrada em [14], 5.4.8, pgs. 150/151.

Estamos quase habilitados a demonstrar nosso Teorema Principal. Resta para tanto somente mais um lema, a saber

Lema 22. *Sejam α um automorfismo de um grupo $G \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ com a notação aditiva e $N = \langle x \rangle$ um subgrupo cíclico α-invariante de G de modo que $\dfrac{G}{N}$ é cíclico infinito e ação de α centraliza N (i.e $\alpha(x) = x$) enquanto inverte $\dfrac{G}{N}$.*

Então existe um subgrupo cíclico α-invariante $K \leq G$ tal que $N \oplus K$ é de índice 2 em G. Além disso, G/K não possui elementos de ordem ímpar.

Demonstração. Podemos supor $N = \mathbb{Z} \times \{0\} = \langle (1, 0) \rangle$. Seja a matriz de α relativa à base natural

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

com $Det(A) = \pm 1$.

Deste modo temos:

$$(1, 0)A = (a, b) = (1, 0)$$

e daí concui-se $a = 1$ e $b = 0$.

Além disso vale:

$$(0, 1)A + \langle (1, 0) \rangle = (0, -1) + \langle (1, 0) \rangle$$

ou seja,

$$(c, d) + \langle (1, 0) \rangle = (0, -1) + \langle (1, 0) \rangle.$$

Da equação acima pode-se inferir que $d = -1$ e c pode ser qualquer inteiro.

Estamos buscando um subgrupo $\langle (x, y) \rangle$ (x e y dependentes de c) de tal modo que:

$$(x, y)A = (x + cy, -y) = k(x, y) \text{ para algum } k \in \mathbb{Z}$$

Resolvendo a equação acima descobrimos que $k = -1$.Além disso, x e y têm de satisfazer $x + cy = -x$. Podemos então tomar $x = -c$ e $y = 2$.
Assim o grupo $K = \langle (c, 2) \rangle$ satisfaz o lema. De fato, é claro que $N \cap K = \{(0, 0)\}$ e também que $N \oplus K = \mathbb{Z} \times 2\mathbb{Z}$. Sendo assim, $|G : N \oplus K| = 2$. Como G/K é isomorfo a $\mathbb{Z}$ ou a $\mathbb{Z} \times C_2$ então este quociente não possui elementos de ordem ímpar.

∎

Já analisamos dois casos do nosso Teorema Principal, a saber, quando G é finito e, fazendo $M = \mathbf{O}(G)$ na proposição 7, quando $\frac{G}{\mathbf{O}(G)}$ é cíclico infinito.

De posse destes dois resultados, podemos aplicar indução sobre o comprimento mínimo de uma cadeia normal cíclica acima de $R = \mathbf{O}(G)$ ordenada segundo Zappa (ver item b) do lema 21).
A partir de agora sempre que falarmos em cadeia ordenada estaremos nos referindo à esta ordenação. Também designaremos, de agora em diante $\mathbf{O}(G)$ por R.

Concluiremos, agora a demonstração do Teorema Principal.

Demonstração. (do Teorema Principal)

Seja G um grupo supersolúvel com todos os seus subgrupos metacíclicos nilpotentes. Considere

$$R = R_0 \lhd R_1 \lhd \cdots \lhd R_{n-1} \lhd R_n = G \quad (*)$$

uma série normal cíclica ordenada partindo de R e com comprimento mínimo.
Assim, todo subgrupo S de G com uma cadeia ordenada de comprimento $< n$ entre $\mathbf{O}(S)$ e S será, por hipótese de indução, nilpotente.

Façamos $M = R_{n-1}$ e $\frac{G}{M} = \langle Mx \rangle$. O caso $M = R$ já foi estudado e podemos supor $n \geq 2$. Fazendo o antepenúltimo termo $R_{n-2} = N$, considere o subgrupo $S = N\langle x \rangle$. Temos a cadeia

$$\mathbf{O}(S) = R = R_0 \lhd R_1 \lhd \cdots \lhd R_{n-2} = N \lhd S$$

de comprimento $n - 1$.

Como claramente tal cadeia é de comprimento $< n$, para concluirmos a nilpotência de $N\langle x\rangle$, basta mostrarmos que tal cadeia é ordenada. De fato, como a cadeia (*) está ordenada, concluimos do isomorfismo

$$\frac{N\langle x\rangle}{N\langle x\rangle \cap M} \cong \frac{M(N\langle x\rangle)}{M} = \frac{G}{M}$$

que $\dfrac{N\langle x\rangle}{N\langle x\rangle \cap M}$ ou é cíclico infinito ou é 2-grupo.
Caso ocorra a primeira, então $N = N\langle x\rangle \cap M$ e $\dfrac{N\langle x\rangle}{N}$ é cíclico infinito.

Caso ocorra a segunda e $\dfrac{M}{N}$ seja 2-grupo cíclico então é claro que $\dfrac{N\langle x\rangle}{N}$ é 2-grupo cíclico. Por fim, caso ocorra a segunda e $\dfrac{M}{N}$ seja cíclico infinito então temos $\dfrac{N\langle x\rangle}{N}$ é cíclico infinito, se $N\langle x\rangle \cap M \neq N$. Se $N\langle x\rangle \cap M = N$, novamente $\dfrac{N\langle x\rangle}{N}$ é 2-grupo cíclico. Assim, por hipótese de indução segue que $N\langle x\rangle$ é nilpotente e portanto vale:

$$\langle x\rangle \trianglelefteq \trianglelefteq N\langle x\rangle. \quad (1)$$

Afirmamos agora que podemos assumir $\dfrac{M}{N}$ infinito.

De fato, caso $\dfrac{M}{N}$ seja 2-grupo, então $\dfrac{G}{M}$ também o será e $\dfrac{G}{N}$ será nilpotente. Teremos portanto,

$$N\langle x\rangle \trianglelefteq \trianglelefteq G \qquad (2)\ .$$

De (1) e (2) concluimos $\langle x\rangle \trianglelefteq \trianglelefteq G$ e neste caso, o Teorema Principal segue.

Antes de começarmos a resolver os dois casos críticos restantes para a obtenção do Teorema Principal afirmamos que se pode admitir que x inverta $\dfrac{M}{N}$. De fato se x centralizasse $\dfrac{M}{N}$ teríamos $N\langle x\rangle \trianglelefteq G$ e por (1) $\langle x\rangle \trianglelefteq \trianglelefteq G$ e o Teorema Principal seguiria.

Caso Crítico 1: $n = 2$.

Neste caso temos $N = R$.

Conforme foi visto, $\dfrac{M}{R}$ é cíclico infinito. Daí, pelo lema 20, existe $T \trianglelefteq G$ cíclico infinito, $T \leq M$. Claro que $T \cap R = 1$.

A afimação a seguir encerrará este caso.

Afirmação: x não pode inverter $\dfrac{M}{R}$.

Suponha que x inverta $\dfrac{M}{R}$.
Agora do G-isomorfismo

$$\frac{RT}{R} \cong_G T$$

vemos que x inverte T . Mas acontece que $\langle x\rangle T$ é metacíclico, portanto nilpotente. Pelo lema 19, x centraliza T; quer dizer x centraliza $\dfrac{M}{R}$.

Caso Crítico 2: $n \geq 3$

Façamos $L = R_{n-3}$.

Já sabemos que $\dfrac{M}{N}$ e $\dfrac{N}{L}$ são grupos cíclicos infinitos. Como M/L é nilpotente, segue que M/L é abeliano isomorfo a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Como $N\langle x\rangle$ é nilpotente segue, pelo lema 19, que x centraliza N e claro também centraliza $\dfrac{N}{L}$. Como x inverte M/N, vai existir, pelo lema 22, um $\dfrac{K}{L} \leq \dfrac{M}{L}$ que é x-invariante (ou seja $K \trianglelefteq G$) e tal que $|M : NK| = 2$.

Finalmente, como M/K não possui elementos de ordem ímpar, vemos que $K\langle x\rangle/K$ é 2-grupo ou infinito. Logo a cadeia

$$R \lhd \ldots \lhd L \lhd K \lhd K\langle x\rangle$$

é ordenada de comprimento $n-1$. De novo por indução sobre n vem $\langle x\rangle \trianglelefteq\trianglelefteq K\langle x\rangle$, logo $\langle x\rangle \trianglelefteq\trianglelefteq NK\langle x\rangle \trianglelefteq G$, onde esta última normalidade resulta de $|G : NK\langle x\rangle| = 2$; e assim concluimos o caso.

■

De posse do Teorema Principal e do resultado 7 podemos concluir agora a caracterização dos grupos hipercentrais expressa em (I).

Demonstração. De fato, é claro que todo grupo hipercentral é hipercíclico e possui todos os seus subgrupos metacíclicos nilpotentes.

Por outro lado se G é um grupo hipercíclico segue pelo resultado que G é localmente supersolúvel. Se além disso todos os seus subgrupos metacíclicos são nilpotentes segue pelo Teorema Principal que G é localmente nilpotente.

Para verificar que G é hipercentral, basta mostrar que G possui centro.

Seja $\{1\} \neq \langle x\rangle \trianglelefteq G$.

Se $o(x) = \infty$ então x é central em G pelo lema 19.

Se $o(x) < \infty$ então podemos admitir que $o(x) = p$ onde p é um número primo. Tomando agora $y \in G$ qualquer, temos $L = \langle x\rangle\langle y\rangle$ é nilpotente e portanto $\zeta(L) \cap \langle x\rangle \neq \{1\}$.

Como a ordem de x é prima segue que $x \in \zeta(G)$.

■

§ 5.2- Exemplo Importante

Vamos mostrar agora que em grupos solúveis a nilpotência (hipercentralidade) não é nem mesmo **poli**-ciclicamente testável.

Contra exemplo

Para tal considere no grupo afim sobre o corpo $\mathbb{Q}$ dos racionais o subgrupo

$$G = \{\gamma_{a,b} : \ a, b \in \mathbb{Q}, \ a > 0\} .$$

G consiste das funções $\gamma_{a,b} : \mathbb{Q} \longmapsto \mathbb{Q}$ definidas por $x\,\gamma_{a,b} = ax + b \;\forall\; x \in \mathbb{Q}$. A operação deste grupo é dada por $\gamma_{a,b} \circ \gamma_{c,d} = \gamma_{ac,bc+d}$.

Antes de prosseguirmos percebamos que tal grupo é isomorfo ao grupo

$$S = \{(b, a) : a, b \in \mathbb{Q}, a > 0\}$$

definido pelas regras $(b, a).(d, c) = (b + da^{-}, ac)$. O isomorfismo sendo dado por

$$\psi : G \longmapsto S \quad \text{onde} \quad \psi(\gamma_{a,b}) = (ba^{-}, a) .$$

Vamos aqui, preferir trabalhar com S.

Bem, S é o produto semidireto do grupo $N = \{ (b, 1) : b \in \mathbb{Q}\}$ e o grupo $H = \{(0, a) : 0 < a \in \mathbb{Q}\}$. Claro que S é um grupo de Frobenius infinito (i.e. $(b, 1)^{(0,a)} \neq (b, 1)$ se $a \neq 1$ e $b \neq 0$). Por isso tem centro trivial e não é nilpotente (hipercentral).

Como os subgrupos N e H são abelianos segue que S é metabeliano e portanto solúvel. Só falta verificar que todos os subgrupos policíclicos de S são

nilpotentes. Na verdade vamos mostrar que estes são abelianos. De fato seja $R \leq G$ não abeliano.
Como $S' \leq N$ temos que existe $(b,1) \in R$ com $b \neq 0$. Mas também há em R um elemento (t,v) fora de N, ou seja, com $v \neq 1$.

E assim, a menos de uma conjugação adequada, podemos admitir que existe em R um elemento não trivial, $(0,c)$ com $c \neq 1$ de H. Acontece que $(b,1)^{(0,c)^n} = (bc^n,1) \in R \; \forall \; n \in \mathbb{Z}$.

Agora, se R fosse policíclico, então o subgrupo gerado por todos os pares do tipo $(bc^n,1) \; \forall \; n \in \mathbb{Z}$ seria finitamente gerado, e portanto cíclico (pois $(\mathbb{Q},+)$ é localmente cíclico). Mas isso é um absurdo já que nesse existem elementos cuja primeira coordenada está tão perto de zero quanto queiramos, pois $c \neq \pm 1$ e $b \neq 0$.

Desta forma ve-se que todos os subgrupos policíclicos são abelianos e o contraexemplo segue.

Referências Bibliográficas

[1] **Baer, R.**, *The hypercenter of a group*; Acta Math. **89**; 165-208 (1953);

[2] **Baer, R.**, *Abzählbar erkennbare gruppentheoretische Eigenschaften*; Math. Zeitschrift **89**; 344-363 (1962);

[3] **Behs, R. M.** *Grupos localmente finitos. O Teorema de Hall-Kargapolov-Kulatilaka.* Dissertação de Mestrado, Universidade de Brasília,(2003)

[4] **Dixon, M.R., Evans, M.J., Smith, H.**, *Some countably recognizable classes of groups*; Journal of Group Theory **10**, Issue 5 (2007), 641-653.

[5] **Kappe, W. P.**, *Die A-Norm einer Gruppe*; Illinois J. Math. **5**; 187-197 (1961);

[6] **Kegel, O.H.**, *Über den Normalisator von subnormalen und erreichbaren Untergruppen*; Math. Ann. **163**; 248-258 (1966).

[7] **Lennox, J. C. and Stonehewer, S. E.**, *Subnormal subgroups of groups*; Clarendon Press; Oxford (1987);

[8] **Maier, R.**, *Um problema da teoria dos subgrupos subnormais*; Bol. Soc. Bras. Mat. **8**; 127-130 (1977).

[9] **Maier, R.**, *Tópicos em Álgebra (Teoria dos Grupos)*; Texto de aulas (2/2001). Universidade de Brasília, UnB.

[10] **Neumann, B. H.**, *Groups covered by finitely many cosets*; Publ. Math. Debrecen **3**; 227-242 (1954);

[11] **Ramos, J. I. S.,** *Subgrupos preservadores de propriedades em grupos.* Tese de Doutorado, Universidade de Brasília, 2003.

[12] **Ramos, J. I. S. and Maier, R.** *Property preserving subgroups of a group.* JP Journal of Algebra, Number Theory and Applications **6**, Issue 2 (2006), 237-264.

[13] **Ramos, J. I. S. and Maier, R.** *On the local hypercenter of a group.* Proyecciones Journal of Mathematics (Antofagasta) **26**, Issue 3 (2007), 341-356.

[14] **Robinson, D. J. S.**, *A course in the theory of groups*; Springer Verlag; New York-Berlin-Heidelberg (1996);

[15] **Robinson, D. J. S.**, *Finiteness Conditions and generalized soluble groups*; Part 1, Springer Verlag (1972);

[16] **Robinson, D. J. S.**, *Finiteness Conditions and generalized soluble groups*; Part 2, Springer Verlag (1972).

[17] **Schur, I.**, *Neuer Beweis eines Satzes ber endliche Gruppen*; Sitzber. Akad. Wiss. Berlin, pp. 1013-1019 (1902).

[18] **Wielandt, H.**, *Subnormalität in faktorisierten endlichen Gruppen*; J. Algebra **69**; 305-311 (1981).

[19] **Zappa, G.**, *Sui gruppi di Hirsch supersolubili*; Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **12**; 1-11, 62-80 (1941).