



Universidade de Brasília  
Instituto de Ciências Exatas  
Departamento de Matemática

**SOBRE AS CURVAS BRAQUISTÓCRONA E  
TALTÓCRONA, TEOREMA DA DESIGUALDADE  
ISOPERIMÉTRICA E TEOREMA DOS QUATRO  
VÉRTICES**

**GABRIEL MAGALHÃES REIS**

**ORIENTADOR: ADAIL DE CASTRO CAVALHEIRO**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM  
MATEMÁTICA**

**BRASÍLIA/DF: MARÇO - 2020.**





Universidade de Brasília  
Instituto de Ciências Exatas  
Departamento de Matemática

# Sobre as curvas Tautócrona e Braquistócrona, Teorema da Desigualdade Isoperimétrica e Teorema dos Quatro Vértices

por

GABRIEL MAGAHÃES REIS

*Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos “Programa” de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, para obtenção do grau de*

MESTRE EM MATEMÁTICA

Brasília, 18 de março de 2020.

Comissão Examinadora:

---

Prof. Adail de Castro Cavalheiro (Orientador)

---

Prof. Kellcio Oliveira Araujo – MAT/UnB

---

Prof. Rui Seimetz - MAT/UnB



Ficha catalográfica elaborada automaticamente,  
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

MM188s Magalhães Reis, Gabriel  
Sobre as curvas Tautócrona e Braquistócrona, Teorema da  
Desigualdade Isoperimétrica e Teorema dos Quatro Vértices /  
Gabriel Magalhães Reis; orientador Adail de Castro  
Cavalheiro. -- Brasília, 2020.  
74 p.

Dissertação (Mestrado - Mestrado Profissional em  
Matemática) -- Universidade de Brasília, 2020.

1. Curva Tautócrona. 2. Curva Braquistócrona. 3.  
Desigualdade Isoperimétrica. 4. Teorema dos Quatro  
Vértices. 5. Equação de Euler-Lagrange. I. de Castro  
Cavalheiro, Adail, orient. II. Título.

# DEDICATÓRIA

*Dedico este trabalho primeiramente a Deus, pois sem Ele nada seria possível.  
Ao meu pai, Firmino Freitas Reis, "In Memoriam", e minha querida mãe, Delcy Magalhães Reis, que fizeram tudo o que era possível para que eu tivesse uma boa educação e conseguisse chegar até aqui.  
Aos meus irmãos que sempre acreditaram em mim, me incentivaram e motivaram para que eu sempre perseverasse e atingisse os meus objetivos.  
E à minha querida esposa que esteve comigo durante todo o tempo, me incentivando e me apoiando para que eu conseguisse finalizar esse trabalho.*

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço a todos os professores do Profmat/UnB, pela dedicação, pelas aulas, pelos ensinamentos e pela compreensão.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Adail de Castro Cavaleiro, por todos os conselhos, orientações, indicações e revisões neste trabalho.

Aos membros da banca examinadora, o Prof. Dr. Kellcio Oliveira Araújo e ao Prof. Dr. Rui Scimetz pelas respectivas leituras críticas e sugestões em relação ao trabalho aqui realizado.

Aos meus colegas e amigos da turma Profmat/UnB que pude conviver nesses dois anos e que muito contribuíram nessa minha jornada.

## RESUMO

### SOBRE AS CURVAS BRAQUISTÓCRONA E TALTÓCRONA, TEOREMA DA DESIGUALDADE ISOPERIMÉTRICA E TEOREMA DOS QUATRO VÉRTICES

**Autor:** Gabriel Magalhães Reis

**Orientador:** Adail de Castro Cavalheiro

**Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT**

**Brasília, março de 2020**

Este trabalho tem como objetivo facilitar o entendimento por parte de professores ou mesmo do leitor entusiasta a problemas famosos que já possuem diversas demonstrações mas que geralmente essas demonstrações são tão complexas que afastam a maior parte dos leitores. Tratamos aqui de cada ponto que é necessário para um completo entendimento do leitor, tentando sempre diminuir a segregação do conhecimento. Portanto tenho como missão neste trabalho tornar a geometria diferencial mais acessível aos professores e leitores em geral.

No capítulo 1 faremos uma breve introdução, fornecendo considerações iniciais e informando a metodologia utilizada nessa dissertação.

No capítulo 2 trabalharemos com os conceitos usados neste trabalho, tais como derivadas, integrais, equações diferenciais ordinárias, equações diferenciais parciais, lagrangiana, funções de classe  $C^\infty$ , polinômios de Taylor e sobre a curva cicloide.

No capítulo 3 trabalharemos os conceitos da Geometria Diferencial, a fim de que o leitor se sinta mais confortável com as demonstrações realizadas nos capítulos subsequentes.

No capítulo 4 iremos falar sobre a Equação de Euler-Lagrange e sobre a Identidade de Beltrami e realizando as respectivas demonstrações.

No capítulo 5 estudaremos a curva Braquistócrona, sua história, definição e demonstração.

No capítulo 6 estudaremos a curva Taltócrona, sua história, definição e demonstração.

No capítulo 7 estudaremos sobre a Desigualdade Isoperimétrica, inserindo o leitor no

contexto histórico da discussão, trabalharemos a definição e a demonstração geométrica do problema em questão.

No capítulo 8 estaremos tratando sobre um dos problemas mais famosos da geometria diferencial, o Teorema dos Quatro Vértices, tal teorema nesse capítulo estará definido, terá o seu contexto histórico bem inserido e sua demonstração realizada. Porém saliento ao leitor que para que consiga compreender a demonstração em sua totalidade que revise os conceitos de geometria diferencial trabalhados aqui no capítulo 3. Além disso é necessário que o leitor tenha um bom conhecimento em geometria analítica, geometria plana, uma boa gama de conhecimento em Cálculos em várias variáveis e também conhecimento em Análise Real.

No capítulo 9 faremos as considerações finais e as recomendações para pesquisas futuras.

**Palavras-chave:** Geometria Diferencial; Braquistócrona; Taltócrona; Cicloide; Teorema dos Quatro Vértices; Desigualdade Isoperimétrica.

# **ABSTRACT**

## **ABOUT THE BRAQUISTOCRONICHROME AND TALTOCHRONICHROME CURVES, ISOPERIMETRIC INEQUALITY THEOREM AND FOUR VERTICES THEOREM**

**Author: Gabriel Magalhães Reis**

**Supervisor: Adail de Castro Cavalheiro**

**Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT**

**Brasília, March of 2020**

This work aims to facilitate the understanding by teachers or even the enthusiastic reader of famous problems that already have several demonstrations, but generally these demonstrations are so complex that they drive most readers away, here we deal with every point that is needed to a complete understanding of the reader, always trying to reduce the segregation of knowledge, so my mission in this paper is to make differential geometry more accessible to teachers and readers in general.

In chapter 1 we will make a brief introduction, talking about the initial considerations and the methodology used in this dissertation.

In chapter 2 we will work with the concepts used in this work, such as derivatives, integrals, ordinary differential equations, partial differential equations, Lagrangians,  $C^\infty$  class functions, Taylor polynomials and on the cycloid curve.

In chapter 3 we will work on the concepts of Differential Geometry, in order to make the reader feel more comfortable with the demonstrations carried out in the subsequent chapters.

In chapter 4 we will talk about the Euler-Lagrange Equation and Beltrami's Identity and carry out the respective demonstrations.

In chapter 5 we will study the Brachistochrone curve, its history, definition and demonstration.

In chapter 6 we will study the Taltochrone curve, its history, definition and demonstration.



In chapter 7 we will talk about Isoperimetric Inequality, inserting the reader in the historical context of the discussion, we will work on the definition and the geometric demonstration of the problem in question.

In chapter 8 we will be dealing with one of the most famous problems of differential geometry, the Four Vertices Theorem, such theorem in this chapter will be defined, its historical context will be well inserted and its demonstration carried out. However, I would like to point out to the reader that in order to understand the demonstration in its entirety to review the concepts of differential geometry worked here in chapter 3, in addition it is necessary that the reader has a good knowledge in analytical geometry, plane geometry, a good range of knowledge in Calculations on several variables and also knowledge in Real Analysis.

In chapter 9 we will make the final conclusions and recommendations for future research.

**Keywords:** Differential geometry; Brachistochrone; Tautochrone; Cycloid; Four Vertices Theorem; Isoperimetric Inequality.

# SUMÁRIO

|          |  |          |
|----------|--|----------|
| <b>1</b> | <b>INTRODUÇÃO</b>                                | <b>1</b> |
| 1.1      | CONSIDERAÇÕES INICIAIS . . . . .                 | 1        |
| 1.1.1    | Metodologia . . . . .                            | 1        |
| <b>2</b> | <b>PRELIMINARES</b>                              | <b>3</b> |
| 2.1      | DERIVADA . . . . .                               | 3        |
| 2.1.1    | Integral . . . . .                               | 3        |
| 2.1.2    | Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) . . . . . | 4        |
| 2.1.3    | Equações Diferenciais Parciais (EDP) . . . . .   | 4        |
| 2.1.4    | Lagrangiana . . . . .                            | 5        |
| 2.1.5    | Classe $C^\infty$ . . . . .                      | 5        |
| 2.1.6    | Polinômios de Taylor . . . . .                   | 5        |
| 2.1.7    | Cicloide . . . . .                               | 6        |
| <b>3</b> | <b>GEOMETRIA DIFERENCIAL</b>                     | <b>7</b> |

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| 3.1      | DEFINIÇÃO . . . . .   | 7         |
| 3.1.1    | Curvatura e Fórmulas de Frenet . . . . .                        | 11        |
| 3.1.2    | Forma Canônica Local . . . . .                                  | 13        |
| 3.1.3    | Vértice de uma curva . . . . .                                  | 14        |
| <b>4</b> | <b>EQUAÇÃO DE EULER-LAGRANGE E IDENTIDADE DE BEL-<br/>TRAMI</b> | <b>16</b> |
| 4.1      | DEFINIÇÃO . . . . .   | 16        |
| 4.1.1    | Demonstração da Equação de Euler-Lagrange . . . . .             | 16        |
| 4.1.2    | Demonstração da Identidade de Beltrami . . . . .                | 17        |
| <b>5</b> | <b>BRAQUISTÓCRONA</b>   | <b>19</b> |
| 5.1      | DEFINIÇÃO . . . . .   | 19        |
| 5.1.1    | História . . . . .  | 19        |
| 5.1.2    | Demonstração . . . . .  | 21        |
| <b>6</b> | <b>TAUTÓCRONA</b>   | <b>27</b> |
| 6.1      | DEFINIÇÃO . . . . .   | 27        |
| 6.1.1    | História . . . . .  | 27        |
| 6.1.2    | Demonstração . . . . .  | 29        |

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>7</b> | <b>DESIGUALDADE ISOPERIMÉTRICA</b>             | <b>32</b> |
| 7.1      | DEFINIÇÃO . . . . .                            | 32        |
| 7.1.1    | Lenda da princesa Dido . . . . .               | 32        |
| 7.1.2    | História . . . . .                             | 32        |
| <b>8</b> | <b>TEOREMA DOS QUATRO VÉRTICES</b>             | <b>43</b> |
| 8.1      | DEFINIÇÃO . . . . .                            | 43        |
| 8.1.1    | História . . . . .                             | 43        |
| <b>9</b> | <b>CONSIDERAÇÕES E RECOMENDAÇÕES</b>           | <b>53</b> |
| 9.1      | CONCLUSÕES GERAIS . . . . .                    | 53        |
| 9.2      | RECOMENDAÇÕES PARA PESQUISAS FUTURAS . . . . . | 54        |
|          | <b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>              | <b>55</b> |

## LISTA DE FIGURAS

|     |   |    |
|-----|---|----|
| 2.1 | Ciclóide . . . . .  | 6  |
| 3.1 | curva fechada $4x^2(x^2 - 1) + y^2 = 0$ . . . . .   | 7  |
| 3.2 | curva simples $y - x^2 = 0$ . . . . .   | 8  |
| 3.3 | curva fechada e simples $x^2 + y^2 = 9$ . . . . .   | 8  |
| 3.4 | Círculo parametrizado . . . . .   | 9  |
| 3.5 | Referencial de Frenet $\langle T(t), N(t) \rangle$ . . . . .                                      | 11 |
| 3.6 | Círculo Osculador, Livro Geometria Diferencial das Curvas Planas, Walcy Santos, Pág. 48 . . . . . | 13 |
| 3.7 | Evoluta . . . . .   | 14 |
| 5.1 | Johann Bernoulli . . . . .  | 19 |
| 5.2 | Jacob Bernoulli . . . . .   | 20 |
| 5.3 | Braquistócrona . . . . .  | 21 |
| 5.4 | Cicloide . . . . .  | 26 |
| 6.1 | Tautócrona . . . . .  | 27 |

|     |  |    |
|-----|--|----|
| 6.2 | Huygens . . . . .  | 27 |
| 6.3 | Problema proposto por Huygens . . . . .                            | 28 |
| 6.4 | Acta . . . . .   | 28 |
| 6.5 | Problema oscilatório de Huygens . . . . .                          | 29 |
| 7.1 | Caso simples . . . . .   | 34 |
| 7.2 | Caso geral . . . . .   | 36 |
| 7.3 | Sistema de coordenadas $xy$ em relação a curva $C$ . . . . .       | 37 |
| 7.4 | Sistema de coordenadas $x_1y_1$ em relação à curva $C$ . . . . .   | 41 |
| 8.1 | Distância dos pontos $P$ e $Q$ a curva $\alpha$ . . . . .          | 44 |
| 8.2 | Disco $D_p$ e discos $D_\alpha$ em uma curva $\alpha(T)$ . . . . . | 46 |
| 8.3 | Disco $D_1$ e discos $D_2$ . . . . .                               | 47 |
| 8.4 | $Circ(\alpha)$ e curva $\alpha$ . . . . .                          | 48 |
| 8.5 | Figura Geometria diferencial Walcy Santos pág 231 . . . . .        | 50 |
| 8.6 | Figura Geometria diferencial Walcy Santos pág 232 . . . . .        | 51 |
| 8.7 | Figura Geometria diferencial Walcy Santos pág 233 . . . . .        | 52 |

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Existe uma certa negação em relação à aprendizagem da matemática por grande parte dos estudantes. Ou porque acham a matéria muito complicada, ou porque não encontram quem os faça compreender completamente o conteúdo, se assustam com letras, símbolos, desenhos, tabelas entre outros.

O objetivo desta dissertação é desmitificar a resolução de alguns problemas clássicos da Geometria Diferencial, de tal forma a atrair atenção de leitores ávidos por conhecimento mas que por algum motivo acabam se desanimando pelo caminho devido a dificuldades que encontram em compreender alguns termos na matemática.

O trabalho foi dividido em 9 capítulos, sendo o primeiro capítulo a Introdução da dissertação, o segundo capítulo fica dedicado aos conceitos preliminares trabalhados nesta dissertação, no terceiro capítulo faremos um apanhado geral sobre a Geometria Diferencial para que o leitor se sinta confortável e preparado para dar continuidade na sua leitura, no capítulo 4 informaremos a cerca da Equação de Euler-Lagrange e a Identidade de Beltrami, no capítulo 5 estudaremos a curva Braquistócrona e sua demonstração, no capítulo 6 trabalharemos com a curva Taltócrona e sua demonstração, no capítulo 7 trabalharemos com a Desigualdade Isoperimétrica e sua demonstração, no capítulo 8 iremos verificar um dos problemas mais famosos da Geometria Diferencial que é o Teorema dos Quatro vértices e sua demonstração e no capítulo 9 faremos as considerações finais e de que forma poderemos aplicar esses problemas numa sala de aula.

### 1.1.1 Metodologia

Esse trabalho foi realizado por meio de pesquisa bibliográfica, foi realizado um apanhado de diversos livros, teses de doutorado, dissertações de mestrado e artigos científicos sobre Geometria Diferencial e sobre os problemas aqui tratados. Após foi realizada uma revisão e consequente interpretação de modo a dar subsídio para criar

um trabalho que seja de mais fácil compreensão e entendimento por parte dos leitores em geral.



## 2 PRELIMINARES

Neste capítulo trabalharemos os conceitos básicos de derivada, integral, equações diferenciais ordinárias, equações diferenciais parciais, lagrangianas, polinômios de Taylor, o que seria a classe  $C^\infty$ , abordaremos também o que seria a curva cicloide.

As funções aqui trabalhadas são funções reais  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

### 2.1 DERIVADA

A derivada de uma função  $y = f(x)$  representada por  $f'(x)$  é a taxa de variação instantânea de  $y$  em relação a  $x$ .

Em geometria a derivada em um ponto de uma dada função representa a inclinação da reta tangente ao gráfico desta função neste determinado ponto.

Uma função  $y = f(x)$  é derivável se existir o limite:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Quando a derivada de uma função existir em todos os pontos do seu domínio, essa função será dita diferenciável.

#### 2.1.1 Integral

A integral é dividida em integral indefinida e integral definida. Ela é usada para vários propósitos entre eles o cálculo de áreas e volumes de figuras e objetos gerados por uma função dado dois limitadores, chamados de limite superior e limite inferior.

A integral indefinida é chamada de antiderivada ou a primitiva da função, ou seja se derivarmos a integral de uma função retornaremos para função, ou se integrarmos a derivada de uma função encontraremos a mesma função. Essa integral é dada por:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Onde  $C$  é uma constante.

A integral definida  $f(x)$  definida no intervalo  $[a, b]$ , onde  $x_i \in [a, b]$  e  $i \in 0, 1, 2, \dots, n$

é igual ao limite do somatório de cada um dos valores que a função  $f$  assume, com  $i$  variando de 0 a  $n$  multiplicados por  $\Delta x$ , ou seja:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=0}^n f(x_i)\Delta x$$

### 2.1.2 Equações Diferenciais Ordinárias (EDO)

Uma Equação Diferencial Ordinária é uma equação que envolve derivadas de uma dada função de uma variável.

Seja uma função  $y = f(x)$ , e sejam  $y', y'', y''', \dots, y^{(n)}$  suas derivadas de primeira, segunda, terceira e enésima ordem respectivamente. Teremos uma equação diferencial ordinária quando a equação envolver  $x, y, y', y'', \dots$ . A ordem de uma equação diferencial ordinária é dada pela ordem de maior grau de uma derivada na equação dada.

A solução de uma EDO é uma função  $y(x)$  onde suas derivadas satisfazem a equação dada.

Uma EDO será dita implícita quando tiver a forma:

$$F(x, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

E será dita explícita quando tiver a forma:

$$F(x, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) = y^{(n)}$$

Se todos os termos da EDO dependerem exclusivamente de  $x$  diremos que a EDO é homogênea, e se a EDO não depender explicitamente de  $x$  diremos que a EDO é autônoma.

### 2.1.3 Equações Diferenciais Parciais (EDP)

Uma Equação Diferencial Parcial é uma equação que envolve funções de várias variáveis independentes e dependentes de suas derivadas.

Dado uma função  $u(x, y)$  podemos representar a derivada parcial de  $u$  em relação a  $x$  e em relação a  $y$  respectivamente por:  $\frac{\partial u}{\partial x}$  e  $\frac{\partial u}{\partial y}$

A ordem de uma equação diferencial parcial será dada pela ordem da mais alta derivada encontrada na equação.

O vetor formado por todas as derivadas parciais de primeira ordem de uma dada função  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $x = (x_1, \dots, x_n)$  será chamado de Gradiente e representado por:

$$\nabla u = \left( \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right)$$

Já se somarmos as derivadas parciais de segunda ordem dessa mesma função  $u$  obtaremos o que é chamado por Laplaciano, sendo representado por:

$$\Delta u = \nabla^2 u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$$

#### 2.1.4 Lagrangiana

A função Lagrangiana é uma função utilizada para resolver problemas de otimização com restrição.

Em mecânica a função Lagrangiana de um sistema é uma função expressa em termos das coordenadas generalizadas  $q_i$ , das taxas de variações dessas coordenadas  $\dot{q}_i$  e do tempo  $t$  dada pela diferença entre a energia cinética  $T$  e a energia potencial generalizada  $U$ , representada por:

$$\mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t) = T - U$$

A Lagrangiana porta-se como uma equação fundamental de um dado sistema pois encerra em si todas as informações acerca do sistema, utilizando-se essencialmente de funções escalares, sem precisar recorrer a vetores e diagramas vetoriais, podendo-se assim obter qualquer informação desejada acerca do sistema dado.

#### 2.1.5 Classe $C^\infty$

Uma função é dita de classe  $C^\infty$  se possuir derivadas contínuas de todas as ordens, ou seja, se todas as derivadas forem funções contínuas, se for de uma variável, ou todas as derivadas parciais forem funções contínuas, se for de várias variáveis. A função de classe  $C^\infty$  é também chamada de função suave e definimos da seguinte forma:

Seja  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$  uma função com domínio  $D \subseteq \mathbb{R}^n$ , a função  $f$  é dita suave ou de classe  $C^\infty(D, \mathbb{R}^n)$ , se for de classe  $C^m(D, \mathbb{R}^n)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  e dado  $m \in \mathbb{N}$ . Onde uma função  $f$  é dita de classe  $C^m(D, \mathbb{R}^n)$  se todas as suas derivadas parciais de ordem até  $n$  forem funções contínuas.

#### 2.1.6 Polinômios de Taylor

Dada uma função analítica  $f(x)$ ,  $n$ -vezes diferenciável em torno do ponto  $a \in \mathbb{R}$ , o polinômio de Taylor sera dado por:

$$p(x) = f(a) + f'(a) \frac{(x-a)}{1!} + f''(a) \frac{(x-a)^2}{2!} + \dots + f^{(n)}(a) \frac{(x-a)^n}{n!}$$

Através do polinômio de Taylor podemos construir uma aproximação polinomial local de uma dada função.

### 2.1.7 Cicloide

Cicloide é uma curva definida por um ponto de circunferência que rola sem deslizar sobre uma reta.

Uma cicloide com início na origem de um sistema de eixos, criado por uma circunferência de raio  $r$ , consiste nos pontos  $(x, y)$  onde:

$$x = r(t - \text{sent})$$

$$y = r(1 - \text{cost})$$

Com  $t$  sendo o ângulo que essa curva faz com o eixo  $Ox$  Veremos nos capítulos seguintes que a cicloide representa as curvas Braquistócrona e Taltócrona, conforme figura 2.1.

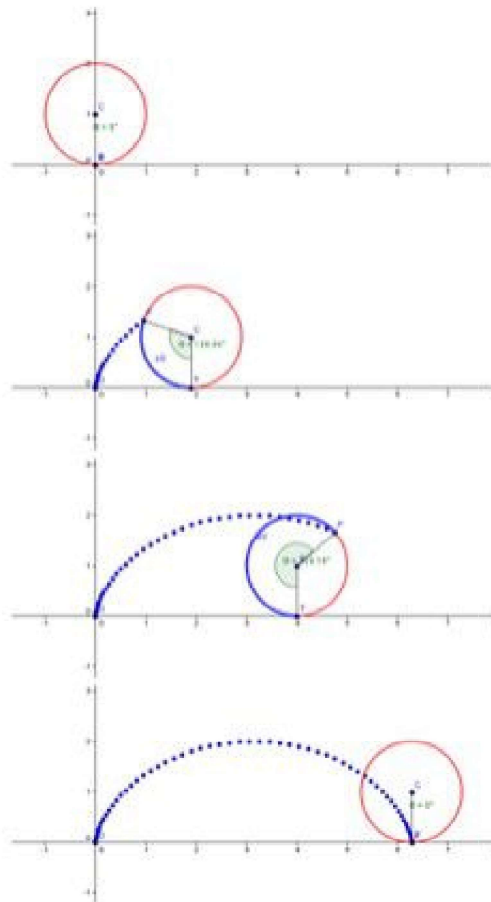


Figura 2.1: Ciclóide

Fonte: Autor

### 3 GEOMETRIA DIFERENCIAL

#### 3.1 DEFINIÇÃO

Geometria Diferencial é o ramo da geometria em que se utiliza aplicações de métodos de análise local e global no estudo e resolução de problemas. Em Geometria Diferencial uma curva descreve uma trajetória contínua do movimento de uma partícula sobre o plano. Ao considerarmos que um ponto  $\alpha(t)$  representa a posição de uma partícula em movimento contínuo, ao variarmos o tempo  $t$  no intervalo  $[a, b]$ , iremos então considerar como curva o conjunto  $C = \{\alpha(t) \in \mathbb{R}^2, t \in [a, b]\}$ .

**Definição 1** Uma curva contínua no plano  $\mathbb{R}^2$  é uma aplicação contínua  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ , definida num intervalo  $I \subset \mathbb{R}$ . A aplicação  $\alpha$ , dada por  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ , é contínua se cada função coordenada  $x, y : I \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua.

**Traço de  $\alpha$  :** É o conjunto imagem  $C$  da aplicação  $\alpha$  dada por  $C = \{\alpha(t) = (x(t), y(t)), t \in I\}$ . Se a curva  $\alpha$  for definida num intervalo fechado  $I = [a, b]$ , os pontos  $\alpha(a)$  e  $\alpha(b)$  são respectivamente os pontos inicial e final.

**Curva Fechada:**  $\alpha$  será uma curva fechada se estiver definida no intervalo  $I = [a, b]$  e  $\alpha(a) = \alpha(b)$  conforme figura 3.1.

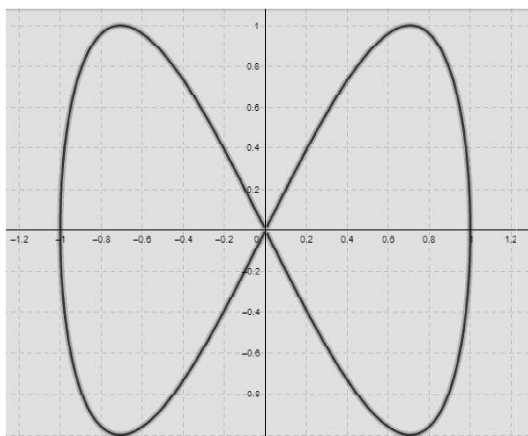


Figura 3.1: curva fechada  $4x^2(x^2 - 1) + y^2 = 0$

Fonte: Autor

**Curva Simples:**  $\alpha$  será uma curva simples se a aplicação de  $\alpha$  for injetiva, ou seja, se  $t_1 \neq t_2$  então  $\alpha(t_1) \neq \alpha(t_2)$ , onde  $t_1$  e  $t_2 \in I = [a, b]$ , conforme figura 3.2.

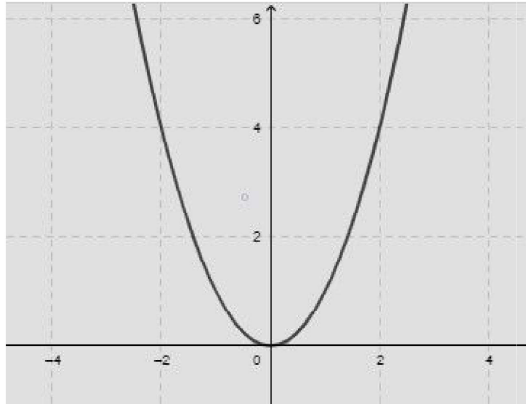


Figura 3.2: curva simples  $y - x^2 = 0$

Fonte: Autor

**Curva Fechada e Simples:** Uma curva fechada  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  é dita fechada e simples se  $\alpha(t) \neq \alpha(s) \forall t \neq s \in [a, b)$  e  $\alpha(a) = \alpha(b)$ , conforme figura 3.3.

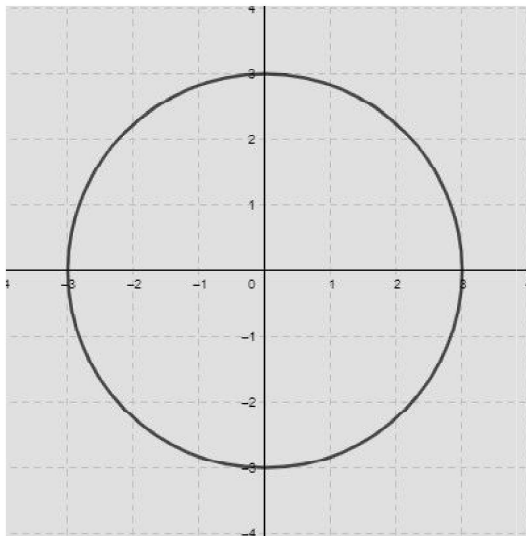


Figura 3.3: curva fechada e simples  $x^2 + y^2 = 9$

Fonte: Autor

**Curva de Jordan:** Uma curva será chamada curva de Jordan quando  $\alpha$  for uma curva fechada e simples.

Podemos parametrizar o círculo de centro  $O(0,0)$  e raio  $R$  como sendo  $\alpha(t) = (R \cos t, R \sin t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ; sendo  $t$  o ângulo que  $\alpha(t)$  faz com o eixo  $Ox$ .

Se o círculo tiver centro  $O(a, b)$  será então parametrizado por  $\alpha(t) = (a + R \cos t, b + R \sin t), t \in \mathbb{R}$

Se restringirmos o domínio de  $\alpha$  a um intervalo de comprimento  $2\pi$  então a curva  $\alpha|_0^{2\pi}$  será uma curva de Jordan, conforme figura 3.4.

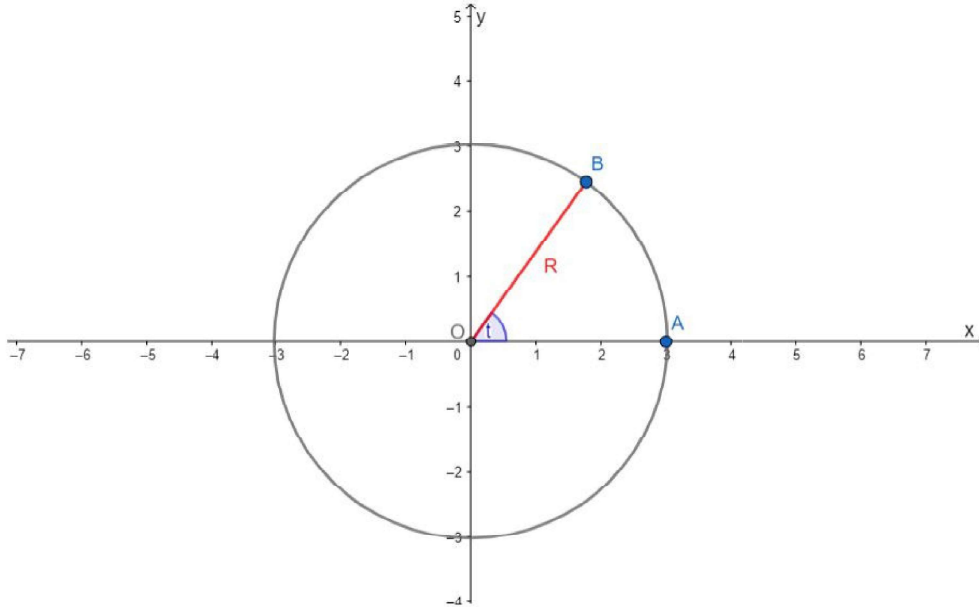


Figura 3.4: Círculo parametrizado

Fonte: Autor

$\alpha(t) = (x(t), y(t))$  é uma aplicação suave se e somente se cada função coordenada  $x, y : I \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função de classe  $C^\infty$ , isto é,  $x$  e  $y$  possuem derivadas contínuas de qualquer ordem em todo ponto  $I$ .

**Definição 2** Uma curva parametrizada suave ou um caminho no plano  $\mathbb{R}^2$  é uma aplicação suave  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ , que a cada  $t \in I$  associa  $\alpha(t) \in \mathbb{R}^2$

**Vetor Tangente:** Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ , uma curva parametrizada derivável, dada por  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ . O vetor tangente ou vetor velocidade de  $\alpha$  em  $t_0 \in I$  é dado por:

$$\alpha'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0))$$

A velocidade escalar de  $\alpha$  em  $t_0 \in I$  é dada por:

$$\|\alpha'(t_0)\| = \sqrt{(x'(t_0))^2 + (y'(t_0))^2}$$

Quando o vetor velocidade  $\alpha'(t_0)$  for diferente de  $(0, 0)$ , então esse vetor terá direção tangente à curva  $\alpha$  em  $\alpha(t_0)$ .

**Definição 3** Uma curva parametrizada  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  é regular em  $t_0 \in I$ , se  $\alpha'(t_0) \neq (0, 0)$ , ou se  $\|\alpha'(t_0)\| \neq 0$ . A curva  $\alpha$  será regular em  $I$ , se  $\alpha$  for regular para todo  $t \in I$ . Se  $\|\alpha'(t_0)\| = 0$ , dizemos então que  $\alpha$  é singular em  $t_0$  e portanto  $\alpha(t_0)$  é uma singularidade de  $\alpha$ .

**Reparametrização:** Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva parametrizada, definida por  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$  e seja  $h : J \rightarrow I$  uma função de classe  $C^\infty$ . Podemos então considerar uma nova curva  $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^2$ , definida por  $\beta(t) = (\alpha \circ h)(t) = \alpha(h(t))$ .

Portanto a curva  $\beta$  é uma curva parametrizada de classe  $C^\infty$ . E a função  $h$  é uma mudança de parâmetro da curva  $\alpha$ .

**Comprimento de Arco:** Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva parametrizada dada por  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ . A função  $L_\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$  definida por:

$$L_\alpha(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(\xi)\| d\xi = \int_{t_0}^t \sqrt{(x'(\xi))^2 + (y'(\xi))^2} d\xi$$

com  $t_0$  e  $t \in I$ , é denominada comprimento de arco.

**Definição 4** Uma curva  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  está parametrizada pelo comprimento de arco, se o parâmetro  $t$  é a menos de uma constante igual a  $L_\alpha(t)$  ou seja,  $L_\alpha(t) = t + C$ .

**Proposição 1** Uma curva  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  está parametrizada pelo comprimento de arco, se e somente se  $\|\alpha'(t)\| = 1$ .

Como  $\|\alpha'(t)\| = L'_\alpha(t) = 1$  ao integrarmos teremos que  $L_\alpha(t) = t + C$  conforme a definição 4.

Fazendo o processo inverso teremos que a derivada de  $L_\alpha(t) = t + C$ , será  $L'_\alpha(t) = 1 =$



$\|\alpha'(t)\|$  como queríamos demonstrar.

Se  $\alpha$  é uma curva parametrizada e regular dada por  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ , então  $T$ , campo tangente definido por  $T(t) = (x'(t), y'(t))$  é um campo de vetores de classe  $C^\infty$  ao longo de  $\alpha$ . Se  $\alpha$  estiver parametrizada pelo comprimento de arco então o campo  $T$  é unitário, portanto  $\|T(t)\| = 1$ . O campo normal  $N$  definido por  $N(t) = (-y'(t), x'(t))$  é também um campo de classe  $C^\infty$  e quando  $\alpha$  estiver parametrizada pelo comprimento de arco o campo,  $N$  também será unitário.

Temos que  $\langle T(t), N(t) \rangle = -x'(t)y'(t) + y'(t)x'(t) = 0, \forall t \in I$ , portanto  $N$  é perpendicular a  $T$ , onde  $\langle T(t), N(t) \rangle$  representa o produto interno entre os vetores  $T(t)$  e  $N(t)$ , conforme figura 3.5.

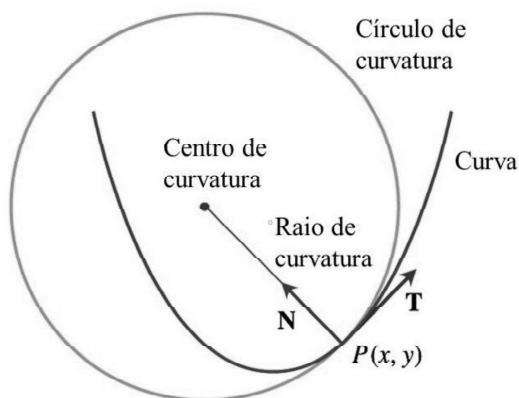


Figura 3.5: Referencial de Frenet  $\langle T(t), N(t) \rangle$

Fonte: Autor

**Proposição 2** Se  $\|K\|$  é constante então  $K'(t)$  é perpendicular a  $K(t)$  para todo  $t \in I$ , portanto  $\langle K, K' \rangle = 0$  e se  $K$  e  $W$  são perpendiculares para todo  $t \in I$  então  $\langle K', W \rangle = -\langle K, W' \rangle$ .

### 3.1.1 Curvatura e Fórmulas de Frenet

**Definição 5** Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva parametrizada pelo comprimento de arco. O referencial  $T(s), N(s)$  é chamado referencial de Frenet da curva  $\alpha$ .

Como  $\|T\| = 1$  e pela Proposição 2 temos que  $T'(s)$  é perpendicular a  $T(s)$ . Como  $T$  e  $N$  geram o espaço  $\mathbb{R}^2$ , temos que para cada  $s \in I$ ,  $T'(s)$  é paralelo a  $N(s)$ , significando

que existe uma função  $k$  de tal forma que:

$$T'(s) = k(s)N(s), \forall s \in I$$

sendo a função  $k$  chamada de curvatura de  $\alpha$  em  $s \in I$ .

Teremos então que a curvatura  $k(s)$  é definida por:

$$k(s) = \langle T'(s), N(s) \rangle = -\langle N'(s), T(s) \rangle$$

A função curvatura  $k$  é uma medida da variação da direção da reta tangente a  $\alpha$  em  $\alpha(s)$ .

Como  $\|N\| = 1$  e pela Proposição 2 temos que  $N'(s)$  é perpendicular a  $N(s)$  e portanto paralelo a  $T(s)$ , isso implica que:

$$x''(s) = -k(s)y'(s)$$

$$y''(s) = k(s)x'(s)$$

Portanto  $N'(s) = (-y''(s), x''(s)) = -k(s)(x'(s), y'(s)) = -k(s)T(s)$

Os campos  $T$  e  $N$  satisfazem ao sistema abaixo:

$$T'(s) = k(s)N(s)$$

$$N'(s) = -k(s)T(s)$$

As equações desse sistema são chamadas de Equações de Frenet da curva  $\alpha$ .

**Proposição 3** *Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva regular não necessariamente parametrizada pelo comprimento de arco, definida por  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ . Então a curvatura de  $\alpha$  em  $t \in I$  será dada por:*

$$k(t) = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{\sqrt{((x')^2 + (y')^2)^3}}$$

Consideraremos uma curva regular  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ , com curvatura  $k(s)$  para cada  $s \in I$ .  
**Sinal de  $K$ :** Se  $k(t_0) > 0$ , então para todo  $t$  suficientemente próximo de  $t_0$ ,  $\alpha(t)$  estará no semi-plano determinado pela reta tangente à curva  $\alpha$  em  $\alpha(t_0)$  para o qual aponta

$N(t_0)$ .

**Valor de  $k$ :** Se  $k(t_0) > 0$ , para cada  $\rho > 0$ , sejam  $P_\rho = \alpha(t_0) + \rho N(t_0)$  e  $C_\rho$  o círculo de centro em  $P_\rho$  e raio  $\rho$ . Então para  $t$  suficientemente pequeno,  $\alpha(t)$  está contido no interior de  $C_\rho$  se  $\rho < \frac{1}{k(t_0)}$  e está contido no exterior de  $C_\rho$  se  $\rho > \frac{1}{k(t_0)}$ , conforme figura 3.6.

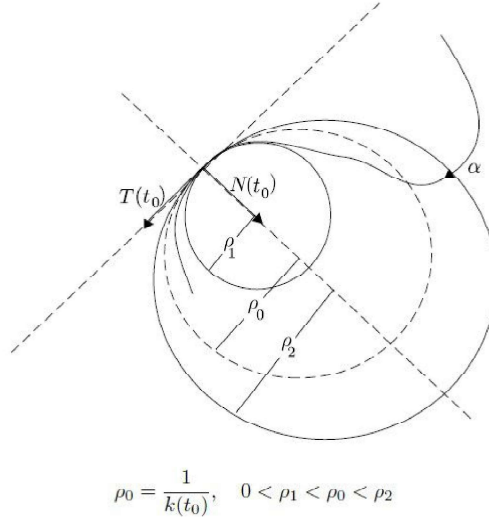


Figura 3.6: Círculo Osculador, Livro Geometria Diferencial das Curvas Planas, Walcy Santos, Pág. 48

### 3.1.2 Forma Canônica Local

Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco. Ao considerarmos a aproximação pelo polinômio de Taylor das coordenadas de  $\alpha$  teremos:

$$x(s) = x(s_0) + (s - s_0)x'(s_0) + \frac{(s - s_0)^2}{2!}x''(s_0) + \frac{(s - s_0)^3}{3!}x'''(s_0) + r_1(s)$$

$$y(s) = y(s_0) + (s - s_0)y'(s_0) + \frac{(s - s_0)^2}{2!}y''(s_0) + \frac{(s - s_0)^3}{3!}y'''(s_0) + r_2(s)$$

Pelas Equações de Frenet temos que:

$$(x'''(s_0), y'''(s_0)) = \alpha'''(s_0) = (k(s)N(s))'|_{s=s_0}$$

$$k'(s_0)N(s_0) + k(s_0)N'(s_0) = k'(s_0)N(s_0) - k^2(s_0)T(s_0)$$

Portanto teremos que:

$$\alpha(s) = \alpha(s_0) + (s - s_0)T(s_0) + \frac{(s - s_0)^2}{2!}k(s_0)N(s_0) + \frac{(s - s_0)^3}{3!}[k'(s_0)N(s_0) - k^2(s_0)T(s_0)] + R(s)$$

Ao escolhermos um sistema de coordenadas de  $\mathbb{R}^2$  de tal modo que  $\alpha(s_0) = (0, 0)$  com a base canônica sendo  $T(s_0), N(s_0)$ , isto é,  $T(s_0) = (1, 0)$  e  $N(s_0) = (0, 1)$ , sendo a curva  $\alpha$  definida por  $\alpha(s) = (x(s), y(s))$  teremos então que:

$$x(s) = (s - s_0) - k^2(s_0) \frac{(s - s_0)^3}{3!} + R_1(s)$$

$$y(s) = k(s_0) \frac{(s - s_0)^2}{2!} + k'(s_0) \frac{(s - s_0)^3}{3!} + R_2(s)$$

Essa representação é chamada forma canônica local de  $\alpha$ , descrevendo o comportamento de qualquer curva regular na vizinhança de um ponto  $\alpha(s_0)$ .

### 3.1.3 Vértice de uma curva

Seja  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva regular de classe  $C^k, k \geq 2$ , parametrizada por  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ , onde a curvatura  $k(t)$  de  $\gamma(t)$  é dada por:

$$k(t) = \frac{x'y'' - x''y'}{((x')^2 + (y')^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Um vértice de  $\gamma$  será um ponto de máximo local ou de mínimo local da curvatura, ou seja um vértice é um ponto crítico de  $k$ , isto é,  $k'(s_0) = 0$ .

Outra forma de verificar os vértices de uma curva de classe  $C^3$  é analisando a sua evoluta, onde os pontos de cúspides de uma evoluta corresponde aos pontos críticos locais de uma curva, conforme figura 3.7, onde a evoluta está representada pela curva em azul.

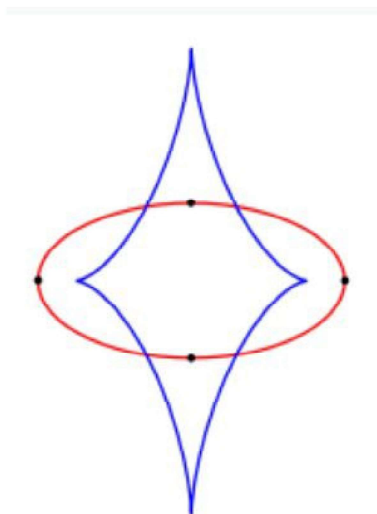


Figura 3.7: Evoluta

A evoluta  $E(t)$ , definida por  $E : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  é dada por:

$$E(t) = \gamma(t) + \frac{1}{k(t)}N(t)$$

onde  $\gamma(t)$  é a curva parametrizada pelo comprimento de arco,  $k(t)$  é a curvatura da curva  $\gamma(t)$  e  $N(t)$  é o vetor normal a curva  $\gamma(t)$ .

A evoluta é o lugar dos centros dos círculos osculadores a curva  $\gamma(t)$ . Nos vértices da curva  $\gamma(t)$ ,  $k'(s_0) = 0$  temos que a evoluta  $E$  não é regular, ou seja,  $E'(s_0) = 0$ , estes pontos são chamados singulares ou cúspides.

Em curvas de classe  $C^3$  os pontos singulares ou cúspides da evoluta correspondem aos vértices da curva.

## 4 EQUAÇÃO DE EULER-LAGRANGE E IDENTIDADE DE BELTRAMI

### 4.1 DEFINIÇÃO

Equação de Euler-Lagrange é uma equação diferencial utilizada no cálculo variacional para a solução de problemas otimizados em que seja necessário encontrar o valor máximo ou mínimo de uma determinada função e a Identidade de Beltrami é uma forma simplificada da equação de Euler-Lagrange para lagrangianas que não dependem da variável  $x$ .

#### 4.1.1 Demonstração da Equação de Euler-Lagrange

Deseja-se encontrar uma função  $y(x)$  que possui valores nos pontos  $x = x_1$  e  $x = x_2$ , tal que a integral de linha de uma dada função  $f(y, y', x)$  é de tal forma que  $M = \int_{x_1}^{x_2} f(y, y', x) dx$  seja um ponto crítico, ou seja iremos encontrar  $y(x)$  com valores fixos  $y_1 = f(x_1)$  e  $y_2 = f(x_2)$  de tal forma que a integral  $M$  seja estacionária. Tomaremos inicialmente  $x_0$  como ponto estacionário da função  $y(x)$ . Fazendo a expansão em série de Taylor no ponto  $x_0$  teremos  $y(x_0 + h) = y(x_0) + hy'(x_0) + \frac{h^2}{2}y''(x_0) + \dots$  Como no ponto estacionário da função a sua derivada é igual a zero seja ele máximo, mínimo ou ponto de inflexão então teremos que as derivadas posteriores à primeira ordem também serão iguais a zero, portanto teremos  $y(x_0 + h) = y(x_0)$ , que significa que sendo  $x_0$  um ponto estacionário, ao variar o valor de  $x_0$  em  $h$  o valor permanece o mesmo.

Pegaremos agora a função  $y(x)$  e adicionaremos a ela uma outra função  $\eta(x)$  bem próxima a ela e com as mesmas extremidades  $x_1$  e  $x_2$ . Teremos então a nova função  $Y(x) = y(x) + \alpha\eta(x)$ , para que  $Y(x) = y(x)$  nos pontos  $x_1$  e  $x_2$ . Além disso teremos  $\eta(x_1)$  e  $\eta(x_2)$  iguais a zero, e para que  $Y(x_0) = y(x_0)$  tomaremos nesse ponto  $\alpha = 0$ . Feito essas considerações substituiremos o valor da função  $y(x)$  por  $Y(x)$  na integral  $M$ .

Teremos  $M(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} f(Y, Y', x) dx$ , iremos impor que  $\frac{dM}{d\alpha} = 0$  quando  $\alpha = 0$ . Portanto,  $\frac{dM}{d\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left[ \frac{\partial f}{\partial y} \eta(x) + \frac{\partial f}{\partial y'} \eta'(x) \right] dx = 0$

Pegaremos a segunda parte da integral  $M$  que é  $\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y'} \eta'(x) dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{d\eta}{dx} dx$  e

utilizando a integração por partes chamando  $\frac{\partial f}{\partial y'}$  de  $u$  e  $\frac{d\eta}{dx}$  de  $dv$  teremos:

$$\frac{\partial f}{\partial y'}\eta(x)|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \eta(x) \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) dx$$

Como  $\eta(x_1)$  e  $\eta(x_2)$  são iguais a zero então  $\frac{\partial f}{\partial y'}\eta(x)|_{x_1}^{x_2}$  é igual a zero, voltando a integral original e colocando  $\eta(x)$  em evidência teremos:

$$\int_{x_1}^{x_2} \eta(x) \left[ \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right] dx = 0$$

E para que essa integral zere para qualquer que seja a função  $\eta(x)$  é necessário que:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0$$

Esta é a equação de Euler-Lagrange como queríamos demonstrar.

#### 4.1.2 Demonstração da Identidade de Beltrami

Tomaremos a função  $f(y, y', x)$  e calcularemos a derivada dela em relação a  $x$ . Teremos:

$$\begin{aligned} \frac{df}{dx} &= \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{dy'}{dx} + \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{df}{dx} &= \frac{\partial f}{\partial y} y' + \frac{\partial f}{\partial y'} y'' + \frac{\partial f}{\partial x} \end{aligned}$$

Isolando teremos:

$$\frac{\partial f}{\partial y} y' = \frac{df}{dx} - \frac{\partial f}{\partial y'} y'' - \frac{\partial f}{\partial x}$$

Pegaremos agora a equação de Euler-Lagrange e multiplicaremos por  $y'$  o que resulta em:

$$\frac{\partial f}{\partial y} y' - y' \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0$$

No lugar de  $\frac{\partial f}{\partial y} y'$  colocaremos  $\frac{df}{dx} - \frac{\partial f}{\partial y'} y'' - \frac{\partial f}{\partial x}$  o que resulta:

$$\frac{df}{dx} - \frac{\partial f}{\partial y'} y'' - \frac{\partial f}{\partial x} - y' \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0$$

Como  $-\frac{\partial f}{\partial y'} y'' - y' \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) = -\frac{d}{dx} \left( y' \frac{\partial f}{\partial y'} \right)$ , então teremos:

$$-\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{d}{dx} \left( f - y' \frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0$$

Como a função não depende explicitamente de  $x$  então  $-\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ , teremos portanto:

$$\frac{d}{dx} \left( f - y' \frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0$$

Integrando em  $x$  teremos:

$$f - y' \frac{\partial f}{\partial y'} = C$$

Esta é a identidade de Beltrami, como queríamos demonstrar.



## 5 BRAQUISTÓCRONA

### 5.1 DEFINIÇÃO

Denomina-se braquistócrona a trajetória de uma partícula que, sujeita a um campo gravitacional constante, sem atrito e com velocidade inicial nula, se desloca entre dois pontos no menor intervalo de tempo.

#### 5.1.1 História

**Johann Bernoulli (1667-1748)**



Fonte: The MacTutor History of Mathematics archive

Figura 5.1: Johann Bernoulli

Johann Bernoulli, figura 5.1, professor de matemática em Gröningen, requereu na

Jacob Bernoulli (1654-1705)



Fonte: The MacTutor History of Mathematics archive

Figura 5.2: Jacob Bernoulli

Acta Eruditorum, que matemáticos determinassem a curva de descida mais rápida, a Braquistócrona. Desse modo, propôs em junho de 1696, o seguinte problema:

*Problema novum,*

*ad cujus Solutionem Mathematici invitantur.*

*"Datis in plano verticali duobus punctis A et B, assignare mobili M viam AMB, per quam gravitate sua descendens, et moveri incipiens a puncto A, brevissimo tempore perveniant ad alterum punctum B."*

Foram apresentadas e publicadas cinco soluções nas Actas de 1697: a de Johann Bernoulli, a do seu irmão Jacob Bernoulli, figura 5.2, a de Leibniz, a de L'Hôpital e uma

sob anonimato que seria de Isaac Newton que veio a reconhecer mais tarde.

### 5.1.2 Demonstração

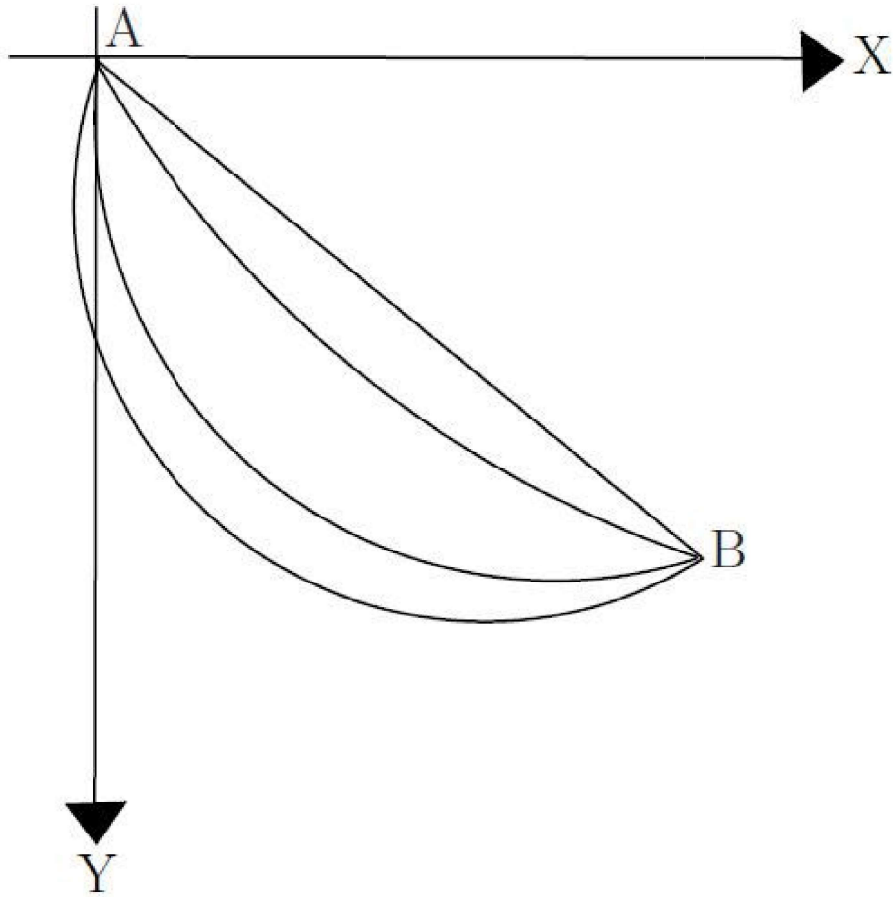


Figura 5.3: Braquistócrona

Fonte: Autor

Nosso objetivo é encontrar uma curva que leve um objeto qualquer do ponto A ao ponto B no menor tempo possível, sabendo que este corpo estará sujeito apenas à gravidade, e sua velocidade inicial é nula. Na figura 5.3 colocamos o eixo Y para baixo no mesmo sentido da gravidade com o objetivo de facilitar a visualização do problema.

Queremos primeiramente descobrir o tempo que esse objeto levará para percorrer a sua trajetória. Para isso pegaremos inicialmente um pedaço dessa curva que seja tão pequeno quanto se queira de tal forma que esse pedaço seja algo muito próximo de uma segmento de reta. Chamaremos esse pedaço de  $ds$ . Podemos encontrar o valor de  $ds$  em função do eixo  $X$  e do eixo  $Y$ . Em relação ao eixo das abscissas teremos o segmento  $dx$  e em relação a ordenada  $Y$  teremos o segmento  $dy$ . Podemos notar que os segmentos  $ds$ ,  $dy$  e  $dx$  formam um triângulo retângulo com hipotenusa  $ds$ , portanto:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

Temos pela Física que a fórmula da velocidade instantânea é dada por:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta t}{\Delta s} = \frac{ds}{dt}$$

Portanto:

$$v = \frac{ds}{dt}$$

Temos então que:

$$dt = \frac{ds}{v}$$

A energia no ponto  $A$  é dado por:

$$E_M = E_{Pot} = mgy$$

A energia no ponto  $B$  é dado por:

$$E_M = E_{Cin} = \frac{mv^2}{2}$$

onde  $m$  é a massa do objeto,  $g$  é a aceleração gravitacional e  $y$  representa a altura que esse objeto se encontra,  $E_M$  é a energia mecânica,  $E_{Pot}$  é a energia potencial gravitacional e  $E_{Cin}$  é a energia cinética.

Temos pela conservação da energia mecânica que a energia mecânica no ponto  $A$  é igual a energia mecânica no ponto  $B$ , então:

$$mgy = \frac{mv^2}{2}$$

Cancelando  $m$  dos dois lados ficamos com:

$$gy = \frac{v^2}{2}$$

$$v^2 = 2gy$$

Portando a velocidade instantânea será dada por:

$$v = \sqrt{2gy}$$

O valor de  $dt$  é dado então por:

$$dt = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{\sqrt{2gy}}$$

Podemos reescrever  $\sqrt{dx^2 + dy^2}$  como sendo  $\sqrt{1 + \frac{dx^2}{dy^2}} dy$

Como sabemos que  $\frac{dx}{dy} = x'$ , então  $\sqrt{1 + \frac{dx^2}{dy^2}} dy = \sqrt{1 + x'^2} dy$ , portanto:

$$dt = \frac{\sqrt{1 + x'^2}}{\sqrt{2gy}} dy$$

Temos então que o tempo total de queda  $\Delta t$  é dado por:

$$\Delta t = \int \frac{\sqrt{1 + x'^2}}{\sqrt{2gy}} dy$$

Como  $\frac{1}{\sqrt{2g}}$  é constante e não depende de  $x$  nem de  $y$  podemos retirar da integral o que fica:

$$\Delta t = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int \frac{\sqrt{1 + x'^2}}{\sqrt{y}} dy$$

Temos agora que encontrar uma função  $x$  em relação a  $y$ ,  $x(y)$ , de maneira que a integral  $\int \frac{\sqrt{1 + x'^2}}{\sqrt{y}} dy$  seja a menor possível.

Para que a integral em questão seja a menor possível ela deve obedecer a equação de Euler-Lagrange que diz que uma função da forma  $F(y, x, y')$  será a menor possível quando:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0$$

Podemos notar que na função  $F(y, x, y')$  o  $y$  está em função de  $x$ . Se tivermos o  $x$  em função de  $y$  teremos então uma função da forma  $F(x, y, x')$  onde de acordo com a equação de Euler-Lagrange teremos que:

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dy} \frac{\partial F}{\partial x'} = 0$$

Como a nossa integral está na forma de  $x$  em função de  $y$  usaremos a segunda forma. Temos então:

$$F(y, x, y') = \frac{\sqrt{1+x'^2}}{\sqrt{y}}$$

Calculando a derivada parcial de  $F$  em relação a  $x$  teremos que  $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$  pois  $\frac{\sqrt{1+x'^2}}{\sqrt{y}}$  não depende de  $x$ , depende somente de  $x'$  e  $y$ .

Como  $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$  temos pela equação de Euler-Lagrange que:

$$\frac{d}{dy} \frac{\partial F}{\partial x'} = 0$$

E para que  $\frac{d}{dy} \frac{\partial F}{\partial x'} = 0$  é necessário que  $\frac{\partial F}{\partial x'} = C$  onde  $C$  é uma constante.

Calculando a derivada parcial de  $F$  em relação a  $x'$  encontramos:

$$\frac{\partial F}{\partial x'} = \frac{x'}{\sqrt{1+x'^2}} \frac{1}{\sqrt{y}}$$

Portanto temos que:

$$\frac{x'}{\sqrt{1+x'^2}} \frac{1}{\sqrt{y}} = C$$

Elevando os dois membros ao quadrado e fazendo  $C^2 = \frac{1}{2a}$  teremos que:

$$\frac{x'^2}{1+x'^2} \frac{1}{y} = C^2 = \frac{1}{2a}$$

Reorganizando teremos que:

$$2ax'^2 = y(1+x'^2)$$

$$(2a-y)x'^2 = y$$

$$x'^2 = \frac{y}{2a-y}$$

Obtendo então que:

$$x' = \frac{dx}{dy} = \sqrt{\frac{y}{2a-y}}$$

O valor de  $x$  é dado então por:

$$x = \int \sqrt{\frac{y}{2a-y}} dy$$

Para calcular essa integral realizaremos o método da substituição trigonométrica, onde faremos  $y = a(1-\cos\theta)$ . Teremos com isso que  $dy = a\sin\theta d\theta$  e que  $2a-y = a(1+\cos\theta)$ , o valor de  $x$  então será dado por:

$$x = \int \sqrt{\frac{a(1-\cos\theta)}{a(1+\cos\theta)}} a\sin\theta d\theta$$

Dividindo por  $a$  no numerador e no denominador dentro da raiz fica:

$$x = \int \sqrt{\frac{(1 - \cos \theta)}{(1 + \cos \theta)}} a \operatorname{sen} \theta d\theta$$

Multiplicando agora tanto o numerador quanto o denominador por  $(1 - \cos \theta)$  teremos:

$$x = \int \sqrt{\frac{(1 - \cos \theta)(1 - \cos \theta)}{(1 + \cos \theta)(1 - \cos \theta)}} a \operatorname{sen} \theta d\theta$$

$$x = \int \sqrt{\frac{(1 - \cos \theta)^2}{1 - (\cos \theta)^2}} a \operatorname{sen} \theta d\theta$$

Sabemos que:

$$1 - (\cos \theta)^2 = (\operatorname{sen} \theta)^2$$

Substituindo temos que:

$$x = \int \sqrt{\frac{(1 - \cos \theta)^2}{(\operatorname{sen} \theta)^2}} a \operatorname{sen} \theta d\theta$$

$$x = \int \frac{(1 - \cos \theta) a \operatorname{sen} \theta}{\operatorname{sen} \theta} d\theta$$

Como temos  $\operatorname{sen} \theta$  no numerador e no denominador podemos simplificar, o que resulta em:

$$x = \int a(1 - \cos \theta) d\theta$$

Tirando a constante  $a$  da integral obtemos que:

$$x = a \int (1 - \cos \theta) d\theta$$

Portanto:

$$x = a(\theta - \operatorname{sen} \theta)$$

Então teremos uma função dada por suas equações paramétricas:

$$x = a(\theta - \operatorname{sen} \theta)$$

$$y = a(1 - \cos \theta)$$

A curva que possui essas equações paramétricas é a cicloide, figura 5.4, portanto a curva cicloide é braquistócrona.

Ciclóide



Figura 5.4: Cicloide

Foute: Autor



## 6 TAUTÓCRONA

### 6.1 DEFINIÇÃO

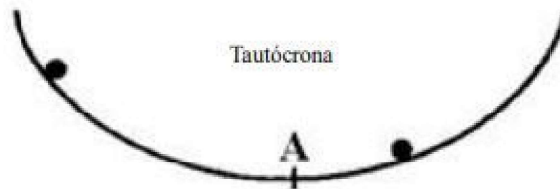


Figura 6.1: Tautócrona

Fonte: Autor

Uma tautócrona, figura 6.1, é a curva na qual o tempo gasto por um objeto para deslizar sem atrito em gravidade uniforme até seu ponto de mínimo não depende do seu ponto de partida.

#### 6.1.1 História

Christiaan Huygens (1629 – 1695)



Fonte: The MacTutor History of Mathematics archive

Figura 6.2: Huygens

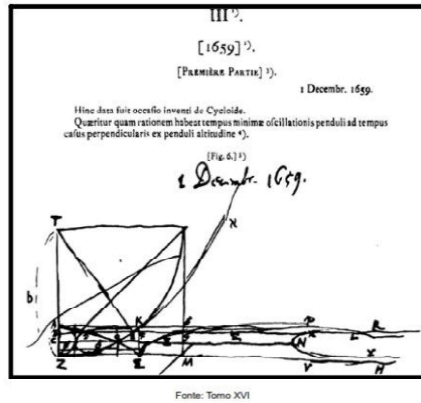
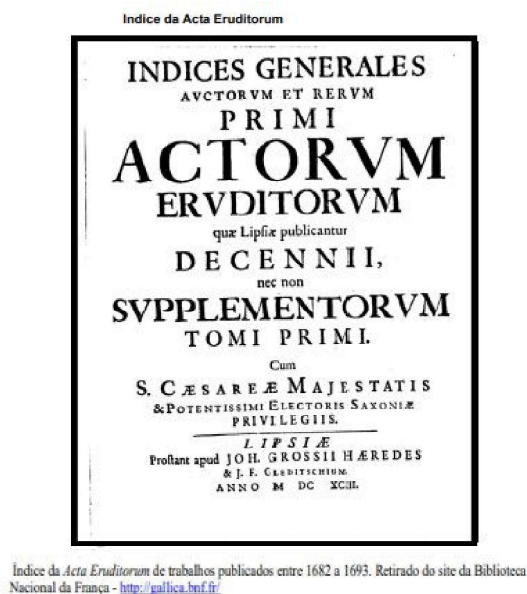


Figura 6.3: Problema proposto por Huygens



Índice da *Acta Eruditorum* de trabalhos publicados entre 1682 a 1693. Retirado do site da Biblioteca Nacional da França - <http://gallica.bnf.fr/>

Figura 6.4: Acta

Huygens, figura 6.2, propôs a si um problema envolvendo a cicloide que era sobre o isocronismo do pêndulo, figura 6.3, que foi publicado em 1659, e também publicado pela Sociedade Holandesa de Ciências em 1629, figura 6.4.

Huygens tinha conhecimento de que as oscilações simples não são isócronas, provavelmente pelos trabalhos de Galileu (BOYER, 1996). Usou infinitesimais para descobrir, e geometria para provar, que a curva ao longo da qual um objeto desce, sem a influência da gravidade, leva o mesmo tempo para alcançar o ponto mais baixo, independente do ponto em que se inicia a trajetória, é uma cicloide (KATZ, 1998). Huygens percebeu que o pêndulo obtém um movimento num arco cicloidal e que descrevia o tempo perfeitamente, para qualquer comprimento da oscilação (KATZ, 1998).

Essa descoberta foi importante para determinar que a involuta de uma cicloide é uma cicloide ou inversamente, que a evoluta de uma cicloide é uma cicloide (BOYER, 1996).

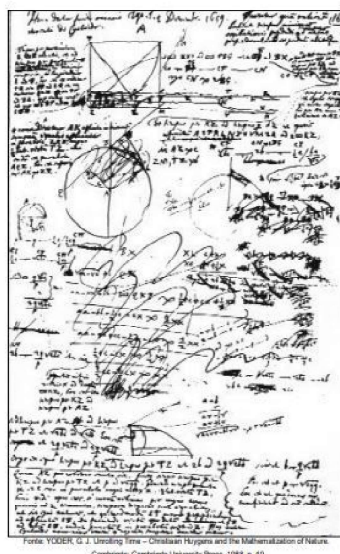


Figura 6.5: Problema oscilatório de Huygens

Segundo Yoder (1998), em 1º de dezembro de 1659, Huygens propôs a si mesmo um problema sobre o isocronismo do pêndulo. Ele confiou que o resolveria imediatamente e escreveu a questão nos cantos de uma página já desordenada com outro trabalho e com um pequeno espaço para um extensivo cálculo, figura 6.5.

Esse problema proposto por Huygens, considera o período de oscilação de acordo com uma parte infinitesimal do arco de um círculo que conduziu às investigações das quais saiu a descoberta do tautocronismo da queda de acordo com arcos cicloidais.

### 6.1.2 Demonstração

Nosso objetivo é demonstrar que a cicloide é uma curva tautócrona, ou seja, colocando-se esferas iguais em posições diferentes da curva deslizando por uma superfície sem atrito e soltando-as todas chegarão ao mesmo tempo no ponto mais baixo dessa curva. Seja  $c = (x, y)$  uma curva que representa um declive ao longo do qual desliza, sob a ação da gravidade  $g$  e partindo da velocidade nula, um objeto. Então, se  $t_0$  e  $t_1$  estiverem no domínio de  $c$  e se  $t_0 < t_1$ , o tempo que o objecto leva a deslizar de  $c(t_0)$  até  $c(t_1)$  é dado por:

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}{\sqrt{2g \times (y(t_0) - y(t))}} dt$$

No capítulo anterior vimos que a cicloide é dada por:

$$c = (x(t), y(t)) = (a(t - \text{sen}(t)), a(1 - \cos t))$$

Essa cicloide tem a concavidade voltada para baixo. Tomaremos uma cicloide que tenha concavidade voltada para cima, para isto basta inverter o sinal do parâmetro  $y(t)$ . Daí teremos:

$$c = (x(t), y(t)) = (a(t - \text{sen}(t)), a(-1 + \cos t))$$

Tomaremos agora essa cicloide quando  $a = 1$  isto é, formado pela rotação de um disco de raio 1. Como o que nos interessa é o ponto mais baixo da cicloide temos que  $t \in [0, \pi]$  o ponto mais baixo é dado por  $t_1 = \pi$ , portanto temos que:

$$x'(t) = (1 - \cos(t)), y'(t) = -\text{sen}(t) \text{ e que } y(t_0) - y(t) = \cos(t_0) - \cos(t)$$

Substituindo teremos:

$$\Delta t = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\sqrt{(1 - \cos(t))^2 + (-\text{sen}(t))^2}}{\sqrt{2g} \times (\cos(t_0) - \cos(t))} dt$$

$$(1 - \cos(t))^2 + (-\text{sen}(t))^2 = \sqrt{2 - 2\cos(t)}$$

$$\Delta t = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\sqrt{2 - 2\cos(t)}}{\sqrt{2g} \times (\cos(t_0) - \cos(t))} dt$$

Sabemos pela trigonometria que:

$$\cos(x) = 2(\cos(\frac{x}{2}))^2 - 1 = 1 - 2(\text{sen}(\frac{x}{2}))^2$$

Fazendo as substituições temos:

$$\Delta t = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\sqrt{4(\text{sen}(\frac{t}{2}))^2}}{2\sqrt{g} \times ((\cos(\frac{t_0}{2}))^2 - (\cos(\frac{t}{2}))^2)} dt$$

$$\Delta t = \int_{t_0}^{t_1} \frac{(\text{sen}(\frac{t}{2}))}{\sqrt{g} \times ((\cos(\frac{t_0}{2}))^2 - (\cos(\frac{t}{2}))^2)} dt$$

Faremos a seguinte substituição

$$u = -\cos(\frac{t}{2}), du = \frac{1}{2}\text{sen}(\frac{t}{2}) \text{ e } t_1 = \pi$$

Teremos então que:

$$\Delta t = \frac{2}{\sqrt{g}} \int_{-\cos(\frac{t_0}{2})}^0 \frac{du}{\sqrt{\cos^2(\frac{t_0}{2}) - u^2}}$$

$$\Delta t = \frac{2}{\sqrt{g}} \left[ \arcsen \left( \frac{u}{\cos(\frac{t_0}{2})} \right) \right] \Big|_{u=-\cos(\frac{t_0}{2})}^{u=0}$$

$$\Delta t = \frac{2}{\sqrt{g}} [\arcsen(0) - \arcsen(-1)]$$

$$\Delta t = \frac{2}{\sqrt{g}} \times \frac{\pi}{2}$$

$$\Delta t = \frac{\pi}{\sqrt{g}}$$

Portanto temos que o tempo de deslocamento não depende da localidade da superfície em forma de cicloide onde será abandonada a esfera, pois o tempo de deslocamento é constante.

## 7 DESIGUALDADE ISOPERIMÉTRICA

### 7.1 DEFINIÇÃO

**Teorema 1** *Desigualdade Isoperimétrica: Dentre todas as curvas regulares e de Jordan com um mesmo comprimento fixado, o círculo delimita a maior área. Em outras palavras: se  $L$  é o comprimento de uma curva  $C$  regular e de Jordan e  $A$  é a área da região que o traço de  $C$  delimita, então  $L^2 - 4\pi A \geq 0$ . A igualdade ocorre, se e somente se, o traço de  $C$  for um círculo.*

#### 7.1.1 Lenda da princesa Dido

Segundo uma das versões da lenda, a princesa Dido no século *IX* a.C., filha de um rei fenício, ao ter sua vida ameaçada em uma disputa pelo poder que já havia ceifado a vida de seu marido, fugiu da cidade de Tiro.

Após uma longa viagem, ela chegou ao norte da África, na costa do mar mediterrâneo, onde pediu à população local para comprar uma área de terra a fim de construir uma vila para ela e seus seguidores. Recebeu então a seguinte resposta: Você pode ter tanta terra quanto puder cercar com o couro de um boi.

Diz a lenda que ela preparou uma longa e fina correia de couro e escolhendo a terra ao longo da costa, estendeu a correia na forma de semicírculo, obtendo ali a maior área possível, surgindo ali a cidade de Cartago.

Ela havia lançado ali as bases do que mais tarde ficou conhecido como o problema isoperimétrico.

#### 7.1.2 História

De acordo com Blasjö (2005), a primeira solução para a desigualdade isoperimétrica foi exibida quando Zenodorus demonstrou que o círculo de comprimento  $L$  tem área maior do que qualquer polígono plano de comprimento  $L$ . O trabalho de Zenodorus, no entanto, foi perdido.

Segundo Carmo (2010), o teorema da desigualdade isoperimétrica talvez seja o teorema mais antigo da geometria diferencial global e está relacionado com o problema isoperimétrico acima. A solução deste problema, já era conhecida pelos gregos, mas, uma prova satisfatória do mesmo só surgiu em 1870 com Weierstrass, que, ao contrário

dos matemáticos que tentaram resolver o problema antes dele, não assumiu que uma solução deveria existir. Weierstrass apresentou uma prova completa da existência de uma solução para o problema, porém, sua prova era um tanto complicada, já que ela usava sua teoria chamada de cálculo das variações.

### 7.1.2.1 Demonstração

Antes de iniciarmos a demonstração da desigualdade isoperimétrica vamos demonstrar o lema abaixo, de modo a facilitar a compreensão do leitor em relação ao problema em questão.

**Lema 1** *Seja  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva simples fechada, positivamente orientada e definida por  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ . Então:*

$$A = - \int_a^b y(t)x'(t)dt = \int_a^b x(t)y'(t)dt = \frac{1}{2} \int_a^b (x(t)y'(t) - y(t)x'(t))dt$$

Iremos primeiro demonstrar que a área da curva  $\alpha$  dada é:

$$A = - \int_a^b y(t)x'(t)dt$$

Vamos separar a demonstração em dois casos, primeiramente trataremos do caso simples e depois do caso geral.

**Caso 1 (Simples)** *A curva é formada por dois segmentos de reta paralelos ao eixo  $Oy$  e pelos gráficos das funções  $y = f_1(x)$  e  $y = f_2(x)$ , com  $x \in [x_0, x_1]$ ,  $f_1(x) > f_2(x)$ .*

Pelo Cálculo integral temos que a área de uma função  $f(x)$  em relação ao eixo  $Ox$ , com  $x \in [a, b]$  é dado por:

$$\int_a^b f(x)dx$$

Portanto a área da função definida na figura 7.1 é dada por:

$$A = \int_{x_0}^{x_1} f_1(x)dx - \int_{x_0}^{x_1} f_2(x)dx$$

Mostraremos que a área dessa figura pode ser dada por:

$$A = - \int_a^{t_1} y(t)x'(t)dt - \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt - \int_{t_2}^{t_3} y(t)x'(t)dt - \int_{t_3}^b y(t)x'(t)dt$$

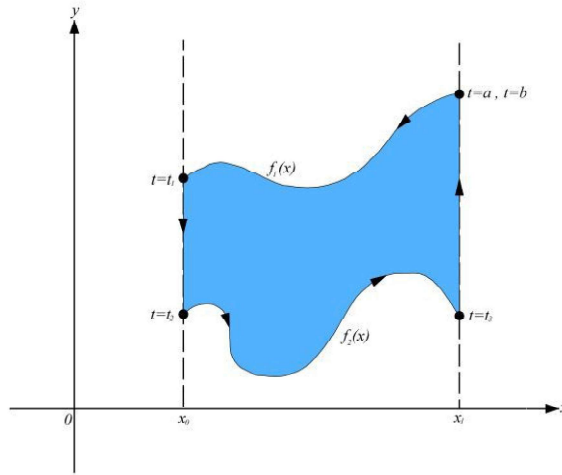


Figura 7.1: Caso simples

Fonte: Livro Geometria Diferencial das Curvas Planas, Walcy Santos.

Parametrizando  $-\int_a^{t_1} y(t)x'(t)dt$ , temos:  $\alpha(t) = (t, f_1(t)), t \in [x_0, x_1]$ ;  
 como  $x(t) = t \Rightarrow x'(t) = 1$ , então temos que:

$$-\int_a^{t_1} y(t)x'(t)dt = \int_{t_1}^a y(t)x'(t)dt = \int_{x_0}^{x_1} f_1(x)dx$$

Parametrizando  $-\int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt$ , temos:  $\alpha(t) = (x_0, t)$ , como  $x(t) = x_0 \Rightarrow x'(t) = 0$ ,  
 então temos que:

$$-\int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt = 0$$

Parametrizando  $-\int_{t_2}^{t_3} y(t)x'(t)dt$ , temos:  $\alpha(t) = (t, f_2(t)), t \in [x_0, x_1]$  como  $x(t) = t \Rightarrow x'(t) = 1$ , então temos que:

$$-\int_{t_2}^{t_3} y(t)x'(t)dt = -\int_{x_0}^{x_1} f_2(x)dx$$

Parametrizando  $-\int_{t_3}^b y(t)x'(t)dt$ , temos:  $\alpha(t) = (x_1, t)$ , como  $x(t) = x_1 \Rightarrow x'(t) = 0$ ,  
 então temos que:

$$-\int_{t_3}^b y(t)x'(t)dt = 0$$

Desse modo mostramos que:

$$A = -\int_a^{t_1} y(t)x'(t)dt - \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt - \int_{t_2}^{t_3} y(t)x'(t)dt - \int_{t_3}^b y(t)x'(t)dt$$

$$A = \int_{x_0}^{x_1} f_1(x)dx - \int_{x_0}^{x_1} f_2(x)dx$$



$$A = - \int_a^b y(t)x'(t)dt$$

Mostraremos agora que:

$$A = - \int_a^b y(t)x'(t)dt = \int_a^b x(t)y'(t)dt$$

A derivada de  $x(t)y(t)$  é dada por:

$$(x(t)y(t))' dt = x'(t)y(t)dt + x(t)y'(t)dt$$

$$x(t)y'(t)dt = (x(t)y(t))' dt - x'(t)y(t)dt$$

Integrando as partes no intervalo  $[a, b]$  temos:

$$\int_a^b x(t)y'(t)dt = \int_a^b (x(t)y(t))' dt - \int_a^b x'(t)y(t)dt$$

Temos que  $\int_a^b (x(t)y(t))' dt = x(b)y(b) - x(a)y(a) = 0$  pois a curva é fechada, logo teremos então:

$$\int_a^b x(t)y'(t)dt = - \int_a^b x'(t)y(t)dt = A$$

Agora demonstraremos que:

$$A = \frac{1}{2} \int_a^b (x(t)y'(t) - y(t)x'(t))dt$$

Como já demonstramos que:

$$A = - \int_a^b y(t)x'(t)dt$$

$$A = \int_a^b x(t)y'(t)dt$$

Somando as duas equações acima teremos que:

$$2A = \int_a^b x(t)y'(t)dt - \int_a^b y(t)x'(t)dt$$

$$A = \frac{1}{2} \int_a^b (x(t)y'(t) - y(t)x'(t))dt$$

Desta forma, como queríamos demonstrar, temos:

$$A = - \int_a^b y(t)x'(t)dt = \int_a^b x(t)y'(t)dt = \frac{1}{2} \int_a^b (x(t)y'(t) - y(t)x'(t))dt$$

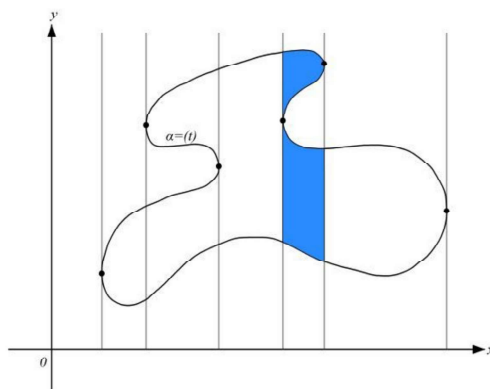


Figura 7.2: Caso geral

Fonte: Livro Geometria Diferencial das Curvas Planas, Walcy Santos.

**Caso 2 (Geral)** Seja  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva parametrizada, simples e positivamente orientada.

Como podemos ver na figura 7.2, é possível dividir a área limitada por  $\alpha$  em um número finito de regiões do tipo da figura 7.1. Podemos então utilizar em cada uma destas regiões o que foi demonstrado no caso simples, desta forma podemos afirmar que a área  $A$  delimitada por uma curva regular e de Jordan, definida por  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$  onde  $t \in [a, b]$  é dada por:

$$A = - \int_a^b y(t)x'(t)dt$$

A partir de agora poderemos começar a demonstração do Teorema 1.

Sejam  $E$  e  $F$  retas paralelas que não intersectam a curva fechada  $C$ . Em seguida, deslocamos em um o movimento paralelo essas duas retas até que elas se tornem tangentes à curva  $C$ . Obtemos assim duas retas paralelas,  $E'$  e  $F'$ , de modo que a curva  $C$  esteja totalmente contida na faixa limitada por  $E'$  e  $F'$ . Vamos considerar também um círculo  $P$  que seja tangente a  $E'$  e  $F'$  e não intersecta  $C$ . Seja  $O$  o centro de  $P$ , introduziremos o sistema de coordenadas cartesianas com a origem em  $O$  e o eixo  $Ox$  perpendicular a  $E'$  e  $F'$ , figura 7.3

Observando esse sistema de coordenadas  $xy$ , podemos parametrizar a curva  $C$  pelo comprimento de arco  $\alpha(s) = (x(s), y(s))$  de modo que a curva  $C$  tenha orientação positiva. Desta forma podemos supor que o círculo  $P$  estará parametrizado por  $\bar{\alpha}(s) = (x(s), \bar{y}(s))$ ,  $s \in [0, L]$ , pois podemos notar que a primeira coordenada,  $x(s)$ , das parametrizações da curva  $C$  e do círculo  $P$  são iguais.

O raio do círculo  $P$  é  $r$ , portanto da geometria plana temos que a área do círculo  $P$  será dada por  $\pi r^2$ , denotaremos a área da curva  $C$  por  $A$ . Portanto, utilizando a fórmula da

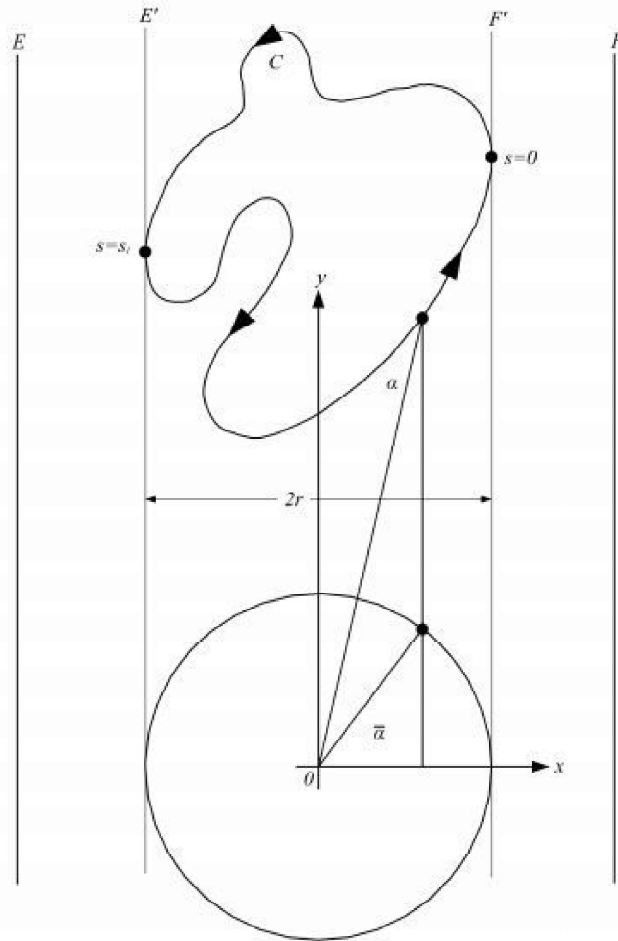


Figura 7.3: Sistema de coordenadas  $xy$  em relação a curva  $C$   
 Fonte: Livro Geometria Diferencial das Curvas Planas, Walcy Santos.

área de uma curva regular e de Jordan já demonstrada anteriormente teremos então:

$$A = \int_0^L x(s)y'(s)ds$$

$$\pi r^2 = - \int_0^L \bar{y}(s)x'(s)ds$$

Somando as duas equações acima teremos:

$$A + \pi r^2 = \int_0^L x(s)y'(s)ds - \int_0^L \bar{y}(s)x'(s)ds$$

$$A + \pi r^2 = \int_0^L (x(s)y'(s) - \bar{y}(s)x'(s))ds$$

Denotaremos por  $\|\alpha'\|$  a norma da derivada da curva  $C$ , onde  $\alpha' = (x'(s), y'(s))$ , o valor da norma será dada por  $\|\alpha'\| = \sqrt{x'^2(s) + y'^2(s)}$ , mas como a curva  $C$  é por hipótese parametrizada pelo comprimento de arco, pois toda curva regular e de Jordan tem uma

reparametrização pelo comprimento de arco, então  $\|\alpha'\| = 1$ .

A norma do círculo  $P$  é dada por  $\|\bar{\alpha}\| = r$  que é o mesmo valor da norma do vetor normal ao círculo  $P$  dado por  $(-\bar{y}(s), x(s))$ .

Temos também que o produto interno entre os vetores  $(x'(s), y'(s))$  e  $(-\bar{y}(s), x(s))$  é dado por:

$$\langle (x'(s), y'(s)), (-\bar{y}(s), x(s)) \rangle = (x(s)y'(s) - \bar{y}(s)x'(s))$$

Podemos agora usar a desigualdade de Cauchy-Schwarz:

**Teorema 2** (*Desigualdade de Cauchy-Schwarz*) Para quaisquer dois vetores  $u$  e  $v$  de um espaço vectorial a desigualdade garante que:

$$\langle u, v \rangle^2 \leq \langle u, u \rangle \cdot \langle v, v \rangle$$

O que também pode ser reescrito como:

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$$

Como as duas áreas estão acima do eixo  $Ox$  o valor de  $A + \pi r^2$  será sempre positivo, portanto teremos que  $(x(s)y'(s) - \bar{y}(s)x'(s)) = |\langle (x'(s), y'(s)), (-\bar{y}(s), x(s)) \rangle|$ . Com a desigualdade Cauchy-Schwarz teremos que  $|\langle (x'(s), y'(s)), (-\bar{y}(s), x(s)) \rangle| \leq \|(x'(s), y'(s))\| \cdot \|(-\bar{y}(s), x(s))\|$

Como temos que  $\|(x'(s), y'(s))\| = \|\alpha'\| = 1$  e  $\|(-\bar{y}(s), x(s))\| = \|\bar{\alpha}\| = r$  teremos então que:

$$(x(s)y'(s) - \bar{y}(s)x'(s)) = \|\alpha'\| \cdot \|\bar{\alpha}\| = r$$

Então teremos o seguinte:

$$A + \pi r^2 = \int_0^L (x(s)y'(s) - \bar{y}(s)x'(s)) ds \leq \int_0^L r ds = rL$$

Com isso,  $A + \pi r^2 \leq rL$ . Pela desigualdade das médias temos:

**Teorema 3** (*Desigualdade das Médias*) Dado um conjunto de valores  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  a média geométrica desses valores é sempre menor ou igual à média aritmética desses mesmos valores, ou seja:

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

Obtemos, dessa forma, então que:

$$\sqrt{A} \cdot \sqrt{\pi r^2} \leq \frac{1}{2}(A + \pi r^2) \leq \frac{1}{2}rL$$

Elevando ao quadrado teremos:

$$A \cdot \pi r^2 \leq \frac{1}{4}(A + \pi r^2)^2 \leq \frac{1}{4}(rL)^2$$

$$4A\pi r^2 \leq (A + \pi r^2)^2 \leq (rL)^2$$

Podemos concluir que:

$$4A\pi r^2 \leq (rL)^2$$

$$4A\pi \leq L^2$$

$$L^2 - 4A\pi \geq 0$$

Que é a desigualdade desejada no teorema 1. Para concluir a demonstração do teorema teremos que mostrar que a equivalência só é satisfeita quando a curva  $C$  for uma circunferência. Temos então que  $L^2 - 4A\pi = 0$ ,  $L^2 = 4A\pi$  substituindo em:

$$4A\pi r^2 \leq (A + \pi r^2)^2 \leq (rL)^2$$

Teremos:

$$4A\pi r^2 \leq (A + \pi r^2)^2 \leq 4A\pi r^2$$

Utilizaremos agora o teorema do confronto que diz:

**Teorema 4** (*Teorema do Confronto*) O teorema estabelece a existência do limite de uma função real, contanto que no domínio de interesse essa função se encontre limitada (inferior e superiormente) por duas funções, ambas convergentes para o mesmo limite. Sejam  $f(x)$ ,  $g(x)$  e  $h(x)$  funções reais definidas num domínio  $D \subseteq \mathbb{R}$  e seja  $a$  um ponto deste domínio, tais que:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$$
$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

Então resulta que:

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$$

De  $4A\pi r^2 \leq (A + \pi r^2)^2 \leq 4A\pi r^2$  podemos concluir utilizando o teorema do confronto que:

$$(A + \pi r^2)^2 = 4A\pi r^2$$

$$A^2 + 2A\pi r^2 + \pi^2 r^4 = 4A\pi r^2$$

$$A^2 - 2A\pi r^2 + \pi^2 r^4 = 0$$

$$(A - \pi r^2)^2 = 0$$

$$A - \pi r^2 = 0$$

$$A = \pi r^2$$

Como temos que  $L^2 = 4A\pi$ ,  $r^2 L^2 = 4A\pi r^2$  e que  $(A + \pi r^2)^2 = 4A\pi r^2$ , então teremos que:

$$(A + \pi r^2)^2 = r^2 L^2$$

$$A + \pi r^2 = rL$$

$$\pi r^2 + \pi r^2 = rL$$

$$2\pi r^2 = rL$$

$$L = 2\pi r$$

A igualdade obtida através da desigualdade de Cauchy-Schwarz, só é válida quando os vetores  $(x'(s), y'(s))$  e  $(-\bar{y}(s), x(s))$  apontam para a mesma direção, o vetor  $(x'(s), y'(s))$  é unitário, e o vetor  $(-\bar{y}(s), x(s))$  tem norma  $r$ , podemos concluir então que:

$$(x'(s), y'(s)) = \frac{1}{r}(-\bar{y}(s), x(s))$$

$$y'(s) = \frac{1}{r}x(s)$$

De  $L = 2\pi r$  podemos extrair que  $r = \frac{L}{2\pi}$ , o que implica que  $r$  não depende da direção das retas  $E'$  e  $F'$ , e portanto, podemos repetir a demonstração para retas paralelas em qualquer direção.

Então, sejam  $\bar{E}$  e  $\bar{F}$  retas paralelas, tangentes a curva  $C$ , ambas perpendiculares a  $E$  e a  $F$ , de modo que  $C$  está contida na faixa horizontal limitada por elas. Como acabamos de observar, a distância entre estas duas retas também é  $2r$ , que é a distância entre as retas  $E$  e  $F$ , figura 7.4.

Como no caso anterior, considere um círculo  $Q$  tangente às retas  $\bar{E}$  e  $\bar{F}$  de modo que  $Q$  não intersecta a curva  $C$ . Seja  $(a, b)$  a coordenada do centro do círculo  $Q$  no sistema de coordenadas  $xy$ .

Com origem neste ponto  $(a, b)$ , considere um novo sistema de coordenadas  $x_1 y_1$  com o eixo  $x_1$  paralelo a reta  $\bar{E}$ . Como este sistema de coordenadas  $x_1 y_1$  pode ser obtido do sistema de coordenadas  $xy$  por uma translação pelo vetor  $(a, b)$ , podemos considerar a

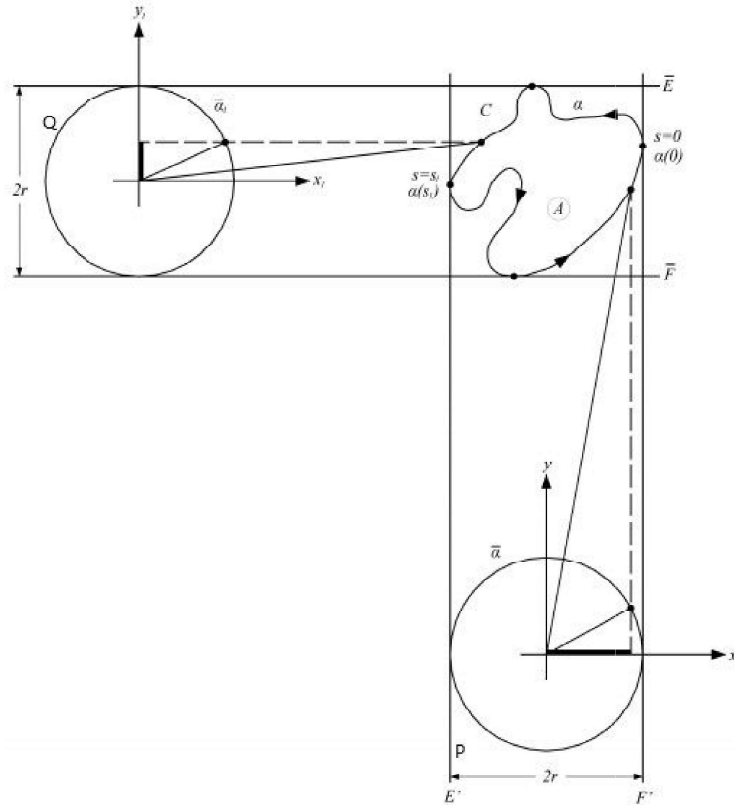


Figura 7.4: Sistema de coordenadas  $x_1y_1$  em relação à curva  $C$

Fonte: Livro Geometria Diferencial das Curvas Planas, Walcy Santos.

seguinte parametrização,  $a_1(s) = (x_1(s), y_1(s))$ ,  $s \in [0, L]$ , pelo comprimento de arco, da curva  $C$ , no sistema de coordenadas  $x_1y_1$ :

$$\{x_1(s) = x(s) - a$$

$$\{y_1(s) = y(s) - b$$

Derivando  $x_1(s) = x(s) - a$  obtemos que  $x'_1(s) = x'(s)$ . Como a parametrização da curva  $C$  pelo sistema de coordenadas  $x_1y_1$  é dada por  $a_1(s) = (x_1(s), y_1(s))$  então a parametrização do círculo  $Q$  nesse mesmo sistema de coordenadas será dada por  $\bar{a}_1(s) = (\bar{x}_1(s), y_1(s))$ ,  $s \in [0, L]$ , pois a ordenada  $y_1(s)$  é igual tanto no círculo  $Q$  quanto na curva  $C$ . Conforme fizemos anteriormente, chamaremos a área da curva  $C$  de  $A$  e a área do círculo  $Q$  é dada por  $\pi r^2$ , onde  $r$  também é o raio do círculo  $Q$ . Usaremos a fórmula da área de curvas regulares e de Jordan para calcular a área da curva  $C$  e do círculo  $Q$  teremos:

$$A = - \int_0^L y_1(s)x'_1(s)ds$$

$$\pi r^2 = \int_0^L \bar{x}_1(s)y'_1(s)ds$$

Somando as duas equações teremos:

$$A + \pi r^2 = \int_0^L \bar{x}_1(s)y_1'(s)ds - \int_0^L y_1(s)x_1'(s)ds$$

$$A + \pi r^2 = \int_0^L (\bar{x}_1(s)y_1'(s) - y_1(s)x_1'(s))ds$$

Temos que a norma da derivada da parametrização da curva  $C$  é dado por  $\|\alpha_1'\| = 1$  pois a curva  $C$  é parametrizada pelo comprimento de arco por hipótese, e a norma do círculo parametrizado  $Q$  é dado por  $\|\bar{\alpha}_1\| = r$

como:

$$\int_0^L (\bar{x}_1(s)y_1'(s) - y_1(s)x_1'(s))ds = \int_0^L \langle (x_1', y_1'), (-y_1, \bar{x}_1) \rangle ds$$

Teremos então pela desigualdade de Cauchy-Schwarz que:

$$\int_0^L \langle (x_1', y_1'), (-y_1, \bar{x}_1) \rangle ds < \int_0^L \|\alpha_1'\| \cdot \|\bar{\alpha}_1\| = \int_0^L r ds = rL$$

Como já provamos anteriormente que  $A + \pi r^2 = rL$  e esta igualdade foi obtida através da desigualdade de Cauchy-Schwarz podemos concluir que os vetores  $(x_1'(s), y_1'(s))$  e  $(-y_1(s), \bar{x}_1(s))$  apontam na mesma direção,  $(x_1'(s), y_1'(s))$  é unitário e  $(-y_1(s), \bar{x}_1(s))$  tem norma  $r$ , portanto  $(x_1'(s), y_1'(s)) = \frac{1}{r}(-y_1(s), \bar{x}_1(s))$  o que implica:

$$x_1'(s) = -\frac{1}{r}y_1(s)$$

Usaremos agora algumas equações anteriormente encontradas, temos que  $y'(s) = \frac{1}{r}x(s)$ ;  $x_1'(s) = x'(s)$ ;  $x_1'(s) = -\frac{1}{r}y_1(s)$  e que  $y_1(s) = y(s) - b$

Teremos então que:

$$\begin{aligned} x^2 + (y - b)^2 &= x^2 + y_1^2 = (ry'(s))^2 + (-rx_1'(s))^2 = r^2((y'(s))^2 + (x_1'(s))^2) \\ &= r^2((y'(s))^2 + (x'(s))^2) = r^2\|\alpha'\|^2 = r^2 \end{aligned}$$

Portanto:

$$x^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Desta última equação podemos extrair que a curva  $C$ , representada por  $\alpha(s) = (x(s), y(s))$  parametrizada no eixo de coordenadas  $xy$  representa uma circunferência de raio  $r$  e centro  $(0, b)$ , o que conclui portanto a demonstração do teorema da desigualdade isoperimétrica.



## 8 TEOREMA DOS QUATRO VÉRTICES

### 8.1 DEFINIÇÃO

**Teorema 5** *Teorema dos Quatro Vértices: Seja  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva de Jordan, regular e de classe  $C^3$ . Então  $\alpha$  possui pelo menos quatro vértices.*

#### 8.1.1 História

De acordo com Carneiro, 2017, VIII Bienal de Matemática da Sociedade Brasileira de Matemática, o Teorema dos Quatro Vértices foi demonstrado pela primeira vez para curvas convexas (curva plana regular simples, fechada com curvatura estritamente positiva) em 1909, por S. Mukhopadhyaya. Em 1912, A. Kneser provou o teorema para o caso não convexo. W. C. Graustein, em 1937, e S. B. Jackson, em 1944, estudaram com mais detalhes a localização dos vértices em curvas fechadas regulares não necessariamente simples. Outras provas do teorema surgiram usando propriedades analíticas ou geométricas (círculos inscritos bitangentes). Mais recentemente, em 1985, R. Osserman, obteve uma relação entre o número de vértices de uma curva simples fechada de classe  $C^2$  com o número de componentes da interseção do traço da curva com o seu círculo circunscrito.

##### 8.1.1.1 Demonstração

Antes de iniciarmos a demonstração do Teorema dos Quatro Vértices vamos introduzir e estudar as propriedades do círculo circunscrito ao traço de uma curva fechada e regular. Seja  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva fechada e regular. Como o traço de  $\alpha$  é limitado, existe pelo menos um disco fechado  $D(P; r) = \{Q \in \mathbb{R}^2 / \|Q - P\| \leq r\}$  que contém o traço de  $\alpha$ . Seja  $D_\alpha$  o conjunto de tais discos.

**Lema 2** *Existe um único disco  $D_0 \in D_\alpha$ , tal que  $D_0$  é o disco de menor raio dentre os elementos de  $D_\alpha$ .*

Seja  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $F(P) = \max_{T \in [a,b]} \|\alpha(T) - P\|$

Como  $\alpha$  é regular e está definida em um intervalo fechado e limitado, o máximo acima existe e ocorre em um ponto  $t_P \in [a, b]$ . A função  $F$ , portanto, está bem definida e tem as seguintes propriedades:

1)  $F(P) > 0, \forall P \in \mathbb{R}^2$

Se  $F(P) = 0$  então a curva  $\alpha$  seria constante o que contradiz o fato dela ser regular, pois para que uma curva  $\alpha(T)$  seja regular todos os seus pontos devem ser regulares e para que um ponto seja regular é necessário que  $\alpha'(T) \neq 0 \forall T \in [a, b]$ , e se  $\alpha(T) = C$  onde  $C$  é uma constante, então  $\alpha'(T) = 0$

2)  $F$  é contínua em  $\mathbb{R}^2$

Sejam  $P, Q \in \mathbb{R}^2$ . Pela Desigualdade Triangular,  $\forall P \in [a, b]$  temos que:

$$\|\alpha(T) - P\| \leq \|\alpha(T) - Q\| + \|P - Q\| \leq F(Q) + \|P - Q\|$$

E da mesma forma temos que:

$$\|\alpha(T) - Q\| \leq \|\alpha(T) - P\| + \|P - Q\| \leq F(P) + \|P - Q\| \text{ conforme figura 8.1}$$

Substituindo na desigualdade acima o valor máximo de  $\|\alpha(T) - P\|$  que é  $F(P)$  e

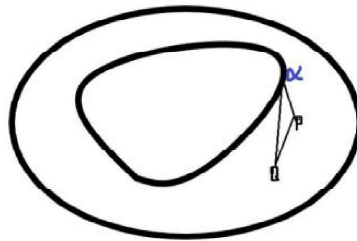


Figura 8.1: Distância dos pontos  $P$  e  $Q$  a curva  $\alpha$

Fonte: Autor

$\|\alpha(T) - Q\|$  que é  $F(Q)$  teremos então:

$$F(P) \leq F(Q) + \|P - Q\| \text{ e } F(Q) \leq F(P) + \|P - Q\|$$

Portanto temos que:

$$|F(P) - F(Q)| \leq \|P - Q\|, \text{ fato este que implica que } F \text{ é contínua em } \mathbb{R}^2$$

Pois uma função  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  é dita Lipschitz contínua, se existir uma constante  $L \geq 0$  tal que:

$$|f(x) - f(y)| \leq L \|x - y\|, \forall x, y \in X$$

Considere o disco  $D_P$  de centro  $P$  e raio  $F(P)$ , onde  $P \in \mathbb{R}^2$  temos que:

$$D_P = \{U \in \mathbb{R}^2 / \|U - P\| \leq F(P)\}$$

Pela definição de  $F(P)$ , temos que  $D_P \in D_\alpha$ , para todo  $P \in \mathbb{R}^2$ .

Considere agora  $D(P, r)$  um disco de centro  $P$  e raio  $r$  em  $D_\alpha$ .

Podemos afirmar que:

$$F'(P) \leq r$$

Como o traço de  $\alpha$  está contido em  $D(P, r)$ , temos que:

$$\|\alpha(T) - P\| \leq r, \forall T \in [a, b]$$

Calculando o máximo valor de  $\|\alpha(T) - P\|$  que é  $F(P)$ , teremos:

$$F(P) \leq r$$

Portanto, entre todos os discos de centro  $P$  em  $D_\alpha$ ,  $D_P$  é o disco que possui o menor raio, conforme figura 8.2.

Vamos provar a unicidade de tal disco. Suponha que existam dois discos  $D_1$  e  $D_2$  de raio  $F(P)$  e centros  $C_1$  e  $E_2$  respectivamente em  $D_\alpha$ . Temos então que o traço de  $\alpha$  está contido em  $D_1 \cap D_2$ . Pela geometria elementar, como  $D_1$  e  $D_2$  são discos de mesmo raio, existe um disco de raio menor, a menos que eles coincidam, que contém  $D_1 \cap D_2$ , o que contradiz a escolha de  $P$ .

Como podemos ver pela figura 8.3 sabendo que o segmento  $\overline{C_1G}$  tem comprimento  $F(P)$  que é o raio dos círculos  $C_1$  e  $E_2$ , o segmento  $\overline{IG}$  com comprimento  $r$  que é o raio do disco que contém o traço da curva  $\alpha$  que está na intersecção dos discos  $C_1$  e  $E_2$  e o segmento  $\overline{C_1I}$  que tem comprimento  $x$ , temos que  $F(P) = r^2 + x^2$  logo o raio  $r$  tenderá ao comprimento do raio  $F(P)$  quando  $x$  tender a zero, em todos os outros casos o raio  $r$  será menor do que o raio  $F(P)$ , o que nos mostra que o disco mínimo que conterá a curva  $\alpha$  é único como queríamos demonstrar.

**Definição 6** *Seja  $\alpha$  uma curva fechada e regular. A fronteira do disco fechado de menor raio que contém o traço de  $\alpha$  é chamada círculo circunscrito de  $\alpha$ . Pelo lema 2, cada curva fechada e regular admite um único círculo circunscrito que será denotada por  $Circ(\alpha)$ .*

**Lema 3** *Todo semi-círculo fechado de  $Circ(\alpha)$  contém pontos do traço de  $\alpha$ .*

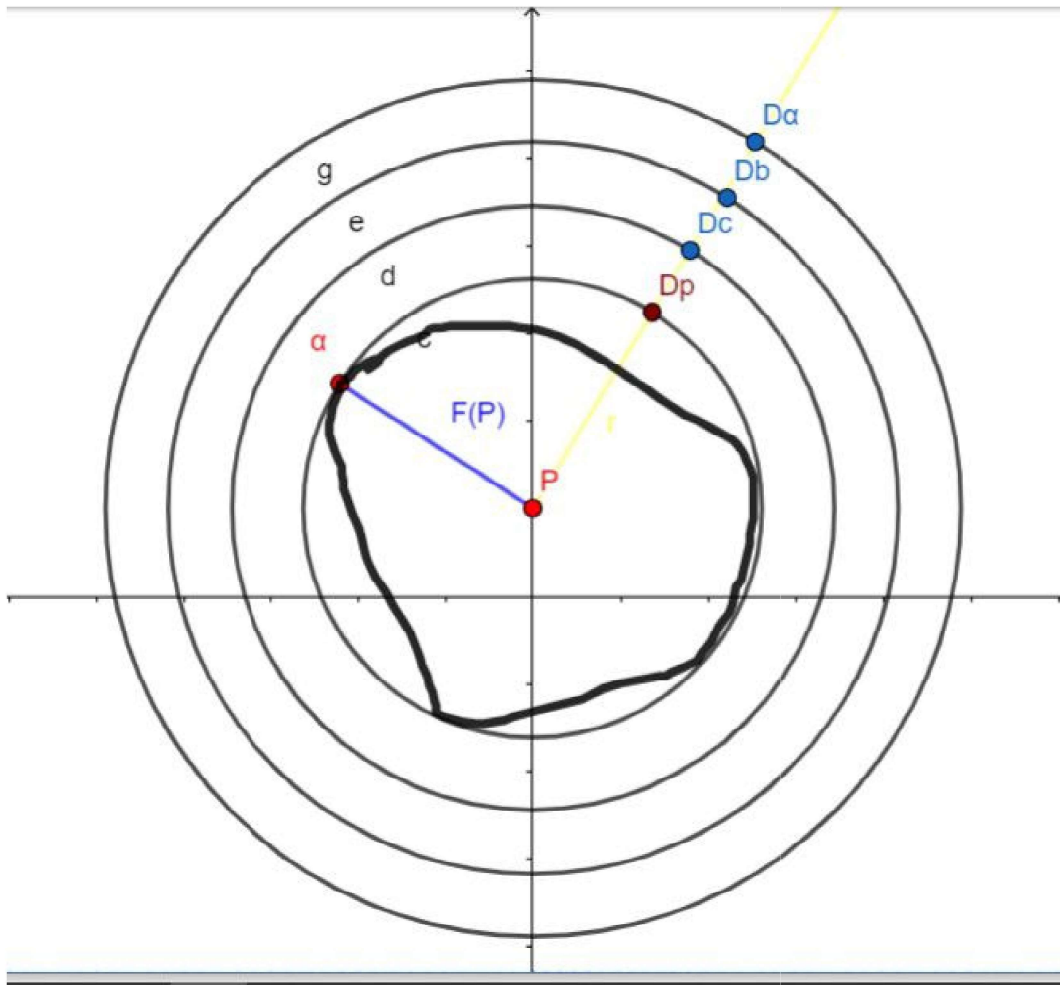


Figura 8.2: Disco  $D_p$  e discos  $D_\alpha$  em uma curva  $\alpha(T)$

Fonte: Autor

Demonstração:

Vamos supor, por contradição, que existe um semicírculo de  $Circ(\alpha)$  sem pontos do traço de  $\alpha$ . Vamos escolher o sistema de coordenadas  $Oxy$  de  $\mathbb{R}^2$  de modo que  $Circ(\alpha)$  seja um círculo centrado na origem  $O$  e com raio  $R_0$ , tal que o traço de  $\alpha$  não possui pontos sobre o  $Circ(\alpha)$  com  $x \leq 0$ . Parametrize  $Circ(\alpha)$  pelo traço da aplicação  $\gamma : [0; 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , dada por  $\gamma(t) = (R_0 \cos t, R_0 \sin t)$  e considere a função  $h : [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por:

$$h(u) = \min_{t \in [a, b]} \|\gamma(u) - \alpha(t)\|$$

A função  $h$  é contínua e  $h(u) > 0, \forall u \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ . Como  $h$  assume o seu valor mínimo, temos que:

$$\xi_0 = \min h(u), u \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}] > 0$$

Observe que o traço de  $\alpha$  está contido no círculo de centro  $(\frac{\xi_0}{2}, 0)$  e raio  $R_0$  sendo,

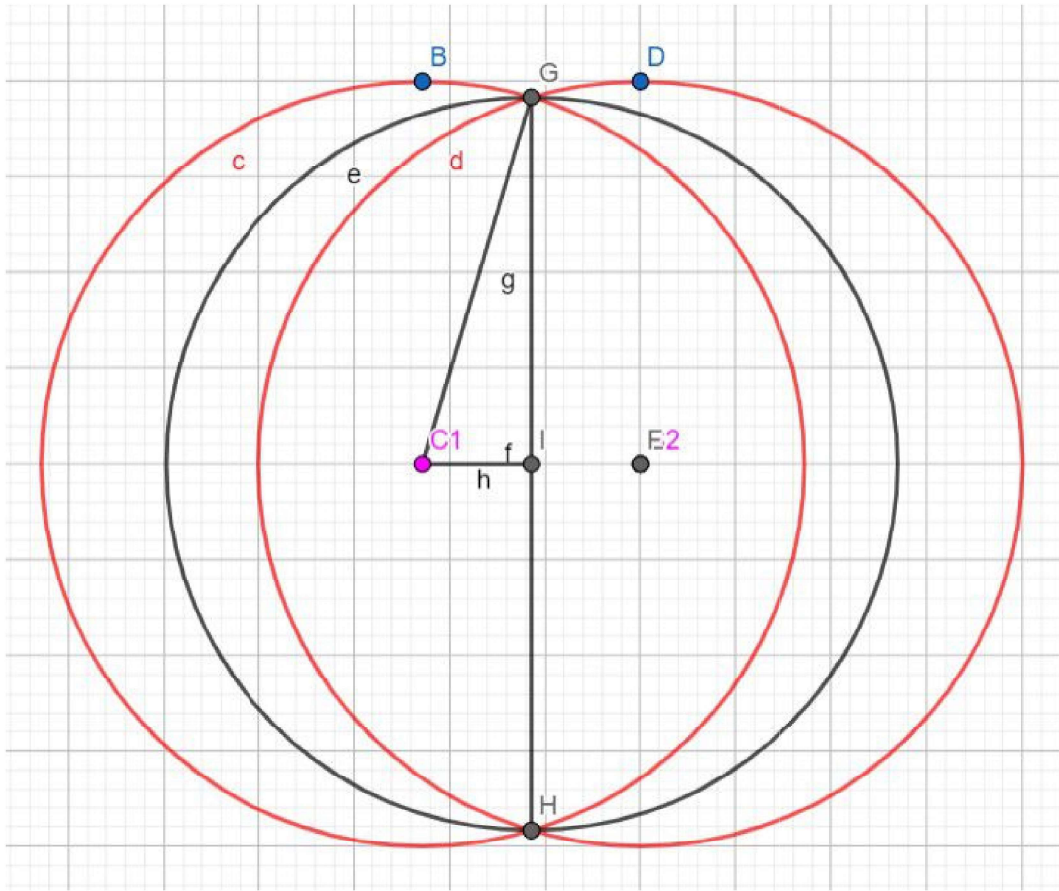


Figura 8.3: Disco  $D_1$  e discos  $D_2$

Fonte: Autor

portanto, possível obtermos um disco de raio menor que  $R_0$  que ainda contém o traço de  $\alpha$ , visto que o traço de  $\alpha$  está contido em dois discos distintos de mesmo raio, o que contradiz a definição de  $Circ(\alpha)$ , conforme figura 8.4.

Como podemos notar a função  $h$  mede a menor distância da curva  $\alpha$  ao semicírculo de centro  $O$  e raio  $R_0$  onde  $x < 0$ , ou seja  $u \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}] > 0$ , e se tomarmos  $\xi_0$  como sendo o menor valor que a função  $h$  assume representado pelo segmento  $\overline{AC}$  na figura 8.4 podemos obter um novo disco de mesmo raio e centro  $(\frac{\xi_0}{2}, 0)$  representado pelo ponto  $F$  e que contém o ponto  $M$  que é a mediana do segmento  $\overline{AC}$ . Portanto temos que a curva  $\alpha$  também estará inserida nesse outro círculo, como temos dois círculos distintos de mesmo raio que contém a curva  $\alpha$  logo como foi demonstrado anteriormente, teremos um círculo de raio menor e centro em  $I$  que também conterá a curva  $\alpha$ , podemos concluir então que em ambos os semicírculos de  $Circ(\alpha)$  conterá pontos da curva  $\alpha$ .

Esse lema tem, como consequência imediata, o seguinte resultado:

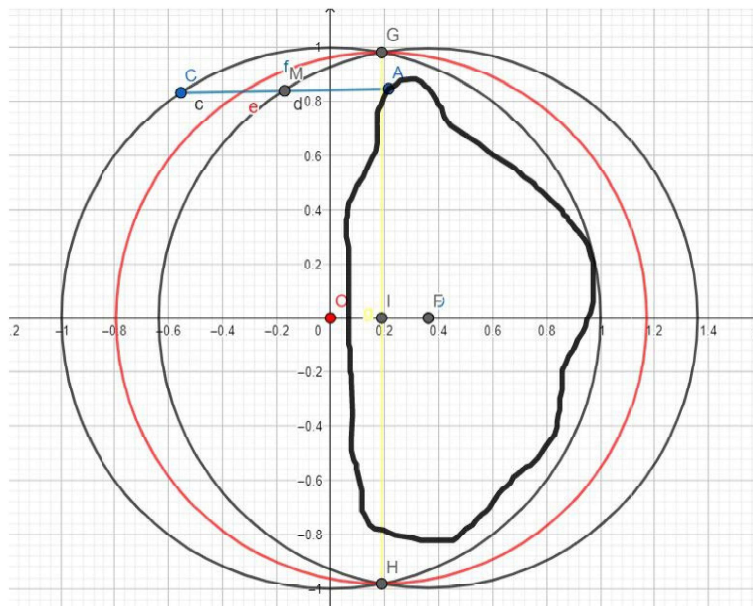


Figura 8.4:  $Circ(\alpha)$  e curva  $\alpha$

Fonte: Autor

**Lema 4** *O traço de uma curva fechada e regular intersecta seu círculo circunscrito em pelo menos dois pontos. Além disso, se ele intersecta em exatamente dois pontos, tais pontos estão diametralmente opostos.*

Vamos agora estudar o comportamento dos pontos do traço de  $\alpha$ , que estão sobre  $Circ(\alpha)$ .

**Lema 5** *Seja  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva de Jordan, regular, parametrizada pelo comprimento de arco e orientada de modo que o campo normal  $N$  aponte para a região limitada pelo seu traço. Para cada  $t \in [a, b]$ , tal que  $\alpha(t) \in Circ(\alpha)$ , as retas tangentes à  $\alpha$  e  $Circ(\alpha)$  coincidem em  $\alpha(t)$  e a curvatura  $k$  de  $\alpha$  satisfaz*

$$k(t) \geq \frac{1}{R_0}$$

. onde  $R_0$  é o raio de  $Circ(\alpha)$ .

Demonstração:

Seja  $P_0$  o centro de  $Circ(\alpha)$ . Se  $\alpha(t_1) \in Circ(\alpha)$ , a função  $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$h(t) = \|\alpha(t) - P_0\|^2$$

possui um máximo em  $t_1$ . Como  $h$  não se anula nesse ponto, é diferenciável em  $t_1$  e, portanto:

$$h'(t_1) = 2\langle \alpha'(t_1), \alpha(t_1) - P_0 \rangle = 0$$

e

$$h''(t_1) = 2\langle \alpha'(t_1), \alpha'(t_1) \rangle + 2\langle \alpha''(t_1), \alpha(t_1) - P_0 \rangle \leq 0$$

A primeira equação nos diz que as retas tangentes de  $\alpha$  e  $Circ(\alpha)$  coincidem em  $\alpha(t_1)$ , enquanto a segunda equação, devido à orientação de  $\alpha$ , implica que:

$$0 \geq \|\alpha'(t_1)\|^2 + \langle \alpha''(t_1), -R_0 N(t_1) \rangle = 1 - k(t_1)R_0$$

O que conclui a prova.

Finalmente, usaremos os resultados acima para a demonstração do resultado principal deste capítulo.

Prova do Teorema 5. Suponha  $\alpha$  orientada positivamente. Pelo Lema 4, existem pelo menos dois pontos  $P$  e  $Q$  do traço de  $\alpha$  pertencentes ao  $Circ(\alpha)$ . Vamos considerar  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  os arcos do traço de  $\alpha$  determinados por  $P$  e  $Q$ . Se algum desses arcos estivesse inteiramente contido em  $Circ(\alpha)$ , a curvatura de  $\alpha$  ao longo desse arco seria constante e, portanto,  $\alpha$  possuiria um número infinito de vértices. Vamos supor então que  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  não estão contidos em  $Circ(\alpha)$ .

**Afirmção 1** *Em cada  $\Gamma_i, i = 1, 2$ , existe um ponto  $\alpha(t_i)$ , tal que:*

$$k(t_i) < \frac{1}{R_0}$$

onde  $k(t_i)$  é a curvatura de  $\alpha$  em  $t_i$  e  $R_0$  é o raio de  $Circ(\alpha)$ , a figura 8.5 ilustra essa afirmação.

Demonstração:

Observe que, pelo Lema 3, a curva  $\alpha$  intersecta todo semicírculo fechado de  $Circ(\alpha)$ . Portanto, trocando  $\Gamma_i$  por algum sub-arco de  $\Gamma_i$ , podemos supor que os extremos de  $\Gamma_i$  estão em um semi-círculo fechado de  $Circ(\alpha)$ . Como estamos supondo que o número de vértices de  $\alpha$  é finito,  $\Gamma_i \not\subset Circ(\alpha)$ , e, portanto, existe  $Q_i \in \Gamma_i$  que pertence ao interior do disco  $D$ , delimitado por  $Circ(\alpha)$ . Além disso, a reta que passa por  $P$  e  $Q$  intersecta  $Circ(\alpha)$  transversalmente. Logo, pelo Lema 5, ela é transversal ao traço de  $\alpha$ , o que implica que existem pontos do traço de  $\alpha$  de ambos os lados dessa reta. Fixe um dos arcos  $\Gamma_i$  e, por simplicidade, denote-o por  $\Gamma$ . Escolha o sistema de coordenadas  $Oxy$  de  $\mathbb{R}^2$  de modo que a reta que passa por  $P$  e  $Q$  seja o eixo  $Oy$ , o centro de  $Circ(\alpha)$



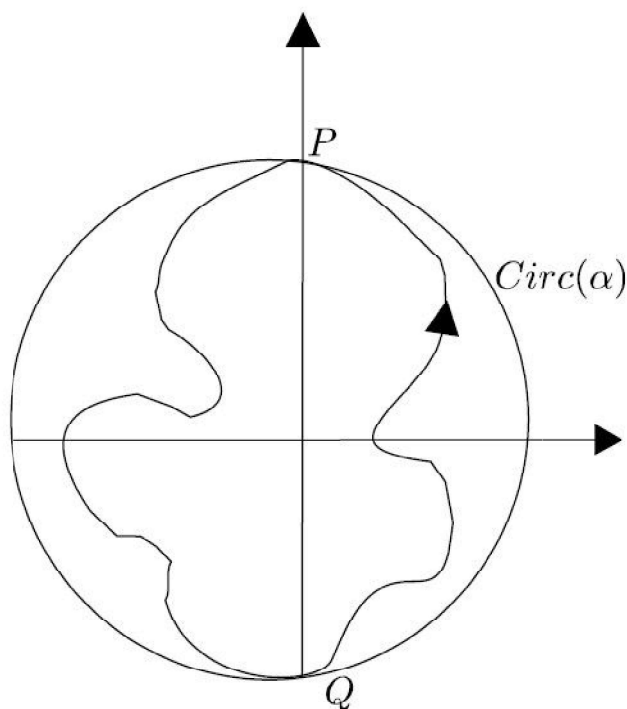


Figura 8.5: Figura Geometria diferencial Walcy Santos pág 231

esteja sobre o eixo  $Ox$  e  $\Gamma$  possua pontos com coordenada  $x$  positiva.

Nesse sistema de coordenadas, o centro de  $Circ(\alpha)$  é da forma  $(x_0, 0)$ , com  $x_0 \leq 0$ . Seja  $S \in \Gamma$  um ponto no interior de  $D$ , e seja  $M$  o círculo determinado por  $P, Q$  e  $S$ , conforme figura 8.7. Visto que  $S$  está no interior de uma metade de  $D$ , o raio  $\bar{R}$  de  $M$  é estritamente maior que  $R_0$ . O centro de  $M$  é, portanto, um ponto da forma  $(\lambda - t, 0)$ , com  $\lambda < 0$ . Considere  $M_t$  o círculo de centro  $(\lambda - t, 0)$ ,  $t \in \mathbb{R}, t \geq 0$  e raio  $\bar{R}$ . Como  $\Gamma$  é um arco fechado, existe um último valor de  $t$  para o qual  $M_t$  intersecta o arco  $\Gamma$ . Seja  $t_1 \in \mathbb{R}$ , tal que  $M_{t_1} \cap \Gamma \neq \emptyset$ , porém, para todo  $t > t_1, M_t \cap \Gamma = \emptyset$ . Denote por  $M_1$  o círculo  $M_{t_1}$ , e seja  $\bar{Q} \in M_{t_1} \cap \Gamma$ . Observe que em  $\bar{Q}$ , as retas tangentes à  $\Gamma$  e à  $M_1$  coincidem e, numa vizinhança desse ponto,  $\Gamma$  fica no exterior de  $M_1$ . Como o vetor normal à  $\alpha$  em  $\bar{Q}$  aponta para o interior de  $M_1$ . Um argumento análogo ao do Lema 5 implica que a curvatura em  $\bar{Q}$  satisfaz:

$$k(\bar{Q}) \leq \frac{1}{\bar{R}} < \frac{1}{R_0}$$

o que prova a afirmação.

Decorre da Afirmação 1 que, em cada arco  $\Gamma_i$ ,  $\alpha$  possui pontos onde a curvatura é menor que a curvatura em seus extremos. Portanto a curvatura de  $\alpha$  possui um mínimo em cada  $\Gamma_i$ , digamos em  $\alpha(t_i)$ , com:

$$k(\bar{t}_i) \leq \frac{1}{\bar{R}} < \frac{1}{R_0}$$



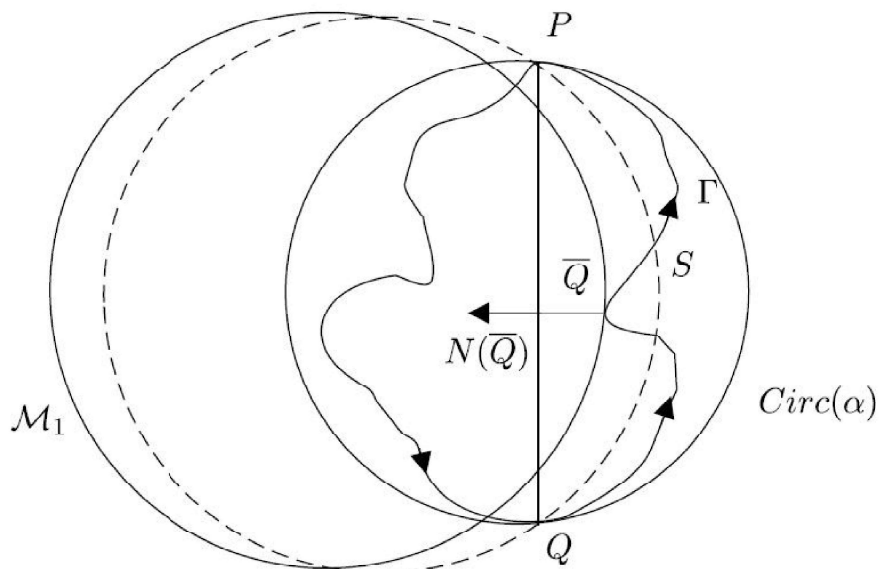


Figura 8.6: Figura Geometria diferencial Walcy Santos pág 232

Logo a curva  $\alpha$  possui pelo menos dois vértices. Agora observe que os arcos determinados pelos pontos  $\alpha(t_i)$  possuem pontos,  $P$  e  $Q$ , com curvatura maior que a curvatura em seus extremos. Assim a curvatura de  $\alpha$  possui máximo em cada um desses arcos, o que implica que  $\alpha$  possui pelo menos mais dois vértices, portanto, totalizando pelo menos quatro vértices.

A curva  $\alpha$  ser curva de Jordan é fundamental para a estimativa de curvatura no ponto  $\bar{Q}$ . Observe que no ponto  $\bar{Q}$ , veja figura 8.7, a curvatura de  $\alpha$  em  $\bar{Q}$  é maior que  $\frac{1}{R}$ .

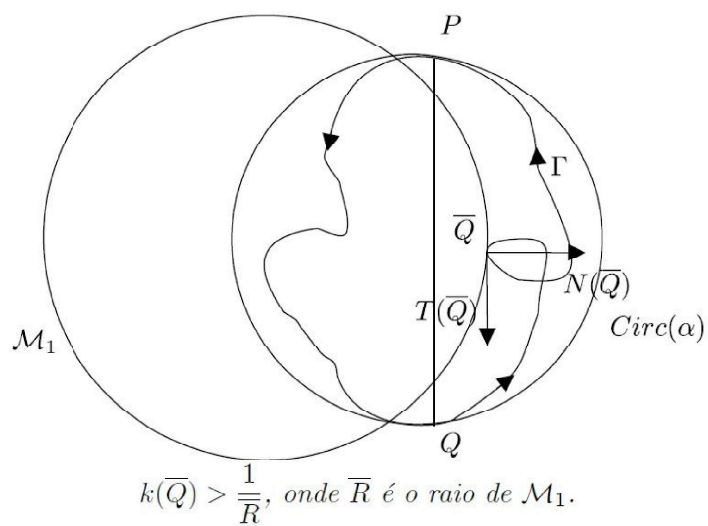


Figura 8.7: Figura Geometria diferencial Walcy Santos pág 233

## 9 CONSIDERAÇÕES E RECOMENDAÇÕES

### 9.1 CONCLUSÕES GERAIS

Após os estudos dos problemas aqui tratados, veremos agora de que forma poderemos implementar esses problemas nas salas de aula.

Primeiramente poderemos sugerir uma reflexão aos alunos da seguinte forma:

Se tivermos dois skatistas,  $A$  e  $B$  descendo por rampas de skate, pergunta-se qual dos skatistas chegarão ao ponto mais baixo da pista primeiro, sabendo-se que ambos os skatistas tem o mesmo peso, largarão no mesmo instante e que o skatista  $A$  desce por uma rampa plana enquanto o skatista  $B$  desce por uma rampa em forma de cicloide.

Poderemos perceber que a maioria dos alunos dirão que o skatista  $A$  chegará primeiro. Isso se deve ao fato de que eles sabem que uma reta é sempre o menor percurso entre dois pontos, portanto como a rampa plana tem uma distância menor logo gastaria menos tempo para percorrê-la.

É interessante ao professor que queira apresentar esse problema aos seus alunos, que construa rampas de formas diferentes, uma plana, uma hiperbólica e outra cicloidal e leve para a sala de aula para que os alunos possam ver de forma clara e concisa que a rampa onde se percorre o seu trajeto no menor tempo possível é a rampa em forma de cicloide, assim eles entenderão que quem chegará primeiro será o skatista  $B$ , teremos trabalhado então de forma satisfatória com a curva Braquistócrona.

Faremos agora mais uma indagação aos alunos, se tivermos dois skatistas  $A$  e  $B$  com o mesmo peso em duas rampas cicloidais com as mesmas proporções, o skatista  $A$  estará no topo da rampa, e o skatista  $B$  estará na metade da rampa, pergunta-se qual dos skatistas chegará primeiro no ponto mais baixo das pistas?

Repare que agora os alunos já tem o conhecimento prévio de que a curva de menor tempo é a cicloide, só que como ambos os skatistas estão em rampas cicloidais logo os alunos pensarão que o skatista  $B$  chegará primeiro pois já está na metade do caminho. Mas como já produzimos as rampas anteriormente usaremos agora somente a rampa em forma de cicloide, colocaremos duas esferas uma na parte de cima e outra em qualquer outro ponto da rampa, os alunos poderão entender que não importa o ponto de onde largue a segunda esfera ela sempre chegara ao mesmo tempo da primeira esfera.

Portanto eles agora saberão que os dois skatistas chegarão ao mesmo tempo no ponto mais baixo das rampas, dessa forma eles aprenderão o conceito da curva Tautócrona.

## 9.2 RECOMENDAÇÕES PARA PESQUISAS FUTURAS

Em geral, os problemas aqui tratados podem ser usados para tratar de problemas de otimização de recursos, minimização de impactos, menor desperdício, menor tempo gasto, maior área alocada entre outros.

São diversas formas de estudo e aplicação dos problemas aqui abordados como construções de pistas de skates, montanhas russas, relógios, aerodinâmicas, plantações e construções onde se deseja ocupar a maior área possível com o menor custo entre outros.

Portanto caro leitor, terá uma grande gama de linhas de pesquisa que futuramente poderás estar estudando, a matemática nos fornece grandes possibilidades devemos então descobrir de que forma usá-las ao nosso proveito.

## Referências Bibliográficas

ALENCAR, Hilário; SANTOS, Walcy. **Geometria Diferencial das Curvas Planas**. 2. ed. atual. [S. l.: s. n.], 2002.

ANDRADE, Michele Rodrigues de. **Índice de rotação e Teorema dos Quatro Vértices**. Orientador: Alberto Berly Sarmiento. 2011. Trabalho de Conclusão de Curso (Especialização em Matemática) - Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2011.

BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática**. Trad. de Elza F. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.

CARMO, Manfredo do. **Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies**. CTU 04, Sexta Edição, SBM, 2014.

CARNEIRO, Mario Jorge Dias; GARCIA, Ronaldo Alves. **O Teorema dos Quatro Vértices e sua recíproca**. VIII Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática, IMPA, 2017.

CASTRO, Leonardo Miranda de. **O Cálculo Variacional e as Curvas Cicloidais**. Orientador: Ricardo Ruviano. 2014. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade de Brasília, Brasília, 2014.

COELHO, Rejeane Alexandre. **A HISTÓRIA DOS PROBLEMAS DA TAUTÓCRONA E DA BRAQUISTÓCRONA**. Orientador: Marcos Vieira Teixeira. 2008. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2008.

FIGUEIREDO, Djairo Guedes de. **Séries de Fourier e Equações Diferenciais Parciais**. Projeto Euclides, IMPA, 1996.

KATZ, Victor J. **A History of Mathematics: an Introduction**. 2nd ed. Addison Wesley Educational Publishers, Inc, 1998.

LIMA, Elon. **Análise**. Vol. 2, Projeto Euclides, IMPA, 1981.

OLIVEIRA, Marina Mariano de. **Curvas pedais e Teorema dos Quatro Vértices: uma introdução à geometria diferencial**. Orientador: Marcus Antonio e Mendonça Marrocos. 2018. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal do ABC, Santo André,

2018.

TAGLIOLATTO, Ana Luísa Sader. **Braquistócrona**. Orientador: Suzinei Aparecida Siqueira Marconato. 2015. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2015.

TENENBLAT, Ketí. **Introdução à Geometria Diferencial**. 2. ed. atual. São Paulo: Edgard Blücher Ltda, 2008.

YODER, G. J. **Unrolling Time - Christiaan Huygens and the Mathematization of Nature**. Cambridge: Cambridge University Press, 1988.



UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
Curso de Matemática

## Plano de Aula

| Dados de Identificação |   |
|------------------------|---|
| Professor:             | Gabriel Magalhães Reis  |
| Disciplina:            | Geometria Diferencial   |
| Tema:                  | Curvas Braquistócrona, Taltócrona e Desigualdade Isoperimétrica |
| Turma:                 | 5º Período  |
| Data:                  | 18 de março de 2020   |
| Duração da aula:       | 50 minutos  |

### 1 Objetivos

#### 1.1 Geral

O objetivo geral é fazer com que os alunos compreendam de forma dinâmica e visual os conceitos de curvas Braquistócrona e Taltócrona, e sobre a Desigualdade Isoperimétrica.

#### 1.2 Específicos

- Entender que a Cicloide é uma curva Braquistócrona;
- Compreender a taltocronicidade da curva Cicloide;
- Verificar de forma geométrica que o círculo é a curva de maior área entre as curvas planas com um mesmo comprimento.

### 2 Conteúdos

- Curva Braquistócrona;
- Curva Taltócrona;
- Desigualdade Isoperimétrica.

### 3 Procedimentos metodológicos

Utilizando-se de plataformas em forma de cicloide, de hipérbole e plana, e de esferas idênticas indagaremos aos alunos em qual das plataformas a esfera chagará no ponto mais baixo da

plataforma no menor tempo possível, estaremos com isso trabalhando com a curva Braquistócrona.

Logo após pegaremos duas plataformas em forma de ciclode e colocaremos esferas em posições diferentes nas plataformas, a partir daí indagaremos novamente aos alunos em qual das posições a esfera chegará no ponto mais baixo da plataforma no menor tempo possível com isso estaremos trabalhando a taltocronicidade da curva cicloide.

Utilizando-se do Geogebra, o professor poderá criar diversas curvas fechadas com um mesmo comprimento, e mostrado para o aluno primeiramente que os polígonos regulares tem áreas maiores do que os polígonos não regulares, após o professor deverá demonstrar que a área de um quadrado é maior do que a área de um triângulo com o mesmo perímetro, depois fazer o mesmo com um pentágono, por fim fazer os alunos entenderem que quando maior o número de lados de um polígono regular maior será a área dado um perímetro fixo, finalmente o professor deverá demonstrar que a circunferência é um polígono regular com infinitos lados, logo a área da desse círculo deve ser portanto a maior área possível dado um comprimento fixo.

## 4 Recursos didáticos

Utilizarei rampas com uma mesma altura e sem atrito, com formas de cicloide, hipérbole e plana;

Utilizarei também de esferas idênticas, de um computador e um projetor.

## 5 Avaliação

A Avaliação será feita de forma oral, verificando-se a participação dos alunos na resolução dos problemas aqui trabalhados.