



UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Fluxos de Curvas no Espaço Hiperbólico
e no Cone de Luz

por

Fábio Nunes da Silva

Brasília

2020



UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Fluxos de Curvas no Espaço Hiperbólico e no Cone de Luz

por

Fábio Nunes da Silva †

sob orientação da

Profa. Dra. Keti Tenenblat

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, PPGMat-UnB, como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Doutor em Matemática.

†O autor contou com apoio da Universidade Federal do Oeste da Bahia durante a realização deste trabalho.

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Fluxos de Curvas no Espaço Hiperbólico e no Cone de Luz

por

Fábio Nunes da Silva

*Tese apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de
Brasília, como parte dos requisitos para obtenção do grau de*

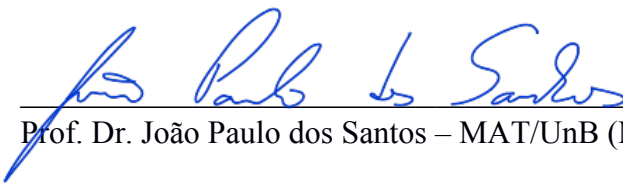
DOUTOR EM MATEMÁTICA

Brasília, 23 de outubro de 2020.

Comissão Examinadora:



Prof.ª. Dra. Ketí Tenenblat - MAT/UnB (Orientadora)



Prof. Dr. João Paulo dos Santos – MAT/UnB (Membro)



Prof. Dr. Detang Zhou – UFF (Membro)



Prof. Dr. Marcos Petrucio de Almeida Cavalcante – UFAL (Membro)

Agradecimentos

Inicialmente agradeço a Deus, por esta oportunidade.

Aos meus pais José e Cleuza, aos meus irmãos Mônica e Fernando, e a minha esposa Grasielle.

À professora Ketí Tenenblat pela oportunidade de trabalhar sob a sua orientação. Agradeço pela disponibilidade, compreensão e paciência com a qual conduziu os meus estudos.

Aos professores e membros da banca examinadora, Detang Zhou, João Paulo dos Santos e Marcos Petrucio de Almeida Cavalcante, que com suas sugestões tornaram o meu trabalho melhor.

A todos professores e funcionários do Departamento de Matemática da UnB que participaram de forma direta ou indiretamente da minha formação. Em especial à Cláudia e Marta por todo apoio na secretária de pós-graduação; aos professores Elves e Wang pela carta de recomendação para o ingresso no programa de doutorado e a professora Luciana pela carta de recomendação, pela orientação no programa de mestrado e por sempre ter me motivado para prosseguir com os estudos.

A Universidade Federal do Oeste da Bahia (UFOB) pelo afastamento integral concedido durante a elaboração deste trabalho.

A todos os funcionários do Centro de Ciências Exatas e das Tecnologias da UFOB. Em especial a secretária Uélida e os colegas da área de Matemática.

Aos professores da graduação Eudes, Daniel e Romes pela orientação, motivação e incentivo.

Finalmente a todos os meus amigos e amigos/colegas do programa de pós-graduação em matemática. Aos geômetras: Filipe, Valter, Lumena, Hiure, Benedito, Edwin, Hector Andreas, Laena, Welinton, Alancoc, Lucas, Márcio e Erikson pela ajuda e companheirismo. Aos amigos: Renata, Alan, Nathalia, Camila, Alex, Emerson, Lais, Dona Dejita, Diógens, Dênisson, Felipe Quintino, Léo, Delfim, Dilesmar, Wiliam, Weder, Roney, Raidoney, Alexandre, Lauro, Jaelton e Henrique pela amizade e apoio.

Dedicatória

Dedico este trabalho a minha filha Sara
e a minha esposa Grasielle.

Resumo

Estudamos os sólitons do fluxo redutor de curvas no espaço hiperbólico bidimensional e as soluções autossimilares do fluxo de curvatura e do fluxo de curvatura inversa no cone de luz bidimensional. No espaço hiperbólico, mostramos que uma curva é um sóliton do fluxo redutor de curvas se, e somente se, sua curvatura geodésica pode ser escrita como o produto interno entre o seu campo tangente e um vetor fixado do espaço de Minkowski tridimensional. Usamos essa caracterização do sóliton para fazer o estudo qualitativo. Mostramos que, para cada vetor fixado, existe uma família a 2-parâmetros de sólitons do fluxo redutor de curvas no espaço hiperbólico bidimensional. Além disso, provamos que cada sóliton é uma curva que está definida em toda reta, é mergulhada e sua curvatura geodésica converge para uma constante em cada fim. No cone de luz, provamos que existe uma relação entre as soluções do fluxo de curvatura e as soluções do fluxo de curvatura inversa. Mostramos que uma curva no cone de luz é uma solução autossimilar do fluxo de curvatura se, e somente se, sua função curvatura difere por uma constante do produto interno entre o seu campo tangente e um vetor fixado do espaço de Minkowski tridimensional. De modo análogo, provamos que uma curva no cone de luz é uma solução autossimilar do fluxo de curvatura inversa se, e somente se, o inverso da função curvatura difere por uma constante do produto interno entre o seu campo tangente e um vetor fixado do espaço de Minkowski tridimensional. Usando a caracterização das soluções autossimilares do fluxo de curvatura fizemos o estudo qualitativo. Provamos que, para cada vetor fixado existe uma família a 2-parâmetros de soluções autossimilares para o fluxo de curvatura e para o fluxo de curvatura inversa no cone de luz. Além disso, mostramos que nos fins de uma solução autossimilar do fluxo de curvatura em Q^2 a curvatura é ilimitada ou converge para uma constante. Incluímos visualizações de sólitons no espaço hiperbólico e de soluções autossimilares no cone de luz dos fluxos de curvatura e de curvatura inversa.

Palavras Chave: Fluxo Redutor de Curvas, Fluxo de Curvatura, Fluxo de Curvatura Inversa, Espaço Hiperbólico Bidimensional, Cone de Luz Bidimensional, Espaço de Minkowski, Isometrias.

Abstract

We study the solitons of the curve shortening flow on the 2-dimensional hyperbolic space and the self-similar solutions of the curvature flow and of the inverse curvature flow on the 2-dimensional light cone. On the hyperbolic space, we show that a curve is a soliton solution to the curve shortening flow if and only if its geodesic curvature can be written as the inner product between its tangent vector field and a fixed vector of the 3-dimensional Minkowski space. We use this characterization to provide a qualitative study of the solitons. We show that for each fixed vector there is a 2-parameter family of soliton solution to the curve shortening flow on the 2-dimensional hyperbolic space. Moreover, we prove that each soliton is defined on the entire real line, it is embedded and its geodesic curvature converges to a constant at each end. On the light cone, we prove that there exists a relationship between the solutions of the curvature flow and the solutions of the inverse curvature flow. We show that a curve on the light cone is a self-similar solution of the curvature flow if, only if, its curvature differs by constant of the inner product between its tangent vector field and a fixed vector of the 3-dimensional Minkowski space. Similarly, we prove that a curve on the light cone is a self-similar solution of the inverse curvature flow if, only if, the inverse curvature function differs by a constant of the inner product between its tangent vector field and a fixed vector of the 3-dimensional Minkowski space. We use the characterization of the self-similar solutions of the curvature flow to provide a qualitative study. We prove that, for each fixed vector there is a 2-parameters family of self-similar solutions of the curvature flow and of the inverse curvature flow on the light cone. Moreover, we show that at the ends of a self-similar solution of the curvature flow the curvature is unlimited or it converges to a constant. Some solitons on the hyperbolic space and some self-similar solutions of the curvature flow and of the inverse curvature flow on the light cone are visualized.

Keywords: Curve Shortening Flow, Curvature Flow, Inverse Curvature Flow, 2-Dimensional Hyperbolic Space, 2-Dimensional Light Cone, Minkowski Space, Isometry.

Sumário

| | |
|---|------------|
| Resumo | viii |
| Abstract | ix |
| Lista de Figuras | xii |
| Introdução | 1 |
| 1 Preliminares | 6 |
| 1.1 Espaço de Minkowski | 6 |
| 1.2 Curvas no Espaço Hiperbólico Bidimensional | 13 |
| 1.3 Curvas do Tipo Espaço no Cone de Luz | 15 |
| 2 Sólitons do Fluxo Redutor de Curvas em \mathbb{H}^2 | 24 |
| 2.1 Fluxo Redutor de Curvas em \mathbb{H}^2 | 25 |
| 2.2 Caracterização dos Sólitons do Fluxo FRC em \mathbb{H}^2 | 28 |
| 2.3 Descrição dos Sólitons do Fluxo FRC em \mathbb{H}^2 | 30 |
| 2.4 Exemplos de Sólitons do Fluxo FRC em \mathbb{H}^2 Visualizados | 60 |
| 3 Soluções Autossimilares do Fluxo de Curvatura e do Fluxo de Curvatura Inversa no Cone de Luz | 64 |
| 3.1 Fluxo de Curvatura e Fluxo de Curvatura Inversa em Q^2 | 65 |
| 3.2 Soluções Autossimilares dos Fluxos FC e FCI no Cone de Luz | 79 |
| 3.2.1 Solitons do Fluxo de Curvatura no Cone de Luz | 107 |
| 3.2.2 Soluções Autossimilares do Fluxo FC com Função de Homotetia Decrescente | 118 |
| 3.2.3 Soluções Autossimilares do Fluxo FC com Função de Homotetia Crescente | 126 |

| | |
|--|-----|
| 3.3 Soluções Autossimilares dos Fluxos FC e FCI Visualizados | 136 |
|--|-----|

| | |
|---------------------|------------|
| Bibliografia | 150 |
|---------------------|------------|

Lista de Figuras

| | | |
|------|--|-----|
| 2.1 | Conjuntos de condições iniciais que determinam os sólitons do fluxo FRC. | 34 |
| 2.2 | Interpretação geométrica de $\alpha(s)$ com $X(s)$ em \mathbb{H}^2 e vetor fixado $(-1, 0, 0)$. | 35 |
| 2.3 | Interpretação geométrica de $\alpha(s)$ com $X(s)$ em \mathbb{H}^2 e vetor fixado $(-1, 1, 0)$. | 36 |
| 2.4 | Interpretação geométrica de $\alpha(s)$ com $X(s)$ em \mathbb{H}^2 e vetor fixado $(0, 0, 1)$. | 37 |
| 2.5 | Sóliton do fluxo FRC com $a = 1$, vetor fixado $(0, 0, 1)$ e condição inicial $(0, 0, 1)$. | 50 |
| 2.6 | Sóliton do fluxo FRC em \mathbb{H}^2 com vetor fixado $(-1, 0, 0)$ e $a = 1$. | 61 |
| 2.7 | Sóliton do fluxo FRC em \mathbb{H}^2 no modelo do disco de Poincaré. | 61 |
| 2.8 | Sóliton do fluxo FRC em \mathbb{H}^2 no modelo do semiplano. | 61 |
| 2.9 | Sóliton do fluxo FRC em \mathbb{H}^2 com vetor fixado $(-1, 1, 0)$ e $a = 1$. | 62 |
| 2.10 | Sóliton do fluxo FRC em \mathbb{H}^2 no modelo do disco de Poincaré. | 62 |
| 2.11 | Sóliton do fluxo FRC em \mathbb{H}^2 no modelo do semiplano. | 62 |
| 2.12 | Sóliton do fluxo FRC em \mathbb{H}^2 com vetor fixado $(0, 0, 1)$ e $a = 1$. | 63 |
| 2.13 | Sóliton do fluxo FRC em \mathbb{H}^2 no modelo do disco de Poincaré. | 63 |
| 2.14 | Sóliton do fluxo FRC em \mathbb{H}^2 no modelo do semiplano. | 63 |
| 3.1 | Interpretação geométrica de $\alpha(s)$ com $X(s)$ em Q^2 e vetor fixado $(-1, 0, 0)$. | 87 |
| 3.2 | Interpretação geométrica de $\alpha(s)$ com X em Q^2 e vetor fixado $(-1, 1, 0)$. | 87 |
| 3.3 | Interpretação geométrica de $\alpha(s)$ com $X(s)$ em Q^2 e vetor fixado $(0, 0, 1)$. | 88 |
| 3.4 | Sóliton do fluxo FC em Q_-^2 com $c = 0$, $a = 1$ e vetor fixado $(-1, 0, 0)$. | 137 |
| 3.5 | Curvatura de um sóliton do fluxo FC em Q_-^2 com $c = 0$, $a = 1$ e vetor fixado $(-1, 0, 0)$. | 138 |
| 3.6 | Sóliton do FCI em Q_+^2 com $c = 0$, $a = 1$ e vetor fixado $(-1, 0, 0)$. | 138 |
| 3.7 | Sóliton do fluxo FCI em Q_-^2 com $c = 0$, $a = 1$ e vetor fixado $(-1, 1, 0)$. | 139 |
| 3.8 | Sóliton do fluxo FC em Q_+^2 com $c = 0$, $a = 1$ e vetor fixado $(-1, 1, 0)$. | 139 |

| | | |
|------|---|-----|
| 3.9 | Sóliton do fluxo FC em Q_-^2 com $c = 0$, $a = 1$ e vetor fixado $(0, 0, 1)$. . . | 140 |
| 3.10 | Curvatura de um sóliton do fluxo FC em Q_-^2 com $c = 0$, $a = 1$ e vetor fixado $(0, 0, 1)$ | 140 |
| 3.11 | Sóliton do fluxo FCI em Q_+^2 com $c = 0$, $a = 1$ e vetor fixado $(0, 0, 1)$. . . | 140 |
| 3.12 | Solução autossimilar do fluxo FC em Q_-^2 com $c = -\frac{1}{4}$, $a = \frac{1}{6}$ e vetor fixado $(-1, 0, 0)$ | 141 |
| 3.13 | Curvatura de uma solução autossimilar do fluxo FC em Q_-^2 com $c = -\frac{1}{4}$, $a = \frac{1}{6}$ e vetor fixado $(-1, 0, 0)$ | 141 |
| 3.14 | Solução autossimilar do fluxo FCI em Q_+^2 com $c = -\frac{1}{4}$, $a = \frac{1}{6}$ e vetor fixado $(-1, 0, 0)$ | 142 |
| 3.15 | Solução autossimilar do fluxo FC em Q_-^2 com $c = -\frac{1}{4}$, $a = 5$ e vetor fixado $(-1, 0, 0)$ | 142 |
| 3.16 | Curvatura de uma solução autossimilar do fluxo FC em Q_-^2 com $c = -\frac{1}{4}$, $a = 5$ e vetor fixado $(-1, 0, 0)$ | 143 |
| 3.17 | Solução autossimilar do fluxo FCI em Q_+^2 com $c = -\frac{1}{4}$, $a = 5$ e vetor fixado $(-1, 0, 0)$ | 143 |
| 3.18 | Solução autossimilar do fluxo FC em Q_-^2 com $c = -2$, $a = \frac{1}{2}$ e vetor fixado $(-1, 1, 0)$ | 144 |
| 3.19 | Curvatura de uma solução autossimilar do fluxo FC em Q_-^2 com $c = -2$, $a = \frac{1}{2}$ e vetor fixado $(-1, 1, 0)$ | 144 |
| 3.20 | Solução autossimilar do fluxo FCI em Q_+^2 com $c = -2$, $a = \frac{1}{2}$ e vetor fixado $(-1, 1, 0)$ | 144 |
| 3.21 | Solução autossimilar do fluxo FC em Q_-^2 com $c = -1$, $a = 1$ e vetor fixado $(0, 0, 1)$ | 145 |
| 3.22 | Curvatura de uma solução autossimilar do fluxo FC em Q_-^2 com $c = -1$, $a = 1$ e vetor fixado $(0, 0, 1)$ | 145 |
| 3.23 | Soluções autossimilares do fluxo FCI em Q_+^2 com $c = -1$, $a = 1$ e vetor fixado $(0, 0, 1)$ | 146 |
| 3.24 | Solução autossimilar do fluxo FC em Q_-^2 com $c = 4$, $a = 1$ e vetor fixado $(-1, 0, 0)$ | 146 |
| 3.25 | Curvatura de uma solução autossimilar do fluxo FC em Q_-^2 com $c = 4$, $a = 1$ e vetor fixado $(-1, 0, 0)$ | 147 |

| | | |
|------|--|-----|
| 3.26 | Soluções autossimilares do fluxo FCI em Q_+^2 com $c = 4$, $a = 1$ e vetor fixado $(-1, 0, 0)$ | 147 |
| 3.27 | Solução autossimilar do fluxo FC em Q_-^2 com $c = 4$, $a = 1$ e vetor fixado $(-1, 1, 0)$ | 148 |
| 3.28 | Curvatura de uma solução autossimilar do fluxo FC em Q_-^2 com $c = 4$, $a = 1$ e vetor fixado $(-1, 1, 0)$ | 148 |
| 3.29 | Soluções autossimilares do fluxo FCI em Q_+^2 com $c = 4$, $a = 1$ e vetor fixado $(-1, 1, 0)$ | 148 |
| 3.30 | Solução autossimilar do fluxo FC em Q_-^2 com $c = 3$, $a = 1$ e vetor fixado $(0, 0, 1)$ | 149 |
| 3.31 | Curvatura de uma solução do fluxo FC em Q_-^2 com $c = 3$, $a = 1$ e vetor fixado $(0, 0, 1)$ | 149 |
| 3.32 | Soluções autossimilares do fluxo FCI em Q_+^2 com $c = 3$, $a = 1$ e vetor fixado $(0, 0, 1)$ | 149 |

Introdução

Uma família de curvas $\hat{X}^t : I \rightarrow M$, $t \in [0, T)$, em uma variedade Riemanniana bidimensional M^2 é chamada solução para o *Fluxo Redutor de Curvas (FRC)* com condição inicial $\hat{X}^0(\cdot) = X(\cdot)$, se satisfaz a seguinte equação

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \hat{X}^t(\cdot) = \hat{k}^t(\cdot) \hat{N}^t(\cdot) \\ \hat{X}^0(\cdot) = X(\cdot), \end{cases} \quad (1)$$

onde $\hat{k}^t(\cdot)$ é a curvatura geodésica e $\hat{N}^t(\cdot)$ é o campo unitário normal a $\hat{X}^t(\cdot)$ para cada $t \in [0, T)$. Epstein e Gage [8] mostraram que quando $M^2 = \mathbb{R}^2$, o FRC permanece geometricamente inalterado se adicionarmos componentes tangenciais ao segundo membro da equação diferencial (1). Dessa maneira, pode-se definir que uma família a um parâmetro de curvas $\hat{X}^t : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, $t \in [0, T)$ é solução para o FRC em \mathbb{R}^2 com condição inicial $\hat{X}^0(\cdot) = X(\cdot)$, se satisfaz,

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial t} \hat{X}^t(\cdot), \hat{N}^t(\cdot) \right\rangle = \hat{k}^t(\cdot), \quad (2)$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é o produto interno canônico de \mathbb{R}^2 , $\hat{k}^t(\cdot)$ é a curvatura e $\hat{N}^t(\cdot)$ é o campo unitário normal a $\hat{X}^t(\cdot)$ para cada $t \in [0, T)$. O nome redutor de curvas é justificado pelo fato de que, quando as curvas da família \hat{X}^t são fechadas, o comprimento das curvas decresce ao longo do fluxo, isto é, o fluxo é do tipo gradiente para o funcional comprimento de arco. Grayson [15] observou que o fluxo redutor de curvas também é conhecido como *fluxo pela curvatura* ou *fluxo do calor em imersões isométricas*.

Segundo Epstein e Gage [8], a motivação original para o estudo da equação (1) foi encontrar uma nova e talvez mais natural prova da existência de geodésicas fechadas em variedades Riemannianas. Porém, o primeiro trabalho nessa direção foi feito por Grayson [16] em 1989. Mas antes disso, vários autores estudaram a equação (1) para

o plano Euclidiano, como por exemplo, [1], [9], [10], [11], [13] e [15].

Uma classe de soluções do fluxo redutor de curvas muito importante e fundamental para estudo do fluxo em geral, são as curvas que evoluem por isometrias e/ou homotetias. Uma solução desta classe é chamada de *solução autossimilar do fluxo*. Além disso, quando a evolução é apenas por isometrias recebe o nome de *sóliton*. No plano Euclidiano, as retas não são afetadas pelo fluxo e são consideradas soluções triviais. Os círculos evoluem homoteticamente em tempo finito para um ponto. A curva chamada *Grim Reaper* dada pelo gráfico da função $f(s) = \ln(\cos(s))$ admite evolução por translações. Giga [14], provou que a *Grim Reaper* é a única curva que evolui por translações no plano. Outro exemplo de evolução por isometrias no plano é a espiral de *yin-yang*. Abresch e Langer [1], Epstein e Weinstein [9] estudaram as curvas fechadas não necessariamente simples que evoluem por homotetias. Halldorsson [17] concluiu a descrição de todas as soluções autossimilares do plano.

Alguns autores estudaram classes específicas de soluções do fluxo redutor de curvas no plano e provaram que a evolução torna-se autossimilar para algum tempo t . Inicialmente, Gage [10] [11], mostrou que curvas convexas e fechadas em \mathbb{R}^2 evoluem para curvas circulares em algum tempo t . Em seguida, Gage e Hamilton [13] mostraram que curvas fechadas e convexas colapsam em um ponto. Grayson [15] provou que curvas fechadas e mergulhadas evoluem para curvas circulares em algum tempo t e colapsam em um ponto para tempo finito. Além disso, Angenent [3], mostrou que, numa condição mais geral o fluxo redutor de curvas em certo sentido torna-se autossimilar ao longo da evolução, reforçando a importância das soluções autossimilares.

Cabe ressaltar que, quando o espaço ambiente não é o plano euclidiano há poucos trabalhos sobre soluções autossimilares desse fluxo. Halldorsson [18] em 2015, classificou todas as soluções autossimilares do plano de Minkowski. Dos Reis e Tenenblat [6] caracterizaram e descreveram todos os sólitos da esfera \mathbb{S}^2 .

Os artigos [13], [16], [23] e [30] entre outros, estudaram o fluxo redutor de curvas em variedades Riemannianas diferentes do plano. Angenent, [4] usou o fluxo para estudar a topologia de geodésicas fechadas de superfícies compactas.

Ao longo dos anos 90, surgiu também o interesse em estudar outros fluxos na direção do vetor curvatura no plano Euclidiano. De modo geral, a função $k(s, t)$ da equação (1), foi substituída por uma função $F(k(s, t))$. Urbas em [28] e [29] estudou

para $F(k(s, t)) = \frac{1}{k^\alpha(s, t)}$, $\alpha > 0$. Andrews [2] usou $F(k(s, t)) = \frac{1}{\alpha}k^\alpha(s, t)$, $\alpha \neq 0$. Em [7], Drugan *et. al.* estudaram o caso para $F(k(s, t)) = -\frac{1}{k(s, t)}$. Usando $F(k(s, t)) = -\frac{1}{k(s, t)}$, Andrews [2] provou que, soluções simples e fechadas em \mathbb{R}^2 que evoluem por homotetias são apenas os círculos e Drugan *et. al.* [7] estudaram as soluções em \mathbb{R}^2 que evoluem por translações.

Neste trabalho vamos estudar fluxos de curvas no espaço hiperbólico bidimensional $\mathbb{H}^2 \subset \mathbb{R}_1^3$ e no cone de luz $Q^2 \subset \mathbb{R}_1^3$, onde \mathbb{R}_1^3 é o espaço Minkowski tridimensional. Observe que, uma curva $X : I \rightarrow \mathbb{H}^2$ parametrizada pelo comprimento de arco $s \in I$ é caracterizada por um triedro associado $\{X(s), T(s), N(s)\}$ em \mathbb{R}_1^3 , onde $T(s)$ é o campo unitário tangente a $X(s)$ e $N(s)$ é o campo unitário normal a $X(s)$. Em [20], uma curva do tipo espaço $X : I \rightarrow Q^2$ parametrizada pelo comprimento de arco $s \in I$ é caracterizada por um triedro associado $\{X(s), T(s), Y(s)\}$ em \mathbb{R}_1^3 , onde $T(s)$ é o campo unitário tangente a $X(s)$ e $Y(s)$ é um campo do tipo luz ortogonal ao $T(s)$, associado a $X(s)$ e unicamente determinado.

Dizemos que uma família a um parâmetro de curvas $\hat{X}^t(u) = \hat{X}(u, t)$, $\hat{X} : I \times J \rightarrow \mathbb{H}^2$, $(u, t) \in I \times J$ é solução para o FRC em \mathbb{H}^2 com condição inicial $X(u)$, se $\hat{X}^0(u) = X(u)$ e

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial t} \hat{X}(u, t), \hat{N}(u, t) \right\rangle = \hat{k}(u, t),$$

onde $\hat{N}(u, t)$ é o campo unitário normal a $\hat{X}^t(u)$ e $\hat{k}(u, t)$ é a curvatura da curva $\hat{X}^t(u)$ para cada $t \in J$.

De maneira similar, uma família a um parâmetro de curvas no cone de luz $\hat{X}^t(u) = \hat{X}(u, t)$, $\hat{X} : I \times J \rightarrow Q^2$, $(u, t) \in I \times J$ é solução para o fluxo curvatura (FC) (resp. fluxo curvatura inversa (FCI)) em Q^2 com condição inicial $X(u)$, se $\hat{X}^0(u) = X(u)$ e

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial t} \hat{X}(u, t), \hat{Y}(u, t) \right\rangle = \hat{k}(u, t) \quad \left(\text{resp.} \quad \left\langle \frac{\partial}{\partial t} \hat{X}(u, t), \hat{Y}(u, t) \right\rangle = -\frac{1}{\hat{k}(u, t)} \right),$$

onde $\hat{Y}(u, t)$ é o campo do tipo luz associado a $\hat{X}^t(u)$ e $\hat{k}(u, t)$ é a curvatura da curva $\hat{X}^t(u)$ para cada $t \in J$.

Neste trabalho temos dois objetivos: estudar os sólitons do FRC em \mathbb{H}^2 e as soluções autossimilares dos fluxos FC e FCI em Q^2 .

Para o \mathbb{H}^2 , usamos o modelo do hiperboloide de \mathbb{R}_1^3 . Provamos no Teorema 2.2.1 que, uma curva em $\mathbb{H}^2 \subset \mathbb{R}_1^3$ é um sóliton para o FRC se, e somente se, sua curvatura pode ser escrita como o produto interno entre seu campo tangente e um vetor não nulo de \mathbb{R}_1^3 . Utilizando esta caracterização verificamos que, obter os sólitons em \mathbb{H}^2 corresponde a estudar as soluções de um sistema de equações diferenciais ordinárias (ver Proposição 2.3.1 e Proposição 2.3.2). No Teorema 2.3.28, provamos que, para cada vetor não nulo de \mathbb{R}_1^3 , existe uma família a dois parâmetro de sólitons para o FRC em \mathbb{H}^2 . Descrevemos todos os sólitons e mostramos que cada sóliton é uma curva completa, mergulhada cuja função curvatura converge para uma constante em cada um dos seus fins.

O cone de luz $Q^2 \subset \mathbb{R}_1^3$ é uma superfície degenerada. Liu [20] definiu a curvatura para uma curva do tipo espaço em Q^2 . Essa curvatura mede o quanto uma curva em Q^2 deixa de ser uma parábola. Quando a curvatura é constante e positiva a curva é uma hipérbole e quando a curvatura é constante e negativa a curva é uma elipse.

No cone de luz, observamos que as soluções homotéticas dos fluxos FC e FCI são apenas as elipses e as hipérbolas. Considerando curvas $X(s)$ em Q^2 cuja curvatura não se anula, verificamos que, estudar as soluções do fluxo FC é equivalente a estudar as soluções do fluxo FCI. Provamos no Teorema 3.1.10 (resp. 3.1.11) que uma curva $X(s)$ em Q^2 é uma solução autossimilar do FC (resp. FCI) se, e somente se, sua curvatura $k(s)$ (resp. $-\frac{1}{k(s)}$, $k(s) \neq 0$) pode ser escrita a menos de uma constante c como o produto interno entre seu campo tangente e um vetor não nulo de \mathbb{R}_1^3 . Usando essa caracterização mostramos que, obter soluções autossimilares do fluxo FC em Q^2 corresponde a estudar um sistema de equações diferenciais ordinárias que admite condições iniciais em três conjuntos disjuntos do \mathbb{R}^3 . Provamos três resultados de existência de soluções autossimilares do fluxo FC em Q^2 , mais precisamente.

Provamos no Teorema 3.2.29 que, dado um vetor não nulo $v \in \mathbb{R}_1^3$ existe uma família a dois parâmetros de sólitons do fluxo FC em Q^2 . Mostramos no Teorema 3.2.40 que, para cada constante $c < 0$, dado um vetor não nulo $v \in \mathbb{R}_1^3$ existe uma família a dois parâmetros de soluções autossimilares do fluxo FC em Q^2 . Provamos no Teorema 3.2.51 que, para cada constante $c > 0$, dado um vetor não nulo $v \in \mathbb{R}_1^3$ existe uma família a dois parâmetros de soluções autossimilares do fluxo FC em Q^2 .

Além disso, descrevemos o comportamento de todas as soluções autossimilares

do fluxo FC e mostramos que a curvatura converge para uma constante ou é ilimitada em cada fim da curva. Observamos também que, quando a curvatura é ilimitada em algum fim da curva, isso significa que a curva é assintótica a uma reta de Q^2 neste fim.

Organizamos este trabalho em três capítulos da seguinte maneira.

No primeiro capítulo, incluímos alguns tópicos importantes para os capítulos 2 e 3, tais como o espaço de Minkowski, as isometrias que fixam o cone de luz e mostramos algumas propriedades de uma família a 1-parâmetro de isometrias. Apresentamos as curvas em \mathbb{H}^2 no modelo do hiperboloide e provamos um teorema de existência e unicidade para curvas em \mathbb{H}^2 . Por fim, consideramos curvas no cone de luz e também mostramos um teorema de existência e unicidade para curvas do tipo espaço em Q^2 .

No segundo capítulo, trabalhamos com os sólitons do fluxo FRC em \mathbb{H}^2 . Apresentamos uma condição necessária e suficiente para que uma curva em \mathbb{H}^2 seja um sóliton para o FRC em \mathbb{H}^2 . Relacionamos os sólitons com um sistema de equações diferenciais ordinárias. Descrevemos todos os sólitons do fluxo FRC em \mathbb{H}^2 através de uma série de lemas extraídos do sistema de equações diferenciais ordinárias. Além disso, apresentamos alguns gráficos de sólitons do fluxo FRC em \mathbb{H}^2 .

No terceiro capítulo, estudamos as soluções autossimilares do fluxo de curvatura e do fluxo de curvatura inversa no cone de luz. Mostramos uma relação entre as soluções autossimilares do fluxo FC em Q^2 e as soluções autossimilares do fluxo FCI em Q^2 . Apresentamos uma condição necessária e suficiente para que uma curva de Q^2 seja uma solução autossimilar do fluxo de curvatura ou do fluxo de curvatura inversa em Q^2 . Relacionamos as soluções autossimilares do fluxo de curvatura ou do fluxo de curvatura inversa com um sistema de equações diferenciais ordinárias. Descrevemos todas as soluções autossimilares do fluxo de curvatura em Q^2 por meio de vários lemas extraídos do sistema de equações diferenciais ordinárias. Além disso, apresentamos alguns gráficos de soluções autossimilares para o FC e para o FCI em Q^2 .

Brasília, 23 de Outubro, 2020

Fábio Nunes da Silva

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo apresentaremos os conceitos e referências necessários para o desenvolvimento de todo o trabalho.

Na primeira seção, usando como base O'Neill [24] relembremos o espaço de Minkowski tridimensional, o espaço hiperbólico bidimensional no modelo de Minkowski, o cone de luz e concluiremos com enfoque nas isometrias que fixam o Espaço Hiperbólico e o cone de luz.

Na segunda seção, mostraremos alguns fatos básicos de curvas em \mathbb{H}^2 e o teorema de existência e unicidade.

Na terceira seção, tendo como referência [20] apresentaremos alguns fatos básicos sobre curvas no cone de luz e também um teorema de existência e unicidade para curvas.

1.1 Espaço de Minkowski

O espaço de Minkowski tridimensional pode ser definido da seguinte maneira.

Definição 1.1.1 *O espaço de Minkowski é o par $\mathbb{R}_1^3 = (\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, onde \mathbb{R}^3 é o espaço vetorial tridimensional e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é a métrica de Minkowski, i.e, dados $v = (v_1, v_2, v_3)$ e $w = (w_1, w_2, w_3)$, $\langle v, w \rangle = -v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3$.*

A métrica de Minkowski não é definida positiva e pode assumir qualquer valor real. Assim, classificamos os vetores de acordo com a seguinte definição.

Definição 1.1.2 *Um vetor $v \in \mathbb{R}_1^3$ é chamado *do tipo espaço* (respectivamente *do tipo tempo e do tipo luz*), se $\langle v, v \rangle > 0$ ou $v = 0$ (respectivamente $\langle v, v \rangle < 0$ e $\langle v, v \rangle = 0$ com $v \neq 0$). O número $|v| = \sqrt{|\langle v, v \rangle|}$ é chamado *norma do vetor* v .*

De modo similar como foram classificados os vetores, também classificamos os planos e superfícies em \mathbb{R}_1^3 , isto é, um subespaço $U \subset \mathbb{R}_1^3$ é chamada *do tipo espaço* (resp. *do tipo luz e do tipo tempo*), se a métrica de Minkowski induzida neste subespaço é definida positiva (resp. degenerada e não degenerada). Uma superfície regular $M \subset \mathbb{R}_1^3$ é chamada *do tipo espaço* (resp. *do tipo luz e do tipo tempo*), se para cada $p \in M$, o plano tangente de M em p , T_pM é *do tipo espaço* (resp. *do tipo luz e do tipo tempo*).

O espaço hiperbólico bidimensional e o cone de luz, que serão utilizados como espaços ambiente no nosso trabalho, podem ser definidos da seguinte maneira.

Definição 1.1.3 1. O espaço hiperbólico bidimensional é a superfície do tipo espaço dada pelo conjunto

$$\mathbb{H}^2 := \{p = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}_1^3 : p_1 > 0 \text{ e } \langle p, p \rangle = -1\}.$$

2. O cone de luz bidimensional é a superfície do tipo luz dada pelo conjunto

$$Q^2 := \{p \in \mathbb{R}_1^3 \setminus \{0\} : \langle p, p \rangle = 0\}.$$

Um dos objetivos do trabalho é estudar fluxos de curvas que evoluem por isometrias em \mathbb{H}^2 e Q^2 . O conjunto das isometrias de \mathbb{H}^2 e Q^2 (ver [24] por exemplo) é o grupo dado por $O_1(3) = \{M \in GL(3, \mathbb{R}) : M^T \epsilon M = \epsilon\}$, onde M^T é transposta de M e

$$\epsilon = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Além disso, se $M \in O_1(3)$, então M preserva bases ortonormais de \mathbb{R}_1^3 . O conjunto $O_1(3)$ é um Grupo de Lie com quatro componentes conexas, mas para o estudo dos fluxos que evoluem por isometrias considera-se apenas a componente conexa que contém a matriz identidade, pois precisamos de famílias a 1-parâmetro de isometrias $(M(t))_{t \in \mathbb{R}}$ diferenciáveis tais que $M(0) = Id$. Para toda matriz na componente conexa que contém a identidade, que denotamos por, $O_1^+(3)$, o determinante é igual 1. Em [5] pode ser encontrada a demonstração de que cada elemento de $O_1^+(3)$ diferente da identidade tem um único autovalor igual 1, isto é, qualquer matriz do conjunto fixa ponto a ponto

uma reta do espaço \mathbb{R}_1^3 que passa pela origem. Do exposto acima, temos que, cada uma das matrizes M_1 , M_2 e M_3 dadas a seguir, representadas na base canônica de \mathbb{R}^3 , fixa os pontos de uma reta que passa pela origem.

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi_1) & \text{sen}(\varphi_1) \\ 0 & -\text{sen}(\varphi_1) & \cos(\varphi_1) \end{pmatrix} \text{ fixa a reta de direção do tipo tempo } (1,0,0),$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 + \frac{(\varphi_2)^2}{2} & -\frac{(\varphi_2)^2}{2} & \varphi_2 \\ \frac{(\varphi_2)^2}{2} & 1 - \frac{(\varphi_2)^2}{2} & \varphi_2 \\ \varphi_2 & -\varphi_2 & 1 \end{pmatrix} \text{ fixa a reta de direção do tipo luz } (1,1,0) \text{ e}$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} \cosh(\varphi_3) & \sinh(\varphi_3) & 0 \\ \sinh(\varphi_3) & \cosh(\varphi_3) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ fixa a reta de direção do tipo espaço } (0,0,1) .$$

Segue do exposto acima que uma família a 1-parâmetro de isometrias $(M(t))_{t \in \mathbb{R}}$, $M(0) = Id$ pode ser representada como a composição de isometrias da seguinte maneira.

$$M(t) = M_1(t)M_2(t)M_3(t), \quad (1.1)$$

onde

$$M_1(t) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi_1(t)) & \text{sen}(\varphi_1(t)) \\ 0 & -\text{sen}(\varphi_1(t)) & \cos(\varphi_1(t)) \end{pmatrix},$$

$$M_2(t) := \begin{pmatrix} 1 + \frac{(\varphi_2(t))^2}{2} & -\frac{(\varphi_2(t))^2}{2} & \varphi_2(t) \\ \frac{(\varphi_2(t))^2}{2} & 1 - \frac{(\varphi_2(t))^2}{2} & \varphi_2(t) \\ \varphi_2(t) & -\varphi_2(t) & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.2)$$

$$M_3(t) := \begin{pmatrix} \cosh(\varphi_3(t)) & \sinh(\varphi_3(t)) & 0 \\ \sinh(\varphi_3(t)) & \cosh(\varphi_3(t)) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$\varphi_i(0) = 0$ e $i = 1, 2, 3$.

A seguir vamos mostrar algumas propriedades das isometrias $M_i(t)$.

Proposição 1.1.4 *Seja $M(t)$ uma família de isometrias como na equação (1.1), então*

$$\langle M'(0)X, Y \rangle = \langle X \times Y, v_0 \rangle$$

para todo $X, Y \in \mathbb{R}_1^3$, onde $v_0 = (-\varphi'_1(0) - \varphi'_2(0), -\varphi'_2(0), \varphi'_3(0))$.

Demonstração: Vamos escrever $X = (x_1, x_2, x_3)$, $Y = (y_1, y_2, y_3)$, então

$$X \times Y = (-(x_2y_3 - y_2x_3), -(x_1y_3 - y_1x_3), (x_1y_2 - y_1x_2)).$$

Derivando $M(t)$ em relação a t , obtemos que

$$M'(t) = M'_1(t)M_2(t)M_3(t) + M_1(t)M'_2(t)M_3(t) + M_1(t)M_2(t)M'_3(t).$$

Tomando $(M'(t))$ em $t = 0$, temos que

$$\begin{aligned} M'(0)X &= (M'_1(0) + M'_2(0) + M'_3(0))X \\ &= \left[\varphi'_1(0) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \varphi'_2(0) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right. \\ &\quad \left. + \varphi'_3(0) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \varphi'_3(0) & \varphi'_2(0) \\ \varphi'_3(0) & 0 & \varphi'_1(0) + \varphi'_2(0) \\ \varphi'_2(0) & -(\varphi'_1(0) + \varphi'_2(0)) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ &= (\varphi'_3(0)x_2 + \varphi'_2(0)x_3, \varphi'_3(0)x_1 + [\varphi'_1(0) + \varphi'_2(0)]x_3, \\ &\quad \varphi'_2(0)x_1 - [\varphi'_1(0) + \varphi'_2(0)]x_2) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \langle M'(0)X, Y \rangle &= -[\varphi'_3(0)x_2 + \varphi'_2(0)x_3]y_1 + \{\varphi'_3(0)x_1 + [\varphi'_1(0) + \varphi'_2(0)]x_3\}y_2 \\ &\quad + \{\varphi'_2(0)x_1 - [\varphi'_1(0) + \varphi'_2(0)]x_2\}y_3 \\ &= [\varphi'_1(0) + \varphi'_2(0)](x_3y_2 - x_2y_3) + \varphi'_2(0)[x_1y_3 - x_3y_1] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\varphi'_3(0)[x_1y_2 - x_2y_1] \\
= & -[-\varphi'_1(0) - \varphi'_2(0)](x_3y_2 - x_2y_3) - \varphi'_2(0)[-x_1y_3 + x_3y_1] \\
& +\varphi'_3(0)[x_1y_2 - x_2y_1] \\
= & \langle (-\varphi'_1(0) - \varphi'_2(0), -\varphi'_2(0), \varphi'_3(0)), (-(x_2y_3 - x_3y_2), \\
& -(x_1y_3 - x_3y_1), (x_1y_2 - x_2y_1)) \rangle \\
= & \langle -\varphi'_1(0) - \varphi'_2(0), -\varphi'_2(0), \varphi'_3(0), X \times Y \rangle.
\end{aligned}$$

Tomando $v_0 = (-\varphi'_1(0) - \varphi'_2(0), -\varphi'_2(0), \varphi'_3(0))$, segue o resultado. ■

Proposição 1.1.5 *Sejam $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (1, 1, 0)$ e $v_3 = (0, 0, -1)$. Para $M_1(t)$, $M_2(t)$, $M_3(t)$, $t \in \mathbb{R}$ como na equação (1.2), tem-se*

$$\langle M'_i(t)X, M_i(t)Y \rangle = -\varphi'_i(t)\langle X \times Y, v_i \rangle$$

para todo $X, Y \in \mathbb{R}_1^3$ e para cada $i = 1, 2, 3$.

Demonstração: A prova é feita fixando cada $M_i(t)$ com $i = 1, 2, 3$. Vamos escrever $X = (x_1, x_2, x_3)$, $Y = (y_1, y_2, y_3)$, então

$$X \times Y = (-(x_2y_3 - y_2x_3), -(x_1y_3 - y_1x_3), (x_1y_2 - y_1x_2)).$$

Quando $i = 1$, temos que

$$\begin{aligned}
M_1(t)Y &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi_1(t)) & \text{sen}(\varphi_1(t)) \\ 0 & -\text{sen}(\varphi_1(t)) & \cos(\varphi_1(t)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \\
&= (y_1, y_2\cos(\varphi_1(t)) + y_3\text{sen}(\varphi_1(t)), -y_2\text{sen}(\varphi_1(t)) + y_3\cos(\varphi_1(t)))
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
M_1'(t)X &= \varphi_1'(t) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\text{sen}(\varphi_1(t)) & \text{cos}(\varphi_1(t)) \\ 0 & -\text{cos}(\varphi_1(t)) & -\text{sen}(\varphi_1(t)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\
&= \varphi_1'(t)(0, -x_2\text{sen}(\varphi_1(t)) + x_3\text{cos}(\varphi_1(t)), -x_2\text{cos}(\varphi_1(t)) - x_3\text{sen}(\varphi_1(t))).
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\langle M_1(t)Y, M_1'(t)X \rangle &= \varphi_1'(t) \{ [y_2\text{cos}(\varphi_1(t)) + y_3\text{sen}(\varphi_1(t))] [-x_2\text{sen}(\varphi_1(t)) + \\
&\quad + x_3\text{cos}(\varphi_1(t))] + [-y_2\text{sen}(\varphi_1(t)) + y_3\text{cos}(\varphi_1(t))] \cdot \\
&\quad \cdot [-x_2\text{cos}(\varphi_1(t)) - x_3\text{sen}(\varphi_1(t))] \} \\
&= \varphi_1'(t) \{ -x_2y_2\text{cos}(\varphi_1(t))\text{sen}(\varphi_1(t)) + y_2x_3\text{cos}^2(\varphi_1(t)) + \\
&\quad - y_3x_2\text{sen}^2(\varphi_1(t)) + x_3y_3\text{cos}(\varphi_1(t))\text{sen}(\varphi_1(t)) + \\
&\quad + x_2y_2\text{cos}(\varphi_1(t))\text{sen}(\varphi_1(t)) + y_2x_3\text{sen}^2(\varphi_1(t)) + \\
&\quad - y_3x_2\text{cos}^2(\varphi_1(t)) - x_3y_3\text{cos}(\varphi_1(t))\text{sen}(\varphi_1(t)) \} \\
&= \varphi_1'(t) [(y_2x_3 - y_3x_2)\text{sen}^2(\varphi_1(t)) \\
&\quad + (y_2x_3 - y_3x_2)\text{cos}^2(\varphi_1(t))] \\
&= \varphi_1'(t)(y_2x_3 - y_3x_2) \\
&= -\varphi_1'(t)\langle X \times Y, (1, 0, 0) \rangle.
\end{aligned}$$

Para $i = 2$,

$$\begin{aligned}
M_2(t)Y &= \begin{pmatrix} 1 + \frac{[\varphi_2(t)]^2}{2} & -\frac{[\varphi_2(t)]^2}{2} & \varphi_2(t) \\ \frac{[\varphi_2(t)]^2}{2} & 1 - \frac{[\varphi_2(t)]^2}{2} & \varphi_2(t) \\ \varphi_2(t) & -\varphi_2(t) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \\
&= \left(y_1 \left(1 + \frac{[\varphi_2(t)]^2}{2} \right) - y_2 \frac{[\varphi_2(t)]^2}{2} + y_3\varphi_2(t), y_1 \frac{[\varphi_2(t)]^2}{2} + \right. \\
&\quad \left. + y_2 \left(1 - \frac{[\varphi_2(t)]^2}{2} \right) + y_3\varphi_2(t), (y_1 - y_2)\varphi_2(t) + y_3 \right)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
M'_2(t)X &= \varphi'_2(t) \begin{pmatrix} \varphi_2(t) & -\varphi_2(t) & 1 \\ \varphi_2(t) & -\varphi_2(t) & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\
&= \varphi'_2(t) (x_1\varphi_2(t) - x_2\varphi_2(t) + x_3, x_1\varphi_2(t) - x_2\varphi_2(t) + x_3, x_1 - x_2) \\
&= \varphi'_2(t) [(x_1 - x_2)\varphi_2(t) + x_3, (x_1 - x_2)\varphi_2(t) + x_3, x_1 - x_2].
\end{aligned}$$

Assim, seja $h(t) = (x_1 - x_2)\varphi_2(t) + x_3$, obtemos que

$$\begin{aligned}
\langle M'_2(t)X, M_2(t)Y \rangle &= \varphi'_2(t) \left[-h \left(y_1 \left(1 + \frac{[\varphi_2(t)]^2}{2} \right) - y_2 \frac{[\varphi_2(t)]^2}{2} + y_3\varphi_2(t) \right) + \right. \\
&\quad \left. + h \left(y_1 \frac{[\varphi_2(t)]^2}{2} + y_2 \left(1 - \frac{[\varphi_2(t)]^2}{2} \right) + y_3\varphi_2(t) \right) \right] + \\
&\quad + \varphi'_2(t)(x_1 - x_2)[(y_1 - y_2)\varphi_2(t) + y_3] \\
&= \varphi'_2(t) \{ h(y_2 - y_1) + [(y_1 - y_2)\varphi_2(t) + y_3](x_1 - x_2) \} \\
&= \varphi'_2(t) \{ [(x_1 - x_2)\varphi_2(t) + x_3](y_2 - y_1) + \\
&\quad + [(y_1 - y_2)\varphi_2(t) + y_3](x_1 - x_2) \} \\
&= \varphi'_2(t) [-y_3(x_2 - x_1) + x_3(y_2 - y_1)] \\
&= \varphi'_2(t) [(-x_2y_3 + x_3y_2) + (-x_3y_1 + x_1y_3)] \\
&= -\varphi'_2(t) \langle X \times Y, (1, 1, 0) \rangle.
\end{aligned}$$

Finalmente, para $i = 3$ temos que

$$\begin{aligned}
M_3(t)Y &= \begin{pmatrix} \cosh(\varphi_3(t)) & \sinh(\varphi_3(t)) & 0 \\ \sinh(\varphi_3(t)) & \cosh(\varphi_3(t)) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \\
&= (y_1 \cosh(\varphi_3(t)) + y_2 \sinh(\varphi_3(t)), y_1 \sinh(\varphi_3(t)) + y_2 \cosh(\varphi_3(t)), y_3)
\end{aligned}$$

e

$$M'_3(t)X = \varphi'_3(t) \begin{pmatrix} \sinh(\varphi_3(t)) & \cosh(\varphi_3(t)) & 0 \\ \cosh(\varphi_3(t)) & \sinh(\varphi_3(t)) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$= \varphi_3'(t) (x_1 \sinh(\varphi_3(t)) + x_2 \cosh(\varphi_3(t)), \\ x_1 \cosh(\varphi_3(t)) + x_2 \sinh(\varphi_3(t)), 0).$$

Assim,

$$\begin{aligned} \langle M_3(t)Y, M_3'(t)X \rangle &= -\varphi_3'(t)[y_1 \cosh(\varphi_3(t)) + y_2 \sinh(\varphi_3(t))][x_1 \sinh(\varphi_3(t)) + \\ &\quad + x_2 \cosh(\varphi_3(t))] + \varphi_3'(t)[y_1 \sinh(\varphi_3(t)) + y_2 \cosh(\varphi_3(t))] \cdot \\ &\quad \cdot [x_1 \cosh(\varphi_3(t)) + x_2 \sinh(\varphi_3(t))] \\ &= \varphi_3'(t) [-x_1 y_1 \sinh(\varphi_3(t)) \cosh(\varphi_3(t)) - y_1 x_2 \cosh^2(\varphi_3(t)) + \\ &\quad - y_2 x_1 \sinh^2(\varphi_3(t)) - x_2 y_2 \sinh(\varphi_3(t)) \cosh(\varphi_3(t)) + \\ &\quad + x_1 y_1 \sinh(\varphi_3(t)) \cosh(\varphi_3(t)) + y_1 x_2 \sinh^2(\varphi_3(t)) + \\ &\quad + y_2 x_1 \cosh^2(\varphi_3(t)) + x_2 y_2 \sinh(\varphi_3(t)) \cosh(\varphi_3(t))] \\ &= \varphi_3'(t) ((x_2 y_1 - x_1 y_2) \sinh^2(\varphi_3(t)) + \\ &\quad + (x_1 y_2 - x_2 y_1) \cosh^2(\varphi_3(t))) \\ &= \varphi_3'(t) (x_1 y_2 - x_2 y_1) \\ &= -\varphi_3'(t) \langle X \times Y, (0, 0, -1) \rangle \end{aligned}$$

que conclui a demonstração. ■

1.2 Curvas no Espaço Hiperbólico Bidimensional

Nesta seção apresentamos definições e alguns resultados sobre curvas em \mathbb{H}^2 usando o modelo do espaço de Minkowski exposto na Definição 1.1.3.

Definição 1.2.1 Uma *curva parametrizada regular* em \mathbb{H}^2 é uma imersão diferenciável $X : I \rightarrow \mathbb{H}^2$, definida sobre um intervalo dos números reais $I \subset \mathbb{R}$ tal que $X'(u) \neq 0$ para todo $u \in I$.

A menos que mencionemos o contrário, ao longo do trabalho consideramos X em \mathbb{H}^2 uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco s .

Seja $X : I \rightarrow \mathbb{H}^2$ uma curva parametrizada regular. O *triedro* de X é o conjunto de vetores $\{X(s), T(s), N(s)\}$ para cada $s \in I$, onde $X(s)$ é o vetor posição, $T(s) =$

$X'(s)$ é o vetor tangente à curva e $N(s) = X(s) \times T(s)$. Os vetores $T(s)$ e $N(s)$ para cada $s \in I$ são do tipo espaço. O triedro é ortonormal e $X(s)$ um vetor tipo tempo para cada $s \in I$. A função que mede o quanto uma curva deixa de ser uma geodésica é definida a seguir.

Definição 1.2.2 A *curvatura (geodésica)* para uma curva regular $X(s)$ em \mathbb{H}^2 é a função $k : I \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $k(s) = \langle T'(s), N(s) \rangle$.

O triedro $\{X(s), T(s), N(s)\}$ satisfaz as equações

$$\begin{cases} X'(s) = T(s), \\ T'(s) = k(s)N(s) + X(s), \\ N'(s) = -k(s)T(s). \end{cases} \quad (1.3)$$

O próximo resultado é o teorema de existência e unicidade para curvas em \mathbb{H}^2 para uma dada função curvatura.

Teorema 1.2.3 Dada uma função $k : I \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável, $s \in I$, existe uma curva parametrizada regular $X : I \rightarrow \mathbb{H}^2$ tal que s é o parâmetro de comprimento de arco e $k = k(s)$ é a função curvatura da curva. Qualquer outra curva \bar{X} em \mathbb{H}^2 com a mesma função curvatura, difere de X por uma isometria, i.e., existe uma isometria M de \mathbb{H}^2 tal que $\bar{X} = MX$.

Demonstração:

Existência: Note que o sistema de equações (1.3) pode ser visto como um sistema de equações diferenciais ordinárias em $I \times \mathbb{R}^9$,

$$\begin{cases} x'_i(s) = t_i(s), \\ t'_i(s) = k(s)n_i(s) + x_i(s), \\ n'_i(s) = -k(s)t_i(s), \end{cases}$$

$i = 1, 2, 3$, onde $X(s) = (x_1(s), x_2(s), x_3(s))$, $T(s) = (t_1(s), t_2(s), t_3(s))$ e $N(s) = (n_1(s), n_2(s), n_3(s))$. Assim, pelo teorema de existência e unicidade para equações diferenciais ordinárias, dado três vetores $\{X_0, T_0, N_0\}$ e $s_0 \in I$ tais que $\langle N_0, N_0 \rangle = \langle T_0, T_0 \rangle = 1$, $\langle X_0, X_0 \rangle = -1$ e $\langle N_0, T_0 \rangle = \langle X_0, T_0 \rangle = 0$, existe uma família de triedros $\{X(s), T(s), N(s)\}$ e $s \in I$, satisfazendo $X(s_0) = X_0$, $T(s_0) = T_0$ e $N(s_0) =$

N_0 . Para concluir a demonstração da existência é preciso mostrar que a família $\{X(s), T(s), N(s)\}$ mantém as propriedades do triedro de X . Para isso, vamos usar as expressões da equação (1.3) para escrever as derivadas das quantidades

$$\langle X(s), X(s) \rangle, \langle N(s), N(s) \rangle, \langle X(s), T(s) \rangle, \langle N(s), T(s) \rangle, \langle T(s), T(s) \rangle, \langle X(s), N(s) \rangle.$$

Para simplificar a escrita omitiremos o parâmetro s nos cálculos. Assim,

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle X, X \rangle' = 2\langle X', X \rangle = 2\langle T, X \rangle, \\ \langle N, N \rangle' = 2\langle N', N \rangle = -2k\langle T, N \rangle, \\ \langle X, T \rangle' = \langle X', T \rangle + \langle X, T' \rangle = \langle T, T \rangle + k\langle N, X \rangle + \langle X, X \rangle, \\ \langle N, T \rangle' = \langle N', T \rangle + \langle N, T' \rangle = -k\langle T, T \rangle + k\langle N, N \rangle + \langle N, X \rangle, \\ \langle T, T \rangle' = 2\langle T', T \rangle = 2k\langle N, T \rangle + 2\langle X, T \rangle, \\ \langle X, N \rangle' = \langle X', N \rangle + \langle X, N' \rangle = \langle T, N \rangle - k\langle X, T \rangle. \end{array} \right. \quad (1.4)$$

Veja que, o conjunto das funções

$\langle X(s), X(s) \rangle = -1$, $\langle N(s), N(s) \rangle = 1$, $\langle X(s), T(s) \rangle = 0$, $\langle N(s), T(s) \rangle = 0$, $\langle T(s), T(s) \rangle = 1$ e $\langle X(s), N(s) \rangle = 0$ é solução para o sistema (1.4) com condições iniciais $-1, 1, 0, 0, 1, 0$ respectivamente. Por unicidade, a família $\{X(s), T(s), N(s)\}$ é ortonormal para todo $s \in I$, ou seja, satisfaz as equações do Triedro de X para uma curva em \mathbb{H}^2 . Do sistema (1.3), $X' = T$ e $T' = kN - X$ o que implica que k é a curvatura (*geodésica*) de X .

Unicidade: Seja $\bar{X} : I \rightarrow \mathbb{H}^2$ uma outra curva com $\bar{k}(s) = k(s)$ para todo $s \in I$ e seja $\{\bar{X}_0, \bar{T}_0, \bar{N}_0\}$ o Triedro de \bar{X} em $s_0 \in I$. Os conjuntos $B = \{X_0, T_0, N_0\}$ e $C = \{\bar{X}_0, \bar{T}_0, \bar{N}_0\}$ formam bases ortonormais para \mathbb{R}_1^3 , então existe uma isometria M de \mathbb{H}^2 que leva a base B na base C . A curva $Z(s) = MX(s)$ tem curvatura $k = k(s)$ e em $s_0 \in I$ satisfaz as condições iniciais $Z(s_0) = \bar{X}_0$, $T_z(s_0) = \bar{T}_0$, $N_z(s_0) = \bar{N}_0$, onde $\{Z(s), T_z(s), N_z(s)\}$ é o Triedro para a curva $Z(s)$. Portanto, pela unicidade mostrada anteriormente, obtemos que $\bar{X}(s) = MX(s)$. ■

1.3 Curvas do Tipo Espaço no Cone de Luz

Nesta seção, mostramos algumas definições e fatos básicos sobre curvas no cone de luz Q^2 , definido em 1.1.3. A principal referência para essa seção é [20].

Definição 1.3.1 Uma *curva parametrizada regular do tipo espaço* em Q^2 é uma imersão diferenciável $X : I \rightarrow Q^2$, definida sobre um intervalo dos números reais $I \subset \mathbb{R}$ tal que $X'(u) \neq 0$ e do tipo espaço para todo $u \in I$.

Em Q^2 também há curvas do tipo luz, mas o foco do trabalho é direcionado para as curvas do tipo espaço em Q^2 . A menos que mencionemos o contrário, ao longo do trabalho consideramos X em Q^2 uma curva regular do tipo espaço e parametrizada pelo comprimento de arco s .

Definimos o *triedro* de X como o conjunto de vetores $\{X(s), T(s), Y(s)\}$ para cada $s \in I$, onde $X(s)$ é o *vetor posição*, $T(s) = X'(s)$ é o *vetor tangente unitário* e $Y(s)$ é o *único vetor tipo luz* tal que

$$\begin{cases} \langle X(s), Y(s) \rangle = \langle T(s), T(s) \rangle = 1, \\ \langle X(s), X(s) \rangle = \langle Y(s), Y(s) \rangle = \langle X(s), T(s) \rangle = \langle Y(s), T(s) \rangle = 0. \end{cases} \quad (1.5)$$

A existência e unicidade do campo $Y(s)$ segue do fato de que para cada $s \in I$, $T(s)$ é um campo tipo espaço e o subespaço ortogonal a $T(s)$ é do tipo tempo que contém apenas duas direções do tipo luz que são $X(s)$ e $Y(s)$.

Observe que, $\langle T'(s), T(s) \rangle = 0$. Logo, $T'(s)$ é combinação linear de $X(s)$ e $Y(s)$ para cada $s \in I$. Como $\langle X(s), T(s) \rangle = 0$, então $\langle T(s), T(s) \rangle + \langle X(s), T'(s) \rangle = 0$. Portanto, se $T'(s) = aX(s) + bY(s)$, então $b = -1$.

A curvatura de uma curva X em Q^2 é definida como sendo a componente de $T'(s)$ na direção de $X(s)$.

Definição 1.3.2 Seja $X : I \rightarrow Q^2$ uma curva regular parametrizada pelo o comprimento de arco s , então a *curvatura* de X , em $s \in I$ é o número real $k(s)$ que satisfaz $T'(s) = k(s)X(s) - Y(s)$.

O triedro $\{X(s), T(s), Y(s)\}$ satisfaz as equações

$$\begin{cases} X'(s) = T(s), \\ T'(s) = k(s)X(s) - Y(s), \\ Y'(s) = -k(s)T(s). \end{cases} \quad (1.6)$$

Segue do sistema (1.6) que,

$$k(s) = -\frac{1}{2}\langle T'(s), T'(s) \rangle = \langle T'(s), Y(s) \rangle = -\langle T(s), Y'(s) \rangle. \quad (1.7)$$

Para um parâmetro arbitrário u da curva $X(u)$ a função curvatura é dada por

$$k(u) = \frac{\left(\left\langle \frac{dX}{du}, \frac{d^2X}{du^2} \right\rangle \right)^2 - \left\langle \frac{dX}{du}, \frac{dX}{du} \right\rangle \left\langle \frac{d^2X}{du^2}, \frac{d^2X}{du^2} \right\rangle}{2 \left(\left\langle \frac{dX}{du}, \frac{dX}{du} \right\rangle \right)^3}. \quad (1.8)$$

Note que, quando $k(s) \neq 0$, $Y(s)$ também é uma curva parametrizada regular em Q^2 , pois $\langle Y(s), Y(s) \rangle = 0$ e $Y'(s) = -k(s)T(s)$. Chamamos $Y(s)$ de *curva associada* à curva $X(s)$.

Proposição 1.3.3 [20] *Sejam X uma curva em Q^2 , $k(s) \neq 0$ para todo s e $\tilde{X}(s) = Y(s)$ a curva associada a X . Então*

$$\tilde{T}(s) = \epsilon T(s), \quad \tilde{Y}(s) = X(s) \quad e \quad \tilde{k}(s) = \frac{1}{k(s)},$$

onde $\epsilon = \pm 1$, $\tilde{T}(s)$ é campo tangente unitário a $\tilde{X}(s)$, $\tilde{Y}(s)$ a curva associada à $\tilde{X}(s)$ e $\tilde{k}(s)$ é a função curvatura da curva $\tilde{X}(s)$.

A próxima proposição, provada em [20], mostra que as curvas com curvatura constante em Q^2 são as cônicas.

Proposição 1.3.4 [20] *Seja $X : I \rightarrow Q^2$, $s \in I$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco. Se a função curvatura de X é uma constante k , então $X(s)$ é uma parábola quando $k = 0$; $X(s)$ é uma hipérbole quando $k > 0$ e $X(s)$ é uma elipse quando $k < 0$.*

A seguir, vamos apresentar um exemplo de curva de curvatura constante em Q^2 .

Exemplo 1.3.5 Considere a circunferência de raio ρ em Q^2 parametrizada por

$$X(s) = \left(\rho, \rho \cos \left(\frac{s}{\rho} \right), \rho \sin \left(\frac{s}{\rho} \right) \right), \quad (1.9)$$

onde $\rho \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Por um cálculo simples, temos que a função constante $k(s) = -\frac{1}{2\rho^2}$ é a curvatura de X . Além disso, $\lim_{\rho \rightarrow \pm\infty} k(s) = 0$ e $\lim_{\rho \rightarrow 0} k(s) = -\infty$.

Na observação a seguir, mostramos que existem elipses no cone Q^2 suficientemente próximas de planos do tipo luz que contém a origem.

Observação 1.3.6 Seja X como na equação (1.9) e defina $X^t(s) := M_3(t)X(s)$, onde $M_3(t)$ é a família a 1-parâmetros de isometrias dada pela equação (1.2). Para cada t , as curvas $X^t(s)$ são elipses de curvatura constante $-\frac{1}{2\rho^2}$. Afirmamos que, as funções $\alpha(s, t) = \langle X^t(s), e \rangle$ e $\tau(s, t) = \langle T^t(s), e \rangle$, onde $e = (-1, 1, 0)$, convergem a zero quando t tende a $-\infty$, isto é, $X^t(s)$ se aproxima do plano do tipo luz que contém a origem e o vetor do tipo luz $e = (-1, 1, 0)$ quando t tende a $-\infty$. De fato, segue das definições de $M_3(t)$ e $X^t(s)$ que,

$$\begin{aligned} M_3(t)X(s) &= \left(\rho \cosh(t) + \rho \sinh(t) \cos\left(\frac{s}{\rho}\right), \rho \sinh(t) + \rho \cosh(t) \cos\left(\frac{s}{\rho}\right), \right. \\ &\quad \left. \rho \sin\left(\frac{s}{\rho}\right) \right), \\ M_3(t)T(s) &= \left(-\sinh(t) \sin\left(\frac{s}{\rho}\right), -\cosh(t) \sin\left(\frac{s}{\rho}\right), \cos\left(\frac{s}{\rho}\right) \right). \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \alpha(s, t) &= \langle X^t(s), e \rangle \\ &= \left[\rho \cosh(t) + \rho \sinh(t) \cos\left(\frac{s}{\rho}\right) \right] + \left[\rho \sinh(t) + \rho \cosh(t) \cos\left(\frac{s}{\rho}\right) \right] \\ &= \rho [\cosh(t) + \sinh(t)] + [\cosh(t) + \sinh(s)] \rho \cos\left(\frac{s}{\rho}\right) \\ &= [\cosh(t) + \sinh(t)] \left[\rho \cos\left(\frac{s}{\rho}\right) + \rho \right] \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \tau(s, t) = \langle T^t(s), e \rangle &= \langle M_3(t)X(s), e \rangle \\ &= \left[-\sinh(t) \sin\left(\frac{s}{\rho}\right) \right] + \left[-\cosh(t) \sin\left(\frac{s}{\rho}\right) \right] \\ &= -[\sinh(t) + \cosh(t)] \sin\left(\frac{s}{\rho}\right). \end{aligned}$$

Portanto, $\lim_{t \rightarrow -\infty} \alpha(s, t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} \tau(s, t) = 0$.

Na proposição a seguir, estudamos o que acontece quando a curvatura de uma curva do tipo espaço X é ilimitada em algum fim.

Proposição 1.3.7 *Seja $X : (\omega_-, \omega_+) \rightarrow Q^2$, s definida em um intervalo maximal (ω_-, ω_+) uma curva parametrizada pelo comprimento de arco. Se $\lim_{s \rightarrow \omega_+} k(s) = \pm\infty$ (resp. $\lim_{s \rightarrow \omega_-} k(s) = \pm\infty$) e $X(s)$ não converge a $(0, 0, 0)$ quando s tende ω_+ (resp. ω_-), então X se aproxima de uma reta do cone de luz quando s tende a ω_+ (resp. ω_-).*

Demonstração: Para verificar esses fatos, vamos mostrar que, nas hipóteses da proposição o cosseno do ângulo Euclidiano $\theta(s)$ entre o vetor tangente $T(s)$ da curva X e o vetor $(1, 0, 0)$ converge a $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}$, ou seja, $T(s)$ converge a uma direção do tipo luz. De fato, seja

$$\chi(\rho, \varphi) = (\rho, \rho \cos(\varphi), \rho \sin(\varphi)),$$

onde $\rho \neq 0$, uma parametrização de Q^2 . Para que a curva $X(s) = \chi(\rho(s), \varphi(s))$ seja p.c.a. é preciso que $\rho(s)\varphi'(s) = \pm 1$. Dessa forma, o vetor tangente é dado por

$$T(s) = (\rho'(s), \rho'(s)\cos(\varphi(s)) \mp \sin(\varphi(s)), \rho'(s)\sin(\varphi(s)) \pm \cos(\varphi(s)))$$

e

$$\begin{aligned} T'(s) &= (\rho''(s), [\rho''(s) \mp \varphi'(s)] \cos(\varphi(s)) - \rho'(s)\varphi'(s)\sin(\varphi(s)), \\ &\quad [\rho''(s) \mp \varphi'(s)] \sin(\varphi(s)) + \rho'(s)\varphi'(s)\cos(\varphi(s))) \\ &= \left(\rho''(s), \left[\rho''(s) - \frac{1}{\rho(s)} \right] \cos(\varphi(s)) - \frac{\rho'(s)}{\rho(s)} \sin(\varphi(s)), \right. \\ &\quad \left. \left[\rho''(s) - \frac{1}{\rho(s)} \right] \sin(\varphi(s)) + \frac{\rho'(s)}{\rho(s)} \cos(\varphi(s)) \right). \end{aligned}$$

Sabemos de (1.7) que $k(s) = -\frac{1}{2}\langle T'(s), T'(s) \rangle$. Assim, a curvatura de X satisfaz a seguinte equação

$$\rho''(s) = \rho(s)k(s) + \frac{1 + [\rho'(s)]^2}{2\rho(s)}. \quad (1.10)$$

Sendo $\theta(s)$ ângulo Euclidiano entre o vetor tangente $T(s)$ e o vetor $(1, 0, 0)$, obtemos que

$$\begin{aligned} \cos(\theta(s)) &= \frac{\rho'(s)}{\sqrt{[\rho'(s)]^2 + [\rho'(s)\cos(\varphi) \mp \text{sen}(\varphi)]^2 + [\rho'(s)\text{sen}(\varphi) \pm \cos(\varphi)]^2}} \\ &= \frac{\rho'(s)}{\sqrt{2[\rho'(s)]^2 + 1}}. \end{aligned}$$

Veja que, se $\lim_{s \rightarrow \omega_-} |\rho'(s)| = +\infty$, então $\lim_{s \rightarrow \omega_-} \cos(\theta(s)) = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$, e se $\lim_{s \rightarrow \omega_+} |\rho'(s)| = +\infty$, então $\lim_{s \rightarrow \omega_+} \cos(\theta(s)) = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$. Logo, para concluir a demonstração, vamos provar duas afirmações.

Afirmação 1: Suponha que $\lim_{s \rightarrow \omega_+} k(s) = \pm\infty$ e que $\rho(s)$ não converge a zero quando s tende ω_+ , então $\lim_{s \rightarrow \omega_+} |\rho'(s)| = +\infty$. De fato, veja que, se $\lim_{s \rightarrow \omega_+} k(s) = \pm\infty$ e $\rho(s)$ não converge a zero, então $\lim_{s \rightarrow \omega_+} k(s)\rho(s) = \pm\infty$ se $\rho(s) > 0$ e $\lim_{s \rightarrow \omega_+} k(s)\rho(s) = \mp\infty$ se $\rho(s) < 0$. Reescrevendo a equação (1.10) da forma

$$\rho(s)k(s) = \rho''(s) - \frac{1 + [\rho'(s)]^2}{2\rho(s)}$$

e usando que $\rho(s) \neq 0$ para todo $s \in (\omega_-, \omega_+)$, obtemos que $\rho'(s)$ ou ρ'' é ilimitado no intervalo (\bar{s}, ω_+) para qualquer $\bar{s} \in (\omega_-, \omega_+)$ fixado. Se $\rho'(s)$ é ilimitada no intervalo (\bar{s}, ω_+) , a afirmação segue. Se $\rho''(s)$ é ilimitada em (\bar{s}, ω_+) , veja que, podemos escrever $\rho'(s) - \rho'(\bar{s}) = \int_{\bar{s}}^s \rho''(u)du$. Logo, obtemos que $\rho'(s)$ é também ilimitada no intervalo (\bar{s}, ω_+) para qualquer \bar{s} fixado. Logo, $\lim_{s \rightarrow \omega_+} |\rho'(s)| = +\infty$.

Afirmação 2: Suponha que $\lim_{s \rightarrow \omega_-} k(s) = \pm\infty$ e que $\rho(s)$ não converge a zero quando s tende ω_- , então $\lim_{s \rightarrow \omega_-} |\rho'(s)| = +\infty$. De fato, veja que, se $\lim_{s \rightarrow \omega_-} k(s) = \pm\infty$ e $\rho(s)$ não converge a zero, então $\lim_{s \rightarrow \omega_-} k(s)\rho(s) = \pm\infty$ se $\rho(s) > 0$ e $\lim_{s \rightarrow \omega_-} k(s)\rho(s) = \mp\infty$ se $\rho(s) < 0$. Reescrevendo a equação (1.10) da forma

$$\rho(s)k(s) = \rho''(s) - \frac{1 + [\rho'(s)]^2}{2\rho(s)}$$

e usando que $\rho(s) \neq 0$ para todo $s \in (\omega_-, \omega_+)$, obtemos que $\rho''(s)$ ou ρ' é ilimitado no intervalo (ω_-, \bar{s}) para qualquer $\bar{s} \in (\omega_-, \omega_+)$ fixado. Se $\rho'(s)$ é ilimitada no intervalo (ω_-, \bar{s}) , a afirmação segue. Se $\rho''(s)$ é ilimitada em (ω_-, \bar{s}) , veja que, podemos escrever $\rho'(\bar{s}) - \rho'(s) = \int_s^{\bar{s}} \rho''(u)du$. Logo, obtemos que $\rho'(s)$ é também ilimitada no intervalo (ω_-, \bar{s}) para qualquer \bar{s} fixado. Logo, $\lim_{s \rightarrow \omega_-} |\rho'(s)| = +\infty$.

Portanto, segue o resultado. ■

Em [20] foi provado um resultado de existência e unicidade para curvas no cone de luz usando um teorema de existência e unicidade para curvas em \mathbb{R}_1^3 , que pode ser encontrado em [21]. Mas, de modo análogo como fizemos em \mathbb{H}^2 , vamos apresentar um teorema de existência e unicidade para curvas no cone de luz usando apenas as informações das curvas em Q^2 .

Teorema 1.3.8 *Dada uma função $k : I \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável, $s \in I$, existe uma curva do tipo espaço parametrizada regular $X : I \rightarrow Q^2$ tal que s é o parâmetro de comprimento de arco e $k = k(s)$ é a curvatura da curva no cone de luz. Qualquer outra curva \bar{X} no cone de luz com a mesma função curvatura, difere de X por uma isometria, i.e., existe uma isometria M de Q^2 tal que $\bar{X}(s) = MX(s)$.*

Demonstração:

Existência: observe que o sistema de equações (1.6) pode ser visto como um sistema de equações diferenciais ordinárias em $I \times \mathbb{R}^9$,

$$\begin{cases} x'_i(s) = t_i(s), \\ t'_i(s) = k(s)x_i(s) - y_i(s), \\ y'_i(s) = -k(s)t_i(s), \end{cases}$$

$i = 1, 2, 3$, onde $X(s) = (x_1(s), x_2(s), x_3(s))$, $T(s) = (t_1(s), t_2(s), t_3(s))$ e $Y(s) = (y_1(s), y_2(s), y_3(s))$. Assim, Pelo teorema de existência e unicidade para equações diferenciais ordinárias, dado um triedro $\{X_0, T_0, Y_0\}$ e $s_0 \in I$ tal que $\langle X_0, Y_0 \rangle = \langle T_0, T_0 \rangle = 1$ e $\langle X_0, X_0 \rangle = \langle Y_0, Y_0 \rangle = \langle X_0, T_0 \rangle = \langle Y_0, T_0 \rangle = 0$, existe uma família de triedros $\{X(s), T(s), Y(s)\}$ e $s \in I$, satisfazendo $X(s_0) = X_0$, $T(s_0) = T_0$ e $Y(s_0) = Y_0$. Para concluir a demonstração da existência é preciso mostrar que a família $\{X(s), T(s), Y(s)\}$ mantém as propriedades ao longo da curva. Para isso, vamos usar as expressões do sistema de equações (1.6) para escrever as derivadas das funções

$$\langle X(s), X(s) \rangle, \langle Y(s), Y(s) \rangle, \langle X(s), T(s) \rangle, \langle Y(s), T(s) \rangle, \langle T(s), T(s) \rangle, \langle X(s), Y(s) \rangle.$$

Daí, omitindo a variável s nos cálculos, temos que

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle X, X \rangle' = 2\langle X', X \rangle = 2\langle T, X \rangle, \\ \langle Y, Y \rangle' = 2\langle Y', Y \rangle = -2k\langle T, Y \rangle, \\ \langle X, T \rangle' = \langle X', T \rangle + \langle X, T' \rangle = \langle T, T \rangle + k\langle X, X \rangle - \langle X, Y \rangle, \\ \langle Y, T \rangle' = \langle Y', T \rangle + \langle Y, T' \rangle = -k\langle T, T \rangle + k\langle Y, X \rangle - \langle Y, Y \rangle, \\ \langle T, T \rangle' = 2\langle T', T \rangle = 2k\langle X, T \rangle - 2\langle Y, T \rangle, \\ \langle X, Y \rangle' = \langle X', Y \rangle + \langle X, Y' \rangle = \langle T, Y \rangle - k\langle X, T \rangle. \end{array} \right. \quad (1.11)$$

Por verificação imediata, o conjunto das funções

$\langle X(s), X(s) \rangle = \langle Y(s), Y(s) \rangle = \langle X(s), T(s) \rangle = \langle Y(s), T(s) \rangle = 0$ e $\langle T(s), T(s) \rangle = \langle X(s), Y(s) \rangle = 1$ é solução para o sistema (1.11) com condições iniciais $0, 0, 0, 0, 1, 1$ respectivamente. Por unicidade, a família $\{X(s), T(s), Y(s)\}$ satisfaz o Triedro de uma curva do tipo espaço em Q^2 para todo $s \in I$. Do sistema (1.6), $X' = T$ e $T' = kX - Y$, ou seja, k é a curvatura da curva X .

Unicidade: Seja \bar{X} outra curva com $\bar{k}(s) = k(s)$ para todo $s \in I$ e seja $\{\bar{X}_0, \bar{T}_0, \bar{Y}_0\}$ o Triedro de \bar{X} em $s_0 \in I$. Os conjuntos $B = \{X_0, T_0, Y_0\}$ e $C = \{\bar{X}_0, \bar{T}_0, \bar{Y}_0\}$ não são bases ortonormais para \mathbb{R}_1^3 , mas os conjuntos

$$\hat{B} = \left\{ \frac{X_0 - Y_0}{\sqrt{2}}, T_0, \frac{X_0 + Y_0}{\sqrt{2}} \right\} \text{ e } \hat{C} = \left\{ \frac{\bar{X}_0 - \bar{Y}_0}{\sqrt{2}}, \bar{T}_0, \frac{\bar{X}_0 + \bar{Y}_0}{\sqrt{2}} \right\}$$

são ortonormais, então existe uma isometria M de Q^2 e que leva a base \hat{B} na base \hat{C} . Consequentemente, M leva a base B na base C . Assim, $Z(s) = MX(s)$ tem curvatura $k = k(s)$ e em $s_0 \in I$ satisfazendo as condições iniciais $Z(s_0) = \bar{X}_0$, $T_z(s_0) = \bar{T}_0$, $Y_z(s_0) = \bar{Y}_0$, onde $Z(s)$, $T_z(s)$, $Y_z(s)$ é o Triedro de $Z(s)$. Portanto, pela unicidade mostrada anteriormente, obtemos que $\bar{X}(s) = MX(s)$. ■

Vamos encerrar esta seção com uma propriedade das curvas contidas no cone de luz, cuja demonstração é imediata, que será usada no capítulo 3.

Proposição 1.3.9 *Seja $X : I \subset \mathbb{R} \rightarrow Q^2 \subset \mathbb{R}_1^3$ uma curva do tipo espaço no cone de luz parametrizada pelo comprimento de arco s . Seja $\{X(s), T(s), Y(s)\}$ o triedro de X . Então para cada $v \in \mathbb{R}_1^3$,*

$$v = \eta(s)X(s) + \tau(s)T(s) + \alpha(s)Y(s),$$

$s \in I$, onde

$$\alpha(s) = \langle X(s), v \rangle, \quad \tau(s) = \langle T(s), v \rangle \quad e \quad \eta(s) = \langle Y(s), v \rangle.$$

Além disso, a função

$$2\alpha(s)\eta(s) + \tau^2(s) = \langle v, v \rangle$$

para todo $s \in I$, isto é, a função $2\alpha(s)\eta(s) + \tau^2(s)$ é constante.

Capítulo 2

Sólitons do Fluxo Redutor de Curvas em \mathbb{H}^2

Os sólitons do Fluxo Redutor de Curvas (FRC) são curvas que evoluem por isometrias ao longo do fluxo. No plano Euclidiano, Halldorsson [17] mostrou que os sólitons para o FRC são curvas mergulhadas e a sua curvatura converge a zero nos dois fins da curva. Dos Reis e Tenenblat [6] estudaram os sólitons na esfera bidimensional \mathbb{S}^2 e mostraram que a curvatura geodésica converge a zero nos dois fins.

Na primeira seção, definiremos o FRC, um sóliton do fluxo FRC em \mathbb{H}^2 e mostraremos que o FRC é invariante por difeomorfismos tangenciais. Além disso, no Teorema 2.2.1, apresentaremos uma condição necessária e suficiente para que uma curva X em \mathbb{H}^2 seja um sóliton do fluxo FRC em \mathbb{H}^2 .

Na segunda seção, vamos determinar uma relação entre um sóliton do fluxo FRC em \mathbb{H}^2 e uma solução de um sistema de equações diferenciais ordinárias. Em sequência, faremos o estudo qualitativo do sistema e mostraremos no Teorema 2.3.28 que, dado um vetor não nulo de \mathbb{R}_1^3 existe uma família a 2-parâmetros de sólitons para o FRC que são completos e mergulhados. Além disso, provaremos que a curvatura de um sóliton X nos fins converge para constantes.

Na terceira seção, apresentaremos gráficos de exemplos do fluxo FRC em \mathbb{H}^2 usando métodos numéricos.

2.1 Fluxo Redutor de Curvas em \mathbb{H}^2

Nesta seção, definimos o fluxo redutor de curvas em \mathbb{H}^2 e caracterizamos quando uma curva é um sóliton para o FRC em \mathbb{H}^2 .

Definição 2.1.1 Seja $X : I \rightarrow \mathbb{H}^2$, $u \in I$ uma curva parametrizada regular. Uma família a um parâmetro $\hat{X}^t(\cdot) = \hat{X}(\cdot, t)$ de curvas $\hat{X} : I \times J \rightarrow \mathbb{H}^2$, $t \in J$ é *solução para o Fluxo Redutor de Curvas (FRC)* com condição inicial X , se

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \hat{X}(u, t) = \hat{k}(u, t) \hat{N}(u, t), \\ \hat{X}(u, 0) = X(u), \end{cases} \quad (2.1)$$

onde $\hat{N}^t(\cdot) = \hat{N}(\cdot, t)$ é o campo unitário normal a $\hat{X}^t(\cdot)$ e $\hat{k}^t(\cdot) = \hat{k}(\cdot, t)$ é a curvatura da curva $\hat{X}^t(\cdot)$ para cada $t \in J$.

As geodésicas do \mathbb{H}^2 são soluções triviais do fluxo FRC.

Assim como no caso do plano Euclidiano, o nome "fluxo redutor de curvas" vem do fato de que o fluxo é do tipo gradiente para o funcional comprimento de arco, isto é, o comprimento de arco decresce ao longo do fluxo. De fato, seja $\hat{X} : I \times J \rightarrow \mathbb{H}^2$ uma família a 1-parâmetro de curvas fechadas com $I = [a, b]$ e $\hat{X}^t(a) = \hat{X}^t(b)$ para cada $t \in J$. O funcional comprimento de arco é dado por $L(t) = \int_a^b w(u, t) du$, onde $w = w(u, t) = \left| \frac{\partial}{\partial u} \hat{X}(u, t) \right|$. Derivando em t , usando que as variáveis u e t são independentes e que a família $\hat{X}^t(\cdot)$ é solução do fluxo em \mathbb{H}^2 , obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} L(t) &= \int_a^b \frac{1}{w} \left\langle \frac{\partial^2}{\partial t \partial u} \hat{X}(u, t), \frac{\partial}{\partial u} \hat{X}(u, t) \right\rangle du \\ &= \int_a^b \frac{1}{w} \left\langle \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial}{\partial t} \hat{X}(u, t) \right), \frac{\partial}{\partial u} \hat{X}(u, t) \right\rangle du \\ &= \int_a^b \left\langle \frac{1}{w} \frac{\partial}{\partial u} \left(\hat{k}(u, t) \hat{N}(u, t) \right), \frac{1}{w} \frac{\partial}{\partial u} \hat{X}(u, t) \right\rangle w du. \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável $ds(u, t) = w(u, t) du$ e $\frac{\partial}{\partial s}(u, t) = \frac{1}{w(u, t)} \frac{\partial}{\partial u}$ para cada t e usando a regra da cadeia, temos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}L(t) &= \int_c^d \left\langle \frac{\partial}{\partial s} \left(\hat{k}(s,t)\hat{N}(s,t) \right), \frac{\partial}{\partial s} \hat{X}(s,t) \right\rangle ds \\ &= \int_c^d \frac{\partial}{\partial s} \left\langle \hat{k}(s,t)\hat{N}(s,t), \frac{\partial}{\partial s} \hat{X}(s,t) \right\rangle - \int_c^d \left\langle \hat{k}(s,t)\hat{N}(s,t), \frac{\partial^2}{\partial s^2} \hat{X}(s,t) \right\rangle ds. \end{aligned}$$

Agora, usando que $\hat{X}^t(s)$ é uma curva fechada para cada $t \in I$ e

$$\frac{\partial^2}{\partial s^2} \hat{X}(s,t) = \hat{k}(s,t)\hat{N}(s,t) + \hat{X}(s,t),$$

temos

$$\frac{d}{dt}L(t) = - \int_c^d \hat{k}^2(s,t) ds \leq 0.$$

Grayson [16], usando o modelo do semiplano para \mathbb{H}^2 , mostrou que equação de evolução para a curvatura ao longo do fluxo FRC é dado por

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{k} = \frac{\partial^2}{\partial s^2} \hat{k} + \hat{k}^3 - \hat{k}$$

e apresentou exemplos quando a curvatura é constante em s .

De maneira similar ao que foi feito em [8] para o plano, vamos mostrar que, o FRC em \mathbb{H}^2 também é invariante por difeomorfismo tangenciais.

Proposição 2.1.2 (Invariância por difeomorfismos tangenciais) *Sejam $X : I \rightarrow \mathbb{H}^2$ uma curva regular e $\hat{X} : I \times J \rightarrow \mathbb{H}^2$ uma família de curvas que satisfazem o seguinte sistema de equações*

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \hat{X}(u,t) = \hat{k}(u,t)\hat{N}(u,t) + h(u,t)\hat{T}(u,t), \\ \hat{X}(u,0) = X(u), \end{cases} \quad (2.2)$$

onde $\hat{T}^t(u)$ é o campo unitário tangente a $\hat{X}^t(u)$, $\hat{N}^t(u)$ é o campo unitário normal a $\hat{X}^t(u)$ e $\hat{k}^t(u)$ é a curvatura de $\hat{X}^t(u)$ para cada $t \in J$, e $h(u,t)$ é uma função diferenciável. Então, na vizinhança de cada ponto $(u_0, t_0) \in I \times J$ existe $\varphi : I \times J \rightarrow I$ satisfazendo $\frac{\partial \varphi}{\partial u} > 0$ e $\varphi(u,0) = \varphi_0(u) = u$ tal que $\bar{X}(u,t) = \hat{X}(\varphi(u,t),t)$ é solução do sistema (2.1).

Demonstração: Note que, se $\varphi(u, t)$ existe, então

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \bar{X}(u, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\hat{X}(\varphi(u, t), t) \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial \varphi} \hat{X}(\varphi(u, t), t) \frac{\partial}{\partial t} \varphi(u, t) + \frac{\partial}{\partial t} \hat{X}(\varphi(u, t), t) \\ &= \frac{\partial}{\partial \varphi} \hat{X}(\varphi(u, t), t) \frac{\partial}{\partial t} \varphi(u, t) + \hat{k}(\varphi(u, t), t) \hat{N}(\varphi(u, t), t) + \\ &\quad + h(\varphi(u, t), t) \hat{T}(\varphi(u, t), t) \\ &= \left| \frac{\partial}{\partial \varphi} \hat{X}(\varphi(u, t), t) \right| \hat{T}(\varphi(u, t), t) \frac{\partial}{\partial t} \varphi(u, t) + \hat{k}(\varphi(u, t), t) \hat{N}(\varphi(u, t), t) + \\ &\quad + h(\varphi(u, t), t) \hat{T}(\varphi(u, t), t). \end{aligned}$$

Se $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = - \left| \frac{\partial}{\partial \varphi} \hat{X}(\varphi(u, t), t) \right|^{-1} h(\varphi(u, t), t)$, então $\bar{X}(u, t) = \hat{X}(\varphi(u, t), t)$ é solução do sistema (2.1).

Veja que φ está bem definida e satisfaz a proposição. De fato, seja $\varphi(u, t)$ definida pela equação diferencial

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \varphi(u, t) = -f(\varphi(u, t), t), \\ \varphi(u, 0) = \varphi_0(u) = u, \end{cases} \quad (2.3)$$

onde $f(\varphi(u, t), t) = \left| \frac{\partial \hat{X}}{\partial \varphi} \right|^{-1} h(\varphi(u, t), t)$ e u é um parâmetro. Como \hat{X} e h são diferenciáveis, então o sistema (2.3) possui uma única solução para cada condição inicial fixada. Dessa forma, a função $\varphi(u, t)$ está bem definida e é diferenciável em relação ao parâmetro u . Diferenciando as duas equações do sistema (2.3) com relação ao parâmetro u , obtemos que $\frac{\partial \varphi_0}{\partial u} = 1$ e

$$\frac{\partial^2}{\partial u \partial t} \varphi(u, t) = - \frac{\partial}{\partial \varphi} f(\varphi(u, t), t) \frac{\partial}{\partial u} \varphi(u, t),$$

ou ainda,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial u} \varphi(u, t) \right) = - \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} f(\varphi(u, t), t) \right) \frac{\partial}{\partial u} \varphi(u, t).$$

Assim,

$$\frac{\partial}{\partial u} \varphi(u, t) = \left(\frac{\partial}{\partial u} \varphi_0 \right) e^{-\int \frac{\partial f}{\partial \varphi} dt} = e^{-\int \frac{\partial f}{\partial \varphi} dt} > 0.$$

■

Segue da Proposição 2.1.2 que podemos redefinir o fluxo redutor de curvas da seguinte forma.

Definição 2.1.3 Sejam $X : I \rightarrow \mathbb{H}^2$, $u \in I$ uma curva parametrizada regular e $\hat{X}^t(\cdot) = \hat{X}(\cdot, t)$, $\hat{X} : I \times J \rightarrow \mathbb{H}^2$, $t \in J$ uma família a um parâmetro de curvas. Dizemos que $\hat{X}^t(\cdot)$ é solução para o fluxo redutor de curvas com condição inicial $X(u)$, se $\hat{X}^0(u) = X(u)$ e

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial t} \hat{X}(u, t), \hat{N}(u, t) \right\rangle = \hat{k}(u, t),$$

onde $\hat{N}^t(\cdot) = \hat{N}(\cdot, t)$ é o campo unitário normal a $\hat{X}^t(\cdot)$ e $\hat{k}^t(\cdot) = \hat{k}(\cdot, t)$ é a curvatura da curva $\hat{X}^t(\cdot)$ para cada $t \in J$.

Quando a evolução é apenas por isometrias, definimos os sólitos do fluxo FRC da seguinte maneira.

Definição 2.1.4 Seja $\hat{X} : I \times J \rightarrow \mathbb{H}^2$ uma solução para o fluxo redutor de curvas com condição inicial $X : I \rightarrow \mathbb{H}^2$. A curva X é dita *sólito do fluxo redutor de curvas* se existe uma família a 1-parâmetro de isometrias $M(t) : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ tal que $M(0) = Id$ e

$$\hat{X}^t(u) = M(t)X(u),$$

para todo $u \in I$, $t \in J$ e onde Id é a aplicação identidade.

2.2 Caracterização dos Sólitos do Fluxo FRC em \mathbb{H}^2

O teorema a seguir determina uma condição necessária e suficiente para que uma curva X em \mathbb{H}^2 admita evolução por isometrias satisfazendo o FRC.

Teorema 2.2.1 *Seja $X : I \rightarrow \mathbb{H}^2$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco. $X(s)$ é um sólito para o fluxo redutor de curvas se, e somente se, existe $v \in \mathbb{R}_1^3/0$ tal que*

$$\langle T(s), v \rangle = k(s), \tag{2.4}$$

onde $T(s)$ é o campo unitário tangente a X e $k(s)$ é a curvatura de X .

Demonstração: Suponha que $\hat{X}(s, t) = M(t)X(s)$ satisfaz o fluxo redutor de curvas. Derivando em t , obtemos que

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{X}(s, t) = M'(t)X(s)$$

e assim,

$$\hat{k}(s, t) = \left\langle \frac{\partial}{\partial t} \hat{X}(s, t), \hat{N}(s, t) \right\rangle = \langle M'(t)X(s), M(t)N(s) \rangle.$$

Em particular, para $t = 0$, obtemos que

$$k(s) = \langle M'(0)X(s), N(s) \rangle.$$

Como $X(s) \times N(s) = -T(s)$, segue da Proposição 1.1.4 existe $v_0 \in \mathbb{R}_1^3 \setminus \{0\}$ tal que $\langle M'(0)X(s), N(s) \rangle = -\langle T(s), v_0 \rangle$. Portanto,

$$k(s) = \langle T(s), v \rangle,$$

onde $v = -v_0$. Mais precisamente, considerando $M(t) = M_1(t)M_2(t)M_3(t)$ como na equação (1.2), temos que $v = (\varphi'_1(0) + \varphi'_2(0), \varphi'_2(0), -\varphi'_3(0))$.

Reciprocamente, dado uma curva X de \mathbb{H}^2 , com curvatura $k(s)$ e campo unitário tangente $T(s)$ satisfazendo $k(s) = \langle T(s), v \rangle$ para algum vetor $v \in \mathbb{R}_1^3 \setminus \{0\}$, mostraremos que existe uma família de isometrias $M(t)$ tal que $\hat{X}(s, t) = M(t)X(s)$ satisfaz o FRC. Para isso, dividimos em três casos de acordo com o tipo de cada vetor. Sem perda de generalidade, a menos de isometria, vamos considerar v um múltiplo $w_1 = (1, 0, 0)$ se v é do tipo tempo, um múltiplo $w_2 = (1, 1, 0)$ se v é do tipo luz e um múltiplo de $w_3 = (0, 0, -1)$ se v é do tipo espaço. Assim, a curvatura pode ser escrita por $k_i(s) = \langle T(s), v_i \rangle$, onde $v_i = aw_i$, $a > 0$ e $i = 1, 2, 3$. Defina a evolução autossimilar de X em \mathbb{H}^2 por $\hat{X}_i(s, t) = M_i(t)X(s)$, onde $M_i(t) \in O_1^+(3)$ são isometrias de \mathbb{H}^2 dadas por (1.2) para cada t e $\varphi_i(t) = at$ para cada $i = 1, 2, 3$.

Como $X(s) \times N(s) = -T(s)$, segue da Proposição 1.1.5 que $\langle M'_i(t)X(s), M_i(t)N(s) \rangle = -\varphi'_i(t) \langle -T(s), w_i \rangle$. Assim,

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial}{\partial t} \hat{X}_i(s, t), \hat{N}_i(s, t) \right\rangle &= \langle M'_i(t)X(s), M_i(t)N(s) \rangle \\ &= -\varphi'_i(t) \langle -T(s), w_i \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \langle T(s), \varphi'_i(t)w_i \rangle \\
&= \langle T(s), aw_i \rangle \\
&= \langle T(s), v_i \rangle \\
&= k_i(s) \\
&= \hat{k}_i(s, t),
\end{aligned}$$

onde a última igualdade segue do fato que, isometrias preservam curvaturas geodésicas.

Portanto, $X(s)$ é um sóliton para o fluxo redutor de curvas. ■

2.3 Descrição dos Sólitons do Fluxo FRC em \mathbb{H}^2

Nesta seção, mostramos que todos os sólitons do fluxo FRC no \mathbb{H}^2 são curvas completas, mergulhadas e de curvatura limitada. Para isso, usamos a mesma técnica utilizada pelos autores de [17] e [6] para descrever soluções autossimilares do fluxo FRC no plano e para descrever os sólitons do fluxo FRC na esfera \mathbb{S}^2 , respectivamente. No nosso caso, o método consiste em estabelecer inicialmente uma relação entre os sólitons do fluxo FRC em \mathbb{H}^2 e soluções de um sistema de equações diferenciais ordinárias (EDO). Em seguida fazemos uso da teoria qualitativa para descrever todas as soluções do sistema de EDO e conseqüentemente obter informações sobre os sólitons do fluxo FRC em \mathbb{H}^2 .

Antes do principal resultado, apresentamos uma série de proposições e lemas necessários para a demonstração do teorema. Ao longo desta seção, representamos uma curva $X \subset \mathbb{H}^2$ parametrizada pelo comprimento de arco em coordenadas da seguinte forma $X = X(s) = (x_1(s), x_2(s), x_3(s))$.

O Teorema 2.2.1, reduz o estudo dos sólitons do fluxo FRC a estudar todas as curvas de \mathbb{H}^2 que satisfazem a equação (2.4) para algum vetor não nulo $v \in \mathbb{R}_1^3$. Sem perda de generalidade, a menos de isometria de \mathbb{H}^2 , podemos considerar o vetor v como sendo $v_i = ae_i$ com $a \in \mathbb{R}^+$, $i = 1, 2, 3$, onde $e_1 = (-1, 0, 0)$ se v é do tipo tempo, $e_2 = (-1, 1, 0)$ se v é do tipo luz e $e_3 = (0, 0, 1)$ se v é do tipo espaço. Dessa forma, a equação (2.4) reduz-se a

$$k_i(s) = a \langle T(s), e_i \rangle$$

para cada $i = 1, 2$ e 3 . As duas proposições a seguir estabelecem uma relação entre um sólito do fluxo FRC e uma solução de um sistema de EDO.

Proposição 2.3.1 *Sejam $X : I \rightarrow \mathbb{H}^2$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco e $\{X(s), T(s), N(s)\}$ o triedro de $X(s)$. Sejam*

$$e_1 = (-1, 0, 0), \quad e_2 = (-1, 1, 0) \quad e \quad e_3 = (0, 0, 1). \quad (2.5)$$

Defina as funções $\alpha_i(s) = \langle X(s), e_i \rangle$, $\tau_i(s) = \langle T(s), e_i \rangle$ e $\eta_i(s) = \langle N(s), e_i \rangle$ para cada $i \in \{1, 2, 3\}$, então a curvatura de $X(s)$ satisfaz a equação

$$k_i(s) = a\tau_i(s)$$

para todo $s \in I$, $a > 0$ e para cada $i \in \{1, 2, 3\}$ se, e somente se, as funções $\alpha_i(s)$, $\tau_i(s)$ e $\eta_i(s)$ satisfazem o sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} \alpha'_i(s) = \tau_i(s), \\ \tau'_i(s) = a\tau_i(s)\eta_i(s) + \alpha_i(s), \\ \eta'_i(s) = -a\tau_i^2(s), \end{cases} \quad (2.6)$$

com condições iniciais $(\alpha_i(0), \tau_i(0), \eta_i(0))$ satisfazendo

$$-\alpha_i^2(0) + \tau_i^2(0) + \eta_i^2(0) = \begin{cases} -1, & \text{se } i = 1, \\ 0, & \text{se } i = 2, \\ 1, & \text{se } i = 3. \end{cases} \quad (2.7)$$

Nestas condições, $-\alpha_i^2(s) + \tau_i^2(s) + \eta_i^2(s)$ é igual ao segundo membro da equação (2.7) para todo $s \in I$. Além disso, $\eta_i(s)$ é uma função decrescente e se s_0 é ponto crítico de $\eta_i(s)$, então s_0 é um ponto de inflexão de $\eta_i(s)$.

Demonstração: Seja X uma curva em \mathbb{H}^2 , os campos de vetores $X(s)$, $T(s)$ e $N(s)$ satisfazem o sistema de equações (1.3), isto é,

$$\begin{cases} X'(s) = T(s), \\ T'(s) = k(s)N(s) + X(s), \\ N'(s) = -k(s)T(s), \end{cases}$$

para todo $s \in I$. Assim, considerando o produto interno de e_i com $X(s)$, $T(s)$ e $N(s)$, temos que as funções $\alpha_i(s)$, $\tau_i(s)$ e $\eta_i(s)$ satisfazem

$$\begin{cases} \alpha'_i(s) = \tau_i(s), \\ \tau'_i(s) = k_i(s)\eta_i(s) + \alpha_i(s), \\ \eta'_i(s) = -k_i(s)\tau_i(s), \end{cases} \quad (2.8)$$

para todo $s \in I$ e cada $i \in \{1, 2, 3\}$. Supondo que $k_i(s) = a\tau_i(s)$ para todo $s \in I$, para cada $i \in \{1, 2, 3\}$ e substituindo no sistema (2.8), obtemos (2.6). Além disso,

$$e_i = \alpha_i(s)X(s) + \tau_i(s)T(s) + \eta_i(s)N(s).$$

Portanto, $\langle e_i, e_i \rangle = -\alpha_i^2(s) + \tau_i^2(s) + \eta_i^2(s)$ é constante para todo $s \in I$. Em particular, em $s = 0$ temos que (2.7) se verifica. Além disso, segue da terceira equação do sistema (2.6) que a função $\eta_i(s)$ é sempre decrescente, então os pontos críticos de $\eta_i(s)$ são de inflexão.

Reciprocamente, supondo que as funções $\alpha_i(s)$, $\tau_i(s)$ e $\eta_i(s)$ satisfazem (2.6) e (2.7) para cada $i \in \{1, 2, 3\}$, como (2.8) se verifica, temos que

$$\begin{cases} a\tau_i(s)\eta_i(s) + \alpha_i(s) = k_i(s)\eta_i(s) + \alpha_i(s), \\ -(a\tau_i(s))\tau_i(s) = -k_i(s)\tau_i(s), \end{cases}$$

ou ainda,

$$\begin{cases} [a\tau_i(s) - k_i(s)]\eta_i(s) = 0, \\ [a\tau_i(s) - k_i(s)]\tau_i(s) = 0, \end{cases}$$

para todo $s \in I$. Para concluir que $k_i(s) = a\tau_i(s)$, usaremos o argumento por contradição para cada i , supondo que $a\tau_i(s) - k_i(s) \neq 0$ em um aberto $J \subset I$.

Se $i = 1$ e $\tau_1(s) = \eta_1(s) = 0$ em J , então $\alpha_1(s)$ é constante para todo $s \in J$. Pelo sistema (2.6), temos que $0 = \tau'_1(s) = \alpha_1(s)$ em J , o que é uma contradição, uma vez que, $X(s)$ e e_1 são não nulos e do tipo tempo.

Se $i = 2$ e $\tau_2(s) = \eta_2(s) = 0$ em J , então $N(s), T(s) \in \langle e_2 \rangle^\perp$, onde $\langle e_2 \rangle^\perp$ é um plano do tipo luz. O que é uma contradição, já que $\{N(s), T(s)\}$ é uma base para $T_{X(s)}\mathbb{H}^2$.

Se $i = 3$ e $\tau_3(s) = \eta_3(s) = 0$ em J , então os vetores do conjunto $\{e_3, T(s), N(s)\}$ são ortonormais e do tipo espaço. O que é uma contradição, já que toda base ortonormal de \mathbb{R}_1^3 possui apenas dois vetores do tipo espaço.

Portanto, as funções $\tau_i(s)$ e $\eta_i(s)$ são não nulas para todo aberto em I , e $k_i(s) = a\tau_i(s)$ para todo $s \in I$ e para cada $i \in \{1, 2, 3\}$. ■

Proposição 2.3.2 *Seja $\alpha(s), \tau(s), \eta(s) : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma solução para o sistema*

$$\begin{cases} \alpha'(s) = \tau(s), \\ \tau'(s) = a\tau(s)\eta(s) + \alpha(s), \\ \eta'(s) = -a\tau^2(s), \end{cases} \quad (2.9)$$

com $a > 0$ e condições iniciais $(\alpha(0), \tau(0), \eta(0))$ satisfazendo $-\alpha^2(0) + \tau^2(0) + \eta^2(0) = -1$ (resp. 0 e 1), então existe uma curva diferenciável $X : I \rightarrow \mathbb{H}^2$ parametrizada pelo comprimento de arco s tal que seu triedro $\{X(s), T(s), N(s)\}$ satisfaz

$$\alpha(s) = \langle X(s), e \rangle, \quad \tau(s) = \langle T(s), e \rangle \quad e \quad \eta(s) = \langle N(s), e \rangle, \quad (2.10)$$

onde $e = (-1, 0, 0)$ (resp. $e = (-1, 1, 0)$ e $e = (0, 0, 1)$).

Demonstração: Defina $k(s) = a\tau(s)$. Então pelo Teorema 1.2.3 existe a menos de isometria uma única curva $X : I \rightarrow \mathbb{H}^2$, cuja curvatura é $k(s)$ e $\{X(s), T(s), N(s)\}$ é o triedro de $X(s)$. A curva é unicamente determinada pelas condições iniciais $\{X(0), T(0), N(0)\}$ que pode ser escolhida de forma que

$$-\alpha(0)X(0) + \tau(0)T(0) + \eta(0)N(0) = e,$$

onde $e = (-1, 0, 0)$ (resp. $e = (-1, 1, 0)$ e $e = (0, 0, 1)$). Usando as equações dos sistemas (2.9) e (1.3), obtemos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} [-\alpha(s)X(s) + \tau(s)T(s) + \eta(s)N(s)] &= -\alpha'(s)X(s) - \alpha(s)X'(s) + \tau'(s)T(s) + \\ &\quad + \tau(s)T'(s) + \eta'(s)N(s) + \eta(s)N'(s) \\ &= -\tau(s)X(s) - \alpha(s)T(s) + a\tau(s)\eta(s)T(s) \\ &\quad + \alpha(s)T(s) + \tau(s) [a\tau(s)N(s) + X(s)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -a\tau^2(s)N(s) - \eta(s)a\tau(s)T(s) \\ & = 0. \end{aligned}$$

Logo, a condição inicial implica que

$$-\alpha(s)X(s) + \tau(s)T(s) + \eta(s)N(s) = e$$

para todo $s \in I$, onde $e = (-1, 0, 0)$ (resp. $e = (-1, 1, 0)$ e $e = (0, 0, 1)$). Portanto, (2.10) é satisfeita. \blacksquare

Como vimos na Proposição 2.3.2, a função $-\alpha^2(s) + \tau^2(s) + \eta^2(s)$ é constante igual à -1 , 0 ou 1 . Defina os subconjuntos de \mathbb{R}^3 dados por

$$\begin{aligned} H & := \{(\alpha, \tau, \eta) \in \mathbb{R}^3 : -\alpha^2 + \tau^2 + \eta^2 = -1, \alpha > 0\}, \\ C & := \{(\alpha, \tau, \eta) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} : -\alpha^2 + \tau^2 + \eta^2 = 0, \alpha > 0\}, \\ S & := \{(\alpha, \tau, \eta) \in \mathbb{R}^3 : -\alpha^2 + \tau^2 + \eta^2 = 1\}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Os conjuntos H , C e S são disjuntos. Além disso, se $(\alpha(0), \tau(0), \eta(0)) \in H$ (resp. C , S) é um valor inicial para a solução $(\alpha(s), \tau(s), \eta(s))$ do sistema (2.9), então $(\alpha(s), \tau(s), \eta(s)) \in H$ (resp. C , S) para todo $s \in I$, de outro modo, cada um desses conjuntos é invariante pelo sistema de equações diferenciais (2.9). Usando coordenadas α, τ e η os conjuntos H , C e S podem ser representados como na Figura 2.1.

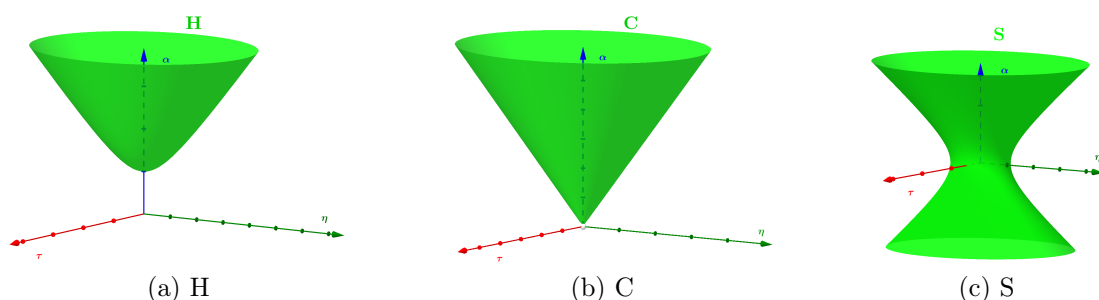


Figura 2.1: Conjuntos de condições iniciais que determinam os sólitos do fluxo FRC.

Nas observações a seguir, vamos usar as Proposições 2.3.1 e 2.3.2 para compreender a relação entre uma solução do sistema (2.9) com condição inicial pertencendo a um dos três conjuntos H , C ou S e um sólito do fluxo redutor de curvas.

Observação 2.3.3 Se a condição inicial de (2.9) $(\alpha(0), \tau(0), \eta(0)) \in H$, isto é, satisfaz

$-\alpha^2(0) + \tau^2(0) + \eta^2(0) = -1$, então existe uma curva $X : I \rightarrow \mathbb{H}^2$ de curvatura

$$k(s) = a\langle T(s), (-1, 0, 0) \rangle$$

que é um sólito para o FRC. O triedro $\{X(s), T(s), N(s)\}$ satisfaz

$$\alpha(s)X(s) + \tau(s)T(s) + \eta(s)N(s) = (-1, 0, 0)$$

para todo $s \in I$. Além disso, considerando $X(s) = (x_1(s), x_2(s), x_3(s))$, a função $\alpha(s) = \langle X(s), (-1, 0, 0) \rangle = x_1(s) > 0$ (X é uma curva de \mathbb{H}^2) e $\alpha(s)$ representa a função altura Euclidiana de $X(s)$ com respeito ao vetor $w = (1, 0, 0)$. Uma representação gráfica de $\alpha(s)$ para cada s é dada na Figura 2.2, onde $\alpha(s)$ é o comprimento do segmento de reta na cor azul que representa a função altura Euclidiana de $\mathbf{X}(s)$ com respeito ao vetor $w = (1, 0, 0)$.

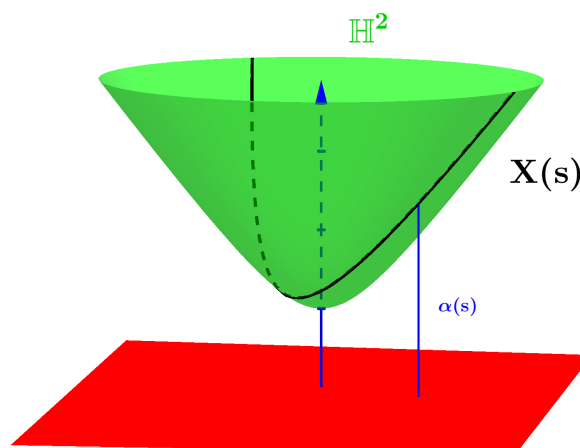


Figura 2.2: Interpretação geométrica de $\alpha(s)$ com $X(s)$ em \mathbb{H}^2 e vetor fixado $(-1, 0, 0)$.

Observação 2.3.4 Se a condição inicial de (2.9) $(\alpha(0), \tau(0), \eta(0)) \in C$, isto é, satisfaz $-\alpha^2(0) + \tau^2(0) + \eta^2(0) = 0$, então existe uma curva $X : I \rightarrow \mathbb{H}^2$ de curvatura

$$k(s) = a\langle T(s), (-1, 1, 0) \rangle$$

que é um sólito para o FRC. O triedro $\{X(s), T(s), N(s)\}$ satisfaz

$$\alpha(s)X(s) + \tau(s)T(s) + \eta(s)N(s) = (-1, 1, 0)$$

para todo $s \in I$. Considerando $X(s) = (x_1(s), x_2(s), x_3(s))$, a função

$$\alpha(s) = \langle X(s), (-1, 1, 0) \rangle = x_1(s) + x_2(s) > 0,$$

pois, X é uma curva de \mathbb{H}^2 , $x_1(s) > 0$, $x_1(s) > x_2(s)$ e

$$-1 - x_3^2 = -x_1^2(s) + x_2^2(s) = [x_1(s) + x_2(s)][-x_1(s) + x_2(s)].$$

Além disso, $\frac{\alpha(s)}{\sqrt{2}}$ representa a função altura Euclidiana de $X(s)$ com respeito ao vetor $w = (1, 1, 0)$. Uma representação gráfica de $\frac{\alpha(s)}{\sqrt{2}}$ para cada s é dada na Figura 2.3, onde $\frac{\alpha(s)}{\sqrt{2}}$ é o segmento de reta na cor azul que representa a função altura Euclidiana de $\mathbf{X}(s)$ com respeito ao vetor $w = (1, 1, 0)$.

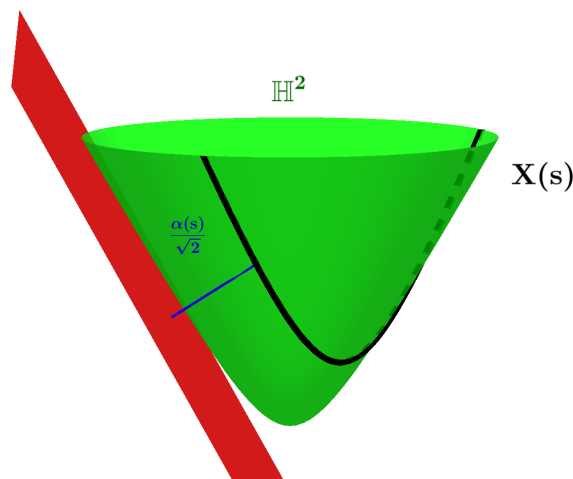


Figura 2.3: Interpretação geométrica de $\alpha(s)$ com $X(s)$ em \mathbb{H}^2 e vetor fixado $(-1, 1, 0)$.

Observação 2.3.5 Se a condição inicial de (2.9) $(\alpha(0), \tau(0), \eta(0)) \in S$, isto é, satisfaz $-\alpha^2(0) + \tau^2(0) + \eta^2(0) = 1$, então existe uma curva $X : I \rightarrow \mathbb{H}^2$ de curvatura

$$k(s) = a \langle T(s), (0, 0, 1) \rangle$$

que é um sóliton para o FRC. O triedro $\{X(s), T(s), N(s)\}$ satisfaz

$$\alpha(s)X(s) + \tau(s)T(s) + \eta(s)N(s) = (0, 0, 1)$$

para todo $s \in I$. Além disso, considerando $X(s) = (x_1(s), x_2(s), x_3(s))$, $|\alpha(s)| =$

$|\langle X(s), (0, 0, 1) \rangle| = |x_3(s)|$ representa a função altura Euclidiana de $X(s)$ com respeito ao vetor $w = (0, 0, 1)$. Uma representação gráfica de $|\alpha(s)|$ para cada s é dada na Figura 2.4, onde $|\alpha(s)|$ é o segmento reta na cor azul que representa a função altura Euclidiana de $\mathbf{X}(s)$ com respeito ao vetor $w = (0, 0, 1)$.

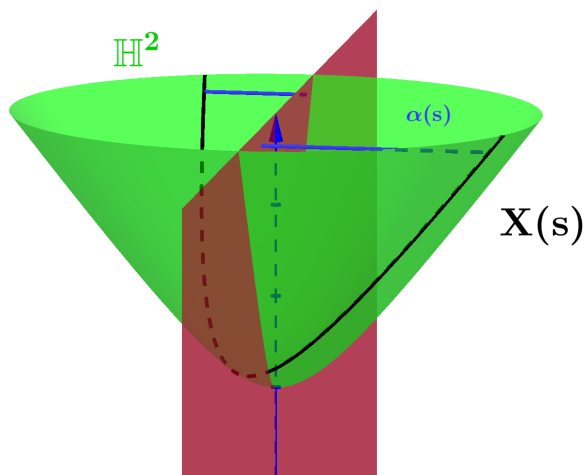


Figura 2.4: Interpretação geométrica de $\alpha(s)$ com $X(s)$ em \mathbb{H}^2 e vetor fixado $(0, 0, 1)$.

Dessa forma, o estudo da descrição de um sóliton X do fluxo FRC em \mathbb{H}^2 é equivalente ao estudo do comportamento de uma solução $\psi(s) = (\alpha(s), \tau(s), \eta(s))$ do sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} \alpha'(s) = \tau(s) \\ \tau'(s) = a\tau(s)\eta(s) + \alpha(s) \\ \eta'(s) = -a\tau^2(s), \end{cases} \quad (2.12)$$

para alguma constante $a > 0$ e $\psi(0) \in H \cup C \cup S \subset \mathbb{R}^3$, onde os conjuntos disjuntos H , C e S são dados por (2.11). As funções $\alpha(s)$, $\tau(s)$ e $\eta(s)$ estão relacionadas com X através da equação (2.10), onde $e \in \{(-1, 0, 0), (-1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$.

Sabemos da Proposição 2.3.2 que, dada uma solução $\psi(s) = (\alpha(s), \tau(s), \eta(s))$ do sistema (2.12) para uma constante $a > 0$ e $\psi(0) \in H \cup C \cup S$, existe uma curva $X : I \rightarrow \mathbb{H}^2$ cuja curvatura é dada por $k(s) = a\tau(s)$, isto é, X é um sóliton do fluxo FRC. Assim, se $\tau(s)$ é uma função constante, então a curvatura de X é constante. Mas vamos provar no próximo lema que $\tau(s)$ não pode ser qualquer constante.

Lema 2.3.6 *Seja $\psi(s) = (\alpha(s), \tau(s), \eta(s))$ uma solução não nula do sistema (2.12) definida no intervalo maximal $I = (\omega_-, \omega_+)$, $a > 0$ e condição inicial $\psi(0) \in H \cup C \cup S$, onde os conjuntos H , C e S são dados por (2.11). A função $\tau(s) = b$, $s \in I$, onde b é uma constante, se e só se, $b \in \{-1, 0, 1\}$, $I = \mathbb{R}$ e $\psi(s) \in S$ para todo $s \in \mathbb{R}$. Além disso,*

i) se $b = 0$, então $\psi(s) = (0, 0, \pm 1)$ são soluções singulares.

ii) se $b^2 = 1$, então $a = 1$ e $\psi(s) = (\pm s + \alpha_0, \pm 1, -s \mp \alpha_0)$.

Demonstração: Se $b = 0$, segue das duas primeiras equações do sistema (2.12) que $\alpha(s) = 0$ para todo $s \in I$. Usando a equação $-\alpha^2(s) + \tau^2(s) + \eta^2(s) = \gamma$, onde $\gamma \in \{-1, 0, 1\}$, obtemos que $\eta^2(s) = 1$ para todo $s \in I$. Logo, $\psi(s) = (0, 0, \pm 1)$, $s \in \mathbb{R}$ é uma solução singular do sistema (2.12) em S .

Se $b \neq 0$, segue das duas últimas equações do sistema (2.12) que,

$$ab\eta(s) = -\alpha(s) \quad \text{e} \quad \eta(s) = -ab^2s + \eta_0,$$

$s \in \mathbb{R}$. Usando a equação $-\alpha^2(s) + \tau^2(s) + \eta^2(s) = \gamma$, onde $\gamma \in \{-1, 0, 1\}$, obtemos que

$$[-a^2b^2 + 1]\eta^2(s) = \gamma - b^2,$$

isto é, a função $[-a^2b^2 + 1]\alpha^2(s)$ é constante. Logo, $a^2b^2 = 1$, e $\alpha(s) = \eta(s)$ se $b = -1$ e $-\alpha(s) = \eta(s)$ se $b = 1$ para todo $s \in \mathbb{R}$. Além disso, $b^2 = 1$, $a = 1$ e $\psi(s) \in S$ para todo $s \in \mathbb{R}$. ■

Do exposto no lema acima, vamos definir uma solução trivial do sistema (2.12).

Definição 2.3.7 Uma solução $\psi(s) = (\alpha(s), \tau(s), \eta(s))$ do sistema (2.12) definida no intervalo maximal $I = (\omega_-, \omega_+)$, $a > 0$ e $\psi(0) \in H \cup C \cup S$ é dita *solução trivial* se $\tau(s)$ é uma função constante.

Observação 2.3.8 Segue do Lema 2.3.6 e da Definição 2.3.7 que as soluções singulares do sistema (2.12) também são soluções triviais de 2.12.

Observe que, se $\psi(0) \in H \cup C$, então a função $\alpha(s)$ é positiva para todo intervalo de solução. Além disso, segue do Lema 2.3.6 que o sistema (2.12) não possui nenhuma

solução trivial no conjunto $H \cup C$. O estudo qualitativo das soluções do sistema (2.12) será separado nas condições iniciais $\psi(0) \in H \cup C$ e $\psi(0) \in S$. Para simplificar a escrita, vamos considerar $-\alpha^2(s) + \tau^2(s) + \eta^2(s) = \delta$, se $\psi(0) \in H \cup C$, onde $\delta = -1$ ou $\delta = 0$.

Ao longo desse capítulo vamos usar com frequência um resultado de equações diferenciais ordinárias, que aplicado ao nosso contexto, diz o seguinte: se $I = (\omega_-, \omega_+)$ é o intervalo maximal da solução $\psi(s) = (\alpha(s), \tau(s), \eta(s))$ do sistema (2.12) com algumas condição inicial fixada e existe $p \in \mathbb{R}^3$ tal que $\lim_{s \rightarrow \omega_+} \psi(s) = p$, então $\omega_+ = +\infty$ e $\bar{\psi}(s) = p$, $s \in \mathbb{R}$ é uma solução singular do sistema (2.12). Vale um resultado similar se trocarmos ω_+ por ω_- . Para mais detalhes, veja [27] e [25].

Vamos iniciar estudando os pontos críticos das funções $\alpha(s)$, $\tau(s)$ e $\eta(s)$ com condições iniciais em $H \cup C$.

Lema 2.3.9 *Seja $\psi(s) = (\alpha(s), \tau(s), \eta(s))$ uma solução do sistema (2.12) definida no intervalo maximal $I = (\omega_-, \omega_+)$, $a > 0$ e condição inicial $\psi(0) \in H \cup C$, onde os conjuntos H e C são dados por (2.11).*

- i) Se s_0 é um ponto crítico de $\alpha(s)$, então s_0 é ponto de mínimo global de $\alpha(s)$.*
- ii) Se s_0 é um ponto crítico de $\tau(s)$, então $a^2\tau^2(s_0) > 1$ e s_0 é ponto de mínimo (resp. máximo) local de $\tau(s)$ se, e somente se $\tau(s_0) < 0$ (resp. $\tau(s_0) > 0$).*

Demonstração: *i)* Seja s_0 um ponto crítico de $\alpha(s)$, então $\alpha'(s_0) = \tau(s_0) = 0$. Derivando $\alpha(s)$ duas vezes e aplicando em s_0 , obtemos

$$\alpha''(s_0) = \tau'(s_0) = a\tau(s_0)\eta(s_0) + \alpha(s_0) = \alpha(s_0) > 0.$$

Logo s_0 é ponto de mínimo local. Mas, qualquer ponto crítico s_0 de $\alpha(s)$ é ponto de mínimo local, então s_0 é ponto de mínimo global de $\alpha(s)$.

ii) Se s_0 é ponto crítico de $\tau(s)$, então $\tau'(s_0) = a\eta(s_0)\tau(s_0) + \alpha(s_0) = 0$ e $\eta(s_0)\tau(s_0) \neq 0$ pois, $\alpha(s) \neq 0$ para todo $s \in I$. Como $\psi(0) \in H \cup C$, então $-\alpha^2(s) + \tau^2(s) + \eta^2(s) = \delta \leq 0$ para todo $s \in I$, onde $\delta \in \{-1, 0\}$. Substituindo $\alpha(s_0) = -a\eta(s_0)\tau(s_0)$, obtemos que

$$\delta = -a^2\tau^2(s_0)\eta^2(s_0) + \tau^2(s_0) + \eta^2(s_0) = \eta^2(s_0)[-a^2\tau^2(s_0) + 1] + \tau^2(s_0) \leq 0.$$

Logo, $-a^2\tau^2(s_0) + 1 < 0$. Derivando $\tau(s)$ duas vezes e aplicando em s_0 , obtemos

$$\begin{aligned}\tau''(s_0) &= a\tau'(s_0)\eta(s_0) + a\tau(s_0)\eta'(s_0) + \alpha'(s_0) = -a^2\tau^3(s_0) + \tau(s_0) \\ &= \tau(s_0) [-a^2\tau^2(s_0) + 1],\end{aligned}$$

o que conclui a demonstração do item. \blacksquare

O próximo lema mostra que sempre existe um ponto crítico para as funções $\alpha(s)$ e $\eta(s)$.

Lema 2.3.10 *Seja $\psi(s) = (\alpha(s), \tau(s), \eta(s))$ uma solução do sistema (2.12) definida no intervalo maximal $I = (\omega_-, \omega_+)$, $a > 0$ e condição inicial $\psi(0) \in C$, onde C é dado por (2.11). Se $\tau(s) > 0$ para todo $s \in I$, então $\tau(s)$ tem no máximo um ponto crítico, $\omega_- = -\infty$,*

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} \psi(s) = (0, 0, 0) \text{ e } \lim_{s \rightarrow \omega_+} -\eta(s) = \lim_{s \rightarrow \omega_+} \alpha(s) = +\infty.$$

Se $\tau(s) < 0$ para todo $s \in I$, então $\tau(s)$ tem no máximo um ponto crítico, $\omega_+ = +\infty$,

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \psi(s) = (0, 0, 0) \text{ e } \lim_{s \rightarrow \omega_-} \eta(s) = \lim_{s \rightarrow \omega_-} \alpha(s) = +\infty.$$

Além disso, $\tau(s)$ é limitada em I e existe s_0 tal que a função $\alpha(s)$ é estritamente monótona nos intervalos (ω_-, s_0) e (s_0, ω_+) .

Demonstração: Se $\tau(s) > 0$, segue do Lema 2.3.9 que $\tau(s)$ tem apenas pontos de máximos locais, ou seja, neste caso, $\tau(s)$ tem no máximo um ponto crítico. A função positiva $\alpha(s)$ é limitada e estritamente crescente em (ω_-, \bar{s}) , $\bar{s} \in I$. Segue da equação $\alpha^2(s) = \tau^2(s) + \eta^2(s)$ e que $\tau(s)$ tem apenas um ponto crítico que, podemos tomar \bar{s} para que as funções $\tau(s)$ e $\eta(s)$ sejam limitadas e monótonas em (ω_-, \bar{s}) . Como I é um intervalo maximal, então $\omega_- = -\infty$. Desde que os limites $\lim_{s \rightarrow -\infty} \alpha(s)$, $\lim_{s \rightarrow -\infty} \alpha'(s) = \lim_{s \rightarrow -\infty} \tau(s)$ e $\lim_{s \rightarrow -\infty} \tau'(s)$ existem, então $\lim_{s \rightarrow -\infty} \tau(s) = 0$ e $\lim_{s \rightarrow -\infty} \alpha(s) = \lim_{s \rightarrow -\infty} \eta(s) = 0$. Usando que a função $\eta(s)$ é sempre decrescente, então $\eta(s) < 0$ para todo $s \in I$.

A função $\alpha(s)$ é ilimitada em (\bar{s}, ω_+) . De fato, suponha que a função estritamente crescente $\alpha(s)$ seja limitada em (\bar{s}, ω_+) . Assim, segue da equação $\alpha^2(s) = \tau^2(s) + \eta^2(s)$ e do Lema 2.3.9 que as funções $\tau(s)$ e $\eta(s)$ também são limitadas e podemos tomar \bar{s} para que sejam monótonas em (\bar{s}, ω_+) . Logo, existe $p \in C$ tal que

$\lim_{s \rightarrow \omega_+} (\alpha(s), \tau(s), \alpha(s)) = p$ e p é uma solução singular em C , o que é uma contradição.

Logo, $\lim_{s \rightarrow \omega_+} \alpha(s) = +\infty$.

Suponha por contradição que a função negativa estritamente decrescente $\eta(s)$ seja limitada em (\bar{s}, ω_+) . Sabemos que $\tau^2(s) + \eta^2(s) = \alpha^2(s)$, então a função $\tau(s)$ é ilimitada e negativa em (\bar{s}, ω_+) , pois, já mostramos que $\alpha(s)$ é ilimitada em (\bar{s}, ω_+) . Assim, podemos escolher \bar{s} de forma que $2\tau(s) < a\tau^2(s)$ para todo $s > \bar{s}$. Usando as equações do sistema (2.12), obtemos que

$$2\alpha(s) - 2\alpha(\bar{s}) = 2 \int_{\bar{s}}^s \tau(s) ds < \int_{\bar{s}}^s a\tau^2(s) ds = -\eta(s) + \eta(\bar{s}), \quad (2.13)$$

ou ainda,

$$2\alpha(s) < -\eta(s) + \eta(\bar{s}) + 2\alpha(\bar{s}),$$

para cada $s \in (\bar{s}, \omega_+)$, o que é uma contradição, pois, $\alpha(s)$ é ilimitada. Portanto, $\eta(s)$ é ilimitada e $\lim_{s \rightarrow \omega_+} \eta(s) = -\infty$.

Suponha que $\tau(s)$ seja ilimitada em (\bar{s}, ω_+) , $\bar{s} \in I$. Assim, escolhendo novamente \bar{s} de forma que $2\tau(s) < a\tau^2(s)$ para todo $s > \bar{s}$. Usando (2.13), obtemos que

$$0 < \alpha(s) + \eta(s) < 2\alpha(\bar{s}) - \eta(\bar{s}) - \alpha(s),$$

o que é uma contradição, pois, $\alpha(s) > \eta(s)$ e já mostramos que $\lim_{s \rightarrow \omega_+} \alpha(s) = +\infty$.

De maneira análoga, se $\tau(s) < 0$, segue do Lema 2.3.9 que $\tau(s)$ tem apenas pontos de mínimos locais, ou seja, neste caso, $\tau(s)$ tem no máximo um ponto crítico. A função positiva $\alpha(s)$ é limitada e estritamente decrescente em (\bar{s}, ω_+) , $\bar{s} \in I$. Segue da equação $\alpha^2(s) = \tau^2(s) + \eta^2(s)$ e do Lema 2.3.9 que podemos tomar \bar{s} para que as funções $\tau(s)$ e $\eta(s)$ sejam limitadas e monótonas em (\bar{s}, ω_+) . Como I é um intervalo maximal, então $\omega_+ = +\infty$. Desde que os limites $\lim_{s \rightarrow +\infty} \alpha(s)$, $\lim_{s \rightarrow +\infty} \alpha'(s) = \lim_{s \rightarrow +\infty} \tau(s)$ e $\lim_{s \rightarrow +\infty} \tau'(s)$ existem, então $\lim_{s \rightarrow +\infty} \tau(s) = 0$ e $\lim_{s \rightarrow +\infty} \alpha(s) = \lim_{s \rightarrow +\infty} \eta(s) = 0$. Usando que a função $\eta(s)$ é sempre decrescente, então $\eta(s) > 0$ para todo $s \in I$.

A função $\alpha(s)$ é ilimitada em (ω_-, \bar{s}) . De fato, suponha por contradição que função estritamente decrescente $\alpha(s)$ seja limitada em (ω_-, \bar{s}) . Assim, segue da equação $\alpha^2(s) = \tau^2(s) + \eta^2(s)$ e do Lema 2.3.9 que as funções $\tau(s)$ e $\eta(s)$ também são limitadas e podemos tomar \bar{s} para que sejam monótonas em (ω_-, \bar{s}) . Logo, existe $p \in C$ tal que

$\lim_{s \rightarrow \omega_-} (\alpha(s), \tau(s), \alpha(s)) = p$ e p é uma solução singular em C , o que é uma contradição.

Suponha por contradição que a função estritamente decrescente $\eta(s)$ seja limitada em (ω_-, \bar{s}) . Sabemos que $\tau^2(s) + \eta^2(s) = \alpha^2(s)$, então a função $\tau(s)$ é ilimitada e negativa em (ω_-, \bar{s}) , pois, já mostramos que $\alpha(s)$ é ilimitada em (ω_-, \bar{s}) . Assim, podemos escolher \bar{s} de forma que $-2\tau(s) < a\tau^2(s)$ para todo $s < \bar{s}$. Usando as equações do sistema (2.12), obtemos que

$$2\alpha(s) - 2\alpha(\bar{s}) = -2 \int_s^{\bar{s}} \tau(s) ds < \int_s^{\bar{s}} a\tau^2(s) ds = \eta(s) - \eta(\bar{s}), \quad (2.14)$$

ou ainda,

$$2\alpha(s) < \eta(s) - \eta(\bar{s}) + 2\alpha(\bar{s}),$$

para cada $s \in (\omega_-, \bar{s})$, o que é uma contradição, pois, $\alpha(s)$ é ilimitada. Portanto, $\eta(s)$ é ilimitada e $\lim_{s \rightarrow \omega_-} \eta(s) = \lim_{s \rightarrow \omega_-} \alpha(s) = +\infty$.

Suponha que $\tau(s)$ seja ilimitada em (ω_-, \bar{s}) , $\bar{s} \in I$. Assim, podemos escolher \bar{s} de forma que $-2\tau(s) < a\tau^2(s)$ para todo $s < \bar{s}$. Usando (2.14), obtemos que

$$0 < \alpha(s) - \eta(s) < 2\alpha(\bar{s}) - \eta(\bar{s}) - \alpha(s),$$

o que é uma contradição, pois, $\alpha(s) > \eta(s)$ e já mostramos que $\lim_{s \rightarrow \omega_-} \alpha(s) = +\infty$. ■

Lema 2.3.11 *Seja $\psi(s) = (\alpha(s), \tau(s), \eta(s))$ uma solução do sistema (2.12) definida no intervalo maximal $I = (\omega_-, \omega_+)$, $a > 0$ e condição inicial $\psi(0) \in H$, onde o conjunto H é dado por (2.11). Então existe um único s_0 , tal que $\alpha'(s_0) = \tau(s_0) = 0$ e a função $\alpha(s)$ é estritamente monótona nos intervalos $(\omega_-, s_0]$ e $[s_0, \omega_+)$.*

Demonstração: Seja $\psi(s)$ uma solução do sistema (2.12) em I com $\psi(0) \in H$. Suponha por contradição que não existe s_0 tal que $\tau(s_0) = 0$. Assim, ou $\tau(s) < 0$ ou $\tau(s) > 0$ para todo $s \in I$.

Se $\tau(s) < 0$, então $\alpha(s)$ é estritamente decrescente. Fixando $\bar{s} \in I$ temos que $1 \leq \alpha(s) \leq \alpha(\bar{s})$ para todo $s > \bar{s}$. Como $-\alpha^2(s) + \tau^2(s) + \eta^2(s) = -1$, então $\tau^2(s) + \eta^2(s) < \alpha^2(s) < \alpha^2(\bar{s})$ para todo $s > \bar{s}$. Logo, as funções $\alpha(s), \eta(s)$ são limitadas e monótonas em $[\bar{s}, \omega_+)$, e existe $\lim_{s \rightarrow \omega_+} \tau(s)$, pois, $\tau^2(s) = -1 + \alpha^2(s) - \eta^2(s)$. Assim, existe $p \in H$ tal que $\lim_{s \rightarrow \omega_+} (\alpha(s), \tau(s), \alpha(s)) = p$. Logo, $\omega_+ = +\infty$ e p é uma

solução singular do sistema (2.12), o que é uma contradição, pois o sistema (2.12) não tem solução singular no conjunto H .

De maneira análoga, se $\tau(s) > 0$, então $\alpha(s)$ é estritamente crescente. Fixando $\bar{s} \in I$ temos que $1 \leq \alpha(s) \leq \alpha(\bar{s})$ para todo $s < \bar{s}$. Como $-\alpha^2(s) + \tau^2(s) + \eta^2(s) = -1$, então $\tau^2(s) + \eta^2(s) < \alpha^2(s) < \alpha^2(\bar{s})$ para todo $s < \bar{s}$. Logo, as funções $\alpha(s)$ e $\eta(s)$ são limitadas e monótonas em $(\omega_-, \bar{s}]$, e existe $\lim_{s \rightarrow \omega_-} \tau(s)$, pois, $\tau^2(s) = -1 + \alpha^2(s) - \eta^2(s)$. Assim, existe $p \in H$ tal que $\lim_{s \rightarrow \omega_-} (\alpha(s), \tau(s), \alpha(s)) = p$, $\omega_- = -\infty$ e p é uma solução singular do sistema (2.12), o que também é uma contradição.

Logo, existe $s_0 \in I$ tal que $\alpha'(s) = \tau(s_0) = 0$. Pelo Lema 2.3.9, s_0 é ponto de mínimo global da função $\alpha(s)$. Portanto, s_0 é único e a função $\alpha(s)$ é estritamente monótona nos intervalos $(\omega_-, s_0]$ e $[s_0, \omega_+)$. ■

Nos três lemas a seguir, vamos supor que $\psi(0) \in H \cup C$ e $\alpha(s)$ tenha um único ponto crítico. Note que, esta hipótese só exclui o caso estudado no Lema 2.3.10, pois, segue do Lema 2.3.9 que $\alpha(s)$ tem no máximo um ponto crítico e pelo Lema 2.3.11 que $\alpha(s)$ sempre tem um único ponto crítico se $\psi(0) \in H$.

Lema 2.3.12 *Seja $\psi(s) = (\alpha(s), \tau(s), \eta(s))$ uma solução do sistema (2.12) definida no intervalo maximal $I = (\omega_-, \omega_+)$, $a > 0$ e condição inicial $\psi(0) \in H \cup C$, onde os conjuntos H e C são dados por (2.11). Se $\alpha(s)$ tem um ponto crítico, então $\lim_{s \rightarrow \omega_-} \alpha(s) = \lim_{s \rightarrow \omega_+} \alpha(s) = \infty$.*

Demonstração: Seja s_0 o ponto de mínimo global de $\alpha(s)$. Assim, $\alpha(s)$ é monótona nos intervalos $(\omega_-, s_0]$ e $[s_0, \omega_+)$. Suponha por contradição que $\alpha(s)$ seja limitada nos intervalos $(\omega_-, s_0]$ e $[s_0, \omega_+)$. Como as funções $\alpha(s)$, $\tau(s)$ e $\eta(s)$ satisfazem $\tau^2(s) + \eta^2(s) = \delta + \alpha^2(s) \leq \alpha^2(s)$, onde $\delta \in \{-1, 0\}$, então as funções $\alpha(s)$ e $\eta(s)$ são limitadas e monótonas nos intervalos $(\omega_-, s_0]$ e $[s_0, \omega_+)$. Os limites $\lim_{s \rightarrow \omega_-} \tau(s)$ e $\lim_{s \rightarrow \omega_+} \tau(s)$ existem, pois, $\tau^2(s) = \delta + \alpha^2(s) - \eta^2(s)$. Logo, existem p_1 e $p_2 \in H \cup C$ tais que $\lim_{s \rightarrow \omega_-} (\alpha(s), \tau(s), \alpha(s)) = p_1$ e $\lim_{s \rightarrow \omega_+} (\alpha(s), \tau(s), \alpha(s)) = p_2$. Assim, $\omega_- = -\infty$, $\omega_+ = +\infty$ e $\{p_1, p_2\}$ é um conjunto de soluções singulares do sistema (2.12). O que é uma contradição, uma vez que, o sistema (2.12) não tem solução singular no conjunto $H \cup C$.

Portanto, a função $\alpha(s)$ é ilimitada nos intervalos $(\omega_-, s_0]$ e $[s_0, \omega_+)$ e $\lim_{s \rightarrow \omega_-} \alpha(s) = \lim_{s \rightarrow \omega_+} \alpha(s) = \infty$. ■

Lema 2.3.13 *Seja $\psi(s) = (\alpha(s), \tau(s), \eta(s))$ uma solução do sistema (2.12) definida no intervalo maximal $I = (\omega_-, \omega_+)$, $a > 0$ e condição inicial $\psi(0) \in H \cup C$, onde os conjuntos H e C são dados por (2.11). Se $\alpha(s)$ tem um ponto crítico, então $\lim_{s \rightarrow \omega_-} \eta(s) = \infty$ e $\lim_{s \rightarrow \omega_+} \eta(s) = -\infty$.*

Demonstração: Seja s_0 o ponto de mínimo global de $\alpha(s)$. Então $\tau(s) < 0$ para $s < s_0$ e $\tau(s) > 0$ para $s > s_0$.

Suponha por contradição que a função $\eta(s)$ seja limitada em $(\omega_-, s_0]$. Sabemos que, $\tau^2(s) + \eta^2(s) = \delta + \alpha^2(s)$, onde $\delta \in \{-1, 0\}$, então segue do Lema 2.3.12 que a função $\tau(s)$ é ilimitada e negativa em (ω_-, s_0) , isto é, existe $s_1 \in (\omega_-, s_0]$ tal que $a\tau(s) < -1$ e portanto $-a\tau^2(s) < \tau(s)$ para todo $s \in (\omega_-, s_1]$. Assim, usando (2.12) para cada $s \in (\omega_-, s_1]$, obtemos que

$$\alpha(s) - \alpha(s_1) = - \int_s^{s_1} \tau(s) ds < \int_s^{s_1} a\tau^2(s) ds = \eta(s) - \eta(s_1),$$

ou seja,

$$\alpha(s) < \eta(s) - \eta(s_1) + \alpha(s_1),$$

para cada $s \in (\omega_-, s_1]$, que contradiz o Lema 2.3.12. Portanto, $\eta(s)$ é ilimitada em $(\omega_-, s_1]$.

Analogamente, suponha por contradição que a função $\eta(s)$ seja limitada em $[s_0, \omega_+)$. Sabendo que $\tau^2(s) + \eta^2(s) = \delta + \alpha^2(s)$, onde $\delta \in \{-1, 0\}$, então segue do Lema 2.3.12 que a função $\tau(s)$ é ilimitada e positiva em (s_0, ω_+) , isto é, existe $s_2 \in [s_0, \omega_+)$ tal que $a\tau(s) > 1$ e portanto $a\tau^2(s) > \tau(s)$ para todo $s \in [s_2, \omega_+)$. Assim, para cada $s \in [s_2, \omega_+)$, obtemos usando (2.12) que

$$\alpha(s) - \alpha(s_2) = \int_{s_2}^s \tau(s) ds < \int_{s_2}^s a\tau^2(s) ds = -\eta(s) + \eta(s_2),$$

ou seja,

$$\alpha(s) < -\eta(s) + \eta(s_2) + \alpha(s_2),$$

para cada $s \in [s_2, \omega_+)$, o que contradiz o Lema 2.3.12. Portanto, $\eta(s)$ é ilimitado em $[s_2, \omega_+)$.

Como a função $\eta(s)$ é decrescente em (ω_-, ω_+) , pois $\eta'(s) = -a\tau^2(s)$. Segue que, $\lim_{s \rightarrow \omega_-} \eta(s) = \infty$ e $\lim_{s \rightarrow \omega_+} \eta(s) = -\infty$. ■

Lema 2.3.14 *Seja $\psi(s) = (\alpha(s), \tau(s), \eta(s))$ uma solução do sistema (2.12) definida no intervalo maximal $I = (\omega_-, \omega_+)$, $a > 0$ e condição inicial $\psi(0) \in H \cup C$, onde os conjuntos H e C são dados por (2.11). Se $\alpha(s)$ tem um ponto crítico, então a função $\tau(s)$ é limitada em I e possui apenas dois pontos críticos.*

Demonstração: Seja $s_0 \in I$ o ponto de mínimo global de $\alpha(s)$. O argumento consiste em estudar a existência e as propriedades dos pontos críticos da função $\tau(s)$. Para isso, vamos provar a seguinte afirmação.

Afirmiação: Se $\tau(s)$ não possui nenhum ponto crítico em I , então $-1 < a\tau(s) < 0$ em (ω_-, s_0) e $0 < a\tau(s) < 1$ em (s_0, ω_+) .

Prova da afirmação: Suponha que $\tau'(s) \neq 0$ para todo $s \in I$. Em s_0 , $\tau(s_0) = 0$, segue da segunda equação do sistema (2.12) que $\tau'(s_0) = \alpha(s_0) > 0$. Como $\tau'(s) \neq 0$ em I , $\tau'(s) = a\tau(s)\eta(s) + \alpha(s) > 0$, $\tau(s)$ é uma função crescente para todo $s \in I$, $\lim_{s \rightarrow \omega_-} \tau(s) \neq 0$ e $\lim_{s \rightarrow \omega_+} \tau(s) \neq 0$. Segue do Lema 2.3.13 que, $\lim_{s \rightarrow \omega_-} \eta(s) = +\infty$ e $\lim_{s \rightarrow \omega_+} \eta(s) = -\infty$ e também sabemos que, $\tau(s)$ é negativa em (ω_-, s_0) e positiva em (s_0, ω_+) . Assim, existem $s_1 \in (\omega_-, s_0)$ e $s_2 \in (s_0, \omega_+)$ tais que $-\alpha(s) < a\tau(s)\eta(s) < 0$ para todo $s \in I \setminus [s_1, s_2]$. Logo, $-\alpha^2(s) < -a^2\tau^2(s)\eta^2(s)$ para todo $s \in I \setminus [s_1, s_2]$ e

$$\delta = -\alpha^2(s) + \tau^2(s) + \eta^2(s) < -a^2\tau^2(s)\eta^2(s) + \tau^2(s) + \eta^2(s),$$

ou ainda,

$$a^2\tau^2(s)\eta^2(s) < -\delta + \tau^2(s) + \eta^2(s).$$

Portanto,

$$1 < \frac{-\delta}{a^2\eta^2(s)\tau^2(s)} + \frac{1}{a^2\eta^2(s)} + \frac{1}{a^2\tau^2(s)}$$

para todo $s \in I \setminus [s_1, s_2]$. Tomando o limite quando s tende a ω_+ e ω_- , usando que $\tau(s)$ é crescente e o Lema 2.3.13, obtemos que

$$\lim_{s \rightarrow \omega_+} \frac{1}{a^2\tau^2(s)} > 1 \quad \text{e} \quad \lim_{s \rightarrow \omega_-} \frac{1}{a^2\tau^2(s)} > 1,$$

ou seja,

$$\lim_{s \rightarrow \omega_+} a^2\tau^2(s) < 1 \quad \text{e} \quad \lim_{s \rightarrow \omega_-} a^2\tau^2(s) < 1.$$

Assim, usando que $\tau(s)$ é crescente, concluímos que $-1 < a\tau(s) < 0$ em (ω_-, s_0) e $0 < a\tau(s) < 1$ em (s_0, ω_+) , o que prova a Afirmação.

Ainda considerando que $\tau(s)$ não tem nenhum ponto crítico, defina as funções $f(s) = \alpha(s) + \eta(s)$ e $g(s) = \alpha(s) - \eta(s)$, que são positivas, pois $\alpha(s) > 0$ e $-\alpha^2(s) + \tau^2(s) + \eta^2(s) = \delta \leq 0$. Derivando uma vez as funções f e g , e usando as equações do sistema (2.12), obtemos que $f'(s) = \tau(s)[1 - a\tau(s)]$ e $g'(s) = \tau(s)[1 + a\tau(s)]$. Segue da Afirmação que as funções f e g são decrescentes quando $\tau(s) < 0$, são crescentes se $\tau(s) > 0$ e

$$0 < f(s) \cdot g(s) = -\delta + \tau^2(s) < \frac{-\delta a^2 + 1}{a^2}$$

para todo $s \in I$, onde $\delta \in \{-1, 0\}$. Logo, as funções f e g são positivas, monótonas e limitadas no intervalo (ω_-, s_0) . Analogamente, as funções f e g são positivas, monótonas e limitadas no intervalo (s_0, ω_+) . Assim, temos que existem $M_1, M_2 \in \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} \alpha(s) + \eta(s) \leq M_1, \\ \alpha(s) - \eta(s) \leq M_2, \end{cases}$$

para todo $s \in (\omega_-, s_0)$ e

$$\begin{cases} \alpha(s) + \eta(s) \leq M_1, \\ \alpha(s) - \eta(s) \leq M_2, \end{cases}$$

para todo $s \in (s_0, \omega_+)$. Logo,

$$2\alpha(s) \leq M_1 + M_2 \quad \forall s \in (\omega_-, s_0) \text{ e } 2\alpha(s) \leq M_1 + M_2 \quad \forall s \in (s_0, \omega_+).$$

As últimas desigualdades contradizem o Lema 2.3.12. Portanto, a função $\tau(s)$ admite pelo menos um ponto crítico em cada intervalo (ω_-, s_0) e (s_0, ω_+) . Mas pelo item *ii*) do Lema 2.3.9, temos que só existem pontos mínimos locais em (ω_-, s_0) e máximos locais em (s_0, ω_+) . Logo $\tau(s)$, possui um único ponto de mínimo local $s_1 \in (\omega_-, s_0)$ e um único ponto de máximo local $s_2 \in (s_0, \omega_+)$. Sendo assim, $\tau(s_1) \leq \tau(s) \leq \tau(s_2)$ para todo $s \in I$. Portanto, $\tau(s)$ é limitada. \blacksquare

Corolário 2.3.15 *Seja $\psi(s) = (\alpha(s), \tau(s), \eta(s))$ uma solução do sistema (2.12) definida no intervalo maximal $I = (\omega_-, \omega_+)$, $a > 0$ e condição inicial $\psi(0) \in H \cup C$, onde os conjuntos H e C são dados por (2.11). Se uma curva X de \mathbb{H}^2 é um sólito do fluxo FRC de curvatura $k(s)$, que corresponde a solução $\psi(s)$, então existem $b, d \in \mathbb{R}$ tais que $\lim_{s \rightarrow \omega_-} k(s) = b$ e $\lim_{s \rightarrow \omega_+} k(s) = d$.*

Demonstração: Se uma curva X em \mathbb{H}^2 é um sólito do fluxo FRC e $\psi(s)$ é a sua solução correspondente do sistema (2.12), então $k(s) = a\tau(s)$. Segue dos Lemas 2.3.10 e 2.3.14 que, a função $\tau(s)$ é limitada e tem no máximo dois pontos críticos. Portanto, existem $b, d \in \mathbb{R}$ tais que $\lim_{s \rightarrow \omega_-} k(s) = b$ e $\lim_{s \rightarrow \omega_+} k(s) = d$. ■

Lema 2.3.16 *Seja $\psi(s) = (\alpha(s), \tau(s), \eta(s))$ uma solução do sistema (2.12) definida no intervalo maximal $I = (\omega_-, \omega_+)$, $a > 0$ e condição inicial $\psi(0) \in H \cup C$, onde os conjuntos H e C são dados por (2.11). Então $I = \mathbb{R}$.*

Demonstração: Segue dos Lemas 2.3.10 e 2.3.14 que a função $\tau(s)$ é limitada, então seja $M > 0$ tal que $|\tau(s)| \leq M$. Usando a expressão de $\alpha'(s)$ do sistema (2.12), obtemos que,

$$|\alpha(s) - \alpha(s_0)| = \left| \int_{s_0}^s \tau(s) ds \right| \leq M|s - s_0| \quad (2.15)$$

para cada $s \in I$. Se $\alpha(s)$ tem um ponto de mínimo global, então segue do Lema 2.3.12 que $\lim_{s \rightarrow \omega_-} \alpha(s) = \lim_{s \rightarrow \omega_+} \alpha(s) = \infty$. Portanto, $I = \mathbb{R}$.

Se $\alpha(s)$ não tem nenhum ponto crítico e $\tau(s) < 0$ (resp. $\tau(s) > 0$) para todo $s \in I$, então segue do Lema 2.3.10 que $\omega_+ = +\infty$ e $\lim_{s \rightarrow \omega_-} \alpha(s) = +\infty$ (resp. $\omega_- = -\infty$ e $\lim_{s \rightarrow \omega_+} \alpha(s) = +\infty$). Usando (2.15), obtemos que $\omega_- = -\infty$ (resp. $\omega_+ = +\infty$). Logo, $I = \mathbb{R}$. ■

Vamos analisar as soluções do sistema (2.12) com condições iniciais no conjunto S . De início, iremos classificar os pontos singulares do sistema que estão no conjunto S .

Lema 2.3.17 *Seja $\Phi : S \rightarrow TS \subset \mathbb{R}^3$ o campo diferenciável dado por*

$$\Phi(\alpha, \tau, \eta) = (\tau, a\tau\eta + \alpha, -a\tau^2),$$

onde $a > 0$. Então $p = (0, 0, 1)$ e $-p = (0, 0, -1)$ são os pontos singulares de Φ e os autovalores de $d\Phi_p$ e $d\Phi_{-p}$ são respectivamente

$$\lambda_p = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 4}}{2}, \quad \lambda_{-p} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 4}}{2}.$$

Demonstração: Note que, se $\Phi(\alpha, \tau, \eta) = 0$, então $\alpha = \tau = 0$ e $\eta = \pm 1$. Logo

$p = (0, 0, 1)$ e $-p = (0, 0, -1)$ são os pontos singulares de Φ . O plano tangente em cada ponto singular é dado por $T_{\pm p}S \approx \{(\alpha, \tau, \eta) \in \mathbb{R}^3 : \eta = 0\}$. Calculando a diferencial de Φ , obtemos

$$d\Phi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & a\eta & a\tau \\ 0 & -2a\tau & 0 \end{pmatrix}.$$

Assim, λ é um autovalor de $d\Phi_{\pm p}$, se existe um vetor não nulo $w \in T_{\pm p}S$ tal que $d\Phi_{\pm p}(w) = \lambda w$, isto é,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & \pm a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda(w_1, w_2, 0).$$

Portanto,

$$\begin{cases} w_2 = \lambda w_1, \\ w_1 \pm a w_2 = \lambda w_2. \end{cases}$$

Então λ satisfaz a equação $\lambda^2 \mp a\lambda - 1 = 0$ e

$$\lambda_p = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 4}}{2} \quad \text{e} \quad \lambda_{-p} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 4}}{2}$$

■

No Lema 2.3.17, vimos que $(0, 0, \pm 1)$ são pontos singulares de sela para o campo Φ em S , isto é, $\psi(s) = (0, 0, \pm 1)$, $s \in I$ são soluções singulares do sistema (2.12). Se as funções $\alpha(s) = \tau(s) = 0$ para todo $s \in I$, temos que $X(s)$ é a interseção da parte superior do hiperboloide de duas folhas e o plano que contém a origem de vetor normal Euclidiano $(0, 0, 1)$. Assim, as duas soluções singulares representam a mesma curva. Para o estudo do comportamento das soluções não triviais do sistema (2.12) consideramos o ponto singular $p = (0, 0, 1)$ e seja $\psi(s, q)$ uma solução do sistema com condição inicial $q \in S$. Como os autovalores do sistema linearizado no ponto singular são não nulos, então localmente o sistema (2.12) tem um comportamento equivalente ao sistema linearizado. Sendo assim, existem condições iniciais $q, \bar{q} \in S \setminus \{p\}$ tais que

$\lim_{s \rightarrow -\infty} \psi(s, q) = p$ e $\lim_{s \rightarrow +\infty} \psi(s, \bar{q}) = p$. Defina os conjuntos

$$W^i(p) = \{q \in S : \lim_{s \rightarrow -\infty} \psi(s, q) = p\} \text{ e } W^e(p) = \{q \in S : \lim_{s \rightarrow +\infty} \psi(s, q) = p\}. \quad (2.16)$$

Sabemos do Lema 2.3.6 que, se a função $\tau(s) = b$, $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ para todo $s \in I$, então $b^2 = a = 1$. Na próxima proposição obtemos duas soluções triviais do sistema (2.12) definidas em \mathbb{R} , $a = b^2 = 1$ e condições iniciais no conjunto S , estas são soluções particulares das que foram obtidas no Lema 2.3.6 com a constante de integração nula. Além disso, também obtemos os sólitos correspondentes a estas soluções.

Proposição 2.3.18 *Seja $\psi(s) = (\alpha(s), \tau(s), \eta(s))$ uma solução do sistema (2.12) definida no intervalo maximal $I = (\omega_-, \omega_+)$, para $a = 1$ e $\psi(0) \in S$, onde o conjunto S é dado por (2.11). Então, $\psi(s) = (-s, -1, -s)$ (resp. $\psi(s) = (s, 1, -s)$), $s \in \mathbb{R}$ satisfaz o sistema (2.12) com condição inicial $(0, -1, 0)$ (resp. $(0, 1, 0)$). Além disso,*

i) a curva

$$X(s) = \left(\frac{1 + l^2 + s^2}{2l}, \frac{l^2 - 1 - s^2}{2l}, -s \right), \quad (2.17)$$

onde $l > 0$ é o sólito do fluxo FRC em \mathbb{H}^2 correspondente a solução $\psi(s) = (-s, -1, -s)$ do sistema (2.12);

ii) a curva

$$\bar{X}(s) = \left(\frac{1 + l^2 + s^2}{2l}, \frac{l^2 - 1 - s^2}{2l}, s \right),$$

onde $l > 0$ é o sólito do fluxo FRC em \mathbb{H}^2 correspondente a solução $\psi(s) = (s, 1, -s)$ do sistema (2.12).

Demonstração: Note que, as funções $\alpha(s) = \eta(s) = -s$ e $\tau(s) = -1$, $s \in \mathbb{R}$ satisfazem o sistema (2.12) com $a = 1$; em particular, para $s = 0$ obtemos que $\alpha(0) = \eta(0) = 0$ e $\tau(0) = -1$. Analogamente, as funções $-\alpha(s) = \eta(s) = -s$ e $\tau(s) = 1$, $s \in \mathbb{R}$ satisfazem o sistema (2.12) com $a = 1$; em particular, para $s = 0$ obtemos que $\alpha(0) = \eta(0) = 0$ e $\tau(0) = 1$.

i) Veja que, se a curva $X(s)$ é dada por (2.17), então

$$\begin{aligned} T(s) &= \left(\frac{s}{l}, -\frac{s}{l}, 1 \right), \\ N(s) &= X(s) \times T(s) = \left(\frac{-1 + l^2 + s^2}{2l}, \frac{l^2 + 1 - s^2}{2l}, -s \right), \end{aligned}$$

$\alpha(s) = \langle X(s), (0, 0, 1) \rangle = s$, $\tau(s) = \langle T(s), (0, 0, 1) \rangle = 1$ e $\eta(s) = \langle N(s), (0, 0, 1) \rangle = -s$. Como $(s, 1, -s)$, $s \in \mathbb{R}$ é uma solução do sistema (2.12) com condição inicial $(0, 0, 1) \in S$, segue da Proposição 2.3.1 que $k(s) = \tau(s) = 1$. Logo, $X(s)$ é um sólito do fluxo FRC que corresponde à solução $(s, 1, -s)$ do sistema (2.12) com $a = 1$.

ii) Vamos omitir a demonstração deste item, pois, pode ser feita de maneira inteiramente análoga ao item *i*). ■

Apresentamos na Figura 2.5 o gráfico da curva $X(s)$ em \mathbb{H}^2 dada pela equação (2.17) com $l = 1$.

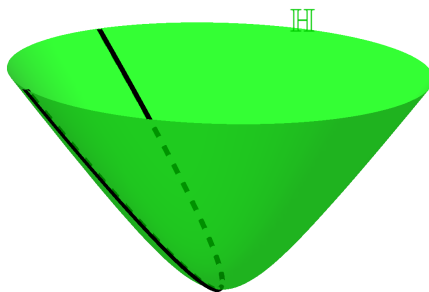


Figura 2.5: Sólito do fluxo FRC com $a = 1$, vetor fixado $(0, 0, 1)$ e condição inicial $(0, 0, 1)$.

Nos próximos lemas estudamos o comportamento das funções $\alpha(s)$, $\tau(s)$ e $\eta(s)$ quando $\psi(s) = (\alpha(s), \tau(s), \eta(s))$ é uma solução não trivial do sistema (2.12) e $\psi(0) \in S$.

Lema 2.3.19 *Seja $\psi(s) = (\alpha(s), \tau(s), \eta(s))$ uma solução não trivial do sistema (2.12) definida no intervalo maximal $I = (\omega_-, \omega_+)$, $a > 0$ e condição inicial $\psi(0) \in S$, onde o conjunto S é dado por (2.11). Se $s_0 \in I$ é ponto crítico de $\alpha(s)$, então s_0 é ponto de mínimo (resp. máximo) global de $\alpha(s)$ se, e somente se, $\alpha(s_0) > 0$ (resp. $\alpha(s_0) < 0$).*

Demonstração: Seja s_0 um ponto crítico de $\alpha(s)$, então $\tau(s_0) = 0$. Segue da segunda equação do sistema (2.12) que

$$\alpha''(s_0) = \alpha(s_0). \quad (2.18)$$

Veja que, se $\alpha(s_0) = \tau(s_0) = 0$ e $\eta(s_0) = 1$, então a função $\alpha(s)$ é constante, pois, $(0, 0, 1)$ é uma solução singular do sistema (2.12), ou seja, uma solução trivial.

Segue da equação (2.18) que s_0 é ponto de mínimo local de $\alpha(s)$ se $\alpha(s_0) > 0$. Se existir outro ponto crítico s_1 de $\alpha(s)$, de forma que, s_0 e s_1 são consecutivos, então

$\alpha(s_1) > \alpha(s_0) > 0$, pois, s_0 é ponto de mínimo local. Assim, $\alpha''(s_1) = \alpha(s_1) > 0$ e s_1 é ponto de mínimo local de $\alpha(s)$, o que é uma contradição. Portanto, se $\alpha(s_0) > 0$, então s_0 é o único ponto crítico de $\alpha(s)$ e é ponto de mínimo global.

De maneira análoga, se $\alpha(s_0) < 0$, então pela equação (2.18) s_0 é ponto de máximo local para a função $\alpha(s)$. Se existir outro ponto crítico s_1 de $\alpha(s)$, de forma que, s_0 e s_1 são consecutivos, então $\alpha(s_1) < \alpha(s_0) < 0$, pois, s_0 é ponto de máximo local. Assim, $\alpha''(s_1) = \alpha(s_1) < 0$ e s_1 é ponto de máximo local de $\alpha(s)$, o que é uma contradição. Portanto, se $\alpha(s_0) < 0$, então s_0 é o único ponto crítico de $\alpha(s)$ e é ponto de máximo global. ■

Note que, se uma solução $\psi(s) = (\alpha(s), \tau(s), \eta(s))$ do sistema (2.12) com $\psi(0) \in S$ não possui ponto crítico para a função $\alpha(s)$, então $\alpha(s)$ é monótona em I . Pelo Lema 2.3.19, qualquer solução do sistema (2.12) tal que $\psi(0) \in W^i \cup W^e \setminus \{(0, 0, 1)\}$ não possui nenhum ponto crítico para as funções $\alpha(s)$ e $\eta(s)$. Como $\eta'(s) = -a\tau^2(s) \leq 0$ para todo $s \in I$, então $\eta(s)$ é uma função monótona em I . Pode-se mostrar também que qualquer ponto crítico de $\eta(s)$ é ponto de inflexão.

Lema 2.3.20 *Seja $\psi(s)$ uma solução não trivial do sistema (2.12) definida no intervalo maximal $I = (\omega_-, \omega_+)$, $a > 0$ e condição inicial $\psi(0) \in S$, onde o conjunto S é dado por (2.11). Então $\tau(s)$ não admite ponto crítico degenerado.*

Demonstração: Seja s_0 é um ponto crítico degenerado, isto é, $\tau'(s_0) = \tau''(s_0) = 0$. Como, $\tau'(s_0) = a\tau(s_0)\eta(s_0) + \alpha(s_0) = 0$ e $\tau''(s_0) = \tau(s_0)[-a^2\tau^2(s_0) + 1] = 0$ e $\psi(s)$ é não trivial, então $\tau(s_0) = \pm\frac{1}{a}$ e $-\alpha(s_0) = \pm\eta(s_0)$.

Note que, se $a = 1$, então $\tau(s_0) = \pm 1$. Logo, $\tau(s)$ é constante, pois, segue da Proposição 2.3.18 que $(\pm s, \pm 1, -s)$ são soluções triviais do sistema (2.12).

Se $a \neq 1$, segue da equação $-\alpha^2(s) + \tau^2(s) + \eta^2(s) = 1$ que,

$$-\eta^2(s_0) + \frac{1}{a^2} + \eta^2(s_0) = 1,$$

logo, $a = 1$, o que é uma contradição.

Portanto, $\tau(s)$ não admite ponto crítico degenerado. ■

Lema 2.3.21 *Seja $\psi(s) = (\alpha(s), \tau(s), \eta(s))$ uma solução não trivial do sistema (2.12) definida no intervalo maximal $I = (\omega_-, \omega_+)$, $a > 0$ e condição inicial $\psi(0) \in S$, onde*

o conjunto S é dado por (2.11). Então existe s_0 tal que a função $\alpha(s)$ é monótona nos intervalos (ω_-, s_0) e (s_0, ω_+) .

Demonstração: Seja $\psi(s) = (\alpha(s), \tau(s), \alpha(s))$ uma solução do sistema (2.12) em I , para alguma constante $a > 0$ e $\psi(0) \in S$. Note que, se existe s_0 ponto crítico de $\alpha(s)$, então pelo Lema 2.3.19, s_0 é ponto de máximo global ou ponto de mínimo global e $\alpha(s)$ é estritamente monótona nos intervalos $(\omega_-, s_0]$ e $[s_0, \omega_+)$. Se $\alpha(s)$ não tem nenhum ponto crítico, então a função $\alpha(s)$ é estritamente monótona em todo I . Logo, sempre existe $s_0 \in I$ tal que a função $\alpha(s)$ é monótona nos intervalos (ω_-, s_0) e (s_0, ω_+) . ■

Lema 2.3.22 *Seja $\psi(s) = (\alpha(s), \tau(s), \eta(s))$ uma solução não trivial do sistema (2.12) definida no intervalo maximal $I = (\omega_-, \omega_+)$, $a > 0$ e condição inicial $\psi(0) \in S$, onde o conjunto S é dado por (2.11). Considere $W^i(p)$ e $W^e(p)$ dados por (2.16). Se $\psi(0) \in S \setminus W^i(p)$ (resp. $S \setminus W^e(p)$), então $\lim_{s \rightarrow \omega_-} |\alpha(s)| = +\infty$ (resp. $\lim_{s \rightarrow \omega_+} |\alpha(s)| = +\infty$).*

Demonstração: Seja $\psi(s) = (\alpha(s), \tau(s), \alpha(s))$ uma solução não trivial do sistema (2.12) definida em I , para alguma constante $a > 0$ e $\psi(0) \in S$. Pelo Lema 2.3.21 existe $s_0 \in I$ tal que a função $\alpha(s)$ é monótona nos intervalos (ω_-, s_0) e (s_0, ω_+) .

Seja $\psi(0) \in S \setminus W^i(p)$ e suponha por contradição que $\alpha(s)$ seja limitada em (ω_-, s_0) . Como $\tau^2(s) + \eta^2(s) = \alpha^2(s) + 1$, então as funções $\alpha(s)$ e $\eta(s)$ são limitadas e monótonas em (ω_-, s_0) . O limite $\lim_{s \rightarrow \omega_-} \tau(s)$ existe, pois, $\tau^2(s) = -\eta^2(s) + \alpha^2(s) + 1$. Logo, existe $q \in \mathbb{R}_1^3$ tal que, $\lim_{s \rightarrow \omega_-} (\alpha(s), \tau(s), \alpha(s)) = q$, $\omega_- = -\infty$ e q é uma solução singular do sistema (2.12). Mas, o sistema (2.12) não tem solução singular no conjunto $S \setminus W^i(p)$. Portanto, $\lim_{s \rightarrow \omega_-} |\alpha(s)| = +\infty$.

De modo análogo, seja $\psi(0) \in S \setminus W^e(p)$ e suponha por contradição que $\alpha(s)$ seja limitada em (s_0, ω_+) . Como $\tau^2(s) + \eta^2(s) = \alpha^2(s) + 1$, então as funções $\alpha(s)$, $\tau(s)$, $\eta(s)$ são limitadas com $\alpha(s)$ e $\eta(s)$ monótonas em (s_0, ω_+) e existe $\lim_{s \rightarrow \omega_+} \tau(s)$. Logo, existe $q \in \mathbb{R}_1^3$ tal que $\lim_{s \rightarrow \omega_+} (\alpha(s), \tau(s), \alpha(s)) = q$. Assim, $\omega_+ = +\infty$ e q é uma solução singular do sistema (2.12). Mas, o sistema (2.12) não tem solução singular no conjunto $S \setminus W^e(p)$. Portanto, $\lim_{s \rightarrow \omega_+} |\alpha(s)| = +\infty$. ■

O lema a seguir mostra que $\tau(s)$ é limitada, ou seja, a curvatura de um sóliton X em \mathbb{H}^2 é limitada.

Lema 2.3.23 *Seja $\psi(s) = (\alpha(s), \tau(s), \eta(s))$ uma solução não trivial do sistema (2.12) definida no intervalo maximal $I = (\omega_-, \omega_+)$, $a > 0$ e condição inicial $\psi(0) \in S$, onde o conjunto S é dado por (2.11). Então a função $\tau(s)$ é limitada em I .*

Demonstração: Seja $\psi(s) = (\alpha(s), \tau(s), \alpha(s))$ uma solução não trivial do sistema (2.12) definida em I , $a > 0$ e condição inicial $\psi(0) \in S$. Pelo Lema 2.3.21 existe $s_0 \in I$ tal que a função $\alpha(s)$ é monótona nos intervalos (ω_-, s_0) e (s_0, ω_+) . Além disso, segue da Proposição 2.3.1 que a função $\eta(s)$ é monótona.

Se $\psi(0) \in W^e(p)$, onde p é o ponto singular, então $\lim_{s \rightarrow +\infty} \tau(s) = 0$ e $\tau(s)$ é limitada em $(\bar{s}, +\infty)$ para qualquer $\bar{s} \in I$ fixado. Analogamente, se $\psi(0) \in W^i(p)$, então $\lim_{s \rightarrow -\infty} \tau(s) = 0$ e $\tau(s)$ é limitada em $(-\infty, \bar{s})$ para qualquer $\bar{s} \in I$ fixado. A demonstração para os casos em que a condição inicial pertence a $S \setminus W^i(p)$ (resp. $S \setminus W^e(p)$) será feita por contradição, ou seja, supondo que $\tau(s)$ é ilimitada no intervalo (ω_-, s_0) (resp. (s_0, ω_+)).

Afirmção: Se $\tau(s)$ é ilimitada em (s_0, ω_+) (resp. (ω_-, s_0)) e $M \in \mathbb{R}^+$, então existe $\bar{s} \in (s_0, \omega_+)$ (resp. (ω_-, s_0)) tal que $|\tau(s)| > M$ para todo $s > \bar{s}$ (resp. $s < \bar{s}$). De fato, se $\tau(s)$ é monótona em algum intervalo do tipo (s_1, ω_+) (resp. (ω_-, s_2)), onde $s_1, s_2 \in I$, a afirmação segue. Suponha que $\tau(s)$ não seja monótona em nenhum intervalo do tipo (s_1, ω_+) (resp. (s_2, ω_+)), $s_1, s_2 \in I$, seja $(s_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset (s_0, \omega_+)$ (resp. (ω_-, s_0)) é um conjunto infinito de pontos críticos de $\tau(s)$ e $\lim_{k \rightarrow +\infty} s_k = \omega_+$ (resp. $\lim_{k \rightarrow +\infty} s_k = \omega_-$). Segue da segunda equação do sistema (2.12) que $a\tau(s_k)\eta(s_k) = -\alpha(s_k)$ e da equação $-\alpha^2(s) + \tau^2(s) + \eta^2(s) = 1$, obtemos que

$$\tau^2(s_k) = \frac{1 - \eta^2(s_k)}{-a^2\eta^2(s_k) + 1} \quad (2.19)$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Se $(s_{kn})_{n \in \mathbb{N}}$ é uma subsequência de pontos de mínimos locais de $|\tau(s)|$ tal que $|\tau(s_{kn})| < M$ e $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_{kn} = \omega_+$ (resp. $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_{kn} = \omega_-$), então

$$|\alpha(s_{kn})| = a|\tau(s_{kn})||\eta(s_{kn})| < aM|\eta(s_{kn})|$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Sabemos do Lema 2.3.22 que, se $\psi(0) \in S \setminus W^i(p)$ (resp. $S \setminus W^e(p)$), então $\lim_{s \rightarrow \omega_-} |\alpha(s)| = +\infty$ (resp. $\lim_{s \rightarrow \omega_+} |\alpha(s)| = +\infty$). Assim, $\lim_{n \rightarrow \infty} |\eta(s_{kn})| = +\infty$. Como $\eta(s)$ é monótona e decrescente, obtemos que $\lim_{s \rightarrow \omega_+} \eta(s) = -\infty$ (resp. $\lim_{s \rightarrow \omega_-} \eta(s) = +\infty$).

Logo, segue da equação (2.19) que o conjunto dos pontos críticos de $\tau(s)$ é limitado, o que é uma contradição, pois, por hipótese $\tau(s)$ é ilimitada em (s_0, ω_+) (resp. (ω_-, s_0)). Logo, existe $\bar{s} \in (s_0, \omega_+)$ (resp. (ω_-, s_0)) tal que $|\tau(s)| > M$ para todo $s > \bar{s}$ (resp. $s < \bar{s}$).

Seja $\psi(0) \in S \setminus W^i(p)$ e suponha por contradição que $\tau(s)$ seja ilimitada em (ω_-, s_0) , então segue da Afirmação que existe $\bar{s} \in (\omega_-, s_0)$ tal que $|\tau(s)| > 1$ e $a|\tau(s)| > 2$ para todo $s \in (\omega_-, \bar{s})$. Assim, $|\alpha(s)| > |\eta(s)|$, pois, $\alpha^2(s) - \eta^2(s) = \tau^2(s) - 1 > 0$ e $a\tau^2(s) > 2|\tau(s)|$ para todo $s \in (\omega_-, \bar{s})$. Pelo Lema 2.3.21 a função $\tau(s)$ tem sinal definido em (ω_-, \bar{s}) .

Se $\alpha'(s) = \tau(s) < 0$ em (ω_-, \bar{s}) , então $\alpha(s)$ é estritamente decrescente em (ω_-, \bar{s}) . Assim, segue do Lema 2.3.22 que, $\lim_{s \rightarrow \omega_-} \alpha(s) = +\infty$. Logo, \bar{s} pode ser escolhido de forma que a função $\alpha(s)$ seja decrescente e positiva para todo $s < \bar{s}$. Sendo assim, usando as equações do sistema (2.12) e que $a\tau^2(s) > 2|\tau(s)|$, obtemos que

$$2\alpha(s) - 2\alpha(\bar{s}) = -2 \int_s^{\bar{s}} \tau(s) ds < \int_s^{\bar{s}} a\tau^2(s) ds = \eta(s) - \eta(\bar{s}),$$

ou ainda,

$$0 < \alpha(s) - \eta(s) < 2\alpha(\bar{s}) - \eta(\bar{s}) - \alpha(s).$$

Mas, pelo Lema 2.3.22, $\lim_{s \rightarrow \omega_-} \alpha(s) = +\infty$, o que é uma contradição. Logo, $\tau(s)$ é limitada em (ω_-, \bar{s}) .

Se $\alpha'(s) = \tau(s) > 0$ em (ω_-, \bar{s}) , então $\alpha(s)$ é estritamente crescente em (ω_-, \bar{s}) . Assim, segue do Lema 2.3.22 que, $\lim_{s \rightarrow \omega_-} \alpha(s) = -\infty$. Logo, \bar{s} pode ser escolhido de forma que a função $\alpha(s)$ seja crescente e negativa para todo $s < \bar{s}$. Sendo assim, usando as equações do sistema (2.12) e que $a\tau^2(s) > 2|\tau(s)|$, obtemos que

$$2\alpha(s_2) - 2\alpha(s) = 2 \int_s^{s_2} \tau(s) ds < \int_s^{s_2} a\tau^2(s) ds = -\eta(s_2) + \eta(s),$$

ou ainda,

$$0 < -\alpha(s) - \eta(s) < -2\alpha(s_2) - \eta(s_2) + \alpha(s).$$

Mas, pelo Lema 2.3.22, $\lim_{s \rightarrow \omega_-} \alpha(s) = -\infty$, o que é uma contradição. Logo, $\tau(s)$ é limitada em (ω_-, \bar{s}) .

Analogamente, seja $\psi(0) \in S \setminus W^e(p)$ e suponha por contradição que $\tau(s)$ seja ilimitada em (s_0, ω_+) , então segue da Afirmação que existe $\bar{s} \in (s_0, \omega_+)$ tal que $|\tau(s)| > 1$ e $a|\tau(s)| > 2$ para todo $s \in (\bar{s}, \omega_+)$. Assim, $|\alpha(s)| > |\eta(s)|$, pois, $\alpha^2(s) - \eta^2(s) = \tau^2(s) - 1 > 0$ e $a\tau^2(s) > 2|\tau(s)|$ para todo $s \in (\bar{s}, \omega_+)$. Pelo Lema 2.3.21 a função $\tau(s)$ tem sinal definido em (\bar{s}, ω_+) .

Se $\alpha'(s) = \tau(s) < 0$ em (\bar{s}, ω_+) , então a função $\alpha(s)$ é estritamente decrescente em (\bar{s}, ω_+) . Assim, segue do Lema 2.3.22 que, $\lim_{s \rightarrow \omega_+} \alpha(s) = -\infty$. Logo, \bar{s} pode ser escolhido de forma que a função $\alpha(s)$ é decrescente e negativa para todo $s > \bar{s}$. Sendo assim, usando as equações do sistema (2.12) e que $a\tau^2(s) > 2|\tau(s)|$, obtemos que

$$-2\alpha(s) + 2\alpha(\bar{s}) = -2 \int_{\bar{s}}^s \tau(s) ds < \int_{\bar{s}}^s a\tau^2(s) ds = -\eta(s) + \eta(\bar{s}),$$

ou ainda,

$$0 < -\alpha(s) - \eta(s) < -2\alpha(\bar{s}) + \eta(\bar{s}) + \alpha(s)$$

para cada $s \in (\bar{s}, \omega_+)$. Mas, pelo Lema 2.3.22, $\lim_{s \rightarrow \omega_+} \alpha(s) = -\infty$, o que é uma contradição. Logo, $\tau(s)$ é limitada em (\bar{s}, ω_+) .

Se $\alpha'(s) = \tau(s) > 0$ em (\bar{s}, ω_+) , então a função $\alpha(s)$ é estritamente crescente em (\bar{s}, ω_+) . Assim, segue do Lema 2.3.22 que, $\lim_{s \rightarrow \omega_+} \alpha(s) = +\infty$. Logo, \bar{s} pode ser escolhido de forma que a função $\alpha(s)$ é crescente e positiva para todo $s > \bar{s}$. Sendo assim, usando as equações do sistema (2.12) e que $a\tau^2(s) > 2|\tau(s)|$, obtemos que

$$2\alpha(s) - 2\alpha(\bar{s}) = 2 \int_{\bar{s}}^s \tau(s) ds < \int_{\bar{s}}^s a\tau^2(s) ds = -\eta(s) + \eta(\bar{s}),$$

ou ainda,

$$0 < \alpha(s) + \eta(s) < 2\alpha(\bar{s}) + \eta(\bar{s}) - \alpha(s)$$

para cada $s \in (\bar{s}, \omega_+)$. Mas, pelo Lema 2.3.22, $\lim_{s \rightarrow \omega_+} \alpha(s) = +\infty$, o que é uma contradição. Logo, $\tau(s)$ é limitada em (\bar{s}, ω_+) .

Portanto, para qualquer condição inicial $\psi(0) \in S$, a função $\tau(s)$ é limitada em I . ■

O próximo lema traz o comportamento da função $\eta(s)$.

Lema 2.3.24 *Seja $\psi(s) = (\alpha(s), \tau(s), \eta(s))$ uma solução não trivial do sistema (2.12) definida no intervalo maximal $I = (\omega_-, \omega_+)$, $a > 0$ e condição inicial $\psi(0) \in S$, onde o conjunto S é dado por (2.11). Considere $W^i(p)$ e $W^e(p)$ dados por (2.16). Se $\psi(0) \in S \setminus W^i(p)$ (resp. $S \setminus W^e(p)$), então $\lim_{s \rightarrow \omega_-} \eta(s) = +\infty$ (resp. $\lim_{s \rightarrow \omega_+} \eta(s) = -\infty$).*

Demonstração: Sabemos do Lema 2.3.23 que a função $\tau(s)$ é limitada em I . Usando o Lema 2.3.11, temos que a função $\alpha(s)$ é ilimitada no intervalo (ω_-, \bar{s}) se $\psi(0) \in S \setminus W^i(p)$ e $\alpha(s)$ é ilimitada no intervalo (\bar{s}, ω_+) se $\psi(0) \in S \setminus W^e(p)$ para qualquer $\bar{s} \in I$. Assim, segue da equação $\tau^2(s) + \eta^2(s) = \alpha^2(s) + 1$ que $\eta(s)$ é ilimitada no intervalo (ω_-, \bar{s}) se $\psi(0) \in S \setminus W^i(p)$ e $\eta(s)$ é ilimitada no intervalo (\bar{s}, ω_+) se $\psi(0) \in S \setminus W^e(p)$ para qualquer $\bar{s} \in I$. Segue da Proposição 2.3.1 que $\eta(s)$ é decrescente. Portanto, se $\psi(0) \in S \setminus W^i(p)$, então $\lim_{s \rightarrow \omega_-} \eta(s) = +\infty$, e se $\psi(0) \in S \setminus W^e(p)$, então $\lim_{s \rightarrow \omega_+} \eta(s) = -\infty$. ■

Lema 2.3.25 *Seja $\psi(s) = (\alpha(s), \tau(s), \eta(s))$ uma solução não trivial do sistema (2.12) definida no intervalo maximal $I = (\omega_-, \omega_+)$, $a > 0$ e condição inicial $\psi(0) \in S$, onde o conjunto S é dado por (2.11). Então, $I = \mathbb{R}$.*

Demonstração: Segue do Lema 2.3.23 que a função $\tau(s)$ é limitada no intervalo I , então seja $M > 0$ tal que $|\tau(s)| \leq M$ para todo $s \in I$. Usando a expressão de $\alpha'(s)$ do sistema (2.12), obtemos que

$$|\alpha(s) - \alpha(s_0)| = \left| \int_{s_0}^s \tau(s) ds \right| \leq M|s - s_0| \quad (2.20)$$

para cada $s \in I$. Inicialmente, vamos mostrar que $\omega_- = -\infty$.

Se $\psi(0) \in S \setminus W^i(p)$, então pelo Lema 2.3.22 temos que $\alpha(s)$ é ilimitada em (ω_-, \bar{s}) para qualquer $\bar{s} \in I$ fixado. Logo, usando a equação (2.20) obtemos que $\omega_- = -\infty$. Segue da definição de $W^i(p)$ que $\omega_- = -\infty$ quando $\psi(0) \in W^i(p)$. Como $S = W^i(p) \cup [S \setminus W^i(p)]$, então $\omega_- = -\infty$ para qualquer solução do sistema (2.12) definida no intervalo maximal I e com condição inicial no conjunto S .

De maneira análoga, se $\psi(0) \in S \setminus W^e(p)$, então pelo Lema 2.3.22 temos que $\alpha(s)$ é ilimitada em (\bar{s}, ω_+) para qualquer $\bar{s} \in I$ fixado. Logo, segue da equação (2.20) que $\omega_+ = +\infty$. Usando a definição de $W^e(p)$, temos que $\omega_+ = +\infty$ quando $\psi(0) \in W^e(p)$. Como $S = W^e(p) \cup [S \setminus W^e(p)]$, então $\omega_+ = +\infty$ para qualquer solução do sistema (2.12) definida no intervalo maximal I e com condição inicial no conjunto S .

Portanto, $I = \mathbb{R}$. ■

Lema 2.3.26 *Seja $\psi(s) = (\alpha(s), \tau(s), \eta(s))$ uma solução não trivial do sistema (2.12) definida em \mathbb{R} , $a > 0$ e condição inicial $\psi(0) \in S$, onde o conjunto S é dado por (2.11). Os limites $\lim_{s \rightarrow -\infty} \tau(s)$ e $\lim_{s \rightarrow +\infty} \tau(s)$ convergem para números reais.*

Demonstração: Para os demais casos, vamos usar as informações dos pontos críticos de $\tau(s)$. Se $\tau(s)$ possui um número finito de pontos críticos, sejam s_1 o menor ponto crítico, s_2 o maior ponto crítico e assim, $\tau(s)$ é monótona e limitada nos intervalos $(-\infty, s_1)$ e (s_2, ∞) . Logo, os limites descritos no lema existem.

Suponha que $\tau(s)$ não é constante e possui uma quantidade infinita de pontos críticos. Pelo Lema 2.3.20, a função $\tau(s)$ não tem ponto crítico degenerado. Como $\tau(s)$ é suave, então existe no máximo uma quantidade enumerável de pontos críticos. Seja $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$ todos os pontos críticos de $\tau(s)$ em $(0, +\infty)$ com $s_k < s_{k+1}$ e $\lim_{k \rightarrow +\infty} s_k = \infty$. Assim, $\tau'(s_k) = a\tau(s_k)\eta(s_k) + \alpha(s_k) = 0$, $\lim_{k \rightarrow +\infty} \eta(s_k) = -\infty$, $(\tau(s_k))_{k \in \mathbb{N}}$ é um conjunto limitado e

$$1 = -a^2\eta^2(s_k)\tau^2(s_k) + \tau^2(s_k) + \eta^2(s_k) = \eta^2(s_k)[-a^2\tau^2(s_k) + 1] + \tau^2(s_k).$$

Como $\eta(s)$ é decrescente, podemos tomar a sequência $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$, de forma que $\eta(s_k) \neq 0$. Sendo assim,

$$\frac{-1 + \tau^2(s_k)}{\eta^2(s_k)} = a^2\tau^2(s_k) - 1.$$

Seja $M \in \mathbb{R}$ tal que $|\tau(s)| \leq M$ para todo $s \in \mathbb{R}$. Assim,

$$\frac{-1}{\eta^2(s_k)} < \frac{-1 + \tau^2(s_k)}{\eta^2(s_k)} = a^2\tau^2(s_k) - 1 < \frac{-1 + M^2}{\eta^2(s_k)}.$$

Logo, $\lim_{k \rightarrow +\infty} a^2\tau^2(s_k) - 1 = 0$, ou seja, a sequência formada pelo o conjunto dos pontos de máximos e de mínimos locais converge. Portanto, existe o limite $\lim_{s \rightarrow +\infty} \tau(s)$. No outro caso, a demonstração é feita de maneira inteiramente análoga. ■

Corolário 2.3.27 *Seja $\psi(s) = (\alpha(s), \tau(s), \eta(s))$ uma solução não trivial do sistema (2.12) definida em \mathbb{R} , $a > 0$ e condição inicial $\psi(0) \in S$, onde S é dado por (2.11). Se*

uma curva X de \mathbb{H}^2 é um sólito do fluxo FRC de curvatura $k(s)$, que corresponde à solução $\psi(s)$, então existem $b, d \in \mathbb{R}$ tais que $\lim_{s \rightarrow \omega_-} k(s) = b$ e $\lim_{s \rightarrow \omega_+} k(s) = d$.

Demonstração: Se uma curva X em \mathbb{H}^2 é um sólito do fluxo FRC em \mathbb{H}^2 e $\psi(s)$ é a solução correspondente do sistema (2.12), então $k(s) = a\tau(s)$. Segue do Lema 2.3.26 que, existem $b, d \in \mathbb{R}$ tais que $\lim_{s \rightarrow -\infty} k(s) = b$ e $\lim_{s \rightarrow +\infty} k(s) = d$. ■

Enfim, vamos enunciar e mostrar o principal teorema desta seção.

Teorema 2.3.28 *Para cada vetor $v \in \mathbb{R}_1^3 \setminus \{0\}$ existe uma família a dois parâmetros de sólitos do fluxo redutor de curvas no espaço hiperbólico bidimensional. Cada sólito é uma curva $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^2$, definida em toda a reta \mathbb{R} e mergulhada. Além disso, existem constantes b e d tais que a curvatura geodésica $k(s)$ satisfaz*

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} k(s) = b \text{ e } \lim_{s \rightarrow +\infty} k(s) = d.$$

Demonstração: Para demonstrar o teorema vamos separar nos três tipos de vetores. Sem perda de generalidade podemos assumir que $v = ae$, onde $a > 0$ e

$$e = \begin{cases} (-1, 0, 0) & \text{se } v \text{ é do tipo tempo,} \\ (-1, 1, 0) & \text{se } v \text{ é do tipo luz,} \\ (0, 0, 1) & \text{se } v \text{ é do tipo espaço.} \end{cases}$$

Seja $\psi(s) = (\alpha(s), \tau(s), \eta(s))$ uma solução do sistema de equações diferenciais ordinárias (2.12) definida no intervalo maximal I , com $a > 0$ e condição inicial $\psi(0) \in \mathbb{R}^3$ tal que

$$-\alpha^2(0) + \tau^2(0) + \eta^2(0) = \begin{cases} -1 & \text{se } v \text{ é do tipo tempo,} \\ 0 & \text{se } v \text{ é do tipo luz,} \\ 1 & \text{se } v \text{ é do tipo espaço.} \end{cases}$$

Então pela Proposição 2.3.2, existe um sólito do fluxo FRC $X(s)$, de curvatura $k(s) = a\tau(s)$, cujo o triedro $\{X(s), T(s), N(s)\}$ satisfaz

$$\alpha(s) = \langle X(s), e \rangle, \quad \tau(s) = \langle T(s), e \rangle \text{ e } \eta(s) = \langle N(s), e \rangle.$$

Assim, as condições iniciais do sistema (2.12) que dependem de duas constantes, determinam o sólito em cada caso. Portanto, para cada vetor fixado $v \in \mathbb{R}_1^3 \setminus \{0\}$ existe uma família a dois parâmetros de sólitos do fluxo FRC.

Segue dos Lemas 2.3.6, 2.3.16 e 2.3.25 que os sólitos estão definidos para toda reta \mathbb{R} . Os Corolários 2.3.15 e 2.3.27 mostram que existem constantes b e d tais que

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} k(s) = b \text{ e } \lim_{s \rightarrow +\infty} k(s) = d.$$

Para mostrar que os sólitos são mergulhados vamos usar o teorema de Gauss-Bonnet para variedades Riemannianas de dimensão 2 com bordo diferenciável por partes. Mas antes disso, veja que pelos Lemas 2.3.9, 2.3.10, 2.3.11 e 2.3.21 que sempre existe $s_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha(s)$ é monótona nos intervalos $(-\infty, s_0)$ e $(s_0, +\infty)$. Como $\alpha(s)$ descreve a altura Euclidiana de $X(s)$ em relação a um plano fixado, então $X(s)$ não possui auto-interseção em cada um dos intervalos $(-\infty, s_0)$ e $(s_0, +\infty)$ e $X(s)$ é um mergulho se $\alpha(s)$ é monótona em \mathbb{R} .

Se $\alpha(s)$ não é monótona em \mathbb{R} , suponha que $X(s)$ tem alguma auto-interseção, e considere Σ a região simples limitada por $X([s_1, s_2])$ com $X(s_1) = X(s_2)$, $s_1 < s_0 < s_2$ e θ o ângulo externo entre os vetores tangente $T(s_1)$ e $T(s_2)$ que é no máximo π . Pelo teorema de Gauss-Bonnet no espaço hiperbólico, obtemos que

$$\begin{aligned} 0 < 2\pi\chi(\Sigma) - \theta &= \int_{\Sigma} \kappa d\sigma + \int_{X([s_1, s_2])} k(s) ds \\ &= - \int_{\Sigma} d\sigma + \int_{X([s_1, s_2])} a\tau(s) ds \\ &= - \int_{\Sigma} d\sigma + a[\alpha(s_2) - \alpha(s_1)] \\ &= - \int_{\Sigma} d\sigma < 0. \end{aligned}$$

Que é uma contradição. Logo, o sólito X não admite auto-interseção. Para concluir a prova, vamos usar o mesmo raciocínio que Halldorsson [17] usou para mostrar que o sólito de rotação do plano é mergulhado. Veja que, $X(s)$ já é um mergulho nos intervalos $(-\infty, s_0)$ e $(s_0, +\infty)$ e os dois fins das curvas são ilimitadas, pois, pelos Lemas 2.3.12 e 2.3.22 $\lim_{s \rightarrow \pm\infty} |\alpha(s)| = +\infty$. Como $X(s)$ não contém pontos de auto-interseção, então $X(s)$ é um mergulho. ■

2.4 Exemplos de Sólitos do Fluxo FRC em \mathbb{H}^2 Visualizados

Nesta seção, apresentamos exemplos de sólitos do fluxo FRC. Para isso, usamos a seguinte parametrização

$$\chi(u, w) = (\sqrt{1 + u^2 + w^2}, u, w)$$

para o \mathbb{H}^2 . Se a curva $X(s) = \chi(u(s), w(s))$ é p.c.a., então

$$T(s) = \left(\frac{u(s)u'(s) + w(s)w'(s)}{\sqrt{1 + u^2(s) + w^2(s)}}, u'(s), w'(s) \right)$$

e as funções $u(s)$ e $w(s)$ satisfazem o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} (u')^2 + (w')^2 + (u'w - uw')^2 = 1 + u^2 + w^2, \\ w''u' - u''w' + uw' - u'w = k(s)\sqrt{1 + u^2 + w^2}, \end{cases} \quad (2.21)$$

onde $k(s)$ é a curvatura de $X(s)$, a primeira equação é consequência da curva ser p.c.a. e a segunda equação vem da expressão da curvatura de $X(s)$.

Pelo Teorema 2.2.1, a curvatura do sólito do fluxo FRC em \mathbb{H}^2 é determinada pelo seu campo tangente e um vetor não nulo. Dessa forma, usamos o sistema (2.21) e o *software* Maple para plotar exemplos de sólitos para o fluxo FRC em \mathbb{H}^2 .

Usando as aplicações de isometria entre os conjuntos que representam o espaço hiperbólico bidimensional, também apresentamos os gráficos no modelo do disco de Poincaré e do semiplano para cada curva plotada no modelo do hiperboloide.

Na Figura 2.6, a curva azul é o gráfico de um sólito $X(s)$ em \mathbb{H}^2 do fluxo FRC em \mathbb{H}^2 tal que sua curvatura é escrita como $k(s) = \langle T(s), (-1, 0, 0) \rangle$ e $a = 1$. A curva vermelha é a projeção ortogonal Euclidiana de $X(s)$ no plano que contém a origem e que é ortogonal ao vetor $(-1, 0, 0)$. Na Figura 2.7 visualizamos o sólito do FRC apresentado na Figura 2.6 no modelo do disco de Poincaré. Na Figura 2.8 visualizamos o sólito do FRC apresentado na Figura 2.6 no modelo do semiplano.

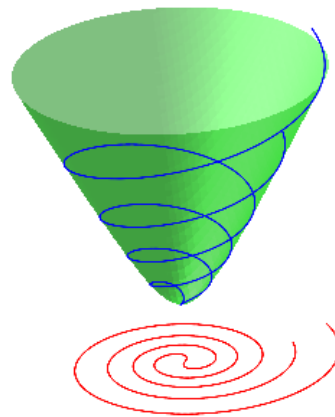


Figura 2.6: Sóliton do fluxo FRC em \mathbb{H}^2 com vetor fixado $(-1, 0, 0)$ e $a = 1$.

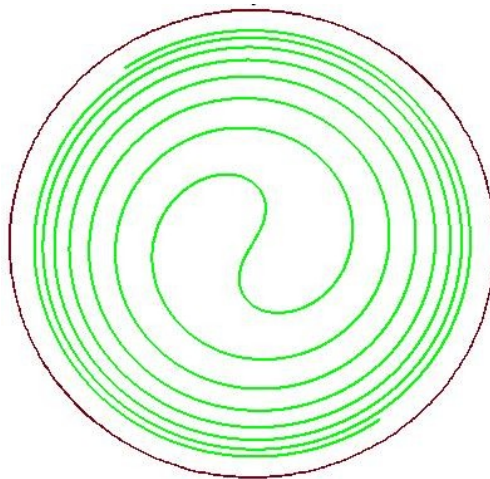


Figura 2.7: Sóliton do fluxo FRC em \mathbb{H}^2 no modelo do disco de Poincaré.

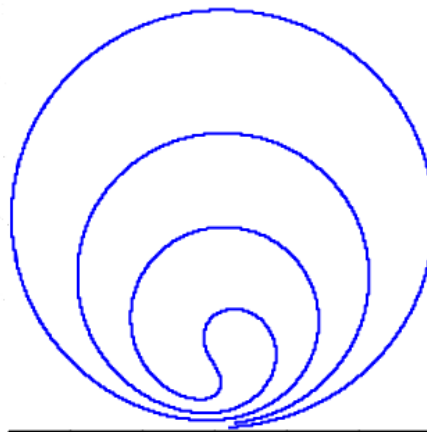


Figura 2.8: Sóliton do fluxo FRC em \mathbb{H}^2 no modelo do semiplano.

Na Figura 2.9, a curva azul é o gráfico de um sóliton $X(s)$ em \mathbb{H}^2 do fluxo FRC em \mathbb{H}^2 tal que sua curvatura é escrita como $k(s) = \langle T(s), (-1, 1, 0) \rangle$ e $a = 1$. Na Figura

2.10 visualizamos o sólito do FRC apresentado na Figura 2.9 no modelo do disco de Poincaré. Na Figura 2.11 visualizamos o sólito do FRC apresentado na Figura 2.9 no modelo do semiplano.

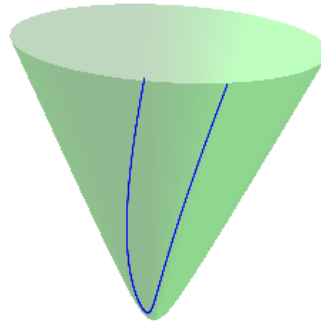


Figura 2.9: Sólito do fluxo FRC em \mathbb{H}^2 com vetor fixado $(-1, 1, 0)$ e $a = 1$.

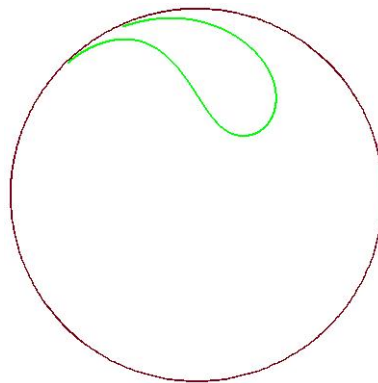


Figura 2.10: Sólito do fluxo FRC em \mathbb{H}^2 no modelo do disco de Poincaré.

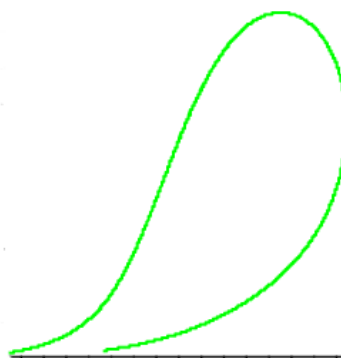


Figura 2.11: Sólito do fluxo FRC em \mathbb{H}^2 no modelo do semiplano.

Por fim, na Figura 2.12, a curva azul é o gráfico de um sólito $X(s)$ em \mathbb{H}^2 do fluxo FRC em \mathbb{H}^2 tal que sua curvatura é escrita como $k(s) = \langle T(s), (0, 0, 1) \rangle$ e $a = 1$. Vale ressaltar que este gráfico é diferente do gráfico do sólito da Proposição

2.3.18, pois, neste caso a curvatura não é constante. De fato, para obter o gráfico da Figura 2.12 usamos a condição inicial $u(0) = w(0) = 0$ e $u'(0) = -w'(0) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ no sistema (2.21), ou seja, $T(0,0) = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ e $\tau(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \neq \pm 1$. Logo, segue do Lema 3.2 que a curvatura não é constante. Na Figura 2.13 visualizamos o sólito do FRC apresentado na Figura 2.12 no modelo do disco de Poincaré. Na Figura 2.14 visualizamos o sólito do FRC apresentado na Figura 2.12 no modelo do semiplano.

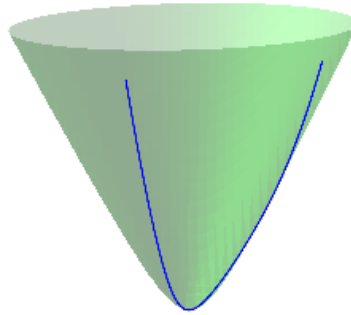


Figura 2.12: Sólito do fluxo FRC em \mathbb{H}^2 com vetor fixado $(0, 0, 1)$ e $a = 1$.

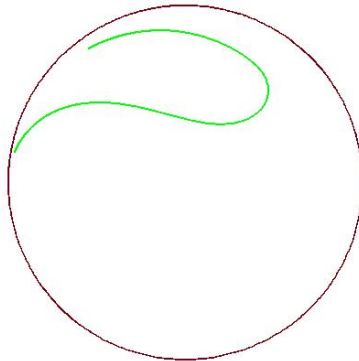


Figura 2.13: Sólito do fluxo FRC em \mathbb{H}^2 no modelo do disco de Poincaré.

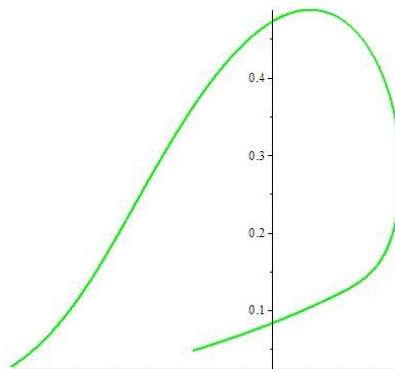


Figura 2.14: Sólito do fluxo FRC em \mathbb{H}^2 no modelo do semiplano.

Capítulo 3

Soluções Autossimilares do Fluxo de Curvatura e do Fluxo de Curvatura Inversa no Cone de Luz

Soluções autossimilares de fluxos de curvas, são curvas que evoluem por meio de isometrias e/ou homotetias ao longo do fluxo. Halldorsson [18] descreveu todas as soluções autossimilares do fluxo de curvatura no plano de Minkowski.

Neste capítulo, motivados pelo fluxo redutor de curvas em ambientes Riemannianos e pelo fluxo pela curvatura em ambientes não Riemannianos, vamos definir o fluxo de curvatura (FC) e o fluxo de curvatura inversa (FCI) para curvas do tipo espaço no cone de luz e vamos estudar as soluções autossimilares destes fluxos. Considerando curvas $X(s)$ em Q^2 cuja curvatura não se anula verificamos que estudar as soluções do fluxo FC é equivalente a estudar as soluções do fluxo FCI. Assim como fizemos no caso do sólitons de \mathbb{H}^2 , no Capítulo 2, obteremos caracterizações para soluções autossimilares de cada um dos fluxos. Usando um sistema de equações diferenciais ordinárias, mostraremos que, para cada vetor não nulo de \mathbb{R}_1^3 , existe uma família a 2-parâmetros de soluções autossimilares e estudaremos o comportamento de todas as soluções autossimilares dos fluxos FC e FCI em Q^2 . Mostraremos que nos fins de uma solução autossimilar do fluxo FC em Q^2 a curvatura é ilimitada ou converge para uma constante. Além disso, apresentaremos a visualização de alguns exemplos de soluções autossimilares dos fluxos FC e FCI em Q^2 .

3.1 Fluxo de Curvatura e Fluxo de Curvatura Inversa em Q^2

Nesta seção, apresentamos as definições do fluxo de curvatura (FC) e do fluxo de curvatura inversa (FCI) no cone de luz (Q^2) bidimensional. Também definimos uma evolução autossimilar de uma curva do tipo espaço X em Q^2 . Mostramos uma relação entre uma solução autossimilar do fluxo FC e uma solução autossimilar do fluxo FCI. No Teorema 3.1.10, obtemos uma condição necessária e suficiente para que uma curva X de Q^2 admita uma evolução autossimilar satisfazendo o FC. Por fim, no Teorema 3.1.11, obtemos uma condição necessária e suficiente para que uma curva X de Q^2 admita uma evolução autossimilar satisfazendo o FCI.

Iniciamos com as definições dos fluxos FC e fluxo FCI em Q^2 .

Definição 3.1.1 Sejam $X : I \rightarrow Q^2$, $u \in I$ uma curva do tipo espaço e $\hat{X}^t(\cdot) = \hat{X}(\cdot, t)$, $\hat{X} : I \times J \rightarrow Q^2$, $t \in J$, $0 \in J$ uma família a um parâmetro de curvas. Dizemos que $\hat{X}^t(\cdot)$ é uma *solução para o fluxo de curvatura* com condição inicial $X(u)$, se

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \hat{X}(u, t) = \hat{T}'(u, t), \\ \hat{X}(u, 0) = X(u), \end{cases} \quad (3.1)$$

onde $\hat{T}^t(\cdot) = \hat{T}(\cdot, t)$ é o vetor unitário tangente à curva $\hat{X}^t(\cdot)$ para cada $t \in J$.

É importante observar que segue de (1.7) que a função curvatura $\hat{k}^t(u) = \hat{k}(u, t)$ da curva $\hat{X}^t(u)$ para cada $t \in J$, satisfaz, $2\hat{k}(u, t) = -\langle T'(u, t), T'(u, t) \rangle$, isto é, o vetor $\hat{T}'(u, t)$ determina a curvatura de $\hat{X}^t(u)$ para cada $t \in J$.

As parábolas de Q^2 são curvas de curvatura constante igual zero (ver Proposição 1.3.4). Veja que, se X é uma parábola em Q^2 , então $\hat{X}^t(s) = X(s)$, $t \in \mathbb{R}$ é uma solução para o FC, isto é, as parábolas são soluções triviais para o FC em Q^2 .

Definição 3.1.2 Sejam $X : I \rightarrow Q^2$, $u \in I$ uma curva do tipo espaço e $\hat{X}^t(\cdot) = \hat{X}(\cdot, t)$, $\hat{X} : I \times J \rightarrow Q^2$, $t \in J$, $0 \in J$ uma família a um parâmetro de curvas. Dizemos que $\hat{X}^t(\cdot)$ é uma *solução para o fluxo de curvatura inversa* com condição inicial $X(u)$, se

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \hat{X}(u, t) = -\frac{1}{\hat{k}^2(u, t)} \hat{T}'(u, t), \\ \hat{X}(u, 0) = X(u), \end{cases} \quad (3.2)$$

onde $\hat{T}^t(\cdot) = \hat{T}(\cdot, t)$ é o campo unitário tangente à curva $\hat{X}^t(\cdot)$ e $\hat{k}^t(\cdot) = \hat{k}(\cdot, t)$ é a curvatura da curva $\hat{X}^t(\cdot)$ para cada $t \in J$.

Assim como fizemos no caso do \mathbb{H}^2 , vamos mostrar que o FC e o FCI são invariantes por difeomorfismos tangenciais.

Proposição 3.1.3 (Invariância geométrica por difeomorfismos tangenciais)

Considere o fluxo

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \hat{X}(u, t) = g(u, t) \hat{T}'(u, t) + h(u, t) \hat{T}(u, t), \\ \hat{X}(u, 0) = X(u), \end{cases}$$

onde $\hat{T}(u, t)$ é o campo unitário tangente a $\hat{X}(u, t)$ para cada $t \in J$ e $g(u, t)$ e $h(u, t)$ são funções diferenciáveis. Então na vizinhança de cada ponto (u, t) existe $\varphi : I \times J \rightarrow I$ satisfazendo $\frac{\partial \varphi}{\partial u} > 0$ e $\varphi(u, 0) = \varphi_0(u) = u$ tal que $\bar{X}(u, t) = \hat{X}(\varphi(u, t), t)$ é solução do sistema (3.1) se $g(u, t) = 1$, e é solução do sistema (3.2) se $g(u, t) = -\left(\frac{1}{\hat{k}(u, t)}\right)^2$.

Demonstração: Note que, se $\varphi(u, t)$ existe, então

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{X}}{\partial t}(u, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\hat{X}(\varphi(u, t), t) \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial \varphi} \hat{X}(\varphi(u, t), t) \frac{\partial \varphi}{\partial t}(u, t) + \frac{\partial}{\partial t} \hat{X}(\varphi(u, t), t) \\ &= \frac{\partial}{\partial \varphi} \hat{X}(\varphi(u, t), t) \frac{\partial \varphi}{\partial t}(u, t) + g(\varphi(u, t), t) \hat{T}'(\varphi(u, t), t) + h(\varphi(u, t), t) \hat{T}(\varphi(u, t), t) \\ &= \left| \frac{\partial}{\partial \varphi} \hat{X}(\varphi(u, t), t) \right| \hat{T}(\varphi(u, t), t) \frac{\partial \varphi}{\partial t}(u, t) + g(\varphi(u, t), t) \hat{T}'(\varphi(u, t), t) \\ &\quad + h(\varphi(u, t), t) \hat{T}(\varphi(u, t), t). \end{aligned}$$

Se $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\left| \frac{\partial}{\partial \varphi} \hat{X}(\varphi(u, t), t) \right|^{-1} h(\varphi(u, t), t)$, então $\bar{X}(u, t) = \hat{X}(\varphi(u, t), t)$ é solução do sistema (3.1) se $g(u, t) = 1$, e é solução do sistema (3.2) se $g(u, t) = -\left(\frac{1}{\hat{k}(u, t)}\right)^2$.

Veja que φ está bem definida e satisfaz a afirmação da proposição. De fato, defina $\varphi(u, t)$ pela equação diferencial ordinária

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \varphi(u, t) = -f(\varphi(u, t), t), \\ \varphi(u, 0) = \varphi_0(u) = u, \end{cases} \tag{3.3}$$

onde $f(\varphi(u, t), t) = \left| \frac{\partial}{\partial \varphi} \hat{X}(\varphi(u, t), t) \right|^{-1} h(\varphi(u, t), t)$ e u é um parâmetro. Como f e h são diferenciáveis, então o sistema possui uma única solução para cada valor inicial fixado, logo $\varphi(u, t)$ está bem definida e é diferenciável com relação ao parâmetro u . Note que, $\frac{\partial \varphi_0}{\partial u} = 1$ e diferenciando a primeira equação do sistema (3.3) em u , obtemos

$$\frac{\partial^2}{\partial u \partial t} \varphi(u, t) = - \frac{\partial}{\partial \varphi} f(\varphi(u, t), t) \frac{\partial}{\partial u} \varphi(u, t),$$

ou ainda,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial u} \varphi(u, t) \right) = - \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} f(\varphi(u, t), t) \right) \frac{\partial}{\partial u} \varphi(u, t).$$

Assim,

$$\frac{\partial}{\partial u} \varphi(u, t) = \left(\frac{\partial}{\partial u} \varphi_0 \right) e^{-\int \frac{\partial}{\partial \varphi} f dt} = e^{-\int \frac{\partial}{\partial \varphi} f dt} > 0.$$

■

Tendo em vista a Proposição 3.1.3 podemos redefinir o FC e o FCI.

Definição 3.1.4 Sejam $X : I \rightarrow Q^2$, $u \in I$ uma curva do tipo espaço, $\hat{X}^t(\cdot) = \hat{X}(\cdot, t)$, $\hat{X} : I \times J \rightarrow Q^2$, $t \in J$, $0 \in J$ uma família a 1-parâmetro de curvas e $\hat{Y}^t(\cdot) = \hat{Y}(\cdot, t)$ a família a 1-parâmetro de curvas associadas a $\hat{X}^t(\cdot)$ para cada $t \in J$. Dizemos que $\hat{X}^t(\cdot)$ é uma *solução para o fluxo de curvatura (resp. fluxo de curvatura inversa)* com condição inicial $X(u)$, se $\hat{X}(u, 0) = X(u)$ e

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial t} \hat{X}(u, t), \hat{Y}(u, t) \right\rangle = \hat{k}(u, t) \quad \left(\text{resp.} \quad \left\langle \frac{\partial}{\partial t} \hat{X}(u, t), \hat{Y}(u, t) \right\rangle = - \frac{1}{\hat{k}(u, t)} \right).$$

De agora em diante, usaremos a Definição 3.1.4 para o FC e para o FCI em Q^2 . O próximo teorema mostra uma relação entres os fluxos FC e FCI no cone de luz.

Teorema 3.1.5 Considere $X : I \rightarrow Q^2$, $u \in I$ uma curva do tipo espaço e $Y(u)$ a curva associada a X . Sejam $\hat{X}^t(u) = \hat{X}(u, t)$, $\hat{X} : I \times J \rightarrow Q^2$, $(u, t) \in I \times J$, $0 \in J$ uma família a um parâmetro de curvas cuja curvatura $\hat{k}^t(u) \neq 0$ para todo $(u, t) \in I \times J$ e $\hat{Y}^t(\cdot) = \hat{Y}(\cdot, t)$ a família a um parâmetro de curvas associadas a $\hat{X}^t(\cdot)$ para cada $t \in J$. Então, $\hat{X}^t(\cdot)$ é solução para o fluxo FC com condição inicial $X(u)$ se, e somente se, $\hat{Y}^t(\cdot)$ é solução para o fluxo FCI com condição inicial $Y(u)$.

Demonstração: Sabemos da Proposição 1.3.3 que $\tilde{k}(u, t) = \frac{1}{\hat{k}(u, t)}$ é curvatura de

$\hat{Y}^t(\cdot)$ para cada $t \in J$, isto é, $\frac{1}{\hat{k}(u, t)} = \hat{k}(u, t)$. Além disso, pela unicidade, $\hat{Y}(u, t)$ é a curva associada a $\hat{X}(u, t)$ e $\hat{X}(u, t)$ é curva associada a $\hat{Y}(u, t)$ para cada t . Segue da equação $\langle \hat{X}(u, t), \hat{Y}(u, t) \rangle = 1$ que,

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial t} \hat{X}(u, t), \hat{Y}(u, t) \right\rangle = - \left\langle \frac{\partial}{\partial t} \hat{Y}(u, t), \hat{X}(u, t) \right\rangle.$$

Portanto,

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial t} \hat{X}(u, t), \hat{Y}(u, t) \right\rangle = \hat{k}(u, t)$$

se, e somente se,

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial t} \hat{Y}(u, t), \hat{X}(u, t) \right\rangle = -\frac{1}{\hat{k}(u, t)}.$$

■

Um classe especial de soluções dos fluxos FC e FCI é a classe das soluções autossimilares. No cone de luz, tais soluções evoluem por isometrias e/ou dilatações.

Definição 3.1.6 Seja $X : I \rightarrow Q^2$, $s \in I$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco. Uma *evolução autossimilar* da curva X é uma aplicação $\hat{X} : I \times J \rightarrow Q^2$, $t \in J$, $0 \in J \subset \mathbb{R}$ definida por $\hat{X}(s, t) = f(t)M(t)X(s)$, onde $f : J \rightarrow (0, \infty)$, $M : J \rightarrow O_1^+(3)$ são aplicações diferenciáveis tais que $f(0) = 1$ e $M(0) = Id$. Quando a família $\hat{X}^t(\cdot) = f(t)M(t)X(\cdot)$ satisfaz o FC (resp. o FCI) dizemos que X é uma *solução autossimilar do fluxo FC (resp. FCI)*. Se $f(t) \equiv 1$ dizemos que X é um *sóliton* do fluxo FC (resp. FCI).

Note que, $\hat{X}(s, 0) = f(0)M(0)X(s) = X(s)$, a função não negativa $f(t)$ determina a homotetia e $M(t)$ é uma família a um parâmetro de isometrias de Q^2 tal que $M(0) = Id$.

Proposição 3.1.7 *Sejam $X : I \rightarrow Q^2$, $s \in I$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco e $\hat{X}(s, t) = f(t)M(t)X(s)$, $(s, t) \in I \times J$ uma evolução autossimilar de X . Então*

$$\hat{T}^t(s) = M(t)T(s), \quad \hat{Y}^t(s) = \frac{1}{f(t)}M(t)Y(s) \quad e \quad \hat{k}^t(s) = [f(t)]^{-2} k(s),$$

para cada $t \in J$, onde $\hat{T}^t(s)$ é o campo unitário tangente a $\hat{X}^t(s)$, $\hat{Y}^t(s)$ é a curva associada à $\hat{X}^t(s)$ e $\hat{k}^t(s)$ é a curvatura de $\hat{X}^t(s)$.

Demonstração: Para verificar a expressão do campo tangente $\hat{T}^t(s)$, veja que,

$$\left(\left\langle \frac{d}{ds} \hat{X}^t(s), \frac{d}{ds} \hat{X}^t(s) \right\rangle \right)^{\frac{1}{2}} = f(t).$$

Logo, $\hat{T}^t(s) = M(t)T(s)$.

Segue de (1.5) que $\hat{Y}^t(s) = \frac{1}{f(t)}M(t)Y(s)$ é a curva associada à $\hat{X}^t(s)$, pois,

$$\begin{aligned} \langle \hat{Y}^t(s), \hat{Y}^t(s) \rangle &= \frac{1}{f^2(t)} \langle M(t)Y(s), M(t)Y(s) \rangle = \frac{1}{f^2(t)} \langle Y(s), Y(s) \rangle = 0, \\ \langle \hat{Y}^t(s), \hat{T}^t(s) \rangle &= \frac{1}{f(t)} \langle M(t)Y(s), M(t)T(s) \rangle = \frac{1}{f(t)} \langle Y(s), T(s) \rangle = 0, \\ \langle \hat{Y}^t(s), \hat{X}^t(s) \rangle &= \langle M(t)Y(s), M(t)X(s) \rangle = \langle Y(s), X(s) \rangle = 1. \end{aligned}$$

Por fim, o cálculo da curvatura é feito usando a equação (1.8)

$$\begin{aligned} \hat{k}^t(s) &= \frac{\left(\left\langle \frac{d}{ds} \hat{X}^t(s), \frac{d^2}{ds^2} \hat{X}^t(s) \right\rangle \right)^2 - \left\langle \frac{d^2}{ds^2} \hat{X}^t(s), \frac{d^2}{ds^2} \hat{X}^t(s) \right\rangle \left\langle \frac{d}{ds} \hat{X}^t(s), \frac{d}{ds} \hat{X}^t(s) \right\rangle}{2 \left(\left\langle \frac{d}{ds} \hat{X}^t(s), \frac{d}{ds} \hat{X}^t(s) \right\rangle \right)^3} \\ &= \frac{[f^2(t) \langle M(t)T(s), M(t)T'(s) \rangle]^2 - f^4(t) \langle M(t)T'(s), M(t)T'(s) \rangle \cdot 1}{2f^6(t)} \\ &= -\frac{f^4(t) \langle M(t)T'(s), M(t)T'(s) \rangle}{2f^6(t)}. \end{aligned}$$

Como $\langle M(t)T'(s), M(t)T'(s) \rangle = \langle T'(s), T'(s) \rangle = -2k(s)$, então

$$\hat{k}^t(s) = [f(t)]^{-2} k(s).$$

■

A próxima proposição faz um estudo de todas as curvas que evoluem apenas por homotetias ao longo dos fluxos FC e FCI em Q^2 .

Teorema 3.1.8 *Sejam $X : I \rightarrow Q^2$, $s \in I$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco de curvatura $k(s)$ e $\hat{X}(s, t) = f(t)X(s)$, $(s, t) \in I \times J$. A família $\hat{X}(s, t)$ satisfaz o FC se, e somente se, X é uma elipse (curva de curvatura k constante negativa) ou*

uma hipérbole (curva de curvatura k constante positiva) de Q^2 e $f(t) = \sqrt{2kt + 1}$. A família $\hat{X}(s, t)$ satisfaz o FCI se, e somente se, X é uma elipse ou uma hipérbole de Q^2 e $f(t) = \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{k}t + 1}}$. Além disso,

i) Se $\hat{X}(s, t)$ satisfaz o FC e X é uma elipse de curvatura k , então $J = \left(-\infty, -\frac{1}{2k}\right)$,

$$\hat{k}(s, t) = \frac{k}{2kt + 1}, \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} \hat{k}(s, t) = 0 \quad e \quad \lim_{t \rightarrow -\frac{1}{2k}^-} \hat{k}(s, t) = +\infty.$$

ii) Se $\hat{X}(s, t)$ satisfaz o FC e X é uma hipérbole de curvatura k , então $J = \left(-\frac{1}{2k}, +\infty\right)$,

$$\hat{k}(s, t) = \frac{k}{2kt + 1}, \quad \lim_{t \rightarrow -\frac{1}{2k}^+} \hat{k}(s, t) = +\infty \quad e \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \hat{k}(s, t) = 0.$$

iii) Se $\hat{X}(s, t)$ satisfaz o FCI e X é uma elipse de curvatura k , então $J = \left(-\infty, -\frac{k}{2}\right)$,

$$\hat{k}(s, t) = 2t + k, \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} \hat{k}(s, t) = -\infty \quad e \quad \lim_{t \rightarrow -\frac{k}{2}^-} \hat{k}(s, t) = 0.$$

iv) Se $\hat{X}(s, t)$ satisfaz o FCI e X é uma hipérbole de curvatura k , então $J = \left(-\frac{k}{2}, +\infty\right)$, $\hat{k}(s, t) = 2t + k$, $\lim_{t \rightarrow -\frac{k}{2}^+} \hat{k}(s, t) = 0$ e $\lim_{t \rightarrow +\infty} \hat{k}(s, t) = +\infty$.

Demonstração: Vamos iniciar com o FC. Seja $\hat{X}^t(s) = f(t)X(s)$, $s \in I$, $t \in J$, uma evolução autossimilar que satisfaz o FC. Segue da Proposição 3.1.7 que $\hat{Y}^t(s) = \frac{1}{f(t)}Y(s)$ e $\hat{k}^t(s) = [f(t)]^{-2}k(s)$. Assim,

$$[f(t)]^{-2}k(s) = \left\langle \frac{\partial}{\partial t} \hat{X}^t(s), \hat{Y}^t(s) \right\rangle = \frac{f'(t)}{f(t)},$$

ou ainda, $f'(t)f(t) = k(s)$ para todo $(s, t) \in I \times J$. Portanto, a curvatura de X é constante. Sabemos da Proposição 1.3.4 que as curvas de curvatura constante não nula de Q^2 são as elipses e as hipérbolas. Logo, o resultado segue para o FC. Além disso, usando a equação $f'(t)f(t) = k$ e o fato que $f(0) = 1$, obtemos $f(t) = \sqrt{2kt + 1}$.

Reciprocamente, se X é uma elipse ou uma hipérbole, então $k(s)$ é uma constante diferente de zero. Derivando a função $f(t) = \sqrt{2kt + 1}$, obtemos que $f'(t) = k(2kt + 1)^{-\frac{1}{2}}$. Logo, usando a Proposição 3.1.7, temos que

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial}{\partial t} \hat{X}^t(s), \hat{Y}^t(s) \right\rangle &= \frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{k}{\sqrt{2kt + 1}} \frac{1}{\sqrt{2kt + 1}} \\ &= \frac{k}{2kt + 1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{k}{f^2(t)} \\ &= \hat{k}^t(s), \end{aligned}$$

onde $\hat{k}^t(s)$ é a curvatura da curva $\hat{X}^t(s) = f(t)X(s)$.

De maneira análoga, seja $\hat{X}^t(s) = f(t)X(s)$, $t \in [0, t)$, $s \in I$ uma evolução autossimilar que satisfaz o FCI. Segue da Proposição 3.1.7 que $\hat{Y}^t(s) = \frac{1}{f(t)}Y(s)$ e $\hat{k}^t(s) = [f(t)]^{-2} k(s)$. Assim,

$$-\frac{[f(t)]^2}{k(s)} = \left\langle \frac{\partial}{\partial t} \hat{X}^t(s), \hat{Y}^t(s) \right\rangle = \frac{f'(t)}{f(t)},$$

ou ainda,

$$-f'(t) [f(t)]^{-3} = \frac{1}{k(s)} \tag{3.4}$$

para todo $(s, t) \in I \times J$. Portanto, a curvatura de X , $k(s) = k$ é constante. Sabemos da Proposição 1.3.4 que as curvas de curvatura constante não nula de Q^2 são as elipses e as hipérbolles. Logo, o resultado também segue para o FCI. Além disso, usando a equação (3.4) e o fato que $f(0) = 1$, obtemos $f(t) = \left(\frac{2}{k}t + 1\right)^{-\frac{1}{2}}$.

Reciprocamente, se X é uma elipse ou uma hipérbole, então $k(s) = k$ é uma constante diferente de zero. Derivando a função $f(t) = \left(\frac{2}{k}t + 1\right)^{-\frac{1}{2}}$, obtemos que $f'(t) = -\frac{1}{k} \left(\frac{2}{k}t + 1\right)^{-\frac{3}{2}}$. Logo, usando a Proposição 3.1.7, temos que

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial}{\partial t} \hat{X}^t(s), \hat{Y}^t(s) \right\rangle &= \frac{f'(t)}{f(t)} = -\frac{1}{k} \left(\frac{2}{k}t + 1\right)^{-\frac{3}{2}} \left(\frac{2}{k}t + 1\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= -\frac{1}{k} \left(\frac{2}{k}t + 1\right)^{-1} \\ &= -\frac{f^2(t)}{k} \\ &= -\frac{1}{\hat{k}^t(s)}, \end{aligned}$$

onde $\hat{k}^t(s)$ é a curvatura da curva $\hat{X}^t(s) = f(t)X(s)$.

Os itens *i)*, *ii)*, *iii)* e *iv)* seguem usando a expressão da função $f(t)$ obtida na primeira parte do teorema para o FC e FCI, e a Proposição 3.1.7. ■

No próximo teorema, obtemos uma relação entre uma solução autossimilar do fluxo FC e uma solução autossimilar do fluxo FCI.

Teorema 3.1.9 *Sejam $X : I \rightarrow Q^2$, $s \in I$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco com curvatura $k(s) \neq 0$ para todo $s \in I$ e $Y(s)$ a curva associada a X . A evolução autossimilar de X dada por $\hat{X}(s, t) = f(t)M(t)X(s)$ satisfaz o fluxo de curvatura se, e somente se, a família de curvas $\hat{Y}(s, t) = \frac{1}{f(t)}M(t)Y(s)$ satisfaz o fluxo de curvatura inversa.*

Demonstração: A Proposição 3.1.7 mostra que a família de curvas $\hat{Y}(s, t)$ associada à família de curvas $\hat{X}(s, t)$ é dada por $\hat{Y}(s, t) = \frac{1}{f(t)}M(t)Y(s)$. Pela unicidade, $\hat{Y}(s, t)$ é a curva associada a $\hat{X}(s, t)$ e $\hat{X}(s, t)$ é curva associada a $\hat{Y}(s, t)$ para cada t . Segue da equação $\langle \hat{X}(s, t), \hat{Y}(s, t) \rangle = 1$ que,

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial t} \hat{Y}(s, t), \hat{X}(s, t) \right\rangle = - \left\langle \frac{\partial}{\partial t} \hat{X}(s, t), \hat{Y}(s, t) \right\rangle.$$

Sejam $\tilde{k}(s, t)$ a curvatura da curva $\hat{Y}(s, t)$ para cada $t \in J$, $s \in I$ e $\tilde{k}(s)$ a curvatura de $Y(s)$ para cada $s \in I$. Usando a Proposição 3.1.7 e que $\tilde{k}(s) = \frac{1}{k(s)}$ (Proposição 1.3.3), obtemos que

$$\tilde{k}(s, t) = \frac{[f(t)]^2}{k(s)},$$

ou ainda,

$$\frac{1}{\tilde{k}(s, t)} = \frac{k(s)}{[f(t)]^2} = \hat{k}(s, t).$$

Portanto,

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial t} \hat{X}(s, t), \hat{Y}(s, t) \right\rangle = \hat{k}(s, t) \quad \text{e} \quad \left\langle \frac{\partial}{\partial t} \hat{Y}(s, t), \hat{X}(s, t) \right\rangle = -\frac{1}{\tilde{k}(s, t)}.$$

■

No próximo teorema, vamos obter uma condição necessária e suficiente para que uma curva X em Q^2 admita uma evolução autossimilar que satisfaz o fluxo de curvatura.

Teorema 3.1.10 *Seja $X : I \rightarrow Q^2$, $s \in I$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco. Existe uma evolução autossimilar de X que satisfaz o fluxo de curvatura se, e somente se, existe $v \in \mathbb{R}_1^3 \setminus \{0\}$ e $c \in \mathbb{R}$ tais que*

$$c + \langle T(s), v \rangle = k(s), \quad (3.5)$$

onde $T(s)$ é o campo unitário tangente a X e $k(s)$ é a função curvatura de X . Em particular, a evolução é apenas por isometrias quando $c = 0$.

Demonstração: Seja $\hat{X}(s, t) = f(t)M(t)X(s)$ uma evolução autossimilar de X que satisfaz o FC, isto é, $\left\langle \frac{\partial}{\partial t} \hat{X}(s, t), \hat{Y}(s, t) \right\rangle = \hat{k}(s, t)$. Derivando em t , obtemos que

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{X}(s, t) = [f'(t)M(t) + f(t)M'(t)]X(s).$$

Segue da Proposição 3.1.7 que, $\hat{k}(s, t) = \frac{k(s)}{f^2(t)}$ e $\hat{Y}^t(s) = \frac{1}{f(t)}M(t)Y(s)$, onde $Y(s)$ é a curva associada a X . Assim,

$$\begin{aligned} \frac{k(s)}{f^2(t)} = \hat{k}(s, t) &= \left\langle \frac{\partial}{\partial t} \hat{X}(s, t), \hat{Y}(s, t) \right\rangle \\ &= f'(t) \left\langle M(t)X(s), \frac{1}{f(t)}M(t)Y(s) \right\rangle + \\ &+ f(t) \left\langle M'(t)X(s), \frac{1}{f(t)}M(t)Y(s) \right\rangle \\ &= \frac{f'(t)}{f(t)} \langle M(t)X(s), M(t)Y(s) \rangle + \langle M'(t)X(s), M(t)Y(s) \rangle \\ &= \frac{f'(t)}{f(t)} + \langle M'(t)X(s), M(t)Y(s) \rangle, \end{aligned}$$

ou ainda,

$$k(s) = f(t)f'(t) + f^2(t) \langle M'(t)X(s), M(t)Y(s) \rangle,$$

para cada $s \in I$ e $t \in J$. Em particular, para $t = 0$

$$k(s) = f'(0) + \langle M'(0)X(s), Y(s) \rangle.$$

Como $X(s) \times Y(s) = T(s)$, segue da Proposição 1.1.4 que existe $v_0 \in \mathbb{R}_1^3$ tal que

$\langle M'(0)X(s), Y(s) \rangle = \langle T(s), v_0 \rangle$. Portanto

$$k(s) = c + \langle T(s), v \rangle,$$

onde $v = v_0$ e $c = f'(0)$. Mais precisamente, considerando $M(t) = M_1(t)M_2(t)M_3(t)$ como na equação (1.2), temos que $v = (-\varphi'_1(0) - \varphi'_2(0), -\varphi'_2(0), \varphi'_3(0))$.

Reciprocamente, dada uma curva X de Q^2 , com curvatura $k(s)$ e campo unitário tangente $T(s)$ satisfazendo $k(s) = c + \langle T(s), v \rangle$ para algum vetor $v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ e $c \in \mathbb{R}$, mostraremos que existe uma evolução autossimilar de X que satisfaz o FC. Para isso, vamos dividir em três casos de acordo com o tipo do vetor v . Sem perda de generalidade, a menos de isometria, vamos considerar v um múltiplo de $w_1 = (-1, 0, 0)$ se v é do tipo tempo, um múltiplo de $w_2 = (-1, -1, 0)$ se v é do tipo luz e um múltiplo de $w_3 = (0, 0, 1)$ se v é do tipo espaço. Assim, a curvatura pode ser escrita por $k_i(s) = c + \langle T(s), v_i \rangle$, onde $v_i = aw_i$, $a > 0$ e $i = 1, 2, 3$. Defina a evolução autossimilar de X por $\hat{X}_i(s, t) = f(t)M_i(t)X(s)$, onde $M_i(t) \in O_1^+(3)$ são isometrias de Q^2 dadas por (1.2) para cada t ,

$$f(t) = \sqrt{2ct + 1},$$

$$\varphi_i(t) = \begin{cases} \frac{a}{c} \log(f(t)) & \text{se } c \neq 0, \\ at & \text{se } c = 0, \end{cases}$$

para cada $i = 1, 2, 3$. Derivando em t , obtemos que

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{X}_i(s, t) = [f'(t)M_i(t) + f(t)M'_i(t)]X(s).$$

Segue da Proposição 3.1.7 que, $\hat{Y}_i^t(s) = \frac{1}{f(t)}M_i(t)Y(s)$, onde $Y(s)$ é a curva associada a X . Assim,

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial t} \hat{X}_i(s, t), \hat{Y}_i(s, t) \right\rangle = \frac{f'(t)}{f(t)} + \langle M'_i(t)X(s), M_i(t)Y(s) \rangle$$

Usando a Proposição 1.1.5 temos que $\langle M'_i(t)X(s), M_i(t)Y(s) \rangle = -\varphi'_i(t)\langle X(s) \times Y(s), -w_i \rangle$ (observe que, $-w_i = v_i$, onde $i \in \{1, 2, 3\}$ e $\{v_1, v_2, v_3\}$ são os vetores fixados na Pro-

posição 1.1.5). Como $T(s) = X(s) \times Y(s)$, então a evolução autossimilar satisfaz

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial}{\partial t} \hat{X}_i(s, t), \hat{Y}_i(s, t) \right\rangle &= \frac{f'(t)}{f(t)} + \langle M'_i(t)X(s), M_i(t)Y(s) \rangle \\ &= \frac{f'(t)}{f(t)} - \varphi'_i(t) \langle T(s), -w_i \rangle \\ &= \frac{f'(t)}{f(t)} + \varphi'_i(t) \langle T(s), w_i \rangle \end{aligned}$$

para cada $i = 1, 2, 3$.

Assim, se $c \neq 0$ vale que

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial}{\partial t} \hat{X}_i(s, t), \hat{Y}_i(s, t) \right\rangle &= \frac{f'(t)}{f(t)} + \frac{a f'(t)}{c f(t)} \langle T(s), w_i \rangle \\ &= \frac{f'(t)}{f(t)} \left(1 + \frac{a}{c} \langle T(s), w_i \rangle \right) \\ &= \frac{f'(t)}{c f(t)} (c + a \langle T(s), w_i \rangle) \\ &= \left(\frac{c}{\sqrt{2ct + 1}} \right) \left(\frac{1}{c \sqrt{2ct + 1}} \right) (c + \langle T(s), aw_i \rangle) \\ &= \frac{1}{(\sqrt{2ct + 1})^2} k_i(s) \\ &= \frac{k_i(s)}{f^2(t)} \\ &= \hat{k}_i(s, t), \end{aligned}$$

para cada $i = 1, 2, 3$, onde a penúltima desigualdade segue da Proposição 3.1.7.

Em particular, quando $c = 0$, $k_i(s) = \langle T(s), v_i \rangle$, $f(t) = 1$ e $\varphi_i(t) = at$. Então a evolução é apenas por isometrias e satisfaz

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial}{\partial t} \hat{X}_i(s, t), \hat{Y}_i(s, t) \right\rangle &= \frac{f'(t)}{f(t)} + \varphi'_i(t) \langle T(s), w_i \rangle \\ &= a \langle T(s), w_i \rangle \\ &= k_i(s) \\ &= \hat{k}_i(s, t). \end{aligned}$$

para cada $i = 1, 2, 3$, onde a última igualdade segue do fato que, isometrias preservam curvaturas. Portanto, X é uma solução autossimilar do fluxo de curvatura. ■

No próximo teorema, obteremos uma condição necessária e suficiente para que uma curva X em Q^2 admita uma evolução autossimilar satisfazendo o fluxo de curvatura inversa.

Teorema 3.1.11 *Seja $X : I \rightarrow Q^2$, $s \in I$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco com curvatura $k(s) \neq 0$ para todo $s \in I$. Existe uma evolução autossimilar de X que satisfaz o fluxo de curvatura inversa se, e somente se, existe $v \in \mathbb{R}_1^3 \setminus \{0\}$ e $c \in \mathbb{R}$ tais que*

$$c + \langle T(s), v \rangle = \frac{1}{k(s)}, \quad (3.6)$$

onde $T(s)$ é o campo unitário tangente a X e $k(s)$ é a curvatura de X . Em particular, a evolução é apenas por isometrias quando $c = 0$.

Demonstração: Seja $\hat{X}(s, t) = f(t)M(t)X(s)$ uma evolução autossimilar de X que satisfaz o FCI, isto é, $\left\langle \frac{\partial}{\partial t} \hat{X}(s, t), \hat{Y}(s, t) \right\rangle = -\frac{1}{\hat{k}(s, t)}$. Derivando em t , obtemos que

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{X}(s, t) = [f'(t)M(t) + f(t)M'(t)]X(s).$$

Segue da Proposição 3.1.7 que, $\hat{k}(s, t) = \frac{k(s)}{f^2(t)}$ e $\hat{Y}^t(s) = \frac{1}{f(t)}M(t)Y(s)$, onde $Y(s)$ é a curva associada a X . Assim,

$$\begin{aligned} -\frac{f^2(t)}{k(s)} &= -\frac{1}{\hat{k}(s, t)} = f'(t) \left\langle M(t)X(s), \frac{1}{f(t)}M(t)Y(s) \right\rangle + \\ &+ f(t) \left\langle M'(t)X(s), \frac{1}{f(t)}M(t)Y(s) \right\rangle \\ &= \frac{f'(t)}{f(t)} \langle M(t)X(s), M(t)Y(s) \rangle + \langle M'(t)X(s), M(t)Y(s) \rangle \\ &= \frac{f'(t)}{f(t)} + \langle M'(t)X(s), M(t)Y(s) \rangle, \end{aligned}$$

ou ainda,

$$-\frac{1}{k(s)} = \frac{f'(t)}{f^3(t)} + \frac{1}{f^2(t)} \langle M'(t)X(s), M(t)Y(s) \rangle,$$

para cada $s \in I$ e $t \in J$. Em particular para $t = 0$

$$-\frac{1}{k(s)} = f'(0) + \langle M'(0)X(s), Y(s) \rangle.$$

Segue da Proposição 1.1.4 que existe $v_0 \in \mathbb{R}_1^3$ tal que

$$\langle M'(0)X(s), Y(s) \rangle = \langle X(s) \times Y(s), v_0 \rangle.$$

Como $T(s) = X(s) \times Y(s)$, então

$$\frac{1}{k(s)} = c + \langle T(s), v \rangle,$$

onde $v = -v_0$ e $c = -f'(0)$. Mais precisamente, considerando $M(t) = M_1(t)M_2(t)M_3(t)$ como na equação (1.2), temos que $v = (\varphi'_1(0) + \varphi'_2(0), \varphi'_2(0), -\varphi'_3(0))$.

Reciprocamente, dado uma curva X de Q^2 , com curvatura $k(s)$ e campo unitário tangente $T(s)$ satisfazendo $c + \langle T(s), v \rangle = \frac{1}{k(s)}$ para algum vetor $v \in \mathbb{R}_1^3 \setminus \{0\}$ e $c \in \mathbb{R}$, mostraremos que existe uma evolução autossimilar de X que satisfaz o FCI. Para isso, vamos dividir em três casos de acordo com o tipo do vetor v . Sem perda de generalidade, a menos de isometria, vamos considerar v um múltiplo de $w_1 = (-1, 0, 0)$ se v é do tipo tempo, um múltiplo de $w_2 = (-1, -1, 0)$ se v é do tipo luz e um múltiplo de $w_3 = (0, 0, 1)$ se v é do tipo espaço. Assim, a curvatura pode ser escrita por $\frac{1}{k_i(s)} = c + \langle T(s), v_i \rangle$, onde $v_i = aw_i$, $a > 0$ e $i = 1, 2, 3$. Defina a evolução autossimilar de X por $\hat{X}_i(s, t) = f(t)M_i(t)X(s)$, onde $M_i(t) \in O_1^+(3)$ são isometrias de Q^2 dadas por (1.2) para cada t ,

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2ct + 1}},$$

$$\varphi_i(t) = \begin{cases} \frac{a}{c} \log(f(t)) & \text{se } c \neq 0, \\ -at & \text{se } c = 0, \end{cases}$$

para cada $i = 1, 2, 3$ e $a > 0$. Derivando em t , obtemos que

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{X}_i(s, t) = [f'(t)M_i(t) + f(t)M'_i(t)]X(s).$$

Segue da Proposição 3.1.7 que, $\hat{Y}_i^t(s) = \frac{1}{f(t)}M_i(t)Y(s)$, onde $Y(s)$ é a curva associada a X . Assim,

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial t} \hat{X}_i(s, t), \hat{Y}_i(s, t) \right\rangle = \frac{f'(t)}{f(t)} + \langle M'_i(t)X(s), M_i(t)Y(s) \rangle$$

Usando a Proposição 1.1.5 temos que, $\langle M'_i(t)X(s), M_i(t)Y(s) \rangle = -\varphi'_i(t)\langle X(s) \times Y(s), -w_i \rangle$ (observe que, $-w_i = v_i$, onde $i = 1, 2, 3$ e $\{v_1, v_2, v_3\}$ são os vetores fixados na Proposição 1.1.5). Como $T(s) = X(s) \times Y(s)$, então a evolução autossimilar satisfaz

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial}{\partial t} \hat{X}_i(s, t), \hat{Y}_i(s, t) \right\rangle &= \frac{f'(t)}{f(t)} + \langle M'_i(t)X(s), M_i(t)Y(s) \rangle \\ &= \frac{f'(t)}{f(t)} - \varphi'_i(t)\langle T(s), -w_i \rangle \\ &= \frac{f'(t)}{f(t)} + \varphi'_i(t)\langle T(s), w_i \rangle \end{aligned}$$

para cada $i = 1, 2, 3$.

Assim, se $c \neq 0$, vale que

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial}{\partial t} \hat{X}_i(s, t), \hat{Y}_i(s, t) \right\rangle &= \frac{f'(t)}{f(t)} + \frac{a}{c} \frac{f'(t)}{f(t)} \langle T(s), w_i \rangle \\ &= \frac{f'(t)}{f(t)} \left(1 + \frac{a}{c} \langle T(s), w_i \rangle \right) \\ &= \frac{f'(t)}{cf(t)} (c + a\langle T(s), w_i \rangle) \\ &= \left(\frac{-c(2ct + 1)^{-\frac{3}{2}}}{c(2ct + 1)^{-\frac{1}{2}}} \right) (c + \langle T(s), aw_i \rangle) \\ &= - \left(\frac{1}{\sqrt{2ct + 1}} \right)^2 \frac{1}{k_i(s)} \\ &= - \frac{f^2(t)}{k_i(s)} \\ &= - \frac{1}{\hat{k}_i(s, t)}, \end{aligned}$$

para cada $i = 1, 2, 3$, onde $\hat{k}_i(s, t)$ é a curvatura da curva $\hat{X}_i(s, t)$.

Em particular, quando $c = 0$, $\frac{1}{k_i(s)} = \langle T(s), v_i \rangle$, $f(t) = 1$ e $\varphi_i(t) = -at$. Então a evolução é apenas por isometrias e satisfaz

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial}{\partial t} \hat{X}_i(s, t), \hat{Y}_i(s, t) \right\rangle &= \frac{f'(t)}{f(t)} + \varphi'_i(t)\langle T(s), w_i \rangle \\ &= -a\langle T(s), w_i \rangle \\ &= -\langle T(s), aw_i \rangle \\ &= -\frac{1}{k_i(s)} \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{\hat{k}_i(s, t)}.$$

para cada $i = 1, 2, 3$, onde a última igualdade segue do fato que, isometrias preservam curvaturas. Portanto, X é uma solução autossimilar para o FCI. ■

3.2 Soluções Autossimilares dos Fluxos FC e FCI no Cone de Luz

Nesta seção, descrevemos todas as soluções autossimilares dos fluxos FC e FCI no cone de luz. A técnica é a mesma utilizada nos artigos [17], [6] e no Capítulo 2 deste trabalho. O método consiste em estabelecer uma relação entre tais soluções e um sistema de equações diferenciais ordinárias (EDO). Além disso, vamos fazer o estudo do sistema de EDO para encontrar informações sobre as soluções autossimilares do fluxo FC e do fluxo FCI em Q^2 .

O Teorema 3.1.10 diz que, para descrever todas as soluções autossimilares do fluxo FC é necessário e suficiente estudar todas as curvas X de Q^2 que satisfazem a equação (3.5) para algum vetor $v \in \mathbb{R}_1^3 \setminus \{0\}$ e $c \in \mathbb{R}$. De maneira análoga, pelo Teorema 3.1.11, para descrever todas as soluções autossimilares do fluxo FCI é necessário e suficiente estudar todas as curvas X de Q^2 que satisfazem a equação (3.6) para algum vetor $v \in \mathbb{R}_1^3 \setminus \{0\}$ e $c \in \mathbb{R}$.

Assim como fizemos para o caso do \mathbb{H}^2 , a menos de isometria de Q^2 , podemos considerar $v_i = ae_i$ com $a \in \mathbb{R}^+$, $i = 1, 2, 3$, onde $e_1 = (-1, 0, 0)$ se o vetor é do tipo tempo, $e_2 = (-1, 1, 0)$ se o vetor é do tipo luz e $e_3 = (0, 0, 1)$ se o vetor é do tipo espaço. Dessa forma, se uma curva X de Q^2 admite uma evolução autossimilar satisfazendo o FC, então a equação (3.5) reduz-se a

$$k_i(s) = c + a\langle T(s), e_i \rangle$$

para cada $i = 1, 2$ ou 3 .

As duas próximas proposições estabelecem uma relação entre uma curva X de Q^2 que admite evolução autossimilar satisfazendo o FC em Q^2 e uma solução de um sistema de EDO.

Proposição 3.2.1 *Sejam $X : I \rightarrow Q^2$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco e $\{X(s), T(s), Y(s)\}$ o triedro de X . Sejam*

$$e_1 = (-1, 0, 0), \quad e_2 = (-1, 1, 0), \quad e_3 = (0, 0, 1). \quad (3.7)$$

Defina as funções $\alpha_i(s) = \langle X(s), e_i \rangle$, $\tau_i(s) = \langle T(s), e_i \rangle$ e $\eta_i(s) = \langle Y(s), e_i \rangle$ para cada $i \in \{1, 2, 3\}$, então a curvatura de X satisfaz

$$k_i(s) = c + a\tau_i(s)$$

para todo $s \in I$, $c \in \mathbb{R}$, $a > 0$ e para $i \in \{1, 2, 3\}$ se, e somente se, as funções $\alpha_i(s)$, $\tau_i(s)$ e $\eta_i(s)$ satisfazem o sistema

$$\begin{cases} \alpha'_i(s) = \tau_i(s), \\ \tau'_i(s) = [c + a\tau_i(s)]\alpha_i(s) - \eta_i(s), \\ \eta'_i(s) = -[c + a\tau_i(s)]\tau_i(s), \end{cases} \quad (3.8)$$

com condições iniciais $(\alpha_i(0), \tau_i(0), \eta_i(0)) \neq (0, 0, 0)$ satisfazendo

$$2\alpha_i(0)\eta_i(0) + \tau_i^2(0) = \begin{cases} -1, & \text{se } i = 1, \\ 0, & \text{se } i = 2, \\ 1, & \text{se } i = 3. \end{cases} \quad (3.9)$$

Nessas condições $2\alpha_i(s)\eta_i(s) + \tau_i^2(s) = -1$ (resp. $0, 1$) quando $i = 1$ (resp. $2, 3$).

Demonstração: Seja X uma curva em Q^2 , conforme vimos na Seção 1.3, os campos de vetores $X(s)$, $T(s)$ e $Y(s)$ satisfazem o sistema de equações (1.6), ou seja,

$$\begin{cases} X'(s) = T(s), \\ T'(s) = k(s)X(s) - Y(s), \\ Y'(s) = -k(s)T(s), \end{cases}$$

para todo $s \in I$. Assim, considerando o produto interno de e_i com $X(s)$, $T(s)$ e $Y(s)$,

temos que as funções $\alpha(s)$, $\tau(s)$ e $\eta(s)$ satisfazem

$$\begin{cases} \alpha'_i(s) = \tau_i(s), \\ \tau'_i(s) = k_i(s)\alpha_i(s) - \eta_i(s), \\ \eta'_i(s) = -k_i(s)\tau_i(s), \end{cases} \quad (3.10)$$

para todo $s \in I$ e para cada $i \in \{1, 2, 3\}$.

Supondo que $k_i(s) = c + a\tau_i(s)$ para todo $s \in I$, para cada $i \in \{1, 2, 3\}$ e substituindo no sistema (3.10), obtemos o sistema (3.8). Além disso, segue da Proposição 1.3.9 que

$$e_i = \eta_i(s)X(s) + \tau_i(s)T(s) + \alpha_i(s)Y(s),$$

$\langle e_i, e_i \rangle = 2\alpha_i(s)\eta_i(s) + \tau_i^2(s)$ para todo $s \in I$. Em particular, em $s = 0$ temos que (3.9) se verifica.

Reciprocamente, supondo que as funções $\alpha_i(s)$, $\tau_i(s)$ e $\eta_i(s)$ satisfazem (3.8) e (3.9) para cada $i \in \{1, 2, 3\}$. Como (3.10) se verifica, então

$$\begin{cases} (c + a\tau_i(s))\alpha_i(s) - \eta_i(s) = k_i(s)\alpha_i(s) - \eta_i(s), \\ -(c + a\tau_i(s))\tau_i(s) = -k_i(s)\tau_i(s), \end{cases}$$

ou ainda,

$$\begin{cases} [(c + a\tau_i(s)) - k_i(s)]\alpha_i(s) = 0, \\ [(c + a\tau_i(s)) - k_i(s)]\tau_i(s) = 0, \end{cases} \quad (3.11)$$

para todo $s \in I$. Note que,

$$2\alpha_1(s)\eta_1(s) + \tau_1^2(s) = \langle e_1, e_1 \rangle = -1 \text{ e } 2\alpha_3(s)\eta_3(s) + \tau_3^2(s) = \langle e_3, e_3 \rangle = 1$$

para todo $s \in I$. Logo, $\tau_i^2(s) + \alpha_i^2(s) \neq 0$ para todo $s \in I$ e $i \in \{1, 3\}$. Assim, $k_i(s) = c + a\tau_i(s)$ para todo $s \in I$ e $i \in \{1, 3\}$.

Para concluir que $k_2(s) = c + a\tau_2(s)$, usaremos o argumento por contradição, supondo que $(c + a\tau_2(s)) - k_2(s) \neq 0$ em um aberto $J \subset I$. Então, segue de (3.11) que $\alpha_2(s) = \langle X(s), e_2 \rangle = 0$ e $\tau_2(s) = \langle T(s), e_2 \rangle = 0$ para todo $s \in J$. Logo, $X(s)$ e e_2 são do tipo luz e linearmente dependentes para todo $s \in J$, o que é uma contradição,

já que X é uma curva do tipo espaço em Q^2 . Logo, as funções $\alpha_2(s)$ e $\tau_2(s)$ não se anulam simultaneamente para todo $s \in I$ e $k_2(s) = c + a\tau_2(s)$ para todo $s \in I$.

Portanto, $k_i(s) = c + a\tau_i(s)$ para todo $s \in I$ e $i \in \{1, 2, 3\}$. ■

Proposição 3.2.2 *Seja $\alpha(s), \tau(s), \eta(s) : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma solução para o sistema*

$$\begin{cases} \alpha'(s) = \tau(s), \\ \tau'(s) = [c + a\tau(s)]\alpha(s) - \eta(s), \\ \eta'(s) = -[c + a\tau(s)]\tau(s), \end{cases} \quad (3.12)$$

para constantes $a, c \in \mathbb{R}$, $a > 0$ com condição inicial $(\alpha(0), \tau(0), \eta(0)) \neq (0, 0, 0)$ satisfazendo $2\alpha(0)\eta(0) + \tau^2(0) = -1$ (resp. 0 e 1), então existe uma curva diferenciável $X : I \rightarrow Q^2$ parametrizada pelo comprimento de arco s de curvatura $k(s) = c + a\tau(s)$ tal que seu triedro $\{X(s), T(s), Y(s)\}$ satisfaz

$$\alpha(s) = \langle X(s), e \rangle, \quad \tau(s) = \langle T(s), e \rangle \quad \text{e} \quad \eta(s) = \langle Y(s), e \rangle, \quad (3.13)$$

onde $e = (-1, 0, 0)$ (resp. $e = (-1, 1, 0)$ e $e = (0, 0, 1)$).

Demonstração: Defina $k(s) = c + a\tau(s)$. Então, pelo Teorema 1.3.8 existe uma curva $X : I \rightarrow Q^2$, cuja curvatura é $k(s)$ e $\{X(s), T(s), Y(s)\}$ é o triedro de $X(s)$, ou seja, (1.6) é satisfeita. A curva X é unicamente determinada pelas condições iniciais $\{X(0), T(0), Y(0)\}$ que podem ser escolhidas de forma que

$$\eta(0)X(0) + \tau(0)T(0) + \alpha(0)Y(0) = e.$$

Usando as equações dos sistemas (1.6) e (3.12), obtemos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} (\eta(s)X(s) + \tau(s)T(s) + \alpha(s)Y(s)) &= \eta'(s)X(s) + \eta(s)X'(s) + \tau'(s)T(s) + \\ &\quad + \tau(s)T'(s) + \alpha'(s)Y(s) + \alpha(s)Y'(s) \\ &= -[c + a\tau(s)]\tau(s)X(s) + \eta(s)T(s) + \\ &\quad + [c + a\tau(s)]\alpha(s)T(s) - \eta(s)T(s) + \\ &\quad + \tau(s) [(c + a\tau(s))X(s) - Y(s)] \\ &\quad + \tau(s)Y(s) - \alpha(s)[c + a\tau(s)]T(s) \end{aligned}$$

$$= 0.$$

Assim, para todo $s \in I$,

$$\eta(s)X(s) + \tau(s)T(s) + \alpha(s)Y(s) = e.$$

Portanto, (3.13) é satisfeita. ■

Também podemos provar resultados semelhantes às Proposições 3.2.1 e 3.2.2 para o FCI em Q^2 , isto é, uma relação entre uma curva X de Q^2 que admite evolução autossimilar satisfazendo o FCI e uma solução de um sistema de EDO. Vamos apresentar estes resultados nas próximas duas proposições. Para isso, se uma curva X de Q^2 admite evolução autossimilar satisfazendo o FCI, então a equação (3.6) reduz-se a

$$\frac{1}{k_i(s)} = c + a\langle T(s), e_i \rangle$$

para cada $i = 1, 2$ ou 3 .

Proposição 3.2.3 *Sejam $X : I \rightarrow Q^2$, $s \in I$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco, com $k(s) \neq 0$ e $\{X(s), T(s), Y(s)\}$ o triedro de X . Sejam e_1, e_2 e e_3 os vetores definidos em (3.7). Defina as funções*

$$\alpha_i(s) = \langle X(s), e_i \rangle, \quad \tau_i(s) = \langle T(s), e_i \rangle \quad e \quad \eta_i(s) = \langle Y(s), e_i \rangle$$

para cada $i \in \{1, 2, 3\}$. Então a curvatura de X satisfaz

$$k_i(s) = \frac{1}{c + a\tau_i(s)},$$

para todo $s \in I$, $a, c \in \mathbb{R}$ e $a > 0$ se, e somente se, as funções $\alpha_i(s)$, $\tau_i(s)$ e $\eta_i(s)$ satisfazem o sistema

$$\begin{cases} \alpha'_i(s) = \tau_i(s), \\ \tau'_i(s) = \frac{1}{c + a\tau_i(s)}\alpha_i(s) - \eta_i(s), \\ \eta'_i(s) = -\frac{1}{c + a\tau_i(s)}\tau_i(s), \end{cases} \quad (3.14)$$

com condições iniciais $(\alpha_i(0), \tau_i(0), \eta_i(0)) \neq (0, 0, 0)$ satisfazendo

$$2\alpha_i(0)\eta_i(0) + \tau_i^2(0) = \begin{cases} -1, & \text{se } i = 1, \\ 0, & \text{se } i = 2, \\ 1, & \text{se } i = 3. \end{cases}$$

Então, para todo $s \in I$, $2\alpha_i(s)\eta_i(s) + \tau_i^2(s) = -1$ (resp. $0, 1$) quando $i = 1$ (resp. $2, 3$).

Proposição 3.2.4 *Seja $\alpha(s), \tau(s), \eta(s) : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma solução para o sistema*

$$\begin{cases} \alpha'(s) = \tau(s), \\ \tau'(s) = \frac{1}{c + a\tau(s)}\alpha(s) - \eta(s), \\ \eta'(s) = -\frac{1}{c + a\tau(s)}\tau(s), \end{cases} \quad (3.15)$$

para constantes $a, c \in \mathbb{R}$, $a > 0$ e condições iniciais $(\alpha(0), \tau(0), \eta(0)) \neq (0, 0, 0)$ satisfazendo $2\alpha(0)\eta(0) + \tau^2(0) = -1$ (resp. 0 e 1). Então existe uma curva diferenciável $X : I \rightarrow Q^2$ parametrizada pelo comprimento de arco s tal que seu triedro $\{X(s), T(s), Y(s)\}$ satisfaz

$$\alpha(s) = \langle X(s), e \rangle, \quad \tau(s) = \langle T(s), e \rangle \quad e \quad \eta(s) = \langle Y(s), e \rangle, \quad (3.16)$$

onde $e = (-1, 0, 0)$ (resp. $e = (-1, 1, 0)$ e $e = (0, 0, 1)$).

As demonstrações das Proposições 3.2.3 e 3.2.4 seguem de maneira inteiramente análoga às provas das Proposições 3.2.1 e 3.2.2 respectivamente.

Como vimos na Proposição 3.2.1, a função $2\eta(s)\alpha(s) + \tau^2(s)$ é constante igual à $-1, 0$ ou 1 . Defina os subconjuntos de \mathbb{R}^3 dados por

$$\begin{aligned} \overline{H} &:= \{(\alpha, \tau, \eta) \in \mathbb{R}^3 : 2\alpha\eta + \tau^2 = -1 \text{ e } \alpha < 0\}, \\ \overline{C} &:= \{(\alpha, \tau, \eta) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} : 2\alpha\eta + \tau^2 = 0 \text{ e } \alpha \leq 0\}, \\ \overline{S} &:= \{(\alpha, \tau, \eta) \in \mathbb{R}^3 : 2\alpha\eta + \tau^2 = 1\}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Os conjuntos \overline{H} , \overline{C} e \overline{S} são disjuntos e invariantes pelos sistemas de equações (3.12) e (3.15), isto é, se $(\alpha(0), \tau(0), \eta(0)) \in \overline{H}$ (resp. \overline{C} , \overline{S}) é um valor inicial para a solução $(\alpha(s), \tau(s), \eta(s))$, então $(\alpha(s), \tau(s), \eta(s)) \in \overline{H}$ (resp. \overline{C} , \overline{S}) para todo $s \in I$.

A seguir vamos obter uma relação entre $\alpha(s)$ e $\tau(s)$ e outra relação entre $\eta(s)$ e $\tau(s)$ para as soluções $(\alpha(s), \tau(s), \eta(s))$ do sistema (3.12), que serão usadas com frequência neste capítulo.

Lema 3.2.5 *Seja $\psi(s) = (\alpha(s), \tau(s), \eta(s))$, $s \in I \subset \mathbb{R}$ uma solução do sistema (3.12), $a > 0$, $c \in \mathbb{R}$ e condição inicial $\psi(0) \in \overline{H} \cup \overline{C} \cup \overline{S}$, onde os conjuntos \overline{H} , \overline{C} e \overline{S} são dados por (3.17). Então para todo $s \in I$*

$$[c + a\tau(s)]\alpha^2(s) - \alpha(s)\tau'(s) + \frac{\tau^2(s)}{2} = \begin{cases} -\frac{1}{2} & \text{se } \psi(0) \in \overline{H}, \\ 0 & \text{se } \psi(0) \in \overline{C}, \\ \frac{1}{2} & \text{se } \psi(0) \in \overline{S} \end{cases} \quad (3.18)$$

e

$$\eta^2(s) + \eta(s)\tau'(s) + \frac{[c + a\tau(s)]\tau^2(s)}{2} = \begin{cases} -\frac{[c + a\tau(s)]}{2} & \text{se } \psi(0) \in \overline{H}, \\ 0 & \text{se } \psi(0) \in \overline{C}, \\ \frac{[c + a\tau(s)]}{2} & \text{se } \psi(0) \in \overline{S}. \end{cases} \quad (3.19)$$

Demonstração: Veja que, multiplicando a segunda equação do sistema (3.12) por $\alpha(s)$ (resp. $\eta(s)$) e usando o fato de que $2\alpha(s)\eta(s) + \tau^2(s) = -1$ (resp. $0, 1$) em \overline{H} (resp. $\overline{C}, \overline{S}$), obtemos (3.18) (resp. (3.19)). ■

Como vimos no Teorema 3.1.9, se uma curva X de Q^2 , cuja curvatura não se anula, então X admite evolução autossimilar satisfazendo o FC se, e somente se, a curva associada a X evolui de maneira autossimilar pelo FCI. Diante desse contexto, é suficiente estudar o sistema de EDO relacionado com as soluções autossimilares do fluxo FC. Mas, em um caso especial, também usaremos o sistema de EDO relacionado com as soluções autossimilares do fluxo FCI para obter sólitons dos dois fluxos.

Note que, se uma curva $X(s)$ de Q^2 satisfaz a equação (3.5), então $-X(-s)$ também satisfaz a equação para a mesma constante c e vetor fixado $v \in \mathbb{R}_1^3$. De fato, defina $\overline{X}(s) = -X(-s)$. Dai, $\overline{T}(s) = T(-s)$, $\overline{Y}(s) = -Y(-s)$ e $\overline{T}'(s) = -T'(-s)$. Logo,

$$\overline{k}(s) = \langle \overline{T}'(s), \overline{Y}(s) \rangle = \langle -T'(-s), -Y(-s) \rangle = k(-s)$$

e

$$\bar{k}(s) = k(-s) = c + \langle T(-s), v \rangle = c + \langle \bar{T}(s), v \rangle.$$

Dessa forma, é suficiente estudar o comportamento das curvas X que estão na componente conexa de Q^2 com primeira coordenada negativa. Definimos

$$Q_-^2 = \{(x, y, z) \in Q^2 : x < 0\}.$$

Se X é uma curva em Q_-^2 , então $Y(s)$ (a curva associada a X) está na componente conexa com primeira coordenada positiva, uma vez que, $\langle X(s), Y(s) \rangle = 1$. Definimos

$$Q_+^2 = \{(x, y, z) \in Q^2 : x > 0\}.$$

Nas observações a seguir, vamos usar as Proposições 3.2.1 e 3.2.2 para compreender a relação entre uma solução do sistema (3.12) com condição inicial satisfazendo (3.9) e uma solução autossimilar do fluxo FC em Q^2 .

Observação 3.2.6 Se $\psi(s) = (\alpha(s), \tau(s), \eta(s))$ é uma solução de (3.12) com condição inicial $\psi(0) \in \bar{H}$, isto é, satisfazendo $2\alpha(0)\eta(0) + \tau^2(0) = -1$, então existe uma curva $X : I \rightarrow Q_-^2$ de curvatura

$$k(s) = c + a\langle T(s), (-1, 0, 0) \rangle$$

que admite evolução autossimilar satisfazendo o FC. O triedro $\{X(s), T(s), Y(s)\}$ satisfaz $\eta(s)X(s) + \tau(s)T(s) + \alpha(s)Y(s) = (-1, 0, 0)$ para todo $s \in I$. Além disso, considerando $X(s) = (x_1(s), x_2(s), x_3(s))$, a função $\alpha(s) = \langle X(s), (-1, 0, 0) \rangle = x_1(s) < 0$ (X é uma curva de Q_-^2) e $|\alpha(s)|$ representa a função altura Euclidiana de $X(s)$ com respeito ao vetor $w = (1, 0, 0)$. Uma representação gráfica de $|\alpha(s)|$ para cada s é dada na Figura 3.1, onde $|\alpha(s)|$ é o comprimento do segmento de reta na cor azul que representa a função altura Euclidiana de $\mathbf{X}(s)$ com respeito ao vetor $w = (1, 0, 0)$.

Observação 3.2.7 Se $\psi(s) = (\alpha(s), \tau(s), \eta(s))$ é uma solução de (3.12) com condição inicial $\psi(0) \in \bar{H}$, isto é, satisfazendo $2\alpha(0)\eta(0) + \tau^2(0) = 0$, então existe uma curva

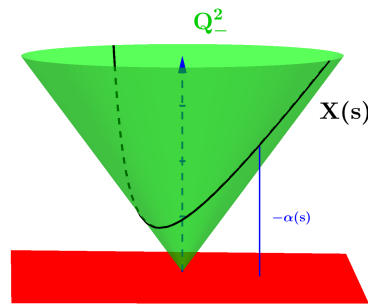


Figura 3.1: Interpretação geométrica de $\alpha(s)$ com $X(s)$ em Q^2 e vetor fixado $(-1, 0, 0)$.

$X : I \rightarrow Q^2$ de curvatura

$$k(s) = c + a\langle T(s), (-1, 1, 0) \rangle$$

que admite evolução autossimilar satisfazendo o FC. O triedro $\{X(s), T(s), Y(s)\}$ satisfaz $\eta(s)X(s) + \tau(s)T(s) + \alpha(s)Y(s) = (-1, 1, 0)$ para todo $s \in I$. Além disso, considerando $X(s) = (x_1(s), x_2(s), x_3(s))$, a função $\alpha(s) = \langle X(s), (-1, 1, 0) \rangle = x_1(s) + x_2(s) \leq 0$ (X é uma curva de Q^2_-) e $\frac{|\alpha(s)|}{\sqrt{2}}$ representa a função altura Euclidiana de $X(s)$ com respeito ao vetor $w = (1, 1, 0)$. Uma representação gráfica de $\frac{|\alpha(s)|}{\sqrt{2}}$ para cada s é dada na Figura 3.2, onde $\frac{|\alpha(s)|}{\sqrt{2}}$ é o comprimento do segmento de reta na cor azul que representa a função altura Euclidiana de $\mathbf{X}(s)$ com respeito ao vetor $w = (1, 1, 0)$.

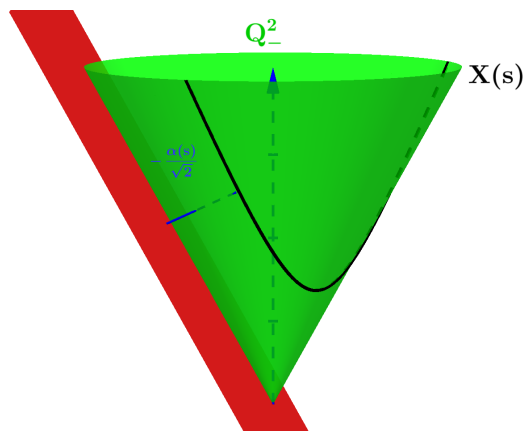


Figura 3.2: Interpretação geométrica de $\alpha(s)$ com X em Q^2 e vetor fixado $(-1, 1, 0)$.

Observação 3.2.8 Se $\psi(s) = (\alpha(s), \tau(s), \eta(s))$ é uma solução de (3.12) com condição inicial $\psi(0) \in \bar{S}$, isto é, satisfazendo $2\alpha(0)\eta(0) + \tau^2(0) = 1$, então existe uma curva

$X : I \rightarrow Q_-^2$ de curvatura

$$k(s) = c + a\langle T(s), (0, 0, 1) \rangle$$

que admite evolução autossimilar satisfazendo o FC. O triedro $\{X(s), T(s), Y(s)\}$ satisfaz $\eta(s)X(s) + \tau(s)T(s) + \alpha(s)Y(s) = (0, 0, 1)$ para todo $s \in I$. Além disso, considerando $X(s) = (x_1(s), x_2(s), x_3(s))$, a função $\alpha(s) = \langle X(s), (0, 0, 1) \rangle = x_3(s)$ e $|\alpha(s)|$ representa a altura Euclidiana de $X(s)$ com respeito ao vetor $w = (0, 0, 1)$. Uma representação gráfica de $|\alpha(s)|$ para cada s é dada na Figura 3.3, onde $|\alpha(s)|$ é o comprimento do segmento de reta na cor azul que representa a função altura Euclidiana de $\mathbf{X}(s)$ com respeito ao vetor $w = (0, 0, 1)$.

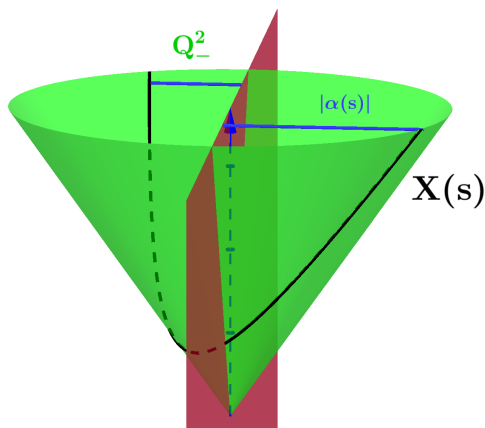


Figura 3.3: Interpretação geométrica de $\alpha(s)$ com $X(s)$ em Q_-^2 e vetor fixado $(0, 0, 1)$.

Desta forma, o estudo da descrição de uma solução autossimilar X de Q_-^2 do fluxo FC em Q_-^2 é equivalente ao estudo do comportamento de uma solução $\psi(s) = (\alpha(s), \tau(s), \eta(s))$ do sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} \alpha'(s) = \tau(s), \\ \tau'(s) = [c + a\tau(s)]\alpha(s) - \eta(s), \\ \eta'(s) = -[c + a\tau(s)]\tau(s), \end{cases} \quad (3.20)$$

para constante $c \in \mathbb{R}$, $a > 0$ e $\psi(0) \in \overline{H} \cup \overline{C} \cup \overline{S} \subset \mathbb{R}^3$, onde os conjuntos disjuntos \overline{H} , \overline{C} e \overline{S} são dados por (3.17) e as funções $\alpha(s)$, $\tau(s)$ e $\eta(s)$ estão relacionadas com a solução autossimilar através da equação (3.13) com $e \in \{(-1, 0, 0), (-1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$.

Sabemos da Proposição 3.2.2 que, dada uma solução $\psi(s) = (\alpha(s), \tau(s), \eta(s))$ do sistema (3.20) para constantes $a, c \in \mathbb{R}$, $a > 0$ e $\psi(0) \in \overline{H} \cup \overline{C} \cup \overline{S}$, existe uma

curva $X : I \rightarrow Q^2$ cuja curvatura é dada por $k(s) = c + a\tau(s)$, isto é, X é uma solução autossimilar do fluxo FC. Assim, se $\tau(s)$ é uma função constante, então a curvatura de X é constante e segue da Proposição 1.3.4 que X é uma cônica. Mas a função $\tau(s)$ não pode ser qualquer constante, mais precisamente temos o seguinte lema.

Lema 3.2.9 *Seja $\psi(s) = (\alpha(s), \tau(s), \eta(s))$ uma solução sistema (3.20) definida no intervalo maximal $I = (\omega_-, \omega_+)$, para constantes $a > 0$, $c \in \mathbb{R}$ e condição inicial $\psi(0) \in \overline{H} \cup \overline{C} \cup \overline{S}$, onde os conjuntos \overline{H} , \overline{C} e \overline{S} são dados por (3.17). A função $\tau(s) = b$, $s \in I$ onde b é uma constante, se e só se, $b \in \{-1, 0, 1\}$ e $I = \mathbb{R}$. Além disso,*

i) Se $b = 0$, então $\psi(s) = (\alpha_0, 0, c\alpha_0)$ é uma solução singular, e $\psi(s) \subset \overline{H}$ (resp. \overline{C} , \overline{S}), se $c < 0$ (resp. $c = 0$, $c > 0$).

ii) Se $b^2 = 1$, então $\psi(s) = (\pm s + \alpha_0, \pm, 0) \in \overline{S}$ para todo $s \in \mathbb{R}$.

Demonstração: Se $b = 0$, segue das duas primeiras equações do sistema (3.20) que $\alpha(s) = \alpha_0$ e $\eta(s) = c\alpha_0$ para todo $s \in I$, isto é, $\psi(s) = (\alpha_0, 0, c\alpha_0)$, $s \in \mathbb{R}$ é uma solução singular do sistema (3.20).

Se $b \neq 0$, segue das duas primeiras equações do sistema (3.20) que, $[c+ab]\alpha(s) = \eta(s)$ e $\alpha(s) = sb + \alpha_0$, $s \in \mathbb{R}$. Usando a equação $2\alpha(s)\eta(s) + \tau^2(s) = \gamma$, onde $\gamma \in \{-1, 0, 1\}$, obtemos que $2[c+ab]\alpha^2(s) = \gamma - b^2$, isto é, a função $2[c+ab]\alpha^2(s)$ é constante. Logo, $b = -\frac{c}{a}$ e $\eta(s) = 0$ para todo $s \in \mathbb{R}$. Assim, $b^2 = 1$, isto é, $2\alpha(s)\eta(s) + \tau^2(s) = 1$. Dessa forma, $\psi_1(s) = (-s + \alpha_0, -1, 0) \in \overline{S}$ e $\psi_2(s) = (s + \alpha_0, 1, 0) \in \overline{S}$, $s \in I$ são as soluções do sistema (3.20), onde $\tau(s)$ é uma função constante não nula. ■

Diante do exposto acima, vamos definir uma solução trivial do sistema (3.20).

Definição 3.2.10 Uma solução $\psi(s) = (\alpha(s), \tau(s), \eta(s))$ do sistema (3.20) definida no intervalo maximal $I = (\omega_-, \omega_+)$, $a > 0$, $c \in \mathbb{R}$ e condição inicial $\psi(0) \in \overline{H} \cup \overline{C} \cup \overline{S}$, onde os conjuntos \overline{H} , \overline{C} e \overline{S} são dados por (3.17) é dita *solução trivial* se $\tau(s)$ é uma função constante.

Observação 3.2.11 Segue do Lema 3.2.9 e da Definição 3.2.10 que as soluções singulares do sistema (3.20) são também soluções triviais de (3.20).

Veja que, se $\psi(0) \in \overline{H} \cup \overline{C}$, a função $\alpha(s)$ é não positiva para todo intervalo de solução, mas se $\psi(0) \in \overline{S}$, a função $\alpha(s)$ não possui sinal definido. Dessa forma,

quando conveniente, alguns resultados vão incluir soluções com condições iniciais no conjunto $\overline{H} \cup \overline{C}$. Para simplificar a escrita, podemos escrever $2\alpha(s)\eta(s) + \tau^2(s) = \delta$ se $\psi(0) \in \overline{H} \cup \overline{C}$, onde $\delta = -1$ ou $\delta = 0$.

Os próximos lemas trazem informações gerais sobre o sistema (3.20).

Lema 3.2.12 *Seja $\psi(s) = (\alpha(s), \tau(s), \eta(s))$ uma solução não trivial do sistema (3.20) definida no intervalo maximal $I = (\omega_-, \omega_+)$, para constantes $a > 0$, $c \in \mathbb{R}$ e condição inicial $\psi(0) \in \overline{H} \cup \overline{C} \cup \overline{S}$, onde os conjuntos \overline{H} , \overline{C} e \overline{S} são dados por (3.17). Se s_0 é um ponto crítico de $\alpha(s)$, então s_0 é ponto de mínimo (resp. máximo) local de $\alpha(s)$ se, e somente se, $c\alpha(s_0) - \eta(s_0) > 0$ (resp. $c\alpha(s_0) - \eta(s_0) < 0$). Em particular, vale que:*

- i) se $c \geq 0$, $\psi(0) \in \overline{H} \cup \overline{C}$, então s_0 é ponto de máximo global de $\alpha(s)$;*
- ii) se $c < 0$, $\psi(0) \in \overline{H}$, então s_0 é ponto de mínimo (resp. máximo) local de $\alpha(s)$ se, e somente se, $2c\alpha^2(s_0) + 1 < 0$ (resp. $2c\alpha^2(s_0) + 1 > 0$);*
- iii) se $c < 0$, $\psi(0) \in \overline{C}$, então s_0 é um ponto de mínimo (resp. máximo) local de $\alpha(s)$ se, e somente se, $\alpha(s_0) < 0$ (resp. $\alpha(s_0) = 0$).*

Demonstração: Seja s_0 um ponto crítico de $\alpha(s)$, então $\tau(s_0) = 0$. Segue da segunda equação do sistema (3.20) que

$$\alpha''(s_0) = \tau'(s_0) = c\alpha(s_0) - \eta(s_0).$$

Se existe $s_0 \in I$ tal que $\tau(s_0) = \tau'(s_0) = \alpha''(s_0) = 0$, então $(\alpha(s_0), 0, c\alpha(s_0))$ é uma solução singular do sistema (3.20), o que contradiz a hipótese. Logo, $\alpha''(s_0) \neq 0$ e o resultado segue.

i) Tomando $\psi(0) \in \overline{H} \cup \overline{C}$, temos que $\alpha(s) \leq 0$ e $\eta(s) \geq 0$ para todo $s \in I$. Logo, se s_0 é um ponto crítico de $\alpha(s)$, $c \geq 0$ e $(\alpha(s_0), 0, \eta(s_0))$ não é uma solução singular do sistema (3.20), então $\alpha''(s_0) = c\alpha(s_0) - \eta(s_0) < 0$. Dessa forma, qualquer crítico de $\alpha(s)$ é um ponto de máximo local. Portanto, s_0 é ponto de máximo global de $\alpha(s)$.

ii) Se $\psi(0) \in \overline{H}$ temos que $\alpha(s) < 0$, $\eta(s) > 0$ e $2\alpha(s)\eta(s) + \tau^2(s) = -1$ para todo $s \in I$. Logo, se $c < 0$ e s_0 é um ponto crítico da função $\alpha(s)$, então $2\alpha(s_0)\eta(s_0) = -1$ e

$$\alpha''(s_0) = c\alpha(s_0) - \eta(s_0) = c\alpha(s_0) + \frac{1}{2\alpha(s_0)} = \frac{2c\alpha^2(s_0) + 1}{2\alpha(s_0)},$$

o que prova *ii*).

iii) Se $\psi(0) \in \overline{C}$ temos que $\alpha(s) \leq 0$, $\eta(s) \geq 0$ e $2\alpha(s)\eta(s) + \tau^2(s) = 0$ para todo $s \in I$. Logo, se $c < 0$ e s_0 é um ponto crítico da função $\alpha(s)$, então $2\alpha(s_0)\eta(s_0) = 0$ e

$$\alpha''(s_0) = c\alpha(s_0) - \eta(s_0).$$

Como $\alpha(s_0)$ e $\eta(s_0)$ não podem ser simultaneamente nulos, então s_0 é um ponto de máximo local de $\alpha(s)$ se, e somente se, $\alpha(s_0) = 0$, e s_0 é um ponto de mínimo local de $\alpha(s)$ se, e somente se, $\alpha(s_0) < 0$. ■

Lema 3.2.13 *Seja $\psi(s) = (\alpha(s), \tau(s), \eta(s))$ uma solução não trivial do sistema (3.20) definida no intervalo maximal $I = (\omega_-, \omega_+)$, para constantes $a > 0$, $c \in \mathbb{R}$ e condição inicial $\psi(0) \in \overline{H} \cup \overline{C} \cup \overline{S}$, onde os conjuntos \overline{H} , \overline{C} e \overline{S} são dados por (3.17). Suponha que s_0 seja um ponto crítico de $\eta(s)$. Se $c = 0$, então $\eta(s)$ é decrescente e s_0 é um ponto de inflexão de $\eta(s)$. Se $c \neq 0$, então $[c + a\tau(s_0)]\tau(s_0) = 0$. Neste caso,*

i) Se $\tau(s_0) = 0$, então s_0 é ponto de mínimo (resp. máximo) local de $\eta(s)$ se, e somente se, $-c^2\alpha(s_0) + c\eta(s_0) > 0$ (resp. $-c^2\alpha(s_0) + c\eta(s_0) < 0$).

iii) Se $c + a\tau(s_0) = 0$, então s_0 é ponto de mínimo (resp. máximo) local de $\eta(s)$ se, e somente se, $c\eta(s_0) < 0$ (resp. $c\eta(s_0) > 0$).

Demonstração: Se $c = 0$, segue da terceira equação do sistema (3.20) que $\eta(s)$ é sempre decrescente. Logo, qualquer ponto crítico de $\eta(s)$ é um ponto de inflexão.

i) Se $c \neq 0$ e s_0 um ponto crítico de $\eta(s)$ tal que $\tau(s_0) = 0$, usando as equações do sistema (3.20), obtemos que

$$\eta''(s_0) = -c\tau'(s_0) - 2a\tau(s_0)\tau'(s_0) = -c\tau'(s_0) = -c^2\alpha(s_0) + c\eta(s_0) \neq 0.$$

De fato, se existe $s_0 \in I$ tal que $\tau(s_0) = \eta''(s_0) = -c\tau'(s_0) = 0$, então $(\alpha(s_0), 0, \eta(s_0))$ é uma solução singular do sistema (3.20), o que contradiz a hipótese. Logo, o resultado segue.

ii) Seja s_0 um ponto crítico de $\eta(s)$ tal que $\tau(s_0) = -\frac{c}{a}$. Derivando duas vezes a função

$\eta(s)$, tomando valores em s_0 e usando as equações do sistema (3.20), obtemos que

$$\eta''(s_0) = -c\tau'(s_0) - 2a\tau(s_0)\tau'(s_0) = c\tau'(s_0) = -c\eta(s_0) \neq 0.$$

De fato, se $c \neq 0$ e $\eta(s_0) = c + a\tau(s_0) = 0$, então $\alpha(s_0)\eta(s_0) = 0$ e

$$2\alpha(s_0)\eta(s_0) + \tau^2(s_0) = \tau^2(s_0) = \frac{c^2}{a^2}.$$

Logo, $\psi(s_0) \in \bar{S}$ e $c^2 = a^2$. Mas, se $c > 0$, $\psi_1(s) = (-s, -1, 0)$ é solução de (3.20); e se $c < 0$, $\psi_2(s) = (s, 1, 0)$ é solução de (3.20). O que conclui o resultado. ■

Lema 3.2.14 *Seja $\psi(s) = (\alpha(s), \tau(s), \eta(s))$ uma solução não trivial do sistema (3.20) definida no intervalo maximal $I = (\omega_-, \omega_+)$, para constantes $a > 0$, $c \in \mathbb{R}$ e condição inicial $\psi(0) \in \bar{H} \cup \bar{C} \cup \bar{S}$, onde os conjuntos \bar{H} , \bar{C} e \bar{S} são dados por (3.17). Se s_0 é um ponto crítico de $\tau(s)$, então s_0 é ponto de mínimo (resp. máximo) local de $\tau(s)$ se, e somente se, $\tau(s_0)[c + a\tau(s_0)] > 0$ (resp. $\tau(s_0)[c + a\tau(s_0)] < 0$). Em particular, vale que:*

i) Se $c = 0$, então s_0 é ponto de mínimo global.

ii) Se $\psi(0) \in \bar{H} \cup \bar{C}$, então $c + a\tau(s_0) < 0$.

iii) Se $c > 0$ e $\psi(0) \in \bar{H} \cup \bar{C}$, então s_0 é um ponto de mínimo global.

Demonstração: Seja s_0 tal que $\tau'(s_0) = 0$, isto é, $[c + a\tau(s_0)]\alpha(s_0) = \eta(s_0)$. Derivando duas vezes a função $\tau(s)$ e tomando valores em s_0 , obtemos que

$$\begin{aligned} \tau''(s_0) &= a\tau'(s_0)\alpha(s_0) + [c + a\tau(s_0)]\tau(s_0) + [c + a\tau(s_0)]\tau(s_0) \\ &= 2[c + a\tau(s_0)]\tau(s_0). \end{aligned}$$

Note que, $\tau(s_0) \neq 0$, caso contrário, se $\tau(s_0) = 0$, então $(\alpha(s_0), 0, c\alpha(s_0))$ é uma solução singular do sistema (3.20).

Se $c \neq 0$, então $c + a\tau(s_0) \neq 0$. De fato, se $c + a\tau(s_0) = 0$, então $\alpha(s_0)\eta(s_0) = 0$ e $2\alpha(s_0)\eta(s_0) + \tau^2(s_0) = \tau^2(s_0) = \frac{c^2}{a^2}$. Logo, $\psi(s_0) \in \bar{S}$ e $c^2 = a^2$. Mas, se $c > 0$, $\psi_1(s) = (-s, -1, 0)$ é solução de (3.20); e se $c < 0$, $\psi_2(s) = (s, 1, 0)$ é solução de (3.20).

Nos dois casos temos uma contradição já que assumimos que a solução não é trivial. Portanto, se $c \neq 0$ segue o resultado.

i) Se $c = 0$, temos que $\tau''(s_0) = a\tau^2(s) > 0$. Assim, todo ponto crítico de $\tau(s)$ é um ponto de mínimo local. Portanto, s_0 é ponto de mínimo global de $\tau(s)$.

ii) Se s_0 é um ponto crítico de $\tau(s)$ e $\psi(0) \in \overline{H} \cup \overline{C}$, então

$$[c + a\tau(s_0)]\alpha(s_0) = \eta(s_0) > 0,$$

já que $2\alpha(s)\eta(s) + \tau^2(s) = -1$ ou 0 em $\overline{H} \cup \overline{C}$. Portanto, $c + a\tau(s_0) < 0$.

iii) Se $\psi(0) \in \overline{H} \cup \overline{C}$, segue do item *ii)* que $c + \tau(s_0) < 0$. Usando que $c > 0$, temos que $\tau(s_0) < -\frac{c}{a} < 0$ e $[c + \tau(s_0)]\tau(s_0) > 0$ para qualquer ponto crítico de $\tau(s)$. Portanto, s_0 é ponto de mínimo global de $\tau(s)$. ■

Lema 3.2.15 *Seja $\psi(s) = (\alpha(s), \tau(s), \eta(s))$ uma solução não trivial do sistema (3.20) definida no intervalo maximal $I = (\omega_-, \omega_+)$, para constantes $a > 0$, $c \in \mathbb{R}$ e condição inicial $\psi(0) \in \overline{H} \cup \overline{C} \cup \overline{S}$, onde os conjuntos \overline{H} , \overline{C} e \overline{S} são dados por (3.17).*

i) Se $c \geq 0$, então a função $\tau(s)$ tem no máximo dois zeros.

ii) Se $c < 0$, então a função $\tau(s)$ tem um número infinito de zeros em $J \subset I$ se, e somente se, as funções $\alpha(s)$, $\tau(s)$ e $\eta(s)$ têm um número infinito de pontos críticos em J .

iii) A função $c + a\tau(s)$ tem no máximo dois zeros.

Demonstração: *i)* Note que, se $c \geq 0$ e $\tau(\bar{s}) > 0$, então $[c + a\tau(\bar{s})]\tau(\bar{s}) > 0$ para cada $\bar{s} \in I$. Assim, segue do Lema 3.2.14 que não existe nenhum máximo local de $\tau(s)$ quando $\tau(s) > 0$, isto é, se existe $s_0 \in I$ tal que $\tau(s_0) = 0$ temos que: se $\tau'(s_0) > 0$, então $\tau(s)$ é crescente no intervalo (s_0, ω_+) ; se $\tau'(s_0) < 0$, então $\tau(s)$ é decrescente no intervalo (ω_-, s_0) . Logo, a função $\tau(s)$ tem no máximo dois zeros.

ii) Segue do sistema (3.20) que os zeros da função $\tau(s)$ são pontos críticos de $\alpha(s)$ e $\eta(s)$. Observe que, se $c < 0$, segue do Lema 3.2.14 que a função $\tau(s)$ pode assumir uma quantidade infinita de zeros, pois, podem existir máximos locais quando $0 < \tau(s) < -\frac{c}{a}$ e mínimos locais quando $\tau(s) < 0$. Assim, se $c < 0$, então $\tau(s)$ tem uma quantidade infinita de zeros se, e somente se, $\tau(s)$ tem uma quantidade infinita

de extremos locais, isto é, um conjunto infinito de pontos críticos. Logo, o resultado segue.

iii) Veja que, se $c \leq 0$ e $c + a\tau(s) > 0$, então $[c + a\tau(s)]\tau(s) > 0$ para cada s . Segue do Lema 3.2.14 que não existe máximo local de $\tau(s)$ quando $\tau(s) > -\frac{c}{a}$, isto é, se existe $s_0 \in I$ tal que $c + a\tau(s_0) = 0$ temos que: se $\tau'(s_0) > 0$, então $\tau(s)$ é crescente no intervalo (s_0, ω_+) ; se $\tau'(s_0) < 0$, então $\tau(s)$ é decrescente no intervalo (ω_-, s_0) . Logo, nesta situação, a função $c + a\tau(s)$ tem no máximo dois zeros. Quando $c > 0$ e $\psi(0) \in \overline{H} \cup \overline{C}$, segue do item *iii)* do Lema 3.2.14 que a função $\tau(s)$ tem no máximo um ponto crítico, assim, a função $c + a\tau(s)$ tem no máximo dois zeros. Por fim, se $c > 0$ e $\psi(0) \in \overline{S}$, suponha por contradição que existem $s_1, s_2, s_3 \in I$ tais que $s_1 < s_2 < s_3$, $c + a\tau(s_1) = c + a\tau(s_2) = c + a\tau(s_3) = 0$ e $c + a\tau(s) \neq 0$ para todo $s \in (s_1, s_2) \cup (s_2, s_3)$. Segue do Lema 3.2.14 que $\tau(s) < 0$ para todo $s \in (s_1, s_3)$, pois, $\tau(s)$ não possui máximo local quando $\tau(s)$ é positiva. Veja também que, s_1, s_2 e s_3 são pontos críticos de $\eta(s)$. Se s_1 é um ponto de máximo local de $\eta(s)$, então segue do sistema de equações (3.20) e do Lema 3.2.13 que: $\eta(s_1) > 0$, $\tau(s)$ é decrescente em s_1 , s_2 um ponto de mínimo local para $\eta(s)$, $\eta(s_2) < 0$, $c + a\tau(s) < 0$ para todo $s \in (s_1, s_2)$, s_3 é ponto de máximo local de $\eta(s)$, $\eta(s_3) > 0$ e $c + a\tau(s) > 0$ para todo $s \in (s_2, s_3)$. Pelo Teorema do Valor Intermediário existem $b \in (s_1, s_2)$ e $d \in (s_2, s_3)$ tais que $\eta(b) = \eta(d) = 0$. Usando a equação $2\alpha(s)\eta(s) + \tau^2(s) = 1$ e que $\tau(s) < 0$ para todo $s \in (s_1, s_3)$, obtemos $\tau(b) = \tau(d) = -1$, ou seja, $c - a < 0$ e $c - a > 0$. O que é uma contradição. De maneira inteiramente análoga pode-se chegar a uma contradição se s_1 for um ponto de mínimo local de $\eta(s)$. Portanto, a função $c + a\tau(s)$ tem no máximo dois zeros. ■

Lema 3.2.16 *Seja $\psi(s) = (\alpha(s), \tau(s), \eta(s))$ uma solução não trivial do sistema (3.20) definida no intervalo maximal $I = (\omega_-, \omega_+)$, para constantes $a > 0$, $c < 0$ e condição inicial $\psi(0) \in \overline{H} \cup \overline{C} \cup \overline{S}$, onde os conjuntos \overline{H} , \overline{C} e \overline{S} são dados por (3.17). Se $\tau(s)$ tem um conjunto infinito de zeros no intervalo (ω_-, \bar{s}) (resp. (\bar{s}, ω_+)) para qualquer $\bar{s} \in I$ fixado, então as funções $\alpha(s)$, $\tau(s)$ e $\eta(s)$ são limitadas no intervalo (ω_-, \bar{s}) (resp. (\bar{s}, ω_+)).*

Demonstração: Veja que, a função $g(s) = c\alpha(s) + \eta(s)$, $s \in I$ é decrescente em I , pois, $g'(s) = -a\tau^2(s)$ para todo $s \in I$. Sabemos do item *ii)* do Lema 3.2.15 que, as

funções $\alpha(s)$, $\tau(s)$ e $\eta(s)$ têm um número infinito de pontos críticos quando $\tau(s)$ tem um conjunto infinito de zeros. Dessa forma, seja $(s_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset (\omega_-, \bar{s})$ tal que $\tau(s_k) = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$, $\tau(s) \neq 0$ para todo $s \in (s_{k+1}, s_k)$ e $\lim_{k \rightarrow +\infty} s_k = \omega_-$. Além disso, considere: $(s_{2k})_{k \in \mathbb{N}}$ o conjunto dos pontos de máximos locais de $\alpha(s)$; $(s_{2k+1})_{k \in \mathbb{N}}$ o conjunto dos pontos de mínimos locais de $\alpha(s)$; $\tilde{s}_{2k} \in (s_{2k+1}, s_{2k})$ os pontos de máximos locais de $\tau(s)$ e $\tilde{s}_{2k+1} \in (s_{2k+2}, s_{2k+1})$ os pontos de mínimos locais de $\tau(s)$. Segue do Lema 3.2.14 que os pontos de máximos locais de $\tau(s)$ satisfazem $0 < \tau(\tilde{s}_{2k}) < -\frac{c}{a}$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e $0 < \tau(s) < -\frac{c}{a}$ para todo $s \in (s_{2k+1}, s_{2k})$. De maneira análoga, seja $(s_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset (\bar{s}, \omega_+)$ tal que $\tau(s_j) = 0$ para todo $j \in \mathbb{N}$, $\tau(s) \neq 0$ para todo $s \in (s_j, s_{j+1})$ e $\lim_{j \rightarrow +\infty} s_j = \omega_+$. Além disso, considere: $(s_{2j})_{j \in \mathbb{N}}$ o conjunto dos pontos de máximos locais de $\alpha(s)$; $(s_{2j+1})_{j \in \mathbb{N}}$ o conjunto dos pontos de mínimos locais de $\alpha(s)$; $\tilde{s}_{2j} \in (s_{2j+1}, s_{2j+2})$ os pontos de máximos locais de $\tau(s)$ e $\tilde{s}_{2j+1} \in (s_{2j+2}, s_{2j+3})$ os pontos de mínimos locais de $\tau(s)$. Segue do Lema 3.2.14 que os pontos de máximos locais de $\tau(s)$ satisfazem $0 < \tau(\tilde{s}_{2j}) < -\frac{c}{a}$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e $0 < \tau(s) < -\frac{c}{a}$ para todo $s \in (s_{2j+1}, s_{2j+2})$. Para continuar a demonstração vamos separar nos seguintes casos: $\psi(0) \in \overline{H} \cup \overline{C}$ e $\psi(0) \in \overline{S}$.

Sabemos que, se $\psi(0) \in \overline{H} \cup \overline{C}$, então $\alpha(s) \leq 0$ e $\eta(s) \geq 0$ para todo $s \in I$. Assim, a função decrescente $g(s) = c\alpha(s) + \eta(s)$ é não negativa, limitada no intervalo (\bar{s}, ω_+) , e

$$0 < c\alpha(s) \leq g(s) \leq g(\bar{s}) \quad \text{e} \quad 0 \leq \eta(s) \leq g(s) \leq g(\bar{s})$$

para todo $s > \bar{s}$, ou seja, as funções $\alpha(s)$ e $\eta(s)$ são limitadas em (\bar{s}, ω_+) , e pela equação $2\alpha(s)\eta(s) + \tau^2(s) = \delta$, onde $\delta \in \{-1, 0\}$, temos também que $\tau(s)$ é limitada. Afirmamos que $\alpha(s)$ é limitada no intervalo (ω_-, \bar{s}) . De fato, suponha por contradição que a sequência dos valores mínimos de $\alpha(s)$, $(\alpha(s_{2k+1}))_{k \in \mathbb{N}}$ seja ilimitada. Se $\psi(0) \in \overline{H}$, então pelo item *ii*) do Lema 3.2.12 temos que $\alpha(s_{2k+1}) < -\frac{1}{\sqrt{-2c}}$ e $\alpha(s_{2k}) > -\frac{1}{\sqrt{-2c}}$ para todo $k \in \mathbb{N}$, isto é, existe $t_{2k} \in (s_{2k+1}, s_{2k})$ tal que $\alpha(t_{2k}) = -\frac{1}{\sqrt{-2c}}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Se $\psi(0) \in \overline{C}$, então pelo item *iii*) do Lema 3.2.12 temos que $\alpha(s_{2k+1}) < 0$ e $\alpha(s_{2k}) = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$, e $\alpha(s_{2k+3}) < \alpha(s_{2k+1})$ para todo $k \in \mathbb{N}$, pois, $g(s) = c\alpha(s) + \eta(s)$ é decrescente e $\eta(s_{2k+1}) = \eta(s_{2k+3}) = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Assim, existem $k_0 \in \mathbb{N}$ e $t_{2k} \in (s_{2k+1}, s_{2k})$ satisfazendo $\alpha(t_{2k}) = -\frac{1}{\sqrt{-2c}}$ para todo $k > k_0$. Como $2\alpha(s)\eta(s) + \tau^2(s) = \delta$, onde $\delta \in \{-1, 0\}$ e $0 < \tau(s) < -\frac{c}{a}$ para todo $s \in (s_{2k+1}, s_{2k})$, então $(\eta(t_{2k}))_{k > k_0}$ também é limitada para todo $k \in \mathbb{N}$. Logo, $(g(t_{2k}))_{k > k_0}$ é limitada e

monótona. Portanto, $g(s)$ é limitada e $0 < c\alpha(s) \leq g(s)$ para $s \in (\omega_-, \bar{s})$, o que é uma contradição, pois, supomos que $\alpha(s)$ era ilimitada. Logo $\alpha(s)$ é limitada no intervalo (ω_-, \bar{s}) . Segue da equação 3.19 do Lema 3.2.5 que

$$\eta^2(\tilde{s}_{2k}) = \begin{cases} -\frac{[c + a\tau(\tilde{s}_{2k})][1 + \tau^2(\tilde{s}_{2k})]}{2} & \text{se } \psi(0) \in \overline{H}, \\ -\frac{[c + a\tau(\tilde{s}_{2k})]\tau^2(\tilde{s}_{2k})}{2} & \text{se } \psi(0) \in \overline{C}, \end{cases}$$

isto é, $(\eta(\tilde{s}_{2k}))_{k \in \mathbb{N}}$ é limitada. Como já provamos que $\alpha(s)$ é limitada em (ω_-, \bar{s}) , temos que $g(\tilde{s}_{2k}) = c\alpha(\tilde{s}_{2k}) + \eta(\tilde{s}_{2k})$ é limitada para todo $k \in \mathbb{N}$. Logo, $(g(\tilde{s}_{2k}))_{k \in \mathbb{N}}$ é limitada e monótona. Dessa forma, $g(s)$ é limitada, $0 < c\alpha(s) \leq g(s)$, $0 < \eta(s) \leq g(s)$ para $s \in (\omega_-, \bar{s})$. Portanto, as funções $\alpha(s)$, $\eta(s)$ e $\tau(s)$ são limitadas no intervalo (ω_-, \bar{s}) .

Por fim, vamos estudar o caso em que $\psi(0) \in \overline{S}$. Se s_0 satisfaz $\tau(s_0) = 0$, então $2\alpha(s_0)\eta(s_0) = 1$. Assim, segue dos Lemas 3.2.12 e 3.2.13 que, se $\alpha(s_0) > 0$ (resp. $\alpha(s_0) < 0$), então $\eta(s_0) > 0$ (resp. $\eta(s_0) < 0$) e s_0 é ponto de máximo (resp. mínimo) local para as funções $\alpha(s)$ e $\eta(s)$.

Afirmção: se $s_0, \bar{s}_0 \in I$, $s_0 < \bar{s}_0$ são pontos de máximos ou pontos de mínimos de $\alpha(s)$ (resp. $\eta(s)$), então $\alpha(s_0) \leq \alpha(\bar{s}_0)$ (resp. $\eta(s_0) \geq \eta(\bar{s}_0)$). De fato, como $\eta(s_0) = \frac{1}{2\alpha(s_0)}$, $\eta(\bar{s}_0) = \frac{1}{2\alpha(\bar{s}_0)}$ e a função $g(s) = c\alpha(s) + \eta(s)$ é decrescente, temos que $g(s_0) \geq g(\bar{s}_0)$ e

$$\frac{2c\alpha^2(s_0) + 1}{2\alpha(s_0)} \geq \frac{2c\alpha^2(\bar{s}_0) + 1}{2\alpha(\bar{s}_0)}.$$

Como $\alpha(s_0)\alpha(\bar{s}_0) > 0$, obtemos

$$2c\alpha(s_0)\alpha(\bar{s}_0)[\alpha(s_0) - \alpha(\bar{s}_0)] \geq \alpha(s_0) - \alpha(\bar{s}_0).$$

Se $\alpha(s_0) > \alpha(\bar{s}_0)$, temos que $2c\alpha(s_0)\alpha(\bar{s}_0) \geq 1$, o que é uma contradição, pois $c < 0$ e $\alpha(s_0)\alpha(\bar{s}_0) > 0$. Logo, $\alpha(s_0) \leq \alpha(\bar{s}_0)$. De maneira similar, usando que, $\alpha(s_0) = \frac{1}{2\eta(s_0)}$, $\alpha(\bar{s}_0) = \frac{1}{2\eta(\bar{s}_0)}$ e $g(s_0) \geq g(\bar{s}_0)$, obtemos que

$$\frac{c + 2\eta^2(s_0)}{2\eta(s_0)} \geq \frac{c + 2\eta^2(\bar{s}_0)}{2\eta(\bar{s}_0)}.$$

Como $\eta(s_0)\eta(\bar{s}_0) > 0$, obtemos

$$2\eta(s_0)\eta(\bar{s}_0) [\eta(s_0) - \eta(\bar{s}_0)] \geq c [\eta(s_0) - \eta(\bar{s}_0)].$$

Se $\eta(s_0) < \eta(\bar{s}_0)$, temos que $2\eta(s_0)\eta(\bar{s}_0) \leq c < 0$, o que é uma contradição, pois, $\eta(s_0)\eta(\bar{s}_0) > 0$. Logo, $\eta(s_0) \geq \eta(\bar{s}_0)$. O que conclui prova a Afirmação.

Seja $(s_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset (\omega_-, \bar{s})$ tal que $\tau(s_k) = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Segue da afirmação que os valores de máximos locais de $\alpha(s)$ e os valores de mínimos locais de $\eta(s)$ são limitados, isto é, $0 < \alpha(s_{2k}) \leq \alpha(s_2)$ e $0 > \eta(s_{2k+1}) \geq \eta(s_1)$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Além disso, existe $t_{2k} \in [s_{2k+1}, s_{2k}]$ tal que $\alpha(t_{2k}) = \alpha(s_1)$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Sabemos que $\tau(s)$ também é limitada no intervalo $[s_{2k+1}, s_{2k}]$ e assim, $\tau(t_{2k})$ é limitada para todo $k \in \mathbb{N}$ e segue da equação $2\alpha(s)\eta(s) + \tau^2(s) = 1$ que $\eta(t_{2k})$ também é limitada para todo $k \in \mathbb{N}$. Dessa forma a sequência $(g(t_{2k}))_{k \in \mathbb{N}}$ é monótona e limitada, e conseqüentemente a função $g(s)$ é limitada em (ω_-, \bar{s}) , ou seja, $|g(s)| \leq M$ para todo $s < \bar{s}$, onde $M \in \mathbb{R}^+$. Assim,

$$\begin{cases} |c\alpha(s_{2k+1})| \leq |g(s_{2k+1})| + |\eta(s_{2k+1})| \leq |\eta(s_1)| + M, \\ |\eta(s_{2k})| \leq |g(s_{2k})| + |c\alpha(s_{2k})| \leq M + |c|\alpha(s_2) \end{cases}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$, ou seja, os valores de mínimos locais de $\alpha(s)$ e os valores de máximos locais de $\eta(s)$ também são limitados. Logo, as funções $\alpha(s)$ e $\eta(s)$ são limitadas em (ω_-, \bar{s}) , e segue da equação $2\alpha(s)\eta(s) + \tau^2(s) = 1$ que $\tau(s)$ também é limitada neste intervalo. De maneira análoga, seja $(s_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset (\bar{s}, \omega_+)$ tal que $\tau(s_j) = 0$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Segue da afirmação que os valores de mínimos locais de $\alpha(s)$ e os valores de máximos locais de $\eta(s)$ são limitados, isto é, $\alpha(s_1) \leq \alpha(s_{2j+1}) < 0$ e $\eta(s_2) \geq \eta(s_{2j}) > 0$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Além disso, existe $t_{2j} \in [s_{2j+1}, s_{2j+2}]$ tal que $\alpha(t_{2j}) = \alpha(s_2)$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Sabemos que $\tau(s)$ também é limitada no intervalo $[s_{2j+1}, s_{2j+2}]$ e assim, $\tau(t_{2j})$ é limitada para todo $j \in \mathbb{N}$ e segue da equação $2\alpha(s)\eta(s) + \tau^2(s) = 1$ que $\eta(t_{2j})$ é limitada para todo $j \in \mathbb{N}$. Dessa forma, a sequência $(g(t_{2j}))_{j \in \mathbb{N}}$ é monótona e limitada, e conseqüentemente a função $g(s)$ é limitada em (\bar{s}, ω_+) , ou seja, $|g(s)| \leq M$ para todo $s > \bar{s}$, onde $M \in \mathbb{R}^+$. Assim,

$$\begin{cases} |c\alpha(s_{2j})| \leq |g(s_{2j})| + |\eta(s_{2j})| \leq \eta(s_2) + M, \\ |\eta(s_{2j+1})| \leq |g(s_{2j+1})| + |c\alpha(s_{2j+1})| \leq |c\alpha(s_1)| + |c|M \end{cases}$$

para todo $j \in \mathbb{N}$, ou seja, os valores de máximos locais de $\alpha(s)$ e os valores de mínimos locais de $\eta(s)$ são limitados. Logo, as funções $\alpha(s)$ e $\eta(s)$ são limitadas em (\bar{s}, ω_+) , e segue da equação $2\alpha(s)\eta(s) + \tau^2(s) = 1$ que $\tau(s)$ é limitada neste intervalo. ■

Lema 3.2.17 *Seja $\psi(s) = (\alpha(s), \tau(s), \eta(s))$ uma solução não trivial do sistema (3.20) definida no intervalo maximal $I = (\omega_-, \omega_+)$, para constantes $a > 0$, $c \in \mathbb{R}$ e condição inicial $\psi(0) \in \bar{H} \cup \bar{C} \cup \bar{S}$, onde os conjuntos \bar{H} , \bar{C} e \bar{S} são dados por (3.17).*

- i) Se $c \geq 0$, então existem $s_1, s_2 \in I$ tais que as funções $\alpha(s)$, $\tau(s)$ e $\eta(s)$ são monótonas nos intervalos (ω_-, s_1) e (s_2, ω_+) .*
- ii) Se $c < 0$ e pelo menos uma das funções $\alpha(s)$, $\tau(s)$ e $\eta(s)$ é ilimitada em (ω_-, \bar{s}) (resp. (\bar{s}, ω_+)) para qualquer $\bar{s} \in I$ fixado, então existe $s_1 \in (\omega_-, \bar{s})$ (resp. $s_2 \in (\bar{s}, \omega_+)$) tal que as funções $\alpha(s)$, $\tau(s)$ e $\eta(s)$ são monótonas em (ω_-, s_1) (resp. (s_2, ω_+)).*

Demonstração: *i)* Se $c = 0$, segue do item *i)* do Lema 3.2.14 que a função $\tau(s)$ tem no máximo um ponto crítico. Logo, $\tau(s)$ tem no máximo dois zeros, isto é, as funções $\alpha(s)$ e $\eta(s)$ tem no máximo dois pontos críticos. Portanto, quando $c = 0$ a propriedade *i)* se verifica. Se $c > 0$, segue dos itens *i)* e *iii)* do Lema 3.2.15 que as funções $\tau(s)$ e $c + a\tau(s)$ têm no máximo dois zeros. Assim, segue do sistema (3.20) que a função $\alpha(s)$ tem no máximo dois pontos críticos e a função $\eta(s)$ tem no máximo quatro pontos críticos. Afirmamos que $\tau(s)$ tem no máximo três pontos críticos. De fato, suponha por contradição que s_1, s_2, s_3 e s_4 sejam quatro pontos críticos consecutivos de $\tau(s)$, isto é, $\tau'(s) \neq 0$ para todo $s \in (s_1, s_2) \cup (s_2, s_3) \cup (s_3, s_4)$. Segue do Lema 3.2.14 que $\tau(s)$ não possui máximo local quando $\tau(s) > 0$, pois, $[c + \tau(s)]\tau(s) > 0$ se $\tau(s) > 0$. Assim, $\tau(s) < 0$ para todo $s \in [s_1, s_4]$ e segue do Lema 3.2.14 que $c + a\tau(s_i) > 0$ se s_i é ponto de máximo local de $\tau(s)$ e $c + a\tau(s_i) < 0$ se s_i é ponto de mínimo local de $\tau(s)$, onde $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Mas, isso implica que a função $c + a\tau(s)$ tem três zeros, o que contradição, pois, pelo item *iii)* do Lema 3.2.15 a função $c + a\tau(s)$ possui no máximo dois zeros. Logo, $\tau(s)$ tem no máximo três pontos críticos. Portanto, existem $s_1, s_2 \in I$ tais que as funções $\alpha(s)$, $\tau(s)$ e $\eta(s)$ são monótonas nos intervalos (ω_-, s_1) e (s_2, ω_+) .

ii) Segue do Lema 3.2.16 que, se alguma das funções $\alpha(s)$, $\tau(s)$ e $\eta(s)$ é ilimitada em (ω_-, \bar{s}) (resp. (\bar{s}, ω_+)), então $\tau(s)$ tem no máximo um número finito de zeros

em (ω_-, \bar{s}) (resp. (\bar{s}, ω_+)). Dai, segue do item *ii*) do Lema 3.2.15 que as funções $\alpha(s)$, $\tau(s)$ e $\eta(s)$ tem um número finitos de pontos críticos em (ω_-, \bar{s}) (resp. (\bar{s}, ω_+)). Portanto, existe $s_1 \in (\omega_-, \bar{s})$ (resp. $s_2 \in (\bar{s}, \omega_+)$) tal que as funções $\alpha(s)$, $\tau(s)$ e $\eta(s)$ são monótonas em (ω_-, s_1) (resp. (s_2, ω_+)). ■

Lema 3.2.18 *Seja $\psi(s) = (\alpha(s), \tau(s), \eta(s))$ uma solução não trivial do sistema (3.20) definida no intervalo maximal $I = (\omega_-, \omega_+)$, para uma constante $a > 0$, $c \in \mathbb{R}$ e condição inicial $\psi(0) \in \overline{H} \cup \overline{C} \cup \overline{S}$, onde os conjuntos \overline{H} , \overline{C} e \overline{S} são dados por (3.17). Seja $\bar{s} \in I$.*

- i) Se a função $\alpha(s)$ é limitada no intervalo (ω_-, \bar{s}) , então as funções $\tau(s)$ e $\eta(s)$ são limitadas no intervalo (ω_-, \bar{s}) e $\omega_- = -\infty$.*
- ii) Se a função $\alpha(s)$ é limitada no intervalo (\bar{s}, ω_+) , então as funções $\tau(s)$ e $\eta(s)$ são limitadas no intervalo (\bar{s}, ω_+) e $\omega_+ = +\infty$.*
- iii) Se a função $\eta(s)$ é limitada no intervalo (ω_-, \bar{s}) , então $\tau(s)$ é limitada no intervalo (ω_-, \bar{s}) e $\omega_- = -\infty$.*
- iv) Se a função $\eta(s)$ é limitada no intervalo (\bar{s}, ω_+) , então $\tau(s)$ é limitada no intervalo (\bar{s}, ω_+) e $\omega_+ = +\infty$.*

Demonstração: Antes de iniciar a prova dos itens, veja que, se $\alpha(s) \neq 0$, $\eta(s) \neq 0$, $[c + a\tau(s)]\tau(s) \neq 0$ e $2\alpha(s)\eta(s) + \tau^2(s) = \gamma$, onde $\gamma \in \{-1, 0, 1\}$, então usando as equações do sistema (3.20), obtemos que

$$\frac{\frac{d}{ds}(\tau^2(s))}{\frac{d}{ds}(2\eta(s))} = \frac{2\tau'(s)\tau(s)}{-2[c + a\tau(s)]\tau(s)} = -\alpha(s) + \frac{\eta(s)}{c + a\tau(s)} = -\alpha(s) + \frac{\gamma - \tau^2(s)}{2\alpha(s)[c + a\tau(s)]},$$

ou ainda,

$$\frac{\frac{d}{ds}(\tau^2(s))}{\frac{d}{ds}(2\eta(s))} = -\alpha(s) + \frac{\gamma}{2\alpha(s)[c + a\tau(s)]} - \frac{\tau(s)}{2\alpha(s) \left[\frac{c}{\tau(s)} + a \right]}. \quad (3.21)$$

i) Seja $\alpha(s)$ limitada no intervalo (ω_-, \bar{s}) . Suponha por contradição que $\tau(s)$ seja ilimitada em (ω_-, \bar{s}) . Segue do Lema 3.2.17 que existe $s_1 \in (\omega_-, \bar{s})$ tal que as funções

$\alpha(s)$, $\tau(s)$ e $\eta(s)$ são monótonas em (ω_-, s_1) . Assim,

$$\lim_{s \rightarrow \omega_-} \tau(s) = \pm\infty, \quad \lim_{s \rightarrow \omega_-} \tau(s)[c + a\tau(s)] = +\infty \quad \text{e} \quad \eta'(s) = -[c + a\tau(s)]\tau(s) < 0$$

para todo $s < s_1$. Logo, segue da equação $2\alpha(s)\eta(s) + \tau^2(s) = \gamma$, onde $\gamma \in \{-1, 0, 1\}$ que $\eta(s)$ também é ilimitada, $\lim_{s \rightarrow \omega_-} \eta(s) = +\infty$ e $\lim_{s \rightarrow \omega_-} \eta(s)\alpha(s) = -\infty$, ou seja, existe \bar{s}_1 tal que $\alpha(s) < 0$ para todo $s < \bar{s}_1$.

Se $\lim_{s \rightarrow \omega_-} \tau(s) = -\infty$, pela monotocidade da função $\tau(s)$ podemos tomar \bar{s}_1 de forma que $\tau'(s) > 0$, $\gamma - \tau^2(s) < 0$ e $c + a\tau(s) < 0$ para todo $s < \bar{s}_1$, onde $\gamma \in \{-1, 0, 1\}$. Assim, $\alpha(s)\tau'(s) < 0$ e usando a equação (3.18) do Lema 3.2.5, obtemos que

$$\alpha(s)\tau'(s) = [c + a\tau(s)]\alpha^2(s) - \frac{\gamma}{2} + \frac{\tau^2(s)}{2} < 0,$$

ou ainda,

$$\alpha^2(s) > \frac{\gamma - \tau^2(s)}{c + a\tau(s)} > 0$$

para todo $s < \bar{s}_1$, o que é uma contradição, pois supomos que $\lim_{s \rightarrow \omega_-} \tau(s) = -\infty$ e $\alpha(s)$ é limitada.

Suponha que $\lim_{s \rightarrow \omega_-} \tau(s) = +\infty$. Dessa forma, podemos tomar $s_1 \in (\omega_-, \bar{s})$ de forma que $\alpha(s)$ é crescente em (ω_-, s_1) , como estamos supondo que $\alpha(s)$ é limitada, temos que $\lim_{s \rightarrow \omega_-} \alpha(s) = L$, onde $L \in \mathbb{R}^-$ e $\lim_{s \rightarrow \omega_-} \alpha(s)[c + a\tau(s)] = -\infty$. Logo, segue da equação (3.21) que

$$\lim_{s \rightarrow \omega_-} \frac{\frac{d}{ds}(\tau^2(s))}{\frac{d}{ds}(2\eta(s))} = +\infty$$

e usando a regra de L'Hospital

$$\lim_{s \rightarrow \omega_-} \frac{\tau^2(s)}{2\eta(s)} = \lim_{s \rightarrow \omega_-} \frac{\frac{d}{ds}(\tau^2(s))}{\frac{d}{ds}(2\eta(s))} = +\infty.$$

Logo, segue da equação $2\alpha(s)\eta(s) + \tau^2(s) = \gamma$, onde $\gamma \in \{-1, 0, 1\}$ que

$$\lim_{s \rightarrow \omega_-} \alpha(s) = \lim_{s \rightarrow \omega_-} \frac{\gamma}{2\eta(s)} - \frac{\tau^2(s)}{2\eta(s)} = -\infty,$$

o que é uma contradição, pois, por hipótese $\alpha(s)$ é limitada em (ω_-, \bar{s}) . Portanto, $\tau(s)$

é limitada em (ω_-, \bar{s}) .

Seja $M > 0$ tal que $|\tau(s)| < M$ para todo $s \in (\omega_-, \bar{s})$. Usando a terceira equação do sistema (3.20), obtemos que

$$|\eta(\bar{s}) - \eta(s)| = \left| - \int_s^{\bar{s}} [c + \tau(u)]\tau(u)du \right| < (|c|M + aM^2)(\bar{s} - s)$$

para todo $s < \bar{s}$. Como I é um intervalo maximal, temos que qualquer solução do sistema (3.20) escapa de conjuntos compactos de $(\omega_-, \bar{s}) \times \mathbb{R}^3$, então $\omega_- = -\infty$.

Para concluir a demonstração, vamos provar que $\eta(s)$ é limitada. Suponha por contradição que $\eta(s)$ seja ilimitada, isto é, $\lim_{s \rightarrow -\infty} \eta(s) = \pm\infty$, então pelo Lema 3.2.17 podemos escolher s_1 de forma que as funções $\alpha(s)$, $\tau(s)$ e $\eta(s)$ sejam monótonas em $(-\infty, s_1)$. Assim, os limites $\lim_{s \rightarrow -\infty} \alpha(s)$ e $\lim_{s \rightarrow -\infty} \tau(s)$ existem,

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} [c + a\tau(s)]\alpha(s) - \eta(s) = \mp\infty,$$

e a integral imprópria

$$\int_{-\infty}^{\bar{s}} \tau'(u)du = \tau(\bar{s}) - \lim_{s \rightarrow -\infty} \tau(s)$$

é convergente, o que é uma contradição, pois, $\tau'(s) = [c + a\tau(s)]\alpha(s) - \eta(s)$. Portanto, $\eta(s)$ também é limitada no intervalo $(-\infty, \bar{s})$.

ii) De maneira análoga ao item *i)*, seja $\alpha(s)$ limitada no intervalo (\bar{s}, ω_+) . Suponha por contradição que $\tau(s)$ seja ilimitada em (\bar{s}, ω_+) . Segue do Lema 3.2.17 que existe $s_2 \in (\bar{s}, \omega_+)$ tal que as funções $\alpha(s)$, $\tau(s)$ e $\eta(s)$ são monótonas em (s_2, ω_+) . Assim,

$$\lim_{s \rightarrow \omega_+} \tau(s) = \pm\infty, \quad \lim_{s \rightarrow \omega_+} \tau(s)[c + a\tau(s)] = +\infty, \quad e \quad \eta'(s) = -[c + a\tau(s)]\tau(s) < 0$$

para todo $s > s_2$. Logo, segue da equação $2\alpha(s)\eta(s) + \tau^2(s) = \gamma$, onde $\gamma \in \{-1, 0, 1\}$ que $\eta(s)$ também é ilimitada, $\lim_{s \rightarrow \omega_+} \eta(s) = -\infty$ e $\lim_{s \rightarrow \omega_+} \eta(s)\alpha(s) = -\infty$, ou seja, existe \bar{s}_2 tal que $\alpha(s) > 0$ para todo $s > \bar{s}_2 > s_2$. Se $\lim_{s \rightarrow \omega_+} \tau(s) = -\infty$, segue da monotocidade da função $\tau(s)$ que podemos tomar \bar{s}_2 de forma que $\tau'(s) < 0$, $\gamma - \tau^2(s) < 0$ e $c + a\tau(s) < 0$ para todo $s > \bar{s}_2$, onde $\gamma \in \{-1, 0, 1\}$. Assim, $\alpha(s)\tau'(s) < 0$ e usando a equação (3.18)

do Lema 3.2.5, obtemos que

$$\alpha(s)\tau'(s) = [c + a\tau(s)]\alpha^2(s) - \frac{\gamma}{2} + \frac{\tau^2(s)}{2} < 0,$$

ou ainda,

$$\alpha^2(s) > \frac{\gamma - \tau^2(s)}{c + a\tau(s)} > 0$$

para todo $s < \bar{s}_2$, o que é uma contradição, pois supomos que $\lim_{s \rightarrow \omega_+} \tau(s) = -\infty$ e $\alpha(s)$ é limitada.

Suponha que $\lim_{s \rightarrow \omega_+} \tau(s) = +\infty$. Dessa forma, podemos tomar $s_2 \in (\bar{s}, \omega_+)$ de forma que $\alpha(s)$ é crescente em (s_2, ω_+) , como estamos supondo que $\alpha(s)$ é limitada, temos que $\lim_{s \rightarrow \omega_+} \alpha(s) = L$, onde $L \in \mathbb{R}^+$ e $\lim_{s \rightarrow \omega_+} \alpha(s)[c + a\tau(s)] = +\infty$. Logo, segue da equação (3.21) que

$$\lim_{s \rightarrow \omega_+} \frac{\frac{d}{ds}(\tau^2(s))}{\frac{d}{ds}(2\eta(s))} = -\infty$$

e usando a regra de L'Hospital

$$\lim_{s \rightarrow \omega_+} \frac{\tau^2(s)}{2\eta(s)} = \lim_{s \rightarrow \omega_+} \frac{\frac{d}{ds}(\tau^2(s))}{\frac{d}{ds}(2\eta(s))} = -\infty.$$

Dessa forma, segue da equação $2\alpha(s)\eta(s) + \tau^2(s) = \gamma$, onde $\gamma \in \{-1, 0, 1\}$ que

$$\lim_{s \rightarrow \omega_+} \alpha(s) = \lim_{s \rightarrow \omega_+} \frac{\gamma}{2\eta(s)} - \frac{\tau^2}{2\eta(s)} = +\infty,$$

o que é uma contradição, pois, por hipótese $\alpha(s)$ é limitada em (\bar{s}, ω_+) . Portanto, $\tau(s)$ é limitada em (\bar{s}, ω_+) .

Seja $M > 0$ tal que $|\tau(s)| < M$ para todo $s \in (\bar{s}, \omega_+)$. Usando a terceira equação do sistema (3.20), obtemos que

$$|\eta(s) - \eta(\bar{s})| = \left| - \int_{\bar{s}}^s [c + \tau(u)]\tau(u)du \right| < (|c|M + aM^2)(s - \bar{s})$$

para todo $s > \bar{s}$. Como I é um intervalo maximal, temos que qualquer solução do sistema (3.20) escapa de conjuntos compactos de $(\bar{s}, \omega_+) \times \mathbb{R}^3$, então $\omega_+ = +\infty$.

Para concluir a demonstração, vamos provar que $\eta(s)$ é limitada. Suponha por

contradição que $\eta(s)$ seja ilimitada, isto é, $\lim_{s \rightarrow +\infty} \eta(s) = \pm\infty$, então pelo Lema 3.2.17 podemos escolher s_2 de forma que as funções $\alpha(s)$, $\tau(s)$ e $\eta(s)$ sejam monótonas em $(s_2, +\infty)$. Assim, os limites $\lim_{s \rightarrow +\infty} \alpha(s)$ e $\lim_{s \rightarrow +\infty} \tau(s)$ existem,

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} [c + a\tau(s)]\alpha(s) - \eta(s) = \mp\infty,$$

e a integral imprópria

$$\int_{\bar{s}}^{+\infty} \tau'(u)du = \lim_{s \rightarrow +\infty} \tau(s) - \tau(\bar{s})$$

é convergente, o que é uma contradição, pois, $\tau'(s) = [c + a\tau(s)]\alpha(s) - \eta(s)$. Portanto, $\eta(s)$ também é limitada no intervalo $(\bar{s}, +\infty)$.

iii) Seja $\eta(s)$ limitada no intervalo (ω_-, \bar{s}) . Suponha por contradição que $\tau(s)$ seja ilimitada (ω_-, \bar{s}) . Segue do Lema 3.2.17 que existe $s_1 \in (\omega_-, \bar{s})$ tal que as funções $\alpha(s)$, $\tau(s)$ e $\eta(s)$ são monótonas em (ω_-, s_1) . Assim, $\lim_{s \rightarrow \omega_-} \tau(s) = \pm\infty$ e segue da equação $2\alpha(s)\eta(s) + \tau^2(s) = \gamma$, onde $\gamma \in \{-1, 0, 1\}$ que $\alpha(s)$ também é ilimitada, $\lim_{s \rightarrow \omega_-} \alpha(s) = \pm\infty$ e

$$\lim_{s \rightarrow \omega_-} \tau'(s) = \lim_{s \rightarrow \omega_-} [c + a\tau(s)]\alpha(s) - \eta(s) = \pm\infty.$$

Usando a regra de L'Hospital, obtemos que

$$\lim_{s \rightarrow \omega_-} \frac{\tau^2(s)}{2\alpha(s)} = \lim_{s \rightarrow \omega_-} \frac{2\tau(s)\tau'(s)}{2\tau(s)} = \lim_{s \rightarrow \omega_-} \tau'(s) = \pm\infty.$$

Logo, segue da equação $2\alpha(s)\eta(s) + \tau^2(s) = \gamma$, onde $\gamma \in \{-1, 0, 1\}$ que

$$\lim_{s \rightarrow \omega_-} \eta(s) = \lim_{s \rightarrow \omega_-} \frac{\gamma}{2\alpha(s)} - \frac{\tau^2}{2\alpha(s)} = \mp\infty,$$

o que é uma contradição, pois, por hipótese $\eta(s)$ é limitada em (ω_-, \bar{s}) . Portanto, $\tau(s)$ é limitada em (ω_-, \bar{s}) . Seja $M > 0$ tal que $|\tau(s)| < M$ para todo $s \in (\omega_-, \bar{s})$. Usando a primeira equação do sistema (3.20), obtemos que

$$|\alpha(\bar{s}) - \alpha(s)| = \left| \int_s^{\bar{s}} \tau(u)du \right| < M(\bar{s} - s)$$

para todo $s < \bar{s}$. Como I é um intervalo maximal, temos que qualquer solução do sistema (3.20) escapa de conjuntos compactos de $(\omega_-, \bar{s}) \times \mathbb{R}^3$, então $\omega_- = -\infty$.

iv) De maneira análoga ao *iii)*, seja $\eta(s)$ limitada no intervalo (\bar{s}, ω_+) . Suponha por contradição que $\tau(s)$ seja ilimitada (\bar{s}, ω_+) . Segue do Lema 3.2.17 que existe $s_2 \in (\bar{s}, \omega_+)$ tal que as funções $\alpha(s)$, $\tau(s)$ e $\eta(s)$ são monótonas em (s_2, ω_+) . Assim, $\lim_{s \rightarrow \omega_+} \tau(s) = \pm\infty$ e segue da equação $2\alpha(s)\eta(s) + \tau^2(s) = \gamma$, onde $\gamma \in \{-1, 0, 1\}$ que $\alpha(s)$ também é ilimitada, $\lim_{s \rightarrow \omega_+} \alpha(s) = \pm\infty$ e

$$\lim_{s \rightarrow \omega_+} \tau'(s) = \lim_{s \rightarrow \omega_+} [c + a\tau(s)]\alpha(s) - \eta(s) = \pm\infty.$$

Usando a regra de L'Hospital, obtemos que

$$\lim_{s \rightarrow \omega_+} \frac{\tau^2(s)}{2\alpha(s)} = \lim_{s \rightarrow \omega_+} \frac{2\tau(s)\tau'(s)}{2\tau(s)} = \lim_{s \rightarrow \omega_+} \tau'(s) = \pm\infty.$$

Dessa forma, segue da equação $2\alpha(s)\eta(s) + \tau^2(s) = \gamma$, onde $\gamma \in \{-1, 0, 1\}$ que

$$\lim_{s \rightarrow \omega_+} \eta(s) = \lim_{s \rightarrow \omega_+} \frac{\gamma}{2\alpha(s)} - \frac{\tau^2}{2\alpha(s)} = \mp\infty,$$

o que é uma contradição, pois, por hipótese $\eta(s)$ é limitada em (\bar{s}, ω_+) . Portanto, $\tau(s)$ é limitada em (\bar{s}, ω_+) . Seja $M > 0$ tal que $|\tau(s)| < M$ para todo $s \in (\bar{s}, \omega_+)$. Usando a primeira equação do sistema (3.20), obtemos que

$$|\alpha(s) - \alpha(\bar{s})| = \left| \int_{\bar{s}}^s \tau(s) \right| < |M|(s - \bar{s})$$

para todo $s > \bar{s}$. Como I é um intervalo maximal, temos que qualquer solução do sistema (3.20) escapa de conjuntos compactos de $(\bar{s}, \omega_+) \times \mathbb{R}^3$, então $\omega_+ = +\infty$. ■

Antes de mostrar outro resultado para o sistema (3.20), vamos apresentar o Lema de Barlatat. Um resultado muito útil para o estudo qualitativo de EDOs. Esse resultado pode ser encontrado no livro de análise real de Lima [19] na página 296 (exercício 22) e também no livro dos autores Slotine e Li [26] na página 123.

Lema 3.2.19 (Lema de Barbalat) *Seja $f : [s_0, +\infty) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que, existe $\lim_{s \rightarrow +\infty} f(s)$ e $f'(s)$ é uniformemente contínua. Então*

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} f'(s) = 0.$$

Lema 3.2.20 *Seja $\psi(s) = (\alpha(s), \tau(s), \eta(s))$ uma solução não trivial do sistema (3.20) definida no intervalo maximal $I = (\omega_-, \omega_+)$, para constantes $a > 0$, $c \neq 0$ e condição inicial $\psi(0) \in \overline{H} \cup \overline{C} \cup \overline{S}$, onde os conjuntos \overline{H} , \overline{C} e \overline{S} são dados por (3.17).*

i) Se $\alpha(s)$ e $\eta(s)$ são limitadas no intervalo (ω_-, \bar{s}) para qualquer $\bar{s} \in I$ fixado, então $\omega_- = -\infty$, $\lim_{s \rightarrow -\infty} \tau(s) = 0$ e $\lim_{s \rightarrow -\infty} \tau'(s) = 0$.

ii) Se $\alpha(s)$ e $\eta(s)$ são limitadas no intervalo (\bar{s}, ω_+) para qualquer $\bar{s} \in I$ fixado, então $\omega_+ = +\infty$, $\lim_{s \rightarrow +\infty} \tau(s) = 0$ e $\lim_{s \rightarrow +\infty} \tau'(s) = 0$.

Demonstração: Defina $g(s) = c\alpha(s) + \eta(s)$, $s \in I$. Usando que $c \neq 0$ e as equações do sistema (3.20), temos que $g'(s) = -a\tau^2(s)$ e $g(s)$ é decrescente para todo $s \in I$.

i) Supondo que $\alpha(s)$ e $\eta(s)$ sejam limitadas no intervalo (ω_-, \bar{s}) para $\bar{s} \in I$ fixado. Segue do item *i)* do Lema 3.2.18 que, $\tau(s)$ é também limitada em (ω_-, \bar{s}) e $\omega_- = -\infty$. Assim, a função $g(s)$ é decrescente e limitada em $(-\infty, \bar{s})$ e $\lim_{s \rightarrow -\infty} g(s)$ existe. Veja que $g'(s)$ é uniformemente contínua em $(-\infty, \bar{s})$, pois,

$$g''(s) = 2\tau'(s)\tau(s) = 2\tau(s)[c + a\tau(s)]\alpha(s) - 2\tau(s)\eta(s)$$

é limitada em $(-\infty, \bar{s})$. Assim, usando o Lema de Barbalat, obtemos que $\lim_{s \rightarrow -\infty} g'(s) = 0$. Como $g'(s) = -a\tau^2(s)$, concluímos que $\lim_{s \rightarrow -\infty} \tau(s) = 0$. Para finalizar, veja que, derivando a função $\tau'(s)$ e usando o sistema (3.20), obtemos que

$$\begin{aligned} \tau''(s) &= c\tau'(s)\alpha(s) + [c + a\tau(s)]\alpha'(s) - \eta'(s) \\ &= [c\alpha^2(s) + 2\tau(s)][c + a\tau(s)] - c\alpha(s)\eta(s) \end{aligned}$$

e $\tau''(s)$ é também limitada em $(-\infty, \bar{s})$. Logo, $\tau'(s)$ é uniformemente contínua em $(-\infty, \bar{s})$. Já mostramos que $\lim_{s \rightarrow -\infty} \tau(s) = 0$, então pelo Lema de Barbalat 3.2.19 $\lim_{s \rightarrow -\infty} \tau'(s) = 0$.

ii) De maneira análoga ao item *i)*, suponha que $\alpha(s)$ e $\eta(s)$ sejam limitadas no intervalo (\bar{s}, ω_+) para $\bar{s} \in I$ fixado. Segue do item *ii)* do Lema 3.2.18 que, $\tau(s)$ é também limitada em (\bar{s}, ω_+) e $\omega_+ = +\infty$. Assim, a função $g(s)$ é decrescente e limitada em $(\bar{s}, +\infty)$ e $\lim_{s \rightarrow +\infty} g(s)$ existe. Veja que $g'(s)$ é uniformemente contínua em $(\bar{s}, +\infty)$, pois,

$$g''(s) = 2\tau'(s)\tau(s) = 2\tau(s)[c + a\tau(s)]\alpha(s) - 2\tau(s)\eta(s)$$

é limitada em $(\bar{s}, +\infty)$. Usando o Lema de Barbalat 3.2.19, obtemos que $\lim_{s \rightarrow +\infty} g'(s) = 0$. Como $g'(s) = -a\tau^2(s)$, concluímos que $\lim_{s \rightarrow +\infty} \tau(s) = 0$. Para finalizar, veja que, derivando a função $\tau'(s)$ e usando o sistema (3.20), obtemos que

$$\begin{aligned} \tau''(s) &= c\tau'(s)\alpha(s) + [c + a\tau(s)]\alpha'(s) - \eta'(s) \\ &= [c\alpha^2(s) + 2\tau(s)][c + a\tau(s)] - c\alpha(s)\eta(s) \end{aligned}$$

e $\tau''(s)$ é também limitada em $(\bar{s}, +\infty)$. Logo, $\tau'(s)$ é uniformemente contínua em $(\bar{s}, +\infty)$. Já mostramos que $\lim_{s \rightarrow +\infty} \tau(s) = 0$, então pelo Lema de Barbalat 3.2.19 $\lim_{s \rightarrow +\infty} \tau'(s) = 0$. ■

Lema 3.2.21 *Seja $\psi(s) = (\alpha(s), \tau(s), \eta(s))$ uma solução não trivial do sistema (3.20) definida no intervalo maximal $I = (\omega_-, \omega_+)$, para constantes $a > 0$, $c \neq 0$ e condição inicial $\psi(0) \in \overline{H} \cup \overline{C} \cup \overline{S}$, onde os conjuntos \overline{H} , \overline{C} e \overline{S} são dados por (3.17).*

- i) Se $\eta(s)$ é limitada e $\alpha(s)$ ilimitada no intervalo (ω_-, \bar{s}) para qualquer $\bar{s} \in I$ fixado, então $\omega_- = -\infty$, $\lim_{s \rightarrow -\infty} \eta(s) = 0$, $\lim_{s \rightarrow -\infty} c + a\tau(s) = 0$.*
- ii) Se $\eta(s)$ é limitada e $\alpha(s)$ ilimitada no intervalo (\bar{s}, ω_+) para qualquer $\bar{s} \in I$ fixado, então $\omega_+ = +\infty$, $\lim_{s \rightarrow +\infty} \eta(s) = 0$, $\lim_{s \rightarrow +\infty} c + a\tau(s) = 0$.*

Demonstração: *i)* Segue do Lema 3.2.17 que se $\alpha(s)$ ilimitada no intervalo (ω_-, \bar{s}) , então existe $s_1 \in (\omega_-, \bar{s})$ tal que as funções $\alpha(s)$, $\tau(s)$ e $\eta(s)$ são monótonas em (ω_-, s_1) . Se $\eta(s)$ é limitada em (ω_-, s_1) , segue do item *iii)* do Lema 3.2.18 que $\tau(s)$ é limitada em (ω_-, s_1) e $\omega_- = -\infty$. Assim, as funções $\tau(s)$ e $\eta(s)$ são monótonas e limitadas, e os limites $\lim_{s \rightarrow -\infty} \tau(s)$ e $\lim_{s \rightarrow -\infty} \eta(s)$ existem. Logo, $\lim_{s \rightarrow -\infty} \eta'(s) = -\lim_{s \rightarrow -\infty} \tau(s)[c + a\tau(s)]$ também existe e então, $\lim_{s \rightarrow -\infty} \tau(s)[c + a\tau(s)] = 0$. Suponha que $\lim_{s \rightarrow -\infty} \tau(s) = 0$. Dessa forma,

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} \tau'(s) = \lim_{s \rightarrow -\infty} [c + \tau(s)]\alpha(s) - \eta(s) = \pm\infty$$

e a integral imprópria

$$\int_{-\infty}^{s_1} \tau'(u)du = \tau(s_1) - \lim_{s \rightarrow -\infty} \tau(s) = \tau(s_1),$$

o que é uma contradição. Portanto, $\lim_{s \rightarrow -\infty} [c + a\tau(s)] = 0$. Além disso, usando novamente

que $\alpha(s)$ é ilimitada e a equação $2\alpha(s)\eta(s) + \tau^2(s) = \gamma$, onde $\gamma \in \{-1, 0, 1\}$, concluímos que $\lim_{s \rightarrow -\infty} \eta(s) = 0$.

ii) De maneira análoga, segue do Lema 3.2.17 que se $\alpha(s)$ ilimitada no intervalo (\bar{s}, ω_+) , então existe $s_2 \in (\bar{s}, \omega_+)$ tal que as funções $\alpha(s)$, $\tau(s)$ e $\eta(s)$ são monótonas em (s_2, ω_+) . Se $\eta(s)$ é limitada em (s_2, ω_+) , segue do item *iv)* do Lema 3.2.18 que $\tau(s)$ é limitada em (s_2, ω_+) e $\omega_+ = +\infty$. Logo, as funções $\tau(s)$ e $\eta(s)$ são monótonas e limitadas, e os limites $\lim_{s \rightarrow +\infty} \tau(s)$ e $\lim_{s \rightarrow +\infty} \eta(s)$ existem. Assim, $\lim_{s \rightarrow +\infty} \eta'(s) = - \lim_{s \rightarrow +\infty} \tau(s)[c + a\tau(s)]$ também existe e então, $\lim_{s \rightarrow +\infty} \tau(s)[c + a\tau(s)] = 0$. Suponha que $\lim_{s \rightarrow +\infty} \tau(s) = 0$. Dessa maneira,

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \tau'(s) = \lim_{s \rightarrow +\infty} [c + \tau(s)]\alpha(s) - \eta(s) = \pm\infty$$

e a integral imprópria

$$\int_{s_2}^{+\infty} \tau'(u)du = \lim_{s \rightarrow +\infty} \tau(s) - \tau(s_2) = -\tau(s_2),$$

o que é uma contradição. Portanto, $\lim_{s \rightarrow +\infty} [c + a\tau(s)] = 0$. Além disso, usando novamente que $\alpha(s)$ é ilimitada e a equação $2\alpha(s)\eta(s) + \tau^2(s) = \gamma$, onde $\gamma \in \{-1, 0, 1\}$, obtemos que $\lim_{s \rightarrow +\infty} \eta(s) = 0$. ■

Ao longo desse capítulo também vamos usar com frequência um resultado de equações diferenciais ordinárias, que aplicado ao nosso contexto, diz o seguinte: se $I = (\omega_-, \omega_+)$ é o intervalo maximal de uma solução $\psi(s) = (\alpha(s), \tau(s), \eta(s))$ do sistema (3.20) com alguma condição inicial fixada e existe $p \in \mathbb{R}^3$ tal que $\lim_{k \rightarrow \omega_+} \psi(s) = p$, então $\omega_+ = +\infty$ e $\bar{\psi}(s) = p$, $s \in \mathbb{R}$ é uma solução singular do sistema (3.20). Vale um resultado similar se trocarmos ω_+ por ω_- . Para mais detalhes, veja [27] e [25].

Para estudar o sistema (3.20) vamos separar nos casos onde $c = 0$, $c < 0$ e $c > 0$.

3.2.1 Solitons do Fluxo de Curvatura no Cone de Luz

Nesta subseção, estudamos o caso $c = 0$, ou seja, os sólitons do fluxo FC em Q^2 .

O sistema (3.20) não possui solução singular no conjunto $\bar{H} \cup \bar{S}$. Inicialmente, estudamos as soluções do sistema (3.20) com $c = 0$, $a > 0$ e condições iniciais em \bar{H} . Relembramos também que, nesse conjunto, $\alpha(s) < 0$ e $\eta(s) > 0$ para todo $s \in I$. O próximo lema afirma que, sempre existe um único ponto crítico de $\alpha(s)$ para qualquer

solução não trivial com condição inicial no conjunto \overline{H} .

Lema 3.2.22 *Seja $\psi(s) = (\alpha(s), \tau(s), \eta(s))$ uma solução não trivial do sistema (3.20) definida no intervalo maximal $I = (\omega_-, \omega_+)$ para constantes $a > 0$, $c = 0$ e condição inicial $\psi(0) \in \overline{H}$, onde o conjunto \overline{H} é dado por (3.17). Então existe um único ponto crítico s_0 para a função $\alpha(s)$ que é ponto de máximo global e $\alpha(s)$ é monótona nos intervalos (ω_-, s_0) e (s_0, ω_+) .*

Demonstração: O item *i*) do Lema 3.2.12 garante a unicidade do ponto crítico de $\alpha(s)$, então vamos mostrar a existência. Suponha por contradição que $\alpha(s)$ não possui nenhum ponto crítico, então, segue da primeira equação do sistema (3.20) que, ou $\tau(s) > 0$ ou $\tau(s) < 0$ para todo $s \in I$.

Se $\tau(s) > 0$, então $\alpha(s)$ é negativa em \overline{H} e estritamente crescente para todo $s \in I$ e $\eta(s)$ é positiva e decrescente para todo $s \in I$. Assim, os limites $\lim_{s \rightarrow \omega_+} \alpha(s)$, $\lim_{s \rightarrow \omega_+} \eta(s)$ existem e conseqüentemente o $\lim_{s \rightarrow \omega_+} \tau(s)$ existe, pois, $-2\alpha(s)\eta(s) = \tau^2(s) + 1$. Logo, existe $p \in \overline{H}$ tal que $\lim_{s \rightarrow \omega_+} \psi(s) = p$. Sendo assim, $\omega_+ = +\infty$ e p é uma solução singular do sistema. O que é um absurdo, pois, não existe solução singular do sistema (3.20) no conjunto \overline{H} quando $c = 0$.

Se $\tau(s) < 0$, então $\alpha'(s) < 0$ e $\alpha(s)$ é estritamente decrescente, para todo $s \in I$. Já que $\alpha(s) < 0$, então a função $\alpha(s)$ é limitada e monótona no intervalo (ω_-, \bar{s}) para qualquer $\bar{s} \in I$ fixado e $\lim_{s \rightarrow \omega_-} \alpha(s)$ existe. Assim, segue do item *i*) do Lema 3.2.18 que, as funções $\tau(s)$ e $\eta(s)$ são limitadas no intervalo (ω_-, \bar{s}) e $\omega_- = -\infty$. Usando o Lema 3.2.20 temos que $\lim_{s \rightarrow -\infty} \tau(s) = 0$ e $\lim_{s \rightarrow -\infty} \tau'(s) = 0$ e segue da equação $2\alpha(s)\eta(s) + \tau^2(s) = -1$ que $\lim_{s \rightarrow -\infty} \eta(s)$ também existe. Dessa forma, $\lim_{s \rightarrow -\infty} \psi(s) = p$, $p \in \overline{H}$ e p é uma solução singular do sistema. O que é um absurdo, pois, não há solução singular do sistema (3.20) no conjunto \overline{H} quando $c = 0$.

Portanto, existe um único ponto crítico s_0 de $\alpha(s)$ e $\alpha(s)$ é monótona nos intervalos (ω_-, s_0) e (s_0, ω_+) . ■

No próximo lema, provaremos que a função $\alpha(s)$ é ilimitada nos intervalos (ω_-, \bar{s}) e (\bar{s}, ω_+) para qualquer $\bar{s} \in I$ quando $\psi(s) \in \overline{H}$ é uma solução não trivial.

Lema 3.2.23 *Seja $\psi(s) = (\alpha(s), \tau(s), \eta(s))$ uma solução não trivial do sistema (3.20) definida no intervalo maximal $I = (\omega_-, \omega_+)$, para constantes $a > 0$, $c = 0$ e con-*

dição inicial $\psi(0) \in \overline{H}$, onde o conjunto \overline{H} é dado por (3.17). Então, $\lim_{s \rightarrow \omega_-} \alpha(s) = \lim_{s \rightarrow \omega_+} \alpha(s) = -\infty$.

Demonstração: Seja s_0 o único ponto crítico de $\alpha(s)$ garantido pelo Lema 3.2.22. Segue do item *i*) do Lema 3.2.14 que, a função $\tau(s)$ possui no máximo um ponto crítico s_1 e pelo item *ii*) do Lema 3.2.14 temos que $\tau(s_1) < 0$. Dessa forma, as funções $\alpha(s)$, $\tau(s)$ e $\eta(s)$ são monótonas nos intervalos (ω_-, s_0) e (s_1, ω_+) .

Suponha por contradição que $\alpha(s)$ seja limitada em (ω_-, s_0) . Segue do item *i*) do Lema 3.2.18 que, as funções $\tau(s)$ e $\eta(s)$ também são limitadas no intervalo (ω_-, s_0) e $\omega_- = -\infty$. Logo, existe $p \in \overline{H}$ tal que, $\lim_{s \rightarrow -\infty} \psi(s) = p$ e p é uma solução singular do sistema. O que é um absurdo, pois, o sistema (3.20) não tem solução singular no conjunto \overline{H} quando $c = 0$.

De maneira análoga, suponha por contradição que $\alpha(s)$ seja limitada em (s_1, ω_+) . Segue do item *ii*) do Lema 3.2.18 que, as funções $\tau(s)$ e $\eta(s)$ também são limitadas no intervalo (s_1, ω_+) e $\omega_+ = +\infty$. Assim, existe $p \in \overline{H}$ tal que, $\lim_{s \rightarrow +\infty} \psi(s) = p$ e p é uma solução singular do sistema. O que é um absurdo, pois, o sistema (3.20) não tem solução singular no conjunto \overline{H} quando $c = 0$.

Portanto, como $\alpha(s) < 0$, concluímos que $\lim_{s \rightarrow \omega_-} \alpha(s) = \lim_{s \rightarrow \omega_+} \alpha(s) = -\infty$. ■

No próximo lema, vamos estudar o comportamento da função $\tau(s)$ quando $c = 0$ e $\psi(0) \in \overline{H} \cup \overline{C}$. Mas antes de apresentar o lema, note que, $(\alpha_0, 0, 0)$, com $\alpha_0 \neq 0$ são soluções singulares do sistema (3.20) no conjunto \overline{C} quando $c = 0$. Estas soluções representam parábolas no cone de luz, isto é, soluções triviais do fluxo FC.

Lema 3.2.24 *Seja $\psi(s) = (\alpha(s), \tau(s), \eta(s))$ uma solução não trivial do sistema (3.20) definida no intervalo maximal $I = (\omega_-, \omega_+)$, para constantes $a > 0$, $c = 0$ e condição inicial $\psi(0) \in \overline{H} \cup \overline{C}$, onde os conjuntos \overline{H} e \overline{C} são dados por (3.17). Então $\omega_+ = +\infty$, $\lim_{s \rightarrow +\infty} \tau(s) = 0$ e $\lim_{s \rightarrow \omega_-} \tau(s) = +\infty$.*

Demonstração: Segue do item *i*) do Lema 3.2.17 que existem $s_1, s_2 \in I$ tais que as funções $\alpha(s)$, $\tau(s)$ e $\eta(s)$ são monótonas nos intervalos (ω_-, s_1) e (s_2, ω_+) .

Sabemos que a função $\eta(s)$ é não negativa quando $\psi(0) \in \overline{H} \cup \overline{C}$. Usando a terceira do sistema (3.20) quando $c = 0$, temos que a função $\eta(s)$ é decrescente e limitada em (s_2, ω_+) . Assim, segue do item *iv*) do Lema 3.2.18 que, $\tau(s)$ é limitada

no intervalo (s_2, ω_+) e $\omega_+ = +\infty$. Logo, os limites $\lim_{s \rightarrow +\infty} \eta(s)$, $\lim_{s \rightarrow +\infty} \tau(s)$ existem. Portanto, $\lim_{s \rightarrow +\infty} \eta'(s) = - \lim_{s \rightarrow +\infty} a\tau^2$ existe e, conseqüentemente, $\lim_{s \rightarrow +\infty} \tau(s) = 0$.

Para finalizar, vamos verificar que a função $\tau(s)$ é ilimitada em (ω_-, s_1) . Note que, a função $\eta(s)$ é decrescente e não negativa em (ω_-, s_1) e sabemos do Lema 3.2.23 que a função α é ilimitada em (ω_-, s_1) quando $\psi(0) \in \overline{H}$. Afirmamos que $\alpha(s)$ é ilimitada no intervalo (ω_-, s_1) quando $\psi(0) \in \overline{C}$. De fato, suponha por contradição que $\alpha(s)$ seja limitada em (ω_-, s_1) . Dessa forma, segue do item *i*) do Lema 3.2.18 que $\omega_- = -\infty$ as funções $\tau(s)$ e $\eta(s)$ também são limitadas em $(-\infty, s_1)$ e pelo Lema 3.2.30, obtemos que $\lim_{s \rightarrow -\infty} \tau(s) = 0$ e $\lim_{s \rightarrow -\infty} \tau'(s) = 0$. Assim, usando a segunda equação do sistema (3.20) com $c = 0$ temos que

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} \eta(s) = \lim_{s \rightarrow -\infty} \tau'(s) - \alpha(s)\tau(s) = 0.$$

Como $\eta(s)$ é não negativa e decrescente, concluímos que $\eta(s)$ é identicamente nula em (ω_-, s_1) , o que é uma contradição, pois não estamos assumindo soluções triviais. Assim, $\alpha(s)$ é ilimitada e $\lim_{s \rightarrow \omega_-} \alpha(s) = -\infty$, isto é, $\alpha(s)$ é crescente no intervalo (ω_-, s_1) . Logo, se $\psi(0) \in \overline{H} \cup \overline{C}$ e $\psi(s)$ é uma solução não trivial, então $\lim_{s \rightarrow \omega_-} \tau(s) = +\infty$. ■

Corolário 3.2.25 *Seja $\psi(s) = (\alpha(s), \tau(s), \eta(s))$ uma solução não trivial do sistema (3.20) definida no intervalo maximal $I = (\omega_-, +\infty)$, para constantes $a > 0$, $c = 0$ e condição inicial $\psi(0) \in \overline{H} \cup \overline{C}$, onde os conjuntos \overline{H} são dados por (3.17).*

i) Se uma curva $X : I \rightarrow Q_-^2$, $s \in I$ é o sóliton do fluxo FC de curvatura $k(s)$, que corresponde a solução $\psi(s) \in \overline{H}$, então $\lim_{s \rightarrow \omega_-} k(s) = +\infty$ e $\lim_{s \rightarrow +\infty} k(s) = 0$, isto é, X tem como assíntota uma reta de Q^2 quando s tende a ω_- e X espirala para círculos de Q^2 cada vez maiores quando s tende a $+\infty$.

ii) Se uma curva $X : I \rightarrow Q_-^2$, $s \in I$ é o sóliton do fluxo FC de curvatura $k(s)$, que corresponde a solução $\psi(s) \in \overline{C}$, então $\lim_{s \rightarrow \omega_-} k(s) = +\infty$ e $\lim_{s \rightarrow +\infty} k(s) = 0$.

Demonstração: *i)* Como $k(s) = a\tau(s) = a\langle T(s), (-1, 0, 0) \rangle$, onde $a > 0$, então segue do Lema 3.2.24 que, $\lim_{s \rightarrow \omega_-} k(s) = +\infty$ e que $\lim_{s \rightarrow +\infty} k(s) = 0$, ou seja, o campo tangente a X está se tornando ortogonal ao vetor $(-1, 0, 0)$ quando s tende a $+\infty$. Sabemos também dos Lemas 3.2.17 e 3.2.23 que, $\lim_{s \rightarrow \omega_-} \alpha(s) = \lim_{s \rightarrow +\infty} \alpha(s) = -\infty$ e existem $s_1, s_2 \in I$ tal que as funções $\alpha(s)$ e $\tau(s)$ são estritamente monótonas nos intervalos

(ω_-, s_1) e $(s_2, +\infty)$. Portanto, X espirala para círculos de Q^2 cada vez maiores quando s tende a $+\infty$ e usando Proposição 1.3.7 obtemos que, X tem como assíntota uma reta de Q^2 quando s tende a ω_- .

ii) Neste caso, $k(s) = a\tau(s)$, onde $a > 0$, então segue do Lema 3.2.24 que, $\lim_{s \rightarrow \omega_-} k(s) = +\infty$ e que $\lim_{s \rightarrow +\infty} k(s) = 0$. ■

Para finalizar o estudo qualitativo para o caso $c = 0$, vamos estudar as soluções do sistema (3.20) quando a condição inicial está conjunto \bar{S} . Neste caso, o sistema (3.20) não tem pontos singulares. Além disso, vale a pena lembrar que neste caso as funções $\alpha(s)$ e $\eta(s)$ podem assumir qualquer valor real.

Lema 3.2.26 *Seja $\psi(s) = (\alpha(s), \tau(s), \eta(s))$ uma solução não trivial do sistema (3.20) definida no intervalo maximal $I = (\omega_-, \omega_+)$, para constantes $a > 0$, $c = 0$ e condição inicial $\psi(0) \in \bar{S}$, onde o conjunto \bar{S} é dado por (3.17). Então $\eta(s)$ é estritamente decrescente. Além disso, seja $\bar{s} \in I$ fixado.*

i) *Se $\eta(s)$ é limitada no intervalo (ω_-, \bar{s}) , então $\omega_- = -\infty$, $\lim_{s \rightarrow -\infty} \tau(s) = 0$ e $\lim_{s \rightarrow -\infty} |\alpha(s)| = +\infty$.*

ii) *Se $\eta(s)$ é ilimitada no intervalo (ω_-, \bar{s}) , então $\lim_{s \rightarrow \omega_-} \tau(s) = +\infty$ e $\lim_{s \rightarrow \omega_-} \alpha(s) = -\infty$.*

iii) *Se $\eta(s)$ é limitada no intervalo (\bar{s}, ω_+) , então $\omega_+ = +\infty$, $\lim_{s \rightarrow +\infty} \tau(s) = 0$ e $\lim_{s \rightarrow +\infty} |\alpha(s)| = +\infty$.*

iv) *Se $\eta(s)$ é ilimitada no intervalo (\bar{s}, ω_+) , então $\lim_{s \rightarrow \omega_+} \tau(s) = +\infty$ e $\lim_{s \rightarrow \omega_+} \alpha(s) = +\infty$.*

Demonstração: Inicialmente observamos que quando $c = 0$ a função $\eta(s)$ é estritamente decrescente já que pela terceira equação do sistema (3.20) $\eta'(s) = -a\tau^2(s)$. Além disso, segue do item i) Lema 3.2.17 que existem $s_1 \in (\omega_-, \bar{s})$ e $s_2 \in (\bar{s}, \omega_+)$ tais que, as funções $\alpha(s)$, $\tau(s)$ e $\eta(s)$ sejam monótonas nos intervalos (ω_-, s_1) e (s_2, ω_+) .

i) Se $\eta(s)$ é limitada em (ω_-, s_1) , então segue do item iii) do Lema 3.2.18 que, $\tau(s)$ é limitada em (ω_-, s_1) e $\omega_- = -\infty$. Como $\eta(s)$ e $\tau(s)$ são monótonas e limitadas no intervalo $(-\infty, s_1)$, então os limites $\lim_{s \rightarrow -\infty} \eta(s)$ e $\lim_{s \rightarrow -\infty} \tau(s)$ existem e conseqüentemente, também existe $\lim_{s \rightarrow -\infty} \eta'(s) = -\lim_{s \rightarrow -\infty} a\tau^2(s)$. Assim, $\lim_{s \rightarrow -\infty} \tau(s) = 0$.

Para concluir, suponha por contradição que $\alpha(s)$ seja também limitada em $(-\infty, s_1)$. Segue da monotocidade de $\alpha(s)$ no intervalo $(-\infty, s_1)$ que $\lim_{s \rightarrow -\infty} \alpha(s) = l$, onde $l \in \mathbb{R}$. Dessa forma, existe $p \in \bar{S}$ tal que, $\lim_{s \rightarrow -\infty} \psi(s) = p$ e p é uma solução singular do sistema. O que é um absurdo, pois, o sistema (3.20) não tem solução singular no conjunto \bar{S} quando $c = 0$. Portanto, $\alpha(s)$ é ilimitada em $(-\infty, s_1)$ e $\lim_{s \rightarrow -\infty} |\alpha(s)| = +\infty$.

ii) Suponha por contradição que $\alpha(s)$ seja limitada (ω_-, s_1) . Segue do item *i)* do Lema 3.2.18 que, as funções $\tau(s)$ e $\eta(s)$ são limitadas em (ω_-, s_1) e $\omega_- = -\infty$. O que é uma contradição, pois, por hipótese, $\eta(s)$ é ilimitada no intervalo $(-\infty, s_1)$. Portanto, $\alpha(s)$ é ilimitada no intervalo (ω_-, s_1) . Como $\eta(s)$ é sempre decrescente, então $\lim_{s \rightarrow \omega_-} \eta(s) = +\infty$ e segue da equação $2\alpha(s)\eta(s) + \tau^2(s) = 1$ que, $\lim_{s \rightarrow \omega_-} \alpha(s) = -\infty$, isto é, podemos s_1 de forma que $\alpha(s)$ é crescente em (ω_-, s_1) . Portanto, $\tau(s) > 0$ em (ω_-, s_1) e $\lim_{s \rightarrow \omega_-} \tau(s) = +\infty$.

iii) De maneira análoga ao item *i)*, se $\eta(s)$ é limitada em (s_2, ω_+) , então segue do Lema 3.2.18 que, $\tau(s)$ é limitada em (s_2, ω_+) e $\omega_+ = +\infty$. Como $\eta(s)$ e $\tau(s)$ são monótonas no intervalo $(s_2, +\infty)$, então, os limites $\lim_{s \rightarrow +\infty} \eta(s)$ e $\lim_{s \rightarrow +\infty} \tau(s)$ existem e conseqüentemente, também existe $\lim_{s \rightarrow +\infty} \eta'(s) = -\lim_{s \rightarrow +\infty} a\tau^2(s)$. Assim, $\lim_{s \rightarrow +\infty} \tau(s) = 0$. Para concluir o item, suponha por contradição que $\alpha(s)$ seja também limitada em $(s_2, +\infty)$. Segue da monotocidade de $\alpha(s)$ no intervalo $(s_2, +\infty)$ que $\lim_{s \rightarrow +\infty} \alpha(s) = l$, onde $l \in \mathbb{R}$. Dessa forma, existe $p \in \bar{S}$ tal que, $\lim_{s \rightarrow +\infty} \psi(s) = p$ e p é uma solução singular do sistema. O que é um absurdo, pois, o sistema (3.20) não tem solução singular no conjunto \bar{S} quando $c = 0$. Portanto, $\alpha(s)$ é ilimitada em $(s_2, +\infty)$ e $\lim_{s \rightarrow +\infty} |\alpha(s)| = +\infty$.

iv) De maneira análoga ao item *ii)*, suponha por contradição que $\alpha(s)$ seja limitada (s_2, ω_+) . Segue do item *ii)* do Lema 3.2.18 que, as funções $\tau(s)$ e $\eta(s)$ são limitadas em (s_2, ω_+) e $\omega_+ = +\infty$. O que é uma contradição, pois, $\eta(s)$ é ilimitada no intervalo $(s_2, +\infty)$. Portanto, $\alpha(s)$ é ilimitada no intervalo $(s_2, +\infty)$. Como $\eta(s)$ é sempre decrescente, uma vez que, $\eta'(s) = -a\tau^2(s)$, então $\lim_{s \rightarrow \omega_+} \eta(s) = -\infty$ e segue da equação $2\alpha(s)\eta(s) + \tau^2(s) = 1$ que, $\lim_{s \rightarrow \omega_+} \alpha(s) = +\infty$, isto é, podemos s_2 de forma que $\alpha(s)$ é crescente em $(s_2, +\infty)$. Portanto, $\tau(s) > 0$ em $(s_2, +\infty)$ e $\lim_{s \rightarrow \omega_+} \tau(s) = +\infty$. ■

Corolário 3.2.27 *Seja $\psi(s) = (\alpha(s), \tau(s), \eta(s))$ uma solução não trivial do sistema (3.20) definida no intervalo maximal $I = (\omega_-, \omega_+)$, para constantes $a > 0$, $c = 0$*

e condição inicial $\psi(0) \in \bar{S}$, onde o conjunto \bar{S} é dado por (3.17). Se uma curva $X : I \rightarrow Q_-^2$, $s \in I$ é o sóliton do fluxo FC de curvatura $k(s)$, que corresponde à solução $\psi(s)$, então em cada fim do sóliton X ou $k(s)$ é ilimitada, ou $k(s)$ converge a zero.

Demonstração: Como $k(s) = a\tau(s) = a\langle T(s), (0, 0, 1) \rangle$, onde $a > 0$, então segue do Lema 3.2.26 que, ou $k(s)$ é ilimitada, ou converge a zero em cada fim do sóliton X . ■

Quando $c = 0$ e $\psi(s) \in \bar{C}$ é possível usar o fluxo FCI para determinar explicitamente sólitons do fluxos FC e FCI. Neste caso, a função curvatura dos sólitons do FC não se anulam. Mais precisamente, temos a seguinte proposição.

Proposição 3.2.28 *Seja $\tilde{X} : I \subset \mathbb{R} \rightarrow Q_-^2$ um sóliton do fluxo FCI parametrizado pelo comprimento de arco tal que, as funções $\tilde{\alpha}(s) = \langle \tilde{X}(s), e \rangle$, $\tilde{\tau}(s) = \langle \tilde{T}(s), e \rangle$ e $\tilde{\eta}(s) = \langle \tilde{Y}(s), e \rangle$, onde $e = (-1, 1, 0)$ é uma solução do sistema equação (3.15) em I para constantes $a > 0$, $c = 0$ e $(\tilde{\alpha}_0, \tilde{\tau}_0, \tilde{\eta}_0) \in \bar{C}$. Então,*

$$\tilde{X}(s) = \left(\frac{\tilde{x}_3^2(s) + \tilde{\alpha}^2(s)}{2\tilde{\alpha}(s)}, \frac{-\tilde{x}_3^2(s) + \tilde{\alpha}^2(s)}{2\tilde{\alpha}(s)}, \tilde{x}_3(s) \right), \quad (3.22)$$

é um sóliton do fluxo FCI em Q_-^2 e

$$\tilde{Y}(s) = \left(\frac{\tilde{y}_3^2(s) + \tilde{\eta}^2(s)}{2\tilde{\eta}(s)}, \frac{-\tilde{y}_3^2(s) + \tilde{\eta}^2(s)}{2\tilde{\eta}(s)}, \tilde{y}_3(s) \right) \quad (3.23)$$

é um sóliton do fluxo FC em Q_+^2 , onde $\tilde{Y}(s)$ é a curva associada a \tilde{X} ,

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}(s) &= -\frac{s}{a} + \tilde{\eta}_0, \\ \tilde{\tau}(s) &= \frac{2a\tilde{\eta}^2(s)}{3} + \sqrt{\tilde{\eta}(s)}\frac{2a}{3}D, \\ \tilde{\alpha}(s) &= -\frac{\tilde{\tau}^2(s)}{2\tilde{\eta}(s)} \\ \tilde{y}_3(s) &= \frac{\tilde{\eta}(s)\tilde{x}_3(s) - \tilde{\tau}(s)}{\tilde{\alpha}(s)}, \\ \tilde{x}_3(s) &= (\tilde{\eta}^{3/2}(s) + D)^2 \left(-a \int (\tilde{\eta}^{3/2}(r) + D)^{-2} dr + C \right) \end{aligned}$$

e se $D > 0$

$$\int (\tilde{\eta}^{3/2}(r) + D)^{-2} dr = \frac{\log\left(\tilde{\eta}(s) - D^{1/3} \sqrt{\tilde{\eta}(s)} + D^{2/3}\right)}{9D^{4/3}} + \frac{2\tilde{\eta}(s)}{3D\tilde{\eta}(s)^{3/2} + 3D^2} + \frac{2 \operatorname{atan}\left(\frac{2\sqrt{\tilde{\eta}(s)} - D^{1/3}}{\sqrt{3}D^{1/3}}\right)}{3^{3/2}D^{4/3}} - \frac{2 \log\left(\sqrt{\tilde{\eta}(s)} + D^{1/3}\right)}{9D^{4/3}},$$

onde

$$D = \frac{3}{2a} \left(\frac{3\tilde{\tau}_0 - 2a\tilde{\eta}_0^2}{3\sqrt{\tilde{\eta}_0}} \right).$$

Demonstração: Quando $c = 0$ e $\tilde{X}(s)$ um sóliton do fluxo FCI, então o sistema (3.15) pode ser reescrito da seguinte maneira

$$\begin{cases} \tilde{\alpha}'(s) = \tilde{\tau}(s), \\ \tilde{\tau}'(s) = \frac{\tilde{\alpha}(s)}{a\tilde{\tau}(s)} - \tilde{\eta}(s), \\ \tilde{\eta}'(s) = -\frac{1}{a}. \end{cases} \quad (3.24)$$

Assim, $\tilde{\eta}(s) = -\frac{s}{a} + \tilde{\eta}_0$. Seja $r(s) = \tilde{\eta}(s) = -\frac{s}{a} + \tilde{\eta}_0 > 0$ com $r_0 = \tilde{\eta}_0 > 0$ uma mudança de variável para o sistema (3.24), então

$$\frac{dr}{ds} = -\frac{1}{a}, \quad \frac{d\tilde{\alpha}}{ds} = -\frac{1}{a} \frac{d\tilde{\alpha}}{dr}, \quad \frac{d\tilde{\tau}}{ds} = -\frac{1}{a} \frac{d\tilde{\tau}}{dr}, \quad \frac{d\tilde{\eta}}{ds} = -\frac{1}{a} \frac{d\tilde{\eta}}{dr}$$

e assim,

$$\begin{cases} \tilde{\alpha}'(r) = -a\tilde{\tau}(r), \\ \tilde{\tau}'(r) = -\frac{\tilde{\alpha}(r)}{\tilde{\tau}(r)} + ar. \end{cases}$$

Usando que $2r\tilde{\alpha}(r) + \tilde{\tau}^2(r) = 0$, obtemos que

$$\begin{cases} \tilde{\alpha}'(r) = -a\tilde{\tau}(r), \\ \tilde{\tau}'(r) = \frac{\tilde{\tau}(r)}{2r} + ar. \end{cases}$$

Usando a segunda equação do sistema (3.24) para encontrar $\tilde{\tau}(r)$, temos que $\tilde{\tau}'(r) - \frac{\tilde{\tau}(r)}{2r} = ar$ e multiplicando ambos os lados por $r^{-1/2}$,

$$r^{-1/2}\tilde{\tau}'(r) - \frac{\tilde{\tau}(r)}{2r^{3/2}} = ar^{1/2},$$

ou ainda,

$$\frac{d}{dr} \left(r^{-\frac{1}{2}} \tilde{\tau}(r) \right) = ar^{\frac{1}{2}}.$$

Integrando em r , obtemos que

$$r^{-\frac{1}{2}} \tilde{\tau}(r) = \frac{2a}{3} r^{\frac{3}{2}} + C_1.$$

Logo,

$$\tilde{\tau}(r) = \frac{2ar^2}{3} + r^{\frac{1}{2}} C_1.$$

Logo, as funções $\tilde{\alpha}(r)$ e $\tilde{\tau}(r)$ estão determinadas. Assim, reescrevendo no parâmetro s , obtemos as funções $\tilde{\alpha}(s)$, $\tilde{\tau}(s)$ e $\tilde{\eta}(s)$ do lema.

Agora, vamos usar as funções $\tilde{\alpha}(s)$, $\tilde{\tau}(s)$ e $\tilde{\eta}(s)$ para determinar as expressões das curvas $\tilde{X}(s)$ e $\tilde{Y}(s)$. Note que, $\tilde{\alpha}(s) = \tilde{x}_1(s) + \tilde{x}_2(s)$ e $\tilde{\eta}(s) = \tilde{y}_1(s) + \tilde{y}_2(s)$, ou seja, $\tilde{x}_2(s) = \tilde{\alpha}(s) - \tilde{x}_1(s)$ e $\tilde{y}_2(s) = \tilde{\eta}(s) - \tilde{y}_1(s)$. Como $\tilde{X}(s)$ e $\tilde{Y}(s)$ estão em Q^2 para cada $s \in I$, então

$$\begin{cases} -\tilde{x}_1^2(s) + [\tilde{\alpha}(s) - \tilde{x}_1(s)]^2 + \tilde{y}_3^2(s) = 0, \\ -\tilde{y}_1^2(s) + [\tilde{\eta}(s) - \tilde{y}_1(s)]^2 + \tilde{y}_3^2(s) = 0, \end{cases}$$

ou seja,

$$\begin{cases} y_1(s) = \frac{\tilde{y}_3^2(s) + \tilde{\alpha}^2(s)}{2\tilde{\alpha}(s)}, \\ x_1(s) = \frac{\tilde{x}_3^2(s) + \tilde{\eta}^2(s)}{2\tilde{\eta}(s)}. \end{cases}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \tilde{Y}(s) &= \left(\frac{\tilde{y}_3^2(s) + \tilde{\eta}^2(s)}{2\tilde{\eta}(s)}, \frac{-\tilde{y}_3^2(s) + \tilde{\eta}^2(s)}{2\tilde{\eta}(s)}, \tilde{y}_3(s) \right), \\ \tilde{X}(s) &= \left(\frac{\tilde{x}_3^2(s) + \tilde{\alpha}^2(s)}{2\tilde{\alpha}(s)}, \frac{-\tilde{x}_3^2(s) + \tilde{\alpha}^2(s)}{2\tilde{\alpha}(s)}, \tilde{x}_3(s) \right). \end{aligned}$$

Para determinar completamente as curvas $\tilde{X}(s)$ e $\tilde{Y}(s)$ falta encontrar as funções $\tilde{x}_3(s)$ e $\tilde{y}_3(s)$. Lembrando que $\tilde{T}(s) = \tilde{X}(s) \times \tilde{Y}(s)$, onde $\tilde{T}(s)$ é vetor unitário tangente a \tilde{Y} para cada $s \in I$, temos que

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}(s) = \langle \tilde{T}(s), (-1, 1, 0) \rangle &= \tilde{x}'_1(s) + \tilde{x}'_2(s) \\ &= -[\tilde{x}_2(s)\tilde{y}_3(s) - \tilde{y}_2(s)\tilde{x}_3(s)] - [\tilde{x}_1(s)\tilde{y}_3(s) - \tilde{y}_1(s)\tilde{x}_3(s)] \\ &= -[\tilde{x}_1(s) + \tilde{x}_2(s)]\tilde{y}_3(s) + [\tilde{y}_1(s) + \tilde{y}_2(s)]\tilde{x}_3(s) \end{aligned}$$

$$= -\tilde{\alpha}(s)\tilde{y}_3(s) + \tilde{\eta}(s)\tilde{x}_3(s).$$

Dai, $\tilde{\alpha}(s)\tilde{y}_3(s) = \tilde{\eta}(s)\tilde{x}_3(s) - \tilde{\tau}(s)$, $\tilde{y}_3(s) = \frac{\tilde{\eta}(s)\tilde{x}_3(s) - \tilde{\tau}(s)}{\tilde{\alpha}(s)}$ e da equação

$$\tilde{\eta}(s)\tilde{X}(s) + \tilde{\tau}(s)\tilde{T}(s) + \tilde{\alpha}(s)\tilde{X}(s) = (-1, 1, 0),$$

$\tilde{\eta}(s)\tilde{x}_3(s) + \tilde{\tau}(s)\tilde{x}'_3(s) + \tilde{\alpha}(s)\tilde{y}_3(s) = 0$. Logo, $2\tilde{\eta}(s)\tilde{x}_3(s) + \tilde{\tau}(s)\tilde{x}'_3(s) - \tilde{\tau}(s) = 0$ e

$$\tilde{x}'_3(s) + 2\frac{\tilde{\eta}(s)}{\tilde{\tau}(s)}\tilde{x}_3(s) = 1.$$

Escrevendo a equação diferencial na variável $r = \tilde{\eta}(s)$ e substituindo $\tilde{\tau}(s)$, obtemos que

$$\tilde{x}'_3(r) - 2a\frac{r}{\tilde{\tau}(r)}\tilde{x}_3(r) = -a,$$

isto é,

$$-a = \tilde{x}'_3(r) - 2a\frac{r}{\frac{2a}{3}r^2 + r^{\frac{1}{2}}C_1}\tilde{x}_3(r) = \tilde{x}'_3(r) - 3\frac{r^{\frac{1}{2}}}{r^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2a}C_1}\tilde{x}_3(r).$$

Usando a técnica do fator integrante para resolver a equação diferencial, obtemos que

$$\tilde{x}_3(r) = \frac{1}{\mu(r)} \left(\int \mu(r)(-a)dr + C_3 \right),$$

onde

$$\begin{aligned} \mu(r) &= \exp \left\{ \int \left(-3\frac{r^{\frac{1}{2}}}{r^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2a}C_1} \right) dr \right\} \\ &= \exp \left\{ -3 \int \frac{r^{\frac{1}{2}}}{r^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2a}C_1} dr \right\} \\ &= \exp \left\{ -3\frac{2}{3} \log \left(r^{3/2} + \frac{3}{2a}C_1 \right) \right\} \\ &= \left(r^{3/2} + \frac{3}{2a}C_1 \right)^{-2} \\ &= \left(r^{3/2} + \frac{3}{2a}C_1 \right)^{-2}. \end{aligned}$$

Tomando $D = \frac{3}{2a}C_1$, obtemos que

$$\tilde{x}_3(r) = (r^{3/2} + D)^2 \left(-a \int (r^{3/2} + D)^{-2} dr + C \right).$$

Se $D > 0$, pode se verificar que

$$\begin{aligned} \int (r^{3/2} + D)^{-2} dr &= \frac{\log \left(r - D^{\frac{1}{3}} \sqrt{r} + D^{\frac{2}{3}} \right)}{9D^{\frac{4}{3}}} + \frac{2r}{3D r^{\frac{3}{2}} + 3D^2} + \\ &+ \frac{2 \operatorname{atan} \left(\frac{2\sqrt{r} - D^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{3} D^{\frac{1}{3}}} \right)}{3^{\frac{3}{2}} D^{\frac{4}{3}}} - \frac{2 \log \left(\sqrt{r} + D^{\frac{1}{3}} \right)}{9D^{\frac{4}{3}}}. \end{aligned}$$

Dessa forma, substituindo r por $\tilde{\eta}(s)$ concluimos a demonstração do lema. ■

Teorema 3.2.29 *Para cada vetor $v \in \mathbb{R}_1^3 \setminus \{0\}$ existe uma família a dois parâmetros de sólitons do fluxo de curvatura no cone de luz definidos em um intervalo maximal $I = (\omega_-, \omega_+)$, $X : I \rightarrow Q^2$, $s \in I \subset \mathbb{R}$ tal que,*

$$k(s) = \langle T(s), v \rangle,$$

onde $k(s)$ é a curvatura de X e $T(s)$ é o vetor unitário tangente a X para cada $s \in I$. Além disso,

- i) se $\langle v, v \rangle < 0$, então $\lim_{s \rightarrow \omega_-} k(s) = +\infty$, $\omega_+ = +\infty$ e $\lim_{s \rightarrow +\infty} k(s) = 0$, isto é, X tem como assíntota uma reta de Q^2 quando s tende a ω_- e X espirala para elipses de Q^2 cada vez maiores quando s tende a $+\infty$;
- ii) se $\langle v, v \rangle = 0$, então $\lim_{s \rightarrow \omega_-} k(s) = +\infty$, $\omega_+ = +\infty$ e $\lim_{s \rightarrow +\infty} k(s) = 0$;
- iii) se $\langle v, v \rangle > 0$, então em cada fim do sóliton X ou $k(s)$ é ilimitada, ou $k(s)$ converge a zero .

Demonstração: Para demonstrar o teorema vamos separar nos três tipos de vetores. Sem perda de generalidade podemos assumir que $v = ae$, onde $a > 0$ e

$$e = \begin{cases} (-1, 0, 0) & \text{se } v \text{ é do tipo tempo,} \\ (-1, 1, 0) & \text{se } v \text{ é do tipo luz,} \\ (0, 0, 1) & \text{se } v \text{ é do tipo espaço.} \end{cases}$$

Seja $\psi(s) = (\alpha(s), \tau(s), \eta(s))$ uma solução do sistema de equações diferenciais ordinárias (3.20) definida no intervalo maximal I , com $a > 0$, $c = 0$ e condição inicial $\psi(0) \in \mathbb{R}^3$ tal que

$$2\alpha(0)\eta(0) + \tau^2(0) = \begin{cases} -1 & \text{se } v \text{ é do tipo tempo,} \\ 0 & \text{se } v \text{ é do tipo luz,} \\ 1 & \text{se } v \text{ é do tipo espaço.} \end{cases}$$

Então pela Proposição 3.2.2, existe um sóliton do fluxo FC $X(s)$, de curvatura $k(s) = a\tau(s)$, cujo o triedro $\{X(s), T(s), Y(s)\}$ satisfaz

$$\alpha(s) = \langle X(s), e \rangle, \quad \tau(s) = \langle T(s), e \rangle \quad \text{e} \quad \eta(s) = \langle Y(s), e \rangle.$$

Assim, as condições iniciais do sistema (3.20) que dependem de duas constantes, determinam os sólitons do fluxo FC em cada caso. Portanto, para cada vetor fixado $v \in \mathbb{R}_1^3 \setminus \{0\}$ existe uma família a dois parâmetros de sólitons do fluxo FC.

O itens *i*) e *ii*) seguem do Corolário 3.2.25. Para concluir, o item *iii*) segue do Corolário 3.2.27. ■

3.2.2 Soluções Autossimilares do Fluxo FC com Função de Homotetia Decrescente

Nesta subseção, estudamos as soluções do sistema (3.20) que correspondem as soluções autossimilares do fluxo FC em Q^2 com função de homotetia decrescente, ou seja, $c < 0$.

O Lema a seguir apresenta um resultado para as soluções não triviais com condições iniciais no conjunto $\overline{H} \cup \overline{C}$.

Lema 3.2.30 *Seja $\psi(s) = (\alpha(s), \tau(s), \eta(s))$ uma solução não trivial do sistema (3.20)*

definida no intervalo maximal $I = (\omega_-, \omega_+)$, para constantes $a > 0$, $c < 0$ e condição inicial $\psi(0) \in \overline{H} \cup \overline{C}$, onde os conjuntos \overline{H} e \overline{C} são dados por (3.17). Seja $\bar{s} \in I$, então as funções $\alpha(s)$, $\tau(s)$ e $\eta(s)$ são limitadas no intervalo (\bar{s}, ω_+) . Além disso, $\omega_+ = +\infty$, $\lim_{s \rightarrow +\infty} \tau(s) = 0$ e $\lim_{s \rightarrow +\infty} \tau'(s) = 0$.

Demonstração: Defina $g : I \rightarrow \mathbb{R}$, $s \in I$ tal que $g(s) = c\alpha(s) + \eta(s)$ para todo $s \in I$. A função $g(s)$ é sempre positiva, pois, $c < 0$, $\psi(s) \neq (0, 0, 0)$ para qualquer $s \in I$ e quando $\psi(0) \in \overline{H} \cup \overline{C}$, temos que $\alpha(s) \leq 0$, $\eta(s) \geq 0$. Derivando $g(s)$ e usando as equações do sistema (3.20), obtemos que

$$g'(s) = c\alpha'(s) + \eta'(s) = c\tau(s) - [c + a\tau(s)]\tau(s) = -a\tau^2(s) < 0,$$

isto é, $g(s)$ também é decrescente em todo intervalo I .

Seja $\bar{s} \in I$, como $g(s)$ é decrescente, temos que $0 < g(s) \leq g(\bar{s})$, ou seja,

$$0 < c\alpha(s) + \eta(s) < c\alpha(\bar{s}) + \eta(\bar{s}),$$

para $s > \bar{s}$. Assim,

$$0 < c\alpha(s), \quad \eta(s) < c\alpha(s) + \eta(s) < c\alpha(\bar{s}) + \eta(\bar{s}), \quad \forall s \in (\bar{s}, \omega_+).$$

Logo, as funções $\alpha(s)$ e $\eta(s)$ são limitadas no intervalo (\bar{s}, ω_+) . Assim, usando o item ii) do Lema 3.2.20, concluímos que $\omega_+ = +\infty$, $\lim_{s \rightarrow +\infty} \tau(s) = 0$ e $\lim_{s \rightarrow +\infty} \tau'(s) = 0$. ■

Note que, $\psi(s) = (\alpha, 0, c\alpha) \in \overline{H}$ é uma solução singular de (3.20). Observe também que, o sistema (3.20) não tem nenhuma solução singular no conjunto \overline{C} , mas, a solução singular $\psi(s) = (0, 0, 0)$ é fronteira de \overline{C} . No próximo lema vamos estudar as soluções singulares do conjunto \overline{H} que correspondem aos pontos singulares do campo descrito no próximo lema.

Lema 3.2.31 *Seja $\Phi : \overline{H} \rightarrow T\overline{H} \subset \mathbb{R}^3$ um campo diferenciável dado por*

$$\Phi(\alpha, \tau, \eta) = \left(\tau, c\alpha + a\tau\alpha - \eta, -c\tau - a\tau^2 \right),$$

onde $a > 0$ e $c < 0$. Então $p = \left(-\frac{1}{\sqrt{-2c}}, 0, -\frac{c}{\sqrt{-2c}} \right)$ é o ponto singular de Φ e os

3.2. Soluções Autossimilares dos Fluxos FC e FCI no Cone de Luz 120

autovalores de $d\Phi_p$ são

$$\lambda = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 16c^2}}{2\sqrt{-2c}}.$$

Se $4|c| \leq a$, então os autovalores são reais, e se $4|c| > a$, então os autovalores são complexos.

Demonstração: Os pontos singulares de Φ satisfazem $\tau = 0$, $c\alpha = \eta$. Como $(\alpha, \tau, \eta) \in \bar{H}$, então $-1 = 2\alpha\eta + \tau^2 = 2\alpha\eta$. Logo, $2c\alpha^2 = -1$, $\alpha = -\frac{1}{\sqrt{-2c}}$ e $p = \left(-\frac{1}{\sqrt{-2c}}, 0, -\frac{c}{\sqrt{-2c}}\right)$ é o ponto singular Φ em \bar{H} . O número λ é um autovalor de $d\Phi_p$ em \bar{H} , se existe $w \in T_p\bar{H} = \{w = (w_1, w_2, -cw_1) : w_1, w_2 \in \mathbb{R}\}$, tal que $d\Phi_p(w) = \lambda w$, isto é,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ c & -\frac{a}{\sqrt{-2c}} & -1 \\ 0 & -c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ -cw_1 \end{pmatrix} = (\lambda w_1, \lambda w_2, -\lambda cw_1),$$

ou seja,

$$\begin{cases} w_2 = \lambda w_1, \\ 2cw_1 - \frac{a}{\sqrt{-2c}}w_2 = \lambda w_2, \\ -cw_2 = -\lambda cw_1. \end{cases}$$

Logo $\lambda^2 + \frac{a}{\sqrt{-2c}}\lambda - 2c = 0$, então $\lambda_p = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 16c^2}}{2\sqrt{-2c}}$. ■

No lema a seguir, vamos mostrar que o ponto $p = \left(-\frac{1}{\sqrt{-2c}}, 0, -\frac{c}{\sqrt{-2c}}\right) \in \bar{H}$ é um atrator global para as soluções no conjunto \bar{H} e o ponto $(0, 0, 0)$ é um atrator global para soluções no conjunto \bar{C} .

Lema 3.2.32 *Seja $\psi(s) = (\alpha(s), \tau(s), \eta(s))$ uma solução não trivial do sistema (3.20) definida no intervalo maximal $I = (\omega_-, +\infty)$, para constantes $a > 0$, $c < 0$ e condição inicial $\psi(0) \in \bar{H} \cup \bar{C}$, onde os conjuntos \bar{H} , \bar{C} são dados por (3.17).*

i) *Se $\psi(0) \in \bar{H}$, então o ponto $\left(-\frac{1}{\sqrt{-2c}}, 0, -\frac{c}{\sqrt{-2c}}\right) \in \bar{H}$ é um atrator global.*

ii) *Se $\psi(0) \in \bar{C}$, então $\lim_{s \rightarrow +\infty} \psi(s) = (0, 0, 0)$.*

Demonstração: *i)* Seja $\psi(0) \in \overline{H}$. Segue do Lema 3.2.31 que, o ponto singular $p = \left(-\frac{1}{\sqrt{-2c}}, 0, -\frac{c}{\sqrt{-2c}}\right)$ é hiperbólico, isto é, o sistema linearizado associado tem autovalores não nulos. Então, pelo Teorema de Hartman-Grobman, o sistema (3.20) tem um comportamento equivalente ao sistema linear associado numa vizinha de p . Como a parte real dos autovalores é menor que zero, então p é um atrator local. Além disso, sabemos do Lema 3.2.30 que as funções $\alpha(s)$, $\tau(s)$ e $\eta(s)$ são limitadas em $(\bar{s}, +\infty)$, $\bar{s} \in I$, $\lim_{s \rightarrow +\infty} \tau(s) = 0$ e $\lim_{s \rightarrow +\infty} \tau'(s) = 0$. Assim, segue do Lema 3.2.5 que

$$\begin{aligned}\lim_{s \rightarrow +\infty} \alpha^2(s) &= -\frac{1}{2c}, \\ \lim_{s \rightarrow +\infty} \eta^2(s) &= -\frac{c}{2},\end{aligned}$$

para qualquer condição inicial $\psi(0) \in \overline{H}$. Logo, p é um atrator global.

ii) Seja $\psi(0) \in \overline{C}$. Sabemos do Lema 3.2.30 que as funções $\alpha(s)$, $\tau(s)$ e $\eta(s)$ são limitadas em $(\bar{s}, +\infty)$, $\bar{s} \in I$, $\lim_{s \rightarrow +\infty} \tau(s) = 0$ e $\lim_{s \rightarrow +\infty} \tau'(s) = 0$. Assim, usando o Lema 3.2.5, obtemos que

$$\begin{aligned}\lim_{s \rightarrow +\infty} \alpha^2(s) &= 0, \\ \lim_{s \rightarrow +\infty} \eta^2(s) &= 0,\end{aligned}$$

para qualquer condição inicial $\psi(0) \in \overline{C}$. Portanto,

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \psi(s) = (0, 0, 0).$$

■

Corolário 3.2.33 *Seja $\psi(s) = (\alpha(s), \tau(s), \eta(s))$ uma solução não trivial do sistema (3.20) definida no intervalo maximal $I = (\omega_-, +\infty)$, para constantes $a > 0$, $c < 0$ e condição inicial $\psi(0) \in \overline{H} \cup \overline{C}$, onde os conjuntos \overline{H} e \overline{C} são dados por (3.17). Se uma curva X de Q^2 é a solução autossimilar do fluxo FC de curvatura $k(s)$, que corresponde a solução $\psi(s)$, então $\lim_{s \rightarrow +\infty} k(s) = c$.*

Demonstração: Como $k(s) = c + a\tau(s)$, onde $a > 0$ e $c < 0$, então segue do Lema 3.2.32 que, $\lim_{s \rightarrow +\infty} k(s) = c$. ■

Lema 3.2.34 *Seja $\psi(s) = (\alpha(s), \tau(s), \eta(s))$ uma solução não trivial do sistema (3.20) definida no intervalo maximal $I = (\omega_-, +\infty)$, para constantes $a > 0$, $c < 0$ e condição inicial $\psi(0) \in \overline{H} \cup \overline{C}$, onde os conjuntos \overline{H} e \overline{C} são dados por (3.17). Então $\lim_{s \rightarrow \omega_-} \alpha(s) = -\infty$.*

Demonstração: Suponha por contradição que $\alpha(s)$ seja limitada em (ω_-, \bar{s}) para qualquer $\bar{s} \in I$. Segue do item *i)* do Lema 3.2.18 que, as funções $\tau(s)$ e $\eta(s)$ são limitadas em (ω_-, \bar{s}) e $\omega_- = -\infty$. Logo, usando o item *i)* do Lema 3.2.20, temos que $\lim_{s \rightarrow -\infty} \tau(s) = 0$ e $\lim_{s \rightarrow -\infty} \tau'(s) = 0$.

Se $\psi(0) \in \overline{H}$, então usando o Lema 3.2.5, obtemos que

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow -\infty} \alpha^2(s) &= -\frac{1}{2c}, \\ \lim_{s \rightarrow -\infty} \eta^2(s) &= -\frac{c}{2}, \end{aligned}$$

o que é uma contradição, pois, pelo item *i)* do Lema 3.2.32, o ponto $\left(-\frac{1}{\sqrt{-2c}}, 0, -\frac{c}{\sqrt{-2c}}\right)$ é atrator e não repulsor. Logo, $\alpha(s)$ é ilimitada em (ω_-, \bar{s}) .

Se $\psi(0) \in \overline{C}$, então usando o Lema 3.2.5, obtemos que

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow -\infty} \alpha^2(s) &= 0, \\ \lim_{s \rightarrow -\infty} \eta^2(s) &= 0, \end{aligned}$$

o que é uma contradição, pois, pelo item *ii)* do Lema 3.2.32, o ponto $(0, 0, 0)$ é atrator e não repulsor. Logo, $\alpha(s)$ é ilimitada em (ω_-, \bar{s}) .

Como $\alpha(s) \leq 0$ para todo $s \in I$, segue do item *ii)* do Lema 3.2.17 que $\lim_{s \rightarrow \omega_-} \alpha(s) = -\infty$. ■

Lema 3.2.35 *Seja $\psi(s) = (\alpha(s), \tau(s), \eta(s))$ uma solução não trivial do sistema (3.20) definida no intervalo maximal $I = (\omega_-, +\infty)$, para constantes $a > 0$, $c < 0$ e condição inicial $\psi(0) \in \overline{H} \cup \overline{C}$, onde os conjuntos \overline{H} e \overline{C} são dados por (3.17).*

i) Se $\eta(s)$ é limitada no intervalo (ω_-, \bar{s}) para qualquer $\bar{s} \in I$ fixado, então $\omega_- = -\infty$, $\lim_{s \rightarrow -\infty} \eta(s) = 0$, $\lim_{s \rightarrow -\infty} c + a\tau(s) = 0$.

ii) Se $\eta(s)$ é ilimitada no intervalo (ω_-, \bar{s}) para qualquer $\bar{s} \in I$ fixado, então,

$$\lim_{s \rightarrow \omega_-} \eta(s) = \lim_{s \rightarrow \omega_-} \tau(s) = +\infty.$$

Demonstração: Sabemos do Lema 3.2.34 que $\lim_{s \rightarrow \omega_-} \alpha(s) = -\infty$. Assim, segue do item ii) do Lema 3.2.17 que existe $s_1 \in I$ tal que as funções $\alpha(s)$, $\tau(s)$ e $\eta(s)$ são monótonas no intervalo (ω_-, s_1) .

i) Segue do item i) do Lema 3.2.21.

ii) Já sabemos que $\lim_{s \rightarrow \omega_-} \alpha(s) = -\infty$, então $\alpha(s)$ é crescente no intervalo (ω_-, s_1) , isto é, $\tau(s) > 0$ para todo $s < s_1$ e segue da equação $2\alpha(s)\eta(s) + \tau^2(s) = \delta$, onde $\delta \in \{-1, 0\}$ que $\tau(s)$ é ilimitada. Portanto, $\lim_{s \rightarrow \omega_-} \tau(s) = +\infty$ e $\lim_{s \rightarrow \omega_-} \eta(s) = +\infty$. ■

Corolário 3.2.36 *Seja $\psi(s) = (\alpha(s), \tau(s), \eta(s))$ uma solução não trivial do sistema (3.20) definida no intervalo maximal $I = (\omega_-, +\infty)$, para constantes $a > 0$, $c < 0$ e condição inicial $\psi(0) \in \overline{H} \cup \overline{C}$, onde os conjuntos \overline{H} e \overline{C} são dados por (3.17). Se uma curva $X : I \rightarrow Q_-^2$, $s \in I$ é a solução autossimilar do fluxo FC de curvatura $k(s)$, que corresponde a solução $\psi(s)$, então ou $\lim_{s \rightarrow \omega_-} k(s) = +\infty$ ou $\lim_{s \rightarrow \omega_-} k(s) = 0$.*

Demonstração: Como $k(s) = c + a\tau(s)$, onde $a > 0$ e $c < 0$, então segue do Lema 3.2.35 que, ou $\lim_{s \rightarrow \omega_-} k(s) = +\infty$ ou $\lim_{s \rightarrow \omega_-} k(s) = 0$. ■

Para concluir o estudo das soluções autossimilares do fluxo FC em Q^2 com função de homotetia decrescente, falta estudar o caso em que a condição inicial está no conjunto \overline{S} . Neste caso, as funções $\alpha(s)$ e $\eta(s)$ não possuem sinal definido.

Lema 3.2.37 *Seja $\psi(s) = (\alpha(s), \tau(s), \eta(s))$ uma solução não trivial do sistema (3.20) definida no intervalo maximal $I = (\omega_-, \omega_+)$ para constantes $a > 0$, $c < 0$ e condição inicial $\psi(s) \in \overline{S}$, onde o conjunto \overline{S} é dado por (3.17). Então $\lim_{s \rightarrow \omega_-} |\alpha(s)| = +\infty$ e $\lim_{s \rightarrow \omega_+} |\alpha(s)| = +\infty$.*

Demonstração: Primeiro vamos mostrar que $\lim_{s \rightarrow \omega_-} |\alpha(s)| = +\infty$.

Suponha por contradição que $\alpha(s)$ seja limitada (ω_-, \bar{s}) para qualquer $\bar{s} \in I$ fixado. Segue do item i) do Lema 3.2.18 que, as funções $\tau(s)$ e $\eta(s)$ são limitadas em (ω_-, \bar{s}) e $\omega_- = -\infty$. Logo, usando o item i) do Lema 3.2.20, temos que $\lim_{s \rightarrow -\infty} \tau(s) = 0$ e $\lim_{s \rightarrow -\infty} \tau'(s) = 0$. Assim, segue da equação (3.18) do Lema 3.2.5 que

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} \alpha^2(s) = \frac{1}{2c} < 0,$$

o que é uma contradição. Logo, $\alpha(s)$ é ilimitada e $\lim_{s \rightarrow \omega_-} |\alpha(s)| = +\infty$.

De maneira análoga, Suponha por contradição que $\alpha(s)$ seja limitada (\bar{s}, ω_+) para qualquer $\bar{s} \in I$ fixado. Segue do item *ii*) do Lema 3.2.18 que, as funções $\tau(s)$ e $\eta(s)$ são limitadas em (\bar{s}, ω_+) e $\omega_+ = +\infty$. Logo, usando o item *ii*) do Lema 3.2.20, temos que $\lim_{s \rightarrow +\infty} \tau(s) = 0$ e $\lim_{s \rightarrow +\infty} \tau'(s) = 0$. Assim, usando a equação (3.18) do Lema 3.2.5, obtemos que

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \alpha^2(s) = \frac{1}{2c} < 0.$$

O que é uma contradição. Logo, $\alpha(s)$ é ilimitada e $\lim_{s \rightarrow \omega_+} |\alpha(s)| = +\infty$. ■

Lema 3.2.38 *Seja $\psi(s) = (\alpha(s), \tau(s), \eta(s))$ uma solução não trivial do sistema (3.20) definida no intervalo maximal $I = (\omega_-, \omega_+)$, para constantes $a > 0$, $c < 0$ e condição inicial $\psi(0) \in \bar{S}$, onde o conjunto \bar{S} é dado por (3.17). Seja $\bar{s} \in I$.*

i) Se $\eta(s)$ é limitada no intervalo (ω_-, \bar{s}) , então $\omega_- = -\infty$, $\lim_{s \rightarrow -\infty} \eta(s) = 0$ e

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} c + a\tau(s) = 0.$$

ii) Se $\eta(s)$ é limitada no intervalo (\bar{s}, ω_+) , então $\omega_+ = +\infty$, $\lim_{s \rightarrow +\infty} \eta(s) = 0$ e

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} c + a\tau(s) = 0.$$

iii) Se $\eta(s)$ é ilimitada no intervalo (ω_-, \bar{s}) , então $\lim_{s \rightarrow \omega_-} |\tau(s)| = +\infty$.

iv) Se $\eta(s)$ é ilimitada no intervalo (\bar{s}, ω_+) , então $\lim_{s \rightarrow \omega_+} |\tau(s)| = +\infty$.

Demonstração: Sabemos do Lema 3.2.37 que, $\lim_{s \rightarrow \omega_-} |\alpha(s)| = +\infty$ e $\lim_{s \rightarrow \omega_+} |\alpha(s)| = +\infty$.

i) Segue do item *i*) do Lema 3.2.21.

ii) Segue do item *ii*) do Lema 3.2.21.

Os itens *iii*) e *iv*) seguem usando a equação $2\alpha(s)\eta(s) + \tau^2(s) = 1$. ■

Corolário 3.2.39 *Seja $\psi(s) = (\alpha(s), \tau(s), \eta(s))$ uma solução não trivial do sistema (3.20) definida no intervalo maximal $I = (\omega_-, \omega_+)$, para constantes $a > 0$, $c < 0$ e condição inicial $\psi(0) \in \bar{S}$, onde o conjunto \bar{S} é dado por (3.17). Se uma curva $X : I \rightarrow Q_-^2$, $s \in I$ é a solução autossimilar do fluxo FC de curvatura $k(s)$, que corresponde a solução $\psi(s)$, então em cada fim de X ou $k(s)$ é ilimitada, ou $k(s)$ converge a zero .*

Demonstração: Como $k(s) = c + a\tau(s)$, onde $a > 0$, $c < 0$ então segue do Lema 3.2.38 que, ou $k(s)$ é ilimitada, ou converge a zero em cada fim de X . ■

Após esta série de lemas sobre soluções autossimilares com $c < 0$, temos o seguinte teorema.

Teorema 3.2.40 *Para cada vetor $v \in \mathbb{R}_1^3 \setminus \{0\}$ e $c < 0$ existe uma família a dois parâmetros de soluções autossimilares do fluxo de curvatura no cone de luz, definidas em um intervalo maximal $I = (\omega_-, \omega_+)$, $X : I \rightarrow Q_-^2$ tal que, $k(s) = c + \langle T(s), v \rangle$, onde $k(s)$ é a curvatura de X e $T(s)$ é o vetor unitário tangente a X para cada $s \in I$. Além disso,*

i) se $\langle v, v \rangle \leq 0$, então $\lim_{s \rightarrow \omega_-} k(s) = +\infty$ ou $\lim_{s \rightarrow \omega_-} k(s) = 0$, $\omega_+ = +\infty$ e $\lim_{s \rightarrow +\infty} k(s) = c$;

ii) se $\langle v, v \rangle > 0$, então em cada fim de X ou $k(s)$ é ilimitada, ou $k(s)$ converge a zero.

Demonstração: Para demonstrar o teorema vamos separar nos três tipos de vetores. Sem perda de generalidade podemos assumir que $v = ae$, onde $a > 0$ e

$$e = \begin{cases} (-1, 0, 0) & \text{se } v \text{ é do tipo tempo,} \\ (-1, 1, 0) & \text{se } v \text{ é do tipo luz,} \\ (0, 0, 1) & \text{se } v \text{ é do tipo espaço.} \end{cases}$$

Seja $\psi(s) = (\alpha(s), \tau(s), \eta(s))$ uma solução do sistema de equações diferenciais ordinárias (3.20) definida no intervalo maximal I , com $a > 0$, $c < 0$ e condição inicial $\psi(0) \in \mathbb{R}^3$ tal que

$$2\alpha(0)\eta(0) + \tau^2(0) = \begin{cases} -1 & \text{se } v \text{ é do tipo tempo,} \\ 0 & \text{se } v \text{ é do tipo luz,} \\ 1 & \text{se } v \text{ é do tipo espaço.} \end{cases}$$

Assim, as condições iniciais do sistema (3.20) que dependem de duas constantes, determinam as soluções autossimilares em cada caso.

O item *i*) segue dos Corolários 3.2.33 e 3.2.36. O item *ii*) segue do Corolário 3.2.39. ■

3.2.3 Soluções Autossimilares do Fluxo FC com Função de Homotetia Crescente

Nesta subseção, estudamos o caso $c > 0$, ou seja, as soluções do sistema (3.20) que correspondem as soluções autossimilares do fluxo FC em Q^2 com função de homotetia crescente.

O conjunto $\overline{H} \cup \overline{C}$ não contém nenhuma solução singular do sistema (3.20). No próximo lema, vamos mostrar que sempre existe um único ponto crítico para a função $\alpha(s)$ quando $c > 0$ e $(\alpha(0), \tau(0), \eta(0)) \in \overline{H}$.

Lema 3.2.41 *Seja $\psi(s) = (\alpha(s), \tau(s), \eta(s))$ uma solução não trivial do sistema (3.20) definida no intervalo maximal $I = (\omega_-, \omega_+)$, para constantes $a > 0$, $c > 0$ e condição inicial $\psi(0) \in \overline{H}$, onde o conjunto \overline{H} é dado por (3.17). Então existe um único ponto crítico s_0 para $\alpha(s)$ que é ponto de máximo global e $\alpha(s)$ é monótona nos intervalos (ω_-, s_0) e (s_0, ω_+) .*

Demonstração: Vamos mostrar a existência, uma vez que, a unicidade é garantida pelo item *i*) do Lema 3.2.12. Relembramos que, se $\psi(0) \in \overline{H}$, então a função $\alpha(s)$ é negativa e $\eta(s)$ é positiva para todo $s \in I$. Sabemos também do item *i*) do Lema 3.2.17 que existem $s_1, s_2 \in I$ tais que as funções $\alpha(s)$, $\tau(s)$ e $\eta(s)$ são monótonas nos intervalos (ω_-, s_1) e (s_2, ω_+) . Suponha por contradição que a função $\alpha(s)$ não possua nenhum ponto crítico em I . Logo, ou $\tau(s) > 0$ ou $\tau(s) < 0$ para todo $s \in I$.

Se $\tau(s) > 0$, então das equações do sistema (3.20), $\alpha'(s) > 0$ e $\eta'(s) < 0$ para todo $s \in I$, isto é, $\alpha(s)$ é estritamente crescente e limitada, e $\eta(s)$ é estritamente decrescente e limitada no intervalo (s_2, ω_+) . Logo, os limites $\lim_{s \rightarrow \omega_+} \alpha(s)$ e $\lim_{s \rightarrow \omega_+} \eta(s)$ existem e segue da equação $2\alpha(s)\eta(s) + \tau^2(s) = 1$ que $\lim_{s \rightarrow \omega_+} \tau(s)$ existe. Sendo assim, existe $p \in \overline{H}$ tal que, $\lim_{s \rightarrow \omega_+} \psi(s) = p$, $\omega_+ = +\infty$ e p é uma solução singular do sistema (3.20). O que é uma contradição, pois, o sistema (3.20) não tem solução singular no conjunto \overline{H} quando $c > 0$.

Se $\tau(s) < 0$, temos que $\alpha'(s) = \tau(s) < 0$, isto é, a função negativa $\alpha(s)$ é estritamente decrescente para todo $s \in I$, limitada no intervalo (ω_-, s_1) e $\lim_{s \rightarrow \omega_-} \alpha(s)$ existe. Segue do item *i*) do Lema 3.2.18 que, as funções $\tau(s)$ e $\eta(s)$ também são limitadas em (ω_-, \bar{s}) e $\omega_- = -\infty$. Logo, os limites $\lim_{s \rightarrow -\infty} \tau(s)$ e $\lim_{s \rightarrow -\infty} \eta(s)$ existem. Sendo assim, existe $p \in \overline{H}$ tal que, $\lim_{s \rightarrow -\infty} \psi(s) = p$ e p é uma solução singular do sistema (3.20). O que é uma contradição, pois, o sistema (3.20) não tem solução singular no conjunto \overline{H} quando $c > 0$.

Portanto, o ponto crítico s_0 de $\alpha(s)$ existe, é único e é ponto de máximo global pelo Lema 3.2.12. ■

No próximo Lema, vamos mostrar que $\alpha(s)$ é ilimitada nos intervalos (ω_-, \bar{s}) e (\bar{s}, ω_+) , onde $\bar{s} \in I$.

Lema 3.2.42 *Seja $\psi(s) = (\alpha(s), \tau(s), \eta(s))$ uma solução não trivial do sistema (3.20) definida no intervalo maximal $I = (\omega_-, \omega_+)$, para constantes $a > 0$, $c > 0$ e condição inicial $\psi(0) \in \overline{H}$, onde o conjunto é dado por (3.17). Então $\lim_{s \rightarrow \omega_-} \alpha(s) = \lim_{s \rightarrow \omega_+} \alpha(s) = -\infty$.*

Demonstração: Sabemos também do item *i*) do Lema 3.2.17 que existem $s_1, s_2 \in I$ tais que as funções $\alpha(s)$, $\tau(s)$ e $\eta(s)$ são monótonas nos intervalos (ω_-, s_1) e (s_2, ω_+) .

Suponha por contradição que $\alpha(s)$ seja limitada em (ω_-, s_1) . Segue do item *i*) do Lema 3.2.18 que, as funções $\eta(s)$ e $\tau(s)$ são limitadas em (ω_-, s_1) , e $\omega_- = -\infty$. Assim, existe $p \in \overline{H}$ tal que, $\lim_{s \rightarrow -\infty} \psi(s) = p$ e p é uma solução singular do sistema (3.20). O que é uma contradição, pois, o sistema (3.20) não tem solução singular no conjunto \overline{H} quando $c > 0$.

De maneira análoga, suponha por contradição que $\alpha(s)$ seja limitada em (s_2, ω_+) . Segue do item *ii*) do Lema 3.2.18 que, as funções $\eta(s)$ e $\tau(s)$ são limitadas em (s_2, ω_+) , e $\omega_+ = +\infty$. Assim, existe $p \in \overline{H}$ tal que, $\lim_{s \rightarrow +\infty} \psi(s) = p$ e p é uma solução singular do sistema (3.20). O que é uma contradição, pois, o sistema (3.20) não tem solução singular no conjunto \overline{H} quando $c > 0$.

Portanto, $\lim_{s \rightarrow \omega_-} \alpha(s) = \lim_{s \rightarrow \omega_+} \alpha(s) = -\infty$. ■

No próximo lema, vamos apresentar o estudo do comportamento das funções $\eta(s)$ e $\tau(s)$ quando $\psi(0) \in \overline{H}$.

Lema 3.2.43 *Seja $\psi(s) = (\alpha(s), \tau(s), \eta(s))$ uma solução não trivial do sistema (3.20) definida no intervalo maximal $I = (\omega_-, \omega_+)$, para constantes $a > 0$, $c > 0$ e condição inicial $\psi(0) \in \overline{H}$, onde o conjunto \overline{H} é dado por (3.17). Então, $\omega_+ = +\infty$, $\lim_{s \rightarrow +\infty} c + a\tau(s) = 0$ e $\lim_{s \rightarrow +\infty} \eta(s) = 0$. Além disso, $\lim_{s \rightarrow \omega_-} \tau(s) = \lim_{s \rightarrow \omega_-} \eta(s) = +\infty$,*

Demonstração: Seja s_0 o ponto crítico de $\alpha(s)$ garantido pelo Lema 3.2.41. Então $\alpha(s)$ é decrescente no intervalo (s_0, ω_+) e $\tau(s) < 0$ para todo $s > s_0$, e $\alpha(s)$ é crescente no intervalo (ω_-, s_0) e $\tau(s) > 0$ para todo $s < s_0$. Pelo item *ii*) Lema 3.2.14, temos que a função $\tau(s)$ não tem ponto crítico no intervalo (ω_-, s_0) .

Afirmação. Sempre existe um único $s_1 > s_0$ tal que $c + a\tau(s_1) = 0$ e $c + a\tau(s) < 0$ para todo $s > s_1$.

De fato, suponha por contradição que não exista tal s_1 , então $c + a\tau(s) > 0$ e $\tau(s) < 0$, para todo $s > s_0$. Usando a terceira equação do sistema (3.20), temos que $\eta(s)$ é crescente e positiva para todo $s > s_0$. Então segue do Lema 3.2.42 que $\lim_{s \rightarrow \omega_+} 2\alpha(s)\eta(s) = -\infty$, o que é uma contradição, pois, $2\alpha(s)\eta(s) + \tau^2(s) = -1$. Logo, existe s_1 tal que $c + a\tau(s_1) = 0$. A unicidade segue do item *iii*) do Lema 3.2.13. De fato, sabemos que $\eta(s) > 0$ para todo $s \in I$. Se existir $s_2 \in (s_1, \omega_+)$ tal que $c + a\tau(s_2) = 0$ e $c + a\tau(s) \neq 0$ para todo $s \in (s_1, s_2)$, então $c + a\tau(s) < 0$ para todo $s \in (s_1, s_2)$ e $c\eta(s_2) > 0$, isto é, s_2 é outro ponto de máximo local de $\eta(s)$, o que é uma contradição. Logo, s_1 é único e $c + a\tau(s) < 0$ para $s > s_1$.

Segue da Afirmação que, s_1 é um máximo local para função positiva $\eta(s)$ e $c + a\tau(s) < 0$ para todo $s > s_1$. Assim, $\eta(s)$ é decrescente e limitada no intervalo (s_1, ω_+) . Logo, segue do item *ii*) do Lema 3.2.21 que $\omega_+ = +\infty$ e $\lim_{s \rightarrow +\infty} c + a\tau(s) = \lim_{s \rightarrow +\infty} \eta(s) = 0$.

Para concluir, veja que as funções $\alpha(s)$, $\tau(s)$ e $\eta(s)$ são monótonas no intervalo (ω_-, s_0) , uma vez que, $\tau(s) > 0$ para todo $s < s_0$. Segue da terceira equação do sistema (3.20) que, $\eta(s)$ é decrescente e positiva em (ω_-, s_0) . Logo, $\lim_{s \rightarrow \omega_-} \eta(s)\alpha(s) = -\infty$. Portanto, $\lim_{s \rightarrow \omega_-} \eta(s) = \lim_{s \rightarrow \omega_-} \tau(s) = +\infty$. ■

Corolário 3.2.44 *Seja $\psi(s) = (\alpha(s), \tau(s), \eta(s))$ uma solução não trivial do sistema (3.20) definida no intervalo maximal $I = (\omega_-, +\infty)$, para constantes $a > 0$, $c > 0$ e condição inicial $\psi(0) \in \overline{H}$, onde o conjunto \overline{H} é dado por (3.17). Se uma curva X de Q^2 é a solução autossimilar do fluxo FC de curvatura $k(s)$, que corresponde a solução*

$\psi(s)$, então $\lim_{s \rightarrow \omega_-} k(s) = +\infty$ e $\lim_{s \rightarrow +\infty} k(s) = 0$. Além disso, X assintota uma reta de Q^2 quando s tende a ω_- .

Demonstração: Como $k(s) = c + a\tau(s)$, onde $a > 0$ e $c > 0$, então segue do Lema 3.2.43 que, $\lim_{s \rightarrow \omega_-} k(s) = +\infty$ e que $\lim_{s \rightarrow +\infty} k(s) = 0$. Sabemos também do Lema 3.2.42 que, $\lim_{s \rightarrow \omega_-} \alpha(s) = \lim_{s \rightarrow +\infty} \alpha(s) = -\infty$ e pelo item *ii*) do Lema 3.2.17 existem $s_1, s_2 \in I$ tais que as funções $\alpha(s)$ e $\tau(s)$ são monótonas nos intervalos (ω_-, s_1) e $(s_2, +\infty)$. Usando Proposição 1.3.7 obtemos que, X assintota uma reta de Q^2 quando s tende a ω_- . ■

No próximo lema, vamos estudar o comportamento das funções $\alpha(s)$, $\tau(s)$ e $\eta(s)$ quando as condições iniciais estão no conjunto \bar{C} .

Lema 3.2.45 *Seja $\psi(s) = (\alpha(s), \tau(s), \eta(s))$ uma solução não trivial do sistema (3.20) definida no intervalo maximal $I = (\omega_-, \omega_+)$, para constantes $a > 0$, $c > 0$ e condição inicial $\psi(0) \in \bar{C}$, onde o conjunto \bar{C} é dado por (2.11). Seja $\bar{s} \in I$*

i) Se $\alpha(s)$ é limitada no intervalo (ω_-, \bar{s}) , então $\omega_- = -\infty$ e

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} \psi(s) = (0, 0, 0).$$

ii) Se $\alpha(s)$ e $\eta(s)$ são ilimitadas no intervalo (ω_-, \bar{s}) , então

$$\lim_{s \rightarrow \omega_-} \eta(s) = \lim_{s \rightarrow \omega_-} \tau(s) = +\infty.$$

iii) Se $\alpha(s)$ é limitada no intervalo (\bar{s}, ω_+) , então $\omega_+ = +\infty$ e

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \psi(s) = (0, 0, 0).$$

iv) Se $\alpha(s)$ é ilimitada no intervalo (\bar{s}, ω_+) , então $\omega_+ = +\infty$ e

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \eta(s) = \lim_{s \rightarrow +\infty} [c + a\tau(s)] = 0.$$

Demonstração: Sabemos do item *i*) do Lema 3.2.17 que existem $s_1, s_2 \in I$ tais que as funções $\alpha(s)$, $\tau(s)$ e $\eta(s)$ são monótonas nos intervalos (ω_-, s_1) e (s_2, ω_+) .

i) Seja $\alpha(s)$ limitada em (ω_-, \bar{s}) . Segue do item *i*) do Lema 3.2.18 que, as funções $\tau(s)$ e $\eta(s)$ são limitadas em (ω_-, \bar{s}) e $\omega_- = -\infty$. Logo, pelo o item *i*) do Lema 3.2.20

temos que, $\lim_{s \rightarrow -\infty} \tau(s) = 0$ e $\lim_{s \rightarrow -\infty} \tau'(s) = 0$. Usando o Lema 3.2.5, obtemos que

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow -\infty} \alpha^2(s) &= 0, \\ \lim_{s \rightarrow -\infty} \eta^2(s) &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, o resultado segue.

ii) Se $\alpha(s)$ é ilimitada no intervalo (ω_-, \bar{s}) , então $\lim_{s \rightarrow \omega_-} \alpha(s) = -\infty$. Como $\eta(s)$ é não negativa, segue que $\lim_{s \rightarrow \omega_-} \eta(s) = +\infty$ e $\lim_{s \rightarrow \omega_-} \tau(s) = +\infty$.

iii) De maneira análoga ao item *i)*, seja $\alpha(s)$ limitada em (\bar{s}, ω_+) . Segue do item *ii)* do Lema 3.2.18 que, as funções $\tau(s)$ e $\eta(s)$ são limitadas em (\bar{s}, ω_+) e $\omega_+ = +\infty$. Logo, usando o item *ii)* do Lema 3.2.20, obtemos $\lim_{s \rightarrow +\infty} \tau(s) = 0$ e $\lim_{s \rightarrow +\infty} \tau'(s) = 0$. Dessa forma, usando o Lema 3.2.5, obtemos que

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow -\infty} \alpha^2(s) &= 0, \\ \lim_{s \rightarrow -\infty} \eta^2(s) &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, o resultado segue.

iv) Como $\alpha(s) \leq 0$ em \bar{C} , se $\alpha(s)$ é ilimitada no intervalo (\bar{s}, ω_+) , então segue do Lema 3.2.17 que $\lim_{s \rightarrow \omega_+} \alpha(s) = -\infty$. Vamos provar a seguinte afirmação

Afirmação. $\tau(s)$ é limitada no intervalo (\bar{s}, ω_+) .

De fato, suponha por contradição que $\lim_{s \rightarrow \omega_+} \tau(s) = -\infty$. Assim, existe $s_2 \in (\bar{s}, \omega_+)$ tal que $\tau(s)[c + a\tau(s)] > 0$ e $\eta'(s) = -\tau(s)[c + a\tau(s)] < 0$ para todo $s > s_2$. Como $\eta(s)$ é não negativa, então $\eta(s)$ é limitada no intervalo (s_2, ω_+) . Logo, pelo item *iv)* Lema 3.2.18 a função $\tau(s)$ é limitada em (s_2, ω_+) , o que é uma contradição, pois, supomos que $\tau(s)$ é ilimitada. Portanto, $\tau(s)$ é limitada em (s_2, ω_+) .

Assim, usando que $\lim_{s \rightarrow \omega_+} \alpha(s) = -\infty$, a equação $2\alpha(s)\eta(s) + \tau^2(s) = 0$ e a Afirmação, obtemos que $\lim_{s \rightarrow \omega_+} \eta(s) = 0$, isto é, $\eta(s)$ é limitada no intervalo (s_2, ω_+) . Logo, pelo item *ii)* do Lema 3.2.21, obtemos que $\omega_+ = +\infty$ e $\lim_{s \rightarrow +\infty} [c + a\tau(s)] = 0$. ■

Corolário 3.2.46 *Seja $\psi(s) = (\alpha(s), \tau(s), \eta(s))$ uma solução não trivial do sistema (3.20) definida no intervalo maximal $I = (\omega_-, \omega_+)$, para constantes $a > 0$, $c > 0$ e condição inicial $\psi(s) \in \bar{C}$, onde o conjunto \bar{C} é dado por (3.17). Se uma curva $X : I \rightarrow Q_-^2$, $s \in I$ é a solução autossimilar do fluxo FC de curvatura $k(s)$, que*

corresponde a solução $\psi(s)$, então em cada fim de X ou $k(s)$ é ilimitada, ou $k(s)$ converge a zero, ou $k(s)$ converge a c .

Demonstração: Como $k(s) = c + a\tau(s)$, onde $a > 0$, $c > 0$ então segue do Lema 3.2.45 que, ou $k(s)$ é ilimitada, ou $k(s)$ converge a zero, ou $k(s)$ converge a c em cada fim de X . ■

Agora, vamos analisar o caso em que as condições iniciais estão no conjunto \bar{S} . Antes de iniciar com os lemas, veja que, se $a = c$, então as funções $\alpha(s) = -s$, $\eta(s) = 0$ e $\tau(s) = -1$ é uma solução do sistema (3.20) com $c > 0$. Essa solução representa uma parábola no cone de luz, isto é, uma solução trivial para o FC.

Quando $c > 0$, o sistema (3.20) tem soluções singulares no conjunto \bar{S} que são pontos que anulam o campo Φ do lema a seguir.

Lema 3.2.47 *Seja $\Phi : \bar{S} \rightarrow T\bar{S} \subset \mathbb{R}^3$ um campo diferenciável dado por*

$$\Phi(\alpha, \tau, \eta) = (\tau, c\alpha + a\tau\alpha - \eta, -c\tau - a\tau^2)$$

onde $a, c > 0$ e o conjunto \bar{S} é dado por (3.17). Então $p = \left(-\frac{1}{\sqrt{2c}}, 0, -\frac{c}{\sqrt{2c}}\right)$ e $-p$ são pontos singulares de Φ e os autovalores de $d\Phi_p$ e $d\Phi_{-p}$ são

$$\lambda_p = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 16c^2}}{2\sqrt{2c}} \quad e \quad \lambda_{-p} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 16c^2}}{2\sqrt{2c}}.$$

Demonstração: Os pontos singulares de Φ satisfazem $\tau = 0$, $c\alpha = \eta$. Se estão em \bar{S} , então $1 = \langle e_3, e_3 \rangle = 2\alpha\eta + \tau^2 = 2\alpha\eta$. Logo, $2c\alpha^2 = 1$, $\alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{2c}}$ e $\left(\pm \frac{1}{\sqrt{2c}}, 0, \pm \frac{c}{\sqrt{2c}}\right)$ são os pontos singulares de Φ . O número λ é um autovalor de $d\Phi_{\pm p}$, se existe $w \in T_{\pm p}\bar{S} = \{w = (w_1, w_2, -aw_1) : w_1, w_2 \in \mathbb{R}\}$ tal que $d\Phi_{\pm p}(w) = \lambda w$.

Então

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ c & \pm \frac{a}{\sqrt{2c}} & -1 \\ 0 & -c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ -cw_1 \end{pmatrix} = (\lambda w_1, \lambda w_2, -\lambda cw_1),$$

isto implica que,

$$\begin{cases} w_2 = \lambda w_1, \\ 2cw_1 \pm \frac{a}{\sqrt{2c}}w_2 = \lambda w_2, \\ -cw_2 = -\lambda cw_1. \end{cases}$$

Logo $\lambda^2 \mp \frac{a}{\sqrt{2c}}\lambda - 2c = 0$, daí

$$\lambda_p = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 16c^2}}{2\sqrt{2c}} \quad \text{e} \quad \lambda_{-p} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 16c^2}}{2\sqrt{2c}}.$$

■

No Lema 3.2.47, vimos que $\left(\pm \frac{1}{\sqrt{2c}}, 0, \pm \frac{c}{\sqrt{2c}}\right)$ são pontos singulares de sela de Φ , isto é, são soluções singulares de (3.20). Cada solução singular corresponde a uma hipérbole que é a interseção do cone de luz com o plano $x_3 = \frac{1}{\sqrt{2c}}$ ou com o plano $x_3 = -\frac{1}{\sqrt{2c}}$. Como $\pm p$ são pontos singulares de sela de Φ , então existem condições iniciais $q, \bar{q} \in \bar{S} \setminus \{p\}$ tais que $\lim_{s \rightarrow +\infty} \psi(s, q) = \pm p$ e $\lim_{s \rightarrow -\infty} \psi(s, \bar{q}) = \pm p$. Assim, defina os conjuntos

$$\begin{aligned} W^e(\pm p) &= \{q \in S : \lim_{s \rightarrow +\infty} \psi(s, q) = \pm p\}, \\ W^i(\pm p) &= \{q \in S : \lim_{s \rightarrow -\infty} \psi(s, q) = \pm p\}. \end{aligned} \tag{3.25}$$

Lema 3.2.48 *Seja $\psi(s) = (\alpha(s), \tau(s), \eta(s))$ uma solução não trivial do sistema (3.20) no intervalo maximal $I = (\omega_-, \omega_+)$, para constantes $a > 0$, $c > 0$ e condição inicial $\psi(0) \in \bar{S}$, onde o conjunto \bar{S} é dado por (3.17). Sejam $W^i(\pm p)$ e $W^e(\pm p)$ como em (3.25). Se $\psi(0) \in \bar{S} \setminus W^i(\pm p)$ (resp. $\bar{S} \setminus W^e(\pm p)$), então $\lim_{s \rightarrow \omega_-} |\alpha(s)| = +\infty$ (resp. $\lim_{s \rightarrow \omega_+} |\alpha(s)| = +\infty$).*

Demonstração: Segue do item *i*) do Lema 3.2.17 que existem $s_1, s_2 \in I$ tais que as funções $\alpha(s)$, $\tau(s)$ e $\eta(s)$ são monótonas nos intervalos (ω_-, s_1) e (s_2, ω_+) .

Seja $\psi(0) \in \bar{S} \setminus W^i(\pm p)$ e suponha por contradição que $\alpha(s)$ seja limitada em (ω_-, s_1) . Segue do item *i*) do Lema 3.2.18 que, as funções $\tau(s)$ e $\eta(s)$ são limitadas em (ω_-, s_1) e $\omega_- = -\infty$. Como já observamos que as funções $\alpha(s)$, $\tau(s)$ e $\eta(s)$ são monótonas no intervalo (ω_-, s_1) , então existe $q \in \bar{S} \setminus W^i(\pm p)$ tal que, $\lim_{s \rightarrow -\infty} \psi(s) = q$ e q é uma solução singular do sistema (3.20). O que é uma contradição, pois, quando

$c > 0$ o sistema (3.20) não tem solução singular no conjunto $\bar{S} \setminus W^i(\pm p)$. Portanto, $\alpha(s)$ é ilimitada em (ω_-, s_1) e $\lim_{s \rightarrow \omega_-} |\alpha(s)| = +\infty$.

De maneira análoga, seja $\psi(0) \in \bar{S} \setminus W^e(\pm p)$ e suponha por contradição que $\alpha(s)$ seja limitada em (s_2, ω_+) . Segue do item *ii*) do Lema 3.2.18 que, as funções $\tau(s)$ e $\eta(s)$ são limitadas em (s_2, ω_+) e $\omega_+ = +\infty$. Como já observamos que as funções $\alpha(s)$, $\tau(s)$ e $\eta(s)$ são monótonas no intervalo (s_2, ω_+) , então existe $q \in \bar{S} \setminus W^e(\pm p)$ tal que, $\lim_{s \rightarrow +\infty} \psi(s) = q$ e q é uma solução singular do sistema (3.20). O que é uma contradição, pois, quando $c > 0$ o sistema (3.20) não tem solução singular no conjunto $\bar{S} \setminus W^e(\pm p)$. Portanto, $\alpha(s)$ é ilimitada em (s_2, ω_+) e $\lim_{s \rightarrow \omega_+} |\alpha(s)| = +\infty$. ■

No próximo lema, vamos estudar o comportamento das funções $\eta(s)$ e $\tau(s)$.

Lema 3.2.49 *Seja $\psi(s) = (\alpha(s), \tau(s), \eta(s))$ uma solução não trivial do sistema (3.20) definida no intervalo maximal $I = (\omega_-, \omega_+)$, para constantes $a > 0$, $c > 0$ e condição inicial $\psi(0) \in \bar{S}$, onde conjunto \bar{S} é dado por (3.17). Sejam $W^i(\pm p)$ e $W^e(\pm p)$ como em (3.25) e $\bar{s} \in I$.*

i) Se $\eta(s)$ é limitada no intervalo (ω_-, \bar{s}) e $\psi(0) \in \bar{S} \setminus W^i(\pm p)$, então $\omega_- = -\infty$ e

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} c + a\tau(s) = \lim_{s \rightarrow -\infty} \eta(s) = 0.$$

ii) Se $\eta(s)$ é ilimitada no intervalo (ω_-, \bar{s}) e $\psi(0) \in \bar{S} \setminus W^i(\pm p)$, então $\lim_{s \rightarrow \omega_-} |c + a\tau(s)| = +\infty$.

iii) Se $\psi(0) \in W^i(\pm p)$, então $\lim_{s \rightarrow -\infty} [c + a\tau(s)] = c$.

iv) Se $\eta(s)$ é limitada no intervalo (\bar{s}, ω_+) e $\psi(0) \in \bar{S} \setminus W^e(\pm p)$, então $\omega_+ = +\infty$ e

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} c + a\tau(s) = \lim_{s \rightarrow +\infty} \eta(s) = 0.$$

v) Se $\eta(s)$ é ilimitada no intervalo (\bar{s}, ω_+) e $\psi(0) \in \bar{S} \setminus W^e(\pm p)$, então $\lim_{s \rightarrow \omega_+} |c + a\tau(s)| = +\infty$.

vi) Se $\psi(0) \in W^e(\pm p)$, então $\lim_{s \rightarrow +\infty} [c + a\tau(s)] = c$.

Demonstração: Antes de iniciar a prova de cada item, observamos que, pelo item *i)* do Lema 3.2.17 existem $s_1, s_2 \in I$ tais que as funções $\alpha(s)$, $\tau(s)$ e $\eta(s)$ são monótonas nos intervalos (ω_-, s_1) e (s_2, ω_+) .

i) Seja $\eta(s)$ uma função limitada no intervalo (ω_-, \bar{s}) e $\psi(0) \in \bar{S} \setminus W^i(\pm p)$. Como já

sabemos que $\lim_{s \rightarrow \omega_-} |\alpha(s)| = +\infty$, então segue do item *i*) do Lema 3.2.21 que, $\omega_- = -\infty$

e $\lim_{s \rightarrow -\infty} c + a\tau(s) = \lim_{s \rightarrow -\infty} \eta(s) = 0$.

ii) Segue usando o Lema 3.2.48 e a equação $2\alpha(s)\eta(s) + \tau^2(s) = 1$.

iii) Como os pontos singulares $\left(\pm \frac{1}{\sqrt{2c}}, 0, \pm \frac{c}{\sqrt{2c}}\right)$ são pontos de sela do sistema (3.20) quando $c > 0$, então então $\lim_{s \rightarrow -\infty} \tau(s) = 0$ quando $\psi(0) \in W^i(\pm p)$. O que conclui a prova do item.

iv) De maneira análoga ao item *i*), seja $\eta(s)$ limitada no intervalo (\bar{s}, ω_+) e $\psi(0) \in \bar{S} \setminus W^i(\pm p)$. Já sabemos que $\lim_{s \rightarrow \omega_+} |\alpha(s)| = +\infty$, então segue do item *ii*) do Lema 3.2.21 que, $\omega_+ = +\infty$ e $\lim_{s \rightarrow +\infty} c + a\tau(s) = \lim_{s \rightarrow +\infty} \eta(s) = 0$.

v) Segue usando o Lema 3.2.48 e a equação $2\alpha(s)\eta(s) + \tau^2(s) = 1$.

vi) Veja que, pelo Lema 3.2.47, os pontos singulares $\left(\pm \frac{1}{\sqrt{2c}}, 0, \pm \frac{c}{\sqrt{2c}}\right)$ são pontos de sela do sistema (3.20) quando $c > 0$. Assim, se $\psi(0) \in W^e(\pm p)$, então $\lim_{s \rightarrow -\infty} \tau(s) = 0$.

Portanto, $\lim_{s \rightarrow +\infty} [c + a\tau(s)] = c$. ■

Corolário 3.2.50 *Seja $\psi(s) = (\alpha(s), \tau(s), \eta(s))$ uma solução não trivial do sistema (3.20) definida no intervalo maximal $I = (\omega_-, \omega_+)$, para constantes $a > 0$, $c > 0$ e condição inicial $\psi(0) \in \bar{S}$, onde o conjunto \bar{S} é dado por (3.17). Se a curva $X : I \rightarrow Q_-^2$, $s \in I$ é a solução autossimilar do fluxo FC de curvatura $k(s)$, que corresponde a solução $\psi(s)$, então em cada fim de X ou $k(s)$ é ilimitada, ou $k(s)$ converge a zero, ou $k(s)$ converge a c .*

Demonstração:

Como $k(s) = c + a\tau(s)$, onde $a > 0$, $c > 0$ então segue do Lema 3.2.49 que, ou $k(s)$ é ilimitada, ou $k(s)$ converge a zero, ou $k(s)$ converge a c em cada fim de X . ■

Após esta série de lemas sobre as soluções autossimilares quando $c > 0$, temos o seguinte teorema.

Teorema 3.2.51 *Para cada vetor $v \in \mathbb{R}_1^3 \setminus \{0\}$ e $c > 0$ existe uma família a dois parâmetros de soluções autossimilares do fluxo de curvatura no cone de luz definidas em um intervalo maximal $I = (\omega_-, \omega_+)$, $X : I \rightarrow Q_-^2$ tal que $k(s) = c + \langle T(s), v \rangle$, onde $k(s)$ é a curvatura de X e $T(s)$ é vetor unitário tangente a X para cada $s \in I$. Além disso,*

i) se $\langle v, v \rangle < 0$, então $\lim_{s \rightarrow \omega_-} k(s) = +\infty$, $\omega_+ = +\infty$ e $\lim_{s \rightarrow +\infty} k(s) = 0$. Além disso, X assintota uma reta de Q^2 quando s tende a ω_- ;

ii) se $\langle v, v \rangle \geq 0$, então em cada fim de X ou $k(s)$ é ilimitada, ou $k(s)$ converge a zero, ou $k(s)$ converge a c .

Demonstração: Para demonstrar o teorema vamos separar nos três tipos de vetores. Sem perda de generalidade podemos assumir que $v = ae$, onde $a > 0$ e

$$e = \begin{cases} (-1, 0, 0) & \text{se } v \text{ é do tipo tempo,} \\ (-1, 1, 0) & \text{se } v \text{ é do tipo luz,} \\ (0, 0, 1) & \text{se } v \text{ é do tipo espaço.} \end{cases}$$

Seja $\psi(s) = (\alpha(s), \tau(s), \eta(s))$ uma solução do sistema de equações diferenciais ordinárias (3.20) definida no intervalo maximal I , com $a > 0$, $c > 0$ e condição inicial $\psi(0) \in \mathbb{R}^3$ tal que

$$2\alpha(0)\eta(0) + \tau^2(0) = \begin{cases} -1 & \text{se } v \text{ é do tipo tempo,} \\ 0 & \text{se } v \text{ é do tipo luz,} \\ 1 & \text{se } v \text{ é do tipo espaço.} \end{cases}$$

Assim, as condições iniciais do sistema (3.20) que dependem de duas constantes, determinam o sóliton em cada caso. Portanto, para cada vetor fixado $v \in \mathbb{R}_1^3 \setminus \{0\}$ e $c > 0$ existe uma família a dois parâmetros de soluções autossimilares do fluxo FC.

O item *i)* segue do Corolário 3.2.44.

O item *ii)* segue dos Corolários 3.2.46 e 3.2.50. ■

Segue dos Teoremas 3.2.29, 3.2.40 e 3.2.51 que, mesmo o cone de luz sendo uma superfície degenerada, as soluções autossimilares do fluxo de curvatura sempre se comportam como cônicas ou retas de Q^2 nos fins.

Note que, se uma curva X em Q^2 de curvatura $k(s) \neq 0$ para todo $s \in I$ é uma solução autossimilar do fluxo FC em Q^2 , então pelo Teorema 3.1.9, a curva associada a X é uma solução autossimilar do fluxo FCI em Q^2 . Logo, usando os Teoremas 3.2.29, 3.2.40 e 3.2.51 temos que, dado $v \in \mathbb{R}_1^3 \setminus \{0\}$ e $c \in \mathbb{R}$ existe uma família a 2-parâmetros de soluções autossimilares do fluxo FCI em Q^2 . Tais curvas podem ter mais de uma

componente conexa, que podem ser geradas pelos eventuais pontos isolados onde a curvatura de X se anula.

3.3 Soluções Autossimilares dos Fluxos FC e FCI Visualizados

Nesta seção, apresentamos a visualização de alguns exemplos de soluções autossimilares dos fluxos FC e FCI no cone de luz. Para isso, usamos a seguinte parametrização

$$\chi(\rho, \varphi) = (\rho, \rho \cos(\varphi), \rho \sin(\varphi)), \quad \rho < 0$$

do Q_-^2 . Se a curva $X(s) = \chi(\rho(s), \varphi(s))$ é parametrizada pelo comprimento de arco, então $[\rho(s)\varphi'(s)]^2 = 1$. Tomando $\rho(s)\varphi'(s) = 1$, obtemos que

$$T(s) = (\rho'(s), \rho'(s)\cos(\varphi) - \sin(\varphi), \rho'(s)\sin(\varphi) + \cos(\varphi)).$$

As funções $\rho(s)$, $\varphi(s)$, $k(s)$ satisfazem o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} \rho''(s) = \rho(s)k(s) + \frac{1 + [\rho'(s)]^2}{2\rho(s)}, \\ \varphi'(s)\rho(s) = 1, \end{cases} \quad (3.26)$$

onde $k(s)$ é a curvatura de X . A primeira equação é obtida através do cálculo da curvatura de X e a segunda equação é consequência da curva ser parametrizada pelo comprimento de arco. Quando $\varphi'(s)\rho(s) = 1$, a curva associada a $X(s)$ pode ser escrita por

$$Y(s) = \left(-\frac{1 + [\rho'(s)]^2}{2\rho(s)}, \frac{2\rho'(s)\sin(\varphi(s)) + \{1 - [\rho'(s)]^2\}\cos(\varphi(s))}{2\rho(s)}, \frac{-2\rho'(s)\cos(\varphi(s)) + \{1 - [\rho'(s)]^2\}\sin(\varphi(s))}{2\rho(s)} \right).$$

Sabemos pelo Teorema 3.1.9 que, se uma curva X de Q^2 é uma solução autossimilar do fluxo FC cuja $k(s) \neq 0$, então a curva associada a X é solução autossimilar para o FCI. Relembramos também que, pelo Teorema 3.1.10, se uma curva X em Q^2 é solução autossimilar do fluxo FC, então a curvatura de X é dada por $k(s) = c + a\langle T(s), v \rangle$,

onde c é uma constante e $v \in \mathbb{R}_1^3 \setminus \{0\}$. Observe que, pelo Lema 3.2.15 a função curvatura $(c + \tau(s), c \in \mathbb{R})$ tem no máximo dois zeros. Logo, pelo Teorema 3.1.9 há no máximo três componentes conexas da solução autossimilar do fluxo FCI associadas à solução autossimilar do fluxo FC X , ou seja, se $s_1, s_2 \in I$ são zeros de $k(s)$, escrevemos $I = (\omega_-, s_1] \cup (s_1, s_2) \cup [s_2, \omega_+)$, então existe uma solução autossimilar do FCI em cada intervalo (ω_-, s_1) , (s_1, s_2) e (s_2, ω_+) .

Assim como fizemos no estudo qualitativo, podemos considerar, a menos de isometria, $v = a(-1, 0, 0)$ quando v é do tipo tempo, $v = a(-1, 1, 0)$ quando v é do tipo luz, $v = a(0, 0, 1)$ quando v é do tipo espaço e $a > 0$. Dessa forma, usamos o sistema (3.26) e o *software* Maple para construir gráficos de exemplos de soluções autossimilares dos fluxos FC e FCI em Q^2 . Mas, para comentar sobre o comportamento assintótico de uma solução autossimilar usamos os lemas obtidos através do sistema (3.20). Apenas para o caso $c = 0$ e vetor fixado do tipo luz, obtemos soluções autossimilares não triviais e explícitas do fluxo FC e do fluxo FCI (ver Lema 3.2.28). Nos outros casos, todos os gráficos a seguir foram construídos a partir de soluções numéricas do sistema (3.26).

Na Figura 3.4 estamos visualizando um sóliton X do fluxo FC no intervalo $(-2, 110)$, de curvatura $k(s) = \langle T(s), (-1, 0, 0) \rangle$ e $a = 1$. Segue do Lema 3.2.24 que $\omega_+ = +\infty$ e do Corolário 3.2.25 que X espirala para círculos cada vez maiores quando s tende a $+\infty$. Além disso, X assintota uma reta de Q_-^2 no outro fim.

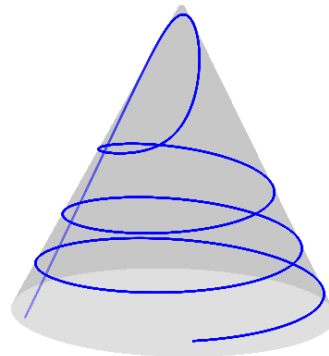


Figura 3.4: Sóliton do fluxo FC em Q_-^2 com $c = 0$, $a = 1$ e vetor fixado $(-1, 0, 0)$.

Na Figura 3.5 apresentamos o gráfico da função curvatura do sóliton visualizado na Figura 3.4 no intervalo $(-2, 20)$. Vale ressaltar que, quando $c = 0$ e o vetor fixado é do

tipo tempo, mostramos no Lema 3.2.22 que o zero de $k(s)$ sempre existe e é único.

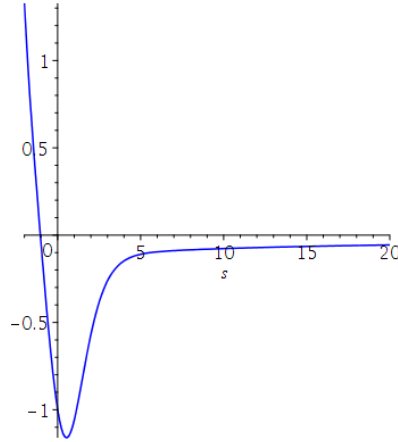


Figura 3.5: Curvatura de um sóliton do fluxo FC em Q_-^2 com $c = 0$, $a = 1$ e vetor fixado $(-1, 0, 0)$.

Na Figura 3.6 visualizamos os gráficos dos dois sólitons do fluxo FCI associados ao sóliton apresentado na Figura 3.4. Para o gráfico da esquerda (resp. direita) na Figura 3.6 usamos o intervalo $(-2.4, -1.2)$ (resp. $(-1, 50)$).

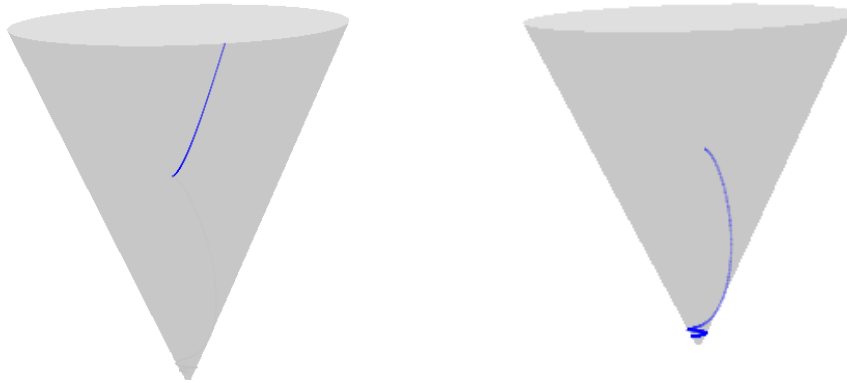


Figura 3.6: Sóliton do FCI em Q_+^2 com $c = 0$, $a = 1$ e vetor fixado $(-1, 0, 0)$.

Quando $c = 0$ e o vetor fixado é do tipo luz, os sólitons dos fluxos FC e FCI são dados pela Proposição 3.2.28 (este é o único caso onde não é usado as soluções numéricas do sistema (3.26)). Tomando $a = 1$, $\alpha(0) = -\frac{2}{9}$, $\tau(0) = \frac{2}{3}$ e $\eta(0) = 1$, obtemos que a constante D da Proposição 3.2.28 é igual a zero e

$$\eta(s) = -s + 1, \quad \tau(s) = \frac{2\eta(s)}{3}, \quad \alpha(s) = -\frac{2\eta^3(s)}{9}, \quad \forall s < 1.$$

Assim, podemos escrever o sóliton para o FC $\tilde{Y}(u)$ e o sóliton para o FCI $\tilde{X}(s)$ da

seguinte forma

$$\tilde{Y}(u) = \left(\frac{745}{32}(-u+1) - \frac{1134}{32(-u+1)} + \frac{441}{32(-u+1)^3}, \right. \\ \left. -\frac{713}{32}(-u+1) + \frac{1134}{32(-s+1)} - \frac{441}{32(-u+1)^2}, \frac{-27(-u+1)^2+21}{4(-u+1)} \right), \quad u < 1$$

e

$$\tilde{X}(s) = \left(-\frac{745}{144}(-s+1)^3 + \frac{27}{8}(-s+1) - \frac{9}{16(-s+1)}, \frac{713}{144}(-s+1)^3 + \right. \\ \left. -\frac{27}{8}(-s+1) + \frac{9}{16(-s+1)}, \frac{3(-s+1)^3 - (-s+1)}{2} \right), \quad s < 1.$$

Os gráficos das curvas $\tilde{Y}(u)$ e $\tilde{X}(s)$ estão nas Figuras 3.7 e 3.8.

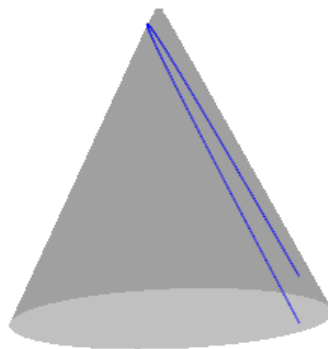


Figura 3.7: Sóliton do fluxo FCI em Q_-^2 com $c = 0$, $a = 1$ e vetor fixado $(-1, 1, 0)$.

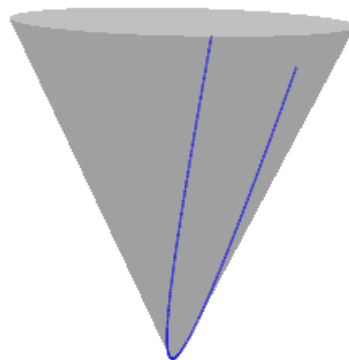


Figura 3.8: Sóliton do fluxo FC em Q_+^2 com $c = 0$, $a = 1$ e vetor fixado $(-1, 1, 0)$.

Na Figura 3.9 estamos visualizando um sóliton X do fluxo FC no intervalo

$(-3.2, 3.2)$ de curvatura $k(s) = \langle T(s), (0, 0, 1) \rangle$ e $a = 1$. Na Figura 3.10 apresentamos o gráfico da função curvatura em $(-3.2, 3.2)$ do sóliton apresentado na Figura 3.9 e na Figura 3.11 visualizamos os sólitons do fluxo FCI associados ao sóliton do fluxo FC apresentado na Figura 3.9. Listando os gráficos da Figura 3.11 da esquerda para a direita, para construir estes gráficos usamos respectivamente os intervalos $(1.3, 2.5)$, $(-1.2, 1.2)$ e $(-2.8, -1.4)$.

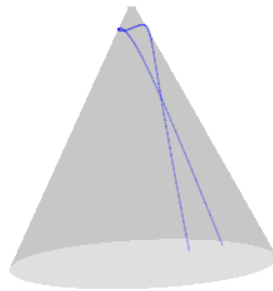


Figura 3.9: Sóliton do fluxo FC em Q_-^2 com $c = 0$, $a = 1$ e vetor fixado $(0, 0, 1)$.

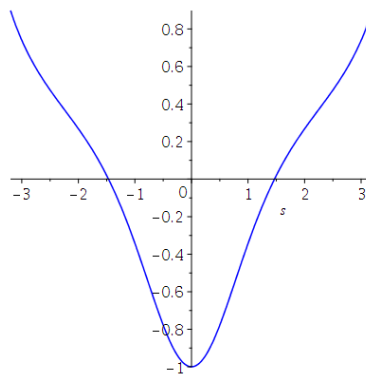


Figura 3.10: Curvatura de um sóliton do fluxo FC em Q_-^2 com $c = 0$, $a = 1$ e vetor fixado $(0, 0, 1)$.

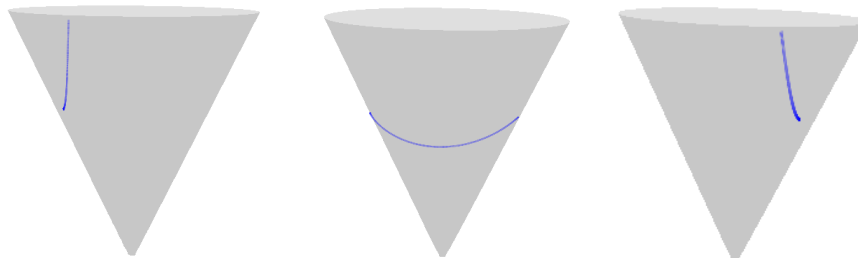


Figura 3.11: Sóliton do fluxo FCI em Q_+^2 com $c = 0$, $a = 1$ e vetor fixado $(0, 0, 1)$.

Se $c < 0$ e o vetor fixado é $v = (-1, 0, 0)$, então o item $i)$ do Lema 3.2.32 mostra

que o ponto singular $p = \left(-\frac{1}{\sqrt{-2c}}, 0, -\frac{c}{\sqrt{-2c}}\right)$ de Φ é um atrator global e do Lema 3.2.31 temos que os autovalores associados ao ponto singular são reais se $4|c| \leq a$ e complexos se $4|c| > a$. A solução singular corresponde a circunferência de raio $-\frac{1}{2c}$ em Q_-^2 que é solução para o FC. A curva associada a esta circunferência é a circunferência de raio $-\frac{c}{2}$ em Q_+^2 que é solução para o FCI para os mesmos v e c fixados. Sabemos do 3.2.30 e do Corolário 3.2.33 que $\omega_+ = +\infty$ e $\lim_{s \rightarrow +\infty} k(s) = c$. Dessa forma, vamos apresentar gráficos para $4|c| > a$ e $4|c| \leq a$.

Na Figura 3.12 estamos visualizando uma solução autossimilar X do fluxo FC no intervalo $(-3.4, 60)$ de curvatura $k(s) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{6}\langle T(s), (-1, 0, 0) \rangle$, isto é, $c = -\frac{1}{4}$ e $a = \frac{1}{6}$. Na Figura 3.13 apresentamos o gráfico da função curvatura em $(-2.8, 40)$ da solução autossimilar apresentada na Figura 3.12.

Na Figura 3.14 visualizamos uma solução autossimilar do FCI no intervalo do tipo $(0.8, 40)$ associada à solução autossimilar do FC apresentada na Figura 3.12.

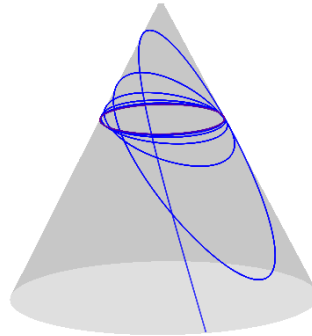


Figura 3.12: Solução autossimilar do fluxo FC em Q_-^2 com $c = -\frac{1}{4}$, $a = \frac{1}{6}$ e vetor fixado $(-1, 0, 0)$.

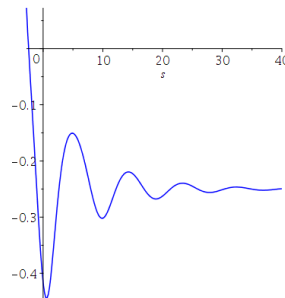


Figura 3.13: Curvatura de uma solução autossimilar do fluxo FC em Q_-^2 com $c = -\frac{1}{4}$, $a = \frac{1}{6}$ e vetor fixado $(-1, 0, 0)$.

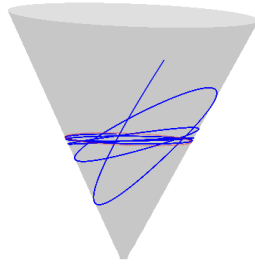


Figura 3.14: Solução autossimilar do fluxo FCI em Q_+^2 com $c = -\frac{1}{4}$, $a = \frac{1}{6}$ e vetor fixado $(-1, 0, 0)$.

Na Figura 3.15 estamos visualizando uma solução autossimilar X do fluxo FC no intervalo $(-1.08, 40)$, de curvatura $k(s) = -\frac{1}{4} + 5\langle T(s), (-1, 0, 0) \rangle$, isto é, $c = -\frac{1}{4}$ e $a = 5$. Na Figura 3.16 apresentamos o gráfico da função curvatura no intervalo $(-0.9, 7)$ da solução autossimilar apresentada na Figura 3.15.

Na Figura 3.17 visualizamos uma solução autossimilar do FCI no intervalo $(0.3, 30)$ associada à solução autossimilar do FC apresentado na Figura 3.15.

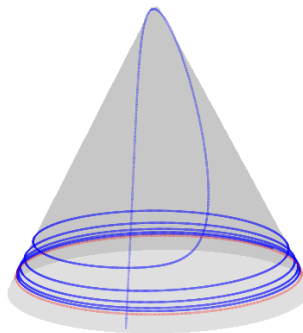


Figura 3.15: Solução autossimilar do fluxo FC em Q_-^2 com $c = -\frac{1}{4}$, $a = 5$ e vetor fixado $(-1, 0, 0)$.

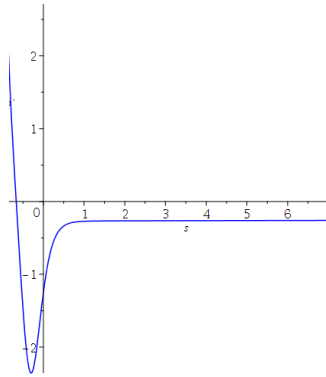


Figura 3.16: Curvatura de uma solução autossimilar do fluxo FC em Q_-^2 com $c = -\frac{1}{4}$, $a = 5$ e vetor fixado $(-1, 0, 0)$.

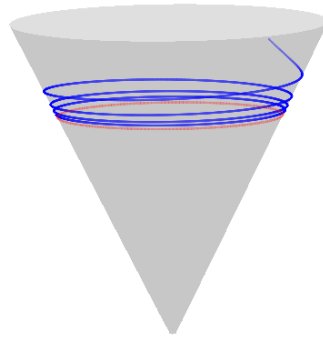


Figura 3.17: Solução autossimilar do fluxo FCI em Q_+^2 com $c = -\frac{1}{4}$, $a = 5$ e vetor fixado $(-1, 0, 0)$.

Quando fixamos o vetor $(-1, 1, 0)$ e $c < 0$, sabemos dos Lemas 3.2.30, 3.2.32 e do Corolário 3.2.33 que $\omega_+ = +\infty$,

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \alpha(s) = \lim_{s \rightarrow +\infty} \tau(s) = \lim_{s \rightarrow +\infty} \eta(s) = 0$$

e $\lim_{s \rightarrow +\infty} k(s) = c$. Segue da Observação 1.3.6 que, neste caso, a solução autossimilar X do fluxo FC "espirala" para elipses cada vez mais próximas do plano do tipo luz que contém a origem e o vetor $(-1, 1, 0)$. Na Figura 3.18 estamos visualizando uma solução autossimilar X do fluxo FC no intervalo $(-1.9, 50)$ de curvatura $k(s) = -\frac{1}{4} + 5\langle T(s), (-1, 1, 0) \rangle$, isto é, $c = -\frac{1}{4}$ e $a = 5$. Na Figura 3.19 apresentamos o gráfico da função curvatura no intervalo $(-2, 50)$ da solução autossimilar apresentada na Figura 3.18.

Na Figura 3.20 visualizamos uma solução autossimilar do FCI no intervalo

$(-0.6, 40)$ associada à solução autossimilar do fluxo FC apresentado na Figura 3.18.

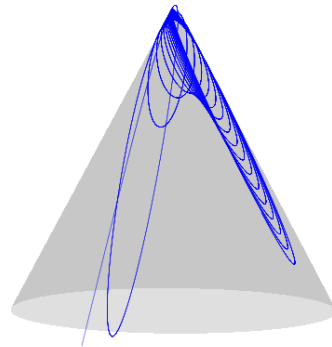


Figura 3.18: Solução autossimilar do fluxo FC em Q_-^2 com $c = -2$, $a = \frac{1}{2}$ e vetor fixado $(-1, 1, 0)$.

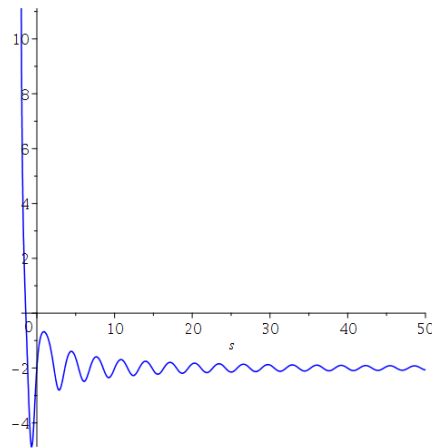


Figura 3.19: Curvatura de uma solução autossimilar do fluxo FC em Q_-^2 com $c = -2$, $a = \frac{1}{2}$ e vetor fixado $(-1, 1, 0)$.

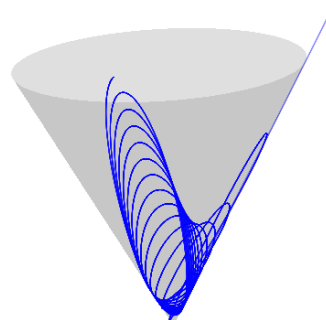


Figura 3.20: Solução autossimilar do fluxo FCI em Q_+^2 com $c = -2$, $a = \frac{1}{2}$ e vetor fixado $(-1, 1, 0)$.

Na Figura 3.21 estamos visualizando uma solução autossimilar X do fluxo FC no intervalo $(-2.8, 2.8)$ de curvatura $k(s) = -1 + \langle T(s), (0, 0, 1) \rangle$, isto é, $c = -1$ e $a = 1$. Na Figura 3.22 apresentamos o gráfico da função curvatura em $(-3.2, 3.2)$ da solução autossimilar apresentada na Figura 3.21.

Na Figura 3.23 visualizamos soluções autossimilares do fluxo FCI que estão associadas à solução autossimilar do fluxo FC apresentada na Figura 3.21. Listando os gráficos da Figura 3.23 da esquerda para a direita, para construir estes gráficos usamos respectivamente os intervalos $(-2.8, -1)$, $(-0.5, 0.5)$ e $(1, 2.8)$.

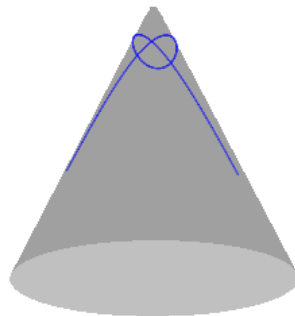


Figura 3.21: Solução autossimilar do fluxo FC em Q_-^2 com $c = -1$, $a = 1$ e vetor fixado $(0, 0, 1)$.

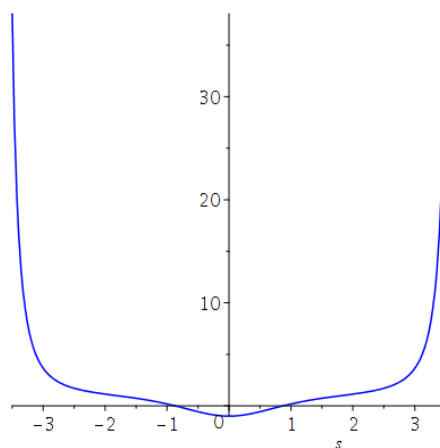


Figura 3.22: Curvatura de uma solução autossimilar do fluxo FC em Q_-^2 com $c = -1$, $a = 1$ e vetor fixado $(0, 0, 1)$.

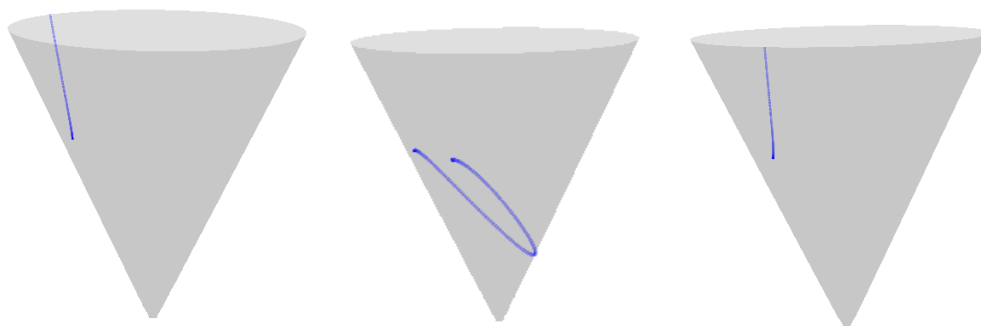


Figura 3.23: Soluções autossimilares do fluxo FCI em Q_+^2 com $c = -1$, $a = 1$ e vetor fixado $(0, 0, 1)$.

Quando $c > 0$ e $v = (-1, 0, 0)$, segue do Lema 3.2.43 que $\omega_+ = +\infty$ e $\lim_{s \rightarrow +\infty} k(s) = 0$. Na Figura 3.24 estamos visualizando uma solução autossimilar X do fluxo FC no intervalo $(-1.18, 2.3)$ de curvatura $k(s) = 4 + \langle T(s), (-1, 0, 0) \rangle$, isto é, $c = 4$ e $a = 1$. Na Figura 3.25 apresentamos o gráfico da função curvatura em $(0, 10)$ da solução autossimilar apresentada na Figura 3.24 e na Figura 3.26 visualizamos as soluções autossimilares do fluxo FCI associados à solução autossimilar do fluxo FC apresentada na Figura 3.24. Listando os gráficos da Figura 3.26 da esquerda para a direita, para construir estes gráficos usamos respectivamente os intervalos $(-0.76, 0.6)$, e $(0.68, 50)$.

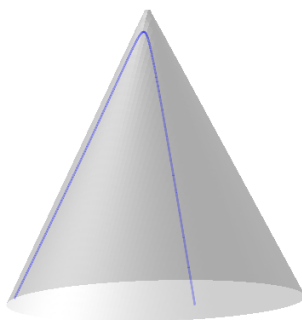


Figura 3.24: Solução autossimilar do fluxo FC em Q_-^2 com $c = 4$, $a = 1$ e vetor fixado $(-1, 0, 0)$.

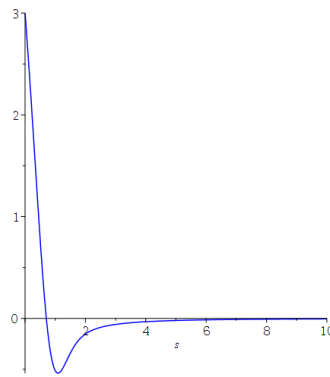


Figura 3.25: Curvatura de uma solução autossimilar do fluxo FC em Q_-^2 com $c = 4$, $a = 1$ e vetor fixado $(-1, 0, 0)$.

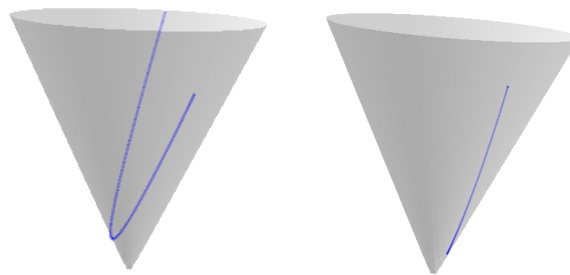


Figura 3.26: Soluções autossimilares do fluxo FCI em Q_+^2 com $c = 4$, $a = 1$ e vetor fixado $(-1, 0, 0)$.

Na Figura 3.27 estamos visualizando uma solução autossimilar X do fluxo FC no intervalo $(-0.75, 3.6)$ de curvatura $k(s) = 4 + \langle T(s), (-1, 1, 0) \rangle$ e $a = 1$. Na Figura 3.28 apresentamos o gráfico da função curvatura em $(0, 10)$ da solução autossimilar apresentada na Figura 3.27 e na Figura 3.29 visualizamos as soluções autossimilares do fluxo FCI associados à solução autossimilar do fluxo FC apresentada na Figura 3.27. Listando os gráficos da Figura 3.29 da esquerda para a direita, para construir estes gráficos usamos respectivamente os intervalos $(-0.35, 0.7)$, e $(0.85, 10)$.

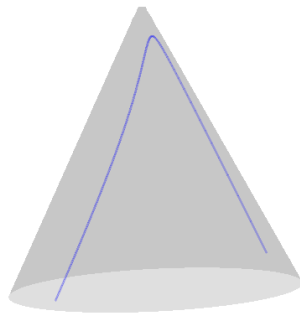


Figura 3.27: Solução autossimilar do fluxo FC em Q_-^2 com $c = 4$, $a = 1$ e vetor fixado $(-1, 1, 0)$.

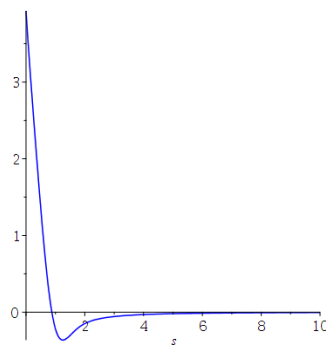


Figura 3.28: Curvatura de uma solução autossimilar do fluxo FC em Q_-^2 com $c = 4$, $a = 1$ e vetor fixado $(-1, 1, 0)$.

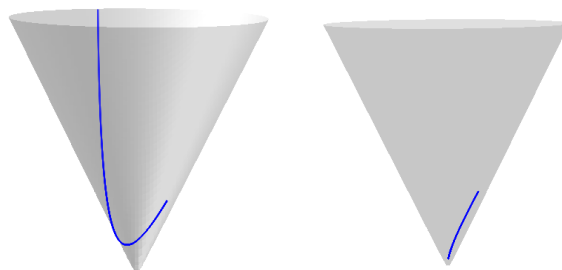


Figura 3.29: Soluções autossimilares do fluxo FCI em Q_+^2 com $c = 4$, $a = 1$ e vetor fixado $(-1, 1, 0)$.

Na Figura 3.30 estamos visualizando uma solução autossimilar X do fluxo FC no intervalo $(-3.2, 1.9)$ de curvatura $k(s) = 3 + \langle T(s), (0, 0, 1) \rangle$, isto é, $c = 3$ e $a = 1$. Na Figura 3.31 apresentamos o gráfico da função curvatura em $(-4, 5)$ da solução autossimilar apresentada na Figura 3.30. Visualizamos na Figura 3.32 as soluções autossimilares do fluxo FCI associados à solução autossimilar do fluxo FC apresentada na Figura 3.30. Listando os gráficos da Figura 3.32 da esquerda para a direita, para construir estes gráficos usamos respectivamente os intervalos $(-4, -1.6)$, $(-1.4, 0.7)$ e $(1, 2)$.

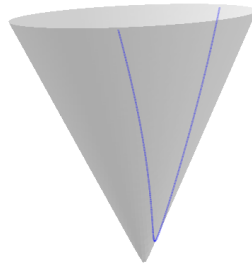


Figura 3.30: Solução autossimilar do fluxo FC em Q_-^2 com $c = 3$, $a = 1$ e vetor fixado $(0, 0, 1)$.

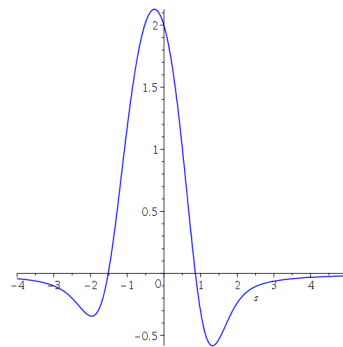


Figura 3.31: Curvatura de uma solução do fluxo FC em Q_-^2 com $c = 3$, $a = 1$ e vetor fixado $(0, 0, 1)$.

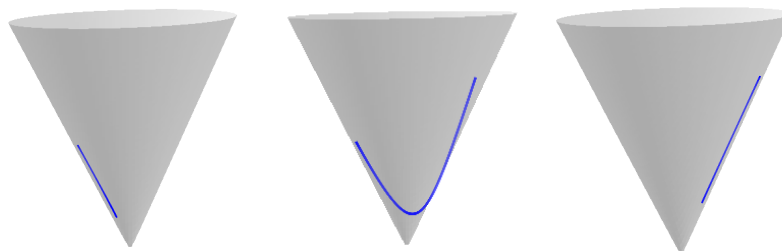


Figura 3.32: Soluções autossimilares do fluxo FCI em Q_+^2 com $c = 3$, $a = 1$ e vetor fixado $(0, 0, 1)$.

Bibliografia

- [1] Abresch, U.; Langer, J. *The normalized curve shortening flow and homothetic solutions*, Journal Differential Geometry 23, n. 2, p. 175–196 (1986).
- [2] Andrews, B. *Classification of limiting shapes for isotropic curve flows*, Journal of Amer. Math. Soc., v. 16, 443-459 (2002).
- [3] Angenent, S. B. *On the formation of singularities in the curve shortening flow*, Journal of Differential Geometry, v. 33, 601-633 (1991).
- [4] Angenent, S. B. *Curve shortening and the topology of closed geodesics on surfaces*, Annals of Mathematics, v.162, 1187-1241 (2005).
- [5] Couto, I. T.; Lyberopoulos, A. *Introdução a geometria Lorentziana: curvas e superfícies*, 1 ed., Coleção Textos Universitários, SBM, (2018).
- [6] Dos Reis, H. F. S.; Tenenblat, K. *Soliton solutions to the curve shortening flow on the sphere*, Proc. Amer. Math. Soc., v. 147, 4955-4967 (2019).
- [7] Drugan, G.; Lee, H.; Wheeler, G. *Solitons for the inverse mean curvature flow* Pacific Journal of Mathematics, v. 284, no. 2, 309–326 (2016).
- [8] Epstein, C.L., Gage, M. *The curve shortening flow*. In: Chorin A.J., Majda A.J. (eds) Wave Motion: Theory, Modelling, and Computation. Mathematical Sciences Research Institute Publications, vol 7. Springer, (1987).
- [9] Epstein, C.L.; Weinstein, M.I. *A stable manifold theorem for the curve shortening equation*, Comm. Pure Appl. Math., v. 40, 119-139 (1987).
- [10] Gage, M. E., *An isoperimetric inequality with applications to curve shortening*, Duke Mathematical Journal, v. 50, n.4, p. 1225–1229 (1983).
- [11] Gage, M. E., *Curve shortening makes convex curves circular*, Inventiones mathematicae, v. 76, n.2, p. 357–364 (1984).

-
- [12] Gage, M. E., *Curve shortening on surfaces*, Annales Scientifiques de l'é.n.s., v.23, no 2, p. 229-256 (1990).
- [13] Gage, M. E.; Hamilton, R. S., *The heat equation shrinking convex plane curves*, Journal Differential Geometry, v.23, p. 69-96 (1986)
- [14] Giga, Y., *Surface evolutions equations. A level set approach*, Monographs in Mathematics, vol. 99, Birkhauser, Basel, 2006.
- [15] Grayson, M. A. *The heat equation shrinks embedded plane curves to round a points*, Journal Differential Geometry, v.26, p. 285-314 (1987)
- [16] Grayson, M. A. *Shortening embedded curves*, Annals of Mathematics, v. 129, n.1, p. 71–111 (1989).
- [17] Halldorsson, H. P. *Self-similar solutions to the curve shortening flow*, Transactions of the American Mathematical Society, v. 364, n. 10, p. 5285–5309 (2012).
- [18] Halldorsson, H. P. *Self-similar solutions to the mean curvature flow in the Minkowski plane $\mathbb{R}^{1,1}$* , J. Reine Angew. Math., v. 704, 209–243 (2015).
- [19] Lima, E. L. *Curso de Análise vol. 1*, 13 ed., Projeto Euclides, IMPA (2011).
- [20] Liu, H. *Curves in the lightlike cone*. Contributions to Algebra and Geometry, v. 45, n. 1, p. 291-303 (2004).
- [21] Lopez, R. *Differential geometry of curves and surfaces in Lorentz-Minkowski space*. International Electronic Journal of Geometry, v. 7, n. 1, p. 44-107 (2014).
- [22] Kuhnel, W. *Differential geometry. Curves-surfaces-manifolds*, Translated from the 1999 German original by Bruce Hunt. Student Mathematical Library, 16. American Mathematical Society, Providence, RI, (2002).
- [23] Ma, L.; Chen, D. *Curve shortening in a Riemannian manifold*, Annali di Matematica v. 186, p. 663-684 (2007)
- [24] O'Neill, B. *Semi-riemannian geometry with applications to relativity*. Academic Press 103, (1983).
- [25] Palis, J.; Melo, W. *geometric theory of dynamical systems an introduction*, Translated by A. K. Manning, Springer-Verlag New York (1982).
- [26] Slotine, J. R.; Li, W.. *Applied nonlinear control*, Prentice Hall (1991).

-
- [27] Sotomayor, J. *Equações diferenciais ordinárias*, Editora Livraria da Física (2011).
- [28] Urbas, J. *An expansion of convex hypersurfaces*, Journal of Differential Geometry, v.33, p. 91-125 (1991).
- [29] Urbas, J. *Convex curves moving homothetically by neagtive powers of their curvature*, Asian J. Math., v.3, p. 635-658 (1999).
- [30] Zhou, H. *Curve Shortening Flows in warped product manifolds*, Transactions of the American Mathematical Society, Proc. Amer. Math. Soc., v. 145, 4505-4516 (2017).