Universidade de Brasília

Dinâmica de equações de reação-difusão com condições de contorno não local

Talita Carneiro Matias

Orientador: Dr. Willian Cintra da Silva

Departamento de Matemática
Universidade de Brasília

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de
Mestra em Matemática

Brasília, 10 Agosto de 2023

Agradecimentos

Gostaria de agradecer primeiramente a Deus, que me concedeu discernimento, paciência e persistência para enfrentar os desafios e superar os obstáculos durante a realização desta dissertação. Obrigada, pai, sem Ti isso não seria possível.

À minha mãe, Rosileide, e aos meus irmãos, Iales, Tavila, Cláuvia e Cláuvio, por sempre acreditarem em mim.

Ao meu namorado, Tharles, por ser minha primeira fonte de incentivo a embarcar nesta jornada do mestrado. Seu apoio e carinho foram inestimáveis.

Aos meus amigos de graduação: Raylane, Keila, Sidney, Layane e Renã, com quem pude compartilhar 4 anos inesquecíveis. Em especial, à Henrylla e Jonatas, que além da graduação, também compartilhamos esses dois anos de mestrado. O apoio e a presença de vocês durante esse tempo foram de extrema importância para mim.

Aos amigos que fiz no mestrado e compartilhei ótimos momentos: Maria, Ismael, Gabriel, Gabriela, Rodolfo, Daniel, Mateus, Marcio, Jadde, Millena, Saulo, Deyfila, Joyce, Gabrielzinho, Débora, Caio, Gustavo, Guilherme, Manu e alguns outros, que de forma direta e/ou indireta, contribuíram para este trabalho.

À banca avaliadora, composta pelos professores Mirelson Martins Freitas, Marcelo Fernandes Furtado e Ma To Fu, por aceitarem avaliar este trabalho e pelas valiosas sugestões que contribuíram para aprimorá-lo.

Ao meu orientador, Willian Cintra da Silva, por toda sua dedicação, paciência e orientação acadêmica ao longo deste trabalho. Obrigada professor, o senhor foi, sem dúvidas, um excelente orientador. Sou muito grata.

A todos os professores que contribuíram para a minha formação acadêmica, especialmente aos professores da UFAC, José Ivan, Sérgio Brazil, Edcarlos Miranda e Clebes Brandão, que me apoiaram e recomendaram para este programa de mestrado.

Ao CNPq e à FAP/DF pelo financiamento durante a elaboração desta dissertação.

Resumo

O objetivo deste trabalho é investigar a existência, unicidade e dinâmica da seguinte equação não-linear de reação-difusão com condição de contorno não local

$$\begin{cases} u_t - Lu = f(x,u) & t > 0,\ x \in \Omega, \\ \alpha_0 \dfrac{\partial u}{\partial \eta} + u = \displaystyle\int_\Omega K(x,y)u(t,y)dy & t > 0,\ x \in \partial\Omega, \\ u(0,x) = u_0(x) & x \in \Omega, \end{cases}$$

onde L é um operador uniformemente elíptico de segunda ordem, $\alpha_0 \geq 0$, $u_0 : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$, $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $K : \partial\Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$ são funções regulares satisfazendo hipóteses adequadas.

A equação acima é modelo para aplicações em diversas áreas, como dinâmica de populações e termoelasticidade quase-estáticas. Para obter os resultados, utilizamos o método de sub e supersolução para equações parabólicas e elípticas.

Palavras-chaves: Sub e Supersolução, Dinâmica, Equações Elípticas, Equações Parabólicas.

Abstract

The main goal of this work is to investigate the existence, uniqueness, and dynamics of the following nonlinear reaction-diffusion equation with nonlocal boundary conditions

$$\begin{cases} u_t - Lu = f(x,u) & t > 0,\ x \in \Omega, \\ \alpha_0 \dfrac{\partial u}{\partial \eta} + u = \displaystyle\int_\Omega K(x,y)u(t,y)dy & t > 0,\ x \in \partial\Omega, \\ u(0,x) = u_0(x) & x \in \Omega, \end{cases}$$

where L is a uniformly elliptic second-order operator, $\alpha_0 \geq 0$, $u_0 : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$, $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ and $K : \partial\Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$ are regular functions satisfying appropriate hypotheses.

The above equation serves as a model for numerous applications in various areas, such as population dynamics and quasi-static thermoelasticity. To obtain the results, we employ the method of sub and supersolutions for parabolic and elliptic equations.

keywords: Sub and Supersolution, Dynamics, Elliptic Equations, Parabolic Equations.

Conteúdo

Lista de Figuras

Introdução

Nos últimos anos, o interesse pelos modelos de reação-difusão, que incorporam funções de reação não locais tanto em equações diferenciais quanto em condições de contorno, tem aumentado consideravelmente. Essas equações são amplamente exploradas em diversos campos, incluindo a termoelesticidade quasi-estática, onde a entropia é governada por uma equação parabólica com uma condição de contorno não local. Estudos realizados por Day [3, 4], Friedman [7] e Deng [5] têm contribuído para o desenvolvimento de modelos matemáticos lineares e não lineares, investigando a propriedade de decaimento da solução ao longo do tempo e obtendo resultados de comparação e propriedades de decaimento.

Paralelamente, conforme Cosner [2] mencionou em seu trabalho, a equação de reação-difusão tem sido uma ferramenta crucial na compreensão da dinâmica biológica das populações em ambientes espacialmente heterogêneos. Ela auxilia na compreensão das interações entre as populações e seus ambientes, incluindo padrões espaciais e dinâmicas populacionais. A difusão descreve o movimento dos organismos no espaço, permitindo a colonização de novas áreas e a dispersão dentro de uma região específica. A reação, por sua vez, leva em consideração como os indivíduos reagem às condições ambientais e interagem uns com os outros, considerando aspectos como competição, predação, crescimento, fatores ambientais, disponibilidade de recursos e outras interações biológicas relevantes. Essa equação encontra aplicação em diversos contextos biológicos, como estudos de migração animal, dispersão de espécies invasoras, dinâmicas de competição e coexistência entre diferentes espécies.

Além disso, a equação de reação-difusão desempenha um papel fundamental na compreensão dos mecanismos subjacentes às mudanças populacionais ao longo do tempo e do espaço. Ela fornece informações valiosas para a conservação, o manejo de recursos naturais e a previsão de surtos epidêmicos. Sua aplicação possibilita uma compreensão mais completa e quantitativa da ecologia e evolução das populações biológicas.

As equações consideradas nos trabalhos mencionados anteriormente, podem ser expressas na seguinte forma:

$$\begin{cases} u_t - Lu = f(x,u), & t > 0,\ x \in \Omega, \\ B[u] = \displaystyle\int_\Omega K(x,y)u(t,y)dy, & t > 0,\ x \in \partial\Omega, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \tag{1}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, é um domínio limitado regular, $\partial\Omega$ é a fronteira de Ω, $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função Hölder contínua na variável x e de classe C^1 na segunda variável, com $f(x,0)$ não necessariamente identicamente zero. Além disso, L é um operador uniformemente elíptico dado na forma

$$Lu \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{x_i x_j} + \sum_{j=1}^{n} b_j(x)u_{x_j}, \tag{2}$$

e $B[\cdot]$ é o operador de fronteira dado por

$$B[u] \equiv \alpha_0 \frac{\partial u}{\partial \eta} + u, \tag{3}$$

onde $\alpha_0 \geq 0$ é uma constante e $\partial u/\partial\eta$ denota a derivada na direção da normal exterior unitária η para cada ponto $x \in \partial\Omega$. Assumimos que os coeficientes de L, o kernel $K(x,y)$ e a função inicial u_0 são todas funções regulares. As hipóteses de regularidade mencionadas acima são usadas para garantir a existência de soluções clássicas, ou seja, uma função $u \in C^{1,2}(D_T) \cap C^1(\overline{D}_T)$, que verifica o problema (1), assim como uma função $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ que verifica o problema de estado estacionário correspondente, dado por

$$\begin{cases} -Lu = f(x,u) & \text{em } \Omega, \\ B[u] = \displaystyle\int_\Omega K(x,y)u(y)dy & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{4}$$

O problema (1) é reduzido ao problema considerado em [3, 4] e [7] quando $\alpha_0 = 0$ e $f(x,u) = c(x)u$ (com $c(x) < 0$), e ao problema em [5] quando $\alpha_0 = 0$ e $Lu = \nabla^2 u$. A consideração de $\alpha_0 \geq 0$ inclui a condição de contorno do tipo Dirichlet $(\alpha_0 = 0)$ e do tipo Robin $(\alpha_0 > 0)$, enquanto o caso $f(x,0) \not\equiv 0$ exclui o zero como solução de estado estacionário.

Com base nisso, o objetivo deste trabalho é estabelecer resultados de existência e comparação para o problema de evolução (1). Também busca-se obter resultados de existência e unicidade para o problema de estado estacionário (4), além de estudar a dinâmica do problema com condição de fronteira não local em relação ao problema estacionário. A convergência monótona da solução dependente do tempo e a estimativa da região de estabilidade de uma solução de estado estacionário são de particular interesse. O método de sub e supersoluções é utilizado para investigar os problemas mencionados.

Este trabalho baseia-se em [10] e está dividido em três capítulos. No primeiro capítulo, o objetivo principal é apresentar um método de sub e supersoluções para o problema parabólico (1) que garante a existência e unicidade de solução e, em seguida, aplicar esse resultado com diferentes hipóteses sobre as funções $K(x,y)$ e $f(x,u)$ para garantir a existência de solução.

A seguir, apresentamos as principais hipóteses impostas sobre as funções $K(x,y)$ e $f(x,u)$ e os principais resultados deste capítulo:

(K_0) $K(x,y) \geq 0, \int_\Omega K(x,y) \leq 1, \quad x \in \partial\Omega, y \in \Omega.$

(f_0) Existem constantes $m \leq 0$ e $M > 0$ (ou $m < 0$ e $M \geq 0$), tais que

$$f(x,m) \geq 0,\ f(x,M) \leq 0 \quad x \in \Omega.$$

(f_1) $f(x,u) \leq a(x)u + b(x)$, com $u \geq 0,\ x \in \Omega$. Além disso, $a(x)$ e $b(x)$ são quaisquer funções contínuas com $b(x) \geq 0$.

Teorema 0.1. Seja $K(x,y) \geq 0$. Suponha que exista $\hat{u}$, $\tilde{u}$ um par ordenado de sub e supersoluções do problema (1.1). Então, as sequências $\{\overline{u}^{(k)}\}$ e $\{\underline{u}^{(k)}\}$ dadas por (1.16) com $\overline{u}^{(0)} = \tilde{u}$ e $\underline{u}^{(0)} = \hat{u}$, convergem monotonicamente para uma única solução $u \equiv u(t,x)$ de (1.1). Além disso, para todo $k > 0$, temos

$$\hat{u} \leq \underline{u}^{(k)} \leq \underline{u}^{(k+1)} \leq u \leq \overline{u}^{(k+1)} \leq \overline{u}^{(k)} \leq \tilde{u} \quad \text{em } \overline{D}_T.$$

Teorema 0.2. Assuma que (K_0) e (f_0) ocorram. Então, para qualquer dado inicial u_0, satisfazendo $m \leq u_0 \leq M$, o problema (1) possui uma única solução $u(t,x)$ tal que

$$m \leq u(t,x) \leq M \qquad t > 0,\ x \in \overline{\Omega}.$$

Além disso, a solução $u(t,x)$ é não negativa se $u_0 \geq 0$ e a condição (f_0) é satisfeita com $m = 0$.

Teorema 0.3. Seja $f(x,0) \geq 0$. Assuma que as condições (K_0) e (f_1) com $b(x) \geq 0$, ocorram. Então, para qualquer dado inicial $u_0 \geq 0$, existem constantes ρ e γ tais que uma única solução global $u(t,x)$ para (1) existe e satisfaça

$$0 \leq u(t,x) \leq \rho e^{\gamma t}, \qquad t > 0,\ x \in \overline{\Omega}.$$

Além disso, $u(t,x) \to 0$ uniformemente em $\overline{\Omega}$ conforme $t \to +\infty$ quando $a(x) < 0$ e $b(x) \equiv 0$ em $\overline{\Omega}$.

O segundo capítulo é dedicado à existência de soluções maximais e minimais, assim como à unicidade de uma solução para o problema estacionário (4). Para tanto, precisaremos das seguintes hipóteses sobre as funções $K(x,y)$ e $f(x,u)$:

(K_1) $K(x,y) \geq 0, \displaystyle\int_\Omega K(x,y)dy < 1, \quad x \in \partial\Omega,\ y \in \Omega.$

(K_2) $K(x,y) > 0, \displaystyle\int_\Omega K(x,y)dy \leq 1, \int_\Omega K(x,y)dy \not\equiv 1, \quad x \in \partial\Omega,\ y \in \Omega.$

(f_2) $f_u(x,s) \leq 0, \quad m \leq s \leq M.$

Apresentamos a seguir os principais resultados deste capítulo:

Teorema 0.4. Seja $K(x,y) \geq 0$. Suponha que exista $\hat{u}_s$ e $\tilde{u}_s$, um par ordenado de sub e supersoluções de (4). Então, as sequências $\{\overline{u}_s^{(k)}\}$ e $\{\underline{u}_s^{(k)}\}$ convergem monotonicamente para as soluções $\overline{u}_s$ e $\underline{u}_s$, respectivamente, e satisfazem a seguinte relação de monotonia

$$\hat{u}_s \leq \underline{u}_s^{(k)} \leq \underline{u}_s^{(k+1)} \leq \overline{u}_s^{(k+1)} \leq \overline{u}_s^{(k)} \leq \tilde{u}_s \quad \text{em } \overline{\Omega}.$$

Além disso,

$$\underline{u}_s \leq \overline{u}_s \text{ em } \overline{\Omega},$$

e se u_s^* é qualquer outra solução em $\langle \hat{u}_s, \tilde{u}_s \rangle$, então

$$\underline{u}_s \leq u_s^* \leq \overline{u}_s \quad \text{em } \overline{\Omega}.$$

Teorema 0.5. Suponha que as condições (K_0) e (f_0) sejam satisfeitas para algumas constantes $M > 0$ e $m \leq 0$. Então, o problema (4) possui solução maximal $\overline{u}_s$ e solução minimal $\underline{u}_s$, tais que

$$m \leq \underline{u}_s(x) \leq \overline{u}_s(x) \leq M \quad x \in \overline{\Omega}.$$

Além disso, se u_s^* é qualquer solução entre m e M, então

$$\underline{u}_s(x) \leq u_s^*(x) \leq \overline{u}_s(x) \quad x \in \overline{\Omega}.$$

Teorema 0.6. Sejam $\hat{u}_s$ e $\tilde{u}_s$ um par ordenado de sub e supersoluções do problema (4). Suponha que $K(x,y)$ satisfaça (K_1) ou (K_2). Se

$$f_u(x,s) \leq 0, \quad s \in \langle \hat{u}_s, \tilde{u}_s \rangle,$$

então o problema (4) possui uma única solução u_s tal que $\hat{u}_s \leq u_s \leq \tilde{u}_s$.

Finalmente, no capítulo 3, analisamos o comportamento assintótico da solução dependente do tempo (1) em relação a uma solução do problema estacionário (4). Também consideramos o caso em que a função $K(x,y)$ pode mudar de sinal.

Apresentamos a seguir os principais resultados deste capítulo.

Teorema 0.7. Sejam $\hat{u}_s$ e $\tilde{u}_s$, um par ordenado de sub e supersoluções de (4). Sejam ainda $\overline{u}(t,x)$ e $\underline{u}(t,x)$ soluções do problema (1), com $\underline{u}(0,x) = \hat{u}_s$ e $\overline{u}(0,x) = \tilde{u}_s$, respectivamente. Suponha que a condição (K_1) ou (K_2) seja satisfeita. Então

$$\lim_{t\to\infty} \underline{u}(t,x) = \underline{u}_s(x) \quad \text{e} \quad \lim_{t\to\infty} \overline{u}(t,x) = \overline{u}_s(x),$$

onde $\underline{u}_s(x)$ e $\overline{u}_s(x)$ são soluções minimal e maximal de (4), respectivamente.

Teorema 0.8. Sejam $\hat{u}_s$ e $\tilde{u}_s$ um par ordenado de sub e supersoluções de (4). Assuma que a condição (K_1) ou (K_2) seja satisfeita. Então, para qualquer dado inicial $u_0 \in \langle \hat{u}_s, \tilde{u}_s \rangle$, a solução $u(t,x)$ de (1), converge para uma solução $u_s(x)$ de (4), com $t \to +\infty$ se, e somente se, $u_s(x)$ é a única solução em $\langle \hat{u}_s, \tilde{u}_s \rangle$.

Teorema 0.9. Suponha que $K(x,y)$ satisfaça (K_1) ou (K_2) e que $f(x,u)$ satisfaça (f_0) e (f_2) para constantes $M > 0$ e $m \leq 0$. Então, para qualquer dado inicial $u_0(x)$, onde $m \leq u_0(x) \leq M$, a solução $u(t,x)$ de (1) converge para uma única solução $u_s(x)$ de (4) quando $t \to +\infty$.

Teorema 0.10. Assuma que $|K(x,y)|$ satisfaça (K_1) ou (K_2). Suponha que exista uma constantes $M > 0$ tal que

$$f(x,M) \leq 0 \quad \text{e} \quad f(x,u) = -f(x,-u), \quad |u| \leq M. \tag{5}$$

Denote por $u(t,x)$ e $U(t,x)$ as soluções de (1) (quando houver solução) e (3.27), respectivamente, onde $U_0 = |u_0| \leq M$. Então

$$-U(t,x) \leq u(t,x) \leq U(t,x) \quad t > 0,\ x \in \overline{\Omega}.$$

Teorema 0.11. Seja $|K(x,y)|$ satisfazendo (K_1) ou (K_2) e $f(x,u)$ satisfazendo (5) e a propriedade não decrescente (f_2) quando $m = 0$. Então, para qualquer u_0 com $|u_0| \leq M$ a solução correspondente $u(t,x)$ de (1) verifica

$$\lim_{t \to \infty} |u(t,x)| = 0 \quad x \in \overline{\Omega}.$$

Uma vez que não se assume necessariamente que $f(x,0)$ seja identicamente nula, a existência de uma solução para o problema (4) nem sempre é garantida; e mesmo que tal solução exista, ela é, em geral, não uniforme em $\overline{\Omega}$. A determinação da dinâmica do problema (1) em relação a uma solução de estado estacionário não constante é muito mais delicada do que em relação à solução zero quando $f(x,0) = 0$.

Capítulo 1

O problema de evolução

Neste capítulo, estudaremos a existência e unicidade de solução para a seguinte equação parabólica com condição de contorno não local

$$\begin{cases} u_t - Lu = f(x,u), & t>0,\ x\in\Omega, \\ B[u] = \displaystyle\int_\Omega K(x,y)u(t,y)dy, & t>0,\ x\in\partial\Omega, \\ u(0,x) = u_0(x), & x\in\Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

onde $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, $n\geq 1$, é um domínio limitado regular, $\partial\Omega$ é a fronteira de Ω, $f:\overline{\Omega}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é uma função Hölder contínua na variável x e de classe C^1 na segunda variável. Além disso, os operadores L e B são dados em (2) e (3), respectivamente. Para facilitar a leitura, os apresentaremos novamente: L é um operador uniformemente elíptico dado na forma

$$Lu \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{x_ix_j} + \sum_{j=1}^{n} b_j(x)u_{x_j},$$

e $B[\cdot]$ é o operador de fronteira dado por

$$B[u] \equiv \alpha_0\frac{\partial u}{\partial\eta} + u,$$

onde $\alpha_0\geq 0$ é uma constante e $\partial u/\partial\eta$ denota a derivada na direção da normal exterior unitária η para cada ponto $x\in\partial\Omega$. Assumimos que os coeficientes de L, o dado inicial u_0 e o kernel $K(x,y)$ são funções regulares.

Ao longo deste capítulo, para todo $T>0$ finito, usaremos as seguintes notações:

- $D_T = (0,T]\times\Omega$;
- $\overline{D}_T = [0,T]\times\overline{\Omega}$;

- $S_T = (0,T] \times \partial\Omega$;
- $C(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} |\ u$ é contínua em $\Omega\}$;
- $C^m(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} |\ u$ é m-vezes continuamente diferenciável$\}$;
- $C^{m,\alpha}(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} |\ D^\gamma u$ é Hölder contínua, para todo $|\gamma| < m\}$;
- $C(D_T) = \{u : D_T \to \mathbb{R} |\ u$ é contínua em $D_T\}$;
- $C^{1,2}(D_T) = \{u : D_T \to \mathbb{R} |\ u(t,x)$ é de classe C^1 em t e de classe C^2 em $x\}$;
- Dado $v \in L^\infty(\partial\Omega \times \Omega)$, definimos $\|v\|_\infty = \text{ess sup}|v(x,y)|$;
- Dado $w \in C^{1,2}(D_T)$, definimos $\|w\|_t = \sup\{|w(\tau,\xi)|;\ 0 < \tau \leq$t, com $\xi \in \overline{\Omega}$ e $t \in (0,T]$ fixo$\}$;
- $\omega_n = \displaystyle\int_{B_1(0)} 1dx$ é o volume da bola unitária $B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$.

Este capítulo será dividido em três seções. Na primeira seção, vamos apresentar definições e resultados técnicos que nos auxiliarão na prova do resultado principal deste capítulo. Na segunda seção, abordaremos o método de sub e supersoluções e demonstraremos o resultado principal utilizando o Método de Iteração Monotônica. Vamos provar que o problema (1.1) possui uma solução única, desde que $K(x,y) \geq 0$ e exista um par ordenado de sub e supersoluções. Na terceira seção, serão apresentados resultados que garantam a existência desse par ordenado, sob condições adicionais para as funções $K(x,y)$ e $f(x,u)$. Por fim, finalizamos apresentando algumas aplicações.

1.1 Resultados preliminares

Nesta seção, vamos apresentar definições e resultados auxiliares importantes para a demonstração do resultado principal deste capítulo. Para mais detalhes, é recomendado consultar a referência [12, Chapter 2].

Vamos começar com o seguinte lema de positividade, que desempenha um papel fundamental no método de iterações monótonas.

Lema 1.1. Seja $w \in C^{1,2}(D_T) \cap C^1(\overline{D}_T)$ tal que

$$\begin{cases} w_t - Lw + cw \geq 0 & \text{em } D_T, \\ \alpha_0 \dfrac{\partial w}{\partial \eta} + \beta_0 w \geq 0 & \text{sobre } S_T, \\ w(0,x) \geq 0 & \text{em } \Omega, \end{cases} \tag{1.2}$$

onde $\alpha_0 \geq 0$, $\beta_0 \geq 0$, $\alpha_0 + \beta_0 > 0$ e $c = c(t,x)$ é uma função limitada em D_T. Então

$$w(t,x) \geq 0 \quad \text{em } \overline{D}_T.$$

Além disso

$$w(t,x) > 0 \quad \text{em } D_T,$$

a menos que w seja identicamente nula.

Demonstração. Ver [12, Lemma 2.2.1]. □

Agora, vamos enunciar um resultado que fornece uma caracterização integral para as soluções de uma classe de problemas parabólicos. Especificamente, considere o problema

$$\begin{cases} u_t - Lu + cu = q(t,x) & \text{em } D_T, \\ \alpha_0 \dfrac{\partial u}{\partial \eta} + \beta_0 u = h(t,x) & \text{sobre } S_T, \\ u(0,x) = u_0(x) & \text{em } \Omega, \end{cases} \tag{1.3}$$

onde u_0, h e q são funções Hölder contínuas. Assumimos que c e os coeficientes do operador L são funções Hölder contínuas em D_T, α_0 e β_0 contínuas em S_T, com $\alpha_0 \geq 0$, $\beta_0 \geq 0$ e $\alpha_0 + \beta_0 > 0$.

Na discussão a seguir, apresentamos algumas definições fundamentais para o próximo resultado e reunimos alguns fatos da teoria das equações lineares parabólicas. Para tanto, seguiremos [12, Section 2.1], onde o leitor poderá encontrar mais detalhes.

(1) **Solução Fundamental**
A função $\Gamma(t,x;\tau,\xi)$ é chamada de solução fundamental do operador parabólico

$$\mathbb{L}_c \equiv \frac{\partial}{\partial t} - L + c \quad \text{em} \quad (0,T] \times \mathbb{R}^n,$$

se para qualquer $(\tau,\xi) \in (0,T] \times \mathbb{R}^n$ fixo, Γ satisfaz a equação

$$\mathbb{L}_c[\Gamma] \equiv \Gamma_t - L\Gamma + c\Gamma = \delta(t-\tau)\delta(x-\xi),$$

onde δ é a função delta de Dirac. Para o operador parabólico geral $\mathbb{L}_c$, Γ é uma função positiva em $(0,T] \times \mathbb{R}^n$, exceto no ponto singular (τ,ξ). Além disso, para quaisquer x, ξ

$\in \mathbb{R}^n$ e $0 \leq \tau < t \leq T$, valem as seguintes estimativas

$$|\Gamma(t,x;\tau,\xi)| \leq \frac{K_0}{(t-\tau)^{\mu}} \frac{1}{|x-\xi|^{n-2+\mu}} \qquad 0 < \mu < 1, \tag{1.4}$$

$$\left| \frac{\partial \Gamma}{\partial \eta_x}(t,x;\tau,\xi) \right| \leq \frac{K_0}{(t-\tau)^{\mu}} \frac{1}{|x-\xi|^{n+1-2\mu-\gamma}} \qquad 1-\gamma/2 < \mu < 1, \tag{1.5}$$

onde $\partial/\partial\eta_x$ é a derivada normal exterior em relação à variável x e K_0 é uma constante independente de (t,x) e (τ,ξ). Essas estimativas implicam na seguinte propriedade de regularidade:

Lema 1.2. Seja $q(t,x)$ uma função mensurável em D_T. Então

(i) O "volume potencial"

$$V_0(t,x) \equiv \int_0^t \int_{\Omega} \Gamma(t,x;\tau,\xi) q(\tau,\xi) d\xi d\tau,$$

é uma função contínua em $\overline{D}_T$, se q for limitada em D_T;

(ii) $\partial V_0/\partial x_i$ existe e é contínua em D_T, se q é contínua em D_T;

(iii) V_0 e $\partial V_0/\partial x_i$ são Hölder contínuas em $\overline{D}_T$, para todo expoente $\alpha \in (0,1)$, se q é contínua em $\overline{D}_T$;

(iv) $\partial^2 V_0/\partial x_i \partial x_j$ e $\partial V_0/\partial t$ existem, são contínuas e satisfazem a equação $\mathbb{L}_c[V_0] = q(t,x)$ em D_T, se q é Hölder contínua em x, uniformemente contínua em t.

Lema 1.3. Para cada $(t,x) \in S_T$, existe $M > 0$ tal que

$$\int_0^t \int_{\Omega} \Gamma(t,x;\tau,\xi) d\xi d\tau \leq M t^{-\mu+1} \quad \text{e} \quad \int_0^t \int_{\partial\Omega} \Gamma(t,x;\tau,\xi) d\xi d\tau \leq M t^{-\mu+1}. \tag{1.6}$$

Demonstração. Note que, por (1.4), a função $\Gamma(t,x;\tau,\xi)$ satisfaz a seguinte estimativa

$$|\Gamma(t,x;\tau,\xi)| \leq \frac{K_0}{(t-\tau)^{\mu}} \frac{1}{|x-\xi|^{n-2+\mu}} \qquad 0 < \mu < 1, \tag{1.7}$$

para quaisquer x, $\xi \in \mathbb{R}^n$ e $0 \leq \tau < t \leq T$. Logo

$$\begin{aligned}\int_0^t \int_\Omega |\Gamma(t,x;\tau,\xi)|\, d\xi d\tau &\leq \int_0^t \int_\Omega \frac{K_0}{(t-\tau)^\mu} \frac{1}{|x-\xi|^{n-2+\mu}} d\xi d\tau \\ &= K_0 \int_0^t (t-\tau)^{-\mu} d\tau \int_\Omega |x-\xi|^{-(n-2+\mu)} d\xi.\end{aligned}$$

Mostraremos que

$$\int_\Omega |x-\xi|^{-(n-2+\mu)} d\xi < +\infty.$$

Para tanto, vamos denotar $\alpha = n-2+\mu$ e fazer a seguinte mudança de variável $y \mapsto x-\xi$. Dessa forma, temos

$$\int_\Omega |y|^{-\alpha} dy < +\infty. \tag{1.8}$$

Como Ω é limitado, existe $N > 0$ tal que $\Omega \subset B_N(0)$. Logo, é suficiente mostrar que

$$\int_{B_N(0)} |y|^{-\alpha} dy < +\infty. \tag{1.9}$$

Com efeito, fixando $\varepsilon \geq 0$, temos

$$\int_{B_N(0)} |y|^{-\alpha} dy = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{B_N(0) \setminus B_\varepsilon(0)} |y|^{-\alpha} dy.$$

Observe que a função $|y|^{-\alpha}$ é integrável em $B_N(0) \setminus B_\varepsilon(0)$. Portanto

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{B_N(0) \setminus B_\varepsilon(0)} |y|^{-\alpha} dy &= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^N \left(\int_{\partial B_s(0)} |y|^{-\alpha} dS_y \right) ds \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^N \left(\int_{\partial B_S(0)} s^{-\alpha} dS_y \right) ds \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^N s^{-\alpha} \left(\int_{\partial B_S(0)} 1 dS_y \right) ds \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^N s^{-\alpha} (n s^{n-1} \omega_n) ds \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0} \left[n\omega_n \frac{s^{-\alpha+n}}{-\alpha+n} \Bigg|_\varepsilon^N \right] \\ &= n\omega_n \frac{N^{-\alpha+n}}{-\alpha+n} < +\infty \Longleftrightarrow -\alpha+n > 0 \Longleftrightarrow n > \alpha,\end{aligned}$$

ou ainda, $\mu < 2$. Logo, a integral (1.9) é finita uma vez que $0 < \mu < 1 < 2$. Portanto,

$$\int_{\Omega} |x-\xi|^{-(n-2+\mu)} d\xi \leq \int_{B_N(0)} |x-\xi|^{-(n-2+\mu)} d\xi < +\infty,$$

ou seja, existe $M_0 > 0$ tal que

$$\int_{\Omega} |x-\xi|^{-(n-2+\mu)} d\xi < M_0. \tag{1.10}$$

Dessa forma

$$\begin{aligned} K_0 \int_0^t (t-\tau)^{-\mu} d\tau \int_{\Omega} |x-\xi|^{-(n-2+\mu)} d\xi &\leq K_0 M_0 \int_0^t (t-\tau)^{-\mu} d\tau \\ &= K_0 M_0 \left(\frac{1}{\mu-1} t^{-\mu+1} \right) \\ &= M t^{-\mu+1}, \end{aligned}$$

onde $M = K_0 M_0 \dfrac{1}{\mu-1}$. E assim, concluímos que

$$\int_0^t \int_{\Omega} \Gamma(t,x;\tau,\xi) d\xi d\tau \leq M t^{-\mu+1}. \tag{1.11}$$

Com um argumento semelhante, mostra-se que,

$$\int_0^t \int_{\partial\Omega} \Gamma(t,x;\tau,\xi) d\xi d\tau \leq M t^{-\mu+1}.$$

□

(2) **Função densidade**
A função densidade será denotada por ψ e é representada pela seguinte equação integral.

$$\psi(t,x) = 2h(t,x) + 2\int_0^t \int_{\partial\Omega} \left[R_1(t,x;\tau,\xi) + R_0(t,x;\tau,\xi) \right] h(\tau,\xi) d\xi d\tau, \tag{1.12}$$

onde R_0 e R_1 são funções regulares adequadas.

Para garantir a existência de uma solução clássica para o problema (1.3), vamos assumir que L é uniformemente elíptico em $\overline{D}_T$ (com T fixo) e que os coeficientes de $\mathbb{L}_c$ estão em

$C^{\alpha}(D_T)$. Por conveniência de notação, definimos:

$$J^{(0)}(t,x) = \int_{\Omega} \Gamma(t,x;0,\xi)u_0(\xi)d\xi;$$
$$J^{(2)}(t,x) = \int_{\Omega} Q(t,x;0,\xi)u_0(\xi)d\xi;$$
$$H(t,x) = J^{(2)}(t,x) + h(t,x) + \int_0^t \int_{\Omega} Q(t,x;\tau,\xi)q(\tau,\xi)d\xi d\tau, \tag{1.13}$$

onde Q é a função dada por

$$Q(t,x;\tau,\xi) \equiv \frac{\partial\Gamma}{\partial\eta_x} + \beta_0(t,x)\Gamma(t,x;\tau,\xi).$$

Além disso, em vista de (1.5), a função Q satisfaz a seguinte estimativa

$$|Q(t,x;\tau,\xi)| \leq \frac{K_0}{(t-\tau)^{\mu}} \frac{1}{|x-\xi|^{n+1-2\mu-\gamma}} \qquad 1-\gamma/2 < \mu < 1. \tag{1.14}$$

Pela regularidade de Γ, temos que $J^{(0)}$ é de classe $C^{2,\alpha}$.

No teorema a seguir, vamos apresentar um resultado de existência e unicidade de solução para o problema (1.3) quando $\alpha_0 > 0$.

Teorema 1.1. Sejam $\alpha_0 > 0$ e q uma função Hölder continua em $x \in \Omega$ e uniformemente contínua em $\overline{D}_T$. Então, para qualquer função contínua h definida sobre S_T e $u_0 \in \overline{\Omega}$, o problema (1.3) possui uma única solução (clássica) u que é Hölder continua em $x \in \Omega$ e uniformemente contínua em $\overline{D}_T$. Além disso, u pode ser representada por

$$u(t,x) = J^{(0)}(t,x) + \int_0^t \int_{\Omega} \Gamma(t,x;\tau,\xi)q(\tau,\xi)d\xi d\tau$$
$$+ \int_0^t \int_{\partial\Omega} \Gamma(t,x;\tau,\xi)\psi(\tau,\xi)d\xi d\tau, \tag{1.15}$$

onde ψ é a densidade governada por (1.12) com $h(t,x)$ substituída pela função $H(t,x)$ dada em (1.13).

Propriedades mais suaves da solução podem ser obtidas assumindo condições adicionais sobre os coeficientes de L e nos dados fornecidos. Em particular, se essas funções são C^{∞} então $u \in C^{\infty}(D_T)$.

1.2 Método de Sub e Supersolução

Nesta seção, vamos abordar o método de sub e supersolução e apresentar o resultado principal deste capítulo, que demonstra a existência e unicidade de solução para o problema (1.1). Para esta seção, é suficiente que a função $K(x,y)$ satisfaça a condição $K(x,y) \geq 0$.

Definição 1.1. Dizemos que a função $\tilde{u} \in C^{1,2}(D_T) \cap C^1(\overline{D}_T)$ é uma supersolução de (1.1) se verifica as seguintes desigualdades

$$\begin{cases} \tilde{u}_t - L\tilde{u} \geq f(x,\tilde{u}) & \text{em } D_T, \\ B[\tilde{u}] \geq \displaystyle\int_\Omega K(x,y)\tilde{u}(t,y)dy & \text{sobre } S_T, \\ \tilde{u}(0,x) \geq u_0(x) & \text{em } \Omega. \end{cases}$$

Definição 1.2. Dizemos que a função $\hat{u} \in C^{1,2}(D_T) \cap C^1(\overline{D}_T)$ é uma subsolução de (1.1) se verifica as seguintes desigualdades

$$\begin{cases} \hat{u}_t - L\hat{u} \leq f(x,\hat{u}) & \text{em } D_T, \\ B[\hat{u}] \leq \displaystyle\int_\Omega K(x,y)\hat{u}(t,y)dy & \text{sobre } S_T, \\ \hat{u}(0,x) \leq u_0(x) & \text{em } \Omega. \end{cases}$$

Definição 1.3. Sejam $\hat{u}$, $\tilde{u} \in C^{1,2}(D_T) \cap C^1(\overline{D}_T)$ um par de sub e supersoluções de (1.1). As funções $\hat{u}$ e $\tilde{u}$ são ditas ordenadas se

$$\hat{u} \leq \tilde{u} \quad \text{em } \overline{D}_T.$$

Definição 1.4. Sejam $\hat{u}$, $\tilde{u} \in C^{1,2}(D_T) \cap C^1(\overline{D}_T)$, um par de sub e supersoluções de (1.1). Então, para qualquer par ordenado $\hat{u} \leq \tilde{u}$, definimos o setor $\langle \hat{u}, \tilde{u} \rangle$, como sendo o intervalo funcional

$$\langle \hat{u}, \tilde{u} \rangle \equiv \{u \in C^1(\overline{D}_T);\ \hat{u} \leq u \leq \tilde{u}\}.$$

Observe que a partir das definições acima, toda solução (clássica) de (1.1) é uma supersolução e uma subsolução de (1.1).

Antes de apresentarmos o resultado principal deste capítulo, vamos construir uma sequência a partir de problemas auxiliares, utilizando o *Método de Interação Monotônica*. Essa sequência desempenhará um papel fundamental quando formos provar a unicidade de solução para o problema (1.1). Para isso, considere inicialmente $u^{(0)} \in C^{1,2}(D_T) \cap C^1(\overline{D}_T)$, e o seguinte problema auxiliar

$$\begin{cases} u_t - Lu + cu = f\big(x, u^{(0)}\big) + cu^{(0)} & \text{em } D_T, \\ B[u] = \int_\Omega K(x,y) u^{(0)}(t,y) dy & \text{sobre } S_T, \\ u(0,x) = u_0(x) & \text{em } \Omega, \end{cases}$$

onde $c \equiv c(t,x)$ é uma função a ser escolhida posteriormente. Pelo Teorema 1.1, esse problema admite uma única solução, que será denotada por $u^{(1)}$. De maneira análoga, considere o seguinte problema

$$\begin{cases} u_t - Lu + cu = f\big(x, u^{(0)}\big) + cu^{(0)} & \text{em } D_T, \\ B[u] = \int_\Omega K(x,y) u^{(0)}(t,y) dy & \text{sobre } S_T, \\ u(0,x) = u_0(x) & \text{em } \Omega. \end{cases}$$

Novamente, pelo Teorema 1.1, o problema acima possui uma única solução, que será denotada por $u^{(2)}$. Continuando esse processo indutivamente, concluímos pelo Teorema 1.1, que existe uma única solução, denotada por $u^{(k)}$, do seguinte problema linear

$$\begin{cases} u_t^{(k)} - Lu^{(k)} + cu^{(k)} = f(x, u^{(k-1)}) + cu^{(k-1)} & \text{em } D_T, \\ B[u^{(k)}] = \int_\Omega K(x,y) u^{(k-1)}(x,y) dy & \text{sobre } S_T, \\ u^{(k)}(0,x) = u_0(x) & \text{em } \Omega. \end{cases} \tag{1.16}$$

Quando $\hat{u}$ e $\tilde{u}$ existem, podemos repetir a iteração acima com $\underline{u}^{(0)} = \hat{u}$ ou $\overline{u}^{(0)} = \tilde{u}$. Note que, pelas hipóteses dadas inicialmente, a sequência dada por (1.16) é bem definida.

O teorema a seguir dará a convergência monótona dessas sequências e que seus limites convergem para uma solução de (1.1). Para tanto, denote a sequência $\{\overline{u}^{(k)}\}$ quando $\overline{u}^{(0)} = \tilde{u}$ e por $\{\underline{u}^{(k)}\}$ quando $\underline{u}^{(0)} = \hat{u}$.

Teorema 1.2. Seja $K(x,y) \geq 0$. Suponha que exista $\hat{u}$, $\tilde{u}$ um par ordenado de sub e supersoluções do problema (1.1). Então, as sequências $\{\overline{u}^{(k)}\}$ e $\{\underline{u}^{(k)}\}$ dadas por (1.16) com $\overline{u}^{(0)} = \tilde{u}$ e $\underline{u}^{(0)} = \hat{u}$, convergem monotonicamente para uma única solução $u \equiv u(t,x)$ de (1.1). Além disso, para $k > 0$, temos:

$$\hat{u} \leq \underline{u}^{(k)} \leq \underline{u}^{(k+1)} \leq u \leq \overline{u}^{(k+1)} \leq \overline{u}^{(k)} \leq \tilde{u} \quad \text{em } \overline{D}_T. \tag{1.17}$$

Demonstração. Para tornar a demonstração deste teorema mais clara e objetiva, vamos dividi-la nos seguintes passos:

(i) Mostrar que, para todo $k > 0$, as sequências $\{\underline{u}^{(k)}\}$ e $\{\overline{u}^{(k)}\}$ possuem a seguinte relação de monotonia

$$\hat{u} \leq \underline{u}^{(k)} \leq \underline{u}^{(k+1)} \leq \underline{u} \leq \overline{u} \leq \overline{u}^{(k+1)} \leq \overline{u}^{(k)} \leq \tilde{u} \quad \text{em } \overline{D}_T. \tag{1.18}$$

(ii) Mostrar que os limites $\overline{u}$ e $\underline{u}$ são soluções de (1.1).

(iii) Mostrar que o problema (1.1) possui uma única solução.

Passo (i):A demonstração deste passo será feita utilizando um argumento de indução. Primeiramente, vamos mostrar que

$$\underline{u}^{(0)} \leq \underline{u}^{(1)} \leq \overline{u}^{(1)} \leq \overline{u}^{(0)} \quad \text{em } \overline{D}_T.$$

Iniciamos provando que $\underline{u}^{(0)} \leq \underline{u}^{(1)}$. Para isso, considere a função $w = \underline{u}^{(1)} - \underline{u}^{(0)}$. Pela definição de subsolução, (1.16) e a hipótese $\underline{u}^{(0)} = \hat{u}$, temos

$$\begin{aligned}
w_t - Lw + cw &= \left(\underline{u}^{(1)} - \underline{u}^{(0)}\right)_t - L\left(\underline{u}^{(1)} - \underline{u}^{(0)}\right) + c\left(\underline{u}^{(1)} - \underline{u}^{(0)}\right) \\
&= \left(\underline{u}_t^{(1)} - L\underline{u}^{(1)} + c\underline{u}^{(1)}\right) - \left(\underline{u}_t^{(0)} - L\underline{u}^{(0)} + c\underline{u}^{(0)}\right) \\
&= \left(f\left(x, \underline{u}^{(0)}\right) + c\underline{u}^{(0)}\right) - \underline{u}_t^{(0)} + L\underline{u}^{(0)} - c\underline{u}^{(0)} \\
&= -\left(\underline{u}_t^{(0)} - L\underline{u}^{(0)} - f\left(x, \underline{u}^{(0)}\right)\right) \\
&= -\left(\hat{u}_t - L\hat{u} - f(x, \hat{u})\right) \geq 0 \quad \text{em } D_T.
\end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
B[w] &= B[\underline{u}^{(1)}] - B[\hat{u}] \\
&\geq \int_\Omega K(x,y)\underline{u}^{(0)}(t,y)dy - \int_\Omega K(x,y)\hat{u}(t,y)dy \\
&= \int_\Omega K(x,y)\left(\underline{u}^{(0)} - \hat{u}\right)(t,y)dy \\
&= \int_\Omega K(x,y)(\hat{u} - \hat{u})(t,y)dy = 0 \quad \text{sobre } S_T,
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} w(0,x) &= \big(\underline{u}^{(1)} - \underline{u}^{(0)}\big)(0,x) \\ &= \underline{u}^{(1)}(0,x) - \underline{u}^{(0)}(0,x) \\ &= \underline{u}^{(1)}(0,x) - \hat{u}(0,x) \\ &= u_0(x) - \hat{u}(0,x) \geq 0 \quad \text{em } \Omega. \end{aligned}$$

Pelas desigualdades obtidas acima, temos

$$\begin{cases} w_t - Lw + cw \geq 0 & \text{em } D_T, \\ B[w] \geq 0 & \text{sobre } S_T, \\ w(0,x) \geq 0 & \text{em } \Omega. \end{cases}$$

Logo, pelo Lema 1.1, $w \geq 0$ em $\overline{D}_T$, implicando em $\underline{u}^{(0)} \leq \underline{u}^{(1)}$ em $\overline{D}_T$, como queríamos mostrar. Usando a definição de supersolução, (1.16) e a hipótese $\overline{u}^{(0)} = \tilde{u}$, prova-se, de maneira análoga, que $\overline{u}^{(1)} \leq \overline{u}^{(0)}$ em $\overline{D}_T$. Vamos agora mostrar que $\underline{u}^{(1)} \leq \overline{u}^{(1)}$. Para isso, considere a função $\overline{w} = \overline{u}^{(1)} - \underline{u}^{(1)}$. Por (1.16) e as hipóteses $\underline{u}^{(0)} = \hat{u}$ e $\overline{u}^{(0)} = \tilde{u}$, temos

$$\begin{aligned} \overline{w}_t - L\overline{w} + c\overline{w} &= \left(\overline{u}^{(1)} - \underline{u}^{(1)}\right)_t - L\left(\overline{u}^{(1)} - \underline{u}^{(1)}\right) + c\left(\overline{u}^{(1)} - \underline{u}^{(1)}\right) \\ &= \left(\overline{u}_t^{(1)} - L\overline{u}^{(1)} + c\overline{u}^{(1)}\right) - \left(\underline{u}_t^{(1)} - L\underline{u}^{(1)} + c\underline{u}^{(1)}\right) \\ &= f(x,\overline{u}^{(0)}) + c\overline{u}^{(0)} - \left(f\big(x,\underline{u}^{(0)}\big) + c\underline{u}^{(0)}\right) \\ &= f(x,\tilde{u}) + c\tilde{u} - f\big(x,\hat{u}\big) - c\hat{u} \quad \text{em } D_T. \end{aligned}$$

Com o intuito de aplicar novamente o Lema 1.1, vamos provar que

$$f(x,\tilde{u}) + c\tilde{u} \geq f\big(x,\hat{u}\big) + c\hat{u} \quad \text{em } D_T.$$

Com efeito, considere a função a seguinte função

$$\begin{aligned} g\colon \Omega \times \langle \hat{u}, \tilde{u} \rangle &\to \mathbb{R} \\ (x,s) &\mapsto g(x,s) = f(x,s) + c(t,x)s, \quad x \in \Omega. \end{aligned}$$

Agora observe que

$$\frac{\partial g}{\partial s}(x,s) = c(t,x) + \frac{\partial f}{\partial s}(x,s) \geq 0,$$

desde que $c(t,x) \geq -(\partial f/\partial s)(x,s)$. Desse modo, definindo

$$c(t,x) \equiv \max\left\{0,\ \max\left\{-\frac{\partial f}{\partial s}(x,s)\right\};\ \hat{u}(t,x) \leq s \leq \tilde{u}(t,x)\right\}, \tag{1.19}$$

temos que a função g é crescente para qualquer valor s nesse intervalo. Em particular, para $s_1 = \hat{u}$ e $s_2 = \tilde{u}$, temos

$$g(x,s_2) \geq g(x,s_1),$$

isto é,

$$g(x,\tilde{u}) \geq g(x,\hat{u}) \quad \text{em } D_T.$$

Logo

$$f(x,\tilde{u}) + c\tilde{u} \geq f\big(x,\hat{u}\big) + c\hat{u} \quad \text{em } D_T,$$

como queríamos mostrar. Portanto, concluímos que

$$\overline{w}_t - L\overline{w} + c\overline{w} \geq 0 \quad \text{em } D_T.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} B[\overline{w}] &= B[\overline{u}^{(1)}] - B[\underline{u}^{(1)}] \\ &= \int_\Omega K(x,y)\overline{u}^{(0)}(t,y)dy - \int_\Omega K(x,y)\underline{u}^{(0)}(t,y)dy \\ &= \int_\Omega K(x,y)\big(\overline{u}^{(0)} - \underline{u}^{(0)}\big)(t,y)dy \\ &= \int_\Omega K(x,y)\big(\tilde{u} - \hat{u}\big)(t,y)dy \geq 0, \end{aligned}$$

Por fim, temos que

$$\overline{w}(0,x) = \big(\overline{u}^{(1)} - \underline{u}^{(1)}\big)(0,x) = \overline{u}^{(1)}(0,x) - \underline{u}^{(1)}(0,x) = u_0(x) - u_0(x) = 0 \quad \text{em } \Omega.$$

Pelas desigualdades obtidas acima, temos

$$\begin{cases} \overline{w}_t - L\overline{w} + c\overline{w} \geq 0 & \text{em } D_T, \\ B[\overline{w}] \geq 0 & \text{sobre } S_T, \\ \overline{w}(0,x) \geq 0 & \text{em } \Omega. \end{cases}$$

Segue novamente do Lema 1.1, que $\overline{w} \geq 0$ em $\overline{D}_T$, implicando em $\overline{u}^{(1)} \geq \underline{u}^{(1)}$ em $\overline{D}_T$. E assim, concluímos que

$$\hat{u} = \underline{u}^{(0)} \leq \underline{u}^{(1)} \leq \overline{u}^{(1)} \leq \overline{u}^{(0)} = \tilde{u} \quad \text{em } \overline{D}_T. \tag{1.20}$$

Agora, suponha por indução que

$$\underline{u}^{(k-1)} \leq \underline{u}^{(k)} \leq \overline{u}^{(k)} \leq \overline{u}^{(k-1)} \quad \text{em } \overline{D}_T. \tag{1.21}$$

Vamos provar que

$$\underline{u}^{(k)} \leq \underline{u}^{(k+1)} \leq \overline{u}^{(k+1)} \leq \overline{u}^{(k)} \quad \text{em } \overline{D}_T. \tag{1.22}$$

Comecemos mostrando que $\underline{u}^{(k)} \leq \underline{u}^{(k+1)}$. Para isso, considere a função $w^{(k)} = \underline{u}^{(k+1)} - \underline{u}^{(k)}$. Por (1.16), temos

$$\begin{aligned} w_t^{(k)} - Lw^{(k)} + cw^{(k)} &= \left(\underline{u}^{(k+1)} - \underline{u}^{(k)}\right)_t - L\left(\underline{u}^{(k+1)} - \underline{u}^{(k)}\right) + c\left(\underline{u}^{(k+1)} - \underline{u}^{(k)}\right) \\ &= \left(\underline{u}_t^{(k+1)} - L\underline{u}^{(k+1)} + c\underline{u}^{(k+1)}\right) - \left(\underline{u}_t^{(k)} - L\underline{u}^{(k)} + c\underline{u}^{(k)}\right) \\ &= f\left(x, \underline{u}^{(k)}\right) + c\underline{u}^{(k)} - \left(f\left(x, \underline{u}^{(k-1)}\right) + c\underline{u}^{(k-)}\right) \quad \text{em } D_T. \end{aligned}$$

Pela hipótese de indução e (1.19), segue que

$$g(x, \underline{u}^{(k)}) \geq g(x, \underline{u}^{(k-1)}) \quad \text{em } D_T,$$

isto é,

$$f\left(x, \underline{u}^{(k)}\right) + c\underline{u}^{(k)} \geq f\left(x, \underline{u}^{(k-1)}\right) + c\underline{u}^{(k-1)} \quad \text{em } D_T,$$

e assim, concluímos que

$$w_t^{(k)} - Lw^{(k)} + cw^{(k)} \geq 0 \quad \text{em } D_T.$$

Além disso

$$
\begin{aligned}
B[w^{(k)}] &= B[\underline{u}^{(k+1)}] - B[\underline{u}^{(k)}] \\
&= \int_\Omega K(x,y)\underline{u}^{(k)}(t,y)dy - \int_\Omega K(x,y)\underline{u}^{(k-1)}(t,y)dy \\
&= \int_\Omega K(x,y)\big((\underline{u}^{(k)}) - (\underline{u}^{(k-1)})\big)(t,y)dy \geq 0 \quad \text{sobre } S_T,
\end{aligned}
$$

pois por hipótese $\underline{u}^{(k)} \geq \underline{u}^{(k-1)}$ e $K(x,y) \geq 0$. Por fim, temos que

$$
w^{(k)}(0,x) = \underline{u}^{(k)}(0,x) - \underline{u}^{(k-1)}(0,x) = u_0(x) - u_0(x) = 0 \quad \text{em } \Omega.
$$

Das desigualdades obtidas acima, concluímos que

$$
\begin{cases}
w_t^{(k)} - Lw^{(k)} + cw^{(k)} \geq 0 & \text{em } D_T, \\
B[w^{(k)}] \geq 0 & \text{sobre } S_T, \\
w^{(k)}(0,x) \geq 0 & \text{em } \Omega.
\end{cases}
$$

Usando o Lema 1.1, podemos concluir que $\overline{w}^{(k)} \geq 0$ em $\overline{D}_T$ e, portanto, $\overline{u}^{(k)} \geq \overline{u}^{(k+1)}$ em $\overline{D}_T$. De maneira análoga, pode-se provar que $\overline{u}^{(k+1)} \leq \overline{u}^{(k)}$ em $\overline{D}_T$. Resta agora provar que $\underline{u}^{(k+1)} \leq \overline{u}^{(k+1)}$, para todo $k > 0$. Para isso, considere a função $\overline{w} = \overline{u}^{(k+1)} - \underline{u}^{(k+1)}$. Por (1.16), temos

$$
\begin{aligned}
\overline{w}_t - L\overline{w} + c\overline{w} &= \left(\overline{u}^{(k+1)} - \underline{u}^{(k+1)}\right)_t - L\left(\overline{u}^{(k+1)} - \underline{u}^{(k+1)}\right) + c\left(\overline{u}^{(k+1)} - \underline{u}^{(k+1)}\right) \\
&= \left(\overline{u}_t^{(k+1)} - L\overline{u}^{(k+1)} + c\overline{u}^{(k+1)}\right) - \left(\underline{u}_t^{(k+1)} - L\underline{u}^{(k+1)} + c\underline{u}^{(k+1)}\right) \\
&= f\big(x,\overline{u}^{(k)}\big) + c\overline{u}^{(k)} - \left(f\big(x,\underline{u}^{(k)} + c\underline{u}^{(k)}\right) \quad \text{em } D_T.
\end{aligned}
$$

Pela hipótese de indução e (1.16), segue que

$$
g(x,\overline{u}^{(k)}) \geq g(x,\underline{u}^{(k-1)}) \quad \text{em } D_T,
$$

isto é,

$$
f\big(x,\overline{u}^{(k)}\big) + c\overline{u}^{(k)} \geq f\big(x,\underline{u}^{(k-1)}\big) + c\underline{u}^{(k-1)} \quad \text{em } D_T,
$$

e assim, concluímos que

$$
\overline{w}_t - L\overline{w} + c\overline{w} \geq 0 \quad \text{em } D_T.
$$

Além disso,

$$\begin{aligned} B[\overline{w}] &= B[\overline{u}^{(k+1)}] - B[\underline{u}^{(k+1)}] \\ &= \int_\Omega K(x,y)\overline{u}^{(k)}(t,y)dy - \int_\Omega K(x,y)\underline{u}^{(k)}(t,y)dy \\ &= \int_\Omega K(x,y)\big(\overline{u}^{(k)} - \underline{u}^{(k)}\big)(t,y)dy \geq 0 \quad \text{sobre } S_T, \end{aligned}$$

pois, por hipótese $\overline{u}^{(k)} - \underline{u}^{(k)}$ e $K(x,y) \geq 0$. Por fim

$$\begin{aligned} \overline{w}(0,x) &= (\overline{u}^{(k+1)} - \underline{u}^{(k+1)})(0,x) \\ &= (\overline{u}^{(k+1)})(0,x) - (\underline{u}^{(k+1)})(0,x) \\ &= u_0(x) - u_0(x) = 0 \geq 0 \quad \text{em } \Omega. \end{aligned}$$

Assim, pelas desigualdades obtidas acima, temos

$$\begin{cases} \overline{w}_t - L\overline{w} + c\overline{w} \geq 0 & \text{em } D_T, \\ B[\overline{w}] \geq 0 & \text{sobre } S_T, \\ \overline{w}(0,x) \geq 0 & \text{em } \Omega. \end{cases}$$

Segue do Lema 1.1, que $\overline{w} \geq 0$ em $\overline{D}_T$, ou seja, $\overline{u}^{(k+1)} \geq \underline{u}^{(k+1)}$ em $\overline{D}_T$. Dessa forma, concluímos que (1.22) ocorre e que $\{\overline{u}^{(k)}\}$ e $\{\underline{u}^{(k)}\}$ são monótonas. Finalmente, por (1.18) segue que as sequências monótonas de números reais $\{\overline{u}^{(k)}(t,x)\}$ e $\{\underline{u}^{(k)}(t,x)\}$ são limitadas. Consequentemente, seus limites pontuais

$$\lim_{k\to\infty} \overline{u}^{(k)}(t,x) = \overline{u}(t,x) \quad \text{e} \quad \lim_{k\to\infty} \underline{u}^{(k)}(t,x) = \underline{u}(t,x) \quad \forall\ (t,x) \in \overline{D}_T, \tag{1.23}$$

existem. Logo, concluímos que

$$\hat{u} \leq \underline{u}^{(k)} \leq \underline{u}^{(k+1)} \leq \underline{u} \leq \overline{u} \leq \overline{u}^{(k+1)} \leq \overline{u}^{(k)} \leq \tilde{u} \quad \text{em } \overline{D}_T. \tag{1.24}$$

Para os passos (ii) e (iii), realizaremos a prova apenas para o caso em que $\alpha_0 > 0$. O caso $\alpha_0 = 0$, pode ser encontrado na referência [11]. Para simplificar a notação, vamos denotar $F(u) \equiv (F(u))(t,x) \equiv f(x,u) + c(t,x)u$.

Passo (ii): Neste passo, vamos provar que os limites $\underline{u}$ e $\overline{u}$ são soluções de (1.1). Para isso, primeiro provaremos que ambos os limites satisfazem a seguinte equação integral:

$$u(t,x) = J^{(0)}(t,x) + \int_0^t \int_\Omega \Gamma(t,x;\tau,\xi)(F(u))(\tau,\xi)d\xi d\tau \\ + \int_0^t \int_{\partial\Omega} \Gamma(t,x;\tau,\xi)\psi(\tau,\xi)d\xi d\tau, \tag{1.25}$$

onde a densidade ψ é dada por (1.12) com $h(t,x)$ substituída pela função

$$H(t,x) = J^{(2)}(t,x) + \frac{1}{\alpha_0}\int_\Omega K(x,y)u(t,y)dy + \int_0^t \int_\Omega Q(t,x;\tau,\xi)(F(u))(\tau,\xi)d\xi d\tau, \tag{1.26}$$

ou seja,

$$\psi(t,x) = 2H(t,x) + 2\int_0^t \int_{\partial\Omega} [R_1(t,x;\tau,\xi) + R_0(t,x;\tau,\xi)]H(\tau,\xi)d\xi d\tau. \tag{1.27}$$

Comecemos mostrando que o limite $\underline{u}$ satisfaz

$$\underline{u}(t,x) = J^{(0)}(t,x) + \int_0^t \int_\Omega \Gamma(t,x;\tau,\xi)\big(F(\underline{u})\big)(\tau,\xi)d\xi d\tau \\ + \int_0^t \int_{\partial\Omega} \Gamma(t,x;\tau,\xi)\psi(\tau,\xi)d\xi d\tau. \tag{1.28}$$

Com efeito, recorde que $\underline{u}^{(k)}$ é uma solução de (1.16). Aplicando o Teorema 1.1 nesta equação, concluímos que $\underline{u}^{(k)}$ satisfaz

$$\underline{u}^{(k)}(t,x) = J^{(0)}(t,x) + \int_0^t \int_\Omega \Gamma(t,x;\tau,\xi)(F(\underline{u}^{(k-1)}))(\tau,\xi)d\xi d\tau \\ + \int_0^t \int_{\partial\Omega} \Gamma(t,x;\tau,\xi)\psi_1^{(k-1)}(\tau,\xi)d\xi d\tau, \tag{1.29}$$

onde $\psi^{(k)}$ é dada por (1.12) com $h(t,x)$ substituída pela função

$$H^{(k)}(t,x) = J^{(2)}(t,x) + \frac{1}{\alpha_0}\int_\Omega K(x,y)\underline{u}^{(k)}(t,y)dy \\ + \int_0^t \int_\Omega Q(t,x;\tau,\xi)\big(F(\underline{u}^{(k)})\big)(\tau,\xi)d\xi d\tau, \tag{1.30}$$

isto é,

$$\psi^{(k)}(t,x) = 2H^{(k)}(t,x) + 2\int_0^t \int_{\partial\Omega} [R_1(t,x;\tau,\xi) + R_0(t,x;\tau,\xi)]H^{(k)}(\tau,\xi)d\xi d\tau. \tag{1.31}$$

Provaremos que, ao tomar o limite, quando $k \to +\infty$, em (1.29), obteremos (1.28). Para tanto, vamos começar analisando a integral de superfície em (1.29). Assim, vamos analisar a convergência das parcelas em (1.31). Tendo isso em mente, primeiro fixemos $(t,x) \in S_T$. Com base na equação (1.23), obtemos

$$K(x,y)\underline{u}^{(k)}(t,y) \to K(x,y)\underline{u}(t,y) \quad \text{q.t.p. em } \Omega, \tag{1.32}$$

pois $K(x,y)$ é uma função regular. Além disso, pelo passo (i), temos

$$\hat{u} \leq \underline{u}^{(k)} \leq \tilde{u} \quad \text{em } \overline{D}_T,$$

e assim, obtemos

$$\left| K(x,y)\underline{u}^{(k)}(t,y) \right| \leq \|K\|_\infty \max_{y \in \overline{\Omega}} \{|\hat{u}(t,y)|, |\tilde{u}(t,y)|\} \in L^1(\Omega).$$

Portanto, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, concluímos que

$$\int_\Omega K(x,y)\underline{u}^{(k)}(t,y)dy \to \int_\Omega K(x,y)\underline{u}(t,y)dy \quad \forall\ (t,x) \in S_T. \tag{1.33}$$

Além disso, da continuidade de F e a convergência (1.23), concluímos que

$$Q(t,x;\tau,\xi)F\left(\underline{u}^{(k)}(\tau,\xi)\right) \longrightarrow Q(t,x;\tau,\xi)F\left(\underline{u}(\tau,\xi)\right) \quad q.t.q. \text{ em } D_T.$$

E ainda, sendo $\underline{u}^{(k)}$ limitada em $\overline{D}_T$, segue que

$$\left| Q(t,x;\tau,\xi)F\left(\underline{u}^{(k)}(\tau,\xi)\right) \right| \leq M\,|Q(t,x;\tau,\xi)| \in L^1(D_T),$$

onde M é a constante que limita $F\left(\underline{u}^{(k)}(\tau,\xi)\right)$. Novamente, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, concluímos que

$$\int_0^t \int_\Omega Q(t,x;\tau,\xi)\big(F(\underline{u}^{(k)})\big)(\tau,\xi)d\xi d\tau \to \int_0^t \int_\Omega Q(t,x;\tau,\xi)\big(F(\underline{u})\big)(\tau,\xi)d\xi d\tau. \tag{1.34}$$

Fazendo $k \to +\infty$ em (1.30), temos que $\{H^{(k)}\}$ converge pontualmente sobre S_T para a função H dada por (1.26). E ainda, como $R_0 \equiv R_0(t,x;\tau,\xi)$ e $R_1 \equiv R_1(t,x;\tau,\xi)$ são funções regulares e, como já mostramos anteriormente que $\{H^{(k)}\}$ converge para H, concluímos pelo

Teorema da Convergência Dominada que

$$\int_0^t \int_\Omega [R_0 - R_1] H^{(k)}(\tau,\xi) d\xi d\tau \to \int_0^t \int_\Omega [R_0 - R_1] H(\tau,\xi) d\xi d\tau \quad \text{sobre } S_T.$$

A limitação de $F(\underline{u})$, a continuidade de h e u_0, garantem que H seja contínua em S_T e, portanto, de [11, Section 2.2, Lemma 2.2] a sequência $\psi^{(k)}$ converge para uma função contínua ψ que é dada por (1.27).

Vamos agora analisar a integral de volume em (1.29). Para isso, fixemos $(t,x) \in (0,T] \times \Omega$. Pelo Lema 1.3 , temos que a função $\Gamma(t,x;\cdot,\cdot) \in L^1\big([0,t] \times \Omega\big)$. Logo

$$\left|\Gamma(t,x;\tau,\xi)(F(\underline{u}^{(k-1)}))(\tau,\xi)\right| \leq K\left|\Gamma(t,x;\tau,\xi)\right| \in L^1\left([0,t] \times \Omega\right),$$

e portanto, do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, concluímos que

$$\int_0^t \int_\Omega \Gamma(t,x;\tau,\xi)\big(F(\underline{u}^{(k-1)})\big)(\tau,\xi) d\xi d\tau \to \int_0^t \int_\Omega \Gamma(t,x;\tau,\xi)\big(F(\underline{u})\big)(\tau,\xi) d\xi d\tau$$

Fazendo $k \to +\infty$ em (1.29) e usando as convergências obtidas, concluímos que o limite $\underline{u}$ satisfaz a equação integral. De maneira análoga, mostra-se que $\overline{u}$ também satisfaz a equação integral (1.25).

Agora, considere o seguinte problema de valor de contorno

$$\begin{cases} \underline{u}_t - L\underline{u} + c\underline{u} = q(t,x) & \text{em } D_T, \\ \partial u/\partial\eta + (1/\alpha_0)u = h(t,x) & \text{sobre } S_T, \\ \underline{u}(0,x) = \underline{u}_0(x) & \text{em } \Omega. \end{cases} \tag{1.35}$$

Pelo Teorema 1.1, a solução $\underline{u}$, dada pela integral (1.28), é a única solução de (1.35) se as funções $q(t,x) \equiv (F(\underline{u}))(t,x)$ for contínua em D_T, localmente Hölder contínua em x e uniformemente contínua em t e $h(t,x) \equiv 1/\alpha_0 \int_\Omega K(x,y)\underline{u}(t,y)dy$ for contínua sobre S_T. Vamos mostrar que ambas as funções satisfazem as condições do Teorema 1.1. Para isso, precisamos analisar a regularidade de $\underline{u}$. Comecemos pela função $q(t,x)$. Sendo tal função limitada em D_T, então pelo Lema 1.2, temos que a integral de volume

$$\int_0^t \int_\Omega \Gamma(t,x;\tau,\xi) q(\tau,\xi) d\xi d\tau \tag{1.36}$$

é contínua em $\overline{D}_T$. Além disso, a função $J^{(0)}(t,x) \in C^{2,\alpha}(D_T)$. Para mostrarmos a propriedade de continuidade de superfície

$$\int_0^t \int_{\partial\Omega} \Gamma(t,x;\tau,\xi)\psi(\tau,\xi)d\xi d\tau, \tag{1.37}$$

observamos a partir da estimativa (1.14), que a função H dada por

$$H(t,x) = J^{(2)}(t,x) + h(t,x) + \int_0^t \int_\Omega Q(t,x;\tau,\xi)q(\tau,\xi)d\xi d\tau,$$

é contínua sobre S_T. Assim, por [12, Lemma 1.3], a densidade ψ é contínua sobre S_T e, portanto, por [12, Lemma 1.2], a integral de superfície (1.37) é Hölder contínua em $\overline{D}_T$. Pela representação integral (1.28), $\underline{u}$ é contínua em $\overline{D}_T$, implicando que $q = F(u)$ também é contínua. Por outro lado, a continuidade de q garante que a integral de volume (1.36) é Hölder contínua em D_T. Dado que as três parcelas em (1.28) são Hölder contínuas, pode-se concluir que a função q também é Hölder contínua. Além disso, sendo F é Hölder contínua, segue que q também é Hölder contínua em $\overline{D}_T$. Por fim, como $\underline{u}$ é uma função contínua, implica que a função h também é contínua. Portanto, pelo Teorema 1.1, podemos afirmar que $\underline{u}$ é a única solução de (1.35).

Passo (iii): Agora, utilizando a representação integral, vamos mostrar a unicidade da solução do problema (1.1). Precisamente, dadas u_1 e u_2 quaisquer duas soluções em $\langle \hat{u}, \tilde{u} \rangle$, mostraremos que $u_1 = u_2$. De fato, como u_1 e u_2 são soluções de (1.1), então ambas verificam:

$$\begin{cases} (u_j)_t - Lu_j = q_j(t,x) & t > 0,\ x \in \Omega, \\ \dfrac{\partial u_j}{\partial \eta} + \dfrac{1}{\alpha_0} u_j = h_j(t,x) & t > 0,\ x \in \partial\Omega, \\ u_j(0,x) = (u_j)_0(x) & x \in \Omega, \quad \forall\ j = 1,2. \end{cases} \tag{1.38}$$

com $q_j = f(x,u_j) + cu_j$ e $h_j = 1/\alpha_0 \int_\Omega K(x,y)(u_j)(t,y)dy$. Além disso, de acordo com o Teorema 1.1, elas possuem a seguinte representação integral

$$\begin{aligned} u_j(t,x) = J^{(0)}(t,x) &+ \int_0^t \int_\Omega \Gamma(t,x;\tau,\xi)q_j(\tau,\xi)d\xi d\tau \\ &+ \int_0^t \int_{\partial\Omega} \Gamma(t,x;\tau,\xi)\psi_j(\tau,\xi)d\xi d\tau, \qquad j = 1,2. \end{aligned} \tag{1.39}$$

onde ψ_j é dada por (1.12) com $h_j(t,x)$ substituída pela função

$$H_j(t,x) \equiv J^{(2)}(t,x) + \frac{1}{\alpha_0}\int_\Omega K(x,y)(u_j)(t,y)dy + \int_0^t \int_\Omega Q(t,x;\tau,\xi)q_j(\tau,\xi)(\tau,\xi)d\xi d\tau, \qquad j=1,2. \tag{1.40}$$

isto é,

$$\psi_j(t,x) = 2H_j(t,x) + 2\int_0^t \int_{\partial\Omega} [R_1(t,x;\tau,\xi) + R_0(t,x;\tau,\xi)]H_j(\tau,\xi)d\xi d\tau. \quad j=1,2. \tag{1.41}$$

Considere agora a função $w = u_1 - u_2$. Em vista de (1.39), temos

$$\begin{aligned} w(t,x) &= \left(\int_0^t \int_\Omega \Gamma(t,x;\tau,\xi)(F(u_1))(\tau,\xi)d\xi d\tau + \int_0^t \int_{\partial\Omega} \Gamma(t,x;\tau,\xi)\psi_1(\tau,\xi)d\xi d\tau\right) \\ &\quad - \left(\int_0^t \int_\Omega \Gamma(t,x;\tau,\xi)(F(u_2))(\tau,\xi)d\xi d\tau + \int_0^t \int_{\partial\Omega} \Gamma(t,x;\tau,\xi)\psi_2(\tau,\xi)d\xi d\tau\right) \\ &= \int_0^t \int_\Omega \Gamma(t,x;\tau,\xi)[(F(u_1))(\tau,\xi) - (F(u_2))(\tau,\xi)]d\xi d\tau \\ &\quad + \int_0^t \int_{\partial\Omega} \Gamma(t,x;\tau,\xi)((\psi_1(\tau,\xi) - \psi_2(\tau,\xi))d\xi d\tau. \end{aligned} \tag{1.42}$$

Vamos estabelecer diversas estimativas para (1.42). Com efeito, observe que, sendo f regular, a função F satisfaz a seguinte condição de *Lipschitz*

$$|(F(u_1))(t,x) - (F(u_2))(t,x)| \le M|u_1 - u_2|, \tag{1.43}$$

onde M é uma constante independente de (t,x). Além disso, note que

$$\begin{aligned} \left|h_1(t,x) - h_2(t,x)\right| &= \left|\frac{1}{\alpha_0}\int_\Omega K(x,y)u_1(t,y)dy - \frac{1}{\alpha_0}\int_\Omega K(x,y)u_2(t,y)dy\right| \\ &= \left|\frac{1}{\alpha_0}\int_\Omega K(x,y)\big(u_1(t,y) - u_2(t,y)\big)dy\right| \\ &\le \frac{1}{\alpha_0}\int_\Omega \left|K(x,y)\right|\left|\big(u_1(t,y) - u_2(t,y)\big)\right|dy \\ &\le \frac{1}{\alpha_0}|\Omega|\,\|K\|_\infty\,\|w\|_t. \end{aligned}$$

Fazendo $N = \dfrac{1}{\alpha_0}|\Omega|\,\|K\|_\infty$, obtemos a seguinte estimativa

$$\big|h_1(t,x) - h_2(t,x)\big| \leq N\|w\|_t. \tag{1.44}$$

Para simplificar os cálculos, tomamos agora $\tilde{F} = (F(u_1))(\tau,\xi) - (F(u_2))(\tau,\xi)$. Pela condição de *Lipschitz* (1.43) e (1.44), temos

$$\begin{aligned}
|H_1(t,x) - H_2(t,x)| =& \left|\frac{1}{\alpha_0}\int_\Omega K(x,y)\big(u_1(t,y) - u_2(t,y)\big)dy - \int_0^t\int_\Omega Q(t,x;\tau,\xi)\tilde{F}d\xi d\tau\right| \\
\leq& \frac{1}{\alpha_0}\int_\Omega |K(x,y)|\,|(u_1(t,y) - u_2(t,y))|\,dy + \int_0^t\int_\Omega |Q(t,x;\tau,\xi)||\tilde{F}|d\xi d\tau \\
\leq& \frac{1}{\alpha_0}\,\|K\|_\infty\,\|w\|_t|\Omega| + M\|w\|_t\int_0^t\int_\Omega |Q(t,x;\tau,\xi)|d\xi d\tau. \\
=& N\|w\|_t + M\|w\|_t\int_0^t\int_\Omega |Q(t,x;\tau,\xi)|d\xi d\tau. \\
=& \|w\|_t\left(N + M\int_0^t\int_\Omega |Q(t,x;\tau,\xi)|d\xi d\tau\right).
\end{aligned}$$

Tomando $M_1 = \max\{N,M\}$ e relembrando que a função Q satisfaz a estimativa (1.14), segue pela demonstração do Lema 1.3, que

$$\int_0^t\int_\Omega Q(t,x;\tau,\xi)d\xi d\tau \leq M_1 t^{-\mu+1} \leq MT^{-\mu+1}.$$

Em particular

$$|H_1(t,x) - H_2(t,x)| \leq \left(M_1 + \int_0^t\int_\Omega |Q(t,x;\tau,\xi)|d\xi d\tau\right)\|w\|_t \leq M_2\|w\|_t, \tag{1.45}$$

onde $M_2 = \max\{M_1 + MT^{-\mu+1}\}$ é uma constante positiva independente de $(t,x) \in D_T$. As relações (1.41) e (1.45) implicam que

$$\begin{aligned}
|\psi_1(t,x) - \psi_2(t,x)| =& \Big| 2H_1(t,x) + 2\int_0^t \int_{\partial\Omega} [R_1(t,x;\tau,\xi) + R_0(t,x;\tau,\xi)] H_1(\tau,\xi) d\xi d\tau \\
& - 2H_2(t,x) - 2\int_0^t \int_{\partial\Omega} [R_1(t,x;\tau,\xi) + R_0(t,x;\tau,\xi)] H_2(\tau,\xi) d\xi d\tau \Big| \\
\leq & 2\,|H_1(t,x) - H_2(t,x)| \\
& + 2\int_0^t \int_{\partial\Omega} |R_1(t,x;\tau,\xi) + R_0(t,x;\tau,\xi)|\,|H_1(\tau,\xi) - H_2(\tau,\xi)|\, d\xi d\tau \\
\leq & 2M_2\|w\|_t + 2\int_0^t \int_{\partial\Omega} |R_1(t,x;\tau,\xi) + R_0(t,x;\tau,\xi)| M_2 \|w\|_t d\xi d\tau \\
\leq & 2M_2\|w\|_t \left(1 + \int_0^t \int_{\partial\Omega} |R_1(t,x;\tau,\xi) + R_0(t,x;\tau,\xi)|\, d\xi d\tau \right).
\end{aligned}$$

Como R_0 e R_1 são regulares, existe M_3 tal que

$$1 + \int_0^t \int_{\partial\Omega} |R_1(t,x;\tau,\xi) + R_0(t,x;\tau,\xi)|\, d\xi d\tau \leq M_3,$$

e tomando $M_4 = \max\,\{M_3,\ 2M_2\}$, obtemos

$$|\psi_1(t,x) - \psi_2(t,x)| \leq M_4 \|w\|_t.$$

Além disso, por (1.42), (1.43) e (1.44), segue que

$$\begin{aligned}
|w(t,x)| =& \Big| \int_0^t \int_{\Omega} \Gamma(t,x;\tau,\xi) \big[(F(u_1))(\tau,\xi) - (F(u_2))(\tau,\xi)\big] d\xi d\tau \\
& + \int_0^t \int_{\partial\Omega} \Gamma(t,x;\tau,\xi)(\psi_1(\tau,\xi) - \psi_2(\tau,\xi)) d\xi d\tau \Big| \\
\leq & \int_0^t \int_{\Omega} \big|\Gamma(t,x;\tau,\xi)\big|\, |(F(u_1))(\tau,\xi) - (F(u_2))(\tau,\xi)|\, d\xi d\tau \\
& + \int_0^t \int_{\partial\Omega} \big|\Gamma(t,x;\tau,\xi)\big| \big|\big(\psi_1(\tau,\xi) - \psi_2(\tau,\xi)\big)\big| d\xi d\tau \\
\leq & \int_0^t \int_{\Omega} \big|\Gamma(t,x;\tau,\xi)\big| M \big|u_1 - u_2\big| d\xi d\tau + \int_0^t \int_{\partial\Omega} \big|\Gamma(t,x;\tau,\xi)\big| M_4 \|w\|_t d\xi d\tau \\
=& M\|w\|_t \int_0^t \int_{\Omega} |\Gamma(t,x;\tau,\xi)| d\xi d\tau + M_4\|w\|_t \int_0^t \int_{\partial\Omega} |\Gamma(t,x;\tau,\xi)| d\xi d\tau \\
=& \left[M \int_0^t \int_{\Omega} \big|\Gamma(t,x;\tau,\xi)\big| d\xi d\tau + M_4 \int_0^t \int_{\partial\Omega} \big|\Gamma(t,x;\tau,\xi)\big| d\xi d\tau \right] \|w\|_t.
\end{aligned}$$

Pelo Lema 1.3, existe uma constante M_5, tal que

$$\int_0^t \int_\Omega \left|\Gamma(t,x;\tau,\xi)\right| d\xi d\tau \leq M_5 t^{-\mu+1} \quad \text{e} \leq \int_0^t \int_{\partial\Omega} \left|\Gamma(t,x;\tau,\xi)\right| d\xi d\tau \leq M_5 t^{-\mu+1}.$$

E assim, concluímos que $|w(t,x)|$ satisfaz a seguinte estimativa,

$$|w(t,x)| \leq M_6 t^{-\mu+1} \|w\|_t,$$

onde $M_6 = \max\left\{MM_5, M_4M_5\right\}$. Considere agora $t_1 > 0$, um valor qualquer tal que $M_6 t_1^{1-\mu} <$ 1 e suponha que $\|w\|_{t_1} \neq 0$. Como $\|w\|_t$ é uma função crescente em t, segue da estimativa acima que

$$\|w\|_{t_1} = \sup_{\substack{x\in\overline{\Omega} \\ t\in[0,t_1]}} |w(t,x)| \ \leq \ M_6 t_1^{-\mu+1} \|w\|_{t_1},$$

implicando em uma contradição com a hipótese. Logo, $\|w\|_{t_1} = 0$, mostrando que $\overline{u} = \underline{u}$ em $[0,t_1] \times \overline{\Omega}$. Como a estimativa é válida para qualquer t, uma continuação do argumento anterior, leva a conclusão que $u_1 = u_2$ em $\overline{D}_T$. □

1.3 Resultados de existência de solução

Nesta seção, vamos obter resultados de existência de solução para o problema (1.1). Note que o Teorema 1.2 nos garante a existência de uma solução de (1.1) baseada nas hipóteses $K(x,y) \geq 0$ e da existência de um par ordenado de sub e supersolução. No entanto, para garantir a existência desse par ordenado, algumas condições adicionais devem ser impostas sobre as funções $K(x,y)$ e $f(x,u)$. Apresentamos aqui tais condições:

(K_0) $K(x,y) \geq 0, \ \int_\Omega K(x,y)dy \leq 1 \quad (x \in \partial\Omega, \ y \in \Omega)$

(f_0) Existem constantes $m \leq 0$ e $M > 0$ (ou $m > 0$ e $M \leq 0$) tais que

$$f(x,m) \geq 0, \ f(x,M) \leq 0 \quad (x \in \Omega).$$

Teorema 1.3. Assuma que (K_0) e (f_0) ocorram. Então, para qualquer dado inicial u_0, satisfazendo $m \leq u_0 \leq M$, o problema (1.1) possui uma única solução $u(t,x)$ tal que

$$m \leq u(t,x) \leq M \qquad t > 0, \ x \in \overline{\Omega}. \tag{1.46}$$

Além disso, a solução $u(t,x)$ é não negativa se $u_0 \geq 0$ e a condição (f_0) é satisfeita com $m = 0$.

Demonstração. Vamos mostrar que m e M são sub e supersoluções de (1.1), respectivamente e, com base nas hipóteses do Teorema 1.2, podemos concluir que a relação (1.46) é satisfeita. Para isso, note a hipótese (f_0) implica que $\tilde{u} \equiv M$ verifica

$$\tilde{u}_t - L\tilde{u} = M_t - LM = 0 \geq f(x,M) = f(x,\tilde{u}) \quad \text{em } D_T.$$

Além disso, por (K_0), temos que

$$B[\tilde{u}] = B[M] = \alpha_0 \frac{\partial M}{\partial \eta} + M = M \geq M \int_\Omega K(x,y)dy = \int_\Omega K(x,y)\tilde{u}(t,y)dy \quad \text{sobre } S_T.$$

Por fim, temos que $\tilde{u}(0,x) = M \geq u_0$ em Ω. Como $\tilde{u} \equiv M$ verifica as três desigualdades acima, então é uma supersolução de (1.1). De maneira análoga, vamos mostrar que a função constante $\hat{u} \equiv m$ é uma subsolução. Usando a hipótese (f_0), temos que

$$\hat{u}_t - L\hat{u} = m_t - Lm = 0 \leq f(x,m) = f(x,\hat{u}) \quad \text{em } D_T.$$

Além disso, (K_0) garante que

$$B[\hat{u}] = \alpha_0 \frac{\partial \hat{u}}{\partial \eta} + \hat{u} = \alpha_0 \frac{\partial m}{\partial \eta} + m = m \leq m \int_\Omega K(x,y)dy = \int_\Omega K(x,y)\hat{u}(t,y)dy.$$

E ainda, como estamos supondo que $\hat{u}(0,x) = m \leq u_0$, temos que $\hat{u}$ é subsolução de (1.1). Note que agora estamos sob as condições do Teorema 1.2, então a relação

$$m \equiv \hat{u} \leq u \leq \tilde{u} \equiv M,$$

é satisfeita, onde u é a única solução do problema (1.1). Além disso, quando $u_0 \geq 0$ e a condição (f_0) é satisfeita com $m = 0$, a propriedade não negativa de $u(t,x)$ segue de (1.46). □

Note que o Teorema 1.3, produz uma solução limitada não negativa de (1.1) quando $u_0 \geq 0$ e a condição (f_0) é satisfeita com $m = 0$. Contudo, é interessante nos questionar se ainda seria possível encontrar uma solução não negativa para (1.1) caso essas condições não fossem atendidas. Observe que ao substituirmos tais condições pela condição de crescimento linear

$$f(x,u) \leq a(x)u + b(x), \qquad u \geq 0, \ x \in \Omega, \tag{f_1}$$

onde $a(x)$ e $b(x)$ são quaisquer funções contínuas com $b(x) \geq 0$, podemos encontrar uma solução global não negativa. Tal resultado está contido no seguinte teorema.

Teorema 1.4. Seja $f(x,0) \geq 0$. Assuma que as condições (K_0) e (f_1) com $b(x) \geq 0$, ocorram. Então, para qualquer dado inicial $u_0 \geq 0$, existem constantes ρ e γ tais que uma única solução global $u(t,x)$ para o problema (1.1) existe e satisfaz

$$0 \leq u(t,x) \leq \rho e^{\gamma t}, \qquad t > 0,\ x \in \overline{\Omega}. \tag{1.47}$$

Além disso, $u(t,x) \to 0$ uniformemente em $\overline{\Omega}$ conforme $t \to +\infty$, quando $a(x) < 0$ e $b(x) \equiv 0$ em $\overline{\Omega}$.

Demonstração. Vamos mostrar que as funções $\hat{u} = 0$ e $\tilde{u} = \rho e^{\gamma t}$ são sub e supersoluções ordenadas de (1.1), respectivamente, e assim, a existência de uma única solução e a relação (1.47) seguirá do Teorema 1.1. Para tanto, note primeiramente que a partir de $f(x,0) \geq 0$, concluímos que $\hat{u} = 0$, verifica

$$\hat{u}_t - L\hat{u} = 0 \leq f(x,0) = f(x,\hat{u}) \quad \text{em } D_T.$$

Além disso, por (K_0), temos

$$B[\hat{u}] = \alpha_0 \frac{\partial \hat{u}}{\partial \eta} + \hat{u} = 0 \leq 0 \int_\Omega K(x,y)dy \leq \int_\Omega K(x,y)\hat{u}(t,y)dy \quad \text{sobre } S_T,$$

e $\hat{u}(0,x) = 0 \leq u_0(x)$. Como $\hat{u}$ satisfaz as desigualdades acima, temos que $\hat{u} = 0$ é uma subsolução de (1.1). Agora, faremos a mesma verificação para $\tilde{u}$. Com efeito, note que se tomarmos $\gamma \geq a(x) + (b(x)/\rho)\, e^{-\gamma t}$, com $\gamma \geq 0$ e $\rho > 0$, por (f_1), obteremos

$$\begin{aligned} \tilde{u}_t - L\tilde{u} = (\rho e^{\gamma t})_t - L(\rho e^{\gamma t}) = \gamma \rho e^{\gamma t} &\geq \left(a(x) + \frac{b(x)}{\rho e^{\gamma t}} \right)(\rho e^{\gamma t}) \\ &= a(x)\rho e^{\gamma t} + b(x) \\ &\geq f(x, \rho e^{\gamma t}) \\ &= f(x,\tilde{u}) \quad \text{em } D_T. \end{aligned}$$

E ainda, para $\rho \geq u_0$, temos que

$$\tilde{u}(0,x) = (\rho e^{\gamma t})(0,x) = \rho \geq u_0(x) \quad \text{em } \Omega.$$

Por último, vamos analisar a condição de contorno. Para isso, note que, por (K_0), obtemos

$$\rho e^{\gamma t} \geq \rho e^{\gamma t} \int_{\Omega} K(x,y)dy \quad \text{sobre } S_T.$$

Logo,

$$B[\tilde{u}] = B[\rho e^{\gamma t}] = \rho e^{\gamma t} \geq \rho e^{\gamma t} \int K(x,y)dy = \int K(x,y)\hat{u}(t,y)dy \quad \text{sobre } S_T.$$

Dessa forma, como as três desigualdades acima são verdadeiras, podemos concluir que $\tilde{u} = e^{\gamma t}$ é uma supersolução de (1.1). Assim, sobre as hipóteses do Teorema 1.2, concluímos que a relação

$$0 \equiv \hat{u} \leq u(t,x) \leq \tilde{u} \equiv \rho e^{\gamma t} \qquad t > 0,\ x \in \overline{\Omega},$$

ocorre, onde $u(t,x)$ é a única solução global para (1.1). Além disso, quando $a(x) < 0$ e $b \equiv 0$ em $\overline{\Omega}$, a constante γ pode ser escolhida negativa. Nesta situação $u(t,x) \to 0$ quando $t \to \infty$. Isso prova o Teorema. $\square$

Capítulo 2

O problema estacionário

Neste capítulo, estudaremos a existência e unicidade de solução para o problema elíptico

$$\begin{cases} -Lu = f(x,u) & \text{em } \Omega, \\ B[u] = \displaystyle\int_{\Omega} K(x,y)u(y)dy & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, é um domínio limitado regular, $\partial\Omega$ é a fronteira de Ω e $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função Hölder contínua na variável x e de classe C^1 na segunda variável. Além disso, os operadores L, B e a função $K(x,y)$, são definidos como no Capítulo 1.

O capítulo será dividido em três seções. Na primeira, apresentaremos definições e resultados que serão utilizados ao longo do estudo do capítulo. Na segunda seção, apresentamos o método de sub e supersolução, e assim como foi feito no capítulo anterior, construiremos duas sequências utilizando o Método de Iteração Monotônica e mostraremos que ambas convergem para as soluções de (2.1), onde tais soluções são chamadas de soluções maximal e minimal. Na terceira seção, serão apresentados resultados que comprovam a existência das soluções maximal e minimal e a unicidade de solução para o problema (2.1). Veremos que para esses dois casos, será necessário impor algumas condições adicionais sobre as funções$f(x,u)$ e $K(x,y)$.

2.1 Resultados preliminares

Nesta seção, serão apresentadas algumas definições e resultados fundamentais que serão úteis em todo o capítulo, além de referências às correspondentes demonstrações. Apresentamos aqui as principais condições sob as funções $K(x,y)$ e $f(x,u)$ usadas ao longo desta seção:

(K_1) $K(x,y) \geq 0$, $\displaystyle\int_{\Omega} K(x,y)dy < 1 \quad (x \in \partial\Omega,\ y \in \Omega)$;

(K_2) $K(x,y) > 0,\ \int_\Omega K(x,y)dy \leq 1,\ \int_\Omega K(x,y)dy \not\equiv 1 \quad (x \in \partial\Omega,\ y \in \Omega);$

(f_2) $f_u(x,s) \leq 0, \quad$ para $m \leq s \leq M.$

De maneira análoga ao problema (1.1), o esquema iterativo monótono para o problema (2.1) também se baseará em um lema da positividade no qual é apresentado a seguir.

Lema 2.1. Sejam c e β_0 funções não negativas e limitadas que não são ambas identicamente iguais à 0. Se $w \in C^2(\Omega)$ verifica

$$\begin{cases} -Lw + cw \geq 0 & \text{em } \Omega, \\ \alpha_0 \dfrac{\partial w}{\partial \eta} + \beta_0 w \geq 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.2}$$

então $w \geq 0$ em $\overline{\Omega}$. Além disso, $w > 0$ em Ω a menos que $w \equiv 0$.

Demonstração. Ver [12, Chapter 3, Lemma 1.4]. □

Lema 2.2. (**Lema de Hopf's**) Seja L uniformemente elítico e $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$. Suponha que

$$Lu \geq 0 \quad \text{em } \Omega,$$

e que existe $x_0 \in \partial\Omega$ tal que

$$u(x_0) > u(x) \quad \forall\, x \in \Omega.$$

Finalmente, suponha Ω regular. Então, a derivada normal exterior em x_0 satisfaz

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}(x_0) > 0.$$

Demonstração. Ver $\big($[6], Seção 6.4.2$\big)$. □

Teorema 2.1. (**Princípio do Máximo Forte**). Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto conexo, $\mathcal{L} \equiv L + c(x)$ um operador uniformemente elíptico em Ω e $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Caso $c \equiv 0$, temos

(i) Se $\mathcal{L}u \geq 0$ em Ω e u atinge máximo em Ω, então u é constante em Ω;

(ii) Se $\mathcal{L}u \leq 0$ em Ω e u atinge mínimo em Ω, então u é constante em Ω.

No caso em que $c \leq 0$, vale o seguinte:

(iii) Se $\mathcal{L}u \geq 0$ em Ω e u atinge máximo não negativo em Ω, então u é constante em Ω;

(iv) Se $\mathcal{L}u \leq 0$ em Ω e u atinge mínimo não positivo em Ω, então u é constante em Ω.

Demonstração. Ver $\big($[6, Seção 6.4.2, Theorem 4]$\big)$. $\square$

Apresentaremos a seguir, resultados essenciais para provarmos a existência de solução para o problema (2.1). Para tanto, considere inicialmente o seguinte problema:

$$\begin{cases} -\mathcal{L}u = f, & \text{em } \Omega, \\ u = h, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.3}$$

onde $f \in L^2(\Omega)$, $h \in L^2(\partial\Omega)$ e $\mathcal{L} \equiv L + c(x)$ é um operador uniformemente elíptico com a_{ij}, b_j, $c \in L^\infty(\Omega)$.

Definição 2.1. Dizemos que $u \in H_0^1(\Omega)$ é uma solução fraca de (2.3) se

$$\int \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x) u_{x_i} v_{x_j} + \int \sum_{i=1}^{n} b^i(x) u_{x_i} v + \int c(x) uv = \int f(x) v, \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega). \tag{2.4}$$

Teorema 2.2. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado e $\mathcal{L}$ um operador uniformemente elíptico. Então existe uma constante $\gamma \geq 0$ tal que, para toda $f \in L^2(\Omega)$ e $h \in L^2(\partial\Omega)$, o problema

$$\begin{cases} -\mathcal{L}u + \mu u = f & \text{em } \Omega, \\ \mathcal{B}[u] = h & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.5}$$

possui exatamente uma solução fraca em $H_0^1(\Omega)$, sempre que $\mu \geq \gamma$,

Demonstração. Ver $\big($[6, Section 6.2.2, Theorem 3], [9]$\big)$. $\square$

Obs: Se u for solução fraca e tiver regularidade, então será também uma solução clássica (Ver [9, Proposição 4.3.3]).

Para os próximos resultados, considere o seguinte problema

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = f & \text{em } \Omega, \\ B[u] = h & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.6}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ domínio limitado com fronteira regular.

Teorema 2.3. **(Regularidade Elíptica)** Seja $1 < p < +\infty$. Suponha que

- $a_{ij} \in C^1(\overline{\Omega})$;
- b_j, c, $f \in L^p(\Omega)$;
- β, $h \in L^p(\partial\Omega)$.

Se $u \in H^1(\Omega)$ é solução fraca de (2.6), então $u \in W^{2,p}(\Omega)$. Além disso, existe uma constante $C > 0$ (que não é dependente de u) tal que

$$\|u\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C\left(\|f\|_{L^p(\Omega)} + \|h\|_{L^p(\partial\Omega)}\right).$$

E ainda, se tivermos também

- $a_{ij}, b_j, c, f \in W^{k,p}(\Omega)$,
- $\beta, h \in W^{k,p}(\partial\Omega)$,

então, $u \in W^{k+2,p}(\Omega)$ e

$$\|u\|_{W^{k+2,p}(\Omega)} \leq C\left(\|f\|_{W^{k,p}(\Omega)} + \|h\|_{W^{k,p}(\partial\Omega)}\right).$$

Demonstração. Ver ([1, Theorem 9.32]; [8, Theorems 9.11 e 9.13]; [14, B.2]). □

Teorema 2.4. (**Schauder**) Seja $0 < \alpha < 1$. Suponha que

- $a_{ij} \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$;
- $b_j, c, f \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$;
- $\beta, h \in C^{0,\alpha}(\partial\Omega)$.

Se $u \in H^1(\Omega)$ é solução fraca de (2.6), então $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$. Além disso, existe uma constante $C > 0$ (que não é dependente de u) tal que

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(\Omega)} \leq C\left(\|f\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} + \|h\|_{C^{0,\alpha}(\partial\Omega)}\right).$$

E ainda, se tivermos também

- $a_{ij}, b_j, c, f \in C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$;
- $\beta, h \in C^{k,\alpha}(\partial\Omega)$,

então, $u \in C^{k+2,\alpha}(\overline{\Omega})$ e

$$\|u\|_{C^{k+2,\alpha}(\Omega)} \leq C\left(\|f\|_{C^{k,\alpha}(\Omega)} + \|h\|_{C^{k,\alpha}(\partial\Omega)}\right).$$

Demonstração. Ver ([1, Theorem 9.32]; [8, Theorems 9.11 e 9.13]; [14, B.1]). □

2.2 Método de Sub e Supersolução

Nesta seção, abordaremos o método de sub e supersolução para (2.1) e apresentaremos resultados que comprovam a existência e unicidade de solução para esse problema. Com relação ao problema (2.1), temos a seguinte definição de sub e supersolução, onde será baseada novamente na hipótese $K(x,y) \geq 0$.

Definição 2.2. Dizemos que a função $\tilde{u}_s \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ é uma supersolução de (2.1) se verifica

$$\begin{cases} -L\tilde{u}_s \geq f(x,\tilde{u}_s) & \text{em } \Omega, \\ B[\tilde{u}_s] \geq \int_\Omega K(x,y)\tilde{u}_s(y)dy & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.7}$$

Definição 2.3. Dizemos que a função $\hat{u}_s \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ é uma subsolução de (2.1) se verifica

$$\begin{cases} -L\hat{u}_s \leq f(x,\hat{u}_s) & \text{em } \Omega, \\ B[\hat{u}_s] \leq \int_\Omega K(x,y)\hat{u}_s(y)dy & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.8}$$

Definição 2.4. Sejam $\hat{u}_s$, $\tilde{u}_s \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, um par de sub e supersoluções de (2.1). As funções $\hat{u}_s$ e $\tilde{u}_s$ são ditas ordenadas se

$$\hat{u}_s \leq \tilde{u}_s \quad \text{em } \overline{\Omega}.$$

Definição 2.5. Sejam $\tilde{u}_s$, $\hat{u}_s \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ sub e supersoluções de (2.1). Então, para qualquer par ordenado $\hat{u}_s \leq \tilde{u}_s$, definimos o setor $\langle \hat{u}_s, \tilde{u}_s \rangle$, como sendo o intervalo funcional

$$\langle \hat{u}_s, \tilde{u}_s \rangle = \left\{ u \in C(\overline{\Omega});\ \ \hat{u}_s \leq u \leq \tilde{u}_s \right\}.$$

Pode-se perceber que, a partir das definições acima, toda solução (clássica) de (2.1) é uma subsolução ou uma supersolução. Perceba ainda que, quando $\hat{u}_s \leq u_0 \leq \tilde{u}_s$, as funções $\tilde{u}_s$ e $\hat{u}_s$ são também sub e supersoluções de (1.1), pois verificam

$$\begin{cases} (\tilde{u}_s)_t - L\tilde{u}_s = -L\tilde{u}_s \geq f(x,\tilde{u}_s) & \text{em } D_T, \\ B[\tilde{u}_s] \geq \int_\Omega K(x,y)\tilde{u}_s(y)dy & \text{sobre } S_T, \\ \tilde{u}_s(0,x) \geq u_0(x) & \text{em } \Omega, \end{cases}$$

e ainda

$$\begin{cases} (\hat{u}_s)_t - L\hat{u}_s = -L\hat{u}_s \leq f(x,\hat{u}_s) & \text{em } D_T, \\ B[\hat{u}_s] \leq \displaystyle\int_\Omega K(x,y)\hat{u}_s(y)dy & \text{sobre } S_T, \\ \hat{u}_s(0,x) \leq u_0(x) & \text{em } \Omega. \end{cases}$$

Antes de prosseguirmos com o próximo resultado desta seção, vamos construir uma sequência, por meio do *Método de Iteração Monotônica*, utilizando problemas auxiliares. Tal sequência será utilizada no Teorema 2.5, onde provaremos a existência de solução para o problema (2.1). Para tanto, considere inicialmente uma função $u_s^{(0)} \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ e o seguinte problema auxiliar

$$\begin{cases} -Lu + cu = f\big(x, u_s^{(0)}\big) + cu_s^{(0)} & \text{em } \Omega, \\ B[u] = \displaystyle\int_\Omega K(x,y)u_s^{(0)}(y)dy & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.9}$$

onde $c \equiv c(x)$ é uma função a ser escolhida posteriormente. Pelo Teorema 2.2, o problema (2.9) admite uma única solução, denotada por $u_s^{(1)}$. De maneira análoga, considere o seguinte problema

$$\begin{cases} -Lu_s + cu_s = f\big(x, u_s^{(1)}\big) + cu_s^{(1)} & \text{em } \Omega, \\ B[u] = \displaystyle\int_\Omega K(x,y)u_s^{(1)}(y)dy & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.10}$$

Novamente pelo Teorema 2.2, o problema (2.10) possui uma única solução, que será denotada por $u_s^{(2)}$. Continuando esse processo indutivamente, concluímos pelo Teorema 2.2, que existe uma única solução, denotada por $u_s^{(k)}$, satisfazendo

$$\begin{cases} -Lu_s^{(k)} + cu_s^{(k)} = f(x, u_s^{(k-1)}) + cu_s^{(k-1)} & \text{em } \Omega, \\ B[u_s^{(k)}] = \displaystyle\int_\Omega K(x,y)u_s^{(k-1)}(y)dy & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.11}$$

Quando existem sub e supersoluções de (2.1), podemos repetir a iteração acima com $\underline{u}_s^{(0)} = \hat{u}_s$ ou $\overline{u}_s^{(0)} = \tilde{u}_s$. Para o próximo teorema, denote a sequencia por $\{\overline{u}_s^{(k)}\}$ quando $\overline{u}_s^{(0)} = \tilde{u}_s$ e por $\{\underline{u}_s^{(k)}\}$ quando $\underline{u}_s^{(0)} = \hat{u}_s$. Além disso, defina a função $c(x)$ da seguinte forma

$$c(x) \equiv \max\left\{\gamma, \max\left\{-\frac{\partial f}{\partial r}(x,r);\ \hat{u}_s(x) \leq r(x) \leq \tilde{u}_s(x)\right\}\right\}, \tag{2.12}$$

onde γ é dada pelo Teorema 2.2. As sequências $\{\overline{u}_s^{(k)}\}$ e $\{\underline{u}_s^{(k)}\}$ possuem a seguinte propriedade de convergência monótona semelhante à do Teorema 1.2.

Teorema 2.5. Seja $K(x,y) \geq 0$. Suponha que exista $\hat{u}_s$ e $\tilde{u}_s$, um par ordenado de sub e supersoluções de (2.1). Então, as sequências $\{\overline{u}_s^{(k)}\}$ e $\{\underline{u}_s^{(k)}\}$ convergem monotonicamente para as soluções $\overline{u}_s$ e $\underline{u}_s$ de (2.1), respectivamente, e satisfazem a seguinte relação de monotonia

$$\hat{u}_s \leq \underline{u}_s^{(k)} \leq \underline{u}_s^{(k+1)} \leq \overline{u}_s^{(k+1)} \leq \overline{u}_s^{(k)} \leq \tilde{u}_s \quad \text{em } \overline{\Omega}. \tag{2.13}$$

Além disso, $\underline{u}_s \leq \overline{u}_s$ em $\overline{\Omega}$, e se u_s^* é qualquer outra solução em $\langle \hat{u}_s, \tilde{u}_s \rangle$, então

$$\underline{u}_s \leq u_s^* \leq \overline{u}_s \quad \text{em } \overline{\Omega}.$$

Demonstração. A demonstração do Teorema será dividida nos seguintes passos:

(i) Mostrar que as sequências $\{\underline{u}_s^{(k)}\}$ e $\{\overline{u}_s^{(k)}\}$ possuem a seguinte relação de monotonia

$$\hat{u}_s \leq \underline{u}_s^{(k)} \leq \underline{u}_s^{(k+1)} \leq \underline{u}_s \leq \overline{u}_s \leq \overline{u}_s^{(k+1)} \leq \overline{u}_s^{(k)} \leq \tilde{u}_s \quad \text{em } \overline{\Omega}. \tag{2.14}$$

(ii) Mostrar que $\overline{u}_s$ e $\underline{u}_s$ são soluções do problema (2.1);

(iii) Mostrar que, se $u_s^* \in \langle \hat{u}_s, \tilde{u}_s \rangle$ é qualquer outra solução de (2.1), então

$$\underline{u}_s \leq u_s^* \leq \overline{u}_s \quad \text{em } \overline{\Omega}.$$

Passo (i): A prova deste passo será feita argumentando por indução. Primeiro vamos mostrar que

$$\underline{u}_s^{(0)} \leq \underline{u}_s^{(1)} \leq \overline{u}_s^{(1)} \leq \overline{u}_s^{(0)} \quad \text{em } \overline{\Omega}. \tag{2.15}$$

Iniciamos provando que $\overline{u}_s^{(1)} \leq \overline{u}_s^{(0)}$ em $\overline{\Omega}$. Para isso, considere a função $v = \overline{u}_s^{(0)} - \overline{u}_s^{(1)}$. Pela definição de supersolução, (2.11) e a hipótese $\overline{u}_s^{(0)} = \tilde{u}_s$, temos

$$\begin{aligned}
-Lv + cv &= -L\left(\overline{u}_s^{(0)} - \overline{u}_s^{(1)}\right) + c\left(\overline{u}_s^{(0)} - \overline{u}_s^{(1)}\right) \\
&= \left(-L\overline{u}_s^{(0)} + c\overline{u}_s^{(0)}\right) - \left(-L\overline{u}_s^{(1)} + c\overline{u}_s^{(1)}\right) \\
&= \left(-L\overline{u}_s^{(0)} + c\overline{u}_s^{(0)}\right) - \left(f\left(x, \overline{u}_s^{(0)}\right) + c\overline{u}_s^{(0)}\right) \\
&= -L\overline{u}_s^{(0)} - f\left(x, \overline{u}_s^{(0)}\right) \\
&= -L\tilde{u} - f(x, \tilde{u}) \geq 0 \quad \text{em } \Omega.
\end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
B[v] &= B[\tilde{u}_s] - B[\overline{u}_s^{(1)}] \\
&\geq \int_\Omega K(x,y)\tilde{u}_s(y)dy - \int_\Omega K(x,y)\overline{u}_s^{(0)}(y)dy \\
&= \int_\Omega K(x,y)\big(\tilde{u}_s - \overline{u}_s^{(0)}\big)(y)dy \\
&= \int_\Omega K(x,y)(\tilde{u}_s - \tilde{u}_s)(y)dy = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega.
\end{aligned}$$

Pelas desigualdades obtidas acima, temos

$$\begin{cases} -Lv + cv \geq 0 & \text{em } \Omega \\ B[v] \geq 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

Pelo Lema 2.1, temos que $\overline{v} \geq 0$ em $\overline{\Omega}$, ou seja, $\overline{u}_s^{(1)} \leq \overline{u}_s^{(0)}$ em $\overline{\Omega}$, como queríamos provar. Usando (2.11), a definição de subsolução e a hipótese $\underline{u}_s^{(0)} = \hat{u}_s$, pode-se provar de maneira análoga que $\underline{u}_s^{(1)} \leq \underline{u}_s^{(0)}$. Vamos agora mostrar que $\underline{u}_s^{(1)} \leq \overline{u}_s^{(1)}$. Para isso, considere a função $\overline{v} = \overline{u}_s^{(1)} - \underline{u}_s^{(1)}$. Então,

$$\begin{aligned}
-L\overline{v} + c\overline{v} &= -L\left(\overline{u}_s^{(1)} - \underline{u}_s^{(1)}\right) + c\left(\overline{u}_s^{(1)} - \underline{u}_s^{(1)}\right) \\
&= \left(-L\overline{u}_s^{(1)} + c\overline{u}_s^{(1)}\right) - \left(-L\underline{u}_s^{(1)} + c\underline{u}_s^{(1)}\right) \\
&= f\big(x, \overline{u}_s^{(0)}\big) + c\overline{u}_s^{(0)} - \big(f\big(x, \underline{u}_s^{(0)}\big) + c\underline{u}_s^{(0)}\big) \\
&= f\big(x, \tilde{u}_s\big) + c\tilde{u}_s - \big(f\big(x, \hat{u}_s\big) + c\hat{u}_s\big) \quad \text{em } \Omega.
\end{aligned}$$

Com o intuito de aplicar novamente o Lema 2.1, vamos provar que

$$f(x, \tilde{u}) + c\tilde{u} \geq f\big(x, \hat{u}\big) + c\hat{u} \quad \text{em } \Omega,$$

Para isso, considere a função

$$\begin{aligned}
g\colon\ \langle \hat{u}_s, \tilde{u}_s \rangle &\longrightarrow \mathbb{R} \\
r &\longmapsto g(r) = f(x,r) + c(x)r,
\end{aligned}$$

Note que, por (2.12), a função $r \mapsto f(x,r) + c(x)r$ é crescente em $\langle \hat{u}_s, \tilde{u}_s \rangle$. Em particular, para $r_1 = \hat{u}_s$ e $r_2 = \tilde{u}_s$, temos

$$g\big(r_2\big) \geq g\big(r_1\big),$$

isto é,

$$g\big(\tilde{u}_s\big) \geq g\big(\hat{u}_s\big).$$

Desta forma, obtemos

$$f\big(x,\tilde{u}_s\big) + c\tilde{u}_s \geq f\big(x,\hat{u}_s\big) + c\hat{u}_s \quad \text{em } \Omega.$$

concluindo que

$$-L\overline{v} + c\overline{v} \geq 0 \quad \text{em } \Omega.$$

Além disso

$$\begin{aligned}
B[\overline{v}] &= B[\overline{u}^{(1)}] - B[\underline{u}^{(1)}] \\
&= \int_\Omega K(x,y)\overline{u}_s^{(0)}(y)dy - \int_\Omega K(x,y)\underline{u}_s^{(0)}(y)dy \\
&= \int_\Omega K(x,y)\big(\overline{u}_s^{(0)} - \underline{u}_s^{(0)}\big)(y)dy \\
&= \int_\Omega K(x,y)\big(\tilde{u}_s - \hat{u}_s\big)(y)dy \geq 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega.
\end{aligned}$$

Pelas desigualdades acima, temos

$$\begin{cases} -L\overline{v} + c\overline{v} \geq 0 & \text{em } \Omega, \\ B[\overline{v}] \geq 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Segue novamente do Lema 2.1 que, $\overline{v} \geq 0$ em $\overline{\Omega}$, ou seja, $\overline{u}_s^{(1)} \geq \overline{u}_s^{(1)}$ em $\overline{\Omega}$. Dessa forma, concluímos que (2.15) ocorre. Agora, suponha por indução que

$$\underline{u}_s^{(k-1)} \leq \underline{u}_s^{(k)} \leq \overline{u}_s^{(k)} \leq \overline{u}_s^{(k-1)} \quad \text{em } \overline{\Omega}. \tag{2.16}$$

Vamos provar que

$$\underline{u}_s^{(k)} \leq \underline{u}_s^{(k+1)} \leq \overline{u}_s^{(k+1)} \leq \overline{u}_s^{(k)} \quad \text{em } \overline{\Omega}. \tag{2.17}$$

Vamos começar mostrando que $\overline{u}_s^{(k+1)} \leq \overline{u}_s^{(k)}$. Para isso, considere $v_s = \overline{u}_s^{(k)} - \overline{u}_s^{(k+1)}$. Por (2.11), temos

$$\begin{aligned}
-Lv_s + cv_s &= -L\left(\overline{u}_s^{(k)} - \overline{u}_s^{(k+1)}\right) + c\left(\overline{u}_s^{(k)} - \overline{u}_s^{(k+1)}\right) \\
&= \left(-L\overline{u}_s^{(k)} + c\overline{u}_s^{(k)}\right) - \left(-L\overline{u}_s^{(k+1)} + c\overline{u}_s^{(k+1)}\right) \\
&= f\big(x, \overline{u}_s^{(k-1)}\big) + c\overline{u}_s^{(k-1)} - f\big(x, \overline{u}_s^{(k)}\big) - c\overline{u}_s^{(k)} \quad \text{em } \Omega.
\end{aligned}$$

Fazendo $r_1 = \overline{u}_s^{(k)}$ e $r_2 = \overline{u}_s^{(k-1)}$, segue da hipótese de indução e (2.12), que

$$g\big(x, r_2\big) \geq g\big(x, r_1\big),$$

isto é,

$$g\big(x, \overline{u}_s^{(k-1)}\big) \geq g\big(x, \overline{u}_s^{(k)}\big).$$

Desta forma, obtemos

$$f\big(x, \overline{u}_s^{(k-1)}\big) + c\overline{u}_s^{(k-1)} \geq f\big(x, \overline{u}_s^{(k)}\big) + c\overline{u}_s^{(k)} \quad \text{em } \Omega,$$

concluindo que

$$-Lv_s + cv_s \geq 0 \quad \text{em } \Omega.$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
B[v_s] &= B[\overline{u}_s^{(k)}] - B[\underline{u}_s^{(k+1)}] \\
&= \int_\Omega K(x,y)\overline{u}_s^{(k-1)}(y)dy - \int_\Omega K(x,y)\underline{u}_s^{(k)}(y)dy \\
&= \int_\Omega K(x,y)\big(\overline{u}_s^{(k-1)} - \underline{u}_s^{(k)}\big)(y)dy \geq 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega.
\end{aligned}$$

pois por hipótese, $\overline{u}_s^{(k-1)} \geq \underline{u}_s^{(k)}$ e $K(x,y) \geq 0$. Pelas desigualdades acima, temos

$$\begin{cases} -Lv_s + c\overline{v}_s \geq 0 & \text{em } \Omega, \\ B[v_s^k] \geq 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Segue novamente do Lema 2.1 que, $v_s \geq 0$ em $\overline{\Omega}$, ou seja, $\overline{u}_s^{(k+1)} \leq \overline{u}_s^{(k)}$ em $\overline{\Omega}$, como queríamos provar. Usando (2.11), pode-se provar de maneira análoga que $\underline{u}_s^{(k)} \leq \underline{u}_s^{(k+1)}$ em

$\overline{\Omega}$. Resta agora mostrar que $\underline{u}_s^{(k+1)} \leq \overline{u}_s^{(k+1)}$. Para tanto, considere $\overline{v}_s = \overline{u}_s^{(k+1)} - \underline{u}_s^{(k+1)}$. Por (2.11), temos

$$\begin{aligned} -L\overline{v}_s + c\overline{v}_s &= -L\left(\overline{u}_s^{(k+1)} + \underline{u}_s^{(k+1)}\right) + c\left(\overline{u}_s^{(k+1)} - \underline{u}_s^{(k+1)}\right) \\ &= \left(-L\overline{u}_s^{(k+1)} + c\overline{u}_s^{(k+1)}\right) - \left(-L\underline{u}_s^{(k+1)} + c\underline{u}_s^{(k+1)}\right) \\ &= f\left(x, \overline{u}_s^{(k)}\right) + c\overline{u}_s^{(k)} - f\left(x, \underline{u}_s^{(k)}\right) - c\underline{u}_s^{(k)} \quad \text{em } \Omega. \end{aligned}$$

Pela hipótese de indução e (2.12), segue que

$$g(x, \overline{u}_s^{(k)}) \geq g(x, \underline{u}_s^{(k)}).$$

Logo,

$$f\left(x, \overline{u}_s^{(k)}\right) + c\overline{u}_s^{(k)} \geq f\left(x, \underline{u}_s^{(k)}\right) + c\underline{u}_s^{(k)} \quad \text{em } \Omega.$$

e portanto,

$$-L\overline{v}_s + c\overline{v}_s \geq 0 \quad \text{em } \Omega.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} B[\overline{v}_s] &= B\left[\overline{u}_s^{(k+1)}\right] - B\left[\underline{u}_s^{(k+1)}\right] \\ &= \int_\Omega K(x,y)\overline{u}_s^{(k)}(y)dy - \int_\Omega K(x,y)\underline{u}_s^{(k)}(y)dy \\ &= \int_\Omega K(x,y)\left(\overline{u}_s^{(k)} - \underline{u}_s^{(k)}\right)(y)dy \geq 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega. \end{aligned}$$

pois, por hipótese, $\overline{u}_s^{(k)} \geq \underline{u}_s^{(k)}$ e $K(x,y) \geq 0$. Assim

$$\begin{cases} -L\overline{v}_s + c\overline{v}_s \geq 0 & \text{em } \Omega, \\ B[\overline{v}_s] \geq 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Logo, pelo Lema 2.1, temos que $\overline{v}_s \geq 0$ em $\overline{\Omega}$, isto é, $\underline{u}_s^{(k+1)} \leq \overline{u}_s^{(k+1)}$ em $\overline{\Omega}$, como queríamos mostrar. Portanto, a relação (2.13) é satisfeita. Além disso, como as sequências monótonas de números reais $\left\{\overline{u}_s^{(k)}(x)\right\}$ e $\left\{\underline{u}_s^{(k)}(x)\right\}$ são limitadas, seus limites pontuais existem, digamos

$$\lim_{k\to\infty} \overline{u}_s^{(k)}(x) = \overline{u}_s(x) \quad \text{e} \quad \lim_{k\to\infty} \underline{u}_s^{(k)}(x) = \underline{u}_s(x),$$

Portanto, para $k > 0$, temos

$$\hat{u}_s \leq \underline{u}_s^{(k)} \leq \underline{u}_s^{(k+1)} \leq \underline{u}_s \leq \overline{u}_s \leq \overline{u}_s^{(k+1)} \leq \overline{u}_s^{(k)} \leq \tilde{u}_s \quad \text{em } \overline{\Omega},$$

completando assim, a prova do passo (i).

Passo (ii): Vamos agora mostrar que os limites $\overline{u}_s(x)$ e $\underline{u}_s(x)$ são soluções de (2.1). Com efeito, como $r \mapsto f(x,r) + cr$ é crescente em $\langle \hat{u}_s, \tilde{u}_s \rangle$ e, conforme provado no passo (i), $\hat{u}_s \leq \underline{u}_s^{(k)} \leq \tilde{u}_s$, então

$$f(x,\hat{u}_s) + c\hat{u}_s \leq f\left(x, \underline{u}_s^{(k)}\right) + c\underline{u}_s^{(k)} \leq f(x,\tilde{u}_s) + c\tilde{u}_s \quad \text{em } \Omega.$$

Logo, para cada $x \in \Omega$ e $k \geq 0$, temos

$$\left| f\left(x, \underline{u}_s^{(k)}\right) + c\underline{u}_s^{(k)} \right| \leq \max\left\{ |f(x,\hat{u}) + c\hat{u}|, |f(x,\tilde{u}) + c\tilde{u}| \right\},$$

e, portanto

$$\left\| f\left(x, \underline{u}_s^{(k)}\right) + c\underline{u}_s^{(k)} \right\|_\infty \leq \max\left\{ \|f(x,\hat{u}_s]) + c\hat{u}\|_\infty, \|f(x,\tilde{u}_s) + c\tilde{u}_s\|_\infty \right\},$$

mostrando assim que $f\left(x, \underline{u}_s^{(k)}\right) + c\underline{u}_s^{(k)}$ é limitada em $L^\infty(\Omega)$. Além disso, por hipótese $0 \leq K(x,y)$ é regular. Logo

$$\int_\Omega K(x,y)\hat{u}_s(y)dy \leq \int_\Omega K(x,y)\underline{u}_s^{(k)}(y)dy \leq \int_\Omega K(x,y)\tilde{u}_s(y)dy.$$

Portanto, de forma análoga ao que foi feito para a função $f(x, \underline{u}_s^{(k)})$, podemos concluir que

$$\int_\Omega K(x,y)\underline{u}_s^{(k)}(y)dy,$$

é também limitada em $L^\infty(\partial\Omega)$. Agora, denotando por

$$f^{(k)} \equiv f\left(x, \underline{u}_s^{(k)}\right) + c\underline{u}_s^{(k)} \quad \text{e} \quad g^{(k)} \equiv \int_\Omega K(x,y)\underline{u}_s^{(k)}(y)dy, \tag{2.18}$$

obtemos, pela regularidade elíptica (ver Teorema 2.3), a seguinte estimativa

$$\|\underline{u}_s^{(k)}\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C\left(\|f^{(k)}\|_{L^p(\Omega)} + \|g^{(k)}\|_{L^p(\partial\Omega)} \right) \quad \forall\, p \geq 1,$$

onde $C \equiv C(\Omega, p) > 0$. Usando as imersões $L^\infty(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ e $L^\infty(\partial\Omega) \hookrightarrow L^p(\partial\Omega)$, segue que

$$\|\underline{u}_s^{(k)}\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C_1 \left(\|f^{(k)}\|_{L^\infty(\Omega)} + \|g^{(k)}\|_{L^\infty(\partial\Omega)} \right),$$

para uma constante $C_1 > 0$. Isso implica que $\underline{u}_s^{(k)}$ é limitada em $W^{2,p}(\Omega)$. Além disso, segue da imersão $W^{2,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{1,\alpha}(\Omega)$ (ver [6]), que $\underline{u}_s^{(k)}$ é limitada em $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ e portanto

$$f\big(x, \underline{u}_s^{(k-1)}\big) + c\underline{u}_s^{(k-1)} \quad \text{e} \quad \int_\Omega K(x,y)\underline{u}^{(k-1)}(y)dy, \tag{2.19}$$

são limitadas em $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ e $C^{0,\alpha}(\partial\Omega)$, respectivamente. Pela regularidade de Schauder (ver Teorema 2.4), temos $\underline{u}_s^{(k)} \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ e, ainda

$$\|\underline{u}_s^{(k)}\|_{C^{2,\alpha}(\Omega)} \leq C_2 \left(\|f^{(k)}\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} + \|g^{(k)}\|_{C^{0,\alpha}(\partial\Omega)} \right),$$

para uma constante $C_2 > 0$. Por (2.19), segue que $\underline{u}^{(k)}$ é limitada em $C^{2,\alpha}(\Omega)$. Da imersão compacta $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow\hookrightarrow C^2(\overline{\Omega})$ (ver [6]), obtemos que, a menos de uma subsequência, $\underline{u}^{(k)}$ é convergente em $C^2(\overline{\Omega})$. Repetindo todo esse processo para $\overline{u}_s^{(k)}$, também obtemos, a menos de uma subsequência, que $\overline{u}_s^{(k)}$ é convergente em $C^2(\overline{\Omega})$. Como já conhecíamos o limites pontuais

$$\lim_{k\to\infty} \overline{u}_s^{(k)}(x) = \overline{u}_s(x) \quad \text{e} \quad \lim_{k\to\infty} \underline{u}_s^{(k)}(x) = \underline{u}_s(x) \quad \forall x \in \overline{\Omega},$$

por unicidade do limite, concluímos que

$$\overline{u}_s^{(k)} \longrightarrow \overline{u}_s \quad \text{e} \quad \underline{u}_s^{(k)} \longrightarrow \underline{u}_s \quad \text{em } C^2(\overline{\Omega}). \tag{2.20}$$

Recorde agora que $\underline{u}_s^{(k)}$ verifica

$$\begin{cases} -L\underline{u}_s^{(k)} + cu_s^{(k)} = f(x, u_s^{(k-1)}) + cu_s^{(k-1)} & \text{em } \Omega, \\ B[u_s^{(k)}] = \displaystyle\int_\Omega K(x,y)u_s^{(k-1)}(y)dy & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.21}$$

Fazendo $k \to +\infty$ e usando (2.20), obtemos

$$\begin{cases} -L\underline{u}_s + c\underline{u}_s = f(x, \underline{u}_s) + c\underline{u}_s & \text{em } \Omega, \\ B[\underline{u}_s] = \displaystyle\int_\Omega K(x,y)\underline{u}_s(y)dy & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.22}$$

e, portanto,

$$\begin{cases} -L\underline{u}_s = f(x,\underline{u}_s) & \text{em } \Omega, \\ B[\underline{u}_s] = \displaystyle\int_\Omega K(x,y)\underline{u}_s(y)dy & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.23}$$

mostrando que $\underline{u}_s$ é solução de (2.1). De modo análogo, mostra-se que $\overline{u}_s$ também é solução de (2.1).

Passo (iii): Seja $u_s^* \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ uma solução qualquer de (2.1), com $u_s^* \in \langle \hat{u}_s, \tilde{u}_s \rangle$. Argumentando por indução, provaremos que

$$\underline{u}_s^{(k)} \leq u_s^* \leq \overline{u}_s^{(k)} \quad \text{em } \overline{\Omega}. \tag{2.24}$$

Com efeito, primeiro vamos mostrar que

$$\underline{u}_s^{(0)} \leq u_s^* \leq \overline{u}_s^{(0)} \quad \text{em } \overline{\Omega}. \tag{2.25}$$

Para isso, vamos dar inicio provando que $\underline{u}_s^{(0)} \leq u_s^*$ em $\overline{\Omega}$. Note que

$$\underline{u}_s^0 = \hat{u}_s \leq u_s^* \quad \text{em } \overline{\Omega}. \tag{2.26}$$

Por outro lado

$$\overline{u}_s^0 = \tilde{u}_s \geq u_s^* \quad \text{em } \overline{\Omega}. \tag{2.27}$$

E assim, por (2.26) e (2.27), concluímos que (2.25) ocorre. Agora, suponha por indução que

$$\underline{u}_s^{(k-1)} \leq u_s^* \leq \overline{u}_s^{(k-1)} \quad \text{em } \overline{\Omega}.$$

Mostraremos que a relação (2.24) é verdadeira. Comecemos mostrando que $\underline{u}_s^{(k)} \leq u_s^*$ em $\overline{\Omega}$. Para isso, considere a função $w = u_s^* - \underline{u}^{(k)}$. Em vista de (2.1), temos

$$\begin{aligned} -Lw + cw &= -L\left(u_s^* - \underline{u}_s^{(k)}\right) + c\left(u_s^* - \underline{u}_s^{(k)}\right) \\ &= (-Lu_s^* + cu_s^*) - \left(-L\underline{u}_s^{(k)} + c\underline{u}_s^{(k)}\right) \\ &= f\left(x, u_s^*\right) + cu_s^* - f\left(x, \underline{u}_s^{(k-1)}\right) - c\underline{u}_s^{(k-1)} \quad \text{em } \Omega. \end{aligned}$$

Como $u_s^*, \underline{u}_s^{(k-1)} \in \langle \hat{u}_s, \tilde{u}_s \rangle$ e $s \mapsto f(x,s) + c(x)s$ é crescente em $\langle \hat{u}_s, \tilde{u}_s \rangle$, então pela hipótese de indução, temos

$$f\big(x, u_s^*\big) + cu_s^* \geq f\big(x, \underline{u}_s^{(k-1)}\big) + c\underline{u}_s^{(k-1)} \quad \text{em } \Omega.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} B[u_s^* - \underline{u}_s^{(k)}] &= B[u_s^* - \underline{u}_s^{(k)}] \\ &= \int_\Omega K(x,y)u_s^*(y)dy - \int_\Omega K(x,y)\underline{u}_s^{(k-1)}(y)dy) \\ &= \int_\Omega K(x,y)\big(u_s^* - \underline{u}_s^{(k-1)}\big)(y)dy \geq 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Logo, pelo Lema 2.1, temos que $w \geq 0$ em $\overline{\Omega}$, isto é, $\underline{u}_s^{(k)} \leq u_s^*$ em $\overline{\Omega}$. De maneira análoga, mostra-se que $u_s^* \leq \overline{u}_s^{(k)}$ em $\overline{\Omega}$. Dessa forma, fazendo $k \to +\infty$ em (2.24), obtemos

$$\lim_{k\to\infty} \underline{u}^{(k)}(x) \leq \lim_{k\to\infty} u_s^*(x) \leq \lim_{k\to\infty} \overline{u}^{(k)}(x) \quad \text{em } \overline{\Omega},$$

implicando em

$$\underline{u}_s \leq u_s^* \leq \overline{u}_s \quad \text{em } \overline{\Omega}.$$

Como queríamos mostrar. □

Observação: Tendo em vista a relação $\underline{u}_s \leq u_s^* \leq \overline{u}_s$, para qualquer solução $u_s^* \in \langle \hat{u}_s, \tilde{u}_s \rangle$, dizemos que $\overline{u}_s$ e $\underline{u}_s$ são soluções maximal e minimal, respectivamente, de (2.1) neste intervalo.

2.3 Resultados de existência e unicidade

Para garantir a existência de soluções maximal e mimimal, precisamos encontrar um par ordenado de sub e supersoluções. No primeiro resultado apresentado nesta seção, veremos que tal par ordenado será dado por $\tilde{u}_s = M$ e $\hat{u}_s = m$ quando as condições (K_0) e (f_0) são satisfeitas. Veremos ainda que para garantir a unicidade de solução para o problema (2.1), é suficiente que a função $K(x,y)$ satisfaça a condição (K_1) ou (K_2) e a função $f(x,u)$ satisfaça a condição (f_2). Para facilitar a leitura, vamos reescreve-las aqui:

(K_1) $K(x,y) \geq 0, \displaystyle\int_\Omega K(x,y)dy < 1 \quad (x \in \partial\Omega,\ y \in \Omega);$

(K_2) $K(x,y) > 0, \ \int_\Omega K(x,y)dy \leq 1, \ \int_\Omega K(x,y)dy \not\equiv 1 \quad (x \in \partial\Omega, \ y \in \Omega).$

(f_0) Existem constantes $m \leq 0$ e $M > 0$ (ou $m > 0$ e $M \leq 0$) tais que

$$f(x,m) \geq 0, \ f(x,M) \leq 0 \quad (x \in \Omega).$$

(f_2) $f_u(x,s) \leq 0 \quad m \leq s \leq M.$

Como consequência do Teorema 2.5 temos o seguinte resultado de existência.

Teorema 2.6. Suponha que as condições (K_0) e (f_0) sejam satisfeitas. Então o problema (2.1) possui solução maximal $\overline{u}_s$ e solução minimal $\underline{u}_s$, tais que

$$m \leq \underline{u}_s(x) \leq \overline{u}_s(x) \leq M \qquad \forall x \in \overline{\Omega}. \tag{2.28}$$

Além disso, se u_s^* é qualquer solução entre m e M, então

$$\underline{u}_s(x) \leq u_s^*(x) \leq \overline{u}_s(x) \quad \text{em } \overline{\Omega}. \tag{2.29}$$

Demonstração. Vamos mostrar que as funções constantes $\hat{u}_s \equiv m$ e $\tilde{u}_s \equiv M$, são sub e super-soluções de (2.1), respectivamente. Assim, a conclusão deste teorema seguirá diretamente do Teorema 2.5. Para tanto, note que, sendo $M > 0$, por (K_0), temos

$$M \int_\Omega K(x,y)dy \leq M \quad \text{sobre } \partial\Omega. \tag{2.30}$$

Analogamente, para $m \leq 0$, temos

$$m \int_\Omega K(x,y)dy \geq m \quad \text{sobre } \partial\Omega. \tag{2.31}$$

Agora, observe que a hipótese (f_0) implica que a função constante $\tilde{u}_s \equiv M$, satisfaz

$$-L\tilde{u}_s = -LM = 0 \geq f(x,M) = f(x,\tilde{u}_s) \quad \text{em } \Omega.$$

Além disso, pelas hipóteses (K_0) e (2.30),

$$B[\tilde{u}_s] = B[M] = \alpha_0 \frac{\partial M}{\partial \eta} + M = M \geq M \int_\Omega K(x,y)dy = \int_\Omega K(x,y)\tilde{u}_s(y)dy \quad \text{sobre } \partial\Omega.$$

Como $\tilde{u}_s \equiv M$ verifica as duas ultimas desigualdades acima, então é uma supersolução de (2.1). De maneira análoga, vamos mostrar $\hat{u}_s \equiv m$ é uma subsolução de (2.1). Usando a hipótese (f_0), temos que

$$-L\hat{u}_s = -Lm = 0 \leq f(x,m) = f(x,\hat{u}_s) \quad \text{em } \Omega.$$

Além disso, pelas hipóteses (K_0) e (2.31),

$$B[\hat{u}_s] = B[m] = \alpha_0 \frac{\partial m}{\partial \eta} + m = m \leq m \int_\Omega K(x,y)dy = \int_\Omega K(x,y)\hat{u}_s(y)dy \quad \text{sobre } \Omega.$$

Note que agora estamos sobre as hipóteses do Teorema 2.5, e assim concluímos que a relação

$$m \leq \underline{u}_s(x) \leq \overline{u}_s(x) \leq M \quad x \in \overline{\Omega},$$

é satisfeita. E ainda, para qualquer outra solução $\underline{u}_s^*$ entre $m \leq 0$ e $M > 0$, segue que

$$\underline{u}_s \leq \underline{u}_s^* \leq \overline{u}_s \quad x \in \overline{\Omega}.$$

□

Perceba que, pelo Teorema 2.6, é possível que o problema (2.1) possua mais de uma solução entre $m \leq 0$ e $M > 0$. O Lema a seguir fornece um resultado de comparação que será crucial para a propriedade de unicidade de uma solução para (2.1).

Lema 2.3. Suponha que $K(x,y)$ satisfaz a condição (K_1) ou (K_2) e que a função $w \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ verifica

$$\begin{cases} -Lw \leq 0 & \text{em } \Omega, \\ B[w] \leq \displaystyle\int_\Omega K(x,y)w(y)dy & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.32}$$

Então, $w(x) \leq 0$ em $\overline{\Omega}$.

Demonstração. Suponha, por contradição, que exista $x \in \overline{\Omega}$ tal que $w(x) > 0$. Então, existe $x_0 \in \overline{\Omega}$ tal que $w(x_0) > 0$ é um máximo positivo. Se $x_0 \in \Omega$, então pelo item (i) do Teorema 2.1, $w(x)$ é uma constante positiva, isto é

$$w(x) = k, \quad \forall\, x \in \overline{\Omega},\ k > 0. \tag{2.33}$$

No entanto, sendo isso verdade, note que por (2.32), temos

$$\int_\Omega K(x,y)w(y)dy \geq B[w(y)] = \alpha_0 \frac{\partial w(y)}{\partial \eta} + w(y) = \alpha_0 \frac{\partial k}{\partial \eta} + k = k. \tag{2.34}$$

E ainda por (2.33), obtemos

$$\int_{\Omega} K(x,y)w(y)dy = \int_{\Omega} K(x,y)kdy = k\int_{\Omega} K(x,y)dy. \tag{2.35}$$

Logo, de (2.34) e (2.35), concluímos que

$$\int_{\Omega} K(x,y)dy \geq 1.$$

Uma contradição com (K_1) e (K_2) e, portanto, $x_0 \notin \Omega$. Agora, vamos mostrar que $x_0 \notin \partial\Omega$. Para isso, é necessário recordar que Ω regular e $-Lw \leq 0$ em Ω, então estamos sobre as hipóteses do Lema 2.2, o que implica em

$$\frac{\partial w}{\partial \eta}(x_0) > 0.$$

Agora observe que, se $x_0 \in \partial\Omega$, a relação

$$\alpha_0 \frac{\partial w(x_0)}{\partial \eta} + w(x_0) \leq \int_{\Omega} K(x_0,y)w(x_0)dy, \tag{2.36}$$

não é verdadeira. Para mostrar isso, vamos analisar os seguintes casos

(i) Condição (K_1) e $\alpha_0 \geq 0$;

(ii) Condição (K_2) e $\alpha_0 > 0$;

(iii) Condição (K_2) e $\alpha_0 = 0$.

De fato, tendo em vista (2.32) e a definição de $B[w]$, suponha primeiramente que (i) ocorra. Então

$$w(x_0) \leq \alpha_0 \frac{\partial w(x_0)}{\partial \eta} + w(x_0) \leq \int_{\Omega} K(x_0,y)w(y)dy \leq \int_{\Omega} K(x_0,y)w(x_0)dy, \tag{2.37}$$

ou seja,

$$\int_{\Omega} K(x_0,y)dy \geq 1.$$

Uma contradição com (K_1). Suponha agora que o caso (ii) ocorra. Então

$$w(x_0) < \alpha_0 \frac{\partial w(x_0)}{\partial \eta} + w(x_0) \leq \int_{\Omega} K(x_0,y)w(y)dy \leq \int_{\Omega} K(x_0,y)w(x_0)dy, \tag{2.38}$$

ou seja,

$$\int_{\Omega} K(x_0,y)dy > 1.$$

Uma contradição com (K_2). Por fim, supondo que o caso (iii) ocorra, temos

$$w(x_0) \leq \int_{\Omega} K(x_0,y)w(y)dy.$$

Visto que por hipótese $K(x_0,y) > 0$ em Ω e $w(x)$ é uma função contínua não constante e não negativa em Ω, então a relação acima implica que

$$w(x_0) < \int_{\Omega} K(x_0,y)w(x_0)dy,$$

implicando em

$$\int_{\Omega} K(x_0,y) > 1,$$

gerando uma contradição com (K_2). Portanto, concluímos pelos argumentos acima que $w(x) \leq 0$ em $\overline{\Omega}$. □

Como consequência direta do Lema 2.3 temos o seguinte resultado de unicidade quando f é não crescente em u.

Teorema 2.7. Seja $\hat{u}_s$ e $\tilde{u}_s$, um par ordenado de sub e supersoluções de (2.1). Suponha que $K(x,y)$ satisfaça (K_1) ou (K_2). Se

$$f_u(x,s) \leq 0 \quad \forall\, x \in \Omega,\ s \in \langle \hat{u}_s, \tilde{u}_s \rangle, \tag{2.39}$$

então o problema (2.1) possui uma única solução u_s em $\langle \hat{u}_s, \tilde{u}_s \rangle$.

Demonstração. Pelo Teorema 2.5, o problema (2.1) possui uma soluções maximal $\overline{u}_s$ e minimal $\underline{u}_s$ tais que $\underline{u}_s \leq \overline{u}_s$. Portanto, para provar a unicidade da solução, basta mostrar que $\underline{u}_s = \overline{u}_s$. Para isso, considere a função $w_s = \overline{u}_s - \underline{u}_s$. Tendo em vista o problema (2.1), temos

$$-Lw_s = -L\overline{u}_s + L\overline{u}_s = f(x,\overline{u}_s) - f(x,\underline{u}_s) \quad \text{em } \Omega.$$

Em seguida, defina a seguinte função

$$\begin{aligned} g\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ s &\mapsto g(s) = f(x,s), \quad x \in \overline{\Omega}. \end{aligned}$$

Aplicando o Teorema do Valor Médio para g e os valores $s_1(x) = \overline{u}_s(x)$ e $s_2(x) = \underline{u}_s(x)$, temos

$$g(s_1) - g(s_2) = g'(\xi)(s_1 - s_2),$$

onde $\xi = \xi(x) \in \langle \hat{u}_s, \tilde{u}_s \rangle$. Ou seja

$$f(x,\overline{u}_s) - f(x,\underline{u}_s) = f_u(x,\xi)\big(\overline{u}_s - \underline{u}_s\big).$$

Logo,

$$-Lw_s = f(x,\overline{u}_s) - f(x,\underline{u}_s) = f_u(x,\xi)(\overline{u}_s - \underline{u}_s).$$

Como $\overline{u}_s - \underline{u}_s \geq 0$ e, por hipótese, $f_u(x,r) \leq 0$ para $r \in \langle \hat{u}_s, \tilde{u}_s \rangle$, segue que

$$f_u(x,\xi)(\overline{u}_s - \underline{u}_s) \leq 0 \ \text{ em } \Omega.$$

Portanto

$$-Lw_s \leq 0 \ \text{ em } \Omega.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} B[w_s] &= B[\overline{u}_s] - B[\underline{u}_s] \\ &= \int_\Omega K(x,y)\overline{u}_s(y)dy - \int_\Omega K(x,y)\underline{u}_s(y)dy \\ &= \int_\Omega K(x,y)(\overline{u}_s - \underline{u}_s)(y)dy \\ &= \int_\Omega K(x,y)w_s(y)dy \quad \text{sobre } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Pelo Lema 2.3, temos que $w_s \leq 0$ em $\overline{\Omega}$, ou equivalentemente, $\overline{u}_s \leq \underline{u}_s$ em $\overline{\Omega}$. Isso nos leva a conclusão de que $\overline{u}_s = \underline{u}_s$ em $\overline{\Omega}$. Portanto, provamos a unicidade da solução para o problema (2.1), quando a função f é não crescente em u. $\square$

Quando $f(x,u)$ satisfaz a condição (f_0), temos que $\tilde{u}_s = M$ e $\hat{u} = m$ são sub e supersoluções de (2.1). Com base no Teorema 2.7, temos seguinte conclusão.

Corolário 2.1. Suponha que $K(x,y)$ satisfaça (K_1) ou (K_2) e que existam constantes $M > 0$, $m \leq 0$ tais que

$$f(x,M) \leq 0, \;\; f(x,m) \geq 0, \;\; f_u(x,u) \leq 0 \qquad m \leq u \leq M. \tag{2.40}$$

Então o problema (2.1) possui uma única solução $u_s(x)$ tal que

$$m \leq u_s(x) \leq M.$$

Além disso, se $f(x,0) \not\equiv 0$ em Ω, então

(i) $u_s(x) > 0$ em Ω;

(ii) $u_s(x) > 0$ em $\overline{\Omega}$ quando $\alpha_0 > 0$ ou quando a condição (K_2) e $\alpha_0 = 0$ são satisfeitas.

Demonstração. Note que estamos sobre as hipóteses do Teorema 2.7. Logo $u_s \in \langle \hat{u}_s, \tilde{u}_s \rangle$ é a única solução de (2.1), com $\hat{u}_s = 0$ e $\tilde{u}_s = M$. Agora, vamos provar a positividade de u_s. Primeiramente, note que a partir de (2.40), $\hat{u}_s = 0$ é uma subsolução de (2.1), pois verifica

$$\begin{cases} -L\hat{u}_s = 0 \leq f(x,0) = f(x,\hat{u}_s) & \text{em } \Omega, \\ B[\hat{u}_s] = \alpha_0 \dfrac{\partial \hat{u}_s}{\partial \eta} + \hat{u}_s = 0 = \displaystyle\int_\Omega K(x,y)\hat{u}_s(y)dy & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.41}$$

Entretanto, $\hat{u}_s = 0$ não é uma solução quando $f(x,0) \geq 0$ e $f(x,0) \not\equiv 0$, visto que

$$0 = -L\hat{u}_s(x) = f(x,\hat{u}_s) \quad \forall\, x \in \Omega,$$

é uma contradição com a hipótese $f(x,0) \not\equiv 0$ em Ω. Assim, $u_s \geq 0$ e $u_s \neq 0$ em Ω. Defina agora a seguinte função

$$\begin{aligned} g\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ s &\mapsto g(s) = f(x,s), \quad x \in \overline{\Omega}. \end{aligned}$$

Aplicando o Teorema do Valor Médio na função g, temos que existe $\xi \equiv \xi(x) \in [0, u_s(x)]$ tal que

$$g(u_s) - g(0) = g'(\xi)(u_s - 0).$$

Pela definição da g, temos

$$f(x,u_s) - f(x,0) = f_u(x,\xi)u_s.$$

Logo

$$f(x,u_s) = f_u(x,\xi)u_s + f(x,0),$$

e portanto

$$-Lu_s = f(x,u_s) = f_u(x,\xi)u_s + f(x,0) \quad \text{em } \Omega. \tag{2.42}$$

Reescrevendo (2.42) e usando a hipótese $f(x,0) \geq 0$, temos

$$Lu_s + f_u(x,\xi)u_s = -f(x,0) \leq 0 \quad \text{em } \Omega. \tag{2.43}$$

Denotando por $C^* \equiv f_u(x,\eta) \leq 0$, obtemos

$$Lu_s + C^*(x)u_s \leq 0 \text{ em } \Omega. \tag{2.44}$$

Suponha agora, por contradição, que exista $x_0 \in \overline{\Omega}$ tal que $u_s(x_0) = 0$, ou seja, u_s atinge o mínimo em Ω. Então, pelo item (ii) do Teorema 2.1, u_s é contante em Ω. No entanto, se tivermos

$$u_s(x) = k, \quad \forall\, x \in \Omega,\ k > 0,$$

então, quando $u_s(x) = u_s(x_0) = 0$, teremos uma contradição, pois como já provamos anteriormente, 0 não é solução de (2.1). Logo, u_s não é uma constante, o que implica em

$$u_s(x) > 0 \quad x \in \Omega.$$

E assim concluímos a prova do o item (i). Vamos agora provar o item (ii), isto é, mostrar que $u_s > 0$ em $\overline{\Omega}$. Com efeito, suponha, por contradição, que exista $x_0 \in \partial\Omega$ tal que $u_s(x_0) = 0$. Então, pelo Teorema 2.2, temos

$$\frac{\partial u_s(x_0)}{\partial \eta} < 0.$$

Além disso, como u_s é uma solução, e supondo ainda $\alpha_0 > 0$, obtemos

$$0 > \alpha_0 \frac{\partial u_s(x_0)}{\partial \eta} + u_s(x_0) = \int_\Omega K(x_0, y) u_s(y) dy \geq \int_\Omega K(x_0, y) u_s(x_0) dy = 0.$$

Uma contradição. Além disso, se (K_2) e $\alpha_0 = 0$ ocorrem, temos

$$0 > \alpha_0 \frac{\partial u(x_0)}{\partial \eta} = \int_\Omega K(x_0, y) u(y) dy.$$

Logo,

$$0 = u_s(x_0) \int_\Omega K(x_0, y) dy \leq \int_\Omega K(x_0, y) u(y) dy < 0.$$

Uma contradição. E assim, provamos a positividade de u_s. $\square$

Deve-se ressaltar, que a última condição em (K_2) para o resultado de unicidade, não pode ser removida sem requisitos adicionais em $f(x,u)$. Por exemplo, a função trivial $f(x,u) \equiv 0$ satisfaz a condição (2.40), e se $\displaystyle\int_\Omega K(x,y)dy \equiv 1$, então qualquer constante é uma solução de (2.1).

Capítulo 3

Dinâmica das soluções

Neste capítulo, vamos analisar o comportamento assintótico da solução dependente do tempo de (1.1) em relação a uma solução estacionária de (2.1). Veremos que quando o dado inicial de (1.1) corresponde a uma subsolução ou a uma supersolução de (2.1), a solução em função do tempo é monótona em relação a t e converge para uma solução do estado estacionário (2.1), estabelecendo uma relação importante entre a propriedade de unicidade e a propriedade de estabilidade. Além disso, analisaremos o caso em que a função $K(x,y)$ nem sempre é não negativa e verificaremos se a convergência do problema parabólico ainda resulta em uma solução estacionária. Esses resultados são aplicáveis a diversos modelos específicos que envolvem condições de contorno, tanto lineares quanto não lineares.

3.1 Resultados Preliminares

Nesta seção apresentaremos algumas definições e resultados que serão utilizados ao longo deste capítulo.

Teorema 3.1. (Princípio do Máximo Forte para $c \geq 0$) Assuma Ω um domímio limitado regular, $u \in C^{1,2}(D_T) \cap C^1(\overline{D}_T)$ e $c \geq 0$ em D_T. Se

$$u_t - Lu + cu \leq 0 \quad \text{em } D_T,$$

e u atinge máximo não negativo sobre $\overline{D}_T$ em um ponto $(t_0, x_0) \in D_T$, então u é contante em $(0,t_0) \times \Omega$. Além disso, se $(t_0, x_0) \in S_T$ é um ponto de máximo não negativo de u, então

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}(t_0, x_0) > 0, \tag{3.1}$$

sempre que u é não constante.

Demonstração. Ver $\big($[6, section 7.1.4, Theorem 12], [13, Theorem 7]$\big)$. □

Para o próximo teorema, considere novamente o problema (1.3), que foi apresentado no Capítulo 1. Para facilitar a leitura, vamos reescrevê-lo novamente aqui:

$$\begin{cases} u_t - Lu + cu = q(t,x) & \text{em } D_T, \\ \alpha_0(t,x)\dfrac{\partial u}{\partial \eta} + \beta_0(t,x)u = h(t,x) & \text{sobre } S_T, \\ u(0,x) = u_0(x) & \text{em } \Omega, \end{cases} \tag{3.2}$$

onde q, h e u_0 são funções Hölder continuas em seus respectivos domínios e u_0 satisfaz a condição de contorno em $t = 0$. Assumimos que os coeficientes de L e c são funções Holder contínuas em D_T, α_0 e β_0 são contínuas em S_T com $\alpha_0 \geq 0$, $\beta_0 \geq 0$ e $\alpha_0 + \beta_0 > 0$.

Teorema 3.2. Sejam $\beta_0 \geq 0$, $c \geq 0$. Suponha que β_0 ou c é estritamente positivo. Se $q(t,x)$, $h(t,x)$ convergem para zero uniformemente em $\overline{\Omega}$ e em $\partial\Omega$, respectivamente, quando $t \to +\infty$, então, para qualquer função inicial u_0, a solução $u(t,x)$ de (3.2) converge para zero uniformemente $\overline{\Omega}$ quando $t \to +\infty$. A convergência de u para zero ocorrerá em $L^2(\Omega)$ se $q(t,.)$, $h(t,.)$ convergem para zero em $L^2(\Omega)$ e $L^2(\partial\Omega)$, respectivamente, quando $t \to +\infty$.

Demonstração. Ver ([12], Theorem 2.1.3). □

3.2 Comportamento Assintótico

Na ausência de conhecimento explícito da solução do problema (2.1), que pode ser não uniforme em Ω, estabelecemos uma propriedade monótona do problema (1.1) quando o dado inicial $u_0(x)$ é uma subsolução ou supersolução de (2.1). Para isso necessitamos do seguinte resultado, que é uma versão do Lema 2.3 para o caso parabólico.

Lema 3.1. Sejam $K(x,y)$ satisfazendo (K_1) ou (K_2), e $w \in C^{1,2}(D_T) \cap C(\overline{D}_T)$ tal que

$$\begin{cases} w_t - Lw + cw \leq 0 & \text{em } D_T, \\ B[w] \leq \displaystyle\int_\Omega K(x,y)w(t,y)dy & \text{sobre } S_T, \\ w(0,x) \leq 0 & \text{em } \Omega, \end{cases} \tag{3.3}$$

onde $c \equiv c(t,x)$ é uma função limitada em D_T. Então $w(t,x) \leq 0$ em $\overline{D}_T$.

Demonstração. A demonstração será feita para os dois casos.

- *Caso 1:* $c \geq 0$;

- *Caso 2:* c qualquer.

Caso 1: Suponha, por contradição, que exista $(t,x) \in \overline{D}_T$ tal que $w(t,x) > 0$. Então, existe um ponto $(x_0,t_0) \in \overline{D}_T$ tal que $w(x_0,t_0)$ é um máximo positivo. Pela relação $w(0,x) \leq 0$ em (3.3), temos que $t_0 > 0$. Além disso, por hipótese $c(t,x) \geq 0$, então o Teorema 3.1 implica em $x_0 \notin \Omega$, a menos que w seja uma constante positiva em D_T. No entanto, w não pode ser uma constante quando consideradas as hipóteses deste teorema. De fato, se

$$w(t,x) = k, \quad \forall\ (t,x) \in \overline{D}_T,\ k > 0, \tag{3.4}$$

então, pela condição de contorno em (3.3), temos

$$\alpha_0 \frac{\partial w(t,x)}{\partial \eta} + w(t,x) \leq \int_\Omega K(x,y)w(t,y)dy \quad \text{sobre } S_T.$$

Logo, por (3.4), obtemos

$$k \leq k \int_\Omega K(x,y)dy \quad \text{sobre } S_T,$$

implicando em

$$1 \leq \int_\Omega K(x,y)dy \quad \text{sobre } S_T.$$

Uma contradição com (K_1) e (K_2) e, portanto, $x_0 \notin \Omega$ e $w(t,x)$ não é uma constante. Agora vamos mostrar que $x_0 \in \partial\Omega$ também nos leva a uma contradição. Para isso, vamos analisar os seguintes casos

(i) Condição (K_1) e $\alpha_0 \geq 0$;

(ii) Condição (K_2) e $\alpha_0 > 0$;

(iii) Condição (K_2) e $\alpha_0 = 0$.

Antes de analisarmos cada caso, primeiro observemos que $(t_0,x_0) \in S_T$, e portanto, estamos nas condições do Teorema 3.1. Logo, $(\partial w(t_0,x_0)/\partial \eta) > 0$. Agora, suponha que o caso (i) ocorra. Então a condição de contorno (3.3) fornece que

$$\begin{aligned} w(t_0,x_0) &\leq \alpha_0 \frac{\partial w(t_0,x_0)}{\partial \eta} + w(t_0,x_0) \\ &\leq \int_\Omega K(x_0,y)w(t_0,y)dy \\ &\leq \int_\Omega K(x_0,y)w(t_0,x_0)dy. \end{aligned}$$

Implicando em

$$1 \leq \int_{\Omega} K(x_0,y)dy.$$

Uma contradição com (K_1). Suponha agora que o caso (ii) ocorra. Novamente a condição de contorno em (3.3) nos fornece

$$w(t_0,x_0) < \alpha_0 \frac{\partial w(t_0,x_0)}{\partial \eta} + w(t_0,x_0) \leq \int_{\Omega} K(x_0,y)w(t_0,y)dy \leq \int_{\Omega} K(x_0,y)w(t_0,x_0)dy. \quad (3.5)$$

Logo

$$1 < \int_{\Omega} K(x_0,y)dy.$$

Uma contradição com (K_2). Por fim, suponha agora que o caso (iii) ocorra. Então

$$w(t_0,x_0) \leq \int_{\Omega} K(x_0,y)w(t_0,y)dy.$$

Visto que por hipótese, $K(x,y) > 0$ em Ω e, como provado anteriormente, $w(t,x)$ é uma função contínua não constante em Ω, então a relação acima implica que

$$w(t_0,x_0) < \int_{\Omega} K(x_0,y)w(t_0,x_0)dy$$

ou seja,

$$1 < \int_{\Omega} K(x_0,y)dy.$$

Levando novamente a uma contradição e assim concluímos que $w(t,x) \leq 0$ em $\overline{D}_T$.

***Caso 2*:** Tome $\gamma \geq -c$ e considere a função $z = e^{-\gamma t}w$. Primeiro observemos que

$$\begin{aligned}
z_t - Lz + cz &= (e^{-\gamma t}w)_t - L(e^{-\gamma t}w) + c(e^{-\gamma t})w \\
&= -\gamma e^{-\gamma t}w + w_t e^{-\gamma t} - e^{-\gamma t}Lw + ce^{-\gamma t}w \\
&= -\gamma e^{-\gamma t}w + e^{-\gamma t}(w_t - Lw + cw) \\
&= -\gamma z + e^{-\gamma t}(w_t - Lw + cw) \quad \text{em } D_T.
\end{aligned}$$

Como w satisfaz a primeira relação em (3.3), então

$$z_t - Lz + cz \leq -\gamma z \quad \text{em } D_T,$$

implicando em

$$z_t - Lz + (c+\gamma)z \leq 0 \quad \text{em } D_T.$$

Fazendo $\tilde{c} = c + \gamma$, temos

$$z_t - Lz + \tilde{c}z \leq 0 \quad \text{em } D_T.$$

Além disso

$$\begin{aligned}
B[z] &= \alpha_0 \frac{\partial z}{\partial \eta} + z \\
&= \alpha_0 \frac{\partial (e^{-\gamma t} w)}{\partial \eta} + e^{-\gamma t} w \\
&= e^{-\gamma t} \left(\alpha_0 \frac{\partial w}{\partial \eta} + w \right) \\
&= e^{-\gamma t} B[w] \\
&\leq e^{-\gamma t} \int_\Omega K(x,y) w(t,y) dy \\
&= \int_\Omega K(x,y) e^{-\gamma t} w(t,y) dy \\
&= \int_\Omega K(x,y) z(t,y) dy.
\end{aligned}$$

Por fim

$$z(0,x) = w(0,x) \leq 0 \quad \text{em } \Omega.$$

Como z satisfaz as três desigualdades em (3.3), com $\tilde{c} \geq 0$, então estamos nas condições do caso (i). Sendo assim, $z = e^{-\gamma t} w \leq 0$ em $\overline{D}_T$. Como $e^{-\gamma t} > 0$, concluímos que $w \leq 0$ em $\overline{D}_T$. E assim, finalizamos a demonstração. □

Uma consequência direta do Lema 3.1 é a propriedade monótona da solução dependente do tempo de (1.1) quando o dado inicial u_0 é ou uma subsolução ou supersolução do problema estacionário (2.1). Precisamente, temos o seguinte:

Lema 3.2. Sejam $\hat{u}_s$, $\tilde{u}_s$ um par ordenado de sub e supersoluções de (2.1), e $\overline{u}(t,x)$, $\underline{u}(t,x)$, soluções de (1.1) com $\underline{u}(0,x) = \hat{u}_s(x)$ e $\overline{u}(0,x) = \tilde{u}_s(x)$, respectivamente. Suponha que a condição (K_1) ou (K_2) é satisfeita. Então, para cada $x \in \overline{\Omega}$ e $t > 0$, temos que

(i) $\overline{u}(t,x)$ é monótona não crescente em t;

(ii) $\underline{u}(t,x)$ é monótona não decrescente em t.

Além disso

(iii) $\underline{u}(t,x) \leq \overline{u}(t,x) \quad \forall\, t \geq 0,\ x \in \overline{\Omega}$.

Demonstração. Primeiramente, observe que quando $\hat{u}_s \leq u_0 \leq \tilde{u}_s$, as funções $\hat{u}_s$ e $\tilde{u}_s$ também satisfazem

$$\begin{cases} (\hat{u}_s)_t - L\hat{u}_s \leq f(x,\hat{u}_s) & \text{em } D_T, \\ B[\hat{u}_s] \leq \displaystyle\int_\Omega K(x,y)\hat{u}_s(t,y)dy & \text{sobre } S_T, \\ \hat{u}_s(0,x) \leq u_0(x) & \text{em } \Omega, \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} (\tilde{u}_s)_t - L\tilde{u}_s \geq f(x,\tilde{u}_s) & \text{em } D_T, \\ B[\tilde{u}_s] \geq \displaystyle\int_\Omega K(x,y)\tilde{u}_s(t,y)dy & \text{sobre } S_T, \\ \tilde{u}_s(0,x) \geq u_0(x) & \text{em } \Omega. \end{cases}$$

Então, o Teorema 1.2 nos garante que as soluções $\overline{u}(t,x)$ e $\underline{u}(t,x)$ existem e satisfazem as relações

$$\hat{u}_s(x) \leq \overline{u}(t,x) \leq \tilde{u}_s(x) \quad \text{e} \quad \hat{u}_s(x) \leq \underline{u}(t,x) \leq \tilde{u}_s(x). \tag{3.6}$$

Agora, vamos mostrar (i). Para tanto, considere a função $w(t,x) = \overline{u}(t+\delta,x) - \overline{u}(t,x)$, para uma constante arbitrária $\delta > 0$. Tendo em vista que $\overline{u}$ é solução (1.1), temos

$$\begin{aligned} w_t - Lw &= \overline{u}_t(t+\delta,x) - \overline{u}_t(t,x) - L\overline{u}(t+\delta,x) + L\overline{u}(t,x) \\ &= (\overline{u}_t(t+\delta,x) - L\overline{u}(t+\delta,x)) - \big(\overline{u}_t(t,x) - L\overline{u}(t,x)\big) \\ &= f\big(x,\overline{u}(t+\delta,x)\big) - f\big(x,\overline{u}(t,x)\big) \quad \text{em } D_T. \end{aligned}$$

Em seguida, defina a seguinte função

$$\begin{aligned} h\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ s &\mapsto h(s) = f(x,s) \quad x \in \Omega. \end{aligned}$$

Aplicando o Teorema do Valor Médio para a função h e os valores $s_1(t,x) = \overline{u}(t+\delta,x)$ e $s_2(t,x) = \overline{u}(t,x)$, temos

$$h(s_1) - g(s_2) = h'(s)(s_1 - s_2)$$

ou seja,

$$f\big(x,\overline{u}(t+\delta,x)\big) - f\big(x,\overline{u}(t,x)\big) = f_u(x,\xi)\big(\overline{u}(t+\delta,x) - \overline{u}(t,x)\big),$$

onde $\xi \equiv \xi(t,x)$ é um valor entre s_1 e s_2. Dessa forma

$$w_t - Lw = f_u(x,\xi)\big(\overline{u}(t+\delta,x) - \overline{u}(t,x)\big) = f_u(x,\xi)w \quad \text{em } D_T. \tag{3.7}$$

Além disso

$$\begin{aligned}
B[w] &= B[\overline{u}(t+\delta,x)] - B[\overline{u}(t,x)] \\
&= \int_\Omega K(x,y)\overline{u}(t+\delta,y)dy - \int_\Omega K(x,y)\overline{u}(t,y)dy \\
&= \int_\Omega K(x,y)\big(\overline{u}(t+\delta,y) - \overline{u}(t,y)\big)dy \\
&= \int_\Omega K(x,y)w(t,y)dy \quad \text{sobre } S_T.
\end{aligned}$$

e ainda,

$$w(0,x) = \overline{u}(\delta,x) - \overline{u}(0,x) = \overline{u}(\delta,x) - \tilde{u}_s(x) \leq 0. \tag{3.8}$$

Visto que $f_u(x,\xi)$ é limitada em D_T para todo $T > 0$ e $w(0,x) \leq 0$, o Lema 3.1 nos garante que $w(t,x) \leq 0$ para todo $(t,x) \in D_T$. Então $\overline{u}(t+\delta,x) \leq \overline{u}(t,x)$ para todo $t > 0$. A arbitrariedade de $\delta > 0$ garante que $\overline{u}(t,x)$ é não crescente em t. De maneira análoga, mostra-se *(ii)*. Agora vamos mostrar o passo (iii). Para isso, Considere a função $w^*(t,x) = \underline{u}(t,x) - \overline{u}(t,x)$. Assim

$$\begin{aligned}
w_t^* - Lv &= \underline{u}_t(t,x) - \overline{u}_t(t,x) - L\underline{u}(t,x) + L\overline{u}(t,x) \\
&= (\underline{u}_t(t,x) - L\underline{u}(t,x)) - \big(\overline{u}_t(t,x) - L\overline{u}(t,x)\big) \\
&= f\big(x,\underline{u}(t,x)\big) - f\big(x,\overline{u}(t,x)\big) \quad \text{em } D_T.
\end{aligned}$$

Aplicando novamente o Teorema do Valor Médio na função h e os valores $s_3(t,x) = \underline{u}(t,x)$ e $s_4(t,x) = \overline{u}(t,x)$, temos

$$h(s_3) - h(s_4) = h'(s)(s_3 - s_4),$$

isto é

$$f\big(x,\underline{u}(t,x)\big) - f\big(x,\overline{u}(t,x)\big) = f_u(x,\eta_1)\big(\underline{u}(t,x) - \overline{u}(t,x)\big),$$

onde $\eta_1 \equiv \eta_1(t,x)$ é um valor entre s_3 e s_4. Logo

$$w_t^* - Lw^* = f_u(x,\eta_1)\big(\underline{u}(t,x) - \overline{u}(t,x)\big) = f_u(x,\eta_1)w^* \quad \text{em } D_T. \tag{3.9}$$

Além disso

$$\begin{aligned} B[w^*] &= B[\underline{u}(t,x)] - B[\overline{u}(t,x)] \\ &= \int_\Omega K(x,y)\underline{u}(t,y)dy - \int_\Omega K(x,y)\overline{u}(t,y)dy \\ &= \int_\Omega K(x,y)\big(\underline{u}(t,y) - \overline{u}(t,y)\big)dy \\ &= \int_\Omega K(x,y)w^*(t,y)dy \quad \text{sobre } D_T. \end{aligned}$$

e ainda,

$$w^*(0,x) = \underline{u}(0,x) - \overline{u}(0,x) = \hat{u}_s(x) - \tilde{u}_s(x) \leq 0 \quad \text{em } \Omega. \tag{3.10}$$

Visto que $f_u(x,\eta_1)$ é limitada em D_T para todo $T > 0$ e, $w^*(0,x) \leq 0$, o Lema 3.1 nos leva à $w^*(t,x) \leq 0$ para todo $(t,x) \in D_T$ e, portanto, provamos a relação

$$\underline{u}(t,x) \leq \overline{u}(t,x) \quad \forall\, t \geq 0,\ x \in \overline{\Omega}$$

□

Quando o dado inicial $u_0 \in \langle \hat{u}_s, \tilde{u}_s \rangle$, mas não necessariamente é uma supersolução nem uma subsolução, o mesmo argumento da prova do Lema 3.2 leva ao seguinte resultado de comparação.

Lema 3.3. Assuma que $\hat{u}_s$, $\tilde{u}_s$ é um par ordenado de sub e supersoluções do problema (2.1). Considere $u_0 \in \langle \hat{u}_s, \tilde{u}_s \rangle$ e seja $u(t,x)$ uma solução de (1.1). Se (K_1) ou (K_2) é satisfeita, então

$$\underline{u}(t,x) \leq u(t,x) \leq \overline{u}(t,x) \qquad \forall\, t > 0,\ x \in \overline{\Omega}, \tag{3.11}$$

onde $\underline{u}$ e $\overline{u}$ são soluções de (1.1) com $\underline{u}(0,x) = \hat{u}_s$ e $\overline{u}(t,x) = \tilde{u}_s$, respectivamente.

Demonstração. Primeiramente, vamos mostrar que a relação abaixo é satisfeita

$$u(t,x) \leq \overline{u}(t,x) \quad \forall\, t > 0,\; x \in \overline{\Omega}.$$

Para isso, defina a função $z = u - \overline{u}$. Em vista de (1.1), temos

$$\begin{aligned} z_t - Lz &= \big(u - \overline{u}\big)_t - L\big(u - \overline{u}\big) \\ &= (u_t - Lu) - (\overline{u}_t - L\overline{u}) \\ &= f(x,u) - f(x,\overline{u}) \quad \text{em } D_T. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Estamos interessados em usar o Lema 3.1. Para isso, defina a seguinte função

$$\begin{aligned} g\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ r &\longmapsto g(r) = f(x,r), \quad x \in \Omega. \end{aligned}$$

Aplicando o Teorema do Valor Médio na função g e os valores $r_1 = \overline{u}$ e $r_2 = u$, temos

$$g(r_2) - g(r_1) = g'(r)(r_2 - r_1),$$

isto é,

$$f(x,u) - f(x,\overline{u}) = f_u(x,\xi)\big(u - \overline{u}\big),$$

e portanto,

$$f(x,u) - f(x,\overline{u}) = f_u(x,\xi)w, \tag{3.13}$$

onde $\xi \equiv \xi(t,x)$ é um valor entre r_1 e r_2. Fazendo $c = -f_u(x,\xi)$ e substituindo (3.13) em (3.12), obtemos

$$z_t - Lz + cz = 0 \quad \text{em } D_T.$$

Além disso,

$$\begin{aligned}B[z] &= B[u] - B[\overline{u}] \\ &= \int_\Omega K(x,y)u(t,y)dy - \int_\Omega K(x,y)\overline{u}(t,y)dy \\ &= \int_\Omega K(x,y)(u-\overline{u})(t,y)dy \\ &= \int_\Omega K(x,y)z(t,y)dy \quad \text{sobre } S_T.\end{aligned}$$

e ainda,

$$z(0,x) = (u-\overline{u})(0,x) = u(0,x) - \overline{u}(0,x) = u_0(x) - \tilde{u}_s(x) \leq 0 \quad \text{em } \Omega,$$

pois $\hat{u}_s(x) \leq u_0(x) \leq \tilde{u}_s(x)$. Note que agora estamos sobre as hipóteses do Lema 3.1. Portanto $z(t,x) \leq 0$ para todo $t > 0$ e $x \in \overline{\Omega}$, ou seja,

$$u(t,x) \leq \overline{u}(t,x) \quad \forall\, t > 0,\ x \in \overline{\Omega}.$$

De maneira análoga, mostra-se que

$$\underline{u}(t,x) \leq u(t,x) \quad \forall\, t > 0,\ x \in \overline{\Omega}.$$

Portanto, concluímos que

$$\underline{u}(t,x) \leq u(t,x) \leq \overline{u}(t,x) \quad \forall\, t > 0,\ x \in \overline{\Omega}.$$

□

Com base nos Lemas 3.2 e 3.3 temos a seguinte convergência monótona das soluções dependentes do tempo $\underline{u}(t,x)$ e $\overline{u}(t,x)$.

Teorema 3.3. Sejam $\hat{u}_s$ e $\tilde{u}_s$, um par ordenado de sub e supersoluções de (2.1), $\overline{u}(t,x)$ e $\underline{u}(t,x)$ soluções de (1.1), com $\underline{u}(0,x) = \hat{u}_s$ e $\overline{u}(0,x) = \tilde{u}_s$, respectivamente. Suponha que a condição (K_1) ou (K_2) seja satisfeita. Então

$$\lim_{t\to\infty} \underline{u}(t,x) = \underline{u}_s(x) \quad \text{e} \quad \lim_{t\to\infty} \overline{u}(t,x) = \overline{u}_s(x),$$

onde $\underline{u}_s(x)$ e $\overline{u}_s(x)$ são soluções minimal e maximal de (2.1), respectivamente.

***Demonstração*.** A demonstração do teorema será dividida nos seguintes passos

(i) Mostrar que os limites pontuais

$$\lim_{t\to\infty} \underline{u}(t,x) = \underline{u}_s^*(x) \quad \text{e} \quad \lim_{t\to\infty} \overline{u}(t,x) = \overline{u}_s^*(x),$$

exitem.

(ii) Mostrar que $\underline{u}_s^*(x)$ e $\overline{u}_s^*(x)$ são soluções de (2.1);

(iii) Mostrar que $\underline{u}_s^*(x) = \underline{u}_s(x)$ e $\overline{u}_s^*(x) = \overline{u}_s(x)$.

Passo (i): Note que pelo Lema 3.2, os limites pontuais

$$\lim_{t\to\infty} \underline{u}(t,x) = \underline{u}_s^*(x) \quad \text{e} \quad \lim_{t\to\infty} \overline{u}(t,x) = \overline{u}_s^*(x), \tag{3.14}$$

existem e satisfazem a seguinte relação

$$\hat{u}_s \leq \underline{u}_s^* \leq \overline{u}_s^* \leq \tilde{u}_s \quad \text{em } \overline{\Omega}, \tag{3.15}$$

e assim, finalizamos prova do passo (i).

Passo (ii): Vamos agora mostrar que $\underline{u}_s^*(x)$ e $\overline{u}_s^*(x)$ são soluções de (2.1). Para isso, considere o seguinte problema linear

$$\begin{cases} -Lv + cv = f(x,\overline{u}_s^*) + c\overline{u}_s^* & \text{em } \Omega, \\ B[v] = \displaystyle\int_\Omega K(x,y)\overline{u}_s^*(y)dy & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.16}$$

onde $\overline{u}_s^*$ é o limite em (3.14) e c é uma constante positiva satisfazendo $c \geq \gamma$, onde γ é dado no Teorema 2.3. Note que, por (3.15), temos

$$|\overline{u}^*(x)| \leq \max\{\|\hat{u}_s\|_\infty, \|\tilde{u}_s\|_\infty\} \quad \forall\, x \in \overline{\Omega}. \tag{3.17}$$

Dessa forma, como f é contínua e $K(x,y)$ é regular, concluímos que

$$f(x,\overline{u}_s^*) + c\overline{u}_s^* \quad \text{e} \quad \int_\Omega K(x,y)\overline{u}_s^*(y)dy,$$

são também limitadas. Pelos Teoremas 2.2 e 2.3, o problema (3.16) possui uma única solução $v \in W^{2,p}(\Omega)$, com $p > 1$. Considere agora a função $w = \overline{u}(t,x) - v(x)$. A ideia será aplicar o Teorema 3.2. Para isso, observe que sendo $\overline{u}$ solução de (1.1) com $u_0 = \tilde{u}_s$ e $\overline{u}_s^*$ solução de

(3.16), temos

$$\begin{aligned} B[w] &= B[\overline{u}(t,x)] - B[v(x)] \\ &= \int_{\Omega} K(x,y)\overline{u}(t,y)dy - \int_{\Omega} K(x,y)\overline{u}^*(y)dy \\ &= \int_{\Omega} K(x,y)\big(\overline{u}(t,y)dy - \overline{u}^*(y)\big)dy \equiv h(t,x). \end{aligned} \tag{3.18}$$

Mostraremos que $h(t,x) \to 0$ em $L^2(\partial\Omega)$. Com efeito, note que de (3.14), temos

$$\overline{u}(t,y) - \overline{u}_s^*(y) \longrightarrow 0 \quad \forall\, y \in \overline{\Omega}, \text{ quando } t \to +\infty.$$

E ainda da regularidade de $K(x,y)$, obtemos

$$K(x,y)\big(\overline{u}(t,y) - \overline{u}_s^*(y)\big) \longrightarrow 0 \quad \forall\, y \in \overline{\Omega}, \text{ quando } t \to +\infty. \tag{3.19}$$

Além disso, por (3.6), temos que

$$|\overline{u}(t,y)| \leq \max\{\|\hat{u}_s\|_\infty, \|\tilde{u}_s\|_\infty\} \quad \forall\, x \in \Omega,\ t > 0,$$

e assim, podemos concluir que

$$\left|K(x,y)\big(\overline{u}(t,y) - \overline{u}_s^*(y)\big)\right| \leq 2C, \tag{3.20}$$

onde $C = \max\{\|\hat{u}_s\|_\infty, \|\tilde{u}_s\|_\infty\}$, para todo $x \in \overline{\Omega}$ e $\hat{u}_s \leq s \leq \tilde{u}_s$. Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos

$$\int_{\Omega} K(x,y)\overline{u}(t,y)dy - \int_{\Omega} K(x,y)\overline{u}^*(y)dy \longrightarrow 0 \quad \forall\, x \in \partial\Omega. \tag{3.21}$$

Combinando (3.20) e (3.21), obtemos

$$|h(t,x)|^2 \to 0 \qquad \text{e} \quad |h(t,x)|^2 \leq \|K\|_\infty C^2 |\Omega| \quad \forall\, x \in \partial\Omega.$$

Portanto, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, concluímos que

$$h(t,x) \to 0 \quad \text{em } L^2(\partial\Omega),$$

como desejado. Além disso

$$\begin{aligned}
w_t - Lw + cw &= \big(\overline{u}_t(t,x) - L\overline{u}(t,x) + c\overline{u}(t,x)\big) + Lv(x) - cv(x) \\
&= f(x,\overline{u}(t,x)) + c\overline{u} - f(x,\overline{u}_s^*) + c\overline{u}_s^* \\
&= [f(x,\overline{u}(t,x)) - f(x,\overline{u}_s^*)] + c(\overline{u} - \overline{u}_s^*) \equiv q(t,x).
\end{aligned}$$

Mostraremos que $q(t,x) \to 0$ em $L^2(\Omega)$. Com efeito, de (3.17), (3.6) e da continuidade da função f, temos que

$$q(t,x) \to 0 \quad \text{e} \quad |q(t,x)| \le M \quad q.t.p. \text{ em } \Omega.$$

Consequentemente

$$q(t,x)^2 \to 0 \quad \text{e} \quad |q(t,x)|^2 \le M^2 \quad q.t.p. \text{ em } \Omega.$$

e portanto, o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue nos garante que $q(t,x) \to 0$ em $L^2(\Omega)$. Pelo Teorema 3.2, concluímos que $w(t,x) \to 0$ em $L^2(\Omega)$, e assim

$$\overline{u}(t,x) \to v(x) \quad \text{em} \quad L^2(\Omega) \text{ quando } t \to +\infty.$$

Pela unicidade do limite segue que $\overline{u}_s^*(x) = v(x)$ e assim, $\overline{u}_s^* \in W^{2,p}(\Omega)$, para todo $p > 1$. De maneira análoga, podemos concluir que $\underline{u}_s^*$ também é uma solução clássica de (2.1).

Passo (iii): Por fim, vamos provar que $\underline{u}_s^*(x) = \underline{u}_s(x)$ e $\overline{u}_s^*(x) = \overline{u}_s(x)$. Para isso, note que a solução maximal $\overline{u}_s(x)$, verifica

$$\begin{cases}
(\overline{u}_s)_t - L\overline{u}_s = -L\overline{u}_s = f(x,\overline{u}_s) & \text{em } D_T, \\
B[\overline{u}_s] = \displaystyle\int_\Omega K(x,y)\overline{u}_s(y)dy & \text{sobre } S_T, \\
\overline{u}_s(0,x) =: u_0(x) & \text{em } \Omega.
\end{cases}$$

Portanto, $\overline{u}_s$ é uma solução de (1.1). Assim, pelo Lema 3.3, temos

$$\underline{u}(t,x) \le \overline{u}_s(x) \le \overline{u}(t,x). \tag{3.22}$$

Fazendo $t \to +\infty$ em (3.22), obtemos

$$\lim_{t\to\infty} \underline{u}(t,x) \;\le\; \lim_{t\to\infty} \overline{u}_s(x) \;\le\; \lim_{t\to\infty} \overline{u}(t,x).$$

Assim, por (3.14), segue que

$$\underline{u}_s^*(x) \leq \overline{u}_s(x) \leq \overline{u}_s^*(x). \tag{3.23}$$

Por outro lado, como $\overline{u}_s^* \in \langle \hat{u}_s, \tilde{u}_s \rangle$ é solução de (2.1) e $\overline{u}_s$ é a solução maximal em $\langle \hat{u}_s, \tilde{u}_s \rangle$, temos que

$$u_s^*(x) \leq \overline{u}_s(x) \quad \text{em } \Omega. \tag{3.24}$$

Assim, (3.23) e (3.24) implicam que $\overline{u}_s^* = \overline{u}_s$. Similarmente, mostrar-se que $\underline{u}_s^* = \underline{u}_s$. E assim, encerramos a demonstração deste teorema.

Graficamente, o Teorema 3.3 pode ser representado como na figura (3.1).

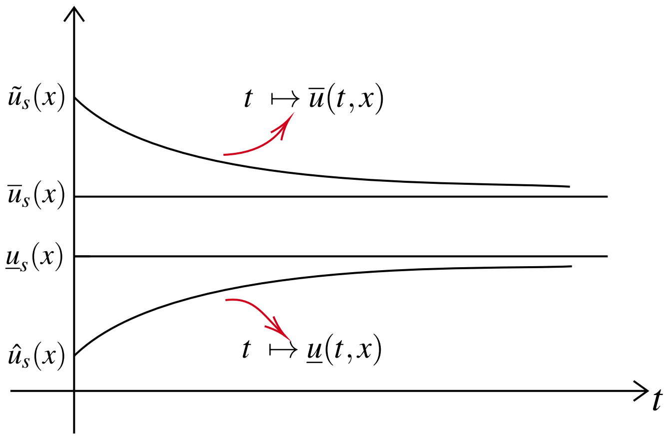

Figura 3.1 Dinâmica das soluções $\overline{u}(t,x)$ e $\underline{u}(t,x)$.

□

O Teorema 3.3 nos dá a convergência monótona da solução dependente do tempo para uma solução de estado estacionário quando o dado inicial é uma supersolução ou uma subsolução do problema de estado estacionário. Para dado inicial arbitrário em $\langle \hat{u}_s, \tilde{u}_s \rangle$, temos a seguinte conclusão:

Teorema 3.4. Sejam $\hat{u}_s$ e $\tilde{u}_s$ um par ordenado de sub e supersoluções de (2.1). Assuma que a condição (K_1) ou (K_2) seja satisfeita. Então, para qualquer $u_0 \in \langle \hat{u}_s, \tilde{u}_s \rangle$, a solução $u(t,x)$ de (1.1) converge para uma solução $u_s(x)$ de (2.1) quando $t \to +\infty$ se, e somente se, $u_s(x)$ é a única solução em $\langle \hat{u}_s, \tilde{u}_s \rangle$.

Demonstração. Inicialmente, suponha que a solução $u(t,x)$ de (1.1) converge para uma solução $u_s(x)$ de (2.1), quando $t \to +\infty$, sempre que $u_0 \in \langle \hat{u}_s, \tilde{u}_s \rangle$. Em seguida, considere

$u_s^*(x)$ outra solução qualquer de (2.1) em $\langle \hat{u}_s, \tilde{u}_s \rangle$. Note que u_s^* também é uma solução do problema (1.1) quando $u_0 = u_s^*(x)$, pois

$$\begin{cases} (u_s^*)_t - Lu_s^* = -Lu_s^* = f\big(x, u_s^*\big) & \text{em } D_T, \\ B[u_s^*] = \displaystyle\int_\Omega K(x,y) u_s^*(y) dy & \text{sobre } S_T, \\ u_s^*(0,x) = u_s^*(x) = u_0(x) & \text{em } \Omega. \end{cases}$$

Dessa forma, pela hipótese imposta inicialmente, temos que

$$\lim_{t\to\infty} u_s^*(x) = u_s(x) \qquad x \in \overline{\Omega}.$$

Como u_s^* não tem dependência de t, o limite acima implica em

$$u_s^*(x) = u_s(x) \qquad x \in \overline{\Omega}$$

Mostrando assim, que u_s é a única solução de (2.1) em $\langle \hat{u}_s, \tilde{u}_s \rangle$. Suponha agora que u_s^* seja a única solução de (2.1) em $\langle \hat{u}_s, \tilde{u}_s \rangle$. Então, pelo Teorema 2.5, temos que

$$\overline{u}_s(x) = \underline{u}_s(x) = u_s(x) \quad x \in \overline{\Omega}.$$

E ainda, pelo Teorema 3.3, obtemos

$$\lim \overline{u}(t,x) = \lim \underline{u}(t,x) = u_s(x) \quad \text{quando } t \to +\infty.$$

Como o Lema 3.3 afirma, $u(t,x)$ satisfaz a relação (3.11), logo, quando $t \to +\infty$, concluímos que $u(t,x)$ converge para $u_s(x)$. como queríamos mostrar. □

Uma consequência direta do Teorema 3.4 produz o seguinte comportamento dinâmico do problema (1.1).

Teorema 3.5. Suponha que $K(x,y)$ satisfaça (K_1) ou (K_2) e que $f(x,u)$ satisfaça (f_0) e (f_2). Então, para qualquer $u_0(x)$, onde $m \le u_0(x) \le M$, a solução $u(t,x)$ de (1.1) converge para uma única solução $u_s(x)$ de (2.1) quando $t \to +\infty$.

Demonstração. Mostramos no Teorema 2.6 que as funções constantes $\hat{u}_s \equiv m$ e $\tilde{u}_s \equiv M$, são sub e supersoluções de (2.1). Logo, pelo Corolário 2.1, o problema (2.1) possui uma única solução $u_s \in \langle \hat{u}_s, \tilde{u}_s \rangle$. Note que agora estamos sobre as hipóteses do Teorema 3.3, e portanto, concluímos a demonstração. □

Exemplo: Vamos agora analisar a dinâmica de um problema com uma função particular $f(x,u) = c(x)u$, com $c(x) \leq 0$, isto é, estudar o seguinte problema

$$\begin{cases} u_t - Lu = c(x)u & t > 0,\ x \in \Omega, \\ B[u] = \displaystyle\int_\Omega K(x,y)u(t,y)dy & t > 0,\ x \in \partial\Omega, \\ u(0,x) = u_0(x) & x \in \Omega. \end{cases} \tag{3.25}$$

Mostraremos, usando resultados já visto neste capítulo, que as soluções do problema parabólico (3.25) convergem para a solução do seguinte problema elíptico

$$\begin{cases} -Lu = c(x)u & \text{em } \Omega, \\ B[u] = \displaystyle\int_\Omega K(x,y)u(y)dy & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.26}$$

De fato, note que para quaisquer constantes $M > 0$ e $m \leq 0$, temos

(i) $f(x,M) = c(x)M \leq 0$;

(ii) $f(x,m) = c(x)m \geq 0$;

(iii) $f_u(x,u) = c(x) \leq 0 \quad$ para $m \leq u \leq M$.

Além disso, é facilmente verificado que $u_s = 0$ é solução de (3.26). Portanto, se $K(x,y)$ satisfaz (K_1) ou (K_2), então pelo Corolário 2.1, $u_s = 0$ é a única solução de (3.26). Note ainda que, para as constantes

$$m = \min\{\min u_0(x), 0\},$$
$$M > \max\{\max u_0(x), 0\},$$

escolhidas, pelo Teorema 3.6, concluímos que, dada qualquer função inicial u_0, a solução correspondente $u(t,x)$ de (1.1) converge para 0 quando $t \to +\infty$.

3.3 *K(x,y)* com sinal indefinido

Quando a função $K(x,y)$ não é sempre não negativa como estamos considerando ao longo deste trabalho, o Teorema 3.6 não é diretamente aplicável. Para estudar este caso, usamos soluções de (1.1) com $K(x,y) \geq 0$, como funções de comparação para a solução com um

$K(x,y)$ geral. Para tal caso, considere o seguinte problema auxiliar

$$\begin{cases} U_t - LU = f(x,U) & t>0,\ x \in \Omega, \\ B[U] = \displaystyle\int_\Omega |K(x,y)|U(t,y)dy & t>0,\ x\in\partial\Omega, \\ U(0,x) = U_0(x) & x\in\Omega, \end{cases} \tag{3.27}$$

onde $U_0 \geq 0$. Suponha que $|K(x,y)|$ satisfaça (K_1) e a função $f(x,u)$ satisfaça (f_0) com $m=0$. Pelo Teorema 1.3, o problema (3.27) possui uma única solução não negativa $U \in \langle 0, M\rangle$, sempre que $0 \leq U_0 \leq M$.

Agora, vamos analisar o seguinte problema

$$\begin{cases} U_t^* - LU^* = f(x,U^*) & t>0,\ x \in \Omega, \\ B[U^*] = \displaystyle\int_\Omega |K(x,y)|U^*(t,y)dy & t>0,\ x\in\partial\Omega, \\ U^*(0,x) = -U_0(x) & x\in\Omega. \end{cases} \tag{3.28}$$

Suponha que $|K(x,y)|$ satisfaça a condição (K_1) e que $f(x,u)$ satisfaça a condição (f_0), para $m=0$ e $M>0$, e ainda, seja impar na variável u, isto é,

$$f(x,-u) = -f(x,u) \quad \text{para } |u| \leq M. \tag{3.29}$$

Agora, defina $m^* = -M$ e $M^* = m = 0$. Note que por (3.29), temos

$$f(x,m^*) = f(x,-M) = -f(x,M) \geq 0,$$

e ainda,

$$f(x,M^*) = f(x,0) = 0.$$

Pelo Teorema 1.3, (3.28) possui uma única solução U^*. Além disso,

$$m^* \leq U^* \leq M^* \quad \text{em } D_T,$$

ou seja

$$-M \leq U^* \leq 0 \quad \text{em } D_T.$$

Logo

$$0 \leq -U^* \leq M \quad \text{em } D_T.$$

Agora, vamos mostrar que $U_0 = -U^*$. Para isso, multiplique o problema (3.28) por -1, e assim obtemos

$$\begin{cases} (-U^*)_t - L(-U^*) = f(x,-U^*) & t > 0,\ x \in \Omega, \\ B[-U^*] = \displaystyle\int_{\Omega} |K(x,y)|(-U^*)(t,y)dy & t > 0,\ x \in \partial\Omega, \\ -U^*(0,x) = U_0(x) & x \in \Omega. \end{cases} \tag{3.30}$$

Observe que $-U^*$ também é solução de (3.27) e, como mostramos anteriormente, a solução de (3.27) é única, logo $-U^* = U$ implicando em $U^* = -U$.

Usando U e $-U$ como funções de comparação, temos o seguinte resultado de comparação para o problema (1.1) onde $K(x,y)$ pode assumir valores positivos e negativos em $\partial\Omega \times \Omega$.

Teorema 3.6. Assuma que $|K(x,y)|$ satisfaça (K_1) ou (K_2). Suponha que exista uma constantes $M > 0$ tal que

$$f(x,M) \leq 0 \quad \text{e} \quad f(x,u) = -f(x,-u), \quad |u| \leq M. \tag{3.31}$$

Denote por $u(t,x)$ e $U(t,x)$ as soluções de (1.1) (quando houver solução) e (3.27), respectivamente, onde $U_0 = |u_0| \leq M$. Então

$$-U(t,x) \leq u(t,x) \leq U(t,x) \quad t > 0,\ x \in \overline{\Omega}.$$

Demonstração. Consideremos $h = e^{-\gamma t}(u - U)$, onde γ é qualquer constante que satisfaça a relação $\gamma \leq f_u(x,u)$, com $x \in \overline{\Omega}$ e $|u| \leq M$. Nosso objetivo é mostrar que $h \leq 0$ em D_T. Uma vez que não estamos assumindo que $K(x,y) \geq 0$ de imediato, não podemos usar essa informação diretamente. No entanto, podemos adaptar a demonstração com base nas equações (1.1) e (3.27). Dessa forma, temos

$$\begin{aligned} h_t - Lh &= (e^{-\gamma t}u)_t - (e^{-\gamma t}U)_t - L(e^{-\gamma t}u) + L(e^{-\gamma t}U) \\ &= -\gamma e^{-\gamma t}(u - U) + e^{-\gamma t}(u_t - Lu) - e^{-\gamma t}(U_t - LU) \\ &= -\gamma h + e^{-\gamma t} f(x,u) - e^{-\gamma t} f(x,U) \\ &= -\gamma h + e^{-\gamma t}\left(f(x,u) - f(x,U)\right). \end{aligned}$$

Logo,

$$h_t - Lh + \gamma h = e^{-\gamma t}\big(f(x,u) - f(x,U)\big). \tag{3.32}$$

Agora, defina a seguinte função

$$\begin{aligned} g\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ s &\mapsto g(s) = f(x,s) \quad x \in \overline{\Omega}. \end{aligned}$$

Aplicando o Teorema do Valor Médio para a função g e os valores $s_1 = u$ e $s_2 = U$, temos que

$$g(s_1) - g(s_2) = g'(\xi)(s_1 - s_2)$$

isto é,

$$\big(f(x,u) - f(x,U)\big) = f_u(x,\xi)(u-U),$$

onde $\xi \equiv \xi(t,x)$ é um valor entre s_1 e s_2. Desta forma, substituindo essa igualdade em (3.32), obtemos

$$h_t - Lh + C^*(t,x)h = 0 \quad \text{em } D_T, \tag{3.33}$$

onde $C^*(t,x) = \gamma - f_u(x,\xi) \geq 0$ é limitada. Além disso,

$$\begin{aligned} B[h] &= B[e^{-\gamma t}(u-U)] = e^{-\gamma t}B[(u-U)] \\ &= e^{-\gamma t}\left(\int_\Omega K(x,y)udy - \int_\Omega |K(x,y)|Udy\right) \\ &= e^{-\gamma t}\left(\int_\Omega K(x,y)Udy - \int_\Omega K(x,y)Udy + \int_\Omega K(x,y)udy - \int_\Omega |K(x,y)|Udy\right) \\ &= e^{-\gamma t}\left[\left(\int_\Omega K(x,y)Udy - \int_\Omega |K(x,y)|Udy\right) + \int_\Omega K(x,y)(u-U)dy\right] \\ &= \left(\int_\Omega K(x,y) - \int_\Omega |K(x,y)|\right)Udy + \int_\Omega K(x,y)hdy. \end{aligned} \tag{3.34}$$

Como

$$\int_\Omega K(x,y) - \int_\Omega |K(x,y)| \leq 0 \quad \text{sobre } S_T,$$

e $U(t,x) \geq 0$, a relação (3.34) implica que

$$B[h] \leq \int_\Omega K(x,y)hdy, \quad t > 0,\ x \in \partial\Omega. \tag{3.35}$$

Vamos agora mostrar que $h(t,x) \leq 0$. Para tanto, suponha que isso não seja verdade. Então existe um ponto $(t_0,x_0) \in \overline{D}_T$ tal que $h(t_0,x_0)$ é um máximo positivo. Como h satisfaz (3.33) e,

$$\begin{aligned} h(0,x) &= (u-U)(0,x) \\ &= u(0,x) - U(0,x) \\ &= u_0(x) - U_0(x) \\ &= u_0(x) - |u_0(x)| \leq 0, \end{aligned}$$

o Teorema 3.1 implica que $x_0 \notin \Omega$, a menos que h seja uma constante positiva em $\overline{D}_T$. No entanto, h não pode ser uma constante quando consideradas as hipóteses deste teorema. De fato, se

$$h(t,x) = k, \quad \forall\ (t,x) \in \overline{D}_T,\ k > 0, \tag{3.36}$$

então por (3.35), temos

$$\begin{aligned} \alpha_0 \frac{\partial h(t,x)}{\partial \eta} + h(t,x) &\leq \int_\Omega K(x,y)h(t,y)dy \\ &\leq \int_\Omega K(x_0,y)h(t_0,x_0)dy \\ &\leq \int_\Omega |K(x_0,y)|\, h(t_0,x_0)dy \quad \text{sobre } S_T. \end{aligned}$$

E assim, por (3.36), segue que

$$1 \leq \int_\Omega |K(x_0,y)|\, dy \quad \text{sobre } S_T,$$

uma contradição com (K_1) e (K_2) e, portanto, $x_0 \notin \Omega$. Agora, vamos mostrar que $x_0 \notin \partial\Omega$ também nos leva a uma contradição. Para isso, vamos analisar os seguintes casos

(i) Condição (K_1) e $\alpha_0 \geq 0$;

(ii) Condição (K_2) e $\alpha_0 > 0$;

(iii) Condição (K_2) e $\alpha_0 = 0$.

Com efeito, consideremos inicialmente o caso (i) e recordemos que estamos sob a hipótese do Teorema 3.1, o que implica em $(\partial h(t_0,x_0)/\partial \eta) > 0$ e na relação (3.35). Dessa forma, podemos concluir que

$$\begin{aligned} h(t_0,x_0) &\leq \alpha_0 \frac{\partial h(t_0,x_0)}{\partial \eta} + h(t_0,x_0) \\ &\leq \int_\Omega K(x_0,y) h(t_0,y) dy \\ &\leq \int_\Omega |K(x_0,y)|\, h(t_0,x_0) dy. \end{aligned}$$

Implicando em

$$1 \leq \int_\Omega |K(x_0,y)| dy.$$

Uma contradição. Agora, suponha que o caso (ii) ocorra. Então

$$h(t_0,x_0) < \alpha_0 \frac{\partial h(t_0,x_0)}{\partial \eta} + h(t_0,x_0) \leq \int_\Omega K(x_0,y) h(y) dy \leq \int_\Omega |K(x_0,y)| h(t_0,x_0) dy.$$

Logo

$$1 > \int_\Omega |K(x_0,y)| dy.$$

Uma contradição. Por fim, suponha agora que o caso (iii) ocorra. Novamente a condição (3.35) nos fornece

$$h(t_0,x_0) \leq \int_\Omega |K(x_0,y)| h(t_0,y) dy.$$

Sendo $|K(x,y)| > 0$ e como provado anteriormente que $h(t,x)$ é uma função contínua não constante em Ω, então a relação acima implica que

$$h(t_0,x_0) < \int_\Omega |K(x_0,y)|\, h(t_0,x_0) dy$$

ou seja

$$1 < \int_\Omega |K(x_0,y)| dy.$$

Levando novamente a uma contradição. Assim concluímos que $h(t,x) \leq 0$ em $\overline{D}_T$, ou seja,

$$u(t,x) \leq U(t,x) \quad t > 0,\ x \in \overline{\Omega}.$$

Como por (3.31), $-U$ é solução de (3.27), um argumento semelhante ao anterior mostra-se que

$$u(t,x) \geq -U(t,x) \quad t > 0,\ x \in \overline{\Omega}.$$

Isso prova o teorema. $\square$

Com base no resultado da comparação no Teorema 3.6, temos a seguinte propriedade de decaimento da solução dependente do tempo

Teorema 3.7. Seja $|K(x,y)|$ satisfazendo (K_1) ou (K_2) e $f(x,u)$ satisfazendo (3.31) e a propriedade não decrescente $f_u(x,u) \leq 0$ para $0 \leq u \leq M$. Então, para qualquer u_0 com $|u_0| \leq M$ a solução correspondente $u(t,x)$ de (1.1) verifica

$$\lim_{t\to\infty} |u(t,x)| = 0 \qquad x \in \overline{\Omega}.$$

Demonstração. Por (3.28) segue que $f(x,0) = 0$, então o Corolário 2.1 implica que $u_s = 0$ é a única solução de (2.1) em $\langle 0,M\rangle$. Assim, pelo Teorema 3.5 a solução $U(t,x)$ de (3.27) com $U_0 = |u_0|$, converge para 0 quando $t \to +\infty$. Logo, pelo Teorema 3.6, temos

$$-\lim_{t\to\infty} U(t,x) \leq \lim_{t\to\infty} u(t,x) \leq \lim_{t\to\infty} U(t,x),$$

e portanto

$$\lim_{t\to\infty} |u(t,x)| = 0 \qquad x \in \overline{\Omega}.$$

$\square$

Quando a função $f(x,u)$ é dada na forma

$$f(x,u) = c(x)u^{2p+1}, \quad p = 0,1,2,\cdots,$$

onde $c(x) < 0$, os requisitos de f no Teorema 3.7 são preenchidos por qualquer constante $M > 0$. Portanto, dada qualquer função inicial u_0, a solução $u(t,x)$ de (1.1) decai para 0 quando $t \to +\infty$ quando $|K(x,y)|$ satisfaz a condição (K_1) ou a condição (K_2). Esta propriedade de decaimento também foi obtida por Day [4] e Friedman [7] para o caso linear $f(x,u) = c(x)u$ onde $|K(x,y)|$ é necessário para satisfazer a condição (K_1).

Bibliografia

[1] Brezis, H. (2011). *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*, volume 2. Springer.

[2] Cosner, C. (2014). Reaction-diffusion-advection models for the effects and evolution of dispersal. *Discrete Contin. Dyn. Syst*, 34(5):1701–1745.

[3] Day, W. (1982). Extensions of a property of the heat equation to linear thermoelasticity and other theories. *Quarterly of Applied Mathematics*, 40(3):319–330.

[4] Day, W. (1983). A decreasing property of solutions of parabolic equations with applications to thermoelasticity. *Quarterly of Applied Mathematics*, 40(4):468–475.

[5] Deng, K. (1992). Comparison principle for some nonlocal problems. *Quarterly of Applied Mathematics*, 50(3):517–522.

[6] Evans, L. (2010). *Partial Differential Equations*. Graduate studies in mathematics. American Mathematical Society.

[7] Friedman, A. (1986). Monotonic decay of solutions of parabolic equations with nonlocal boundary conditions. *Quarterly of Applied Mathematics*, 44(3):401–407.

[8] Gilbarg, D. and Trudinger, N. (2001). *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. Classics in Mathematics. Springer Berlin Heidelberg.

[9] Lopéz-Gómez, J. (2013). *Linear Second Order Elliptic Operators*. World Scientific.

[10] Pao, C. (1995). Dynamics of reaction-diffusion equations with nonlocal boundary conditions. *Quarterly of Applied Mathematics*, 53(1):173–186.

[11] Pao, C.-V. (1982). On nonlinear reaction-diffusion systems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 87(1):165–198.

[12] Pao, C.-V. (2012). *Nonlinear parabolic and elliptic equations*. Springer Science & Business Media.

[13] Protter, M. H. and Weinberger, H. F. (2012). *Maximum principles in differential equations*. Springer Science & Business Media.

[14] Struwe, M. (2000). *Variational methods*, volume 991. Springer.