UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

# Explorando o Teorema de Pitágoras na perspectiva do pensamento crítico e criativo em matemática

FABRIZIO FIDELIS DA SILVA

**BRASÍLIA - DF**
2023

# Explorando o Teorema de Pitágoras na perspectiva do pensamento crítico e criativo em matemática

FABRIZIO FIDELIS DA SILVA

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em matemática pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - ProfMat.

**Orientador**: Profº Dr. Cleyton Hércules Gontijo

Brasília – Distrito Federal

2023

Universidade de Brasília

Instituto de Ciências Exatas

Departamento de Matemática

**Explorando o Teorema de Pitágoras na perspectiva do pensamento crítico e criativo em matemática**

Por

**Fabrizio Fidelis da Silva**

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos do “Programa” de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, para obtenção do grau de

MESTRE

Brasília, 14 de julho de 2023.

Comissão examinadora:

___

Prof. Dr. Cleyton Hércules Gontijo – MAT/UnB (Orientador)

___

Prof. Dr. Mateus Gianni Fonseca – IFB

___

Prof. Dr. Wescley Well Vicente Bezerra – FUP/UnB

*Dedico este trabalho a Deus, toda honra e toda a  glória seja dada ao Senhor Jesus.*

# Agradecimentos

Em primeiro lugar agradeço a Deus, pelo Seu amor e cuidado para comigo, mesmo eu sendo indigno de tamanha graça.

A minha amada esposa Maraísa Oliveira Fidelis por todo o amor, carinho e compreensão nos meus momentos ausentes de dedicação aos estudos.

Aos meus pais, Severino Fidelis da Silva (*em memória*) e Celina Rabelo da Silva que sempre me incentivaram a estudar e foram meus primeiros professores. Reconheço todo amor, dedicação e esforço aplicados para que eu tivesse melhores oportunidades. Obrigado pela educação que me deram e por todos os ensinamentos que carrego comigo. Minhas conquistas não são só minhas, são também de vocês.

Ao Professor Dr. Cleyton Hércules Gontijo, que aceitou me orientar e que o fez com muita atenção, zelo e maestria, obrigado pela confiança.

Aos professores do PROFMAT - UnB, que contribuíram para minha qualificação, crescimento e aprendizado.

A todos a minha gratidão.

*"A melhor maneira que o homem dispõe para se aperfeiçoar é aproximar-se de Deus".*

*(Pitágoras)*

*"Por vezes sentimos que aquilo que fazemos não é senão uma gota de água no mar. Mas o mar seria menor se lhe faltasse uma gota."*

*(Madre Teresa de Calcutá)*

# RESUMO

A pesquisa “Explorando o Teorema de Pitágoras na perspectiva do pensamento crítico e criativo em matemática” trata de um estudo a respeito do Teorema de Pitágoras sob a óptica do pensamento crítico e criativo em matemática em contextos educacionais, que buscam a melhoria nos processos criativos dos estudantes. Dessa forma, o objetivo da pesquisa foi construir uma sequência didática (oficina), sob a óptica do pensamento crítico e criativo, para explorar o Teorema de Pitágoras, de maneira a tornar o ensino mais interessante e propício ao desenvolvimento dos educandos. No Brasil, o ensino da matemática, predominantemente, segue o modelo bancário, fundamentado em aulas expositivas, principalmente teóricas. Entretanto, em face das transformações sociais, econômicas, políticas e culturais do mundo moderno, a educação matemática vem sendo questionada quanto ao seu papel nesta sociedade, a qual exige um novo tipo de profissional e cidadão, mais criativo. Para tal propósito a educação da matemática deve articular o aprender para o mundo do trabalho e o aprender para o mundo das relações sociais. Nesse sentido, com o intuito de favorecer uma formação dos estudantes alinhada a essa nova realidade, escolheu-se o Teorema de Pitágoras, a proposição matemática mais conhecida do mundo, com objetivo de encontrar novos e criativos caminhos para o ensino da matemática. Para isso, exploramos aspectos relativos à História da Matemática, com a finalidade de se aproximar do cenário deste teorema, apresentamos algumas de suas demonstrações e aplicações. Em seguida, realiza-se uma revisão sobre o conceito de criatividade e pensamento crítico e criativo em matemática. Por fim, apoiando-se nessas teorias, buscou-se construir uma estratégia didática, por meio da Oficina em Matemática sobre o Teorema de Pitágoras, de maneira a tornar o ensino mais interessante e propício ao desenvolvimento dos educandos.

**Palavras-Chave:** Teorema de Pitágoras; Criatividade em Matemática; Pensamento Crítico e Criativo em matemática; Ensino e Aprendizagem de Matemática.

# ABSTRACT

The research “Exploring the Pythagorean Theorem from the perspective of critical and creative thinking in mathematics” deals with a study about the Pythagorean Theorem from the perspective of critical and creative thinking in mathematics in educational contexts, which seek to improve students' creative processes. students. Thus, the objective of the research is to build a didactic sequence (workshop), from the perspective of critical and creative thinking, to explore the Pythagorean Theorem, in order to make teaching more interesting and conducive to the development of students. In Brazil, the teaching of mathematics predominantly follows the banking model, based on lectures, mainly theoretical. However, in view of the social, economic, political and cultural transformations of the modern world, mathematics education has been questioned as to its role in this society, which requires a new type of professional and more creative citizen. For this purpose, mathematics education must articulate learning for the world of work and learning for the world of social relations. In this sense, with the aim of favoring the training of students in line with this new reality, the Pythagorean Theorem was chosen, the most famous mathematical proposition in the world, with the aim of finding new and creative ways for teaching mathematics. For this, we explore aspects related to the History of Mathematics, in order to approach the scenario of this theorem, we present some of its demonstrations and applications. Then, a review is carried out on the concept of creativity and critical and creative thinking in mathematics. Finally, based on these theories, an attempt was made to build a didactic strategy, through the Workshop in Mathematics on the Pythagorean Theorem, in order to make teaching more interesting and conducive to the development of students.



**Key-words**: Pythagorean theorem; Creativity in Mathematics; Critical and Creative Thinking in Mathematics; Mathematics Teaching and Learning.

## LISTA DE FIGURAS

# LISTA DE TABELAS E GRÁFICOS

## LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

BDTD - Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações

BNCC - Base Nacional Comum Curricular

CNE - Conselho Nacional de Educação

COVID-19 - Doença do Coronavírus 2019

IBICT - Instituto Brasileiro de Informação em Ciência e Tecnologia

IMPA - Instituto de Matemática Pura e Aplicada

INEP - Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Texeira

MEC - Ministério da Educação

NCTM - National Council of Teachers of Mathematics

OCDE - Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico

PhD - *Philosophic Doctor*

PISA - Programa Internacional de Avaliação de Estudantes

PROFMAT - Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

PUC - Pontifícia Universidade Católica

RENCIMA - Revista de Ensino de Ciências e Matemática

SABEM - Sociedade Brasileira de Educação Matemática

SAEB - Sistema de Avaliação da Educação Básica

SBM - Sociedade Brasileira de Matemática

SEEDF - Secretaria de Estado de Educação do Distrito Federal

UNB - Universidade de Brasília

USF - Universidade São Francisco

**SUMÁRIO**

# INTRODUÇÃO

A matemática é um dos alicerces fundamentais para o desenvolvimento intelectual dos seres humanos, pois auxilia no desenvolvimento do raciocínio lógico, da organização e na preparação do indivíduo para o pensamento abstrato e crítico. A relevância de aprender matemática não está ligada apenas ao conhecimento matemático, mas a todas as áreas do conhecimento.

Para Farias (2015), ao aprender conceitos e procedimentos matemáticos tais como contar, comparar, medir, calcular, resolver problemas, argumentar logicamente, como também organizar, analisar e interpretar informações, o sujeito se insere nas relações sociais, culturais, políticas e no mundo do trabalho, colaborando na sua formação como cidadão.

Um dos desafios para a aprendizagem da Matemática é exatamente proporcionar aos estudantes a visão de que ela não é um conjunto de regras e técnicas, mas faz parte de nossa cultura e de nossa história (BRASIL, 2018). Pontuamos, a partir dos *Principles and Standards for School Mathematics,* do *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 2000), quatro aspectos que reforçam esse argumento:

- **Matemática para a vida**. Saber matemática pode ser satisfatório a nível pessoal e constituir uma forma de poder. Os conhecimentos básicos necessários para a vida cotidiana possuem, cada vez mais, um caráter matemático e tecnológico. Por exemplo, tomar decisões sobre aquisições, escolher seguros ou planos de saúde, e votar conscientemente são ações que requerem uma certa competência quantitativa.
- **Matemática enquanto parte da herança cultural**. A matemática constitui uma das maiores aquisições culturais e intelectuais da espécie humana e os cidadãos deverão desenvolver apreço e compreensão dessa aquisição, incluindo os seus aspectos estéticos e, até mesmo, lúdicos.
- **Matemática para o local de trabalho**. Tal como se verificou para o nível de matemática necessário para uma cidadania consciente, também níveis de raciocínio e de resolução de problemas exigidos no local de trabalho, em áreas profissionais desde a saúde ao design gráfico, aumentaram extraordinariamente.

- **Matemática para a comunidade científica e tecnológica**. Muito embora todas as áreas profissionais exijam fundamentos de matemática, algumas exigem uma matemática mais aprofundada. Cada vez mais alunos deverão seguir uma via educativa que os prepare para a vida enquanto matemáticos, estatísticos, engenheiros e cientistas etc.

Segundo essa descrição, a matemática faz parte da vida de todos os indivíduos, uma vez que é utilizada nas mais variadas situações do cotidiano. Não obstante a essa realidade, muitos estudantes brasileiros têm encontrado dificuldades no aprendizado da matemática. Desse modo, a disciplina ainda é considerada um desafio na educação básica do país.

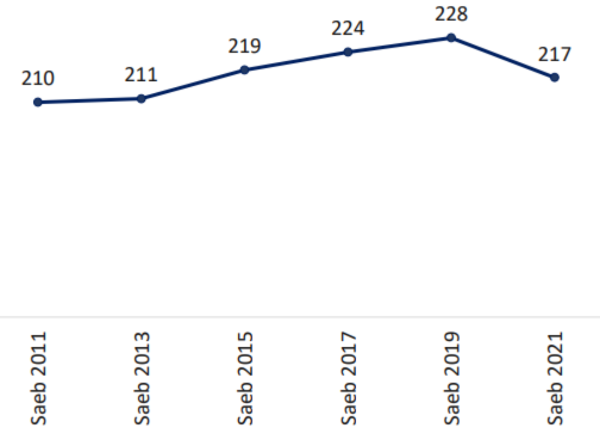
A pesquisa do Programa Internacional de Avaliação de Estudantes 2018 (PISA) revelou que o Brasil obteve uma das menores pontuações, bem abaixo da média mundial. De acordo com o estudo, apenas 2% dos estudantes alcançaram os níveis 5 ou 6 de proficiência, numa escala que abrange os níveis: 1, 2, 3, 4, 5 e 6, no qual o nível 1 é de menor proficiência e o nível 6 é de maior proficiência.

No PISA 2018, cerca de 68% dos estudantes de 15 anos não atingiram o nível básico de matemática para exercício pleno da cidadania, nível considerado básico pela Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE).

Na mesma perspectiva, em 2021, estudantes brasileiros de ensino fundamental e médio foram avaliados pelo Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB) e tiveram um desempenho em matemática inferior ao de 2019 (INEP, 2022). Evidentemente, as análises dos resultados precisam considerar o contexto extremamente desafiador em que educadores, alunos e familiares viveram com as escolas fechadas, devido à pandemia de COVID-19. Levando em consideração as redes pública e privada, a queda das notas de matemática demonstram o grande desafio que será a recuperação da aprendizagem no período pós-pandemia.

No 5º ano do ensino fundamental, a nota passou de 227,88 em 2019 para 216,85 em 2021. Este resultado aponta uma regressão aos níveis de 2013 e revela que 38,9% dos alunos chegaram a essa etapa sem conseguir identificar figuras geométricas ou não seriam capazes de converter mais de uma hora inteira em minutos ou resolver problemas, no sistema monetário nacional, como adição e subtração de cédulas e moedas, por exemplo.

Gráfico 1: Evolução das Proficiências Médias no Saeb em Matemática no 5º ano do Ensino Fundamental – Brasil – 2011 a 2021




Fonte: https://download.inep.gov.br/saeb/resultados/press_kit_saeb_2021.pdf

Queda menor, entretanto, da mesma forma expressiva, aconteceu no 9º ano do ensino fundamental: de 265,16 pontos (2019) para 258,64 (2021). O mesmo cenário se apresenta no 3º ano do ensino médio: 278,53 (2019) e 271 (2021).

Uma situação que pode retratar a conjuntura da educação matemática no Brasil ocorreu, recentemente, na rede social Twitter, com a publicação de postagem do influenciador digital Felipe Neto. Ele escreveu: *“34 anos e ainda não precisei usar o teorema de Pitágoras. Creio q (sic) um dia irei...não podem ter me forçado a decorar isso à toa (sic)”*.

Possivelmente, da mesma maneira que Felipe Neto, outras pessoas não tenham aplicado o teorema em sua vida prática, contudo, certamente o teorema já esteve presente no seu cotidiano.

Dessa forma, pode-se inferir que a difusão de concepções inadequadas sobre a matemática e sobre a aplicação dos conhecimentos dessa área no cotidiano das pessoas e no progresso das ciências pode estar entre os elementos que não favorecem o desenvolvimento de atitudes positivas nos estudantes, reforçando as dificuldades de aprendizagem.

Essas percepções negativas podem estar associadas ao que D’Ambrosio (1986) observou em relação às aulas de matemática. Segundo o autor, nessas aulas, o aluno não é convidado a ser criativo, nem motivado ou desafiado a solucionar um problema que o faça vivenciar situações de investigação, exploração e descobrimento.

Muniz (2001), parece concordar com D'Ambrosio ao afirmar que a prática pedagógica do professor de matemática se configura principalmente por um aspecto tecnicista, que favorece a memorização e a repetição, tendo o estudante um papel passivo frente ao processo de aprendizagem, cuja função central é a repetição de conhecimentos. Fortalecendo esse entendimento, Gontijo (2007) e Livne e Milgran (1999) sustentam que a escola não está preparada para incentivar a criatividade, sobretudo, na aula de matemática.

Parcela do conhecimento matemático, a geometria tem muita importância nessa área, pois desenvolve o raciocínio visual e tem ampla aplicabilidade no nosso cotidiano. A geometria contribui para que o indivíduo possa descobrir, projetar, entender como lidar com as formas e o espaço compreender desenhos, gráficos, mapas e esquemas.

Diante do cenário apresentado e dos diversos desafios enfrentados pelos professores no que se refere à matemática, tem-se buscado novas abordagens com os educandos com a finalidade de auxiliá-los no processo de aprendizagem dessa disciplina. Assim, buscou-se responder a seguinte questão: uma abordagem de ensino baseada em teorias de criatividade, favorece o aluno a se relacionar melhor com a matemática e especificamente com o Teorema de Pitágoras?

Ao associar o ensino e a aprendizagem da matemática com teorias de criatividade, buscamos colocar em evidência as recomendações da Base Nacional Comum Curricular, que preconiza na segunda das dez Competências Gerais da Educação Básica a análise crítica e a criatividade como importantes para o desenvolvimento dos estudantes. Vejamos:

> Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas (BRASIL, 2017, p. 9).

Sob outra perspectiva, a Resolução CNE/CP Nº 2 de 2019, que estabelece as Diretrizes Curriculares Nacionais para Formação Inicial de Professores para a Educação Básica e que inclui a Base Nacional Comum a Formação Inicial de Professores da Educação Básica (BNC – Formação), apresenta as competências gerais para os docentes e, dentre as quais: "*Pesquisar, investigar, refletir, realizar a análise crítica, usar a criatividade e buscar soluções tecnológicas para selecionar, organizar e planejar práticas pedagógicas desafiadoras, coerentes e significativas*" (Competência Geral 2).

A criatividade é um gerador de desenvolvimento em vários campos do conhecimento (HENNESSY; AMABILE, 2009) ou como uma forma de garantia da empregabilidade (OCDE, 2019) ou como otimizador da produção científica. Assim o pensamento criativo tem conquistado papel de destaque, de tal forma que a habilidade foi avaliada na prova do PISA 2022. Conforme Gontijo (2020), o reconhecimento da criatividade como uma característica importante para os indivíduos, para os estudantes e para a sociedade leva à defesa de que a escola precisa favorecer o desenvolvimento de habilidades criativas nos estudantes. Dessa forma, tendo em consideração a importância da criatividade no processo de aprendizagem educacional espera-se que os sistemas educacionais propiciem o desenvolvimento de competências e habilidades criativas nos alunos.

Neste trabalho, consideram-se como atividades criativas aquelas que mobilizam o pensamento divergente na produção de soluções para os problemas, isto é, que favorecem a produção de muitas ideias ou alternativas para resolver uma situação-problema a partir de um ponto de partida (ARRUDA, UENO, et al., 2005). Essas atividades buscam estimular os educandos e professores no processo de ensino e aprendizagem da matemática.

Segundo Gontijo (2007),

> Diversas estratégias podem ser empregadas por todos os professores para favorecer o desenvolvimento da criatividade em sala de aula, entre elas, fortalecer traços de personalidade, como autoconfiança, curiosidade, persistência, independência de pensamento, coragem para explorar situações novas e lidar com o desconhecido; ajudar os alunos a se desfazerem de bloqueios emocionais, como o medo de errar, o medo de ser criticado, sentimentos de inferioridade e insegurança; implementação de atividades que ofereçam desafios e oportunidades de atuação criativa (GONTIJO, 2007, p. 4).

Com o presente trabalho, objetivou-se construir uma sequência didática (oficina), sob a óptica do pensamento crítico e criativo, para explorar o Teorema de Pitágoras, de maneira a tornar o ensino mais interessante e propício ao desenvolvimento dos educandos. Para tanto, considerando a necessidade de preparar o aluno a tratar com exigências e desafios da sociedade de conhecimento (ALENCAR et al., 2018).

# 2. METODOLOGIA

Neste capítulo, serão apresentados e detalhados todos os procedimentos usados para a realização deste trabalho, bem como o arcabouço teórico que sustenta esta pesquisa.

Inicialmente, esclarecemos que a pesquisa bibliográfica está estabelecida principalmente no meio acadêmico e tem o objetivo de aprimoramento e atualização do conhecimento, por meio de uma investigação científica de trabalhos e obras já publicados.

Para Andrade (2010, p. 25):

> A pesquisa bibliográfica é habilidade fundamental nos cursos de graduação, uma vez que constitui o primeiro passo para todas as atividades acadêmicas. Uma pesquisa de laboratório ou de campo implica, necessariamente, a pesquisa bibliográfica preliminar. Seminários, painéis, debates, resumos críticos, monográficas não dispensam a pesquisa bibliográfica. Ela é obrigatória nas pesquisas exploratórias, na delimitação do tema de um trabalho ou pesquisa, no desenvolvimento do assunto, nas citações, na apresentação das conclusões. Portanto, se é verdade que nem todos os alunos realizarão pesquisas de laboratório ou de campo, não é menos verdadeiro que todos, sem exceção, para elaborar os diversos trabalhos solicitados, deverão empreender pesquisas bibliográficas (ANDRADE, 2010, p. 25).

A pesquisa científica se inicia por intermédio da pesquisa bibliográfica, em que o pesquisador busca obras já publicadas relevantes para conhecer e analisar. Essa pode auxiliar, desde o princípio, com o intuito de identificar se já existe um trabalho científico sobre o assunto da pesquisa a ser realizada.

Para Fonseca (2002), a pesquisa bibliográfica, é realizada [...]

> a partir do levantamento de referências teóricas já analisadas, e publicadas por meios escritos e eletrônicos, como livros, artigos científicos, páginas de web sites. Qualquer trabalho científico inicia-se com uma pesquisa bibliográfica, que permite ao pesquisador conhecer o que já se estudou sobre o assunto. Existem porém pesquisas científicas que se baseiam unicamente na pesquisa bibliográfica, procurando referências teóricas publicadas com o objetivo de recolher informações ou conhecimentos prévios sobre o problema a respeito do qual se procura a resposta (FONSECA, 2002, p. 32).

Assim, esta pesquisa apresenta uma abordagem qualitativa e exploratória e utiliza o método de pesquisa bibliográfica, sendo um processo de levantamento de dados que a partir de um planejamento é realizado uma busca sistemática de trabalhos acadêmicos que respondam a uma questão (FREIRE, 2013). Sendo um tipo de investigação que tem como objetivo identificar, selecionar, avaliar e sintetizar as evidências relevantes disponíveis sobre o Teorema de Pitágoras e o pensamento crítico e criativo em matemática.

No segundo momento, baseado em toda a pesquisa bibliográfica e fundamentação teórica, apresenta-se um produto educacional, que poderá ser trabalhado em forma de oficina e aplicado no ensino fundamental. Por fim, são apresentadas as considerações finais sobre a pesquisa.

# 3. RESULTADOS DO ESTUDO BIBLIOGRÁFICO

Neste capítulo, apresenta-se os resultados do estudo bibliográfico e a fundamentação teórica.

## 3.1. ESTADO DE CONHECIMENTO SOBRE CRIATIVIDADE MATEMÁTICA E TEOREMA DE PITÁGORAS

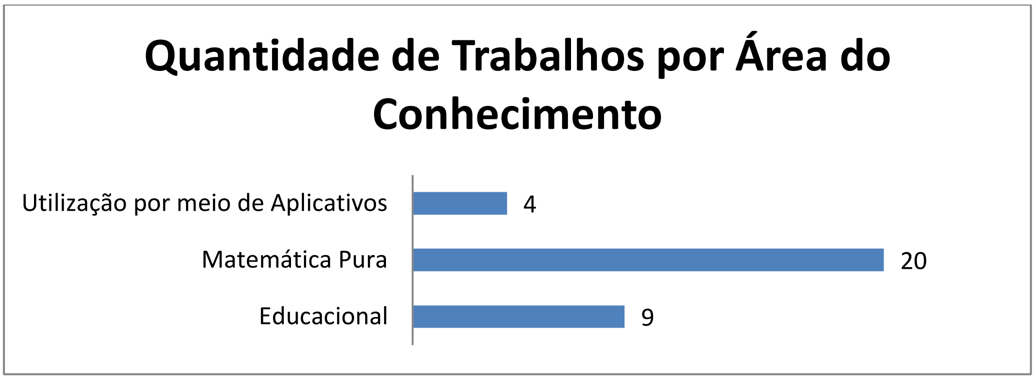
Inicialmente, com a finalidade de conhecer o que já foi produzido cientificamente acerca de criatividade matemática relacionada ao Teorema de Pitágoras, foi realizada a busca por dissertações e teses publicadas sobre o tema, no procedimento denominado estado do conhecimento, por abordar apenas um setor das publicações sobre o tema estudado (ROMANOWSKI; ENS, 2006). A busca foi realizada em duas bases de dados, procurando teses e dissertações sobre esse tema no banco de teses e dissertações da Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações - BDTD do Instituto Brasileiro de Informação em Ciência e Tecnologia - IBICT (BRASIL, 2022a) e dissertações de mestrado no banco do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT/SBM (BRASIL, 2022b). Cabe esclarecer que o repositório do PROFMAT/SBM possui apenas dissertações oriundas do programa do mestrado profissional da rede nacional.

Como o interesse é por trabalhos voltados a criatividade matemática no ensino do Teorema de Pitágoras, a estratégia foi buscar as teses e dissertações que tratam de ambos os temas na área Ensino. A pesquisa foi realizada no mês de outubro de 2022 e não foi incluída restrição temporal.

Após realizar a pesquisa não foi encontrado nenhum trabalho científico que contemplasse o assunto. Diante do resultado, foi realizada nova busca apenas com o temas relacionados à “Criatividade Matemática” e depois com temas relacionados ao “Teorema de Pitágoras”.

No repositório do PROFMAT/SBM obteve-se 33 dissertações com o tema relacionado à “Teorema de Pitágoras”. Os trabalhos foram classificados por área do conhecimento, como mostra no gráfico a seguir:

Gráfico 2: Quantidade de Trabalhos por Área do Conhecimento




Os trabalhos relacionados ao Teorema de Pitágoras que abordam a área do conhecimento da matemática, geralmente, são iniciados fazendo uma abordagem histórica do tema e da Escola Pitagórica, apresentam algumas das diversas demonstrações e mostram exemplos de suas aplicações.

Outra informação considerada importante foi o ano das publicações, mostrado no quadro a seguir:

Quadro 1: Quantidade de Trabalhos por Área do Conhecimento *Versus* Ano de Defesa

| Quantidade deTrabalhos *versus* Ano de Defesa | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Amo | 2013 | 2014 | 2015 | 2016 | 2017 | 2018 | 2019 | 2020 | 2021 | 2022 |
| Trabalhos | 4 | 5 | 3 | 7 | 1 | 4 | 2 | 2 | 4 | 1 |

Fonte: Dados Extrídos do repositório do PROFMAT

No que se refere às dissertações relacionadas com o tema "Criatividade Matemática", foram encontrados 5 trabalhos, os quais estão listados no quadro 1 a seguir.

Quadro 2: Dissertações Relativos ao Tema Criatividade Matemática no PROFMAT

| **Ano de defesa** | **Autor** | **Título da Dissertação** | **Instituição** |
|---|---|---|---|
| 2021 | Rafael Vitor Guerra Queiroz | Estudo sobre a criatividade em matemática | PUC |
| 2020 | Rodrigo Mota Marinho | Concepções de professores sobre criatividade e pensamento crítico em matemática proposição de instrumento | UFT |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2017 | Neildes Alves Dos Santos | Construções de figuras geométricas com restrições usando redes de pontos: uma proposta para o desenvolvimento da criatividade geométrica | UFBA |
| 2014 | Jair Pinheiro Nogueira | Explorando a curiosidade e a criatividade como motivadores do interesse em matemática | UFG |
| 2019 | Camilo Ferreira Borges | Atividades criativas e o relacionamento dos alunos com a matemática | UNB |

Essas dissertações apresentavam um estudo sobre a criatividade, fazendo uma revisão sobre conceitos de criatividade, criatividade em matemática e pensamento crítico. As pesquisas seguem apresentando fatores que influenciam ou aspectos acerca do ambiente sala de aula/escola que propiciem o desenvolvimento da criatividade. Em alguns trabalhos também são apresentadas atividades para sala de aula, de forma que favoreçam o desenvolvimento da criatividade em matemática.

No repositório da BDTD obteve-se 26 pesquisas relacionadas ao tema "Criatividade Matemática", sendo 9 teses e 17 dissertações. Todos os trabalhos encontrados no repositório do PROFMAT também foram encontrados na BDTD. Os trabalhos seguiam as mesmas linhas de pesquisa dos encontrados no PROFMAT, os quais estão listados no quadro 3 a seguir.

Quadro 3: Dissertações Relativos ao Tema Criatividade Matemática no BDTD

| **Data de defesa** | **Aluno** | **Título** | **Tipo de Trabalho** |
|---|---|---|---|
| 2007 | Gontijo, Cleyton Hércules | Relações entre criatividade, criatividade em matemática e motivação em matemática de alunos do ensino médio | Doutorado |
| 2021 | Rafael Vitor Guerra Queiroz | Estudo sobre a criatividade em matemática | Mestrado |
| 2021 | Pereira, Emanueli | A modelagem matemática e suas implicações para o desenvolvimento da criatividade | Mestrado |
| 2019 | Neri Júnior, Edilson dos Passos | Atos e lugares de aprendizagem criativa em matemática | Mestrado |
| 2019 | Borges, Camilo Ferreira | Atividades criativas e o relacionamento dos alunos com a matemática | Mestrado |
| 2019 | Carvalho, Alexandre Tolentino de | Criatividade compartilhada em matemática: do ato isolado ao ato solidário | Doutorado |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2014 | Nogueira, Jair Pinheiro | Explorando a curiosidade e a criatividade como motivadores do interesse em matemática | Mestrado |
| 2020 | Viana, Elvis Ricardo | Estratégias de estímulo do pensamento criativo em atividades de modelagem matemática | Mestrado |
| 2019 | Palma, Rafael Montenegro | Manifestações da criatividade em modelagem matemática nos anos iniciais | Mestrado |
| 2020 | Giraldi, Olga Cristina Penetra | Um estudo sobre a criatividade em um ambiente de aprendizagem de modelagem matemática | Mestrado |
| 2001 | Lima, Valeria Scomparim de | Solução de problemas: habilidades matemáticas, flexibilidade de pensamento e criatividade | Doutorado |
| 2019 | Dal Pasquale Junior, Marlon Luiz | Criatividade e geração de ideias em atividades de modelagem matemática | Mestrado |
| 2017 | Alvarenga, Rosana Cristina Macelloni | Um estudo sobre os componentes da criatividade na solução de problemas matemáticos | Doutorado |
| 2015 | Fonseca, Mateus Gianni | Construção e validação de instrumentos de medida de criatividade no campo da matemática para estudantes concluintes da educação básica | Mestrado |
| 2019 | Fonseca, Mateus Gianni | Aulas baseadas em técnicas de criatividade: efeitos na criatividade, motivação e desempenho em matemática com estudantes do ensino médio | Doutorado |
| 2015 | Carvalho, Alexandre Tolentino de | Relações entre criatividade, desempenho escolar e clima para criatividade nas aulas de matemática de estudantes do 5º ano do ensino fundamental | Mestrado |
| 2016 | Oliveira, Antonio Neres | Projetos de conhecimento acoplados as tecnologias digitais para promover a criatividade em matemática | Doutorado |
| 2021 | Leite, Leonardo Rodrigues | Insubordinando criativamente a indisciplina na perspectiva da etnomatemática: um estudo qualitativo com professores de matemática. | Mestrado |
| 2008 | Alvarenga, Rosana Cristina Macelloni | O raciocínio lógico e a criatividade na resolução de problemas matemáticos no ensino médio | Mestrado |
| 2020 | Marinho, Rodrigo Mota | Concepções de professores sobre criatividade e pensamento crítico em matemática - proposição de instrumento | Mestrado |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2021 | Nogueira, Cleia Alves | Narrativas de professores de matemática: experiências com aprendizagem criativa em um curso de robótica educativa | Doutorado |
| 2007 | Teixeira, Cristiana Guimarães | Análise de produções de crianças do quarto ano revelando criatividade na educação matemática | Mestrado |
| 2017 | Lopes, Gabriela Lucheze de Oliveira | A criatividade matemática de John Wallis na obra Arithmetica Infinitorum: contribuições para ensino de cálculo diferencial e integral na licenciatura em matemática | Doutorado |
| 2022 | Araújo Neto, Lineu da Costa | Concepções e práticas acerca da criatividade em matemática: movimentos na formação de um grupo de estudantes de licenciatura em matemática | Doutorado |
| 2016 | Silva, Fabiana Barros de Araújo e | Trabalho pedagógico e criatividade em matemática: um olhar a partir da prática docente nos anos iniciais do ensino fundamental | Mestrado |
| 2015 | Farias, Mateus Pinheiro de | Criatividade em matemática: um modelo preditivo considerando a percepção de alunos do ensino médio acerca das práticas docentes, a motivação para aprender e o conhecimento em relação à matemática | Mestrado |

No que se refere aos trabalhos relacionados ao tema “Teorema de Pitágoras” foram localizadas 21 pesquisas, das quais 9 são teses e 12 são dissertações. Da mesma forma que os trabalhos de criatividade matemática, os trabalhos sobre o Teorema de Pitágoras seguiram a linha de pesquisa do mesmo tema no repositório do PROFMAT.

Os trabalhos realizam estudo sobre o Teorema de Pitágoras, abrangendo algumas demonstrações, aplicações e o desenvolvimento de um objeto de aprendizagem, cujo objetivo é colaborar, de forma lúdica, na compreensão geométrica do Teorema no ensino básico.

## 3.2. TEOREMA DE PITÁGORAS

Nesta seção, explora-se uma fundamentação teórica acerca do Teorema de Pitágoras: aspecto teórico, demonstrações e aplicações.

### 3.2.1. HISTÓRIA PRÉ-PITAGÓRICA

Existem indícios de que os antigos babilônios, egípcios e chineses tinham conhecimento do Teorema de Pitágoras.

Na Babilônia, na época do rei Hamurabi, cerca de 1800 a 1600 a.C., foram encontrados tabletes de barro, nos quais havia uma tabela de números inteiros com a propriedade de que um dos números quando elevado ao quadrado era igual à soma dos quadrados dos outros dois. Depois de estudos minuciosos concluíram-se serem ternas pitagóricas.

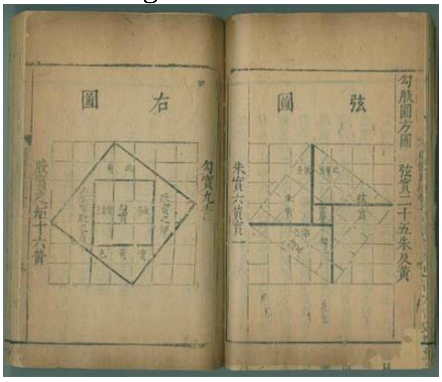
Figura 1: Tabela trigonométrica escrita em tábua de argila

Fonte: https://www.bbc.com/portuguese/geral-41072079

Os egípcios, usando cordas divididas em 12 partes através de 11 nós, construíam ângulos de 90°. Isto era plausível tendo consciência que um triângulo cujos lados medem respectivamente 3, 4, 5 unidades, é retângulo.

No Chóu-pei, o mais antigo trabalho chinês conhecido, que pode remontar ao segundo milênio a.C. (Eves, 2008, pg. 86), foram encontradas evidências de que os chineses possuíam conhecimentos das ternas pitagóricas. Esse livro reuniu 246 problemas muito antigos e, entre eles está o “Gou Gu”, o equivalente chinês do Teorema de Pitágoras, como pode ser visto na figura a seguir.

Figura 2: Teorema Pitágoras e o livro Cho Pei Suan Ching




Fonte: [https://www.maa.org/press/periodicals/convergence/mathematical-treasures-zhoubi-suanjing](https://www.maa.org/press/periodicals/convergence/mathematical-treasures-zhoubi-suanjing)

### 3.2.2. PITÁGORAS: O HOMEM E O SEU TEOREMA

Considerado por muitos como o “Pai da Matemática” e o matemático mais conhecido do público, Pitágoras nasceu no século VI a.C., na ilha de Samos, uma ilha grega na costa marítima do que hoje é a Turquia. A vida de Pitágoras está rodeada de muitas histórias, mas nada pode ser afirmado com confiança, pois tudo que se conhece sobre Pitágoras veio por meio de menção de outros autores.

Quando criança já demonstrava ser prodigioso, até os 18 anos teve como mestre Hermodamas, de Samos. Posteriormente, foi aluno de Tales, em Mileto. Tales era um negociante, descendente de uma nobre família grega. Mas deixou tudo isso para se dedicar ao estudo da Matemática, Astronomia e Filosofia tornando-se um grande sábio, tanto que foi considerados um dos “Sete sábios da Grécia” (Tales de Mileto, Periandro de Corinto, Pítaco de Mitilene, Bias de Priene, Cleóbulo de Lindos, Sólon de Atenas e Quílon de Esparta).

Da Escola de Mileto originaram-se vários filósofos, sendo que Anaximandro era o seu segundo filósofo, o qual se mostrou mais exímio pensador do que Tales. O pensamento de Anaximandro era mais científico e mais amplo que o de Tales. Anaximandro se tornaria mestre de Pitágoras.

Segundo Strathern (2011), o filósofo Ferécidas, também, foi mestre de Pitágoras. Ferécidas era um misto de filósofo e contador de histórias fantasiosas. Era considerado por alguns o criador da doutrina da metempsicose (a transmigração das almas).

Ainda de acordo com Strathern (2011), o mais importante é depreender onde foi que Pitágoras “primeiramente trabalhou com matemática e aritmética”, uma vez que Anaximandro era um filósofo-cientista e Ferécidas era um filósofo-feiticeiro, e que, portanto, nenhum dos dois era matemático. Então com quem Pitágoras tinha aprendido matemática? O autor e pesquisador Simon Singh nos esclarece:

> Pitágoras adquiriu suas habilidades matemáticas em suas viagens pelo mundo antigo. Algumas histórias tentam nos fazer crer que Pitágoras teria ido até a Índia e a Inglaterra, mas o mais certo é que ele aprendeu muitas técnicas matemáticas com os egípcios e os babilônios. Esses povos antigos tinham ido além da simples contagem e eram capazes de cálculos complexos que lhes permitiam criar sistemas de contabilidade sofisticados e construir prédios elaborados. De fato, os dois povos viam a matemática como uma ferramenta para resolver problemas práticos. A motivação que conduziu à descoberta de algumas das leis básicas da geometria era a necessidade de refazer a demarcação dos campos, perdida durante as enchentes anuais do Nilo. A palavra geometria significa "a medida da terra". (SINGH, 2019, p.24)

Com idade próxima a 18 anos, Pitágoras partiu de Samos para conhecer o mundo. Essa era uma prática da época para adquirir conhecimento por meio do contato com outros povos. Nestas viagens, Pitágoras visitou e viveu na Síria, Líbano, Babilônia e no Egito e provavelmente tenha ido também a Índia.

Nesta situação gerada pelas enchentes do rio Nilo (SINGH, 2019) que os antigos egípcios desenvolveram métodos usando cordas para refazerem na terra as marcações apagadas pelo rio. Eles utilizavam uma corda aberta com 13 nós equidistantes, delimitando assim 12 unidades de comprimento. Dessa forma, para construir um triângulo com lados medindo 3, 4 e 5 unidades de comprimento. Os egípcios perceberam que com tal triângulo tinha o ângulo formado pelos dois lados menores é um ângulo reto.

De outro lado, o primeiro documento escrito no Egito, em grego, que se conhece e que aborda o Teorema de Pitágoras são "Os Elementos", de Euclides (360 – 295 a.C.).

Enfim, ainda que não se tenha um documento original que comprove, infere-se que estas situações devem ter sido vividas de alguma forma por Pitágoras nestas viagens. Certamente, Pitágoras não criou o teorema, mas possivelmente leve o seu nome por acreditar-se que ele tenha sido o primeiro a apresentar de fato uma demonstração.

Conforme (SINGH, 2019) complementa, transcorridos vinte anos de viagens, Pitágoras retornar a Grécia, com o objetivo de fundar uma escola na sua terra natal para estudar a filosofia e a matemática. Entretanto, em Samos, Pitágoras encontrou uma adversidade de ordem política. Durante suas viagens, um tirano persa, chamado Polícrates, teria transformado Samos em uma cidade conservadora, um lugar de intolerância. Polícrates convidou Pitágoras para compor a sua corte, mas ele percebeu que na verdade esta era uma estratégia para fiscalizá-lo e impedir que difundisse as ideias filosóficas e matemáticas.

Foi nesta situação que Pitágoras chega a Crotona, uma antiga cidade-estado da Magna Grécia (sudeste da Itália de hoje) onde fundou uma escola dedicada principalmente ao estudo da matemática e da filosofia.

Dessa forma, nasce a famosa “escola pitagórica”, conhecida também como “irmandade pitagórica”, uma vez que esta escola tinha cunho religioso e era cercada de mistérios. As mulheres eram bem-vindas à irmandade, e eram parte significativa dos seiscentos membros.

> Ao entrar para a Irmandade cada adepto devia doar tudo o que tinha para um fundo comum. E se alguém quisesse partir receberia o dobro do que tinha doado e uma lápide seria erguida em sua memória. A Irmandade era uma escola igualitária e incluía várias irmãs. (SINGH, 2019, p.26)

> Os discípulos da escola pitagórica formavam duas classes: os Auditores ou Pitagoristas, cujo ensino se limitava à música, considerada como medicina da alma, e os Matemáticos ou Pitagóricos, iniciados nas principais descobertas da escola e nos segredos dos deuses. (CYRINO, 2006, p. 38)

Os membros da escola pitagórica deveriam jurar manter em segredo suas descobertas matemáticas. Sob a liderança de Pitágoras, a irmandade conseguiu considerável influência política.

Com passar do tempo, a influência e as inclinações aristocráticas dos pitagóricos tornaram-se tão grandes que forças políticas da região destruíram os prédios da escola fazendo com que seus membros se dispersassem. Pitágoras fugiu para Metaponto onde morreu, com idade avançada.

> Pouco depois da expulsão de Crotona, Pitágoras e seus seguidores estabeleceram-se em Metaponto, outra cidade-colônia grega cerca de 160 quilômetros ao norte, no Golfo de Tarento. A essa altura Pitágoras tinha sessenta e tantos anos, idade venerável considerando que a expectativa média de vida na época era em torno de trinta e cinco. Mas, os anos de abstinência de feijão obviamente cobraram seu tributo, pois Pitágoras morreu não muito depois de chegar a Metaponto (embora, segundo uma fonte, tenha morrido queimado no incêndio que manifestantes antipitagóricos provocaram na casa comunitária onde morava). Como todo o restante da vida de Pitágoras, é impossível verificar isso. (STRATHERN, 2011, p.30)

Pitágoras e os pitagóricos deixaram um grande legado matemático e filosófico, no entanto, esta importante história da Matemática é cercada de muitas lendas, pelo fato de muitas de suas descobertas ficarem em segredo.

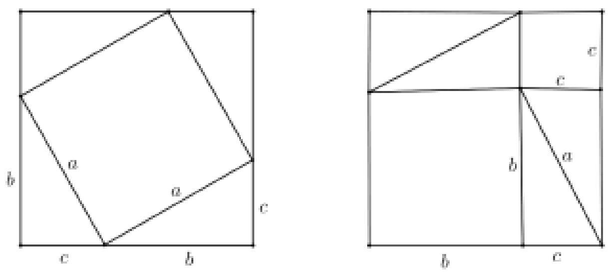
### 3.2.3. O TEOREMA

Sabe-se que existem mais de 400 demonstrações diferentes do Teorema de Pitágoras, algumas feitas por personalidades como Bháskara e Leonardo da Vinci e até mesmo um presidente dos Estados Unidos, James Abram Garfield. O importante livro The Pythagorean Proposition, (LOOMIS, 1968) do professor norte-americano Elisha Scott Loomis (1852 – 1940), contém uma compilação de 370 demonstrações diferentes do Teorema de Pitágoras. Nesta seção, detalha-se algumas das principais provas demonstrativas do teorema.

#### 3.2.3.1. Demonstração de Pitágoras

Os historiadores em geral acreditam que a demonstração pitagórica deve ter sido uma demonstração geométrica (baseada na comparação de áreas), provavelmente uma demonstração parecida com a que decorre das figuras adiante.

Figura 3: Demonstração de Pitágoras.




No quadrado à esquerda da figura a seguir que tem b + c como lado, retiremos quatro triângulos retângulos iguais e obtemos um quadrado de lado a. Se fizermos a mesma operação no quadrado à direita (também de lado b + c), restarão dois quadrados de lado b e c. Logo, a área do quadrado de lado a é a soma das áreas dos quadrados de lado b e c, isto é:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

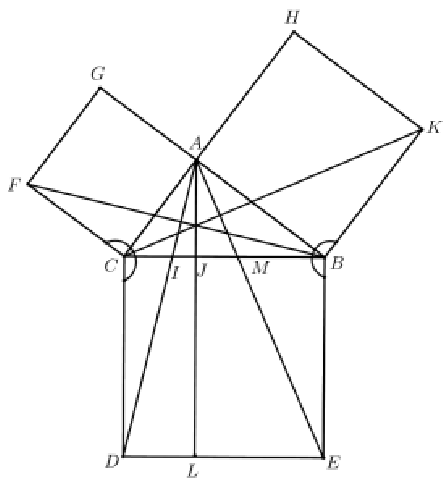
Esta é considerada a demonstração mais bela do Teorema de Pitágoras. Esta demonstração encontra-se nos livros Coleção do Professor de Matemática (MORGADO, CARVALHO, WARGNER, LIMA, ELON, 2005) e Revista do professor de matemática (ROSA 1983).

### 3.2.3.2. Demonstração de Euclides

Conforme AABOE(1984), BOYER(1974) e CINTRA(2003):

> Sobre o triângulo retângulo ABC construímos, sobre cada um de seus lados, quadrados exteriores ao triângulo. Assim, sobre o cateto AB construímos o quadrado ABKH de lado c, sobre o cateto AC construímos o quadrado ACF G de lado b e sobre a hipotenusa BC construímos o quadrado BCDE de lado a. Ainda traçamos os segmentos BF, CK, AD que encontra a hipotenusa em I, AE que encontra a hipotenusa em M e o segmento AL perpendicular a DE em L. Este último segmento encontra a hipotenusa em J. Veja figura ilustrativa a seguir.

Figura 4: Demonstração de Euclides.




Note que:

$F\hat{C}B = F\hat{C}A + A\hat{C}B = 90° + A\hat{C}B = A\hat{C}B + B\hat{C}D = A\hat{C}D.$

Portanto, pelo caso LAL de congruência de triângulo, obtemos

$$\Delta BCF \cong \Delta ACD, \text{ pois } \begin{cases} BC = CD = a \\ F\hat{C}B = A\hat{C}D \\ CF = CA = b \end{cases}$$

Temos que área do triângulo BCF em relação à base CF e a área do triângulo ACD em relação à base CD são, respectivamente,

$$A(BCF) = \frac{1}{2}(CF \cdot CF) = \frac{1}{2}b^2, \qquad A(ACD) = \frac{1}{2}(CD \cdot DL)$$

e a área do retângulo CDLJ é $A(CDLJ) = CD \cdot DL$. Logo, como os triângulos BCF e ACD tem a mesma área, pois são congruentes, obtemos:

$$A(CDLJ) = CD \cdot DL = 2 \cdot A(ACD) = 2 \cdot A(BCF) = b^2 . \qquad (1)$$

De modo análogo temos que os triângulos BCK e BEA são congruentes (caso LAL), obtemos

$$A(BJLE) = BE \cdot LE = 2 \cdot A(BAE) = 2 \cdot A(BKC) = c^2 \qquad (2)$$

Agora, como

$$A(BCDE) = A(CDLJ) + A(BJLE).$$

Segue, de (1) e (2), utilizado que o quadrado BCDE tem lado *a*,

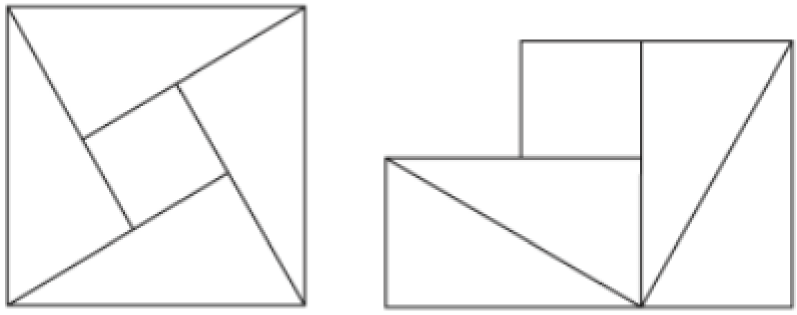
$$a^2 = b^2 + c^2$$

Ressalta-se que esta demonstração se encontra no livro Elementos de Euclides de Alexandria.

### 3.2.3.3. Demonstração de Bhaskara

Nessa demonstração decompõe-se o quadrado construído sobre a hipotenusa em quatro triângulos retângulos, cada um deles congruentes ao triângulo dado, mais um quadrado de lado igual a diferença entre os catetos do triângulo dado como mostra o desenho 1 da figura seguinte.

Figura 5: Demonstração de Bhaskara.



Fonte: Imagem utilizada para a demonstração sem palavras de Bhaskara. (Introdução à história da matemática, EVES, Campinas, p.258).

A descrição de tal desenho foi elaborada da seguinte forma, construímos o quadrado BCDE de lado igual à medida da hipotenusa com o triângulo ABC interno, traçamos os segmentos DF e EG, paralelos respectivamente aos catetos AB e AC, com F pertencente a AC e G pertencente a DF, em seguida prolongamos o segmento AB até o ponto H em EG. Facilmente pode-se estabelecer que os triângulos CDF, DEG e BEH são retângulos e congruentes, pelo caso ALA, ao triângulo ABC. Além disso, o quadrilátero formado internamente é um quadrado de lado igual à diferença entre os catetos do triângulo dado.

Agora, mudando a posição dos triângulos e do quadrado do desenho 1, podemos obter o desenho 2 onde a linha tracejada indica a separação dos quadrados dos catetos. Essa demonstração foi elaborada por Bhaskara, segundo os livros de História da Matemática, Bhaskara desenhou a figura e não ofereceu nenhuma explicação, mas somente a palavra “Veja”.

Usando um argumento algébrico é fácil verificar essa demonstração geométrica, basta denominar de $b$ e $c$ as medidas dos catetos e seja $a$ a medida da hipotenusa.

Percebe-se que a área do quadrado de lado a é igual à soma das áreas dos quatro triângulos congruentes e do quadrado cujo lado é $b - c$, daí

$$a^2 = (b - c)^2 + 4 \cdot \frac{bc}{2} = b^2 + c^2.$$

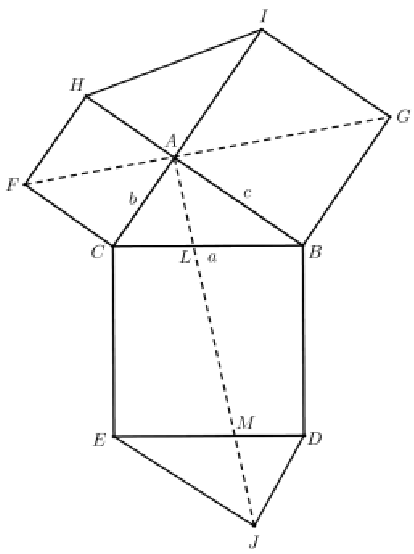
Esta demonstração encontra-se nos livros Introdução à História da Matemática (ELVES, 1997), A Magia dos Números (KARLSON, 1961) e Medida e Forma em Geometria (LIMA).

### 3.2.3.4. Demonstração de Leonardo Da Vinci

A demonstração a seguir é atribuída a Leonardo Da Vinci (1452 - 1519), conforme descrita por Cintra (2003).

Seja ABC um triângulo retângulo de lados a, b e c como na seguinte figura. Construímos os quadrados BCED, ABGI e ACF H sobre os lados desse triângulo. Também construímos o triângulo EDJ, congruente ao triângulo ABC (AC = DJ e AB = EJ). Traçamos os segmentos HI, F G e AJ cuja interseção com os segmentos BC e ED determina respectivamente os pontos L e M, como mostra a figura a seguir.

Figura 6: Construção de Leonardo da Vinci.




Note que a congruência dos triângulos ABC e EDJ, fornece que $A\hat{C}L = J\hat{D}M$. Ainda, os Ângulos $A\hat{L}C$ e $J\hat{M}D$ são alternos externos `a transversal AJ que corta os segmentos paralelos CB e ED, logo $A\hat{L}C$ e $J\hat{M}D$ . Segue que $C\hat{A}L = D\hat{J}M$ . Assim, pelo caso ALA de congruência de triângulos, obtemos

$$\Delta ACL \cong \Delta JDM, \text{ pois } \begin{cases} A\hat{C}L = J\hat{D}M \\ AC = DJ \\ C\hat{A}L = D\hat{J}M \end{cases}$$

Agora, observe que os quadriláteros ABDJ e GBCF são congruentes, pois $AB = GB$, $BD = BC$, $DJ = CF$, $A\hat{B}D = G\hat{B}C$ e $B\hat{D}J = B\hat{C}F$. Portanto,

$$A(ABDJ) = A(GBCF) . \qquad (3)$$

Decompondo essas áreas, como a soma das áreas das figuras geométricas que as compõem, obtemos

$$A(ABDJ) = A(ABL) + A(BDML) + A(JDM) \qquad (4)$$
$$A(GBCF) = A(ABG) + A(ABL) + A(ACL) + A(ACF) \qquad (5)$$

Agora, como $A(ABL)$ é comum na decomposição e $A(ACL) = A(JDM)$, obtemos de (3), (4) e (5) que

$$A(BDML) = A(ABG) + A(ACF) \qquad (6)$$

Por argumentos similares podemos obter a congruência dos quadriláteros GIHF e JECA e decompondo suas áreas pelos polígonos que os compõem, obtemos

$$A(GIHF) = A(JECA) ,$$
$$A(GIHF) = A(GIA) + A(IHA) + A(AHF),$$
$$A(JECA) = A(JEM) + A(MECL) + A(CAL) .$$

Segue, usando essas relações e o fato de $A(IHA) = A(CAL) + A(JEM)$

$$A(MECL) = A(GIA) + A(AHF) . \qquad (7)$$

Segue de (6) e (7) que

$$\begin{aligned} a^2 = A(BCED) &= A(BDML) + A(MECL) \\ &= (A(ABG) + A(ACF)) + (A(GIA) + A(AHF)) \end{aligned}$$

$= (A(ACF) + A(AHF)) + (A(ABG) + A(GIA))$

$= A(ACFH) + A(ABGI) = b^2 + c^2$

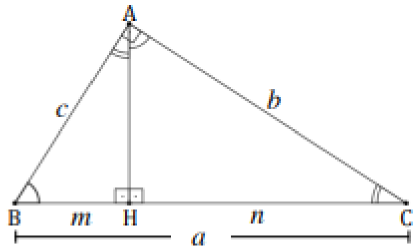
### 3.2.3.5. Demonstração Usando Semelhança (Prova Tradicional)

A demonstração do Teorema de Pitágoras por semelhança de triângulos é uma das mais utilizadas nas escolas, pois é possível, de forma muito simples, além de demonstrar o Teorema, encontrar várias outras importantes relações métricas no triângulo retângulo. Talvez por isso seja uma das demonstrações mais conhecidas. É atribuída a John Wallis (1616 – 1703), um matemático britânico cujos trabalhos sobre o Cálculo foram precursores e de grande importância para Isaac Newton (1642 – 1727).

A demonstração a seguir encontra-se na pesquisa de Araújo (2016).

Proposição: Seja ABC um triângulo retângulo em A com hipotenusa de medida a e catetos b e c. Temos que $a^2 = b^2 + c^2$

Figura 7: Semelhança de Triângulos.




Demonstração: Seja AH a altura relativa ao vértice A, e m e n, respectivamente, as projeções ortogonais dos catetos AB e AC sobre a hipotenusa BC.

Temos que os triângulos AHB e AHC são semelhantes ao triângulo BAC, pois $B\hat{A}H = \hat{C}$, que é o complemento de $\hat{B}$ e $C\hat{A}H = \hat{B}$, complemento de $\hat{C}$. Logo, devido à proporcionalidade entre os lados homólogos, temos que:

$$\frac{a}{c} = \frac{c}{m} \text{ e } \frac{a}{b} = \frac{b}{n}$$

que fornecem as conhecidas relações métricas de Euclides:

$$c^2 = a \cdot m \text{ e } b^2 = n \cdot a.$$

Somando essas duas relações membro a membro, encontramos:

$$c^2 + b^2 = a \cdot m + a \cdot n = \mathrm{a} \cdot (m + n) = a \cdot a = a^2$$

### 3.2.4. RECÍPROCA DO TEOREMA DE PITÁGORAS

O teorema de Pitágoras é o mais utilizado na matemática e nos possibilita calcular o comprimento de um dos lados se conhecermos o comprimento dos outros dois lados do triangulo retângulo. De outro modo, a recíproca do Teorema de Pitágoras nos permite determinar se um triângulo é reto, agudo ou obtuso comparando a soma dos quadrados dos catetos com o quadrado da hipotenusa. O enunciado da recíproca do Teorema de Pitágoras pode ser escrito, como a seguir.

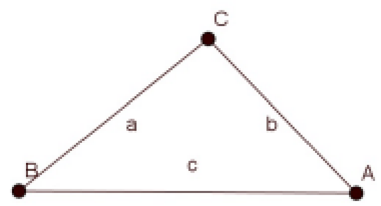
**Teorema:** *Sejam a, b e c os comprimentos dos lados de um triângulo ABC que satisfazem a equação* $c^2 = b^2 + a^2$ *, então o triângulo é retângulo em C.*

Geralmente, a prova dessa recíproca é feita assumindo o próprio Teorema de Pitágoras como a seguir.

**Prova:** Dado o triângulo ABC cujo comprimento dos lados são *a, b e c*, tal que

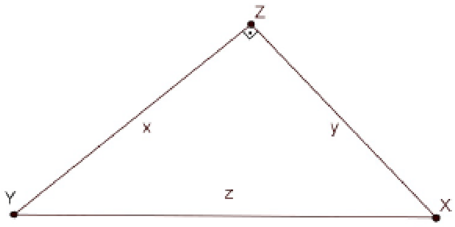
$$a^2 = b^2 + c^2$$

Figura 8: Triangulo ABC.




Construa o Triângulo $XYZ$ tal que $x = a$, $y = b$ e o ângulo $\angle XZY = 90°$,

Figura 9: Triângulo XYZ.




Pelo Teorema de Pitágoras

$$z^2 = x^2 + y^2 = a^2 + b^2 = c^2$$

Logo,

$$z = c$$

Portanto o triângulo ABC e o triângulo XY Z são congruentes (LLL), ou seja,

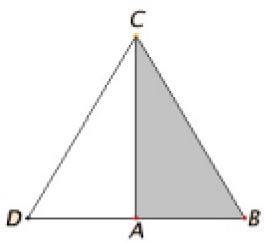
$$\angle ACB = \angle XZY = 90°$$

Mostraremos a seguir Proposição 48 do Livro I de Euclides que diz: "*Se em um triângulo o quadrado sobre um dos lados é igual à soma dos quadrados sobre os dois lados restantes do triângulo, então o ângulo formado pelos dois lados restantes do triângulo é reto*" (JOYCE, 1996). Para realizar esta demonstração, utilizou-se como referência David Joyce (1996).

Demonstração: No triângulo ABC considere que o quadrado do lado BC igual à soma dos quadrados dos lados BA e AC, ou seja, $(\overline{BC})^2 = (\overline{BA})^2 + (\overline{AC})^2$. Afirmamos que o ângulo BÂC é reto. Vamos provar!

Trace o segmento DA tal que CÂD seja reto e $\overline{DA} = \overline{BA}$. Trace $\overline{CD}.\overline{BC}$

Figura 10: Demonstração de Euclides



Como $\overline{DA}$ é igual a $\overline{AB}$, tem-se que $(\overline{DA})^2 = (\overline{AB})^2$. Adicione o quadrado de $\overline{AC}$ para cada um. Então teremos:

$$(\overline{DA})^2 + (\overline{AC})^2 = (\overline{BA})^2 + (\overline{AC})^2.$$

Como o ângulo DÂC é reto, pelo Teorema de Pitágoras:

$$(\overline{DC})^2 = (\overline{DA})^2 + (\overline{AC})^2.$$

Por hipótese, $(\overline{BC})^2 = (\overline{BA})^2 + (\overline{AC})^2$. Portanto, $(\overline{DC})^2 = (\overline{BC})^2$, de modo que o lado $\overline{DC}$ também é igual a $\overline{BC}$.

Como $\overline{DA} = \overline{AB}$ e $\overline{AC}$ é comum, os dois lados $\overline{DA}$ e $\overline{AC}$ são iguais aos dois lados $\overline{BA}$ e $\overline{AC}$ respectivamente, e $\overline{DC} = \overline{BC}$, pelo caso de congruência de triângulos LLL, CÂD ≡ BÂC = 90° .

Portanto, se em um triângulo o quadrado em um dos lados é igual à soma dos quadrados nos dois lados restantes do triângulo, então o ângulo formado pelos dois lados restantes do triângulo será reto, provando-se assim a Recíproca do Teorema de Pitágoras.

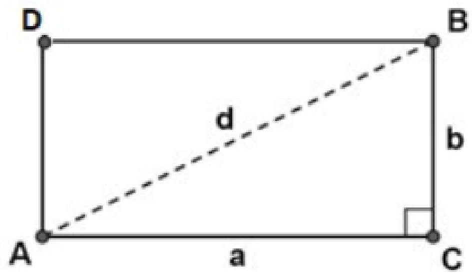
### 3.2.5. APLICAÇÕES DO TEOREMA DE PITÁGORAS

Na seção anterior foi apresentado estudo aprofundado acerca das demonstrações do Teorema de Pitágoras. Este Teorema possui um grande valor histórico, mas, além disso, possui inúmeras aplicações em conceitos matemáticos e em situações cotidianas. Esta subdivisão evidencia a aplicação deste Teorema.

#### 3.2.5.1. Diagonal do retângulo

Seja um retângulo ACBD de comprimento *a*, altura *b* e diagonal *d*. Iremos calcular a diagonal do triângulo retângulo em função dos lados *a* e *b*

Figura 11: Diagonal Retângulo.




Solução:

Como o triângulo ABC é retângulo, para obter a medida da diagonal *d*, aplicamos o Teorema de Pitágoras

$$d^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow d = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

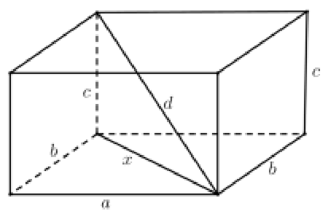
Portanto, basta conhecer as medidas dos lados do retângulo para obter o comprimento de sua diagonal. Esta aplicação se estende ao quadrado que por sua vez, sendo l a medida de seu lado, têm diagonal medindo

$$d = \sqrt{2l^2} = l\sqrt{2}.$$

### 3.2.5.2. Diagonal de um Paralelepípedo Retângulo

Calcular o comprimento da diagonal de um paralelepípedo retângulo em função dos comprimentos de suas arestas.

Figura 12: Diagonal de um Paralelepípedo.



Solução:

Na figura temos um bloco retangular tendo na base um retângulo de medidas *a* e *b*, altura *c* e diagonal de comprimento *d*. A medida da diagonal da base é *x*, que é hipotenusa de um triângulo retângulo de catetos *a* e *b*, daí $x^2 = a^2 + b^2$.

No plano vertical que contém a diagonal, temos outro triângulo retângulo com hipotenusa *d* e catetos *x* e *c*.

Logo, $d^2 = x^2 + c^2$, substituindo $x^2$ concluímos que $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$ que é uma generalização do Teorema de Pitágoras.

### 3.2.5.3. Distância entre dois pontos na Geometria Analítica

Dados dois pontos distintos do A = $(x\ ,\ y_1)$ e B = $(x_2\ ,\ y_2)$ plano cartesiano, qual é a distância entre eles?

Solução:

Denomina-se a distância entre os pontos por d(A, B) e sejam

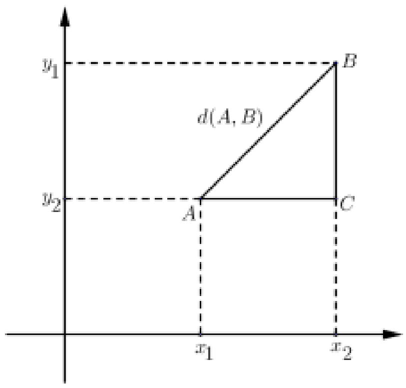
$$A = (x_1\ ,\ y_1) \text{ e } B = (x_2\ ,\ y_2)\ .$$

Observe que na construção da figura aparece o triângulo retângulo ABC, que é retângulo em C, pois AC é horizontal e BC é vertical.

Como AC = $x_2 - x_1$ e BC = $y_2$ - $y_1$, aplicando o Teorema de Pitágoras, temos

$$d^2\,(A,B) = (AC)^2 + (BC)^2\ , \text{ então } d(A,B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\ .$$

Figura 13: Distância entre Dois Pontos.



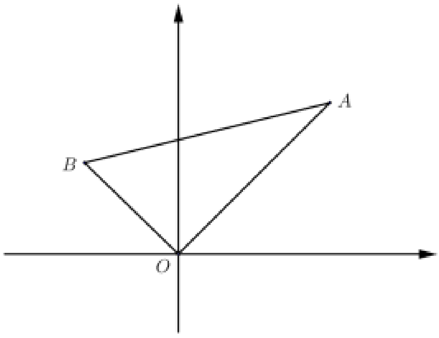
### 3.2.5.4. Condição de Perpendicularismo na Geometria Analítica

Sejam os pontos $O$ = (0,0), $A = (x_1,y_1)$ e $B = (x_2,y_2)$, se os segmentos $AO$ e $OB$ são perpendiculares, que relação existe entre os pontos A e B?

Solução:

Como o triângulo ABO formado pelo três pontos é retângulo, basta aplicar o Teorema

Figura 14: Condição de Perpendicularíssimo.



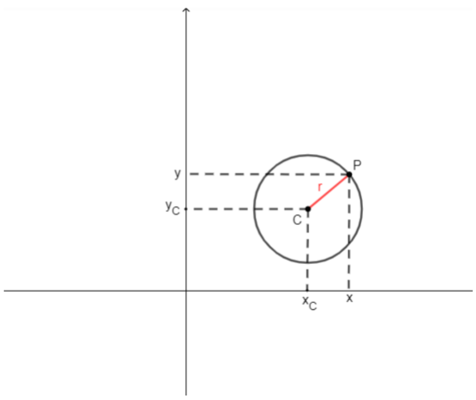

De Pitágoras, daí $d^2(A,B) = d^2(O,A) + d^2(O,B)$, isto é,

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = {x_1}^2 + {y_1}^2 + {x_2}^2 - {y_2}^2$$

### 3.2.5.5. Equação reduzida da circunferência

Uma circunferência com centro C $(x_C, y_C)$ e raio r é o conjunto de todos os pontos P(x, y) do plano que distam r de C.

Figura 15: Diagonal Equação da Circunferência.



Aplicando o Teorema de Pitágoras, temos:

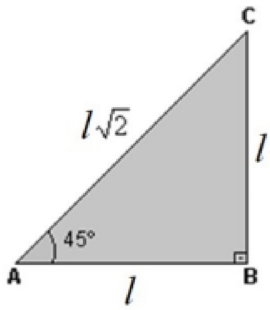
$$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = r^2$$

chamada equação reduzida da circunferência.

### 3.2.5.6. Seno, Cosseno e Tangente de Ângulos Notável

No triângulo retângulo ABC de catetos medindo l, é possível obter os valores das razões trigonométricas (seno, cosseno e tangente) de 45 ◦.

Figura 16: Relações Trigonométricas I.




Para isso, utiliza-se um resultado proveniente da aplicação do Teorema de Pitágoras onde obtém-se que a medida $\overline{AC} = l\sqrt{2}$. Portanto, temos:

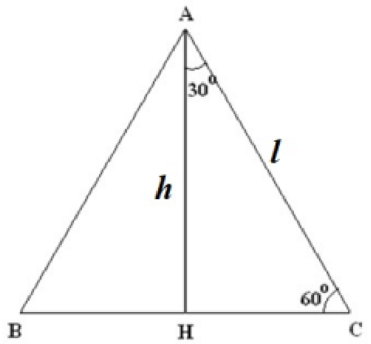
$sen\ 45° = \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

$cos\ 45° = \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

$tg\ 45° = \frac{l}{l} = 1$.

De forma análoga, obtêm-se valores de seno, cosseno e tangente de 30 ◦ e 60 ◦, tomando-se, agora, um triângulo equilátero de lado l.

Figura 17: Relações Trigonométricas II.




Pela definição de seno, cosseno e tangente, verifica-se a relação que diz que se *a* e *b* são dois ângulos complementares, ou seja, $a + b = 90\,^{\circ}$, então *sen a = cos b e sen b = cos a*. Sendo assim:

$$sem\ 30^{o} = \frac{\frac{1}{2}}{l} = \frac{1}{2} = cos60^{o}\ .$$

Do mesmo modo e aplicando o Teorema de Pitágoras para obter h em função do l:

$$sem\ 60^{o} = \frac{h}{l} = \frac{1}{2} = cos\ 30^{o}\ .$$

$$sen\, 60\,^{\circ} = \frac{h}{l} = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{l} = \frac{\sqrt{3}}{2} = cos\, 30\,^{\circ}.$$

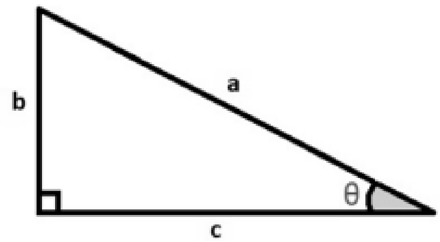
Ainda em relação aos ângulos complementares *a* e *b*, $tg\ a = \frac{1}{tg\ b}$ . Logo:

$$tg\, 30\,^{\circ} = \frac{\frac{l}{2}}{\frac{l\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow tg\, 60\,^{\circ} = \sqrt{3}.$$

### 3.2.5.7. Relação Fundamental da Trigonometria

Considere o triângulo retângulo de hipotenusa medindo *a* e catetos medindo *b* e *c*. Seja θ um ângulo interno ao triângulo.

Figura 18: Relação Fundamental da Trigonométrica.




Como $sen\ \theta = \frac{b}{a}$ e $cos\ \theta = \frac{c}{a}$, temos:

$$(sen\ \theta)^2 + (cos\ \theta)^2 = (\frac{b}{a})^2 + (\frac{c}{a})^2 = \frac{b^2+c^2}{a^2}.$$

Como, pelo Teorema de Pitágoras, $a^2 = b^2 + c^2$:

$$(sen\ \theta)^2 + (cos\ \theta)^2 = 1.$$

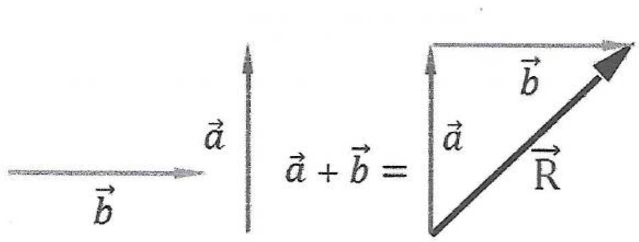
A relação Fundamental da Trigonometria acima é considerada muito importante para a trigonometria. Existem outras relações trigonométricas que podem ser provadas mediante aplicação do Teorema de Pitágoras.

### 3.2.5.8. Soma e Subtração de Vetores Perpendiculares

Para somar dois vetores com direções perpendiculares, movimentamos os vetores sem alterar seus módulos, de modo que o início de um coincida o final do outro.

O vetor resultante liga o início do primeiro ao final do segundo.

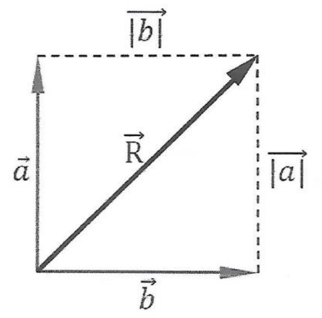
Figura 19: Soma de Vetores Perpendiculares.




Fonte: https://www.todamateria.com.br/fisica-vetores/

Para determinar o módulo do vetor resultante entre dois vetores perpendiculares, fazemos coincidir o início dos dois vetores.

Figura 20: Subtração de Vetores Perpendiculares.




Fonte: https://www.todamateria.com.br/fisica-vetores/

O módulo do vetor resultante é determinado pelo teorema de Pitágoras.

$$R = \sqrt{a^2 + b^2}$$

### 3.2.6. TERNOS PITAGÓRICOS

Definição: Chama-se terno pitagórico todo terno de inteiros positivos (a, b, c) tais que $a^2 = b^2 + c^2$.

Assim são ternos pitagóricos (5, 4, 3), (10, 8, 6), (13, 12, 5), (37, 35, 12), pois $5^2 = 4^2 + 3^2$, $10^2 = 8^2 + 6$ , $13^2 = 12^2 + 5^2$ , $37^2 = 35^2 + 12^2$ .

Se (a, b, c) é um terno pitagórico, então (ka, kb, kc), onde k > 1 é um inteiro positivo qualquer, também é um terno pitagórico, pois, temos:

$$(ka)^2 = k^2 \cdot a^2 = k^2 (b^2 + c^2) = k^2 \cdot b^2 + k^2 \cdot c^2 = (kb)^2 + (kc)^2 .$$

Existem fórmulas que dão ternos pitagóricos, por exemplo, o terno $a = 2k^2 + 2k + 1$, $b = 2k^2 + 2k$, $c = 2k + 1$, onde k é um inteiro positivo qualquer, atribuídas a Pitágoras, e dão uma infinidade de ternos pitagóricos, pois

$$a^2 = (2k^2 + 2k + 1)^2 = 4k^4 + 8k^3 + 4k^2 + 4k^2 + 4k + 1$$

daí

$$a^2 = (2k^2 + 2k + 1)^2 = (4k^4 + 8k^3 + 4k^2) + (4k^2 + 4k + 1)$$
$$a^2 = (2k^2 + 2k)^2 + (2k + 1)^2 = b^2 + c^2 .$$

De modo análogo as fórmulas $a = p^2 + q^2$, $b = p^2 - q^2$, $c = 2pq$, onde p e q ($p > q$) são dois inteiros positivos quaisquer, atribuídas a Platão, também dão uma infinidade de ternos pitagóricos, pois:

$$a^2 = (p^2 + q^2)^2 = p^4 + 2p^2q^2 + q^4 - 4p^2q^2 + 4p^2q^2$$

daí

$$a^2 = p^4 - 2p^2q^2 + q^4 + 4p^2q^2 = (p^2 - q^2)^2 + (2pq)^2 = b^2 + c^2 .$$

Outras fórmulas que fornecem ternos pitagóricos são $a = \frac{1}{2}(n^2 + 1)$, $b = n$, $c = \frac{1}{2}(n^2 - 1)$, sendo n um número positivo ímpar maior do que 1. Nota-se de imediato que a todo terno pitagórico (*a*, *b*, *c*) está associado um triângulo retângulo cuja medida da hipotenusa é a e os catetos têm medidas b e c, denominado triângulo pitagórico.

## 3.3. CRIATIVIDADE E PENSAMENTO CRÍTICO MATEMATICO

Nesse capítulo, apresenta-se alguns conceitos de criatividade e de criatividade matemática relevantes para a investigação.

### 3.3.1. CRIATIVIDADE

Apesar de ser um fenômeno identificado no decorrer de toda a história, até meados de 1950, existiam poucos estudos e pesquisas sobre criatividade. A partir desta década, o tema passou, então, a ser investigada por vários pesquisadores, aumentando consideravelmente os estudos da área (PIIRTO, 2004; URBAN, 1991).

Na Antiguidade e na Idade Moderna, a criatividade foi tratada, na maior parte dos casos, por filósofos que a consideravam como uma “inspiração divina” ou espécie de loucura. Para Kant, filósofo prussiano, criatividade se relaciona com a imaginação. Já no século XX, verifica-se que a maior parte das pesquisas sobre criatividade foram elaboradas por psicólogos, seguido dos filósofos (PINHO, MORETTI, 2018).

Importa ressaltar que mesmo depois da ampliação do número de pesquisas, não ocorreu uma concordância sobre uma definição acerca do fenômeno criatividade. Isso pode ser explicado pelo fato de que o processo criativo considera muitas particularidades, perspectivas e entendimentos. A multiplicidade de sentidos e a intangibilidade deste fenômeno torna difícil determinar uma definição, conforme os pesquisadores que estudam essa área (AMARAL; CARREIRA, 2017).

Um dos autores que marcou o avanço das pesquisas sobre criatividade nas décadas de 1995 e 1960 foi Paul Torrance (1966). Segundo ele, a criatividade:

> é um processo que torna alguém sensível aos problemas ou lacunas no conhecimento e o leva a identificar dificuldades, procurar soluções, formular hipóteses, testá-las e testá-las de novo, modificando-as, se necessário, e comunicar os resultados (TORRANCE, 1966, p. 2).

Numa perspectiva mais recente, encontramos em Alencar e Fleith (2003) a caracterização da criatividade como o desenvolvimento e aprimoramento do processo criativo de cada indivíduo. De modo análogo, Martinez (2014) esclarece que a invenção de algo é considerada criativa se for, ao mesmo tempo, reconhecida como algo novo e valioso para determinado campo da ação humana. Por outra perspectiva Robinson (2019, p. 146) declara que “a criatividade é o processo de ter ideias originais que possuam algum valor”.

Diante do exposto, compreende-se que criatividade está relacionada a novidade, originalidade e utilidade. Mas não se trata de um conceito preciso, ao contrário, existem muitas definições na literatura, apresentando pontos em comum e evidenciando outros aspectos distintos.

### 3.3.2. CRIATIVIDADE MATEMÁTICA E PENSAMENTO CRÍTICO

Pesquisadores do campo da criatividade em matemática (GONTIJO; CARVALHO; FONSECA; FARIAS, 2019; HADAMARD, 1954; MUIR, 1988; SRIRAMAN, 2004) apontam o francês Jules Henri Poincaré, como um dos pioneiros nesse campo, no início da década de 1900, que registrou o próprio processo criativo e faz indagações aos seus contemporâneos acerca de como criavam teorias no campo da matemática.

O trabalho de Poincaré, *An Inquiry into the working methods of mathematicians*, foi publicado em 1902 e tinha por objetivo conhecer como os matemáticos da época percebiam o processo de criação em Matemática, e quais fatores contribuíam nesse processo (GONTIJO et al., 2021; QUEIROZ, 2021).

Para Poincaré, as etapas da criação matemática são (1) uma fase na qual o matemático realiza um trabalho consciente e árduo; (2) um período em que o problema é deixado de lado (trabalho inconsciente), ocorrendo depois de uma "iluminação"; (3) etapa de verificação (PINHO; MORETTI, 2018).

Posteriormente, outros especialistas propuseram diferentes definições de criatividade em matemática, destacando alguns de seus aspectos (NADJAFIKHAH, YAFTIAN, 2011). Em 1991, Ervynck afirmava que descobrir novos conceitos e relações úteis a partir de relações e conceitos já conhecidos é considerado um sinal da criatividade em matemática. Ele complementa que a criatividade em matemática tem papel significativo no desenvolvimento desta ciência, por meio do desenvolvimento de novos teoremas (NADJAFIKHAH, YAFTIAN, 2011).

Laycock dizia que a criatividade em matemática como a habilidade de analisar um problema em diferentes pontos de vista, estabelecer padrões, diferenças e similaridades, gerar múltiplas ideias e escolher um método apropriado para resolver problemas (NADJAFIKHAH, YAFTIAN, 2011).

Em 2005, Chamberlin e Moon definem a criatividade em matemática como uma habilidade de gerar novas soluções para um problema real ou não.

Conforme revisão da literatura de criatividade em matemática, os pesquisadores Gontijo, Fonseca, Carvalho e Bezerra (2021, p. 1-24) registram que “desde Hadamard, com publicações nos anos 1950, houve ao menos uma publicação em todas as décadas sobre o assunto”. Desse modo, diversos conceitos para criatividade em matemática foram propostos ao longo dos anos. Influenciado nessas contribuições da literatura, Gontijo (2007) apresentou um conceito que tem orientado algumas pesquisas brasileiras que tratam desse tema. O autor destaca sua concepção de criatividade em matemática como:

> a capacidade de apresentar diversas possibilidades de solução apropriadas para uma situação-problema, de modo que estas focalizem aspectos distintos do problema e/ou formas diferenciadas de solucioná-lo, especialmente

> formas incomuns (originalidade). Esta capacidade pode ser empregada tanto em situações que requeiram a resolução e elaboração de problemas como em situações que solicitem a classificação ou organização de objetos e/ou elementos matemáticos em função de suas propriedades e atributos, seja textualmente, numericamente, graficamente ou na forma de uma sequência de ações (GONTIJO, 2007, p. 37).

Assim, a capacidade criativa em matemática caracteriza-se pela abundância de ideias diferentes produzidas sobre um mesmo assunto (fluência), pela capacidade de alterar o pensamento ou conceber diferentes categorias de resposta (flexibilidade) e por apresentar respostas infrequentes ou incomuns (originalidade) (GONTIJO, 2010). A fluência, flexibilidade e originalidade são denominadas "características latentes da criatividade em matemática", de forma que essa habilidade pode ser analisada em função dessas características (FONSECA, GONTIJO, 2015).

A fluência consiste na capacidade de produzir ideias, métodos, estratégias ou soluções para uma determinada situação-problema, expressando-se como a quantidade de respostas produzidas pelo indivíduo. A fluência do conhecimento é mais do que a memorização de fatos ou procedimentos, pois se assenta em uma sólida base de conhecimento bem organizado (NCTM, 1997).

A flexibilidade consiste na quantidade de ideias distintas produzidas pelo indivíduo, dessa forma, há muita flexibilidade quando as ideias, ainda que poucas, apresentam características suficientes para pertencerem a categorias distintas. A flexibilidade de representação é uma característica do pensamento criativo que tem grande relevância na resolução de problemas, estando associada à capacidade de superar a rigidez de pensamento e romper com modelos mentais pré-construídos (AMARAL, CARREIRA, 2017)

A originalidade refere-se à produção de respostas infrequentes, incomuns ou raras. Convém ressaltar que a originalidade é uma característica relativa e questionável para alguns pesquisadores, que distinguem a criatividade de uma ideia que ninguém teve antes de uma criatividade como uma ideia original de um indivíduo (BODEN, 2004; PAPALEONTIOU-LOUCA; VARNAVA-MAROUCHOU, 2014). Além disso, a originalidade deve ser analisada no contexto em que uma ideia ou produto foi apresentado, pois, ali pode representar algo novo e útil, apesar de ser conhecido em outros contextos (GONTIJO, 2010).

Posteriormente, Fonseca e Gontijo (2020a) definiram pensamento crítico e criativo em matemática como

> ação coordenada de geração de múltiplas e diferentes ideias para solucionar problemas (fluência e flexibilidade de pensamento) com o processo de tomadas de decisão no curso da elaboração dessas ideias, envolvendo análises dos dados e avaliação de evidências de que os caminhos propostos são plausíveis e apropriados para se chegar à solução, argumentando em favor da melhor ideia para alcançar o objetivo do problema (originalidade ou adequação ao contexto). Em outras palavras, o uso do pensamento crítico e criativo se materializa por meio da adoção de múltiplas estratégias para se encontrar resposta(s) para um mesmo problema associada à capacidade de refletir sobre as estratégias criadas, analisando-as, questionando-as e interpretando-as a fim de apresentar a melhor solução possível. (FONSECA; GONTIJO, 2020a, p. 917).

Para este trabalho, foi considerada esta última definição de pensamento crítico e criativo em matemática, ou seja, a definição proposta por Fonseca e Gontijo (FONSECA, GONTIJO, 2020). Fundamentado neste conceito, resta o questionamento acerca de como estimular o pensamento crítico e criativo nas aulas de matemática.

Técnicas e métodos para o desenvolvimento do potencial criativo são vistos em pesquisas na área da psicologia, principalmente relacionados ao desenvolvimento da criatividade em contextos educacionais e organizacionais. No Brasil, podemos mencionar as seguintes pesquisas como exemplos de nessa área: Carvalho (2015, 2019), Carvalho e Gontijo (2020a, 2020b), Carvalho, Gontijo e Fonseca (2020), Farias (2015), Fonseca (2015; 2019a, 2019b), Fonseca e Gontijo (2020), Fonseca, Gontijo e Souza (2019), Fonseca, Gontijo e Zanetti (2018), Fonseca, Gontijo, Zanetti e Carvalho (2019); Gontijo (2007, 2015, 2018), Gontijo e Fonseca (2020), Silva (2016), Souza, Gontijo e Fonseca (2019).

Em relação às técnicas de criatividade, Gontijo afirma:

> Visam estimular os estudantes a resolverem problemas favorecendo a criação de soluções originais; regras, princípios e generalizações; novos algoritmos; novas questões e problemas e novos modelos matemáticos. Algumas técnicas possibilitam, também, uma profunda compreensão das concepções matemáticas enquanto os estudantes investigam um problema. [...] Além disso, o uso de técnicas de criatividade pode ser uma maneira muito eficaz para os alunos desenvolverem uma paixão pela aprendizagem da Matemática. (GONTIJO, 2015, p. 17)

Sheffield (2005) sugeriu uma categorização de técnicas de criatividade para serem aplicadas no campo da matemática. As categorias propostas são: Apreciação, Animação, Associação, Alteração e Abdicação. Gontijo (2015), a partir dessa categorização, elencou algumas técnicas e suas finalidades.

Quadro 4 - Técnicas de Criatividade

| Categoria | Técnicas | Finalidade |
| --- | --- | --- |
| Apreciação | Brainstorming<br><br>Checklist<br><br>Lista de atributos | São usadas para fazer conhecer um ou mais aspectos ou atributos de uma situação, produto ou problema que está sendo considerado e podem ser usadas para auxiliar os alunos a focalizar características importantes do problema, perceber padrões e traçar uma variedade de possíveis soluções. |
| Animação | Modelagem<br><br>Dramatização | Podem ser usadas em atividades para envolver os estudantes de forma interativa com os problemas, situações ou produtos. |
| Associação | Sugestão-ajuste<br><br>Análise morfológica<br><br>Sinética | Favorecem a realização de comparações e o estabelecimento de conexões entre um problema que, de forma imediata, não se tem um método para resolvê-lo com conceitos, algoritmos e estratégias já conhecidas. |
| Alteração | SCAMPER<br><br>Fazendo e desfazendo | Favorecem um aprofundamento nas concepções matemáticas a partir de modificações sistemáticas em partes do problema ou de sua solução, levando a novas e interessantes questões ou problemas para serem explorados. Questões do tipo “e se...” são usadas nessas técnicas para estimular a imaginação e os insights matemáticos. |
| Abdicação | Relaxamento<br><br>Visualização | Têm por objetivo estimular o subconsciente a refletir sobre o problema quando não se está ativamente trabalhando sobre ele. |

Fonte: elaborado para a pesquisa

Neste trabalho, vamos apresentar uma breve descrição de algumas técnicas apontadas de cada categoria:

**Brainstorming**

O cerne da técnica do Brainstorming é a geração de ideias em atividades de grupo, de maneira que não haja juízo a princípio. Todos os alunos devem contribuir apresentando as ideias que tiverem sobre a atividade que está sendo desenvolvida. Em seguida, todos se envolvem no julgamento das ideias apresentadas buscando aquela que melhor possa levar à solução do problema.

A seguir, apresenta-se um exemplo de situações que pode ser explorada com o uso do brainstorming.

Exemplo:

Esse exemplo foi elaborado por Sharma (2014) e faz parte de um conjunto de itens de um teste de criatividade em Matemática. Na condição da sala de aula, esta atividade visa incentivar os alunos a perceber regularidades na composição dos números e, posteriormente, gerar outros exemplos semelhantes. O professor pode anotar no quadro os números: 3902 — 51062 — 7250. Em seguida, solicita aos estudantes que listem todas as características comuns dos números apresentados. Logo após, pede para que escrevam tantos números quanto puderem que tenham características comuns às dos números apresentados. O brainstorming pode favorecer um clima de confiança e segurança para que os estudantes trabalhem em suas ideias, criando números com as características solicitadas a partir da inspiração nas ideias dos seus colegas. Além disso, o momento do brainstorming pode ser uma oportunidade interessante para que os estudantes desenvolverem a sua capacidade de convencer, argumentar e defender as suas ideias.

**Modelagem**

A modelagem é uma técnica que pode ser utilizada para criar modelos físicos e visuais com a finalidade de demonstrar produções ou idealizações matemáticas e explorar ativamente soluções dos problemas, usando e manipulando uma variedade de materiais produzidos pelos estudantes.

### Análise Morfológica

Análise Morfológica é uma que pode ser utilizada para analisar diferentes atributos ou elementos de um problema, fazendo associações entre esses, de forma a se gerar várias soluções para a situação proposta.

A seguir, apresenta-se um exemplo de situações que pode ser explorada com o uso do Análise Morfológica.

Exemplo, Gontijo (2007):

Imagine que você tem um produto que poderia ser feito de 3 tipos de materiais, em 6 formas possíveis, e teoricamente com 4 tipos de mecanismos de funcionamento, há 72 (3x6x4) combinações potenciais de material, forma e mecanismo. Alguns podem já existir, outros serão inadequados para resolver o problema, porém, a partir desses, se pode prever novas soluções. Esta técnica pode ser estendida a qualquer problema que apresenta este tipo de estrutura.

### Scamper

Scamper é uma técnica geradora de novas ideias que busca melhorar ou gerar algo novo baseado no que já existe. Trata-se de um acrônimo. O nome dessa ferramenta provém das iniciais em inglês dos sete verbos operadores: substitute, combine, adapt, modify, put on other uses, eliminate, rearrange (substituir, combinar, adaptar, modificar, buscar outros usos, eliminar e reordenar), que estimulam, por meio de perguntas, pensamentos convergentes e divergentes (SANTOS, 2012; ORTIZ, 2014).

O Scamper foi criado por Bob Eberle, porém quem levou a técnica ao conhecimento público foi Michael Michalko (SANTOS, 2012)

### Visualização

Conforme Gontijo (2007), visualização é uma técnica usada para trabalhar com imagens (cenas, situações, objetos etc) que requer o uso da imaginação para construir mentalmente representações que poderão ser utilizadas na solução de problemas.

No que concerne às estratégias usadas para o desenvolvimento da criatividade em matemática, verifica-se predominância de três pontos: a resolução, a elaboração e a redefinição de problemas (HAYLOCK, 1997; HASHIMOTO, 1997; GONTIJO, 2007; KATTOU et al., 2013; CARVALHO, 2015).

Desta maneira, iremos abordar as seguintes estratégias para desenvolver a criatividade em matemática: a resolução de problemas abertos, a elaboração de problemas e a redefinição de elementos matemáticos.

**Resolução de Problemas abertos**

Conforme Gontijo (2006), os problemas não podem se caracterizar como aplicação direta de algum algoritmo ou fórmula que o estudante necessite buscar em sua memória se o que se deseja é motivar o aluno a despertar sua criatividade.

Ainda, segundo Gontijo,

> A resolução de problemas é considerada como uma tentativa de resolver questões não estruturadas para as quais não se tem uma técnica especifica, buscando descobrir um caminho que possa levar de uma situação a outra por meio de uma serie de operações mentais ((GONTIJO, 2007, p. 57).

Entretanto, na escola, os alunos têm atividades matemáticas que costumam ser predominantemente estruturadas por meio de resolução de problemas sem um significado em suas vidas (MUNIZ, 2009a), ou seja, situações estranhas aos alunos e que despertam pouco interesse.

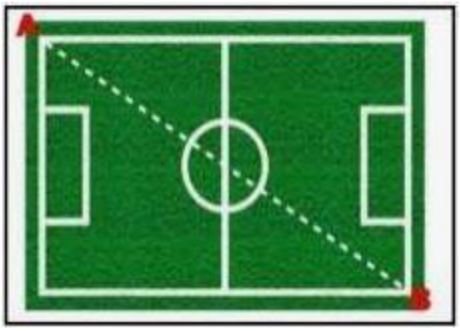
Dessa forma, é importante a introdução de problemas abertos como possibilidade de caminho para desenvolvimento da criatividade, proporcionando que os alunos solucionem, criem e redefinam os problemas que lhe são sugeridos.

Segundo Lee, Hwang e Seo (2003) declaravam que, para um problema ser classificado como aberto, a situação inicial e o objetivo final devem ser abertas, incluindo casos da vida real, variações, projetos e levantamentos de prováveis dificuldades.

A seguir, apresenta-se alguns exemplos de Problemas Abertos que podem ser usados em sala de aula para estimular a criatividade dos alunos.

Exemplo 1: Na figura seguinte, foi ilustrado a visão de um campo de futebol de 110m de cumprimento por 75m de largura. Atravessando o campo na diagonal, sobre a linha da trajetória entre os pontos A e B, quantos metros o rapaz vai andar aproximadamente?

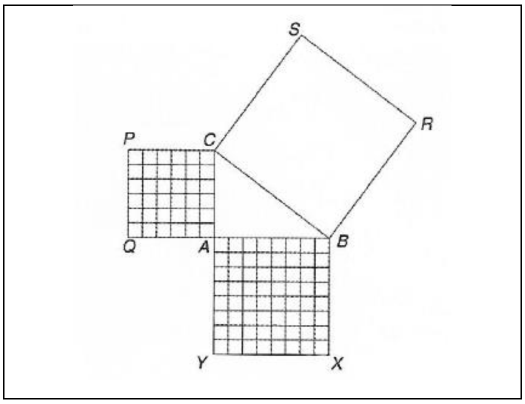
Figura 21: Campo de Futebol




Fonte: Edson André Schnersoski.

Exemplo 2: Na figura a seguir, os quadrados ACPQ e ABXY são formados por quadradinhos de mesmo tamanho. Quantos quadradinhos cabem no quadrado CBRS?

Figura 22: Quadrados Quadriculados




**Elaboração de problemas**

Estudos científicos sobre criatividade em matemática têm evidenciado a importância da elaboração de problemas para o desenvolvimento criativo dos estudantes. Situações, nas quais os alunos são levados a identificar problemas matemáticos, como uma estratégia de proporcionar o desenvolvimento da criatividade matemática dado que possibilita o pensamento divergente.

A formulação de problemas é caracterizada por Silver (1994) como a elaboração de um problema novo ou como a reformulação de problemas apresentados aos alunos. Os problemas devem ser embasados em situações concretas.

Segundo English (1997), a formulação de problemas compreende a criação de novos problemas e questões a serem exploradas, assim como compreende também a reformulação de um problema no decorrer de seu processo de resolução.

Os professores podem encorajar os alunos a considerarem um tipo de problema matemático que sempre resolveram de determinada maneira e resolvê-lo de um modo diferente.

A seguir, apresenta-se um exemplos de Elaboração de Problemas que pode ser utilizado em sala de aula para estimular a criatividade dos estudantes de matemática.

Exemplo: Como você já conhece que, em todo triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos. Esse é o enunciado do famoso Teorema de Pitágoras

a) Explique, com suas palavras, qual a utilidade de se saber o Teorema de Pitágoras, relativamente a resolução de problemas envolvendo triângulos retângulos. Ou seja, o que o teorema permite calcular e quais as informações devem ser dadas, para isso, no problema?

b) Crie três exemplos de problemas, em cujas resoluções você utiliza o teorema de Pitágoras.

**Redefinição**

Essa é uma estratégia que consiste em redefinir situação matemática em relação a suas características, de maneira original, construindo outra perspectiva de apresentá-la. Gontijo (2007) considera que essa é uma estratégia que consiste em redefinir uma situação matemática em termos de seus atributos, gerando dessa forma múltiplas possibilidades de representar essa situação.

Assim, no desenvolvimento da criatividade em matemática, a redefinição de um problema pode ajudar o estudante a ver outras possibilidades de solução para questões que estão sendo propostas. Dessa maneira, Stemberg e Grigorenko (2003) propõem que, nas aulas de matemática, os professores estimulem os alunos a fazerem novas perguntas sobre um problema já existente.

Segundo Fonseca (2019), a inclusão de técnicas de criatividade no planejamento pedagógico de professores da educação básica pode favorecer tanto a capacidade de pensamento criativo, como também a motivação e o consequente desempenho em matemática.

O potencial das técnicas de criatividade também foi descrito por Gontijo e Fonseca (2020). Eles apresentam uma oficina fundamentada e organizada em técnicas de criatividade para estudar assuntos relacionados a grandezas e medidas e proporcionalidade. Segundo os professores, as oficinas demonstram que as atividades se associam apropriadamente a base conceitual e metodológica sobre pensamento crítico e criativo em matemática, contribuindo com a formação docente e subsidiando a aplicação do modelo no trabalho com os estudantes.

Considerando a centralidade que as oficinas fundamentadas e organizadas em técnicas de criatividade ocupam no ensino de matemática e nas pesquisas que investigam o pensamento crítico e criativo, enfatizaremos essa abordagem metodológica na sequência deste trabalho.

## 3.4. DESENVOLVIMENTO DE OFICINA CRÍTICO CRIATIVO EM MATEMÁTICA

Nesta seção, apresenta-se a proposta de atividades, que poderá ser trabalhada em forma de oficina, e aplicada no ensino fundamental. Como uma proposta, está poderá ser adaptada à realidade e/ou necessidades de cada grupo de estudantes que participará das atividades.

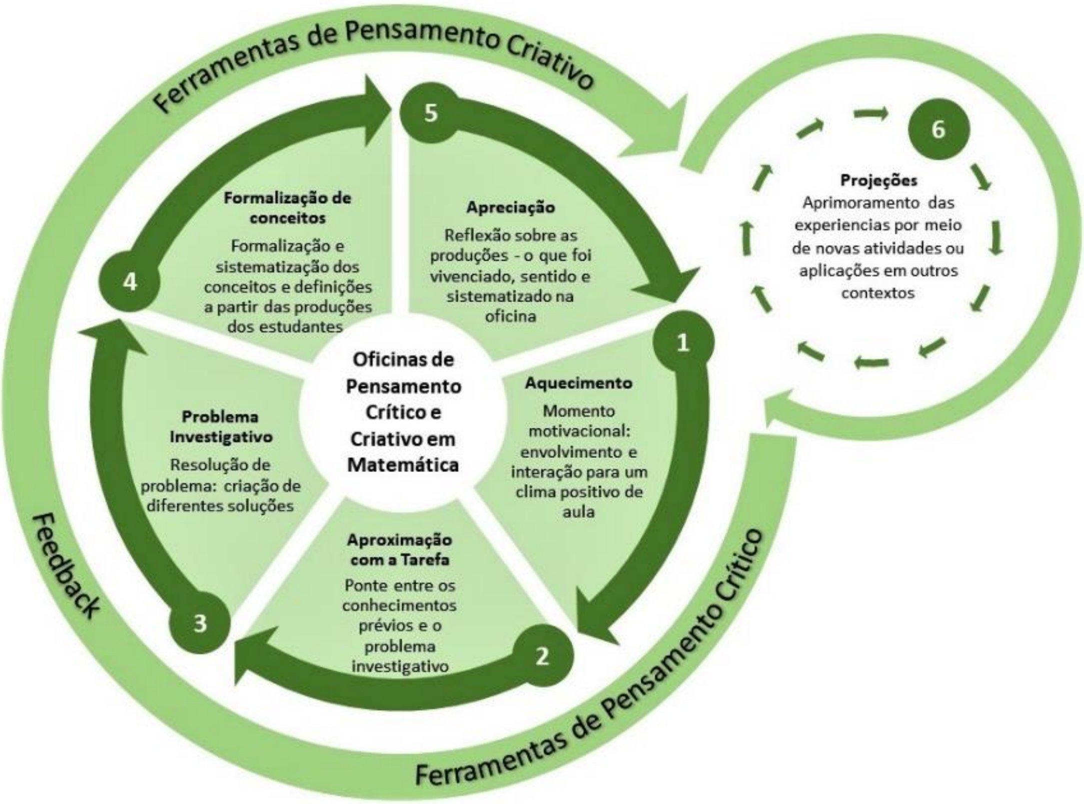
### 3.4.1. OFICINAS PARA SALA DE AULA

As escolas tradicionais ainda são ambientes marcados pelo ensino centrado na figura do professor, pela postura passiva do aluno e pela memorização e reprodução de conceitos, o que culmina em momentos que não oportunizam o estímulo a criatividade do estudante. Diante desse cenário, é recomendável ao professor escolher uma prática pedagógica que coloque o aluno como protagonista de sua aprendizagem e, ao mesmo tempo, criar em sala de aula um ambiente favorável ao desenvolvimento das habilidades do estudante através de métodos que estimulem a sua criatividade, favorecendo o processo de ensino e aprendizagem.

Assim, é importante que o professor indique atividades instigantes e desafiadoras, com múltiplas respostas e modos de resolução, além disso, é necessário criar uma atmosfera de sala de aula propícia para o desenvolvimento criativo do discente, incentivando-o a adotar uma postura investigativa.

Diante de uma educação matemática algorítmica, de memorização e repetição, uma forma de modificar esse contexto foi proposta por Gontijo (2020): o modelo de oficinas pensamento crítico e criativo nas aulas de matemática. Esse modelo é composto por seis etapas, conforme ilustrado pela Figura 23.

Figura 23: Oficinas de Pensamento Crítico e Criativo em Matemática




Fonte: Gontijo (2023, no prelo)

As fases descritas no infográfico da figura mostram o encadeamento de atividades que constituem uma oficina. No quadro abaixo, mostra-se a descrição de cada uma das seis etapas/fases da oficina de pensamento crítico e criativo em Matemática.

Quadro 5 - Etapas da Oficina de Pensamento Crítico e Criativo em Matemática.

| Etapas da oficina | Desenvolvimento das Etapas |
|---|---|
| 1ª Fase: **Aquecimento**. | Essa etapa tem o objetivo de criar um clima favorável à participação dos estudantes, funcionando como elemento motivacional. Esta etapa pode ser elaborada contendo elementos matemáticos ou não, desde que tenham o |

| | |
|---|---|
| | potencial de motivar os estudantes para as etapas seguintes. |
| 2ª Fase: **Aproximação com a tarefa**. | Essa etapa busca aproximar os estudantes dos objetos do conhecimento que serão exigidos no desenvolvimento do problema investigativo, que é parte da atividade principal. É uma fase que também tem forte apelo motivacional, contudo, ligado ao tema do problema de investigação. |
| 3ª Fase: **Desenvolvimento da tarefa** - Problema Investigativo. | Essa etapa procura envolver os estudantes num trabalho de geração de ideias com intuito a solução do problema proposto, que pode ser de natureza sociocientífica ou totalmente matemático. No decorrer do processo de geração de ideias, espera-se que os estudantes exercitem o pensamento crítico avaliando e procurando selecionar as melhores estratégias para resolvê-lo. |
| 4ª Fase: **Sistematização -** Formalização de conceitos e definições. | Essa etapa é a oportunidade de tratar formalmente dos conceitos envolvidos nas tarefas, propiciando o aprendizado da matemática envolvidas, tanto operacional quanto conceitual. O professor, com base na produções dos estudantes, promove esse momento de compreensão dos objetos matemáticos explorados na atividade. |
| 5ª Fase: **Apreciação** | Essa etapa tem por finalidade relembrar todo o caminho construído durante a oficina e provocar uma reflexão nas decisões tomadas e no trajeto escolhido, é uma fase complementar ao anterior, entretanto, procura relacionar as emoções às aprendizagens, com um viés de autoavaliação e avaliação do trabalho desenvolvido coletivamente. |
| 6ª Fase: **Projeções** | Essa etapa procura extrapolar o conhecimento estudado para outros domínios ou levar o conhecimento para outros contextos da vida do aluno. Refere-se a uma tarefa que proporciona novos momentos investigativos para os estudantes a partir do que vivenciaram na oficina. |

Em cada uma dessas etapas, técnicas de criatividade e de estímulo ao pensamento crítico podem ser aplicadas.

Destaca-se que esse modelo de oficinas já foi aplicado em diferentes estudos, evidenciando o seu potencial para motivar os estudantes e ativar o pensamento crítico e criativo em matemática (COSTA; GONTIJO, 2021, COSTA; SILVA; GONTIJO, 2021, GONTIJO; FONSECA, 2020, 2022, FONSECA; GONTIJO, 2022).

# 4. REAULTADO: PRODUTO EDUCACIONAL

Nesse capítulo, apresenta-se uma proposta de atividade como produto educacional que poderá ser trabalhado na forma de oficina e aplicado no Ensino Fundamental.

## 4.1. ROTEIRO DA OFICINA DE CRIATIVIDADE NO TEOREMA DE PITÁGORAS

A oficina foi desenvolvida a partir da perspectiva do modelo de Oficinas de Pensamento Crítico e Criativo em Matemática (GONTIJO, 2020), num formato que os estudantes conseguissem usar de forma simples, entretanto sistemática, a maior parte das estratégias elaboradas para o momento planejado. Estas estratégias foram traçadas para proporcionar que os estudantes tivessem uma experiência dinâmica, estimulante, interessante e criativa, com elementos do cotidiano, contudo foram pensadas de maneira a observar um encadeamento didático, por intermédio da utilização orientada para o estímulo das aprendizagens em Matemática, na medida do desenvolvimento do pensamento crítico e criativo. O roteiro elaborado buscou elencar:

OBJETIVOS

- Conhecer o teorema de Pitágoras.
- Relacionar as medidas das áreas dos quadrados construídos a partir dos lados de um triângulo retângulo e, assim, construir formalmente o conceito do teorema de Pitágoras, compreendendo sua dedução geométrica.
- Compreender a relação entre a medida de comprimento da hipotenusa e dos catetos abordada no teorema de Pitágoras.
- Analisar e resolver problemas por meio do emprego do teorema de Pitágoras

HABILIDADES ENVOLVIDAS (segundo a BNCC)

- (EF09MA13) Demonstrar relações métricas do triângulo retângulo, entre elas o teorema de Pitágoras, utilizando, inclusive, a semelhança de triângulos.
- (EF09MA14) Resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes.

PRÉ-REQUESITOS

Os alunos já devem estar familiarizados com:

- Encontrar a área de um triângulo;
- Encontrar a área de um quadrado;
- Identificar a hipotenusa e os catetos de um triângulo retângulo.

JUSTIFICATIVA

- O aluno deve perceber o quanto a matemática está presente no nosso cotidiano, propondo atividades que o levem a calcular a medida desconhecida do lado do triângulo retângulo em contextos tais como distâncias inacessíveis.

TEMPO

- A oficina foi desenvolvida para duas aulas de 50 min, todavia esse tempo poderá variar em função das características da turma, conhecimento prévio que os alunos possuem e desenvoltura do trabalho em grupo. Cabe destacar que o tempo sugerido é relativo as cinco primeiras etapas e as atividades referentes a etapa “Projeções” deverão ser realizadas em casa e que cada aluno irá desenvolvê-las de acordo com a sua disponibilidade.

AVALIAÇÂO

- No que se refere a avaliação de aprendizagem ou do pensamento crítico criativo o professor deve estar atento a quantidade e qualidade de respostas que os alunos apresentaram, se as respostas tem características comuns ou diversificadas para que ele possa fazer questionamentos pertinentes, no sentido de feedback, para que os alunos possam criar estratégias diferentes umas das outras para que possam aumentar a sua flexibilidade de pensamento.

A seguir apresentaremos com detalhes em cada módulo componente dessa proposta de oficina.

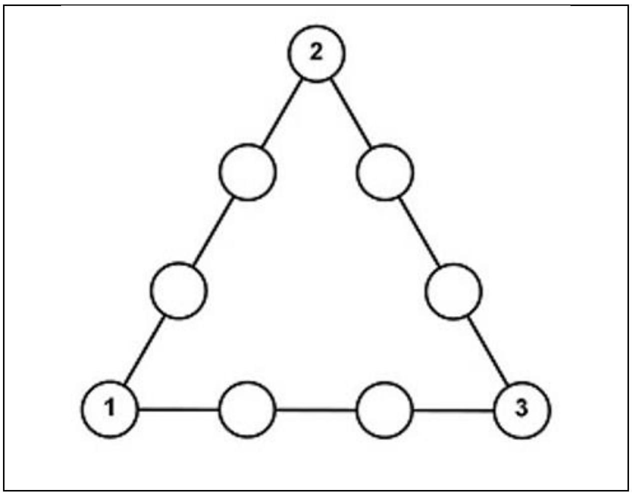
1ª Fase: ***Aquecimento***

Nessa fase, propomos um desafio matemático: Triângulo Mágico. O triângulo mágico não tem uma origem definida, mas assim como os quadrados mágicos que surgiram na antiga China e Índia, podemos associar a existência do triângulo mágico a partir da origem do quadrado mágico.

A escolha do triângulo mágico nesta oficina buscou usar uma forma geométrica que será explorada como atividade investigativa. Todavia, outras atividades que motivem os estudantes poderiam ser utilizadas.

O desafio deverá ser apresentado com o seguinte enunciado: *na figura a seguir, os números 1, 2 e 3 foram colocados nos vértices do triângulo. Preencha os demais círculos da figura com os números de 4 a 9, sem repeti-los, de modo que a soma dos números em cada lado do triângulo seja 17.*

Figura 24 – Triângulo Mágico



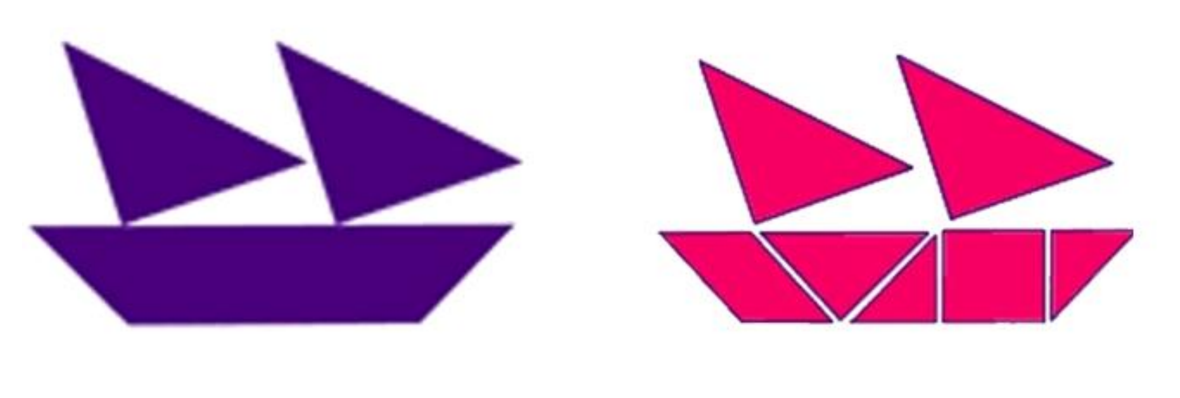

Fonte: http://clubes.obmep.org.br/blog/problema-triangulo-magico/

2ª Fase: ***Aproximação da Tarefa***

Nessa fase, de aproximação com a tarefa, a sugestão é a utilização do Tangram para construções artísticas e exploração da relação entre perímetro e área. Assim, inicialmente o professor faz uma breve introdução acerca do quebra-cabeça e encoraja os alunos a criar imagens, por meio da manipulação das peças.

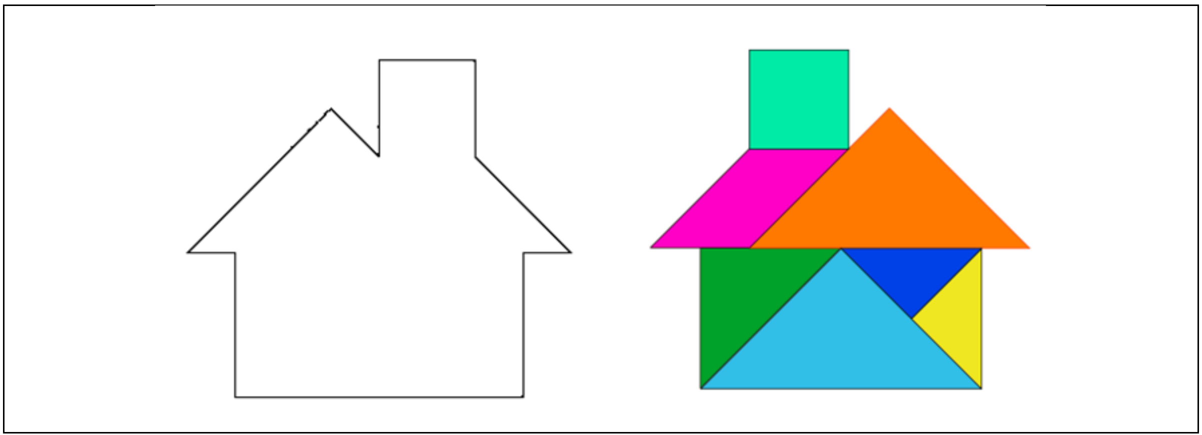
Em seguida, serão apresentadas imagens (barco e casa) que podem ser construídas com o quebra-cabeça e os estudantes devem ser desafiados a reproduzir imagens com o Tangram.

Figura 25 – Tangram - Barco



Fonte: Fabrizio Fidelis da Silva

Figura 26 – Tangram - Casa



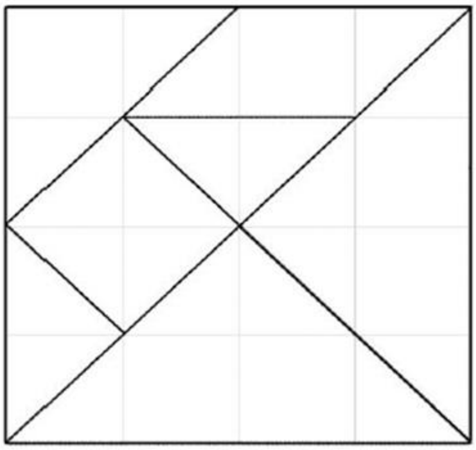
Fonte: Fabrizio Fidelis da Silva

Nessa etapa, técnicas de criatividade e visualização podem ser úteis para favorecer aos estudantes a identificar e criar formas com o Tangram.

Em seguida, os alunos deverão ser questionados acerca da noção sobre área e perímetro. Nesse momento, o professor poderá aprofundar o conteúdo e explorar melhor as diferenças entre os conceitos.

Na sequência, com a finalidade de consolidar a concepção de área, por meio das formas presentes no Tangram, o professor poderá fornecer aos alunos um quadrado milimetrado correspondente ao tamanho do quebra-cabeça.

Figura 27 – Tangram – Comparação de Figuras I

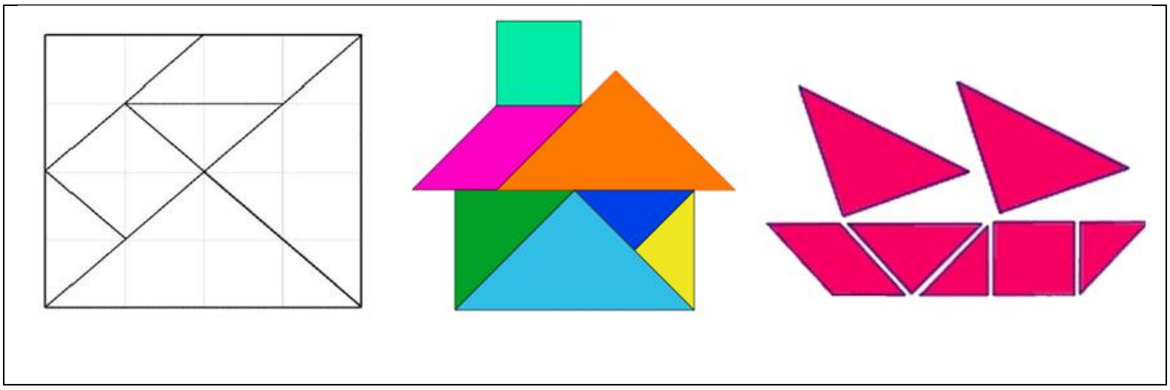


Fonte: Cleyton Hércules Gontijo

Com esse material, o professor poderá fazer questionamentos, tais como: "Qual a área do triângulo maior?" ou "Quantas unidades área o triângulo maior possui?", Quantas unidades de área possui o triângulo médio, o triângulo menor e o quadrado?" e ainda "Qual a relação do quadrado interno e do paralelogramo?". Com essa atividade, serão explorados os conceitos de área utilizando as figuras do Tangram.

Por último, retomando as figuras analisadas anteriormente, o professor poderá discutir a relação entre área e perímetro das figuras. O objetivo dessa tarefa é que os alunos concluam, que apesar da área ser a mesma, o perímetro muda.

Figura 28 – Tangram – Comparação de Figuras II



Fonte: Fabrizio Fidelis da Silva

3ª Fase: ***Problema Investigativo***

Os objetivos dessa etapa são apresentar aos alunos aplicações concretas e reais da matemática/geometria no cotidiano e iniciar a construção do conceito sobre o Teorema de Pitágoras. Além disso, em nossa proposta, envolver os estudantes em trabalho de geração de ideias com o intuito de buscar soluções. Refere-se a questão mais importante da sequência didática, a ser respondida com o desenvolvimento das atividades da oficina.

Inicialmente serão apresentados aos alunos imagens de porteiras, portões, telhados e pontes, para que os estudantes observem. Em seguida os alunos são indagados: “O que as imagens têm em comum?”. Logo depois, o professor questiona “Qual a necessidade da tábua transversal que perpassa toda a forma retangular da porteira?”.

Figura 29 – Tábua Transversal


Em seguida o professor esclarece:

> a forma triangular aparece em diversas estruturas, como portões, telhados, pontes, entre outras. Em portões ou porteiras feitos de madeira, costuma-se colocar uma tábua – travessa. Isso porque o triângulo é uma figura rígida, ao contrário de quadrados e retângulos que podem mudar de forma, ou seja, os lados não se alteram com a variação do ângulo. (BEIMBENGUT; HEIN, 2000, p. 63).

Posteriormente, o problema é proposto:

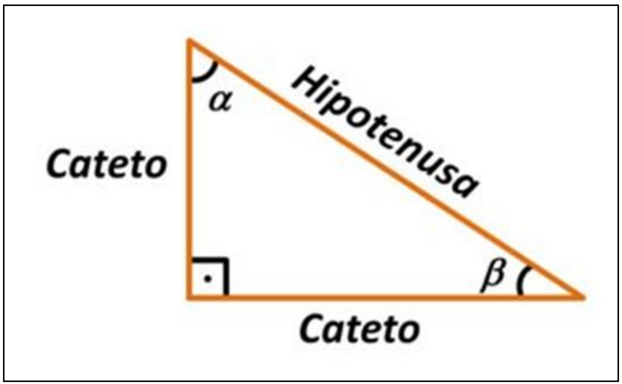
*"Deseja-se fabricar uma porteira para um curral de vacinação do gado. Considerando que as dimensões desta porteira são 3 metros de comprimento, por 1,8 metro de altura. Quantos metros lineares de tábua são necessários para fabricar tal porteira?"*

Figura 30 – Porteira

Fonte: https://olhares.com/porteira-na-roca-foto5756540.html

Logo depois o professor poderá explorar as características e elementos dos triângulos retângulos para que haja maior compreensão da definição da figura geométrica e do teorema.

Figura 31 – Triângulo Retângulo




Fonte: https://www.dicasdecalculo.com.br/relacoes-trigonometricas/triangulo-retangulo/

Finalizando essa etapa o professor propõe a seguinte tarefa:

1) Recorte o triângulo obtusângulo e cole-o em uma folha. Recorte também os dois quadrados e tente construir um quadrado maior sobre o terceiro lado do triângulo.
2) O que você conclui?

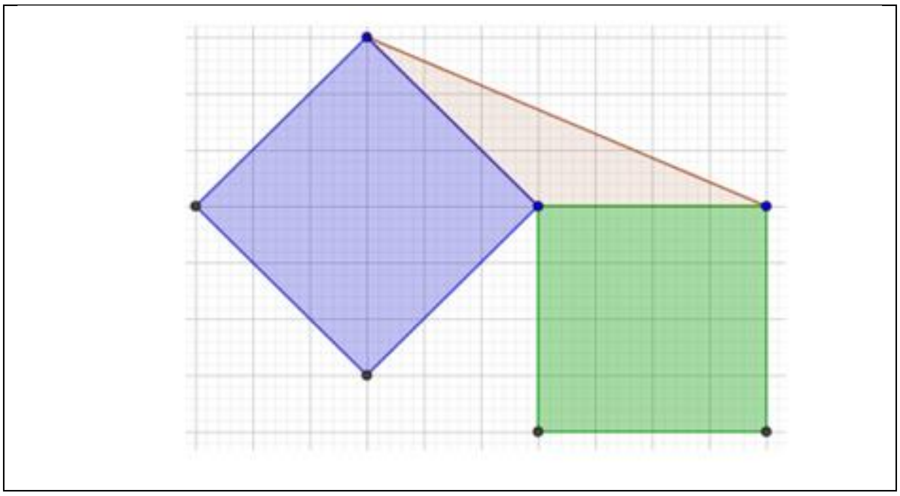
3) Calcule as medidas das áreas dos dois quadrados desenhados inicialmente sobre os lados do triângulo obtusângulo. Determine a soma dessas áreas e compare com a medida da área de um quadrado desenhado sobre o terceiro lado.
4) Quais são as medidas das áreas dos quadrados desenhados sobre os catetos do triângulo retângulo?
5) Calcule a soma dessas medidas e compare o resultado com a medida da área do quadrado construído sobre a hipotenusa do triângulo retângulo.
6) Escreva uma conclusão.
7) Repita os passos desta atividade, agora desenhando um triângulo retângulo de catetos medindo 5 e 12 unidades. Responda às 3 questões anteriores para este novo triângulo.
8) Escreva um enunciado ou uma regra geral de acordo com suas observações no desenvolvimento desta atividade.

4ª Fase: ***Formalização de conceitos e definições***

Nesta fase, considerando as atividades desenvolvidas anteriormente, foram trabalhados de forma sistemática os conceitos do Teorema de Pitágoras.

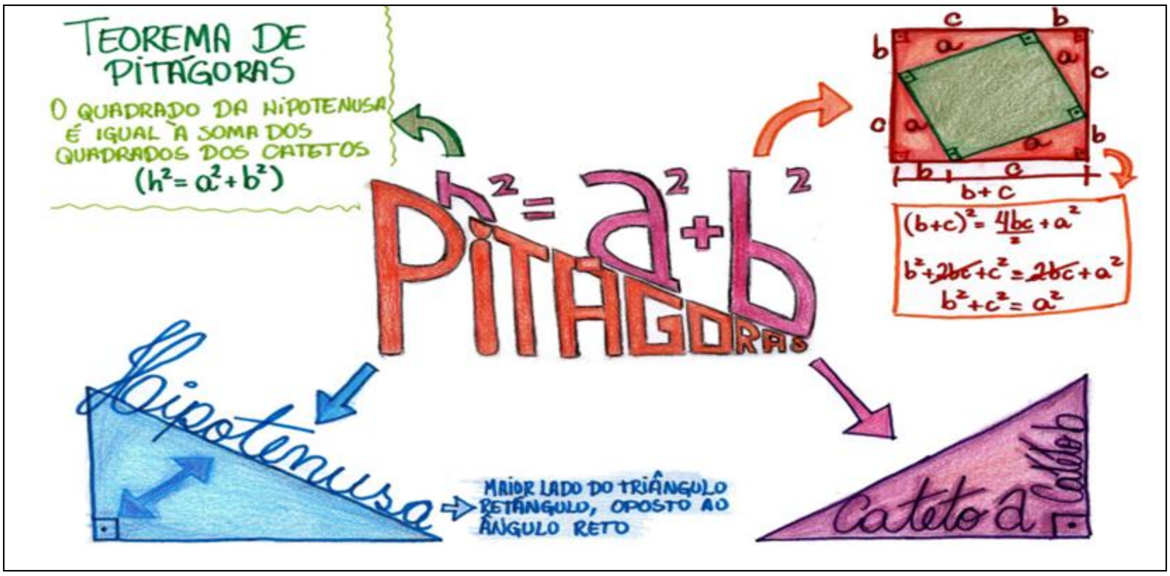
O professor deve demonstrar o Teorema de Pitágoras a partir do conceito de área em malhas quadriculadas e verificar em que situações o teorema se aplica.

Figura 32 – Demonstração Teorema de Pitágoras



No final dessa etapa, o professor, com base na produções dos estudantes, promove um período de compreensão dos objetos matemáticos explorados na atividade.

Figura 33 – Teorema de Pitágoras - Conceitos e Definições




Fonte: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/teorema-pitagoras.htm

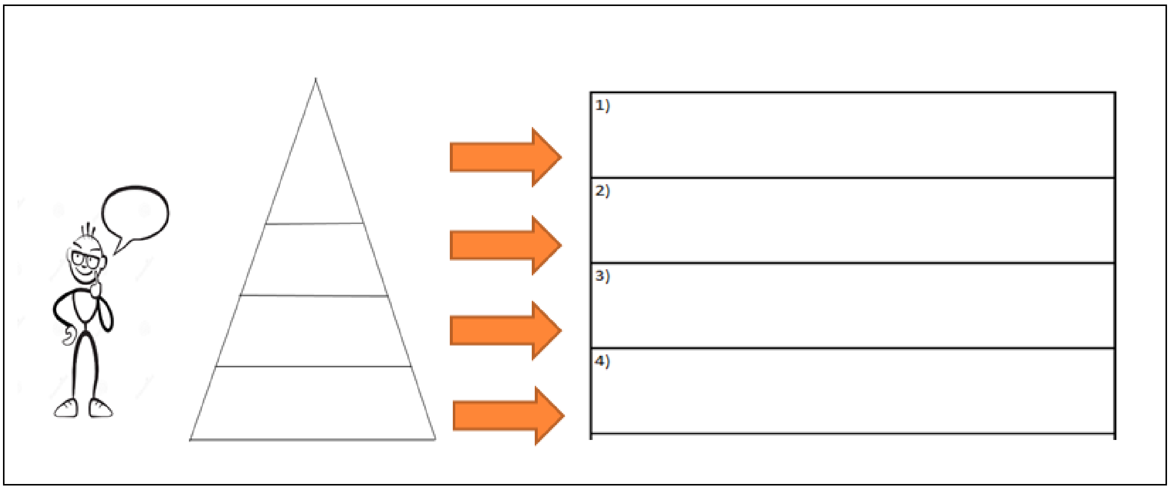
5ª Fase: ***Apreciação***

Buscou-se, nesta fase, identificar as aprendizagens ocorridas nas fases anteriores. Este foi o momento de ouvir dos estudantes as suas percepções acerca das atividades, identificando o que contribuiu ou não para as aprendizagens.

Essa etapa caracteriza-se como um momento de auto avaliação, avaliação pelos pares e avaliação do trabalho do professor, de forma que sugere-se que a partir das colocações dos alunos tenha-se uma compreensão do aprendizado no decorrer da oficina.

A fim de reconhecer o que eles aprenderam, deve-se solicitar aos alunos: P*reencham o quadro a seguir com quatro informações que eles aprenderam hoje (1 – a mais importante / 4 – a menos importante). Ao lado de cada seção, escreva uma frase explicando "Por que" eles escolheram esse aspecto como o mais ou menos importante.*

Figura 34 – Retrospectiva




Fonte: Fabrizio Fidelis da Silva

6ª Fase: ***Projeções***

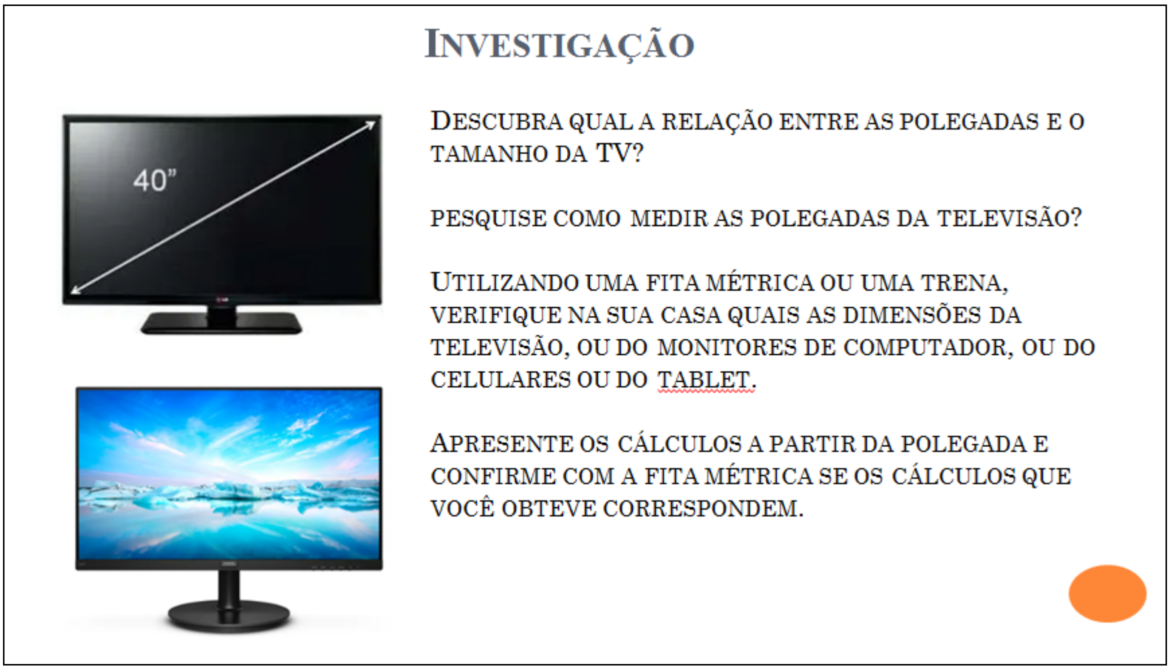
Nesta última fase da oficina, buscou-se estimular os estudantes para o desenvolvimento de novas tarefas nas quais poderiam estender a aplicação das aprendizagens construídas ao longo da oficina. Dessa forma, inicialmente, os estudantes devem ser indagados pelas seguintes questões:

- O que é a medida polegada?
- Qual a medida de 1 polegada?
- Por que polegada?
- A medida da polegada pode variar?
- Vocês conhecem outras utilizações da polegada?

Em seguida, o professor deverá realizar as explicações necessárias sobre o tema, sempre estimulando o pensamento crítico e criativo.

Por fim, o professor deverá apresentar a tarefa investigativa para que os alunos pesquisem e realizem em suas casas

Figura 35 – Projeções



# 5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

No presente trabalho foi possível explorar o Teorema de Pitágoras, inicialmente fazendo uma abordagem histórica sobre período anterior a Pitágoras, sobre o próprio Pitágoras e sobre a Escola Pitagórica. Essa abordagem pode ser um facilitador no processo de ensino e aprendizagem e tem o intuito de localizar temporalmente e espacialmente as grandes ideias e problemas.

Posteriormente, foi apresentado um pequeno conjunto das principais demonstrações do Teorema para dar suporte ao desenvolvimento de alunos e docentes, gerando e transmitindo conhecimento matemático. Em seguida, evidenciou-se a aplicação do Teorema de Pitágoras em conceitos matemáticos e na construção geométrica.

Com base nos estudos de especialistas em matemática, pode-se inferir que o Teorema de Pitágoras é o mais demonstrado de toda a matemática, atualmente, mais de trezentas demonstrações são conhecidas. Considerando essa quantidade, pode-se afirmar que há demonstrações de todos os tipos e características. Ainda assim, o Teorema tem um enunciado simples que transmite sua identidade de forma direta.

Compreender o Teorema de Pitágoras passa por compreender a lógica de construção da própria matemática. O Teorema é considerado um dos alicerces da Matemática, pois por meio dele elaboramos e generalizamos várias situações matemáticas. Além disso, o Teorema também possui grande importância no estudo de outras áreas do conhecimento.

Seguidamente, foi apresentado o arcabouço teórico que norteou esta pesquisa acerca da criatividade e do pensamento crítico em matemática, enfatizando alguns aspectos históricos e teóricos. Além disso, também foram apresentados alguns conceitos de criatividade e de criatividade matemática, relevantes para a nossa investigação.

Sobre o ensino do Teorema de Pitágoras, destacou-se que o processo de aprendizagem de matemática deve estar apoiado em experiências agradáveis, capazes de favorecer o desenvolvimento de habilidades do educando. Conforme Gontijo (2020) o desenvolvimento das Oficinas de Criatividade em Matemática tem essa finalidade, pois demonstra a possibilidade da utilização de técnicas de criatividade para motivar os estudantes e cercá-los nas atividades, resultando em aprendizagens significativas.

Destaca-se que, a criatividade é uma habilidade importante e que deve ser desenvolvida pelos alunos, pois contribui para o aprimoramento individual e social, propiciando a capacidade de encontrar soluções inovadoras. A criatividade em matemática não é um fenômeno distinto da criatividade. A criatividade em matemática é apenas uma manifestação da criatividade na matemática.

Diante do exposto, foi desenvolvida uma proposta de Oficinas em Matemática sobre o Teorema de Pitágoras com a finalidade de oferecer uma solução que desenvolva as potencialidades do estudante através de uma estratégia que incentive a criatividade e o processo de ensino e aprendizagem.

Considerando a importância do desenvolvimento do processo de ensino, conclui-se que o instrumento proposto, a Oficina Criativa - Teorema de Pitágoras pode contribuir para o aprendizado do Teorema com uma perspectiva investigativa e criativa do tema.

Espera-se que este trabalho propicie aos professores uma possibilidade alternativa de apresentar o Teorema de Pitágoras em sala de aula, agregando valor e conhecimento ao processo de ensino e aprendizagem.

No decurso da construção deste trabalho, identificaram-se questões relacionadas ao pensamento crítico e criativo em matemática que permitiriam o desenvolvimento de outros estudos para ampliar o entendimento do fenômeno, ou para buscar confirmação empírica dos resultados obtidos.

A oficina poderia ser aplicado a escolas que oferecem o ensino fundamental ou até mesmo relativo à educação de jovens e adultos (EJA), complementando o entendimento quanto à criatividade matemática. Trabalhos que também viessem a analisar as dificuldades da adoção de oficinas de pensamento crítico e criativo em Matemática nas escolas sob um enfoque qualitativo poderão trazer maior compreensão da dinâmica da adoção dessa estratégia educacional, e possíveis insights para melhoria da prática pedagógica.

# REFERÊNCIAS


AABOE, Asger; **Episódios da História Antiga da Matemática.** Coleção Fundamentos da Matemática Elementar, SBM. Rio de Janeiro, 1984.

ALENCAR, Eunice Maria Lima Soriano. O **papel da escola na estimulação do talento criativo**. In: FLEITH, D. S.; ALENCAR, E. M. L. S. (Org.). Desenvolvimento de talentos e altas habilidades: orientação a pais e professores. Porto Alegre: Artmed, 2007. p. 151-161.

ALENCARr, E. M. L. S. et al. (2018). **Criatividade em Sala de Aula: Fatores Inibidores e Facilitadores Segundo Coordenadores Pedagógicos**. Psico-USF, Bragança Paulista.

AMABILE, Teresa M.; HENNESSEY, Beth A. (2009). **Creativity. Annual Review of Psychology Creativity**. Annual Review of Psychology. Disponível em: https://www.annualreviews.org/doi/abs/10.1146/annurev.psych.093008.100416.

AMARAL, N.; CARREIRA, S.. **A criatividade matemática nas respostas de alunos participantes de uma competição de resolução de problemas**. Bolema, Rio Claro (SP), v. 31, n. 59, p. 880-906, dez. 2017. 2017.

ANDRADE, M. M. **Introdução à metodologia do trabalho científico**: elaboração de trabalhos na graduação. São Paulo, SP: Atlas, 2010.

ARAUJO, A. A., **Teorema de Pitágoras: história, demonstrações e aplicações**. UNB, Brasília, 2016

BIEMBENGUT, Maria Salett; HEIN, Nelson. **Modelagem Matemática no ensino**. São Paulo: Contexto, 2000.

BOYER, Carl B.; **História da Matemática**. Tradução de Elza F. Gomide. Edgard Blücher, São Paulo, 1974.

BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. (2017). Disponível em: http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=85121- bncc-ensino-medio&category_slug=abril-2018-pdf&Itemid=30192 A

BRASIL, Secretária de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** introdução. 3 ed. Brasília: MEC, vol 1, 1997.

BODEN, M.. **The creative mind – myths and mechanisms**. Londres: Routlege, 2nd ed. 2004.

BRASIL. **Catálogo de Teses e Dissertações BDTD/IBICT**. 2022a. Disponível em: < https://bdtd.ibict.br/vufind/>. Acesso em: 12 dez. 2022.

BRASIL. **Lista das Dissertações PROFMAT/SBM**. 2022b. Disponível em: < https://profmat-sbm.org.br/dissertacoes/>. Acesso em: 12 dez. 2022.

BRASIL. MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasil, 2018c.

CARVALHO, Alexandre Tolentino. **Relações entre criatividade, desempenho escolar e clima para criatividade nas aulas de matemática de estudantes do 5° ano do ensino fundamental**. 2015. 132 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de Brasília, Brasília.

CARVALHO, Alexandre Tolentino. **Criatividade compartilhada em matemática: do ato isolado ao ato solidário**. 2019. 350. Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade de Brasília, Brasília, 2019.

CARVALHO, Alexandre Tolentino; GONTIJO, Cleyton Hércules. **Discursos nas aulas de matemática e a construção de barreiras para o desenvolvimento da criatividade compartilhada**. Cenas Educacionais, Caitité/ BA, v. 3, p. 1-38, 2020a.

CARVALHO, Alexandre Tolentino; GONTIJO, Cleyton Hércules. **Discursos em interações comunicativas em aulas de matemática e o desenvolvimento da criatividade compartilhada**. Quadrante, Lisboa, v. 29, n. 2, p. 109-131, 2020b.

CARVALHO, Alexandre Tolentino; GONTIJO, Cleyton Hércules; FONSECA, Mateus Gianni. **Assimetria de poder nas aulas de matemática: onze barreiras para o desenvolvimento da criatividade compartilhada**. In: PAIVA, Francisco Jeimes de Oliveira; LIMA, Ana Maria Pereira (Org.). Pesquisas em análise do discurso, multimodalidade e ensino: debates teóricos e metodológicos. Volume 2. São Carlos: Pedro & João Editores, 2020.

CINTRA, C. A.; CINTRA, R. J. S. **O Teorema de Pitágoras**. Editoração Eletrônica (Latex), 2003.

COSTA, I. L.; GONTIJO, C. H. **Oficinas de criatividade: o desafio de inovar no ensino-aprendizagem**. REnCiMa, São Paulo, v. 12, n. 6, p. 1-21, out./dez. 2021.

COSTA, I. L.; SILVA, A. L.; GONTIJO, C. H.. **Oficinas de Criatividade em Matemática: uma experiência nos anos iniciais**. Zetetiké (UNICAMP), v. 29, p. 1-18, 2021.

CYRINO, Hélio Fernando Ferreira. **Matemática & Gregos**. São Paulo: Editora Átomo, 2006.

D’ AMBRÓSIO, Ubiratan. **Da realidade a ação: reflexões sobre Educação e Matemática**. São Paulo, EdUnicamp, 1986.

English, L. D. (1997b). **The development of fifth-grade children’s problem-posing abilities**. Education Studies in Mathematics, 34, 183-217.

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática.** tradução: Hygino H.Domingues, 5 ed. Campinas- São Paulo, Ed. Da UNICAMP, 2011.

FARIAS, Mateus Pinheiro de. **Criatividade em matemática:** um modelo preditivo considerando a percepção de alunos do ensino médio acerca das práticas docentes, a motivação para aprender e o conhecimento em relação à matemática. 2015. 75 f., il. Dissertação (Mestrado em Educação)—Universidade de Brasília, Brasília, 2015.

FONSECA, Mateus Gianni. **Construção e validação de instrumento de medida de criatividade no campo da Matemática para Estudantes Concluintes da Educação Básica.** 2015. 104f. Dissertação (Mestrado em Educação). Faculdade de Educação, Universidade de Brasília, Brasília, 2015.

FONSECA, Mateus Gianni. **Testes de criatividade em matemática para estudantes concluintes da educação básic**a. In: GONTIJO, Cleyton Hércules; FONSECA, Mateus Gianni (Org.). Criatividade em matemática: lições da pesquisa. 1 ed. Curitiba: Editora CRV, 2019a.

FONSECA, Mateus Gianni. **Aulas baseadas em técnicas de criatividade: efeitos na criatividade, motivação e desempenho em matemática com estudantes do Ensino Médio**. 2019. 175 f. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade de Brasília, Brasília, 2019b.

FONSECA, M. G.; GONTIJO, C. H.. Pensamento crítico e criativo em Matemática em diretrizes curriculares nacionais. **Ensino em Re-Vista**, Uberlândia, v.27, p. 956-978, 2020a.

FONSECA, M. G.; GONTIJO, C. H. Junho 2020b. Infográfico**: Oficinas de estímulo ao pensamento crítico e criativo em matemática de Gontijo**. Disponível em: <https://bit.ly/pensamentocríticoecriativoemmatematica>. Acesso em 17/05/2022.

FONSECA, M. G.; GONTIJO, C. H. Stimulating High School Student Creativity, Motivation, and Mathematics Performance with Classes Based on Creativity Techniques. **Acta Scientiae** (Canoas), 24(2), 1-36, Mar./Apr. 2022.

FONSECA, M. G.; GONTIJO, C. H.. **Pensamento crítico e criativo em Matemática uma Abordagem a partir de Problemas Fechados e Problemas Abertos**. Disponível em: file:///C:/Users/Drogaria/Downloads/12515-Texto%20do%20artigo-46798-1-10-20210414.pdf. Acesso em 30/04/2023.

FONSECA, M. G.; GONTIJO, C. H.; SABINO, J. C. **Criatividade no campo da matemática – como identificar e medir?** Anais do Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 4°, 2015, Ilhéus, Anais . Ilhéus, Bahia, Brasil. p. 2306-2311, ISSN 2446-6336. 2015.

FONSECA, Mateus Gianni; GONTIJO, Cleyton Hércules; SOUZA, Juliana Campos Sabino de. **Diferenças entre motivação e criatividade em matemática entre meninos e meninas concluintes da Educação Básica**. In: GONÇALVES, Felipe Antônio Machado Fagundes (Org.). Educação Matemática e Suas Tecnologias. 1 ed. Ponta Grossa - PR: Atena, 2019, v. 1, p. 232-239.

FONSECA, Mateus Gianni; GONTIJO, Cleyton Hércules; ZANETTI, Matheus Delaine Teixeira. **Estimulando o pensamento crítico e criativo em matemática a partir da**

**“forca numérica” e o princípio fundamental da contagem**. Coinspiração - Revista de Professores que Ensinam Matemática, Barra do Bugres/MT, v. 1, p. 241-250, 2018.

FONSECA, Mateus Gianni; GONTIJO, Cleyton Hércules; ZANETTI, Matheus Delaine Teixeira; CARVALHO, Alexandre Tolentino. **Improving Mathematical Motivation from Mathematical Creativity Workshops**. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON MATHEMATICAL CREATIVITY AND GIFTEDNESS, 11. 2019, Hamburgo. Including the Highly Gifted and Creative Students? Current Ideas and Future Directions. Anais [...]. Hamburgo, 2019. p. 144-149.

GONTIJO, Cleyton Hércules. **Técnicas de criatividade para estimular o pensamento matemático**. Educação e Matemática, Lisboa, v. 135, p. 16-20, nov/dez 2015.

GONTIJO, Cleyton Hércules. **Mathematics Education and Creativity: A Point of View from the Systems Perspective on Creativity**. In: AMADO, Nélia; CARREIRA, Susana; JONES, Keith (Eds). Broadening the Scope of Research on Mathematical Problem Solving. Springer: Cham, 2018. p. 375-386

GONTIJO, C. H.; FONSECA, M. G. **O lugar do pensamento crítico e criativo na formação de professores que ensinam matemática**. Revista Brasileira de Ensino de Ciências e Matemática, Passo Fundo, v. 3, n. 3, p. 732-747, ed. Esp. 2020.

GONTIJO, C. H.. **Relações entre criatividade, criatividade em matemática e motivação em matemática de alunos do ensino médio.** PhD thesis, Universidade de Brasília, Brasília, 2007.

GONTIJO, C. H.. **Criatividade em matemática: conceitos, metodologias e formas de avaliação**. Educação Matemática, Cultura e Diversidade. 2010.

GONTIJO, C. H.. **Relações entre criatividade e motivação em matemática:** a pesquisa e as implicações para a pratica pedagógica. Criatividade em Matemática: Lições da Pesquisa. Editora CRV, Curitiba, 2020.

GONTIJO, C. H.; FONSECA, M. G.; CARVALHO, A. T.; BEZERRA, W. W. V. **Criatividade em Matemática: alguns elementos históricos na constituição do campo de pesquisa e de intervenção pedagógica.** REnCiMa, São Paulo, v. 12, n. 5, p. 1-24, julho/set. 2021.

HADAMARD, J.. **Essay on the psychology of invention in the mathematical field**. Princenton University Press. Princeton, NJ. 1949.

HAYLOCK, D. W. (1997). **Recognizing mathematical creativity in schoolchildren**. The International Reviews on Mathematical Education, 29, 68-74.

HASHIMOTO, Yoshihiko. **The methods of fotering mathematical creativity through problem solving**. International Journal on mathematics education, Berlin, v. 29,n. 3, p. 86-87, jun. 1997.

JOYCE, D. E. **Euclid's Elements** – Book I: Proposition 47. Disponível em: < https : //mathcs.clarku.edu/ djoyce/java/elements/bookI/propI48.html >. Acesso em: 16 mar. 2019

KARLSON, P.; **A Magia dos Números**. Tradução de Henrique Carlos Pfeifer, Eugênio Brito e Frederico Porta. Editora Globo, 1961

KATTOU, Maria; KONTOYIANNI, Katerina; PITTA-PANTAZI, Demetra; CHRISTOU, Constantinos. **Connecting mathematical creativity to mathematical ability**. ZDM Mathematics Education, v. 45, p. 167–181, 2013

LEE, K. S., HWANG, D. & SEO, J. J. (2003). **A development of the test for mathematical creative problem solving ability**. Journal of The Korea Society of Mathematical Education, 7, 163-189.

LIMA, Elon L. **Medida e Forma em Geometria**. IMPA/VITAE.

LIVNE, Nava L.; LIVNE, Oren E.; MILGRAN, Roberta M. **Assessing academic and creative abilities in mathematicas at four levels of understanding**. Internatonal Journal of Mathematical Education in Science & Tecnology, London, v. 30, p. 227-243, 1999.

MARTINEZ, Albertina. **Criatividade no Trabalho Pedagógico e Criatividade na Aprendizagem** - Uma relação necessária? In: TACCA, Maria Carmen V. R. (Org.). Aprendizagem e trabalho pedagógico. Campinas, SP, Alínea. 3ª edição, 2014, p. 69-95.

MORGADO, A. C.; CARVALHO, P. C. P.; WARGNER, E.; LIMA, ELON L. Temas e Problemas Elementares. **Coleção do Professor de Matemática**, SBM, 2005.

MUNIZ, Cristiano Alberto. **Diversidade dos conceitos das operações e suas implicações na resolução de classes de situações**. In : GUIMARÃES, Gilda; BORBA, Rute (Org.). **Reflexões sobre o ensino da matemática nos anos iniciais de escolarização**. Recife: SBEM, 2009a.

NADJAFIKHAH, M.; YAFTIAN, N. B. S.. **Mathematical creativity**: some definitions and characteristics. 2011.
NCTM. **Procedural fluency in mathematics: A position of the national council of teachers of mathematics**. Reston: NCTM, 2014. Disponível em: . 1997.

NCTM. **Principles and Standards for School Mathematics**. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 2000.

PAPALEONTIOU-LOUCA, E.; VARNAVA-MAROUCHOU, D. M. S. K. E.. **Teaching for creativity in universities**. Journal of Education and Human Development, vol 3, n.4,p. 131-154. 2014.

ORGANISATION FOR ECONOMIC CO-OPERATION AND DEVELOPMENT. **PISA 2021 creative thinking framework**. Third draft. Abril, 2019. https://www.oecd.org/pisa/publications/PISA-2021-creative-thinking-framework.pdf.

ORTIZ, Felipe Chibás. Métodos de criatividade para a gestão de projetos inovadores. **Revista Inovação Tecnológica**, São Paulo, v. 4, n. 1, p. 144-163, jan./jun. 2014. ISSN 2179-2895. Disponível em: http://www3.eca.usp.br/sites/default/files/form/biblioteca/acervo/producao-academica/002770709.pdf. Acesso em: 16 nov. 2019.

PIIRTO, Jane. **Understanding creativity**. Scottsdale: Great Potential Press, 2004.

PINHO, J.L.R.; MORETTI, M**.. Estimulando a criatividade em matemática em sala de aula através da formulação e resolução de problemas em geometria.** Revista de Matemática, Ensino e Cultura, ano 13 - mai/ago 2018. 2018.

QUEIROZ,R.V.G., **Estudo sobre a criatividade em matemática**, PUC, Rio de Janeiro, 2021.

ROBINSON, Ken. **Somos todos criativos**: os desafios para desenvolver uma das principais habilidades do futuro. São Paulo, Benvirá, 2019.

ROMANOWSKI, Joana Paulin; ENS, Romilda Teodora. As pesquisas denominadas do tipo "estado da arte" em educação. **Diálogo Educ.**, Curitiba, v. 6, n. 19, p. 37–50, 2006.

ROSA, Euclides. **Revista do professor de matemática**. São Paulo, 1983, número 2.

SANTOS, V. M. **Criatividade e Inovação no Processo de Planejamento de Sistemas de Informação**. (2012). 310 p. Tese (Doutorado) – Universidade do Minho Escola de Engenharia Minho, Portugal, 2012. Disponível em: http://repositorium.sdum.uminho.pt/handle/1822/22908.

SHARMA, Y. (2014). **The Effects of Strategy and Mathematics Anxiety on Mathematical Creativity of School Students**. Mathematics Education, 9(1), 25–37.

SHEFFIELD, Linda Jensen. **Using Creativity Techniques to Add Depth and Complexity to the Mathematics Curricula**. In: NATIONAL ASSOCIATION FOR GIFTED CHILDREN ANNUAL CONFERENCE. 2005, Louisville, KY. Proceedings [...]. Louisville, KY, 10 a 12 de novembro de 2005

SILVA, Fabiana Barros de Araújo. **Trabalho pedagógico e criatividade em matemática: um olhar a partir da prática docente nos anos iniciais do ensino fundamental**. 2016. 134f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade de Brasília, Brasília, 2016.

SILVER, E. A. (1994). **On mathematical problem posing**. For the Learning of Mathematics 14, 19-28.

SINGH, Simon. **O Último Teorema de Fermat:** a história do enigma que confundiu as maiores mentes do mundo durante 358 anos. Tradução: Jorge Luiz Calife,4ª.ed. Rio de Janeiro: Record, 2019.

SOUZA, Juliana Campos Sabino de; GONTIJO, Cleyton Hércules; FONSECA, Mateus Gianni. **Resolução de problemas em matemática: colocando o pensamento crítico em ação**. In: PINA NEVES, Regina da Silva; DÖRR, Raquel Carneiro. (Org.). Formação de Professores de Matemática. 1 ed. Curitiba - PR: Appris Editora, 2019, v. 1, p. 159.

STERNBERG, Robert J.; GRIGORENKO, Elena L. **Inteligencia Plena: ensinando e incentivando a aprendizagem e a realização dos alunos**. Tradução de Maria Adriana Veríssimo Veronese. Porto Alegre: Artmed, 2003.

STRATHERN, P. **Pitágoras e seu teorema em 90 minutos**. Tradução: Marcus Penchel. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editora Ltda, Edição digital: abril de 2011.

TORRANCE, Ellis Paul. **The Torrance Tests of Creative Thinking**: norms-technical manual. Princeton, NJ: Personnel Press, 1966.

URBAN, Klaus K. **Recent trends in creativity research and theory in Western Europe**. European Journal of High Ability, London, v. 1, n. 1, p. 99–113, 1991.