

**MÉTODO SEM MALHA PARA ANÁLISE DE PROBLEMAS DA  
MECÂNICA DA FRATURA ELASTODINÂMICA COM A TÉCNICA DA  
SUBTRAÇÃO DA SINGULARIDADE**

**FLÁVIO DOS RAMOS DE SOUSA MENDONÇA**

**TESE DE DOUTORADO EM ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

**FACULDADE DE TECNOLOGIA**

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA**

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA**  
**FACULDADE DE TECNOLOGIA**  
**DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

**MÉTODO SEM MALHA PARA ANÁLISE DE PROBLEMAS DA  
MECÂNICA DA FRATURA ELASTODINÂMICA COM A TÉCNICA DA  
SUBTRAÇÃO DA SINGULARIDADE**

**FLÁVIO DOS RAMOS DE SOUSA MENDONÇA**

**ORIENTADOR: ARTUR ANTÔNIO DE ALMEIDA PORTELA**

**TESE DE DOUTORADO EM ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL**

**PUBLICAÇÃO: DT-04A/22**  
**BRASÍLIA/DF: DEZEMBRO - 2022**

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA**  
**FACULDADE DE TECNOLOGIA**  
**DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

**MÉTODO SEM MALHA PARA ANÁLISE DE PROBLEMAS DA  
MECÂNICA DA FRATURA ELASTODINÂMICA COM A TÉCNICA DA  
SUBTRAÇÃO DA SINGULARIDADE**

**FLÁVIO DOS RAMOS DE SOUSA MENDONÇA**

**TESE DE DOUTORADO SUBMETIDO AO DEPARTAMENTO DE  
ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL DA FACULDADE DE TECNOLOGIA  
DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA COMO PARTE DOS REQUISITOS  
NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM  
ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL.**

**APROVADA POR:**

---

**Prof. Artur António de Almeida Portela, PhD. (ENC-UnB)**  
**(Orientador)**

---

**Prof. William Taylor Matias Silva, PhD. (ENC-UnB)**  
**(Examinador Interno)**

---

**Prof. Pedro Miguel Guimarães Pires Moreira, PhD. (Universidade do Porto)**  
**(Examinador Externo)**

---

**Prof. Eduardo Martins Fontes do Rêgo, DSc. (UFPI)**  
**(Examinador Externo)**

**BRASÍLIA/DF, 09 DE DEZEMBRO DE 2022.**

## FICHA CATALOGRÁFICA

MENDONÇA, FLÁVIO DOS RAMOS DE SOUSA

Método sem malha para análise de problemas da mecânica da fratura elastodinâmica com a técnica da subtração da singularidade. [Distrito Federal] 2022.

xxiv, 132p., 297 mm (ENC/FT/UnB, Doutor, Engenharia Civil, 2022).

Tese de Doutorado - Universidade de Brasília. Faculdade de Tecnologia.

Departamento de Engenharia Civil e Ambiental.

1. Método sem malha local

2. Mínimos Quadrados Móveis

3. Método de Newmark

4. Mecânica da Fratura elastodinâmica

5. Técnica da subtração da singularidade

I. ENC/FT/UnB

II. Título (série)

## REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

MENDONÇA, F. R. S. (2022). Método sem malha para análise de problemas da mecânica da fratura elastodinâmica com a técnica da subtração da singularidade. Tese de Doutorado em Estruturas e Construção Civil, Publicação DT – 04A/22, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 156p.

## CESSÃO DE DIREITOS

AUTOR: Flávio dos Ramos de Sousa Mendonça

TÍTULO: Método sem malha para análise de problemas da mecânica da fratura elastodinâmica com a técnica da subtração da singularidade

GRAU: Doutor

ANO: 2022

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta tese de doutorado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desta tese de doutorado pode ser reproduzida sem a autorização por escrito do autor.

---

Flávio dos Ramos de Sousa Mendonça  
Brasília/DF - Brasil

e-mail: flavioprimeiro@yahoo.com.br

Bem sei que tudo podes, e nenhum dos teus planos pode ser frustrado.

Jó 42:2

## AGRADECIMENTOS

É um momento de agradecer a Deus por tudo que aconteceu na minha vida. Apesar de todas as circunstâncias e dificuldades envolvidas no processo, tive a oportunidade de entender que tudo acontece da maneira de Deus, em que os obstáculos são colocados à frente de maneira a produzir experiência, fé e perseverança.

E durante o curso do Doutorado verificou-se mais uma vez que as coisas acontecem de uma maneira surpreendente. Sou imensamente grato ao meu orientador, Prof.º Artur Portela, que aceitou o desafio de orientar com segurança, excelência e serenidade um aluno de dedicação parcial e envolvido em inúmeros projetos profissionais.

Gratidão aos meus amigos do programa de pós-graduação Tiago, Wilber e Wilson por terem me apoiado em vários momentos do desenvolvimento da tese, sendo de fundamental importância no entendimento da linguagem computacional, elaboração dos artigos e momentos de descontração.

Aos meus amigos da graduação, aos demais amigos e aqueles de alguma forma me ajudaram a concretizar este sonho.

A minha mãe por ter feito de tudo por mim e por meus irmãos desde o princípio.

A Universidade de Brasília (UnB) e aos professores do Programa de Pós-Graduação em Estruturas e Construção Civil (PECC-UnB).

## RESUMO

### MÉTODO SEM MALHA PARA ANÁLISE DE PROBLEMAS DA MECÂNICA DA FRATURA ELASTODINÂMICA COM A TÉCNICA DE SUBTRAÇÃO DA SINGULARIDADE

**Autor: Flávio dos Ramos de Sousa Mendonça**

**Orientador: Prof. Artur António de Almeida Portela**

**Programa de Pós-Graduação em Estruturas e Construção Civil**

**Brasília, Dezembro de 2022**

Os métodos numéricos são amplamente utilizados na resolução de problemas da mecânica da fratura linear elástica, tendo como principal destaque o Método de Elementos Finitos (MEF). No entanto, o MEF apresenta uma série de dificuldades decorrentes da presença de singularidades, custo computacional e análises adaptativas na modelagem do crescimento das trincas, em que as malhas geradas no método apresentam um certo grau de imprecisão nos resultados. A fim de contornar essas exceções, foram desenvolvidos ao longo dos anos outros métodos e, dentre eles, os métodos sem malha que estabelecem o equilíbrio de um sistema algébrico correspondente a um problema físico sem uso de uma malha de discretização. Esta pesquisa tem como objetivo aplicar um método sem malha local na solução de problemas bidimensionais da mecânica da fratura elastodinâmica. O Integrated Local Mesh Free Method (ILMF) é baseado no método dos resíduos ponderados, onde, numa determinada região local, o teorema do trabalho estabelece uma relação de energia entre um campo de tensões e deformações independentes. O ILMF apresenta uma formulação totalmente livre de integração numérica e com apenas um ponto por segmento de contorno com a aproximação do campo elástico utilizando o método dos Mínimos Quadrados Móveis (MQM) na formação das funções de forma. Nos métodos sem malha locais, utilizam-se dois parâmetros: o domínio do suporte compacto e o domínio de integração dos resíduos ponderados. Na integração numérica, ao longo do tempo, utilizou-se um método de integração direta em intervalos de tempos discretos, o Método de Newmark, para obtenção dos deslocamentos, velocidades e acelerações dos modelos aplicados, e assumindo parâmetros que tornam o método incondicionalmente estável.

Na Mecânica da Fratura elastodinâmica adotou-se a técnica da subtração da singularidade, ou Singularity Subtration Technique (SST) que, em singularidades geométricas das peças como rasgos e defeitos na fabricação, são modelados através dos fatores de intensidade de tensão em função do modo de abertura das respectivas trincas. Por fim, apresentam-se uma série de exemplos clássicos, cujos comportamentos são comparados com outros métodos numéricos, validando a acurácia e precisão do método proposto na análise dinâmica.

Palavras-chave: Método sem malha local, Mínimos Quadrados Móveis, Método de Newmark, Mecânica da Fratura elastodinâmica, Técnica da subtração da singularidade.

## **ABSTRACT**

### **MESHFREE METHOD FOR ANALYSIS OF ELASTODYNAMIC FRACTURE MECHANICS PROBLEMS WITH THE SINGULARITY SUBTRACTION TECHNIQUE**

**Author: Flávio dos Ramos de Sousa Mendonça**  
**Supervisor: Prof. Artur Antônio de Almeida Portela**  
**Postgraduate Program in Structures and Civil Construction**  
**Brasília, December 2022**

Numerical methods are widely used to solve linear elastic fracture mechanics problems, with the Finite Element Method (FEM) as the main highlight. However, the FEM has several limitations that are influenced by singularities, computational cost, and adaptive analysis when modeling the growth of cracks; as a result, the meshes generated by the method have a certain degree of inaccuracy in the results. In order to circumvent those difficulties, other methods have been developed over the years. Among those, there are meshless methods that establish the balance of an algebraic system corresponding to a physical problem without using a specific discretization mesh. This study aims to apply a method without local mesh in the solution of two-dimensional problems in the mechanics of elastodynamic fractures. The Integrated Local Mesh Free Method (ILMF) is based on the weighted residual method, wherein, in a given local region, the work theorem establishes an energy relationship between a field of independent stresses and strains. ILMF presents a formulation totally free of numerical integration and with only one point per contour segment, with the approximation of the elastic field using the method of Moving Least Squares (MLS) in the formation of shape functions. In local mesh free methods, two parameters are used: the domain of the compact support and the domain of integration of weight residuals. In the numerical integration over time, a method of direct integration in discrete time intervals, the Newmark Method, was used to obtain the displacements, velocities, and accelerations of the applied models. Also, parameters that make the method unconditionally stable were assumed.

In the Mechanics of Elastodynamic Fracture, the Singularity Subtraction Technique (SST) was adopted, so that the geometric singularities of structural parts as slits and manufacturing failings are modeled by stress intensity factors as a function of the crack opening mode. Finally, a series of classic examples are presented, whose behaviors are compared with other numerical methods, validating the accuracy and precision of the method proposed in the dynamic analysis.

**Keywords:** Local Mesh Free Method, Moving Least Squares, Newmark Method, Mechanics of Elastodynamic Fracture, Singularity Subtraction Technique.

## SUMÁRIO

LISTA DE TABELAS.....	XII
LISTA DE FIGURAS.....	XIV
LISTA DE ABREVIACÕES, SÍMBOLOS E NOMENCLATURA .....	XIX
<b>1. INTRODUÇÃO .....</b>	<b>1</b>
1.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS .....	1
1.2 OBJETIVOS .....	9
1.2.1 Objetivo geral.....	9
1.2.2 Objetivos específicos.....	10
<b>2. REVISÃO DA LITERATURA.....</b>	<b>11</b>
2.1 MÉTODOS SEM MALHA .....	11
2.1.1 Definição .....	11
2.1.2 Procedimentos adotados.....	13
2.1.3 Conceito de suporte compacto.....	13
2.1.4 Domínio de influência.....	14
2.1.5 Funções de ponderação .....	17
2.1.6 Funções de forma.....	21
2.1.7 Condições de contorno essenciais.....	22
2.1.8 Consistência.....	22
2.2 MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS MÓVEIS (MQM) .....	23
2.3 EQUAÇÕES DA ELASTODINÂMICA.....	29
2.3.1 Análise de vibrações livres .....	30
2.3.2 Análise de vibrações forçadas.....	34
2.3.3 Integração no tempo .....	35
2.3.3.1 Método de Newmark (1959) .....	35
2.4 FATOR DE INTENSIDADE DE TENSÕES DINÂMICO .....	36

<b>3.</b>	<b>MODELAGEM ESTRUTURAL .....</b>	<b>40</b>
3.1	CAMPO ELÁSTICO .....	40
3.2	TEOREMA DO TRABALHO.....	41
3.3	FORMULAÇÃO CINEMÁTICA .....	43
3.3.1	<b>Formulação de deslocamento de corpo rígido .....</b>	<b>44</b>
3.3.2	<b>Equilíbrio mecânico.....</b>	<b>44</b>
3.3.3	<b>Definição do campo de tensão.....</b>	<b>45</b>
<b>4.</b>	<b>MÉTODOS SEM MALHA LOCAIS .....</b>	<b>47</b>
4.1	MESH-FREE LOCAL PETROV-GALERKIN – MLPG .....	48
4.2	INTEGRATED LOCAL MESH FREE METHOD – ILMF .....	51
4.3	PARÂMETROS DE DISCRETIZAÇÃO.....	53
4.1	MÉTODO DA VISIBILIDADE .....	54
<b>5.</b>	<b>MECÂNICA DA FRATURA LINEAR ELÁSTICA .....</b>	<b>56</b>
5.1	FATOR DE CONCENTRAÇÃO DE TENSÕES .....	56
5.2	LINHAS DE FORÇA .....	57
5.3	PLACA INFINITA TRACIONADA COM UM FURO CIRCULAR.....	58
5.4	MODOS DE CARREGAMENTO DE TRINCAS .....	59
5.5	FATOR DE INTESIDADE DE TENSÕES KI E KII .....	60
5.6	SOLUÇÃO DE WILLIAMS PARA O CAMPO DE TENSÕES LINEAR ELÁSTICO 63	
5.7	SUBTRAÇÃO DA SINGULARIDADE.....	70
5.7.1	<b>Campo elástico original e regularizado .....</b>	<b>70</b>
5.7.2	<b>Solução de Williams.....</b>	<b>72</b>
5.7.3	<b>Campo generalizado .....</b>	<b>73</b>
5.7.4	<b>Restrições adicionais.....</b>	<b>76</b>
<b>6.</b>	<b>METODOLOGIA.....</b>	<b>78</b>

6.1	IMPLEMENTAÇÃO DO MÉTODO DE NEWMARK (1959).....	78
6.2	IMPLEMENTAÇÃO DA MECÂNICA DA FRATURA .....	79
<b>7.</b>	<b>RESULTADOS E DISCUSSÕES .....</b>	<b>81</b>
7.1	INTEGRAÇÃO NO TEMPO .....	82
7.1.1	Frequências naturais .....	84
7.1.2	Deslocamentos .....	87
7.2	MÉTODO DE EXTRAPOLAÇÃO DOS DESLOCAMENTOS.....	92
7.2.1	Placa com trinca reta de borda – Modo I.....	95
7.2.2	Placa com trinca reta de borda em cisalhamento puro – Modo II.....	98
7.2.3	Placa com trinca inclinada de borda – Modo misto .....	100
7.2.4	Placa com trinca interna inclinada – Modo misto .....	103
7.3	FATOR DE INTENSIDADE DE TENSÃO DINÂMICO (DSIF).....	106
7.3.1	Placa com trinca reta interna – Modo I.....	107
7.3.2	Placa com trinca reta interna com dois materiais de transição – Modo I.....	112
7.3.3	Placa com trinca inclinada de bordo – Modo misto .....	115
7.3.4	Placa com trinca reta inclinada – Modo misto.....	117
<b>8.</b>	<b>CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES .....</b>	<b>120</b>
8.1	CONCLUSÕES.....	120
8.1.1	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS .....	121
	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>123</b>

## LISTA DE TABELAS

Tabela 2-1– Métodos sem malha classificados. Modificado de Liu e Gu (2005). .....	12
Tabela 2-2 – Aproximação das funções de forma dos Métodos sem malha. Modificado de Liu e Gu (2005).....	22
Tabela 2-3 – Principais publicações em ordem cronológica .....	37
Tabela 7-1 – Frequências naturais de uma viga em balanço, usando MLPG, ILMF e MEF, para uma distribuição nodal regular de 189 nós.....	84
Tabela 7-2 – Frequências naturais de uma viga em balanço, usando MLPG, ILMF e MEF, para uma distribuição nodal regular de 403 nós.....	85
Tabela 7-3 – Frequências naturais de uma viga em balanço, usando MLPG, ILMF e MEF, para uma distribuição nodal regular de 1261 nós.....	85
Tabela 7-4 – Frequências naturais de uma viga em balanço, usando MLPG, ILMF e MEF, para uma distribuição nodal irregular de 189 nós. ....	86
Tabela 7-5 – Frequências naturais de uma viga em balanço, usando MLPG, ILMF e MEF, para uma distribuição nodal irregular de 403 nós. ....	86
Tabela 7-6 – Frequências naturais de uma viga em balanço, usando MLPG, ILMF e MEF, para uma distribuição nodal irregular de 1261 nós. ....	87
Tabela 7-7 – Valores dos fatores de intensidade de tensão para o modo de abertura ( $K_I$ ) .....	97
Tabela 7-8 – Valores dos fatores de intensidade de tensão para o modo de cisalhamento ( $K_{II}$ ) .....	100
Tabela 7-9 – Valores dos fatores de intensidade de tensão para o modo de abertura ( $K_I$ )- $\theta = 30^\circ$ .....	102
Tabela 7-10 – Valores dos fatores de intensidade de tensão para o modo de abertura ( $K_I$ ) - $\theta = 60^\circ$ .....	102
Tabela 7-11 – Valores dos fatores de intensidade de tensão para o modo de cisalhamento ( $K_{II}$ ) - $\theta = 30^\circ$ .....	102
Tabela 7-12 – Valores dos fatores de intensidade de tensão para o modo de cisalhamento ( $K_{II}$ ) - $\theta = 60^\circ$ .....	103
Tabela 7-13 – Valores dos fatores de intensidade de tensão para o modo de abertura ( $K_I$ ) .	105

Tabela 7-14 – Valores dos fatores de intensidade de tensão para o modo de cisalhamento ( $K_{II}$ )  
..... 105

## LISTA DE FIGURAS

Figura 2-1 – Representação do domínio no método dos elementos finitos (MEF) e nos métodos sem malha. ....	12
Figura 2-2 – Suporte compacto dos nós I e J. No domínio $\Omega$ em questão, o nó I representa o suporte compacto retangular e o nó J representa o suporte compacto circular. ....	14
Figura 2-3 – Domínio de influência em nós. ....	15
Figura 2-4 – Interpolação em um ponto de interesse $x_i$ : na letra a) por conectividade entre os elementos e na letra b) através da distância. ....	24
Figura 2-5 – A função de aproximação $u^h(x)$ e a função nodal $u_i$ . ....	26
Figura 2-6 – Típica função peso e função de forma de uma aproximação pelos MQM para um nó $x = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \end{bmatrix}^T$ . ....	28
Figura 2-7 – Domínio de suporte $\Omega_s$ e domínio de integração $\Omega_Q$ para um nó $Q$ ; o domínio de interpolação $\Omega_i$ , utilizando a integração de Gauss no ponto $x_Q$ (adaptado de GU e LIU, 2001a). ....	32
Figura 3-1 – Representação do domínio global $\Omega$ , suas fronteiras natural $\Gamma_t$ e essencial $\Gamma_u$ e os subdomínios $\Omega_Q$ associados ao nó $Q$ , com contorno interno $\Gamma_Q = \Gamma_{Qi} \cup \Gamma_{Qt} \cup \Gamma_{Qu}$ . Nós P e R, de forma similar, possuem domínios locais correspondentes a $\Omega_P$ e $\Omega_R$ . ....	42
Figura 3-2 – Representação esquemática do teorema do trabalho, uma relação de energia, válida em um domínio local arbitrário $\Omega_Q \in \Omega \cup \Gamma$ , com contorno $\Gamma_Q$ . Cdf e Ctf significam Condição de deslocamento e Condição de tração na fronteira, respectivamente. ....	43
Figura 3-3 – Estratégia de modelagem de modelos cinemáticos do teorema do trabalho. Depois de escolher o campo de deformação cinematicamente admissível, a estratégia considera que o campo de tensão estaticamente admissível é sempre assumido como o campo de tensão do único campo elástico que realmente se instala no corpo e satisfaz a admissibilidade total. ....	45
Figura 4-1 – Discretização do método sem malha no domínio $\Omega$ e contorno $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_t$ ; nós de referência P, Q e R têm domínios locais associados $\Omega_P, \Omega_Q$ e $\Omega_R$ . ....	47
Figura 4-2 – Representação esquemática de uma discretização do método sem malha no domínio global $\Omega$ e do contorno $\Gamma$ , com uma distribuição de nós. $\Omega_P, \Omega_Q$ e $\Omega_R$ representam	

os suportes compactos locais dos nós correspondentes $x_p, x_Q$ e $x_R, \Omega_x$ é o domínio de definição da aproximação MQM do ponto $x$ , neste caso $x_p, x_Q$ e $x_R$ , cujo suporte compacto contém esse ponto de amostragem. ....	48
Figura 4-3 – Representação esquemática de pontos de quadratura numérica, de domínios locais do MLPG, para o cálculo da forma local do teorema do trabalho, com a formulação de deslocamento do corpo rígido.....	49
Figura 4-4 – Representação esquemática de pontos de quadratura numérica, de domínios locais do ILMF, para o cálculo da forma local do teorema do trabalho, com a formulação de deslocamento do corpo rígido.....	51
Figura 4-5 – Domínios de influência de nós adjacentes a uma trinca; a região indicada é removida do domínio de influência (BELYTSCHKO <i>et al.</i> , 1996).....	55
Figura 5-1 – Fluxo das linhas de força (CASTRO e MEGGIOLARO, 2002).....	57
Figura 5-2 – Componentes das linhas de força (RODRÍGUEZ, 2007).....	58
Figura 5-3 – $k_t$ de um furo circular de uma placa infinita tracionada (RODRÍGUEZ, 2007). ..	59
Figura 5-4 – Modos de carregamento de uma trinca em uma placa.....	60
Figura 5-5 – Modos de carregamento de uma trinca em uma placa (RODRÍGUEZ, 2007). ...	65
Figura 6-1 – Fluxograma do algoritmo da implementação do Método de Newmark (1959) em vibrações forçadas. ....	78
Figura 6-2 – Representação esquemática do domínio de colocação dos nós sobrepostos ao longo da trinca e na ponta da trinca. ....	79
Figura 7-1 – Estado Plano de Tensão - Viga de Timoshenko engastada de Largura Unitária. ..	81
Figura 7-2 – Distribuição regular dos nós de uma viga engastada em balanço, discretizada com 189, 403 e 1261 nós.....	83
Figura 7-3 – Distribuição irregular dos nós de uma viga engastada em balanço, discretizada com 189, 403 e 1261 nós.....	83
Figura 7-4 – Deslocamentos $u_y$ no meio da seção transversal da viga em balanço ( $t = 0, 2s$ ). .....	88
Figura 7-5 – Deslocamentos $u_y$ no meio da seção transversal da viga em balanço ( $t = 2s$ )... ..	89
Figura 7-6 – Deslocamentos $u_y$ no meio da seção transversal da viga em balanço ( $t = 2s$ ) em diferentes intervalos de tempo $\Delta t$ estudados.....	89

Figura 7-7 – Deslocamentos $u_y$ no meio da seção transversal da viga em balanço para intervalos de tempo maiores ( $c = 0,4$ e $\Delta t = 1 \times 10^{-2} s$ ). .....	90
Figura 7-8 – A função $g(t)$ . .....	91
Figura 7-9 – Deslocamentos $u_y$ no meio da seção transversal da viga em balanço sujeitos à carga de pulso ( $c = 0,0$ e $\Delta t = 1 \times 10^{-2} s$ ). .....	91
Figura 7-10 – Deslocamentos $u_y$ no meio da seção transversal da viga em balanço sujeita à carga de pulso ( $c = 0,4$ e $\Delta t = 1 \times 10^{-2} s$ ). .....	92
Figura 7-11 – Nós ao longo do segmento de trinca. ....	93
Figura 7-12 – Placa retangular com trinca reta de extremidade simétrica sob carregamento uniforme $\bar{t}$ simétrico. ....	96
Figura 7-13 – Discretização nodal da placa retangular com uma trinca reta de bordo (linha em vermelho). Relação do comprimento da trinca ( $a$ ) e a altura da placa ( $W$ ) igual a $a/W = 0,6$ e 676 nós regulares distribuídos ao longo do domínio interno e contorno. ....	97
Figura 7-14 – Placa retangular com trinca reta de extremidade simétrica sob carregamento uniforme $\bar{t}$ assimétrico cisalhante. ....	99
Figura 7-15 – Discretização nodal da placa retangular submetida sob carregamento uniforme $t$ assimétrico cisalhante com uma trinca reta de bordo (linha em vermelho). Relação entre o comprimento da trinca ( $a$ ) e a altura da placa ( $W$ ) igual a $a/W = 0,6$ e 416 nós regulares distribuídos ao longo do domínio interno e contorno. ....	99
Figura 7-16 – Placa retangular com trinca inclinada de extremidade sob carregamento uniforme $\bar{t}$ simétrico aplicado no topo e na base. ....	101
Figura 7-17 – Discretização nodal da placa retangular com uma trinca inclinada de bordo (linha em vermelho). Relação entre o comprimento da trinca ( $a$ ) e a altura da placa ( $W$ ) igual a $a/W = 0,4$ e 256 nós regulares distribuídos ao longo do domínio interno e contorno. ....	101
Figura 7-18 – Placa retangular com trinca reta central inclinada sob carregamento uniforme $\bar{t}$ .....	104

Figura 7-19 – Discretização nodal da placa retangular com uma trinca interna inclinada (linha em vermelho). Relação entre o comprimento da trinca ( $a$ ) e a altura da placa ( $W$ ) igual a $a/W = 0,2$ e 84 nós regulares, distribuídos ao longo do domínio interno e contorno. ....	104
Figura 7-20 – Placa retangular com trinca reta interna sob carregamento uniforme $\bar{t}$ simétrico no topo e na base. ....	108
Figura 7-21 – Fator de intensidade de tensão dinâmico normalizado ( $K_I$ ) de uma placa retangular com trinca reta interna sob carregamento uniforme $\bar{t}$ simétrico nas bordas longitudinais. ....	108
Figura 7-22 – Análise da influência do intervalo de tempo utilizado no Método de Newmark na obtenção do Fator de intensidade de tensão dinâmico normalizado ( $K_I$ ). ....	110
Figura 7-23 – Análise da influência do carregamento no valor do Fator de intensidade de tensão dinâmico normalizado ( $K_I$ ). ....	111
Figura 7-24 – Análise do comprimento da trinca no valor do Fator de intensidade de tensão dinâmico normalizado ( $K_I$ ). ....	112
Figura 7-25 – Placa retangular com trinca interna sob carregamento uniforme $\bar{t}$ simétrico no topo e na base perpendicular ao plano da trinca com gradação de metade do plano. ....	113
Figura 7-26 – Fator de intensidade de tensão dinâmico normalizado ( $K_I$ ) de uma placa retangular com trinca reta interna sob carregamento uniforme com a gradação de materiais no sentido perpendicular ao plano da trinca. ....	114
Figura 7-27 – Placa retangular com trinca interna sob carregamento uniforme $\bar{t}$ simétrico no topo e com a base engastada. ....	115
Figura 7-28 – Fator de intensidade de tensão dinâmico normalizado ( $K_I$ ) de uma placa retangular com trinca inclinada de bordo. ....	116
Figura 7-29 – Fator de intensidade de tensão dinâmico normalizado ( $K_{II}$ ) de uma placa retangular com trinca inclinada de bordo. ....	116
Figura 7-30 – Placa retangular com trinca interna inclinada sob carregamento uniforme $\bar{t}$ simétrico no topo e na base. ....	118
Figura 7-31 – Valores dos DSIFs normalizados ( $K_I$ ) em uma placa retangular inclinada sob carregamento uniforme $\bar{t}$ simétrico no topo e na base. ....	119

Figura 7-32 – Valores dos DSIFs normalizados ( $K_{II}$ ) em uma placa retangular inclinada sob carregamento uniforme  $\bar{t}$  simétrico no topo e na base..... 119

## LISTA DE ABREVIACOES, SÍMBOLOS E NOMENCLATURA

### Símbolos do Alfabeto Grego

$\Gamma_t$	Contorno estático
$\Gamma_u$	Contorno cinemático
$\Omega$	Domínio de um ponto de interesse
$\mu$	Módulo de cisalhamento
$\nu$ ou $\eta$	Coefficiente de Poisson
$\phi_i(x)$	Função de forma da aproximação com mínimos quadrados móveis
$\alpha_q$	Parâmetro de discretização do domínio do método sem malha, relacionado ao domínio local (ou domínio da forma fraca)
$\alpha_s$	Parâmetro de discretização do domínio do método sem malha, relacionado ao suporte compacto
$\mathcal{E}^*$	Vetor do campo de deformações cineticamente admissível
$\sigma_{ij}^R$	Componentes regulares do campo de tensões
$\sigma_{ij}^S$	Componentes singulares do campo de tensões
$\delta$	Parâmetro do método de Newmark
$\beta$	Parâmetro do método de Newmark
$\omega$	Frequência

### Símbolos do Alfabeto Latino

$\hat{u}_i$	Parâmetros nodais
$a(x)$	Vetor de coeficientes indeterminados
$d_i$	Raio do domínio de influência do nó $i$
$P$	Conjunto de bases linearmente independentes
$w(x)$	Função peso de um ponto nodal $x$
$dm_i$	dimensão do domínio de influência do nó $i$
$B$	Matriz dos operadores lineares
$D$	Matriz constitutiva do material
$k_m$	Vetor contendo os fatores de intensidade de tensão (SIF)
$n$	Matriz das componentes do vetor normal unitário
$U$	Vetor contendo os deslocamentos nodais prescritos
$a$	Comprimento da trinca
$E$	Módulo de elasticidade longitudinal
$G$	Módulo de elasticidade transversal
$h$	Altura da placa
$I$	Momento de inércia da seção transversal
$u^h(x)$	Deslocamento aproximado
$W$	Largura da placa
$l_b$	Comprimento da placa

$b$	Vetor de forças de corpo
$t$	Componente de forças superficiais
$u^*$	Campos de deslocamento admissível
$\bar{t}$	Componente de forças superficiais prescritas
$\bar{u}$	Valores dos deslocamentos prescritos H(d) Heaviside step function
$k_i$	Fator de concentração de tensões
$K_I$	Fator de intensidade de tensão (SIF) do Modo I
$K_{II}$	Fator de intensidade de tensão (SIF) do Modo II
$K_{III}$	Fator de intensidade de tensão (SIF) do Modo III
$u_i^R$	Componentes regulares do campo de deformações
$u_i^S$	Componentes singulares do campo de deformações
$F$	Matriz das componentes de Williams do deslocamento singular no contorno, dada uma ponta de trinca
$G$	Matriz das componentes de Williams das forças de superfície singulares no contorno, dada uma ponta de trinca

### Abreviaturas

BEM	Boundary Element Method
BNM	Boundary Node Method

BPIM	Boundary Point Interpolation Method
BRPIM	Boundary Radial Point Interpolation Method
CCI	Crack Closure Integral ou Integral de fechamento da trinca
DBEM	Dual Boundary Element Method
DSIF	Dynamic stress intensity fator ou Fator de Intensidade de Tensão Dinâmico
EFG	Element-Free Galerkin
FEM	Finite Element Method
FDM	Método das Diferenças Finitas
FPM	Finite Point Method
F2FFEM	Fractal Two-Level Finite Element Method
GDL	Graus de liberdade
GFDM	Generalized Finite Difference Method
GFEM	Generalized Finite-Element Method
GKR	General Kernel Reproduction Method
GSMF	Generalized-Strain Mesh-Free formulation ou formulação do campo elástico generalizado do método sem malha local
HBRPIM	Hybrid Boundary Radial Point Interpolation Method
ILMF	Integrated Local Meshfree Method
LBIE	Local Boundary Integral Equation
LRPIM	Local Radial Point Interpolation Method

MATLAB	Matrix Laboratory
MDF	Método das Diferenças Finitas
MEC	Método dos Elementos de Contorno
MEF	Método dos Elementos Finitos
MDF	Método das Diferenças Finitas
MED	Método de Extrapolação dos Deslocamentos
MLPG	Meshless Local Petrov–Galerkin
MLS	Moving least square
MQM	Mínimos quadrados móveis
MWS	Meshfree weak-strong
NEMs	Natural Element Method
PECC	Programa de Pós-Graduação em Estruturas e Construção Civil
PoU ou PU	Partition of Unity
PIM	Point Interpolation Method
PUFEM	Partition of Unity Finite Element Method
QPEs	Quarter Point element
RCBM	Radial Basis Collocation Method
RK	Reproducing Kernel
RKPM	Reproducing Kernel Particle Method
RPIM	Radial Point Interpolation Method
SPH	Smoothed Particle Hydrodynamics

SST	Singularity Subtraction Technique
Unb	Universidade de Brasília
VCCT	Virtual Crack Closure Technique ou Técnica de Fechamento
	Virtual de Elementos Trincas
XEFG	Extended Element-Free Galerkin Method
XFEM	Extended Finite Element Method

## 1. INTRODUÇÃO

O presente capítulo expõe as concepções iniciais que motivaram a pesquisa, com um histórico da implementação dos métodos sem malha na análise de problemas em diversas áreas da Engenharia. O objetivo geral e os objetivos específicos são descritos no final do capítulo.

### 1.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

A análise dinâmica em estruturas é um ramo de muita importância na mecânica computacional. De modo simplificado, a modelagem de um problema dinâmico visa obter a resposta estrutural em função das variáveis envolvidas, considerando tanto o tipo de carregamento dinâmico quanto os parâmetros mecânicos e geométricos da estrutura. Esses problemas dinâmicos, em grande parte, são regidos por equações diferenciais parciais determinadas por condições iniciais do problema e condições de contorno. Em geral, a solução exata do problema é de difícil obtenção. Meirovitch (1980) alega que soluções analíticas para os valores de condições iniciais e de fronteira são viáveis apenas na minoria dos casos.

Moosavi et al. (2011) destacam que entender e controlar a resposta dinâmica estrutural são de grande importância devido às suas aplicações práticas, principalmente para problemas de impacto, contato e penetração. Para minimizar os erros na modelagem dinâmica, geralmente é necessário representar o sistema com um número maior de graus de liberdade. Por outro lado, Nikolić et al. (2014) relatam que o aumento do número de graus de liberdade torna o modelo matemático mais complexo e a resolução do sistema de equações mais difícil.

Métodos numéricos consagrados como Método de Elementos Finitos (MEF), Método de Diferenças Finitas (MDF) e Método de Elementos de Contornos (MEC) são, em geral, empregados na resolução de problemas de engenharia quando a solução analítica é difícil e até, na maioria das vezes, inviável. Problemas de condução de calor, mecânica da fratura, dinâmica dos fluidos e análises dinâmicas, entre outros, apresentam equações diferenciais que são resolvidas através da implantação de métodos numéricos com o auxílio da computação. A disponibilidade de pacotes comerciais de elementos finitos bem desenvolvidos é outro fator estimulante que leva a sua prevalência para resolver questões práticas relacionadas com sólidos e estruturas (HUANG, 2016).

Tais métodos foram difundidos nas últimas décadas e apresentam vantagens e desvantagens na resolução dos problemas. Uma característica comum dos métodos relatados acima é a geração de malhas de pontos interconectados. Tal malha é indispensável para a geração de equações

interligadas para o cálculo de tensões, deslocamentos e deformações dos pontos de interesse analisados. Embora o MEF esteja em um avançado grau de desenvolvimento em virtude da aplicabilidade em diferentes ramos de pesquisas, restritas não apenas às áreas de Engenharia, tal método ainda apresenta algumas limitações, tais como: não se pode garantir a precisão das soluções quando ocorre distorção das malhas ou quando são criadas sem o refinamento adequado, e esse é o custo pertinente em métodos dependentes de malha; descontinuidades que se desviam dos contornos originais, sendo adotados procedimentos a fim de se evitar o problema como o remalhamento em cada etapa e, assim, permitindo que os contornos do elemento permaneçam alinhados com as descontinuidades (HUANG, 2016).

Chen *et al.* (2017) descrevem algumas desvantagens dos métodos numéricos convencionais, ou seja, aqueles que utilizam malha, em relação a parâmetros diversos, como a influência da geometria do problema analisado, da modificação do estado de tensões com o tempo, de análises com pontos de singularidades, entre outros fatores. Resumem-se as principais desvantagens abaixo:

- Demora na geração da malha com a precisão necessária de acordo com a geometria analisada;
- Dificuldade em construir aproximações com ordem arbitrária de continuidade, complexificando a solução de equações diferenciais parciais com alta ordem de diferenciação ou problemas com descontinuidades;
- Ineficácia em lidar com malhas que representam problemas de grandes deformações e de impactos de fragmentos;
- Contratempo em simulações de descontinuidades provindas de trincas que apresentam caminhos de propagação complexos e arbitrários, sendo desafiador modelar o processo de falha ou ruptura de um elemento formado por diversas partículas.

A princípio, em relação às desvantagens dos métodos numéricos com malha, Chen *et al.* (2017) idealizam que, para superar as desvantagens, é preciso optar pela supressão dos elementos e malhas na análise numérica.

Métodos sem malha locais apresentam em comum procedimentos que reduzem ou eliminam tais dificuldades, visto que a aproximação das incógnitas das equações diferenciais parciais é construída baseada em pontos dispersos sem malha de conectividade. Tais pontos dispersos podem estar dispostos no domínio de forma igualmente espaçada ou simplesmente aleatória.

Na maior parte dos casos, os métodos sem malha foram desenvolvidos baseando-se em dois suportes:

- Na teoria de Galerkin, alicerçada na forma fraca de resolução de equações diferenciais parciais. Embora a criação de nenhuma malha seja necessária, a integração do domínio é necessária, sendo normalmente aplicadas técnicas especiais para impor as condições de contorno;
- Nos métodos de colocação sem malha, amparados na forma forte de resolução de equações diferenciais. Em virtude da facilidade de montar com certa suavidade as aproximações sem malha, equações diferenciais podem ser resolvidas diretamente nos pontos de colocação sem a utilização de especiais domínios de integração e condições de contorno.

Ao focar apenas nos pontos, em vez da malha de elementos como no convencional método de elementos finitos, a abordagem dos métodos sem malha possui certas vantagens em lidar com problemas de descontinuidades e discretização numérica de problemas tridimensionais, para os quais a geração automática de malha ainda estava principiando (ZHU et al., 1998).

O objetivo dos métodos sem malha e, tal como o nome indica, é eliminar o processo de geração da malha, tal como ela é entendida nos métodos computacionais convencionais, como no MEF (ROQUE, 2007). Um dos primeiros métodos sem malha foi o Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH) proposto por Lucy (1977), Gingold e Monaghan (1977) na aplicabilidade de estudos da astrofísica em espaço aberto. O método foi posteriormente aplicado em problemas de tração em mecânica dos sólidos como uma maneira de resolver problemas difíceis para métodos baseados em malha, como, por exemplo, em situações de impacto de fragmentos (BENZ e ASPHAUG, 1995; OUATOUATI e JOHSON, 1999; LIBERSKY e PETSCHKE, 1991; LIBERSKY *et al.*, 1997). Um dos principais obstáculos na aplicação do método refere-se à instabilidade de tensões, precisão e inconstância em estudos espaciais de acordo com Belytschko *et al.* (2000). As aplicações do SPH incluem um vasto ramo de pesquisas, como a simulação de colisões de estrelas (MONAGHAN, 1992), fluxos incompressíveis (LIU *et al.*, 2001), correntes de gravidade (MONAGHAN, 2000), transferência de calor (CLEARY, 1998), entre outros trabalhos. Monaghan e Gingold (1983) evidenciaram que o método SPH pode capturar com precisão as ondas de choque unidimensional em simulações de viscosidade artificial. Métodos baseados em uma formulação SPH são adequados

para problemas de domínio infinito em que o tamanho do problema não é conhecido inicialmente (KATZ, 2009). Liu *et al.* (1995) introduziram o método Reproducing Kernel Particle Method (RKPM). Eles demonstraram que a versão discreta da estimativa RK oferecia propriedades favoráveis sobre DEM (Diffuse Element Method) e SPH, e poderia servir como uma correção para SPH, que é particularmente imprecisa perto dos limites. Foi mostrado por Chen *et al.* (1996) que as discretizações de forma contínua da aproximação RK e o momento matriz precisam ser feitos de maneira consistente, a fim de preservar reprodutibilidade polinomial. Os métodos sem malha são capazes de manipular simulações, como impacto, fraturas ou dinâmica de fluidos (LIU *et al.*, 1996).

Uma grande diferença entre as aproximações dos métodos sem malha e o método de elementos finitos é que as aproximações dos métodos sem malha como MQM e RK são construídas sem a necessidade de topologia de malha e são funções tipicamente racionais. Integração de domínio da forma fraca apresenta considerável complexidade no método sem malha de Galerkin (CHEN *et al.*, 2017). Melenk e Babuška (1996 e 1997) apresentaram o método de Partition of unity (PU). Duarte e Oden (1996) introduziram o método chamado Hp Clouds baseado no método PU, onde as aproximações do método de mínimos quadrados móveis (MQM) foram enriquecidas extrinsecamente (adicionando graus de liberdade na aproximação de PU) com maior ordem completa de polinômios.

O método de Partition of Unity (PU) aplicado ao método de elementos finitos foi posteriormente remodelado de uma maneira mais geral, sendo denominado de Generalized Finite-Element Method (GFEM). O método GFEM tem sido proposto em situações em que a malha é completamente independente da geometria, podendo ser empregado usando a geração automática de células de integração em conformidade com o domínio, com enriquecimento manual para características como canto, que alivia enormemente a dificuldade de gerar malhas para resolver equações diferenciais parciais em domínios complexos (STROUBOULIS *et al.*, 2000, 2001). Nesta abordagem, ao contrário de muitos métodos sem malha, na teoria de Galerkin, a aproximação é baseada em malha, mas a técnica de integração é sem malha.

Nos métodos sem malha amparados na teoria de Galerkin, a integração da forma fraca é frequentemente realizada por uma malha de fundo, ou, como definida por Belytschko *et al.* (1994), um “*background mesh*”. Assim, se tais métodos utilizam uma malha de fundo, não são verdadeiramente sem malha, ou seja, precisam de algum tipo de ligação entre os nós dispersos,

ou qualquer inter-relação nodal é necessária para avaliar integrais nas formulações fracas governantes.

O emprego das regras de quadratura de Gauss gera erros de integração quando as chamadas “*background cells*”, ou malhas de fundo, não coincidem com a função de forma de suporte (DOLBOW e BELYTSCHKO, 1999). Os métodos EFG e RKPM com quadratura de Gauss ou nodal integração não passam no *linear patch test* para a distribuição não uniforme de pontos (CHEN *et al.*, 2017). Um dos métodos que não utiliza o “background mesh” é o Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) (ATLURI e SHEN, 2002a, 2002b; ATLURI e ZHU, 1998). A aproximação da função objetivo utiliza o método dos mínimos quadrados móveis, em uma formulação nodal local, integrando nó a nó, portanto, sem o uso de células de fundo de suporte na integração das equações de equilíbrio global da discretização nodal. O MLPG não precisa de nenhum “elemento” ou “malha” para interpolação de campo e integração de fundo (GU e LIU, 2001b).

Problemas elastodinâmicos e elastostáticos são exemplos de aplicação dos métodos sem malha (ATLURI e ZHU, 2000a, 2000b). Atluri *et al.* (1999a) aplicaram o método MLPG no estudo de vigas finas e grossas (ATLURI e CHO, 2001). Vale citar também o estudo sobre estruturas de placas de Atluri e Long (2002) e dois artigos interessantes na linha de pesquisa adotada, que são análise de vibração para sólidos (GU e LIU, 2001a) e problemas de fratura linear (CHING e BATRA, 2001). Ainda assim, é possível citar outras linhas de pesquisa que utilizaram um *Meshless*, como em problemas de mecânica dos fluidos (WU, LIU e GU, 2005), propagação de trincas (LIU e GAO, 2006), impacto de alta velocidade (HAN *et al.*, 2006), entre outros.

Long *et al.* (2005) aplicaram o MLPG em problemas bidimensionais dinâmicos a fim de obter a resposta estrutural em termos de frequências e deslocamentos. Para isso, usaram funções de bases radiais para as interpolações de funções e, no MLPG5, uma variação do método MLPG de Atluri e Shen (2002b), a função Heaviside de teste. Outros métodos sem malha se basearam na teoria de Galerkin, tais como: Natural Element Method (NEMs) (BRAUN e SAMBRIDGE, 1995; SUKUMAR e BELYTSCHKO, 1998), que emprega a “*natural neighbor interpolation*”, fundamentada em diagramas de Voronoi de um conjunto de pontos distribuídos arbitrariamente; o método Radial Point Interpolation Method (RPIM) (WANG e LIU, 2002), que usa uma combinação radial e polinomial de funções de base; o Local Radial Point Interpolation Method (LRPIM) (GU e LIU, 2001b), que emprega a mesma aproximação, mas com uma forma fraca local para um método sem células de fundo; entre outros.

Uma abordagem alternativa para resolver os problemas de integração de domínio é aquela que utiliza a forma forte dos pontos de colocação nos métodos sem malha baseados na teoria de Galerkin. Um exemplo é o método Radial Basis Collocation Method (RCBM) (KANSA, 1990a, 1990b), que emprega funções de base radial na solução numérica de equações diferenciais parciais usando a colocação forma forte. Métodos para incorporar descontinuidades fracas e fortes também foram propostos (CHEN *et al.*, 2009; WANG *et al.*, 2010), e formulações mistas foram desenvolvidas para problemas de limitação.

Alternativamente, aproximações como MQM ou RK podem ser empregadas para a solução de colocação de equações diferenciais parciais, que naturalmente introduz aproximações compactamente suportadas (CHEN *et al.*, 2017). Métodos de colocação baseados na aproximação RK foram introduzidos (ALURU, 2000; HU *et al.*, 2011). Foi demonstrado que a forma forte dos métodos de colocação é fundamentada em aproximações com condições monomiais de reprodução, as quais exibem taxas de convergência algébrica (CHEN *et al.*, 2017).

Aproximações de métodos sem malha podem ser classificadas em duas famílias: aquelas baseadas no SPH e aquelas baseadas no MQM. As aproximações baseadas em SPH são, normalmente, combinadas com técnicas de pontos de integração, enquanto as MQM são, habitualmente, aplicadas com as formulações de Galerkin, embora técnicas de ponto de colocação estejam crescendo em popularidade (Huerta *et al.*, 2017). Em geral, os métodos sem malha podem ser divididos ou classificados em duas categorias: métodos de domínio ou métodos de borda, mas apresentando duas características semelhantes nas duas abordagens. Como dito anteriormente, o problema de domínio ou de borda são discretizados por pontos dispersos.

Além disso, foram desenvolvidos métodos mistos que acoplam as características dos métodos sem malha a outros métodos numéricos consagrados, tais como os EFG/FEM (BELYTSCHKO *et al.*, 1995) e EFG/Boundary Element Method (BEM) (LIU e GU, 2000a, 2000b).

Na análise dinâmica em que os métodos numéricos convencionais são utilizados, podem-se encontrar certas dificuldades, porque, no processo de resolver um problema elastodinâmico, a precisão dos resultados obtidos pode ser influenciada pela forma do elemento utilizado quando o mesmo é significativamente deformado.

Destacam-se, abaixo, em ordem cronológica, pesquisas no campo da mecânica da fratura, nas quais foram utilizadas diversas metodologias de extração dos fatores de intensidade de tensão e métodos numéricos:

- Song e Paulino (2005) avaliaram os fatores de intensidade de tensão dinâmica de placas de material homogêneo e não homogêneo utilizando o Método de Elementos Finitos através da aplicação da Integral J e M e com a integração do tempo através do Método de Newmark (1959). Utilizaram exemplos padronizados na literatura em placas submetidas ao modo de abertura I e modo misto, calculando os DSIFs em diversos problemas clássicos da mecânica da fratura elastodinâmica e empregando fatores de degração do módulo de Young e Elasticidade dos materiais não homogêneos;
- Castellanos *et al.* (2006) aplicaram o Método de Elementos Finitos (MEF) no programa comercial ANSYS a fim de detalhar a influência da propagação das ondas elásticas em uma placa retangular e um cilindro fissurado. Os resultados mostraram que, à medida que aumentava o ângulo de inclinação da trinca interna em relação à horizontal, reduziavam os valores dos DSIFs. Fisicamente, significava que, quando as ondas dilatacionais eram perpendiculares à orientação da trinca, os valores dos DSIFs tendiam a zero;
- Menouillard *et al.* (2009) enriqueceram com bases singulares e bases quadráticas as vizinhanças do segmento de fraturas dinâmicas utilizando uma função de Heaviside no XFEM (Extended Finite Element Method) a fim de modificar o campo elástico da descontinuidade da trinca. O autor separou o campo elástico de deslocamentos em três campos: a parte contínua do deslocamento, a parte descontínua – que corresponde à superfície da trinca – e a parte da ponta da trinca enriquecida;
- Wen e Aliabadi (2009) avaliaram os fatores de intensidade de tensão em modo misto em placas submetidas a carregamentos estáticos e dinâmicos através do Elemento Free Galerkin (EFG), enriquecido com bases radiais. Utilizaram a Transformada de Laplace, a fim de modificar o domínio do tempo para o domínio da frequência, e o Método de Inversão de Durbin (1975), de forma a obter as integrais no tempo;
- Muthu *et al.* (2012) calcularam os fatores de intensidade de tensão dinâmica em placas trincadas internamente e constituídas por materiais de transição, utilizando o XEFG (Extended Element-Free Galerkin Method), através da técnica de Integral de fechamento de trinca (CCI) combinada com uma técnica de suavização da singularidade de enriquecimento local. Na obtenção dos fatores de intensidade de tensão pelo Método de Deslocamento, consideraram os

deslocamentos dos nós atrás da ponta da trinca em uma distância equivalente a 5% do comprimento estimado da trinca;

- Petri (2013) analisou os fatores de intensidade de tensão dinâmica e a propagação de trincas em materiais frágeis, utilizando a integral J aplicada no XFEM e integrando no tempo através do Método Generalizado- $\alpha$ . Obteve resultados coerentes em comparação com outros métodos numéricos, enriquecendo os nós nas vizinhanças da trinca com funções de ponta em um raio de aproximadamente 2,5mm e extraíndo os DSIFs em uma zona de contorno de raio de duas vezes a raiz quadrada da área do elemento utilizado;
- Gonzalez *et al.* (2015) aplicaram a técnica de Deslocamentos Apropriados no BEM (Boundary Element Method) para obter os fatores de intensidade de tensão em seis exemplos paramétricos e comparar a resposta obtida com a integral de contorno J. Da técnica de deslocamentos apropriados, variaram três outras técnicas: nós de superfície, nós de contorno e nós internos;
- Abdollahifar e Nami (2014) estudaram os fatores de intensidade de tensão dinâmico em seis problemas bidimensionais, aplicando o método do MLPG (Meshless Local Petrov-Galerkin) em uma placa retangular com trinca central composta de materiais não-homogêneos. Utilizaram a integral J modificada e enriquecida de funções de base nas proximidades da ponta da trinca e o Método de Newmark (1959) para a integração no tempo de problemas com a aplicação de um fator de não homogeneidade  $\beta$  com gradação total, metade de gradação e gradação apenas na borda das propriedades elásticas do material;
- Zhou *et al.* (2016) analisaram o comportamento de fatores de intensidade de tensão de placas constituídas de materiais graduados através da Técnica de Fechamento Virtual de Elementos Trincas (VCCT), utilizando sub-rotinas do MATLAB 2015<sup>a</sup> no ABAQUS em casos estáticos e dinâmicos;
- Zheng *et al.* (2019) aplicaram a técnica variacional no método de blocos finitos de forma a calcular os fatores de intensidade de tensão dinâmico e o Método de Inversão de Durbin (1975) para integrar no tempo. Os resultados de três problemas típicos foram comparados com os valores do DBEM;
- Fedeliński (2019) aplicou o Boundary Element Method (BEM) na avaliação de trincas ramificadas em um domínio infinito na avaliação estática e dinâmica com a integração do tempo através do Método de Inversão de Durbin (1975);
- Turis *et al.* (2021) compararam os resultados experimentais de uma técnica baseada na difração de luz com os valores numéricos de fatores de intensidade de tensão dinâmica obtidos

através do método de extrapolação de deslocamentos de valores de campo de deslocamentos obtidos no software ANSYS.

Entre as pesquisas recentes elaboradas pelo Programa de Pós-Graduação em Estruturas e Construção Civil (PECC) da Universidade de Brasília (Unb), destacam-se as que serão resumidamente apresentadas a seguir.

Oliveira e Portela (2019) implementaram a técnica de subtração da regularidade em problemas bidimensionais da mecânica da fratura linear elástica para um método sem malha local denominado de Integrated Local Mesh Free Model (ILMF). Oliveira *et al.* (2019) calcularam os fatores de intensidade de tensão em problemas da mecânica da fratura linear elástica utilizando distribuições nodais, regulares e irregulares, de um método sem malha local.

Oliveira (2019) analisou os fatores de intensidade de tensão na mecânica da fratura linear elástica, utilizando o método sem malha denominado de campo elástico generalizado sem malha local (GSMF) através da técnica de subtração da singularidade. Obteve, assim, significativa precisão para os casos estudados com trincas de borda e central em diferentes modos de abertura. Gómez (2019) aplicou o método dos Algoritmos Genéticos na otimização multiobjetivo a fim de obter a malha de forma automática, o tamanho do suporte compacto e o domínio de integração local, em cada nó de integração, no método sem malha local utilizado. Santana *et al.* (2019) apresentaram a automatização dos parâmetros de um método sem malha.

Diante do exposto, o presente trabalho visa estudar o problema da mecânica da fratura elastodinâmica, usando os métodos sem malha locais baseados na formulação fraca dos métodos de resíduos ponderados a partir das equações diferenciais da dinâmica. Na análise de vibrações livres, frequências e autovetores são obtidos pela resolução de equações de autovalores. Nas vibrações forçadas, o Método de Newmark (1959) é utilizado para integrar o tempo e solucionar o problema.

## 1.2 OBJETIVOS

### 1.2.1 Objetivo geral

O principal objetivo desta pesquisa é implementar um método sem malha local na solução de problemas da mecânica da fratura elastodinâmica, obtendo os fatores de intensidade de tensão através da técnica de subtração da singularidade em conjunto com o método de integração no tempo.

Em relação ao cenário nacional, grande parte das pesquisas se concentra nos métodos numéricos convencionais, como o MEF e o MEC, que utilizam malhas em algum momento da análise. Desta forma, procura-se ampliar a aplicabilidade dos métodos sem malha locais em diversos problemas da dinâmica, especialmente na determinação do fator de intensidade de tensão, estabelecendo comparações entre os métodos, a fim de se obterem respostas de vantagens e desvantagens do uso.

### **1.2.2 Objetivos específicos**

- Apresentar a forma local do teorema do trabalho para problemas bidimensionais com uma distribuição nodal regular e irregular;
- Implementar computacionalmente a integração no domínio para obter a matriz de massa, frequências e modos próprios de vibração livre, resolvendo o problema de autovalor;
- Implementar computacionalmente a integração no tempo por um método implícito (Método de Newmark), utilizando rotinas programadas na linguagem MATLAB 2019<sup>a</sup>;
- Avaliar a eficiência do método de extrapolação dos deslocamentos em um método local sem malha em problemas da mecânica da fratura linear estática;
- Realizar o processo de regularização e implementar a técnica de subtração da regularidade em casos de uma única trinca em problemas elastodinâmicos bidimensionais;
- Implementar computacionalmente a metodologia adotada e as concepções do método no programa MATLAB 2019<sup>a</sup>;
- Analisar o comportamento do fator de intensidade de tensão dinâmica de sólidos elásticos bidimensionais em exemplos clássicos da literatura;
- Verificar a eficiência dos resultados obtidos, avaliando a influência paramétrica de determinados fatores.

## 2. REVISÃO DA LITERATURA

No presente capítulo, apresenta-se uma revisão teórica sobre os métodos sem malha, apresentando conceitos iniciais relativos da definição, classificação em relação à forma, funções de forma e de peso e condições de contorno.

Em seguida, são abordados os tópicos relacionados ao Método dos Mínimos Quadrados Móveis (MQM) – utilizado na construção das funções de forma –, à teoria da elasticidade, aos princípios energéticos e à integração reduzida do método sem malha empregado – denominado de ILMF. Ademais, o MLPG também é apresentado.

No final do capítulo são expostos os conceitos básicos sobre a análise dinâmica de vibrações livres e forçadas, equações da elastodinâmica e o Método de Newmark (1959), para a análise da integração direta. Os aspectos aqui conceituados são fundamentos da formulação, implementação e verificação dos algoritmos propostos nos capítulos seguintes.

### 2.1 MÉTODOS SEM MALHA

Nesta seção serão apresentados os métodos sem malha mais conhecidos e os recentes avanços. Além disso, são mostrados alguns termos e conceitos fundamentais para a formulação desses métodos.

#### 2.1.1 Definição

Os métodos sem malha, diferentemente do MEF, usam um conjunto de nós espalhados no domínio e no contorno do problema (chamados de nós de campo ou *field nodes*), de forma que estes não contêm nenhuma informação sobre a conectividade entre eles para a aproximação ou interpolação das incógnitas do campo, ou seja, não formam uma malha. A Figura 2-1 mostra a principal diferença entre esses dois métodos. Essa distribuição nodal não necessariamente precisa ser uniforme e pode ser controlada, assim como a densidade, ou quantidade total de nós (ATLURI e ZHU, 1998).

Eles surgiram como uma alternativa ao MEF tradicional, buscando eliminar os problemas relacionados à malha, como o alto custo para a geração da mesma, a baixa precisão na recuperação das tensões e a dificuldade de resolução de problemas que exijam análise adaptativa, como fratura e grandes deformações.

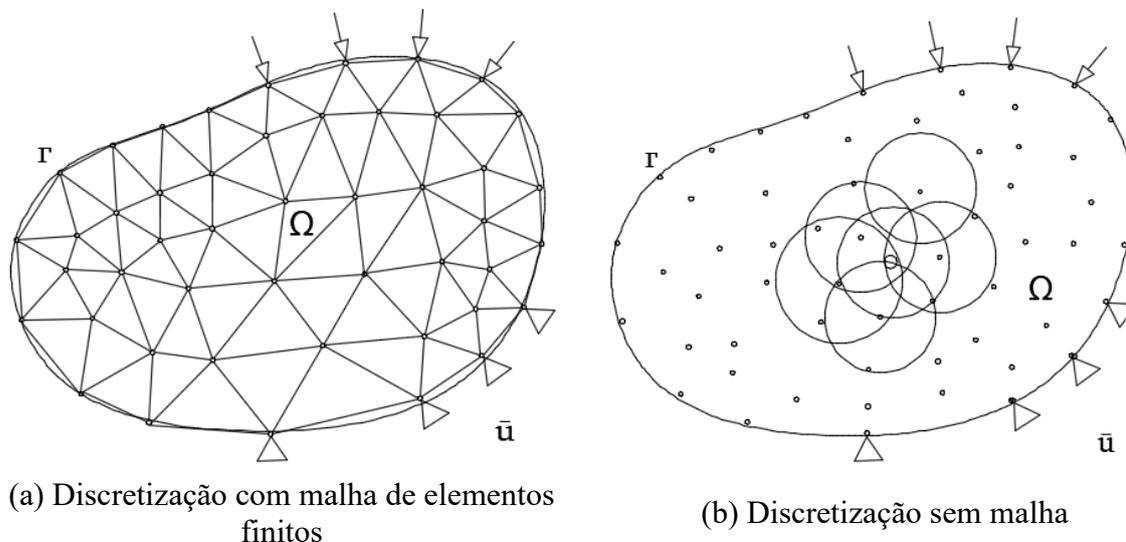


Figura 2-1 – Representação do domínio no método dos elementos finitos (MEF) e nos métodos sem malha.

Esses métodos podem ser classificados de acordo com a formulação ou o método de aproximação utilizado, bem como o tipo de representação do domínio. Os principais métodos e suas classificações estão resumidos esquematicamente na Tabela 2.1.

Tabela 2-1– Métodos sem malha classificados. Modificado de Liu e Gu (2005).

<b>Classificação</b>	<b>Categoria</b>	<b>Exemplos de métodos</b>
Baseado nas formulações utilizadas	Forma forte	Colocação, FPM, etc.
	Forma fraca	EFG, RPIM, MLPG, LRPIM, ILMF, etc.
Baseado no método de interpolação/ aproximação	Combinação das duas formas	MWS, etc.
	Mínimos quadrados móveis (MQM)	EFG, MLPG, etc.
	Método da representação da integral	SPH, etc.
	PIM	RPIM, LRPIM, etc.
Baseado na representação do domínio	Outras interpolações	PUFEM, hp-cloud, etc.
	Domínio	SPH, EFG, RPIM, MLPG, LRPIM, etc.
	Contorno	BNM, LBIE, BPIM, BRPIM, HBRPIM, etc.

Como se observa na Tabela 2-1, os métodos sem malha podem ser classificados segundo duas categorias: a formulação forte e a formulação fraca. A forma forte usa diretamente as equações diferenciais parciais para obter a solução. Por outro lado, a formulação fraca usa o princípio variacional para minimizar o resíduo ponderado das equações diferenciais. O resíduo é obtido pela substituição da equação da solução exata por uma função de aproximação multiplicada por uma função teste (BELINHA, 2010).

### 2.1.2 Procedimentos adotados

Em métodos sem malha, geralmente, a seguinte sequência de procedimentos é adotada a fim de obter a solução:

1º) Criação dos nós: um conjunto de pontos aleatórios são dispersos no domínio do problema, de forma aleatória, de modo que a quantidade de nós criados e o tipo de dispersão, uniforme ou desuniforme, depende da precisão requerida para cada tipo de fenômeno modelado e as diversas variáveis do mesmo.

2º) Escolha da função de forma: após a criação dos nós, são criadas as funções de forma a partir deles, tendo como base a interpolação ou aproximação do campo variável, como o deslocamento ( $\mathbf{u}$ ) sobre o seu domínio de apoio, usando informações de nós de campo. As funções de forma são aproximadas através de um conjunto de nós nas proximidades dos pontos de interesse. Tais conjuntos de nós são denominados de suporte compacto, sendo esse subdomínio determinado de forma aleatória, tanto em termos de números de nós do subdomínio quanto à forma do subdomínio. Existem vários tipos de funções de forma em métodos de malha, tais como o PIM (Método de Ponto de Interpolação), RBFs (Funções de Bases Radiais), RPIM (Método de interpolação em pontos radiais), MQM (Método dos Mínimos Quadrados Móveis), entre outros.

3º) Criação do sistema de equações: as equações formuladas ou montadas a partir do sistema nodal, usando as funções de forma escolhidas, são discretizadas, formando um sistema de equações global para todo o problema.

4º) Resolução do sistema de equações: soluções para a variável escolhida são obtidas para todos os pontos do domínio, de forma nodal, sendo utilizadas posteriormente a fim de obter outras variáveis do sistema. Por exemplo, a partir dos cálculos dos deslocamentos, é possível a obtenção das deformações e tensões.

### 2.1.3 Conceito de suporte compacto

O suporte compacto é nada mais do que um conjunto de pontos aleatoriamente escolhidos, próximos de um ponto de interesse. O conjunto de pontos escolhidos pode ser formado por uma geometria de forma poligonal, retangular, quadrada, hexagonal ou circular. As geometrias mais comumente escolhidas são retangulares ou circulares.

Como o tamanho do suporte compacto irá influenciar na aproximação obtida pela função de forma, a escolha da geometria e do número de nós envolvidos é de relevante importância na precisão do método. O suporte compacto de um ponto de interesse  $X$  determina o número de nós que são usados para aproximar o valor da função no mesmo ponto de interesse  $X$ .

Todos os nós do domínio do problema são selecionados a fim de que seja possível realizar a aproximação da função de forma do suporte compacto escolhido. A Figura 2-2 abaixo representa duas situações típicas do suporte compacto para o caso bidimensional:

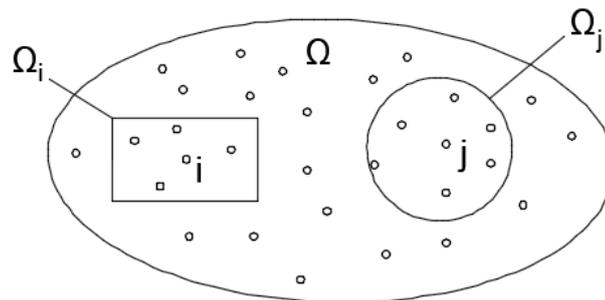


Figura 2-2 – Suporte compacto dos nós I e J. No domínio  $\Omega$  em questão, o nó I representa o suporte compacto retangular e o nó J representa o suporte compacto circular.

Deve-se atentar ao fato de que a aproximação no ponto de interesse deve acontecer de tal forma que os pontos nodais não sejam distribuídos de forma muito dispersa. Mesmo sendo inseridos de maneira aleatória, deve haver a preocupação de que a densidade dos pontos não seja disforme em relação ao domínio global.

Uma outra preocupação é referente ao tamanho do suporte compacto, visto que o tamanho de cada subdomínio é que vai determinar o número de nós abrangidos para se poder construir as funções de forma, o que pode influenciar a acurácia da interpolação no ponto de interesse. O uso de um suporte compacto com base no ponto de interesse pode levar à seleção desequilibrada de nós na construção da função de forma. Para prevenir este tipo de problemas, o conceito de domínio de influência deve ser utilizado (LIU e GU, 2005).

#### 2.1.4 Domínio de influência

O domínio de influência pode ser entendido como uma região do ponto de interesse que sofre influência de todos os suportes compactos de tal maneira que a construção de forma de um ponto qualquer será influenciada pelo domínio de influência dos subdomínios no ponto

analisado. Assim, a sobreposição dos suportes compactos garantirá a conectividade ou interação entre os nós do domínio. Em problemas bidimensionais, os domínios de influência geram uma área, porém, em casos tridimensionais, a interligação entre os nós gerará um volume (FERREIRA, 2012).

Liu (2003) define o domínio de influência como um domínio sobre o qual um nó exerce influência, podendo ser uma alternativa para a seleção dos nós nas vizinhanças dos pontos de interesse durante a aproximação da função de forma em uniforme ou não uniforme distribuição de nós.

A partir da Figura 2-3 abaixo, pode-se visualizar como se dá a correlação do domínio de influência em cada nó a partir do ponto de interesse  $X$ , sendo que o domínio de influência pode ser diferente para cada nó do domínio, ou seja, variando de nó para nó, tal como mostrado.

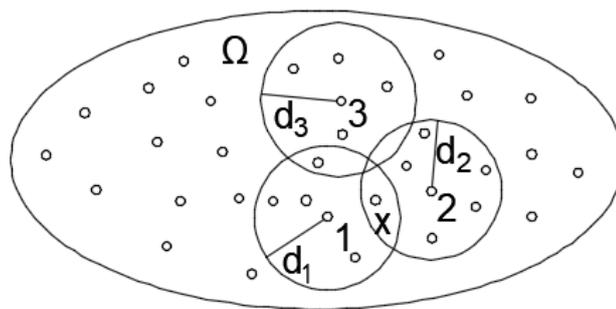


Figura 2-3 – Domínio de influência em nós.

Na Figura 2-3 acima, os nós 1, 2 e 3 possuem respectivamente os raios de domínio de influência  $d_1, d_2$  e  $d_3$ . Para a construção da função de forma relativa ao ponto de interesse  $X$ , serão utilizados os domínios de influência relativos aos nós 1 e 2, não sendo utilizado o domínio de influência referente ao nó 3.

Logicamente, percebe-se que o tamanho do domínio de influência poderá ser influenciado por nós mais próximos do ponto do interesse e também mais distantes. Não necessariamente os nós mais próximos serão sempre utilizados na construção dos domínios de influência.

No caso em questão, o nó 3 não será utilizado para a construção do domínio de influência  $X_q$ , visto que o raio  $d_3$  não o engloba.

O tamanho ou a forma como variam os domínios de influência acerca do problema afetam a performance e a solução final dos métodos sem malha. É importante que o domínio de influência contido em todo o problema tenha o mesmo número de nós. Domínios com bordas irregulares ou aglomerações de nós podem levar à geração de domínios de influência irregulares (BELINHA, 2014).

Independentemente do método sem malha utilizado, trabalhos recentes recomendam adotar o tamanho do domínio de influência da seguinte forma:

$$D = k \cdot h \quad (2.1)$$

Onde:

$h$  é a média de espaçamento entre os nós que rodeiam o ponto de interesse  $X_q$ ;

$k$  é um parâmetro adimensional.

Contudo, esta não é a metodologia mais apropriada em métodos sem malha. Fixar o tamanho dos domínios de influência é a técnica mais comum para estabelecer a conectividade nodal (BELINHA, 2014). De acordo com Belytschko *et al.* (1994), a dimensão ou tamanho do domínio de influência pode ser calculado pelos seguintes fatores:

$$dm_i = \alpha_s \cdot d_i \quad (2.2)$$

Onde:

$\alpha_s$  é uma constante de proporcionalidade;

$d_i$  é o raio de influência, no qual acaba determinando o tamanho do domínio de influência.

Caso ocorra a distribuição uniforme dos nós,  $d_i$  pode ser entendido como a distância máxima entre o conjunto de nós que rodeiam o ponto de interesse. No caso contrário, na distribuição não uniforme dos nós,  $d_i$  pode ser definido como a menor distância média de espaçamento nodal compreendida entre o ponto de interesse e o conjunto de nós que formam o domínio de influência.

De acordo Liu (2003), Liu e Gu (2003), os valores de  $\alpha_s$  que levam a ter bons resultados na aproximação das funções de forma estão compreendidos no intervalo de 1,4 a 4,0 em exemplos elastotáticos.

A precisão da interpolação, normalmente, vai depender de uma escolha bem adequada para o conjunto de nós que forma o suporte compacto. Assim, elencam-se algumas observações trazidas por Tinh (2005) a respeito do assunto:

1ª observação: garantir que há partículas suficientes dentro do suporte;

2ª observação: assegurar que não deve haver muitas partículas dentro de um suporte. Se não houver partículas suficientes dentro do suporte, quando calcularmos a função de forma de um método sem malha, encontraremos um problema de singularidade. Se houver muitas partículas em um suporte, a largura de banda da matriz de rigidez será grande, portanto, computacionalmente, não é eficiente;

3ª observação: no que diz respeito à computação acima da média, devemos ter cuidado para que a diferença entre o tamanho mínimo e máximo de suporte não seja muito grande.

### 2.1.5 Funções de ponderação

A função peso deverá ser zero fora do domínio de influência e diferente de zero nas proximidades do ponto de interesse  $X$ , do domínio de influência do nó genérico  $I$  em questão.

Existem vários tipos de função peso, sendo que, em cada formulação deverão ser atendidas as seguintes premissas ou condições:

- $w_i(s) > 0$ , no interior do subdomínio  $\Omega_x$ ;
- $w_i(s) = 0$ , fora do domínio de  $\Omega_x$ ; e
- $w_i(s)$  é uma função contínua decrescente.

A função peso é calculada em função de seu comprimento, normalizado da seguinte forma:

$$r = \frac{\|x - x_i\|}{dm_i} \quad (2.3)$$

Onde:

$dm_i$ : dimensão do domínio de influência do nó  $i$ ;

$x - x_i$ : distância entre o ponto de interesse  $x$  e o ponto nodal  $x_i$ .

Desta forma, a dimensão do suporte compacto de uma função peso associado ao nó  $I$  deve ser escolhida de maneira que englobe um número suficientemente adequado de nós, de forma a cobrir todo o domínio da aproximação pelo método escolhido para a função de teste em cada ponto de amostragem, para garantir a regularidade da matriz. Um pequeno suporte compacto

pode resultar em um erro numérico relativamente grande ao usar quadratura numérica de Gauss nos cálculos dos elementos na matriz do sistema (TINH, 2005).

As funções ponderadoras mais utilizadas em aproximações unidimensionais são a *Cubic Spline Weight Function* e a *Quartic Spline weight Function*, que serão listadas a seguir com as outras mais empregadas:

- *Cubic Spline weight Function* (BELYTSCHKO *et al.*, 1996)

$$w(r) = \begin{cases} \frac{2}{3} - 4r^2 + 4r^3, & r \leq \frac{1}{2} \\ \frac{4}{3} - 4r + 4r^2 - \frac{4}{3}r^3, & \frac{1}{2} < r \leq 1 \\ 0, & r > 1 \end{cases} \quad (2.4)$$

- *Quartic Spline weight Function* (BELYTSCHKO *et al.*, 1996)

$$w(r) = \begin{cases} 1 - 6r^2 + 8r^3 - 3r^4, & r \leq 1 \\ 0, & r > 1 \end{cases} \quad (2.5)$$

- Quinta Spline (XIAOFEI *et al.*, 2004)

$$w(r) = \begin{cases} 1 - 10r^2 + 20r^3 - 15r^4 + 4r^5, & r \leq 1 \\ 0, & r > 1 \end{cases} \quad (2.6)$$

- Exponencial (LONG e HU, 2003)

$$w(r) = \begin{cases} e^{-r/a}, & r \leq 1 \\ 0, & r > 1 \end{cases} \quad (2.7)$$

- Exponencial (BELYTSCHKO *et al.*, 1995)

$$w(r) = \begin{cases} e^{-(r/a)^2}, & r \leq 1 \\ 0, & r > 1 \end{cases} \quad (2.8)$$

- Gaussiana (BELYTSCHKO *et al.*, 1994)

$$w(r) = \begin{cases} \frac{e^{-(rb)^{2k}} - e^{-(b)^{2k}}}{1 - e^{-(b)^{2k}}}, & r \leq 1 \\ 0, & r > 1 \end{cases} \quad (2.9)$$

- Cônica (BELYTSCHKO *et al.*, 1994)

$$w(r) = \begin{cases} 1 - (r)^{2k}, & r \leq 1 \\ 0, & r > 1 \end{cases} \quad (2.10)$$

No caso bidimensional, a função peso correspondente é obtida de acordo com as expressões abaixo:

- Domínio circular:

$$w_i(x) = w\left(\frac{\|x - x_i\|}{dm_i}\right) \quad (2.11)$$

- Domínio retangular:

$$w_i(x) = w(r_x) \cdot w(r_y) = w\left(\frac{\|x - x_i\|}{dm_i^x}\right) \cdot w\left(\frac{\|y - y_i\|}{dm_i^y}\right) \quad (2.12)$$

Como demonstrado na equação (2.12),  $w(r_x)$  e  $w(r_y)$  são obtidas através da substituição de  $r$  por  $r_x$  ou  $r_y$ , respectivamente, conforme o caso, nas equações (2.4) a (2.10). Ao se calcular as funções de forma, verifica-se a necessidade de se obter a derivada de tais funções e, com isto, a derivada das funções peso. Assim, utilizando-se a regra da cadeia, calculam-se as funções de forma da seguinte maneira:

$$w_{i,k} = w_{i,r} \cdot r_{i,k} \quad (2.13)$$

Onde:

$k$  é o subscrito que representa a derivada da função.

Para o caso unidimensional, utilizando a função peso Cúbica Spline, tem-se a seguinte expressão:

$$w_{i,r} = \begin{cases} -8r + 12r^2, & r \leq \frac{1}{2} \\ 4 + 8r - 4r^2, & \frac{1}{2} < r \leq 1 \\ 0, & r > 1 \end{cases} \quad (2.14)$$

Por exemplo, no domínio circular, substituindo o valor da Equação (2.3) na Equação (2.13), tem-se a expressão:

$$w_{i,x} = w_{i,r} \cdot \frac{(x - x_i)}{dm_i} \quad (2.15)$$

No caso bidimensional:

$$w_{i,x} = w_{i,r} \cdot r_{i,x} \quad (2.16)$$

$$w_{i,y} = w_{i,r} \cdot r_{i,y} \quad (2.17)$$

Se substituir o valor de  $r_{i,x}$  e  $r_{i,y}$ , as expressões ficam com a seguinte forma:

$$w_{i,x} = w_{i,r} \cdot \frac{(x - x_i)}{r \cdot dm_i^2} \quad (2.18)$$

$$w_{i,y} = w_{i,r} \cdot \frac{(y - y_i)}{r \cdot dm_i^2} \quad (2.19)$$

Ambaliya e Savaliya (2015) relatam que as funções peso tem duas importantes ações:

- Uma como um meio de transmitir suavidade ou continuidade desejada para a aproximação;
- A mais importante, é o estabelecimento da natureza local da aproximação.

### 2.1.6 Funções de forma

As funções de forma são construídas em aproximações baseadas no método dos resíduos ponderados.

Normalmente, a escolha da função de base é muito relevante na precisão do método analisado, visto que a função aproximada tem que representar com certo grau de confiança a função exata. Na maioria dos casos, são utilizadas funções base na forma de monômios, dando origem a termos polinomiais que podem ser constantes, lineares, quadráticos ou exponenciais.

Em casos unidimensionais, geralmente, as funções de base são as seguintes:

$$\begin{aligned} p^T &= [1 \quad x], m = 2 \\ p^T &= [1 \quad x \quad x^2], m = 3 \\ p^T &= [1 \quad x \quad x^2 \quad \cdots \quad x^{m-1}] \end{aligned} \quad (2.20)$$

Onde  $m$  é o tamanho da função base.

Em casos bidimensionais, as funções de base podem ser representadas pelo triângulo de Pascal. Por exemplo, uma função de base quadrática pode ser representada por:

$$p^T = [1 \quad x \quad y \quad x^2 \quad xy \quad y^2] \quad (2.21)$$

Sendo que, no exemplo acima, a função base apresentada tem ordem  $m = 6$ .

Liu (2003) observa alguns aspectos que as funções de forma satisfazem a fim de serem apropriadas em métodos sem malha:

- 1º) Deverá ser razoavelmente robusta para os nós distribuídos arbitrariamente;
- 2º) Deverá ser numericamente estável ou produzir resultados estáveis, apesar de algumas distribuições nodais poderem causar certa instabilidade na aproximação local;
- 3º) Deverá satisfazer certa ordem de diferenciabilidade ou continuidade: quando se aumenta o número de nós no domínio, o método deve garantir que a solução seja mais bem aproximada;

4°) Deverá ter um suporte compacto; deve ser suficientemente pequeno se comparado ao domínio completo – isso garante maior esparsidade da matriz global e melhor eficiência na obtenção dos resultados;

5°) Deverá ser computacionalmente eficiente;

6°) Ideal que tivesse a propriedade de delta de Kronecker, para facilitar a imposição das condições essenciais de contorno.

A Tabela 2-2 abaixo resume as aproximações das funções mais utilizadas nos métodos sem malha:

Tabela 2-2 – Aproximação das funções de forma dos Métodos sem malha. Modificado de Liu e Gu (2005)

<b>Categoria</b>	<b>Técnicas de aproximação</b>
Representação por integral	Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH) Reproducing Kernel Particle Method (RKPM) General Kernel reproduction Method (GKR)
Representação por séries	Mínimos quadrados móveis (MQM) Point Interpolation Method (PIM, RPIM) Partition of Unity (PoU)
Representação por diferencial	Generalized Finite Difference Method (GFDM)

### 2.1.7 Condições de contorno essenciais

Ao se aproximar utilizando um método numérico, é de fundamental importância a restrita observância das condições de contorno essenciais. Nos métodos sem malha, as condições de contorno essenciais ganham mais destaque, em razão das aproximações utilizadas não passarem por valores nodais. Para tal propósito, os multiplicadores Lagrangeanos são os mais utilizados, mas são também os mais custosos computacionalmente, devido a não positividade das equações discretas (CHEN *et al.*, 2006).

### 2.1.8 Consistência

O conceito de consistência diz respeito à questão da aproximação, sendo a função aproximada  $u(x)$ , conforme definido anteriormente como:

$$u(x) = \sum_{i=1}^n \phi_i(x)u_i, \quad x \in \Omega \quad (2.22)$$

Onde  $n$  : número de nós do domínio;

$\phi_i(x)$  : função peso;

$u_i$  : parâmetro nodal.

Quando se utilizam polinômios de grau menor ou igual a  $k$ , a consistência do método utilizado para aproximar  $u^h(x)$  é da ordem  $k$ .

Em relação ao estudo bidimensional, ou seja, aproximando a função  $x(x, y)$ , a consistência de ordem 1 se verifica quando as seguintes condições são existentes:

$$\sum_{i=1}^n \phi_i(x) = 1 \quad (2.23)$$

$$\sum_{i=1}^n \phi_i(x) x_i = x \quad (2.24)$$

$$\sum_{i=1}^n \phi_i(x) y_i = y \quad (2.25)$$

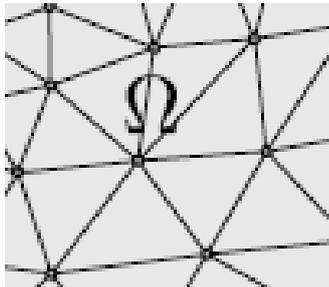
A consistência é medida, usualmente, pela ordem polinomial que as funções de forma podem representar. Por exemplo, se a aproximação pode reproduzir, exatamente, uma função constante, esta aproximação é dita de consistência zero, ou  $P^0$ . Analogamente, se a aproximação consegue reproduzir exatamente uma função linear, sua consistência é denotada por  $P^1$ . De modo geral, a consistência é dita  $P^k$  se a aproximação reproduzir exatamente um polinômio de ordem  $k$ . Denomina-se completude a característica de uma aproximação de consistência de ordem  $k$ ,  $P^k$ , para garantir, também, que a aproximação é (completamente) consistente para todas as ordens abaixo de  $k$ , i.e., de  $P^0$  até  $P^{k-1}$ . Para funções de forma polinomiais, completude implica na utilização de todos os termos polinomiais até a ordem desejada. Uma abordagem mais detalhada pode ser encontrada em Fries e Matthies (2004).

## 2.2 MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS MÓVEIS (MQM)

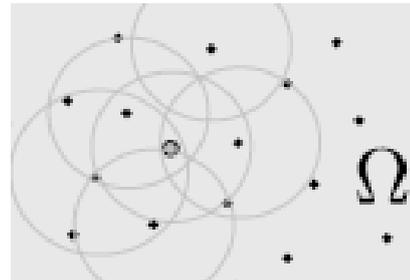
O método dos mínimos quadrados móveis foi desenvolvido por Lancaster e Salkauskas (1981), com uma modificação no método dos mínimos quadrados (RIVLIN, 1969) para a aproximação de pontos nodais em curvas. É uma técnica muito utilizada para a construção de funções de

forma em vários métodos sem malha. Nayroles *et al.* (1992) foram os primeiros a utilizar a técnica dos mínimos quadrados móveis no Difuse Element Method (DEM).

O MQM é um método que tem como característica principal o fato de não necessitar de uma malha para ser aplicável, pois a definição dos pontos que contribuem para a interpolação em um determinado ponto é função apenas da distância entre eles (MIERS, 2007). Visualiza-se o enunciado anterior através da Figura 2-4.



a) Por conectividade entre os elementos



b) Através da distância

Figura 2-4 – Interpolação em um ponto de interesse  $x_i$ : na letra a) por conectividade entre os elementos e na letra b) através da distância.

O método aproxima uma função variável  $u(x)$  por uma denominada de  $u^h(x)$ , pelo método dos mínimos quadrados móveis, da seguinte forma:

$$u^h(x) = \sum_j^m p_j(x) \cdot a_j(x) = P^T(x) \cdot a(x) \quad (2.26)$$

Onde  $m$ : número de termos monomiais;

$p$ : conjunto de funções base linearmente independentes e completas de  $m$  termos;

$a$ : vetor de coeficientes indeterminados a serem estimados.

O coeficiente  $a(x)$  também depende da posição  $x$ , sendo obtido em qualquer ponto  $x$  pela aproximação local do ajuste mínimo ponderado, realizado através da minimização da diferença entre a aproximação local e a função.

Desse modo, o erro residual quadrático é definido como:

$$J = \sum_{i=1}^n w(x-x_i) \cdot [e_i(x)]^2 \quad (2.27)$$

$$J = \sum_{i=1}^n w(x-x_i) \cdot [u^h(x) - u(x_i)]^2 \quad (2.28)$$

$$J = \sum_{i=1}^n w(x-x_i) \cdot [P^T \cdot a(x) - u_i]^2 \quad (2.29)$$

A equação acima também pode ser escrita da seguinte forma:

$$u^T = (u_1, u_2, u_3 \dots u_n) \quad (2.30)$$

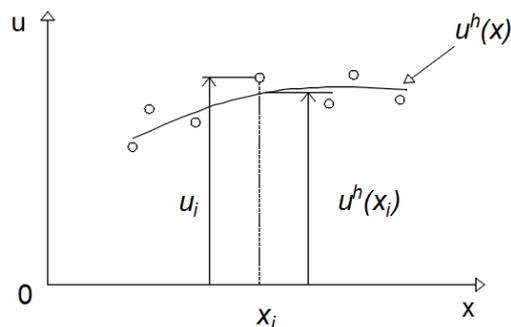
$$P = \begin{bmatrix} p_1(x_1) & p_2(x_1) & \dots & p_m(x_1) \\ p_1(x_2) & p_2(x_2) & \dots & p_m(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_1(x_n) & p_2(x_n) & \dots & p_m(x_n) \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

$$w(x) = \begin{bmatrix} w(x-x_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & w(x-x_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & w(x-x_n) \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

Onde  $n$  : número de nós circundantes ao ponto de interesse  $x$  ;

$w$  : função peso.

Relembra-se que a função peso é diferente de zero no interior do domínio  $\Omega_x$ . Na Figura 2-5 abaixo, representam-se os valores de uma função variável  $u$  sendo aproximada pela função  $u^h$  nos pontos de interesse  $i$ .





$$A(x)a(x) = B(x)U \quad (2.38)$$

Sendo a solução do sistema linear acima dado pela equação abaixo:

$$a(x) = A^{-1}B(x)U \quad (2.39)$$

Sendo as matrizes  $A(x)$  e  $B(x)$  determinadas de acordo com as seguintes expressões a seguir:

$$A(x) = \sum_{i=1}^n w(x-x_i)P(x_i)P^T(x_i) \quad (2.40)$$

$$B(x) = [w(x-x_1)P(x_1) + w(x-x_2)P(x_2) + w(x-x_3)P(x_3) \cdots w(x-x_n)P(x_n)] \quad (2.41)$$

A matriz  $A(x)$  é uma matriz quadrada de ordem  $m$ . Entretanto, a matriz  $B(x)$  é uma matriz que tem dimensão  $(m \cdot n)$ . Finalmente, se a Equação (2.40) for substituída na Equação (2.26) será determinada a aproximação da função variável buscada  $u^h(x)$ :

$$u^h(x) = \sum_j^m p_j(x)a_j(x) = P^T(x) \cdot a(x) = P^T(x) \cdot A^{-1}B(x)U \quad (2.42)$$

$$u^h(x) = P^T(x) \left[ \sum_{i=1}^n w(x-x_i) \cdot P(x_i)P^T(x_i) \right]^{-1} \sum_{i=1}^n w(x-x_i)P(x_i)u_i \quad (2.43)$$

Sendo disposto de uma forma simplificada, associando a função de forma  $\phi_i$  :

$$u^h(x) = \sum_{i=1}^n \phi_i(x)u_i = \Phi^T(x)u \quad (2.44)$$

Onde a função de forma  $\Phi^T(x)$  pode ser obtida através da Equação (2.42):

$$\Phi^T(x) = P^T(x) \cdot A^{-1}(x)B(x) \quad (2.45)$$

Ou

$$\phi_i(x) = \sum_{j=1}^m p_j(x) [A^{-1}(x)B(x)]_{ji} \quad (2.46)$$

$$\phi_i(x) = c^T(x)P(x_i)w_i(x) \quad (2.47)$$

$$c(x) = A^{-1}(x)P(x) \quad (2.48)$$

Onde  $\phi_i(x)$  é função da aproximação pelos MQM correspondentes ao nó  $x_i$ , esquematicamente representado na Figura 2-6-b. É importante notar que as funções de forma dos MQM não são interpolantes nodais, não apresentando, assim, a propriedade do delta de Kronecker, ou seja,  $\phi_i(x_j) \neq \delta_{ij}$ .

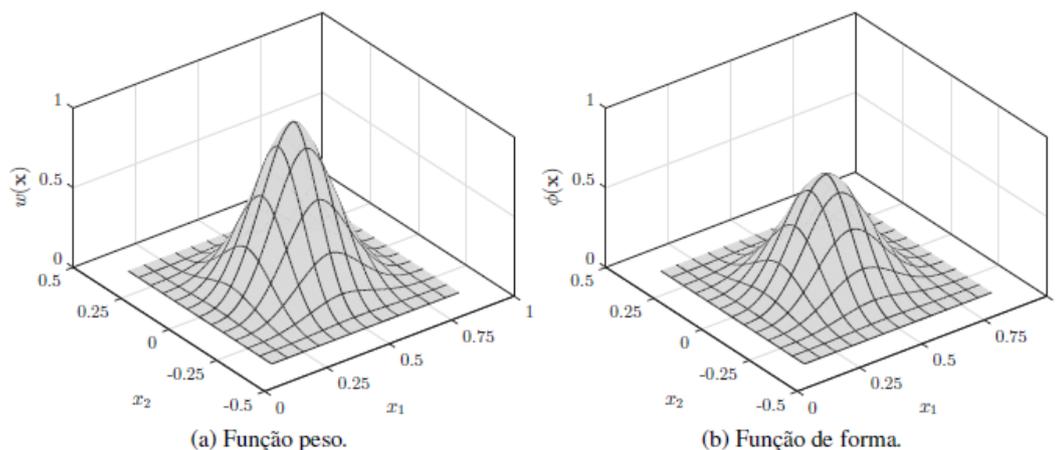


Figura 2-6 – Típica função peso e função de forma de uma aproximação pelos MQM para um

$$\text{nó } x = \left[ \frac{1}{2} \quad 0 \right]^T.$$

É necessário obter as derivadas da função de forma da Equação (2.45) a fim de se calcular os deslocamentos definidos na Equação (2.44). Para isso, pode-se adotar o procedimento de Belytschko *et al.* (1994), aplicando a regra do produto para o caso bidimensional:

$$\phi_{i,x} = P^T_{,x} \cdot A^{-1}B_i + P^T \cdot (A^{-1})_{,x}B_i + P^T \cdot A^{-1}B_{i,x} \quad (2.49)$$

$$\phi_{i,y} = P^T_{,y} \cdot A^{-1}B_i + P^T \cdot (A^{-1})_{,y}B_i + P^T \cdot A^{-1}B_{i,y} \quad (2.50)$$

Onde o índice subscrito corresponde à derivada;

Deve-se atentar para o fato de que os cálculos também envolvem a derivada da inversa da matriz  $A$  em relação aos eixos  $x$  e  $y$ , que pode ser calculada através da derivação implícita à identidade:

$$A \cdot A^{-1} = I \quad (2.51)$$

$$(A^{-1})_{,x} = -A^{-1} \cdot A_{,x} \cdot A^{-1} \quad (2.52)$$

$$(A^{-1})_{,y} = -A^{-1} \cdot A_{,y} \cdot A^{-1} \quad (2.53)$$

### 2.3 EQUAÇÕES DA ELASTODINÂMICA

As equações que regem um comportamento elastodinâmico, considerando um domínio  $\Omega$  de fronteira  $\Gamma$ , são as que se seguem:

$$\sigma_{ij,j} + b_i = m\ddot{u}_i + c\dot{u}_i \quad (2.54)$$

Onde  $m$  : densidade de massa;

$u_i$  : campo de deslocamento;

$\ddot{u}_i = \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}$  : aceleração;

$\dot{u}_i = \frac{\partial u_i}{\partial t}$  : velocidade;

$\sigma_{ij,j}$  : vetor de tensões;

$b_i$  : forças de corpo;

$c$  : coeficiente de amortecimento;

$j = \frac{\partial}{\partial x_j}$  : derivada da função em relação à direção  $j$ .

As condições iniciais são expostas a seguir:

$$u(x, t_0) = u_0(x), x \in \Omega \quad (2.55)$$

$$\dot{u}(x, t_0) = v_0(x), x \in \Omega \quad (2.56)$$

$$u_i = \bar{u}_i \quad \text{no } \Gamma_u \quad (2.57)$$

$$t_i \equiv \sigma_{ij} n_j = \bar{t}_i \quad \text{no } \Gamma_t \quad (2.58)$$

Onde  $u(x, t_0) = u_0(x)$  é o deslocamento inicial;

$\dot{u}(x, t_0) = v_0(x)$  é a velocidade inicial;

$t_i \equiv \sigma_{ij} n_j = \bar{t}_i$  são as trações;

$n_j$  é o vetor normal unitário ao domínio  $\Omega$ .

### 2.3.1 Análise de vibrações livres

A equação que governa as vibrações livres sem coeficiente de amortecimento é a seguinte:

$$\sigma_{ij,j} = m\ddot{u}_i \quad (2.59)$$

As condições de fronteiras iniciais, normalmente, são as mesmas que as definidas anteriormente, entretanto, a tração  $\bar{t} = 0$ . Na análise de vibrações livres,  $u(x, t)$  pode ser definido como:

$$u(x, t) = u(x) \text{sen}(\omega t + \varphi) \quad (2.60)$$

Onde  $\omega$  é a frequência.

Substituindo a Equação (2.60) na Equação (2.59), tem-se a seguinte equação:

$$\sigma_{ij,j} + \omega^2 m u_i = 0 \quad (2.61)$$

Constata-se que as tensões  $\sigma$  e os deslocamentos  $u$  são obtidos apenas em função das coordenadas de um ponto  $x$  qualquer.

A forma fraca local da equação acima, sob um local subdomínio  $\Omega_s$ , contornado por  $\Gamma_s$ , pode ser obtida usando o método dos resíduos ponderados, resultando na equação abaixo:

$$\int_{\Omega_s} w_i (\sigma_{ij,j} + \omega^2 m u_i) d\Omega = 0 \quad (2.62)$$

Onde  $w_i$  é a função peso.

Integrando-se por partes o primeiro termo do lado esquerdo da Equação (2.62), tem-se:

$$\int_{\Gamma_s} w_i \sigma_{ij,j} n_j d\Gamma - \int_{\Omega_s} (w_{i,j} \sigma_{ij,j} - w_i \omega^2 m u_i) d\Omega \quad (2.63)$$

O suporte do subdomínio  $\Omega_s$  de um nó  $x_i$  é um domínio em que  $w_i(x) \neq 0$ . Uma arbitrária forma do domínio de suporte pode ser utilizada (ATLURI *et al.*, 1999b). Como mencionado anteriormente no item 2.1.3, podem ser usadas normalmente para o domínio de suporte geometrias retangulares ou circulares. Na Figura 2-7, pode-se visualizar que o contorno  $\Gamma_s$  para um domínio de suporte  $\Omega_s$  é usualmente composto por três partes: o contorno interno  $\Gamma_{si}$ , o contorno  $\Gamma_{su}$  e  $\Gamma_{st}$ , em que as essenciais e naturais condições de contorno são especificadas (GU e LIU, 2001a).

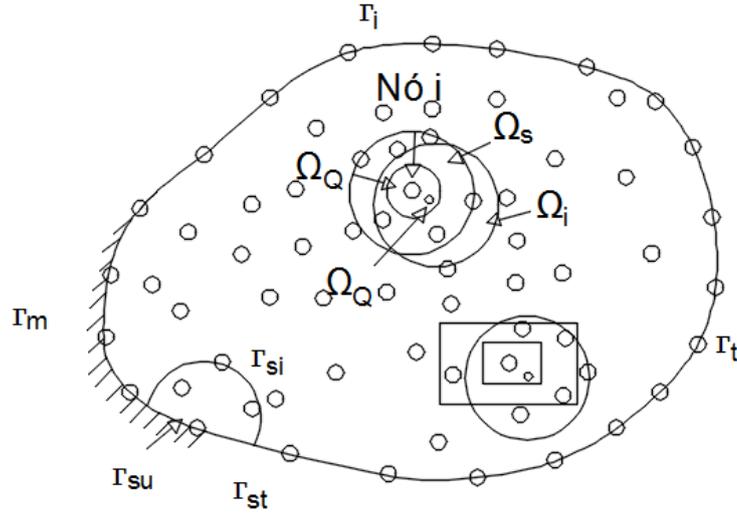


Figura 2-7 – Domínio de suporte  $\Omega_s$  e domínio de integração  $\Omega_Q$  para um nó  $i$ ; o domínio de interpolação  $\Omega_i$ , utilizando a integração de Gauss no ponto  $x_Q$  (adaptado de GU e LIU, 2001a).

Impondo as condições naturais de borda e lembrando que:

$$\sigma_{ij}n_j = \frac{\partial u}{\partial n} \equiv t_i \quad (2.64)$$

Tem-se que:

$$\int_{\Gamma_{st}} w_i t_i d\Gamma + \int_{\Gamma_{su}} w_i t_i d\Gamma + \int_{\Gamma_{st}} w_i \bar{t}_i d\Gamma - \int_{\Omega_s} (w_{i,j} \sigma_{ij,j} - w_i \omega^2 m u_i) d\Omega = 0 \quad (2.65)$$

Para um domínio de suporte localizado inteiramente dentro do domínio global, não existe interseção entre  $\Gamma_s$  e o contorno global  $\Gamma$ ,  $\Gamma_{si} = \Gamma_s$ , e as integrais sobre  $\Gamma_{su}$  e  $\Gamma_{st}$  desaparecem, visto que  $\bar{t} = 0$  sobre  $\Gamma_t$ . Então, as integrais sobre  $\Gamma_{st}$  desaparecem em todos os nós em análises de vibrações livres.

A Equação (2.65) acima, para qualquer nó  $x_i$ , em vez de lidar com um problema global na Equação (2.61), torna-se o problema localizado sobre o domínio de suporte local. O domínio do problema  $\Omega$  é devidamente representado por nós dispersos. O método dos mínimos quadrados móveis é usado para aproximar o valor de um ponto  $x_Q$ . Substituindo a Equação (2.44) na forma fraca local da última Equação (2.65), para todo o conjunto de nós, tem-se o seguinte sistema de equações:

$$Ku - \omega^2 Mu = 0 \quad (2.66)$$

Onde  $K$  : matriz de rigidez;

$M$  : matriz de massa;

Podendo ser definido como:

$$K_{ij} = \int_{\Omega_s} v_i^T DB_j d\Omega - \int_{\Gamma_{si}} w_i NDB_j d\Gamma - \int_{\Gamma_{su}} w_i NDB_j d\Gamma \quad (2.67)$$

$$M_{ij} = \int_{\Omega_s} mw_i \Phi_j d\Omega \quad (2.68)$$

Onde  $w_i$  são os valores da matriz da função peso;

$\Phi_j$  é a matriz da função de forma.

As outras variáveis da Equação (2.67),  $N, B_j, v_i$  e  $D$ , são definidas abaixo:

$$\begin{aligned} N &= \begin{bmatrix} n_x & 0 & n_y \\ 0 & n_y & n_x \end{bmatrix} \\ B &= \begin{bmatrix} \phi_{j,x} & 0 \\ 0 & \phi_{j,y} \\ \phi_{j,y} & \phi_{j,x} \end{bmatrix} \\ v_i &= \begin{bmatrix} w_{i,x} & 0 \\ 0 & w_{i,y} \\ w_{i,y} & w_{i,x} \end{bmatrix} \\ D &= \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.69)$$

Em análises de vibrações livres, a Equação (2.66) também pode ser escrita como segue:

$$(K - \omega^2 M)q = 0 \quad (2.70)$$

Onde  $q$  é o autovetor.

A Equação (2.70) acima é a formulação dos métodos MLPG e ILMF para análises de vibrações livres. Assim, para determinar as frequências  $\omega$  e os modos de vibração, é necessário resolver a equação linear de autovalores. Entretanto, as condições de contorno essenciais – Equação (2.57) – devem ser satisfeitas.

### 2.3.2 Análise de vibrações forçadas

A Equação (2.54) representa a formulação de vibrações forçadas. As condições de contorno iniciais são dadas pelas Equações (2.55) a (2.58). O método da interpolação direta é utilizado para impor as condições essenciais de contorno.

A forma fraca local da Equação diferencial (2.54), sobre o domínio  $\Omega_s$ , contornada por  $\Gamma_s$ , pode ser obtida através da aplicação do método dos resíduos ponderados localmente, através da seguinte equação:

$$\int_{\Omega_s} w_i (\sigma_{ij,j} + b_i - m\ddot{u}_i - c\dot{u}_i) d\Omega - \int_{\Gamma_u} w_i (u_i - \bar{u}_i) d\Gamma = 0 \quad (2.71)$$

O primeiro termo no lado esquerdo da Equação (2.71) pode ser integrado por partes, e, impondo as condições naturais de contorno (Equação (2.58)), obtém-se:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_s} (w_i m \ddot{u}_i + w_i c \dot{u}_i + w_{i,j} \sigma_{ij,j}) d\Omega - \int_{\Gamma_{st}} w_i t_i d\Gamma - \int_{\Gamma_{su}} w_i t_i d\Gamma + \int_{\Gamma_{su}} w_i u_i d\Gamma = \\ & \int_{\Gamma_{st}} w_i \bar{t}_i d\Gamma + \int_{\Gamma_{su}} w_i \bar{u}_i d\Gamma + \int_{\Gamma_{\Omega_s}} w_i b_i d\Omega \end{aligned} \quad (2.72)$$

Em análises de vibrações forçadas,  $u$  é a função de espaços coordenados e tempo. É discretizado apenas em relação às coordenadas, sendo a Equação (2.44) simplificada da seguinte forma:

$$u^h(x,t) = \sum_{i=1}^n \phi_i(x)u_i(t) \quad (2.73)$$

Substituindo a Equação (2.73) na forma local fraca (Equação (2.72)) para todos os nós que compõem o domínio, tem-se a seguinte equação discretizada:

$$M\ddot{u}(t) + C\dot{u}(t) + Ku(t) = f(t) \quad (2.74)$$

Onde  $M$ : matriz de massa obtida na Equação (2.68).

$K, C$  e  $F$  são definidos como segue:

$$K_{ij} = \int_{\Omega_s} v_i^T DB_j d\Omega - \int_{\Gamma_{si}} w_i NDB_j d\Gamma - \int_{\Gamma_{su}} w_i NDB_j d\Gamma + \int_{\Gamma_{su}} w_i \phi_j d\Gamma \quad (2.75)$$

$$C_{ij} = \int_{\Omega_s} c w_i \phi_j d\Omega \quad (2.76)$$

$$f_i(t) = \int_{\Gamma_{st}} w_i \bar{t}(t) d\Gamma + \int_{\Gamma_{su}} w_i \bar{u} d\Gamma + \int_{\Omega_s} w_i b(t) d\Omega \quad (2.77)$$

### 2.3.3 Integração no tempo

Os métodos utilizados na resolução da Equação (2.74) podem ser divididos, na maioria dos casos, em duas categorias: análise modal e análise direta. Neste trabalho, será utilizada a análise direta. Vários métodos de análise direta foram desenvolvidos para resolver a equação dinâmica, como por exemplo, o Método de Newmark (1959). Nos próximos itens, relatar-se-á o método relacionado.

#### 2.3.3.1 Método de Newmark (1959)

O Método de Newmark é uma generalização do método de aceleração linear. Esse método assume que a aceleração varia linearmente com o intervalo de tempo  $(t, t + \Delta t)$ , resultando em:

$$u_t = u_{t-\Delta t} + \Delta t \dot{u}_{t-\Delta t} + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \Delta t^2 \ddot{u}_{t-\Delta t} + \beta \Delta t^2 \ddot{u}_t \quad (2.78)$$

$$\dot{u}_t = \dot{u}_{t-\Delta t} + (1 - \delta) \Delta t \ddot{u}_{t-\Delta t} + \delta \Delta t \ddot{u}_t \quad (2.79)$$

A resposta no intervalo de tempo  $t + \Delta t$  é obtida através da avaliação da equação de movimento no tempo  $t + \Delta t$ . O Método de Newmark (1959) é, desta maneira, um método implícito.

O Método de Newmark (1959) é incondicionalmente estável, desde que se atenda à seguinte condição:

$$\delta \geq 0,5 \quad e \quad \beta \geq \frac{1}{4}(\delta + 0,5)^2 \quad (2.80)$$

Em cada etapa do tempo, reescreve-se a equação (2.74) no tempo  $(n + 1)\Delta t$  e substituem-se as equações (2.78) e (2.79) na equação (2.74), obtendo-se o seguinte campo de equações:

$$\hat{K}_{(n+1)\Delta t} u_{(n+1)\Delta t} = F_{(n+1)\Delta t} \quad (2.81)$$

$$\hat{K}_{(n+1)\Delta t} = K_{(n+1)\Delta t} + c_0 M_{(n+1)\Delta t} + c_1 C_{(n+1)\Delta t} \quad (2.82)$$

$$\hat{F}_{(n+1)\Delta t} = F_{(n+1)\Delta t} + M_{(n+1)\Delta t} (c_0 u_{n\Delta t} + c_2 \dot{u}_{n\Delta t} + c_3 \ddot{u}_{n\Delta t}) + C_{(n+1)\Delta t} (c_1 u_{n\Delta t} + c_4 \dot{u}_{n\Delta t} + c_5 \ddot{u}_{n\Delta t}) \quad (2.83)$$

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{\beta(\Delta t)^2}, & c_1 &= \frac{\delta}{\beta\Delta t}, & c_2 &= \frac{1}{\beta\Delta t}, \\ c_3 &= \frac{1}{2\beta} - 1, & c_4 &= \frac{\delta}{\beta} - 1 \quad e \quad c_5 &= \frac{\Delta t}{2} \left( \frac{\delta}{\beta} - 2 \right) \end{aligned} \quad (2.84)$$

## 2.4 FATOR DE INTENSIDADE DE TENSÕES DINÂMICO

O fator de intensidade de tensões estático ou dinâmico quantifica a grandeza do estado de tensões nas proximidades da trinca em elementos lineares, isotrópicos e homogêneos, sendo um parâmetro essencial no estudo da Mecânica da Fratura Linear Elástica.

Maldaner (1993) menciona que um limite para o fator de intensidade de tensões é definido quando atinge a ocorrência de propagação da trinca, denominando-se esta fronteira de fator crítico ( $k_c$ ).

Segundo Song e Paulino (2005) a determinação realística do fator de intensidade de tensões é crucial na mecânica da fratura para casos estáticos ou dinâmicos, em virtude de serem usados na análise de problemas de iniciação e propagação de trincas.

Zhou *et al.* (2016) relata que existe uma preocupação crescente na avaliação do comportamento de materiais fissurados sob carregamento de impulso e que para apreciar com precisão a mecânica da fratura sob o carregamento dinâmico, pesquisadores propuseram parâmetros da fratura, como o fator de intensidade de tensão dinâmico (DSIF) e a taxa de liberação de energia de deformação (SERR).

Em decorrência da necessidade de identificar a influência dinâmica na Mecânica da Fratura, especialmente na determinação do Fator de Intensidade de Tensão Dinâmico (DSIF), surgiram metodologias diferentes, desde a aplicação de métodos analíticos e numéricos, com os Métodos de Elementos Finitos, Diferenças Finitas, Métodos de Elementos de Contorno, Métodos Mistos e entre outros que utilizam técnicas variadas na integração do tempo, implementação das condições de contorno e integração da função aproximadora como relatados no subitem 1.1 deste trabalho.

Além dos trabalhos já mencionados, na determinação dos DSIF's, em ordem cronológica, na Tabela 2-3, importantes trabalhos publicados na área:

Tabela 2-3 – Principais publicações em ordem cronológica

Ano de publicação	Autor(es)	Método numérico	Método de obtenção do fator de intensidade de tensão dinâmico (DSIF)
1975	Chen	FDM	Código de Diferenças Finitas Langrangiana dependente do tempo, denominado HEMP
1978	Aoki <i>et al.</i>	FEM	Inclusão de um elemento singular no campo de deslocamento nas proximidades da trinca
1980	Kishimoto <i>et al.</i>	FEM	Integral-J modificada
1983	Brickstad	FEM	Deslocamento de abertura da ponta da trinca
1986	Murti e Valliappan	FEM	"Quarter Point element (QPEs)" calcula-se o deslocamento nas proximidades da trinca
1990	Kishimoto <i>et al.</i>	FEM	Integral-J modificada

1990	Lee e Freund	FEM	Superposição linear de soluções de propagação de ondas de tensão utilizando o Método da Fundamental solução do deslocamento em movimento
1992	Dominguez e Gallego	BEM	"Quarter Point element (QPEs)"
1993	Lin e Ballmann	FDM	Campos de tensão nas vizinhas da ponta da trinca
1994	Fedelinski <i>et al.</i>	DBEM	Integral-J
1995	Belytschko <i>et al.</i>	EFG	Integral-J
1999	Sladek <i>et al.</i>	BEM	Integral-J
1999	Krysl e Belytschko	EFG	Integral-M
2002	Zhang	BEM	Tração hipersingular no domínio do tempo combinada com a técnica de deslocamento de abertura da ponta da trinca.
2002	Wu <i>et al.</i>	EFG	Integral-J
2003	Tabiei e Wu (2003)	FEM	Deslocamento da superfície da trinca
2005	Song e Paulino	FEM	Integral-J; Integral-M e Método da extrapolação de deslocamentos.
2006	Castellanos <i>et al.</i>	FEM	Deslocamento de abertura da ponta da trinca
2009	Menouillard <i>et al.</i>	XFEM (Extended Finite Element Method)	Integral de domínio independente e campo extensão virtual da trinca
2009	Wen e Aliabadi	EFG	Deslocamento de abertura da ponta da trinca.
2011	Fan <i>et al.</i>	F2FFEM (Fractal Two-Level Finite Element Method)	Campo de deslocamento nas proximidades da trinca
2012	Muthu <i>et al.</i>	XEFG (Extended Element-Free Galerkin Method)	Integral de fechamento de trinca (CCI) combinada com uma técnica de suavização da singularidade de enriquecimento local
2013	Petri	XFEM (Extended Finite Element Method)	Integral-J

2014	Abdollahifar e Nami	FEM	Integral-J modificada e enriquecida de funções de base na ponta da trinca
2015	Gonzalez <i>et al.</i>	DBEM	Integral-J
2016	Zhou <i>et al.</i>	FEM	Técnica de Fechamento Virtual de Elementos de Trincas (VCCT)
2019	Fedelinski	BEM	Deslocamento de abertura da ponta da trinca.
2021	Turis <i>et al.</i>	Técnica Baseada em Difração	Método de extrapolação dos deslocamentos

### 3. MODELAGEM ESTRUTURAL

#### 3.1 CAMPO ELÁSTICO

Apresenta-se a aproximação do campo de deslocamentos nas proximidades de  $x$ , em função da Equação (2.22), pelo método dos mínimos quadrados móveis nas equações abaixo:

$$\mathbf{u}(x) = \begin{bmatrix} u^h(x) \\ v^h(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1(x) & 0 & \cdots & \phi_n(x) & 0 \\ 0 & \phi_1(x) & \cdots & 0 & \phi_n(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{v}_1 \\ \vdots \\ \hat{u}_n \\ \hat{v}_n \end{bmatrix} = \Phi(x) \hat{\mathbf{u}} \quad (3.1)$$

Sendo as deformações específicas:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L}\mathbf{u} = \mathbf{L}\Phi(\mathbf{X})\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{B}\hat{\mathbf{u}} \quad (3.2)$$

E sobre a linearidade do operador diferencial  $L$ , tem-se que:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \phi_{1,1} & 0 & \cdots & \phi_{n,1} & 0 \\ 0 & \phi_{1,2} & \cdots & 0 & \phi_{n,2} \\ \phi_{1,2} & \phi_{1,1} & \cdots & \phi_{n,2} & \phi_{n,1} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

E as tensões pela Lei de Hooke generalizada:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}\mathbf{B}\hat{\mathbf{u}} \quad (3.4)$$

E as componentes das forças de superfície:

$$\mathbf{t} = \mathbf{n}\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{n}\mathbf{D}\mathbf{B}\hat{\mathbf{u}} \quad (3.5)$$

Onde  $\mathbf{n}$  é a matriz das componentes do vetor normal unitário, estabelecida abaixo:

$$n = \begin{bmatrix} n_1 & 0 & n_2 \\ 0 & n_2 & n_1 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Para o estado plano de tensão, tem-se que:

$$D = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

E para o estado plano de deformação, tem-se que:

$$D = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Conclui-se que as variáveis do campo elástico, em qualquer ponto  $x$ , são obtidas através das incógnitas nodais  $\hat{u}$ .

### 3.2 TEOREMA DO TRABALHO

Seja um domínio bidimensional  $\Omega$  contornado por  $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_t$ , em que as tensões estaticamente admissíveis satisfaçam a seguinte condição de equilíbrio:

$$L^T \sigma + b = 0 \quad (3.9)$$

Válida em um domínio  $\Omega$ , com a fronteira natural  $\Gamma_t$ , podendo ser visualizada na Figura 3-1:

$$t = n\sigma = \bar{t} \quad (3.10)$$

Onde  $\sigma$ : vetor que representa as componentes de tensão;

$L$ : operador de derivadas matriciais;

$t$ : componente das forças superficiais;

$\bar{t}$  : componente das forças superficiais prescritas;

$n$  : vetor unitário normal ao contorno  $\Gamma$ .

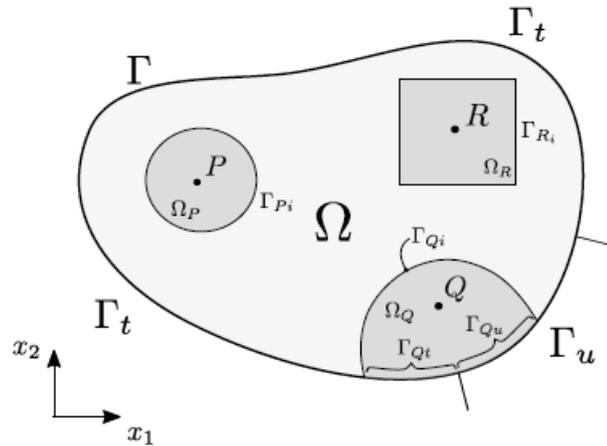


Figura 3-1 – Representação do domínio global  $\Omega$ , suas fronteiras natural  $\Gamma_t$  e essencial  $\Gamma_u$  e os subdomínios  $\Omega_Q$  associados ao nó  $Q$ , com contorno interno  $\Gamma_Q = \Gamma_{Qi} \cup \Gamma_{Qt} \cup \Gamma_{Qu}$ . Nós

$P$  e  $R$ , de forma similar, possuem domínios locais correspondentes a  $\Omega_P$  e  $\Omega_R$ .

O teorema do trabalho, apresentado por Oliveira e Portela (2016), estabelece uma relação energética, em um domínio local arbitrário  $\Omega_Q \in \Omega$ , entre dois campos elásticos independentes que podem ser definidos no corpo, um campo de tensão estaticamente admissível  $\sigma$  que satisfaz o equilíbrio com um sistema de forças externas e um campo de deformação cinematicamente admissível  $\varepsilon^*$  que satisfaz a compatibilidade com um conjunto de deslocamentos restritos. Expresso como uma forma integral, definida no domínio  $\Omega_Q \cup \Gamma_Q$ , o teorema do trabalho pode ser escrito de forma compacta, simplesmente como:

$$\int_{\Gamma_Q} t^T u^* d\Gamma + \int_{\Omega_Q} b^T u^* d\Omega = \int_{\Omega_Q} \sigma^T \varepsilon^* d\Omega \quad (3.11)$$

Neste caso, não se tem nenhuma relação constitutiva que vincule a tensão  $\sigma$  e a deformação  $\varepsilon^*$ , portanto, eles não dependem um do outro, como apresentado esquematicamente na Figura 3.2.

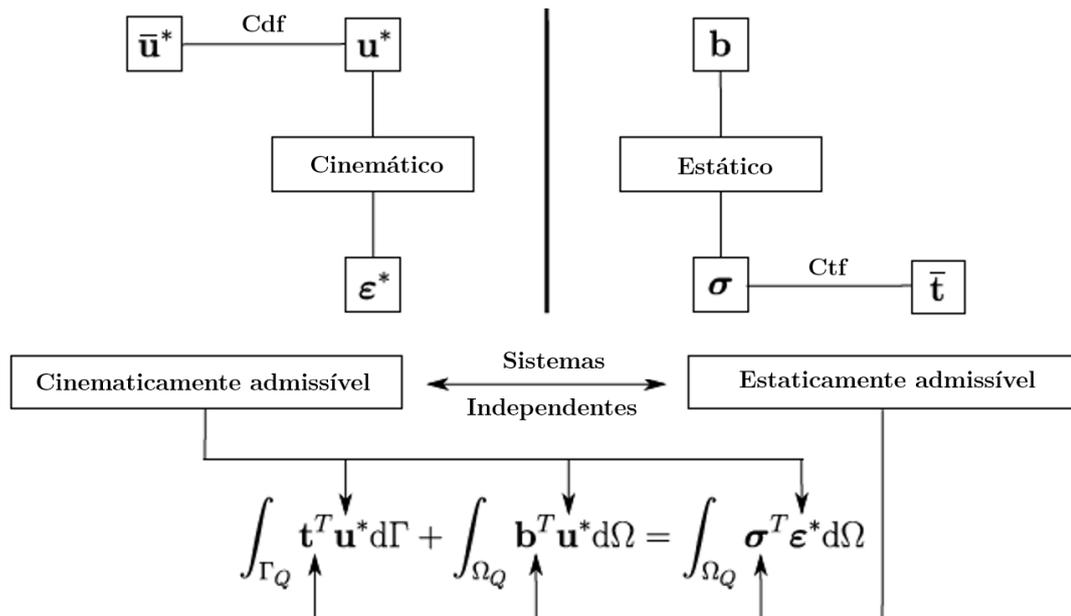


Figura 3-2 – Representação esquemática do teorema do trabalho, uma relação de energia, válida em um domínio local arbitrário  $\Omega_Q \in \Omega \cup \Gamma$ , com contorno  $\Gamma_Q$ . Cdf e Ctf significam Condição de deslocamento e Condição de tração na fronteira, respectivamente.

O campo de tensão estaticamente admissível  $\sigma$  pode ser qualquer um que esteja em equilíbrio com o sistema de forças externas, satisfazendo as equações (3.9) e (3.10); o campo de deformação cinematicamente admissível  $\varepsilon^*$  (pode ser qualquer um), gerado por deslocamentos contínuos  $\mathbf{u}^*$  com pequenas derivadas, compatíveis com um conjunto arbitrário de restrições especificadas no contorno cinemático; não é necessariamente a tensão estabelecida no corpo.

Finalmente, o domínio local  $\Omega_Q \cup \Gamma_Q$  é um subdomínio arbitrário do corpo, associado ao ponto de referência Q, conforme representado na Figura 3.1, onde os campos  $\sigma$  e  $\varepsilon^*$  independente são definidos.

### 3.3 FORMULAÇÃO CINEMÁTICA

Para usar o teorema do trabalho como ponto de partida na formulação de métodos numéricos, é necessário especificar um dos dois campos independentes que podem ser definidos no corpo, de acordo com alguma conveniência particular da formulação do método numérico.

As formulações cinemáticas consideram uma especificação particular do campo de deformação  $\varepsilon^*$ , levando, assim, a uma equação de equilíbrio mecânico usada em modelos numéricos, para

gerar a respectiva matriz de rigidez. Um caso simples de uma formulação cinemática, baseada em um campo de deformação gerado por um deslocamento de corpo rígido.

### 3.3.1 Formulação de deslocamento de corpo rígido

Tendo em mente a característica principal do teorema do trabalho, que é a total independência dos campos admissíveis,  $\sigma$  e  $\varepsilon^*$ , o campo de deformação é definido para simplificar a formulação. Portanto, a escolha mais simples e óbvia é usar um campo de deformação gerado por um deslocamento de corpo rígido que pode ser definido como:

$$u^*(X) = c \quad (3.12)$$

Onde  $c$  é um vetor constante que gera convenientemente deformações nulas:

$$\varepsilon^*(X) = 0 \quad (3.13)$$

A grande virtude dessa formulação é a simplicidade usada na geração do campo de deformação.

### 3.3.2 Equilíbrio mecânico

Quando a formulação de deslocamento do corpo rígido é considerada, o teorema do trabalho – Equação (3.11) – simplesmente leva à equação:

$$\int_{\Gamma_Q - \Gamma_{Q'}} t d\Gamma + \int_{\Gamma_{Q'}} \bar{t} d\Gamma + \int_{\Omega_Q} b d\Omega = 0 \quad (3.14)$$

Esta é uma integral de forma de equilíbrio mecânico, de trações e forças do corpo, no domínio  $\Omega_Q$ . Obviamente, esta equação expressa a versão local do princípio de tensão de Euler-Cauchy.

A formulação de métodos numéricos pode ser baseada no teorema do trabalho, com uma formulação cinemática adequada e conveniente, a fim de derivar as equações de equilíbrio usadas para gerar a matriz de rigidez, de massa e de amortecimento de cada modelo numérico. Essa estratégia de modelagem é adotada para resolver o problema elástico.

### 3.3.3 Definição do campo de tensão

O campo de tensão  $\sigma$ , necessário para satisfazer o equilíbrio com um sistema de forças externas, é assumido como o estado de tensões que realmente se instala no corpo, carregado pelo sistema real de forças de superfície e corpo distribuídas, com as restrições de deslocamento reais. Essa suposição de chave é representada esquematicamente na Figura 3.3.

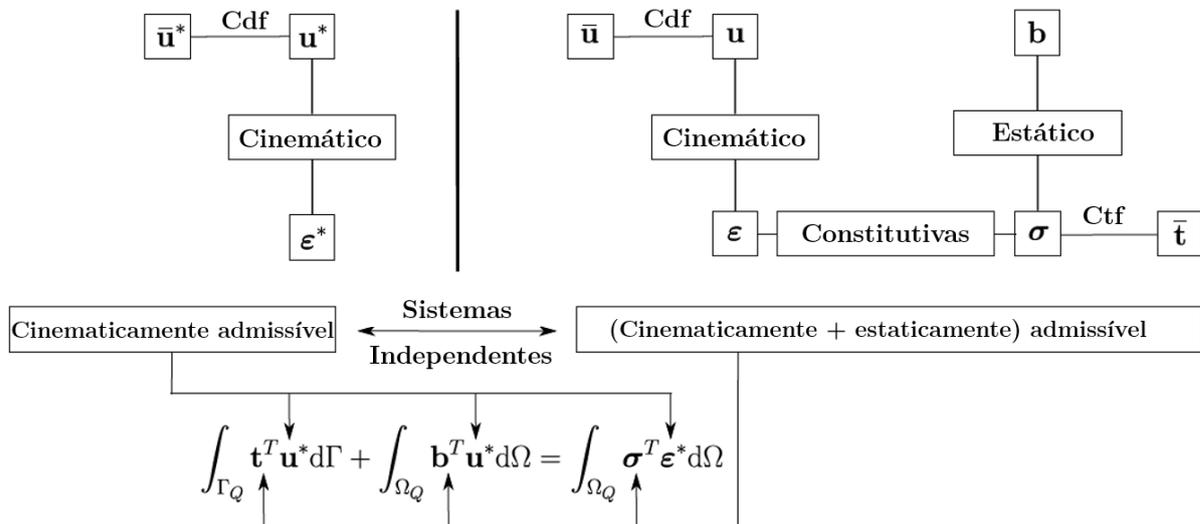


Figura 3-3 – Estratégia de modelagem de modelos cinemáticos do teorema do trabalho.

Depois de escolher o campo de deformação cinematicamente admissível, a estratégia considera que o campo de tensão estaticamente admissível é sempre assumido como o campo de tensão do único campo elástico que realmente se instala no corpo e satisfaz a admissibilidade total.

Lembrando que o campo elástico que se instala no corpo é o único campo elástico totalmente admissível que satisfaz o problema especificado. Portanto, além de satisfazer o equilíbrio, pelas Equações (3.9) e (3.10) ou pela Equação (3.14), gerado pelo teorema do trabalho, esse campo único e totalmente admissível também deve satisfazer a compatibilidade, definida como:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L}\mathbf{u} \quad (3.15)$$

Válida no domínio  $\Omega$ , presumindo a seguinte condição de contorno:

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad (3.16)$$

No caso de  $\Gamma_u$ , em que deslocamentos contínuos são assumidos com pequenas derivadas, leva-se à linearidade geométrica do campo de deformação. Portanto, a Equação (3.16), que especifica as restrições dos deslocamentos reais, deve ser aplicada em qualquer modelo numérico, a fim de permitir uma solução única do problema.

#### 4. MÉTODOS SEM MALHA LOCAIS

A característica essencial dos métodos sem malha é que eles executam a discretização do problema apenas com um conjunto de nós dispersos, sem usar nenhuma malha para a aproximação das variáveis. O método local sem malha, apresentado neste trabalho, baseia-se na aproximação amplamente usada dos mínimos quadrados móveis (MQM).

Cada nó da discretização sem malha está associado ao seu domínio local, conforme esquematicamente representado na Figura (4.1). Em geral, esse domínio local é uma região circular ou retangular, centralizada no respectivo nó, onde a formulação de deslocamento do corpo rígido do teorema do trabalho é definida como uma forma local, de equilíbrio mecânico.

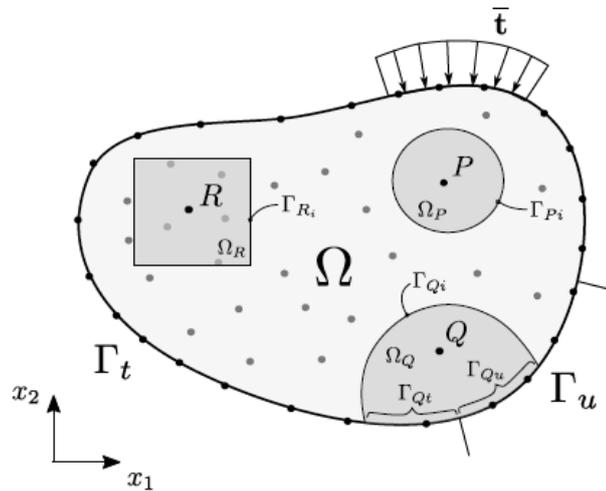


Figura 4-1 – Discretização do método sem malha no domínio  $\Omega$  e contorno  $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_t$ ; nós de referência P, Q e R têm domínios locais associados  $\Omega_P, \Omega_Q$  e  $\Omega_R$ .

O caráter local da aproximação do MQM é uma consequência do suporte compacto de cada nó, onde as respectivas funções de forma do MQM são definidas. Suportes compactos locais circulares ou retangulares, centralizados em cada nó, podem ser usados. O tamanho do suporte compacto, por sua vez, estabelece, em uma vizinhança de um ponto de amostragem, o respectivo domínio de definição da aproximação MQM nesse ponto, conforme esquematicamente representado na Figura 4.2. O domínio de definição contém todos os nós, cujas funções de forma do MQM não desaparecem nesse ponto de amostragem.

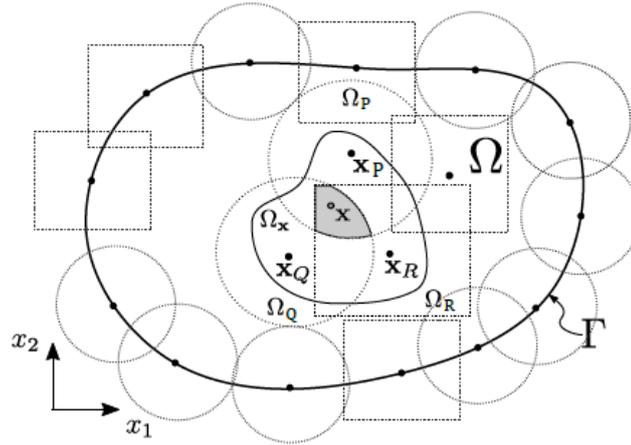


Figura 4-2 – Representação esquemática de uma discretização do método sem malha no domínio global  $\Omega$  e do contorno  $\Gamma$ , com uma distribuição de nós.  $\Omega_p, \Omega_Q$  e  $\Omega_R$  representam os suportes compactos locais dos nós correspondentes  $x_p, x_Q$  e  $x_R$ ,  $\Omega_x$  é o domínio de definição da aproximação MQM do ponto  $x$ , neste caso  $x_p, x_Q$  e  $x_R$ , cujo suporte compacto contém esse ponto de amostragem.

Todos os nós, cujas funções de forma do MQM não desaparecem nesse ponto de amostragem, estão contidos no domínio da definição. Portanto, a união dos domínios do MQM de definição de todos os pontos no domínio local de cada nó define o domínio de influência do nó. Com base no domínio de influência de cada nó, as formulações locais livres de malha usam um cálculo de rigidez nó a nó para gerar as respectivas linhas da matriz de rigidez global do nó.

#### 4.1 MESH-FREE LOCAL PETROV-GALERKIN – MLPG

Para uma discretização nodal de um corpo, usando o método sem malha local, calcula-se o respectivo sistema de equações algébricas, em um processo nó por nó, através da integração da forma local atribuída a cada nó, Equação (3.14), com domínios locais retangulares ou circulares e quadratura numérica aplicada em cada lado, ou quadrante, do domínio local, conforme esquematicamente representado na Figura 4.3.

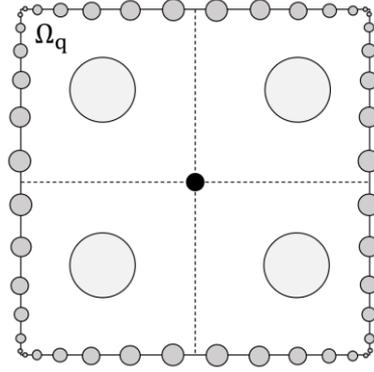


Figura 4-3 – Representação esquemática de pontos de quadratura numérica, de domínios locais do MLPG, para o cálculo da forma local do teorema do trabalho, com a formulação de deslocamento do corpo rígido.

A discretização da forma local da Equação (3.14) é realizada com a aproximação MQM, das Equações (3.1) a (3.5), em termos dos parâmetros nodais desconhecidos  $\hat{u}$ , levando assim ao sistema de três equações lineares:

$$-\int_{\Gamma_Q-\Gamma_{Q_e}} t d\Gamma = \int_{\Gamma_{Q_e}} \bar{t} d\Gamma + \int_{\Omega_Q} b d\Omega = \quad (4.1)$$

Que pode ser escrita como:

$$K_Q \hat{u} = F_Q \quad (4.2)$$

Em que  $K_Q$ , a matriz de rigidez nodal associada ao nó do campo  $Q$ , é uma matriz de  $2 \times 2n$  (sendo  $n$  o número de nós incluídos no domínio de influência da referência nó  $Q$ , que é a união dos domínios do MQM de definição de todos os pontos de integração no domínio local  $\Omega_Q$ , dado por:

$$K_Q = - \int_{\Gamma_Q-\Gamma_{Q_e}} n D B d\Gamma \quad (4.3)$$

E  $F_Q$  é o vetor de força associado ao nó do campo  $Q$ , fornecido por:

$$F_Q = \int_{\Gamma_Q} \bar{t} d\Gamma + \int_{\Omega_Q} b d\Omega \quad (4.4)$$

Considerando que o problema possui um total de  $N$  campos nodais  $Q$ , cada um associado ao domínio local respectivo  $\Omega_Q$ . A montagem de Equações (4.2) para todos os nós do campo interior e estático de limite de  $M$  leva ao sistema global de equações de  $2M \times 2N$ :

$$K\hat{u} = F \quad (4.5)$$

Finalmente, as equações restantes são obtidas a partir dos nós do contorno  $N - M$  no contorno cinemático. Para um campo nodal no contorno cinemático, um método de interpolação direta, apresentado pela primeira vez por Liu e Yan (2000), é usado para impor a condição de contorno:

$$u_k^h(x_j) = \sum_{i=1}^n \phi_i(x_j) \hat{u}_{ik} = \bar{u}_k, \quad (4.6)$$

Ou, na forma matricial:

$$u_k = \sum_{i=1}^n \Phi_k \hat{u} = \bar{u}_k, \quad (4.7)$$

com  $k = 1, 2$ , em que  $\bar{u}_k$  é o componente de deslocamento nodal especificado. As Equações (4.7) são montadas diretamente no sistema global de Equações (4.5).

É muito importante notar que a integração do contorno realizada apenas nos limites do domínio local, na Equação (4.1), para construir a respectiva matriz de rigidez nodal do MLPG, é computacionalmente muito mais eficiente do que os outros métodos sem malha que usam

integração de domínio, como é o caso do método EFG, apresentado por Belytschko *et al.* (1994), ou dos métodos MLPG1 e MLPG3, apresentados por Atluri e Shen (2002b).

#### 4.2 INTEGRATED LOCAL MESH FREE METHOD – ILMF

Para uma variação linear de trações, ao longo de cada segmento do contorno do domínio local, a forma local de equilíbrio (Equação (4.1)) pode ser avaliada exatamente com 1 ponto de quadratura, centralizado em cada segmento (Figura 4-4), levando assim a:

$$-\frac{L_i}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} t_{xj} = \frac{L_i}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} \bar{t}_{xk} + \int_{\Omega_Q} bd\Omega \quad (4.8)$$

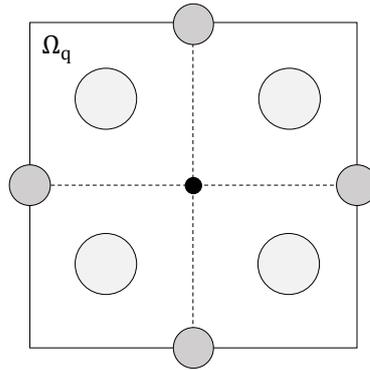


Figura 4-4 – Representação esquemática de pontos de quadratura numérica, de domínios locais do ILMF, para o cálculo da forma local do teorema do trabalho, com a formulação de deslocamento do corpo rígido.

Para uma determinada distribuição nodal, a Equação (4.8) pode ser apresentada da seguinte forma:

$$-\frac{L_i}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} n_{xj} DB_{xj} \hat{\mathbf{u}} = \frac{L_i}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} \bar{t}_{xk} + \int_{\Omega_Q} bd\Omega \quad (4.9)$$

Tal equação também pode ser escrita como:

$$\mathbf{K}_Q \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{F}_Q \quad (4.10)$$

Em que  $\mathbf{K}_Q$ , a matriz de rigidez nodal associada ao nó do campo  $Q$ , é uma matriz de  $2 \times 2n$  (sendo  $n$  o número de nós incluídos no domínio de influência da referência nó  $Q$ , que é a união dos domínios do MQM de definição de todos os pontos de integração no domínio local  $\Omega_Q$ ), dada por:

$$\mathbf{K}_Q = -\frac{L_i}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} n_{x_j} DB_{x_j} \quad (4.11)$$

e  $\mathbf{F}_Q$  é o vetor de força associado ao nó do campo  $Q$ , fornecido por:

$$\mathbf{F}_Q = \frac{L_i}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} \bar{t}_{x_k} + \int_{\Omega_Q} b d\Omega \quad (4.12)$$

Considera-se que o problema possui um total de  $N$  campos nodais  $Q$ , cada um associado ao domínio local respectivo  $\Omega_Q$ . A montagem de Equações (4.2) para todos os nós do campo interior e estático de limite de  $M$  leva ao sistema global de equações de  $2M \times 2N$ :

$$\mathbf{K} \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{F} \quad (4.13)$$

Finalmente, as equações restantes são obtidas a partir dos nós do contorno  $N-M$  no contorno cinemático. Para um campo nodal no contorno cinemático, um método de interpolação direta, é usado para impor a condição de contorno cinemática como:

$$u_k^h(x_j) = \sum_{i=1}^n \phi_i(x_j) \hat{u}_{ik} = \bar{u}_k \quad (4.14)$$

Ou, na forma matricial:

$$u_k = \sum_{i=1}^n \Phi_k \hat{u} = \bar{u}_k \quad (4.15)$$

com  $k=1,2$ , em que  $\bar{u}_k$  é o componente de deslocamento nodal especificado. As Equações (4.15) são montadas diretamente no sistema global de Equações (4.5).

### 4.3 PARÂMETROS DE DISCRETIZAÇÃO

Para cada nó de uma discretização, utilizando o método sem malha, o tamanho  $r_{\Omega_s}$  do suporte compacto  $\Omega_s$ , onde as funções de forma MQM estão definidas, e o tamanho  $r_{\Omega_q}$  do domínio de colocação  $\Omega_q$ , onde o teorema do trabalho é definido, são parâmetros muito importantes que afetam de forma significativa o comportamento dos métodos sem malha locais. Para um nó genérico  $i$  de uma discretização sem malha, ambos os parâmetros podem ser definidos como:

$$r_{\Omega_s} = \alpha_s c_i \quad (4.16)$$

e

$$r_{\Omega_q} = \alpha_q c_i \quad (4.17)$$

em que  $c_i$  representa a distância do nó  $i$  até o nó mais próximo em sua vizinhança, enquanto  $\alpha_s$  e  $\alpha_q$  são os parâmetros adimensionais constantes que precisam ser definidos para qualquer aplicação do método.

Para garantir uma alta precisão na modelagem, utilizando métodos sem malha locais, os parâmetros de discretização adimensionais  $\alpha_s$  e  $\alpha_q$ , definidos nas Equações (4.16) e (4.17), precisam ser propriamente refinados, para que valores apropriados de  $r_{\Omega_s}$  e  $r_{\Omega_q}$  sejam obtidos.

Em geral, esses valores adimensionais são definidos arbitrariamente e, normalmente,  $\alpha_s > 1,0$  e  $\alpha_q < 1,0$  são considerados. De certa forma, para valores muito pequenos de  $r_{\Omega_s}$ , o algoritmo de aproximação por MQM pode ser singular, impossibilitando a construção de funções de forma por falta de nós em  $\Omega_s$  para interpolação. Por outro lado, o domínio de colocação local  $\Omega_q$  pode intersectar outros domínios de colocação, embora o tamanho de  $r_{\Omega_q}$  deva garantir o domínio da solução, sem intersectar o contorno do problema.

Os parâmetros de discretização desempenham papéis diferentes nos métodos sem malha locais, que podem ser definidos como:

- O suporte compacto de cada nó determina diretamente o tamanho do domínio de influência de seu respectivo nó. O domínio de influência é completamente definido pelo número total de nós usado para construir as funções de forma daquele nó, para assim realizar a aproximação das variáveis de campo. Por essa razão, o parâmetro  $\alpha_s$  é primeiramente ligado à precisão da modelagem.
- O tamanho do domínio de colocação local de cada nó, onde a forma local do teorema do trabalho está definida, é usado para construir a matriz de rigidez daquele nó e, dessa forma, deve estar inteiramente no interior do domínio, sem intersectar o contorno do corpo. A eficiência da modelagem é dependente do parâmetro  $\alpha_q$ .

#### 4.1 MÉTODO DA VISIBILIDADE

Uma das maneiras de discretizar as descontinuidades em métodos sem malha é através da aplicação do Método da Visibilidade, proposto por Belytschko *et al.* (1996). De uma maneira fácil, o método considera que o contorno do corpo e as linhas internas de descontinuidades são opacos, de forma que as trincas funcionam como um impedimento à montagem do domínio de influência de um nó, ou seja, o ponto que intercepta o contorno da descontinuidade não é considerado no domínio de influência.

Percebe-se na Figura 4-5 abaixo que, na montagem do domínio de influência dos nós  $i$  e  $j$  vizinhos à trinca, haverá uma descontinuidade na função peso e na função de forma, em virtude do domínio de influência ser interrompido por uma linha de descontinuidade.

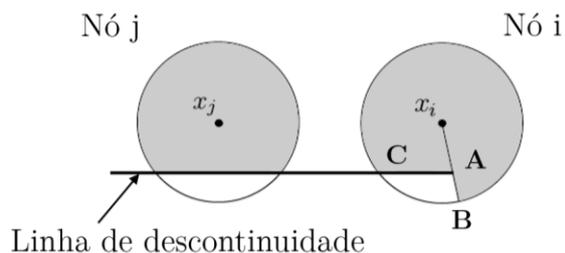


Figura 4-5 – Domínios de influência de nós adjacentes a uma trinca; a região indicada é removida do domínio de influência (BELYTSCHKO *et al.*, 1996).

Há uma desvantagem no método em função da interrupção da solução aproximada no interior do domínio sem interseção com a linha de descontinuidade da trinca. Verifica-se que, na reta que liga os pontos A e B, todos os pontos hachurados delimitados pela reta possuem a função de peso nula, contudo, apenas o ponto B alude um valor nulo para a função peso. Tal descontinuidade é provocada pela descontinuidade da função de forma e acarreta uma descontinuidade no domínio.

Na literatura técnica, cita-se o trabalho de Belytschko *et al.* (1996) como forma de analisar essas descontinuidades através dos critérios da difração e da transparência.

## 5. MECÂNICA DA FRATURA LINEAR ELÁSTICA

A mecânica da fratura linear elástica trata do comportamento de um elemento estrutural à fratura de seus componentes sob cargas normais atuantes. Em geral, o elemento é estudado sob as condições normais de tensão, sem considerar os defeitos e as falhas que ocorrem durante a fabricação, montagem das peças, geometria operacional ou em caso de avaria. Tais defeitos são inevitáveis nas estruturas. Por mais controlada que seja a fabricação dos componentes, defeitos aparecem de formas variadas, adicionalmente àqueles inerentes ao próprio material (MEDINA, 2014).

No estudo clássico das tensões atuantes em uma peça, normalmente, não se consideram as tensões atuantes nas transições de geometria da peça. Em tais pontos particulares, como rasgos, furos e outros com variação brusca da geometria da seção, verifica-se a concentração de tensões nesses locais em virtude da redução da área de seção, podendo ocorrer a ruptura da peça decorrente do acréscimo de tensões.

Tais especificidades podem provocar a ruptura da peça em virtude do acréscimo de tensões que acontece nas singularidades do material.

### 5.1 FATOR DE CONCENTRAÇÃO DE TENSÕES

O fator de concentração de tensões  $k_t$  é definido pela razão entre o valor máximo da tensão em uma seção entalhada  $\sigma_{m\acute{a}x}$  e o máximo valor da tensão nominal que atua na seção sem nenhum defeito.

$$k_t = \frac{\sigma_{m\acute{a}x}}{\sigma_n} \quad (5.1)$$

Onde  $k_t$  : fator de concentração de tensões;

$\sigma_{m\acute{a}x}$  : tensão máxima atuante na seção;

$\sigma_n$  : tensão nominal.

De acordo com Medina (2014), o fator de concentração de tensões  $k_t$  mensura o efeito da geometria do entalhe nas tensões lineares elásticas que atuam na sua ponta, a princípio,

significando que os entalhes, se presentes, devem ser mantidos com o menor tamanho possível e que, quanto maior o raio de curvatura, menor a severidade relativa da concentração de tensões.

## 5.2 LINHAS DE FORÇA

Linhas de força é uma maneira qualitativa de avaliar os esforços que entram e saem de uma peça estrutural. Assim, em peças com entalhes, as linhas de forças têm que contorná-los, pois não podem cortar uma área de peça inexistente. De acordo com Broek (1998), as linhas de força se aproximam umas das outras na ponta do entalhe, sinalizando que a carga está passando por uma área menor. Na Figura 5-1, ilustram-se as linhas de força que contornam os obstáculos, havendo uma concentração de tensões no ponto atravessado.

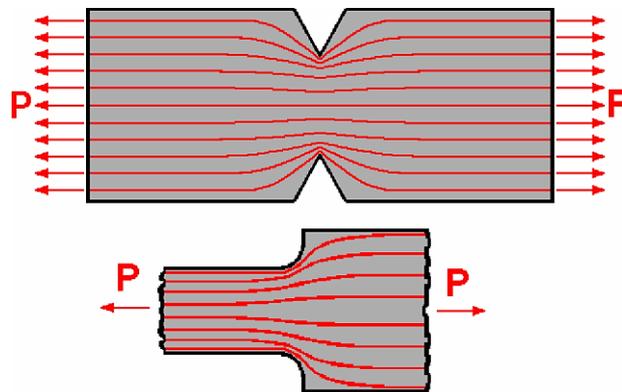


Figura 5-1 – Fluxo das linhas de força (CASTRO e MEGGIOLARO, 2002).

Ao contornar os obstáculos, as linhas de força modificam a direção e, conseqüentemente, há o surgimento de duas componentes da tensão atuante no local, que antes não existiam, considerando apenas a tensão nominal. Surgem as componentes horizontal e vertical, originando um estado de tensões biaxial, mesmo que a peça esteja carregada axialmente. Conclui-se que, quando houver uma variação da seção geométrica de uma peça, deverá ocorrer uma tensão transversal neste ponto singular, como demonstrado na Figura 5-2.

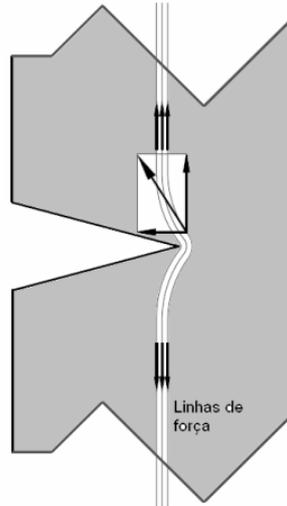


Figura 5-2 – Componentes das linhas de força (RODRÍGUEZ, 2007).

### 5.3 PLACA INFINITA TRACIONADA COM UM FURO CIRCULAR

Kirsch (1898) definiu que o fator de concentração de tensões em uma placa infinita tracionada com um furo circular  $k_t$  é igual a:

$$k_t = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_n} = 3 \quad (5.2)$$

Em coordenadas polares, a distribuição das tensões na placa com um furo de raio  $R$  e sob a tensão nominal  $\sigma_n$  é exposta nas equações a seguir e visualizada na Figura 5-3:

$$\sigma_r = \frac{\sigma_n}{2} \cdot \left[ \left( 1 - \frac{R^2}{r^2} \right) + \left( 1 - 4 \cdot \frac{R^2}{r^2} + 3 \cdot \frac{R^4}{r^4} \right) \cos(2\theta) \right] \quad (5.3)$$

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma_n}{2} \cdot \left[ \left( 1 + \frac{R^2}{r^2} \right) + \left( 1 + 3 \cdot \frac{R^4}{r^4} \right) \cos(2\theta) \right] \quad (5.4)$$

$$\sigma_{r\theta} = -\frac{\sigma_n}{2} \cdot \left( 1 + 2 \cdot \frac{R^2}{r^2} - 3 \cdot \frac{R^4}{r^4} \right) \text{sen}(2\theta) \quad (5.5)$$

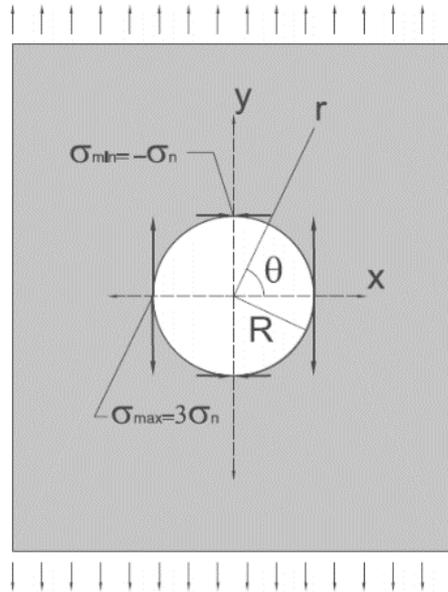
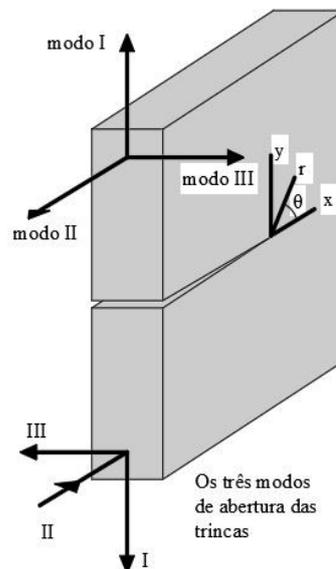


Figura 5-3 –  $k_t$  de um furo circular de uma placa infinita tracionada (RODRÍGUEZ, 2007).

#### 5.4 MODOS DE CARREGAMENTO DE TRINCAS

Existem três diferentes modos de analisar as tensões em uma peça trincada, sendo que cada modo se correlaciona com a direção da abertura das trincas em relação à direção do carregamento. Normalmente, esses modos são denominados como Modo I, II e III. Visualizam-se na Figura 5-4 os modos citados:



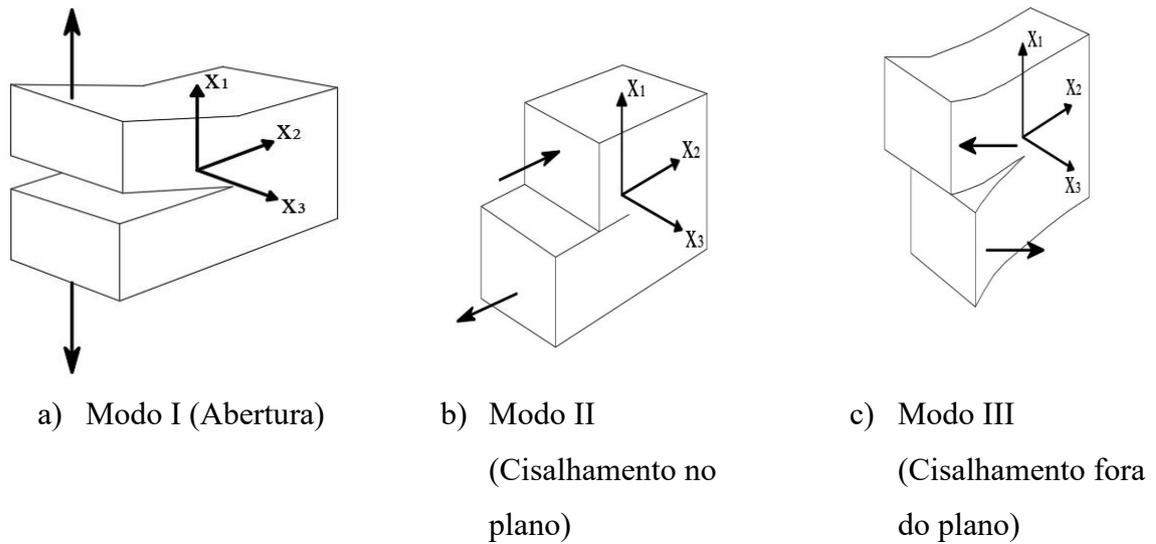


Figura 5-4 – Modos de carregamento de uma trinca em uma placa.

No modo I, o carregamento é aplicado no plano perpendicular à abertura da trinca, ou seja, paralelamente ao eixo y, ocasionando a separação da superfície da trinca em função das forças de tração que são aplicadas nesta direção, sendo denominado de modo de abertura ou de tração. No modo II, as forças cortantes são aplicadas no plano da trinca, ou seja, na direção do eixo x, sendo denominado de modo de cisalhamento. E, no modo III, ou modo de torção, as forças torcionais são aplicadas fora do plano da trinca sob a placa.

De acordo com Castro e Meggiolaro (2002), na maioria dos casos, as trincas se propagam em modo I, para evitar o atrito nas suas faces durante a fratura e, por conseguinte, o modo I é o mais importante na prática.

### 5.5 FATOR DE INTESIDADE DE TENSÕES KI E KII

O conceito foi introduzido por Williams (1957) e Irwin (1957) de maneira independente por ambos, de forma a quantificar o campo de tensões em torno de uma trinca em um elemento com comportamento físico considerado essencialmente linear elástico.

Seguem, abaixo, as expressões do campo de tensões em torno de qualquer trinca para o Modo I:

$$\sigma_x = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi \cdot r}} \cdot \cos \frac{\theta}{2} \left[ 1 - \text{sen} \frac{\theta}{2} \cdot \text{sen} \frac{3\theta}{2} \right] = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi \cdot r}} \cdot f_x(\theta) \quad (5.6)$$

$$\sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi \cdot r}} \cdot \cos \frac{\theta}{2} \left[ 1 + \text{sen} \frac{\theta}{2} \cdot \text{sen} \frac{3\theta}{2} \right] = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi \cdot r}} \cdot f_y(\theta) \quad (5.7)$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi \cdot r}} \cdot \cos \frac{\theta}{2} \cdot \text{sen} \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{3\theta}{2} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi \cdot r}} \cdot f_{xy}(\theta) \quad (5.8)$$

$$\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad (5.9)$$

Onde  $\sigma_z = 0$ , para o estado plano de tensões;

$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y)$ , para o estado plano de deformações.

Resumindo o fator de intensidade de tensões  $K_I$  como:

$$K_I = \sigma \cdot \sqrt{\pi \cdot a} \cdot f\left(\frac{a}{w}\right) \quad (5.10)$$

Onde  $K_I$ : fator de intensidade de tensões linear, sendo um parâmetro linear elástico;

$\sigma$ : tensão nominal aplicada na peça;

$a$ : comprimento da trinca;

$f\left(\frac{a}{w}\right)$ : função que quantifica a influência geométrica da peça, da trinca e do carregamento no campo de tensões.

De acordo com Rodríguez (2007),  $K_I$  é um parâmetro linear elástico que pode ser catalogável e, de acordo com a unicidade das tensões lineares, necessita-se de apenas um cálculo para cada geometria.

As tensões para o Modo II são:

$$\sigma_x = -\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi \cdot r}} \cdot \text{sen} \frac{\theta}{2} \cdot \left[ 2 + \cos \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{3\theta}{2} \right] \quad (5.11)$$

$$\sigma_y = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi \cdot r}} \cdot \text{sen} \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{3\theta}{2} \quad (5.12)$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi \cdot r}} \cdot \cos \frac{\theta}{2} \cdot \left[ 1 - \text{sen} \frac{\theta}{2} \cdot \text{sen} \frac{3\theta}{2} \right] \quad (5.13)$$

$$\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad (5.14)$$

Onde  $\sigma_z = 0$ , para o estado plano de tensões;

$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y)$ , para o estado plano de deformações.

E, por último, para o Modo III:

$$\tau_{xz} = -\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi \cdot r}} \cdot \text{sen} \frac{\theta}{2} \quad (5.15)$$

$$\tau_{yz} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi \cdot r}} \cdot \text{cos} \frac{\theta}{2} \quad (5.16)$$

Logo, as tensões nas proximidades da ponta da trinca podem ser expressas de acordo com a expressão abaixo:

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = K_I \cdot \left[ \frac{f_{ij}(\theta)}{\sqrt{2\pi \cdot r}} \right] \quad (5.17)$$

Isso ocorre ao redor da trinca de uma peça elástica carregada em Modo I. Analogamente, a mesma expressão (Equação (5.17)) pode ser utilizada para os Modos II e III, bastando adotar na expressão o fator de intensidade de tensões adequado para cada modo.

Os fatores de intensidade de tensão para cada modo de carregamento  $K_I, K_{II}$  e  $K_{III}$  têm dimensão em  $MPa\sqrt{m}$ . Incluem todas as informações sobre os efeitos da carga, da geometria da peça e da trinca (RODRÍGUEZ, 2007).

Assim, quando  $r \rightarrow 0$ , as tensões tendem ao infinito, visto que  $\frac{1}{\sqrt{r}} \rightarrow \infty$  e os demais termos permanecem determinados ou próximos de zero. Logo, a análise de tensões próximas da trinca

é uma análise singular, sendo impossíveis, fisicamente, tensões infinitas na ponta da trinca, variando em torno da trinca em função da relação  $\frac{1}{\sqrt{r}}$ , independentemente do modo de carregamento em questão.

De acordo com Castro e Meggiolaro (2002), os materiais não possuem a relação de linearidade, nem elástica, quando submetidos a carregamentos consideráveis, e as trincas que surgem nas peças, mesmo quando submetidas a carregamentos baixos, possuem uma região não-linear em torno da região mais solicitada, ou seja, ao redor das pontas.

## 5.6 SOLUÇÃO DE WILLIAMS PARA O CAMPO DE TENSÕES LINEAR ELÁSTICO

Em problemas lineares, elásticos, isotrópicos, homogêneos e planos de tensões, as funções de Airy  $\varphi(r, \theta)$  devem reproduzir as condições de contorno e atender:

$$\nabla^4(\varphi) = \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \varphi = 0 \quad (5.18)$$

$$\sigma_r = \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \right) \quad (5.19)$$

$$\sigma_\theta = \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \right) \quad (5.20)$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) \quad (5.21)$$

Williams determinou uma função de tensão em coordenadas polares centrada na ponta da trinca:

$$\theta = \pm \pi \quad (5.22)$$

$$\varphi(r, \theta) = r^2 \cdot f(r, \theta) + g(r, \theta) \quad (5.23)$$

Onde  $f$  e  $g$  são funções harmônicas, ou seja,  $\nabla^2 f = \nabla^2 g = 0$ , tal que as mesmas podem ser expressas em função de séries infinitas de índice  $n$ , assim:

$$f = \sum_n [A_n r^n \cos(n\theta) + C_n r^n \text{sen}(n\theta)] \quad (5.24)$$

$$g = \sum_n [B_n r^{(n+2)} \cos(n+2)\theta + D_n r^{(n+2)} \text{sen}(n+2)\theta] \quad (5.25)$$

Onde  $A_n, B_n, C_n$  e  $D_n$  são constantes que devem observar as condições de contorno.

Para o Modo I, visto que as tensões são simétricas ao plano da trinca, tem-se:

$$\sigma_\theta = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} = \sigma_\theta(-\theta) \quad (5.26)$$

Só mantendo os termos em função de  $\cos(n\theta)$ , as constantes  $C_n$  e  $D_n$  dos termos em função de  $\text{sen}(n\theta)$  devem ser nulas. Assim,

$$\varphi(r, \theta) = \sum_n r^{(n+2)} [A_n \cos(n\theta) + B_n \cos(n+2)\theta] \quad (5.27)$$

E as componentes de tensão oriundas desta função são:

$$\sigma_\theta = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} = \sum_n \{(n+2)(n+1)r^n [A_n \cos(n\theta) + B_n \cos(n+2)\theta]\} \quad (5.28)$$

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = \sum_n \left\{ \begin{array}{l} (n+2)r^n [A_n \cos(n\theta) + B_n \cos(n+2)\theta] \\ -r^n [n^2 A_n \cos(n\theta) + B_n (n+2)^2 \cos(n+2)\theta] \end{array} \right\} \quad (5.29)$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) = \sum_n \{(n+1)r^n [nA_n \text{sen}(n\theta) + B_n (n+2)\text{sen}(n+2)\theta]\} \quad (5.30)$$

As tensões normais e cisalhantes devem ser nulas na face da trinca, atendendo às condições de contorno de superfície livre, Figura 5-5, logo:

$$\sigma_{\theta}(\theta = \pm\pi) = \tau_{r\theta}(\theta = \pm\pi) = 0 \quad (5.31)$$

$$(A_n + B_n)\cos(n\pi) = 0 \quad (5.32)$$

$$[nA_n + (n+2)B_n]\text{sen}(n\pi) = 0 \quad (5.33)$$

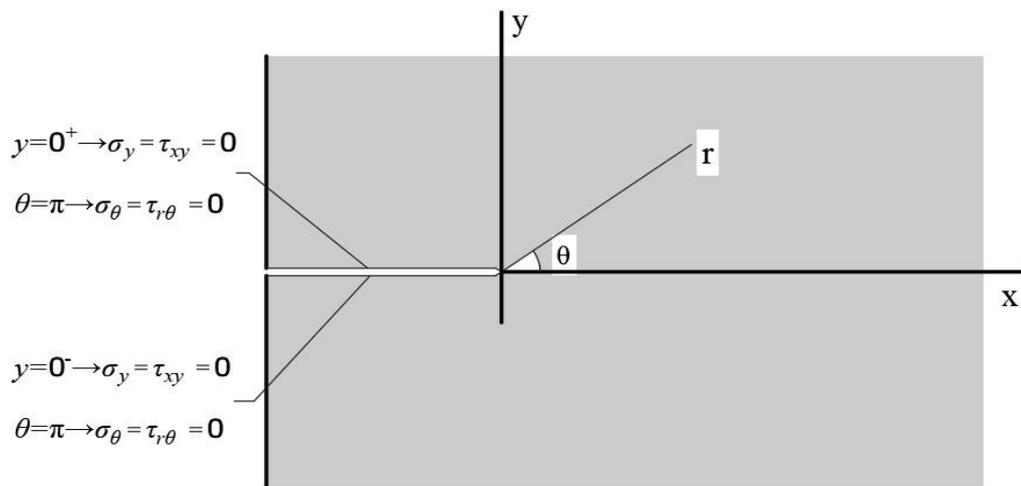


Figura 5-5 – Modos de carregamento de uma trinca em uma placa (RODRÍGUEZ, 2007).

Localizando a origem dos eixos cartesianos ou polares na ponta da trinca, simplificam-se as condições de contorno das faces da trinca e, por consequência, as faces da trinca coincidem com o eixo das abscissas negativo ou com  $\theta = \pm\pi$ .

Na primeira condição, tem-se que:

$$n = \dots, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots \quad (5.34)$$

$$A_n = -B_n \quad (5.35)$$

De acordo com Rodríguez (2007), verificando-se  $n$ , conclui-se que:

- Os valores positivos de  $n$  não reproduzem a física do problema;
- Quando  $n = 0$ , têm-se tensões independentes de  $r$ , desprezadas na primeira análise por terem pouca influência próximo da ponta da trinca;
- Apenas os  $n$  negativos reproduzem a concentração de tensões gerada pela trinca e a singularidade na sua ponta.

Próximo à ponta da trinca, as tensões são singulares ( $r \rightarrow 0 \Rightarrow \sigma \rightarrow \infty$ ). Entretanto, o modelo prevê que a energia de deformação  $E_d$  pelas tensões geradas é finita e positiva. As tensões variam com  $r^n$  e a energia de deformação cresce com  $\sigma^2$ . Logo, em qualquer raio do círculo  $\rho$ , cuja origem esteja na ponta, tem-se:

$$E_d \approx \iint \frac{\sigma^2}{E} dA \Rightarrow 0 < \int_{-\pi}^{\pi} f^2(\theta) d\theta \int_{-\pi}^{\pi} r^{2n} r dr < \infty \quad (5.36)$$

E como,

$$0 < \int f^2(\theta) d\theta < \infty \quad (5.37)$$

$$0 < \int_0^{\rho} r^{(2n+1)} dr = \frac{\rho^{(2n+2)}}{2n+2} < \infty \quad (5.38)$$

$$n > 1 \quad (5.39)$$

Logo, o único  $n$  possível é  $n = -\frac{1}{2}$ , sendo a singularidade da trinca proporcional a  $\frac{1}{\sqrt{r}}$  e,

para atender à exigência acima, as constantes devem ser:

$$A_n = 3B_n \quad (5.40)$$

$$A_{-\frac{1}{2}} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi}} \quad (5.41)$$

$$B_{-1/2} = \frac{1}{3} A_{-1/2} = \frac{K_I}{3\sqrt{2\pi}} \quad (5.42)$$

Obtendo:

$$\varphi(r, \theta) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi}} r^{3/2} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \frac{K_I}{3\sqrt{2\pi}} r^{3/2} \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \quad (5.43)$$

A equação anterior representa a função de tensão, de forma que se pode obter o campo de tensões para o Modo I da seguinte forma:

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \left[ \frac{1}{4} \left( 5 \cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{3\theta}{2} \right) \right] = \frac{K_I f_r(\theta)}{\sqrt{2\pi r}} \quad (5.44)$$

$$\sigma_\theta = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \left[ \frac{1}{4} \left( 3 \cos \frac{\theta}{2} + \cos \frac{3\theta}{2} \right) \right] = \frac{K_I f_\theta(\theta)}{\sqrt{2\pi r}} \quad (5.45)$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \left[ \frac{1}{4} \left( \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} + \operatorname{sen} \frac{3\theta}{2} \right) \right] = \frac{K_I f_{r\theta}(\theta)}{\sqrt{2\pi r}} \quad (5.46)$$

Para o estado plano de tensão:

$$\sigma_z = \tau_{z\theta} = \tau_{zr} = 0 \quad (5.47)$$

Para o estado plano de deformação:

$$\sigma_z = \nu(\sigma_r + \sigma_\theta) \quad (5.48)$$

$$\tau_{z\theta} = \tau_{zr} = 0 \quad (5.49)$$

E as deformações associadas no estado plano de tensões , ou seja, quando  $\sigma_z = 0$  , aplicando a Lei de Hooke, são obtidas nas equações a seguir:

$$\varepsilon_r = \frac{\sigma_r - \nu\sigma_\theta}{E} = \frac{K_I}{4E\sqrt{2\pi r}} \left[ (5-3\nu)\cos\frac{\theta}{2} - (1+\nu)\cos\frac{3\theta}{2} \right] \quad (5.50)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{\sigma_\theta - \nu\sigma_r}{E} = \frac{K_I}{4E\sqrt{2\pi r}} \left[ (3-5\nu)\cos\frac{\theta}{2} + (1+\nu)\cos\frac{3\theta}{2} \right] \quad (5.51)$$

$$\varepsilon_z = \frac{-\nu(\sigma_r + \sigma_\theta)}{E} = -\frac{2\nu K_I}{E\sqrt{2\pi r}} \left[ \cos\frac{\theta}{2} \right] \quad (5.52)$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{\tau_{r\theta}}{G} = \frac{K_I}{4G\sqrt{2\pi r}} \left[ \text{sen}\frac{\theta}{2} + \text{sen}\frac{3\theta}{2} \right] \quad (5.53)$$

As deformações associadas no estado plano de deformação , ou seja, quando  $\varepsilon_z = 0$  e  $\sigma_z = \nu(\sigma_r + \sigma_\theta)$  , aplicando a Lei de Hooke, são obtidas nas equações a seguir:

$$\varepsilon_r = \frac{[\sigma_r - \nu(\sigma_\theta + \sigma_z)]}{E} = \frac{[(1-\nu^2)\sigma_r - \nu(1+\nu)\sigma_\theta]}{E} \quad (5.54)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{[(1-\nu^2)\sigma_\theta - \nu(1+\nu)\sigma_r]}{E} \quad (5.55)$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{\tau_{r\theta}}{G} = \frac{K_I}{4G\sqrt{2\pi r}} \left[ \text{sen}\frac{\theta}{2} + \text{sen}\frac{3\theta}{2} \right] \quad (5.56)$$

Por integração, obtêm-se os deslocamentos radiais  $u_r$  e tangenciais  $u_\theta$  :

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r} \quad (5.57)$$

$$\varepsilon_{\theta} = \frac{\left[ u_r + \left( \frac{\partial u_{\theta}}{\partial \theta} \right) \right]}{r} \quad (5.58)$$

Logo,

$$u_r = \frac{K_I}{4G\sqrt{2\pi}} \sqrt{r} \cdot \left[ (4\lambda - 3) \cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{3\theta}{2} \right] \quad (5.59)$$

$$u_{\theta} = \frac{K_I}{4G\sqrt{2\pi}} \sqrt{r} \cdot \left[ (1 - 4\lambda) \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} + \operatorname{sen} \frac{3\theta}{2} \right] \quad (5.60)$$

Onde  $\lambda = 2 \left( \frac{1}{1+\nu} \right)$ , no estado plano de tensões;

$\lambda = 2(1-\nu)$ , no estado plano de deformação;

$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ , em materiais isotrópicos e homogêneos.

Para o Modo II:

$$\sigma_r = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \left[ -\frac{1}{4} \left( 5 \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} - 3 \operatorname{sen} \frac{3\theta}{2} \right) \right] \equiv \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cdot g_{r(\theta)} \quad (5.61)$$

$$\sigma_{\theta} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \left[ -\frac{1}{4} \left( \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} + 3 \operatorname{sen} \frac{3\theta}{2} \right) \right] \equiv \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cdot g_{\theta(\theta)} \quad (5.62)$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \left[ \frac{1}{4} \left( \cos \frac{\theta}{2} + 3 \cos \frac{3\theta}{2} \right) \right] \equiv \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cdot g_{r\theta(\theta)} \quad (5.63)$$

Para o estado plano de tensão:

$$\sigma_z = \tau_{z\theta} = \tau_{zr} = 0 \quad (5.64)$$

Para o estado plano de deformação:

$$\sigma_z = \nu(\sigma_r + \sigma_\theta) \quad (5.65)$$

$$\tau_{z\theta} = \tau_{zr} = 0 \quad (5.66)$$

$$u_r = \frac{K_{II}}{4G\sqrt{2\pi}} \sqrt{r} \cdot \left[ (3-4\lambda) \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} + 3 \operatorname{sen} \frac{3\theta}{2} \right] \quad (5.67)$$

$$u_\theta = \frac{K_{II}}{4G\sqrt{2\pi}} \sqrt{r} \cdot \left[ (1-4\lambda) \cos \frac{\theta}{2} + 3 \cos \frac{3\theta}{2} \right] \quad (5.68)$$

Onde  $\lambda = 2 \left( \frac{1}{1+\nu} \right)$ , no estado plano de tensões;

$\lambda = 2(1-\nu)$ , no estado plano de deformação;

$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ , em materiais isotrópicos e homogêneos.

## 5.7 SUBTRAÇÃO DA SINGULARIDADE

A técnica da subtração da singularidade foi utilizada recentemente em métodos sem malha por Oliveira (2019) na análise do fator de intensidade de tensão de trincas em modos mistos.

De acordo com Oliveira (2019), uma das vantagens da Singularity Subtraction Technique (SST) é que ela regulariza por completo o campo elástico, subtraindo as singularidades existentes na ponta da trinca antes da execução da análise numérica, adicionando o fator de intensidade de tensão como uma variável inicial do modelo numérico.

### 5.7.1 Campo elástico original e regularizado

No campo elástico de um domínio  $\Omega$  contornado por  $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_t$ , na condição de contorno cinemático  $\Gamma_u \rightarrow u = \bar{u}$  e de contorno estático  $\Gamma_t \rightarrow t = n\sigma = \bar{t}$ , tem-se a seguinte condição de equilíbrio:

$$L'\sigma = 0 \quad (5.69)$$

$$\varepsilon = Lu \quad (5.70)$$

$$\sigma = D\varepsilon \quad (5.71)$$

Onde  $L$  : operador diferencial;

$\sigma$  : vetor de componentes de tensão;

$\varepsilon$  : vetor do campo de deformações;

$u$  : vetor do campo de deslocamentos;

$\bar{u}$  : vetor do campo dos deslocamentos prescritos;

$\bar{t}$  : vetor das componentes das forças superficiais;

$n$  : vetor normal unitário ao contorno  $\Gamma$ .

Para se tratar a descontinuidade, o campo elástico original pode ser dividido em dois campos: campo elástico regularizado e campo elástico singular. Logo, utilizando o princípio da superposição, decompõe-se o campo elástico original de acordo com as expressões abaixo:

$$\sigma_{ij} = (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{S1} - \dots - \sigma_{ij}^{Sm}) + (\sigma_{ij}^{S1} + \dots + \sigma_{ij}^{Sm}) = \sigma_{ij}^R + \sigma_{ij}^S \quad (5.72)$$

$$u_{ij} = (u_i - u_i^{S1} - \dots - u_i^{Sm}) + (u_i^{S1} + \dots + u_i^{Sm}) = u_i^R + u_i^S \quad (5.73)$$

Onde  $\sigma_{ij}^R$  e  $u_i^R$  são as componentes regulares, respectivamente, do campo de tensões e deformações;

$\sigma_{ij}^S$  e  $u_i^S$  são as componentes singulares, respectivamente, do campo de tensões e deformações.

Considerando o campo elástico regularizado, no domínio  $\Omega$ , as Equações (5.69) a (5.71) podem ser reescritas da seguinte forma:

$$L^R \sigma^R = 0 \quad (5.74)$$

$$\varepsilon^R = Lu^R \quad (5.75)$$

$$\sigma^R = D\varepsilon^R \quad (5.76)$$

Sendo que as condições de contorno serão alteradas a fim de incluir as contribuições do campo elástico singular:

$$u^R = \bar{u} - u^S \quad (5.77)$$

$$t^R = \bar{t} - t^S \quad (5.78)$$

### 5.7.2 Solução de Williams

O campo de tensões definido nas Equações (5.6) a (5.9) e Equações (5.11) a (5.14), respectivamente, modo I e modo II, pode ser utilizado para obter as componentes das forças de superfície no contorno, tal que:

$$t^S = \begin{bmatrix} t_1^S \\ t_2^S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11}^S & \sigma_{21}^S \\ \sigma_{21}^S & \sigma_{22}^S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{21} \\ g_{12} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_I \\ K_{II} \end{bmatrix} = gk \quad (5.79)$$

Onde  $n_i$  é a componente do vetor normal unitário ao contorno;  $\sigma_{ij}^S$  e  $u_i^S$  são as componentes singulares, respectivamente, do campo de tensões e deformações;  $g_{ij} = g_{ij}(r^{-1/2}, \theta)$  são funções com a mesma notação das Equações (5.6) a (5.9) e (5.11) a (5.14), e  $k$  é o fator de intensidade de tensão.

Utilizando o princípio da superposição, em uma placa com uma quantidade  $m$  de trincas, a Equação (5.79) pode ser escrita da seguinte forma:

$$t^S = g_1 K_1 + \dots + g_m k_m \quad (5.80)$$

Da mesma forma, o campo de deslocamentos definido nas Equações (5.59), (5.60), (5.67) e (5.68) pode ser obtido como observado a seguir:

$$u^S = \begin{bmatrix} u_1^S \\ u_2^S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{21} \\ f_{12} & f_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_I \\ K_{II} \end{bmatrix} = fk \quad (5.81)$$

Onde  $f_{ij} = f_{ij}(r^{-1/2}, \theta)$  são funções advindas das Equações (5.59), (5.60), (5.67) e (5.68).

De maneira análoga, em uma placa com uma quantidade  $m$  de trincas, a Equação (5.81) correspondente à componente singular pode ser escrita da seguinte forma:

$$u^S = f_1 K_1 + \dots + f_m k_m \quad (5.82)$$

### 5.7.3 Campo generalizado

Discretizando a equação referente ao campo elástico generalizado do método sem malha, a fim de se analisar as variáveis regularizadas  $u_i^R$ , obtém-se:

$$\frac{L_i}{n_i} \sum_{l=1}^{n_i} t_{x_l}^R = -\frac{L_i}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} (\bar{t} - t^S)_{x_j} \quad (5.83)$$

Introduzindo as Equações do campo elástico (3.1) a (3.8) na Equação (5.83), e discretizando a equação anterior, obtém-se um sistema de equações referentes ao nó  $Q \in \Omega_Q$  em função das coordenadas locais de  $\hat{u}$ , alcançando:

$$\frac{L_t}{n_t} \sum_{l=1}^{n_t} n_{xl} DB_{xl} \hat{u} - \frac{L_t}{n_t} \sum_{j=1}^{n_t} t_{xj}^S = - \frac{L_t}{n_t} \sum_{j=1}^{n_t} \bar{t}_{xj} \quad (5.84)$$

$$K_Q \hat{u}^R + G_{Q_1} k_1 + \dots + G_{Q_m} k_m = P_Q \quad (5.85)$$

Sendo:

$$K_Q = \frac{L_t}{n_t} \sum_{l=1}^{n_t} n_{xl} DB_{xl} \quad (5.86)$$

$$G_{Q_m} k_m = - \frac{L_t}{n_t} \sum_{j=1}^{n_t} t_{xj}^S = - \frac{L_t}{n_t} \sum_{j=1}^{n_t} \begin{bmatrix} g_{11} & g_{21} \\ g_{12} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_I \\ K_{II} \end{bmatrix} \quad (5.87)$$

$$P_Q = - \frac{L_t}{n_t} \sum_{j=1}^{n_t} \bar{t}_{xj} \quad (5.88)$$

Onde  $K_Q$  : matriz de rigidez nodal do domínio local  $\Omega_Q$ , uma matriz  $2 \times 2n$ ;

$G_{Q_m}$  : matriz que contém as funções de Williams, uma matriz  $2 \times 2n$ , com  $m$  trincas;

$k_m$  : vetor de intensidade de tensões  $K_I$  e  $K_{II}$ ;

$P_Q$  : vetor de forças;

$n$  : número de nós incluídos no domínio de influência do nó  $Q$ .

Reitera-se que, nos nós interiores, os vetores  $G_{Q_m}$  e  $P_Q$  são nulos, e nos nós do contorno cinemático, por interpolação direta para fixar as condições de contorno, tem-se:

$$u_Q^R = \Phi_Q \hat{u} = \bar{u}_Q - \bar{u}_Q^S = \bar{u}_Q - \frac{L_t}{n_t} \sum_{j=1}^{n_t} \begin{bmatrix} f_{11} & f_{21} \\ f_{12} & f_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_I \\ K_{II} \end{bmatrix} \quad (5.89)$$

Sendo reescrito como:

$$K'_{\varrho} \hat{u} + F_{\varrho_1} k_1 + \dots + F_{\varrho_m} k_m = U_{\varrho} \quad (5.90)$$

Onde  $K'_{\varrho}$ : matriz nodal contendo a função de forma  $\Phi_{\varrho}$ ;

$F_{\varrho}$ : matriz contendo as funções de Williams;

$U_{\varrho}$ : vetor contendo os deslocamentos nodais prescritos.

Nos  $M$  contornos estáticos e domínios internos, aplicando-se a Equação (5.85), tem-se o sistema:

$$K\hat{u} + Gk = P \quad (5.91)$$

Aplicando a Equação (5.90) nos  $M$  domínios internos e contornos cinemáticos, tem-se resumidamente o sistema:

$$K'\hat{u} + Fk = U \quad (5.92)$$

Que os dois sistemas juntos formam o sistema global  $2(M+2) \cdot 2N$  de equações, como demonstrado abaixo:

$$\begin{bmatrix} K & G \\ K' & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u} \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P \\ U \end{bmatrix} \quad (5.93)$$

Sendo que foram adicionadas duas restrições adicionais, que são os fatores de intensidade de tensão  $K_I$  e  $K_{II}$ , visualizadas pelos vetores  $k_1 \dots k_m$ , em cada ponta de trinca.

### 5.7.4 Restrições adicionais

De forma a cancelar a singularidade do campo regularizado, tem-se que, na ponta da trinca, o campo de tensões é nulo, tal que:

$$\sigma_{ij}^R = 0 \rightarrow \sigma_{ij} = \sigma_{ij}^S \quad (5.94)$$

Em função das componentes de forças da superfície na ponta da trinca:

$$t_i^R = n\sigma = 0 \rightarrow t = t^S \quad (5.95)$$

Onde  $n$  são as componentes unitárias normais às faces da trinca. Resultando em:

$$t_i^R = (nDB)_i \hat{u}^R = 0 \quad (5.96)$$

Onde

$$t_i = (nDB)_1 \cdots (nDB)_m \quad (5.97)$$

Incluindo as restrições da Equação (5.96) em  $m$  pontas de trincas, o sistema exposto na Equação (5.93) transforma-se em um sistema global  $2(M+2m) \cdot 2(M+2m)$  que pode ser resolvido.

$$\begin{bmatrix} K & G \\ K' & F \\ t_i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u} \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P \\ U \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.98)$$



## 6. METODOLOGIA

### 6.1 IMPLEMENTAÇÃO DO MÉTODO DE NEWMARK (1959)

O Método do Newmark (1959) será implementado adotando inicialmente  $\delta = 0,5$  e  $\beta = 0,25$ , podendo-se resumir os passos do algoritmo computacional no fluxograma apresentado na Figura 6-1.

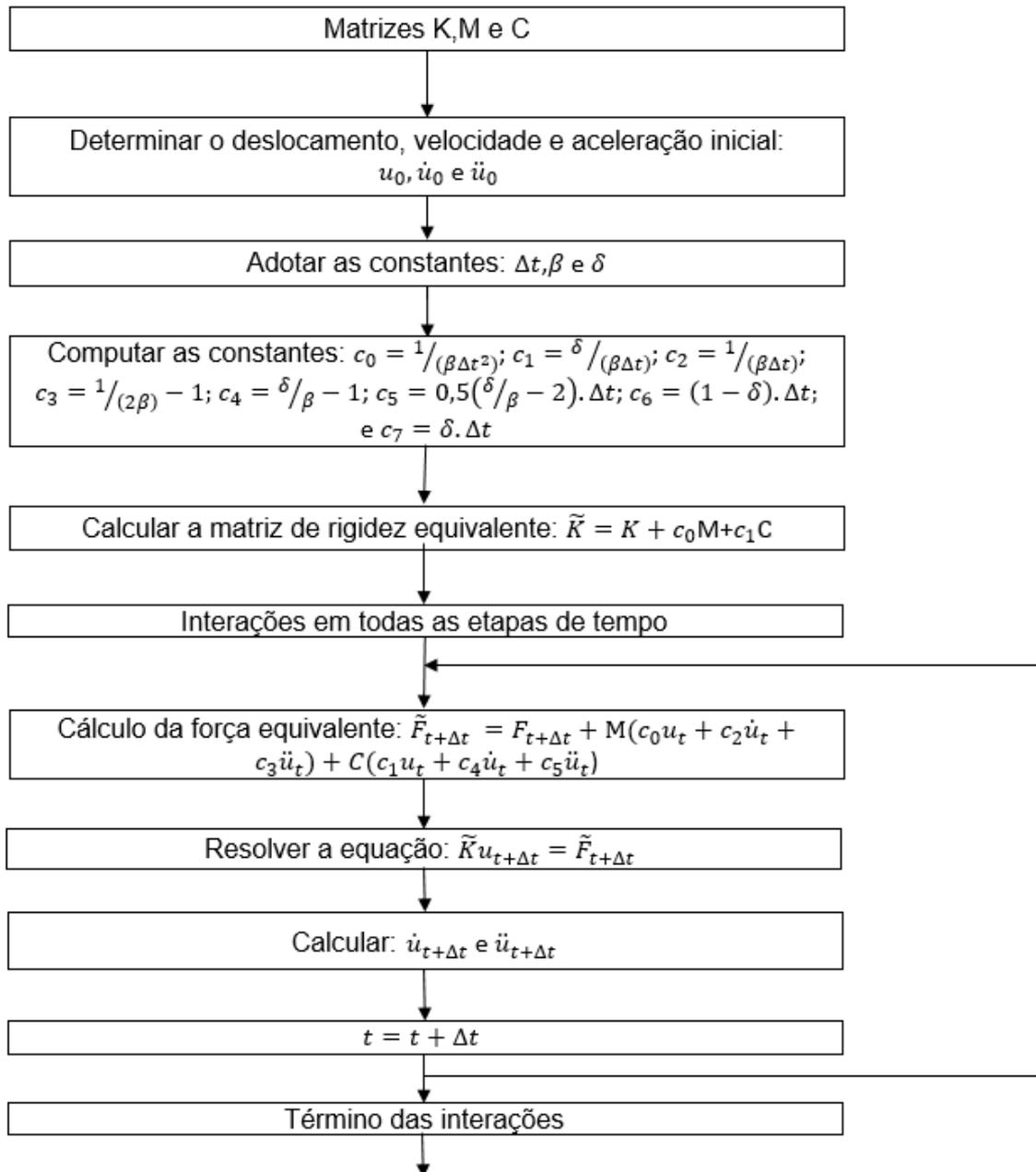


Figura 6-1 – Fluxograma do algoritmo da implementação do Método de Newmark (1959) em vibrações forçadas.

## 6.2 IMPLEMENTAÇÃO DA MECÂNICA DA FRATURA

Para cada face da trinca implementada serão consideradas duas linhas com nós sobrepostos e, assim, os nós de uma linha terão influência apenas em seu respectivo lado, como apresentado na Figura 6-2. A ponta da trinca será implementada considerando apenas um nó, com influência nos dois lados. Na modelagem utilizada por Oliveira (2019), a qual será adotada neste trabalho, o método da visibilidade considera a trinca como um contorno do problema, adaptando a geometria, impedindo que a trinca atravesse quaisquer lados. A metodologia proposta por Oliveira (2019) é transcrita abaixo:

1. Introdução do método da visibilidade, para simular descontinuidades no ILMF, modificando as funções ponderadoras dos MQM;
2. Modificar as funções dos domínios locais, para simular descontinuidades na colocação na forma fraca;
3. Introdução da técnica da subtração da singularidade no ILMF, para o cálculo do fator de intensidade de tensão;
4. Extensão da técnica da subtração da singularidade, para a resolução de problemas com múltiplas trincas;
5. Resolução de problemas clássicos da mecânica da fratura linear elástica;
6. Comparação gráfica da precisão e eficiência dos resultados obtidos com outros métodos.

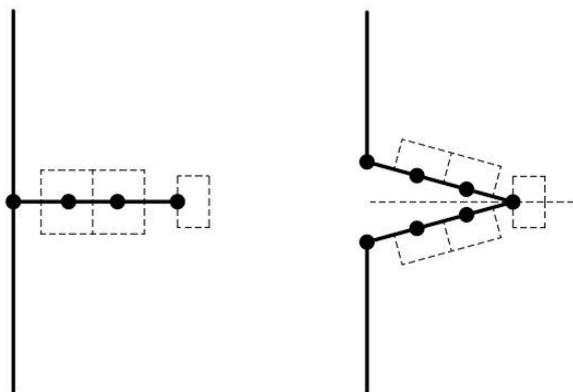


Figura 6-2 – Representação esquemática do domínio de colocação dos nós sobrepostos ao longo da trinca e na ponta da trinca.

Na obtenção dos elementos das matrizes  $g$  e  $f$ , serão considerados 3 pontos de Gauss na integração numérica. O procedimento da técnica de subtração de singularidade é resumido nos passos que seguem nas linhas abaixo:

1. Leitura dos dados introduzidos no programa e definição do tamanho das matrizes a serem utilizadas;
2. Leitura dos dados da trinca e montagem das matrizes relacionadas à trinca;
3. Discretização do domínio com nós espaçados automaticamente pelo programa, de forma regular ou não;
4. Discretização da trinca e da ponta da trinca;
5. Definição dos domínios locais de cada um dos nós da distribuição, introduzindo a descontinuidade nas funções;
6. Determinação dos nós dentro do domínio de influência que participam da interpolação para ponto de colocação ou quadratura de Gauss;
7. Cálculo das funções peso, determinação das matrizes  $A$  e  $B$  e, por fim, determinação das funções de forma dos MQM por meio do método da visibilidade;
8. Cálculo da matriz de Williams e do vetor de forças para cada um dos domínios locais no contorno do problema;
9. Cálculo da matriz de rigidez e da matriz de Williams para cada um dos domínios locais ao longo da trinca e na ponta da trinca;
10. Cálculo da matriz de rigidez local para cada um dos domínios locais restantes;
11. Organização da matriz de rigidez e do vetor de forças de cada um dos domínios locais em uma matriz global e um vetor de forças global;
12. Organização da matriz de Williams de cada um dos domínios locais do contorno na matriz global e no vetor de forças global.

## 7. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Inicialmente, será utilizado um exemplo clássico para testar os procedimentos da análise dinâmica no método sem malha. O exemplo será uma viga em balanço submetida ao estado plano de tensão com comprimento de  $L = 48\text{ m}$  e altura de  $D = 12\text{ m}$ , carga na ponta de  $P = 1000\text{ N}$ , módulo de elasticidade longitudinal  $E = 3 \cdot 10^7\text{ Pa}$  e coeficiente de Poisson de  $\nu = 0.3$  e densidade de  $1\text{ kg/m}^3$ .

A solução analítica da viga em balanço, Figura 7-1, é apresentada nas equações abaixo:

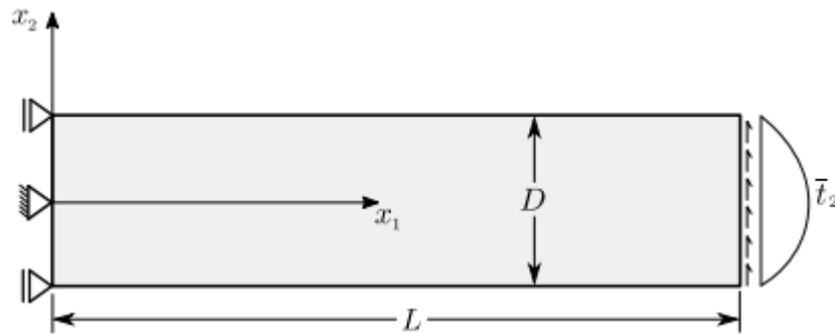


Figura 7-1 – Estado Plano de Tensão - Viga de Timoshenko engastada de Largura Unitária.

$$\bar{t}_2(x_2) = -\frac{P}{2I} \left( \frac{D^2}{4} - x_2^2 \right) \quad (7.1)$$

A solução analítica dos deslocamentos é dada por:

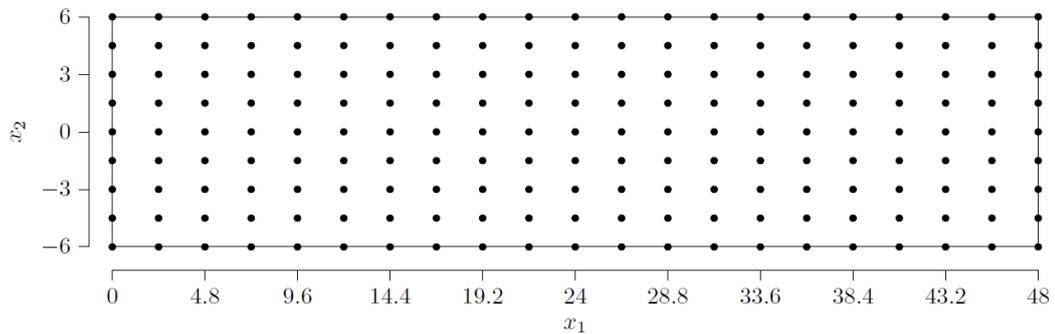
$$\begin{bmatrix} u_1(x_1, x_2) \\ u_2(x_1, x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{Px_2}{6EI} \left( (6L - 3x_1)x_1 + (2 + \nu)(x_2^2 - \frac{D^2}{4}) \right) \\ \frac{P}{6EI} \left( 3\nu x_2^2 (L - x_1) + (4 + 5\nu) \frac{D^2 x_1}{4} (3L - x_1)x_1^2 \right) \end{bmatrix} \quad (7.2)$$

Onde  $I = \frac{D^3}{12}$  é o momento de inércia da seção transversal.

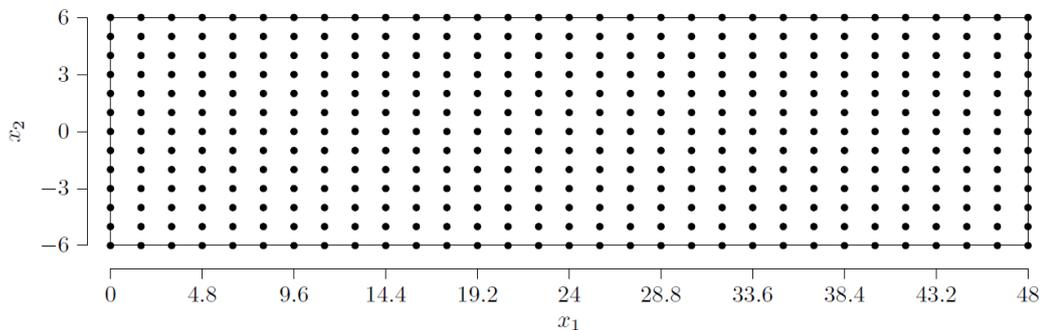
## 7.1 INTEGRAÇÃO NO TEMPO

O domínio utilizado é o da forma retangular, com um único ponto de integração da forma fraca em cada contorno do domínio local  $\Omega_Q$ , no caso do ILMF, e 12 pontos de integração no caso do MLPG, utilizando no MQM bases polinomiais de primeira ordem e funções ponderadoras *quartic spline*. Para a integração da massa nodal, foram utilizados 2x2 pontos de integração de Gauss.

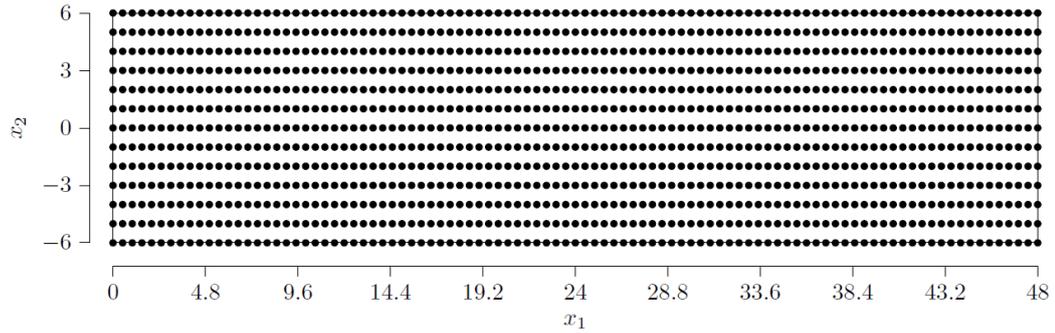
Três distribuições nodais regulares e irregulares foram adotadas com base em pesquisa realizada previamente por (MENDONÇA *et al.*, 2021), como mostram a Figura 7-2 e a Figura 7-3, com um total de  $21 \times 9 = 189$  nós,  $31 \times 13 = 403$  nós e  $97 \times 13 = 1261$  nós. Foram considerados domínios locais retangulares, assim como esquematicamente apresentado na Figura 7-2 e na Figura 7-3. Na aproximação pelos MQM, bases polinomiais de segunda ordem e funções ponderadoras *quartic spline* foram consideradas.



a) Distribuição nodal regular com  $21 \times 9 = 189$  nós.

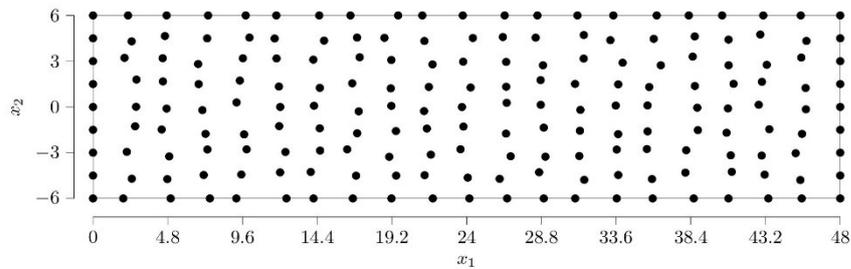


b) Distribuição nodal regular com  $31 \times 13 = 403$  nós.

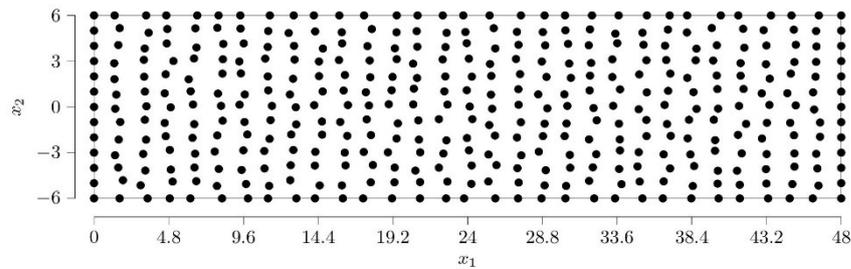


c) Distribuição nodal regular com  $97 \times 13 = 1261$  nós.

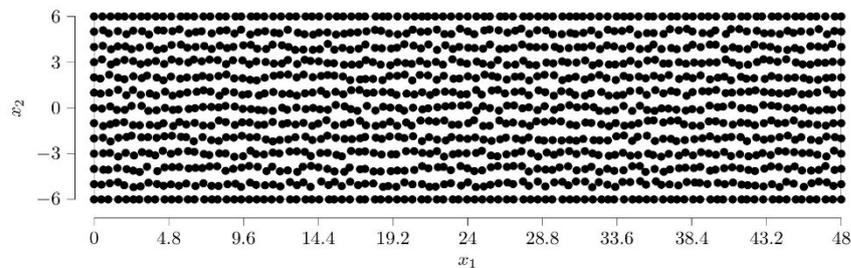
Figura 7-2 – Distribuição regular dos nós de uma viga engastada em balanço, discretizada com 189, 403 e 1261 nós.



a) Distribuição nodal irregular com  $21 \times 9 = 189$  nós.



b) Distribuição nodal irregular com  $31 \times 13 = 403$  nós.



c) Distribuição nodal irregular com  $97 \times 13 = 1261$  nós.

Figura 7-3 – Distribuição irregular dos nós de uma viga engastada em balanço, discretizada com 189, 403 e 1261 nós.

### 7.1.1 Frequências naturais

Inicialmente, a distribuição regular de nós ao longo do domínio foi escolhida como mostra a Figura 7-2. Os resultados das frequências naturais obtidas são apresentados na Tabela 7-1 até a Tabela 7-3, comparando com os valores obtidos através do Método de Elementos Finitos e do MLPG. Nas análises efetuadas, considerou-se a integração da massa com 2 pontos de Gauss (2x2), base polinomial ( $m = 6$ ), integração da matriz de rigidez com 1 ponto de Gauss em cada contorno para o ILMF e 12 pontos em cada contorno para o MLPG.

Três diferentes distribuições nodais regulares e irregulares (189, 403 e 1261 nós) são usadas para fazer a análise das frequências naturais. O erro relativo para as frequências naturais é definido pela seguinte equação:

$$r_\varepsilon = \frac{\|frequência^{ILMF/MLPG} - frequência^{FEM}\|}{\|frequência^{FEM}\|} \quad (7.3)$$

Tabela 7-1 – Frequências naturais de uma viga em balanço, usando MLPG, ILMF e MEF, para uma distribuição nodal regular de 189 nós.

Modo	Frequência (Hz)				
	MLPG	ILMF	Referência (MEF 4850 GDLs – Liu e Gu, 2005)	Erro relativo - $r_\varepsilon$ (MLPG/MEF)	Erro relativo - $r_\varepsilon$ (ILMF/ MEF)
1	28,60	20,22	27,72	3,17E-02	2,71E-01
2	141,06	140,72	140,86	1,42E-03	9,94E-04
3	185,02	185,23	179,71	2,95E-02	3,07E-02
4	327,37	323,40	323,89	1,07E-02	1,51E-03
5	519,63	520,99	523,43	7,26E-03	4,66E-03
6	537,45	536,58	536,57	1,64E-03	1,86E-05
7	729,32	728,27	730,04	9,86E-04	2,42E-03
8	884,05	881,86	881,28	3,14E-03	6,58E-04
9	900,43	900,83	899,69	8,23E-04	1,27E-03
10	1.001,18	1.000,68	1.000,22	9,60E-04	4,60E-04

Tabela 7-2 – Frequências naturais de uma viga em balanço, usando MLPG, ILMF e MEF, para uma distribuição nodal regular de 403 nós.

Frequência (Hz)					
Modo	MLPG	ILMF	Referência (MEF 4850 GDLs – Liu e Gu, 2005)	Erro relativo - $r_\varepsilon$ (MLPG/ MEF)	Erro relativo - $r_\varepsilon$ (ILMF/ MEF)
1	28,60	20,22	27,72	3,17E-02	2,71E-01
2	141,29	141,02	140,86	3,05E-03	1,14E-03
3	185,64	184,51	179,71	3,30E-02	2,67E-02
4	325,13	323,57	323,89	3,83E-03	9,88E-04
5	523,75	522,76	523,43	6,11E-04	1,28E-03
6	537,03	535,49	536,57	8,57E-04	2,01E-03
7	729,41	730,62	730,04	8,63E-04	7,94E-04
8	882,58	885,35	881,28	1,48E-03	4,62E-03
9	899,01	900,19	899,69	7,56E-04	5,56E-04
10	1.001,63	998,69	1.000,22	1,41E-03	1,53E-03

Tabela 7-3 – Frequências naturais de uma viga em balanço, usando MLPG, ILMF e MEF, para uma distribuição nodal regular de 1261 nós.

Frequência (Hz)					
Modo	MLPG	ILMF	Referência (MEF 4850 GDLs – Liu e Gu, 2005)	Erro relativo - $r_\varepsilon$ (MLPG/ MEF)	Erro relativo - $r_\varepsilon$ (ILMF/ MEF)
1	28,60	20,22	27,72	3,17E-02	2,71E-01
2	140,17	140,81	140,86	4,90E-03	3,55E-04
3	186,51	174,53	179,71	3,78E-02	2,88E-02
4	321,94	324,24	323,89	6,02E-03	1,08E-03
5	525,69	522,81	523,43	4,32E-03	1,18E-03
6	536,42	536,86	536,57	2,80E-04	5,40E-04
7	729,92	730,66	730,04	1,64E-04	8,49E-04
8	881,48	881,00	881,28	2,27E-04	3,18E-04
9	901,67	899,13	899,69	2,20E-03	6,22E-04
10	1.001,50	999,84	1.000,22	1,28E-03	3,80E-04

Os resultados demonstram boa concordância com a solução de referência, ocasionando erros relativos baixos em quase todas as configurações nodais e modos de vibração. Constata-se um comportamento de respostas distoante dos demais em relação ao Modo I, em razão da complexidade de determinação do domínio de influência e integração na obtenção do valor da 1ª frequência natural de vibração. Entretanto, identifica-se a convergência com o aumento do número de nós na discretização sem malha, visto que aumenta a precisão.

Na discretização nodal irregular, adotou-se o parâmetro adimensional de irregularidade  $c_n = 0.2$ , utilizando a metodologia e o código de irregularidade elaborada por Gómez (2019).

Os resultados obtidos são semelhantes à distribuição nodal regular e são apresentados na Tabela 7-4 até a

Tabela 7-6, comparando com os valores obtidos através do Método de Elementos Finitos e do MLPG.

Tabela 7-4 – Frequências naturais de uma viga em balanço, usando MLPG, ILMF e MEF, para uma distribuição nodal irregular de 189 nós.

Modo	Frequência (Hz)				
	MLPG	ILMF	Referência (MEF 4850 GDLs – Liu e Gu, 2005)	Erro relativo - $r_\epsilon$ (MLPG/MEF)	Erro relativo - $r_\epsilon$ (ILMF/MEF)
1	28,63	20,24	27,72	3,28E-02	2,70E-01
2	140,40	141,54	140,86	3,24E-03	4,85E-03
3	184,33	177,01	179,71	2,57E-02	1,50E-02
4	324,42	321,18	323,89	1,65E-03	8,38E-03
5	525,47	524,40	523,43	3,91E-03	1,85E-03
6	538,09	540,03	536,57	2,83E-03	6,45E-03
7	731,44	728,16	730,04	1,91E-03	2,57E-03
8	879,64	878,21	881,28	1,86E-03	3,49E-03
9	905,24	904,44	899,69	6,17E-03	5,28E-03
10	998,04	997,20	1.000,22	2,18E-03	3,02E-03

Tabela 7-5 – Frequências naturais de uma viga em balanço, usando MLPG, ILMF e MEF, para uma distribuição nodal irregular de 403 nós.

Modo	Frequência (Hz)				
	MLPG	ILMF	Referência (MEF 4850 GDLs – Liu e Gu, 2005)	Erro relativo - $r_\epsilon$ (MLPG/MEF)	Erro relativo - $r_\epsilon$ (ILMF/MEF)
1	28,60	20,23	27,72	3,17E-02	2,70E-01
2	140,27	141,84	140,86	4,19E-03	6,99E-03
3	186,70	177,11	179,71	3,89E-02	1,44E-02
4	321,13	324,79	323,89	8,53E-03	2,77E-03
5	519,16	525,43	523,43	8,16E-03	3,81E-03
6	537,91	537,22	536,57	2,50E-03	1,21E-03
7	729,83	728,41	730,04	2,91E-04	2,23E-03
8	882,47	881,20	881,28	1,34E-03	8,61E-05
9	900,67	900,76	899,69	1,09E-03	1,19E-03
10	1001,76	1.001,06	1.000,22	1,54E-03	8,39E-04

Tabela 7-6 – Frequências naturais de uma viga em balanço, usando MLPG, ILMF e MEF, para uma distribuição nodal irregular de 1261 nós.

Frequência (Hz)					
Modo	MLPG	ILMF	Referência (MEF 4850 GDLs – Liu e Gu, 2005)	Erro relativo - $r_\varepsilon$ (MLPG/ MEF)	Erro relativo - $r_\varepsilon$ (ILMF/ MEF)
1	28,60	20,23	27,72	3,19E-02	2,70E-01
2	140,22	142,24	140,86	4,53E-03	9,79E-03
3	185,13	175,18	179,71	3,02E-02	2,52E-02
4	323,42	321,94	323,89	1,45E-03	6,01E-03
5	523,48	524,08	523,43	9,48E-05	1,25E-03
6	537,17	534,50	536,57	1,12E-03	3,85E-03
7	730,12	732,55	730,04	1,11E-04	3,43E-03
8	879,67	880,70	881,28	1,82E-03	6,63E-04
9	901,47	900,43	899,69	1,98E-03	8,20E-04
10	1000,59	999,56	1.000,22	3,66E-04	6,62E-04

A estimativa de erro foi calculada seguindo a Equação (7.3) da mesma forma da discretização regular.

### 7.1.2 Deslocamentos

No caso da análise de vibração forçada, o Método de Newmark (1959) foi aplicado a fim de obter os deslocamentos ao longo do tempo, sendo adotado  $\delta = 0,5$  e  $\beta = 0,25$  neste trabalho. O método de imposição direta é empregado na implementação das condições essenciais de contorno. Os mesmos parâmetros utilizados na determinação das frequências naturais serão usados na determinação do deslocamento vertical,  $u_y$ , no ponto do meio da seção transversal na ponta em balanço, adotando a mesma discretização nodal regular de  $21 \times 9 = 189$  nós, nos casos que serão apresentados em virtude da obtenção dos bons resultados anteriormente na menor discretização nodal analisada. Para efeito de comparação, será adotada a solução dos deslocamentos para o problema em questão obtida por Liu e Gu (2001<sup>a</sup>) utilizando o programa de elementos finitos ABAQUS/EXPLICIT.

A princípio, será estudado o problema de uma carga harmônica,  $g(t) = \text{sen}(\omega_f t)$ , onde  $\omega_f$  é a frequência de  $27 \text{ rad/s}$  utilizada no problema. O passo no tempo de  $1 \times 10^{-2}$  será empregado nesta análise inicial. Constata-se, em diferentes intervalos de tempo observados, como

visualiza-se na Figura 7-4 e na Figura 7-5, uma concordância dos resultados obtidos com o ILMF e MEF. A diferença observada entre os dois métodos é insignificante. Também é estudada a influência do intervalo de tempo nos deslocamentos, sendo os resultados para  $\Delta t = 5 \times 10^{-3}$ ,  $1 \times 10^{-2}$  e  $5 \times 10^{-2}$  plotados com a resposta em elementos finitos na Figura 7-6. Percebe-se que o Método de Newmark (1959) é incondicionalmente estável para os intervalos de tempo utilizados, entretanto, verifica-se uma discrepância na resposta observada com o aumento do intervalo de tempo. Bons resultados foram verificados com o intervalo de tempo acima de  $\Delta t = 1 \times 10^{-2}$  e que será usado nas demais análises.

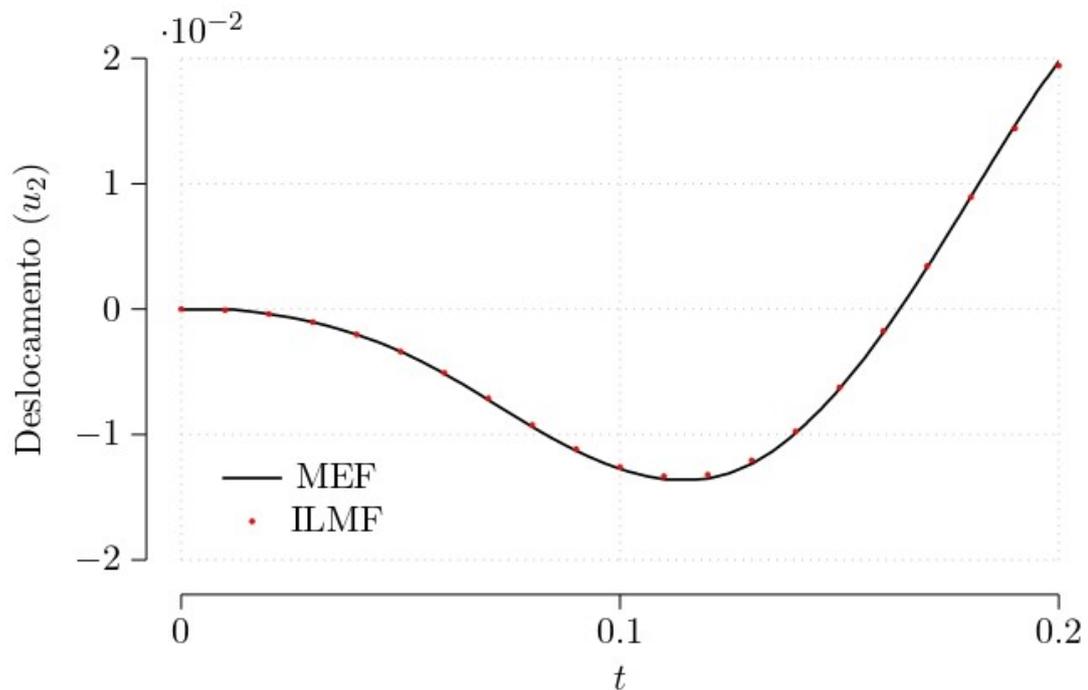


Figura 7-4 – Deslocamentos  $u_y$  no meio da seção transversal da viga em balanço ( $t = 0, 2s$ ).

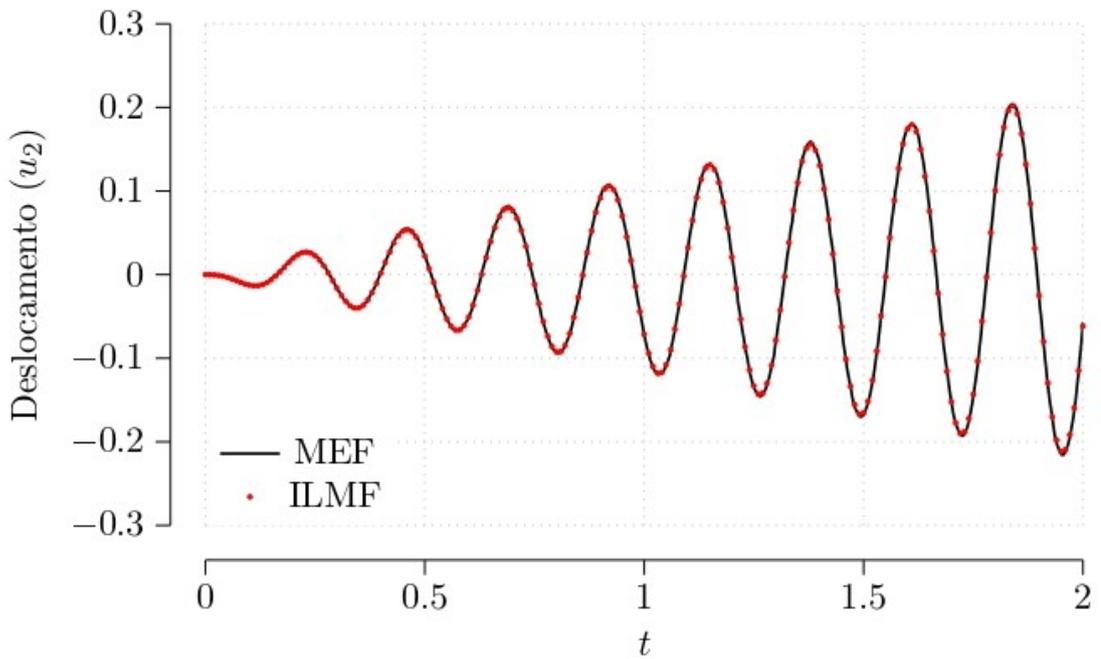


Figura 7-5 – Deslocamentos  $u_y$  no meio da seção transversal da viga em balanço ( $t = 2s$ ).

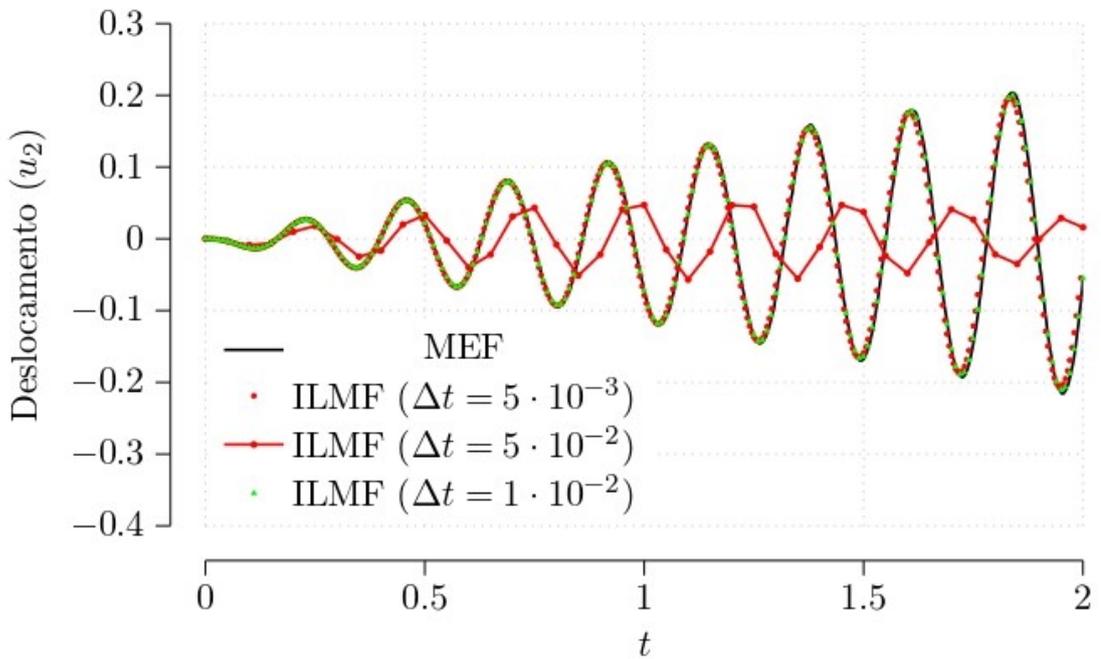


Figura 7-6 – Deslocamentos  $u_y$  no meio da seção transversal da viga em balanço ( $t = 2s$ ) em diferentes intervalos de tempo  $\Delta t$  estudados.

Quando se verifica a resposta para intervalos de tempos maiores, visualizada na Figura 7-7, considerando um coeficiente de amortecimento de  $c = 0,4$ , observa-se um comportamento estável, tendendo a se manter uma frequência estável a partir de um longo período de tempo ( $t > 15s$ ).

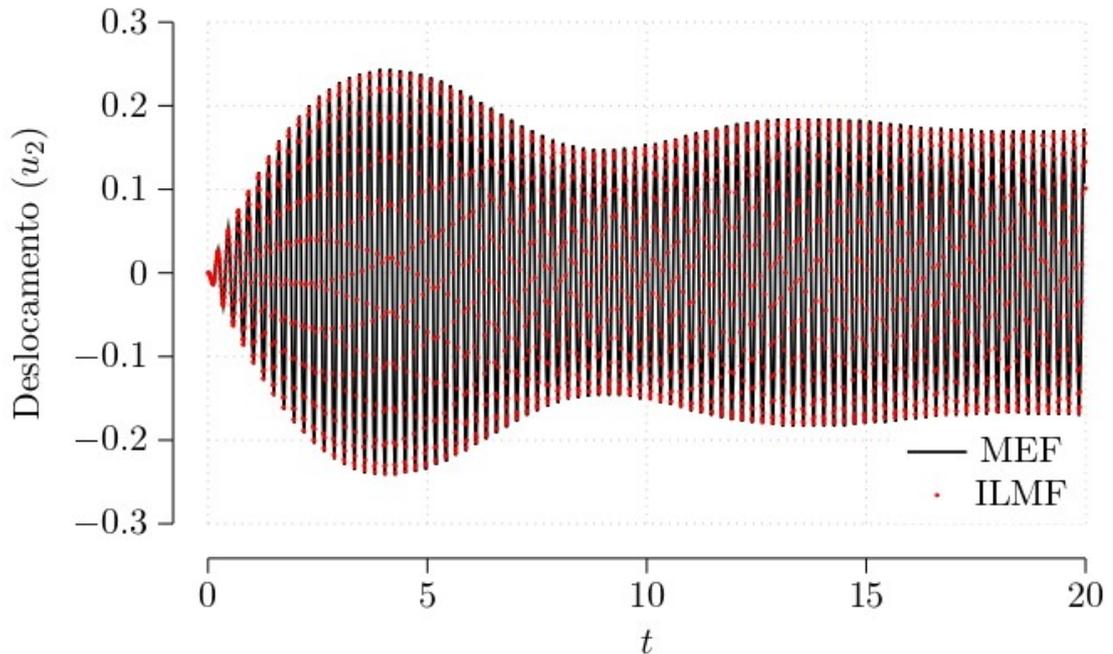


Figura 7-7 – Deslocamentos  $u_y$  no meio da seção transversal da viga em balanço para intervalos de tempo maiores ( $c = 0,4$  e  $\Delta t = 1 \times 10^{-2} s$ ).

Em seguida, são realizadas duas análises, modelando um pulso de força (Figura 7-8) que atua em um pequeno intervalo de tempo,  $t = 0,5s$ . Verifica-se na primeira simulação, considerando o coeficiente de amortecimento nulo, Figura 7-9, uma concordância entre os resultados obtidos através da aplicação da metodologia de ILMF e MEF. A fim de verificar a estabilidade do Método de Newmark (1959) para uma resposta transiente mais ampla, considerando-se o coeficiente de amortecimento  $c = 0,4$ , analisa-se a mesma situação para o tempo de  $t = 20s$ , como mostrado na Figura 7-10. Constata-se que a resposta é estável, não havendo discordância entre a resposta do ILMF e MEF, e visualiza-se um decaimento da resposta ao longo do tempo em função do amortecimento imposto.

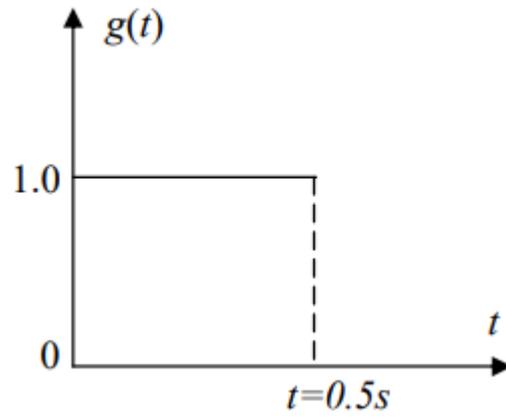


Figura 7-8 – A função  $g(t)$ .

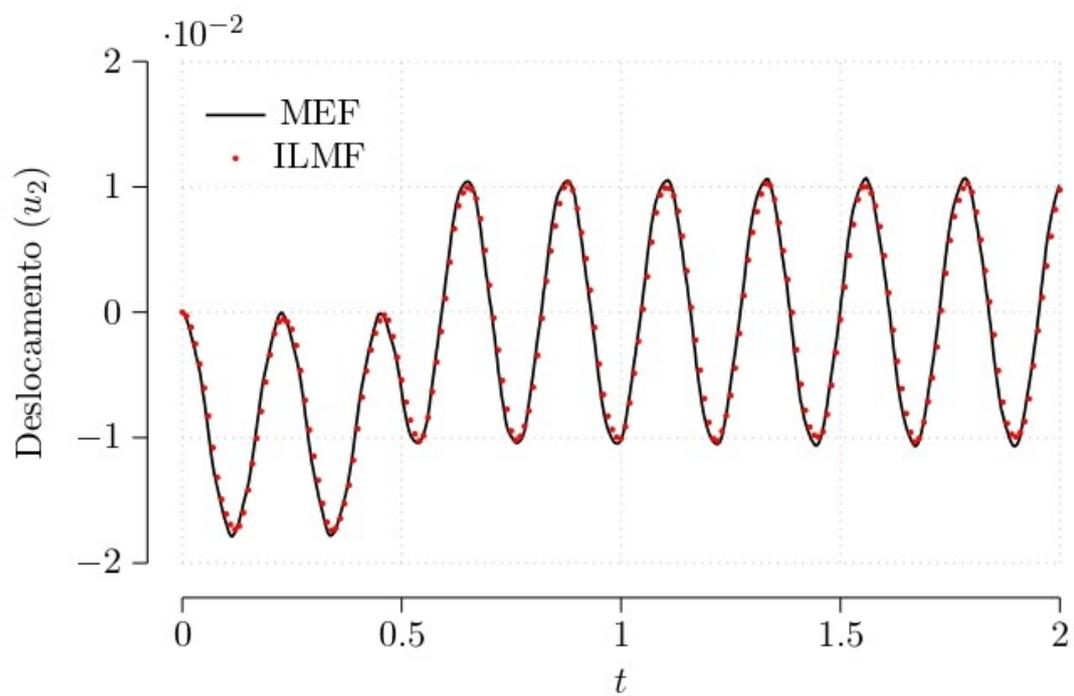


Figura 7-9 – Deslocamentos  $u_y$  no meio da seção transversal da viga em balanço sujeitos à carga de pulso ( $c = 0,0$  e  $\Delta t = 1 \times 10^{-2} s$ ).

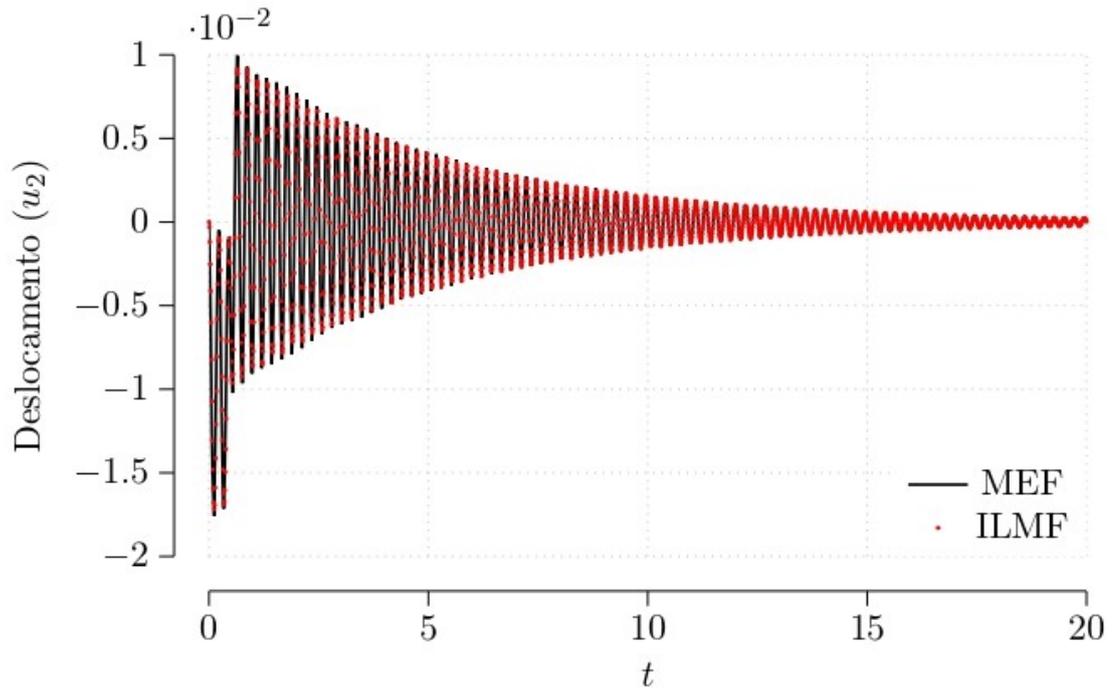


Figura 7-10 – Deslocamentos  $u_y$  no meio da seção transversal da viga em balanço sujeita à carga de pulso ( $c = 0,4$  e  $\Delta t = 1 \times 10^{-2} s$ ).

## 7.2 MÉTODO DE EXTRAPOLAÇÃO DOS DESLOCAMENTOS

O método da extrapolação de deslocamentos é uma técnica favorável na obtenção dos fatores de intensidade de tensão, levando-se em consideração apenas os deslocamentos entre duas faces nas proximidades da ponta da trinca.

De acordo com Portela *et al.* (1992), nas proximidades da ponta da trinca, o campo elástico pode ser definido por uma expansão de série infinita, resultando nas componentes do fator de intensidade de tensão para os modos I e II. Sendo o primeiro termo da expansão da série singular e o restante dos termos com tensão próxima de zero. Considerando apenas o primeiro termo da expansão da série de Williams, o campo de deslocamentos nas proximidades da ponta da trinca pode ser escrito em coordenadas polares  $(r, \theta)$  centradas na ponta da trinca e, com  $\theta = \pm\pi$  definindo as superfícies da trinca, tem-se o seguinte campo:

$$u_2(\theta = \pi) - u_2(\theta = -\pi) = \frac{k+1}{\mu} K_I \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \quad (7.4)$$

$$u_1(\theta = \pi) - u_1(\theta = -\pi) = \frac{k+1}{\mu} K_{II} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \quad (7.5)$$

Onde:

$\mu$ : módulo de cisalhamento;

$k = 3 - 4\eta$  ou  $\eta$  para o estado plano de deformação ou estado plano de tensões, respectivamente;

$\eta$ : coeficiente de Poisson;

$K_I$ : fator de intensidade de tensão do Modo I;

$K_{II}$ : fator de intensidade de tensão do Modo II.

Obtendo-se os deslocamentos nas faces das trincas, pode-se obter os fatores de intensidade de tensão a partir das equações (7.4) e (7.5) acima.

Considerando os três nós em cada face equidistantes da ponta da trinca, conforme evidenciado na Figura 7-11, e usando as equações (7.4) e (7.5), pode-se expressar os fatores de intensidade de tensão para os modos I e II em função dos valores de deslocamentos nos nós D-E e F-G:

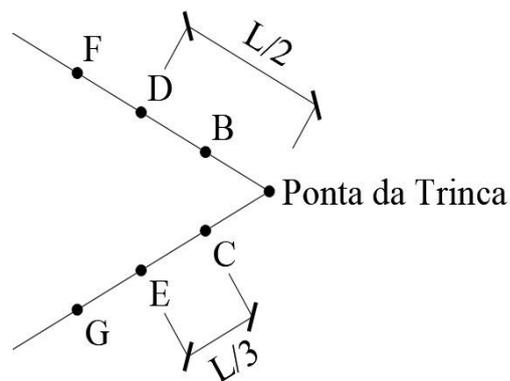


Figura 7-11 – Nós ao longo do segmento de trinca.

Para os nós D-E:

$$K_I^{DE} = (u_2^D - u_2^E) = \frac{\mu}{k+1} 2\sqrt{\frac{\pi}{l}} \quad (7.6)$$

$$K_{II}^{DE} = (u_1^D - u_1^E) = \frac{\mu}{k+1} 2\sqrt{\frac{\pi}{l}} \quad (7.7)$$

Para os nós F-G:

$$K_I^{FG} = (u_2^F - u_2^G) = \frac{\mu}{k+1} 2\sqrt{\frac{3\pi}{5l}} \quad (7.8)$$

$$K_{II}^{FG} = (u_1^F - u_1^G) = \frac{\mu}{k+1} 2\sqrt{\frac{3\pi}{5l}} \quad (7.9)$$

Através da extrapolação linear entre os nós D-E e F-G, em relação à ponta da trinca, os fatores de intensidade de tensão podem ser avaliados:

$$K_I = \left[ 5(u_2^D - u_2^E) - \frac{3\sqrt{15}}{5}(u_2^F - u_2^G) \right] \frac{\mu}{k+1} \sqrt{\frac{\pi}{l}} \quad (7.10)$$

$$K_{II} = \left[ 5(u_1^D - u_1^E) - \frac{3\sqrt{15}}{5}(u_1^F - u_1^G) \right] \frac{\mu}{k+1} \sqrt{\frac{\pi}{l}} \quad (7.11)$$

As Equações (7.10) e (7.11) serão utilizadas na avaliação dos fatores de intensidade de tensão.

No primeiro momento, o método da Extrapolação de Deslocamentos será validado com a aplicação da técnica em 4 (quatro) exemplos e comparação dos resultados obtidos por outras técnicas. Compara-se com os resultados obtidos por Portela *et al.* (1992), utilizando a integral J no *Dual Boundary Element Method*, valores analíticos de referência propostos por Murakami (1987), calculados através de combinações de séries de potência, e por Civelek e Erdokan

(1982), por meio de equações integrais singulares, e na Técnica de Subtração da Singularidade (SST), aplicada ao *GSMF* por Oliveira (2019). Em todos os exemplos, será considerada uma placa retangular com tração uniforme em extremidades determinadas e, assim, dependendo do caso analisado, promovendo um modo de abertura único ou misto. Os seguintes parâmetros serão adotados:

$$\sigma = 100Pa$$

$$E = 2,0 \times 10^5 Pa$$

$$\nu = 0,3$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$K = 3 - 4\nu$$

$$\alpha_q = 0,5$$

Em todas as análises, a aproximação do MQM utilizou a base polinomial de primeira ordem e funções pesos do tipo *quartic spline* e superfícies da trinca distanciadas de 1mm.

Por último, em relação a discretização nodal utilizada nos exemplos a seguir, cabe mencionar que foram determinadas em função de análises previamente realizadas e adotadas na pesquisa de Oliveira (2019).

### 7.2.1 Placa com trinca reta de borda – Modo I

Este primeiro exemplo caracteriza-se por ser um problema de abertura puro (Modo I). Trata-se de uma placa retangular com um comprimento de trinca reto a partir da extremidade direita localizada no meio da altura, submetida a uma tração uniforme e simétrica em cada face, conforme demonstrado na Figura 7-12, sujeitando a placa ao estado de cisalhamento puro

(Modo II). A relação entre a altura da placa ( $W$ ) e a largura ( $l_b$ ) é igual à unidade em todas as relações analisadas de  $(a/W)$ .

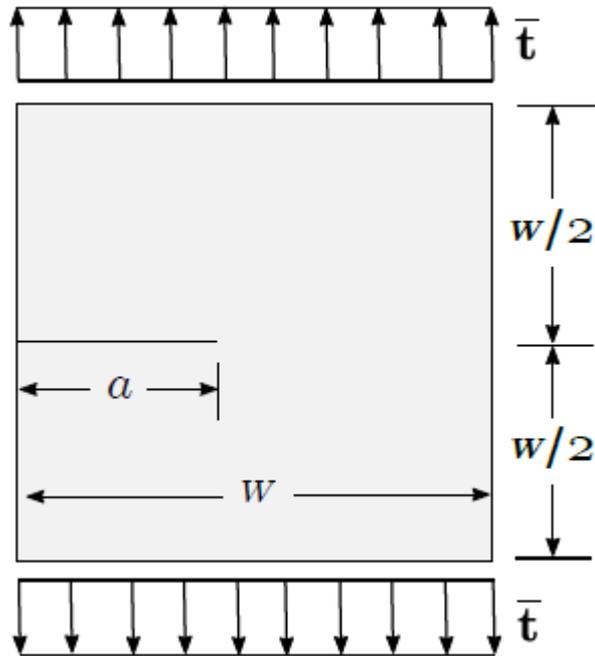


Figura 7-12 – Placa retangular com trinca reta de extremidade simétrica sob carregamento uniforme  $\bar{t}$  simétrico.

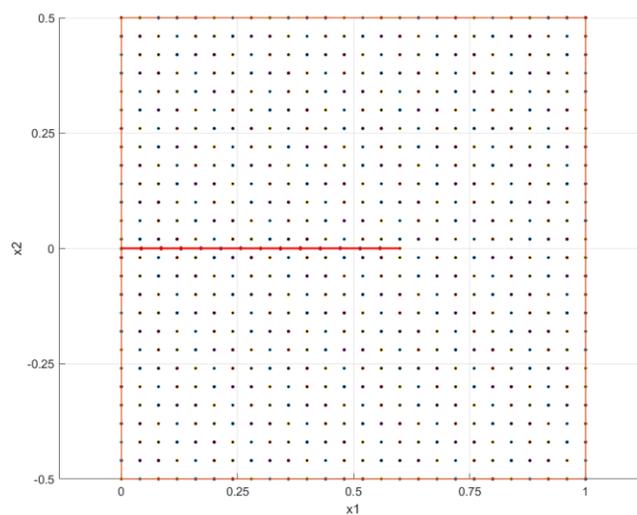


Figura 7-13 – Discretização nodal da placa retangular com uma trinca reta de bordo (linha em vermelho). Relação do comprimento da trinca ( $a$ ) e a altura da placa ( $W$ ) igual a  $a/W = 0,6$  e 676 nós regulares distribuídos ao longo do domínio interno e contorno.

Analisaram-se cinco diferentes configurações da relação entre o comprimento de trinca e a altura da placa ( $a/W$ ) para este exemplo de modo de abertura. A discretização da placa (Figura 7-13) constou de 26x26 nós distribuídos ao longo do comprimento e da altura da placa, sendo que estes parâmetros geométricos são unitários. Destaca-se que os valores do fator de intensidade de tensão (Tabela 7-7) para o modo de abertura ( $K_I$ ) em todas as relações ( $a/W$ ) analisadas foram insignificantes, da ordem de  $10^{-12}$ , coincidindo com o resultado esperado.

Tabela 7-7 – Valores dos fatores de intensidade de tensão para o modo de abertura ( $K_I$ )

$a/W$	$K_I/t\sqrt{\pi a}$				Diferença percentual relativa (%)		
	ILMF – MED (1)	ILMF – SST (2)	J – DBEM (3)	Civelek (4)	(1)/(2)	(1)/(3)	(1)/(4)
0,2	1,422	1,520	1,495	1,488	6,662	5,005	4,536
0,3	1,943	1,967	1,858	1,848	1,228	4,473	5,012
0,4	2,322	2,413	2,338	2,324	3,844	0,687	0,086
0,5	3,019	2,973	3,028	3,010	1,535	0,298	0,299
0,6	4,165	3,991	4,184	4,152	4,267	0,455	0,313

Observa-se que os resultados são aceitáveis em relação aos obtidos por outros métodos na comparação. Uma diferença máxima de 6% entre o método de extrapolação de deslocamentos com a técnica de subtração da singularidade foi constatada para a relação de  $a/W = 0,2$ . Não foi necessário nenhum refinamento da malha ao redor da ponta da trinca ou utilização de funções enriquecedoras na aproximação dos deslocamentos. O número de nós ao longo do

segmento de trinca foi estabelecido de forma proporcional ao número de nós ao longo do comprimento da placa ( $l_b$ ) e a razão entre o comprimento do segmento de trinca e da largura da placa, neste caso, foram 6 nós ao longo de cada comprimento e um nó representando a ponta da trinca. O domínio de influência  $\alpha_s$  adotado em cada relação  $(a/W)$  compreendeu o intervalo de 7,3 a 10,5.

### 7.2.2 Placa com trinca reta de borda em cisalhamento puro – Modo II

Trata-se de uma placa retangular com um comprimento de trinca reto a partir da extremidade direita localizada no meio da altura, submetida a uma tração uniforme não simétrica em cada face, conforme demonstrado na Figura 7-14, sujeitando a placa ao estado de cisalhamento puro (Modo II). A relação entre a altura da placa ( $W$ ) e a largura ( $l_b$ ) é igual à unidade em todas as relações analisadas de  $(a/W)$ . Discretizou-se a placa retangular com 26x16 nós regulares ao longo de toda a largura e altura, conforme visualiza-se na Figura 7-15.

Os resultados serão comparados com os dados obtidos na tese de Oliveira (2019) e com o trabalho desenvolvido por Aliabadi e Portela (1999), utilizando a integral J no método de DBEM (*Dual Boundary Element Method*).

Como no primeiro exemplo, foram utilizadas cinco relações entre comprimento de trinca e altura da placa  $(a/W)$ .

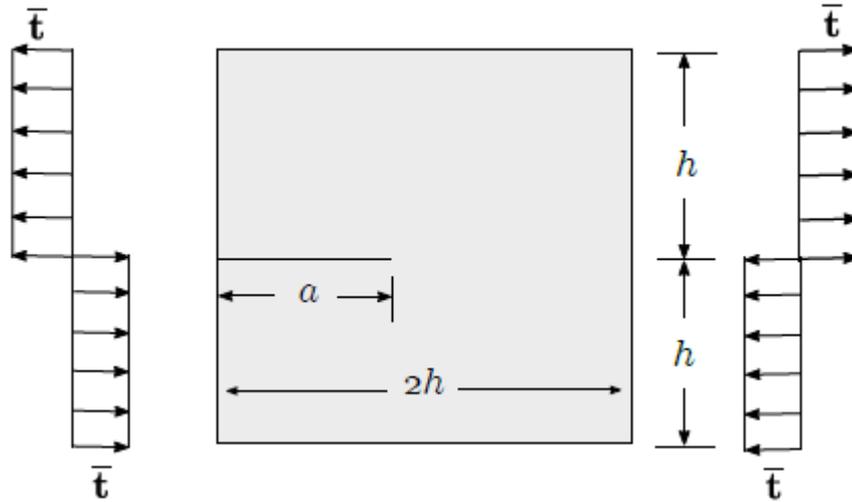


Figura 7-14 – Placa retangular com trinca reta de extremidade simétrica sob carregamento uniforme  $\bar{\tau}$  assimétrico cisalhante.

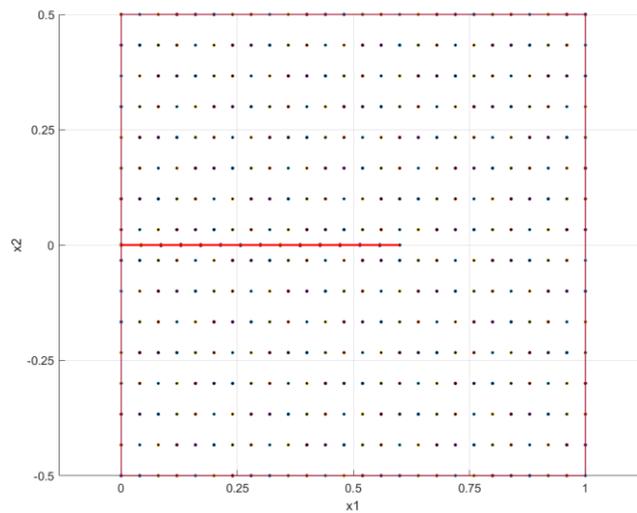


Figura 7-15 – Discretização nodal da placa retangular submetida sob carregamento uniforme  $\bar{\tau}$  assimétrico cisalhante com uma trinca reta de bordo (linha em vermelho). Relação entre o comprimento da trinca ( $a$ ) e a altura da placa ( $W$ ) igual a  $a/W = 0,6$  e 416 nós regulares distribuídos ao longo do domínio interno e contorno.

Tabela 7-8 – Valores dos fatores de intensidade de tensão para o modo de cisalhamento ( $K_{II}$ )

$K_{II}/t\sqrt{\pi a}$				Diferença percentual relativa (%)	
$a/W$	ILMF – MED (1)	ILMF – SST (2)	J – DBEM (3)	(1)/(2)	(1)/(3)
0,2	0,425	0,416	0,435	2,352	2,114
0,3	0,362	0,338	0,358	6,857	1,111
0,4	0,294	0,296	0,304	0,542	3,209
0,5	0,246	0,248	0,262	0,769	6,259
0,6	0,218	0,218	0,223	0,000	2,268

Os resultados obtidos (Tabela 7-8) revelam uma ótima concordância com os trabalhos em comparação, principalmente em relação à pesquisa de Oliveira (2019), utilizando a técnica de subtração da singularidade. Não houve uma discordância superior a 6,85%. O domínio de influência  $\alpha_s$  adotado variou de 1,83 a 3,65, dependendo da relação  $(a/w)$  estudada neste exemplo.

### 7.2.3 Placa com trinca inclinada de borda – Modo misto

Neste primeiro exemplo de modo misto, ou seja, cisalhamento fora do plano, analisa-se a mesma placa com as mesmas propriedades elásticas e carregamento definidos anteriormente, com medidas geométricas unitárias ( $l_b = 1$  e  $W = 1$ ) e carregamento uniforme no topo e na base da placa. A trinca inclinada se localiza no meio da altura da extremidade direita (Figura 7-16) e será analisada para dois diferentes ângulos de 30° e 60° e três diferentes relações entre  $(a/W)$ , cujos resultados são apresentados da Tabela 7-9 até a Tabela 7-12.

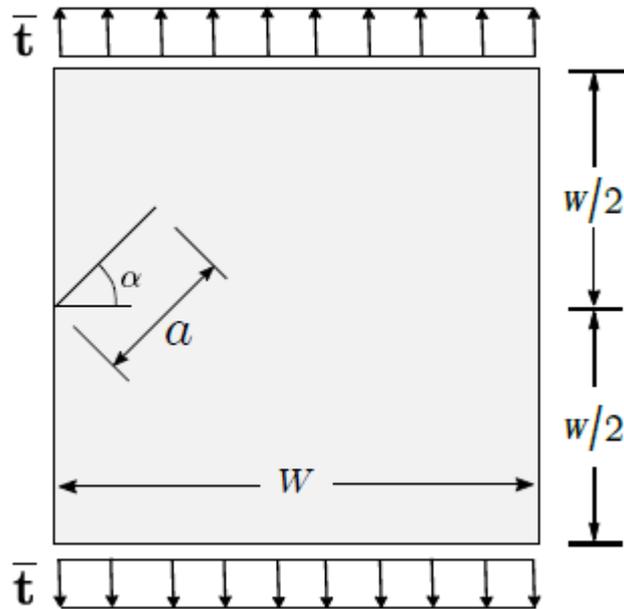


Figura 7-16 – Placa retangular com trinca inclinada de extremidade sob carregamento uniforme  $\bar{t}$  simétrico aplicado no topo e na base.

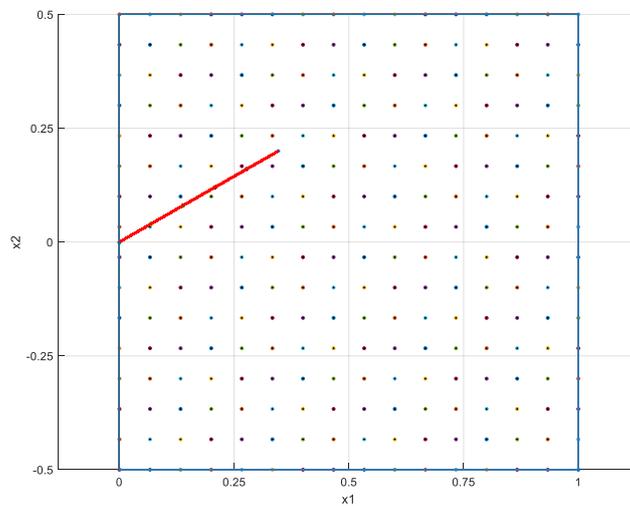


Figura 7-17 – Discretização nodal da placa retangular com uma trinca inclinada de bordo (linha em vermelho). Relação entre o comprimento da trinca ( $a$ ) e a altura da placa ( $W$ ) igual a  $a/W = 0,4$  e 256 nós regulares distribuídos ao longo do domínio interno e contorno.

Tabela 7-9 – Valores dos fatores de intensidade de tensão para o modo de abertura ( $K_I$ ) -  $\theta = 30^\circ$

$K_I/t\sqrt{\pi a}$					Diferença percentual relativa (%)		
$a/W$	ILMF – MED (1)	ILMF – SST (2)	J – DBEM (3)	Murakami (4)	(1)/(2)	(1)/(3)	(1)/(4)
0,2	1,227	1,164	1,082	1,100	5,270	12,560	10,915
0,4	1,551	1,513	1,545	1,550	2,480	0,388	0,064
0,6	2,460	2,732	2,572	2,550	10,478	4,452	3,593

Tabela 7-10 – Valores dos fatores de intensidade de tensão para o modo de abertura ( $K_I$ ) -  $\theta = 60^\circ$

$K_I/t\sqrt{\pi a}$					Diferença percentual relativa (%)		
$a/W$	ILMF – MED (1)	ILMF – SST (2)	J – DBEM (3)	Murakami (4)	(1)/(2)	(1)/(3)	(1)/(4)
0,2	0,455	0,543	0,495	0,500	17,635	8,421	9,424
0,4	0,600	0,603	0,592	0,600	0,499	1,342	0,000

Tabela 7-11 – Valores dos fatores de intensidade de tensão para o modo de cisalhamento ( $K_{II}$ ) -  $\theta = 30^\circ$

$K_{II}/t\sqrt{\pi a}$					Diferença percentual relativa (%)		
$a/W$	ILMF – MED (1)	ILM F – SST (2)	J – DBE M (3)	Murakam i (4)	(1)/(2)	(1)/(3)	(1)/(4)

0,2	0,347	0,325	0,351	0,350	6,548	1,146	0,861
0,4	0,449	0,471	0,474	0,470	4,605	5,239	4,392
0,6	0,772	0,580	0,700	0,700	28,402	9,783	9,783

Tabela 7-12 – Valores dos fatores de intensidade de tensão para o modo de cisalhamento ( $K_{II}$ ) -  $\theta = 60^\circ$

$K_{II}/t\sqrt{\pi a}$					Diferença percentual relativa (%)		
$a/W$	ILMF – MED (1)	ILMF – SST (2)	J – DBEM (3)	Murakami (4)	(1)/(2)	(1)/(3)	(1)/(4)
0,2	0,329	0,327	0,356	0,360	0,610	7,883	8,999
0,4	0,443	0,439	0,413	0,420	0,884	6,987	5,308

Sublinha-se que, neste exemplo, foi notada uma certa dificuldade na precisão dos resultados obtidos. Obteve-se, como mostrado na Tabela 7-10, uma diferença máxima da ordem de 17% em comparação com a técnica de subtração da singularidade para o modo de abertura. Cabe ressaltar que tal diferença pode ser considerada aceitável em virtude de não ter sido observada uma diferença da mesma ordem com os outros métodos. Utilizou-se uma configuração nodal simples de 16x16 nós (Figura 7-17) com a variação do domínio de influência  $\alpha_s$  entre 6,6 e 8,3 em função dos parâmetros geométricos utilizados no segmento de trinca, ou seja, variação do ângulo de inclinação e comprimento da trinca. O segmento de trinca foi discretizado com 6 nós em cada face do segmento de trinca e um nó na ponta da trinca externa.

#### 7.2.4 Placa com trinca interna inclinada – Modo misto

No segundo exemplo da análise em modo misto, propõe-se obter os valores dos fatores de intensidade de tensão em uma placa retangular com tração uniforme aplicada nas extremidades com trinca interna inclinada. A altura é o dobro da largura  $\left(\frac{h}{W} = 2\right)$  e a trinca interna é inclinada com o ângulo de  $45^\circ$  (Figura 7-18).

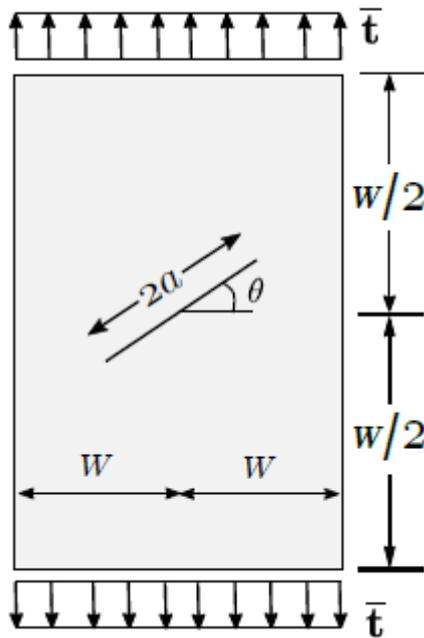


Figura 7-18 – Placa retangular com trinca reta central inclinada sob carregamento uniforme  $\bar{t}$

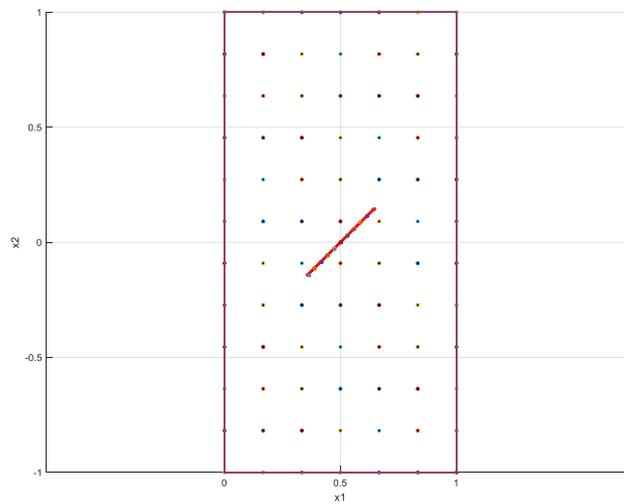


Figura 7-19 – Discretização nodal da placa retangular com uma trinca interna inclinada (linha em vermelho). Relação entre o comprimento da trinca ( $a$ ) e a altura da placa ( $W$ ) igual a

$\frac{a}{W} = 0,2$  e 84 nós regulares, distribuídos ao longo do domínio interno e contorno.

Foram analisados três casos de relações entre o comprimento de segmento de trinca e a altura da placa ( $a/W$ ), apresentando os resultados nas Tabela 7-13 e Tabela 7-14. A discretização da placa é realizada através da distribuição nodal regular (7x12), conforme apresentado na Figura 7-19, sendo adicionados nós extras ao longo das faces do comprimento de trinca. Compararam-se esses resultados com aqueles obtidos por Murakami (1987), Aliabadi e Portela (1999), implementando a integral J no método DBEM e Oliveira (2019), através da técnica de Subtração da Singularidade, sendo esta pesquisa mais recente desenvolvida no PECC-UnB.

Tabela 7-13 – Valores dos fatores de intensidade de tensão para o modo de abertura ( $K_I$ )

$K_I/t\sqrt{\pi a}$					Diferença percentual relativa (%)		
$a/W$	ILMF – MED (1)	ILMF – SST (2)	J – DBEM (3)	Murakami (4)	(1)/(2)	(1)/(3)	(1)/(4)
0,2	0,533	0,519	0,521	0,518	2,812	2,427	3,004
0,4	0,580	0,575	0,576	0,572	0,969	0,795	1,492
0,6	0,611	0,626	0,666	0,661	2,409	8,598	7,845

Tabela 7-14 – Valores dos fatores de intensidade de tensão para o modo de cisalhamento ( $K_{II}$ )

$K_{II}/t\sqrt{\pi a}$					Diferença percentual relativa (%)		
$a/W$	ILMF – MED (1)	ILMF – SST (2)	J – DBEM (3)	Murakami (4)	(1)/(2)	(1)/(3)	(1)/(4)
0,2	0,494	0,529	0,508	0,507	6,721	2,673	2,476
0,4	0,520	0,532	0,529	0,529	2,147	1,581	1,581
0,6	0,555	0,585	0,569	0,567	5,119	2,347	1,995

Destaca-se que os resultados obtidos no método de extrapolação dos deslocamentos apresentam uma boa concordância com outros resultados consolidados que utilizam metodologias diferentes para a trinca inclinada interna em modo misto. A diferença máxima observada foi de 8,59% para a relação  $(a/W) = 0,6$  e entre as metodologias de extrapolação de deslocamentos e SST. Notou-se que o erro relativo entre as metodologias é maior neste caso misto. O segmento de trinca foi discretizado com 11 nós em cada face e o domínio de influência  $\alpha_s$  variou entre 3 e 3,7, de acordo com a relação  $(a/W)$  analisada.

### 7.3 FATOR DE INTENSIDADE DE TENSÃO DINÂMICO (DSIF)

Nesta seção da tese, serão realizadas análises da aplicação da técnica de subtração da singularidade em problemas da mecânica da fratura linear elástica com o objetivo de obter o fator de intensidade de tensão dinâmico (DSIFs) ao redor da ponta da trinca. No decorrer da tese, partes do código foram verificadas individualmente de forma a validar a resposta em cada caso, estático ou dinâmico, como foi o caso da validação do Método de Newmark (1959) em problemas bidimensionais elastodinâmicos, aplicando a metodologia proposta no problema padrão da viga em balanço, como demonstrado nos exemplos anteriormente. Com o mesmo objetivo, aplicou-se o método de Extrapolação dos Deslocamentos em casos da Mecânica da Fratura na determinação dos fatores de intensidade em placas retangulares com trincas internas ou de borda submetidas a carregamentos simétricos e assimétricos, obtendo respostas satisfatórias em todos os casos.

A partir dos bons resultados obtidos ao longo do desenvolvimento do trabalho, visualizados através da precisão e da acurácia dos dados, pode-se ter a confiança de realizar as últimas análises do ILMF com o Método de Newmark (1959), a Extrapolação dos Deslocamentos e a Técnica de Subtração da Singularidade na avaliação do comportamento da fratura em relação aos DSIFs. A técnica será aplicada em 4 (quatro) problemas equivalentes percorridos por Zhou *et al.* (2016), Abdollahifar e Nami (2014) e Wen e Aliabadi (2009), utilizando-os como referência. Os exemplos serão os seguintes:

- Placa com trinca reta interna, de modo de abertura I;

- Placa com trinca reta interna com dois materiais de transição, de modo de abertura I;
- Placa retangular homogênea com trinca de borda inclinada, de modo misto;
- Placa retangular homogênea com trinca interna inclinada, de modo misto.

Em todos os exemplos, a aproximação do MQM utilizou a base polinomial de primeira ordem e funções pesos do tipo *quartic spline*. Três pontos de Gauss foram usados para a integração da matriz de massa consistente (HUGHES, 1987) e dois pontos para a montagem da matriz de rigidez, computada nó a nó.

### 7.3.1 Placa com trinca reta interna – Modo I

O primeiro exemplo analisado consta de uma placa retangular com trinca interna submetida a um carregamento constante  $\bar{t}$  nas bordas superior e inferior, sendo que tal configuração promoverá um modo de abertura único. Adotaram-se os mesmos parâmetros geométricos e elásticos do exemplo 3 de Zhou *et al.* (2016) a fim de comparar os resultados do DSIF, obtido através da técnica de subtração da singularidade (SST) no ILMF, com outros métodos numéricos. A placa foi discretizada com uma configuração nodal de 16x16 nós ao longo do comprimento e da altura, respectivamente, de 104 mm e 40 mm. Adotou-se uma trinca interna de 24 mm e módulo de elasticidade de 200GPa. A Figura 7-20 demonstra a caracterização geométrica do exemplo com a aplicação da carga constante  $\sigma(t) = 0,1GPa$  no topo e na base da placa. Na Figura 7-21, visualiza-se o fator de intensidade de tensão dinâmico para o modo de abertura I ( $K_I$ ) normalizado, ou seja,  $K_I/\sigma_0\sqrt{\pi a}$ , plotado até o intervalo de  $10\mu s$ . De acordo com os resultados obtidos, nota-se uma concordância dos resultados da SST com as outras duas abordagens utilizadas na comparação.

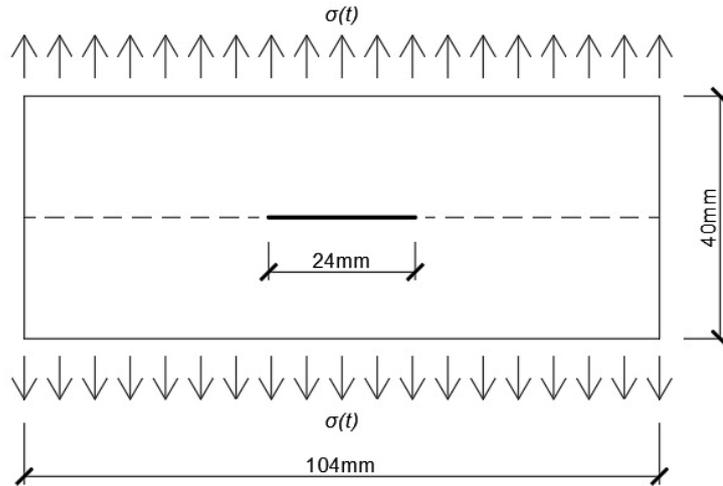


Figura 7-20 – Placa retangular com trinca reta interna sob carregamento uniforme  $\bar{t}$  simétrico no topo e na base.

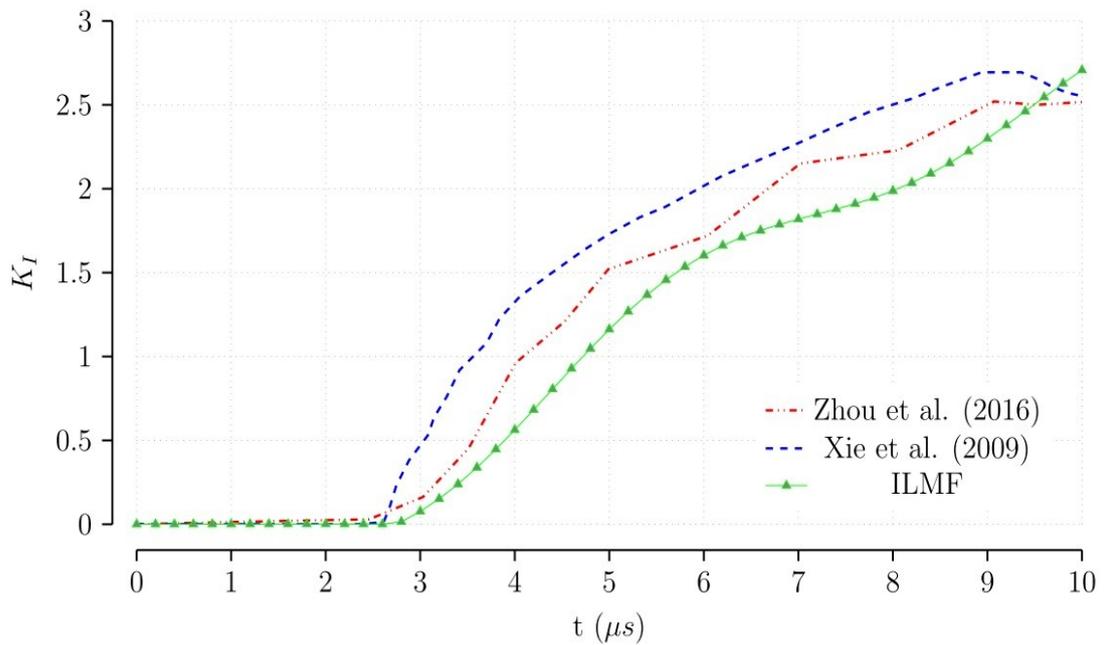


Figura 7-21 – Fator de intensidade de tensão dinâmico normalizado ( $K_I$ ) de uma placa retangular com trinca reta interna sob carregamento uniforme  $\bar{t}$  simétrico nas bordas longitudinais.

Nota-se que, nos instantes iniciais, os valores dos DSIFs são bem próximos da origem do eixo vertical, não possuindo valor significativo e, próximo ao valor de  $2,8\mu s$ , o valor do DSIF *versus* tempo cresce de forma considerável. Tal fato tem uma explicação física, correspondendo ao tempo necessário para que a onda dilatacional induzida pelas forças externas encontre a ponta da trinca, chamado de tempo de inicialização. No exemplo, observa-se um tempo numérico de inicialização de  $2,8\mu s$ , diferenciando do tempo teórico de inicialização que é igual a  $3,82\mu s$ , evidenciado na relação  $H/C_d$ . A velocidade da onda longitudinal dilatacional  $C_d$  (FUNG, 1965) pode ser expressa pela seguinte equação:

$$C_d = \sqrt{\frac{E(1-\nu)}{\rho(1+\nu)(1-2\nu)}} \quad (7.12)$$

Substituindo os valores conhecidos do módulo de elasticidade, densidade do material e coeficiente do Poisson, tem-se que:

$$C_d = \sqrt{\frac{200GPa(1-0,3)}{2450 \frac{kg}{m^3}(1+0,3)(1-2 \cdot 0,3)}} = 10,48mm / \mu s \quad (7.13)$$

E como relatado, o tempo de inicialização teórico é igual a  $\frac{H}{C_d} = \frac{40mm}{10,48mm / \mu s} = 3,82\mu s$ .

O intervalo de tempo utilizado na análise dinâmica, aplicando o Método de Newmark, foi de  $\Delta t = 0,20 \times 10^{-6} s$ . A influência do intervalo de tempo na resposta do DSIFs também é verificada para 5 intervalos de tempo diferentes ( $0,05\mu s; 0,1\mu s; 0,2\mu s; 0,4\mu s; 0,5\mu s$ ), plotando-se os valores dos DSIFs em relação ao tempo na Figura 7-22. Percebe-se que, com o decréscimo do intervalo de tempo, obtêm-se resultados que convergem positivamente e que, com tempos maiores, apresenta-se um afastamento notável entre as curvas de intervalos de tempo analisadas, ou seja, para longos intervalos de tempo, ocorrerá uma resposta imprecisa no tempo. Observa-se que não há diferença significativa entre os intervalos de tempo de  $0,05$ ;

0,10 e  $0,20\mu s$ , de forma que, para reduzir o custo de processamento computacional, o intervalo de tempo de  $0,20\mu s$  será utilizado nos demais casos analisados.

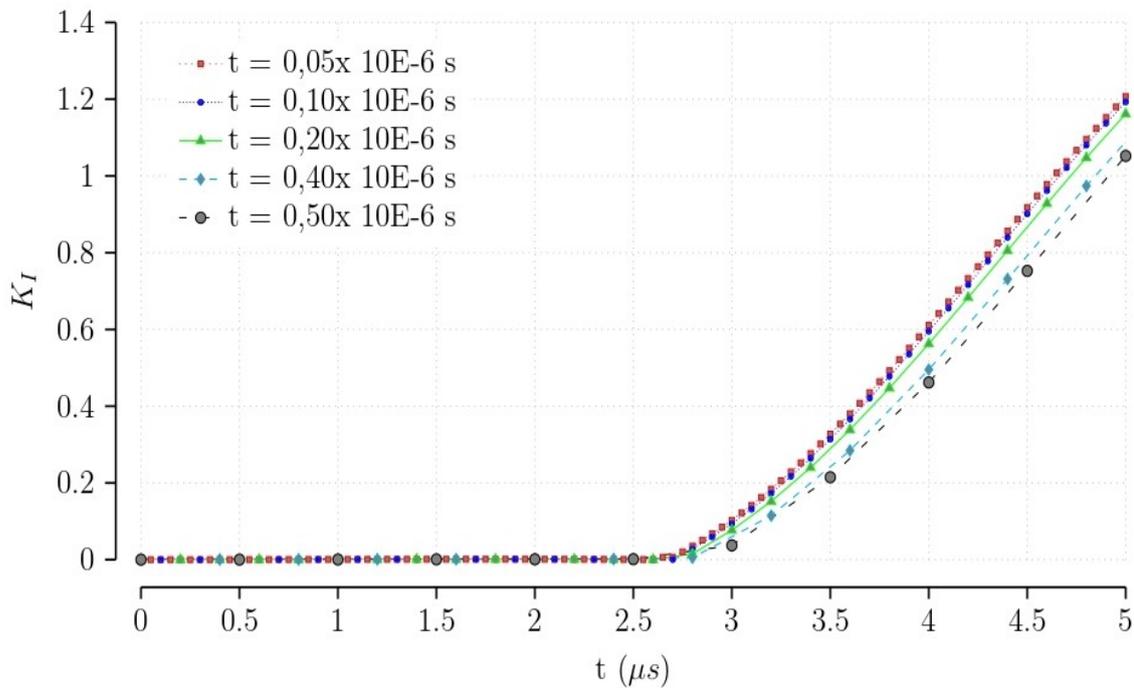


Figura 7-22 – Análise da influência do intervalo de tempo utilizado no Método de Newmark na obtenção do Fator de intensidade de tensão dinâmico normalizado ( $K_I$ ).

Outras análises foram realizadas para o exemplo em questão, a fim de avaliar a influência de outros parâmetros nos valores de DSIFs. Conforme esperado, como visualiza-se na Figura 7-23, com o aumento do valor do carregamento, não há alteração significativa nos valores dos fatores de intensidade de tensão, uma tendência uniforme e em conformidade proporcionais com os valores das tensões iniciais, sendo tal fato coerente com a análise teórica, visto que os valores dos DSIFs de quaisquer singularidades são influenciados basicamente pelos parâmetros geométricos como a largura da placa e o comprimento da trinca, detalhados em termos do fator de forma  $f(a/w)$ .

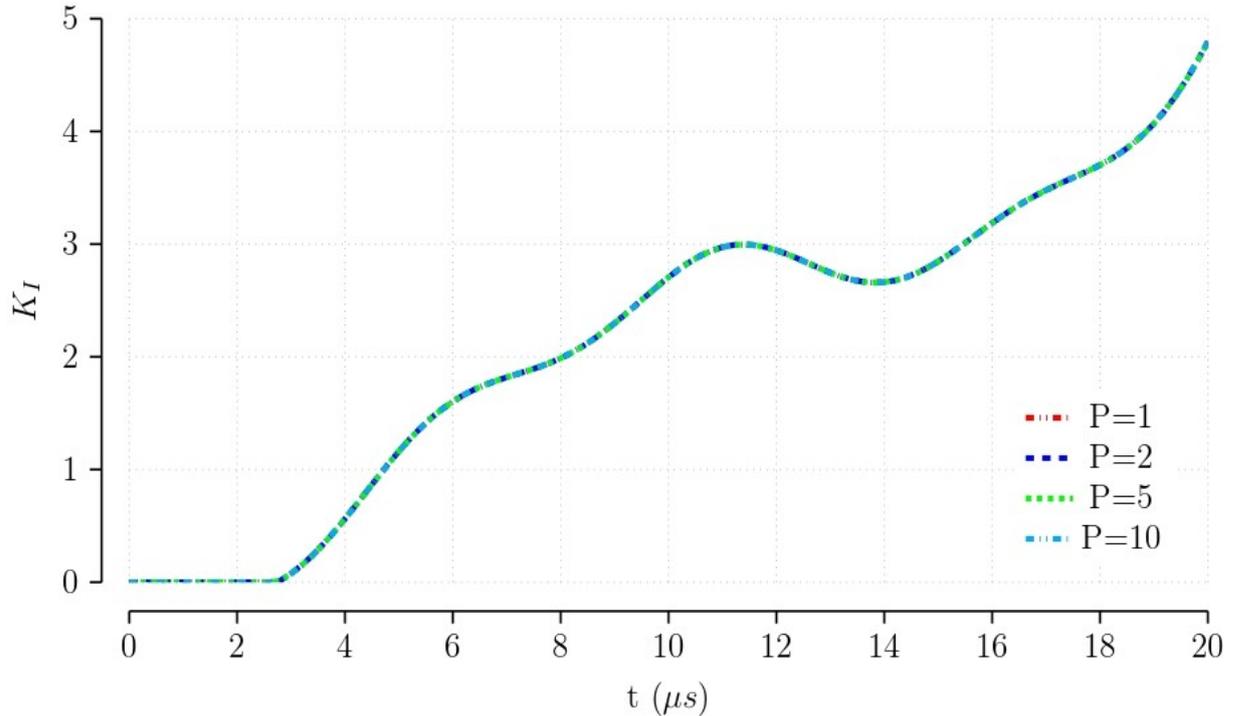


Figura 7-23 – Análise da influência do carregamento no valor do Fator de intensidade de tensão dinâmico normalizado ( $K_I$ ).

A Figura 7-24 diz respeito à influência do tamanho da trinca nos valores dos DSIFs, sendo a análise da influência do comprimento da trinca interna ( $a$ ) no valor do fator de intensidade de tensão dinâmico normalizado ao longo do tempo. E, assim, adotou-se três valores para o comprimento da trinca ( $a$ ) e fixou o comprimento da placa em 104 mm. Conclui-se, observando o gráfico da Figura 7-24, que, à medida que aumenta o comprimento da trinca, aumentam gradativamente os valores dos DSIFs. Este comportamento era previsível, pois, com o acréscimo gradual da relação ( $a/l_b$ ), há uma abrangência maior da área do campo de tensões singulares e, conseqüentemente, o aumento da singularidade no elemento em observação, sendo os valores dos DSIFs proporcionais ao comprimento da trinca, isto é, quanto maior o comprimento da trinca maior serão os valores dos DSIFs.

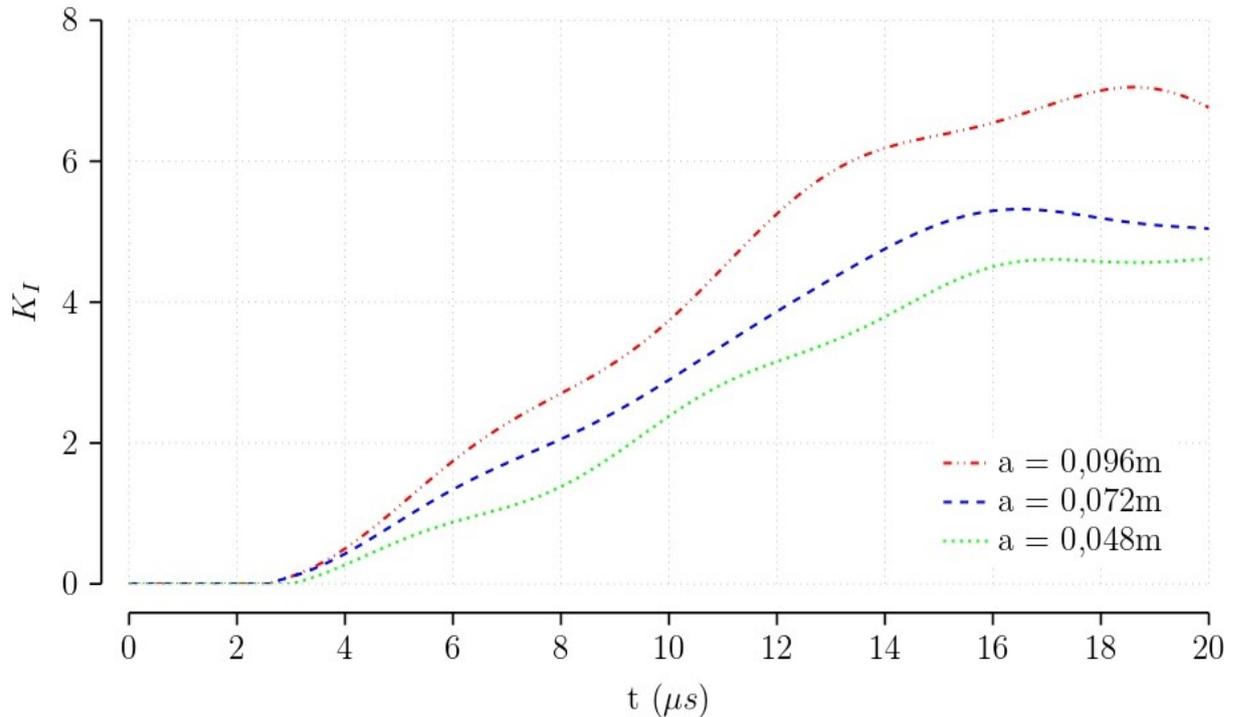


Figura 7-24 – Análise do comprimento da trinca no valor do Fator de intensidade de tensão dinâmico normalizado ( $K_I$ ).

### 7.3.2 Placa com trinca reta interna com dois materiais de transição – Modo I

O segundo exemplo de aplicação é muito parecido com o primeiro, sendo uma placa retangular com as mesmas dimensões geométricas de largura, altura, posição e comprimento da trinca interna. A diferença está na análise do comportamento da trinca quando a placa é constituída de dois materiais com propriedades elásticas distintas, dispostos perpendicularmente ao plano da trinca. Este tipo de exame foi realizado por Abdollahifar e Nami (2014) no estudo da mecânica da fratura bidimensional, utilizando o método de MLPG (ATLURI e ZHU, 1998), com o emprego de funções de peso enriquecidas ao redor da trinca, sendo o referido artigo usado como referência nesta segunda análise.

Como dito, os parâmetros geométricos são os mesmos do problema anterior, alterando-se apenas a tensão aplicada na placa, a densidade ( $\rho$ ) e o coeficiente de Poisson ( $\nu$ ) do material e adotando-se o módulo de elasticidade e densidade em graduação de acordo com a orientação do eixo, com o objetivo de equipar os parâmetros ao estudo de referência. Adotaram-se os seguintes dados:

$$\sigma = 0,4H(t) = \begin{cases} 0,4GPa & t > 0 \\ 0GPa & t \leq 0 \end{cases}$$

$$E_1 = 76GPa$$

$$\nu = 0,286$$

$$\rho_1 = 2.450 kg/m^3$$

A Figura 7-25 expõe a geometria utilizada no modelo numérico, bem como a disposição ao longo do comprimento da trinca. O comprimento da zona de gradação dos materiais foi considerado a metade do comprimento da placa na direção analisada, adotando-se a gradação do módulo de elasticidade e densidade, conforme a equação abaixo:

$$E(x) = E_1 \exp(\beta x)$$

$$\beta = \ln\left(\frac{E_1}{E_2}\right) / L$$

$$E_1 = E(0), E_2 = E(L)$$

$$\rho(x) = \rho_1 \exp(\beta x)$$

$$\rho_1 = \rho(0), \rho_2 = \rho(L)$$

(7.14)

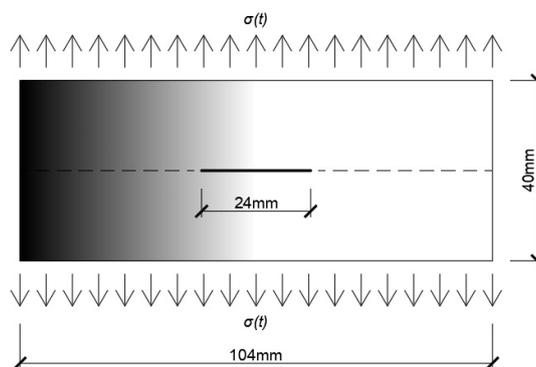


Figura 7-25 – Placa retangular com trinca interna sob carregamento uniforme  $\bar{t}$  simétrico no topo e na base perpendicular ao plano da trinca com gradação de metade do plano.

Os valores obtidos dos DSIFs normalizados, ou seja,  $K_I/\sigma_0\sqrt{\pi a}$ , são demonstrados graficamente na Figura 7-26, considerando o intervalo de tempo de  $20\mu s$ . Plotam-se os resultados de referência do trabalho desenvolvido por Abdollahifar e Nami (2014), com o objetivo de comparar as respostas alcançadas por abordagens diferentes para obter os DSIFs. A abscissa e a ordenada representam o tempo e os DSIFs normalizados, respectivamente. Os valores dos DSIFs permanecem próximos de zero até aproximadamente  $2,4\mu s$ , tempo decorrido desde o início da aplicação da carga externa até o encontro da onda dilatacional nas faces e na ponta da trinca. A partir deste momento, percebe-se um aumento dos valores dos DSIFs, observando-se a similaridade entre os resultados obtidos por metodologias diferentes na análise, utilizando materiais de transição ao longo do comprimento da trinca. Na relação entre os módulos de elasticidade  $E_2/E_1=5$ , observou-se o valor de pico do DSIF de 3,00 e a referência de 2,78, uma diferença aceitável de 7,91%.

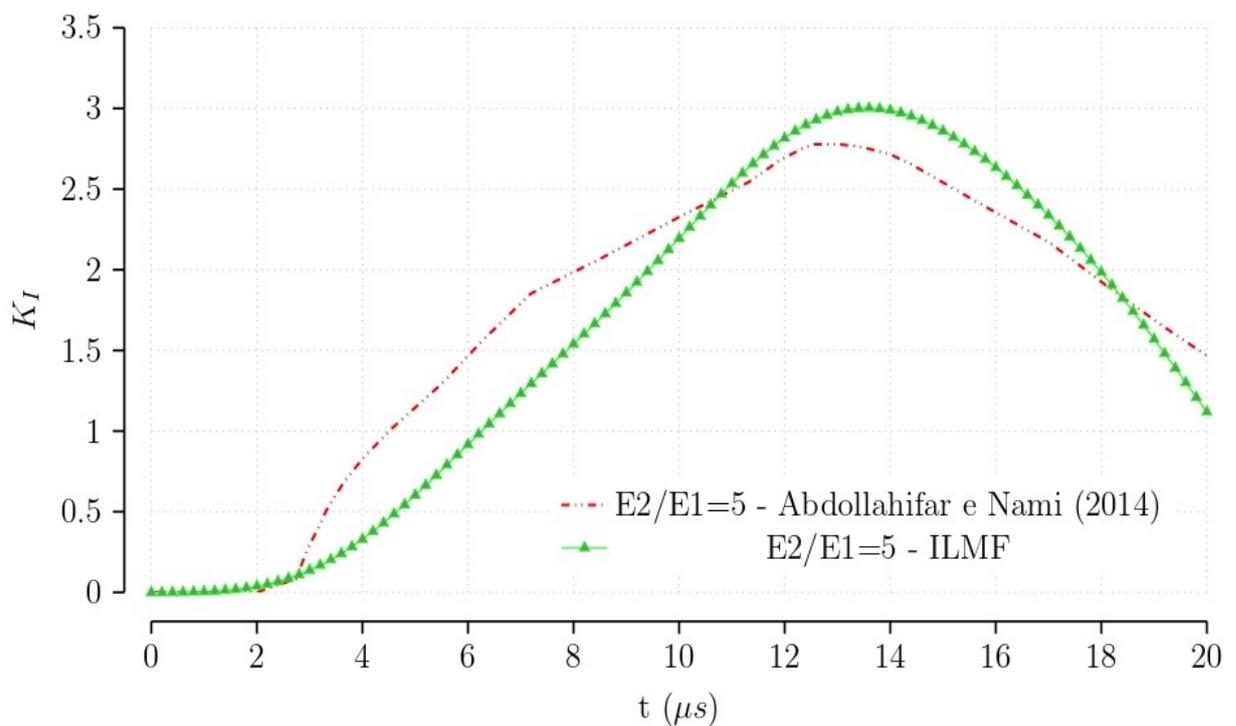


Figura 7-26 – Fator de intensidade de tensão dinâmico normalizado ( $K_I$ ) de uma placa retangular com trinca reta interna sob carregamento uniforme com a gradação de materiais no sentido perpendicular ao plano da trinca.

### 7.3.3 Placa com trinca inclinada de bordo – Modo misto

O próximo exemplo se trata de uma placa retangular com uma trinca de borda inclinada. A altura é igual a 44 mm e a largura é de 32 mm, sendo a trinca externa inclinada com ângulo de 45° a partir da ordenada de 6 mm, conforme apresentado na Figura 7-27, e foram adotados os mesmos parâmetros geométricos e elásticos do problema proposto por Wen e Aliabadi (2009), definido como referência. Escolheu-se a discretização de 16x16 nós, distribuídos regularmente ao longo do comprimento e da altura da placa, e o segmento de trinca com 8 nós dispostos acima e abaixo, perpendicularmente ao segmento, além do nó correspondente à ponta da trinca. Os seguintes dados foram utilizados na análise:

$$\sigma = 0,4H(t) = \begin{cases} 0,4GPa & t > 0 \\ 0GPa & t \leq 0 \end{cases}$$

$$E = 76GPa; \nu = 0,286; \rho_1 = 2.450 kg/m^3 \text{ e } \mu = 29,4 kg/m^3.$$

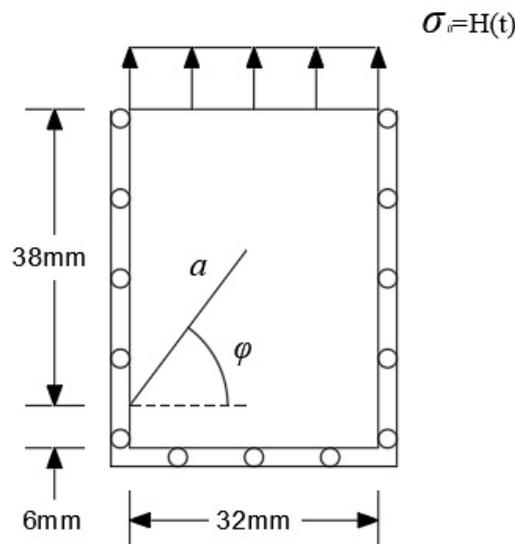


Figura 7-27 – Placa retangular com trinca interna sob carregamento uniforme  $\bar{t}$  simétrico no topo e com a base engastada.

Os resultados encontrados apresentados na Figura 7-28 e na Figura 7-29 estão em concordância com a metodologia de referência, apresentando diferenças para os valores obtidos de menos de 2%.

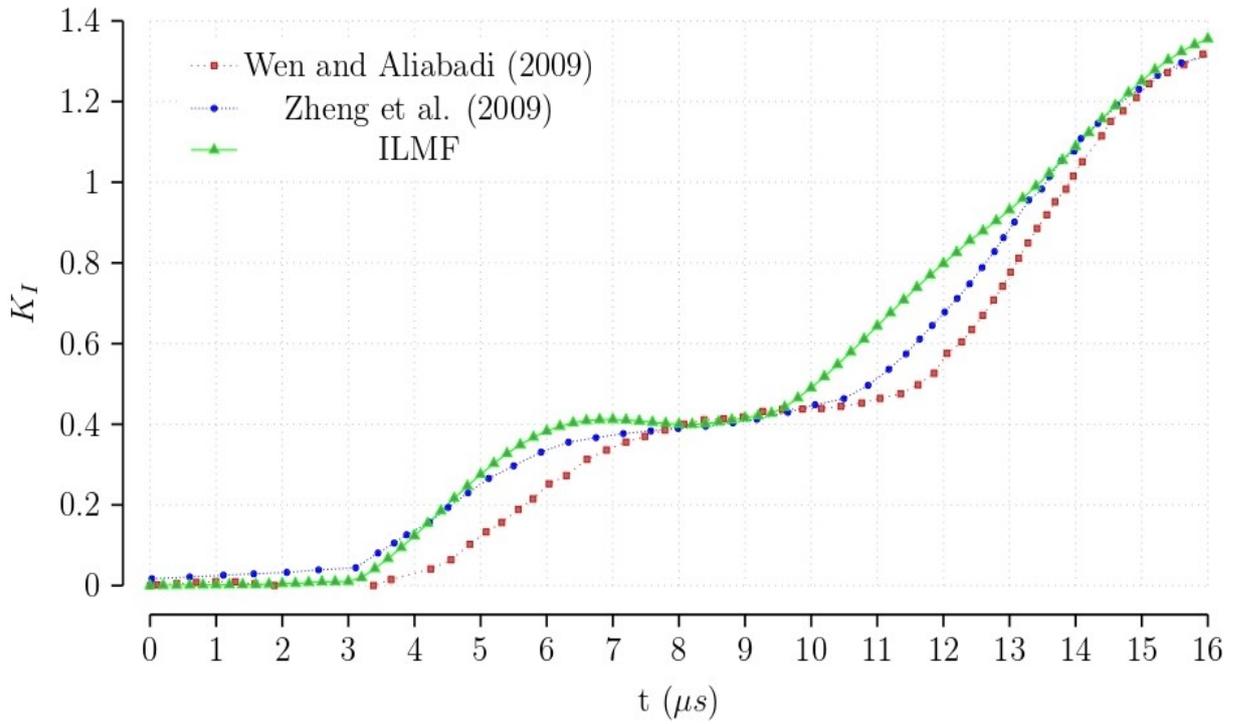


Figura 7-28 – Fator de intensidade de tensão dinâmico normalizado ( $K_I$ ) de uma placa retangular com trinca inclinada de bordo.

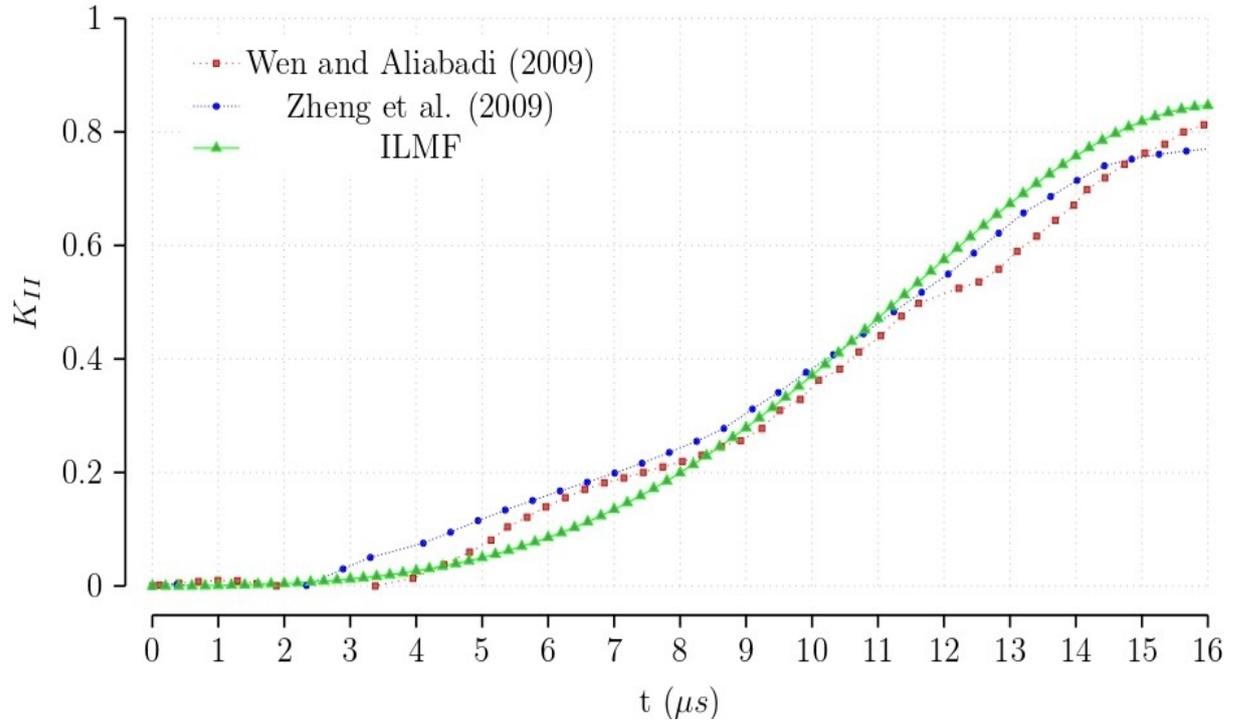


Figura 7-29 – Fator de intensidade de tensão dinâmico normalizado ( $K_{II}$ ) de uma placa retangular com trinca inclinada de bordo.

### 7.3.4 Placa com trinca reta inclinada – Modo misto

Exemplo similar foi tratado no caso estático no item 7.2.4, adotando-se parâmetros geométricos e físicos diferentes dos atuais. Seguindo o mesmo padrão das análises anteriores, os resultados obtidos serão comparados com uma análise de referência que, neste caso, será o exemplo nº 2 do trabalho elaborado por Zhou *et al.* (2016).

A placa retangular é submetida a um carregamento de  $\sigma(t) = 0,4GPa$  não amortecido nas extremidades do topo e da base. Contém uma trinca interna inclinada de  $45^\circ$  da horizontal no sentido horário de 14,14 mm e as dimensões da placa são de 60 mm de altura e 30 mm de largura. O módulo de elasticidade adotado será de  $E = 200GPa$ , coeficiente de Poisson igual a  $\nu = 0,3$  e peso específico  $5.000kg/m^3$ . Discretizou-se a placa com a utilização de 13x13 nós, distribuídos regularmente ao longo do comprimento e da altura da placa, e o segmento de trinca com 7 nós, dispostos acima e abaixo, perpendicularmente ao segmento, além do nó correspondente à ponta da trinca e integração no tempo, com cada etapa do tempo de intervalo de  $\Delta t = 0,2\mu s$ . Em resumo, as propriedades físicas são apresentadas abaixo:

$$E = 200GPa$$

$$\nu = 0,3$$

$$\rho = 5.000kg/m^3$$

Apresenta-se na Figura 7-30, abaixo, o modelo que será utilizado na análise bidimensional:

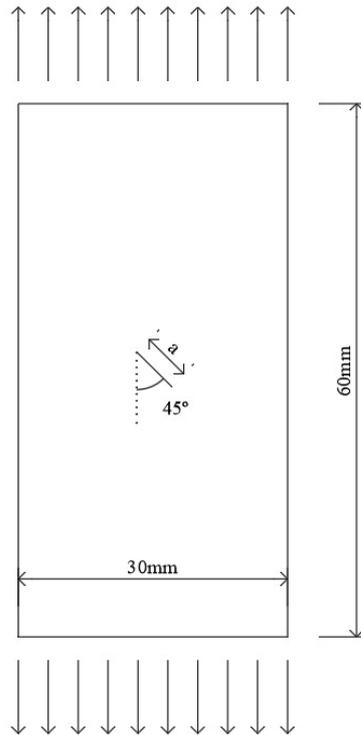


Figura 7-30 – Placa retangular com trinca interna inclinada sob carregamento uniforme  $\bar{t}$  simétrico no topo e na base.

Os valores dos DSIFs são plotados de maneira unidimensional ao longo do tempo na Figura 7-31 e na Figura 7-32. Percebe-se, graficamente, a boa concordância entre o ILMF-SST e o VVCT- Interface Element de Zhou *et al.* (2016) em ambos os modos de trincamento, ou seja, modo I e modo II. Após  $11,4\mu s$ , ressaltam-se apenas pequenas diferenças ou defasagens nos valores de pico para o modo I, com cerca de 1,17 % de diferença, podendo ser explicado pela diferença de abordagem, visto que, no método proposto, não há nenhum tipo de enriquecimento da ponta da trinca como refinamento da malha, utilização de funções enriquecedoras ou mudança do tipo de elemento, sendo estas alternativas constantes no MEF ou FDM. Um outro fator que explica essas diferenças é a influência da propagação das ondas refletivas nas respostas, a partir das superfícies da trinca e bordas.

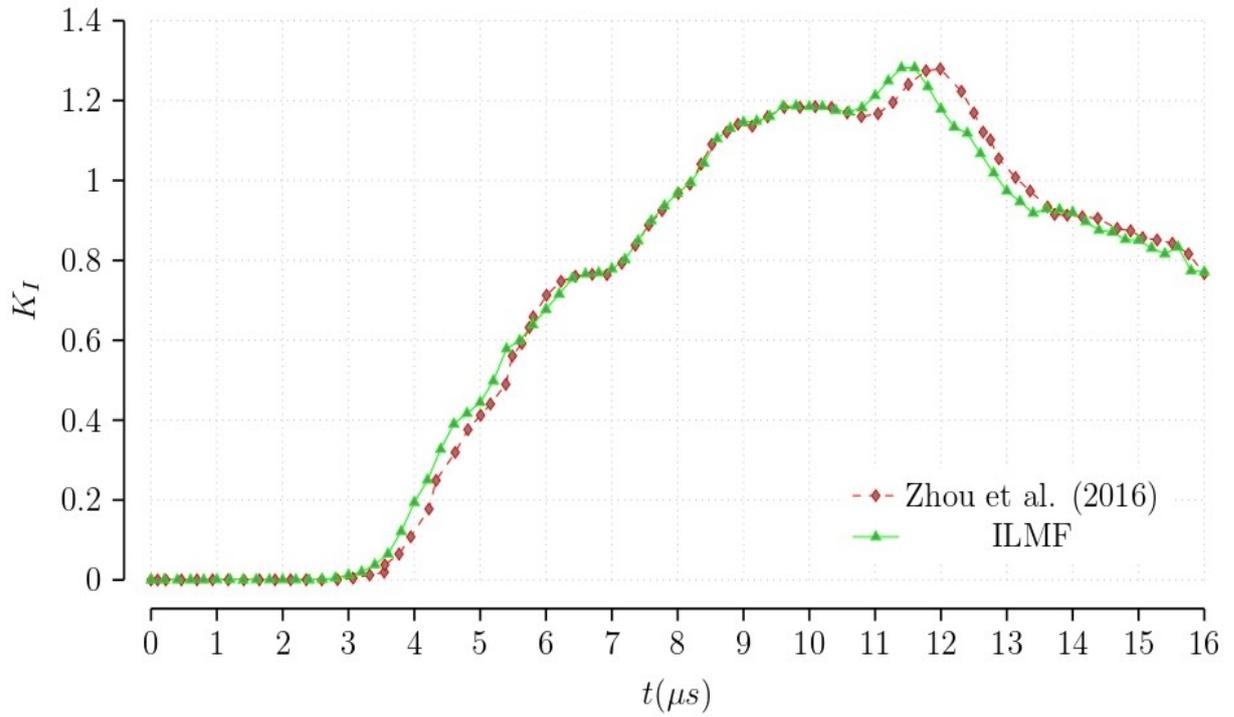


Figura 7-31 – Valores dos DSIFs normalizados ( $K_I$ ) em uma placa retangular inclinada sob carregamento uniforme  $\bar{t}$  simétrico no topo e na base.

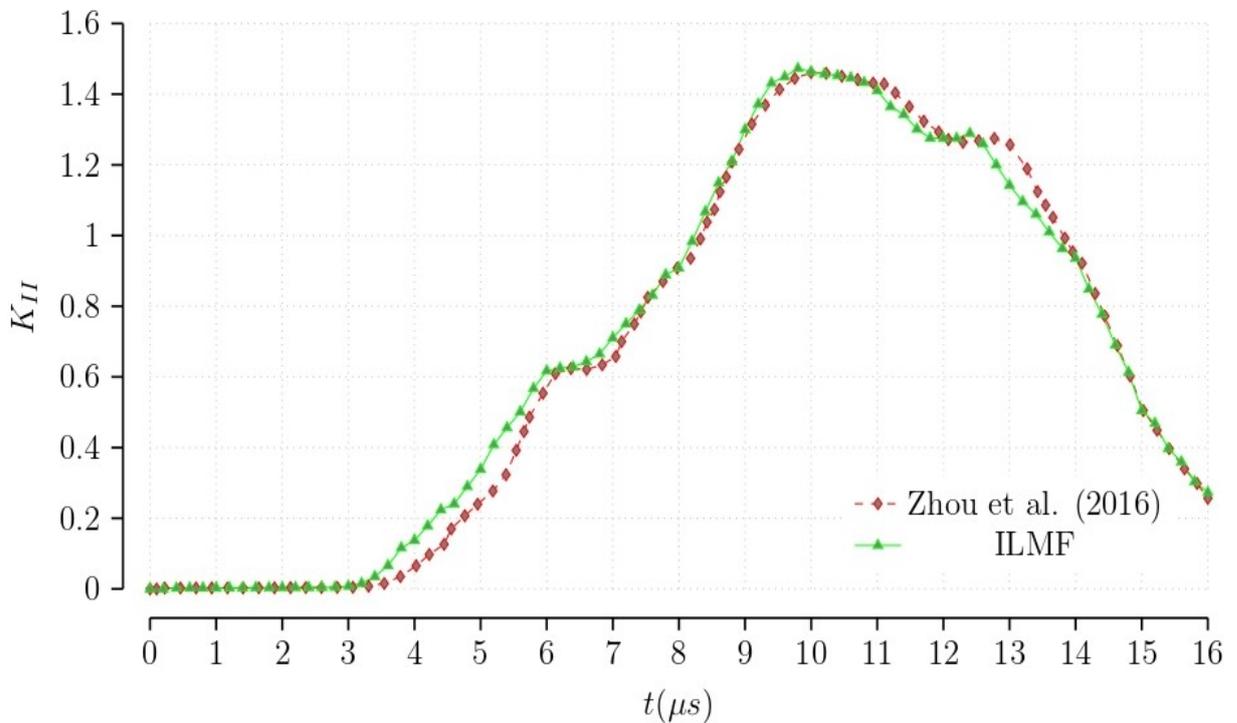


Figura 7-32 – Valores dos DSIFs normalizados ( $K_{II}$ ) em uma placa retangular inclinada sob carregamento uniforme  $\bar{t}$  simétrico no topo e na base.

## 8. CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

### 8.1 CONCLUSÕES

A obtenção dos fatores de intensidade de tensão ao longo do tempo por um método de malha local (ILMF), através da aplicação da técnica de subtração da singularidade em problemas bidimensionais elastodinâmicos, mostrou-se uma ferramenta eficaz e útil neste tipo de abordagem.

O método se baseia na formulação fraca dos métodos dos resíduos ponderados em uma aplicação de domínio local, considerando o equilíbrio do campo de tensões estaticamente admissível e deformações cineticamente admissíveis na formulação do deslocamento de um corpo rígido, aproximando as funções através do MQM e adotando a integração nodal reduzida nos contornos, sendo um método verdadeiramente sem malha. A técnica de subtração da singularidade (SST) é aplicada no ILMF de forma a separar o campo elástico regular e singular em cada interação nodal ao longo do domínio e no contorno, conferindo na montagem da matriz de rigidez global do sistema o acréscimo final de duas linhas e colunas provenientes da singularidade.

Respostas obtidas em comparação com outras metodologias expostas em diversas referências comprovaram a acurácia do método proposto. Cabe destacar que nenhum tipo de técnica de enriquecimento na área de influência da ponta da trinca foi utilizado de forma a minimizar ou suavizar a singularidade, sendo criados apenas nós na ponta da trinca e ao longo do comprimento de trinca com o objetivo de discretizar a abertura da trinca.

Modos de abertura e mistos implementados apresentaram resultados precisos em consonância com o comportamento físico provável, verificando-se no gráfico ao longo do tempo um trecho inicial de valores de intensidade de tensão próximo ao valor nulo, seguido por uma reta vertical de inclinação significativa, correspondendo ao encontro da onda dilatacional oriunda das forças externas na ponta da trinca. Em todos os casos, conclui-se uma atuação significativa do domínio de influência no desempenho da solução, sendo notável nas respostas próximas aos picos gráficos. Uma estratégia de auxílio na determinação do valor do domínio de influência ótimo seria a implementação da otimização multiobjetiva, através de algoritmos genéticos, redes neurais ou outro processo otimizador.

Ao longo do desenvolvimento do trabalho, observou-se a sensibilidade dos resultados da simulação numérica ao comportamento teórico esperado em função dos parâmetros do método sem malha proposto, sendo que os parâmetros devem ser cuidadosamente adequados em cada caso. Por exemplo, não se deve escolher uma discretização nodal exagerada em um problema com dimensões geométricas reduzidas, em decorrência do aumento do custo computacional de uma simulação numérica obtida de forma relativamente simples.

De forma equivalente, recomenda-se que o número de nós ao longo da abertura hipotética da trinca reta ou inclinada em elementos planos bidimensionais seja definida de forma proporcional ao comprimento da trinca e à extensão da placa na direção considerada.

A análise numérica se mostrou eficaz e confiável na determinação do padrão do comportamento da trinca em termos da determinação dos fatores de intensidade de tensão, inclusive, em modo misto. Diante do exposto, em função da acurácia numérica dos resultados alcançados, credencia-se a implementação do método proposto em discretizações nodais regulares e irregulares, com e sem otimização, com trincas, entalhes ou qualquer tipo de singularidades em modo misto.

### **8.1.1 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS**

Algumas investigações numéricas podem ser realizadas de forma a ampliar o escopo de aplicação e validação do método, sendo recomendáveis as seguintes aplicações:

- Investigação de problemas da mecânica da fratura elastodinâmicos tridimensionais;
- Alteração da técnica de interpolação da função de aproximação, ou seja, em vez de utilizar o MQM, por exemplo, aplicar funções de bases radiais, partição da unidade de suavização de partículas hidrodinâmicas ou um método de representação diferencial;
- Mesclar técnicas de interpolação de aproximação, utilizando o MQM em todo o domínio e borda ao longo da trinca, e aproximação por funções de bases radiais nas vizinhanças da singularidade;
- Expandir o estudo para a análise do problema de formação e crescimento de trincas e comparação com experimentos, de forma a avaliar o caminho de propagação de trincas previstos para os diferentes critérios de propagação teóricos;

- Obtenção dos fatores de intensidade de tensão em problemas da fratura elastoplásticos e viscoelastoplásticos;
- Robustecimento da técnica de otimização, de forma a automatizar a obtenção de parâmetros que influenciam significativamente a solução do método se malha, tais como o domínio de influência e o número de nós utilizados na discretização numérica;
- Análise paramétrica da implementação das condições de contorno essenciais, analisando a resposta obtida no caso do método da interpolação direta, multiplicadores de Lagrange ou Método da Penalidade.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Aoki, S., Kishimoto, K., Kondo, H., Sakata, M., 1978. Elastodynamic analysis of crack by finite element method using singular element. **International Journal of Fracture** 14 (1), 59–67
- ABDOLLAHIFAR, A.; NAMI, M. R. Determination of dynamic stress intensity factor in FGM plates by MLPG method. **Iranian Journal of Science and Technology Transactions of Mechanical Engineering**, [s. l.], v. 38, n. 38, p. 181-194, Mai. 2014. Disponível em: 10.22099/ijstm.2014.1964. Acesso em: 17 ago 2022.
- ALIABADI, M. H.; PORTELA, A. **Crack growth analysis using boundary elements**. Boston: Computational Mechanics Publications, 1993. 115 p.
- ALURU, N. R. A point collocation method based on reproducing kernel approximations. **Int. J. Numer. Methods Eng.**, [s. l.], v. 47, n. 6, p. 1083-1121, 2000.
- AMBALIYA, S. D.; SAVALIYA, P. V. Optimum value of dimensionless size of the support domain for Element Free Galerkin Mesh Free method. **International Journal of Scientific Research in Science, Engineering and Technology**, [s. l.], v. 1 , n. 7, p. 580-586, Nov./Dez. 2015.
- ATLURI, S. N.; CHO, J. Y.; KIM, H. G. Analysis of thin beams, using the Meshless Local Petrov–Galerkin method, with generalized moving least squares interpolations. **Computational Mechanics**, [s. l.], v. 24, n. 5, p. 334-347, 1999a.
- ATLURI, S. N.; CHO, J. Y.; KIM, H. G. A critical assessment of the truly meshless local Petrov-Galerkin (MLPG), and local boundary integral equation (LBIE) methods. **Computational Mechanics**, [s. l.], v. 24, p. 348-372, 1999b.
- ATLURI, S. N.; CHO, J. Y. Analysis of shear flexible beams, using the meshless local petrov-galerkin method, based on a locking-free formulation. **Engineering Computations**, [s. l.], v. 18, p. 215-240, Fev. 2001.
- ATLURI, S. N.; SHEN, S. **The Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) method**. Encino: Tech Science Press, 2002a.
- ATLURI, S. N.; SHEN, S. The meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) method: A simple & less-costly alternative to the finite element and boundary element methods. **Computer Modeling in Engineering & Sciences**, [s. l.], v.3, p.11-51, 2002b.
- ATLURI, S. N.; ZHU, T. L. A new meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) approach in computational mechanics. **Comput. Mech.**, [s. l.], v. 22, n. 2, p. 117-127, 1998.
- ATLURI, S. N.; ZHU, T. L. The meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) approach for solving problems in elasto-statics. **Computational Mechanics**, [s. l.], v. 25, n. 2-3, p. 169-179, 2000a.

- ATLURI, S. N.; Zhu, T. L. New concepts in meshless methods. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, [s. l.], v. 47, n. 1-3, p. 537-556, 2000b.
- BABUŠKA, I.; MELENK, J. M. The partition of unity method. **Int. J. Numer. Methods Eng.**, v. 40, n. 4, p. 727-758, 1997.
- BELYTSCHKO, T. *et al.* Meshless methods: an overview and recent developments. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, [s. l.], v. 139, n. 1-4, p. 3-47, 1996.
- BELYTSCHKO, T.; LU, Y. Y.; GU, L. Crack propagation by element-free Galerkin methods. **Engineering Fracture Mechanics**, [s. l.], v. 51, n. 2, p. 295-315, 1995.
- BELINHA, J. **The natural neighbour radial point interpolation**. 2010. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) – Faculdade de Engenharia, Universidade do Porto, Porto, 2010.
- BELINHA, J. **Meshless methods in biomechanics: bone tissue remodelling analysis**. New York: Springer, 2014.
- BELYTSCHKO, T. *et al.* A unified stability analysis of meshless particle methods. **Int. J. Numer. Methods Eng.**, [s. l.], v. 48, n. 9, p. 1359-1400, Jun. 2000.
- Belytschko, T., Lu, Y.Y., Gu, L., Tabbara, M., 1995. Element free Galerkin methods for static and dynamic fracture. **International Journal of Solids and Structures** 32 (17/18), 2547–2570.
- BELYTSCHKO, T.; LU, Y.; GU, L. Element-Free Galerkin methods. **Int. J. Numer. Meth. Eng.**, [s. l.], v. 37, p. 229-256, 1994.
- BELYTSCHKO, T.; ORGAN, D.; KRONGAUZ, Y. A coupled finite element–element-free Galerkin method. **Comput. Mech**, [s. l.], v. 17, n. 3, p.186-195, 1995.
- BENZ, W.; ASPHAUG, E. Simulations of brittle solids using smooth particle hydrodynamics. **Comput. Phys. Commun.**, [s. l.], v. 87, p. 253-265, 1995.
- BRAUN, J.; SAMBRIDGE, M. A numerical method for solving partial differential equations on highly irregular evolving grids. **Nature**, [s. l.], v. 376, p. 655-660, 1995.
- Brickstad, B., 1983. A FEM analysis of crack arrest experiments. **International Journal of Fracture** 21 (3), 177–194
- BROEK, D. **The practical use of fractures mechanics**. Dordrecht: Broek Kluwer Academic Publishers, 1988.
- CASTRO, J. T. P.; MEGGIOLARO, M. A. **Fadiga sob cargas reais de serviço**. Rio de Janeiro: Editora PUC-Rio, 2002. 1039p.
- CASTELLANOS, A. R. *et al.* Crack effects on the propagation of elastic waves in structural elements. **Revista mexicana de física**, México, v. 52, n. 2, p. 104-110, Abr. 2006.
- Chen, Y.M., 1975. Numerical computation of dynamic stress intensity factors by a Lagrangian

finite-difference method (the HEMP code). **Engineering Fracture Mechanics** 7 (4), 653–660.

CHEN, J. S.; HILLMAN, M.; CHI, S. W. Meshfree methods: progress made after 20 years. **Journal of Engineering Mechanics**, [s. l.], v. 143, n. 4, 2017.

CHEN, J. S. *et al.* Reproducing kernel particle methods for large deformation analysis of non-linear structures. **Comput. Methods Appl. Mech. Eng.**, [s. l.], v. 139, n. 1-4, p. 195-227, 1996.

CHEN, J. S. *et al.* Subdomain radial basis collocation method for heterogeneous media. **Int. J. Numer. Methods Eng.**, [s. l.], v. 80, n. 2, p. 163-190, 2009.

CHEN, Y.; LEE, J. D.; ESKANDARIAN, A. **Meshless Methods in Solid Mechanics**. New York: Springer, 2006. v. 1.

CHING, H. K.; BATRA, R. C. Determination of crack tip fields in linear elastostatics by the Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) method. **CMES: Computer Modeling in Engineering and Sciences**, [s. l.], v. 2, n. 2, p. 273-289, 2001.

CIVELEK, M. B.; ERDOGAN, F. Crack problems for a rectangular plate and an infinite strip. **International Journal of Fracture**, [s. l.], v. 19, p. 139-159, 1982.

CLEARY, P. W. Modelling confined multi-material heat and mass flows using SPH. **Applied Mathematical Modelling**, [s. l.], v. 22, n. 12, p. 981-993, 1998.

DOLBOW, J.; BELYTSCHKO, T. Numerical integration of the Galerkin weak form in meshfree methods. **Comput. Mech.**, [s. l.], v. 23, n. 3, p. 219-230, 1999.

Dominguez, J., Gallego, R., 1992. Time domain boundary element method for dynamic stress intensity factor computations. **International Journal for Numerical Methods in Engineering** 33 (3), 635–647.

DUARTE, C. A. M.; ODEN, J. T. An h-p adaptive method using clouds. **Comput. Methods Appl. Mech. Eng.**, [s. l.], v. 139, n. 1-4, p. 237-262, 1996.

DURBIN, F. Numerical inversion of Laplace transforms: an efficient improvement to Dubner and Abate's method. **The Computer J.**, [s. l.], v. 17, n. 4, p. 371-376, 1975.

FAN, Jie; LEE, Y. Y.; LEUNG, A. Y. T. Analysis of mode III elastodynamic cracked plane using the fractal two-level finite element method. **Mechanics of Advanced Materials and Structures**, v. 18, n. 8, p. 602-610, 2011.

Fedelinski, P., Aliabadi, M.H., Rooke, D.P., 1994. The dual boundary element method: bJ - integral for dynamic stress intensity factors. **International Journal of Fracture** 65 (4), 369–381.

FEDELIŃSKI, P. Dynamic stress intensity factors of interacting branched cracks. **MATEC Web of Conferences**, Gliwice, v. 285, p. 1-8, 2019.

FERREIRA, V. M. C. **Optimização da Forma de uma Estrutura Usando um Método sem**

- Malha.** 2012. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Faculdade de Engenharia, Universidade do Porto, Porto, 2012.
- FUNG, Y. C. **Foundation of Solid Mechanics.** New Jersey: Prentice-Hall, 1965. 525 p.
- FRIES, T. P.; MATTHIES, H. G. **Classification and Overview of Meshfree Methods.** Informatik-Berichte der Technischen, Brunswick, n. 2003-3, p. 1-64, 2004.
- GINGOLD, R. A.; MONAGHAN, J. J. Smoothed particle hydrodynamics: theory and application to non-spherical stars. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, [s. l.], v. 181, n. 3, p. 375-389, Nov. 1977.
- GÓMEZ, W. H. V. **Numerical solution of elasticity problems by a local mesh-free multi-objective optimization method.** 2019. 100f. Tese (Doutorado em Estruturas e Construção Civil) – Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, Distrito Federal, 2019.
- GONZALEZ, M. *et al.* A new displacement-based approach to calculate stress intensity factors with the Boundary Element method. **Latin American Journal of Solids and Structures**, [s. l.], v. 12, n. 9, p. 1677-1697, 2015.
- GU, Y. T.; LIU, G. R. A Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) method for free and forced vibration analyses for solids. **Computational Mechanics**, [s. l.], v. 27, n. 3, p. 188-198, 2001a.
- GU, Y. T.; LIU, G. R. A local radial point interpolation method (LRPIM) for free vibration analyses of 2-D solids. **J. Sound Vibr.**, [s. l.], v. 246, n. 1, p. 29-46, 2001b.
- HAN, Z. D. *et al.* The applications of Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) approaches in high-speed impact, penetration and perforation problems. **CMC - Tech Science Press**, [s. l.], v. 4, n. 2, p.119, 2006.
- HU, H. Y.; CHEN, J. S.; HU, W. Error analysis of collocation method based on reproducing kernel approximation. **Numer. Methods Partial Differ. Equ.**, [s. l.], v. 27, n. 3, p. 554-580, 2011.
- HUANG, X. **Meshless investigation for nonlocal elasticity: static and dynamic.** 2017. Tese (Doutorado em Engenharia) – School of Engineering and Material Science, Queen Mary University of London, Londres, 2017.
- HUERTA, A. *et al.* Meshfree Methods. In: STEIN, E.; BORST, R.; HUGHES, T. J. R. (Ed.). **Encyclopedia of Computational Mechanics.** Hoboken, NJ: Wiley, 2017. v. 2.
- HUGHES, T. J. R. **The Finite Element Method:** linear static and dynamic finite element analysis. New Jersey: Prentice-Hall, 1987.
- KANSA, E. J. Multiquadrics: a scattered data approximation scheme with applications to

- computational fluid-dynamics – I. Surface approximations and partial derivative estimates. **Comput. Math. Appl.**, [s. l.], v. 19, n. 8, p. 127-145, 1990a.
- KANSA, E. J. Multiquadrics: A scattered data approximation scheme with applications to computational fluid-dynamics – II. Solutions to parabolic, hyperbolic and elliptic partial differential equations. **Comput. Math. Appl.**, [s. l.], v. 19, n. 8, p. 147-161, 1990b.
- KATZ, A. J. **Meshless methods for computational fluid dynamics**. 2009. 131f. Tese (PhD) – Department of Aeronautics and Astronautics, Stanford University, Califórnia, 2009.
- KIRSCH, E. G. Die Theorie der Elastizität und die Bedürfnisse der Festigkeitslehre. **Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure**, Berlim, v. 42, p. 797-807, 1898.
- Kishimoto, K., Aoki, S., Sakata, M., 1980. Dynamic stress intensity factors using J-integral and finite element method. **Engineering Fracture Mechanics** 13 (2), 387–394
- K. Kishimoto, S. Aoki, M. Sakata, Dynamic stress intensity factors using  $\hat{J}$ -integral and finite element method, **Engineering Fracture Mechanics**, Volume 13, Issue 2, 1980, Pages 387-394.
- LANCASTER, P.; SALKAUSKAS, K. Surfaces generated by moving least squares methods. **Mathematics of Computation**, v. 37, n. 155, p. 141-158, 1981.
- Lee, Y.J., Freund, L.B., 1990. Fracture initiation due to asymmetric impact loading of an edge cracked plate. **ASME Journal of Applied Mechanics** 57 (1), 104–111.
- LIBERSKY, L. D.; PETSCHKEK, A. G. Smooth particle hydrodynamics with strength of materials. In: TREASE, H.; FRITTS, M. J.; CROWLAY, W. P. **Advances in the Free-Lagrange method including contributions on adaptive gridding and the smooth particle**. Berlin; New York: Springer-Verlag, 1991.
- LIBERSKY, L. D. *et al.* Recent improvements in SPH modeling of hypervelocity impact. **Int. J. Impact Eng.**, [s. l.], v. 20, n. 6-10, p. 525–532, 1997.
- Lin, X., Ballmann, J., 1993. Re-consideration of Chens problem by finite difference method. **Engineering Fracture Mechanics** 44 (5), 735–739
- LIU, G. R.; GU, Y. T. A Local Point Interpolation method for stress analysis of two-dimensional solids. **Int. J. Structural Engineering and Mechanics**, [s. l.], v. 11, n. 2, p. 221-236, 2001.
- LIU, G. R.; GU, Y. T. Coupling Element Free Galerkin and Hybrid Boundary Element methods using modified variational formulation. **Australasian Issue of Computational Mechanics**, [s. l.], v. 26, p. 166-173, 2000b.
- LIU, G. R.; GU, Y. T. A meshfree method: meshfree weak–strong (MWS) form method, for 2-

- d solids. **Computational Mechanics**, [s. l.], v. 33, n. 1, p. 2-14, 2003.
- LIU, G. R. **Mesh Free Methods: Moving Beyond the Finite Element Method**. Boca Raton, CRC Press, 2003.
- LIU, G. R.; GU, Y. T. **An introduction to meshfree methods and their programming**. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2005.
- LIU, G. R.; YAN, L. A modified meshless local Petrov-Galerkin method for solid mechanics advances. In: ATLURI, N. K.; BRUST, F. W. (ed.). **Advances in Computational Engineering and Sciences**. Palmdale: Tech Science Press, 2000, p. 1374-1379.
- LIU M. B. *et al.* Numerical simulation of incompressible flows by SPH. In: International Conference on Scientific & Engineering Computing, 2001, Beijing, China. Anais [...]. Beijing, 2001. Disponível em: <<http://www.ase.uc.edu/~liugr/Publications/Conference%20Papers/ca1101.pdf>>. Acesso em: 17 ago 2022.
- LIU, W. K. *et al.* Advances in multiple scale kernel particle methods. **Comput. Mech.**, [s. l.], v. 18, n. 2, p. 73-111, 1996.
- LIU, W. K.; Jun, S.; Zhang, Y. F. Reproducing kernel particle methods. **Int. J. Numer. Methods Fluids**, [s. l.], v. 20, n. 8-9, p. 1081-1106, 1995.
- LIU, Y.; GAO, L. T. Numerical simulation for dynamic crack propagation by MLPG. **Key engineering materials**, [s. l.], v. 324, p. 495-498, 2006.
- LONG, S.; ATLURI, S. N. A Meshless Local Petrov-Galerkin method for solving the bending problem of a thin plate. **Computer Modeling in Engineering and Sciences**, [s. l.], v. 3, n. 1, p. 53-64, 2002.
- LONG, S.; HU, D. A Study on the Weight Function of the Moving Least Square approximation in the Local Boundary Integral Equation Method. **Acta mechanica solida sinica**, [s. l.], v. 3, n. 16, p. 276-282, 2003.
- LONG, S. Y.; LIU, K. Y.; HU, D. A. A new meshless method based on MLPG for elastic dynamic problems. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, [s. l.], v. 30, p. 43-48, 2005.
- LUCY, L. B. A numerical approach to the testing of the fission hypothesis. **Astron. J.**, [s. l.], v. 82, p. 1013-1024, 1977.
- IRWIN, G. R. Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate. **Journal of Applied Mechanics**, [s. l.], v. 24, p. 361-364, 1957.
- MALDANER, Marcelo *et al.* **Obtenção do fator de intensidade de tensão pelo método da**

**função de green local modificado.** 2012.

MEIROVITCH, L. **Computational methods in structural dynamics.** Berlin: Springer, 1980.

MELENK, J. M.; BABUŠKA, I. The partition of unity finite element method: Basic theory and applications. **Comput. Methods Appl. Mech. Eng.**, [s. l.], v. 139, n. 1-4, p. 289-314, 1996.

MENDONÇA, F.R.S; GÓMEZ, W.H.V; PORTELA, A. A local meshless numeric method applied in free and forced vibration analyses for elastic problems. **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering**, [s. l.], v. 44, n. 8, p. 1-15, 2022.

MENOUILARD, T. *et al.* Time dependent crack tip enrichment for dynamic crack propagation. **IUTAM Symposium on Dynamic Fracture and Fragmentation**, [s. l.], v. 162, n. 1-2, p. 33-49, 2010.

MEDINA, J. A. H. **Avaliação de previsões de fratura elastoplástica.** 2014. 203f. Tese (Doutorado em Engenharia) – Departamento de Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2014.

MIERS, L. S. **Formulações não-convencionais de métodos do tipo meshless baseados na equação integral de contorno.** 2007. 103f. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2007.

MOOSAVI, M.R. Orthogonal meshless finite volume method in elastodynamics. **Thin-Walled Structures**, v. 49, n. 9, p. 1171-1177, 2011.

MONAGHAN, J. J. Simulating gravity currents with SPH – lock gates. **Applied Mathematics Reports and Preprints**, Melbourne, v. 95, n. 5, p. 1-8, 1995.

MONAGHAN, J. J. Smoothed particle hydrodynamics. **Annual Review of Astronomy and Astrophysics**, [s. l.], v. 30, p. 543-574, 1992.

MONAGHAN, J. J.; GINGOLD, R. A. Shock simulation by the particle method SPH. **Journal of Computational Physics**, [s. l.], v. 52, p. 374-389, 1983.

MURAKAMI, Y. **Stress Intensity Factors Handbook.** Oxford; New York: Pergamon Press, 1987.

Murti, V., Valliappan, S., 1986. The use of quarter point element in dynamic crack analysis. **Engineering Fracture Mechanics** 23 (3), 585–614.

MUTHU, N. *et al.* Computation of stress intensity factors in functionally graded materials using partition-of-unity meshfree method. **Aeronautical Journal**, [s. l.], v. 116, n. 1186, 2012.

NAYROLES, B.; TOUZOT, G.; VILLON, P. Generalizing the finite element method: diffuse approximation and diffuse elements. **Comput. Mech**, [s. l.], v.10, p. 307-318, 1992.

NEWMARK, N. M. A method of computation for structural dynamics. **ASCE Journal of the**

**Engineering Mechanics Division**, [s. l.], v. 85, p. 67-94, 1959.

NIKOLIĆ, V. *et al.* Numerical methods for solving the dynamic behavior of real systems. **Scientific Publications of the State University of Novi Pazar**, [s. l.], v. 6, n. 1, p. 25-34, 2014.

OLIVEIRA, T. S. **Método sem malha local**: subtração da singularidade em mecânica da fratura linear elástica. 2019. 144 f. Tese (Doutorado em Estruturas e Construção Civil) – Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, Distrito Federal, 2019.

OLIVEIRA, T.; PORTELA, A. Weak-form collocation – a local meshless method in linear elasticity. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, [s. l.], v. 73, p. 144-160, 2016.

OLIVEIRA, T. S.; PORTELA, A. A local mesh free method with singularity subtraction technique. **Engineering Analysis with Boundary Elements.**, [s. l.], v. 104, p. 148-159, Jul. 2019.

OLIVEIRA, T. S. *et al.* A local mesh free method for linear elasticity and fracture mechanics. **Engineering Analysis with Boundary Elements.**, [s. l.], v. 10, p. 221-242, 2019.

OUATOUATI, A. E. L.; JOHSON, D. A. A new approach for numerical modal analysis using the element-free method. **Int. J. Num. Meth. Eng.**, [s. l.], v. 46, p. 1-27, 1999.

PETRI, W. F. **Static and Dynamic Crack Propagation in Brittle Materials with XFEM**. Kassel: Kassel University Press, 2013. 207 p.

PORTELA, A.; ALIABADI, M. H.; ROOKE, D. P. The dual boundary element method: effective implementation for crack problems. **International journal for numerical methods in engineering**, Hampshire, v. 33, n. 6, p. 1269-1287, 1992.

RIVLIN, T. J. **An introduction to the approximation of functions**. Waltham: Blaisdell Publishing Company, 1969.

RODRÍGUEZ, H. Z. **Efeito da tensão nominal no tamanho e forma da zona plástica**. 2007. 84 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Departamento de Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2007.

ROQUE, C. M. C. **Métodos sem malha para a análise de placas e cascas compósitas**. 2007. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica e Gestão Industrial) – Faculdade de Engenharia, Universidade do Porto, Porto, 2007.

SANTANA, E. *et al.* A local mesh free numerical method with automatic parameter optimization. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, [s. l.], v. 113, p. 55-71, 2019.

- SONG, S. H.; GLAUCIO, H. P. Dynamic stress intensity factors for homogeneous and smoothly heterogeneous materials using the interaction integral method. **International Journal of Solids and Structures**, [s. l.], v. 43, n. 16, p. 4830-4866, 2006.
- Sladek, J., Sladek, V., Fedelinski, P., 1999. Computation of the second fracture parameter in elastodynamics by the boundary element method. **Advances in Engineering Software** 30 (9/11), 725–734.
- STROUBOULIS, T.; COPPS, K.; BABUŠKA, I. The generalized finite element method: An example of its implementation and illustration of its performance. **Int. J. Numer. Methods Eng.**, [s. l.], v. 47, n. 8, p. 1401-1417, 2000.
- STROUBOULIS, T.; COPPS, K.; BABUŠKA, I. The generalized finite element method. **Comput. Methods Appl. Mech. Eng.**, [s. l.], v. 190, n. 32, p. 4081-4193, 2001.
- SUKUMAR, N.; BELYTCHKO, T. The natural element method in solid mechanics. **Int. J. Numer. Methods Eng.**, [s. l.], v. 43, n. 5, p. 839-887, 1998.
- Tabiei, A., Wu, J., 2003. Development of the DYNA3D simulation code with automated fracture procedure for brick elements. **International Journal for Numerical Methods in Engineering** 57 (14), 1979–2006.
- TINH, B. Q. **Application of the element free Galerkin method for dual analysis**. 2005. Dissertação (Master of Science) – Université de Liege, Liege, 2005.
- TURIS, M. *et al.* Determination of Stress Intensity Factors under Shock Loading Using a Diffraction-Based Technique. **Applied Sciences**, v. 11, n. 10, p. 4574, 2021.
- WILLIAMS, M. L. On the stress distribution at the base of a stationary crack. **J. Applied Mechanics**, [s. l.], v. 24, p. 109-114, 1957.
- WANG, J. G.; LIU, G. R. A point interpolation meshless method based on radial basis functions. **Int. J. Numer. Methods Eng.**, [s. l.], v. 54, n. 11, p. 1623-1648, 2002.
- WANG, L.; CHEN, J. S.; HU, H. Y. Subdomain radial basis collocation method for fracture mechanics. **Int. J. Numer. Methods Eng.**, [s. l.], v. 83, n. 7, p. 851-876, 2010.
- WEN, P. H.; ALIABADI, M. H. Evaluation of mixed-mode stress intensity factors by the mesh-free Galerkin method: Static and dynamic. **The Journal of Strain Analysis for Engineering Design**, v. 44, n. 4, p. 273-286, 2009.
- Wu, C.-C., He, P., Li, Z., 2002. Extension of J integral to dynamic fracture of functional graded material and numerical analysis. **Computers and Structures** 80 (5/6), 411–416
- WU, Y. L.; LIU, G. R.; GU, Y. T. Application of meshless local Petrov Galerkin (MLPG) approach to simulation of incompressible flow. **Numerical Heat Transfer, Part B:**

**Fundamentals**, [*s. l.*], v. 48, n. 5, p. 459-475, 2005.

XIAOFEI, P.; YIM, S. K.; XIONG, Z. An Assessment of the Meshless Weighted Least-Square method. **Acta Mechanica Solida Sinica**, [*s. l.*], v. 17, n. 3, p. 270-282, 2004.

XIE, D.; QIAN, L.; LI, C. A. Numerical calculation method of fracture mechanics and the engineering application. 2009

Zhang, Ch., 2002. A 2D hypersingular time domain traction BEM for transient elastodynamic crack analysis. **Wave Motion** 35 (1), 17–40

ZHENG, H. *et al.* Mixed-mode dynamic stress intensity factors by variation technique with finite block method. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, [*s. l.*], v. 106, p. 27-33, 2019.

ZHOU, L. M. *et al.* Analysis of dynamic fracture parameters in functionally graded material plates with cracks by Graded Finite Element method and Virtual Crack Closure technique. **Advances in Materials Science and Engineering**, [*s. l.*], v. 2016, p. 1-14, 2016.

ZHU, T.; ZHANG, J.; ATLURI, S. N. A Local Boundary Integral Equation (LBIE) method in Computational Mechanics and a Meshless Discretization approach. **Computational Mechanics**, [*s. l.*], v. 21, p. 223-235, 1998.