Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
Programa de Mestrado Profissional
em Matemática em Rede Nacional

Uma Proposta de Ensino de Limites e Derivadas no Ensino Médio

Igor Alexandre Gomes de Almeida

Brasília

2023

Igor Alexandre Gomes de Almeida

Uma Proposta de Ensino de Limites e Derivadas no Ensino Médio

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:
Prof. Dr. Tarcísio Castro Silva

Brasília

2023

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Uma proposta de ensino de Limites e Derivadas no Ensino Médio

por

Igor Alexandre Gomes de Almeida

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos para obtenção do grau de

MESTRE EM MATEMÁTICA

Brasília, 16 de fevereiro de 2023.

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Tarcísio Castro Silva - MAT/UnB (Orientador)

Prof. Dr. Rui Seimetz – MAT/UnB (Membro)

Documento assinado digitalmente
ILTON FERREIRA DE MENEZES
Data: 23/02/2023 20:52:00-0300
Verifique em https://verificador.iti.br

Prof. Dr. Ilton Ferreira de Menezes – UFOB (Membro)

"Pode-se encontrar a felicidade mesmo nas horas mais sombrias, se a pessoa se lembrar de acender a luz."

Alvo P. W. B. Dumbledore

Agradecimentos

Gostaria de agradecer primeiramente a Deus pela vida, pela família e por permitir me tornar uma pessoa melhor. Agradeço pelas bênçãos que tens me dado, agradeço pela minha saúde e pela saúde das pessoas que amo, e pela proteção que recebemos diariamente dos Teus anjos.

Sou eternamente grato pelos meus pais, Elber e Vanessa, que me proporcionaram a oportunidade de estar aqui neste momento, nunca deixando faltar um lar, comida e amor, mesmo nos momentos mais difíceis, além de sempre me incentivarem e me mostrar a importância dos estudos. Tudo o que sou é graças a vocês dois.

Agradeço imensamente a minha esposa, Carolina, que é minha companheira de todos os momentos, que me inspira para ser tão bom quanto você, que me ensinou o que é o amor e que será a mãe dos meus filhos. Obrigado por não desistir de mim, pelo suporte durante esse trabalho, e por ser minha parceira durante o mestrado, nos jogos e na vida.

Agradeço à minha família, em particular aos meus avós, Elza e Sebastião, Geni e Josimar, pelo carinho e amor que me deram, e por serem parte da história da minha vida; ao meu irmãozinho Davi por me mostrar o que é ter o sentimento de amor e cuidado por alguém; e ao meu primo Victor por ter crescido como meu irmão e me motivar a não desistir.

Um agradecimento final aos meus amigos que participaram dessa jornada, pois sem vocês minha vida teria menos graça. Em especial, agradeço ao meu querido amigo Wanderson, que me acompanha há muitos anos e já é parte da minha família; agradeço ao meu amigo e padrinho João Pedro, que é um exemplo de pessoa e fez parte dessa caminhada; e também aos meus alunos, que me permitiram ser o professor que sou e que mantém em mim a esperança no futuro do Brasil.

Resumo

Neste trabalho, desenvolvemos uma breve introdução aos conceitos de conjuntos numéricos, funções, limites e derivadas. Apresentamos dados estatísticos que sintetizam o resultado da aplicação de Limites e Derivadas em um minicurso ministrado para alunos do Ensino Médio. Durante a leitura, o leitor irá se deparar com uma proposta pedagógica exitosa para o ensino desses conceitos que, comumente, o estudante do ensino Ensino Médio contempla no ensino superior, especificamente, no campo das Ciências Exatas.

Abstract

In this work, we develop a brief introduction to the concepts of numerical sets, functions, limits and derivatives. We present statistical data that synthesize the result of applying Limits and Derivatives in a short course given to high school students. While reading, the reader will come across a successful pedagogical proposal for teaching these concepts that, commonly, high school students contemplate in higher education, specifically in the field of Exact Sciences.

Lista de Figuras

Índice

Introdução

No ano de 2022, foi implementado de forma obrigatória o Novo Ensino Médio nas escolas das Redes Pública e Privada e, com isso, vieram algumas alterações como a composição do Ensino Médio e sua carga horária. De acordo com a Lei Federal nº13.415/2017

> "Art. 36. O currículo do ensino médio será composto pela Base Nacional Comum Curricular e por itinerários formativos, que deverão ser organizados por meio da oferta de diferentes arranjos curriculares, conforme a relevância para o contexto local e a possibilidade dos sistemas de ensino, a saber:
> I - linguagens e suas tecnologias;
> II - matemática e suas tecnologias;
> III - ciências da natureza e suas tecnologias;
> IV - ciências humanas e sociais aplicadas;
> V - formação técnica e profissional.
> [...]
> § 3º A critério dos sistemas de ensino, poderá ser composto itinerário formativo integrado, que se traduz na composição de componentes curriculares da Base Nacional Comum Curricular - BNCC e dos itinerários formativos, considerando os incisos I a V do caput." (Brasil, 2017).

De acordo com o site do MEC, houve uma mudança

> "[...] na estrutura do ensino médio, ampliando o tempo mínimo do estudante na escola de 800 horas para 1.000 horas anuais (até 2022) e definindo uma nova organização curricular, mais flexível, que contemple uma Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e a oferta de diferentes possibilidades de escolhas aos estudantes, os itinerários formativos, com foco nas áreas de conhecimento e na formação técnica e profissional." (Brasil, 2016)

Isso fez com que a quantidade de aulas semanais de Matemática fossem reduzidas de cinco para três. Apesar da redução, houve a implementação de Itinerários Formativos que "[...] são o conjunto de disciplinas, projetos, oficinas, núcleos de estudo, entre outras situações de trabalho, que os estudantes poderão escolher no ensino médio." (Brasil, 2016). Esses itinerários permitem o aprofundamento, por exemplo, na disciplina de Matemática e suas Tecnologias.

Segundo Oliveira (2019), o PISA de 2018 mostrou que "[...] o Brasil tem baixa proficiência em Leitura, Matemática e Ciências, se comparado com outros 78 países que participaram da avaliação." Entretanto, existem alunos que possuem um ótimo desempenho em matemática, visto, por exemplo, medalhistas da OBMEP. Com isso, as salas de aula contam com alunos de diferentes graus de saber em Matemática, e ministrar uma aula que atenda a todos os públicos de alunos é uma difícil tarefa a ser realizada pelo professor de Matemática.

Diante desse cenário, o Novo Ensino Médio traz uma oportunidade para que os alunos escolham suas trilhas de aprendizado e optem por cursar disciplinas de maior interesse, onde é melhor esclarecido em [4]. Dentre elas, o ensino de matemática avançada pode despertar o interesse e um certo grau de curiosidade de alunos que possuam um bom desempenho com a matéria.

Há, portanto, uma oportunidade de oferecer disciplinas que preparem os alunos do Novo Ensino Médio para conteúdos introdutórios do Ensino Superior. Em matemática, apesar do grande número de alunos com dificuldade, há alunos que possuem capacidade e necessidade de aprofundar seus conhecimentos matemáticos que não podem ser tão explorados na Formação Geral Básica. Por isso, trazer os estudos de Limites e Derivadas para esses alunos traz ganhos no desempenho escolar presente e futuro desses estudantes.

Neste trabalho, apresentaremos um material que permite ao professor do Ensino Médio propor uma introdução ao Cálculo aos seus alunos. Os três primeiros capítulos apresentam uma proposta de conteúdos a serem ministrados em sala de aula, que vão desde noções iniciais de conjuntos numéricos e passam por conceitos como limites e derivadas. O quarto e último capítulo conta com os resultados de um minicurso ministrado com base nesses conteúdos.

O objetivo deste trabalho é fornecer um material para professores ministrarem o conteúdo de Introdução ao Cálculo à alunos do Ensino Médio. Além disso, permitir um primeiro contato, ao consultar este trabalho, por um estudante interessado em aprofundar seus conhecimentos.

Formar uma base sólida de conhecimento introdutório de limites e derivada já no Ensino Médio, favorece o estudante que deseja ingressar em um curso de Ciências Exatas, seja pela bagagem de novos conhecimentos ou por chegar no Ensino Superior com uma noção prévia de um mesmo tema.

Alguns objetivos específicos são apresentar para um aluno do Ensino Médio um primeiro contato ou uma revisão dos tópicos de conjuntos numéricos, intervalos e funções reais (polinomiais, trigonométricas, etc.) e, posteriormente, iniciar as ideias, definições e aplicações de limites e derivadas. Agora, sob a ótica do professor interessado, este trabalho traz consigo um material que pode ser aplicado em um minicurso ou em uma disciplina de Itinerário Formativo.

Para servir como proposta de aplicação, este material foi aplicado em um grupo de estudantes do 1º ano do Ensino Médio que possuíam algum notório saber em Matemática, a fim de verificar a receptividade e os impactos desse material para o público.

Capítulo 1

Noções iniciais

Para iniciar os estudos em Cálculo, é necessário algum nível de conhecimento matemático. Para isso abordaremos nesse capítulo conceitos introdutórios que serão requisitados para progredir em nosso estudo. Esses conceitos são vistos no Ensino Médio, porém, muitas vezes, direcionados a outros propósitos que não preparar para o estudo de Cálculo.

Apresentaremos temas fundamentais como: noções básicas de conjuntos, intervalos e funções reais. Relembraremos os principais conjuntos numéricos a serem estudados, o que são e como escrever intervalos numéricos e, por último, definiremos funções e abordaremos os exemplos mais comuns que são estudados no Cálculo. Para uma abordagem mais profunda, o leitor pode consultar [6]. As fontes das figuras contidas neste capítulo são de autoria própria.

1.1 Conjuntos numéricos

Desde o princípio o homem teve a necessidade de um método de contagem para representar quantidades, e a medida que as civilizações foram crescendo esses métodos foram sendo aprimorados. Com a necessidade de contagem surgiu-se o conjunto dos **números naturais**, que são os primeiros números que aprendemos desde pequenos. Esse conjunto é dado por:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}.$$

Há uma discussão se o número zero pertence ou não a esse conjunto. Como esse conjunto foi criado a partir da necessidade de contar objetos, para o nosso estudo, vamos admitir que os naturais começam a partir do 1. O mais comum é que, no Ensino

Fundamental e Médio, o $0 \in \mathbb{N}$ e, no Ensino Superior, o $0 \notin \mathbb{N}$.

Com a evolução da necessidade de contar e das operações básicas, surgiu-se também a necessidade de criar-se mais números, visto que algumas operações não estavam bem definidas apenas com os números naturais. O resultado da operação $5 - 3$ está bem definida em $\mathbb{N}$, mas o contrário não, uma vez que $3 - 5 \notin \mathbb{N}$. Para sanar esse problema temos o conjunto dos **números inteiros** representado por:

$$\mathbb{Z} = \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}.$$

.

Com isso foi acrescido o tão polêmico 0, além dos simétricos de cada número natural, chamados de números negativos e identificados com o sinal de menos "na frente". Uma curiosidade desse conjunto é que sua representação pela letra **Z** vem da palavra "*zahl*" que significa "número" em alemão.

Apesar das operações de adição, subtração e multiplicação estarem bem definidas nos números inteiros, o resultado da divisão de alguns números ainda não estava resolvido, como por exemplo a divisão do número 4 pelo número 20. Para isso criou-se o conjunto dos números racionais representado pela letra $\mathbb{Q}$ de "quociente", pois todos seus elementos são resultados de divisão entre números inteiros. Logo:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}.$$

E assim as quatro operações básicas ficam bem definidas nesse conjunto. Entretanto ainda há números resultantes de outras operações que ainda não estão presentes no conjunto $\mathbb{Q}$, como o caso dos números π, e, $\sqrt{2}$, etc. Esses números que não podem ser escritos em forma de fração são chamados de **números irracionais**, representados pelo simbolo $\mathbb{I}$, que juntamente com os números racionais formam o conjunto dos números reais:

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}.$$

De fato, os números reais são difíceis de definir, mas para nós não será necessário essa definição, mas devemos apenas saber que com esses números reais, a reta numérica fica **completa**. (Veja mais sobre completude dos números reais em [5]).

Para o nosso estudo, apenas os números reais já serão suficientes, mas há ainda um conjunto que é estudado no 3º ano do Ensino Médio que é o conjunto dos números complexos, dado por:

$$\mathbb{C} = \left\{ a + bi : a, b \in \mathbb{R}, i = \sqrt{-1} \right\}.$$

Esse conjunto é introduzido para poder resolver equações polinomiais que não possuem soluções no conjunto dos números reais.

Olhando para os conjuntos listados acima, é fácil ver que há uma relação entre tais conjuntos. Para exemplificar, podemos ver que todos números naturais também são inteiros, bem como todo número inteiro é racional, que, por sua vez, todo número racional é um número real e, por último, todo número real é um número complexo. Assim, fica estabelecida uma relação de ordem total nos conjuntos listados, ou seja:

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}.$$

Usando um Diagrama de Venn temos o seguinte:

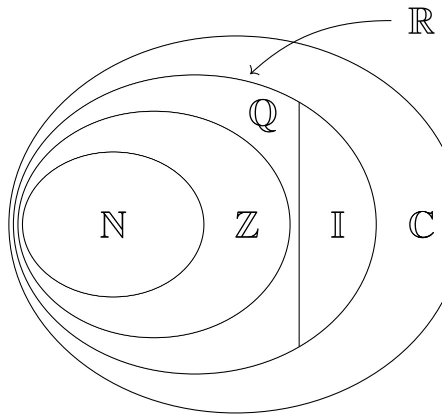


Figura 1.1: Diagrama de Venn dos conjuntos numéricos.

Podemos listar alguns erros comuns que ocorrem durante a aprendizagem, a saber: restringir os números inteiros apenas aos números naturais, no sentido de que apenas os números positivos e o 0 são inteiros, esquecendo-se dos número negativos; esquecer-se que os números que pertencem a um conjunto “menor” também pertencem a um conjunto “maior”, como , por exemplo, pensar que o número 13 também é racional, ou que o número $\frac{1}{5}$ é um número real, e até mesmo complexo.

Podemos agora falar sobre um tipo de subconjunto específico dos números reais: os intervalos.

1.2 Intervalos

O conjunto dos número reais $\mathbb{R}$ é o mais utilizado no estudo de matemática por conter algumas propriedades, apesar de que desse conjunto utilizamos uma maioria de números racionais e uma pequena quantidade de números irracionais.

Para começar um estudo de Cálculo, é importante saber o que é e como classificar um intervalo: um intervalo é um subconjunto do conjunto dos números reais, que classificam-se em **abertos**, **semiabertos** e **fechados**. Uma ideia de intervalo é quando se toma um ponto a e um ponto b na reta real e forma um conjunto com todos valores entre dois pontos, podendo, ou não, conter a e b. Vejamos seus tipos, notações e exemplos:

- **Conjunto fechado:** são todos os números entre dois pontos incluindo os pontos de delimitação. Exemplo: $[2, 10] = \{x \in \mathbb{R} : 2 \leq x \leq 10\}$.
- **Conjunto aberto:** são todos os números entre dois pontos, excluindo os pontos de delimitação. Exemplo: $(-4, 5) = \{x \in \mathbb{R} : -4 < x < 5\}$.
- **Conjunto semiaberto** são todos os números entre dois pontos, incluindo apenas um de seus pontos de delimitação. Exemplo: $[0, 1) = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x < 1\}$ ou $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] = \left\{x \in \mathbb{R} : -\frac{1}{2} < x \leq \frac{1}{2}\right\}$.

Visto o que são intervalos numéricos, passaremos agora a abordar as funções cujo domínio são os números reais ou algum de seus subconjuntos.

1.3 Funções Reais

Para começar a falar de funções precisamos definir seu conceito, mostrar algumas propriedades e também exemplificar. Dados A e B subconjuntos dos números reais

Definição 1.1. Uma função $f : A \to B$ é uma relação que, para todo $x \in A$, associa-se um único $y = f(x) \in B$.

Ou seja, chamamos de função toda relação entre dois conjuntos quaisquer, por exemplo A e B, tal que para cada elemento em A associa-se um único elemento em B. Usamos x para representar um elemento desse conjunto A, e y para representar um elemento desse conjunto B. Além disso, dizemos que x é uma variável independente e que y é uma variável dependente, ou seja, y é uma função de x. Visualmente podemos fazer a seguinte associação:

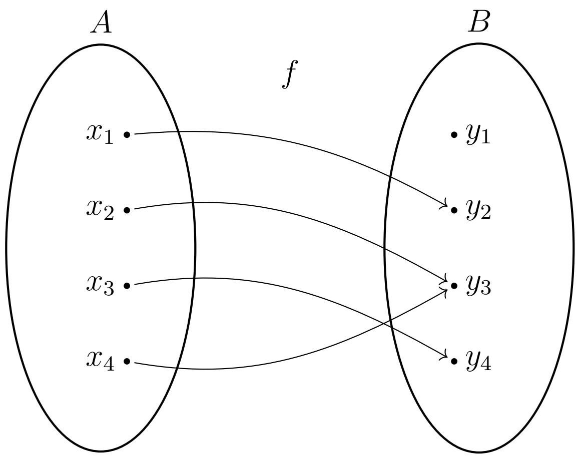


Figura 1.2: Diagrama de uma função f.

Para aprofundarmos mais no estudo de funções há alguns conceitos que devemos saber a respeito de função, como **domínio**, **contradomínio** e **imagem**.

Na função $f : A \to B$, o **domínio** é o conjunto A, que são todos os elementos que a variável x pode assumir. Informalmente dizemos que o domínio é o conjunto de "saída".

Na função $f : A \to B$, a **imagem** é o conjunto que possui todos os elementos que a variável y pode assumir, ou seja todos os elementos de B que possuem uma correspondência com um elemento do domínio. Representamos o conjunto de imagem da função f por $Im(f)$.

Já o **contradomínio** da função $f : A \to B$ é o conjunto B que contém a imagem de f, ou seja, $B \supseteq Im(f)$. Informalmente dizemos que o contradomínio é o conjunto de "chegada" da função.

Dependendo de como esses conjuntos são e como se relacionam, há algumas nomenclaturas bem usuais que devemos saber, como por exemplo dizer se uma função é injetora, sobrejetora ou bijetora. Vejamos:

Definição 1.2. Uma função $f : A \to B$ é dita **injetora** quando para todo par de elementos distintos do domínio, x_1 e x_2, suas imagens correspondentes no conjunto $Im(f)$ sejam diferentes.

Podemos dizer então que uma função é injetora se, e somente se, $x_1 \neq x_2$ implicar $f(x_1) \neq f(x_2)$.

É importante salientar a diferença entre as Definições 1.1 e 1.2, pois é comum algum equívoco entre estudantes do Ensino Básico e até mesmo do Superior, uma vez que a Definição 1.1 diz que cada elemento do domínio se relaciona com apenas um elemento da imagem, enquanto a Definição 1.2 diz que cada elemento da imagem está relacionado com um único elemento do domínio.

Definição 1.3. Uma função $f : A \to B$ é dita **sobrejetora** quando seu conjunto imagem é igual a seu contradomínio.

Definição 1.4. Uma função $f : A \to B$ é dita **bijetora** quando é simultaneamente injetora e sobrejetora.

A seguir, vamos dar exemplos de funções, bem como suas classificações em injetoras, sobrejetoras e bijetoras.

Exemplo 1.1. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1$, $x \in \mathbb{R}$, possui como domínio e contradomínio o conjunto $\mathbb{R}$, e como imagem o conjunto $Im(f) = \{1\}$. Essa função não é injetora, pois se tomarmos dois elementos de seu domínio, por exemplo 0 e 3, suas imagens são iguais, ou seja $f(0) = 1 = f(3)$. Essa função também não é sobrejetora, pois o conjunto imagem é diferente do contradomínio, visto que $Im(f) = \{1\} \neq \mathbb{R}$. Por último, a função não é bijetora pois não é injetora nem sobrejetora, apesar de que somente a ausência de uma das condições já seria suficiente.

É comum ver os termos injetora, sobrejetora e bijetora serem escritos como injetiva, sobrejetiva e bijetiva, pois possuem o mesmo significado.

Exemplo 1.2. Vamos analisar a função $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}^+$, onde $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$. Note que:

(i) Domínio: $D(f) = \mathbb{R}^+$.

(ii) Contradomínio: $CD(f) = \mathbb{R}$.

(iii) Imagem: $Im(f) = \mathbb{R}^+$.

(iv) Injetiva: é injetora pois se $x_1 \neq x_2$, com $x_1, x_2 \in D(f)$, então $f(x_1) = x_1^2 \neq x_2^2 = f(x_2)$.

(v) Sobrejetiva: é fácil ver que $Im(f) \neq CD(f)$, logo f não é sobrejetiva.

(vi) Bijetiva: a função não é bijetora pois não é sobrejetora.

Exemplo 1.3. Considere a função $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ dada por $f(x) = x$, $x \in \mathbb{Q}$, e analisá-la.

(i) Domínio: $D(f) = \mathbb{Q}$.

(ii) Contradomínio: $CD(f) = \mathbb{Q}$.

(iii) Imagem: $Im(f) = \mathbb{Q}$.

(iv) Injetiva: é injetora pois se $x_1 \neq x_2$, $x_1, x_2 \in D(f)$, então $f(x_1) \neq f(x_1)$.

(v) Sobrejetiva: é fácil ver que $Im(f) = CD(f)$, logo f é sobrejetiva.

(vi) Bijetiva: a função é bijetora pois é simultaneamente injetora e sobrejetora.

Para o nosso estudo, a maior parte das funções apresentadas possuem como domínio e contradomínio o conjunto do números reais $\mathbb{R}$, por ser um conjunto completo onde a maioria das operações utilizadas no Ensino Básico estão bem definidas. Vejamos agora exemplos mais comuns dessas funções.

1.4 Exemplos de funções

Vamos agora mostrar alguns tipos específicos de funções, pois apesar de existirem infinitas funções, podemos agrupá-las de acordo com características específicas. Alguns exemplos como funções **polinomiais**, **periódicas**, **exponenciais** e outras são bem comuns de serem estudadas no Ensino Médio. Vamos então citar alguns desses tipos.

1.4.1 Funções polinomiais

As funções polinomiais com mais relevância para se estudar são funções constantes, do 1º grau e do 2º grau. Essas são as funções com mais destaque e que possuem mais propriedades a serem estudadas, por isso vamos fazer um resumo de cada uma delas e ver algumas possíveis aplicações.

Função constante:

Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dita constante se para qualquer par de elementos x_1 e x_2 pertencentes ao domínio de f, tivermos que $f(x_1) = f(x_2)$. Uma função constante também pode ser definida como uma função do tipo $f(x) = k$, onde $k \in \mathbb{R}$ é um número qualquer, porém fixado. No caso particular em que $k = 0$, dizemos que f é uma **função nula**.

Função do 1º grau:

Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é chamada de função polinomial do 1º grau (ou apenas função do 1º grau) se $f(x) = ax + b$ com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$ (perceba que se $a = 0$, teríamos uma função constante). Dizemos que a é o coeficiente angular da função e b é o coeficiente linear. No caso em que $b = 0$, dizemos que a função f é uma **função linear**.

Esses dois tipos de funções formam junto o que chamamos de função afim, e além disso, seus gráficos são retas, que são estruturas geométricas comuns e de fácil entendimento. De certa forma, há uma facilidade em trabalhar com essas funções, visto que seus cálculos são bem mais fáceis de serem feitos e entendidos, além de que há uma grande quantidade de situações cotidianas que podem ser transformados em problemas envolvendo funções afins.

Função do 2º grau:

Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é chamada de função polinomial do 2º grau (ou apenas função do 2º grau) se f pode ser escrita como $f(x) = ax^2+bx+c$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$ (perceba que se $a = 0$, teríamos uma função afim). Esse tipo de função também é conhecida como **função quadrática**.

Esse tipo de função possui uma representação geométrica conhecida como **parábola**, que possui várias propriedades algébricas um pouco mais complexas que as retas. Entretanto algumas delas são estudadas no Ensino Médio, o que gera um certo descontentamento por partes dos alunos, pois os cálculos não são tão triviais a primeira vista e suas propriedades não são tão diretas de serem observadas.

Alguns tópicos como determinar **raízes**, **concavidade** e **vértice** são os pontos principais a serem estudados. Por isso, podemos visualizar sucintamente esses conceitos.

- **Concavidade da parábola:** Uma parábola gerada pela função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$, possui concavidade para cima se $a > 0$ e concavidade para baixo se $a < 0$. Vejamos exemplos:

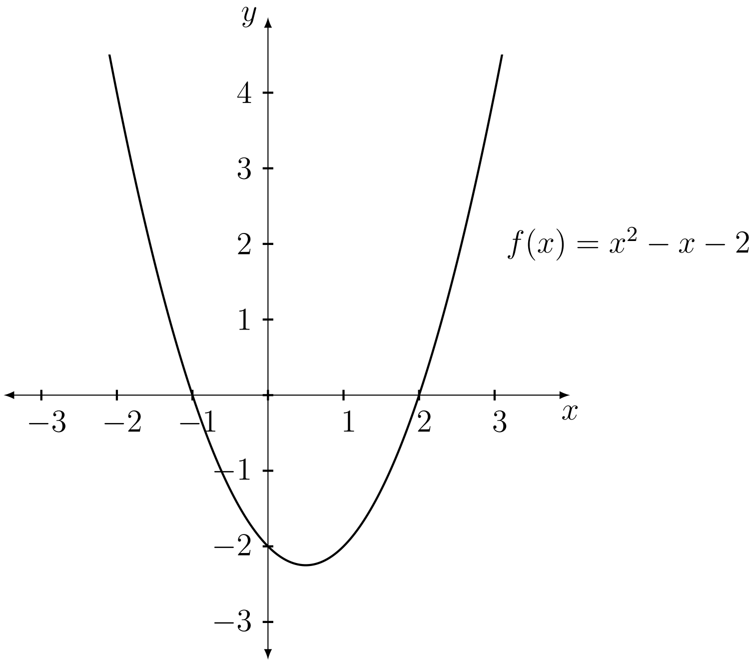


Figura 1.3: Parábola com concavidade para cima.

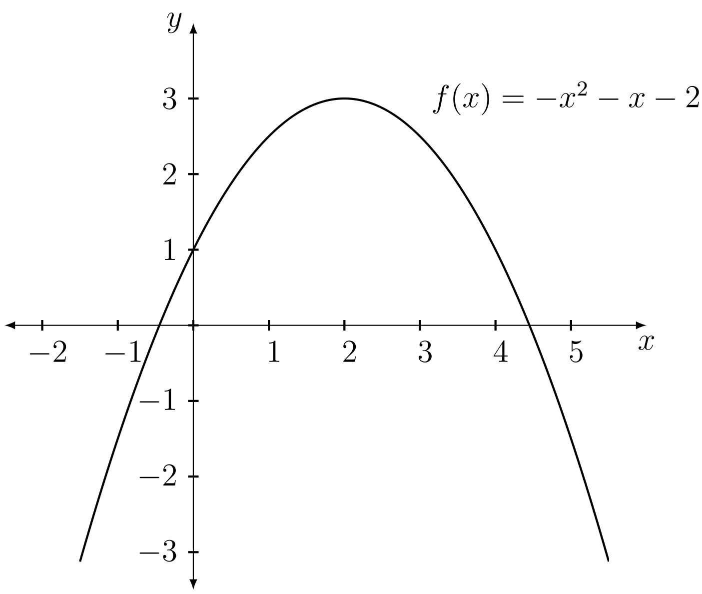


Figura 1.4: Parábola com concavidade para baixo.

- **Raízes da parábola:** Uma raiz de uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é o valor $\overline{x} \in \mathbb{R}$ tal que $f(\overline{x}) = 0$. Numa função quadrática do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$, podemos encontrar suas raízes através da "fórmula de Bháskara", que possui esse nome apenas no Brasil, pois no exterior é conhecido como "*quadratic formula*", que seria algo como "fórmula quadrática". Vejamos como obter essa fórumla:

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c=0 \Leftrightarrow &\quad ax^2+bx=-c \\ \Leftrightarrow &\quad x^2+\frac{bx}{a}=-\frac{c}{a}. \end{aligned}$$

Perceba que podemos dividir ambos os membros da equação por a, pois ,na função quadrática, tem-se necessariamente que $a \neq 0$. Prosseguindo:

$$\begin{aligned} x^2+\frac{bx}{a}=-\frac{c}{a} \Leftrightarrow &\quad x^2+\frac{bx}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2 \\ \Leftrightarrow &\quad \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\frac{b^2}{4a^2} \\ \Leftrightarrow &\quad \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}. \end{aligned}$$

Vale lembrar que $\sqrt{x^2}=|x|$. Dito isso, segue:

$$\begin{aligned} &\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2} \\ \Leftrightarrow &\quad \left|x+\frac{b}{2a}\right|=\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} \\ \Leftrightarrow &\quad x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \\ \Leftrightarrow &\quad x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}. \end{aligned}$$

Devemos levar em conta que as raízes $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ só existem nos números reais $\mathbb{R}$ se, e somente se, $b^2-4ac \geq 0$, parte essa a qual chamamos de "delta" e é representado pela letra grega Δ. No caso em que $\Delta = b^2-4ac < 0$ a equação quadrática $ax^2+bx+c=0$ possuirá solução apenas no conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$. (Ver [1]).

- **Vértice da parábola:** Uma parábola do tipo $f(x)=ax^2+bx+c$ possui um valor de máximo, caso $a<0$, ou um valor mínimo, caso $a>0$. Esse valor pode ser encontrado facilmente utilizando um conceito que será apresentado mais adiante chamado derivada, entretanto vamos ver uma forma alternativa de encontrar esses valores:

Seja $V=(x_v, f(x_v))$ o vértice da parábola. Esse ponto pode ser determinado através da média entre dois valores simétricos na parábola, por isso vamos utilizar as duas raízes

x_1 e x_2 e encontrar o valor médio:

$$\begin{aligned}
x_v = \frac{x_1 + x_2}{2} &= \frac{\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} + \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}}{2} \\
&= \frac{-b+\sqrt{\Delta}-b-\sqrt{\Delta}}{4a} \\
&= \frac{-2b}{4a} \\
&= -\frac{b}{2a}.
\end{aligned}$$

Caso a função quadrática que gera a parábola não possua raízes, basta somar uma constante $k \in \mathbb{R}$ na função com o objetivo de transladar verticalmente a parábola até ela possuir duas raízes. Portanto, em qualquer caso, temos a coordenada $x_v = -\dfrac{b}{2a}$. Vamos agora encontrar a coordenada $y_v = f(x_v)$.

$$\begin{aligned}
f(x_v) &= ax_v^2 + bx_v + c \\
&= a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c \\
&= \frac{ab^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c \\
&= \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a} \\
&= \frac{-b^2 + 4ac}{4a} \\
&= \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a} \\
&= -\frac{\Delta}{4a}
\end{aligned}$$

Com isso, temos que o vértice da parábola é $V = \left(\dfrac{-b}{2a}, \dfrac{-\Delta}{4a}\right)$. A seguir, comentaremos brevemente um caso mais geral de função polinomial.

Funções do n-ésimo grau:

Funções com grau maior que 2 não são tão vistas no Ensino Médio, até porque seus estudos são mais avançados e não há propriedades tão imediatas, mas, para nosso estudo de limites e derivadas, veremos algumas dessas funções. Em geral, funções polinomiais podem ser escritas na forma

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

onde a_n, a_{n-1}, $\cdots$, a_1 e a_0 são coeficientes reais e $n \in \mathbb{N}$. Por exemplo, a função polinomial $f(x) = -x^5+10x^3+3x^2-1$ é de quinto grau, uma vez que o grau de uma função polinomial é dado pelo maior valor do expoente da variável independente x.

1.4.2 Funções periódicas

Uma função periódica é um função f tal que $f(x) = f(x+k)$, onde $k \in \mathbb{R}$ é chamado de período da função. As funções periódicas estudadas no Ensino Médio e no Cálculo são as função trigonométricas. Dentre elas destacaremos as funções **seno**, **cosseno** e **tangente**.

Essas funções têm origem no círculo (ou ciclo) trigonométrico de raio $r = 1$. Seja θ o ângulo formado entre o eixo x positivo e um raio qualquer nesse círculo. Com isso, podemos identificar visualmente os valores de seno, cosseno e tangente do ângulo θ, conforme Figura 1.5.

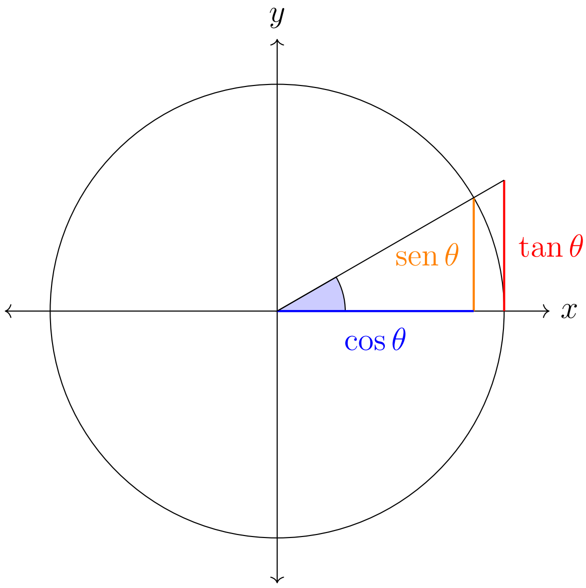


Figura 1.5: Seno, cosseno e tangente do ângulo θ.

É importante ressaltar que o valor do ângulo das funções trigonométricas é medido em radianos, apesar de ser mais intuitivo medir em graus, de forma que π rad $= 180^o$. Portanto, usaremos como variável nas funções trigonométricas valores em radianos.

Função cosseno:

A função cosseno é a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \cos(x)$, e possui como imagem o intervalo $[-1, 1]$. Sendo assim temos que $-1 \leq \cos(x) \leq 1$. Seu período é 2π, ou seja,

$\cos(x) = \cos(x + 2\pi)$. Vejamos seu gráfico:

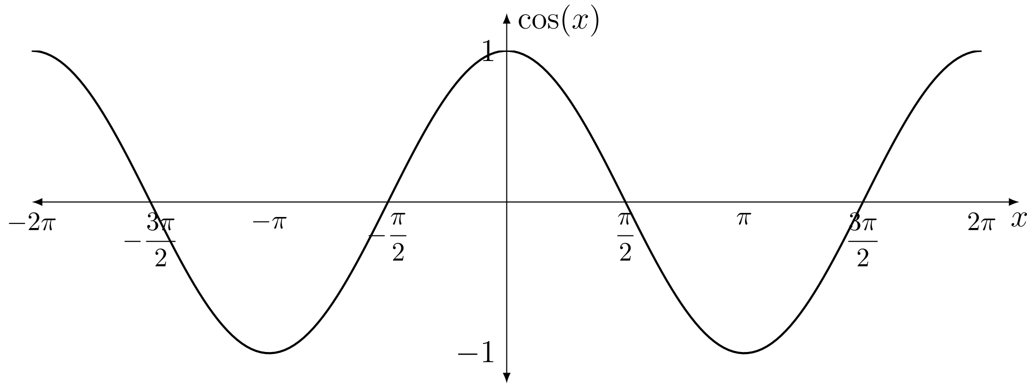


Figura 1.6: Gráfico da função cosseno.

Perceba que a função cosseno é simétrica em relação ao eixo y, pois $\cos(x) = \cos(-x)$, isto é, cosseno é uma função par.

Função seno:

A função seno é a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \operatorname{sen}(x)$, e possui como imagem o intervalo $[-1, 1]$. Sendo assim temos que $-1 \leq \operatorname{sen}(x) \leq 1$. Seu período é 2π, ou seja, $\operatorname{sen}(x) = \operatorname{sen}(x + 2\pi)$. Vejamos seu gráfico:

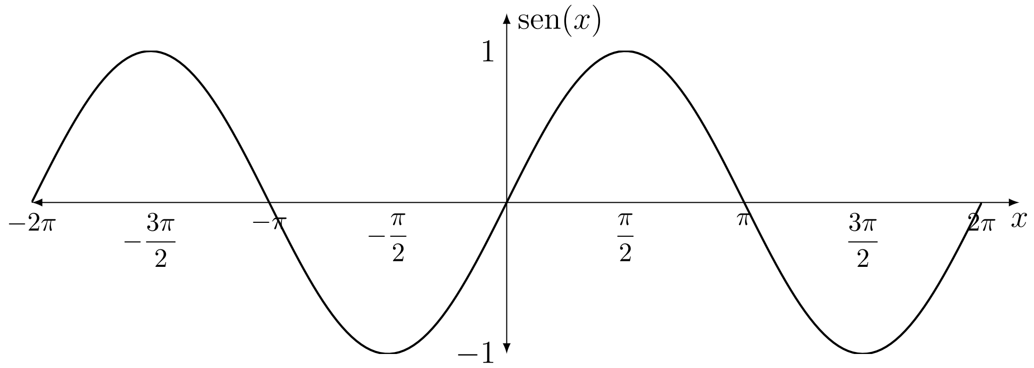


Figura 1.7: Gráfico da função seno.

Perceba que a função seno não é simétrica, entretanto ela possui a propriedade de que $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen}(x)$, isto é, trata-se de um função ímpar.

Função tangente:

A função tangente é definida como a razão entre as funções $\operatorname{sen}(x)$ e $\cos(x)$, isto é, $\tan(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}$, restrita aos pontos em que $\cos(x) \neq 0$. Diferente das funções seno e cosseno, a imagem da função tangente é $\mathbb{R}$. Seu período é π, ou seja, $\tan(x) = \tan(x+\pi)$. Vejamos seu gráfico:

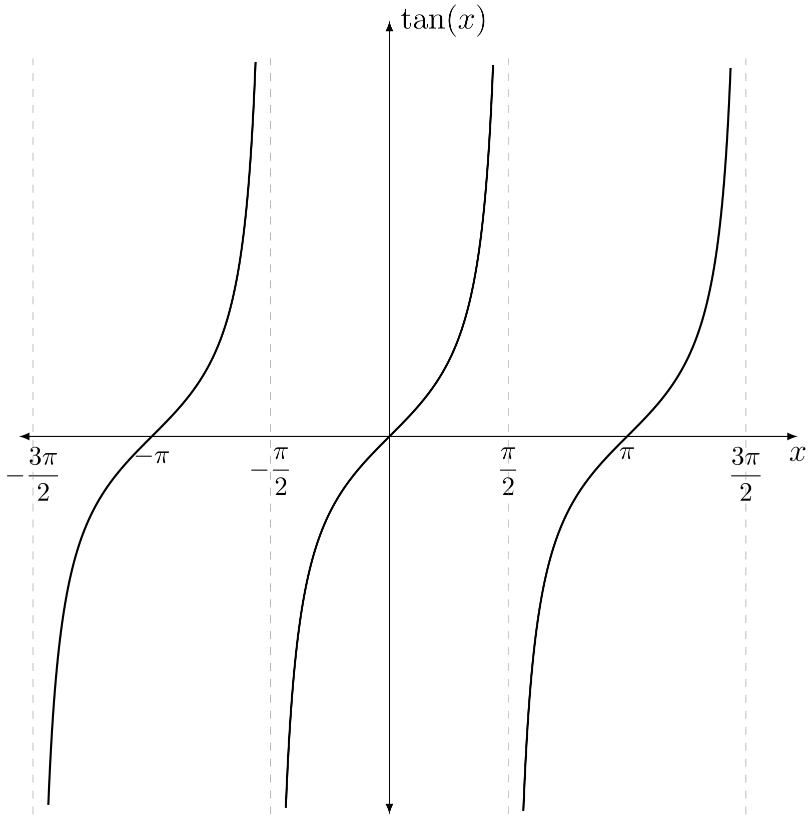


Figura 1.8: Gráfico da função tangente.

Assim como a função seno, a função tangente não é simétrica, porém também possui a propriedade de que $\tan(-x) = -\tan(x)$.

1.4.3 Funções exponencial e logarítmica

Função exponencial:

É uma função utilizada em situações onde há um crescimento muito rápido, tal qual juros compostos, crescimento da população de bactérias, etc.

Podemos definir a função exponencial como sendo a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = a^x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$. Caso $0 < a < 1$ temos um função **decrescente**, e caso $a > 1$

temos uma função **crescente**. Vejamos:

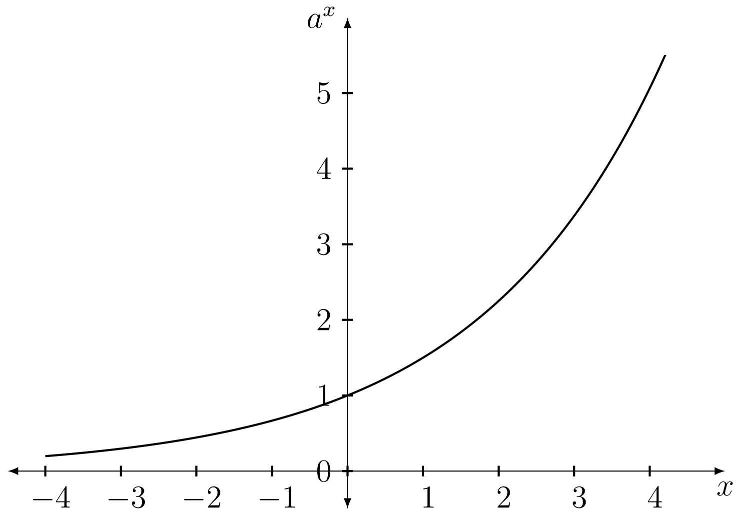


Figura 1.9: Função exponencial $f(x) = a^x$ com $a > 1$.

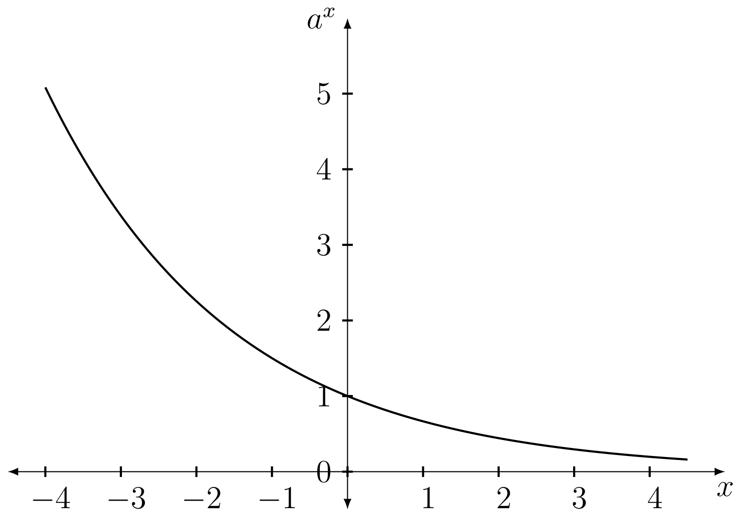


Figura 1.10: Função exponencial $f(x) = a^x$ com $0 < a < 1$.

Perceba que o domínio da função exponencial são os números reais $\mathbb{R}$ e sua imagem é apenas a parte positiva do eixo y, ou seja, $Im(f) = \mathbb{R}^+$. Juntamente com o estudo da função exponencial, é importante relembrar algumas propriedades de potenciação. Dado $a \in \mathbb{R}$

(1) $a^0 = 1$, contanto que $a \neq 0$;

(2) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$;

(3) $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, $a \neq 0$;

(4) $a^{-m} = \left(\dfrac{1}{a}\right)^m$, $a \neq 0$;

(5) $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

Função logarítmica:

A função logarítmica vem da operação inversa da exponenciação. A função $f(x) = \log_b(x)$ está definida quando $b > 0$, $b \neq 1$ e $x > 0$, ou seja, a função logarítmica possui como domínio o conjunto dos números reais positivos $\mathbb{R}^+$. Vejamos seu gráfico:

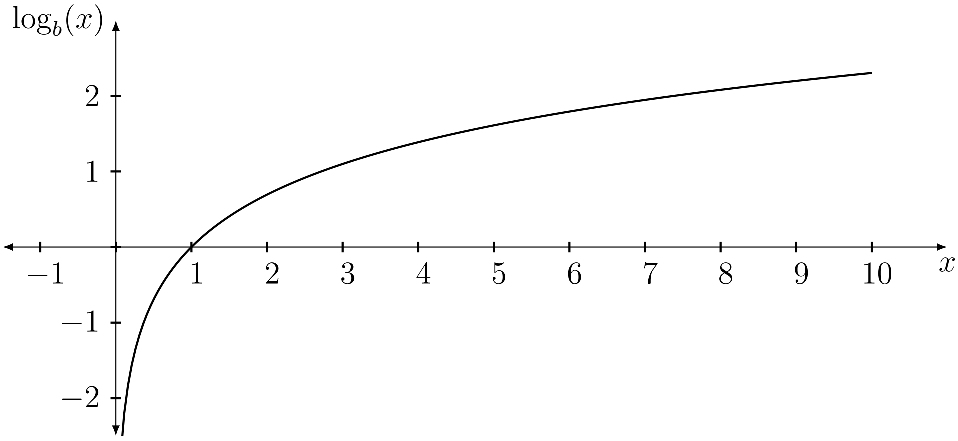


Figura 1.11: Função logarítmica $f(x) = \log_b x$.

Caso $b > 1$ a função será crescente, e caso $0 < b < 1$, a função será decrescente (Verifique!). Alem disso, quando $b = 10$, dizemos que o logaritmo é decimal e escrevemos apenas $\log(x)$, e caso $b = e$ (constante de Euler), chamamos de logaritmo natural e escrevemos $\ln(x)$. Abordaremos sobre logaritmo natural em capítulos posteriores.

Vejamos algumas propriedades e constatações importantes para o estudo de logaritmos:

(1) $\log_b 1 = 0$;

(2) $\log_b b = 1$;

(3) $\log_b(x \cdot y) = \log_b x + \log_b y$;

(4) $\log_b \left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_b x - \log_b y$;

(5) $\log_b (x^a) = a \cdot \log_b x$;

(6) $\log_b x = \dfrac{\log_c x}{\log_c b}$.

Capítulo 2

Uma introdução ao limite

Nesse capítulo veremos o que é o limite e suas consequências, fazendo uma passagem por sua definição, suas propriedades e algumas aplicações, além de veremos o que é continuidade para então, ao final, conheceremos um Teorema importante que decorre de limite e continuidade. O leitor interessado pode encontrar mais em [8], [9] e [10].

A fonte das figuras apresentadas neste capítulo são de elaboração própria.

2.1 Limite e continuidade

Nesta seção desenvolveremos um dos tópicos principais do nosso estudo: o limite. Veremos a seguir que o limite possui uma ideia intuitiva fácil de se entender no estudo de funções, além de ser muito útil para um estudante do Ensino Médio.

O conceito de limite de uma função está ligado diretamente à ideia de continuidade da função. Intuitivamente, uma função é dita contínua se seu gráfico não possui "saltos", ou seja, é como se pudéssemos desenhar seu gráfico sem retirar o lápis do papel.

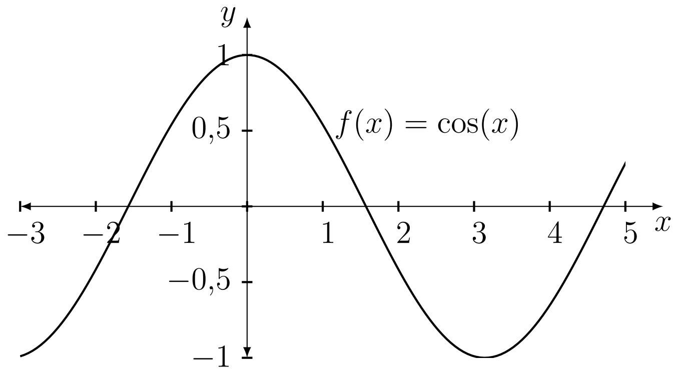


Figura 2.1: Exemplo de função contínua.

Na figura 2.1 vemos um exemplo de função contínua, pois seu gráfico não contém saltos ou rupturas. A função mostrada é a função $f(x) = \cos(x)$ que é uma função contínua bem conhecida.

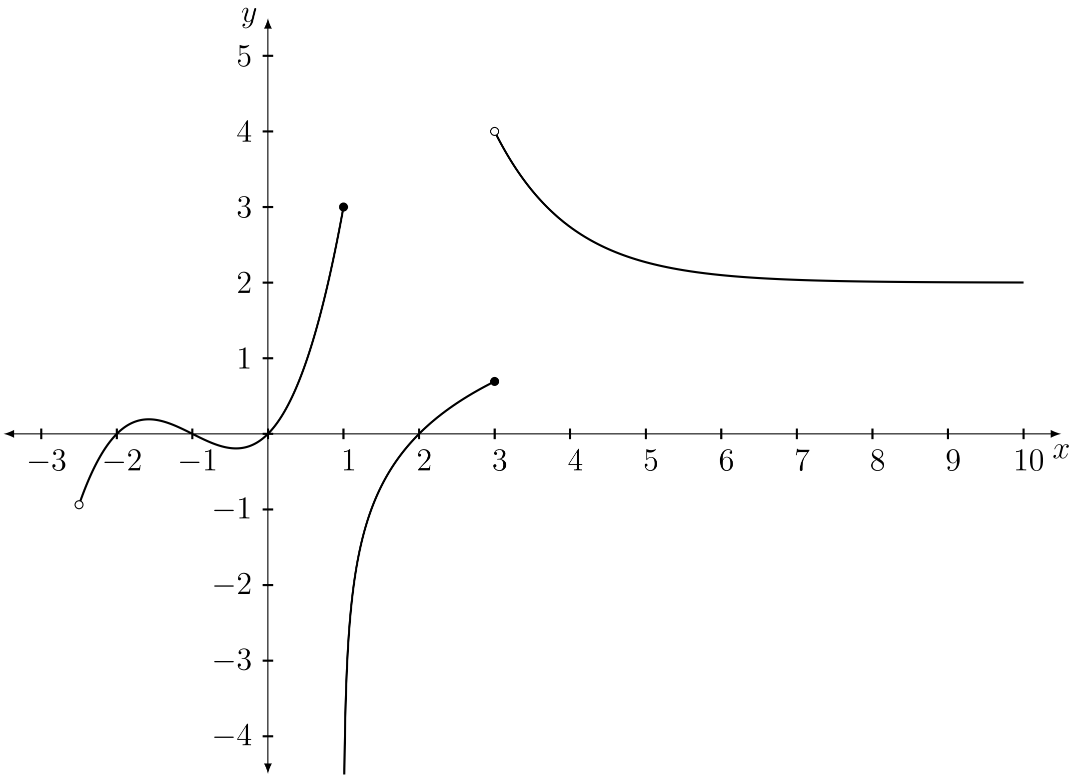


Figura 2.2: Exemplo de função descontínua.

Na Figura 2.2, vemos um exemplo de função descontínua, pois seu gráfico possui vários saltos, de forma que não seria possível desenhá-lo sem retirar o lápis do papel. Essa função é um função definida por algumas sentenças e não é tão comum de ser trabalhada.

A ideia de limite de funções é a "aproximação", ou seja, estamos interessados em ver para qual valor a função se aproxima quando um ponto do seu domínio se aproxima de outro ponto. Sendo um pouco mais formal, queremos saber se quando $x \in D(f)$ tende a um ponto $a \in \mathbb{R}$, a função $f(x)$ se aproxima de um tal valor $L \in \mathbb{R}$. Simbolicamente temos:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

(Leia-se: limite de $f(x)$ quando x tende a a é igual a L). De maneira formal, dizemos que esse limite existe se, para todo número $\epsilon > 0$ houver um número $\delta > 0$ tal que se $|x - a| < \delta$ então $|f(x) - L| < \epsilon$.

Vamos encontrar alguns exemplos de limite com a ideia intuitiva de "aproximação".

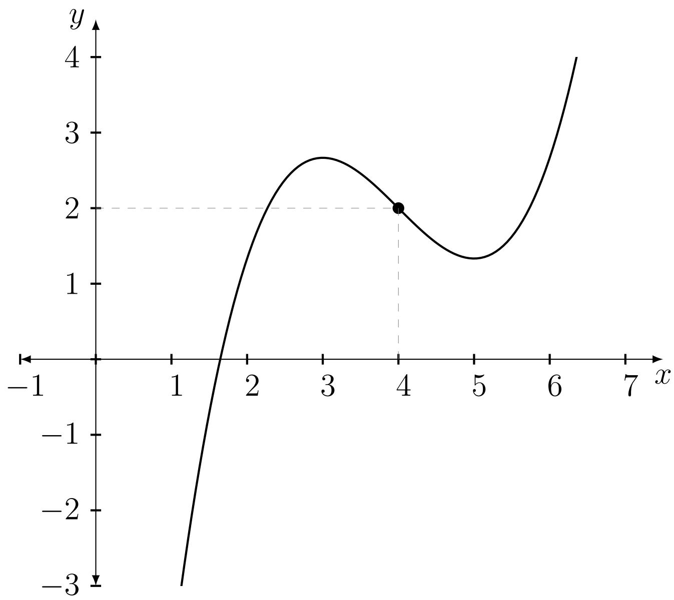


Figura 2.3: Gráfico da função $f(x) = \dfrac{(x-4)^3}{12} - x + 6$.

Intuitivamente, vemos na Figura 2.3 que, quando x tende a 4 (denotamos por $x \to 4$), a função f tende ao valor 2 (denotamos por $f(x) \to 2$). Nesse caso, é fácil ver que realmente a função assume esse valor quando $x = 4$, pois

$$f(4) = \frac{(4-4)^3}{12} - 4 + 6 = \frac{0^3}{12} - 4 + 6 = -4 + 6 = 2.$$

É importante notar que, quando calculamos um limite $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, o valor $f(a)$ pode não ser igual a L, por exemplo no caso em que a função f não esteja definida nesse ponto $a \in \mathbb{R}$. O valor L é o valor para o qual a função f se aproxima, conforme a variável x tende para o ponto a.

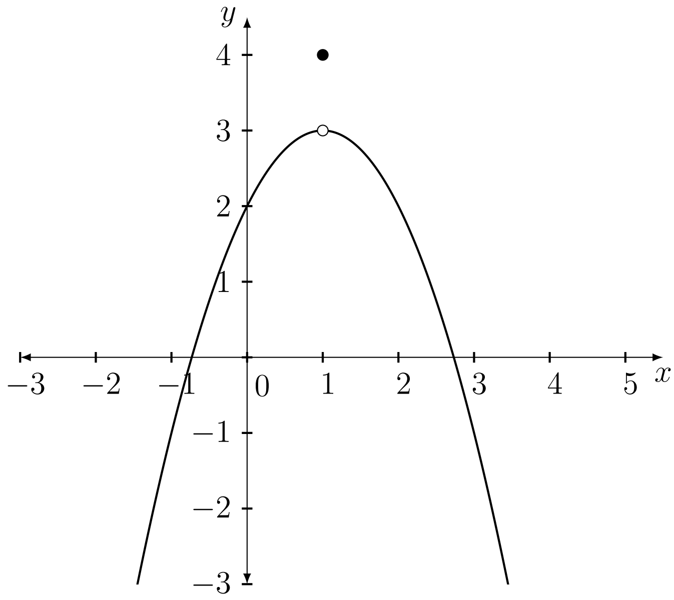


Figura 2.4: Gráfico da função $f(x) = \begin{cases} -x^2+2x+2 & \text{, se } x \neq 1, \\ 4 & \text{, se } x = 1. \end{cases}$

Por exemplo, no caso da Figura 2.4, temos uma função definida por duas sentenças em que, apesar da função se aproximar de 3 quando x se aproxima de 1, temos que o valor $f(1) = 4$. Isso significa que $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 3 \neq f(1) = 4$.

Podemos também avaliar os limites de função por "dois lados", ou seja, verificar para qual valor a função $f(x)$ tende conforme x se aproxima de a, tanto por valores menores do que a quanto por valores maiores do que a. Denotamos

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L,$$

para indicar quando x tenda a a por valores menores do que a, e

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L,$$

para indicar quando x tenda a a por valores maiores do que a. Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 2.1. Seja $f : [0, 4] \to \mathbb{R}$ uma função definida $f(x) = \begin{cases} x & \text{, se } x < 2 \\ -(x-2)^2 + 4 & \text{, se } x \geq 2 \end{cases}$. Vamos verificar que os limites laterais dessa função, quando x se aproxima de 2, são iguais e concluir se essa função pode, ou não, ser contínua.

Primeiramente, vamos calcular os limites laterais dessa função quando x tende a 2, isto é

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} x = 2,$$

pois $f(x) = x$ se $x < 2$, e

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} -(x-2)^2 + 8 = -(2-2)^2 + 4 = 4,$$

pois $f(x) = -x^2 + 8$ se $x \geq 2$.

Com isso, mostramos que os limites laterais não são iguais pois $\lim_{x \to 2^-} f(x) = 2 \neq 4 = \lim_{x \to 2^+} f(x)$. Assim, concluímos que a função não é contínua pois há um salto em seu gráfico,

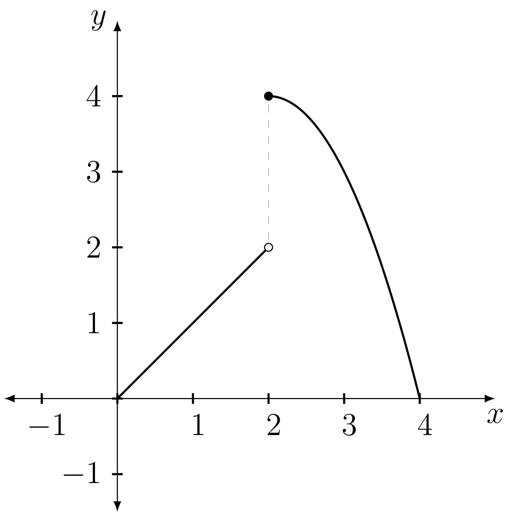


Figura 2.5: Gráfico da função $f(x) = \begin{cases} x & \text{, se } x < 2, \\ -(x-2)^2 + 4 & \text{, se } x \geq 2. \end{cases}$

Quando os limites laterais são iguais, então dizemos que o limite da função existe e é igual aos limites laterias. Ou seja,

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L = \lim_{x \to a^+} f(x) \Rightarrow \lim_{x \to a} f(x) = L.$$

A última relação nos diz que, se os limites laterais não coincidem, então não podemos dizer que o limite da função naquele ponto existe. Usaremos esse conceito para falar um pouco mais sobre a continuidade da função.

Retomando a ideia de continuidade da função, vamos dizer, com um pouco mais de rigor, que uma função é contínua num ponto $a \in D(f)$ se, e somente se, seus limites laterais coincidirem com a função aplicada no ponto $a \in D(f)$. Escrevemos assim:

$$f \text{ é contínua em } a \in D(f) \;\Leftrightarrow \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = f(a).$$

De maneira análoga, utilizando-se de ϵ e δ, temos que f é contínua em $a \in D(f)$ se para todo número $\epsilon > 0$ houver um número $\delta > 0$ tal que se $|x-a| < \delta$ então $|f(x) - f(a)| < \epsilon$. A diferença entre a existência do limite e a continuidade da função é que o limite L é o valor assumido pela função f no ponto a, isto é, $L = f(a)$, para algum $a \in D(f)$.

A seguir, iremos estudar importantes propriedades que são satisfeitas pelo conceito de limite.

2.2 Propriedades do limite

Assim como toda boa operação matemática, temos algumas propriedades para facilitar nossos cálculos de limites. Seja $k \in \mathbb{R}$ uma constante qualquer e sejam f e g funções tais que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ e $\lim\limits_{x \to a} g(x) = M$. Obtemos,

- **Limite da soma de duas funções**:

$$\lim_{x \to a}[f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) = L + M,$$

  isto é, o limite da soma de duas funções se torna a soma dos limites de cada função calculado individualmente.

- **Limite do produto de uma função por uma constante**:

$$\lim_{x \to a} k \cdot f(x) = k \cdot \lim_{x \to a} f(x) = L = k \cdot L,$$

  ou seja, a constante que multiplica a função pode "sair" do limite a ser calculado.

- **Limite do produto de duas funções**:

$$\lim_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x) = L \cdot M,$$

  isto é, podemos "separar" o limite de um produto em dois limites individuais.

- **Limite do quociente de duas funções**

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} = \frac{L}{M} \text{ , desde que } M \neq 0,$$

  ou seja, o limite de um quociente é igual ao quociente de dois limites.

Perceba que para calcular o limite da razão entre duas funções é necessário que o limite do denominador não seja nulo. Entretanto há alguns casos que veremos mais a frente onde ambos numerador e denominador tendem a 0 à medida que x tende ao ponto desejado. Nesses casos deveremos usar algumas ferramentas apropriadas para verificar se esse limite existe de fato ou não.

2.3 Aplicações

Vamos aplicar os conceitos desenvolvidos na última seção. Começaremos com o seguinte exemplo:

Exemplo 2.2. O limite da função $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x+1}$ quando x tende para 10 é dado por

$$\lim_{x\to 10} f(x) = \lim_{x\to 10} \frac{x^2-1}{x+1} = \frac{10^2-1}{10+1} = \frac{99}{11} = 9.$$

Note que o cálculo do limite acima foi realizado apenas substituindo o valor para o qual o x se aproxima, isto porque a função está bem definida e é contínua nesse ponto. Agora, vamos calcular o limite da mesma função quando x tende a -1, isto é,

$$\lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x+1} = \lim_{x\to -1} \frac{\cancel{(x+1)}(x-1)}{\cancel{x+1}} = \lim_{x\to -1}(x-1) = -1-1 = -2$$

Observe que neste caso, a função f não está definida para $x=-1$, pois o denominador é nulo nesse ponto. Porém, conseguimos calcular o limite da função quando x se aproxima de -1. Para resolver, primeiro dividimos o numerador, que é um produto notável, em dois fatores e em seguida cancelamos um fator do numerador com um fator do denominador. Veja que isso é possível pelo fato de ambos serem diferentes de 0, pois quando calculamos um limite, a função se aproxima do ponto, mas nunca o atinge. Após isso finalizamos apenas "substituindo" os valores. O valor encontrado no limite é o valor para o qual se esperaria que a função atingisse para que fosse contínua, entretanto a função não assume esse valor, fazendo com que seja descontínua nesse ponto.

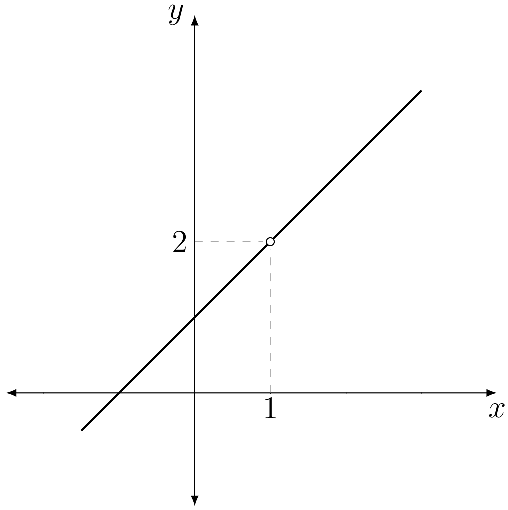


Figura 2.6: Gráfico da função $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$.

Vale lembrar que uma função contínua é aquela que é contínua em todo seu domínio. A função $f(x) = \dfrac{1}{x}$, por exemplo, é contínua pois é contínua em todo seu domínio $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, uma vez que o ponto $x = 0$ não pertence ao domínio. Entretanto, no intervalo $[-1, 1]$ a função $f(x) = \dfrac{1}{x}$ não é contínua.

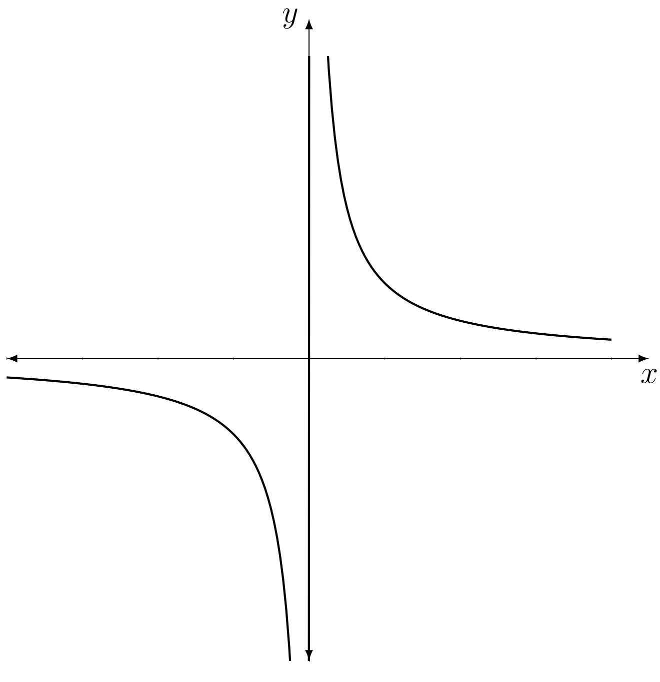


Figura 2.7: Gráfico da função $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

Outra aplicação decorrente do estudo do limite são as propriedades de funções contínuas que veremos a seguir. Tais propriedades garante que combinações algébricas (somas, subtração, multiplicação, etc) de funções contínuas sejam contínuas em qualquer ponto que elas estejam definidas.

Sejam f e g funções contínuas em $x = a$, temos:

(1) **Soma**: $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ é contínua em $x = a$;

(2) **Diferença**: $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$ é contínua em $x = a$;

(3) **Produto**: $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ é contínua em $x = a$;

(4) **Quociente**: $(f/g)(x) = f(x)/g(x)$ é contínua em $x = a$, contanto que $g(a) \neq 0$;

(5) **Potência**: $f^{\frac{p}{q}}(x)$ é contínua em $x = a$, com p e q inteiros.

Essas propriedades podem ser facilmente provadas utilizando as propriedades básicas do limite. Por exemplo:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to a} (f \cdot g)(x) &= \lim_{x \to a} f(x) \cdot g(x) \\
&= \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x), \text{ regra do limite do produto} \\
&= f(a) \cdot g(a), \text{ pela continuidade de } f \text{ e } g \text{ em } x = a \\
&= (f \cdot g)(a)
\end{aligned}$$

A demonstração das demais propriedades ficam ao interesse do leitor, onde sugerimos [9].

Exemplo 2.3. Mostre que a função $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{\sqrt{x}}$, $x \in \mathbb{R}^*$, é contínua no ponto $x = \pi$.

Primeiramente, notemos que a função $f(x)$ é o quociente entre as funções $\operatorname{sen}(x)$ e $\sqrt{x}$, ambas contínuas em $x = \pi$. Como o denominador $\sqrt{x}$ quando $x = \pi$ é não nulo, temos:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to \pi} f(x) &= \lim_{x \to \pi} \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}} \\
&= \frac{\lim\limits_{x \to \pi} \operatorname{sen} x}{\lim\limits_{x \to \pi} \sqrt{x}}, \text{ regra do limite do quociente} \\
&= \frac{\operatorname{sen}(\pi)}{\sqrt{\pi}}, \text{ pela continuidade de } \operatorname{sen} x \text{ e } \sqrt{x} \text{ em } x = \pi \\
&= f(\pi).
\end{aligned}$$

Além das propriedades algébricas da continuidade, um estudo importante é o da composição de funções contínuas. Primeiramente vamos ver um exemplo rápido de composição de funções. Sejam $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = \log(x)$, $x \in \mathbb{R}^+$, podemos formar as seguintes composições:

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = \sqrt{\log(x)},$$
$$g \circ f(x) = g(f(x)) = \log(\sqrt{x}).$$

Perceba que, na composição de funções, é como se tivéssemos uma função "dentro de outra função". No exemplo $(f \circ g)(x)$ é como se a variável de f fosse a função $g(x)$, por isso escrevemos $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

Além disso, podemos dizer que, se duas funções f e g são contínuas, então a composição dessas funções será contínua. Em outras palavras, temos o seguinte teorema:

Teorema 2.1. *Se f é contínua em $c \in \mathbb{R}$ e g é contínua em $f(c) \in \mathbb{R}$ então $g \circ f$ é contínua em c.*

É razoável e intuitivo pensar que quando $x \to c$ então $f(x) \to f(c)$, pois f é contínua em c, e, como g é contínua em $f(c)$, então $g(f(x)) \to g(f(c))$. Isso seria uma prova informal do teorema anterior. Para uma demonstração mais formal, veja o Apêndice 4 de [10].

Estendendo essa ideia de continuidade, se tivermos um número finito de funções compostas, elas também serão contínuas, bastando que cada função individualmente seja contínua no intervalo observado.

Exemplo 2.4. Considere a função que descreve aproximadamente a concentração de um medicamento no corpo de uma pessoa, dada por

$$f(x) = 2 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{(x-5)^2}{4}},$$

onde $x > 0$ é o tempo, em horas, após a ingestão do medicamento. Queremos saber se essa concentração pode ser calculada após 5 horas, ou seja, se a função é contínua em $x = 5$. Para isso vamos decompor a função f da seguinte forma:

$$f_1(x) = x - 5,$$
$$f_2(x) = x^2,$$
$$f_3(x) = -\frac{x}{4},$$
$$f_4(x) = 2 \cdot \mathrm{e}^x.$$

Agora, notemos que $f = f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1$, pois

$$
\begin{aligned}
f_1(x) &= x - 5,\\
(f_2 \circ f_1)(x) = f_2(f_1(x)) &= (x-5)^2,\\
(f_3 \circ f_2 \circ f_1)(x) = f_3(f_2(f_1(x))) &= -\frac{(x-5)^2}{4},\\
(f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1)(x) = f_4(f_3(f_2(f_1(x)))) &= 2 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{(x-5)^2}{4}} = f(x).
\end{aligned}
$$

Como cada uma das funções que compõem a f é contínua em $x = 5$, temos que f é contínua em $x = 5$. Vejamos o gráfico que comprova o nosso resultado:

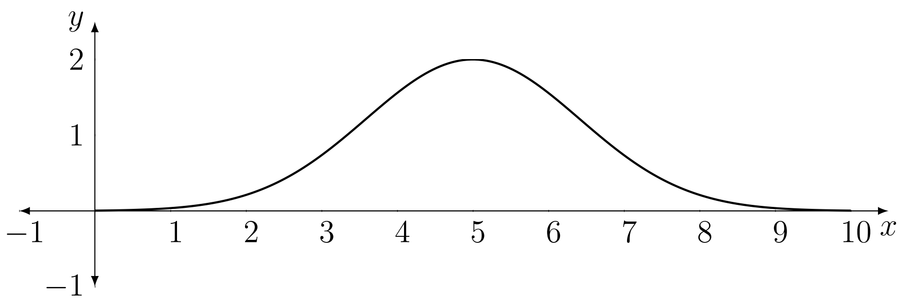


Figura 2.8: Gráfico da função $f(x) = 2 \cdot \mathrm{e}^{\frac{-(x-5)^2}{4}}$.

Na prática, as vantagens de se trabalhar com funções contínuas é que elas possuem várias propriedades boas de se operar., Por exemplo, no cálculo de limite de funções contínuas, podemos "passar pra dentro" o limite para facilitar seu cálculo. Veja um exemplo:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x \to 10} \operatorname{sen}\left(\left(\sqrt[3]{x} - 2\right)\pi\right) &= \operatorname{sen}\left(\left(\sqrt[3]{\lim_{x \to 10}(x-2)}\right)\pi\right)\\
&= \operatorname{sen}((\sqrt[3]{10-2})\pi)\\
&= \operatorname{sen}(\sqrt[3]{8}\pi)\\
&= \operatorname{sen}(2\pi) = 0.
\end{aligned}
$$

Nesse caso, podemos passar o limite "pra dentro" da função seno, pois é uma função contínua, e o mesmo vale para a raiz cúbica, visto que a função $f(x) = \sqrt[3]{x}$ é contínua.

2.4 Teorema do Valor Intermediário

Ainda sobre funções contínuas, uma propriedade bem importante de ser notada é dada pelo Teorema do Valor Intermediário (TVI), cuja demonstração pode ser encontrada na página 94 de [10].

Teorema 2.2. *(Teorema do Valor Intermediário) Seja f uma função contínua em um* *intervalo fechado* $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$*. Para cada valor* $y_0 \in \mathbb{R}$ *tal que* $f(a) \leq y_0 \leq f(b)$*, existe pelo menos um ponto* $x_0 \in [a,b]$ *no qual* $f(x_0) = y_0$*.*

De forma simplificada o TVI afirma que, se analisarmos a imagem de dois pontos em uma função contínua, então essa função assume todos os valores entre essas imagens. Vejamos na figura abaixo:

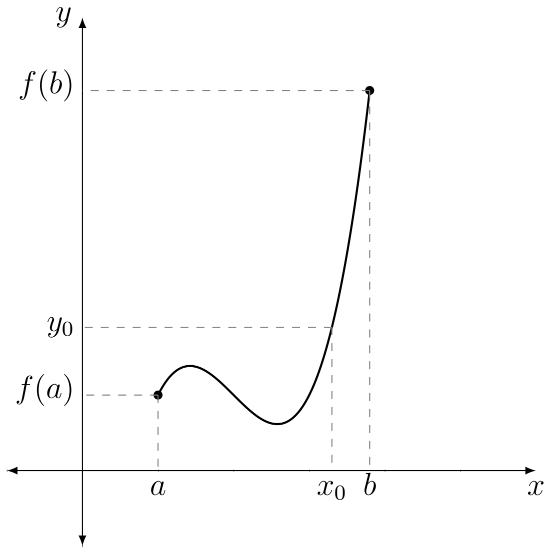


Figura 2.9: Exemplo visual do TVI.

No dia-a-dia, o Teorema do Valor Intermediário é o que garante, por exemplo, que você consegue cortar um barbante exatamente ao meio. Pode parecer um exemplo estranho, mas pelo fato do fio de barbante ser contínuo, existe um ponto no seu interior que o divide ao meio perfeitamente.

Uma aplicação do TVI em problemas matemáticos é quando precisamos encontrar raízes de uma equação.

Exemplo 2.5. Vamos verificar se a função $f : (0,10) \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \cos(\log_2(2x))$, possui alguma raiz no intervalo $[1,4]$.

Primeiro note que a função f é contínua no intervalo analisado $[1,4]$, pois é uma composição de duas funções contínuas nesse intervalo, a saber $\cos(x)$ e $\log_2(x)$. O próximo passo é calcular o valor da função aplicada nos extremos do intervalo em que se busca uma raiz, ou seja

$$f(1) = \cos(\log_2(2 \cdot 1)) = \cos(\log_2(2)) = \cos(1) \approx 0,54 > 0,$$
$$f(4) = \cos(\log_2(2 \cdot 4)) = \cos(\log_2(8)) = \cos(3) \approx -0,99 < 0.$$

Apesar de usar o valor aproximado de cos(1) e cos(3) (medido em radianos), poderíamos ter utilizado algumas propriedades matemáticas para verificar que os valores encontrados eram maiores e menores que zero, respectivamente. O último passo agora é utilizar o TVI juntamente às informações obtidas:

Como a função f é contínua em $[1,4]$ e encontramos que $f(1) > 0$ e $f(4) < 0$, existe um $x_0 \in [1,4]$ tal que $f(x_0) = 0$. Verifiquemos isso no gráfico a seguir:

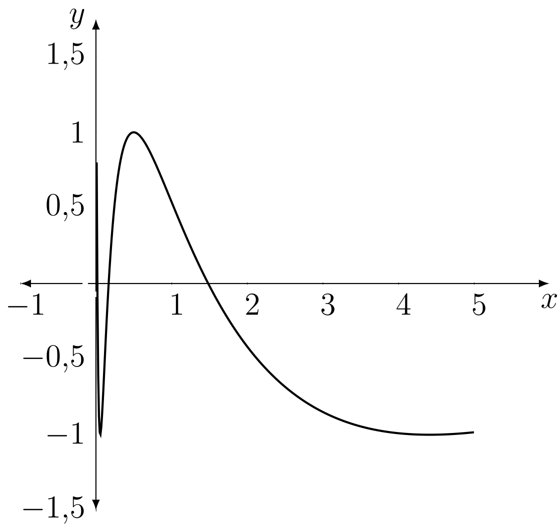


Figura 2.10: Gráfico da função $f(x) = \cos(\log_2(2x))$.

Para a proposta de estudo de limites, o conteúdo abordado até agora é suficiente para entrarmos em um outro tópico. No próximo capítulo passaremos a abordar um tipo de limite especial, chamado de derivada.

Capítulo 3

Uma introdução à derivada

Nesse capítulo abordaremos um dos assuntos mais importantes do Cálculo: a derivada. Também conhecida como limite de uma razão incremental, a derivada possui aplicabilidades muito úteis em estudos mais avançados como, por exemplo, estimar a taxa de contaminação por uma doença, determinar níveis de produção mais lucrativos e eficientes, calcular a velocidade ou aceleração de um corpo, obter o valor máximo ou mínimo de uma função, entre outros. Nesse sentido, dedicaremos uma atenção maior a conceito tão importante. Para ver mais, leitor interessado pode pesquisar em [8], [9] e [10].

As figuras apresentadas neste capítulo possuem fonte de autoria própria.

3.1 A derivada de uma função

Como motivação, pensemos em um veículo que faz um percurso linear e que desejamos calcular sua velocidade. Para isso, basta sabermos a distância percorrida e o tempo utilizado para realizar o trajeto, e, com isso utilizar a fórmula:

$$V = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_f - s_i}{t_f - t_i},$$

onde V é a velocidade, Δs é o espaço total percorrido e Δt é o intervalo de tempo levado para percorrer o percurso. O problema dessa fórmula é que ela nos entrega a velocidade média do veículo durante o percurso e não sua velocidade "atual".

Como faríamos para calcular a velocidade em um determinado ponto em que o veículo se encontra? Uma ideia que nos ajuda é diminuir o intervalo analisado, ou seja, fazer uma média apenas de um intervalo pequeno de tempo, tão pequeno quanto se queira. Teríamos algo mais ou menos assim:

$$V = \frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0},$$

onde $s(t_1)$ e $s(t_0)$ são as posições onde o veículo se encontra nos tempos t_1 e t_0, respectivamente. Agora basta fazer esse intervalo de tempo $t_1 - t_0$ diminuir o máximo possível, em outras palavras, fazer o intervalo tender a 0. Com isso, teremos

$$V = \lim_{t_1 \to t_0} \frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0},$$

se o limite existir. Ou seja, a última fórmula nos possibilita encontrar a velocidade instantânea do veículo no tempo t_1. O limite que acabamos de apresentar, quando existir, é chamado de derivada da função $s(t)$ no ponto $t = t_1$, comumente denotado por $s'(t_1)$. (Lê-se "s linha de t_1").

De maneira análoga, podemos definir a derivada da uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ num ponto a de seu domínio da seguinte forma:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(a) - f(x)}{a - x},$$

sempre que o limite existir. E, nesse caso, é dito a derivada de f no ponto a, e a denotamos por $f'(a)$ (lê-se "f linha de a"). Há também outra forma de escrever a derivada de uma função f, conhecido como "limite da razão incremental", pois usamos um incremento h para calcular o limite:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Note que as duas definições de limite são análogas, onde foi feito apenas a substituição $a = x + h$ e o fato de que quando $x \to a$ temos que $h \to 0$ (Verifique!).

Portanto, quando a derivada de uma função num ponto existir e for um número finito, dizemos que a função é derivável naquele ponto. Vejamos alguns exemplos simples do cálculo de derivada.

Exemplo 3.1. Vamos calcular a derivada da função $f(x) = x^2 + x$, no ponto $x = 1$, usando a definição. De fato, temos que

$$\begin{aligned}
f'(1) &= \lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{(x^2+x)-(1^2+1)}{x-1} \text{(substituímos os correspondentes valores de } f \text{ no numerador)} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{x-1} \text{ (simplificamos o numerador)} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x+2)}{\cancel{x-1}} \text{ (fatoramos o polinômio e cancelamos os termos)}^* \\
&= \lim_{x\to 1} x+2 \text{ (resta apenas aplicarmos o limite)} \\
&= 1+2 = 3.
\end{aligned}$$

Observação: Note que, como x se aproxima de 1 por valores diferentes de 1, a operação em * faz sentido, e denotamos a "simplificação" ou "cancelamento" com o risco no diagonal. Portanto a derivada de f existe no ponto $x = 1$ e é igual a $f'(1) = 3$.

Geometricamente, a derivada em um ponto de uma função é a inclinação da reta que tangencia a função no ponto analisado. Se o valor encontrado for positivo, a reta tangente possui inclinação positiva (ou seja, é uma reta crescente) e, analogamente, se o valor encontrado for negativo a reta terá inclinação negativa. Vejamos o gráfico da função do Exemplo 3.1:

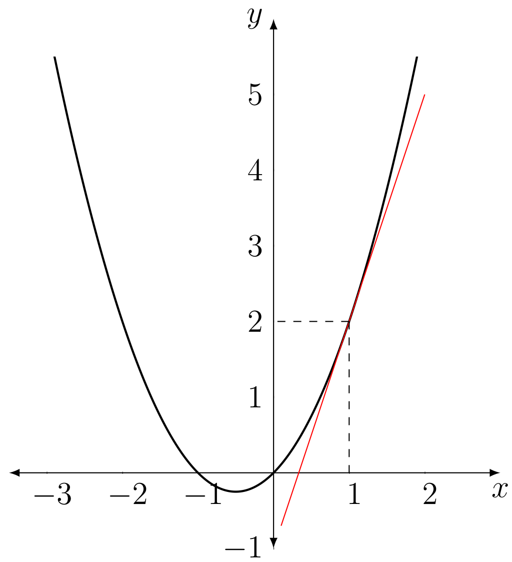


Figura 3.1: Reta tangente de $f(x) = x^2 + x$ no ponto $x = 1$.

Exemplo 3.2. Uma bióloga analisou uma cultura de bactérias por 10 dias e verificou o crescimento dessa população. Após a coleta de dados, ela pôde observar que as bactérias se reproduziam de uma certa forma e com isso modelou a função $f(t) = \sqrt{t} + 1$ que descreve a quantidade (em milhares) de bactérias em função do tempo t em dias. Para fins experimentais, a bióloga quis comparar a taxa de crescimento do dia 4 e do dia 9 da análise. Em qual dia o crescimento de bactérias foi maior?

Nessa questão queremos encontrar a taxa de variação da quantidade de bactérias, isto é, precisamos calcular a derivada da função que descreve a quantidade de bactérias em função do tempo. Mais precisamente calcularemos os valores de $f'(4)$ e $f'(9)$ e compararemos os resultados. Temos então

$$\begin{aligned}
f'(4) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(4+h) - f(h)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{4+h}+1) - (\sqrt{4}+1)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{4+h}\cancel{+1} - 2\cancel{-1}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{4+h}-2}{h} \cdot \frac{\sqrt{4+h}+2}{\sqrt{4+h}+2} (*) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{4+h-4}{h(\sqrt{4+h}+2)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}}{\cancel{h}(\sqrt{4+h}+2)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{4+h}+2} \\
&= \frac{1}{(\sqrt{4+0}+2)} = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Note que em * multiplicamos pelo conjugado de $4 + h - 2$ no numerador e no denominador a fim de eliminar a raiz quadrada do numerador.

De maneira análoga,

$$
\begin{aligned}
f'(9) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(9+h) - f(h)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{9+h}+1) - (\sqrt{9}+1)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{9+h}\cancel{+1} - 3\cancel{-1}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{9+h}-3}{h} \cdot \frac{\sqrt{9+h}+3}{\sqrt{9+h}+3} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{9+h-9}{h(\sqrt{9+h}+3)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}}{\cancel{h}(\sqrt{9+h}+3)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{9+h}+3} \\
&= \frac{1}{(\sqrt{9+0}+3)} = \frac{1}{3+3} = \frac{1}{6}.
\end{aligned}
$$

Portanto, as taxas de crescimento são $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{6}$ nos dias 4 e 9 respectivamente. Ora, como $4 < 6$, ao inverter os números e o sinal da desigualdade temos que $\frac{1}{4} > \frac{1}{6}$. Portanto, o crescimento foi maior no dia 4.

Para finalizarmos, vamos olhar o gráfico da função f e suas retas tangentes nos pontos $x = 4$ e $x = 9$:

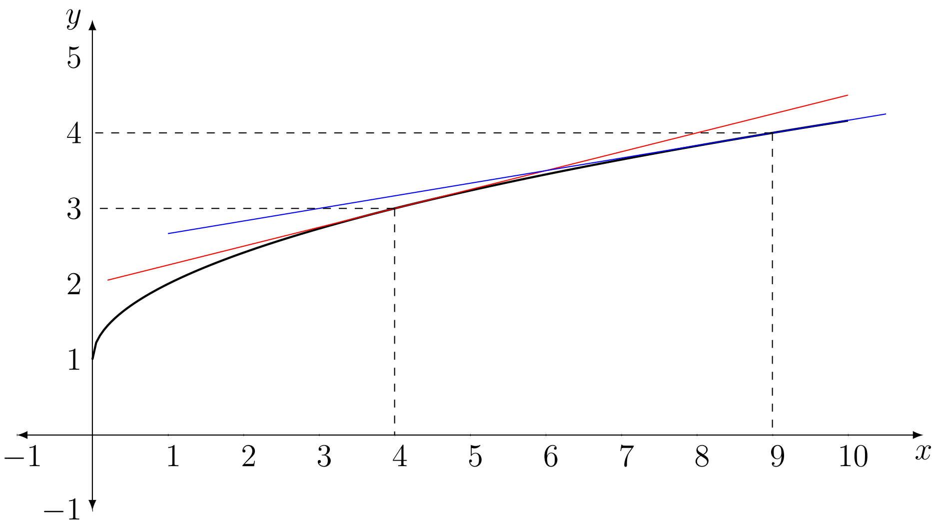


Figura 3.2: Função $f(x) = \sqrt{x} + 1$ e suas retas tangentes nos pontos $x = 4$ e $x = 9$.

Olhando para o gráfico da Figura 3.2, vemos que a reta em vermelho (tangente no ponto $x = 4$) é mais inclinada que a reta em azul (tangente no ponto $x = 9$), confirmando geometricamente que $f'(4) > f'(9)$.

Agora, outro ponto importante é que, como a derivada é um limite, podemos calcular as derivadas laterais de um função. Vejamos no exemplo abaixo:

Exemplo 3.3. Vamos calcular a derivada da função $f(x) = |x|$ no ponto $x = 0$. Para tanto, obtemos

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{|x| - |0|}{x - 0} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x} = \begin{cases} \displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{-x}{x} = -1 & , \text{se } x \to 0^-, \\ \displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1 & , \text{se } x \to 0^+. \end{cases} \end{aligned}$$

Vimos no capítulo anterior que, para um limite existir, seus limites laterais devem coincidir. Concluímos então que a função f não é diferenciável no ponto $x = 0$, uma vez que as derivadas laterais exitem porém não são iguais.

Vamos analisar o gráfico de $f(x) = |x|$ para ver seu "comportamento" próximo de $x = 0$:

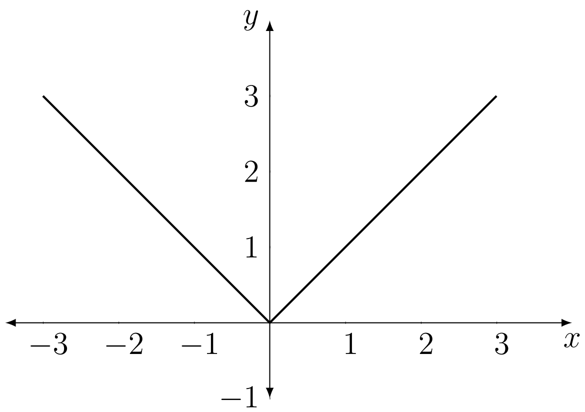


Figura 3.3: Gráfico da função $f(x) = |x|$.

Podemos observar que a função $f(x) = |x|$ faz um "bico" no ponto $x = 0$. Isso faz com que a reta tangente nesse ponto não fique bem definida, pois como vimos no Exemplo 3.2, podemos ter inclinação -1 ou 1 dependendo de como nos aproximamos de $x = 0$.

Há algumas condições que fazem com que funções não possuam derivada. Por exemplo:

1. Quando a função apresenta um bico. Nesse caso as derivadas laterais não coincidem;

2. Quando a reta tangente no ponto analisado é vertical. Nesse caso a derivada nesse ponto não é um valor finito;

3. Quando a função for descontínua no ponto.

Essa última condição é muito importante, pois nos ajuda a dizer se uma função é ou não contínua num ponto. Podemos até enunciar o seguinte teorema:

Teorema 3.1. *Se uma função f é diferenciável em $x = c$ então f é contínua em $x = c$.*

Demonstração. Vamos demonstrar esse teorema utilizando a definição de continuidade e algumas manipulações algébricas. Como f é derivável em $x = c$, então $f'(c)$ existe. Queremos mostrar que $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$. Temos:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to c} f(x) &= \lim_{x \to c} f(x) - f(c) + f(c) \\
&= \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{(x - c)} \cdot (x - c) + f(c) \\
&= \lim_{x \to c} \cancelto{f'(c)}{\frac{f(x) - f(c)}{(x - c)}} \cdot \cancelto{0}{(x - c)} + f(c) \\
&= f'(c) \cdot 0 + f(c) = f(c).
\end{aligned}$$

□

Um detalhe importante de se notar é que a reciproca desse teorema não é verdadeira. Ou seja, se uma função é contínua em um ponto não necessariamente ela será derivável nesse ponto. Podemos observar bem essa recíproca olhando para a Figura 3.3 no ponto $x = 0$, que nesse caso a função é contínua, porém não é derivável nesse ponto.

O que vimos até então é que a derivada nos mostra, entre outras coisas, uma variação instantânea de uma função. Além disso, podemos utilizar a noção de derivada para entender o crescimento ou decrescimento de uma função. Mais aplicações como essas serão abordadas mais a frente neste capítulo.

3.2 Regras de derivação

Dado uma função derivável, nesta seção trataremos de algumas propriedades satisfeitas por essa derivada.

3.2.1 Derivada da soma de uma função e multiplicação por escalar

A derivada da soma de duas (ou mais) funções é igual a soma das derivadas de cada função:

$$
\begin{aligned}
(f+g)'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{(f+g)(x+h)-(f+g)(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)+g(x+h)-[f(x)+g(x)]}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)+g(x+h)-g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \\
&= f'(x)+g'(x).
\end{aligned}
$$

Essa propriedade também é verdadeira para a subtração de duas funções. (Verifique!)

A derivada da multiplicação de uma função por uma constante é igual a derivada da função multiplicada pela constante:

$$
\begin{aligned}
(k\cdot f(x))' &= \lim_{h\to 0} \frac{k\cdot f(x+h)-k\cdot f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{k\cdot (f(x+h)-f(x))}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} k\cdot \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
&= k\cdot f'(x)
\end{aligned}
$$

Dizemos de maneira informal que a constante "sai" da derivada, pois ela não interfere na derivação da variável. Essas duas propriedades juntas faz com que a derivada se encaixe em algo que chamamos de Transformação Linear, pois a derivada "se separa" na soma e a constante "sai" da derivada, mas isso é um assunto que não nos aprofundaremos. (O leitor interessado pode consultar, por exemplo, [2]).

3.2.2 Derivada de polinômios

Um polinômio é um termo da forma $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x^1 + a_0$, onde os a_i são os coeficientes, x^i são as potências da variável x, e $n \in \mathbb{N}$ é o grau do polinômio. Por exemplo, $p_1(x) = -3x^4 - 2x^3 + x - 10$ é um polinômio de grau 4, enquanto $p_2(x) = x - 2$ é um polinômio de grau 1 (pois o expoente de x é 1). Já o polinômio $p(x) = k$, onde $k \in \mathbb{R}$ é uma constante, é chamado de polinômio constante, e seu grau é 0.

A derivada de um polinômio constante é 0. Em termos matemáticos temos:

$$f(x) = k \Rightarrow f'(x) = 0,$$

onde $k \in \mathbb{R}$ é qualquer valor real constante. Isso pode ser provado facilmente usando uma das definições de derivada. Vejamos:

$$f(x)=k\Rightarrow f(x+h)=k\Rightarrow \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{k-k}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=0.$$

Exemplo 3.4. Vamos calcular a derivada de $f(x)=\sqrt{3}$. Pela regra de derivação, como $\sqrt{3}$ é um número real constante, sua derivada é igual a 0. Pela definição:

$$f(x)=\sqrt{3}\Rightarrow f(x+h)=\sqrt{3}\Rightarrow \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{3}-\sqrt{3}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=0.$$

Com isso, a partir de agora, podemos ir direto ao ponto dizendo que $f(x)=k$, com k um valor constante, implica que $f'(x)=0$.

Agora, note que a derivada de um termo $f(x)=x^n$ é $f'(x)=n\cdot x^{n-1}$. Para podermos calcular essa derivada, vale lembrarmos que

$$(a+b)^n=a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b^1+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\cdots+\binom{n}{n-2}a^2b^{n-2}+\binom{n}{n-1}a^1b^{n-1}+b^n,$$

onde $\binom{n}{k}=\dfrac{n!}{(n-k)!k!}$ é o binomial de "n tomado k a k". Assim, podemos calcular a derivada de x^n usando a definição:

$$\begin{aligned}
f'(x)=\frac{d}{dx}(x^n)=&\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}\\
=&\lim_{h\to 0}\frac{(x^n+n\cdot x^{n-1}h+\frac{n(n-1)}{2}\cdot x^{n-2}h^2+\cdots+n\cdot xh^{n-1}+h^n)-x^n}{h}\\
=&\lim_{h\to 0}\frac{n\cdot x^{n-1}h+\frac{n(n-1)}{2}\cdot x^{n-2}h^2+\cdots+n\cdot xh^{n-1}+h^n}{h}\\
=&\lim_{h\to 0}\frac{h(n\cdot x^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}\cdot x^{n-2}h^1+\cdots+n\cdot xh^{n-2}+h^{n-1}}{h}\\
=&\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}(n\cdot x^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}\cdot x^{n-2}h^1+\cdots+n\cdot xh^{n-2}+h^{n-1})}{\cancel{h}}\\
=&\lim_{h\to 0}\left(n\cdot x^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}\cdot x^{n-2}h^1+\cdots+n\cdot xh^{n-2}+h^{n-1}\right)\\
=&n\cdot x^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}\cdot x^{n-2}\cdot 0+\cdots+n\cdot x\cdot 0+0\\
=&n\cdot x^{n-1}.
\end{aligned}$$

Essa regra de derivação também é conhecida como "regra do tombo", pois o expoente "cai" multiplicando a variável, além de diminuir em uma unidade o valor do antigo expoente.

Vejamos agora um exemplo do cálculo da derivada de um polinômio.

Exemplo 3.5. Queremos derivar um polinômio $p(x) = -2x^3 + 10x^2 + 5x - 12$. Para isso, não precisaremos usar a definição, mas sim as regras e propriedades da derivação vistos até agora. Vamos derivar cada termo separadamente e depois unir tudo em uma resposta:

$(-2x^3)' = -2 \cdot 3x^2 = -6x^2, \quad (10x^2)' = 10 \cdot 2x^1 = 20x, \quad (5x)' = 5 \cdot 1x^0 = 5, \quad (-12)' = 0,$

$\therefore p(x) = -2x^3 + 10x^2 + 5x - 12 \Rightarrow p'(x) = -6x^2 + 20x + 5.$

É importante salientar que a "regra do tombo" também é válida para expoentes negativos. Por exemplo:

$$f(x) = x^{-2} \Rightarrow f'(x) = -2 \cdot x^{-2-1} = -2x^{-3}.$$

A prova da "regra do tombo" para números inteiros vem de duas regras que veremos a seguir.

3.2.3 Derivada do produto e do quociente

Para derivar o produto, ou quociente, de duas funções, não basta tomar o produto de suas derivadas. Por exemplo:

Exemplo 3.6. Sabemos que a derivada da função $f(x) = x^4$ é $f'(x) = 4x^3$. Entretanto, se escrevemos a mesma função f da seguinte forma $f(x) = x^2 \cdot x^2$, não podemos derivar cada termo e depois multiplicá-los, pois

$$(x^2)' \cdot (x^2)' = 2x \cdot 2x = 4x^2 \neq 4x^3 = f'(x).$$

Portanto, necessitaremos de uma regra especial para derivar produtos de funções, a saber:

Regra do produto: se f e g são deriváveis em $x \in \mathbb{R}$, então a derivada de fg é $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.

No que diz respeito à derivada do quociente de duas funções deriváveis, temos a seguinte regra:

Regra do quociente: se f e g são deriváveis em $x \in \mathbb{R}$, com $g(x) \neq 0$, então a derivada de $\dfrac{f}{g}$ é $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$.

A seguir, demonstraremos a regra do quociente. De fato,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) &= \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}\right)\cdot\frac{1}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{g(x+h)g(x)}\right)\cdot\frac{1}{h}.
\end{aligned}$$

Somando e subtraindo o termo $f(x)g(x)$ no numerador, segue-se que

$$\begin{aligned}
&= \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x) + f(x)g(x) - f(x)g(x+h)}{g(x+h)g(x)}\right)\cdot\frac{1}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x) - [f(x)g(x+h) - f(x)g(x)]}{g(x+h)g(x)}\right)\cdot\frac{1}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\left(\frac{g(x)[f(x+h) - f(x)] - f(x)[g(x+h) - g(x)]}{g(x+h)g(x)}\right)\cdot\frac{1}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\left(\frac{g(x)\left[\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}\right] - f(x)\left[\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]}{g(x+h)g(x)}\right) \\
&= \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g(x)g(x)} \\
&= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}.
\end{aligned}$$

A demonstração da regra do produto é mais simples, e fica como exercício para o leitor interessado. Vejamos agora alguns exemplos de aplicação dessas regras.

Exemplo 3.7. Vamos calcular o valor da derivada da função $f(x) = \dfrac{5x^{10}}{2x^6}$ no ponto $x = \sqrt[3]{3}$. Poderíamos simplificar a função f em $f(x) = \dfrac{5}{2}x^4$ e calcular facilmente sua derivada no ponto $x = \sqrt[3]{3}$. Entretanto, vamos aplicar a regra do quociente.

Podemos dividir a função f como quociente de duas frações, g e h, tais que $g(x) = 5x^{10}$ e $h(x) = 2x^6$ com derivadas $g'(x) = 50x^9$ e $h'(x) = 12x^5$. Com isso temos:

$$
\begin{aligned}
f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{g(x)}{h(x)}\right) &= \frac{g'(x)h(x) - g(x)h'(x)}{[h(x)]^2} \\
&= \frac{50x^9 \cdot 2x^6 - 5x^{10} \cdot 12x^5}{(2x^6)^2} \\
&= \frac{100x^{9+6} - 60x^{10+5}}{2^2 \cdot x^{6 \cdot 2}} \\
&= \frac{100x^{15} - 60x^{15}}{4x^{12}} \\
&= \frac{40x^{15}}{4x^{12}} \\
&= 10x^{15-12} \\
&= 10x^3.
\end{aligned}
$$

Portanto, $f'\left(\sqrt[3]{3}\right) = 10 \cdot \left(\sqrt[3]{3}\right)^3 = 10 \cdot 3 = 30$. Como exercício, o leitor pode derivar a função $f(x) = \frac{5}{2}x^4$ e comparar o resultado com o obtido através da regra do quociente.

Com a regra do quociente podemos provar a derivada de potências de expoente negativo. Seja $f(x) = x^n$, onde n é um inteiro negativo, temos que $m = -n$ é um inteiro positivo. Com isso, podemos escrever $f(x) = x^{-m} = \frac{1}{x^m}$ e tomar sua derivada através da regra do quociente, isto é,

$$
f'(x) = \frac{0 \cdot x^m - 1 \cdot m \cdot x^{m-1}}{(x^m)^2} = \frac{-m \cdot x^{m-1}}{x^2 m} = -m \cdot x^{m-1-2m} = -m \cdot x^{-m-1},
$$

e como $-m = n$, temos $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$ com n sendo um inteiro negativo.

3.2.4 Derivada de raízes

Para aprendermos sobre a derivada de raízes, basta sabermos derivar uma potência de expoente inteiro, e saber transformar uma raiz em uma potencia de expoente fracionário. A primeira parte já foi mostrada anteriormente, portanto, vejamos agora como transformar raízes em potências de expoente fracionário. É simples:

$$
\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}.
$$

Perceba que o expoente do termo a vira o numerador do novo expoente, enquanto o índice da raiz vira o denominador.

Feito isso, para derivar basta aplicar a "regra do tombo". Por questões práticas, vamos aprender inicialmente a derivada da função $f(x) = \sqrt{x}$, pois é a raiz mais comum na matemática. Temos que

$$\begin{aligned}
f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}}{\cancel{h}(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.
\end{aligned}$$

Perceba que essa derivada poderia ser deduzida através da regra de derivação de potências, no qual o expoente seria uma fração. Veja:

$$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Podemos, então, usar a regra do tombo para expoentes fracionários.

Exemplo 3.8. Para derivar $g(x) = \sqrt[5]{x^2}$, primeiramente vamos reescrever a função do seguinte modo:

$$g(x) = \sqrt[5]{x^2} = x^{\frac{2}{5}}.$$

Agora, derivando a função reescrita, temos que

$$g'(x) = \frac{2}{5} \cdot x^{\frac{2}{5}-1} = \frac{2}{5} x^{\frac{2}{5}-\frac{5}{5}} = \frac{2}{5} x^{-\frac{3}{5}} = \frac{2}{5x^{\frac{3}{5}}} = \frac{2}{5\sqrt[5]{x^3}}.$$

3.2.5 Derivada de funções trigonométricas

Partindo agora para funções trigonométricas, nos restringiremos apenas às derivadas das funções seno, cosseno e tangente. As suas respectivas funções inversas, como arco seno, arco cosseno, etc., não serão abordadas. O leitor interessado pode consultar [10].

Para começar, veremos que a derivada de $f(x) = \text{sen}(x)$ é igual a $f'(x) = \cos(x)$. Antes de aplicarmos a definição de derivada, vamos usar que

$$\text{sen}(a+b) = \text{sen}(a)\cos(b) + \text{sen}(b)\cos(a), \text{ para quaisquer } a, b \in \mathbb{R}.$$

Agora, vamos aplicar a definição de limite. Com isso obtemos

$$f(x) = \operatorname{sen}(x) \Rightarrow f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen}(x)}{h}.$$

Usando a propriedade da soma do seno, segue que

$$\begin{aligned} &= \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)\cos(h) + \operatorname{sen}(h)\cos(x) - \operatorname{sen}(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \left(\frac{\operatorname{sen}(x)\cos(h) - \operatorname{sen}(x)}{h} + \frac{\operatorname{sen}(h)\cos(x)}{h} \right). \end{aligned}$$

Separando em dois limites temos

$$= \lim_{h\to 0} \left(\frac{\operatorname{sen}(x)(\cos(h) - 1)}{h} \right) + \lim_{h\to 0} \left(\frac{\operatorname{sen}(h)}{h} \cdot \cos(x) \right).$$

Multiplicando o numerador e o denominador pelo conjugado de $(\cos(h) - 1)$, obtemos

$$\begin{aligned} &= \lim_{h\to 0} \left(\frac{\operatorname{sen}(x)(\cos(h) - 1)}{h} \cdot \frac{\cos(h)+1}{\cos(h)+1} \right) + \lim_{h\to 0} \left(\frac{\operatorname{sen}(h)}{h} \cdot \cos(x) \right) \\ &= \lim_{h\to 0} \left(\frac{\operatorname{sen}(x)(\cos^2(h) - 1^2)}{h(\cos(h)+1)} \right) + \lim_{h\to 0} \left(\frac{\operatorname{sen}(h)}{h} \cdot \cos(x) \right). \end{aligned}$$

Usando que $\cos^2(x) - 1 = -\operatorname{sen}^2(x)$, pois $\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, segue que

$$\begin{aligned} &= \lim_{h\to 0} \left(\frac{\operatorname{sen}(x)(-\operatorname{sen}^2(h))}{h(\cos(h)+1)} \right) + \lim_{h\to 0} \left(\frac{\operatorname{sen}(h)}{h} \cdot \cos(x) \right) \\ &= \lim_{h\to 0} \left(\frac{-\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(h)\operatorname{sen}(h)}{(\cos(h)+1)h} \right) + \lim_{h\to 0} \left(\frac{\operatorname{sen}(h)}{h} \cdot \cos(x) \right) \\ &= \lim_{h\to 0} \left(\frac{-\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(h)}{(\cos(h)+1)} \cdot \frac{\operatorname{sen}(h)}{h} \right) + \lim_{h\to 0} \left(\frac{\operatorname{sen}(h)}{h} \cdot \cos(x) \right). \end{aligned}$$

Aplicando o limite e usando o Limite Fundamental Trigonométrico* $\lim_{h\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(h)}{h} = 1$

$$\begin{aligned} &= \lim_{h\to 0} \left(\frac{-\operatorname{sen}(x)\cancelto{0}{\operatorname{sen}(h)}}{\cancelto{2}{(\cos(h)+1)}} \cdot \cancelto{1}{\frac{\operatorname{sen}(h)}{h}} \right) + \lim_{h\to 0} \left(\cancelto{1}{\frac{\operatorname{sen}(h)}{h}} \cdot \cos(x) \right) \\ &= \frac{-\operatorname{sen}(x) \cdot 0}{2} \cdot 1 + 1 \cdot \cos(x) \\ &= \cos(x) \end{aligned}$$

Observação: A prova de (*) pode ser encontrada em [10].

De forma análoga, podemos concluir que a derivada da função $f(x) = \cos(x)$ é $f'(x) = -\operatorname{sen}(x)$. A demonstração da derivada da função cosseno fica para o leitor interessado.

Antes de entrarmos na derivada da função tangente, vamos relembrar que:

- Secante: $\sec(x) = \dfrac{1}{\cos(x)}$.

- Cossecante: $\csc(x) = \dfrac{1}{\operatorname{sen}(x)}$.

- Cotangente: $\cot(x) = \dfrac{1}{\tan(x)}$.

Com essas funções auxiliares e a regra da derivada de um quociente, podemos então encontrar a derivada de $f(x) = \tan(x)$, isto é,

$$\begin{aligned}
f(x) = \tan(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} \Rightarrow f'(x) &= \left(\frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}\right)' \\
&= \frac{(\operatorname{sen}(x))'(\cos(x)) - \operatorname{sen}(x)(\cos(x))'}{(\cos(x))^2} \\
&= \frac{\cos(x)\cos(x) - \operatorname{sen}(x)(-\operatorname{sen}(x))}{\cos^2(x)} \\
&= \frac{\cos^2(x) + \operatorname{sen}^2(x)}{\cos^2(x)}
\end{aligned}$$

Usando a Relação Fundamental Trigonométrica $\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$ podemos concluir da última igualdade que

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\cos^2(x)} \\
&= \sec^2(x).
\end{aligned}$$

Com isso, temos a derivada das seguintes funções trigonométricas:

- Derivada do seno: $(\operatorname{sen}(x))' = \cos(x)$.

- Derivada do cosseno: $(\cos(x))' = -\operatorname{sen}(x)$.

- Derivada da tangente: $(\tan(x))' = \sec^2(x)$.

3.2.6 Derivada das funções exponencial e logaritmo naturais

Chamamos de exponencial natural (ou, como chamaremos a partir de então, apenas exponencial) a função $f(x) = e^x$, onde o número irracional $e = 2,71828\ldots$ é a constante de Euler. Chamaremos de logaritmo natural (ou, como chamaremos a partir de então, apenas de logaritmo) a função $f(x) = \log_e(x)$, ou mais comumente usado, $f(x) = \ln(x)$. Essas duas funções são uma a inversa da outra, tal qual a divisão é o inverso da multiplicação, de tal forma que $e^{\ln(x)} = x$ e $\ln(e^x) = x$.

A função exponencial é utilizada, por exemplo, para relacionar crescimentos de população em função do tempo, taxa de juros bancários, decaimento radioativo de substancias químicas, entre outros. Vejamos um exemplo de sua aplicação.

Exemplo 3.9. Uma população de bactérias cresce conforme a função $f(t) = 100e^{0,02t}$, onde $t \geq 0$ é medido em minutos. Usando o valor aproximado de $\ln 500 \approx 6,21$, em quanto tempo a população chegará a 50.000?

Para resolver, queremos encontrar qual o valor de t para que $f(t) = 50000$. Calculando isso, temos:

$$
\begin{aligned}
100e^{0,02t} &= 50000, \\
e^{0,02t} &= 500, && \text{(dividindo ambos os lados por 100)} \\
\ln e^{0,02t} &= \ln 500, && \text{(aplicando o logaritmo em ambos os lados)} \\
0,02t &\approx 6,21, && \text{(usando o valor aproximado de } \ln 500\text{)} \\
t &\approx \frac{6,21}{0,02}, \\
t &\approx 310,73.
\end{aligned}
$$

Portanto, a quantidade de bactérias chegará a 50000 após pouco mais de 310 min.

A função exponencial pode ser definida de várias formas. Usaremos como base a definição a seguir:

$$e^x = \lim_{n \to 0} (1 + nx)^{\frac{1}{n}}.$$

Perceba que no caso $x = 1$, temos a definição da constante de Euler:

$$e = \lim_{n \to 0} (1 + n)^{\frac{1}{n}}.$$

Uma das vantagem da função exponencial natural é que a sua taxa de variação instantânea, a derivada, é igual à própria função. Vejamos a seguir como calcular a derivada da exponencial natural:

$$\begin{aligned}
f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{e^x e^h - e^x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{e^x(e^h - 1)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} e^x \cdot \frac{(e^h - 1)}{h} \\
&= e^x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h}.
\end{aligned}$$

Agora, vamos fazer a substituição $e^h - 1 = u$, ou seja, $h = \ln(u+1)$. Note que quando $h \to 0$, temos que $u \to 0$. Assim,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= e^x \cdot \lim_{u\to 0} \frac{u}{\ln(u+1)} \\
&= e^x \cdot \lim_{u\to 0} \frac{1}{\frac{1}{u} \cdot \ln(u+1)} \\
&= e^x \cdot \lim_{u\to 0} \frac{1}{\ln(u+1)^{\frac{1}{u}}} \\
&= e^x \cdot \lim_{u\to 0} \frac{1}{\ln\left((u+1)^{\frac{1}{u}}\right)} \\
&= e^x \cdot \frac{1}{\ln\left(\lim\limits_{u\to 0}(u+1)^{\frac{1}{u}}\right)} \\
&= e^x \cdot \frac{1}{\ln(e)} \\
&= e^x \cdot 1 \\
\therefore f'(x) &= e^x = f(x).
\end{aligned}$$

Uma das aplicações da função logarítmica é medir grandezas com uma escala muito grande como, por exemplo, magnitude de terremotos, pH e pOH de substâncias químicas e a acústica de ondas sonoras. Entretanto, não é muito comum utilizar o logaritmo natural no Ensino Médio. Dito isso, vejamos um exemplo com algumas propriedades de logaritmo.

Exemplo 3.10. Calcule o valor da expressão $\ln e^2 - 3\ln\sqrt[3]{e} + 2\ln 1$.

Para isso, vamos usar que $\ln 1 = 0$ e que $\ln a^x = x \ln a$:

$$\begin{aligned}
\ln e^2 - 3\ln \sqrt[3]{e} + 2\ln 1 &= \\
2\ln e - 3\ln e^{\frac{1}{3}} + 2\ln 1 &= \\
2\cdot \cancelto{1}{\ln e} - 3\cdot \frac{1}{3}\cdot \cancelto{1}{\ln e} + 2\cdot \cancelto{0}{\ln 1} &= \\
2 - 1 + 0 &= 1
\end{aligned}$$

Agora veremos como calcular a derivada da função logarítmica $f(x) = \ln x$:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} && \text{(pela definição da derivada)}\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\ln\left(\dfrac{x+h}{x}\right)}{h} && \text{(usando a propriedade da subtração de logaritmos)}\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\cdot \ln\left(1+\frac{h}{x}\right) && \\
&= \lim_{h\to 0} \ln\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}} && \text{(usando a propriedade do expoente do logaritmo)}\\
&= \ln\left(\lim_{h\to 0}\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}\right) && \text{(passando o limite para dentro pois a função é contínua)}\\
&= \ln e^{\frac{1}{x}} && \text{(pela definição da função exponencial)}\\
&= \frac{1}{x}\cdot \ln e \\
&= \frac{1}{x}.
\end{aligned}$$

Com isso, mostramos que a derivada da função $\ln x$ é $\dfrac{1}{x}$.

3.2.7 Regra da cadeia

Após derivar algumas famílias de funções como polinômios, exponencial, funções trigonométricas, raízes, etc., ainda resta um questionamento: como derivar, por exemplo, a função $f(x) = \operatorname{sen}(\sqrt{x})$?

Primeiramente, deve-se observar que essa função é a composição da função $\operatorname{sen}(x)$ com a função $\sqrt{x}$, de tal forma que podemos escrever assim: $g(x) = \operatorname{sen}(x)$ e $h(x) = \sqrt{x}$ e com isso a função f pode ser escrita como $g(h(x)) = g(\sqrt{x}) = \operatorname{sen}(\sqrt{x})$. Portanto, a variável da função g é a própria função h, e escrevemos $f(x) = g(h(x)) = g \circ h(x)$.

Agora, com o conhecimento de derivação das funções $\operatorname{sen}(x)$ e $\sqrt{x}$, vamos derivar a composição dessas duas funções. Para derivar $g(h(x))$ vamos derivar a função “de fora” e multiplicar pela derivada da função “de dentro”:

$$\begin{aligned} f(x) = g(h(x)) \Rightarrow f'(x) &= g'(h(x)) \cdot h'(x) \\ &= \operatorname{sen}'(h(x)) \cdot (\sqrt{x})' \\ &= \cos(h(x)) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{\cos\left(\sqrt{x}\right)}{2\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

De maneira mais formal, podemos enunciar da seguinte forma:

Teorema 3.2. *(Regra da cadeia) Se uma função g é derivável em x_0 e h derivável no ponto $g(x_0)$, então, a composta $f = g \circ h$ é derivável em x_0 e*

$$f'(x_0) = (g \circ h)(x_0) = g'(h(x_0)) \cdot h'(x_0).$$

O curso de cálculo não exige saber a prova dessa regra, mas com alguns poucos conhecimentos, o leitor interessado pode tentar provar – ou pelo menos intuir – essa demonstração. Para isso, é útil saber que se uma função é derivável, então ela é contínua e que se uma função $f(g(x))$ é contínua em $g(x)$, então $f(g(x+h)) \to f(g(x))$ quando $g(x+h) \to g(x)$.

Podemos ainda ver que a ordem das composições de funções resulta em derivadas diferentes. Vejamos um exemplo com as mesmas funções já apresentadas. Vimos a derivada de $(g \circ h)(x)$, onde $g(x) = \operatorname{sen}(x)$ e $h(x) = \sqrt{x}$; agora vamos ver a derivada de $(h \circ g)(x)$:

$$(h \circ g)'(x) = h'(g(x)) \cdot g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{g(x)}} \cdot \cos(x) = \frac{\cos(x)}{2\sqrt{sen(x)}}.$$

Com isso mostramos que $(g \circ h)'(x) \neq (h \circ g)'(x)$.

A Regra da Cadeia tem essa nome pela ideia do desencadeamento de derivadas, onde derivamos as funções “de fora para dentro” e multiplicamos essas derivadas.

Exemplo 3.11. Derive a função $f(x) = (2x^3 - 4x)^2$ usando a regra da derivação de polinômios, a regra do produto e a regra da cadeia, e encontre o valor de $f'(-3)$.

Primeiramente, vamos derivar usando a regra da cadeia, e para isso primeiro identificamos qual é a função “de dentro” e qual a função “de fora”:

$$\begin{aligned} h(x) &= 2x^3 - 4x \quad && \text{é a função de dentro;} \\ g(x) &= (x)^2 && \text{é a função de fora.} \end{aligned}$$

Agora basta derivar usando a regra da cadeia, isto é, deriva a função de fora (com a variável sendo a função interna) e multiplica o resultado pela derivada da função de dentro.

$$\begin{aligned} f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x) &= 2(2x^3 - 4x) \cdot (6x^2 - 4) \\ &= 2(12x^5 - 8x^3 - 24x^3 + 16x) \\ &= 2(12x^5 - 32x^3 + 16x) \\ &= 24x^5 - 64x^3 + 32x. \end{aligned}$$

Agora vamos derivar usando a regra do produto. Basta ver que a função f pode ser escrita como $(2x^3 - 4x)(2x^3 - 4x)$, donde

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x^3 - 4x)' \cdot (2x^3 - 4x) + (2x^3 - 4x) \cdot (2x^3 - 4x)' \\ &= 2 \cdot [(2x^3 - 4x)'(2x^3 - 4x)] \\ &= 2(6x^2 - 4)(2x^3 - 4x) \text{ (note que aqui tem-se o mesmo que pela regra da cadeia)} \\ &= 2(12x^5 - 8x^3 - 24x^3 + 16x) \\ &= 2(12x^5 - 32x^3 + 16x) \\ &= 24x^5 - 64x^3 + 32x. \end{aligned}$$

Para comparação, vamos desenvolver o produto notável para então derivar termo a termo utilizando a regra de derivação de polinômios:

$$\begin{aligned} f(x) &= (2x^3 - 4x)^2 \\ &= (2x^3)^2 + 2(2x^3)(-4x) + (-4x)^2 \\ &= 4x^6 - 16x^4 + 16x^2 \\ \therefore f'(x) &= 24x^5 - 64x^3 + 32x. \end{aligned}$$

Por último temos que calcular $f'(-3)$:

$$\begin{aligned} f'(-3) &= 24 \cdot (-3)^5 - 64 \cdot (-3)^3 + 32 \cdot (-3) \\ &= 24 \cdot (-243) - 64(-27) + 32(-3) \\ &= -5832 + 1728 - 96 \\ &= -4200. \end{aligned}$$

Percebemos através desse exemplo que a regra da cadeia pode ser bem mais eficiente na hora de calcular derivadas da composição de polinômios.

Exemplo 3.12. Derive a função $f(t) = e^{\cos(t+t^2)}$.

Primeiramente temos que identificar que há 3 tipos funções: $x(t) = e^t$, $y(t) = \cos(t)$ e $z(t) = t + t^2$. A composição delas pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
x &= e^y \\
y &= \cos(z) \\
z &= t + t^2 \\
\therefore (x \circ y \circ z)(t) &= e^{\cos(t+t^2)}.
\end{aligned}$$

Para derivar, usamos a regra da cadeia derivando a função de fora (em função das de dentro) e multiplicando pelas derivadas das funções de dentro. Sendo assim, temos:

$$\begin{aligned}
f'(t) &= x'(y) \cdot y'(z) \cdot z'(t) \\
&= e^y \cdot (-\operatorname{sen}(z)) \cdot 1 + 2t \\
&= e^{\cos(z)\cdot}(-\operatorname{sen}(t + t^2))(1 + 2t) \\
&= -e^{\cos(t+t^2)\cdot} \operatorname{sen}(t + t^2)(1 + 2t).
\end{aligned}$$

Exemplo 3.13. Encontre a variação instantânea da função $f(\theta) = \operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta$.

Vale lembrar que a Relação Fundamental Trigonométrica nos garante que $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$ para qualquer valor de $\theta \in \mathbb{R}$. Portanto é intuitivo pensar que a função $f \equiv 1$ (f vale 1 para qualquer valor de sua variável), ou seja, queremos encontrar a derivada de uma função constante igual a 1, cuja derivada sabe-se ser igual a 0. Vamos mostrar isso usando a Regra da Cadeia.

Temos que a função f é a soma de duas funções, logo, como a derivada da soma é a soma das derivadas, vamos calcular cada derivada individualmente. Para a função $\operatorname{sen}^2\theta$, temos a composição da função $g(h) = h^2$ e a função $h(\theta) = \operatorname{sen}\theta$ tal que $(g \circ h)(\theta) = \operatorname{sen}^2\theta$. Derivando:

$$(\operatorname{sen}^2\theta)' = 2\operatorname{sen}\theta \cdot (\operatorname{sen}\theta)' = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta.$$

Analogamente, para a função $\cos^2\theta$, temos:

$$(\cos^2\theta)' = 2\cos\theta \cdot (\cos\theta)' = 2\cos\theta(-\operatorname{sen}\theta) = -2\cos\theta\operatorname{sen}\theta.$$

É fácil ver que os resultados são iguais, porém com os sinais opostos. Como queremos encontrar $f'(\theta) = (\operatorname{sen}^2\theta)' + (\cos^2\theta)'$, concluímos que $f'(\theta) \equiv 0$, ou seja, essa derivada vale 0 para qualquer valor de $\theta \in \mathbb{R}$.

3.3 Máximos e mínimos

Uma das aplicações mais importantes, se não a mais importante, do estudo de derivadas é encontrar valores extremos de funções, conhecidos como máximos e mínimos. Essa aplicação faz com que otimizemos uma tarefa em que uma situação possa ser descrita por uma função. Consequências desses estudos fazem com que possamos encontrar lucros máximos, tempos mínimos para se fazer um trajeto, ou seja, encontrar os melhores valores para cada situação. Para iniciarmos esses estudos vamos definir rapidamente o conceito de máximo e mínimo de uma função.

Definição 3.3. Seja f uma função definida em um domínio D. Dizemos que f tem um valor máximo global em um ponto $c \in D$ se $f(c) \geq f(x)$ para qualquer $x \in D$. Analogamente dizemos que f tem um valor mínimo global em um ponto $c \in D$ se $f(c) \leq f(x)$ para qualquer $x \in D$.

O ponto do domínio o qual se encontra o valor máximo (ou mínimo) é chamado de ponto de máximo (ou de mínimo), portanto $c \in D$ é um *ponto* extremo, enquanto $f(c)$ é um *valor* extremo.

Por exemplo, se analisarmos o intervalo fechado $[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ a função $f(x) = \cos x$ atinge seu valor mínimo absoluto 0 duas vezes, enquanto atinge seu valor máximo absoluto 1 apenas uma vez. Já a função $g(x) = \operatorname{sen} x$, nesse mesmo intervalo, atinge um valor de máximo 1 e um valor de mínimo -1. Veja na Figura 3.4.

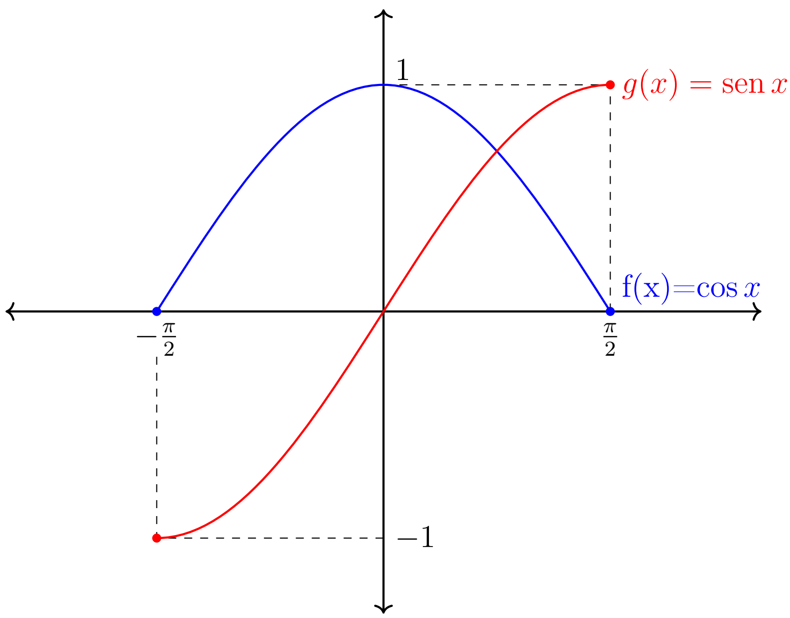


Figura 3.4: Extremos globais para as funções $f(x) = \cos x$ e $g(x) = \operatorname{sen} x$, $x \in [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Outra ideia importante é que uma função pode ter o que chamamos de valor máximo (ou mínimo) *local*, isto é, quando um ponto c no domínio de uma função é tal que $f(c) \geq f(x)$ (ou $f(c) \leq f(x)$) apenas para pontos x próximos a c. Veja a Figura 3.5.

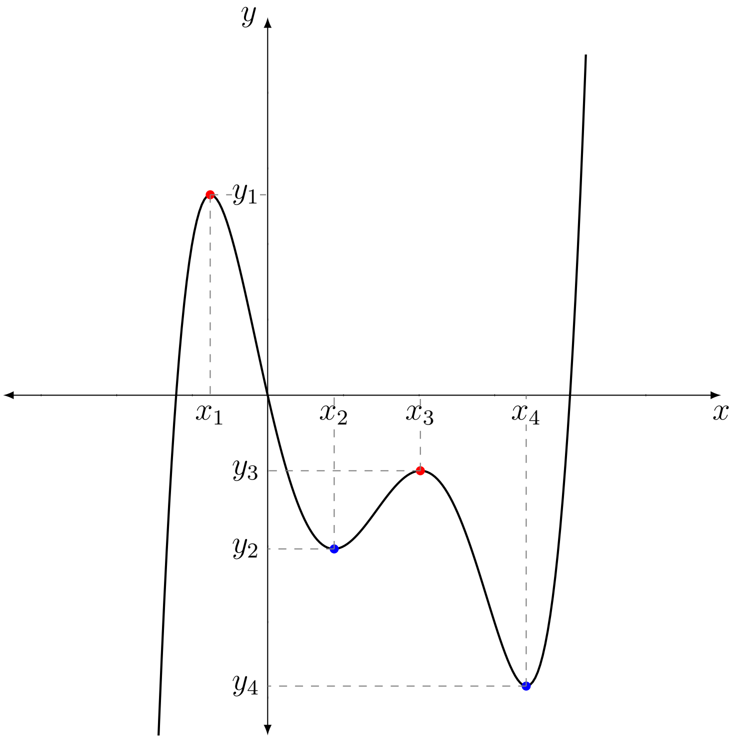


Figura 3.5: Exemplos de máximos e mínimos locais.

Os pontos x_1 e x_3 são pontos máximos locais e y_1 e y_3 são seus respectivos valores de máximos locais, bem como x_2 e x_4 são pontos mínimos locais e y_2 e y_4 são seus respectivos valores de mínimos locais. Perceba, por exemplo, que existem valores maiores que y_3, porém, para pontos x bem próximos de x_3 tem-se que $y_3 \geq f(x)$.

Agora que vimos o que são esses extremos, vamos utilizar os conhecimentos de derivada para encontrá-los. Para isso, usaremos o seguinte teorema:

Teorema 3.4. *(Teorema da primeira derivada para extremos locais) Se f possui um valor máximo local ou mínimo local em um ponto c no interior de seu domínio, então, se f' existir, $f'(c) = 0$.*

Demonstração. Para essa demonstração, usaremos a seguinte definição de limite:

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

Sem perda de generalidade, podemos supor que $f(c)$ é um valor de máximo local, pois o caso de mínimo local é análogo. Com isso, para cada valor x no domínio de f próximo o suficiente de c tem-se que $f(x) \leq f(c)$ (pois $f(c)$ é um máximo local), que é equivalente a dizer que $f(x) - f(c) \leq 0$. Com isso, temos que:

$$f'(c) = \lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0 \text{ pois numerador e denominador são negativos; e}$$
$$f'(c) = \lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0 \text{ pois numerador é negativo e denominador é positivo; .}$$

Como as duas desigualdades são verdadeiras temos que $f'(c) \leq 0 \leq f'(c)$, ou seja, $f'(c) = 0$.

□

É razoável pensar que, nos extremos das funções, a derivada nesses pontos seja zero, pois é onde a função troca seu "crescimento": de positivo para negativo quando é um máximo; e de negativo para positivo quando é um mínimo. Entretanto o Teorema da Primeira Derivada garante que se um ponto é extremo e sua derivada existe, então essa derivada vale 0. O contrário nem sempre é verdade, veja a Figura 3.6.

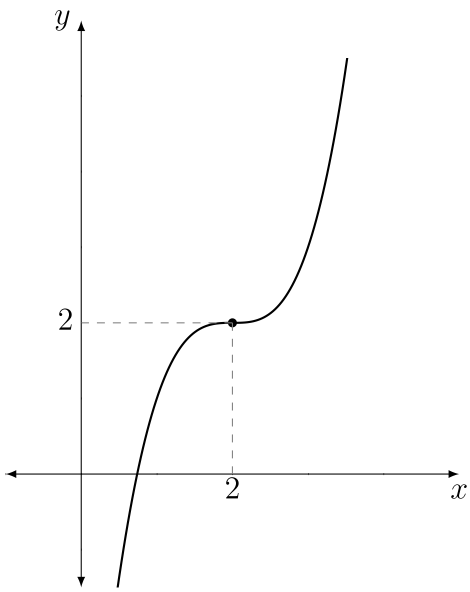


Figura 3.6: Gráfico da função $f(x) = (x - 2)^3 + 2$.

Perceba que na função $f(x) = (x - 2)^3 + 2$ o ponto $x = 2$ possui derivada igual a 0 ($f'(x) = 3 \cdot (x - 2)^2 \cdot (x + 2)' \Rightarrow f'(2) = 3 \cdot (2 - 2)^2 \cdot 1 = 0$), entretanto esse ponto não é um ponto de máximo nem de mínimo. Chamamos esse ponto de *ponto de inflexão*, entretanto falaremos mais a frente sobre esse tópico.

Para encontrarmos os pontos que maximizam ou minimizam nossa função, devemos procurar em três locais nossos candidatos a pontos extremos, a saber:

1. Pontos no interior do domínio cuja $f' = 0$;

2. Pontos no interior do domínio em que a derivada não exista; e

3. As extremidades do domínio da função.

Nesses dois primeiros casos, chamamos esses pontos de *pontos críticos* da função. Após obter os pontos críticos de uma função, falta classificar esse ponto, pois ele pode ser: um ponto de máximo, um ponto de mínimo ou um ponto de inflexão. Há algumas formas de verificarmos qual a natureza desse ponto crítico. Veremos duas formas:

- A primeira forma é fazendo um estudo dos valores da derivada em valores próximos ao ponto critico. Há três casos:

  1. Caso a derivada seja positiva antes do ponto crítico e negativa depois, trata-se de um ponto de máximo, pois a função cresceu até seu máximo e depois passa a diminuir. Veja a Figura 3.7: :

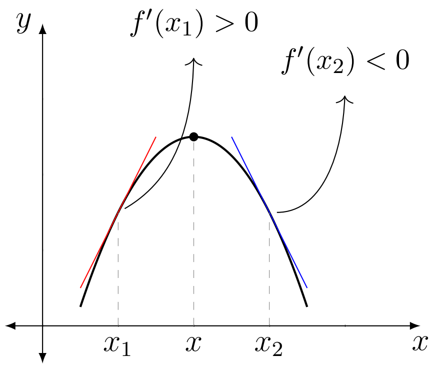


Figura 3.7: Exemplo gráfico de função com ponto de máximo.

  2. Caso a derivada seja negativa antes do ponto crítico e positiva depois, trata-se de um ponto de mínimo, pois a função decresceu até seu ponto de mínimo e depois passa a crescer novamente. Veja a Figura 3.8:

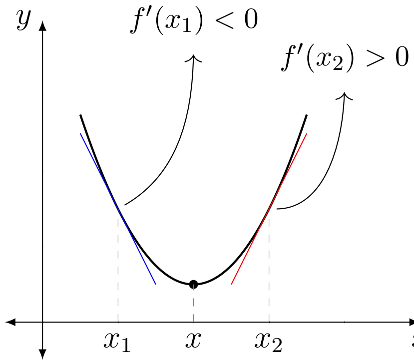


Figura 3.8: Exemplo gráfico de função com ponto de mínimo.

3. Por último, caso a derivada mantenha seu sinal antes e depois do ponto crítico, trata-se de um ponto de inflexão. Pontos de inflexão são pontos onde a função troca de concavidade, porém seu crescimento (ou decrescimento) se mantém. Veja a Figura 3.9:

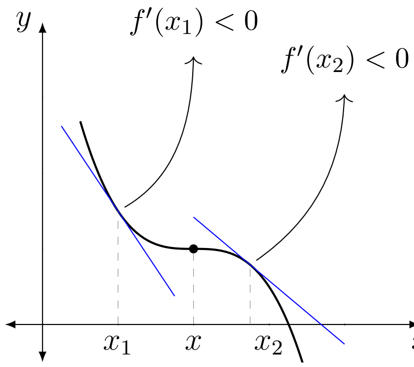


Figura 3.9: Exemplo gráfico de função com ponto de inflexão.

- Uma outra forma de classificar um ponto como de máximo, de mínimo ou de inflexão é fazendo o **Teste da Segunda Derivada** no ponto crítico A segunda derivada nada mais é do que a derivada da primeira derivada de um função. Seu valor fornece informações sobre a concavidade da função, e como vimos anteriormente, nos pontos de máximo a concavidade da função é negativa, nos pontos de mínimo a concavidade é positiva e nos pontos de inflexão há a troca de concavidade, isto é, a concavidade é neutra. Com isso, podemos separar em três casos:

1. Se x_0 é um ponto crítico e $f''(x) < 0$, então x_0 é um ponto de máximo;
2. Se x_0 é um ponto crítico e $f''(x) > 0$, então x_0 é um ponto de mínimo;
3. Se x_0 é um ponto crítico e $f''(x) = 0$, então x_0 é um ponto de inflexão.

Com isso, podemos encontrar os extremos de funções e classificá-los em máximos ou mínimos.

Exemplo 3.14. Dado a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ com $a \neq 0$, mostre que o vértice da parábola é dado pelo ponto $V = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$. Além disso, mostre que, se $a > 0$, então a função possui um valor de mínimo e, se $a < 0$, então a função possui um valor de máximo.

Primeiramente, encontrar o vértice da parábola é encontrar o extremo da parábola, onde a coordenada x do vértice é o ponto extremo e a coordenada y do vértice é seu valor extremo. Vamos derivar a função e igualar a zero para encontrar seus pontos críticos:

$$f(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow f'(x) = 2ax + b = 0 \Rightarrow x = \frac{-b}{2a}.$$

Portanto, seu único ponto crítico é $\frac{-b}{2a}$ que é a coordenada x do vértice. Para encontrar a coordenada y, vamos pegar o ponto crítico de f e calcular seu valor aplicado à função:

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{-b}{2a}\right) &= a\left(\frac{-b}{2a}\right)^2 + b\left(\frac{-b}{2a}\right) + c \\
&= \frac{ab^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c \\
&= \frac{b^2}{4a} - \frac{2b^2}{4a} + \frac{4ac}{4a} \\
&= \frac{-b^2 + 4ac}{4a} \\
&= \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a} = \frac{-\Delta}{4a}.
\end{aligned}$$

E assim mostramos que o valor extremo de f é a coordenada y do vértice da parábola. Falta agora classificar os pontos extremos em pontos de máximo, de mínimo ou de inflexão. Para isso, vamos utilizar o Teste da Derivada Segunda:

$$f(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow f'(x) = 2ax + b \Rightarrow f''(x) = ((f'(x))' = (2ax + b)' = 2a.$$

Como $f''(x) = 2a$ é uma função constante, temos que se $a > 0$, $f''(-b/2a) = 2a > 0$ e pelo Teste da Derivada Segunda o ponto critico de f será um ponto de mínimo, e se $a < 0$, pelo mesmo raciocínio o ponto crítico de f será um ponto de máximo.

Vejamos agora mais um exemplo.

Exemplo 3.15. Seja $f : [0, 3] \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = \frac{(x-1)(2-x)^2}{2} + 1.$

Encontre seus pontos e valores de máximo e mínimo.

Inicialmente, vamos optar por desenvolver o polinômio do numerador para facilitar na derivação (note que um outro método seria usando regra do produto e regra da cadeia). Temos que

$$\begin{aligned}
f(x) = \frac{(x-1)(2-x)^2}{2} + 1 &= \frac{(x-1)(4-4x+x^2)+2}{2} \\
&= \frac{4x-4x^2+x^3-4+4x-x^2+2}{2} \\
&= \frac{1}{2}(x^3-5x^2+8x-2).
\end{aligned}$$

Agora vamos derivar e igualar à zero para encontrar os pontos críticos:

$$f'(x) = \frac{1}{2}(3x^2-10x+8);$$

igualando essa derivada a zero:

$$\begin{aligned}
(3x^2-10x+8) = 0 \Rightarrow x &= \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 8}}{2 \cdot 3} \\
&= \frac{10 \pm \sqrt{100-96}}{6} \\
&= \frac{10 \pm \sqrt{4}}{6} \\
&= \frac{10 \pm 2}{6}.
\end{aligned}$$

Portanto os pontos críticos são $x = 2$ e $x = \frac{4}{3}$.

Vamos agora calcular o valor da função em cada ponto crítico e nos pontos que delimitam o domínio da função:

$$\begin{aligned}
f(0) &= \frac{(0-1)(2-0)^2}{2} + 1 = \frac{-1 \cdot 4}{2} + 1 = -1; \\
f(4/3) &= \frac{(4/3-1)(2-4/3)^2}{2} + 1 = \frac{1/3 \cdot 4/9}{2} + 1 = \frac{4}{54} + 1 = \frac{58}{54}; \\
f(2) &= \frac{(2-1)(2-2)^2}{2} + 1 = \frac{0}{2} + 1 = 1; \\
f(3) &= \frac{(3-1)(2-3)^2}{2} + 1 = \frac{2 \cdot 1}{2} + 1 = 2.
\end{aligned}$$

Com esses valores em mãos, podemos concluir que $f(0)$ é mínimo global, $f(4/3)$ é máximo local, $f(2)$ é mínimo local e $f(3)$ é máximo. Vejamos o gráfico da Figura 3.10:

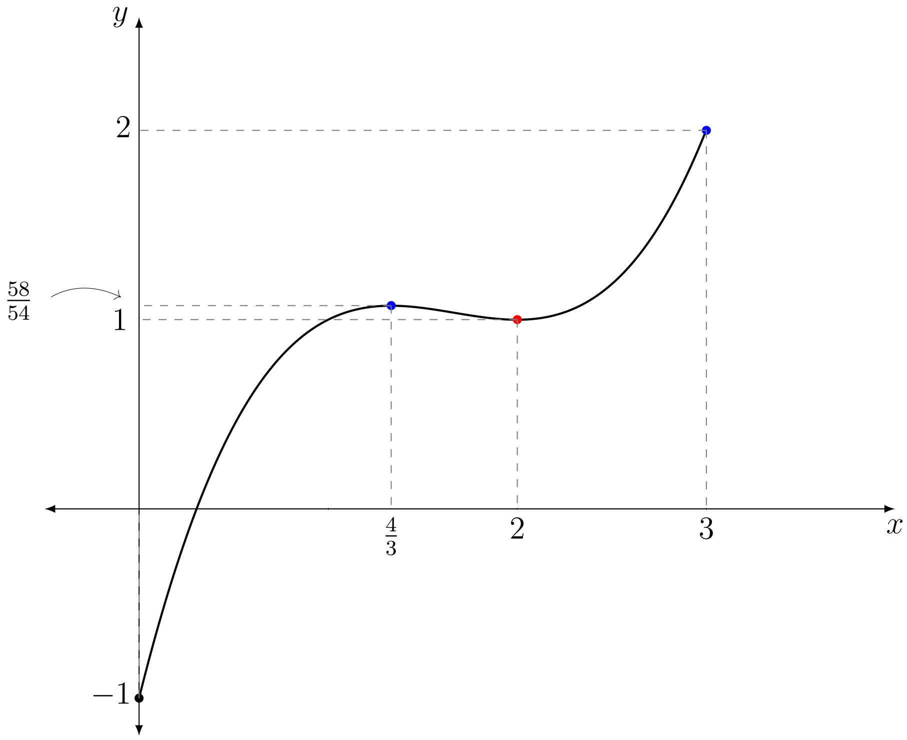


Figura 3.10: Gráfico da função $f(x) = (x-2)^3 + 2$.

3.4 Aplicações de derivadas

As derivadas possuem algumas aplicações na Matemática, na Física, na Química, na Engenharia e em outras áreas. Por exemplo, algumas expressões da Física podem ser encontradas utilizando-se da derivada em outras fórmulas, tal qual a derivada da velocidade de um corpo em função do tempo é a sua aceleração. Veremos nesta seção alguns exemplos de aplicação do estudo de derivadas.

Exemplo 3.16. A lei dos gases para um gás ideal à temperatura absoluta T (em kelvins), pressão P (em atmosferas) e volume V (em litros) é $PV = nRT$, em que n é o número de mols de gás e $R = 0,082$ é a constante do gás. Suponha que, em um certo instante, a pressão $P = 8$ atm está crescendo a uma taxa de $0,10$ atm/min, e o volume $V = 10L$ está crescendo a uma taxa de 0,15 L/min. Encontre a taxa de variação de T em relação ao tempo naquele instante, se $n = 10$ mols.

Primeiramente sabemos que a taxa de variação de uma função é dada pela sua derivada; portanto, temos que $P'(t) = 0,10$ atm/min e $V'(t) = 0,15$ L/min. Vamos derivar então a função $PV = nRT$ em função do tempo, onde n e R são valores constantes. Derivando dos dois lados da igualdade, temos

$$\begin{aligned}(PV)' = (nRT)' \Rightarrow & P'V + PV' = nRT' \quad \text{(usando a regra do produto)}\\ \Rightarrow & T' = \frac{P'V + PV'}{nR}.\end{aligned}$$

Agora, substituindo os valores fornecidos:

$$\begin{aligned}T' &= \frac{P'V + PV'}{nR}\\ &= \frac{0,10 \cdot 10 + 8 \cdot 0,15}{0,082 \cdot 10}\\ &= \frac{1 + 1,2}{0,82}\\ &= \frac{2,2}{0,82} \approx 2,68.\end{aligned}$$

Portanto a variação de temperatura é de aproximadamente $2,68$ K/min.

Exemplo 3.17. Considere um pedaço de papelão de tamanho 30x20cm, o qual deseja-se construir uma caixa retirando-se 4 quadrados de suas pontas. Qual o volume máximo dessa caixa que podemos formar (Figura 3.11)?

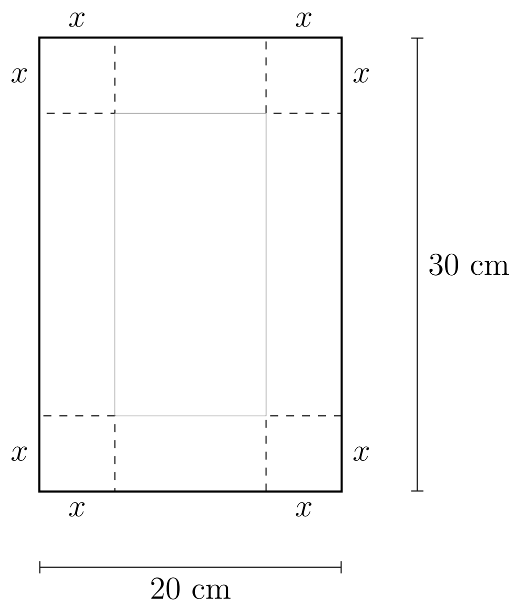


Figura 3.11: Representação da construção da caixa.

Olhando para a Figura 3.11, devemos recortar na parte pontilhada e dobrar na parte cinza as abas que se formarão e, após isso, teremos a caixa desejada. A aresta x do quadrado a ser recortado pode variar, fazendo com que o volume da caixa varie. Primeiramente vamos calcular o volume V da caixa em função de x:

$$V = \text{comprimento} \times \text{largura} \times \text{altura} \Rightarrow V(x) = (30 - 2x) \cdot (20 - 2x) \cdot x.$$

Note que $0 < x < 10$, pois não faz sentido o volume V ser um número negativo ou nulo. Agora vamos desenvolver o polinômio para então encontrarmos seu valor máximo:

$$V(x) = (30 - 2x) \cdot (20 - 2x) \cdot x = (600 - 60x - 40x + 4x^2) \cdot x = 4x^3 - 100x^2 + 600x.$$

Para encontrarmos os valores de máximo da função, vamos derivá-la e igualar a zero, para então descobrir os valores de x que maximizam a função:

$$V(x) = 4x^3 - 100x^2 + 600x \Rightarrow V'(x) = 12x^2 - 200x + 600.$$

Igualando a zero, temos:

$$\begin{aligned} 12x^2 - 200x + 600 = 0 \Rightarrow & 3x^2 - 50x + 150 = 0 \\ \Rightarrow & x = \frac{-(-50) \pm \sqrt{2500 - 4 \cdot 3 \cdot 150}}{2 \cdot 3} \\ \Rightarrow & x = \frac{50 \pm \sqrt{700}}{6} \\ \Rightarrow & x = \frac{50 \pm 10\sqrt{7}}{6} \\ \Rightarrow & \overline{x} = \frac{50 + 10\sqrt{7}}{6} \approx 12,75 \\ & \overline{\overline{x}} = \frac{50 - 10\sqrt{7}}{6} \approx 3,92. \end{aligned}$$

Como vimos que $x \in (0, 10)$, então o valor que maximiza a função é $x \approx 3,92$ cm. Com isso, basta calcular o volume $V(x)$ com esse valor:

$$V(3,92) = 4(3,92)^3 - 100(3,92)^2 + 600 \cdot 3,92 \approx 240,95 - 1536,64 + 2352 \approx 1056,31 \text{ cm}^3.$$

Esse é o volume máximo da caixa feita a partir de uma pedaço retangular de papelão com tais medidas. Vejamos o gráfico para observar nosso resultado:

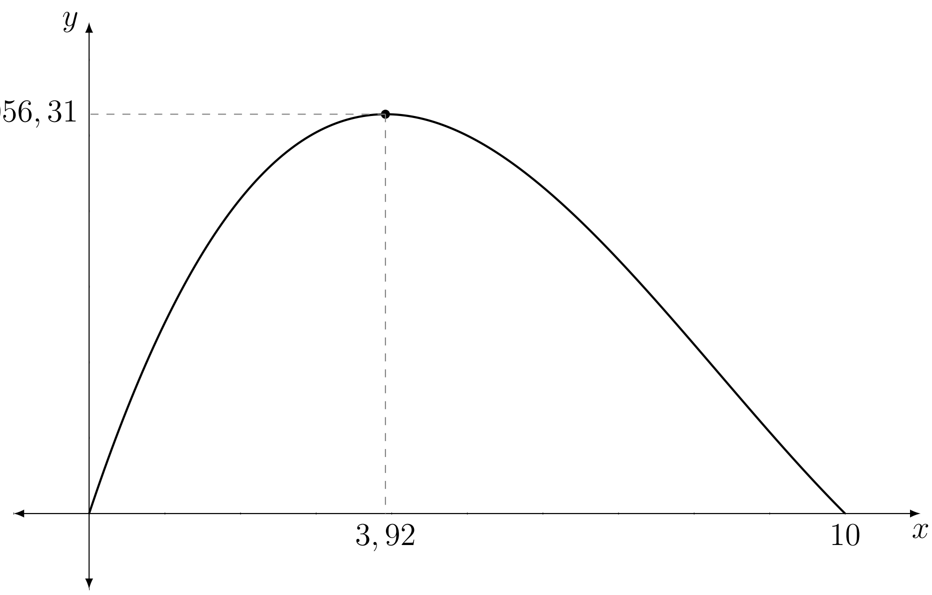
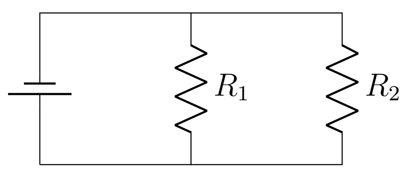


Figura 3.12: Gráfico da função $V(x) = 4x^3 - 100x^2 + 600x$, $x \in (0, 10)$.

Exemplo 3.18. Se dois resistores com resistências R_1 e R_2 estão conectados em paralelo, como na figura abaixo, então a resistência total R, medida em ohms (Ω), é dada por $\dfrac{1}{R} = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}$.



Se $R_1 = 80\ \Omega$ e $R_2 = 100\ \Omega$ estão variando às taxas de $0,3$ e $0,2\ \Omega/\mathrm{s}$, respetivamente, então qual a taxa de variação da resistência total R do circuito?

Primeiramente, observe que $\dfrac{1}{R} = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} = \dfrac{R_1 + R_2}{R_1 \cdot R_2}$ implica em $R = \dfrac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$. Com isso, basta agora derivar R em função do tempo:

$$
\begin{aligned}
R' &= \left(\frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}\right)' \\
&= \frac{(R_1R_2)'(R_1 + R_2) - (R_1R_2)(R_1 + R_2)'}{(R_1 + R_2)^2} \quad \text{(regra do quociente)} \\
&= \frac{(R_1'R_2 + R_1R_2')(R_1 + R_2) - (R_1R_2)(R_1' + R_2')}{(R_1 + R_2)^2} \quad \text{(regra do produto).}
\end{aligned}
$$

Agora basta substituir os valores fornecidos na questão para calcular a variação de R:

$$\begin{aligned} R' &= \frac{(R_1'R_2 + R_1R_2')(R_1 + R_2) - (R_1R_2)(R_1' + R_2')}{(R_1 + R_2)^2} \\ &= \frac{(0,3 \cdot 100 + 80 \cdot 0,2)(80 + 100) - (80 \cdot 100)(0,3 + 0,2)}{(80 + 100)^2} \\ &= \frac{(30 + 16) \cdot 180 - 8000 \cdot 0,5}{180^2} \\ &= \frac{46 \cdot 180 - 4000}{32400} \\ &= \frac{8280 - 4000}{32400} \\ &= \frac{4280}{32400} \approx 0,13. \end{aligned}$$

Portanto a variação da resistência é de $0,13\ \Omega/\mathrm{s}$.

Com este último exemplo, finalizamos o conteúdo de derivadas e suas aplicações. Passaremos agora a falar sobre um minicurso aplicado a alunos de Ensino Médio com base nos conteúdos de limites e derivadas apresentados até este capítulo.

Capítulo 4

Dados e resultados do minicurso

Este capítulo tem por finalidade apresentar o desenvolvimento, alguns dados e resultados do minicurso aplicado para alunos do Ensino Médio com o tema de "Introdução ao Cálculo". A fonte das figuras contidas neste capítulo são do próprio autor.

Inicialmente, foi sondado no Centro de Ensino Médio Setor Oeste (CEMSO), escola da rede pública do Distrito Federal, o interesse dos alunos em participar de um minicurso que abordasse alguns assuntos de Cálculo. Feito isso, foi solicitado a autorização da direção e coordenação da escola para oferecer aulas extracurriculares no contraturno dos alunos no próprio ambiente escolar. Com tudo acertado, foi elaborado uma ementa para então ser oferecido o minicurso aos alunos.

O objetivo do minicurso foi apresentar aos alunos uma abordagem introdutória e com um pouco menos de rigor sobre conteúdos de matemática do Ensino Superior. A proposta era para que os participantes tivessem um primeiro contato com a disciplina de Cálculo 1 para facilitar seus estudos de matemática atuais e futuros.

Público alvo

O minicurso foi ofertado a todos os alunos do período vespertino do CEMSO, sendo voluntária a inscrição de cada um. Os alunos não foram escolhidos por nenhum critério de desempenho. Entretanto, foi informado que seria necessário um certo grau de conhecimento em matemática. O intuito não era segregar os alunos pelo seu conhecimento, mas sim fazer com que alunos com dificuldade nos conteúdos de matemática do Ensino Médio não se frustrassem ao se deparar com tópicos mais avançados de matemática.

Feito essas considerações, se inscreveram um total de 27 alunos. Ao iniciar o minicurso, notou-se 10 alunos desistentes, restando 17 alunos frequentes na primeira semana.

Ao longo do minicurso, houveram mais quatro desistências e uma aluna que ingressou posteriormente. Portanto ao término do minicurso, restaram 14 alunos assíduos.

Tempo estimado

Inicialmente os encontros foram planejados para ocorrerem em três semanas, mas dado o calendário escolar dos alunos, foi necessário uma semana extra.

Foram um total de 10 encontros, cada um com três horas de duração, ao longo de quatro semanas. Esses encontros ocorreram no contra-turno das aulas regulares dos estudante no próprio ambiente escolar.

Conteúdos

O minicurso foi dividido em três módulos:

- O primeiro módulo abordou algumas propriedades matemáticas básicas, noções de conjuntos numéricos, intervalos e, por fim, funções reais.
- O segundo módulo introduziu os conteúdos de limites, limites laterais, continuidade de funções e o Teorema do Valor Intermediário.
- O terceiro módulo introduziu o conteúdo de derivada, passando pelas regras de derivação, derivada de produtos e quociente, regra da cadeia e, ao final, extremos de funções.

O conteúdo planejado foi sendo adaptado ao longo do processo de acordo com o desempenho dos estudantes, pois alguns tópicos (regra do quociente, alguns limites com infinito e exercícios aplicados, por exemplo) não foram tão adequados para o nível de conhecimento dos mesmos, já outros (limites indeterminados e regras de derivação, por exemplo) foram entendidos com facilidade.

Avaliação inicial

Antes da realização do primeiro encontro, foi enviado aos inscritos um questionário, via Google Forms, para coletar informações pessoais, como nome, idade e turma, informações sobre a tipo de escolaridade (se em escola pública, privada ou ambas), etc. Neste primeiro formulário, 16 alunos se dispuseram a responder e, com isso, foram obtidos os seguintes dados:

A idade dos alunos se distribuiu conforme a Figura 4.1, contando com alunos de 15 a 17 anos.

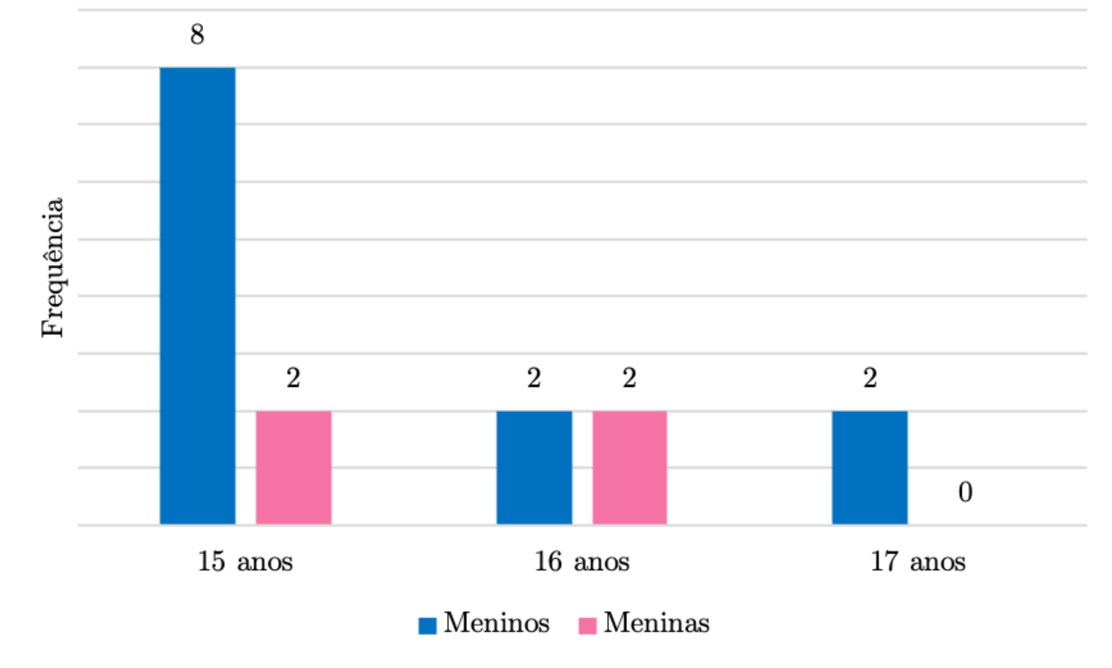


Figura 4.1: Gráfico da quantidade de alunos por idade e sexo.

Os alunos foram questionados quanto à categoria de ensino, se público ou privado, nos anos inicias do Ensino Fundamental, isto é, de 1º a 5º ano, e tais informações estão sintetizadas na Figura 4.2.

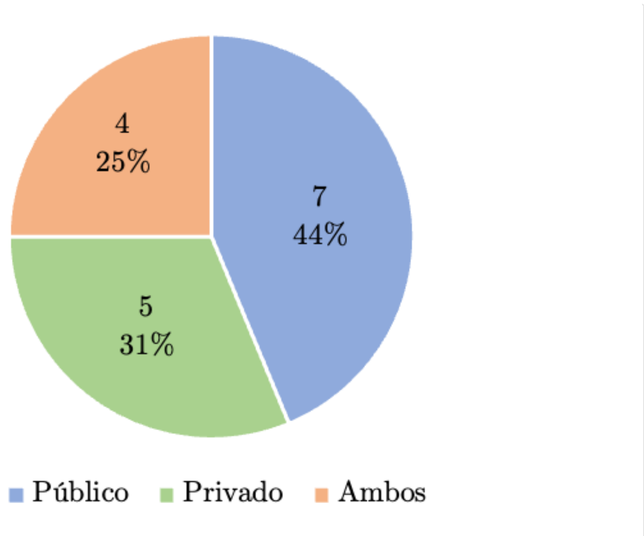


Figura 4.2: Gráfico com a distribuição das categorias dos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Os anos finais do Ensino Fundamental, isto é, de 6º a 9º ano, se distribuíram conforme a Figura 4.3.

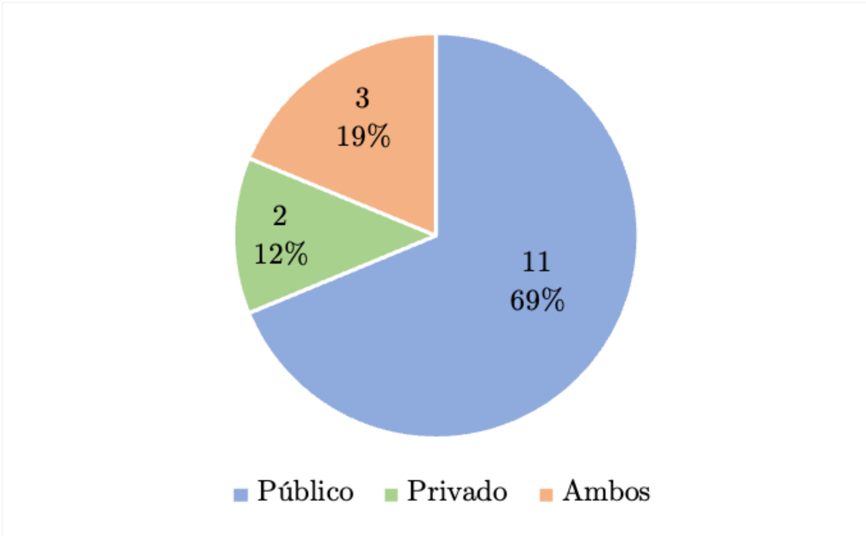


Figura 4.3: Gráfico com a distribuição das categorias dos anos finais do Ensino Fundamental.

Quanto à afinidade dos alunos com a matemática, foi perguntado sobre a relação dos mesmos com a disciplina. As respostas ficaram distribuídas de acordo com a Figura 4.4.

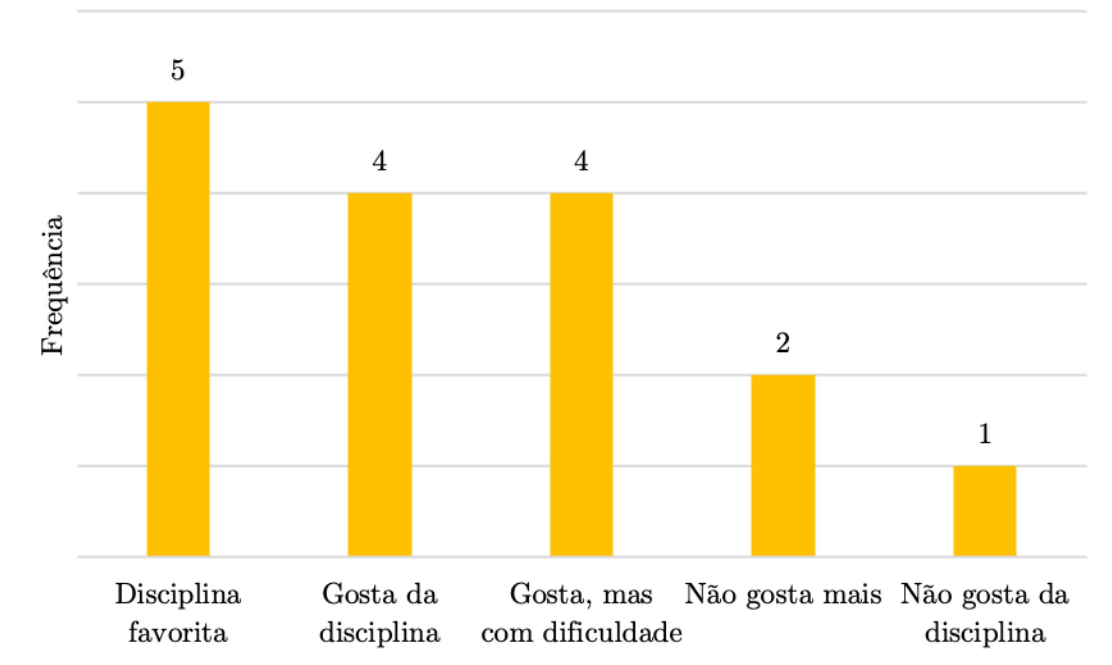


Figura 4.4: Gráfico de afinidade dos alunos com a disciplina de matemática.

Foram listados alguns conteúdos do Ensino Fundamental para que os alunos respondessem se tinham, ou não, domínio do conteúdo ou se nunca tinha visto tais conteúdos em sala de aula. Foram selecionados alguns desses conteúdos e, com isso, obteve-se o resultado conforme a Figura 4.5.

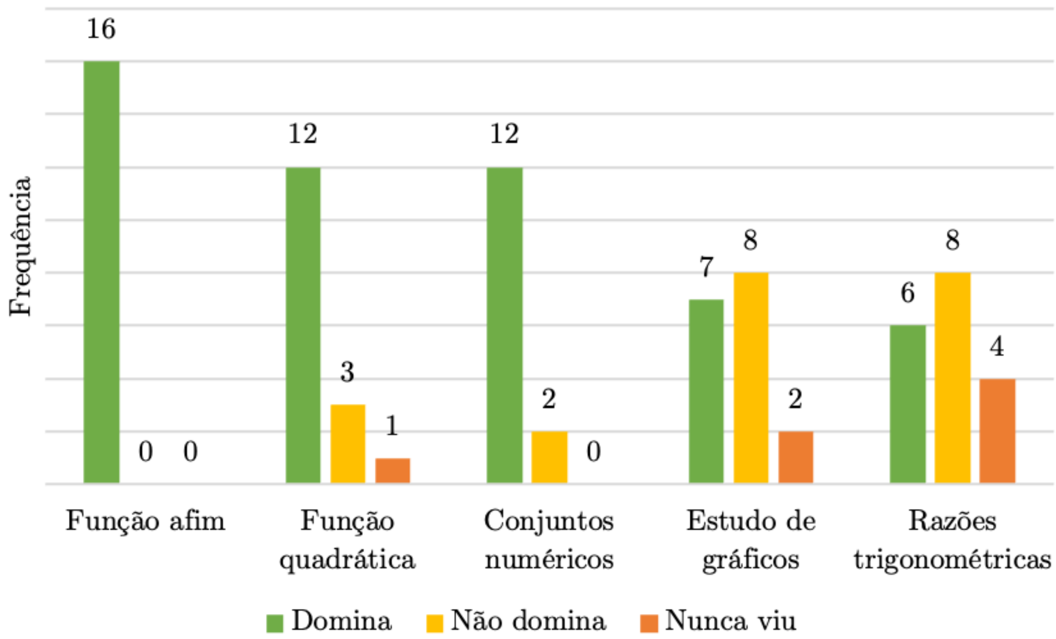


Figura 4.5: Gráfico com o domínio de alguns conteúdos básicos.

Sobre o minicurso, foi perguntado aos alunos qual o motivo da sua inscrição. Com isso obteve-se os resultados de acordo com a Figura 4.6:

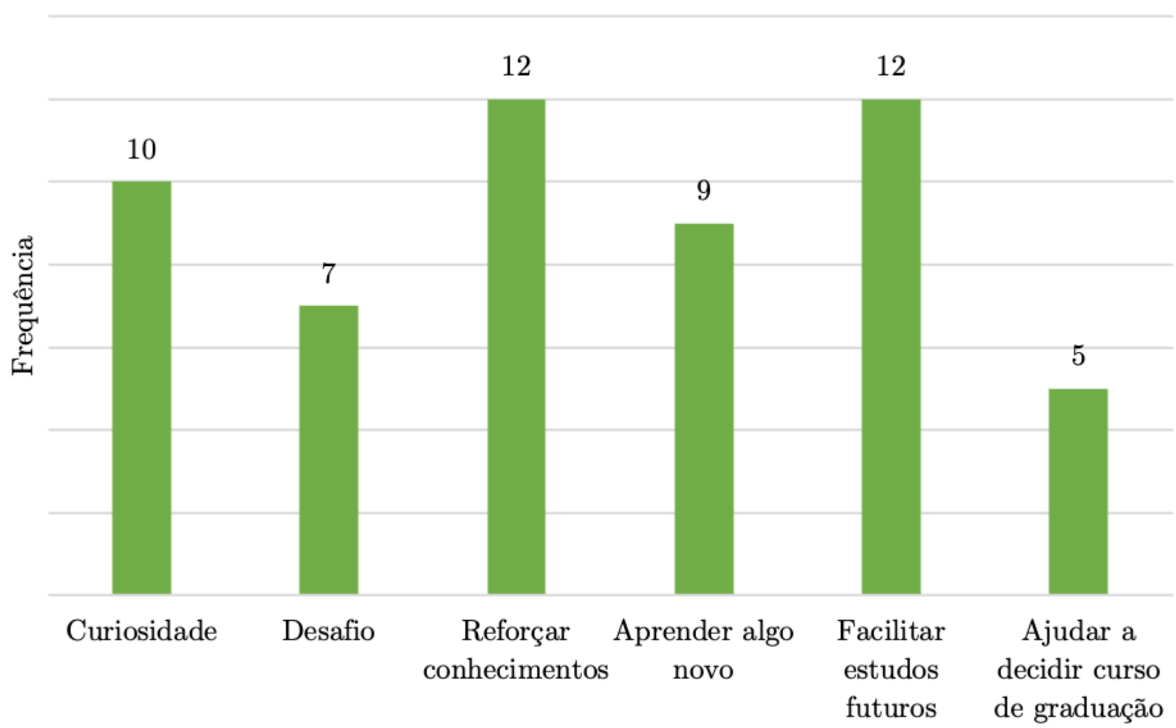


Figura 4.6: Gráfico com motivos de inscrição no minicurso.

Também foi perguntado aos inscritos sobre a intenção de ingressar em Instituição de Ensino Superior após concluir os Ensino Médio, e, em caso afirmativo, se a opção seria por um curso na área de Ciências Exatas. A Figura 4.7 mostra a intenção de ingresso no Ensino superior.

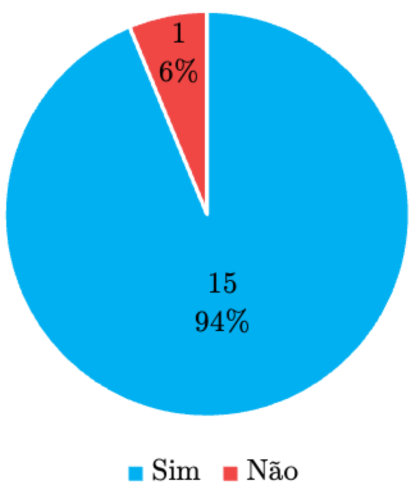


Figura 4.7: Gráfico da intenção de ingresso no Ensino Superior.

A Figura 4.8 mostra quantos alunos têm interesse em ingressar em um curso voltado para a área de Ciências Exatas.

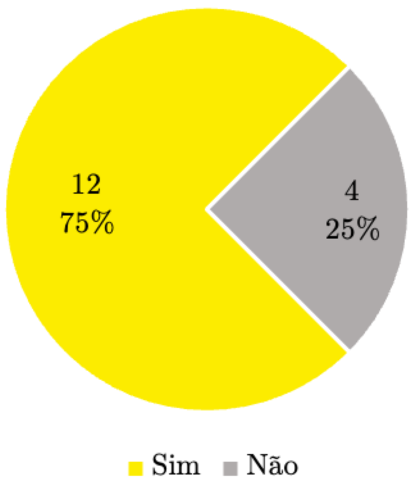


Figura 4.8: Gráfico da intenção de ingresso em curso na área de Ciências Exatas.

Algumas opções de cursos de graduação a serem cursados foram elencados pelos participantes, dentre eles: Engenharia de Computação, Medicina, Medicina Veterinária, Física, Astrofísica, Economia, Engenharia Biomédica, Direito e Matemática.

Os participantes também podiam comentar sobre suas expectativas quanto ao minicurso. A maioria descreveu como "desafiador" e "difícil"; entretanto houveram comentários como: "irei aprender coisas novas", "ter uma primeira visão sobre os temas" e "ajudar entender a matéria de Cálculo 1". Isso mostra que os alunos têm uma visão do estudo de Cálculo como algo novo que possivelmente será um desafio a ser vencido.

Feito essas avaliações e alinhamentos de expectativas, foi introduzido os conteúdos descritos nos capítulos anteriores deste trabalho e, ao final, proposto um novo questionário para obter-se as impressões dos alunos quanto às aulas.

Desenvolvimento das aulas

Os dois primeiros encontros foram utilizados apenas para revisar alguns conteúdos, como conjuntos numéricos, funções, notações e algumas propriedades algébricas que seriam úteis. Os alunos traziam suas dúvidas e ao final era proposto algumas atividades sobre o tema visto.

A partir do terceiro encontro, introduziu-se o conceito de limite de uma função. Como motivação, foi utilizado como exemplo ideia de velocidade instantânea de um corpo, usando-se da ideia da aproximação do intervalo de tempo a ser medido.

Ainda sobre limites, foram calculados alguns limites básicos de funções contínuas, onde é necessário "apenas substituir" os valores. Com isso, houve dúvida por parte dos alunos quanto à diferença de se calcular um limite e calcular o valor da função em um ponto dado. Foram então mostrados exemplos de funções onde o limite se aproxima de um valor, mas a função no ponto não vale o mesmo que o limite.

Com isso, houve um gancho para falar de continuidade de funções e limites laterais. Nesse tópico, o conteúdo conseguiu fluir bem e os alunos conseguiram realizar as atividades propostas com um certo auxílio do professor.

A partir do quinto encontro, foi mostrado como calcular limites indeterminados do tipo "$\frac{0}{0}$" onde, para resolver, deveria ser feito alguma manipulação algébrica. Era sempre necessário, principalmente durante as atividades, relembrar que nesses limites o denominador se aproxima de zero tanto quanto queira, mas sempre é diferente de zero.

Os três últimos encontros foram focadas no conceito de derivada e suas propriedades. Para isso, foi mostrada que a derivada é um tipo especial de limite, retomando a ideia da velocidade instantânea. Depois de calcular a derivada de algumas funções utilizado a definição, foi mostrado as regras básicas de derivação para algumas funções conhecidas.

Passado-se isso, foi mostrado as regras do produto, do quociente e da cadeia. Com isso pode-se calcular a derivada de funções um pouco mais complexas. Nessa parte os alunos sentiram um pouco mais de dificuldade nos exercícios, pois a duração do minicurso não permitiu a fixação total dos conteúdos.

Por último, foi aplicado os conceitos visto até então, para que encontrássemos extremos de funções. Utilizamos da derivada para encontrar máximos e mínimos de funções já conhecidas, como a função quadrática, e também algumas funções polinomiais, trigonométricas e suas composições.

Para encerrar o minicurso foi pedido para que os participantes respondessem um questionário final sobre suas considerações sobre o minicurso.

Avaliação final

Findado as aulas, os alunos restantes se dispuseram a responder um questionário com um *feedback* do minicurso. Foi perguntado sobre o nível de dificuldade das aulas, os tópicos mais fáceis e mais difíceis e o que poderia ser acrescentado ou modificado para a melhora do minicurso. Vale ressaltar que ao final restaram apenas 14 alunos assíduos, dos quais 10 responderam ao questionário final.

Foi perguntado para os participantes avaliarem de 0 a 10 a dificuldade dos conteúdos apresentados, sendo 0 muito fácil e 10 muito difícil. Com isso obteve-se os dados compilados na Figura 4.9.

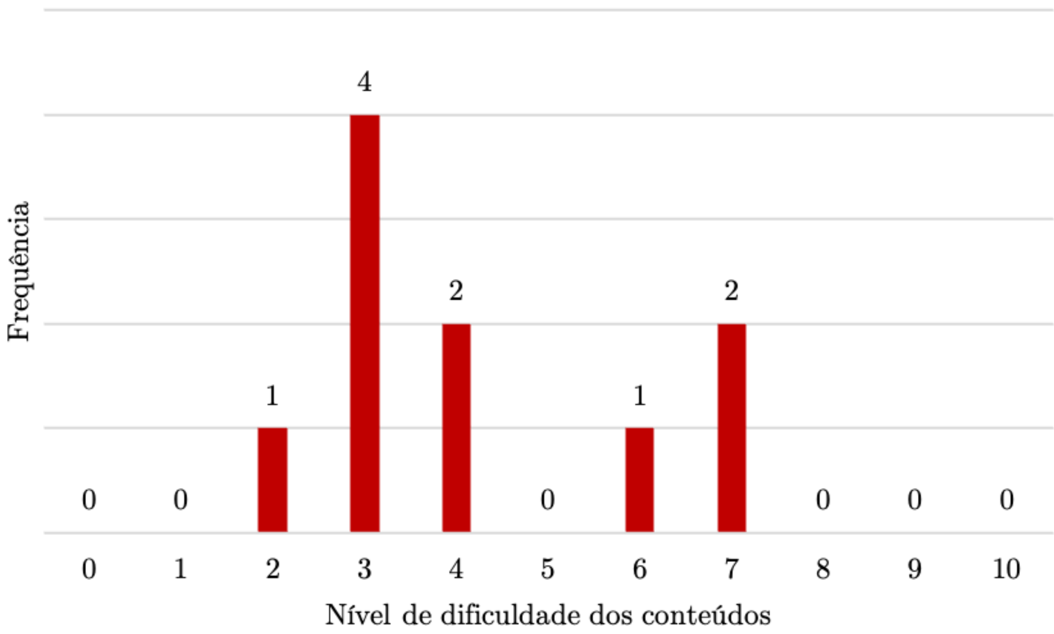


Figura 4.9: Gráfico do nível de dificuldade dos conteúdos do minicurso.

Alguns temas foram elencados pelos alunos como mais fáceis, por exemplo, o calculo de limites e as regras básicas de derivação. Outros temas, como cálculo de derivada pela definição e alguns exercícios aplicados, foram elencados como mais difíceis.

Apesar das dificuldades, foi perguntado qual a maior dificuldade para os alunos quanto ao minicurso e obteve-se os resultados conforme Figura 4.10.

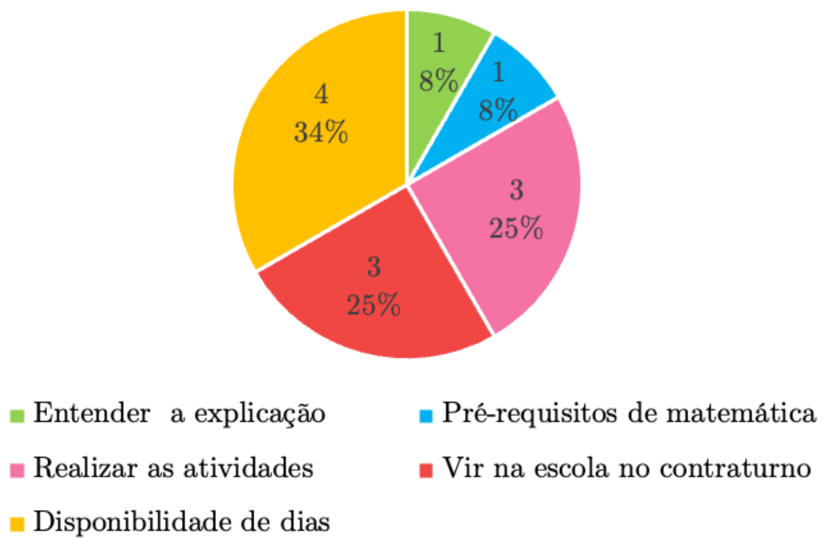


Figura 4.10: Gráfico de impeditivos do minicurso.

Por último, foram solicitadas algumas sugestões para aprimorar o minicurso. Algumas das ideias sugeridas foram: ter uma duração maior para que seja possível "aproveitar mais de cada conteúdo abordado durante o curso"; aumentar a frequência semanal de aulas; dar ao final "uma direção para quem quiser continuar estudando sobre os conteúdos".

Resultados

Alguns alunos relataram suas experiências finais e algumas delas mostram que foi agregado valor nos conhecimentos de matemática. Muitos relataram uma boa experiência, uma oportunidade de já ter contato com disciplina do Ensino Superior e uma quebra de expectativa quanto ao conteúdo a ser apresentado. Um relato específico de um aluno diz que havia uma expectativa baixa quanto às aulas pois acreditava que não iria aprender nada por ser algo muito além de seus conhecimentos, entretanto mostrou-se o contrário, pois mesmo não entendendo tudo, teve um contato e aprendeu o conceito básico dos conteúdos.

Observando os dados obtidos através dos questionários, percebe-se que o nível de dificuldade, a falta de pré-requisitos, a idade e a categoria de Ensino Fundamental não é um motivo incapacitante para um aluno se inteirar em conteúdos de Cálculo 1. O maior motivo de dificuldade observado é a disponibilidade de estar na escola no turno contrário às atividades regulares da escola. Isso pode ser mitigado aplicando esses conteúdos de Cálculo apresentados nas aulas regulares do Ensino Médio através dos Itinerários Formativos, os quais a matrícula é facultativa.

Levando em consideração o desenvolvimentos das aulas, as expectativas e os objetivos a serem alcançados, o minicurso obteve êxito. Assim, além do objetivo principal ter sido alcançado, os alunos tiveram um primeiro contato com temas que auxiliarão seus estudos, inclusive na escolha de um curso de graduação diante de um eventual ingresso na universidade. Aos que optarem por cursos em que Cálculo 1 seja uma disciplina obrigatória, seus estudos e aproveitamentos terão grande potencial de serem maximizados.

Considerações finais

Com a chegada do Novo Ensino Médio, novas oportunidades se abrem para o aprendizado dos alunos e o ensino dos professores. A possibilidade de serem explorados diferentes tópicos de Matemática e suas tecnologias nos itinerários formativos, permite que novos assuntos, como o Cálculo Diferencial, seja ofertado aos alunos.

Com o que foi apresentado nos Capítulos de 1, 2 e 3 deste trabalho, o professor do Ensino Médio tem um material fonte para ministrar aulas sobre Limites e Derivadas para seus alunos. O Capítulo 1 traz uma introdução, que funciona como uma espécie de revisão de conteúdos; o Capítulo 2 aborda as ideias iniciais de limites e continuidades; por último, no Capítulo 3, é introduzido os conceitos de derivada e algumas aplicações em exercícios.

O Capítulo 4, por outro lado, traz consigo dados que mostram que alunos com diferentes idades, vindo de escolas públicas ou privadas e com diferentes perspectiva de aprendizado, têm capacidade e curiosidade de iniciar antecipadamente os estudos de Cálculo, mesmo que de forma introdutória. A oferta dessa disciplina para alunos do Ensino Médio foi um sucesso. Entretanto, há algumas ressalvas: talvez fosse melhor ofertar esses conteúdos para alunos do 2º ou 3º ano, pois estes terão um contato maior com o estudo de conjuntos e funções advindo do 1º ano do Ensino Médio; além disso, atividades extracurriculares ofertadas em turno contrário, geralmente, possuem baixa adesão dos alunos.

Ambos os problemas listados podem ser mitigados com a proposta de inclusão desses conteúdos em uma disciplina de itinerário formativo, pois dessa forma, os alunos interessados podem frequentar as aulas no próprio turno, além de que, com inclusão do Novo Ensino Médio nos 2º e 3º anos, facilita a aplicação desta proposta de disciplina para esses alunos.

Pela dificuldade de ser abordado esses temas de Matemática em aulas "regulares" de Formação Geral Básica devido à disparidade dos graus de saber dos alunos, a proposta de fornecer esses conteúdos em disciplinas eletivas se adéqua perfeitamente, pois é facultado aos alunos a participação, abrindo a porta para àqueles com um bom desempenho em Matemática e para os alunos com interesse em novas descobertas na área.

Os objetivos propostos neste trabalho foram alcançados, mostrando que os alunos têm interesse e capacidade de expandir seus estudos de matemática. Além disso, fica disponível aos professores do Novo Ensino Médio um material para replicar em sala de aula com os alunos que se enquadrem nos requisitos apontados. Uma reflexão que vale ser feito é *avaliar e analisar quais impactos futuros que o contato prévio com os temas apresentados acarretarão nos estudos dos alunos que forem a ele submetidos, e quais os ganhos na vida escolar dos alunos.*

Referências

[1] BATISTA, Roberto do Nascimento et al. **Equações do 2° grau em variáveis complexas**, p. 30–42. Dissertação de Mestrado. Universidade Tecnológica Federal do Paraná, 2018.

[2] BOLDRINI, José Luiz et al. **Álgebra Linear, 3ª edição**, p. 142–147. São Paulo: Harbra-Harper & Row do Brasil, 1984.

[3] BRASIL. **Lei nº 13.415, de 16 de fevereiro de 2017**. Brasília: Presidência da República [2017]. Disponível em: https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2015-2018/2017/lei/l13415.htm. Acesso em: 3 jan. 2023.

[4] BRASIL. Ministério da Educação. **Novo Ensino Médio - perguntas e respostas**. Brasília, DF: Ministério da Educação 14 out. 2016. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/publicacoes-para-professores/30000-uncategorised/40361-novo-ensino-medio-duvidas. Acesso em: 3 jan. 2023.

[5] CERRI, Cristina. **Desvendando os números Reais**. São Paulo: IME-USP, 2006.

[6] GIMENEZ, Carmem Suzane Comitre; STARKE, Rubens. **Introdução ao cálculo**. UFSC, 2007.

[7] OLIVEIRA, Shimênia. **Pisa 2018 revela baixo desempenho escolar em Leitura, Matemática e Ciências no Brasil**, 2019. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/ultimas-noticias/211-218175739/83191-pisa-2018-revela-baixo-desempenho-escolar-em-leitura-matematica-e-ciencias-no-brasil. Acesso em: 3 jan. 2023.

[8] PATRÃO, Mauro. **Cálculo 1: versão 1/09**. Editora Universidade de Brasília, 2009. Disponível em: https://repositorio.unb.br/handle/10482/1298. Acesso em: 19 set. 2022.

[9] STEWART, James. **Cálculo, Volume 1, 5a edição**. São Paulo: Editora Thomson, 2008.

[10] THOMAS, George, WEIR, Maurice e HASS, Joel. **Cálculo, Volume 1, 12a edição**. São Paulo: Pearson Education, 2012.

Apêndices

APÊNDICE A - Ementa do minicurso

Minicurso de Introdução ao Cálculo 1
Ementa do curso – 2022

PROGRAMA: o minicurso contará com 3 semanas dividas em módulos. O conteúdo de cada um deles está descrito a seguir.

1) Conjuntos numéricos, intervalos e funções reais.
2) Limites de funções. Limites laterais e Continuidade de funções. Teorema do Valor Intermediário. Reta tangente, derivada, regras básicas de derivação.
3) Derivadas de composições. Otimização. Máximos e mínimos. Teorema do Valor Médio. Esboço de gráficos. Regra de L'Hôpital.

Bibliografia Básica:

1) THOMAS, George Brinton; WEIR, Maurice D; HASS, Joel. Cálculo. 12. ed. São Paulo: Pearson Addison Wesley, 2008. VOLUME 1

3) J. STEWART, 5a ed. CALCULO VOLUME 1 Pioneira/Thomson Learning.

4) PATRAO, Mauro. Cálculo 1: derivada e integral em uma variável. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 2011.

Bibliografia Complementar:

1) Anton, Howard; Davis, Stephen L.; Bivens, Irl C. Cálculo, Vol. I. 10ª Ed. 2014 Bookman
2) LEITHOLD, Louis. O cálculo com geometria analítica. 3. ed. São Paulo: Harbra, c1994. Vol. 1
3) SWOKOWSKI, Earl William. Cálculo com geometria analítica, Vol. 1. 2. ed. São Paulo; Rio de Janeiro: Makron Books Brasil, 1994
4) GUIDORIZZI, H. Um curso de cálculo, Vol. 1, 5ª Ed. 2002 LTC.

Fonte: autoria própria (2022).

APÊNDICE B - Questionário diagnóstico do minicurso

Formulário diagnóstico

A primeira parte do formulário é para coletar dados pessoais.

1. Nome completo:

____

2. Turma:

Marcar apenas uma oval.

- ◯ 1A
- ◯ 1B
- ◯ 1C
- ◯ 1D
- ◯ 1E
- ◯ 1F
- ◯ 1G
- ◯ 1H
- ◯ 1I
- ◯ 1J
- ◯ 2F
- ◯ 2G
- ◯ 2H
- ◯ 2I

3. Sexo:

Marcar apenas uma oval.

- Masculino
- Feminino
- Outro

4. Idade:

Marcar apenas uma oval.

- 13
- 14
- 15
- 16
- 17
- 18
- 19
- 20

Relação com a Matemática

5. Você estudou seu Ensino Fundamenta I (1° ao 5° ano) em qual dos ensinos abaixo?

Marcar apenas uma oval.

- Ensino Público
- Ensino Privado
- Em ambos

6. Você estudou seu Ensino Fundamenta II (6º ao 9º ano) em qual dos ensinos abaixo?

Marcar apenas uma oval.

- Ensino Público
- Ensino Privado
- Em ambos

7. Você tem uma boa relação com a matemática?

Marcar apenas uma oval.

- Sim, é minha disciplina favorita.
- Sim, eu gosto da disciplina.
- Sim, mas tenho dificuldade.
- Não, mas já gostei.
- Não, pois não tive bons professores.
- Não, nunca gostei.
- Outros (diga qual)

8. Caso tenha respondido "outros" deixe aqui sua resposta.

9. Assinale abaixo (pode ser mais de um) quais dos conteúdos de matemática abaixo você tem afinidade/domínio.

Marque todas que se aplicam.

- [ ] Expressões numéricas
- [ ] Conjuntos numéricos
- [ ] As 4 operações básicas
- [ ] Números decimais
- [ ] Frações
- [ ] Notação científica
- [ ] Múltiplos e Divisores
- [ ] Fatoração, MMC e MDC
- [ ] Potenciação
- [ ] Radiciação
- [ ] Unidades de medida
- [ ] Sequências e progressões
- [ ] Regra de três
- [ ] interpretação de gráficos
- [ ] Razão e proporção
- [ ] Equação do 1º grau
- [ ] Equação do 2º grau
- [ ] Função do 1º grau
- [ ] Função do 2º grau
- [ ] Sistema de equações
- [ ] Ponto, reta e plano
- [ ] Plano cartesiano
- [ ] Ângulos
- [ ] Semelhança de triângulos
- [ ] Teorema de Tales
- [ ] Teorema de Pitágoras
- [ ] Seno, cosseno e tangente
- [ ] Área, perímetro e volume
- [ ] Sólidos geométricos

10. Assinale abaixo (pode ser mais de um) quais dos conteúdos de matemática abaixo você NÃO tem afinidade/domínio.

Marque todas que se aplicam.

- [ ] Expressões numéricas
- [ ] Conjuntos numéricos
- [ ] As 4 operações básicas
- [ ] Números decimais
- [ ] Frações
- [ ] Notação científica
- [ ] Múltiplos e divisores
- [ ] Fatoração, MMC e MDC
- [ ] Potenciação
- [ ] Radiciação
- [ ] Unidades de medida
- [ ] Sequências e progressões
- [ ] Regra de três
- [ ] interpretação de gráficos
- [ ] Razão e proporção
- [ ] Equação do 1º grau
- [ ] Equação do 2º grau
- [ ] Função do 1º grau
- [ ] Função do 2º grau
- [ ] Sistema de equações
- [ ] Ponto, reta e plano
- [ ] Plano cartesiano
- [ ] Ângulos
- [ ] Semelhança de triângulos
- [ ] Teorema de Tales
- [ ] Teorema de Pitágoras
- [ ] Seno, cosseno e tangente
- [ ] Área, perímetro e volume
- [ ] Sólidos geométricos

11. Assinale abaixo (pode ser mais de um) quais dos conteúdos de matemática abaixo você nunca viu na escola.

Marque todas que se aplicam.

- [ ] Expressões numéricas
- [ ] Conjuntos numérico
- [ ] As 4 operações básicas
- [ ] Números decimais
- [ ] Frações
- [ ] Notação científica
- [ ] Múltiplos e divisores
- [ ] Fatoração, MMC e MDC
- [ ] Potenciação
- [ ] Radiciação
- [ ] Unidades de medida
- [ ] Sequências e progressões
- [ ] Regra de três
- [ ] interpretação de gráficos
- [ ] Razão e proporção
- [ ] Equação do 1º grau
- [ ] Equação do 2º grau
- [ ] Função do 1º grau
- [ ] Função do 2º grau
- [ ] Sistema de equações
- [ ] Ponto, reta e plano
- [ ] Plano cartesiano
- [ ] Ângulos
- [ ] Semelhança de triângulos
- [ ] Teorema de Tales
- [ ] Teorema de Pitágoras
- [ ] Seno, cosseno e tangente
- [ ] Área, perímetro e volume
- [ ] Sólidos geométricos

12. O que te motiva/atrai na matemática e seu estudo?

13. Como você aprende melhor matemática?

Marque todas que se aplicam.

- [ ] Com explicação de um professor em sala.
- [ ] Com explicação de um professor particular.
- [ ] Estudando sozinho.
- [ ] Com o livro didático.
- [ ] Com video-aulas.
- [ ] Resolvendo exercícios.
- [ ] Outros. (especificar)

14. Especifique, caso tenha marcado "outros" na questão anterior:

Sobre o Minicurso

15. Por quê se inscreveu no minicurso? (pode marcar mais de uma alternativa)

Marque todas que se aplicam.

- [ ] Curiosidade
- [ ] Desafio
- [ ] Reforçar conhecimentos
- [ ] Aprender algo novo
- [ ] Facilitar os estudos futuros
- [ ] Decidir qual grande área seguir (exatas, humanas, etc)
- [ ] Outro (especificar)

16. Caso tenha marcado "outro" na pergunta anterior, deixe aqui seu comentário.

17. Você tem pretenção de seguir estudos em uma Universidade?

Marcar apenas uma oval.

- Sim
- Não

18. Você pretende fazer alguma graduação na área de Ciências Exatas?

Marcar apenas uma oval.

- Sim
- Não

19. Caso você queira cursar uma faculdade, qual curso você faria/pretende fazer?

20. Por último, qual suas expectativas sobre o nosso minicurso? O que você espera ver? Achas que vai ser difícil ou fácil? Fique a vontade para escrever.

Fonte: autoria própria (2022).

APÊNDICE C - Modelo de plano de ensino do Itinerário Formativo

Itinerário Formativo: Introdução a limites e derivadas
Plano de ensino

Área(s) de conhecimento em que o Itinerário Formativo ao qual a Unidade Curricular Eletiva/Trilha de Aprendizagem é proposto: Matemática e suas Tecnologias

Componentes curriculares relacionados: Matemática

Código(s) dos objetivos de aprendizagem que norteiam a Unidade Curricular

[MAT01IF] Investigar situações-problema, selecionando os conhecimentos matemáticos relevantes e elaborando modelos para sua representação.

[MAT02IF] Testar hipóteses levantadas de variáveis que interferem na explicação ou na resolução de uma situação-problema, avaliando a adequação da linguagem de determinado modelo matemático, em termos de possíveis limitações, eficiência e possibilidades de generalização.

[MAT04IF] Reconhecer conceitos matemáticos, por meio de fruição, vivências e reflexão crítica, que têm relação com produtos e/ou processos criativos, a fim de compreender a contribuição da Matemática para a resolução de problemas sociais e para o desenvolvimento de processos tecnológicos.

Estratégia de aprendizagem

Atividades de fixação; Atividades de verificação das aprendizagens; Aula expositiva e/ou dialogada; Avaliação para as aprendizagens; Ensino com pesquisa; Ensino em pequenos grupos; Estudo dirigido; Resolução de exercícios; Revisão das aprendizagens; Teste escrito; Utilização de recursos audiovisuais.

Recursos materiais necessários:

Recursos materiais: lápis, lápis de cores, borracha, régua, , quadro branco, pincel para quadro branco; Internet; projetor de vídeo; smartphone; computador; material impresso elaborado pelo Docente Responsável, livros e periódicos relacionados ao tema.

Eixo(s) estruturante(s) envolvido(s) na Unidade Curricular:

Investigação Científica, Processos Criativos

Detalhamento da Unidade Curricular Eletiva Orientada:

O trabalho pedagógico a ser desenvolvido nesta Eletiva Orientada baseia-se, principalmente, em aprofundar conhecimentos de matemáticos relacionados com conteúdos do Ensino Superior de Cálculo. EMENTA: Números e Operações, Álgebra e Funções, Grandezas e Medidas, Geometria. Conjuntos, funções, limites e derivadas.

Estratégias de avaliação do estudante:

Avaliação do desenvolvimento dos objetivos de aprendizagem pelo estudante mediante a observação da participação e da performance dos estudantes nas atividades propostas:

resolução de exercícios individualmente e em grupo, realização de pesquisas bibliográficas e sistematização das informações coletadas, comprovação de aprendizagem mediante

Estratégia de avaliação do docente:

Realizar atividades de fixação de conteúdos que serão pré-requisitados; resolver questões em quadro de forma coletiva aos alunos; aplicar atividades que testem o aprendizado de forma periódica; oferecer lista de exercícios; avaliar os alunos ao final através de atividades escritas.

Referências

1) THOMAS, George Brinton; WEIR, Maurice D; HASS, Joel. Cálculo. 12. ed. São Paulo: Pearson Addison Wesley, 2008. VOLUME 1

2) J. STEWART, 5a ed. CALCULO VOLUME 1 Pioneira/Thomson Learning.

3) PATRAO, Mauro. Cálculo 1: derivada e integral em uma variável. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 2011.

Fonte: autoria própria (2022).

Anexo

As seguintes listas de atividades foram retiradas do curso de Cálculo 1 do Departamento de Matemática da Universidade de Brasília.

ANEXO A - Exemplo de lista de atividades

Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

Cálculo 1

Lista de Exercícios – Semana 01

Temas abordados: Introdução ao Cálculo e Revisão

Seções do livro: 2.1; 1.1 a 1.3; 1.5; 1.6

1) Se a posição de um carro no instante $t > 0$ é dada por $s(t) = (4 + t^2)$, então a velocidade média entre os instantes $t = 2$ e $t = 2 + h$ é dada por (veja Texto 1 e/ou vídeo)

$$\frac{s(2+h) - s(2)}{h} = \frac{[4 + (2+h)^2] - [4 + 2^2]}{h} = \cdots = \frac{h(4+h)}{h} = 4 + h.$$

Quanto mais próximo h estiver de zero, mais perto a velocidade média estará da velocidade em $t = 2$, de modo que essa velocidade vale

$$v(2) = \lim_{h \to 0} \frac{s(2+h) - s(2)}{h} = \lim_{h \to 0}(4 + h) = (4 + 0) = 4.$$

Para cada função abaixo, simplifique o quociente $(s(t_0+h) - s(t_0))/h$ que dá a velocidade média entre os instantes $t = t_0$ e $t = t_0 + h$. Em seguida, calcule a velocidade $v(t_0)$ fazendo h se aproximar de zero.

(a) $s(t) = t^2$, no ponto $t_0 = 3$

(b) $s(t) = t^3$, no ponto $t_0 = 1$

(c) $s(t) = \sqrt{t}$, no ponto $t_0 = 9$

(d) $s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{a}{2} t^2$, com s_0, v, $a \in \mathbb{R}$, em um ponto $t_0 > 0$ genérico

Dica: para o item (b), lembre que $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$; para o item (c), multiplique o numerador e o denominador por $(\sqrt{9+h} + 3)$

2) Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função. Dado $a \in I$, a *reta tangente ao gráfico de f no ponto $(a, f(a))$* é a (única) reta que passa pelo ponto $(a, f(a))$ e tem inclinação igual a

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

quando o limite existe (veja Texto 2 e/ou vídeo). Neste caso, a equação da reta tangente $y = y(x)$ é dada por $y - f(a) = f'(a)(x - a)$. A expressão acima significa que, quando x se aproxima de a, o quociente $(f(x) - f(a))/(x - a)$ se aproxima do número $f'(a)$.

Por exemplo, se $f(x) = x^3$ e $a = 1$, então

$$f'(1) = \lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1^3}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)} = \lim_{x \to 1}(x^2 + x + 1) = (1^2 + 1 + 1) = 3,$$

de modo que a equação da reta tangente no ponto $(1, f(1)) = (1, 1)$ é $y - 1 = 3(x - 1)$.

Para cada uma das funções abaixo, determine a inclinação $f'(a)$ para o valor de a indicado. Em seguida, calcule a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(a, f(a))$

(a) $f(x) = x^2$, para $a = 2$

(b) $f(x) = \frac{1}{x}$, para $a = 3$

(c) $f(x) = mx + b$, com m, $b \in \mathbb{R}$, para um valor genérico de a

Dica: para calcular $f'(2)$ no item (a), fatore o numerador $(x^2 - 4)$ de modo a cancelar o denominador $(x - 2)$; no item (b), calcule a diferença $(1/x) - (1/3)$ reduzindo as frações a um mesmo denominador, de modo a eliminar o denominador $(x - 3)$

Revisão

Nos exercícios abaixo são lembrados alguns conteúdos estudados no Ensino Médio. Espera-se que você consiga resolver todos eles. Se não for esse o caso, este é o momento de pegar os livros antigos e recordar as coisas!

1) A função módulo é definida, para todo $x \in \mathbb{R}$, como sendo

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Marcando o ponto x na reta real, o módulo de x é exatamente a distância desse ponto até o ponto 0. Determine para quais valores de x as igualdades abaixo são satisfeitas.

(a) $|x| = 4$ (b) $|2 - x| = -1$ (c) $|x| = -|x|$

(d) $|2x + 5| = 4$ (e) $|x - 3| = |2x + 1|$

2) Determine para quais valores de x as desigualdades abaixo são satisfeitas.

(a) $|x| < 2$ (b) $|5x| \geq 20$ (c) $|x| > 0$

(d) $|x + 3| \geq 2$ (e) $|3x - 8| < 4$

3) Determine o domínio de cada uma das funções abaixo.

(a) $f(x) = \dfrac{3x + 4}{x^2 - x - 2}$ (b) $g(x) = \dfrac{|x^2 - 1|}{\sqrt[3]{x + 1}}$ (c) $h(x) = \dfrac{\sqrt{|x| - x}}{e^x - 1}$

(d) $r(x) = \dfrac{x}{\sqrt{|x| - 1}}$ (e) $p(x) = \sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}}$ (f) $f(x) = \ln(-x^2 + 4x - 3)$

4) Definimos a *soma de duas funções f e g* como sendo a função

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x), \qquad \forall\, x \in \operatorname{dom}(f + g) := \operatorname{dom}(f) \cap \operatorname{dom}(g).$$

Observe que o domínio da função soma é a intersecção dos domínio de f e g, pois para somar precisamos calcular $f(x)$ e $g(x)$.

Por exemplo, se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \setminus \{7\} \to \mathbb{R}$ são dadas por

$$f(x) = 2x^2 - 8, \qquad g(x) = \frac{2}{x - 7},$$

então $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = 2x^2 - 8 + \dfrac{2}{x - 7}$, para todo $x \in \operatorname{dom}(f + g) = \mathbb{R} \setminus \{7\}$.

De maneira análoga definimos subtração, produto e quociente de duas funções. Neste último caso é importante excluir do domínio os pontos que anulam o denominador.

Para f e g como acima, determine a expressão e domínio de

(a) $(f - g)(x) := f(x) - g(x)$ (b) $(f \cdot g)(x) := f(x)g(x)$

(c) $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) := \dfrac{f(x)}{g(x)}$ (d) $\left(\dfrac{g}{f}\right)(x) := \dfrac{g(x)}{f(x)}$

5) Definimos a *composição de duas funções f e g* como sendo a função

$$(f \circ g)(x) := f(g(x)), \qquad \forall\, x \in \operatorname{dom}(f \circ g) := \{x \in \operatorname{dom}(g) : g(x) \in \operatorname{dom}(f)\}.$$

Para o cálculo de $(f \circ g)(x)$, calculamos $f(y)$, com $y = g(x)$. Assim, é preciso que $y = g(x)$ esteja no domínio de f, daí a explicação do domínio da composição.

Por exemplo, considerando as funções f e g do exercício anterior, temos que

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \frac{2}{f(x) - 7} = \frac{2}{(2x^2 - 8) - 7} = \frac{2}{2x^2 - 15}, \qquad \forall\, x \neq \pm\sqrt{\frac{15}{2}}.$$

Veja que, no domínio, tivemos que excluir todos os pontos tais $f(x) \notin \mathrm{dom}(g) = \mathbb{R} \setminus \{7\}$. Assim, eliminamos todos os valores de x reais, tais que $f(x) = 2x^2 - 8 = 7$.

Ainda considerando as funções f e g como no exercício anterior, determine a expressão e domínio de cada uma das composições abaixo.

(a) $(f \circ g) = f(g(x))$ (b) $(f \circ f)(x) = f(f(x))$ (c) $(g \circ g)(x) = g(g(x))$

6) Considerando $f(x) = (4 - x)/x$, determine a expressão e o domínio de cada uma das funções abaixo.

(a) $f\left(\dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{1}{f(x)}$ (b) $f(x^2) - f(x)^2$ (c) $f(f(x))$

7) Em cada um dos itens abaixo, encontre a equação da reta que satisfaz as exigências apresentadas (veja vídeo).

(a) passa pelos pontos $(3, 4)$ e $(-2, 5)$

(b) passa pelo ponto $(-1, 3)$ e tem inclinação igual a -1

(c) passa pelo ponto $(5, -1)$ e é paralela à reta $2x + 5y = 15$

(d) passa pelo ponto $(0, 1)$ e é perpendicular à reta $8x - 13y = 13$

8) Denotando por x e y os lados de um retângulo cujo perímetro é igual a 100, determine o domínio e a expressão da função $d(x)$ que fornece o comprimento da diagonal do retângulo em função de x.

9) A partir de uma cartolina medindo 14×22 vamos construir uma caixa sem tampa como segue: recortamos quadrados de lado x em cada um dos vértices da cartolina e dobramos as abas. Determine a expressão e o domínio da função $V(x)$ que fornece o volume da caixa em função de x.

10) Sejam x, y e z os lados de um triângulo retângulo, onde x é a hipotenusa. Suponha que o triângulo tem perímetro igual a 6. Determine a expressão da função $A(x)$ que fornece a área do triângulo em função de x.

Dica: *eleve os dois lados da igualdade $y + z = 6 - x$ ao quadrado.*

11) Um grama de gelo, inicialmente a -40^oC, é posto em uma fonte de calor. Neste experimento, observa-se a menor quantidade de calor absorvido $Q(T)$, em calorias, para que a amostra atinja temperatura T, em ^{o}C. Sabe-se que a cada 1 cal, o gelo aumenta sua temperatura em 2^oC. Quando atinge 0^oC, são necessárias mais 80 cal para o derretimento total (que ocorre sob temperatura constante). Depois de liquefeita, a água necessita de 1 cal para aumentar sua temperatura em 1^oC.

(a) Calcule $Q(-40)$, $Q(-38)$, $Q(0)$, $Q(1)$ e $Q(2)$.

(b) Determine a expressão de $Q(T)$, para $T \in [-40, 80]$.

RESPOSTAS

1) (a) $v(3) = 6$ (b) $v(1) = 3$ (c) $v(9) = \frac{1}{6}$ (d) $v(t) = v_0 + at$

2) (a) $f'(2) = 4,\quad y - 4 = 4(x-2)$

(b) $f'(3) = -\frac{1}{9},\quad y - \frac{1}{3} = -\frac{1}{9}(x-3)$

(c) $f'(a) = m,\quad y = mx + b$

Revisão

1) (a) $x \in \{-4, 4\}$ (b) nenhum valor de x, pois $|x| \geq 0$ (c) $x = 0$

(d) $x \in \left\{-\frac{9}{2}, -\frac{1}{2}\right\}$ (e) $x \in \left\{-4, \frac{2}{3}\right\}$

2) (a) $x \in (-2, 2)$ (b) $x \in \mathbb{R} \setminus (-4, 4)$ (c) $x \neq 0$

(d) $x \in (-\infty, -5] \cup [-1, +\infty)$ (e) $x \in (\frac{4}{3}, 4)$

3) (a) $\mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$ (b) $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ (c) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

(d) $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ (e) $[-1, 1]$ (f) $(1, 3)$

4) (a) $(f-g)(x) = 2x^2 - 8 - \dfrac{2}{(x-7)}$, para $x \neq 7$

(b) $(f \cdot g)(x) = \dfrac{4x^2 - 16}{x-7}$, para $x \neq 7$

(c) $(\frac{f}{g})(x) = (x^2 - 4)(x - 7)$, para $x \in \mathbb{R}$

(d) $(\frac{g}{f})(x) = \dfrac{1}{(x-7)(x^2-4)}$, para $x \notin \{-2, 2, 7\}$

5) (a) $(f \circ g)(x) = \dfrac{8}{(x-7)^2} - 8$, para $x \neq 7$

(b) $(f \circ f)(x) = 8x^4 - 64x^2 + 120$, para $x \in \mathbb{R}$

(c) $(g \circ g)(x) = \dfrac{2(x-7)}{-7x+51}$, para $x \notin \{7, \frac{51}{7}\}$

6) (a) $f\left(\dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{-4(x^2 - 4x + 1)}{4-x}$, para $x \notin \{0, 4\}$

(b) $f(x^2) - f(x)^2 = \dfrac{-2(x^2 - 4x + 6)}{x^2}$, para $x \neq 0$

(c) $f(f(x)) = \dfrac{5x-4}{4-x}$, para $x \notin \{0, 4\}$

7) (a) $y = -\frac{1}{5}x + \frac{23}{5}$ (b) $y = -x + 2$ (c) $y = -\frac{2}{5}x + 1$ (d) $y = -\frac{13}{8}x + 1$

8) $d(x) = \sqrt{x^2 + (50-x)^2}$, $x \in (0, 50)$

9) $V(x) = x(22 - 2x)(14 - 2x)$, $x \in (0, 7)$

10) $A(x) = 9 - 3x$

11) (a) $Q(-40) = 0$, $Q(-38) = 1$, $Q(0) = 20$, $Q(1) = 101$, $Q(2) = 102$

(b) $Q(T) = \begin{cases} (T/2) + 20 & \text{se } T \in [-40, 0] \\ T + 100 & \text{se } T \in (0, 80] \end{cases}$

Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

Cálculo 1

Lista de Exercícios – Semana 02

Temas abordados: Limites no ponto (conceito intuitivo e formal)
Seções do livro: 2.1 a 2.4

1) Suponha $f(x) > 0$ para todo $x \neq 2$ e $f(2) = -3$. Decida sobre a veracidade de cada uma das afirmações abaixo, justificando caso ela seja verdadeira ou apresentando um contra-exemplo caso seja falsa.

(a) $\lim_{x\to 2} f(x)$ não existe (b) $\lim_{x\to 2} f(x) = -3$ (c) Se existir, $\lim_{x\to 2} f(x)$ é positivo.

2) Calcule os limites abaixo (veja Texto 1).

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 1}(-3x^2+3x+5)$ (b) $\displaystyle\lim_{s\to 0}\sqrt{\frac{2s^2+3s-4}{4s-4}}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{8-2x}{|x-4|}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 4^+}\frac{8-2x}{|x-4|}$ (e) $\displaystyle\lim_{x\to 1^-}\frac{|x-1|}{x-1}$ (f) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{|x-1|}{x-1}$

3) Dadas $f(x) = \begin{cases} x^2+3 & \text{se } x \le 1, \\ x+1 & \text{se } x > 1, \end{cases}$ e $g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \le 1, \\ 2 & \text{se } x > 1, \end{cases}$ resolva os itens abaixo.

(a) Esboce os gráficos de f e g.

(b) Decida sobre a existência dos limites $\lim_{x\to 1} f(x)$ e $\lim_{x\to 1} g(x)$.

(c) Dê a expressão de $h(x) = f(x)g(x)$ e verifique se existe $\lim_{x\to 1} h(x)$.

4) Limites do tipo $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ com o numerador e o denominador se aproximando de zero são chamados de *indeterminações do tipo* $0/0$ (veja vídeo). Eles são delicados porque não podemos aplicar a regra do quociente. Se f e g são polinômios, então $f(a) = g(a) = 0$, e portanto $x = a$ é uma raiz do numerador e do denominador. Deste modo, podemos fatorá-los na forma $(x-a)p(x)$, com p sendo um polinômio de grau menor. Em alguns casos, isso permite eliminar a indeterminação, como no exemplo abaixo

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-4x+3}{6-2x} = \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x-1)}{-2(x-3)} = \lim_{x\to 3}\frac{x-1}{-2} = \frac{2}{-2} = -1.$$

Utilize a ideia acima para calcular os limites a seguir.

(a) $\displaystyle\lim_{z\to 0}\frac{z^2+2z}{z}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{2x^2-6x+4}{2-x}$ (c) $\displaystyle\lim_{t\to 1}\frac{t-1}{t^3-1}$

Dica: para fatorar o polinômio (t^3-1) divida-o por $(t-1)$. (veja vídeo)

5) O limite trigonométrico fundamental nos diz que $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1$ (veja Texto 3 e/ou vídeo). Use essa informação para calcular os limites abaixo.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(6x)}{2x}$ (veja vídeo) (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(5x)}{\operatorname{sen}(9x)}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{x}$

Dica: para o item (c), multiplique o numerador e o denominador por $(\cos(x)+1)$

6) Algumas indeterminações do tipo $0/0$ podem ser resolvidas usando-se o artifício de multiplicar o numerador e o denominador pelo conjugado de um deles, conforme o exemplo abaixo

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{x}-2)}{(x-4)}\frac{(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}+2)}=\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}=\lim_{x\to 4}\frac{1}{\sqrt{x}+2}=\frac{1}{4}.$$

Utilize a ideia acima para calcular os limites a seguir.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 9}\frac{2\sqrt{x}-6}{x-9}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 7}\frac{5-\sqrt{4+3x}}{7-x}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}$

Observação: vale a pena tentar o artifício acima no item (a) do exercício 4 para se convencer de que, naquele caso, o melhor caminho é mesmo a fatoração

7) Calcule cada um dos limites abaixo (veja Texto 2).

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x^3-x^2+x-1}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0^-}\frac{x\,\mathrm{sen}(x)}{1-\cos(x)}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 0}x\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ (e) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{2x+3}-\sqrt{5}}$ (f) $\displaystyle\lim_{x\to \pi}\frac{\mathrm{sen}(x-\pi)}{x-\pi}$

(g) $\displaystyle\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-5x+4}{|x-1|}$ (h) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}$ (i) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}}{x-a}$

Dica: nos dois últimos, use a identidade $(x^n-y^n)=(x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+\cdots+xy^{n-2}+y^{n-1})$, para $n\in\mathbb{N}$

8) Se a posição de um carro no instante $t>0$ é dada por $s(t)$, então a sua velocidade pode ser calculada a partir do seguinte limite (veja vídeo)

$$v(t)=\lim_{h\to 0}\frac{s(t+h)-s(t)}{h}.$$

Calcule a velocidade em cada um dos casos abaixo.

(a) $s(t)=t^3$ (b) $s(t)=\sqrt{t+1}$ (c) $s(t)=\mathrm{sen}(t)$

Dica: para o item (c), lembre que $\mathrm{sen}(a+b)=\mathrm{sen}(a)\cos(b)+\mathrm{sen}(b)\cos(a)$ e use o exercício 5

9) Suponha que a velocidade de um carro é $v(t)$, para $t>0$. Usando a ideia do exercício acima, escreva a expressão da aceleração $a(t)$ em termos de um limite envolvendo a aceleração média. Em seguida, determine a aceleração no caso em que $v(t)=\cos(t)$.

Dica: para o cálculo do limite, lembre que $\cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\mathrm{sen}(a)\,\mathrm{sen}(b)$ e use o exercício 5

10) Sejam $I\subset\mathbb{R}$ um intervalo aberto e $f:I\to\mathbb{R}$ uma função. Dado $a\in I$, lembre que a *reta tangente ao gráfico de f no ponto* $(a,f(a))$ é a (única) reta que passa pelo ponto $(a,f(a))$ e tem inclinação igual a

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a},$$

quando o limite existe (veja vídeo). Neste caso, a equação da reta tangente $y=y(x)$ é dada por $y-f(a)=f'(a)(x-a)$.

Para cada uma das funções abaixo, determine a inclinação $f'(a)$ em um ponto genérico. Em seguida, calcule a equação da reta tangente no ponto indicado.

(a) $f(x)=2x^2$, no ponto $(3,f(3))$ (b) $f(x)=\dfrac{5}{x}$, no ponto $(2,f(2))$

(c) $f(x)=x|x|$, no ponto $(0,f(0))$ (d) $f(x)=|x|$, no ponto $(0,f(0))$

RESPOSTAS

1) Todas as afirmações são falsas. Para os dois primeiros itens um possível contra-exemplo é a função $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \neq 2 \\ -3 & \text{se } x = 2 \end{cases}$. Para o terceiro $f(x) = \begin{cases} |x-2| & \text{se } x \neq 2 \\ -3 & \text{se } x = 2 \end{cases}$

2) (a) 5 (b) 1 (c) 2 (d) -2 (e) -1 (f) não existe

3) (b) os limites não existem, pois nos dois casos os limites laterais no ponto $x = 1$, apesar de existirem, são diferentes.

(c) $h(x) = \begin{cases} x^4 + 3x^2 & \text{se } x \leq 1 \\ 2x + 2 & \text{se } x > 1 \end{cases}$, de modo que $\lim_{x \to 1} h(x) = 4$.

4) (a) 2 (b) -2 (c) $1/3$

5) (a) 3 (b) $5/9$ (c) 0

6) (a) $1/3$ (b) $3/10$ (c) $1/2$

7) (a) $-1/2$ (b) $1/(2\sqrt{a})$ (c) 2 (d) 0 (e) $\sqrt{5}/2$

(f) 1 (g) -3 (h) na^{n-1} (i) $(1/3)a^{-2/3}$

8) (a) $v(t) = 3t^2$ (b) $v(t) = \frac{1}{2\sqrt{t+1}}$ (c) $v(t) = \cos(t)$

9) A aceleração é dada pelo limite $a(t) = \lim_{h \to 0} \dfrac{v(t+h) - v(t)}{h}$. Se $v(t) = \cos(t)$, então a ela é dada por $a(t) = -\operatorname{sen}(t)$.

10) (a) $f'(a) = 4a$; reta tangente no ponto $(3, 18)$ é $y - 18 = 12(x - 3)$

(b) $f'(a) = -\dfrac{5}{a^2}$; reta tangente no ponto $(2, \frac{5}{2})$ é $y - \frac{5}{2} = -\frac{5}{4}(x - 2)$

(c) $f'(a) = \begin{cases} 2a, & \text{se } a \geq 0 \\ -2a, & \text{se } a < 0 \end{cases}$; reta tangente no ponto $(0, 0)$ é $y = 0$

(d) $f'(a) = \begin{cases} 1, & \text{se } a > 0 \\ -1, & \text{se } a < 0 \end{cases}$; a reta tangente no ponto $(0, 0)$ não existe porque os limites laterais de $(f(x) - f(0))/(x - 0)$, quando $x \to 0$ pela esquerda e pela direita, são diferentes. Observe contudo que, em qualquer outro ponto $(a, f(a))$, com $a \neq 0$, a função possui reta tangente. Ela tem equação $y = x$ se $a > 0$, e $y = -x$ se $a < 0$.

Cálculo 1

Lista de Exercícios – Semana 03

Temas abordados: Continuidade

Seções do livro: 2.6

1) Explique o que significa dizer que uma função f é contínua no ponto $x = a$. (veja Texto 1)

2) Em cada item abaixo, esboce o gráfico de uma função f que satisfaz as condições do enunciado.

(a) f é contínua em todos os pontos, exceto em $x = 3$, onde o limite pela direita existe e é igual a $f(3)$.

(b) f tem limite em $x = 3$, mas não é contínua nesse ponto.

(c) f não é contínua em $x = 3$, mas torna-se contínua se seu valor em $x = 3$ for mudado para $f(3) = 0$.

(d) f é contínua no intervalo $[0, 3)$, está definida em $[0, 3]$, mas não é contínua em $[0, 3]$.

3) Sabe-se que $\lim_{x\to 2} f(x) = 5$ e f está definida em $\mathbb{R}$. Todas as afirmações abaixo são falsas. Desenhe um contra-exemplo para cada uma delas.

(a) $f(x) > 0$ para $x \in (1, 3)$ (b) $f(2) = 5$ (c) $f(2)$ é positivo

4) Decida se as funções

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \cos(1/x), & \text{se } x \neq 0, \\ 1, & \text{se } x = 0, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}, & \text{se } x \in [0, 1) \cup (1, +\infty), \\ 1/2, & \text{se } x = 1, \end{cases}$$

são contínuas no ponto $x = 0$ (veja vídeo) . Repita o exercício para $x = 1$.

5) Determine $a \in \mathbb{R}$ tal que a função

$$f(x) = \begin{cases} 1 + ax, & \text{se } x \leq 0, \\ x^4 + 2a, & \text{se } x > 0, \end{cases}$$

seja contínua em $x = 0$.

6) Determine $a, b \in \mathbb{R}$ tal que a função $f(x) = \begin{cases} -\sqrt{2 - x} & \text{se } x < 1, \\ ax + b & \text{se } 1 \leq x < 2, \\ |x^2 - 7x + 12| & \text{se } x \geq 2, , \end{cases}$ seja contínua.

7) Verifique que, se $x^2 \cos(x) \leq f(x) \leq x \operatorname{sen}(x)$, para todo $x \in (-\pi, \pi)$, então f é contínua em $x = 0$. O que se pode afirmar sobre a continuidade em $x = \pi/2$?

8) Dizemos que f tem uma *descontinuidade removível* no ponto $x = a$ quando existe o limite $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, mas f não é contínua ou não está definida neste ponto. Este é o caso da função $f(x) = (x^2 - 1)/(x - 1)$, que não está definida em $x = 1$, mas satisfaz

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x\to 1} (x + 1) = 2.$$

Note que podemos incluir o ponto $x = 1$ no domínio fazendo $f(1) = 2$. Com essa definição, a (nova) função f é contínua em $x = 1$.

Para cada uma das funções abaixo, determine os (possíveis) pontos de descontinuidade removível.

(a) $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x}{x + 3}$ (b) $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$ (c) $f(x) = \dfrac{5\,\mathrm{sen}(x)}{\sqrt{x}}$ (d) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^3 - 1}$

9) Lembrando que $\lim\limits_{x\to 0} \mathrm{sen}(x) = 0$ e $\lim\limits_{x\to 0} \cos(x) = 1$, verifique que $\lim\limits_{\theta\to 0} \mathrm{sen}(\theta + a) = \mathrm{sen}(a)$. Conclua daí que a função seno é contínua. (veja Texto 2)

Dica: Para a primeira parte use a fórmula $\mathrm{sen}(\theta + a) = \mathrm{sen}(\theta)\cos(a) + \mathrm{sen}(a)\cos(\theta)$

10) Use o mesmo raciocínio do exercício anterior para verificar que a função cosseno também é contínua. O que se pode dizer sobre a continuidade das demais funções trigonométricas?

11) A função *maior inteiro* é a função que associa, a cada elemento $x \in \mathbb{R}$, o valor $[[x]]$ que é o maior número inteiro que é menor ou igual a x. Por exemplo,

$$[[0,5]] = 0, \qquad [[3]] = 3, \qquad [[-1,8]] = -2.$$

(a) Calcule $[[3,7]]$, $[[-0,6]]$, $[[n]]$ com $n \in \mathbb{N}$

(b) Estude os limites laterais da função maior inteiro no ponto $x = 2$. Em seguida, decida se ela é contínua neste ponto

(c) Determine todos os pontos onde a função não é contínua

(d) Faça um esboço do gráfico da função

12) Para cada função abaixo, determine um intervalo de comprimento 1 que possua pelo menos uma raiz da função. (veja Texto 3)

(a) $f(x) = x^3 + x - 1$ (b) $g(x) = x^3 + 3x - 5$ (c) $h(x) = 1 + x\cos\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)$

13) Verifique que cada uma das equações abaixo possui pelo menos uma solução. (veja vídeo)

(a) $\mathrm{sen}(x) = x - 1$ (b) $3 - \cos(\pi x) = e^{2x}$

Dica: Observe que as soluções de $g(x) = h(x)$ são exatamente as raízes de $f(x) = g(x) - h(x)$

14) Sejam f e g funções contínuas em $[a, b]$, tais que $f(a) > g(a)$ e $f(b) < g(b)$. Mostre que a equação $f(x) = g(x)$ tem solução.

15) Dê um exemplo (que pode ser gráfico) de uma função definida em $[a, b]$ tal que $f(a) < 0 < f(b)$, mas f não possui raiz em $[a, b]$. O que se pode afirmar sobre a continuidade desta função?

RESPOSTAS

1) A função f é contínua no ponto $x = a$ se $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. Desse modo, o ponto a tem que estar no domínio de f, o limite nesse ponto deve existir e coincidir com o valor da função no ponto.

2)

3)

4) A função f não é contínua em $x = 0$, mas é contínua em $x = 1$. A função g é contínua em $x = 1$ e $x = 0$.

5) $a = 1/2$.

6) $a = 3$, $b = -4$.

7) Usando o Teorema do Confronto pode-se mostar que $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$. No ponto $x = \pi/2$ as funções que ficam por baixo e por cima de f têm limites diferentes. Logo, nada se pode concluir acerca da existência do limite $\lim_{x\to\pi/2} f(x)$.

8)
(a) descontinuidade removível em $x = -3$.
(b) não possui pois, no ponto $x = 0$, os limites laterais são distintos.
(c) descontinuidade removível em $x = 0$.
(d) descontinuidade removível em $x = 1$.

9) Para a primeira parte use a dica. Na segunda note que $\lim_{x\to a} \operatorname{sen}(x) = \lim_{\theta\to 0} \operatorname{sen}(\theta + a)$.

10) Use a fórmula $\cos(\theta + a) = \cos(\theta)\cos(a) - \operatorname{sen}(\theta)\operatorname{sen}(a)$.

11)
(a) $[[3,7]] = 3$, $[[-0,6]] = -1$ e $[[n]] = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$
(b) $\lim_{x\to 2^-} [[x]] = 1$, $\lim_{x\to 2^+} [[x]] = 2$. A função não é contínua em $x = 2$ porque não existe o limite neste ponto
(c) A função é descontínua em todos os pontos $n \in \mathbb{Z}$.

12)
(a) $f(0) = -1 < 0 < 1 = f(1)$. Como f é contínua em $[0,1]$ segue do TVI que existe $c \in [0,1]$ tal que $f(c) = 0$
(b) Uma reposta seria $[1,2]$, mas existem outras
(c) Uma reposta seria $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$, mas existem outras

13)

14) Use o TVI para a função $h(x) = f(x) - g(x)$ no intervalo $[a,b]$.

15)

Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

Cálculo 1

Lista de Exercícios – Semana 04

Temas abordados: Limites envolvendo o infinito; Assíntotas
Seções do livro: 2.4

1) Explique o que significa dizer que a reta $x = a$ é uma assíntota vertical da função f. Em seguida, considerando as funções esboçadas nos gráficos abaixo, determine as assíntotas verticais sugeridas por cada um deles.

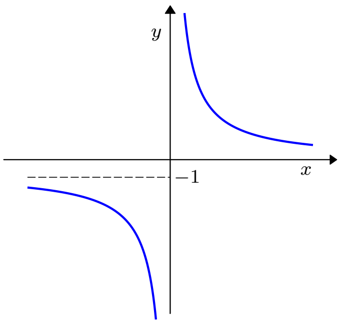


Figura 1

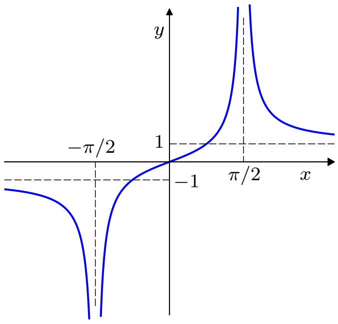


Figura 2

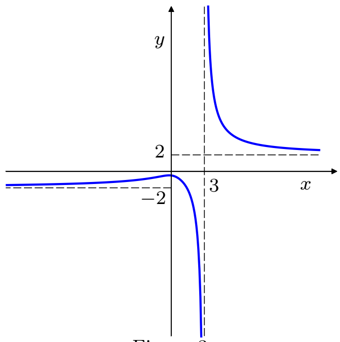


Figura 3

2) No limite $\lim_{x\to a} f(x)/g(x)$, quando o numerador se aproxima de um número diferente de zero e o denominador tende para zero com um sinal definido, temos um limite infinito. Neste caso, é necessário estudar o sinal da fração quando x está próximo de a, de modo a decidir se o limite é $+\infty$ ou $-\infty$. Por exemplo,

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2+4x-2}{1-x^3} = -\infty,$$

pois o numerador se aproxima de $1^2 + 4 \cdot 1 - 2 = 3 > 0$ e o denominador se aproxima de zero por valor negativos, pois $x > 1$ (lembre que o limite é pela direita). Assim, a fração tem sinal negativo e, em módulo, fica muito grande.

Siga este procedimento para calcular os limites abaixo. (veja vídeo)

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 3^-} \frac{2x-8}{x-3}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{1-4x}{(x-2)^2}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to (-1)^+} \frac{x^2-2x+4}{x^2+x}$ (d) $\displaystyle\lim_{x\to 2^-} \frac{\sqrt{4x+8}}{-x^2+3x-2}$

3) Calcular assíntota verticais não é o mesmo que igualar denominadores a zero! Por exemplo, o denominador da função $f(x) = (x^2-4)/(x-2)$ se anula em $x = 2$, mas

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)} = 4,$$

e portanto $x = 2$ não é assíntota vertical. Para as funções abaixo, determine os candidatos à assíntota para, em seguida, checar se cada um deles é de fato assíntota. (veja Exemplo 4 do Texto 1)

(a) $f(x) = \dfrac{3x+12}{x^2-3x-28}$ (b) $f(x) = \dfrac{x}{x^3-x}$ (c) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x}$

4) Explique o que significa dizer que a reta $y = L$ é uma assíntota horizontal da função f. Em seguida, considerando os gráficos esboçados no Exercício 1, determine as assíntotas horizontais sugeridas por cada um deles.

5) Em alguns casos, o cálculo do limite no infinito de frações pode ser feito identificando-se os termos dominantes do numerador e do denominador, e colocando-se um deles em evidência. Por exemplo,

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+4x-2}{1-x^3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3(\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}-\frac{2}{x^3})}{x^3(\frac{1}{x^3}-1)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}-\frac{2}{x^3}}{\frac{1}{x^3}-1} = \frac{0}{-1} = 0.$$

Siga este procedimento para calcular os limites abaixo. (veja vídeo)

(a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{4x+9}{2x^2-4x-1}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{4x^2-4x+8}{8x-x^2}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+4}{x-1}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{8x^3-3}{2x^3+4x-7}$ (e) $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt{x^2-2x+2}}{x+1}$ (f) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{x+\sqrt[3]{x}}{x^2+1}$

Dica: no item (e) lembre que $\sqrt{x^2} = |x|$ e proceda como neste vídeo

6) Calcule os limites abaixo.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to-1^-} \left(\frac{3}{x+1} - \frac{5}{x^2-1}\right)$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to5^-} \frac{\sqrt{25-x^2}}{5-x}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} (3x^3-4)$ (d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{5-4x}{2x-3}$

(e) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \sqrt[3]{2+\frac{3}{x}}$ (f) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \cos(x)$

(g) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\operatorname{sen}^3(x)}{5x+6}$ (h) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2(1+\cos^2(x))}{(x+\cos(x))^2}$

(i) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2-1}-x)$ (j) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x(\sqrt{x^2-1}-x)$

Dica: Se tiver dúvida nos dois últimos itens, veja o Exemplo 6 do Texto 2. Para aqueles que envolvem as funções seno e cosseno lembre que elas são periódicas e limitadas.

7) Determine todas as assíntotas das funções abaixo. (veja vídeo)

(a) $g(x) = \dfrac{2x^2+1}{2x^2-3x}$ (b) $f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2+4}}$

(c) $f(x) = \dfrac{|x-2|}{x-2}$ (d) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-4}}$

(e) $f(x) = x + \operatorname{sen}(x)$ (f) $f(x) = \begin{cases} x + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}, & \text{se } x < 0 \\ \dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2} & \text{se } x \geq 0,\ x \neq 4 \end{cases}$

Dica: se tiver dúvidas no no item (f), veja este vídeo

8) Seja $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, onde $a > 0$ e $b,\ c,\ d \in \mathbb{R}$ são dados. Calcule os limites no infinito e, em seguida, use o Teorema do Valor Intermediário para mostrar f possui pelo menos uma raíz. O que se pode dizer se $a < 0$?

9) Dizemos que uma reta $y = mx + b$ é uma assíntota do gráfico de uma função f quando

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - (mx + b)] = 0 \quad \text{ou} \quad \lim_{x\to-\infty} [f(x) - (mx + b)] = 0.$$

Quando $m = 0$, temos a assíntota horizontal $y = b$. Quando $m \neq 0$ temos uma assíntota oblíqua. Por exemplo, a reta $y = x - 4$ é uma assíntota oblíqua de $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x + 1}$, uma vez que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \left[\frac{x^2 - 3x + 2}{x + 1} - (x - 4)\right] &= \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{(x^2 - 3x + 2) - (x^2 - 3x - 4)}{x + 1}\right] \\ &= \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{6}{x + 1}\right] = 0.\end{aligned}$$

Verifique, nos itens abaixo, que a reta dada é uma assíntota da função f indicada:

(a) $y = 3x + 2$ de $f(x) = 3x + 2 + \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x}$;

(b) $y = 2x + 6$ de $f(x) = \dfrac{2x^3}{x^2 - 3x + 1}$;

(c) $y = x$ e $y = -x$ de $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

10) Para funções racionais $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ com $\operatorname{grau}(p) = 1 + \operatorname{grau}(q)$, sempre há assíntota oblíqua. Por exemplo, se $f(x) = \dfrac{x^2}{x + 1}$, então, dividindo $p(x) = x^2$ por $q(x) = x + 1$, obtemos que $f(x) = x - 1 - \dfrac{1}{x + 1}$, donde segue que a reta $y = x - 1$ é uma assíntota oblíqua para f. Determine as assíntotas oblíquas das funções racionais abaixo:

(a) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 + 1}$ (b) $f(x) = \dfrac{x^4 + 1}{x^3 + x^2}$

11) Se $y = mx + b$ é uma assíntota oblíqua de f, então

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = m \quad \text{e} \quad \lim_{x\to+\infty} [f(x) - mx] = b.$$

Logo, uma estratégia para encontrar as assíntotas é verificar se o limite $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ é finito. Em caso afirmativo, denotamos por m o valor deste limite e verificamos se o limite $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} [f(x) - mx]$ é finito. Se este também for finito, denotamos por b seu resultado e obtemos assim a assíntota $y = mx + b$. O mesmo vale quando $x \to -\infty$. Utilize este procedimento para calcular as assíntotas das funções abaixo:

(a) $f(x) = \sqrt{x^2 + 3}$ (b) $f(x) = \sqrt[3]{8x^3 - 5x}$ (c) $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{3x - 1}$

RESPOSTAS

1) A reta $x = a$ é uma assíntota vertical de f se qualquer um dos limites laterais neste ponto é igual a $+\infty$ ou $-\infty$.

Os gráficos esboçados, se representam a função $f(x)$, sugerem as seguintes assíntotas verticais:

- Gráfico 1: a reta $x = 0$ é uma assíntota vertical, pois $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$, ou porque $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$.
- Gráfico 2: as retas $x = -\pi/2$ e $x = \pi/2$ são assíntota verticais.
- Gráfico 3: a reta $x = 3$ é uma assíntota vertical.

2) (a) $+\infty$ (b) $-\infty$ (c) $-\infty$ (d) $+\infty$

3) (a) os candidatos são $x = 7$ e $x = -4$. Temos que $\lim_{x\to -4} f(x) = -3/11$, e portanto $x = -4$ não é assíntota. No outro ponto temos $\lim_{x\to 7^-} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to 7^+} f(x) = +\infty$, e portanto $x = 7$ é assíntota vertical.

(b) os candidatos são $x = 0$, $x = -1$ e $x = 1$. A primeira reta não é assíntota e as duas últimas são.

(c) o candidato é $x = 0$, que não é assíntota pois $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}(x)/x = 1$.

4) A reta $y = L$ é uma assíntota horizontal da função f quando $\lim_{x\to -\infty} f(x) = L$ ou $\lim_{x\to +\infty} f(x) = L$.

Os gráficos esboçados, se representam a função $f(x)$, sugerem as seguintes assíntotas horizontais:

- Gráfico 1: as retas $y = 0$ e $y = -1$ são assíntotas horizontais, pois $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to -\infty} f(x) = -1$.
- Gráfico 2: as retas $y = -1$ e $y = 1$ são assíntotas horizontais, pois $\lim_{x\to \pm\infty} f(x) = \pm 1$.
- Gráfico 3: as retas $y = -2$ e $y = 2$ são assíntotas horizontais.

5) (a) 0 (b) -4 (c) $+\infty$ (d) 4 (e) $\begin{cases} 1 & \text{se } x \to +\infty \\ -1 & \text{se } x \to -\infty \end{cases}$ (f) 0

6)

(a) $-\infty$	(b) $+\infty$	(c) $-\infty$	(d) -2	(e) $\sqrt[3]{2}$
(f) não existe	(g) $1/5$	(h) não existe	(i) 0	(j) $-1/2$

7) (a) Verticais: $x = 0$ e $x = 3/2$, Horizontais: $y = 1$

(b) Verticais: não existem, Horizontais: $y = 2$ e $y = -2$

(c) Verticais: não existem, Horizontais: $y = -1$ e $y = 1$

(d) Verticais: $x = -2$ e $x = 2$, Horizontais: $y = -1$ e $y = 1$

(e) Verticais: não existem, Horizontais: não existem

(f) Verticais: $x = 0$, Horizontais: não existem

8) Os limites são $-\infty$ e $+\infty$, respectivamente. Deste modo, podemos obter $a < b$ tais que $f(a) < 0 < f(b)$. O TVI implica que f deve se anular em algum ponto do intervalo (a, b).

9) –

10) (a) $y = x$ (b) $y = x - 1$.

11) (a) $y = x$ e $y = -x$ (b) $y = 2x$ (c) $y = \frac{x}{3} + \frac{1}{9}$.

Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

Cálculo 1

Lista de Exercícios – Semana 05

Temas abordados: Retas Tangentes; Derivada e suas regras básicas

Seções do livro: 2.7; 3.1 a 3.3

1) Explique o que significa dizer que uma função é derivável no ponto $x = a$. Qual é a interpretação geométrica do número $f'(a)$, quando ele existe? (veja vídeo)

2) Verifique que se $f(x)$ é derivável em $x = a$, então f é contínua neste ponto. Dê um exemplo mostrando que f pode ser contínua em um ponto sem ser derivável nele. (veja Texto 1)

3) Usando a definição, calcule a derivada de cada uma das funções abaixo. (veja Texto 2) Em seguida, determine a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(a, f(a))$, para o valor de a indicado. (veja vídeo)

(a) $f(x) = x^2 - x + 1, \quad a = 1$ (b) $f(x) = 1/x, \quad a = -2$

(c) $f(x) = \sqrt{x}, \quad a = 4$ (d) $f(x) = 1/\sqrt{x}, \quad a = 1$

4) Quantas retas tangentes ao gráfico de $f(x) = x^3 + 3x$ são paralelas à reta $y = 6x + 1$? Determine a equação dessas retas tangentes. (veja vídeo)

5) Dizemos que a função f possui *derivada lateral à esquerda no ponto* $x = a$ quando existe o limite

$$f'_-(a) = \lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

De maneira análoga definimos *derivada lateral à direita* $f'_+(a)$. Mostre que f é derivável no ponto $x = a$ se, e somente se, as derivadas laterais existem e são iguais.

6) Para cada uma das funções abaixo, determine os valores de a e b de modo que f seja derivável. (veja vídeo)

(a) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x < 1, \\ ax + b & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$ (b) $f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{se } x < 1, \\ -x^2 + 5x & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$

7) Calcule a derivada de cada uma das funções abaixo. (veja Texto 3)

(a) $f(x) = (3x^4 - 7x^2)(5x - 11)$ (b) $f(x) = \dfrac{2x+3}{x^2 - 1}$

(c) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x^2 - 2x}$ (d) $f(x) = \sqrt[3]{x} + \dfrac{4}{x}$

(e) $f(x) = \left(4x^3 - \dfrac{5}{x^3} + \sqrt{x}\right)\left(\dfrac{3}{x} - 4x + 6\right)$ (f) $f(x) = x|x|$

8) Supondo que a posição de uma partícula é dada por $s = \sqrt{t}$, resolva os itens a seguir.

(a) Calcule a velocidade média da partícula entre os instantes $t = 9$ e $t = 16$.

(b) Calcule a velocidade instantânea da partícula quando $t = 9$.

9) Calcule a taxa de variação do volume de um balão esférico em relação ao seu raio, quando o raio do balão é igual a 5 cm.

10) Suponha que, após ser lançado para cima, a posição de um projétil é dada por $s(t) = 80t - 5t^2$, até o instante t_0 em que ele retorna ao solo.

(a) Calcule o tempo t_0 necessário para que o projétil retorne ao solo.

(b) Determine a velocidade $v(t)$ do projétil, para $t \in (0, t_0)$. O que acontece com a velocidade $v(t)$ para $t > t_0$?

(c) Determine a altura máxima atingida pelo projétil e o tempo necessário para que ele atinja esta altura. O que ocorre com a velocidade neste instante?

11) No instante $t > 0$ horas um veículo está $16\sqrt{t^3} - 24t + 16$ quilômetros à leste de um ponto de referência na estrada.

(a) Qual a velocidade no instante $t = 1/4$? Nesse instante, o veículo está se afastando ou se aproximando do ponto de referência?

(b) Onde está o veículo quanto a velocidade é zero?

12) Como a derivada de uma função é a sua taxa de variação, é de se esperar o seguinte: se uma função f tem derivada positiva (negativa) em um intervalo $I \subset \mathbb{R}$, então ele é crescente (decrescente) neste intervalo. Vamos usar este fato neste exercício.

Supondo que o lucro de uma empresa, em centenas de milhares de reais, seja dado por

$$L(x) = \frac{6x}{3x^2 + 27}, \qquad x \geq 0,$$

em que x indica a quantidade de milhares de unidades vendidas, resolva os itens abaixo. (veja vídeo)

(a) Calcule a taxa de variação do lucro.

(b) Após determinar os intervalos onde $L'(x)$ é positiva (negativa), decida em quais intervalos $L(x)$ é crescente (decrescente).

(c) Calcule o limite $\lim\limits_{t \to +\infty} L(x)$.

(d) Usando os dois itens acima, faça um esboço do gráfico de $L(x)$.

(e) Qual deve ser a quantidade de itens vendidos para que o lucro seja máximo? O que acontece com a derivada no ponto onde isto ocorre?

RESPOSTAS

1) A derivada de uma função f no ponto a é o limite
$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$
Geometricamente, a derivada $f'(a)$ é a inclinação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(a, f(a))$.

2) Para a demonstração basta fazer $x \to a$ na igualdade abaixo
$$f(x)-f(a) = \frac{f(x)-f(a)}{(x-a)}(x-a).$$

3) (a) $f'(x) = 2x-1$. A reta tangente no ponto $(1, f(1))$ é $y = x$.
(b) $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$. A reta tangente no ponto $(-2, f(-2))$ é $y = -\frac{1}{4}x - 1$.
(c) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. A reta tangente no ponto $(4, f(4))$ é $y = \frac{1}{4}x + 1$.
(d) $f'(x) = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}$. A reta tangente no ponto $(1, f(1))$ é $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$.

4) duas retas, com equações $y = 6x-2$ e $y = 6x+2$

5)

6) (a) $a = 2$ e $b = -1$ (b) $a = 3$ e $b = 1$

7) (a) $f'(x) = (12x^3 - 14x)(5x-11) + 5(3x^4 - 7x^2)$.
(b) $f'(x) = \dfrac{-2x^2-6x-2}{(x^2-1)^2}$.
(c) $f'(x) = \dfrac{-3x^2+2x}{2\sqrt{x}(x^2-2x)^2}$.
(d) $f'(x) = \dfrac{1}{3x^{2/3}} - \dfrac{4}{x^2}$.
(e) $f'(x) = \left(12x^2 + 15x^{-4} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\left(\frac{3}{x} - 4x + 6\right) + (4x^3 - 5x^{-3} + \sqrt{x})(-3x^{-2} - 4)$
(f) $f'(x) = 2|x|$

8) (a) 1/7 m/s (b) 1/6 m/s

9) 100π

10) (a) $t_0 = 16$
(b) A velocidade vale $v(t) = 80 - 10t$, para $t \in (0, t_0)$. Após o instante t_0 a velocidade é nula.
(c) 320 metros no instante $t = 8$ segundos, que é o instante em que a velocidade se anula pela primeira vez.

11) (a) Se aproximando a 12 km/h (b) 8 km a leste do ponto de referência

12) (a) $L'(x) = (-18x^2 + 162)/(3x^2 + 27)^2$.
(b) $C(x)$ é crescente no intervalo $(0, 3)$ e decrescente no intervalo $(3, +\infty)$.
(c) o limite vale zero.
(d)
(e) O lucro é máximo quando $x = 3$, que ó ponto onde a derivada se anula. Logo, para maximizar o lucro devem ser vendidas 3 mil unidades. Neste caso, o lucro é aproximandamente R\$ 33.333, 33.

Fonte: Repositório Institucional da UnB.