UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

INSTITUTO DE FÍSICA

Tese de Doutorado

Configurações de Corda Cósmica em Uma Teoria Alternativa da Gravitação

Wesley José da Rocha

Orientadores: Profa. Maria Emília Xavier Guimarães
Prof. Andrey Alexandrovich Bytsenko

Brasília, DF, Julho de 2009

“Um pouco de ciência nos afasta de Deus. Muito, nos aproxima.”

Louis Pasteur

“Não se consegue multiplicar antes de saber dividir.”

A Deus, a razão de tudo

A Gabriela, minha filha

A Leonora, minha mulher, a quem eu amo e em cuja sabedoria aplaco minha arrogância técnica

Aos meus pais, por tudo que sou

Aos meus irmãos

Ao Rock and roll

Agradecimentos

Aos professores Maria Emília Xavier Guimarães e Andrey Alexandrovich Bytsenko, parceiros neste trabalho de descobertas

Ao professor André Luiz Naves de Oliveira, pela colaboração e pelas discussões no decorrer do trabalho

Aos professores J. A. Helayel-Neto, Vanessa C. de Andrade, Ademir E. de Santana e Daniel Müller, pelo incentivo e pela cordialidade

Aos professores do Instituto de Física da Universidade de Brasília

Aos funcionários do Instituto de Física da Universidade de Brasília

Sumário

Resumo

Neste trabalho, obtemos uma solução exata para a métrica exterior de uma corda cósmica local, neutra e retilínea, numa teoria alternativa da gravitação, a teoria NDL. A propriedade fundamental dessa teoria, e que a distingue da relatividade geral, é resumida na hipótese de que *a interação gravidade−gravidade não ocorre do mesmo modo que a interação matéria−gravidade.* A teoria NDL viola, portanto, o princípio da equivalência forte.

A solução é dada por uma família de parâmetros que pode ser interpretada como se a métrica adquirisse termos do tipo corrente, surgidos por causa da não-linearidade da teoria.

Abstract

In this work, we derive an exact solution for the exterior metric of a local cosmic string, neutral and rectilinear, in an alternative gravitation theory, the NDL theory. The fundamental property of that theory, which differentiates it from the general relativity theory, is summed up in the hypothesis that the gravity-gravity interaction does not occur the same way the matter-gravity interaction does. Therefore the NDL theory violates the strong equivalence principle.

The solution is given by a family of parameters that may be interpreted as if the metric were in current-like terms, which come from the theory's nonlinearity.

Preâmbulo

Entrou em vigor no início deste ano uma nova formulação da ortografia da Língua Portuguesa. Esta tese, no entanto, encontra-se nos moldes antigos. Primeiro, porque a tese começou a ser escrita antes da reforma. Segundo, porque tanto o autor quanto seus orientadores ainda trazem dúvidas quanto à correta aplicação das novas regras. Assim, pedimos − autor e orientadores − a compreensão e a complacência dos leitores.

Introdução

Um dos programas na linha de frente em teoria quântica de campos é o que busca uma teoria que unifique as teorias da gravitação e quântica. Essa busca, até o momento, foi bem sucedida à "tree-level", ou seja, em aproximação de 1-loop, mas os esforços para encontrar uma teoria exata continuam.

Os mais comemorados candidatos na literatura − as teorias de supercordas, as teorias-M e a supergravidade − prevêem que a quantização exige dimensões extras. Essas teorias, quando reduzidas a sua forma efetiva em quatro dimensões, devem englobar a relatividade geral como limite assintótico. Por não ser unívoco o processo de compactificação ou de redução dimensional, existem muitas teorias efetivas na literatura e, nesta tese, escolhemos uma delas − a teoria NDL −, com o objetivo de testá-la. O estudo aqui desenvolvido, deve-se ser dito, não é nem pretende ser conclusivo, pois demandariam comparações com observações de satélites, dados a que não temos, por enquanto, acesso.

Embora a maioria dos físicos acredite, por exemplo, que a observação de ondas gravitacionais confirmará as predições da relatividade geral a esse respeito, não se deve esquecer que essa é uma expectativa baseada apenas em pré-julgamentos. O grande sucesso da relatividade geral, comprovado em muitos experimentos, é o que faz crer que deverá ser assim também no caso das ondas gravitacionais. Entretanto, a relatividade geral não estará destruída caso as observações das ondas gravitacionais discordem do que ela prevê, e a grande crença de que ondas gravitacionais não tardarão a ser detectadas torna a época em que vivemos adequada a uma revisão dos fenômenos gravitacionais.

O princípio da equivalência, a garantia de que qualquer tipo de matéria interage do mesmo modo com o campo gravitacional, deu a Einstein a possibilidade de tratar o fenômeno gravitacional como uma modificação da geometria do espaço-tempo. Mas esse comportamento "universal" ocorreria também no caso da interação da gravidade com ela mesma? Por meio de uma hipótese implícita, a relatividade geral responde afirmativamente a essa questão [9, 53, 57]. O fato de a gravidade conter energia como qualquer outro campo é o que fortalece a crença que valida uma extrapolação para incluir a auto-interação, apesar de não existir nenhuma evidência observacional que sustente essa atitude.

Foi essa hipótese, ainda hoje distante de qualquer sustentação observacional, que levou ao mais notável resultado da relatividade geral: os processos gravitacionais nada mais são do que uma modificação universal da geometria do espaço-tempo. Nisso, resume-se toda a beleza da relatividade geral: a componente da métrica g_{00} representa o potencial gravitacional. Portanto, curvatura implica presença de matéria e vice-versa, e o Lema de Gauss [54] ganha uma dimensão nunca imaginada.

Entretanto, quando se pretende que a observação seja o guia inseparável no estudo da natureza, deve-se deixar claro que:

- No caso da interação matéria−gravidade, o esquema de geometrização da gravidade fornecido pela relatividade geral parece ser um bom procedimento.

- Não há evidência observacional que garanta uma descrição da interação gravidade−gravidade nos moldes da interação matéria−gravidade.

Portanto, quando se busca não fugir do tradicional método científico de submeter as teorias a observações, deve-se notar que a modificação universal da geometria proposta pela relatividade geral é na verdade uma extrapolação, ainda não confirmada por experimentos. Conseqüentemente, com relação à interação gravidade−gravidade é preciso levar em conta duas alternativas mutuamente excludentes:

- A gravidade acopla-se a ela mesma como qualquer outra forma de energia.

- A gravidade acopla-se a ela mesma de um modo distinto do que ocorre entre ela e as outras formas de energia.

No primeiro caso, a proposta da relatividade geral − a modificação universal da geometria − torna-se um cenário natural. Apesar disso, a ausência de evidência experimental exige que a questão seja resolvida ou por argumentos teóricos ou por algum tipo de imposição adicional sobre o mecanismo de interação. A hipótese de Einstein que considerou a interação gravidade−gravidade em pé de igualdade com a interação matéria−gravidade pareceu ser a mais natural, mas nos anos iniciais da teoria a inexistência de observações adiou a decisão. Mais tarde, na década de 1950, a descoberta de um modo de tratar a gravidade em termos de uma teoria de campo [3] deixou a hipótese de Einstein menos questionável.

Neste trabalho, mostra-se um modo alternativo de gerar uma teoria de campo da gravidade, a teoria NDL − assim chamada por causa dos nomes do autores: M. Novello, V. A. De Lorenci e Luciane R. de Freitas [1]. A propriedade fundamental, base da teoria NDL e que a distingue da relatividade geral, é resumida nesta hipótese: *a universalidade da interação* *matéria−gravidade é admitida, mas a interação gravidade−gravidade ocorre de maneira distinta.* A mais importante conseqüência da teoria é sua predição acerca da velocidade de propagação de ondas gravitacionais, distinta da velocidade prevista pela relatividade geral.

Isso mostra que, com relação às ondas gravitacionais, é um prejuízo teórico admitir que a relatividade geral já resolveu a questão. Não se chegará à solução antes que se consiga observar tais ondas.

Na teoria NDL, as ondas gravitacionais se propagam numa geometria efetiva que não é a geometria onde a matéria se propaga. Pode-se então perguntar: qual é a verdadeira geometria do espaço-tempo? A resposta: depende da instrumentação que se usa para observá-la. Com exceção da energia gravitacional, todas as formas de energia medem a mesma modificação do espaço-tempo curvo. Já as ondas gravitacionais se comportam como se elas estivessem mergulhadas numa outra geometria.

Um exemplo simples de uma teoria que mostra essas idéias é tomado como modelo. É uma teoria não-linear para um campo de spin 1, proposta por Born [10, 11, 12]. O desenvolvimento da teoria NDL segue um caminho similar, obviamente no caso do campo de spin 2, e ficará claro que, enquanto na teoria de Born a não-linearidade é uma possibilidade, no caso do campo de spin 2 da teria NDL a não-linearidade é obrigatória.

O objetivo principal aqui é o de resolver as equações de campo da teoria NDL para uma configuração que caracteriza a existência de cordas cósmicas locais. As eventuais diferenças entre os resultados deste estudo e os correspondentes da relatividade geral − elas devem, obviamente, existir − é que possibilitarão, num futuro próximo, distinguir do ponto de vista observacional uma teoria da outra.

Esta tese apresenta-se da seguinte forma: nos capítulos 1 e 2, fazemos uma revisão da teoria NDL e fornecemos um exemplo de solução para uma métrica estática e de simetria esférica nessa teoria; o capítulo 3 traz uma revisão das soluções do tipo vórtices (cordas cósmicas) e de outros defeitos topológicos em teoria de campos; no capítulo 4, finalmente, tratamos das configurações do tipo vórtices na teoria NDL; apresentamos no capítulo 5 nossas conclusões.

Capítulo 1

A teoria NDL

O princípio da equivalência é um dos pilares da relatividade geral, e uma medida de sua importância para a teoria de Einstein é dada pelo fato de esse princípio ocupar o centro da idéia de espaço-tempo curvo [54]. Com mais cuidado, entretanto, deve-se fazer a distinção entre o princípio da equivalência fraco e o princípio da equivalência forte. Resumidamente, o primeiro deles garante que $-$ com exceção do campo gravitacional $-$ todos os campos de matéria interagem com a gravidade do mesmo modo (mecanismo chamado acoplamento universal); já o princípio da equivalência forte não exclui nenhum campo, ou seja, ele enuncia que todos os campos $-$ inclusive o gravitacional $-$ interagem com a gravidade do mesmo modo.

Mas não há evidência que sustente o princípio da equivalência forte, ou seja, não se sabe de que maneira a gravidade se acopla a ela mesma, e é precisamente essa questão que é explorada pela teoria NDL [1]. A NDL é uma teoria do campo gravitacional, no espírito das teorias de Feynman [3] e Deser [4], na qual o princípio da equivalência forte é violado: a gravidade não se acopla a ela mesma do modo como ocorre entre ela e os outros campos.

1.1 Definições e notações

A fim de exibir a covariância geral da teoria, a métrica auxiliar de Minkowski $\gamma_{\mu\nu}$ é escrita num sistema de coordenadas arbitrário, com a derivada covariante correspondente dada por

$$V_{\mu;\nu} = V_{\mu,\nu} - \Delta^{\alpha}_{\mu\nu} V_{\alpha}, \tag{1.1}$$

em que

$$\Delta^{\alpha}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\gamma^{\alpha\beta}\left(\gamma_{\beta\mu,\nu} + \gamma_{\beta\nu,\mu} - \gamma_{\mu\nu,\beta}\right). \tag{1.2}$$

O tensor de curvatura associado é identicamente nulo:

$$R_{\alpha\beta\mu\nu}\left(\gamma_{\varepsilon\lambda}\right) = 0. \tag{1.3}$$

Define-se o tensor $F_{\alpha\mu\nu}$, chamado campo gravitacional e descrito em termos da variável simétrica $\varphi_{\mu\nu}$ (tratada como o potencial), por

$$F_{\alpha\beta\mu} = \frac{1}{2}\left(\varphi_{\mu[\alpha;\beta]} + F_{[\alpha}\gamma_{\beta]\mu}\right), \tag{1.4}$$

em que o símbolo de anti-simetrização $[\quad]$ é usado como em

$$[A, B] \equiv AB - BA. \tag{1.5}$$

Para a simetrização, será usado o símbolo $(\quad)$:

$$(A, B) \equiv AB + BA. \tag{1.6}$$

O traço F_α é tal que

$$
\begin{aligned}
F_\alpha &\equiv F_{\alpha\mu\nu}\gamma^{\mu\nu} \\
&= \frac{1}{2}\left(\varphi_{\nu[\alpha;\mu]} + F_{[\alpha}\gamma_{\mu]\nu}\right)\gamma^{\mu\nu} \\
&= \frac{1}{2}\left(\varphi_{\nu\alpha;\mu} - \varphi_{\nu\mu;\alpha} + F_\alpha\gamma_{\mu\nu} - F_\mu\gamma_{\alpha\nu}\right)\gamma^{\mu\nu} \\
&= \frac{1}{2}\left(\varphi_{\nu\alpha;\mu}\gamma^{\mu\nu} - \varphi_{\nu\mu;\alpha}\gamma^{\mu\nu} + F_\alpha\gamma_{\mu\nu}\gamma^{\mu\nu} - F_\mu\gamma_{\alpha\nu}\gamma^{\mu\nu}\right)\gamma^{\mu\nu} \\
&= \frac{1}{2}\left(\varphi_{\nu\alpha;\mu}\gamma^{\mu\nu} - \varphi_{,\alpha} + 4F_\alpha - F_\mu\delta^\mu_\alpha\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\varphi_{\alpha\nu;\mu}\gamma^{\mu\nu} - \varphi_{,\alpha} + 3F_\alpha\right) \\
&= \varphi_{,\alpha} - \varphi_{\alpha\mu;\nu}\gamma^{\mu\nu}.
\end{aligned}
\tag{1.7}
$$

A quantidade $F_{\alpha\beta\mu}$ é anti-simétrica nos dois primeiros índices, ou seja,

$$F_{\alpha\mu\nu} + F_{\mu\alpha\nu} = 0, \tag{1.8}$$

pois isso segue imediatamente da definição:

$$
\begin{aligned}
F_{\alpha\mu\nu} + F_{\mu\alpha\nu} &= \frac{1}{2}\left(\varphi_{\nu\alpha;\mu} - \varphi_{\nu\mu;\alpha} + F_\alpha\gamma_{\mu\nu} - F_\mu\gamma_{\alpha\nu}\right) \\
&+ \frac{1}{2}\left(\varphi_{\nu\mu;\alpha} - \varphi_{\nu\alpha;\mu} + F_\mu\gamma_{\alpha\nu} - F_\alpha\gamma_{\mu\nu}\right) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Além disso, vale a identidade cíclica,

$$F_{\alpha\mu\nu} + F_{\mu\nu\alpha} + F_{\nu\alpha\mu} = 0. \tag{1.9}$$

De fato,

$$\begin{aligned}
F_{\alpha\mu\nu} + F_{\mu\nu\alpha} + F_{\nu\alpha\mu} &= \frac{1}{2}\left(\varphi_{\nu\alpha;\mu} - \varphi_{\nu\mu;\alpha} + F_\alpha\gamma_{\mu\nu} - F_\mu\gamma_{\alpha\nu}\right) \\
&+ \frac{1}{2}\left(\varphi_{\alpha\mu;\nu} - \varphi_{\alpha\nu;\mu} + F_\mu\gamma_{\nu\alpha} - F_\nu\gamma_{\mu\alpha}\right) \\
&+ \frac{1}{2}\left(\varphi_{\mu\nu;\alpha} - \varphi_{\mu\alpha;\nu} + F_\nu\gamma_{\alpha\mu} - F_\alpha\gamma_{\nu\mu}\right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

A constante de Einstein k é dada em termos da constante de Newton G_N e da velocidade da luz c:

$$k = \frac{8\pi G_N}{c^4}. \tag{1.10}$$

1.2 Do acoplamento universal à geometrização de Einstein

Durante a década de 1960, Feynman buscou quantizar a gravidade, ou seja, ele tentou forjar uma síntese da relatividade geral e dos princípios da mecânica quântica. Sua abordagem da relatividade geral, naquela época, baseou-se no desejo que ele tinha de chegar do modo mais direto possível à teoria quântica da gravitação. Com essa proposta, Feynman encarou as sutilezas geométricas como mera distração. De fato, a abordagem geométrica convencional obscureceria a relação entre a gravitação e a eletrodinâmica.

Chega-se à eletrodinâmica clássica de Maxwell a partir da observação de que o fóton é uma partícula sem massa e de spin 1. A forma de uma teoria quântica para uma partícula sem massa e de spin 1 acoplada à matéria carregada é fortemente restringida por princípios fundamentais, como a invariância de Lorentz e a conservação da probabilidade. A versão autoconsistente da teoria quântica disso resultante, a eletrodinâmica quântica, é governada no limite clássico pelas equações de campo de Maxwell.

Encorajado por essa analogia, Feynman viu a teoria quântica da gravitação como "apenas outra teoria quântica de campo". Então, ele se pergunta se seria possível encontrar uma teoria quântica de campo que descrevesse um partícula sem massa e de spin 2, o gráviton, acoplada à matéria, no espaço-tempo de Minkowski. O limite clássico dessa teoria seria governado, obviamente, pelas equações de campo de Einstein. Assim, Feynamn se preocupa sobretudo com os aspectos da teoria quântica responsáveis pela forma que essa teoria adquiriria no limite clássico. O tensor de curvatura, por exemplo, é introduzido inicialmente apenas como dispositivo para a construção de termos, na ação gravitacional, com as desejadas propriedades de invariância. Só um pouco mais adiante, é que a curvatura seria interpretada em termos do transporte paralelo de um vetor tangente, numa variedade curva.

Um aspecto crucial da teoria quântica desejada é que o gráviton possui apenas dois estados de helicidade. Portanto, o campo gravitacional clássico também deve possuir apenas dois graus dinâmicos de liberdade. Porém, o campo clássico que corresponde à partícula de spin 2 é um tensor simétrico $h_{\mu\nu}$ com dez componentes. Como quatro dessas componentes, $h_{0\mu}$, não são dinâmicas, restam seis componentes dinâmicas h_{ij} para descrever os dois estados de helicidade. É essa incompatibilidade entre o número de estados da partícula e o número de componentes do campo que causa sérias restrições à teoria quântica da gravitação.

Para contornar a incompatibilidade, é necessário que a teoria incorpore uma redundância de modo que diferentes configurações do campo clássico descrevam um mesmo estado. Em outras palavras, a teoria deve ser uma teoria de calibre. Para o campo sem massa e de spin 2, o princípio de calibre que se exige é o da covariância geral, que leva à teoria de Einstein.

Feynman constrói uma ação quadrática para o campo sem masssa de spin 2, com acoplamento linear ao tensor de energia−momento. Depois de analisar a invariância de calibre da resultante equação linear de campo, ele nota que se pode inferir o auto-acoplamento não-linear do campo quando se exige a invariância de calibre das amplitudes de espalhamento. Porém, Feynman não executa essa tarefa, apenas comenta que ela deve ser muito árdua. É por outro método, baseado na condição de consistência, que ele chega à equação de campo clássica não-linear, ou seja, à equação de Einstein. Mas, já que a equação linear de campo (campo livre sem massa e de spin 2) possui necessariamente uma invariância de calibre − para remover os estados de helicidade indesejados −, então modificações genéricas nessa equação (como as que ocorrem quando o campo de spin 2 é acoplado à matéria) não garantem solução. Os novos termos na equação modificada devem respeitar a condição de consistência, que é, essencialmente, a exigência de que esses termos não violem a simetria de calibre. Essa condição de consistência é suficiente para obter a equação não-linear de campo.

Com mais detalhes, o problema era este: encontrar uma ação $F[h]$ para o campo $h_{\mu\nu}$, de spin 2, tal que a equação do campo gravitacional

$$\frac{\delta F}{\delta h_{\mu\nu}} = T^{\mu\nu} \tag{1.11}$$

fosse consistente com a equação do movimento para a matéria ($T^{\mu\nu}$ é o tensor de energia−momento da matéria). Feynmam encontrou uma expressão quadrática para F, que produz uma equação linear de campo, consistente enquanto o tensor $T^{\mu\nu}$ é conservado, ou seja, enquanto $T^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0$. A dificuldade é que, uma vez que o campo $h_{\mu\nu}$ se acopla à matéria, a equação do movimento para a matéria é modificada por forças gravitacionais, e $T^{\mu\nu}{}_{,\nu}$ não mais se anula. Isso significa que a equação de campo para $h_{\mu\nu}$ e a equação do movimento para a matéria não são compatíveis entre si, ou seja, não possuem soluções simultâneas. É esse o problema de consistência da teoria linear.

Depois de exigir que não se perdesse a compatibilidade entre a equação de campo para $h_{\mu\nu}$ e a equação do movimento para a matéria, Feynman infere que correções não-lineares de ordem mais elevada deveriam ser acrescentadas à ação $F[h]$. A condição de consitência pode ser expressa na forma de um princípio de invariância, ao qual a ação obedece, e que é exatamente a invariância sob transformações gerais de coordenadas. A partir daí, a análise de Feynman segue padrões convencionais e leva a esta conclusão: a mais geral e consistente equação de campo que envolve no máximo duas derivadas é a equação de Einstein, com uma constante cosmológica.

As correções não-lineares resultantes possuem uma interessante interpretação física. Sem elas, a gravidade não se auto-acoplaria. Com as correções incluídas, a fonte do campo gravitacional é o tensor de energia$-$momento total, ou seja, o tensor que leva em conta também a contribuição do próprio campo gravitacional. Isso revela, com outras palavras, que o princípio da equivalência (forte) está embutido na teoria.

A equação de campo para o campo livre, sem massa e de spin 2 foi obtida, em 1939, por Fierz e Pauli [21]. Depois disso, a idéia de tratar a gravidade de Einstein como uma teoria de um campo de spin 2 num espaço plano tem, ocasionalmente, aparecido na literatura. A primeira tentativa publicada de obter o acoplamento não-linear na teoria de Einstein foi a de Suraj N. Gupta, em 1954 [27]. Gupta notou que a ação da teoria deveria obedecer a uma condição de consistência não trivial, condição a que a relatividade geral obedece. Não forneceu, entretanto, nenhum argumento que garantisse a unicidade da equação de campo de Einstein. Grosso modo, o argumento de Gupta é como segue.

Para o campo livre, sem massa e de spin 2, a equação de Fierz (linear) é

$$G_{\mu\nu}^{(L)} = -kT_{\mu\nu}, \tag{1.12}$$

em que a quantidade

$$G_{\mu\nu}^{(L)} = -kT_{\mu\nu} \equiv \Box\phi_{\mu\nu} - \phi^{\alpha}{}_{\mu;\alpha\nu} - \phi^{\alpha}{}_{\nu;\alpha\mu} + \phi^{\alpha}{}_{\alpha;\mu\nu} - \gamma_{\mu\nu}\left(\Box\phi^{\alpha}{}_{\alpha} - \phi^{\alpha\beta}{}_{;\alpha\beta}\right) \tag{1.13}$$

possui o divergente nulo. Então, por compatibilidade, também deve ser nulo o divergente do tensor de energia−momento da matéria $T_{\mu\nu}$. Mas, já que o campo gravitacional contribui com sua própria energia para o balanço da lei da conservação, o tensor $T_{\mu\nu}$ não pode ser separadamente conservado. É nesse ponto, precisamente, que a hipótese que faz a interação gravidade−gravidade seguir o mesmo comportamento da interação matéria−gravidade atua como guia na escolha da contribuição gravitacional como fonte de $G_{\mu\nu}^{(L)}$. Isso significa que se deve adicionar ao tensor $T_{\mu\nu}$ o correspondente tensor de energia−momento do campo gravitacional.

A idéia é proceder passo a passo. Inicialmente, adiciona-se ao membro direito da equação (1.13) o tensor $\mathcal{T}_{\mu\nu}^{(1)}$, ou seja, o tensor de energia−momento da equação linear da gravidade. Como conseqüência, deve-se adicionar à lagrangiana original um termo de ordem mais alta que produzirá, depois da variação, o tensor $\mathcal{T}_{\mu\nu}^{(1)}$. Mas isso gera uma nova condição de compatibilidade, que é resolvida quando se adiciona, novamente ao membro direito de (1.13), um termo de uma ordem mais alta, $\mathcal{T}_{\mu\nu}^{(2)}$. Mais uma vez, porém, surge a condição que exige outro termo na lagrangiana. Portanto, esse processo prossegue indefinidamente, pois em cada passo deve-se acrescentar um termo à lagrangiana de modo a reaver a compatibilidade perdida no passo imediatamente anterior.

Esse procedimento geraria uma série infinita cuja soma produziria as equações de Einstein. Gupta esboçou essas idéias, mas não as levou adiante, ou seja, ele não executou os cálculos que as sustentassem. A primeira versão completa de seus argumentos foi publicada por S. Deser, em 1970 [4].

Antes de Gupta, Robert Kraichnan estudara o mesmo problema de obter a relatividade geral como uma consistente teoria de um campo sem massa e de spin 2, num espaço plano. Ele descreve os resultados em seu trabalho de fim de curso no MIT, em 1946−1947 [32], e continua a desenvolver essa proposta em 1949−1950. Kraichnan não publicou nenhum resultado até 1955 [33, 34], quando então conseguiu uma versão que o encorajaria. Diferentemente de Gupta, ele não admitiu que a gravidade se acopla ao tensor de energia−momento total. Em vez disso, como Feynman, obteve o resultado como uma conseqüência da consistência das equações de campo.

Uma análise mais geral da condição de consistência da equação de campo, executada mais tarde por Robert M. Wald [52], leva a conclusões análogas àquelas de Feynman e Kraichnan.

Uma abordagem do problema de deduzir a forma da interação gravitacional, bastante diferente do que era proposto, foi desenvolvida por S. Weinberg [55, 56]. Por meio de considerações acerca das propriedades das amplitudes do espalhamento gráviton−gráviton, Weinberg mostrou que a teoria da interação de uma partícula sem massa e de spin 2 só pode ser Lorentz-invariante se o acoplamento entre a partícula e a matéria for o acoplamento universal. Em outras palavras, apenas se o princípio da equivalência estiver presente. Num sentido, o argumento de Weinberg é o mais forte de todos, pois a propriedade que garante o acoplamento entre o gráviton e o tensor de energia−momento decorre de outro princípio: o estabelecimento do princípio da equivalência assegura a obtenção da teoria de Einstein.

A teoria NDL reanalisa essa descrição tradicional, a gravidade como uma teoria de campo, e mostra que o procedimento que leva à compatibilidade não é único.

1.2.1 A teoria linear de Fierz revisitada

Como motivação para o desenvolvimento da teoria NDL (teoria não-linear), neste item mostra-se que a teoria linear de campo de spin 2 pode ser descrita por meio dos invariantes do campo gravitacional $F_{\alpha\mu\nu}$. Os dois únicos invariantes do campo são

$$A \equiv F_{\alpha\mu\nu} F^{\alpha\mu\nu} \tag{1.14}$$

e

$$B \equiv F_{\mu} F^{\mu}, \tag{1.15}$$

e a covariância geral exige que a lagrangiana seja um funcional de A e B, ou seja,

$$L = L(A, B). \tag{1.16}$$

A teoria linear de campo de spin 2 é dada pela ação

$$S^L = \int d^4x \sqrt{-\gamma}(A - B), \tag{1.17}$$

em que γ é o determinante de $\gamma_{\mu\nu}$. Isso é facilmente verificado, pois, a menos de uma divergência total, pode-se escrever [5, 6]

$$S^L = \int d^4x \sqrt{-\gamma}\varphi^{\mu\nu} G^L_{\mu\nu} \tag{1.18}$$

ou

$$S^L = -\int d^4x \sqrt{-\gamma}\varphi^{\mu\nu} F^{\lambda}{}_{(\mu\nu);\lambda} = \int d^4x \sqrt{-\gamma}\varphi^{\mu\nu;\lambda} F_{\lambda(\mu\nu)}, \tag{1.19}$$

e uma manipulação dessa expressão mostra que

$$\varphi^{\mu\nu;\lambda} F_{\lambda(\mu\nu)} = -2(A - B). \tag{1.20}$$

A argumentação acima revela que qualquer teoria que forneça a equação linear de Fierz no limite de campo fraco deve se reduzir à combinação dos invariantes A e B apresentada. Essa conclusão motiva o exame de teorias cujos funcionais dependam apenas de tal combinação, e é esse o caso da teoria NDL.

A seguir, apresenta-se um resumo de uma teoria não-linear de campo de spin 1. É um exemplo que possui muitas propriedades em profunda analogia com o caso do campo de spin 2 e que servirá de guia para a análise mais complexa da teoria NDL.

1.2.2 Exemplo de uma teoria não-linear de campo de spin 1

Seja a ação dada por

$$S = \int d^4x \sqrt{-\gamma} L(F), \tag{1.21}$$

em que a lagrangiana depende não-linearmente do invariante F do campo $F_{\mu\nu}$, obtido por

$$F \equiv F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \tag{1.22}$$

Então, a equação do movimento é dada por

$$\{L_F F^{\mu\nu}\}_{;\nu} = \frac{1}{4} J^\mu, \tag{1.23}$$

em que L_F é a derivada funcional da lagrangiana com relação ao invariante. A teoria de Maxwell decorre da equação acima quando $L_F = -\frac{1}{4}$.

A análise é agora limitada a um tipo teoria proposta por Born e desenvolvida por Infeld [10, 11, 12]. É uma teoria não-linear da eletrodinâmica, cuja lagrangiana é

$$L = -\frac{1}{4}\left\{\sqrt{b^2 + 2b^2 F} - b^2\right\}, \tag{1.24}$$

em que a constante b representa o valor máximo do campo.

Duas importantes propriedades dessa teoria que interessam mais adiante são destacadas:

- A teoria é não-linear.
- A propagação das ondas eletromagnéticas pode ser descrita como se as propriedades métricas do espaço-tempo fossem alteradas pela presença do campo eletromagnético não-linear.

Da forma geral do tensor de energia−momento $T_{\mu\nu}$, obtém-se, para a lagrangiana (1.24):

$$T_{\mu\nu} = -L\gamma_{\mu\nu} - 4L_F F_{\mu\alpha} F^{\alpha}{}_{\nu}. \tag{1.25}$$

Essa quantidade possui basicamente as mesmas propriedades e simetrias do caso linear de Maxwell. A propriedade do caso não-linear que interessa aqui é esta: a interação do campo com correntes externas permanece a mesma. De fato, a equação acima, contraída com $F_{\alpha\mu}$, fornece

$$\{L_F F_{\alpha\mu} F^{\mu\nu}\}_{;\nu} - L_F F_{\alpha\mu;\nu} F^{\mu\nu} = \frac{1}{4} F_{\alpha\mu} J^{\mu}. \tag{1.26}$$

Com a ajuda do tensor $\mathcal{T}_{\mu\nu}$, essa expressão pode ser escrita como

$$T_{\alpha}{}^{\mu}{}_{;\mu} + L_F F_{,\alpha} + 4L_F F^{\mu\nu} F_{\alpha\mu;\nu} = -F_{\alpha\mu} J^{\mu} \tag{1.27}$$

ou

$$T_{\alpha}{}^{\mu}{}_{;\mu} = -F_{\alpha\mu}J^{\mu}. \tag{1.28}$$

Dessa expressão, segue o conhecido fato: o balanço de forças pela troca de energia do campo e das correntes é independente da forma como o invariante F entra na lagrangiana.

1.2.3 Uma classe de teoria não-linear de campo de spin 2

Conforme discutido, quando se passa da teoria linear da gravidade para o caso geral o procedimento padrão é o de adicionar ao tensor de energia−momento da matéria o correspondente tensor de energia−momento do campo gravitacional. Foi visto que o primeiro termo não-linear contém o tensor de energia−momento $\mathcal{T}^{(1)}_{\mu\nu}$, obtido da parte linear. Esse procedimento baseia-se na hipótese implícita que trata a energia gravitacional do mesmo modo que as outras energias. Ou seja, o campo gravitacional gerado pela energia gravitacional não é distinto dos campos gerados por outras formas de energia. Isso, entretanto, é uma extrapolação do princípio da equivalência, aplicada à energia gravitacional.

Os autores da teoria NDL, para desenvolvê-la, tomaram um caminho diferente daquele seguido por Feynman, Deser e outros. Em vez de adicionar à fonte do campo os sucessivos tensores de energia−momento do campo gravitacional para cada ordem de não-linearidade, partiram desta hipótese: os termos que representam a interação gravidade−gravidade são construídos como funcionais dos invariantes A e B. Então, a ação é dada por

$$S = \int d^4x\sqrt{-\gamma}L(A,B), \tag{1.29}$$

e a variação do potencial $\varphi_{\mu\nu}$ produz

$$\delta S = \int d^4x \sqrt{-\gamma}\, \Theta^{\lambda}{}_{\mu\nu;\lambda} \delta\varphi^{\mu\nu}. \tag{1.30}$$

Logo, a equação do movimento é dada por

$$\Theta^{\lambda}{}_{\mu\nu;\lambda} = 0, \tag{1.31}$$

com

$$\Theta_{\lambda\mu\nu} = L_A F_{\lambda(\mu\nu)} - (L_A + L_B)[2F_{\lambda}\gamma_{\mu\nu} - F_{\mu}\gamma_{\nu\lambda} - F_{\nu}\gamma_{\mu\lambda}], \tag{1.32}$$

em que $L_A \equiv \delta L/\delta A$, $L_B \equiv \delta L/\delta B$.

No caso especial em que $L_A = -\frac{1}{2}$ e $L_B = \frac{1}{2}$, a expressão acima reduz-se ao caso linear de Fierz,

$$\Theta_{\lambda\mu\nu} = -F_{\lambda(\mu\nu)}, \tag{1.33}$$

ou seja,

$$F^{\lambda}{}_{(\mu\nu)} = -G_{\mu\nu} = 0, \tag{1.34}$$

em que $G_{\mu\nu}$ é o operador linear de Fierz, equação (1.13).

Para garantir que no limite de campo fraco a teoria fornecerá a equação linear de Fierz, devem-se considerar apenas as lagrangianas tais que

$$L_B = -L_A, \tag{1.35}$$

o que faz a equação do movimento tomar a forma

$$\left\{ L_A F^{\lambda}{}_{(\mu\nu)} \right\}_{;\lambda} = 0. \tag{1.36}$$

Na equação (1.36), quando se isola o operador linear de Fierz, pode-se ver diretamente que a fonte da não-linearidade, em contraste com a relatividade geral, não é expressa em termos do tensor de energia−momento do campo gravitacional:

$$G_{\mu\nu} = L_A^{-1} \left\{ L_{A;\lambda} F^{\lambda}{}_{(\mu\nu)} \right\}. \tag{1.37}$$

No caso de interação com matéria, abordado mais adiante, essa comparação ficará mais clara. Deve-se notar também que a equação (1.37) é exata, ou seja, não sofreu nenhum tipo de aproximação.

1.2.4 O tensor de energia−momento do campo gravitacional

Da definição geral do tensor de energia−momento,

$$\mathcal{T}_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-\gamma}} \frac{\delta L \sqrt{-\gamma}}{\delta \gamma^{\mu\nu}}, \tag{1.38}$$

e da classe de lagrangiana considerada, equação (1.35), obtém-se o tensor de energia−momento do campo gravitacional

$$\mathcal{T}^{(g)}_{\mu\nu} = -L\gamma_{\mu\nu} + 2L_A \left\{ 2F_{\mu\alpha\beta} F_{\nu}{}^{\alpha\beta} + F_{\alpha\beta\mu} F^{\alpha\beta}{}_{\nu} - F^{\alpha} F_{\alpha(\mu\nu)} - F_{\mu} F_{\nu} \right\}, \tag{1.39}$$

em que (g) significa que se trata do caso gravitacional.

O tensor $\mathcal{T}^{(g)}_{\mu\nu}$ acima difere por um divergente total do tensor obtido pelo teorema de Noether:

$$N_{\mu\nu} = -L\gamma_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \varphi_{\alpha\beta;\nu} L_A F_{\mu}{}^{(\alpha\beta)}. \tag{1.40}$$

Sob a forma (1.40), o balanço de energia entre o campo gravitacional e suas fontes tem uma expressão simples, dada por

$$N^{\mu}{}_{\nu;\mu} = -T_{\alpha\beta}\varphi^{\alpha\beta}{}_{;\nu}. \tag{1.41}$$

Isso pode ser mostrado por um procedimento análogo ao descrito no caso do spin 1 ou por cálculo direto. Deve-se notar que, como naquele caso, o balanço de energia entre o campo gravitacional e suas fontes é independente da forma que a lagrangiana assume para representar o campo gravitacional.

Na próxima seção, com a escolha de uma lagrangiana para o esquema desenvolvido até aqui, considera-se um caso específico da teoria.

1.3 Um modelo de gravitação

Nas seções anteriores, desenvolveu-se um cenário geral propício à construção de uma teoria gravitacional. Agora, apresenta-se uma lagrangiana específica e, por meio dessa escolha, obtém-se uma caracterização das equações do movimento. Isso significa apresentar um exemplo de uma teoria de campo, para o campo gravitacional, que cumpre as condições:

- Concorda com o que se desenvolveu nas seções anteriores.
- Concorda com os testes observados do campo gravitacional.

Tomando como modelo a teoria não-linear do campo eletromagnético de Born e Infeld, acima discutida, admite-se para a interação gravidade−gravidade a lagrangiana

$$L^{g} = \frac{1}{k}\left\{\sqrt{b^4 + b^2(-A+B)} - b^2\right\}. \tag{1.42}$$

A quantidade b não tem o mesmo significado que em Born-Infeld. A esse respeito, neste ponto, o máximo que se pode fazer é especular. Observações futuras trarão mais luz.

Nas equações do movimento da teoria NDL, a partir de agora, a única lagrangiana de interesse é a lagrangiana (1.42). Soluções dessas equações para métricas esférica e cilíndrica são dadas nos capítulos 2 e 4, respectivamente.

1.3.1 Ondas gravitacionais

Esta seção examina o comportamento de ondas gravitacionais na teoria NDL. Com base na análise da evolução das descontinuidades da equação do movimento através de uma superfície característica Σ, chega-se à velocidade das ondas gravitacionais, que é o aspecto central usado para distinguir a teoria NDL da relatividade geral. Antes, porém, analisa-se o que ocorre no caso da teoria não-linear de spin 1.

Spin 1

Se Σ é uma superfície de descontinuidade, então

$$[F_{\mu\nu}]_\Sigma = 0 \tag{1.43}$$

e

$$[F_{\mu\nu,\lambda}]_\Sigma = f_{\mu\nu}\mathbf{k}_\lambda, \tag{1.44}$$

em que $[J]_\Sigma$ representa a descontinuidade da função J através da superfície Σ [7].

Aplicando isso à equação (1.23), obtém-se

$$L_F f^{\mu\nu}\mathbf{k}_\nu + 2L_{FF}\eta F^{\mu\nu}\mathbf{k}_\nu = 0, \tag{1.45}$$

em que

$$F^{\alpha\beta} f_{\alpha\beta} \equiv \eta. \tag{1.46}$$

A equação (1.45) pode ser escrita como

$$\left\{\gamma_{\mu\nu}\left(\frac{L_F^2}{L_{FF}}+L\right)+\mathcal{T}_{\mu\nu}\right\}k^\mu k^\nu=0, \tag{1.47}$$

que, no caso da teoria de Born, torna-se

$$\left\{\gamma_{\mu\nu}+\frac{4}{b^2}\mathcal{T}_{\mu\nu}\right\}k^\mu k^\nu=0. \tag{1.48}$$

Portanto, as perturbações não mais se propagam na geometria de fundo $\gamma_{\mu\nu}$, mas numa geometria modificada que depende da distribuição de energia do campo. Comportamento semelhante ocorre no caso do spin 2, a seguir.

Spin 2

As condições de descontinuidade

$$[F_{\mu\nu\alpha}]_\Sigma=0 \tag{1.49}$$

e

$$[F_{\mu\nu\alpha,\lambda}]_\Sigma=f_{\mu\nu\alpha}\mathbf{k}_\lambda \tag{1.50}$$

aplicadas à equação do movimento do campo gravitacional produzem

$$f_{\mu(\alpha\beta)}\mathbf{k}^\mu=-2\frac{L_{AA}}{L_A}(\eta-\psi)F_{\mu(\alpha\beta)}\mathbf{k}^\mu=0, \tag{1.51}$$

em que

$$\eta\equiv F_{\alpha\beta\mu}f^{\alpha\beta\mu} \tag{1.52}$$

e

$$\psi\equiv F_\mu f^\mu. \tag{1.53}$$

A identidade cíclica permite escrever

$$f_{\alpha\beta}{}^{\mu}\mathbf{k}_\lambda+f_{\beta\lambda}{}^{\mu}\mathbf{k}_\alpha+f_{\lambda\alpha}{}^{\mu}\mathbf{k}_\beta=\frac{1}{2}\delta^\mu_\alpha f_{[\lambda}\mathbf{k}_{\beta]}+\frac{1}{2}\delta^\mu_\beta f_{[\alpha}\mathbf{k}_{\lambda]}+\frac{1}{2}\delta^\mu_\lambda f_{[\beta}\mathbf{k}_{\alpha]}, \tag{1.54}$$

e essa equação, multiplicada por $F^{\alpha\beta\mu}\mathbf{k}^{\lambda}$, torna-se

$$(\eta - \psi)\mathbf{k}^2 - 2F^{\alpha\beta\mu} f_{\lambda\beta\mu}\mathbf{k}^{\lambda}\mathbf{k}_{\alpha} + f_{\mu}\mathbf{k}^{\mu}F_{\lambda}\mathbf{k}^{\lambda} + F_{\alpha\beta\lambda}F^{\alpha}\mathbf{k}^{\beta}\mathbf{k}^{\lambda} = 0 \tag{1.55}$$

ou

$$\mathbf{k}^{\mu}\mathbf{k}^{\nu}\left[\gamma_{\mu\nu} + \Lambda_{\mu\nu}\right] = 0, \tag{1.56}$$

em que a quantidade $\Lambda_{\mu\nu}$ é escrita em termos do campo gravitacional:

$$\Lambda_{\mu\nu} \equiv 2\frac{L_{AA}}{L_A}\left[F_{\mu}{}^{\alpha\beta}F_{\nu(\alpha\beta)} - F_{\mu}F_{\nu}\right]. \tag{1.57}$$

1.4 A interação matéria–gravidade

Conforme discutido, a forte evidência de que a matéria se acopla universalmente à gravidade torna possível a descrição dessa interação como se a matéria estivesse "mergulhada" numa geometria riemanniana produzida pelo campo gravitacional. Muitos autores [4, 26] mostraram que essa geometria pode ser descrita em termos de uma geometria de fundo $\gamma_{\mu\nu}$, não observável, e do campo gravitacional (por meio do potencial $\varphi_{\mu\nu}$):

$$g_{\mu\nu} \equiv \gamma_{\mu\nu} + \varphi_{\mu\nu}. \tag{1.58}$$

Isso significa que para saber como a matéria se acopla à gravidade, deve-se apenas substituir a geometria de fundo $\gamma_{\mu\nu}$ pela geometria efetiva $g_{\mu\nu}$ e as derivadas por derivadas covariantes construídas com $g_{\mu\nu}$.

Portanto, na presença de matéria é fácil obter a modificação da equação do movimento do campo gravitacional. Já que a matéria sente a gravidade apenas pela combinação (1.58), então

$$\frac{\delta L}{\delta\gamma_{\mu\nu}} = \frac{\delta L}{\delta g_{\mu\nu}}. \tag{1.59}$$

Logo, com termos de fonte, a equação geral do movimento do campo gravitacional é

$$\left\{L_A F^{\lambda}{}_{(\mu\nu)}\right\}_{;\lambda} = -T_{\mu\nu} \tag{1.60}$$

ou

$$G^{(L)}_{\mu\nu} = L_A^{-1}\left\{L_{A;\lambda} F^{\lambda}{}_{(\mu\nu)} + T_{\mu\nu}\right\}, \tag{1.61}$$

em que $T_{\mu\nu}$ é o tensor de energia−momento da matéria.

Capítulo 2

Solução das equações da teoria NDL para uma métrica estática e com simetria esférica

Neste capítulo, apresenta-se uma solução das equações da teoria NDL, teoria da gravidade que, com exceção da energia gravitacional, admite o princípio da equivalência de Einstein para qualquer tipo de matéria. Como discutido, essa teoria descarta a hipótese (implícita) da relatividade geral acerca da universalidade da interação gravitacional. Pois, embora seja forte a base observacional para a universalidade da interação matéria$-$gravidade, não existe nada que assegure que a gravidade interaja com ela própria da mesma forma que com outras formas de energia.

A teoria NDL, portanto, trata a interação gravidade$-$gravidade de modo distinto do que faz a relatividade geral, mas de acordo com o atual nível de observação. Será exibido o campo gravitacional produzido por uma configuração estática e com simetria esférica [2], e os parâmetros PPN que se obtêm ($\alpha = \beta = \gamma = 1$) coincidem com os da relatividade geral.

2.1 A solução estática e esfericamente simétrica

Conforme discutido, o campo gravitacional na teoria NDL propaga-se numa geometria de Minkowski e obedece à equação do movimento

$$\left\{L_A F^{\lambda}{}_{(\mu\nu)}\right\}_{;\lambda} = -T_{\mu\nu} \tag{2.1}$$

ou

$$G^{(L)}_{\mu\nu} = L_A^{-1}\left\{L_{A;\lambda} F^{\lambda}{}_{(\mu\nu)} + T_{\mu\nu}\right\}. \tag{2.2}$$

Já na relatividade geral, a correspondente equação do movimento do campo gravitacional, na representação geométrica, é

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = -T_{\mu\nu}, \tag{2.3}$$

em que a curvatura associada à métrica riemanniana aparece explicitamente.

Muitos autores [4] mostraram ser possível escrever a equação (2.3) na forma

$$G^{(L)}_{\mu\nu} = -T_{\mu\nu} - \mathcal{T}_{\mu\nu}, \tag{2.4}$$

em que $\mathcal{T}_{\mu\nu}$ é uma complicada expressão não-linear, construída com o tensor métrico e suas derivadas. Uma simples inspeção das equações (2.2) e (2.4) revela a particular caracterização da interação gravidade−gravidade em cada teoria, e deve-se enfatizar que nenhuma dessas equações possui qualquer espécie de aproximação. São exatas.

Além disso, essas teorias obedecem ao princípio da equivalência fraco e, portanto, o comportamento da matéria (ou qualquer forma não gravitacional de energia) é rigorosamente o mesmo em ambas. São distintos apenas os processos que tratam da interação gravidade−gravidade.

Passa-se agora à resolução da equação (2.1) no vácuo, ou seja, com $T_{\mu\nu} = 0$. Na busca de uma solução estática e esfericamente simétrica, faz-se na métrica

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2\left(d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta d\varphi^2\right) \tag{2.5}$$

a substituição de $\gamma_{\mu\nu}$ por $g_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} + \varphi_{\mu\nu}$, mas de modo a preservar a forma

$$ds^2 = B(r)dt^2 - A(r)dr^2 - r^2\left(d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta d\varphi^2\right). \tag{2.6}$$

Isso leva a

$$ds^2 = [1 + \mu(r)]\, dt^2 - [1 + \nu(r)]\, dr^2 - r^2\left(d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta d\varphi^2\right). \tag{2.7}$$

Portanto, as quantidades não nulas são

$$\begin{gathered}
\gamma_{00} = 1, \quad \gamma_{11} = -1, \quad \gamma_{22} = -r^2, \quad \gamma_{33} = -r^2\operatorname{sen}^2\theta, \\
\gamma^{00} = 1, \quad \gamma^{11} = -1, \quad \gamma^{22} = -\frac{1}{r^2}, \quad \gamma^{33} = -\frac{1}{r^2\operatorname{sen}^2\theta} \\
\varphi_{00} = \varphi^{00} = \mu(r), \quad \varphi_{11} = \varphi^{11} = -\nu(r),
\end{gathered}$$

que, utilizadas na equação (1.7), e com a ajuda de (1.1) e (1.2), produzem

$$\begin{aligned}
F_\alpha &= \varphi_{,\alpha} - \varphi_{\alpha\mu;\nu}\gamma^{\mu\nu} \\
&= \left(\varphi_{00}\gamma^{00} + \varphi_{11}\gamma^{11}\right)_{,\alpha} - \left(\varphi_{\alpha\mu,\nu} - \Delta^\sigma_{\mu\nu}\varphi_{\sigma\alpha}\right)\gamma^{\mu\nu} \\
&= \left(\varphi_{00} - \varphi_{11}\right)_{,\alpha} - \varphi_{\alpha\alpha,\alpha}\gamma^{\alpha\alpha} \\
&+ \left(\Delta^\alpha_{00}\gamma^{00} + \Delta^\alpha_{11}\gamma^{11} + \Delta^\alpha_{22}\gamma^{22} + \Delta^\alpha_{33}\gamma^{33}\right)\varphi_{\alpha\alpha} \\
&= \left(\varphi_{00} - \varphi_{11}\right)_{,\alpha} - \varphi_{\alpha\alpha,\alpha}\gamma^{\alpha\alpha} \\
&+ \left[\frac{1}{2}\gamma^{\alpha\rho}\left(2\gamma_{\rho2,2} - \gamma_{22,\rho}\right)\gamma^{22} + \frac{1}{2}\gamma^{\alpha\rho}\left(2\gamma_{\rho3,3} - \gamma_{33,\rho}\right)\gamma^{33}\right]\varphi_{\alpha\alpha} \\
&= \left(\varphi_{00} - \varphi_{11}\right)_{,\alpha} - \varphi_{\alpha\alpha,\alpha}\gamma^{\alpha\alpha} \\
&+ \frac{1}{2}\gamma^{\alpha\alpha}\left[\left(2\gamma_{\alpha2,2} - \gamma_{22,\alpha}\right)\gamma^{22} + \left(2\gamma_{\alpha3,3} - \gamma_{33,\alpha}\right)\gamma^{33}\right]\varphi_{\alpha\alpha}.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Obviamente, $F_0 = F_2 = F_3 = 0$ e

$$
\begin{aligned}
F_1 &= (\varphi_{00} - \varphi_{11})_{,1} - \varphi_{11,1}\gamma^{11} + \frac{1}{2}\gamma^{11}\left(-\gamma_{22,1}\gamma^{22} - \gamma_{33,1}\gamma^{33}\right)\varphi_{11} \\
&= \mu' - (-\nu') - (-\nu')(-1) \\
&+ \frac{1}{2}(-1)\left[-(-2r)\left(-\frac{1}{r^2}\right) - (2r\,\mathrm{sen}^2\,\theta)\left(-\frac{1}{r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta}\right)\right](-\nu) \\
&= \mu' - \frac{2\nu}{r}. \qquad (2.9)
\end{aligned}
$$

Com os valores de F_α, e utilizando (1.4) e (1.5), passa-se ao cálculo do campo gravitacional $F_{\alpha\mu\nu}$:

$$
\begin{aligned}
F_{\alpha\mu\nu} &= \frac{1}{2}\left(\varphi_{\nu[\alpha;\mu]} + F_{[\alpha}\gamma_{\mu]\nu}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\varphi_{\nu\alpha;\mu} - \varphi_{\nu\mu;\alpha} + F_\alpha\gamma_{\mu\nu} - F_\mu\gamma_{\alpha\nu}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\varphi_{\nu\alpha,\mu} - \Delta^\sigma_{\nu\mu}\varphi_{\sigma\alpha} - \Delta^\sigma_{\alpha\mu}\varphi_{\sigma\nu} - \varphi_{\nu\mu,\alpha}\right. \\
&+ \left.\Delta^\sigma_{\nu\alpha}\varphi_{\sigma\mu} + \Delta^\sigma_{\mu\alpha}\varphi_{\sigma\nu} + F_\alpha\gamma_{\mu\nu} - F_\mu\gamma_{\alpha\nu}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left[\varphi_{\nu\alpha,\mu} - \frac{1}{2}\gamma^{\alpha\beta}\left(\gamma_{\beta\nu,\mu} + \gamma_{\beta\mu,\nu} - \gamma_{\mu\nu,\beta}\right)\varphi_{\alpha\alpha}\right] \\
&+ \frac{1}{2}\left[-\varphi_{\nu\mu,\alpha} + \frac{1}{2}\gamma^{\mu\beta}\left(\gamma_{\beta\nu,\alpha} + \gamma_{\beta\alpha,\nu} - \gamma_{\nu\alpha,\beta}\right)\varphi_{\mu\mu}\right. \\
&+ \left. F_\alpha\gamma_{\mu\nu} - F_\mu\gamma_{\alpha\nu}\right]. \qquad (2.10)
\end{aligned}
$$

Ou seja,

$$
\begin{aligned}
F_{\alpha\mu\nu} &= \frac{1}{2}\left[\varphi_{\nu\alpha,\mu} - \frac{1}{2}\gamma^{\alpha\alpha}\left(\gamma_{\alpha\nu,\mu} + \gamma_{\alpha\mu,\nu} - \gamma_{\mu\nu,\alpha}\right)\varphi_{\alpha\alpha}\right. \\
&- \varphi_{\nu\mu,\alpha} + \frac{1}{2}\gamma^{\mu\mu}\left(\gamma_{\mu\nu,\alpha} + \gamma_{\mu\alpha,\nu} - \gamma_{\nu\alpha,\mu}\right)\varphi_{\mu\mu} \\
&+ \left. F_\alpha\gamma_{\mu\nu} - F_\mu\gamma_{\alpha\nu}\right]. \qquad (2.11)
\end{aligned}
$$

Por causa da anti-simetria nos dois primeiros índices de $F_{\alpha\mu\nu}$, as possibilidades independentes para $\alpha\mu\nu$ são

000	010	020	030	110	120	130	220	230	330
001	011	021	031	111	121	131	221	231	331
002	012	022	032	112	122	132	222	232	332
003	013	023	033	113	123	133	223	233	333

Porém, da definição de $F_{\alpha\mu\nu}$, são nulas suas componentes com os três índices iguais: $F_{\alpha\alpha\alpha} \equiv 0$. Além disso, como $\varphi_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} = 0$ quando $\mu \neq \nu$, segue que são nulas também as componentes $F_{\alpha\mu\nu}$ com os três índices distintos entre si. Portanto, as possibilidades restantes para $\alpha\mu\nu$ são aquelas em que ocorre repetição em apenas dois índices:

010	020	030	110	220	330
001	011	121	131	221	331
002	022	112	122	232	332
003	033	113	133	223	233

Novamente por causa da anti-simetria, a repetição ou ocorre nos dois primeiros ou nos dois últimos índices. Lembrando que $F_0 = F_2 = F_3 = 0$, que $F_1 = \mu' - \frac{2\nu}{r}$ e usando os valores de $\varphi_{\mu\nu}$ e $\gamma_{\mu\nu}$, passa-se, portanto, à inspeção direta da equação (2.11):

Se $\alpha = \mu = 0$, então $F_{00\nu} = 0$.

Se $\alpha = \mu = 1$, então $F_{11\nu} = 0$.

Se $\alpha = \mu = 2$, então $F_{22\nu} = 0$.

Se $\alpha = \mu = 3$, então $F_{33\nu} = 0$.

Se $\mu = \nu = 0$, então $F_{\alpha 00} = \frac{1}{2}\left(-\varphi_{00,\alpha} + F_\alpha\right)$. Daí,

$$F_{100} = \frac{1}{2}\left(-\mu' + \mu' - \frac{2\nu}{r}\right), \tag{2.12}$$

ou seja, $F_{200} = F_{300} = 0$ e

$$F_{100} = -\frac{\nu}{r}. \tag{2.13}$$

Se $\mu = \nu = 1$, então $F_{\alpha 11} = -\frac{1}{2}F_{\alpha}$, ou seja, $F_{\alpha 11} = 0$.

Se $\mu = \nu = 2$, então $F_{\alpha 22} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\gamma^{\alpha\alpha}\gamma_{22,\alpha}\varphi_{\alpha\alpha} + F_{\alpha}\gamma_{22}\right]$. Logo,

$$F_{122} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(-1)(-2r)(-\nu) + \left(\mu' - \frac{2\nu}{r}\right)(-r^2)\right], \tag{2.14}$$

isto é, $F_{022} = F_{322} = 0$ e

$$F_{122} = \frac{1}{2}\left(\nu r - \mu' r^2\right). \tag{2.15}$$

Se $\mu = \nu = 3$, então $F_{\alpha 33} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\gamma^{\alpha\alpha}\gamma_{33,\alpha}\varphi_{\alpha\alpha} + F_{\alpha}\gamma_{33}\right]$. Daí,

$$F_{133} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(-1)(-2r\,\mathrm{sen}^2\,\theta)(-\nu) + \left(\mu' - \frac{2\nu}{r}\right)(-r^2\,\mathrm{sen}\;\,2\theta)\right], \tag{2.16}$$

isto é, $F_{033} = F_{233} = 0$ e

$$F_{133} = \mathrm{sen}^2\,\theta\left[\frac{1}{2}\left(\nu r - \mu' r^2\right)\right] \tag{2.17}$$

ou

$$F_{133} = \mathrm{sen}^2\,\theta F_{122}. \tag{2.18}$$

Portanto, está determinado o campo gravitacional, cujas componentes não nulas, a menos da anti-simetria $F_{\alpha\mu\nu} = -F_{\mu\alpha\nu}$, resumem-se abaixo:

$$F_{100} = -\frac{\nu}{r} \tag{2.19}$$

$$F_{122} = \frac{1}{2}\left(\nu r - \mu' r^2\right) \tag{2.20}$$

$$F_{133} = \mathrm{sen}^2\,\theta F_{122} \tag{2.21}$$

Com as quantidades $F_{\alpha\mu\nu}$ e F_α obtidas acima, pode-se agora calcular os invariantes $A \equiv F_{\alpha\mu\nu}F^{\alpha\mu\nu}$ e $B \equiv F_\mu F^\mu$:

$$
\begin{aligned}
A &= F_{\alpha\mu\nu}F^{\alpha\mu\nu} \\
&= F_{\alpha\mu\nu}F_{\beta\rho\delta}\gamma^{\beta\alpha}\gamma^{\rho\mu}\gamma^{\delta\nu} \\
&= F_{010}F_{010}\gamma^{00}\gamma^{11}\gamma^{00} + F_{100}F_{100}\gamma^{11}\gamma^{00}\gamma^{00} \\
&+ F_{212}F_{212}\gamma^{22}\gamma^{11}\gamma^{22} + F_{122}F_{122}\gamma^{11}\gamma^{22}\gamma^{22} \\
&+ F_{313}F_{313}\gamma^{33}\gamma^{11}\gamma^{33} + F_{133}F_{133}\gamma^{11}\gamma^{33}\gamma^{33} \\
&= 2\gamma^{11}\left[\left(F_{100}\gamma^{00}\right)^2 + \left(F_{122}\gamma^{22}\right)^2 + \left(F_{133}\gamma^{33}\right)^2\right] \\
&= -2\left\{\left(-\frac{\nu}{r}\right)^2 + \left[\frac{1}{2}\left(\nu r - \mu' r^2\right)\left(-\frac{1}{r^2}\right)\right]^2\right. \\
&+ \left.\left[\operatorname{sen}^2\theta \frac{1}{2}\left(\nu r - \mu' r^2\right)\left(-\frac{1}{r^2\operatorname{sen}^2\theta}\right)\right]^2\right\} \\
&= -3\frac{\nu^2}{r^2} - \mu'^2 + 2\frac{\nu\mu'}{r}
\end{aligned}
\tag{2.22}
$$

e

$$
\begin{aligned}
B &= F_\alpha F^\alpha \\
&= F_\alpha F_\mu \gamma^{\mu\alpha} \\
&= F_1 F_\mu \gamma^{\mu 1} \\
&= F_1 F_1 \gamma^{11} \\
&= -\left(\mu' - \frac{2\nu}{r}\right)^2 \\
&= -\frac{1}{r^2}\left(\mu' r - 2\nu\right)^2 .
\end{aligned}
\tag{2.23}
$$

A lagrangiana $L = L(A - B) = \frac{1}{k}\left[\sqrt{b^4 + b^2(-A + B)} - b^2\right]$ pode ser reescrita como

$$
L = \frac{b^2}{k}\left(\sqrt{1 - \frac{A - B}{b^2}} - 1\right), \tag{2.24}
$$

e a derivada de L em relação ao invariante A, L_A, é

$$L_A = -\frac{1}{2k}\left(1 - \frac{A-B}{b^2}\right)^{-\frac{1}{2}}. \tag{2.25}$$

Mas, de (2.22) e (2.23), segue que

$$\begin{aligned} -A+B &= 3\frac{\nu^2}{r^2} + \mu'^2 - 2\frac{\nu\mu'}{r} - \frac{1}{r^2}\left(\mu' r - 2\nu\right)^2 \\ &= 2\frac{\nu\mu'}{r} - \frac{\nu^2}{r^2}. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Então, com este último resultado, a derivada (2.25) ganha a forma

$$L_A = -\frac{1}{2k}\left[1 + \frac{1}{b^2}\left(2\frac{\nu\mu'}{r} - \frac{\nu^2}{r^2}\right)\right]^{-\frac{1}{2}}. \tag{2.27}$$

Como L_A não depende das quantidades t, θ e φ, a equação do movimento

$$\left\{L_A F^{\lambda}{}_{(\mu\nu)}\right\}_{;\lambda} = 0,$$

ou seja,

$$L_A F^{\lambda}{}_{(\mu\nu);\lambda} + L_{A,\lambda} F^{\lambda}{}_{(\mu\nu)} = 0,$$

é escrita como

$$L_A F^{\lambda}{}_{(\mu\nu);\lambda} + L_{A,1} F^{1}{}_{(\mu\nu)} = 0. \tag{2.28}$$

O desenvolvimento de $F^{\lambda}{}_{(\mu\nu);\lambda}$ é tal que:

$$\begin{aligned}
F^{\lambda}{}_{(\mu\nu);\lambda} &= F_{\alpha(\mu\nu);\lambda}\gamma^{\alpha\lambda} \\
&= \left(F_{\lambda\mu\nu;\lambda} + F_{\lambda\nu\mu;\lambda}\right)\gamma^{\lambda\lambda} \\
&= \gamma^{\lambda\lambda}F_{\lambda\mu\nu,\lambda} - \frac{1}{2}\gamma^{\lambda\lambda}\gamma^{\sigma\sigma}\left(\gamma_{\sigma\lambda,\lambda} + \gamma_{\sigma\lambda,\lambda} - \gamma_{\lambda\lambda,\sigma}\right)F_{\sigma\mu\nu} \\
&- \frac{1}{2}\gamma^{\lambda\lambda}\gamma^{\sigma\sigma}\left(\gamma_{\sigma\mu,\lambda} + \gamma_{\sigma\lambda,\mu} - \gamma_{\lambda\mu,\sigma}\right)F_{\lambda\sigma\nu} \\
&- \frac{1}{2}\gamma^{\lambda\lambda}\gamma^{\sigma\sigma}\left(\gamma_{\sigma\nu,\lambda} + \gamma_{\sigma\lambda,\nu} - \gamma_{\nu\lambda,\sigma}\right)F_{\lambda\mu\sigma} \\
&+ \gamma^{\lambda\lambda}F_{\lambda\nu\mu,\lambda} - \frac{1}{2}\gamma^{\lambda\lambda}\gamma^{\sigma\sigma}\left(\gamma_{\sigma\lambda,\lambda} + \gamma_{\sigma\lambda,\lambda} - \gamma_{\lambda\lambda,\sigma}\right)F_{\sigma\nu\mu} \\
&- \frac{1}{2}\gamma^{\lambda\lambda}\gamma^{\sigma\sigma}\left(\gamma_{\sigma\nu,\lambda} + \gamma_{\sigma\lambda,\nu} - \gamma_{\lambda\nu,\sigma}\right)F_{\lambda\sigma\mu} \\
&- \frac{1}{2}\gamma^{\lambda\lambda}\gamma^{\sigma\sigma}\left(\gamma_{\sigma\mu,\lambda} + \gamma_{\sigma\lambda,\mu} - \gamma_{\mu\lambda,\sigma}\right)F_{\lambda\nu\sigma}.
\end{aligned} \tag{2.29}$$

Agrupando termos, a equação (2.29) torna-se

$$\begin{aligned}
F^{\lambda}{}_{(\mu\nu);\lambda} &= \gamma^{\lambda\lambda}\left(F_{\lambda\mu\nu,\lambda} + F_{\lambda\nu\mu,\lambda}\right) \\
&- \frac{1}{2}\gamma^{\lambda\lambda}\gamma^{\sigma\sigma}\left(\gamma_{\sigma\lambda,\lambda} + \gamma_{\sigma\lambda,\lambda} - \gamma_{\lambda\lambda,\sigma}\right)\left(F_{\sigma\mu\nu} + F_{\sigma\nu\mu}\right) \\
&- \frac{1}{2}\gamma^{\lambda\lambda}\gamma^{\sigma\sigma}\left(\gamma_{\sigma\mu,\lambda} + \gamma_{\sigma\lambda,\mu} - \gamma_{\lambda\mu,\sigma}\right)\left(F_{\lambda\sigma\nu} + F_{\lambda\nu\sigma}\right) \\
&- \frac{1}{2}\gamma^{\lambda\lambda}\gamma^{\sigma\sigma}\left(\gamma_{\sigma\nu,\lambda} + \gamma_{\sigma\lambda,\nu} - \gamma_{\nu\lambda,\sigma}\right)\left(F_{\lambda\mu\sigma} + F_{\lambda\sigma\mu}\right),
\end{aligned} \tag{2.30}$$

ou

$$\begin{aligned}
F^{\lambda}{}_{(\mu\nu);\lambda} &= \gamma^{\lambda\lambda}\left\{\left(F_{\lambda\mu\nu,\lambda} + F_{\lambda\nu\mu,\lambda}\right)\right. \\
&- \frac{1}{2}\gamma^{\sigma\sigma}\left[\left(2\gamma_{\sigma\lambda,\lambda} - \gamma_{\lambda\lambda,\sigma}\right)\left(F_{\sigma\mu\nu} + F_{\sigma\nu\mu}\right)\right. \\
&+ \left(\gamma_{\sigma\mu,\lambda} + \gamma_{\sigma\lambda,\mu} - \gamma_{\lambda\mu,\sigma}\right)\left(F_{\lambda\sigma\nu} + F_{\lambda\nu\sigma}\right) \\
&+ \left.\left.\left(\gamma_{\sigma\nu,\lambda} + \gamma_{\sigma\lambda,\nu} - \gamma_{\nu\lambda,\sigma}\right)\left(F_{\lambda\mu\sigma} + F_{\lambda\sigma\mu}\right)\right]\right\}.
\end{aligned} \tag{2.31}$$

Por inspeção direta de (2.31), são identicamente nulas as quantidades

$$F^{\lambda}{}_{(01);\lambda}, \quad F^{\lambda}{}_{(02);\lambda}, \quad F^{\lambda}{}_{(03);\lambda}, \quad F^{\lambda}{}_{(10);\lambda}, \quad F^{\lambda}{}_{(13);\lambda},$$

$$F^{\lambda}{}_{(20);\lambda}, \quad F^{\lambda}{}_{(23);\lambda}, \quad F^{\lambda}{}_{(30);\lambda}, \quad F^{\lambda}{}_{(31);\lambda}, \quad F^{\lambda}{}_{(32);\lambda}.$$

Também por inspeção de (2.31), as quantidades restantes, ou seja, $F^{\lambda}{}_{(00);\lambda}$, $F^{\lambda}{}_{(11);\lambda}$, $F^{\lambda}{}_{(12);\lambda}$, $F^{\lambda}{}_{(22);\lambda}$ e $F^{\lambda}{}_{(33);\lambda}$, são escritas abaixo:

$$F^{\lambda}{}_{(00);\lambda} = \gamma^{11}\left[2F_{100,1} + F_{100}\left(\gamma^{22}\gamma_{22,1} + \gamma^{33}\gamma_{33,1}\right)\right] \tag{2.32}$$

$$F^{\lambda}{}_{(11);\lambda} = -\gamma^{22}\gamma^{22}\gamma_{22,1}F_{212} - \gamma^{33}\gamma^{33}\gamma_{33,1}F_{313} \tag{2.33}$$

$$F^{\lambda}{}_{(12);\lambda} = \frac{1}{2}\gamma^{33}\gamma_{33,2}\left(\gamma^{22}F_{212} - \gamma^{33}F_{313}\right) \tag{2.34}$$

$$F^{\lambda}{}_{(22);\lambda} = \gamma^{11}\left(2F_{122,1} + \gamma^{33}\gamma_{33,1}F_{122} - 2\gamma^{22}\gamma_{22,1}F_{122}\right) \tag{2.35}$$

$$F^{\lambda}{}_{(33);\lambda} = \gamma^{11}\left(2F_{133,1} + \gamma^{22}\gamma_{22,1}F_{133} - 2\gamma^{33}\gamma_{33,1}F_{133}\right) \tag{2.36}$$

Do segundo termo de (2.28), segue que

$$F^{1}{}_{(\mu\nu)} = F_{\alpha(\mu\nu)}\gamma^{\alpha 1} = F_{1(\mu\nu)}\gamma^{11},$$

ou seja,

$$F^{1}{}_{(\mu\nu)} = -\left(F_{1\mu\nu} + F_{1\nu\mu}\right). \tag{2.37}$$

Daí, as quantidades não nulas de (2.37) são

$$F^{1}{}_{(00)} = -\left(F_{100} + F_{100}\right) = -2F_{100}, \tag{2.38}$$

$$F^{1}{}_{(22)} = -2F_{122} \tag{2.39}$$

e

$$F^1{}_{(33)} = -2F_{133}. \tag{2.40}$$

Portanto, os resultados de (2.32) a (2.36) e de (2.38) a (2.40) permitem resumir abaixo as cinco equações não identicamente nulas extraídas de (2.28):

$$L_A \gamma^{11} \left[2F_{100,1} + F_{100} \left(\gamma^{22}\gamma_{22,1} + \gamma^{33}\gamma_{33,1}\right)\right] - 2L_{A,1}F_{100} = 0 \tag{2.41}$$

$$L_A \left(-\gamma^{22}\gamma^{22}\gamma_{22,1}F_{212} - \gamma^{33}\gamma^{33}\gamma_{33,1}F_{313}\right) = 0 \tag{2.42}$$

$$L_A \frac{1}{2}\gamma^{33}\gamma_{33,2} \left(\gamma^{22}F_{212} - \gamma^{33}F_{313}\right) = 0 \tag{2.43}$$

$$L_A \gamma^{11} \left(2F_{122,1} + \gamma^{33}\gamma_{33,1}F_{122} - 2\gamma^{22}\gamma_{22,1}F_{122}\right) - 2L_{A,1}F_{122} = 0 \tag{2.44}$$

$$L_A \gamma^{11} \left(2F_{133,1} + \gamma^{22}\gamma_{22,1}F_{133} - 2\gamma^{33}\gamma_{33,1}F_{133}\right) - 2L_{A,1}F_{133} = 0 \tag{2.45}$$

Relembrando que $F_{133} = \operatorname{sen}^2\theta F_{122}$, equação (2.21), e que

$$\gamma_{22} = -r^2, \quad \gamma_{33} = -r^2 \operatorname{sen}^2\theta,$$

$$\gamma^{22} = -\frac{1}{r^2}, \quad \gamma^{33} = -\frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2\theta},$$

a equação (2.42) fornece

$$L_A \frac{4}{r^3} F_{122} = 0. \tag{2.46}$$

Como $L_A > 0$, segue que

$$F_{122} = 0, \tag{2.47}$$

ou seja,

$$\mu' r = \nu. \tag{2.48}$$

O resultado (2.47) torna as equações (2.43), (2.44) e (2.45) identicamente nulas, e a equação (2.41) será abordada depois que o resultado (2.48) for usado em L_A, ou seja, na equação (2.27). Isso significa substituir μ' por ν/r em

$$L_A = -\frac{1}{2k}\left[1 + \frac{1}{b^2}\left(2\frac{\nu\mu'}{r} - \frac{\nu^2}{r^2}\right)\right]^{-\frac{1}{2}},$$

o que produz

$$L_A = -\frac{1}{2k}\left[1 + \frac{\nu^2}{b^2 r^2}\right]^{-\frac{1}{2}}. \tag{2.49}$$

Daí,

$$L_{A,1} = -\frac{1}{4k}\left[1 + \frac{\nu^2}{b^2 r^2}\right]^{-\frac{3}{2}}\left[\frac{2\nu\nu' r^{-2} - 2r^{-3}\nu^2}{b^2}\right]. \tag{2.50}$$

Agora, a equação (2.41), já com os resultados (2.49) e (2.50) e com as demais substituições, torna-se

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{1}{2k}\left[1 + \frac{\nu^2}{b^2 r^2}\right]^{-\frac{1}{2}}\left[2r^{-2}\nu + 2\nu' r^{-1}\right] \\ &+ \frac{1}{4k}\left[1 + \frac{\nu^2}{b^2 r^2}\right]^{-\frac{3}{2}}\left[\frac{2\nu\nu' r^{-2} - 2r^{-3}\nu^2}{b^2}\right]\frac{2\nu}{r} \end{aligned} \tag{2.51}$$

cuja simplificação leva a

$$2\nu^3 + b^2 r^2 \nu + b^2 \nu' r^3 = 0. \tag{2.52}$$

Resumindo, a busca pela solução da equação do movimento,

$$\left\{L_A F^{\lambda}{}_{(\mu\nu)}\right\}_{;\lambda} = 0,$$

reduziu-se, depois de várias etapas, ao seguinte: resolver as equações (2.52) e (2.48), reproduzidas abaixo:

$$\begin{cases} 2\nu^3 + b^2 r^2 \nu + b^2 \nu' r^3 = 0 \\ \mu' r - \nu = 0 \end{cases}$$

A equação (2.52) é uma equação de Bernoulli, cuja forma geral é

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n.$$

Uma equação de Bernoulli pode ser transformada numa equação diferencial linear de primeira ordem, ou seja, em

$$\frac{dz}{dx} + R(x)y = S(x).$$

Como a solução desta última é dada por

$$z = e^{-\int R dx} \left[\int S e^{\int R dx} dx + cte \right],$$

então a solução da equação de Bernoulli é

$$y = z^{\frac{1}{1-n}}.$$

Portanto, escrevendo a equação (2.52) como

$$\frac{d\nu}{dr} + \frac{1}{r}\nu = \frac{-2}{b^2 r^3}\nu^3, \tag{2.53}$$

e transformando esta última na equação diferencial linear de primeira ordem

$$\frac{dz}{dr} - \frac{2}{r}z = \frac{4}{b^2 r^3}, \tag{2.54}$$

segue que

$$z = r^2 \left[\frac{4}{b^2} \left(c - \frac{1}{4} r^{-4} \right) \right] \tag{2.55}$$

e

$$\nu = \left[\frac{4r^2}{b^2} \left(c - \frac{1}{4} r^{-4} \right) \right]^{-1/2}, \tag{2.56}$$

em que c é uma constante.

Adaptando a constante c para $c = \frac{C^{-2}b^2}{4}$, e fazendo $r_0^2 = \frac{C}{|b|}$, então a equação (2.56) torna-se

$$\nu = \frac{|C|}{r} \left[1 - \left(\frac{r_0}{r} \right)^4 \right]^{-1/2}. \tag{2.57}$$

Da outra equação (equação (2.48)), ou seja, $\mu' r - \nu = 0$, seque que

$$\mu = \int \frac{\nu}{r} + c_1, \tag{2.58}$$

em que c_1 é uma constante.

A substituição de (2.57) em (2.58) e o fato de a função $\nu(r)$ ser definida apenas para $r > r_0$ produzem

$$\mu(r) = |C| \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{\sqrt{r^4 - r_0^4}} + c_1,$$

ou

$$\mu(r) = |C| \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{\sqrt{(r^2 - r_0^2)(r^2 + r_0^2)}} + c_1. \tag{2.59}$$

Em termos de integrais elípticas [24], será utilizado o resultado geral

$$\int_b^u \frac{dx}{\sqrt{(x^2 - a^2)(x^2 - b^2)}} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} F(g, h), \tag{2.60}$$

com $u > b > 0$, $g = \arccos(b/u)$, $h = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, e F é uma integral elíptica de primeira espécie.

Logo, usando (2.60), a equação (2.59) é escrita como

$$\mu(r) = \frac{|C|}{\sqrt{r_0^2 + r_0^2}} F \left[\arccos(r_0/r), \frac{r_0}{\sqrt{r_0^2 + r_0^2}} \right] + c_1, \tag{2.61}$$

ou seja,

$$\mu(r) = \frac{|C|}{r_0\sqrt{2}} F \left[\arccos(r_0/r), 1/\sqrt{2} \right] + c_1. \tag{2.62}$$

A constante c_1 em (2.62) é determinada quando se impõe que o espaço torna-se de Minkowski para r grande, o que significa $\mu(r)$ tender a zero nesse limite. Daí,

$$\mu(r) = \frac{|C|}{r_0\sqrt{2}} \left\{ F \left[\arccos(r_0/r), 1/\sqrt{2} \right] - F \left[\pi/2, 1/\sqrt{2} \right] \right\}. \tag{2.63}$$

Já a constante C é determinada pelo limite de campo fraco da solução, pois esta deve coincidir com a solução de Schwarszchild. A análise é imediata: enquanto a componente radial da métrica de Schwarszchild (com G=c=1) é

$$g_{11}(r) = -1 - \frac{2M}{r},$$

no presente caso o que se tem é

$$g_{11}(r) = -1 - \nu(r),$$

que no limite de campo fraco torna-se

$$g_{11}(r) = -1 - \frac{|C|}{r}.$$

A comparação desses casos faz concluir que $C = 2M$.

Portanto, pode-se agora escrever a expressão geral para o espaço estático, esfericamente simétrico e assintoticamente plano na teoria NDL. Ela é dada pela métrica (2.7), ou seja,

$$ds^2 = [1 + \mu(r)]\, dt^2 - [1 + \nu(r)]\, dr^2 - r^2 \left(d\theta^2 + \operatorname{sen}^2 \theta d\varphi^2\right), \tag{2.64}$$

com

$$\nu = \frac{2M}{r}\left[1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^4\right]^{-1/2} \tag{2.65}$$

e

$$\mu = \frac{2M}{r_0\sqrt{2}}\left\{F\left[\arccos\left(r_0/r\right), 1/\sqrt{2}\right] - F\left[\pi/2, 1/\sqrt{2}\right]\right\}. \tag{2.66}$$

2.2 A geometria efetiva

Esta seção ocupa-se com a representação geométrica da teoria NDL. Conforme discutido, o procedimento seguido em [4, 3] define o tensor métrico, em termos do potencial gravitacional, por

$$g_{\mu\nu} \equiv \gamma_{\mu\nu} + \varphi_{\mu\nu}. \tag{2.67}$$

Deve-se chamar a atenção para o importante significado dessa definição: para as formas de energia não gravitacionais, o campo gravitacional é sentido exatamente como se a gravidade fosse responsável por mudar as propriedades métricas do espaço-tempo, de uma estrutura plana para outra curva, relacionada ao campo gravitacional precisamente pela expressão (2.67).

Sabe-se que a geometria efetiva, encontrada na seção anterior, é da forma

$$ds^2 = g_{00}dt^2 - g_{11}dr^2 - r^2\left(d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta d\varphi^2\right), \tag{2.68}$$

com

$$g_{00} = 1 + \mu \tag{2.69}$$

e

$$g_{11} = -(1 + \nu), \tag{2.70}$$

μ e ν dados, respectivamente, por (2.66) e (2.65).

Para $r_0 << r$, segue que

$$g_{00} \approx 1 - \frac{2M}{r} - \frac{M}{5r}\left\{\frac{r_0}{r}\right\}^4 + \cdots \tag{2.71}$$

e

$$g_{11} \approx -1 - \frac{2M}{r} - \frac{M}{r}\left\{\frac{r_0}{r}\right\}^4 + \cdots . \tag{2.72}$$

Portanto, a modificação do espaço-tempo plano, conforme "visto" pela matéria, além da ordem $O(M/r)$ ocorre apenas na ordem $O(M^3/r^5)$, e isso é radicalmente diferente dos resultados da relatividade geral.

Já os parâmetros post-Newtonian da teoria NDL coincidem com os da relatividade geral. De fato, usando o sistema de coordenadas isotrópico, a geometria efetiva da teoria NDL pode ser escrita como

$$\begin{aligned} ds^2 &= \left(1 - 2\alpha\frac{M}{\rho} + 2\beta\frac{M^2}{\rho^2} + \cdots\right)dt^2 \\ &- \left(1 + 2\gamma\frac{M}{\rho}\right)\left\{d\rho^2 + \rho^2\left(d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta d\varphi^2\right)\right\}. \end{aligned} \tag{2.73}$$

Então, os valores dos parâmetros PPN seguem da inspeção direta dessa expressão, e a Tabela 2.1 permite compará-los com os parâmetros correspondentes obtidos da relatividade geral.

Parâmetro PPN	Relatividade geral	Teoria NDL
α	1	1
β	1	1
γ	1	1

Tabela 2.1: Parâmetros PPN da teoria NDL confrontados com os da relatividade geral.

O exame dessa Tabela confirma, portanto, que a análise dos parâmetros PPN é incapaz de revelar qualquer distinção entre a teoria NDL e a relatividade geral. Os efeitos do campo gravitacional sobre a matéria obtidos por uma dessas teorias são exatamente os mesmos obtidos pela outra.

Capítulo 3

Cordas cósmicas

Neste capítulo, estuda-se um tipo de configuração cilindricamente simétrica e estática. A solução mais interessante que satisfaz estes atributos é a da corda cósmica retilínea.

Defeitos topológicos são uma conseqüência natural de vários modelos que procuram entender o cenário padrão (forças eletrofracas e fortes) das interações fundamentais. Admite-se que essas interações se unifiquem numa escala de energia alta − escala de grande unificação (GUT) −, cujo valor, que depende do modelo, é da ordem de 10^{16} GeV. À medida que o universo esfriou, passando de temperaturas comparáveis às da GUT para temperaturas menores, ocorreram transições de fase, e isso deu origem a regiões nas quais as fases iniciais ficaram confinadas. Tais regiões, por serem topologicamente estáveis, são chamadas defeitos topológicos.

Os defeitos topologicos são basicamente de três tipos: monopólos (objetos puntiformes), muros de domínio (superfícies de descontinuidade) e cordas cósmicas (linhas extensas). Apenas cordas cósmicas e muros de domínio podem cruzar o universo inteiro. No instante de sua formação, os defeitos surgem como uma rede que se desenvolve, posteriormente, por causa de sua própria dinâmica e da expansão do universo. Monopólos tendem a se aniquilar com os antimonopólos, e loops de cordas e bolhas de muros de domínio contraem-se e eventualmente dissipam-se em radiação gravitacional. Portanto, a influência cosmológica dos defeitos topológicos depende crucialmente de sua dinâmica. Enquanto é consenso que monopólos e muros de domínio levam a catástrofes cosmológicas, as cordas cósmicas possuem a propriedade de se ajustarem à expansão do universo. Esse fato faz com que a contribuição na densidade de uma rede de cordas seja constante, e essa densidade é, na verdade, desprezível diante da densidade do universo.

Embora a densidade de energia de uma rede de cordas seja baixa para padrões cosmológicos, ela pode impor importantes efeitos sobre a evolução da matéria, em particular no mecanismo de formação de estruturas em larga escala, por causa da peculiar interação das cordas com a matéria.

3.1 Sólitons

Teorias de campo clássicas não-lineares admitem uma categoria de soluções, conhecidas como sólitons, que representam configurações estáveis, com energia bem-definida e sem singularidades [43]. Vórtices, monopólos magnéticos e "instantons" são soluções solitônicas das equações de campo de calibre em, respectivamente, um espaço bidimensional (uma "corda" num espaço tridimensional), um espaço tridimensional (localizada no espaço, mas não no tempo) e um espaço quadridimensional (localizada no espaço e no tempo).

A estabilidade dessas soluções decorre do fato de que as condições de contorno pertencem a classes distintas. O vácuo pertence a apenas uma delas, e essas condições de contorno são caracterizadas por uma particular correspondência (mapa) entre o "group space"e o "co-ordinate space". Além disso, os mapas são topologicamente distintos, pois não podem ser continuamente deformados uns nos outros.

Nas linhas seguintes, um exemplo mostra de que maneira cordas cósmicas (ou vórtices) surgem como soluções de equações de calibre. Antes, porém, outro tipo de solução solitônica − o kink − servirá para mostrar o significado da formação de defeitos topológicos a partir da quebra espontânea de simetria, apesar de esse tipo não surgir de uma teoria de calibre.

3.1.1 Kinks

A equação de sine-Gordon,

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{1}{b^2}\,\mathrm{sen}(b\phi) = 0, \tag{3.1}$$

descreve um campo escalar numa dimensão espacial e noutra temporal. Para soluções dinâmicas, quando se escreve o campo ϕ como

$$\phi(x,t) = f(x - vt) = f(\xi), \tag{3.2}$$

pode-se mostrar que

$$f(\xi) = \frac{4}{b}\arctan\exp\left[\pm\left(\frac{\gamma}{\sqrt{(b)}}\right)\xi\right] \tag{3.3}$$

é solução de (3.1), em que $\gamma = (1 - v^2)^{-\frac{1}{2}}$. Essa solução origina uma "onda solitária", ou sóliton, que se desloca sem mudar tamanho e forma, ou seja, sem dissipar energia.

Percebe-se também que a equação (3.1) possui infinitas soluções estacionárias, dadas por

$$\phi = \frac{2\pi n}{b}, \quad n = 0, \pm1, \pm2, ..., \tag{3.4}$$

ou seja, a equação de sine-Gordon possui estado de vácuo infinitamente degenerado. A lagrangiana para a equação (3.1) é

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 - V(\phi), \tag{3.5}$$

com

$$V(\phi) = \frac{1}{b^2}\left[1 - \cos(b\phi)\right], \tag{3.6}$$

em que a constante foi escolhida de modo que $V = 0$ nas soluções (3.4). As equações de Euler-Lagrange para (3.5) são exatamente a equação (3.1) com o estado de vácuo degenerado. Ou seja, a lagrangiana (3.5) sofre quebra espontânea de simetria em $V(\phi) = 0$, o que dá origem ao sóliton.

A densidade de energia é dada por

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + V(\phi), \tag{3.7}$$

e a expansão de (3.6) em Taylor fornece

$$V(\phi) = \frac{1}{2}\phi^2 - \frac{b^2}{4!}\phi^4 + \cdots, \tag{3.8}$$

ou, com $\lambda = b^2$,

$$V(\phi) = \frac{m^2}{2}\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4 + \cdots, \tag{3.9}$$

em que m é a massa do sóliton, e λ é a constante de acoplamento. Seja agora a configuração na qual ϕ tende a um dos zeros de V ($n = 0$, por exemplo) quando $x \to -\infty$ e a outro zero ($n = 1$, por exemplo) quando $x \to \infty$. Entre esses dois valores, existe uma região em que

$$\phi \neq \frac{2\pi n}{b}, \quad \frac{\partial\phi}{\partial x} \neq 0, \tag{3.10}$$

e, portanto, de (3.7), com energia positiva. Já que a configuração é estática, então $\frac{\partial\phi}{\partial t} = 0$. Assim, para uma solução estacionária de (3.1), seque que

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = \frac{\partial V}{\partial\phi}, \tag{3.11}$$

cuja integração fornece

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 = V(\phi). \tag{3.12}$$

Então, de (3.7) e (3.12), a energia do sóliton estacionário é

$$\begin{aligned} E &= \int \mathcal{H} dx \\ &= \int \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + V(\phi)\right] dx \\ &= \int 2V(\phi) dx \\ &= \int_0^{\frac{2\pi}{b}} \left[2V(\phi)\right]^{\frac{1}{2}} d\phi. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Utilizando (3.6), a integral (3.13) torna-se

$$\begin{aligned} E &= \frac{\sqrt{2}}{b}\int_0^{\frac{2\pi}{b}} \left[1-\cos(b\phi)\right]^{\frac{1}{2}} d\phi \\ &= \frac{\sqrt{2}}{b}\int_0^{2\pi} (1-\cos\alpha)^{\frac{1}{2}} d\alpha \\ &= \frac{8}{b^2} \\ &= \frac{8m^3}{\lambda}, \end{aligned} \tag{3.14}$$

ou seja, a energia do sóliton é finita.

3.1.2 Vórtices

Seja um campo escalar num espaço bidimensional cujo contorno seja o círculo infinito S^1. O campo é tal que no contorno seu valor é

$$\phi = ae^{in\theta} \quad (r \to \infty), \tag{3.15}$$

em que r e θ são coordenadas polares, a é uma constante, e, para que ϕ seja unívoco, n é inteiro. De (3.15), segue que

$$\nabla\phi = \frac{1}{r}\left(inae^{in\theta}\right)\hat{\theta}. \tag{3.16}$$

A lagrangiana e o hamiltoniano são, respectivamente,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{2}|\nabla\phi|^2 - V(\phi) \tag{3.17}$$

e

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}|\nabla\phi|^2 + V(\phi). \tag{3.18}$$

Seja uma configuração estática com, por exemplo,

$$V(\phi) = \left[a^2 - \phi^*\phi\right]^2 \tag{3.19}$$

de modo que $V = 0$ no contorno. Então, quando $r \to \infty$,

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}|\nabla\phi|^2 = \frac{n^2a^2}{2r^2}, \tag{3.20}$$

e a energia da configuração é

$$E \approx \int^{\infty} \mathcal{H} r dr d\theta = \pi n^2 a^2 \int^{\infty} \frac{1}{r} dr, \tag{3.21}$$

divergente, portanto, e o significado desse resultado é que o kink não pode ser generalizado para duas dimensões − nem para mais de duas.

Para contornar essa dificuldade, deve-se considerar uma teoria de calibre, situação em que a derivada covariante do campo escalar assume a forma

$$D_\mu\phi = \partial_\mu\phi + ieA_\mu\phi. \tag{3.22}$$

Escolhendo A_μ tal que

$$\mathbf{A} = \frac{1}{e}\nabla(n\theta) \quad (r \to \infty)\,, \tag{3.23}$$

ou seja,

$$A_r \to 0, \quad A_\theta \to -\frac{n}{er} \quad (r \to \infty)\,, \tag{3.24}$$

segue que, em $r = \infty$,

$$D_\theta \phi = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial \phi}{\partial \theta}\right) + ieA_\theta \phi = 0, \quad D_r \phi = 0, \tag{3.25}$$

ou seja, $D_\mu \phi \to 0$ quando $r \to \infty$. Como a lagrangiana (3.17) é agora

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + |D_\mu \phi|^2 - V(\phi), \tag{3.26}$$

e já que (3.24) é um calibre puro,

$$A_\mu \to \partial_\mu \chi \quad (r \to \infty), \tag{3.27}$$

então $F_{\mu\nu} \to 0$. Como resultado, a lagrangiana (3.26) se anula no contorno, o que significa que nele o hamiltoniano também se anula. Portanto, a escolha do calibre puro permitiu uma configuração de energia finita para o sóliton. Mas o campo de calibre dá ao sóliton também um fluxo magnético. De fato, seja a integral $\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{I}$ ao redor do círculo S^1 no infinito. Pelo teorema de Stokes, o fluxo Φ dentro do círculo é tal que

$$\Phi = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{I} = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \oint A_\theta r d\theta = -\frac{2\pi n}{e}, \tag{3.28}$$

ou seja, o fluxo é quantizado.

Resumindo, construiu-se uma configuração bidimensional, de energia finita, para um campo ϕ composto por uma campo escalar carregado e por uma campo de calibre (o próprio campo eletromagnético). A visualização do sóliton é simples, pois a equação (3.15) mostra que ϕ pode assumir um só valor dentro de um círculo de raio a contido no plano. Porém, $\phi = 0$ quando $a \to 0$, e $\phi = 0$ não é o valor de vácuo esperado. Isso significa que o plano possui um "buraco" de energia finita e estável. Daí, o acréscimo de uma terceira dimensão, da qual ϕ não depende, transforma o ponto numa corda (cósmica), ou vórtice. Além disso, a estabilidade desse defeito topológico deve-se à topologia da variedade do vácuo, o círculo. De fato, uma solução de (3.15) caracterizada por um valor de n não pode ser continuamente deformada noutra solução caracterizada por outro valor de n.

3.2 Formação de cordas cósmicas no universo primordial

A formação de cordas cósmicas no universo primordial é proposta no contexto de teorias de grande unificação. A idéia central dessas teorias é a de que as simetrias na física de partículas resultam de sucessivas quebras espontâneas de simetria de um grupo maior de simetria G:

$$G \longrightarrow H \longrightarrow SU(3) \times SU(2) \times U(1) \longrightarrow SU(3) \times U(1)_{em}. \tag{3.29}$$

Em cosmologia, essas quebras sucessivas de simetria se traduzem por muitas transições de fase à medida que o universo primordial perde temperatura. A cada transição de fase, defeitos topológicos − como cordas cósmicas, paredes de domínio e monopólos − são formados conforme a escala de energia da simetria é quebrada [51]. É interessante notar que o estudo dos defeitos topológicos é consideravelmente simplifcado pelo fato de suas propriedades fundamentais não dependerem dos detalhes do modelo de física de partículas. Isso permite considerar modelos de calibre mais simples, mesmo que não correspondam ao modelo real de grande unificação.

No mais simples modelo de quebra espontânea de simetria local, o modelo de Higgs, um campo escalar complexo ϕ se acopla minimamente a um campo de caibre A_μ conforme a lagrangiana

$$\mathcal{L} = \left(D_\mu \phi\right)^* D^\mu \phi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - V\left(|\phi|\right), \tag{3.30}$$

em que $D_\mu \equiv \partial_\mu + ieA_\mu$ é a derivada covariante associada à simetria $U(1)$ local do modelo, $F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ é o campo propriamente dito da teoria de calibre, e e é o parâmetro de acoplamento. O potencial $V(|\phi|)$ é dado por

$$V(|\phi|) = \frac{\lambda}{4}\left(|\phi|^2 - \eta^2\right)^2, \tag{3.31}$$

em que λ e η são duas constantes positivas. O potencial é do tipo chapéu mexicano.

Esse modelo é invariante pelas transformações do grupo $U(1)$ local

$$\begin{aligned} \phi(x) &\rightarrow e^{i\alpha(x)}\phi(x), \\ A_\mu &\rightarrow A_\mu + \frac{i}{e}\partial_\mu\alpha(x), \end{aligned} \tag{3.32}$$

em que α é função dos pontos x do espaço.

Como o potencial é da forma (3.31), então existe um conjunto de valores degenerados de vácuo, todos equivalentes por uma transformação de calibre, caracterizado por um valor esperado não nulo, ou seja,

$$\langle 0|\phi|0\rangle = \eta e^{i\theta}. \tag{3.33}$$

Os estados de vácuo diferem entre si pelo valor da fase θ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$), e cada um deles situa-se sobre o círculo de raio $|\langle 0|\phi|0\rangle| = \eta$.

É evidente que a transformação (3.32) muda a fase θ do estado de vácuo para $\theta + \alpha$. Assim, esses estados de vácuo não são invariantes por transformação do grupo $U(1)$ local, e a simetria diz-se "espontaneamente quebrada".

Como os estados de vácuo são equivalentes entre si, pode-se escolher qualquer um deles para ser o estado fundamental da teoria. Por simplicidade, elege-se o estado no qual a fase θ é nula ($\langle\phi\rangle = \eta$). Redefinindo ϕ como $\phi \equiv \eta + \frac{\phi_1}{\sqrt{2}}$ (ϕ_1 real), a lagrangiana torna-se

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_1)^2 - \frac{1}{2}m_\phi^2\phi_1^2 - \frac{1}{2}m_A^2 A_\mu A^\mu + \mathcal{L}_{int}, \tag{3.34}$$

em que $\mathcal{L}_{int}$ contém os termos de ordem três e quatro em A_μ e ϕ_1. Os coeficientes $m_\phi = \sqrt{\lambda}\eta$ e $m_A = \sqrt{2}e\eta$ representam, respectivamente, as massas do campos ϕ_1 e A_μ. Portanto, após a quebra espontânea de simetria do grupo $U(1)$ local, o campo de calibre A_μ se torna massivo, fato que decorre da absorção de um grau de liberdade do campo complexo original ϕ.

Considerou-se acima um modelo abeliano de calibre, mas o modelo pode ser generalizado para uma simetria de calibre qualquer [60]. Seja então um modelo de calibre no qual o campo de Higgs é invariante por um grupo de simetria G arbitrário, o potencial permite uma quebra espontânea da simetria G e o campo adquire o valor esperado não nulo de vácuo $\langle\Phi\rangle$. Se um dos estados do vácuo for descrito por $\langle\Phi\rangle = \Phi_0$, então podem-se encontrar os outros elementos de G correspondentes à transformação que deixa os estados do vácuo invariantes e que formam o grupo H, subgrupo de G,

$$H = \{D(g)\Phi_0 = \Phi_0 : g \in G\}\,. \tag{3.35}$$

Para todo $g \in G$, segue que $D(g)\phi_0 \in \mathcal{M}$ e, para todo $h \in H$, obtém-se $D(h)\phi_0 = \phi_0$. Então, $D(g)\phi_0 = g'\phi_0$ se e somente se $g' = gh$, com $h \in H$. Em outras palavras, os pontos de $\mathcal{M}$ estão em correspondência biunívoca com o espaço quociente à esquerda em G. Portanto [28, 43],

$$\mathcal{M} = G/H. \tag{3.36}$$

No caso abeliano, $G = U(1)$ e H é o grupo identidade. Então, $\mathcal{M}$ é topologicamente equivalente ao círculo. Na verdade, a topologia de $\mathcal{M}$ (mais precisamente o grupo de homotopia $\pi_k(\mathcal{M})$) desempenha um papel fundamental na determinação da natureza do defeito topológico [30].

É facil entender por que os defeitos topológicos (particularmente os vórtices) aparecem no modelo (3.30): a lagrangiana (3.30) é invariante pelo grupo de simetria $U(1)$ local. O campo $\phi(x)$ é uma representação de $U(1)$, e o espaço do grupo $U(1)$ é topologicamente equivalente ao círculo S^1. A configuração $\phi = \eta e^{i\theta}$ é uma representação de $U(1)$, além de ser o valor assintótico do campo $\phi(x)$ no espaço físico bidimensional. Mas esse contorno é também um círculo (no espaço bidimensional em que $x \equiv (r, \theta)$, o círculo desse contorno é caracterizado por $r \to \infty$, e θ varia de 0 a 2π). Portanto, $\phi(x)$ define uma aplicação do contorno S^1 do espaço físico no espaço do grupo S^1 do vácuo:

$$\phi : S^1 \to S^1.$$

Essa aplicação é não trivial e é caracterizada por um inteiro n (o número de voltas). A estabilidade dessas configurações deve-se a razões puramente topológicas. Uma solução caracterizada por um valor de n é estável porque não se pode deformar uma solução continuamente noutra solução caracterizada por outro valor de n. Por esses argumentos de continuidade, o campo ϕ tende a zero quando $r \to 0$ e, já que esse valor não corresponde ao valor esperado do vácuo ($\phi = 0$ não minimiza o potencial $V(\phi)$), nesse local haverá uma densidade de energia não nula associada ao núcleo da corda. Destaca-se que os defeitos pontuais num plano são seções de linhas (daí o nome "cordas") em três dimensões.

De maneira geral, pode-se dizer que os vórtices topologicamente estáveis estão presentes nos modelos em que a variedade de vácuo $\mathcal{M}$ não é simplesmente conexa, propriedade revelada quando o grupo fundamental (o primeiro grupo de homotopia) de $\mathcal{M}$ é não trivial:

$$\pi_1(\mathcal{M}) \neq I.$$

Portanto, os elementos de $\mathcal{M}$ classificam os tipos de defeitos que um modelo admite. No caso particular do modelo de Higgs (3.30), os elementos do grupo fundamental $\pi_1(\mathcal{M})$ se caracterizam pelo grupo dos números inteiros: $\pi_1(\mathcal{M}) = Z$. Existe um número infinito de vórtices topologicamente estáveis, cada um caracterizado por um particular valor de n, o número de voltas.

Seja agora o contexto cosmológico [30]. Todo o raciocínio precedente ocorreu para o caso de temperatura nula ($T = 0$). Quando um sistema estatístico está numa temperatura suficientemente alta, a simetria se restaura [31]. Com efeito, introduzindo um potencial efetivo que contém correções térmicas[1] do potencial $V(\phi)$ dado por (3.31), então

$$\begin{aligned} V_{ef}(\phi, T) &= V(\phi) + \left(\frac{\lambda + 3e^2}{12}\right) T^2 |\phi|^2 \\ &= m^2(T)|\phi|^2 + \frac{\lambda}{4}|\phi|^4, \end{aligned} \tag{3.37}$$

em que $m^2(T)$, que é a massa efetiva do campo de Higgs no estado simétrico $\langle\phi\rangle = 0$,

$$m^2(T) = \frac{1}{12}[(\lambda + 3e^2)T^2 - 6\lambda\eta^2], \tag{3.38}$$

anula-se quando T tende a um valor crítico

$$T_c = \left(\frac{6\lambda}{\lambda + 3e^2}\right)^{1/2} \eta. \tag{3.39}$$

É fácil ver que o termo $m^2(T)$ é positivo quando $T > T_c$. Logo, $\langle\phi\rangle = 0$ minimiza o potencial efetivo, e a simetria é restaurada. Se $T < T_c$, então a massa efetiva é negativa. O estado simétrico se torna instável, e ϕ desenvolve um valor esperado térmico não nulo,

$$\langle\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(T_c^2 - T^2)^{1/2}, \tag{3.40}$$

[1] Deve-se supor que a relação $\lambda >> e^4$ é válida de modo que se possam negligenciar as correções radioativas do potencial de Higgs.

em que T_c, dado por (3.39), é tipicamente da ordem de grandeza do parâmetro η da quebra de simetria.

No contexto da cosmologia [30], o universo nos estados iniciais era muito denso e quente e, assim, o valor inicial de equilíbrio do campo de Higgs era $\langle\phi\rangle = 0$. Quando o universo esfriou, e sua temperatura se tornou inferior à temperatura crítica T_c, o campo ϕ assumiu o valor esperado (3.40), que corresponde a um ponto qualquer da variedade $\mathcal{M}$ de potencial mínimo efetivo. Entretanto, a fase θ do campo ϕ se torna arbitrária e não é determinada pela física local. A escolha de uma fase depende das flutuações estatísticas, e θ assume diferentes valores em diferentes regiões do espaço. Os valores de $\langle\phi\rangle$ em duas dessas regiões são completamente independentes se elas estão separadas por uma distância maior que um certo fator de correlação ζ. A magnitude de ζ depende da dinâmica da transição de fase, mas deve satisfazer a condição de causalidade

$$\zeta(t) < d_H(t), \tag{3.41}$$

em que $d_H(t)$ é o horizonte causal. Se o grupo de homotopia da variedade $\mathcal{M}$ é não trivial, o campo estocástico $\langle\phi\rangle$ contorna a fronteira de $\mathcal{M}$ não trivialmente, e as estruturas de domínio se formam com um comprimento característico, comparado a ζ.

De maneira geral, é a topologia da variedade de vácuo que determina se uma estrutura aparece num modelo em que há quebra espontânea de simetria. As propriedades de $\mathcal{M}$ são convenientemente analisadas com a ajuda dos grupos de homotopia: o k-ésimo grupo de homotopia $\pi_k(\mathcal{M})$ classifica qualitativamente as aplicações de uma esfera S^k k-dimensional numa variedade de vácuo. Portanto, a natureza dos defeitos de uma dimensão qualquer, formados num certo modelo, é determinada de acordo com os elementos do grupo de homotopia da variedade do vácuo (Tabela 3.1).

Com relação às cordas cósmicas, a analogia mais simples no espaço-tempo de Minkowski é a configuração do tipo vórtice presente no modelo abeliano de Higgs (3.30). Tais configurações foram encontradas por Nielsen e Olesen [39].

No calibre de Lorentz $\partial_\mu A^\mu = 0$, o campo de Higgs assume a forma assintótica

$$\phi \sim \eta e^{in\theta},$$

em que n é o número de voltas, e o campo de calibre A_μ toma a forma assintótica

$$A_\mu \sim -\frac{i}{e}\partial_\mu \ln \phi.$$

Apesar da aparência do campo A_μ, de calibre puro, essa solução não pode ser anulada em toda parte se $n \neq 0$. Isso se deve à existência de um fluxo magnético Φ_B,

$$\Phi_B = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \frac{2\pi n}{e}. \tag{3.42}$$

Com as formas assintóticas acima, segue que $D_\mu \phi \sim 0$ e $F_{\mu\nu} \sim 0$, assintoticamente. Assim, a densidade de energia tende rapidamente para zero quando se afasta do núcleo da corda, e a energia total por unidade de com-

Defeito topológico	Dimensão	Classificação
Paredes de domínio	2	$\pi_0(\mathcal{M})$
Cordas	1	$\pi_1(\mathcal{M})$
Monopólos	0	$\pi_2(\mathcal{M})$
Texturas		$\pi_3(\mathcal{M})$

Tabela 3.1: Classificação topológica dos defeitos conforme o grupo de homotopia $\pi_k(\mathcal{M})$.

primento é finita. O raio da corda é determinado pelo comprimento de onda Compton dos campos de Higgs e de calibre: $\delta_\phi \sim m_\phi^{-1}$ e $\delta_A \sim m_A^{-1}$, com $m_\phi = \sqrt{\lambda}\eta$ e $m_A = \sqrt{2}e\eta$, respectivamente. As configurações do tipo vórtices são caracterizadas por um parâmetro μ $-$ a densidade linear de massa $-$ de ordem de grandeza η^2. A distâncias maiores que o raio da corda, a estrutura interna torna-se desprezível, e a corda se compara a um objeto unidimensional. As cordas consideradas sem estrutura interna são chamadas cordas de Nambu-Goto, e sua lagrangiana é obtida como a lagrangiana efetiva de uma corda no contexto do modelo abeliano de Higgs. Como a corda descrita por $x^\mu\left(\zeta^0, \zeta^1\right)$ não possui estrutura interna, então sua lagrangiana não pode depender das propriedades geométricas da superfície de universo [50],

$$\mathcal{S} = \mu \int \sqrt{-h}d^2\zeta,$$

em que h é o determinante da métrica induzida sobre a superfície de "world-sheet" da corda $h_{ab} = \eta_{\mu\nu}x^\mu_{,a}x^\nu_{,b}$.

Quando se despreza a estrutura interna da corda cósmica, as quantidades físicas de interesse, como o tensor de energia$-$momento, podem ser calculadas no valor esperado sobre a seção transversal da corda. Assim, supondo a corda estática e retilínea, localizada sobre o eixo z num sistema de coordenadas (t, z, x^i), $(i = 1, 2)$, o tensor de energia$-$momento da corda assume a forma [49]

$$T^\nu_\mu = \mu\delta(x^1)\delta(x^2)diag(1, 1, 0, 0). \tag{3.43}$$

Portanto, a corda possui uma grande tensão sobre o eixo z, que é igual à densidade linear de massa. Imaginando a formação das cordas cósmicas no universo primordial, diante de escalas de energia da grande unificação, η será da ordem de 10^{16} GeV. Assim, tais objetos são estáveis topologicamente e sobreviveriam ainda hoje com uma densidade linear de massa da ordem de

$\mu \sim 10^{22}$ g/cm.

É de grande interesse o estudo do campo gravitacional das cordas, mas ele não pode ser descrito pela teoria newtoniana, pois o tensor de energia−momento é de natureza relativística. Na próxima seção, estuda-se a corda cósmica retilínea em relatividade geral [23, 35].

3.3 Cordas cósmicas em relatividade geral

3.3.1 O campo gravitacional de uma corda cósmica retilínea

A teoria do modelo abeliano de Higgs, acoplado minimamente à métrica $g_{\mu\nu}$ do espaço-tempo, é regida pela lagrangiana[2]

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4} g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta} F_{\alpha\beta} F_{\gamma\delta} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \left(D_\alpha \phi\right)^* D_\beta \phi + \lambda \left(\phi^* \phi - \eta^2\right)^2 - \frac{1}{16\pi} R, \quad (3.44)$$

em que $F_{\alpha\beta} \equiv \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$ é a intensidade do campo associado ao campo de calibre A_α, $D_\alpha \phi$ é a derivada covariante de calibre, $D_\alpha \phi + ieA_\alpha \phi$, e R é o escalar de curvatura. A teoria é construída por uma invariância de calibre local $U(1)$, com a transformação de calibre

$$\phi(x) \rightarrow \phi(x) e^{ie\alpha(x)} \quad \text{e} \quad A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \alpha(x),$$

em que α é uma função dos pontos x do espaço-tempo.

O potencial $V(\phi) = \lambda(\phi^* \phi - \eta^2)^2$, do tipo chapéu mexicano, é mínimo para $|\langle\phi\rangle| = \eta$, e a simetria é espontaneamente quebrada. A interpretação física da lagrangiana (3.44) é que um campo vetorial A_μ e um campo escalar ϕ adquirem massas $m_A = e\eta$ e $m_\phi = 2\sqrt{2\lambda}\eta$, respectivamente.

[2] O sistema de unidades é tal que $\hbar = c = G = 1$.

A variação de (3.44) com relação à métrica conduz às equações de Einstein,

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}, \tag{3.45}$$

em que $T_{\mu\nu}$ é o tensor de energia−momento da parte material da lagrangiana (3.44):

$$T_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}\mathcal{L}_m + \frac{1}{2}\left[(D_\mu\phi)^* D_\nu\phi + (D_\nu\phi)^* D_\mu\phi\right] + \frac{1}{2}F^\alpha_\mu F_{\alpha\nu}. \tag{3.46}$$

As equações de campo acopladas são obtidas a partir da parte material de (3.44):

$$D_\mu D^\mu\phi \quad + \quad 2\frac{\partial V}{\partial\phi^*} = 0, \tag{3.47}$$

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} \quad + \quad i\frac{e}{2}\left[\phi(D_\mu\phi)^* - \phi^*(D_\mu\phi)\right] g^{\mu\nu} = 0. \tag{3.48}$$

As equações (3.46), (3.47) e (3.48) constituem um sistema de equações diferenciais parciais acopladas nos campos A_μ e ϕ e na métrica $g_{\mu\nu}$. Essas equações dependem de três constantes de acoplamento positivas: e, λ e η.

Entretanto, a resolução desse sistema de equações exige condições sobre os campos. Garfinkle [23] e Laguna-Castillo e Matzner [35] estudaram as soluções estáticas e cilindricamente simétricas que descrevem uma corda cósmica retilínea. Com a hipótese de que a métrica possui as mesmas simetrias da corda cósmica estática e cilindricamente simétrica, pode-se escrever, de forma genérica,

$$ds^2 = e^{A(\rho)}dt^2 - e^{B(\rho)}dz^2 - d\rho^2 - e^{C(\rho)}d\varphi^2 \tag{3.49}$$

num sistema de coordenadas cilíndricas (t, z, ρ, φ) tal que $\rho \geq 0$ e $0 \leq \varphi < 2\pi$. As funções A, B e C dependem apenas de ρ e satisfazem, sobre o eixo $\rho = 0$, as condições de contorno[3]

$$A(0) = B(0) = 0 \quad e \quad \lim_{\rho\to 0}\frac{e^C}{\rho^2} = 1. \tag{3.50}$$

Por analogia com as configurações de vórtices em Minkowski [39], os campos ϕ e A_μ assumem as formas (com $n \neq 0$)

$$\begin{aligned} \phi &= R(\rho)e^{in\varphi}, \\ A_\mu &= \frac{1}{e}\left[P(\rho) - n\right]\delta_\mu^\varphi, \end{aligned} \tag{3.51}$$

com as condições de contorno

$$\begin{aligned} R(\rho) \to 0 \quad & e \quad P(\rho) \to n \ \text{ quando } \ \rho \to 0, \\ R(\rho) \to n \quad & e \quad P(\rho) \to 0 \ \text{ quando } \ \rho \to \infty. \end{aligned} \tag{3.52}$$

O fluxo magnético das configurações de vórtices é quantizado por

$$\Phi_B = \frac{2\pi n}{e}. \tag{3.53}$$

Com as hipóteses acima, as equações de campo são escritas como

$$\frac{d^2R}{d\rho^2} + \frac{1}{2}\frac{d}{d\rho}(A+B+C)\frac{dR}{d\rho} - R[4\lambda(R^2-\eta^2) + e^{-C}P^2] = 0,$$

$$\frac{d^2P}{d\rho^2} + \frac{1}{2}\frac{d}{d\rho} - e^2R^2P = 0, \tag{3.54}$$

[3]Escolhidas de tal forma que os vetores de killing ∂_t e ∂_z, normalizados, sejam iguais a 1 ou -1.

e as equações de Einstein tomam a forma

$$
\begin{aligned}
G_t^t &= \frac{A''}{2} + \frac{A'}{4}(A' + B' + C') = 8\pi T_t^t \\
G_z^z &= \frac{B''}{2} + \frac{b'}{2}(A' + B' + C') = 8\pi T_z^z \\
G_\rho^\rho &= \frac{1}{2}(A'' + B'' + C'') + \frac{1}{4}(A'^2 + B'^2 C'^2 = 8\pi T_\rho^\rho \\
G_\varphi^\varphi &= \frac{C''}{4}(A' + B' + C') = 8\pi T_\varphi^\varphi,
\end{aligned}
$$

em que as componentes não nulas do tensor de energia−momento são

$$
\begin{aligned}
T_t^t &= T_z^z = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{dR}{d\rho}\right)^2 + e^{-C}R^2P^2\right. \\
&+ \left. 2\lambda\left(R^2 - \eta^2\right)^2 + \frac{e^{-C}}{e^2}\left(\frac{dR}{d\rho}\right)^2\right], \qquad (3.55)
\end{aligned}
$$

$$
T_\rho^\rho = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{dR}{d\rho}\right)^2 - e^{-C}R^2P^2 - 2\lambda\left(R^2 - \eta^2\right)^2 + \frac{e^{-c}}{e^2}\left(\frac{dP}{d\rho}\right)^2\right], \qquad (3.56)
$$

$$
T_\varphi^\varphi = \frac{1}{2}\left[-\left(\frac{dR}{d\rho}\right)^2 + e^{-C}R^2P^2 - 2\lambda\left(R^2 - \eta^2\right)^2 + \frac{e^{-c}}{e^2}\left(\frac{dP}{d\rho}\right)^2\right] \qquad (3.57)
$$

A expressão (3.55) coloca em evidência uma propriedade da corda cósmica: a corda é invariante por tranformação de Lorentz no eixo z, conforme a hipótese feita por Vilenkin [49]. Essa propriedade permite simplificar o sistema de equações. Com efeito, a expressão (3.55) implica $G_t^t = G_z^z$, que, por sua vez, implica $A(\rho) = B(\rho)$.

Apesar dessa simplificação, não é possível encontrar uma solução exata[4],

[4]Apenas no caso particular em que $m_\phi = m_A$, Linet [36] encontrou soluções exatas para tais equações.

mas apenas soluções assintóticas. Garfinkle [23] mostrou que a métrica assume a forma assintótica

$$ds^2 = e^{a_0}(dt^2 - dz^2) - d\rho^2 - e^{2a_0}(\kappa_2\rho + a_1)^2 d\varphi^2, \tag{3.58}$$

em que a_0, a_1 e κ_2 são constantes. A métrica (3.58), depois da transformação de coordenadas [23]

$$\begin{aligned} t' &= e^{\frac{a_0}{2}}t \qquad \text{e} \qquad z' = e^{\frac{a_0}{2}}z, \\ \rho' &= \rho + \frac{a_1}{\kappa_2} \qquad \text{e} \qquad \varphi' = \kappa_2 e^{-a_0}\varphi, \end{aligned}$$

assume a forma da métrica de Minkowski:

$$ds^2 = dt'^2 - dz'^2 - d\rho'^2 - \rho'^2 d\varphi'^2. \tag{3.59}$$

Na forma (3.59), o novo angulo azimutal φ' varia no intervalo $0 \leq \varphi' < 2\pi\kappa_2 e^{-a_0}$ e, assim, o espaço-tempo não cobre todo o espaço de Minkowski: cobre Minkowski menos um angulo e, por esse fato, o espaço diz-se cônico. O ângulo que falta (o déficit angular) pode ser determinado com a ajuda da fórmula $-$ sobre a superfície (t, z)=constante (teorema de Gauss-Bonnet) [22]$-$

$$\triangle = \frac{1}{2}\int d^2x\sqrt{\tilde{g}}R^{(2)}, \tag{3.60}$$

em que $R^{(2)}$ é o escalar de curvatura da métrica induzida $\tilde{g}$ sobre a superfície (t, z)=constante. Quando se integra a equação $G^t_t = 8\pi T^t_t$ levando em conta as condições de contorno (3.50) e se utiliza a definição de densidade de massa por unidade de comprimento,

$$\mu \equiv \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} d^2x\sqrt{\tilde{g}}T^t_t, \tag{3.61}$$

obtém-se, finalmente,

$$\triangle = 8\pi\mu + \frac{\pi}{2}\int_o^{\infty} d\rho\beta A'^2. \tag{3.62}$$

Deve-se notar que $\triangle \geq 8\pi\mu$, em que a diferença entre $\triangle$ e μ decorre da linearidade das equações de Einstein.

Capítulo 4

Cordas cósmicas na teoria NDL

Levando em conta o que desenvolvemos ou apresentamos até agora, este capítulo dedica-se à resolução das equações do movimento da teoria NDL quando se considera o campo gravitacional produzido por uma corda cósmica local − situação em que se admite que a métrica do espaço possui simetria cilíndrica.

O procedimento que leva à solução, que de fato encontramos, é análogo ao seguido no capítulo 2, quando se trabalhou com uma métrica de simetria esférica. Porém, a solução agora obtida é consideravelmente mais simples, pois é dada em termos de funções conhecidas e não em termos de integrais elípticas, por exemplo, como naquele caso.

4.1 Solução para cordas locais

Consideraremos a região exterior a uma corda cósmica local. Nesse caso, o tensor de energia−momento é identicamente nulo, e a fonte possui simetria cilíndrica. Então, trabalharemos com a métrica

$$ds^2 = (1 + \alpha(r))\, dt^2 - dr^2 - \big(r^2 + C(r)\big)\, d\theta^2 - (1 + \beta(r))\, dz^2, \qquad (4.1)$$

cujas quantidades não nulas são

$$\gamma_{00} = 1, \quad \gamma_{11} = -1, \quad \gamma_{22} = -r^2, \quad \gamma_{33} = -1,$$
$$\gamma^{00} = 1, \quad \gamma^{11} = -1, \quad \gamma^{22} = -\frac{1}{r^2}, \quad \gamma^{33} = -1,$$
$$\varphi_{00} = \alpha(r), \quad \varphi_{22} = -C(r), \quad \varphi_{33} = -\beta(r).$$

Logo, o traço F_α, equação (2.8), é tal que

$$\begin{aligned}
F_\alpha &= \varphi_{00,\alpha}\gamma^{00} + \varphi_{11,\alpha}\gamma^{11} + \varphi_{22,\alpha}\gamma^{22} + \varphi_{33,\alpha}\gamma^{33} \\
&+ \varphi_{00}\gamma^{00}_{,\alpha} + \varphi_{11}\gamma^{11}_{,\alpha} + \varphi_{22}\gamma^{22}_{,\alpha} + \varphi_{33}\gamma^{33}_{,\alpha} \\
&- \varphi_{0\alpha;0}\gamma^{00} - \varphi_{1\alpha;1}\gamma^{11} - \varphi_{2\alpha;2}\gamma^{22} - \varphi_{3\alpha;3}\gamma^{33} \\
&= \alpha_{,\alpha} + \frac{1}{r^2}C_{,\alpha} + \beta_{,\alpha} - C\left(-\frac{1}{r^2}\right)_{,\alpha} \\
&- \left(\varphi_{0\alpha,0} - \Delta^\sigma_{\alpha 0}\varphi_{\sigma 0}\right) + \left(\varphi_{1\alpha,1} - \Delta^\sigma_{\alpha 1}\varphi_{\sigma 1}\right) \\
&+ \frac{1}{r^2}\left(\varphi_{2\alpha,2} - \Delta^\sigma_{\alpha 2}\varphi_{\sigma 2}\right) + \left(\varphi_{3\alpha,3} - \Delta^\sigma_{\alpha 3}\varphi_{\sigma 3}\right) \\
&= \alpha_{,\alpha} + \frac{1}{r^2}C_{,\alpha} + \beta_{,\alpha} - C\left(-\frac{1}{r^2}\right)_{,\alpha} \\
&+ \frac{1}{2}\gamma^{0\lambda}\left(\gamma_{\lambda\alpha,0} + \gamma_{\lambda 0,\alpha} - \gamma_{\alpha 0,\lambda}\right)\alpha \\
&+ \frac{1}{2}\frac{1}{r^2}\gamma^{2\lambda}\left(\gamma_{\lambda\alpha,2} + \gamma_{\lambda 2,\alpha} - \gamma_{\alpha 2,\lambda}\right)C \\
&+ \frac{1}{2}\gamma^{3\lambda}\left(\gamma_{\lambda\alpha,3} + \gamma_{\lambda 3,\alpha} - \gamma_{\alpha 3,\lambda}\right)\beta \\
&= \alpha_{,\alpha} + \frac{1}{r^2}C_{,\alpha} + \beta_{,\alpha} - C\left(-\frac{1}{r^2}\right)_{,\alpha} + \frac{1}{2}\frac{1}{r^2}\left(-\frac{1}{r^2}\right)\left(-r^2_{,\alpha}\right)C, \quad (4.2)
\end{aligned}$$

ou seja,

$$F_\alpha = \alpha_{,\alpha} + \frac{1}{r^2}C_{,\alpha} + \beta_{,\alpha} + C\left(\frac{1}{r^2}\right)_{,\alpha} + \frac{C}{2r^4}\left(r^2_{,\alpha}\right). \quad (4.3)$$

Portanto, por inspeção direta, segue que

$$F_1 = \alpha' + \frac{C'}{r^2} + \beta' - \frac{C}{r^3}, \quad F_0 = F_2 = F_3 = 0. \quad (4.4)$$

Para o cálculo do campo (2.11), ou seja,

$$
\begin{aligned}
F_{\alpha\mu\nu} &= \frac{1}{2}\Big[\varphi_{\nu\alpha,\mu} - \frac{1}{2}\gamma^{\alpha\alpha}\left(\gamma_{\alpha\nu,\mu} + \gamma_{\alpha\mu,\nu} - \gamma_{\mu\nu,\alpha}\right)\varphi_{\alpha\alpha} \\
&- \varphi_{\nu\mu,\alpha} + \frac{1}{2}\gamma^{\mu\mu}\left(\gamma_{\mu\nu,\alpha} + \gamma_{\mu\alpha,\nu} - \gamma_{\nu\alpha,\mu}\right)\varphi_{\mu\mu} \\
&+ F_\alpha\gamma_{\mu\nu} - F_\mu\gamma_{\alpha\nu}\Big],
\end{aligned}
\tag{4.5}
$$

faremos, conforme discutido no capítulo 1, $\nu = \mu$:

$$
\begin{aligned}
F_{\alpha\mu\mu} &= \frac{1}{2}\Big[\varphi_{\mu\alpha,\mu} - \frac{1}{2}\gamma^{\alpha\alpha}\left(2\gamma_{\alpha\mu,\mu} - \gamma_{\mu\mu,\alpha}\right)\varphi_{\alpha\alpha} \\
&- \varphi_{\mu\mu,\alpha} + \frac{1}{2}\gamma^{\mu\mu}\gamma_{\mu\mu,\alpha}\varphi_{\mu\mu} \\
&+ F_\alpha\gamma_{\mu\mu} - F_\mu\gamma_{\alpha\mu}\Big].
\end{aligned}
\tag{4.6}
$$

Agora, com as quantidades não nulas $\gamma_{\mu\nu}$, $\gamma^{\mu\nu}$ e $\varphi_{\mu\nu}$, acima obtidas, e com (4.4), obteremos as componentes de (4.6).

Se $\mu = 0$, então $F_{\alpha00} = \frac{1}{2}\left(F_\alpha - \alpha_{,\alpha}\right)$. Daí,

$$
F_{100} = \frac{1}{2}\left(-\alpha' + \alpha' + \frac{C'}{r^2} + \beta' - \frac{C}{r^3}\right), \tag{4.7}
$$

ou seja, $F_{200} = F_{300} = 0$, e

$$
F_{100} = \frac{1}{2}\left(\beta' + \frac{C'}{r^2} - \frac{C}{r^3}\right). \tag{4.8}
$$

Se $\mu = 1$, então $F_{\alpha11} = \frac{1}{2}\left(\varphi_{1\alpha,1} - F_\alpha - F_1\gamma_{\alpha1}\right)$. Logo,

$$
F_{011} = F_{211} = F_{311} = 0. \tag{4.9}
$$

Se $\mu = 2$, então $F_{\alpha 22} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\gamma^{\alpha\alpha}\gamma_{22,\alpha}\varphi_{\alpha\alpha} - \varphi_{22,\alpha} + \frac{1}{2}\frac{C}{r^2}\gamma_{22,\alpha} - r^2 F_\alpha\right]$. Portanto,

$$F_{122} = \frac{1}{2}\left[C' + \frac{1}{2}\frac{C}{r^2}(-2r) - r^2\left(\alpha' + \frac{C'}{r^2} + \beta' - \frac{C}{r^3}\right)\right], \tag{4.10}$$

isto é,

$$F_{122} = -\frac{1}{2}\left(\alpha' + \beta'\right) r^2, \tag{4.11}$$

e $F_{022} = F_{322} = 0$.

Se $\mu = 3$, então $F_{\alpha 33} = -\frac{1}{2}\left(\varphi_{33,\alpha} + F_\alpha\right)$. Daí,

$$F_{033} = 0,$$

$$F_{133} = -\frac{1}{2}\left[-\beta' + \left(\alpha' + \frac{C'}{r^2} + \beta' - \frac{C}{r^3}\right)\right], \tag{4.12}$$

isto é,

$$F_{133} = -\frac{1}{2}\left(\alpha' + \frac{C'}{r^2} - \frac{C}{r^3}\right), \tag{4.13}$$

e

$$F_{233} = 0.$$

Encontramos, portanto, as componentes não nulas do traço F_α e do campo $F_{\alpha\mu\nu}$, a menos da anti-simetria $F_{\alpha\mu\nu} = -F_{\mu\alpha\nu}$, que listamos abaixo:

$$\begin{cases} F_1 = \alpha' + \frac{C'}{r^2} + \beta' - \frac{C}{r^3} \\ F_{100} = \frac{1}{2}\left(\beta' + \frac{C'}{r^2} - \frac{C}{r^3}\right) \\ F_{122} = -\frac{1}{2}\left(\alpha' + \beta'\right) r^2 \\ F_{133} = -\frac{1}{2}\left(\alpha' + \frac{C'}{r^2} - \frac{C}{r^3}\right) \end{cases}$$

Para escrevermos as equações do movimento (2.28), ou seja,

$$L_A F^{\lambda}{}_{(\mu\nu);\lambda} + L_{A,1} F^{1}{}_{(\mu\nu)} = 0, \tag{4.14}$$

as quantidades $F^{\lambda}{}_{(\mu\nu);\lambda}$ dadas pela equação (2.31),

$$\begin{aligned} F^{\lambda}{}_{(\mu\nu);\lambda} &= \gamma^{\lambda\lambda}\left\{(F_{\lambda\mu\nu,\lambda} + F_{\lambda\nu\mu,\lambda})\right. \\ &- \frac{1}{2}\gamma^{\sigma\sigma}\left[(2\gamma_{\sigma\lambda,\lambda} - \gamma_{\lambda\lambda,\sigma})(F_{\sigma\mu\nu} + F_{\sigma\nu\mu})\right. \\ &+ (\gamma_{\sigma\mu,\lambda} + \gamma_{\sigma\lambda,\mu} - \gamma_{\lambda\mu,\sigma})(F_{\lambda\sigma\nu} + F_{\lambda\nu\sigma}) \\ &+ \left.\left.(\gamma_{\sigma\nu,\lambda} + \gamma_{\sigma\lambda,\nu} - \gamma_{\nu\lambda,\sigma})(F_{\lambda\mu\sigma} + F_{\lambda\sigma\mu})\right]\right\}, \end{aligned} \tag{4.15}$$

não nulas são

$$F^{\lambda}{}_{(00);\lambda} = \gamma^{11}\left(2F_{100,1} + \gamma^{22}\gamma_{22,1}F_{100}\right) \tag{4.16}$$

$$F^{\lambda}{}_{(11);\lambda} = -\gamma^{22}\gamma^{22}\gamma_{22,1}F_{212} \tag{4.17}$$

$$F^{\lambda}{}_{(22);\lambda} = \gamma^{11}\left(2F_{122,1} - 2\gamma^{22}\gamma_{22,1}F_{122}\right) \tag{4.18}$$

$$F^{\lambda}{}_{(33);\lambda} = \gamma^{11}\left(2F_{133,1} + \gamma^{22}\gamma_{22,1}F_{133}\right), \tag{4.19}$$

e as quantidades $F^{1}{}_{\mu\nu}$ não nulas são as equações (2.38), (2.39) e (2.40):

$$F^{1}{}_{(00)} = -\left(F_{100} + F_{100}\right) = -2F_{100}, \tag{4.20}$$

$$F^{1}{}_{(22)} = -2F_{122}, \tag{4.21}$$

e

$$F^{1}{}_{(33)} = -2F_{133}. \tag{4.22}$$

Portanto, (4.16),..., (4.22) fornecem as equações não identicamente nulas de (4.14), e uma delas é exatamente (4.17),

$$\gamma^{22}\gamma^{22}\gamma_{22,1}F_{212} = 0, \tag{4.23}$$

pois ${F^1}_{(00)} = 0$ e $L_A \neq 0$.

Mas (4.23) implica

$$F_{212} = 0, \tag{4.24}$$

resultado que anula (4.18), pois $F_{212} = -F_{122}$.

Portanto, as equações não identicamente nulas de (4.14) agora são apenas duas:

$$L_A {F^\lambda}_{(00);\lambda} + L_{A,1} {F^1}_{(00)} = 0 \tag{4.25}$$

e

$$L_A {F^\lambda}_{(33);\lambda} + L_{A,1} {F^1}_{(33)} = 0. \tag{4.26}$$

Da conclusão de que $F_{122} = 0$ e de $F_{122} = -\frac{1}{2}(\alpha' + \beta')\, r^2$, equação (4.11), segue que $\beta' = -\alpha'$. Levando em conta esse resultado, reescrevemos F_1 e F_{100}, equações (4.4) e (4.8), respectivamente, que, juntamente com F_{133}, equação (4.13), serão utilizadas em (4.25) e (4.26).

$$F_1 = \frac{C'}{r^2} - \frac{C}{r^3}, \tag{4.27}$$

$$F_{100} = \frac{1}{2}\left(-\alpha' + \frac{C'}{r^2} - \frac{C}{r^3}\right), \tag{4.28}$$

$$F_{133} = \frac{1}{2}\left(-\alpha' - \frac{C'}{r^2} + \frac{C}{r^3}\right). \tag{4.29}$$

Com os valores (4.16), (4.19), (4.20), (4.22), (4.28) e (4.29), as equações (4.25) e (4.26) são reescritas como

$$L_A\left(\alpha''-\frac{C''}{r^2}+\frac{2C'}{r^3}-\frac{2C}{r^4}+\frac{\alpha'}{r}\right)-2L_{A,1}\frac{1}{2}\left(-\alpha'+\frac{C'}{r^2}-\frac{C}{r^3}\right)=0 \quad (4.30)$$

e

$$L_A\left(\alpha''+\frac{C''}{r^2}-\frac{2C'}{r^3}+\frac{2C}{r^4}+\frac{\alpha'}{r}\right)-2L_{A,1}\frac{1}{2}\left(-\alpha'-\frac{C'}{r^2}+\frac{C}{r^3}\right)=0, \quad (4.31)$$

e a soma de (4.30) com (4.31) produz

$$L_A\left(\alpha''+\frac{\alpha'}{r}\right)+L_{A,1}\alpha'=0. \quad (4.32)$$

Para calcular L_A e $L_{A,1}$, precisamos dos invariantes A e B,

$$\begin{aligned} A &= F_{\alpha\mu\nu}F^{\alpha\mu\nu} \\ &= 2\gamma^{11}\left[\left(F_{100}\gamma^{00}\right)^2+\left(F_{122}\gamma^{22}\right)^2+\left(F_{133}\gamma^{33}\right)^2\right] \\ &= -2\left[\frac{1}{4}\left(-\alpha'+\frac{C'}{r^2}-\frac{C}{r^3}\right)^2+\frac{1}{4}\left(-\alpha'-\frac{C'}{r^2}+\frac{C}{r^3}\right)^2\right], \end{aligned} \quad (4.33)$$

$$\begin{aligned} B &= F_\alpha F^\alpha \\ &= F_1F_1\gamma^{11} \\ &= -\left(\frac{C'}{r^2}-\frac{C}{r^3}\right)^2, \end{aligned} \quad (4.34)$$

de onde obtemos

$$-A+B=\left(\alpha'\right)^2. \quad (4.35)$$

Como sabemos, da equação (2.25), que

$$L_A = -\frac{1}{2k}\left(1 + \frac{-A + B}{b^2}\right)^{-\frac{1}{2}}, \tag{4.36}$$

isso nos leva, depois de usar (4.35), a

$$L_A = -\frac{1}{2k}\left(1 + \frac{\alpha'^2}{b^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \tag{4.37}$$

e a

$$L_{A,1} = \frac{1}{2k}\left(1 + \frac{\alpha'^2}{b^2}\right)^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{\alpha'\alpha''}{b^2}\right). \tag{4.38}$$

Então, a equação (4.32), com os resultados (4.37) e (4.38), torna-se

$$-\frac{1}{2k}\left(1 + \frac{\alpha'^2}{b^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\alpha'' + \frac{\alpha'}{r}\right) + \frac{1}{2k}\left(1 + \frac{\alpha'^2}{b^2}\right)^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{\alpha'\alpha''}{b^2}\right)\alpha' = 0 \tag{4.39}$$

ou

$$\frac{1}{2k}\left(1 + \frac{\alpha'^2}{b^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\left[\left(-\alpha'' - \frac{\alpha'}{r}\right) + \left(1 + \frac{\alpha'^2}{b^2}\right)^{-1}\left(\frac{\alpha'\alpha''}{b^2}\right)\alpha'\right] = 0, \tag{4.40}$$

o que implica

$$\left[\left(-\alpha'' - \frac{\alpha'}{r}\right) + \left(1 + \frac{\alpha'^2}{b^2}\right)^{-1}\left(\frac{\alpha'\alpha''}{b^2}\right)\alpha'\right] = 0, \tag{4.41}$$

ou seja,

$$\alpha'' b^2 r + \alpha' b^2 + \alpha'^3 = 0. \tag{4.42}$$

A solução de (4.42), equação diferencial não-linear de segunda ordem, é dada por

$$\alpha(r) = \pm b\sqrt{a_1}\ln\left(\frac{ra_1 + \sqrt{(r^2-a_1)a_1}\sqrt{a_1}}{\sqrt{a_1}}\right) + a_2, \tag{4.43}$$

em que a_1 e a_2 são constantes de integração.

Além disso, como já concluímos que $\beta' = -\alpha'$, então

$$\beta(r) = -\alpha(r) + a_3, \tag{4.44}$$

em que a_3 é uma constante de integração.

A equação para $C(r)$ é obtida quando subtraímos (4.30) de (4.31), o que fornece

$$2L_A\left(\frac{C''}{r^2} - \frac{2C'}{r^3} + \frac{2C}{r^4}\right) + 2L_{A,1}\frac{1}{2}\left(\frac{C'}{r^2} - \frac{C}{r^3}\right) = 0, \tag{4.45}$$

ou

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2k}\left(1+\frac{\alpha'^2}{b^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\left[\left(-\frac{C''}{r^2} + \frac{2C'}{r^3} - \frac{2C}{r^4}\right)\right. \\ &+ \left.\left(1+\frac{\alpha'^2}{b^2}\right)^{-1}\frac{\alpha'\alpha''}{b^2}\left(\frac{C'}{r^2} - \frac{C}{r^3}\right)\right], \end{aligned} \tag{4.46}$$

ou ainda

$$-\frac{C''}{r^2} + \frac{2C'}{r^3} - \frac{2C}{r^4} + \frac{\alpha'\alpha''}{\alpha'^2+b^2}\left(\frac{C'}{r^2} - \frac{C}{r^3}\right) = 0. \tag{4.47}$$

Agora, utilizando (4.43), obtemos a quantidade

$$\frac{\alpha'\alpha''}{\alpha'^2+b^2} = \frac{-a_1}{r\left(r^2-a_1\right)}, \tag{4.48}$$

que, substituída em (4.47), produz a equação linear

$$C''\left(r^4 - a_1r^2\right) + C'\left(3a_1r - 2r^3\right) + C\left(2r^2 - 3a_1\right) = 0, \tag{4.49}$$

cuja solução é

$$C(r) = a_4 r + a_5 r\sqrt{r^2 - a_1}, \tag{4.50}$$

em que a_4 e a_5 são constantes de integração.

Portanto, encontramos uma solução que representa a região exterior a uma corda cósmica local: a região é descrita pela métrica (4.1), na versão estática, ou seja,

$$ds^2 = (1 + \alpha(r))\, dt^2 - dr^2 - \big(r^2 + C(r)\big)\, d\theta^2 - (1 + \beta(r))\, dz^2, \tag{4.51}$$

com

$$\alpha(r) = \pm b\sqrt{a_1}\ln\left(\frac{ra_1 + \sqrt{(r^2 - a_1)a_1}\sqrt{a_1}}{\sqrt{a_1}}\right) + a_2, \tag{4.52}$$

$$\beta(r) = -\alpha(r) + a_3 \tag{4.53}$$

e

$$C(r) = a_4 r + a_5 r\sqrt{r^2 - a_1}, \tag{4.54}$$

em que $a_1, ..., a_5$ são constantes.

Capítulo 5

Conclusão

O objetivo principal desta tese, provar a existência de solução do tipo corda cósmica na teoria NDL, foi atingido. Ora, como é consenso que toda teoria da gravitação que pretenda incorporar a teoria quântica deverá admitir a relatividade geral como limite de baixas energias e que, além disso, acredita-se que a "teoria quântica da gravitação" é realizada em regime de dimensões extras, e essas dimensões, ao serem compactificadas, geram determinadas estruturas no universo, então qualquer candidato à teoria da gravitação quântica deve admitir, em sua forma efetiva, soluções do tipo corda cósmica. Isso justifica a importância do estudo desenvolvido aqui.

A solução aqui obtida, embora tenhamos trabalhado com corda cósmica neutra, assemelha-se num certo sentido às soluções para cordas supercondutoras em relatividade geral [42] e em teorias escalares-tensoriais [19]. A razão para essa "aparente" propriedade supercondutora está na natureza da não-linearidade da lagrangiana, pois esta é construída a partir de um campo de spin 1.

Outro aspecto da solução digno de nota é o fato de o déficit angular, dado pela função $C(r)$, depender de r – em vez de ser constante. Como a teoria NDL viola o princípio da equivalência forte, então o significado de o déficit variar com r é este: observadores a diferentes distâncias da corda a "vêem" com diferentes déficits. Nesse aspecto, a solução é bastante diferente das soluções em relatividade geral e em teorias escalares-tensoriais.

Deve-se notar também que as expressões para $\alpha(r)$ e $C(r)$ impõem condições sobre a posição r para que ela não apresente valores imaginários. Além disso, em analogia com o espaço de Rindler, pode ser possível, imaginamos, separar a métrica exterior em duas regiões $-$ uma para r real, outra para r imaginário.

Ressaltamos, obviamente, que este estudo não se esgota aqui, pois existem muitos aspectos a serem testados $-$ investigações acerca de configurações com horizontes de evento, por exemplo $-$, e pretendemos ir mais adiante.

Referências Bibliográficas

[1] M. Novello, V. A. De Lorenci e L. R. de Freitas, *Annals of Physics* **254**, 83, (1997).

[2] M. Novello, S. E. P. Bergliaffa e K. E. Hibberd, *Analysis of Static and Spherically-Symmetric Solutions in NDL Theory of Gravitation*, artigo não publicado, (2002).

[3] R. P. Feynman, *Lectures on Gravitation*, artigo não publicado, California Institute of Technology, (1962).

[4] S. Deser, *Gen. Rel. Grav.* **1**, 9, (1970).

[5] M. Novello, R. P. Neves, *Spin-2 Field Theory in Curved Spacetime*, artigo não publicado, (2002).

[6] M. Novello, *Geometrical Description of Spin-2 Fields*, artigo não publicado, (2002).

[7] M. Novello, S. E. P. Bergliaffa, *Effective Geometry*, artigo não publicado, (2003).

[8] P. G. Bergmann, *Int. J. Theor. Phys.* **1**, 25, (1968); K. Nordtvedt, *Astrophys. J.* **161**, 1059, (1970); R. V. Wagoner, *Phys. Rev. D* **1**, 3209, (1970).

[9] P. G. Bergmann, *Introduction to the Theory of Relativity* (Dover Publications, Inc., New York, 1976).

[10] M. Born, *Nature* **132**, 282, (1933).

[11] M. Born, *Proc. Roy. Soc. A* **143**, 410, (1934).

[12] M. Born e L. Infeld, *Nature* **133**, 63, (1934).

[13] C. Brans e R. H. Dicke, *Phys. Rev.* **124**, 925, (1961).

[14] B. Carter, P. Peter e A. Gangui, *Phys. Rev. D* **55**, 4647, (1997).

[15] B. Carter, em *Formation and Evolution of Cosmic Strings*, ed. G. W. Gibbons, S.W. Hawking e T. Vachaspati (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990).

[16] T. Damour e G. Esposito-Farèse, *Class. Quantum Grav.* **9**, 2093, (1992).

[17] T. Damour e K. Nordtvedt, *Phys. Rev. D* **48**, 3436, (1993).

[18] T. M. Eubanks et al, *Bull. Am. Phys. Soc.*, abstract **K** 11.05, (1997).

[19] C. N. Ferreira, M. E. X. Guimarães e J.A. Helayël-Neto , *Nuclear Phys. B* **581**, 165, (2000).

[20] M. Fierz, *Helv. Phys. Acta* **29**, 128, (1956).

[21] M. Fierz e W. Pauli, *Proc. Roy. Soc. A* **173**, 211, (1939).

[22] L. H. Ford e A. Vilenkin, *J. Phys. A: Math. Gen.* **14**, 2353 (1981).

[23] D. Garfinkle, *Phys. Rev. D* **32** 1323 (1985).

[24] I. Gradshtein e I. Rizhik, *Table of Integrals, Sums, Series and Products*, (1962).

[25] M. B. Green, J. H. Schwarz e E. Witten, *Superstring Theory*, (Cambridge Univ. Press., 1987).

[26] L. P. Grischuck, A. N. Petrov e A. D. Popova, *Commun. Math. Phys.* **94**, 379, (1984).

[27] S. N. Gupta, *Phys. Rev.* **96**, 1683, (1954).

[28] M. B. Hindmarsh e T. W. B. Kibble *Rep. Prog. Phys.* **58**, 477, (1995).

[29] P. Jordan, *Nature* **164**, 637, (1949); *Z. Phys.* **157**, 112 (1959).

[30] T. W. B. Kibble, *J. Phys. A: Math. Gen.* **9**, 1387, (1976).

[31] D. A. Kirzhnitz, *JETP Lett.* **15**, 745 (1972); D.A. Kirzhnitz e A. Linde, *Phys. Lett. B* **42**, 471 (1972).

[32] R. H. Kraichnan "Quantum Theory of the Linear Gravitational Field", tese não publicada, Massachusetts Institute of Technology, (1947).

[33] R. H. Kraichnan, *Phys. Rev.* **98**, 1118, (1955).

[34] R. H. Kraichnan, *Phys. Rev.* **101**, 482, (1956).

[35] P. Laguna-Castillo e R. A. Matzner, *Phys. Rev. D* **36**, 3663, (1987).

[36] B. Linet, Phys. Lett. A **124**, 240 (1987).

[37] B. Linet, *Class. Quantum Gravity* **6**, 435, (1989).

[38] A. Melvin, *Physics Letters* **8**, 65, (1964).

[39] H. B. Nielsen e P. Olesen, *Nucl. Phys.* **B 61**, 45 (1973). A. L. N. Oliveira e M. E. X. Guimarães, *Wakes in Dilatonic Current-Carrying Cosmic Strings*, Phys. Rev. D, submetido, (2002).

[40] P. Peter, *Phys. Rev. D* **45**, 1091, (1992).

[41] P. Peter, *Class. Quantum Gravity* **11**, 131, (1994).

[42] P. Peter and D. Puy, *Phys. Rev. D* **48**, 5546, (1993).

[43] L. H. Ryder, *Quantum Field Theory*, 2^a **Ed.**, (Cambridge Univ. Press. 1996).

[44] D. I. Santiago, D. Kalligas e R. V. Wagoner, *Phys. Rev. D* **58**, 124005, (1998).

[45] A. A. Sen, Phys. Rev D **60**, 67501, (1999).

[46] K. S. Thorne, *Phys. Rev.* **138**, 251, (1965).

[47] T. Vachaspati, *Phys. Rev. Lett.* **57**, 1655 (1986); A. Stebbins, S. Veeraraghavan, R. H. Brandenberger, J. Silk and N. Turok, *Ap. Journ.* **1**, 322 (1987); N. Deruelle and B. Linet, *Class. Quantum Grav.* **5**, 55 (1988); W. Hiscock and B. Lail, *Phys. Rev. D* **37**, 869 (1988); L. Perivolaropoulos, R. H. Brandenberger and A. Stebbins, *Phys. Rev. D* **41**,1764 (1990).

[48] T. Vachaspati, *Phys. Rev. D* **45**, 3487 (1992).

[49] A. Vilenkin, *Phys. Rev. D* **23**, 852 (1981).

[50] A. Vilenkin, *Three Hundred Years of Gravitation* ed. S.W. Hawking e W. Israel (Cambridge: Cambridge University Press, 1987) p.499.

[51] A. Vilenkin e E. P. S. Shellard, *Cosmic Strings and Other Topological Defects* (Cambridge: Cambridge University Press, 1994).

[52] R. M. Wald, *Phys. Rev. D* **D33**, 3613, (1986).

[53] R. M. Wald, *General Relativity* (The University of Chicago Press, 1984)

[54] C. Will, *Living Rev. Rel.* **4**, 4, (2001).

[55] S. Weinberg, *Phys. Lett.* **9**, 357, (1964).

[56] S. Weinberg, *Phys. Rev.* **135**, B1049, (1964).

[57] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity* (John Wiley and Sons, 1972).

[58] L. Witten, *Gravitation*, ed. L. Witten (Wiley, New York, 1962).

[59] E. Witten, *Nucl. Phys. B* **249**, 557 (1985).

[60] M. E. X. Guimarães e L. A J. London, *Phys. Rev.* D52 6057-6064 (1995).