Universidade de Brasília

Estimativas de Rigidez e Estabilidade para Subvariedades Mínimas no Espaço Hiperbólico

Paulo de Tarso Sousa Martins Filho

Orientador: Tarcísio Castro Silva

Departamento de Matemática
Universidade de Brasília

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de *Mestre em Matemática*

Brasília–DF
2022

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Estimativas de Rigidez e Estabilidade para Subvariedades Mínimas no Espaço Hiperbólico

por

Paulo de Tarso Sousa Martins Filho

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos para obtenção do grau de

MESTRE EM MATEMÁTICA

Brasília, 26 de Setembro de 2022.

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Tarcísio Castro Silva (Orientador)

Profa. Dra. Luciana Maria Dias de Ávila Rodrigues – MAT/UnB (Membro)

Prof. Dr. Adriano Cavalcante Bezerra – IF Goiano (Externo)

Ficha catalográfica elaborada automaticamente,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

SS725e

Sousa Martins Filho, Paulo de Tarso
Estimativas de Rigidez e Estabilidade para Subvariedades Mínimas no Espaço Hiperbólico / Paulo de Tarso Sousa Martins Filho; orientador Tarcísio Castro Silva. -- Brasília, 2022.
104 p.

Dissertação (Mestrado - Mestrado em Matemática) -- Universidade de Brasília, 2022.

1. Fórmula de Simons. 2. Subvariedades Mínimas. 3. Superestabilidade. 4. Espaço Hiperbólico. I. Castro Silva, Tarcísio, orient. II. Título.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente ao meu Deus Jeová, que me permitiu completar mais uma jornada.

À minha família, agradeço pelo apoio em todos os momentos. Em especial aos meus pais Paulo e Lígia, agradeço pelo carinho, pelos ensinamentos, pela paciência e por todo o amor que sempre me deram. Ao meu irmão João Pedro, agradeço pela companhia, pela amizade e por estar ao meu lado nos momentos em que mais precisei.

Aos meus irmãos na fé, agradeço pela companhia, pelo bom exemplo e pelo encorajamento que recebi todos esses anos, sem os quais não teria chegado até aqui.

Aos meus colegas de graduação, pela amizade e pelos bons momentos que tivemos. Em especial, ao meu amigo Gustavo, que me acompanhou lado a lado na reta final da graduação e nas primeiras experiências em sala de aula.

Ao meu colega Miguel, por se aventurar no mestrado comigo e por tudo que me agregou em amizade e conhecimento quando estudávamos para as provas e os exames de qualificação.

Ao meu professor e orientador Tarcísio, que despertou em mim o interesse pela geometria ainda nos tempos da graduação, agradeço pelo apoio, dedicação, paciência e por tudo que me ensinou durante essa aventura acadêmica.

Palavras não podem expressar completamente a gratidão que sinto por esses e muitos outros que me acompanharam nessa jornada.

Por fim, agradeço aos membros da banca, Professora Luciana Ávila Rodrigues e os Professores Adriano Cavalcante Bezerra e João Paulo dos Santos, por aceitarem fazer parte desse momento e pelas sugestões propostas à dissertação.

Resumo

Esse trabalho apresenta um breve estudo sobre imersões isométricas mínimas no espaço hiperbólico $\mathbb{H}^{n+m}$. O principal objetivo é demonstrar a fórmula de Simons para o laplaciano $\triangle|A|$ da norma da segunda forma fundamental e usar essa fórmula para demonstrar teoremas de rigidez, que determinem sobre quais condições podemos garantir que uma subvariedade mínima do espaço hiperbólico é totalmente geodésica. Além disso, também vamos definir o conceito de superestabilidade em subvariedades mínimas e utilizar a fórmula de Simons para provar estimativas sobre o primeiro autovalor do operador de estabilidade $\bar{\lambda}_1(M)$ dessas imersões mínimas.

Palavras-Chave: espaço hiperbólico; subvariedades mínimas; segunda forma fundamental; fórmula de Simons; superestabilidade

Abstract

This work presents a brief study on minimal isometric immersions in the hyperbolic space $\mathbb{H}^{n+m}$. Our goal is to demonstrate Simons' formula for the Laplacian $\triangle|A|$ of the second fundamental form norm and to use this formula to prove rigidity theorems that determine under what conditions a minimal submanifold of the hyperbolic space is totally geodesic. In addition, one also will define the concept of superstability on minimal submanifolds and use Simons' formula to prove estimates for the first eigenvalue of the stability operator $\bar{\lambda}_1(M)$ of these minimal embeddings.

Key-Words: hyperbolic space; minimal submanifolds; second fundamental form; Simon's formula; superstability

Conteúdo

Introdução

No contexto de subvariedades riemannianas, um problema interessante que tem sido tratado na literatura é saber sobre quais condições podemos garantir que uma subvariedade mínima seja totalmente geodésica.

Nesse sentido, em um trabalho inspirador, Simons [18] obteve uma fórmula para o laplaciano do quadrado da norma da segunda forma fundamental de uma subvariedade mínima, M^n, imersa em uma forma espacial, $\overline{M}^{n+m}$.

Formas espaciais são variedades completas com curvatura seccional constante. Para tais variedades, a fórmula de Simons permite obter uma grande variedade de teoremas e resultados acerca da norma da segunda forma fundamental de subvariedades mínimas [1–4, 7, 8, 16, 19].

Em [18], Simons usou sua fórmula para provar que, se M^n é uma subvariedade mínima e fechada de $\mathbb{S}^{n+m}$, onde a segunda forma fundamental, A, satisfaz

$$|A|^2 < \frac{n}{\left(2 - \frac{1}{m}\right)},$$

então M^n é totalmente geodésica.

Mais recentemente, Xia e Wang [19] provaram que, se M^n, $n \geq 5$, é uma subvariedade mínima e completa de $\mathbb{H}^{n+m}$ de modo que a segunda forma fundamental satisfaz

$$\lim_{R \to +\infty} \sup \frac{\int_{B_p(R)} |A|^2}{R^2} = 0,$$

onde $B_p(R)$ denota a bola geodésica de raio R centrada em $p \in M$ e tal que

$$\sup_{x \in M} |A|^2(x) < D(n,m) = \begin{cases} \dfrac{(n+2)(n-1)^2}{4n} - n, & \text{se} \quad m = 1, \\ \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{\left(1 + \frac{2}{mn}\right)(n-1)^2}{4} - n\right), & \text{se} \quad m \geq 2, \end{cases}$$

então M é totalmente geodésica.

Posteriormente, Oliveira e Xia [16] provaram resultados que estabelecem uma condição sobre $\sup_{x\in M}|A|^2(x)$ que depende de um número maior de constantes do que aquele tratado acima por Xia e Wang, além de se restringirem ao caso em que $n^2-6n+1+\dfrac{8}{m}>0$.

Uma melhoria desses dois resultados foi obtida por Bezerra e Manfio [3], e constitui um dos objetos de estudo desenvolvidos neste trabalho, isto é, iremos utilizar a fórmula de Simons para estudar subvariedades mínimas do espaço hiperbólico $\mathbb{H}^{n+m}$ e exibir condições pelas quais podemos garantir que tais subvariedades mínimas sejam também totalmente geodésicas.

Um outro foco deste trabalho são as chamadas *subvariedades superestáveis*. A princípio, toda subvariedade mínima M^n é um ponto crítico da função *volume n-dimensional* $Vol(M_t)$ de qualquer campo variacional normal e com suporte compacto em M^n.

Uma importante questão, porém, é saber sob quais condições M^n será, não apenas ponto crítico, mas também um mínimo local da função volume. Nesse ínterim, M é dita *subvariedade estável*. Pode-se mostrar que [17], se $\overline{M}^{n+m}=\mathbb{H}^{n+m}$, então $Vol(M_t)$ satisfaz

$$\frac{d^2Vol(M_t)}{dt^2}\geq\int_M|\nabla f|^2-(|A|^2-n)f^2,$$

para toda função $f\in C_0^\infty(M)$.

Motivado por essas considerações, Seo [17] apresentou o conceito de superestabilidade no espaço hiperbólico $\mathbb{H}^{n+m}$, definindo *uma subvariedade mínima M de $\mathbb{H}^{n+m}$ como superestável se vale*

$$\int_M|\nabla f|^2-(|A|^2-n)f^2\geq 0,$$

para toda função $f\in C_0^\infty(M)$.

É claro que se M for superestável, então M será também estável. A vantagem de se trabalhar com o conceito de superestabilidade (que depende da norma $|A|$ da segunda forma fundamental A) é a possibilidade de inferir propriedades sobre a segunda forma fundamental de imersões mínimas a partir da fórmula de Simons, já mencionada antes. Por exemplo, é claro da definição anterior que subvariedades totalmente geodésicas (isto é, com $|A|\equiv 0$) são também superestáveis.

Um importante estimador de superestabilidade em subvariedades mínimas do espaço hiperbólico é o primeiro autovalor do *operador de estabilidade* $\triangle+|A|^2-n$, dado por

$$\bar{\lambda}_1(M)=\inf_{f\in C_0^\infty(M),f\neq 0}\frac{\int_M\left(|\nabla f|^2-(|A|^2-n)f^2\right)}{\int_M f^2},$$

onde omitimos, por conveniência, o elemento de volume dV_M de M.

Em [3], Bezerra e Manfio também apresentaram condições sobre a segunda forma fundamental e sobre o primeiro autovalor $\bar{\lambda}_1(M)$, para que possamos garantir que uma subvariedade mínima M^n, $2 \leq n \leq 5, n \neq 3$, seja totalmente geodésica. Especificamente no caso $n = m = 2$, os mesmos autores obtiveram estimativas para $\bar{\lambda}_1(M)$. De forma complementar, estimativas para $\bar{\lambda}_1(M)$ no caso $n = 3$ foram obtidas por Bezerra e Wang [4].

O presente trabalho foi motivado pelos estudos desenvolvidos em [3, 4, 19], e está dividido conforme segue:

No primeiro capítulo, apresentamos noções preliminares de geometria, de análise e de álgebra linear, que serão úteis para a compreensão dos principais resultados deste trabalho.

No segundo capítulo, utilizamos as equações fundamentais das imersões isométricas para obter a fórmula de Simons para subvariedades mínimas do espaço hiperbólico. Deduzimos também uma importante desigualdade integral que será utilizada na demonstração de todos os resultados do capítulo final.

No terceiro capítulo, tratamos das fórmulas de primeira e segunda variações do volume em subvariedades do espaço hiperbólico. Também apresentamos alguns resultados sobre operadores da forma $\triangle + \mu$ (sendo $\mu : M \to \mathbb{R}$ função contínua) agindo em variedades riemannianas, obtendo uma expressão (a fórmula de Rayleigh) para o primeiro autovalor λ_1 associado a esses operadores. Outrossim, trataremos de superestabilidade em subvariedades mínimas do espaço hiperbólico.

No último capítulo, analisamos algumas condições necessárias para que uma subvariedade mínima do espaço hiperbólico seja totalmente geodésica, além de apresentar estimativas sobre o primeiro autovalor $\bar{\lambda}_1$ de tais subvariedades mínimas.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, apresentamos sucintamente alguns conceitos para uma melhor compreensão dos resultados que serão tratados nos capítulos subsequentes. Iniciamos a primeira seção com elementos de geometria riemanniana e, na seção seguinte, trataremos de resultados de *análise* e de *álgebra linear*. O leitor familiarizado com tais conceitos poderá, eventualmente, omitir uma primeira leitura de tais resultados sem que isso prejudique a compreensão dos capítulos a posteriori.

Utilizamos [5, 7, 8, 10–12, 14] como guias no desenvolvimento deste roteiro preliminar.

1.1 Elementos de Geometria Riemanniana

Seja M^n uma n-variedade riemanniana, e, para cada $p \in M$, seja T_pM o espaço tangente associado. Dados $x, y \in T_pM$, denotamos por $\langle x, y \rangle_p$ o produto interno associado a p pela métrica riemanniana g de M.

Considere $\mathcal{X}(M)$ o conjunto dos campos diferenciáveis de vetores em M e $\mathcal{D}(M)$ o anel das funções diferenciáveis em M. Ao longo deste trabalho, trataremos com variedades riemannianas orientadas e conexas.

Dado $p \in M$, considere $U \subset M$ uma vizinhança de p onde seja possível definir campos diferenciáveis de vetores $e_1, ..., e_n$ tais que

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

A coleção $\{e_i\}_{1 \leq i \leq n}$ é dita *um referencial (ortonormal móvel) em* U. Tal referencial permite definir 1-formas diferenciais ω_i em U dadas por

$$\omega_i(e_j) = \delta_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

A coleção $\{\omega_i\}_{1\leq i\leq n}$ é chamada *correferencial associado ao referencial* $\{e_i\}_{1\leq i\leq n}$.

Um resultado clássico de geometria riemanniana (*Teorema de Levi Civita*) garante a existência de um conjunto de 1-formas diferenciais $\{\omega_{ij}\}_{1\leq i,j\leq n}$ que são anti-simétricas (isto é, que $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$) e que satisfazem

$$d\omega_i = \sum_j \omega_j \wedge \omega_{ji},$$

onde $d\omega_i$ denota a diferencial exterior da 1-forma ω_i e "$\wedge$"é o produto exterior de 1-formas diferenciais sobre $U \subset M$. As formas ω_{ij} assim definidas são denominadas *formas de conexão de M no referencial* $\{e_i\}_{1\leq i\leq n}$.

Um outro conjunto importante de formas diferenciais são as formas de curvatura Ω_{ij}, definidas por

$$\Omega_{ij} = d\omega_{ij} - \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kj}.$$

É claro que, pela anti-simetria das formas ω_{ij}, vale $\Omega_{ij} = -\Omega_{ji}$. Tais formas Ω_{ij} possuem um importante significado geométrico associado. De fato, para cada par de vetores $X,Y \in T_pM$, sabemos que $\Omega_{ij}(X,Y) \in \mathbb{R}$. Além disso, a matriz $\{\Omega_{ij}(X,Y)\}_{n\times n}$ é a matriz de um operador linear, $R_{XY} : T_pM \to T_pM$, denominado *operador curvatura de M*. Assim, dados $1 \leq k,l \leq n$, temos que

$$\Omega_{kl}(X,Y) = \langle R_{XY}e_k, e_l\rangle.$$

Antes de prosseguirmos, precisamos da seguinte definição.

Definição 1.1. Um tensor de ordem r em M é uma aplicação multilinear da forma $T : \underbrace{\mathcal{X}(M) \times ... \times \mathcal{X}(M)}_{\text{r fatores}} \to \mathcal{D}(M)$. Dizemos que T é diferenciável quando, para quaisquer campos de vetores $Y_1,...,Y_r \in \mathcal{X}(M)$, $T(Y_1,...,Y_r)$ é uma função diferenciável em M.

Trataremos somente com tensores diferenciáveis. Dado um referencial móvel $\{e_i\}_{1\leq i\leq n}$, as funções $T_{i_1...i_r} = T(e_{i_1},...,e_{i_r})$ são chamados *componentes do tensor T no referencial* $\{e_i\}_{1\leq i\leq n}$. Nessas condições, podemos escrever T da forma

$$T = \sum_{i_1,...,i_r} T_{i_1...i_r} e_{i_1} \otimes e_{i_2} ... e_{i_{r-1}} \otimes e_{i_r},$$

onde $\otimes$ denota o produto tensorial, que por simplicidade será omitido em alguns contextos. Dados r campos vetoriais em U, escritos da forma $X_1 = \sum_i x_1^i e_i, ..., X_r = \sum_i x_r^i e_i$, temos que o tensor T, pela multilinearidade, age em tais campos vetoriais do seguinte modo

$$T(X_1,...,X_r) = \sum_{i_1,...,i_r} T_{i_1...i_r} \cdot x_1^{i_1}...x_r^{i_r}.$$

As k-formas diferenciáveis sobre M são exemplos de tensores diferenciáveis de ordem k sobre M.

O operador curvatura, já citado, permite definir o chamado *tensor curvatura de M*, dado por uma aplicação quadrilinear $R : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{D}(M)$, que age da seguinte forma

$$R(X,Y,Z,T) = \langle R_{XY}Z, T\rangle. \tag{1.1.1}$$

Primeiro, note que, sendo Ω_{ij} uma forma bilinear alternada, vale

$$\begin{cases} \langle R_{XY}Z, T\rangle = -\langle R_{YX}Z, T\rangle, \\ \langle R_{XY}Z, T\rangle = -\langle R_{XY}T, Z\rangle. \end{cases}$$

Além disso, uma propriedade adicional do tensor curvatura é fornecida pela conhecida *Primeira Identidade de Bianchi*, que afirma a seguinte igualdade

$$\langle R_{XY}Z, T\rangle = \langle R_{ZT}X, Y\rangle.$$

Agora note que, sendo Ω_{ij} 2-formas diferenciais, podemos escrevê-las da seguinte maneira

$$\Omega_{ij} = -\sum_{k<l} R_{ijkl}\,\omega_k \wedge \omega_l,$$

cuja expressão fornece as funções R_{ijkl} em M. Segue-se da última igualdade que

$$R_{ijkl} = \langle R_{e_ie_j}e_k, e_l\rangle.$$

Os termos R_{ijkl} são denominados *componentes do tensor curvatura de M no referencial $\{e_i\}$*. Além disso, é imediado que, da anti-simetria das formas Ω_{ij}, vale

$$R_{ijkl} = -\Omega_{ij}(e_k, e_l) = \Omega_{ij}(e_l, e_k) = -R_{ijlk}.$$

Portanto, temos que $R_{ijkl}\,\omega_k \wedge \omega_l = R_{ijlk}\,\omega_l \wedge \omega_k$, e podemos escrever Ω_{ij} da forma

$$\Omega_{ij} = -\frac{1}{2}\sum_{k,l} R_{ijkl}\,\omega_k \wedge \omega_l.$$

Como já vimos, tais componentes do tensor curvatura satisfazem as seguintes propriedades úteis:

$$\begin{cases} R_{ijkl} = -R_{jikl}, \\ R_{ijkl} = -R_{ijlk}, \\ R_{ijkl} = R_{klij}. \end{cases} \tag{1.1.2}$$

Além disso, o tensor curvatura permite definir o importante conceito de curvatura seccional.

Definição 1.2. Dado $p \in M$, sejam $x, y \in T_pM$ vetores linearmente independentes, escritos da forma $x = \sum_i x_i e_i$ e $y = \sum_j y_j e_j$, e considere σ o subespaço bidimensional do espaço tangente T_pM gerado pelos vetores x e y. Definimos $K_M(x,y)$ por

$$K_M(x,y) = \frac{\sum_{i,j} x_i^2 y_j^2 R_{ijij}}{\sqrt{|x|^2|y|^2 - \langle x,y\rangle^2}}, \tag{1.1.3}$$

onde calculamos $|x|^2, |y|^2$ e $\langle x,y\rangle$ usando a métrica g .

É possível mostrar que essa definição não depende da escolha dos vetores linearmente independentes $x, y \in \sigma$. Por essa razão, muitas vezes denotamos $K_M(x,y) = K_M(\sigma)$ e o denominamos *curvatura seccional segundo o subespaço* $\sigma \subset T_pM$.

Em particular, dados dois vetores e_i e e_j do referencial $\{e_i\}_{1\leq i\leq n+m}$, temos por (1.1.3) que a curvatura seccional $K_M(e_i,e_j)$, do subespaço bidimensional $\sigma \subset T_pM$ gerado pelos vetores ortonormais e_i e e_j, é dada por

$$K(e_i,e_j) = R_{ijij}.$$

Sendo M uma variedade riemanniana, podemos definir a diferencial covariante de funções, campos vetoriais, e k-formas em M.

Seja $f : U \to \mathbb{R}$ uma função C^∞ sobre um aberto $U \subset M$. O *vetor gradiente da função* f é dado por

$$\nabla f = \sum_i f_i e_i = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) e_i$$

A *diferencial de* f é a 1-forma dual do vetor gradiente, dada por

$$df = \sum_i f_i \omega_i = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) \omega_i,$$

onde $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ denota a derivada parcial de $f : U \to \mathbb{R}$ em relação à $i-$ésima coordenada em $U \subset M$.

Definição 1.3. Seja $f : U \to \mathbb{R}$ uma função C^∞ sobre um aberto $U \subset M$. Definimos a diferencial covariante da 1-forma df por

$$\nabla(df) := \sum_i \left(df_i + \sum_k f_k \omega_{ki} \right) \omega_i \,.$$

Se definirmos coeficientes f_{ij} tais que $\sum_j f_{ij}\omega_j = df_i + \sum_k f_k \omega_{ki}$, obtemos

$$f_{ij} = df_i(e_j) + \sum_k f_k \omega_{ki}(e_j), \tag{1.1.4}$$

e podemos reescrever a diferencial covariante de df por

$$\nabla(df) = \sum_{i,j} f_{ij}\omega_j\omega_i \,.$$

Observação 1.1. A aplicação $\nabla(df)$ definida acima é claramente bilinear e é denominada *hessiano de* f na métrica de M. O traço dessa forma bilinear é dito *laplaciano de* f e é dado por

$$\triangle f := \sum_i f_{ii} \,. \tag{1.1.5}$$

Também é comum utilizar a notação $\nabla^2 f := \triangle f$.

Analogamente ao que fizemos acima, seja $X = \sum_i x_i e_i$ um campo de vetores em M. A 1-forma dual associada ao campo X é denotada por ω^X , e sua derivada covariante, assim como fizemos para funções, é dada por

$$\nabla \omega^X := \sum_i \left(dx_i + \sum_k x_k \omega_{ki} \right) \omega_i = \sum_{i,j} x_{ij}\omega_j\omega_i \,, \tag{1.1.6}$$

onde $\sum_j x_{ij}\omega_j = dx_i + \sum_k x_k \omega_{ki}$, isto é,

$$x_{ij} = dx_i(e_j) + \sum_k x_k \omega_{ki}(e_j). \tag{1.1.7}$$

De agora em diante, por simplicidade, denotaremos $\nabla X := \nabla \omega^X$ e o chamaremos *diferencial covariante do campo* X. Além disso, o traço da forma bilinear $\nabla \omega^X$ é dado por

$$divX = \sum_i x_{ii}. \tag{1.1.8}$$

Observação 1.2. No caso de uma função f, repare que $\triangle f = div \nabla f$.

Em muitos contextos, é frequente identificarmos 1-formas sobre M com seus respectivos campos vetoriais duais. Essa associação é natural, visto que cada elemento do espaço tangente possui um único correspondente no espaço dual. Em virtude disso, a imagem $\nabla X(Y)$ de um campo vetorial Y pela diferencial covariante (2-forma) de um campo vetorial X pode ser vista, corretamente, como sendo um campo vetorial sobre M.

Se $f : M \to \mathbb{R}$ for uma função diferenciável e $X = \sum_i x_i e_i$ um campo de vetores em M. Então, pelas propriedades gerais do cálculo, e usando (1.1.6), (1.1.7) e (1.1.8), o campo vetorial $fX = \sum_i (fx_i) e_i$ satisfaz

$$\begin{aligned}
\omega^{fX} &= \sum_i (fx_i)\omega_i\,, \\
x_{ij} &= d(fx_i)(e_j) + \sum_k fx_k \omega_{ki}(e_j) = fx_{ij} + x_i df(e_j) = fx_{ij} + x_i f_j\,, \\
\nabla \omega^X &= \sum_{i,j} (fx_{ij} + x_i f_j)\omega_j \omega_i\,, \\
div(fX) &= \sum_i x_{ii} = \sum_i (fx_{ii} + x_i f_i) = f \cdot divX + \langle X\,, \nabla f \rangle,
\end{aligned} \tag{1.1.9}$$

onde $\langle , \rangle$ denota o produto interno de T_pM na métrica g.

É importante notar que, no caso $M = \mathbb{R}^n$, os conceitos de *gradiente* e *laplaciano* usuais coincidem com os definidos aqui para variedades riemannianas.

De fato, se $\phi \circ u : M \to \mathbb{R}$ é a composta de $u : M \to \mathbb{R}$ com uma função diferenciável $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, temos que

$$d(\phi \circ u) = \sum_k \frac{\partial(\phi \circ u)}{\partial x_k} \omega_k = \phi'(u) \cdot du.$$

Logo, conforme (1.1.4) e (1.1.5) , temos que

$$\begin{aligned}
\triangle(\phi\circ u) &= \sum_i (\phi\circ u)_{ii}\\
&= \sum_i \left[d(\phi'(u)\cdot u_i)(e_i) + \sum_k \phi'(u)\cdot u_k\cdot\omega_{ki}(e_i)\right]\\
&= \sum_i \left[\phi'(u)\cdot du_i(e_i) + \sum_k \phi'(u)\cdot u_k\cdot\omega_{ki}(e_i) + u_i d(\phi'(u))(e_i)\right]\\
&= \sum_i \left[\phi'(u)\left(du_i(e_i) + \sum_k u_k\omega_{ki}(e_i)\right) + u_i\phi''(u)\left(\sum_m u_m(e_i)\right)\right]\\
&= \sum_i \left[\phi'(u)\left(du_i(e_i) + \sum_k u_k\omega_{ki}(e_i)\right) + \phi''(u)u_i^2\right]\\
&= \phi'(u)\triangle u + \phi''(u)|\nabla u|^2,
\end{aligned}$$

onde usamos que $\sum_i u_i^2 = |\nabla u|^2$.

O resultado acima mostra a compatibilidade entre as propriedades do laplaciano em variedades e no espaço $\mathbb{R}^n$.

Assim como fizemos para campos vetoriais, a noção de diferencial covariante também se estende a tensores T de qualquer ordem em M, conforme veremos a seguir. Essa definição será utilizada extensivamente na demonstração de importantes resultados do Capítulo 2.

Definição 1.4. Se T é um tensor de ordem r, escrito na forma

$$T = \sum_{i_1,\dots,i_r} T_{i_1\dots i_r}\cdot e_{i_1}\otimes\dots\otimes e_{i_r},$$

definimos sua diferencial covariante por

$$\nabla T := \sum_{i_1,\dots,i_r} \nabla T_{i_1\dots i_r}\cdot e_{i_1}\otimes\dots\otimes e_{i_r},$$

onde

$$\nabla T_{i_1\dots i_r} := dT_{i_1\dots i_r} + \sum_m T_{mi_2\dots i_r}\cdot\omega_{mi_1} + \dots + \sum_m T_{i_1\dots i_{r-1}m}\cdot\omega_{mi_r}. \qquad (1.1.10)$$

Observação 1.3. Sendo $T_{i_1\dots i_r}$ funções C^∞ em M, fica claro, pela definição acima, que $\nabla T_{i_1\dots i_r}$ é uma 1-forma diferencial, e, por sua vez, pode ser escrita na forma

$$\nabla T_{i_1\dots i_r} = \sum_k T_{i_1\dots i_r k}\cdot\omega_k\,,$$

definindo novas funções $T_{i_1\dots i_r k}$ em M, que são os coeficientes da 1-forma diferencial (logo tensor de ordem 1) $\nabla T_{i_1\dots i_r}$. Claramente, temos da definição acima que

$$T_{i_1\dots i_r k} = \nabla T_{i_1\dots i_r}(e_k).$$

Além disso, assim como fizemos para os termos $T_{i_1\dots i_r}$, podemos calcular a diferencial covariante dos coeficientes $T_{i_1\dots i_r k}$, definir novos coeficientes $T_{i_1\dots i_r kl}$ e assim por diante.

Vamos agora apresentar os conceitos de curva parametrizada, geodésicas, aplicação exponencial e variedades completas. Este último conceito, em especial, será extensivamente utilizado nos principais resultados desse trabalho.

Definição 1.5. Uma curva parametrizada em M é uma aplicação diferenciável $c : I \to M$ de um aberto $I \subset \mathbb{R}$ na variedade M.

Sobre uma curva parametrizada podemos definir um campo vetorial V, que, para cada ponto $c(t) \in M, t \in I$, associa um vetor $V(t) \in T_{c(t)}M$.

Sobre esse campo V, podemos naturalmente aplicar a noção de diferencial covariante, assim como fizemos para campos vetoriais em variedades. Mas, para tal, precisamos da seguinte definição.

Definição 1.6. Um *campo de vetores tangentes à curva c* (ou campo velocidade de c) é denotado por $\dfrac{dc}{dt}$, e associa cada ponto $c(t) \in M, t \in I$, ao vetor

$$c'(t) = \frac{dc}{dt}(t) \in T_{c(t)}M.$$

Assim, dado um campo $V = \sum_i v_i(t)e_i$ em c, sua derivada covariante é outro campo vetorial sobre c, dado por

$$\nabla_{dc/dt}V(t) := \sum_i \left(\frac{dv_i}{dt}(t) + \sum_k v_k \omega_{ki}(c'(t)) \right) e_i.$$

Note que podemos interpretar $\nabla_{dc/dt}V(t)$ como sendo o campo vetorial dual da 1-forma $\nabla V(c'(t))$, onde ∇ é a diferencial covariante de campos vetoriais sobre M.

Entretanto, visto que o campo V não está, a princípio, definido sobre toda a variedade, definimos sua derivada covariante apenas na curva c, mas de forma compatível com as formas de conexão de M.

Definição 1.7. Dizemos que uma curva parametrizada $\gamma : I \to M$ é uma geodésica se

$$\nabla_{dc/dt} dc/dt \equiv 0,$$

isto é, se a derivada covariante do vetor tangente à curva é identicamente nula em todo $t \in I$.

Algumas propriedades elementares de curvas geodésicas são as seguintes.

Se $\gamma : I \to M$ é uma geodésica, então $|\gamma'(t)| = constante$, isto é, o vetor velocidade tem comprimento constante. Em geral, supomos, sem perda de generalidade, que $|\gamma'(t)| = 1$, pois caso contrário basta reparametrizar a curva para ct. Uma tal geodésica com $|\gamma'(t)| = 1$ é dita uma *geodésica normalizada em M*.

Também é fato que, para todo ponto p em uma variedade riemanniana M, e para todo $v \in T_pM$, com $|v| < \delta$ para algum $\delta > 0$, existe uma única geodésica normalizada $\gamma_v : (-\delta, \delta) \to M$ satisfazendo

$$\gamma_v(0) = p \quad \text{e} \quad \gamma_v'(0) = v.$$

A partir desse fato, sabe-se que, dado $p \in M$, o ponto $\gamma_v(|v|) \in M$ está definido para todo $v \in T_pM$, com $|v| < \delta$, e varia diferenciavelmente com v. Denotamos por $B_\delta(0) \subset T_pM$ a bola aberta de raio δ centrada na origem de T_pM.

Considerações postas, podemos definir uma aplicação diferenciável $exp_p : B_\delta(0) \to M$ denominada *aplicação exponencial em p*, e dada por

$$exp_p(v) = \gamma(|v|), \quad |v| < \delta.$$

É uma consequência do *Teorema da Função Inversa* que existe $\delta > 0$ tal que $exp_p : B_\delta(0) \to M$ é um difeomorfismo de $B_\varepsilon(0)$ sobre um aberto de M. Nesse caso, a imagem

$$B_\delta(p) := exp_p(B_\delta(0)) \in M$$

é chamada *bola geodésica de centro p e raio* $\delta > 0$.

Agora, podemos apresentar a seguinte definição fundamental.

Definição 1.8. Uma variedade riemanniana é dita *completa* quando, para todo p, a aplicação exponencial exp_p está definida para todo $v \in T_pM$. Equivalentemente, M é completa quando as geodésicas que partem de p estão definidas para todo $t \in \mathbb{R}$.

Observação 1.4. Outras conclusões acerca da completude de uma variedade riemanniana são fornecidas pelo *Teorema de Hopf e Rinow* [11]; por exemplo, M é geodesicamente completa se e somente se M for completa como *espaço métrico*.

Uma família especial de variedades completas são as formas especiais, definidas a seguir.

Definição 1.9. Uma variedade completa M é dita uma forma espacial se M possui curvatura seccional constante. Nesse caso, é possível provar (ver [11]) que sua curvatura seccional satisfaz

$$R_{ijkl} = k(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}), \tag{1.1.11}$$

onde

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad i = j, \\ 0 & \text{se} \quad i \neq j. \end{cases}$$

O espaço hiperbólico $\mathbb{H}^n$ é um exemplo de forma espacial, com curvatura seccional $K = -1$. Comumente, $\mathbb{H}^n$ é representado como sendo o semiespaço do $\mathbb{R}^n$ dado por

$$\mathbb{H}^n = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n; x_n > 0\},$$

munido da métrica g cujos coeficientes são dados por

$$g_{ij}(x_1, ..., x_n) = \langle \partial x_i, \partial x_j \rangle_{\mathbb{H}^n} = \frac{\delta_{ij}}{x_n^2},$$

onde $\{\partial x_i\}_{1 \leq i \leq n}$ denota os vetores da base canônica de $\mathbb{R}^n$.

Pode-se mostrar (ver [11]) que qualquer outra $n-$variedade completa de curvatura seccional constante $K = -1$ é isométrica ao grupo quociente de $\mathbb{H}^n$ por algum subgrupo do grupo das transformações conformes (que preservam ângulos) de $\mathbb{R}^n$ que levam $\mathbb{H}^n \subset \mathbb{R}^n$ sobre si mesmo.

Um resultado também importante é o *Teorema de Hadamard* [11]: toda $n-$ variedade completa e simplesmente conexa com curvatura seccional $K_p \leq 0$, para todo ponto $p \in M$, é difeomorfa ao espaço $\mathbb{R}^n$.

Uma última definição que precisaremos e que será bem explorada no próximo capítulo é a seguinte.

Definição 1.10. Sejam M e $\overline{M}$ variedades riemannianas de dimensão m e $m+n$, respectivamente. Dizemos que uma aplicação diferenciável $f : M \to \overline{M}$ é uma *imersão* se a diferencial

$$df : T_pM \to T_{f(p)}\overline{M}$$

é injetiva, para todo $p \in M$. Se, além disso, tivermos que f é um homeomorfismo de M sobre $f(M) \subset \overline{M}$ (considerando $f(M)$ com a topologia natural induzida por $\overline{M}$), então f é dita um *mergulho*. Se $M \subset \overline{M}$ e $i : M \hookrightarrow \overline{M}$ é um mergulho, então dizemos que M é uma subvariedade de $\overline{M}$.

Observação 1.5. É possível mostrar, através do *Teorema da Função Inversa*, que toda imersão $f : M \to \overline{M}$ é localmente um mergulho, ou seja, para todo $p \in M$, podemos encontrar uma vizinhança $U \subset M$ de p tal que $f(U)$ é uma subvariedade de $\overline{M}$.

1.1.1 Imersões Isométricas

Seja $f : M^n \to \overline{M}^{m+n}$ uma imersão de uma n-variedade riemanniana (M^n, g) em uma $(n+m)$-variedade riemanniana $(\overline{M}^{m+n}, \overline{g})$, onde g e $\overline{g}$ denotam suas respectivas métricas.

Pela Definição (1.10), a aplicação $df_p : T_pM \to T_{f(p)}\overline{M}$ é injetiva, e podemos assim considerar g como sendo a métrica induzida por f em M, dada por

$$g_p(u,v) = \bar{g}_{f(x)}(df_p(u), df_p(v)), \quad \forall\, p \in M, u, v \in T_pM.$$

Nas condições acima, f é dita uma *imersão isométrica*, cuja imagem denotamos $f(M)$.

Dado um ponto $p \in M$, seja $U \subset M$ uma vizinhança de p tal que $f(U)$ seja uma subvariedade de $\overline{M}$ (ver Observação (1.5)), e seja V uma vizinhança de $f(p)$, tal que $f(U) \subset V \subset \overline{M}$ e tal que em V, possamos definir um referencial (local) $\{e_1, ..., e_{n+m}\}$ ortonormal e adaptado a M, isto é, tal que, restritos a $f(U)$, os vetores $e_1, ..., e_n$ são tangentes a $f(U)$, e, consequentemente, os demais vetores $e_{n+1}, ..., e_{n+m}$ são normais a $f(U)$.

Por conveniência, vamos identificar $U \subset M$ com $f(U) \subset \overline{M}$, pois para a geometria local de $f(U)$, é como se tivéssemos, de fato, $M \subset \overline{M}$ com a métrica g induzida por f. Nessa situação, é conveniente dizer que *M é uma subvariedade de $\overline{M}$*, com a métrica induzida g.

Além disso podemos considerar o espaço tangente de $\overline{M}$ como sendo a soma direta $T_p\overline{M} = T_pM \oplus N_pM$, onde, denotamos por N_pM o complemento ortogonal de T_pM em $T_p\overline{M}$, cuja métrica é dada por $\bar{g}$, e onde, por conveniência, também identificaremos o espaço tangente T_pM com $df_p(T_pM)$, pois, nas condições acima, df_p é um isomorfismo.

Estabelecemos, ainda mais, a seguinte escolha de índices

$$\begin{gathered} 1 \leq i, j, k, ... \leq n, \\ 1 \leq A, B, C, ... \leq m+n, \\ n+1 \leq \alpha, \beta, \gamma, ... \leq n+m. \end{gathered} \tag{1.1.12}$$

Considere as 1-formas $\{\omega_A\}$ em $\overline{M}$ tais que $\omega_A(e_B) = \delta_{AB}$. Tais formas são chamadas de *correferencial dual associado ao referencial* $\{e_A\}$.

Além disso, pelo Teorema de Levi-Civita, sabemos que a métrica $\overline{g}$ de $\overline{M}$ e o referencial $\{e_A\}$ determinam, de maneira única, um conjunto de 1-formas $\{\omega_{AB}\}$ em $\overline{M}$ que satisfazem

$$\nabla e_A = \sum_B \omega_{AB} e_B.$$

Tais formas $\{\omega_{AB}\}$ são chamadas *formas de conexão de* $\overline{M}$. São comprovadamente anti-simétricas (isto é, $\omega_{AB} = -\omega_{BA}$) e satisfazem as conhecidas equações de estrutura de $\overline{M}$, a saber

$$\begin{aligned} d\omega_A &= \sum_B \omega_B \wedge \omega_{BA}, \\ d\omega_{AB} &= \sum_C \omega_{AC} \wedge \omega_{CB} + \overline{\Omega}_{AB}, \\ \overline{\Omega}_{AB} &= -\frac{1}{2}\sum_{CD} \overline{R}_{ABCD}\, \omega_C \wedge \omega_D, \end{aligned} \tag{1.1.13}$$

onde $\overline{R}_{ABCD}$ são os componentes do tensor curvatura de M no referencial $\{e_A\}$, satisfazendo (1.1.2).

Observação 1.6. As componentes do tensor curvatura de M e $\overline{M}$ permitem definir a suas respectivas curvaturas seccionais. Se σ é um subespaço bidimensional do espaço tangente $T_p\overline{M}$ gerado pelos vetores ortonormais e_A e e_B, então definimos

$$K_{\overline{M}(\sigma)} = K_{\overline{M}(e_A,e_B)} = \overline{R}_{ABAB}.$$

Da mesma forma, se $\sigma' \subset T_pM$ é gerado pelos vetores ortonormais e_i e e_j, então $K_M(\sigma') = K_M(e_i,e_j) = R_{ijij}$.

Agora, se restringirmos o correferencial $\{\omega_A\}$ de $\overline{M}$ à subvariedade M, notamos que

$$\omega^{\alpha}|_M = 0 \quad \forall\, n+1 \leq \alpha \leq n+m, \tag{1.1.14}$$

visto que todo $v \in T_pM$ é da forma $v = \sum_{i=1}^{n} v_i e_i$, onde $\omega_\alpha(e_i) = 0$. Logo $\omega_\alpha(v) = 0$.

Portanto, usando (1.1.14) em (1.1.13), obtemos que

$$0 = d\omega_\alpha = \sum_B \omega_B \wedge \omega_{B\alpha} = \sum_i \omega_i \wedge \omega_{i\alpha}. \tag{1.1.15}$$

Uma consequência importante desse fato é dada pelo seguinte Lema de Cartan, cuja demonstração pode ser encontrada em [10].

Lema 1.1 (Lema de Cartan)**.** Seja V um espaço vetorial de dimensão n, e sejam $\omega_1,...,\omega_n$ 1-formas linearmente independentes em V. Se existe um conjunto de 1-formas diferenciais $\theta_1,....,\theta_n$ satisfazendo $\sum_{i=1}^{n}\omega_i\wedge\theta_i=0$ então vale $\theta_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\omega_j$, onde $a_{ij}=a_{ji}$.

Com relação à imersão$f:M^n\to\overline{M}^{m+n}$, vimos em (1.1.15) que $\sum_i\omega_i\wedge\omega_{i\alpha}=0$. Logo, é imediado do Lema de Cartan que

$$\omega_{i\alpha}=\sum_j h_{ij}^{\alpha}\omega_j,\quad h_{ij}^{\alpha}=h_{ji}^{\alpha}. \tag{1.1.16}$$

Para cada direção e_α do espaço normal a M, os coeficientes h_{ij}^{α} determinam unicamente o tensor misto

$$A=\sum_{ij\alpha}^{\alpha}h_{ij}^{\alpha}\omega^i\otimes\omega^j\otimes e_\alpha, \tag{1.1.17}$$

denominado *segunda forma fundamental de M*. Ademais, consideramos também a matriz simétrica $A^\alpha=(h_{ij}^{\alpha})_{n\times n}$.

Definição 1.11. Seja $f:M^n\to\overline{M}^{m+n}$ uma imersão isométrica. Definimos *o quadrado da norma da segunda forma fundamental da imersão* f por

$$|A|^2=\sum_{i,j,\alpha}(h_{ij}^{\alpha})^2. \tag{1.1.18}$$

Pela definição acima, é claro que $|A|^2$ é uma função em M. O principal objetivo do próximo capítulo é obter uma fórmula para o laplaciano dessa função.

1.1.2 Equações Fundamentais das Imersões Isométricas

Nas considerações a seguir, lembramos que M é, por si só, uma variedade riemanniana, e que possui suas próprias equações de estrutura com respeito ao correferencial $\{\omega_i\}$ e às formas de conexão $\{\omega_{ij}\}$ associadas, a saber,

$$\begin{aligned} d\omega_i &= \sum_j \omega_j \wedge \omega_{ji}, \\ d\omega_{ij} &= \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} + \Omega_{ij}, \\ \Omega_{ij} &= -\frac{1}{2}\sum_{kl} R_{ijkl}\,\omega_k \wedge \omega_l, \end{aligned}$$

onde R_{ijkl} são os componentes do tensor curvatura de M no referencial $\{e_i\}$. Também destacamos as chamadas *equações de estrutura do fibrado normal de M*, dadas por

$$\begin{aligned} d\omega_\alpha &= \sum_\beta \omega_\beta \wedge \omega_{\beta\alpha}, \\ d\omega_{\alpha\beta} &= \sum_\gamma \omega_{\alpha\gamma} \wedge \omega_{\gamma\beta} + \Omega^{\perp}_{\alpha\beta}, \\ \Omega^{\perp}_{\alpha\beta} &= -\frac{1}{2}\sum_{ij} R_{\alpha\beta ij}\,\omega_i \wedge \omega_j. \end{aligned}$$

onde os coeficientes $R_{\alpha\beta ij}$ são chamados coeficientes do tensor curvatura normal a M, e que satisfazem as mesmas propriedades de simetria e anti-simetria vistas em (1.1.2).

Observação 1.7. Note que estamos diferenciando os componentes R_{ijkl} dos componentes $R_{\alpha\beta ij}$ apenas pelos índices, seguindo a convenção que adotamos em (1.1.12). Dessa forma, podemos distinguir quando falamos do fibrado tangente e quando tratamos do fibrado normal a M.

Dada uma imersão isométrica $f: M^n \to \overline{M}^{m+n}$, uma relação útil entre componentes de curvatura de M e $\overline{M}$ é dada pela proposição a seguir.

Proposição 1.1 (Equação de Gauss)**.** As componentes do tensor de curvatura de M e $\overline{M}$ relacionam-se por

$$R_{ijkl} - \overline{R}_{ijkl} = \sum_\alpha (h^\alpha_{ik}h^\alpha_{jl} - h^\alpha_{il}h^\alpha_{jk}), \tag{1.1.19}$$

onde h^α_{ij} são as funções diferenciáveis dadas por (1.1.16).

A demonstração da Proposição 1.1 e das Proposições 1.2 e 1.3 seguintes, podem ser encontradas em [10]. A omissão de tais demonstrações neste contexto preliminar nos proporcionará uma maior objetividade quanto ao propósito do presente trabalho.

A equação de Gauss também possui uma expressão em termos das curvaturas seccionais K_M e $K_{\overline{M}}$ de M e $\overline{M}$, respectivamente. Se nos restringirmos ao caso $k = i$ e $l = j$ e lembrarmos que $\overline{R}_{ABAB} = K_{\overline{M}(e_A,e_B)}$ e que $R_{ijij} = K_M(e_i,e_j)$, então a equação de Gauss se torna

$$K_M(e_i,e_j) - K_{\overline{M}}(e_i,e_j) = \sum_{\alpha}(h^{\alpha}_{ii}h^{\alpha}_{jj} - (h^{\alpha}_{ij})^2). \tag{1.1.20}$$

Um caso mais simples da equação de Gauss ocorre quando a codimensão satisfaz $m = 1$. Nesse caso, M é denominada uma *hiperfície de* $\overline{M}$ e temos que o espaço normal de M possui apenas um referencial, digamos e. Por isso, podemos reescrever a equação de Gauss da forma

$$K_M(e_i,e_j) - K_{\overline{M}}(e_i,e_j) = h_{ii}h_{jj} - h^2_{ij}.$$

A equação de Gauss relaciona os componentes do tensor curvatura de $\overline{M}$ com os de M. O próximo resultado tratará dos coeficientes $R_{\alpha\beta ij}$ do tensor curvatura normal a M.

Proposição 1.2 (Equação de Ricci)**.** As componentes do tensor de curvatura de M e do seu fibrado normal relacionam-se por

$$R_{\alpha\beta ij} - \overline{R}_{\alpha\beta ij} = \sum_{\alpha}(h^{\alpha}_{ki}h^{\beta}_{kj} - h^{\alpha}_{kj}h^{\beta}_{ki}), \tag{1.1.21}$$

onde h^{α}_{ij} são as funções diferenciáveis dadas por (1.1.16).

A equação de Ricci relaciona as componentes do tensor de curvatura de $\overline{M}$ com as componentes do fibrado normal de M. Essa equação não deve ser confundida com a conhecida *identidade de Ricci*, que será demonstrada mais adiante, e que relaciona as segundas derivadas covariantes dos coeficientes h^{α}_{ij}.

Uma consequência interessante do fato de uma subvariedade M ser *totalmente geodésica*, $|A| \equiv 0$, é que, nesse caso, vale $h^{\alpha}_{ij} = 0$ e, consequentemente, pela equação de Gauss (1.1.20), temos $K_M(e_i,e_j) = K_{\overline{M}(e_i,e_j)}$. Ou seja, em relação ao referencial $\{e_i\}_{1\leq i\leq n}$ tangente à subvariedade, as curvaturas seccionais de M e $\overline{M}$ coincidem em cada $p \in M$.

Um outro importante conceito que se pode definir a partir dos coeficientes h^{α}_{ij} da segunda forma fundamental é o seguinte:

Definição 1.12. Seja $f : M^n \to \overline{M}^{m+n}$ uma imersão isométrica. O *vetor curvatura média da imersão* f é dado por

$$H = \frac{1}{n}\sum_i h^{\alpha}_{ii}e_{\alpha},$$

cuja norma é definida por

$$|H| = \frac{1}{n}\sqrt{\sum_{\alpha}\left(\sum_i (h^{\alpha}_{ii})^2\right)^2},$$

que, por sua vez, é denominada *curvatura principal de M*. Dizemos que a imersão f é mínima quando $H \equiv 0$, ou seja, quando $h^{\alpha}_{ii} \equiv 0 \; \forall \; \alpha, i$.

Observação 1.8. A condição de subvariedade mínima é mais fraca do que a de totalmente geodésica. Uma das questões que serão respondidas nesse trabalho (mais especificamente no Capítulo 4), é sobre quais condições uma subvariedade mínima do espaço hiperbólico é totalmente geodésica.

Se aplicarmos a equação de Gauss (1.1.20) em uma subvariedade mínima, obtemos que

$$K_M(e_i, e_j) - K_{\overline{M}}(e_i, e_j) = -h^2_{ij} < 0.$$

Uma aplicação interessante desse fato é que, quando $\overline{M}$ for o espaço hiperbólico $\mathbb{H}^{n+m}$, no qual $K_{\overline{M} \equiv -1}$, teremos que $K_M(e_i, e_j) = -1 - h^2_{ij} \leq -1$. Portanto, toda subvariedade mínima M do espaço hiperbólico possui curvatura seccional $K_M \leq -1$.

Relembrando a definição de diferencial covariante para tensores em M (ver (1.4)), notamos que, caso T seja um tensor de ordem 3 escrito da forma

$$T = \sum_{A,B,C} T_{ABC} e_A \otimes e_B \otimes e_C,$$

sua diferencial covariante é dada por

$$\nabla T := \sum_{A,B,C} \nabla T_{ABC} \otimes e_A \otimes e_B \otimes e_C,$$

onde

$$\nabla T_{ABC} = dT_{ABC} + \sum_E T_{EBC} \omega_{EA} + \sum_E T_{AEC} \omega_{EB} + \sum_E T_{ABE} \omega_{EC} := \sum_E T_{ABCE} \omega_E. \tag{1.1.22}$$

Em particular, para definir a derivada covariante dos coeficientes h^{α}_{ij} da segunda forma fundamental, iremos tratá-los, não do ponto de vista de funções, mas sim como componentes de um tensor de ordem 3 sobre a variedade M (ver (1.1.17)).

Sendo assim, conforme (1.1.22), e lembrando da anti-simetria das formas de conexão $\{\omega_{AB}\}$ de $\overline{M}$, definimos a derivada covariante dos componentes h^{α}_{ij} da segunda forma fundamental por

$$\nabla h^{\alpha}_{ij} := dh^{\alpha}_{ij} - \sum_l h^{\alpha}_{lj} \omega_{il} - \sum_l h^{\alpha}_{il} \omega_{jl} + \sum_{\beta} h^{\beta}_{ij} \omega_{\beta\alpha}.$$

Observe que ∇h_{ij}^{α} é uma 1-forma, que, por sua vez, pode ser vista com um tensor de ordem 1 em M. Dados i, j, α, definimos os coeficientes da derivada covariante de h_{ij}^{α} como sendo as funções h_{ijk}^{α} tais que

$$\nabla h_{ij}^{\alpha} = \sum_k h_{ijk}^{\alpha} \omega_k. \tag{1.1.23}$$

Fica claro, por definição, que $h_{ijk}^{\alpha} = \nabla h_{ij}^{\alpha}(e_k)$.

Diferenciando covariantemente a segunda forma fundamental, e tendo em mente as considerações acima, obtemos de (1.1.17) que

$$\begin{aligned} \nabla A &= \sum_{i,j,\alpha} \left(dh_{ij}^{\alpha} - \sum_l h_{lj}^{\alpha} \omega_{il} - \sum_l h_{il}^{\alpha} \omega_{jl} + \sum_{\beta} h_{ij}^{\beta} \omega_{\beta\alpha} \right) \otimes \omega^i \otimes \omega^j \otimes e_{\alpha} \\ &= \sum_{i,j,\alpha,k} h_{ijk}^{\alpha} \omega^k \otimes \omega^i \otimes \omega^j \otimes e_{\alpha}. \end{aligned} \tag{1.1.24}$$

A partir dos coeficientes h_{ijk}^{α}, definimos a norma

$$|\nabla A|^2 := \sum_{i,j,k,\alpha} (h_{ijk}^{\alpha})^2. \tag{1.1.25}$$

Uma relação útil envolvendo os coeficientes h_{ijk}^{α} e os componentes $\overline{R}_{ABCD}$ do tensor curvatura de $\overline{M}$ é a seguinte:

Proposição 1.3 (Equação de Codazzi)**.** As funções h_{ijk}^{α} definidas em (1.1.23) se relacionam com o tensor curvatura de $\overline{M}$ por

$$h_{ijk}^{\alpha} - h_{ikj}^{\alpha} = -\overline{R}_{\alpha ijk}, \tag{1.1.26}$$

onde $\overline{R}_{\alpha ijk}$ são os coeficientes do tensor curvatura de $\overline{M}$.

Agora, observe em (1.1.24) que a diferencial covariante da segunda forma fundamental é um tensor de ordem 4 em M, cujos coeficientes são as funções h_{ikj}^{α}. Nesse sentido, em harmonia com (1.1.10), a diferencial covariante desses componentes será dada por

$$\nabla h_{ijk}^{\alpha} := dh_{ijk}^{\alpha} - \sum_l h_{ljk}^{\alpha} \omega_{il} - \sum_l h_{ilk}^{\alpha} \omega_{jl} - \sum_l h_{ijl}^{\alpha} \omega_{kl} + \sum_{\beta} h_{ijk}^{\beta} \omega_{\beta\alpha}.$$

Mais uma vez, observamos que ∇h_{ijk}^{α} é uma 1-forma sobre M. Definimos as funções h_{ijkl}^{α} como sendo os coeficientes tais que

$$\nabla h_{ijk}^{\alpha} = \sum_l h_{ijkl}^{\alpha} \omega_l.$$

Fica claro, pela definição, que

$$h^{\alpha}_{ijkl} = \nabla h^{\alpha}_{ijk}(e_l), \tag{1.1.27}$$

e que

$$\sum_l h^{\alpha}_{ijkl}\omega_l = dh^{\alpha}_{ijk} - \sum_l h^{\alpha}_{ljk}\omega_{il} - \sum_l h^{\alpha}_{ilk}\omega_{jl} - \sum_l h^{\alpha}_{ijl}\omega_{kl} + \sum_{\beta} h^{\beta}_{ijk}\omega_{\beta\alpha}.$$

Uma importante relação envolvendo os coeficientes h^{α}_{ijkl} , e que relaciona os coeficientes R_{ijkl} com $R_{\alpha\beta ij}$, é dada pela seguinte proposição:

Proposição 1.4 (Identidade de Ricci)**.** As funções h^{α}_{ijkl} definidas por (1.1.27) se relacionam com as funções h^{α}_{ij} definidas em (1.1.16) e com o tensor curvatura de M e do seu fibrado normal pela seguinte expressão

$$h^{\alpha}_{ijkl} - h^{\alpha}_{ijlk} = \sum_m h^{\alpha}_{mi}R_{mikl} + \sum_m h^{\alpha}_{mj}R_{mjkl} - \sum_{\beta} h^{\beta}_{ij}R_{\alpha\beta kl} \tag{1.1.28}$$

onde R_{ijkl} são os componentes do tensor curvatura de M e $R_{\alpha\beta kl}$ são os coeficientes do tensor curvatura do fibrado normal de M.

Para os próximos cálculos, em virtude da elevada quantidade de índices com os quais lidaremos, iremos adotar uma nova convenção para os coeficientes dos tensores curvatura do fibrado tangente, fibrado normal de M, e do fibrado tangente de $\overline{M}$, a saber

$$\begin{aligned} R_{ijkl} &= R^{i}_{jkl}, \\ R_{ABCD} &= R^{A}_{BCD}, \\ R_{\alpha\beta ij} &= R^{\alpha}_{\beta ij}. \end{aligned} \tag{1.1.29}$$

Reescrevemos o primeiro índice inferior na forma de um índice superior do respectivo coeficiente. É uma notação mais objetiva, de forma que todos os resultados até agora são facilmente reescritos, e que, principalmente, simplificará muitas explicações e cálculos a seguir.

Antes de finalizarmos a presente seção, faremos uma rápida observação sobre variedades localmente simétricas. Primeiro, lembramos que a curvatura de $\overline{M}$ é um tensor de ordem 4 (ver (1.1.1)), cujos componentes são as funções $\overline{R}^{A}_{BCD}$. Logo, a diferencial covariante dessas funções é dada por

$$\nabla\overline{R}^{A}_{BCD} = d\overline{R}^{A}_{BCD} - \sum_E \overline{R}^{A}_{ECD}\omega_{BE} - \sum_E \overline{R}^{A}_{BED}\omega_{CE} - \sum_E \overline{R}^{A}_{BCE}\omega_{DE} + \sum_E \overline{R}^{E}_{BCD}\omega_{EA}.$$

A partir dessa expressão podemos definir os componentes R^A_{BCDE} como sendo as funções que satisfazem $\nabla\overline{R}^A_{BCD} = \sum\limits_E R^A_{BCDE}\omega_E$.

É claro que vale

$$R^A_{BCDE} = \nabla\overline{R}^A_{BCD}(e_E). \tag{1.1.30}$$

Em particular, a diferencial covariante dos coeficientes da forma $\overline{R}^\alpha_{ijk}$ é dada por

$$\nabla\overline{R}^\alpha_{ijk} = d\overline{R}^\alpha_{ijk} - \sum_E \overline{R}^\alpha_{Ejk}\omega_{iE} - \sum_E \overline{R}^\alpha_{iEk}\omega_{jE} - \sum_E \overline{R}^\alpha_{ijE}\omega_{kE} + \sum_E \overline{R}^E_{ijk}\omega_{E\alpha}. \tag{1.1.31}$$

Por outro lado, a partir dos componentes $\overline{R}^\alpha_{ijk}$ do tensor curvatura de $\overline{M}$, definimos as funções $\overline{R}^\alpha_{ijkl}$, dadas por

$$\sum_l \overline{R}^\alpha_{ijkl}\omega_l := d\overline{R}^\alpha_{ijk} - \sum_m \overline{R}^\alpha_{mjk}\omega_{im} - \sum_m \overline{R}^\alpha_{imk}\omega_{jm} - \sum_m \overline{R}^\alpha_{ijm}\omega_{km} + \sum_\beta \overline{R}^\beta_{ijk}\omega_{\beta\alpha}. \tag{1.1.32}$$

Subtraindo (1.1.32) de (1.1.31), temos

$$\nabla\overline{R}^\alpha_{ijk} - \sum_l \overline{R}^\alpha_{ijkl}\omega_l = -\sum_\beta \overline{R}^\alpha_{\beta jk}\omega_{i\beta} - \sum_\beta \overline{R}^\alpha_{i\beta k}\omega_{j\beta} - \sum_\beta \overline{R}^\alpha_{ij\beta}\omega_{k\beta} + \sum_m \overline{R}^m_{ijk}\omega_{m\alpha}.$$

Agora, usando que $\omega_{i\alpha} = \sum\limits_l h^\alpha_{il}\omega_l$, pelo Lema de Cartan, a expressão acima se torna

$$\nabla\overline{R}^\alpha_{ijk} - \sum_l \overline{R}^\alpha_{ijkl}\omega_l = -\sum_{\beta,l} \overline{R}^\alpha_{\beta jk}h^\beta_{il}\omega_l - \sum_{\beta,l} \overline{R}^\alpha_{i\beta k}h^\beta_{jl}\omega_l - \sum_{\beta,l} \overline{R}^\alpha_{ij\beta}h^\beta_{kl}\omega_l + \sum_{m,l} \overline{R}^m_{ijk}h^\alpha_{ml}\omega_l.$$

Finalmente, aplicando um vetor e_l, $1 \leq l \leq n$, na 1-forma acima e usando (1.1.30) obtemos

$$\overline{R}^\alpha_{ijkl} = \overline{R}^\alpha_{ijkl} - \sum_\beta \overline{R}^\alpha_{\beta jk}h^\beta_{il} - \sum_\beta \overline{R}^\alpha_{i\beta k}h^\beta_{jl} - \sum_\beta \overline{R}^\alpha_{ij\beta}h^\beta_{kl} + \sum_m \overline{R}^m_{ijk}h^\alpha_{ml}. \tag{1.1.33}$$

Definição 1.13. Dizemos que uma variedade riemanniana $\overline{M}$ é *localmente simétrica* quando $\nabla\overline{R}^A_{BCD} \equiv 0$.

Se $\overline{M}$ é localmente simétrica, então $\overline{R}^\alpha_{ijkl} = 0$, e, de (1.1.33), conclui-se que

$$\overline{R}^\alpha_{ijkl} = \sum_\beta \overline{R}^\alpha_{\beta jk}h^\beta_{il} + \sum_\beta \overline{R}^\alpha_{i\beta k}h^\beta_{jl} + \sum_\beta \overline{R}^\alpha_{ij\beta}h^\beta_{kl} - \sum_m \overline{R}^m_{ijk}h^\alpha_{ml}. \tag{1.1.34}$$

Um exemplo de variedades localmente simétricas são aquelas com curvatura seccional constante, como, por exemplo, o espaço hiperbólico $\mathbb{H}^{n+m}$.

Observação 1.9. É interessante notar que, se restringirmos ∇R^{α}_{ijk} a M, teremos que $\omega_\alpha = 0$, e vale

$$\nabla \overline{R}^{\alpha}_{ijk}\bigg|_M = d\overline{R}^{\alpha}_{ijk} - \sum_m \overline{R}^{\alpha}_{mjk}\omega_{im} - \sum_m \overline{R}^{\alpha}_{imk}\omega_{jm} - \sum_m \overline{R}^{\alpha}_{ijm}\omega_{km} + \sum_m \overline{R}^{m}_{ijk}\omega_{m\alpha} = \sum_l \overline{R}^{\alpha}_{ijkl}\omega_l.$$

Portanto, é imediata a seguinte relação

$$\nabla \overline{R}^{\alpha}_{ijk}\bigg|_M (e_l) = \overline{R}^{\alpha}_{ijkl}. \tag{1.1.35}$$

Assim, nas condições acima, diferenciando covariantemente a equação de Codazzi (1.1.26), usando (1.1.27) e (1.1.35), obtemos a seguinte relação válida em M

$$h^{\alpha}_{ijkl} = h^{\alpha}_{ikjl} - \overline{R}^{\alpha}_{ijkl}, \quad \forall\, 1 \leq l \leq n. \tag{1.1.36}$$

1.2 Elementos de Análise e Álgebra Linear

A demonstração dos principais resultados neste trabalho faz-se uso de certos conceitos de *análise* e de *álgebra linear*. Todavia, a demonstração de alguns desses conceitos foge do tema e do objetivo proposto nesse trabalho, razão pela qual na maioria dos casos iremos omiti-las ou nos restringir a breves comentários.

Para compreender bem a noção de autovalores de operadores sobre variedades, a ser apresentada no Capítulo 3, é importante considerarmos a seguinte definição.

Definição 1.14. Seja $\Omega \subset M$ um abeto na topologia induzida em M. Denotamos por $L^P(\Omega)$ o espaço das funções $p-$integráveis em Ω, isto é

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R}; \quad \int_\Omega |f|^p < +\infty \right\},$$

onde f é integrável. O espaço L^P é um espaço de Hilbert, e a norma usual é dada por

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{1.2.1}$$

Por definição, as funções mensuráveis $f \in C(\Omega)$ são também funções $L^p(\Omega)$.

Observação 1.10. Um outro espaço de funções integráveis é o chamado *Espaço de Sobolev* $W_0^{1,2}(\Omega)$, constituído pelas funções em $L^2(\Omega)$ com suporte compacto em Ω , onde as chamadas *derivadas fracas* existem e pertencem ao espaço $L^2(\Omega)$, conforme será definido mais adiante na Seção 3.2 do Capítulo 3.

Uma importante desigualdade sobre a norma dos espaços L^p é a seguinte.

Proposição 1.5 (Desigualdade de Hölder)**.** (Ver [12]) Dadas duas funções $f \in L^p$ e $q \in L^q$, com $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1, 1 \leq p, q < +\infty$, então $f \cdot g \in L^1$ e vale

$$\|f \cdot g\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q.$$

Reescrevendo a desigualdade acima usando (1.2.1), temos

$$\int_\Omega |f \cdot g| \leq \left(\int_\Omega |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega |g|^q \right)^{\frac{1}{q}}. \tag{1.2.2}$$

Agora, voltando a tratar dos campos de vetores diferenciáveis em variedades, um importante teorema que será extensivamente utilizado no Capítulo 4 é o seguinte

Teorema 1.1 (Teorema da Divergência)**.** (Ver [5]) Seja $X = \sum_i x_i e_i$ um campo de vetores diferenciáveis em M, com suporte compacto em M. Então vale a igualdade

$$\int_M div\, X \; dV = 0,$$

onde V denota o volume em M.

Um caso particular do teorema da divergência é a Identidade de Green. Veja o corolário abaixo.

Corolário 1.1 (Identidade de Green)**.** Sejam dadas duas funções diferenciáveis $f, g : M \to \mathbb{R}$ tais que o campo vetorial $f\nabla g$ tenha suporte compacto em M. Então

$$\int_M (f \triangle g + \langle \nabla f, \nabla g \rangle)\, dV = 0. \tag{1.2.3}$$

Demonstração. Note que, se considerarmos o campo vetorial $f\nabla g$ no teorema da divergência e usarmos as propriedades (1.1.9), teremos que

$$div(f\nabla g) = f \cdot div\nabla g + \langle \nabla g, \nabla f \rangle = f \triangle g + \langle \nabla f, \nabla g \rangle$$

e que

$$\langle f\nabla g, \nu\rangle = f\langle \nabla g, \nu\rangle = f\cdot dg(\nu) = f\frac{\partial g}{\partial \nu},$$

e a identidade de Green segue diretamente do teorema da divergência. $\square$

Observação 1.11. É uma consequência direta da identidade de Green que, se f e g tem suporte compacto em M, então

$$\int_M (f\triangle g - g\triangle f)\, dV = 0. \tag{1.2.4}$$

Uma desigualdade, em particular, que será amplamente utilizada nos teoremas do Capítulo 4, é a seguinte.

Proposição 1.6 (Desigualdade de Cauchy Schwarz)**.** (Ver [14]) Seja E um espaço de vetorial com produto interno $\langle , \rangle$ e norma $\|\cdot\|$, e considere dois vetores $x,y \in E$. Então vale a seguinte desigualdade

$$|\langle x,y\rangle| \leq \|x\|\cdot\|y\|, \tag{1.2.5}$$

onde $|\langle x,y\rangle|$ é o valor absoluto de $\langle x,y\rangle$.

Umas das consequências de (1.2.5), que será particularmente útil no próximo capítulo, é a desigualdade de médias, que será apresentada no próximo lema.

Sejam dados m números reais $a_1,...,a_n$. Sua média aritmética é dada por

$$MA(a_1,...,a_n) = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k}{n}.$$

Por outro lado, a média quadrática desses números é dada por

$$MQ(a_1,...,a_n) = \sqrt{\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} (a_k)^2}{n}}.$$

A desigualdade envolvendo tais médias é a seguinte:

Lema 1.2. Se $a_1,...,a_n \in \mathbb{R}$, então vale $MQ(a_1,...,a_n) \geq MA(a_1,...,a_n)$, isto é

$$\sqrt{\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} (a_k)^2}{n}} \geq \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k}{n}, \tag{1.2.6}$$

onde a igualdade ocorre se, e somente se, $a_1 = ... = a_n$.

Ainda considerando o espaço $H = \mathbb{R}^n$, temos que, dadas duas funções $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ com $f = (f_1, ..., f_n)$ e $g = (g_1, ..., g_n)$, valem

$$\langle f, g\rangle^2 \quad = \quad \left(\sum_{i=1}^{n} f_i g_i\right)^2, \qquad \|f\|^2 = \sum_{i=1}^{n} f_i^2, \qquad \|g\|^2 = \sum_{i=1}^{n} g_i^2.$$

A Desigualdade de Cauchy Schwars nas condições acima implica em

$$\left(\sum_{i=1}^{n} f_i g_i\right)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} f_i^2 \sum_{i=1}^{n} g_i^2.$$

Em particular, se a_1, a_2, b_2, b_2 são números reais quaisquer, então vale, da última expressão, que

$$(a_1 b_1 - a_2 b_2)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2).$$

A seguir, apresentamos um lema que será exaustivamente utilizado na demonstração dos principais teoremas do Capítulo 4.

Lema 1.3 (Desigualdade de Young)**.** (Ver [13]) Se p e q são números reais positivos tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, então, para todo par de números reais a e b não negativos, vale

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

A igualdade ocorre se, e somente se, $a^p = b^q$.

Observação 1.12. Uma consequência direta do resultado acima é que, para todo $\varepsilon > 0$, resulta que

$$ab \leq \varepsilon a^p + C(\varepsilon) b^q, \tag{1.2.7}$$

onde $C(\varepsilon) = \dfrac{1}{q(\varepsilon p)^{q/p}} > 0$.

De fato, se tomarmos um valor $\xi > 0$, e considerarmos os números reais ξa e $\dfrac{b}{\xi}$, a desigualdade de Young se torna

$$ab = (\xi a)\left(\frac{b}{\xi}\right) \leq \frac{1}{p}(\xi a)^p + \frac{1}{q}\left(\frac{b}{\xi}\right)^q \leq \frac{\xi^p}{p} a^p + \frac{1}{q\xi^q} b^q.$$

Denotando por $\varepsilon = \dfrac{\xi^p}{p} > 0$, então $\dfrac{1}{q\xi^q} = \dfrac{1}{q(\varepsilon p)^{q/p}}$ e podemos reescrever a desigualdade acima na forma

$$ab \leq \varepsilon a^p + \frac{1}{q(\varepsilon p)^{q/p}} b^q = \varepsilon a^p + C(\varepsilon) b^q.$$

As próximas considerações visam apresentar propriedades gerais de matrizes simétricas (e, consequentemente, de operadores simétricos), que serão úteis no estudo da segunda forma fundamental de uma imersão, visto que cada componente desta será um operador simétrico sobre um espaço vetorial. Também é apresentada a definição de norma de um operador simétrico, e que por sua vez será utilizada para definir a norma da segunda forma fundamental.

Considere uma matriz $A = (a_{ij})_{n\times n}$. Dizemos que A é simétrica se $a_{ij} = a_{ji}, 1 \leq i, j \leq n$. Claramente, da definição acima, uma matriz simétrica A é igual à sua transposta A^t. Definimos o traço de A por

$$trA = \sum_i a_{ii}.$$

Considere a matriz quadrada $A \cdot A^t = A^2 = (b_{kj})_{n\times n}$, onde cada elemento b_{kj} é da forma $b_{kj} = \sum_i a_{ki} a_{ij}$. Logo $b_{jj} = \sum_i a_{ji} a_{ij}$. Nesse caso, sendo A simétrica, temos que

$$trA^2 = \sum_{i,j} (a_{ij})^2.$$

Ou seja, o traço do quadrado de uma matriz simétrica A nada mais é do que a soma do quadrado dos termos de A. Motivados pelas considerações acima, seja $B = (b_{ij})_{n\times n}$ uma matriz qualquer. Definimos a *norma da matriz B* por

$$|B| = \sum_{i,j} (b_{ij})^2.$$

Observe que, se a matriz A for simétrica, então

$$|A| = trA^2. \tag{1.2.8}$$

Agora enunciamos e provamos o último resultado desse capítulo, que será utilizado para demonstrar uma importante desigualdade no Capítulo 2.

Proposição 1.7. (Ver [8]) Sejam A e B matrizes simétricas de mesma ordem. Então,

$$|AB - BA| \leq 2|A||B|. \tag{1.2.9}$$

Observação 1.13. De (1.2.8) e do fato de que $tr(AB-BA)^2 = -|AB-BA|$, podemos reescrever (1.2.9) na seguinte forma

$$-tr(AB-BA)^2 \leq 2 \cdot trA^2 \cdot trB^2. \tag{1.2.10}$$

Capítulo 2

Fórmula de Simons para Imersões Mínimas no Espaço Hiperbólico $\mathbb{H}^{n+m}$

Nosso principal objetivo neste capítulo é deduzir a *equação de Simons* para imersões mínimas em espaços de curvatura seccional constante, e, a partir desta, obter uma importante desigualdade para imersões mínimas no espaço hiperbólico. Essa desigualdade será extensivamente utilizada nos principais teoremas do Capítulo 4.

Seguimos os passos apresentados em [2, 7, 8, 16, 18, 19, 21] para desenvolvermos a Seção 2.1 e, inspirados por [3, 19], traçamos o roteiro da Seção 2.2.

2.1 Fórmula de Simons

Conforme vimos em (1.1.18), nós definimos o quadrado da norma da segunda forma fundamental por

$$|A|^2 = \sum_{i,j,\alpha} (h_{ij}^{\alpha})^2.$$

Nos cálculos a seguir, por conveniência, usaremos a convenção em (1.1.29).

O principal resultado dessa seção é a *Fórmula de Simons*, que fornece uma expressão para o laplaciano de $|A|^2$. Para isso, analogamente ao que fazemos para funções $u : U \to \mathbb{R}$ (ver (1.1.5)), definimos o *laplaciano da segunda forma fundamental* h_{ij}^{α} pela expressão

$$\triangle h_{ij}^{\alpha} := \sum_k h_{ijkk}^{\alpha}. \tag{2.1.1}$$

Usando essa definição e os resultados vistos na Seção 1.1.2, é possível provar o seguinte:

Teorema 2.1 (Fórmula de Simons)**.** (Ver [8, 18]) Se $f : M^n \to \overline{M}^{m+n}$ é uma imersão mínima e $\overline{M}^{m+n}$ tem curvatura seccional constante, então vale

$$\frac{1}{2}\triangle|A|^2 = |\nabla A|^2 + nk|A^2| + \sum_{\alpha,\beta} tr(A^\alpha A^\beta - A^\beta A^\alpha)^2 - \sum_{\alpha,\beta}[tr(A^\alpha A^\beta)]^2. \tag{2.1.2}$$

Demonstração. Primeiramente, pela definição de $|A|^2$ e conforme (1.1.10), temos

$$\triangle|A|^2 = \triangle\left(\sum_{i,j,\alpha}(h_{ij}^\alpha)^2\right) = \sum_{i,j,\alpha}\triangle(h_{ij}^\alpha)^2 = 2\sum_{i,j,\alpha}(h_{ij}^\alpha\triangle h_{ij}^\alpha + |\nabla h_{ij}^\alpha|^2), \tag{2.1.3}$$

Em (1.1.25), definimos $|\nabla A|^2 = \sum_{i,j,\alpha}|\nabla h_{ij}^\alpha|^2 = \sum_{i,j,k,\alpha}(h_{ijk}^\alpha)^2$, que, substituindo em (2.1.3), fornece

$$\frac{1}{2}\triangle|A|^2 = |\nabla A|^2 + \sum_{i,j,\alpha} h_{ij}^\alpha\triangle h_{ij}^\alpha. \tag{2.1.4}$$

A partir de agora, vamos obter uma expressão mais clara para o termo

$$\sum_{i,j,\alpha} h_{ij}^\alpha\triangle h_{ij}^\alpha. \tag{2.1.5}$$

Note que, por (1.1.36), vale a igualdade

$$h_{ijkk}^\alpha = h_{ikjk}^\alpha - \overline{R}_{ijkk}^\alpha,$$

que substituída em (2.1.1), justamente com $h_{ij}^\alpha = h_{ji}^\alpha$, implica em

$$\triangle h_{ij}^\alpha = \sum_k h_{ijkk}^\alpha = \sum_k h_{ikjk}^\alpha - \sum_k \overline{R}_{ijkk}^\alpha = \sum_k h_{kijk}^\alpha - \sum_k \overline{R}_{ijkk}^\alpha. \tag{2.1.6}$$

Novamente, por (1.1.36) e pela identidade de Ricci (1.1.28), obtemos

$$\begin{aligned} h_{kijk}^\alpha &= h_{kikj}^\alpha + \sum_m h_{mk}^\alpha R_{ijk}^m + \sum_m h_{mi}^\alpha R_{kjk}^m - \sum_\beta h_{ki}^\beta R_{\beta jk}^\alpha \\ &= h_{kkij}^\alpha - \overline{R}_{kikj}^\alpha + \sum_m h_{km}^\alpha R_{ijk}^m + \sum_m h_{mi}^\alpha R_{kjk}^m - \sum_\beta h_{ki}^\beta R_{\beta jk}^\alpha. \end{aligned}$$

Substituindo esse último resultado em (2.1.6) obtemos

$$\begin{aligned}\triangle h_{ij}^{\alpha} &= \sum_k \left(h_{kkij}^{\alpha} - \overline{R}_{kikj}^{\alpha} + \sum_m h_{km}^{\alpha} R_{ijk}^{\alpha} + \sum_m h_{mi}^{\alpha} R_{kjk}^{m} - \sum_\beta h_{ki}^{\beta} R_{\beta jk}^{\alpha} \right) - \sum_k \overline{R}_{ijkk}^{\alpha} \\ &= \sum_k \left(h_{kkij}^{\alpha} - \overline{R}_{kikj}^{\alpha} - \overline{R}_{ijkk}^{\alpha} \right) + \sum_k \left(\sum_m h_{km}^{\alpha} R_{ijk}^{m} + \sum_m h_{mi}^{\alpha} R_{kjk}^{m} - \sum_\beta h_{ki}^{\beta} R_{\beta jk}^{\alpha} \right).\end{aligned} \tag{2.1.7}$$

Por outro lado, sabemos da equação de Gauss (1.1.19) e da equação de Ricci (1.1.21), que vale

$$R_{ijk}^{m} = \overline{R}_{ijk}^{m} + \sum_\beta (h_{mj}^{\beta} h_{ik}^{\beta} - h_{mk}^{\beta} h_{ij}^{\beta}) \quad \Longrightarrow \quad R_{kjk}^{m} = \overline{R}_{kjk}^{m} + \sum_\beta (h_{mj}^{\beta} h_{kk}^{\beta} - h_{mk}^{\beta} h_{kj}^{\beta})$$

e

$$R_{\beta kl}^{\alpha} = \overline{R}_{\beta kl}^{\alpha} + \sum_i (h_{ik}^{\alpha} h_{il}^{\beta} - h_{il}^{\alpha} h_{ik}^{\beta}) \quad \Longrightarrow \quad R_{\beta jk}^{\alpha} = \overline{R}_{\beta jk}^{\alpha} + \sum_m (h_{mj}^{\alpha} h_{mk}^{\beta} - h_{mk}^{\alpha} h_{mj}^{\beta}).$$

Usando as relações acima em (2.1.7), resulta em

$$\begin{aligned}\triangle h_{ij}^{\alpha} &= \sum_k \left(h_{kkij}^{\alpha} - \overline{R}_{kikj}^{\alpha} - \overline{R}_{ijkk}^{\alpha} \right) + \sum_k \left(\sum_m h_{km}^{\alpha} R_{ijk}^{m} + \sum_m h_{mi}^{\alpha} R_{kjk}^{m} - \sum_\beta h_{ki}^{\beta} R_{\beta jk}^{\alpha} \right) \\ &= \sum_k \left(h_{kkij}^{\alpha} - \overline{R}_{kikj}^{\alpha} - \overline{R}_{ijkk}^{\alpha} \right) + \sum_k \left[\sum_m h_{km}^{\alpha} \left(\overline{R}_{ijk}^{m} + \sum_\beta (h_{mj}^{\beta} h_{ik}^{\beta} - h_{mk}^{\beta} h_{ij}^{\beta}) \right) \right. \\ &\quad \left. + \sum_m h_{mi}^{\alpha} \left(\overline{R}_{kjk}^{m} + \sum_\beta (h_{mj}^{\beta} h_{kk}^{\beta} - h_{mk}^{\beta} h_{kj}^{\beta}) \right) - \sum_\beta h_{ki}^{\beta} \left(\overline{R}_{\beta jk}^{\alpha} + \sum_m (h_{mj}^{\alpha} h_{mk}^{\beta} - h_{mk}^{\alpha} h_{mj}^{\beta}) \right) \right].\end{aligned}$$

Reagrupando os termos na última expressão, teremos

$$\begin{aligned}\triangle h_{ij}^{\alpha} =& \sum_k \left(h_{kkij}^{\alpha} - \overline{R}_{kikj}^{\alpha} - \overline{R}_{ijkk}^{\alpha} \right) - \sum_{\beta,k} h_{ki}^{\beta} \overline{R}_{\beta jk}^{\alpha} + \sum_{m,k} \left(h_{km}^{\alpha} \overline{R}_{ijk}^{m} + h_{mi}^{\alpha} \overline{R}_{kjk}^{m} \right) \\ &+ \sum_{\beta,m,k} \left[h_{km}^{\alpha} (h_{mj}^{\beta} h_{ik}^{\beta} - h_{mk}^{\beta} h_{ij}^{\beta}) + h_{mi}^{\alpha} (h_{mj}^{\beta} h_{kk}^{\beta} - h_{mk}^{\beta} h_{kj}^{\beta}) - h_{ki}^{\beta} (h_{mj}^{\alpha} h_{mk}^{\beta} - h_{mk}^{\alpha} h_{mj}^{\beta}) \right] \\ =& \sum_k \left(h_{kkij}^{\alpha} - \overline{R}_{kikj}^{\alpha} - \overline{R}_{ijkk}^{\alpha} \right) - \sum_{\beta,k} h_{ki}^{\beta} \overline{R}_{\beta jk}^{\alpha} + \sum_{m,k} \left(h_{km}^{\alpha} \overline{R}_{ijk}^{m} + h_{mi}^{\alpha} \overline{R}_{kjk}^{m} \right) \\ &+ \sum_{\beta,m,k} \left(2 h_{km}^{\alpha} h_{mj}^{\beta} h_{ik}^{\beta} + h_{mi}^{\alpha} h_{mj}^{\beta} h_{kk}^{\beta} - h_{km}^{\alpha} h_{km}^{\beta} h_{ij}^{\beta} - h_{mi}^{\alpha} h_{mk}^{\beta} h_{kj}^{\beta} - h_{mk}^{\alpha} h_{ki}^{\beta} h_{mk}^{\beta} \right).\end{aligned} \tag{2.1.8}$$

Assumindo que $\overline{M}$ é localmente simétrica (ver (1.13)) temos, por (1.1.34), que valem as igualdades

$$\overline{R}^{\alpha}_{kikj}=\sum_{\beta}\overline{R}^{\alpha}_{\beta ik}h^{\beta}_{kj}+\sum_{\beta}\overline{R}^{\alpha}_{k\beta k}h^{\beta}_{ij}+\sum_{\beta}\overline{R}^{\alpha}_{ki\beta}h^{\beta}_{kj}-\sum_{m}\overline{R}^{m}_{kik}h^{\alpha}_{mj},$$

e

$$\overline{R}^{\alpha}_{ijkk}=\sum_{\beta}\overline{R}^{\alpha}_{\beta jk}h^{\beta}_{ik}+\sum_{\beta}\overline{R}^{\alpha}_{i\beta k}h^{\beta}_{jk}+\sum_{\beta}\overline{R}^{\alpha}_{ij\beta}h^{\beta}_{kk}-\sum_{m}\overline{R}^{m}_{ijk}h^{\alpha}_{mk}.$$

Substituindo esses resultados em (2.1.8), e usando que $h^{\alpha}_{ij}=h^{\alpha}_{ji}$ e que $\overline{R}^{\alpha}_{ijk}=-\overline{R}^{\alpha}_{ikj}$ (ver (1.1.2)), resulta em

$$\begin{aligned}
\triangle h^{\alpha}_{ij}&=\sum_{k}\left(h^{\alpha}_{kkij}-\overline{R}^{\alpha}_{kikj}-\overline{R}^{\alpha}_{ijkk}\right)-\sum_{\beta,k}h^{\beta}_{ki}\overline{R}^{\alpha}_{\beta jk}+\sum_{m,k}\left(\overline{R}^{m}_{ijk}h^{\alpha}_{km}+\overline{R}^{m}_{kjk}h^{\alpha}_{mi}\right)\\
&\quad+\sum_{\beta,m,k}\left(2h^{\alpha}_{km}h^{\beta}_{mj}h^{\beta}_{ik}+h^{\alpha}_{mi}h^{\beta}_{mj}h^{\beta}_{kk}-h^{\alpha}_{km}h^{\beta}_{km}h^{\beta}_{ij}-h^{\alpha}_{mi}h^{\beta}_{mk}h^{\beta}_{kj}-h^{\alpha}_{mk}h^{\beta}_{ki}h^{\beta}_{mk}\right)\\
&=\sum_{k}\Bigg[h^{\alpha}_{kkij}-\left(\sum_{\beta}\overline{R}^{\alpha}_{\beta ik}h^{\beta}_{kj}+\sum_{\beta}\overline{R}^{\alpha}_{k\beta k}h^{\beta}_{ij}+\sum_{\beta}\overline{R}^{\alpha}_{ki\beta}h^{\beta}_{kj}-\sum_{m}\overline{R}^{m}_{kik}h^{\alpha}_{mj}\right)\\
&\quad-\left(\sum_{\beta}\overline{R}^{\alpha}_{\beta jk}h^{\beta}_{ik}+\sum_{\beta}\overline{R}^{\alpha}_{i\beta k}h^{\beta}_{jk}+\sum_{\beta}\overline{R}^{\alpha}_{ij\beta}h^{\beta}_{kk}-\sum_{m}\overline{R}^{m}_{ijk}h^{\alpha}_{mk}\right)\Bigg]\\
&\quad-\sum_{\beta,k}h^{\beta}_{ki}\overline{R}^{\alpha}_{\beta jk}+\sum_{m,k}\left(h^{\alpha}_{km}\overline{R}^{m}_{ijk}+h^{\alpha}_{mi}\overline{R}^{m}_{kjk}\right)\\
&\quad+\sum_{\beta,m,k}\left(2h^{\alpha}_{km}h^{\beta}_{mj}h^{\beta}_{ik}+h^{\alpha}_{mi}h^{\beta}_{mj}h^{\beta}_{kk}-h^{\alpha}_{km}h^{\beta}_{km}h^{\beta}_{ij}-h^{\alpha}_{mi}h^{\beta}_{mk}h^{\beta}_{kj}-h^{\alpha}_{mk}h^{\beta}_{ki}h^{\beta}_{mk}\right)\\
&=\sum_{k}h^{\alpha}_{kkij}+\sum_{m,k}\left(2\overline{R}^{m}_{ijk}h^{\alpha}_{km}+\overline{R}^{m}_{kjk}h^{\alpha}_{mi}+\overline{R}^{m}_{kik}h^{\alpha}_{mj}\right)\\
&\quad+\sum_{\beta,k}\left(-\overline{R}^{\alpha}_{\beta jk}h^{\beta}_{ki}-\overline{R}^{\alpha}_{\beta ik}h^{\beta}_{kj}-\overline{R}^{\alpha}_{k\beta k}h^{\beta}_{ij}-\overline{R}^{\alpha}_{ki\beta}h^{\beta}_{kj}-\overline{R}^{\alpha}_{\beta jk}h^{\beta}_{ik}-\overline{R}^{\alpha}_{i\beta k}h^{\beta}_{jk}-\overline{R}^{\alpha}_{ij\beta}h^{\beta}_{kk}\right)\\
&\quad+\sum_{\beta,m,k}\left(2h^{\alpha}_{km}h^{\beta}_{mj}h^{\beta}_{ik}+h^{\alpha}_{mi}h^{\beta}_{mj}h^{\beta}_{kk}-h^{\alpha}_{km}h^{\beta}_{km}h^{\beta}_{ij}-h^{\alpha}_{mi}h^{\beta}_{mk}h^{\beta}_{kj}-h^{\alpha}_{mk}h^{\beta}_{ki}h^{\beta}_{mk}\right)\\
&=\sum_{k}h^{\alpha}_{kkij}+\sum_{m,k}\left(2\overline{R}^{m}_{ijk}h^{\alpha}_{km}+\overline{R}^{m}_{kjk}h^{\alpha}_{mi}+\overline{R}^{m}_{kik}h^{\alpha}_{mj}\right)\\
&\quad+\sum_{\beta,k}\left(2\overline{R}^{\alpha}_{\beta kj}h^{\beta}_{ki}-\overline{R}_{k\beta k}h^{\alpha}_{ij}-\overline{R}_{ij\beta}h^{\beta}_{kk}+2\overline{R}^{\alpha}_{\beta ki}h^{\beta}_{kj}\right)\\
&\quad+\sum_{\beta,m,k}\left(2h^{\alpha}_{km}h^{\beta}_{mj}h^{\beta}_{ik}+h^{\alpha}_{mi}h^{\beta}_{mj}h^{\beta}_{kk}-h^{\alpha}_{km}h^{\beta}_{km}h^{\beta}_{ij}-h^{\alpha}_{mi}h^{\beta}_{mk}h^{\beta}_{kj}-h^{\alpha}_{mk}h^{\beta}_{ki}h^{\beta}_{mk}\right).
\end{aligned}\tag{2.1.9}$$

Agora, por hipótese, sabemos que a imersão $f : M^n \to \overline{M}^{m+n}$ é mínima. Ou seja, $h^{\alpha}_{kk} = 0$, $\forall k, \alpha$. Usando isso e (2.1.9) em (2.1.5), e efetuando algumas trocas convenientes de índices, temos

$$
\begin{aligned}
\sum_{i,j,\alpha} h^{\alpha}_{ij}\cdot\triangle h^{\alpha}_{ij} = & \sum_{\beta,k,i,j,\alpha}\left(2\overline{R}^{\alpha}_{\beta kj}h^{\beta}_{ki}h^{\alpha}_{ij} - \overline{R}_{k\beta k}h^{\alpha}_{ij}h^{\alpha}_{ij} + 2\overline{R}^{\alpha}_{\beta ki}h^{\beta}_{kj}h^{\alpha}_{ij}\right)\\
& + \sum_{m,k,i,j,\alpha}\left(2\overline{R}^{m}_{ijk}h^{\alpha}_{km}h^{\alpha}_{ij} + \overline{R}^{m}_{kjk}h^{\alpha}_{mi}h^{\alpha}_{ij} + \overline{R}^{m}_{kik}h^{\alpha}_{mj}h^{\alpha}_{ij}\right)\\
& + \sum_{\substack{\alpha,i,j\\ \beta,k,m}}\left(2h^{\alpha}_{km}h^{\beta}_{mj}h^{\beta}_{ik}h^{\alpha}_{ij} - h^{\alpha}_{km}h^{\beta}_{km}h^{\beta}_{ij}h^{\alpha}_{ij} - h^{\alpha}_{mi}h^{\beta}_{mk}h^{\beta}_{kj}h^{\alpha}_{ij} - h^{\alpha}_{mj}h^{\beta}_{ki}h^{\beta}_{mk}h^{\alpha}_{ij}\right)\\
= & \sum_{\beta,k,i,j,\alpha}(4\overline{R}^{\alpha}_{\beta ki}h^{\beta}_{kj}h^{\alpha}_{ij} - \overline{R}_{k\beta k}h^{\alpha}_{ij}h^{\alpha}_{ij}) + \sum_{m,k,i,j,\alpha}(2\overline{R}^{m}_{ijk}h^{\alpha}_{km}h^{\alpha}_{ij} + 2\overline{R}^{m}_{kik}h^{\alpha}_{mj}h^{\alpha}_{ij})\\
& + \sum_{\substack{\alpha,i,j\\ \beta,k,m}}\left(2h^{\alpha}_{km}h^{\beta}_{mj}h^{\beta}_{ik}h^{\alpha}_{ij} - h^{\alpha}_{km}h^{\beta}_{km}h^{\beta}_{ij}h^{\alpha}_{ij} - h^{\alpha}_{mi}h^{\beta}_{mk}h^{\beta}_{kj}h^{\alpha}_{ij} - h^{\alpha}_{mj}h^{\beta}_{ki}h^{\beta}_{mk}h^{\alpha}_{ij}\right).
\end{aligned}
\tag{2.1.10}
$$

Com relação ao último termo do lado direito da equação acima, notamos que, realizando algumas trocas de índices, obtemos

$$
\begin{aligned}
& \sum_{\beta,m,k,i,j,\alpha}\left(2h^{\alpha}_{km}h^{\beta}_{mj}h^{\beta}_{ik}h^{\alpha}_{ij} - h^{\alpha}_{km}h^{\beta}_{km}h^{\beta}_{ij}h^{\alpha}_{ij} - h^{\alpha}_{mi}h^{\beta}_{mk}h^{\beta}_{kj}h^{\alpha}_{ij} - h^{\alpha}_{mj}h^{\beta}_{ki}h^{\beta}_{mk}h^{\alpha}_{ij}\right)\\
= & \sum_{\beta,m,k,i,j,\alpha}\left(2h^{\alpha}_{km}h^{\beta}_{mj}h^{\beta}_{ik}h^{\alpha}_{ij} - h^{\alpha}_{mi}h^{\beta}_{mk}h^{\beta}_{kj}h^{\alpha}_{ij} - h^{\alpha}_{mj}h^{\beta}_{ki}h^{\beta}_{mk}h^{\alpha}_{ij}\right) - \sum_{\beta,m,k,i,j,\alpha} h^{\alpha}_{km}h^{\beta}_{km}h^{\beta}_{ij}h^{\alpha}_{ij}\\
= & \sum_{\beta,m,k,i,j,\alpha}\left(h^{\alpha}_{km}h^{\beta}_{mj}h^{\beta}_{ik}h^{\alpha}_{ij} - h^{\alpha}_{mk}h^{\beta}_{mj}h^{\beta}_{ji}h^{\alpha}_{ik} + h^{\alpha}_{km}h^{\beta}_{mj}h^{\beta}_{ik}h^{\alpha}_{ij} - h^{\alpha}_{mj}h^{\beta}_{ki}h^{\beta}_{mk}h^{\alpha}_{ij}\right) - \sum_{\beta,m,k,i,j,\alpha} h^{\alpha}_{ij}h^{\alpha}_{km}h^{\beta}_{ij}h^{\beta}_{km}\\
= & \sum_{\beta,m,k,i,j,\alpha}\left((h^{\beta}_{ik}h^{\alpha}_{ij} - h^{\beta}_{ji}h^{\alpha}_{ik})h^{\alpha}_{mk}h^{\beta}_{mj} + (h^{\alpha}_{km}h^{\beta}_{mj} - h^{\alpha}_{mj}h^{\beta}_{mk})h^{\beta}_{ik}h^{\alpha}_{ij}\right) - \sum_{\beta,m,k,i,j,\alpha} h^{\alpha}_{ij}h^{\alpha}_{km}h^{\beta}_{ij}h^{\beta}_{km}\\
= & \sum_{\beta,m,k,i,j,\alpha}\left((h^{\beta}_{mk}h^{\alpha}_{mj} - h^{\beta}_{jm}h^{\alpha}_{mk})h^{\alpha}_{ik}h^{\beta}_{ij} + (h^{\alpha}_{km}h^{\beta}_{mj} - h^{\alpha}_{mj}h^{\beta}_{mk})h^{\beta}_{ik}h^{\alpha}_{ij}\right) - \sum_{\beta,m,k,i,j,\alpha} h^{\alpha}_{ij}h^{\alpha}_{km}h^{\beta}_{ij}h^{\beta}_{km}\\
= & \sum_{\beta,m,k,i,j,\alpha}(h^{\alpha}_{km}h^{\beta}_{jm} - h^{\alpha}_{jm}h^{\beta}_{km})(h^{\beta}_{ki}h^{\alpha}_{ji} - h^{\alpha}_{ki}h^{\beta}_{ji}) - \sum_{\beta,m,k,i,j,\alpha} h^{\alpha}_{ij}h^{\alpha}_{km}h^{\beta}_{ij}h^{\beta}_{km}\\
= & -\sum_{\beta,l,k,i,j,\alpha}(h^{\alpha}_{ik}h^{\beta}_{jk} - h^{\alpha}_{jk}h^{\beta}_{ik})(h^{\alpha}_{il}h^{\beta}_{jl} - h^{\alpha}_{jl}h^{\beta}_{il}) - \sum_{\beta,k,i,l,j,\alpha} h^{\alpha}_{lj}h^{\alpha}_{ik}h^{\beta}_{lj}h^{\beta}_{ik}.
\end{aligned}
$$

E a equação (2.1.10) se torna

$$
\begin{aligned}
\sum_{\alpha,i,j} h^{\alpha}_{ij}\cdot\triangle h^{\alpha}_{ij} = & \sum_{\alpha,\beta,i,j,k}\left(4\overline{R}_{\alpha\beta ki}h^{\beta}_{jk}h^{\alpha}_{ij} - \overline{R}_{\alpha k\beta k}h^{\alpha}_{ij}h^{\beta}_{ij}\right) + \sum_{\alpha,m,i,j,k}(2\overline{R}_{mkik}h^{\alpha}_{mj}h^{\alpha}_{ij} + 2\overline{R}_{mijk}h^{\alpha}_{mk}h^{\alpha}_{ij})\\
& - \sum_{\alpha,\beta,i,j,k,l}(h^{\alpha}_{ik}h^{\beta}_{jk} - h^{\alpha}_{jk}h^{\beta}_{ik})(h^{\alpha}_{il}h^{\beta}_{jl} - h^{\alpha}_{jl}h^{\beta}_{il}) - \sum_{\alpha,\beta,i,j,k,l} h^{\alpha}_{ij}h^{\alpha}_{kl}h^{\beta}_{ik}h^{\beta}_{kl}.
\end{aligned}
\tag{2.1.11}
$$

Agora lembramos que, por hipótese, a variedade ambiente $\overline{M}^{n+m}$ é uma forma espacial, isto é, sua curvatura seccional é constante e igual a k. Nesse caso, por (1.1.11), sabemos que vale

$$\overline{R}_{ABCD} = k(\delta_{AC}\delta_{BD} - \delta_{AD}\delta_{BC}),$$

onde

$$\delta_{AB} = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad A = B, \\ 0 & \text{se} \quad A \neq B. \end{cases}$$

Portanto, somente se $A \neq B$, teremos $\overline{R}_{ABAB} = -\overline{R}_{ABBA} = k$. Caso contrário, vale $\overline{R}_{ABCD} = 0$. Usando isso nos dois primeiros termos do lado direito de (2.1.11), concluímos que

$$\begin{aligned}
\sum_{\alpha,\beta,i,j,k} &\left(4\overline{R}_{\alpha\beta ki}h^{\beta}_{jk}h^{\alpha}_{ij} - \overline{R}_{\alpha k\beta k}h^{\alpha}_{ij}h^{\beta}_{ij}\right) + \sum_{\alpha,m,i,j,k}(2\overline{R}_{mkik}h^{\alpha}_{mj}h^{\alpha}_{ij} + 2\overline{R}_{mijk}h^{\alpha}_{mk}h^{\alpha}_{ij}) \\
&= -\sum_{\alpha,\beta,i,j,k}\overline{R}_{\alpha k\beta k}h^{\alpha}_{ij}h^{\beta}_{ij} + \sum_{\alpha,m,i,j,k}(2\overline{R}_{mkik}h^{\alpha}_{mj}h^{\alpha}_{ij} + 2\overline{R}_{mijk}h^{\alpha}_{mk}h^{\alpha}_{ij}) \\
&= -\sum_{\substack{\alpha,i,j,k \\ \alpha\neq k}}\overline{R}_{\alpha k\alpha k}(h^{\alpha}_{ij})^2 + 2\sum_{\substack{\alpha,m,j,k \\ m\neq k}}\overline{R}_{mkmk}(h^{\alpha}_{mj})^2 + 2\sum_{\substack{\alpha,m,k \\ m\neq k}}\overline{R}_{mkmk}(h^{\alpha}_{mk})^2 - 2\sum_{\substack{\alpha,m,k \\ m\neq k}}\overline{R}_{mkkm}(h^{\alpha}_{mk})^2 \\
&= kn\left(-\sum_{\alpha,i,j}(h^{\alpha}_{ij})^2 + 2\sum_{\alpha,m,j}(h^{\alpha}_{mj})^2 + 2\sum_{\alpha,m,k}(h^{\alpha}_{mk})^2 - 2\sum_{\alpha,m,k}(h^{\alpha}_{mk})^2\right) \\
&= kn\sum_{\alpha,i,j}(h^{\alpha}_{ij})^2 \\
&= kn|A|^2,
\end{aligned} \tag{2.1.12}$$

onde na última igualdade utilizamos (1.1.18). Portanto, usando (2.1.11) e (2.1.12) em (2.1.4), obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\triangle|A|^2 &= \sum_{ij\alpha,k}(h^{\alpha}_{ijk})^2 + \sum_{i,j,\alpha}h^{\alpha}_{ij}\cdot\triangle h^{\alpha}_{ij} \\
&= |\nabla A|^2 + nk|A|^2 - \sum_{\alpha,\beta,i,j,k,l}(h^{\alpha}_{ik}h^{\beta}_{jk} - h^{\alpha}_{jk}h^{\beta}_{ik})(h^{\alpha}_{il}h^{\beta}_{jl} - h^{\alpha}_{jl}h^{\beta}_{il}) \\
&\quad - \sum_{\alpha,\beta,i,j,k,l}h^{\alpha}_{ij}h^{\alpha}_{kl}h^{\beta}_{ij}h^{\beta}_{kl}.
\end{aligned} \tag{2.1.13}$$

Antes de prosseguirmos, lembramos que A^{α} denota uma matriz simétrica, e, por conseguinte, o traço de A^{α} é dado por $trA^{\alpha} = \sum_i h^{\alpha}_{ii} \equiv 0$, visto que supomos que a imersão $f : M^n \to \overline{M}^{m+n}$ é mínima. Além disso, dados $\alpha, \beta \in \{n+1, ..., n+m\}$, definimos

$$S_{\alpha\beta} := \sum_{i,j}h^{\alpha}_{ij}h^{\beta}_{ij} = S_{\beta\alpha}.$$

Considere a matriz simétrica $(S_{\alpha\beta})_{m\times m}$. Pelos resultados de Álgebra Linear, sabemos que uma tal matriz é diagonalizável, de forma que podemos escolher um referencial normal $\{e_{n+1},...,e_{n+m}\}$ tal que

$$S_{\alpha\beta} = \begin{cases} S_{\alpha\alpha}, & \text{se } \alpha=\beta, \\ 0, & \text{se } \alpha\neq\beta. \end{cases} \tag{2.1.14}$$

Por simplicidade, denotamos $S_\alpha := S_{\alpha\alpha}$. Pelas considerações acima, temos que

$$|A|^2 = \sum_{i,j,\alpha}(h_{ij}^\alpha)^2 = \sum_\alpha\left(\sum_{i,j}(h_{ij}^\alpha)^2\right) = \sum_\alpha S_\alpha. \tag{2.1.15}$$

No caso do produto matricial $A^\alpha A^\beta$, pela simetria das duas matrizes, seu traço será dado por

$$tr(A^\alpha A^\beta) = \sum_{i,j} h_{ij}^\alpha h_{ij}^\beta = S_{\alpha\beta}. \tag{2.1.16}$$

Portanto, na matriz $A^\alpha A^\beta - A^\beta A^\alpha = (a_{ij})_{n\times n}$, temos que cada elemento será dado por

$$a_{ij} = \sum_k (h_{ik}^\alpha h_{kj}^\beta - h_{ik}^\beta h_{kj}^\alpha) = \sum_k (h_{ik}^\alpha h_{jk}^\beta - h_{jk}^\alpha h_{ik}^\beta),$$

e seu traço claramente será

$$tr(A^\alpha A^\beta - A^\beta A^\alpha) = 0.$$

Por outro lado, temos que na matriz $(A^\alpha A^\beta - A^\beta A^\alpha)^2 = (b_{ij})_{n\times n}$ cada elemento é dado por

$$b_{ij} = \sum_l a_{il}a_{lj} = \sum_l\left(\sum_k (h_{ik}^\alpha h_{lk}^\beta - h_{lk}^\alpha h_{ik}^\beta)\right)\left(\sum_r (h_{lr}^\alpha h_{jr}^\beta - h_{jr}^\alpha h_{lr}^\beta)\right). \tag{2.1.17}$$

Portanto, efetuando algumas trocas convenientes de índices, temos de (2.1.17) que

$$\begin{aligned} tr(A^\alpha A^\beta - A^\beta A^\alpha)^2 &= \sum_i b_{ii} \\ &= \sum_i\sum_j\left(\sum_k (h_{ik}^\alpha h_{jk}^\beta - h_{jk}^\alpha h_{ik}^\beta)\right)\left(\sum_l (h_{jl}^\alpha h_{il}^\beta - h_{il}^\alpha h_{jl}^\beta)\right) \\ &= \sum_{i,j,k,l}\left(h_{ik}^\alpha h_{jk}^\beta - h_{jk}^\alpha h_{ik}^\beta\right)\left(h_{jl}^\alpha h_{il}^\beta - h_{il}^\alpha h_{jl}^\beta\right). \end{aligned}$$

Por conseguinte, obtemos

$$\sum_{\alpha,\beta,i,j,k,l}(h_{ik}^\alpha h_{jk}^\beta - h_{jk}^\alpha h_{ik}^\beta)(h_{il}^\alpha h_{jl}^\beta - h_{jl}^\alpha h_{il}^\beta) = -\sum_{\alpha,\beta} tr(A^\alpha A^\beta - A^\beta A^\alpha)^2. \tag{2.1.18}$$

Analogamente, considerando o último termo do lado direto de (2.1.13) e usando (2.1.16), obtemos

$$\sum_{\alpha,\beta,i,j,k,l} h_{ij}^{\alpha} h_{kl}^{\alpha} h_{ij}^{\beta} h_{kl}^{\beta} = \sum_{\alpha,\beta} \left[\sum_{i,j} h_{ij}^{\alpha} h_{ij}^{\beta} \sum_{k,l} h_{kl}^{\alpha} h_{kl}^{\beta} \right] = \sum_{\alpha,\beta} S_{\alpha\beta}^2 = [tr(A^{\alpha}A^{\beta})]^2. \tag{2.1.19}$$

Substituindo (2.1.18) e (2.1.19) em (2.1.13), obtemos o resultado desejado, a saber

$$\frac{1}{2}\triangle|A|^2 = |\nabla A|^2 + nk|A^2| + \sum_{\alpha,\beta} tr(A^{\alpha}A^{\beta} - A^{\beta}A^{\alpha})^2 - \sum_{\alpha,\beta}[tr(A^{\alpha}A^{\beta})]^2.$$

□

A fórmula de Simons para subvariedades mínimas em uma variedade riemanniana qualquer foi demonstrada, pela primeira vez, em [18]. Especificamente no caso do espaço hiperbólico, a demonstração da fórmula de Simons utilizando formas diferenciais foi realizada em [8], que nos serviu de roteiro para a demonstração acima. Vejamos agora uma importante desigualdade que poderá, mais adiante, ser aplicada à formula de Simons.

Proposição 2.1. (Ver [2, 19]) Nas condições do Teorema 2.1, vale

$$-\sum_{\alpha,\beta} tr(A^{\alpha}A^{\beta} - A^{\beta}A^{\alpha})^2 + \sum_{\alpha,\beta}[tr(A^{\alpha}A^{\beta})]^2 \leq b(m)|A|^4,$$

onde $b(1) = 1$ e $b(m) \geq \frac{3}{2}$, se $m \geq 2$.

Demonstração. Vimos em (1.2.10) que, sendo A^{α} e A^{β} matrizes simétricas, vale

$$-tr(A^{\alpha}A^{\beta} - A^{\beta}A^{\alpha})^2 \leq 2tr(A^{\alpha})^2 \cdot tr(A^{\beta})^2.$$

Usando essa desigualdade, (2.1.16) e (2.1.14), obtemos

$$
\begin{aligned}
-\sum_{\alpha,\beta} tr(A^\alpha A^\beta - A^\beta A^\alpha)^2 + \sum_{\alpha,\beta}[tr(A^\alpha A^\beta)]^2 & \\
&= -\sum_{\alpha\neq\beta} tr(A^\alpha A^\beta - A^\beta A^\alpha)^2 + \sum_{\alpha\neq\beta}[tr(A^\alpha A^\beta)]^2 + \sum_\alpha [tr(A^\alpha)^2]^2 \\
&\leq \sum_{\alpha\neq\beta} 2tr(A^\alpha)^2 \cdot tr(A^\beta)^2 + \sum_{\alpha\neq\beta}[tr(A^\alpha A^\beta)]^2 + \sum_\alpha [tr(A^\alpha)^2]^2 \\
&= \sum_{\alpha\neq\beta} 2S_\alpha S_\beta + \sum_{\alpha\neq\beta} S_{\alpha\beta}^2 + \sum_\alpha S_\alpha^2 \\
&= 4\sum_{\alpha<\beta} S_\alpha S_\beta + \sum_\alpha S_\alpha^2 \\
&= 2\left[\left(\sum_\alpha S_\alpha\right)^2 - \sum_\alpha S_\alpha^2\right] + \sum_\alpha S_\alpha^2 \\
&= 2\left(\sum_\alpha S_\alpha\right)^2 - \sum_\alpha S_\alpha^2,
\end{aligned} \tag{2.1.20}
$$

onde, pela desigualdade (1.2.6), e lembrando que $n+1 \leq \alpha \leq n+m$, temos que

$$\sum_\alpha S_\alpha^2 \geq \frac{1}{m}\left(\sum_\alpha S_\alpha\right)^2 \Longrightarrow -\sum_\alpha S_\alpha^2 \leq -\frac{1}{m}\left(\sum_\alpha S_\alpha\right)^2.$$

Usando esse último resultado em (2.1.20), conclui-se que

$$-\sum_{\alpha,\beta} tr(A^\alpha A^\beta - A^\beta A^\alpha)^2 + \sum_{\alpha,\beta}[tr(A^\alpha A^\beta)]^2 \leq 2\left(\sum_\alpha S_\alpha\right)^2 - \frac{1}{m}\left(\sum_\alpha S_\alpha\right)^2.$$

Substituindo (2.1.15) na expressão acima, e denotando $b(m) = 2 - \frac{1}{m}$, resulta que

$$-\sum_{\alpha,\beta} tr(A^\alpha A^\beta - A^\beta A^\alpha)^2 + \sum_{\alpha,\beta}[tr(A^\alpha A^\beta)]^2 \leq b(m)|A|^4,$$

onde $b(1) = 1$ e $b(m) \geq \frac{3}{2}$, se $m \geq 2$. $\square$

Foi provado em [2], utilizando o *método de lagrange*, que a desigualdade acima pode ser refinada no caso $m \geq 2$, tornando-se

$$-\sum_{\alpha,\beta} tr(A^\alpha A^\beta - A^\beta A^\alpha)^2 + \sum_{\alpha,\beta}[tr(A^\alpha A^\beta)]^2| \leq \frac{3}{2}|A|^4. \tag{2.1.21}$$

Assim, podemos enunciar o seguinte resultado:

Proposição 2.2. (Ver [2, 19]) Nas condições do Teorema (2.1), vale

$$-\sum_{\alpha,\beta} tr(A^\alpha A^\beta - A^\beta A^\alpha)^2 + \sum_{\alpha,\beta}[tr(A^\alpha A^\beta)]^2 \leq b(m)|A|^4 \tag{2.1.22}$$

onde $b(1) = 1$ e $b(m) = \dfrac{3}{2}$, $m \geq 2$.

Demonstração. Segue diretamente da Proposição (2.1) juntamente com (2.1.21) □

Um outro resultado que será útil mais adiante é o de Xin e Yang [21], a saber

Proposição 2.3. (Ver [21]) Se $f : M^n \to \overline{M}^{m+n}$ é uma imersão cujo vetor curvatura média é paralelo em $\overline{M}^{n+m}$, então vale

$$|\nabla A|^2 - |\nabla|A||^2 \geq \frac{2}{mn}|\nabla|A||^2. \tag{2.1.23}$$

Em particular, vale o resultado acima no caso em que $f : M^n \hookrightarrow \overline{M}^{m+n}$ é uma imersão mínima (isto é, quando $H \equiv 0$).

A fórmula de Simons possui diversas aplicações em subvariedades mínimas do espaço euclidiano, esférico e hiperbólico. Veremos na próxima seção um breve estudo dessa fórmula no espaço hiperbólico.

2.2 Fórmula de Simons no Espaço Hiperbólico

Nesta seção, obteremos resultados envolvendo a fórmula de Simons em $\mathbb{H}^{n+m}$, que nos permitirão provar uma desigualdade que será utilizada na demonstração dos principais teoremas do Capítulo 4. As considerações a seguir foram baseadas em [3, 19].

Proposição 2.4. (Ver [19]) Se $f : M^n \to \mathbb{H}^{m+n}$ é uma imersão mínima no espaço hiperbólico, então vale

$$|A|\triangle|A| + b(m)|A|^4 + n|A|^2 \geq \frac{2}{mn}|\nabla|A||^2, \tag{2.2.1}$$

onde $b(1) = 1$ e $b(m) = \dfrac{3}{2}$, $m \geq 2$.

Demonstração. Pelas propriedades do laplaciano de funções em variedades (ver (1.1.10)), e lembrando que $\nabla|A|^2$ é o vetor gradiente usual da função $|A|^2$, sobre o qual se aplicam as regras gerais de derivação, temos que

$$\begin{aligned}\triangle|A|^2 &= div(\nabla|A|^2) = div(2|A|\nabla|A|) = 2|A|\cdot div(\nabla|A|) + \langle\nabla|A|,\nabla|A|\rangle \\ &= 2|A|\triangle|A| + 2|\nabla|A||^2.\end{aligned} \tag{2.2.2}$$

Usando a fórmula de Simons (2.1.2) em (2.2.2), resulta que

$$\frac{1}{2}\triangle|A|^2 = |\nabla A|^2 + nk|A^2| + \sum_{\alpha,\beta} tr(A^\alpha A^\beta - A^\beta A^\alpha)^2 - \sum_{\alpha,\beta}[tr(A^\alpha A^\beta)]^2.$$

Substituindo a desigualdade (2.1.22), isto é,

$$-\sum_{\alpha,\beta} tr(A^\alpha A^\beta - A^\beta A^\alpha)^2 + \sum_{\alpha,\beta}[tr(A^\alpha A^\beta)]^2 \leq b(m)|A|^4,$$

na igualdade anterior, vemos que

$$|\nabla A|^2 \leq \frac{1}{2}\triangle|A|^2 - nk|A|^2 + b(m)|A|^4.$$

Substituindo (2.2.2) nessa última desigualdade, obtemos

$$|\nabla A|^2 \leq |\nabla|A||^2 + |A|\triangle|A| - nk|A|^2 + b(m)|A|^2. \tag{2.2.3}$$

Finalmente, substituindo (2.2.3) em (2.1.23), e usando que no espaço hiperbólico temos $k \equiv -1$, concluímos que

$$|A|\triangle|A| + b(m)|A|^2 + n|A|^2 \geq \frac{2}{mn}|\nabla|A||^2.$$

□

Agora vamos mostrar mais uma importante desigualdade que também pode ser obtida da Proposição 2.3.

Proposição 2.5. (Ver [3]) Seja $\alpha > 0$ uma constante positiva. Então, nas condições da Proposição 2.4, vale

$$|A|^\alpha\triangle|A|^\alpha \geq \left(1 - \frac{mn-2}{mn\alpha}\right)|\nabla|A|^\alpha|^2 - b(m)\alpha|A|^{2\alpha+2} - \alpha n|A|^{2\alpha}. \tag{2.2.4}$$

Demonstração. Dado $\alpha > 0$, observe que, pelas propriedades do vetor gradiente e do laplaciano de funções (ver (1.1.10)), obtém-se que

$$\begin{aligned}
|A|^{\alpha}\triangle|A|^{\alpha} &= |A|^{\alpha}\cdot div(\nabla|A|^{\alpha}) \\
&= |A|^{\alpha}\cdot div(\alpha|A|^{\alpha-1}\nabla|A|) \\
&= |A|^{\alpha}(\alpha\nabla|A|^{\alpha-1}\nabla|A| + \alpha|A|^{\alpha-1}\triangle|A|) \\
&= |A|^{\alpha}\left[\alpha(\alpha-1)|A|^{\alpha-2}|\nabla|A||^2 + \alpha|A|^{\alpha-1}\triangle|A|\right] \\
&= \alpha(\alpha-1)|A|^{2\alpha-2}|\nabla|A||^2 + \alpha|A|^{2\alpha-1}\triangle|A| \\
&= \alpha(\alpha-1)|A|^{2(\alpha-1)}|\nabla|A||^2 + \alpha|A|^{2(\alpha-1)}|A|\triangle|A| \\
&= \frac{\alpha-1}{\alpha}\alpha^2|A|^{2(\alpha-1)}|\nabla|A||^2 + \alpha|A|^{2(\alpha-1)}|A|\triangle|A|.
\end{aligned} \tag{2.2.5}$$

Contudo,

$$\nabla|A|^{\alpha} = \alpha|A|^{\alpha-1}\nabla|A| \quad \Longrightarrow \quad |\nabla|A|^{\alpha}|^2 = \alpha^2|A|^{2(\alpha-1)}|\nabla|A||^2.$$

Substituindo a última igualdade em (2.2.5) e usando (2.2.1), resulta em

$$\begin{aligned}
|A|^{\alpha}\triangle|A|^{\alpha} &= \frac{\alpha-1}{\alpha}|\nabla|A|^{\alpha}|^2 + \alpha|A|^{2(\alpha-1)}|A|\triangle|A|] \\
&\geq \frac{\alpha-1}{\alpha}|\nabla|A|^{\alpha}|^2 + \alpha|A|^{2(\alpha-1)}\left(\frac{2}{mn}|\nabla|A||^2 - b(m)|A|^4 - n|A|^2\right) \\
&= \frac{\alpha-1}{\alpha}|\nabla|A|^{\alpha}|^2 + \frac{2\alpha}{mn}|A|^{2(\alpha-1)}|\nabla|A||^2 - b(m)\alpha|A|^{2\alpha+2} - \alpha n|A|^{2\alpha} \\
&= \frac{\alpha-1}{\alpha}|\nabla|A|^{\alpha}|^2 + \frac{2}{mn\alpha}\alpha^2|A|^{2(\alpha-1)}|\nabla|A||^2 - b(m)\alpha|A|^{2\alpha+2} - \alpha n|A|^{2\alpha} \\
&= \frac{\alpha-1}{\alpha}|\nabla|A|^{\alpha}|^2 + \frac{2}{mn\alpha}|\nabla|A|^{\alpha}|^2 - b(m)\alpha|A|^{2\alpha+2} - \alpha n|A|^{2\alpha},
\end{aligned} \tag{2.2.6}$$

que, agrupando termos semelhantes, torna-se

$$|A|^{\alpha}\triangle|A|^{\alpha} \geq \left(1 - \frac{mn-2}{mn\alpha}\right)|\nabla|A|^{\alpha}|^2 - b(m)\alpha|A|^{2\alpha+2} - \alpha n|A|^{2\alpha},$$

onde $b(1) = 1$ e $b(m) = \frac{3}{2}$, se $m \geq 2$. □

Uma última consequência dos resultados provados até agora é a *desigualdade fundamental* (Teorema 2.2 a seguir), que nos permitirá demonstrar os principais resultados do Capítulo 4. Uma breve observação é que, ao integrarmos sobre M, iremos, por conveniência, omitir o elemento de volume dV_M dado pela métrica g induzida pela imersão, lembrando sempre que sua presença ali está implícita.

Teorema 2.2. (Ver [3]) Seja $f : M^n \to \mathbb{H}^{m+n}$ uma imersão mínima no espaço hiperbólico. Para quaisquer constantes $\alpha > 0$, $q \geq 0$, e qualquer função real $f \in C_0^\infty(M)$, vale a desigualdade

$$\left(2(q+1) - \frac{mn-2}{mn\alpha} - \varepsilon\right)\int_M |\nabla|A|^\alpha|^2|A|^{2\alpha q}f^2 \leq \frac{1}{\varepsilon}\int_M |A|^{2(q+1)\alpha}|\nabla f|^2 + b(m)\alpha\int_M |A|^{2(q+1)\alpha+2}f^2 + \alpha n\int_M |A|^{2(q+1)\alpha}f^2. \tag{2.2.7}$$

Demonstração. Multiplicando a desigualdade (2.2.4) pela função $|A|^{2\alpha q}f^2 \in C_0^\infty(M)$ e integrando sobre M, obtemos

$$\int_M |A|^{(2q+1)\alpha}\triangle|A|^\alpha f^2 \geq \left(1 - \frac{mn-2}{mn\alpha}\right)\int_M |\nabla|A|^\alpha|^2|A|^{2\alpha q}f^2 - b(m)\alpha\int_M |A|^{2(q+1)\alpha+2}f^2 - \alpha n\int_M |A|^{2(q+1)\alpha}f^2. \tag{2.2.8}$$

Por outro lado, usando que $f \in C_0^\infty(M)$ e o Teorema da Divergência (1.1) sobre o campo vetorial $|A|^{(2q+1)\alpha}\nabla|A|^\alpha f^2$, temos que

$$0 = \int_M div\left(|A|^{(2q+1)\alpha}\nabla|A|^\alpha f^2\right) = (2q+1)\alpha\int_M |A|^{(2q+1)\alpha-1}\langle\nabla|A|, \nabla|A|^\alpha\rangle f^2 + 2\int_M |A|^{(2q+1)\alpha}\langle\nabla f, \nabla|A|^\alpha\rangle f + \int_M |A|^{(2q+1)\alpha}\triangle|A|^\alpha f^2,$$

que, usando (2.2.6) e a Desigualdade de Cauchy Schwarz (1.2.5), torna-se

$$
\begin{aligned}
\int_M |A|^{(2q+1)\alpha} \triangle |A|^\alpha f^2 = & -(2q+1)\alpha \int_M |A|^{(2q+1)\alpha-1} \cdot \left(\alpha |A|^{\alpha-1} \langle \nabla |A|, \nabla |A| \rangle\right) f^2 \\
& - 2\int_M |A|^{(2q+1)\alpha} \langle \nabla f, \nabla |A|^\alpha \rangle f \\
= & -(2q+1)\alpha^2 \int_M |A|^{2q+2\alpha-2} |\nabla |A||^2 f^2 \\
& - 2\int_M |A|^{(2q+1)\alpha} f \langle \nabla f, \nabla |A|^\alpha \rangle f \\
= & -(2q+1) \int_M \left(\alpha^2 |A|^{2\alpha-2} |\nabla |A||^2\right) |A|^{2q\alpha} f^2 \\
& - 2\int_M |A|^{(2q+1)\alpha} f \langle \nabla f, \nabla |A|^\alpha \rangle f \\
= & -(2q+1) \int_M |\nabla |A|^\alpha|^2 |A|^{2q\alpha} f^2 - 2\int_M |A|^{(2q+1)\alpha} \langle \nabla f, \nabla |A|^\alpha \rangle f \\
\leq & -(2q+1) \int_M |\nabla |A|^\alpha|^2 |A|^{2q\alpha} f^2 - 2\int_M |A|^{(2q+1)\alpha} f |\nabla f| |\nabla |A|^\alpha|.
\end{aligned}
\tag{2.2.9}
$$

Além disso, note que, no último termo da expressão acima, usando a Desigualdade de Young (1.2.7), considerando $p = q = 2$, e consequentemente $C\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) = \frac{1}{2\varepsilon}$, obtemos

$$
2|A|^{(2q+1)\alpha} f |\nabla f| |\nabla |A|^\alpha| \leq \varepsilon \left(|A|^{\alpha q} f |\nabla |A|^\alpha|\right)^2 + \frac{1}{\varepsilon}\left(|A|^{(q+1)\alpha} |\nabla f|\right)^2.
$$

Substituindo o resultado acima em (2.2.9), e agrupando termos semelhantes, resulta em

$$
\begin{aligned}
\int_M |A|^{(2q+1)\alpha} \triangle |A|^\alpha f^2 \leq & -(2q+1-\varepsilon) \int_M |\nabla |A|^\alpha|^2 |A|^{2q\alpha} f^2 \\
& + \frac{1}{\varepsilon} \int_M |A|^{2(q+1)\alpha} |\nabla f|^2.
\end{aligned}
\tag{2.2.10}
$$

Comparando a desigualdade acima com (2.2.8), obtemos

$$
\begin{aligned}
\left(1 - \frac{mn-2}{mn\alpha}\right) \int_M |\nabla |A|^\alpha|^2 |A|^{2\alpha q} f^2 - b(m)\alpha \int_M |A|^{2(q+1)\alpha+2} f^2 - \alpha n \int_M |A|^{2(q+1)\alpha} f^2 \\
\leq -(2q+1-\varepsilon) \int_M |\nabla |A|^\alpha|^2 |A|^{2q\alpha} f^2 + \frac{1}{\varepsilon} \int_M |A|^{2(q+1)\alpha} |\nabla f|^2,
\end{aligned}
$$

que, reordenando os termos e agrupando fatores semelhantes, implica em

$$\left(2(q+1)-\frac{mn-2}{mn\alpha}-\varepsilon\right)\int_M |\nabla|A|^\alpha|^2|A|^{2\alpha q}f^2 \leq \frac{1}{\varepsilon}\int_M |A|^{2(q+1)\alpha}|\nabla f|^2$$
$$+b(m)\alpha\int_M |A|^{2(q+1)\alpha+2}f^2+\alpha n\int_M |A|^{2(q+1)\alpha}f^2.$$

□

O próximo capítulo será dedicado, dentre outros fatos importantes, ao estudo de superestabilidade em subvariedades mínimas do espaço hiperbólico.

Capítulo 3

Estimativas de Estabilidade em Subvariedades Mínimas do Espaço Hiperbólico

Nesse capítulo, vamos tratar das fórmulas de primeira e segunda variações do volume em subvariedades do espaço hiperbólico. Também apresentamos alguns resultados sobre operadores da forma $\triangle + \mu$ (sendo $\mu : M \to \mathbb{R}$ função contínua) agindo em variedades riemannianas, obtendo uma expressão (a fórmula de Rayleigh) para o primeiro autovalor λ_1 associado a esses operadores. Por fim, vamos usar os conceitos vistos para tratar de superestabilidade em subvariedades mínimas do espaço hiperbólico e demonstrar dois teoremas a respeito.

A Seção 3.1 foi baseada em [17, 18], enquanto que a Seção 3.2 foi baseada em [4–6, 15, 17, 21].

3.1 Fórmulas da Primeira e Segunda Variações

Vamos tratar de campos variacionais em variedades riemannianas e utilizar as fórmulas da primeira e segunda variações do volume $n-$dimensional, para apresentar o conceito de superestabilidade em subvariedades mínimas do espaço hiperbólico $\mathbb{H}^{n+m}$.

Definição 3.1. Seja $f : M^n \to \overline{M}^{m+n}$ uma imersão isométrica. Dizemos que uma família $\{f_t\}$ de imersões $f_t : M^n \to \overline{M}^{m+n}$, com $t \in [0,1]$, é uma *variação da imersão* f se $f_0 = f$ e se a aplicação $F : M \times [0,1] \to \overline{M}$ definida por $F(p,t) = f_t(p)$ é diferenciável.

Uma variação $\{f_t\}$ de f induz de forma natural um campo de vetores em $\overline{M}$ definido ao longo da imagem de M por f. Esse campo de vetores será denotado E e definido da seguinte foma:

Seja $\dfrac{\partial}{\partial t}$ o campo vetorial canônico sobre a componente $[0,1]$ em $M \times [0,1]$. Definimos

$$E(p) = dF\left(\frac{\partial}{\partial t}(p,0)\right), \quad p \in \overline{M},$$

onde $dF : T_pM \times [0,1] \to T_p\overline{M}$ é diferenciável, por definição.

Visto que $E \in Tp\overline{M}$, temos que E pode ser decomposto em uma componente E^T tangente a M e uma componente E^N normal à M.

Note que, para cada t, a métrica induzida pela imersão f_t faz corresponder a M um elemento de volume que denotaremos dV_t. Sendo assim, definimos o *volume n-dimensional de $f_t(M)$* por

$$Vol(M_t) = \int_M dV_t.$$

De agora em diante, por conveniência, assim como fizemos no capítulo anterior, será omitida a expressão dV_t ao final de integrais sobre M. Considere a derivada

$$\frac{dVol(M_t)}{dt} = \frac{d}{dt}\int_M dV_t.$$

Chamaremos de *primeira variação do volume de M* o valor $\left.\dfrac{dVol(M_t)}{dt}\right|_{t=0}$. Um resultado conhecido de geometria riemanniana é o seguinte teorema.

Teorema 3.1. (Ver [18]) Seja $f : M^n \to \overline{M}^{m+n}$ uma imersão isométrica. Se M é compacta, então

$$\left.\frac{dVol(M_t)}{dt}\right|_{t=0} = -\int_M \langle E^N, H\rangle + \int_{\partial M} \theta_{E^T},$$

onde H é o vetor curvatura média da imersão f e θ_{E^T} denota a $(n-1)$-forma volume de ∂M, induzida pelo campo vetorial E^T.

A expressão acima se torna ainda mais simples quando supomos que o campo variacional E é normal à subvariedade M. Nesse caso, não existe forma volume sobre ∂M induzida pelo campo nulo E^T, e a fórmula da primeira variação torna-se

$$\left.\frac{dVol(M_t)}{dt}\right|_{t=0} = -\int_M \langle E^N, H\rangle.$$

Observação 3.1. A fórmula da primeira variação ainda é válida quando M não é compacta, desde que o campo variacional E tenha suporte compacto em M. De agora em diante, só consideraremos tais campos. Nessas condições, a fórmula da primeira variação é válida também para subvariedades completas.

Em particular, quando $f : M^n \to \overline{M}^{m+n}$ for uma imersão mínima, isto é, $H \equiv 0$, então temos que

$$\left.\frac{dVol(M_t)}{dt}\right|_{t=0} = 0,$$

ou seja, M será um ponto crítico da primeira variação do volume.

Uma questão natural é saber sobre quais condições $M = M_t|_{t=0}$ será, não apenas crítico, mas também mínimo local da função volume $n-$dimensional de qualquer variação $\{f_t\}$, cujo campo variacional E é normal e tenha suporte compacto em M.

Um resultado que responde tal questão levantada é a seguinte fórmula para a chamada segunda variação do volume.

Teorema 3.2. (Ver [18]) Seja M uma subvariedade mínima e completa de $\overline{M}$. Considere uma variação $\{f_t\}$ tal que o campo vetorial associado é da forma $E = f\nu$, onde ν é um campo de vetores normais unitários em M e f é uma função $C_0^\infty(M)$, donde E tem suporte compacto em M. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $\nu = e_\alpha$ é um dos componentes do referencial adaptado $\{e_A\}$. Então, vale

$$\left.\frac{d^2V(M_t)}{dt^2}\right|_{t=0} = \int_M |\nabla f|^2 - f^2 Ric_{\overline{M}}(e_\alpha, e_\alpha) - f^2|A^\alpha|^2,$$

onde, em cada $p \in M$, $Ric_{\overline{M}} : N_pM \to \mathbb{R}$ denota a curvatura de Ricci, dada por

$$Ric_{\overline{M}}(e_\alpha) = \sum_{i=1}^n \overline{R}_{i\alpha i\alpha}.$$

Corolário 3.1. Nas condições do Teorema 3.2, se supormos que $\overline{M}^{m+n} = \mathbb{H}^{m+n}$, temos

$$\frac{d^2Vol(M_t)}{dt^2} \geq \int_M |\nabla f|^2 - (|A|^2 - n)f^2.$$

Demonstração. Visto que $\overline{M}^{m+n} = \mathbb{H}^{m+n}$, temos que sua curvatura seccional é constante e satisfaz $k = -1$. Portanto vale (1.1.11), isto é

$$\overline{R}_{ABCD} = k(\delta_{AC}\delta_{BD} - \delta_{AD}\delta_{BC}).$$

Em particular, isso significa que $\overline{R}_{i\alpha i\alpha} = -1$, o que implica em

$$Ric_{\overline{M}}(e_\alpha) = -n.$$

Pelo Teorema 3.2, a fórmula da segunda variação se torna

$$\left.\frac{d^2V(M_t)}{dt^2}\right|_{t=0} = \int_M |\nabla f|^2 + nf^2 - f^2|A^\alpha|^2.$$

Usando, mais ainda, que $|A| \geq |A^\alpha|$, logo $-|A^\alpha|^2 \geq -|A|^2$, teremos que

$$\frac{d^2Vol(M_t)}{dt^2} \geq \int_M |\nabla f|^2 - (|A|^2 - n)f^2.$$

□

Agora, motivados pelas considerações anteriores, apresentamos a seguinte definição:

Definição 3.2. (Ver [17]) Uma subvariedade completa e mínima M^n do espaço hiperbólico $\mathbb{H}^{n+m}$ é dita *superestável* quando

$$\int_M |\nabla f|^2 - (|A|^2 - n)f^2 \geq 0.$$

Observação 3.2. O Corolário 3.1 esclarece o significado da definição de superestabilidade, e justifica a escolha desse termo. De fato, se M for superestável, então $\dfrac{d^2Vol(M_t)}{dt^2} \geq 0$ e M será, não somente ponto crítico da primeira variação do volume, mas também mínimo local do volume, considerando campos variacionais normais com suporte compacto em M.

A próxima seção tratará do chamado *operador de superestabilidade*, que guarda estreita relação com o conceito visto acima.

3.2 Operador de Superestabilidade

Nessa seção, vamos apresentar os resultados iniciais que permitem mensurar a superestabilidade de uma subvariedade mínima do espaço hiperbólico $\mathbb{H}^{n+m}$. Esses resultados serão utilizados para demonstrar alguns dos principais teoremas que estão no Capítulo 4.

Na primeira subseção, apresentamos resultados envolvendo operadores agindo sobre funções definidas em variedades diferenciáveis e provamos a fórmula de Rayleight, que posteriormente será utilizada para definir o chamado *primeiro autovalor* λ_1 do operador $\triangle + \mu$ em uma variedade M.

Na segunda subseção, tratamos de propriedades gerais do primeiro autovalor λ_1 em subvariedades do espaço hiperbólico.

Na última subseção, definimos o primeiro autovalor $\bar{\lambda}_1$ do operador de estabilidade $\triangle + |A| - n$ em subvariedades mínimas do espaço hiperbólico e provar alguns teoremas sobre superestabilidade nessas subvariedades.

A Subseção 3.2.1 foi baseada em [5], enquanto que a Subseção 3.2.2 foi inspirada por [6, 9, 15], ao passo que Subseção 3.2.3 seguiu os passos mostrados em [4, 17].

3.2.1 Primeiro Autovalor do Operador $\triangle + \mu$ em Variedades Riemannianas

Seja M uma variedade riemanniana com métrica g e $\langle , \rangle$ o produto interno usual induzido por g, onde $|\cdot|$ é a norma proveniente desse produto. Conforme a Definição 1.14, denotamos por $L^2(M)$ o espaço de funções mensuráveis f em M tais que

$$\int_M |f|^2 < +\infty.$$

O produto interno $(,)$ e a norma $\|\cdot\|$ em $L^2(M)$ serão dados por

$$(f,h) = \int_M fh, \qquad \|f\|^2 = (f,f),$$

para todo $f,h \in L^2(M)$. Nas condições acima, $L^2(M)$ é um espaço de Hilbert. Vamos definir a noção de derivada fraca nesse espaço de funções.

Definição 3.3. Denotamos por $\mathcal{L}^2(M)$ o conjunto dos campos vetoriais contínuos em M, com o produto interno $(,)_1$ e a norma $\|\cdot\|$ dados, respectivamente, por

$$(X,Y)_1 := \int_M \langle X, Y \rangle$$

e

$$\|X\|_1^2 := \int_M |X|^2 = \int_M \langle X, X \rangle.$$

Pela forma como foi definido, $\mathcal{L}^2(M)$ é um espaço métrico completo (isto é, um espaço de Hilbert).

Agora, considere uma função $f \in C^1(M)$ e um campo vetorial X que é C^1 e com suporte compacto em M. Usando (1.1.9), segue-se que

$$(\nabla f, X)_1 = \int_M \langle \nabla f, X \rangle = \int_M [div(fX) - f \cdot divX].$$

Aplicando o Teorema da Divergência 1.1 no campo vetorial fX, e substituindo na última expressão, implica em

$$(\nabla f, X)_1 = -\int_M f \cdot divX = -(f, divX), \tag{3.2.1}$$

onde $(,)$ denota o produto interno em $L^2(M)$, conforme definido anteriormente. Vamos aplicar essa relação a um conjunto mais amplo de funções.

Dada uma função $f \in L^2(M)$, dizemos que o campo vetorial $Y \in \mathcal{L}^2(M)$ é a *derivada fraca de f* se

$$(Y, X)_1 = -(f, div X),$$

para todo campo vetorial X que seja C^1 e que tenha suporte compacto em M. Nessas condições, escrevemos $Y = Grad\, f$.

É claro que se f for uma função C^1 em M, então, por (3.2.1), sua derivada fraca coincide com a sua diferencial usual, isto é, $Grad\, f = \nabla f$.

A partir da definição de derivada fraca, denotamos por $W_0^{1,2}(M)$ o subespaço de $L^2(M)$ constituído pelas funções $f \in L^2(M)$ com suporte compacto em M e que possuem derivadas fracas. Tal espaço será chamado de *espaço de Sobolev em M*, e seu produto interno $\langle , \rangle_1$ é definido por

$$\langle f, h\rangle_1 = \langle f, h\rangle + (Grad\, f, Grad\, h)_1.$$

Consequentemente, a norma em $W_0^{1,2}(M)$ é dada por

$$\|f\|_1^2 = \|f\|^2 + \|Grad\, f\|_1^2.$$

Mais ainda, podemos definir no espaço de Sobolev uma forma bilinear e simétrica, dada por

$$B[f,h] := (Grad\, f, Grad\, h) - \int_M \mu f \cdot h \quad \forall f, h \in W_0^{1,2}(M).$$

É claro que o espaço de Sobolev $W_0^{1,2}(M)$ é mais amplo que o espaço das funções diferenciáveis com suporte compacto em M, de forma que, por exemplo, temos $C_0^2(M) \subset W_0^{1,2}(M)$, com o produto interno e a norma induzidos.

Agora, dada uma função contínua μ em M, considere o problema de encontrar todos os valores reais λ para os quais existe uma solução não nula $\phi \in C_0^2(M)$ para a equação

$$(\triangle + \mu)\phi + \lambda\phi = 0.$$

Cada número λ para o qual o problema acima tem solução será chamado *autovalor* do operador $\triangle + \mu$. O espaço vetorial de soluções associado a λ será chamado *autoespaço*, e cada elemento desse espaço será chamado *autofunção*. Um fato interessante é que se $\phi, \psi \in C_0^2(M)$ são autofunções associadas aos autovalores λ, τ, respectivamente, então, por (1.2.4), segue-se que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_M (\phi \triangle \psi - \psi \triangle \phi) = \int_M (\phi \cdot (-\tau - \mu)\psi - \psi \cdot (-\tau - \mu)\phi) \\ &= \int_M (-\tau \cdot \phi\psi + \lambda \cdot \phi\psi) = (\lambda - \tau) \int_M \phi\psi. \end{aligned}$$

Logo, se λ e τ são autovalores distintos, então $(\phi, \psi) = 0$, ou seja, os autoespaços associados a λ e τ são ortogonais. Também é importante comentar que, se ϕ é uma autofunção associada ao autovalor λ, então $\gamma\phi$, para todo $\gamma \in \mathbb{R}$, também será uma autofunção associada ao mesmo autovalor λ, pois

$$(\triangle + \mu)(\gamma\phi) + \lambda(\gamma\phi) = \gamma[(-\tau - \mu)\phi + \lambda\phi] = 0.$$

Em particular, $\dfrac{\phi}{\|\phi\|}$ é uma autofunção de λ com norma unitária.

Assim, podemos considerar no espaço $C_0^2(M)$ uma base $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \ldots$ ortonormal de autofunções, associadas aos autovalores (distintos entre si) $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$, respectivamente.

Assim, toda função $f \in C_0^2(M)$ pode ser escrita da forma

$$f = \sum_{j=1}^{\infty} (f, \phi_j)\phi_j,$$

de maneira que vale

$$\|f\|^2 = \left\langle \sum_{i=1}^{\infty} (f, \phi_i)\phi_i, \sum_{j=1}^{\infty} (f, \phi_j)\phi_j \right\rangle = \sum_{j=1}^{\infty} (f, \phi_j)^2.$$

As duas expressões anteriores são chamadas *Identidades de Parseval*, e serão utilizadas mais adiante. Uma primeira expressão para os autovalores λ é dada pela seguinte proposição:

Proposição 3.1. (Ver [5]) Se λ é um autovalor real do problema

$$(\triangle + \mu)\phi + \lambda\phi = 0, \quad \phi \in C_0^2(M), \quad \phi \neq 0$$

e ϕ é uma autofunção associada a λ, então

$$\lambda = \|\phi\|^{-2}\int_M |\nabla\phi|^2 + \mu\phi^2.$$

Demonstração. De fato, temos que

$$\begin{aligned}
0 = (\triangle+\mu)\phi + \lambda\phi \quad \Longleftrightarrow \quad 0 &= \|(\triangle+\mu)\phi + \lambda\phi\|^2 \\
&= ((\triangle+\mu)\phi + \lambda\phi, (\triangle+\mu)\phi + \lambda\phi) \\
&= \|(\triangle+\mu)\phi\|^2 + \lambda^2\|\phi\|^2 + 2\lambda(\phi, (\triangle+\mu)\phi),
\end{aligned}$$

onde, visto que $(\triangle+\mu)\phi = -\lambda\phi$, pela desigualdade de Cauchy Schwars (1.2.5), obtemos que

$$(\phi, (\triangle+\mu)\phi) = \|\phi\|\cdot\|(\triangle+\mu)\phi\|$$

Resolvendo equação quadrática em λ

$$\lambda^2\|\phi\|^2 + 2\|\phi\|\cdot\|(\triangle+\mu)\phi\| + \|(\triangle+\mu)\phi\|^2 = 0,$$

segue-se que

$$\begin{aligned}
\lambda &= \frac{-2\|\phi\|\cdot\|(\triangle+\mu)\phi\| \pm \sqrt{4\|\phi\|^2\|(\triangle+\mu)\phi\|^2 - 4\|\phi\|^2\|(\triangle+\mu)\phi\|^2}}{2\|\phi\|^2} \\
&= \frac{-2\|\phi\|\cdot\|(\triangle+\mu)\phi\|}{2\|\phi\|^2} \\
&= -\|\phi\|^{-2}\cdot(\phi, (\triangle+\mu)\phi) \\
&= -\|\phi\|^{-2}\int_M \phi\cdot(\triangle+\mu)\phi \\
&= \|\phi\|^{-2}\int_M \langle\nabla\phi, \nabla\phi\rangle - \mu\phi^2 \\
&= \|\phi\|^{-2}\int_M |\nabla\phi|^2 + \mu\phi^2,
\end{aligned}$$

onde usamos a identidade de Green (1.2.3) na antepenúltima linha. □

A proposição anterior tem uma importante implicação quando consideramos o operador simétrico $\triangle$ em M, conforme vemos a seguir:

Lema 3.1. Nas condições da Proposição 3.1, se $\mu \equiv 0$ em M, então todo autovalor λ é não negativo.

Demonstração. Pelo que vimos na proposição anterior teremos que, para toda autofunção associada a λ, vale

$$\lambda = \|\phi\|^{-2} \int_M |\nabla \phi|^2 \geq 0.$$

□

O próximo resultado mostra que existe um menor autovalor λ_1 para o problema apresentado na Proposição 3.1.

Proposição 3.2. (Ver [5]) Sejam μ uma função contínua e $\triangle + \mu$ um operador em M. Existe um autovalor $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ do problema

$$(\triangle + \mu)\phi + \lambda \phi = 0, \quad \phi \in C_0^2(M), \quad \phi \neq 0, \tag{3.2.2}$$

tal que, se $\lambda \in \mathbb{C}$ for qualquer outro autovalor, teremos que

$$Re(\lambda) \geq \lambda_1,$$

onde $Re(\lambda)$ denota a parte real do número complexo λ.

O valor λ_1 na Proposição 3.2 é chamado *primeiro autovalor* do operador $\triangle + \mu$. Especialmente no caso $\mu \equiv 0$, λ_1 será chamado *primeiro autovalor de M*.

Agora, dada uma função $\phi \in C_0^2(M)$, considere o problema de determinar $f \in W_0^{1,2}(M)$ tal que

$$((\triangle + \mu)\phi, f) = -B[\phi, f]. \tag{3.2.3}$$

É claro que, pela identidade de Green (1.2.3), toda função $f \in C_0^2(M)$ satisfaz (3.2.3), visto que

$$\begin{aligned} ((\triangle + \mu)\phi, f) &= \int_M f \triangle \phi + \mu f \cdot \phi = \int_M -\langle \nabla \phi, \nabla f \rangle + \mu f \cdot \phi \\ &= -(Grad\, f, Grad\, \phi) + \int_M \mu f \cdot \phi = -B[\phi, f]. \end{aligned}$$

Essa conclusão permite obter uma estimativa para o valor λ_1, conforme a seguir.

Proposição 3.3. (Ver [5]) Sejam $\mu : M \to \mathbb{R}$ uma função contínua e $\triangle + \mu$ um operador em M, associados à forma bilinear

$$B[f, h] = (Grad\, f, Grad\, h) - \int_M \mu f \cdot h.$$

Se λ_1 é o primeiro autovalor do operador $\triangle + \mu$, e $f \in C_0^2(M)$ é uma função qualquer, então

$$\lambda_1 \leq \frac{D[f,f]}{\|f\|^2}.$$

Demonstração. Sejam $\{\phi_1, \phi_2, ...\}$ uma base completa ortonormal de autofunções de $C_0^2(M)$, associada aos autovalores $\{\lambda_1, \lambda_2, ...\}$, e $f \in C_0^2(M)$ uma função qualquer. Se denotarmos

$$\alpha_j = (f, \phi_j),$$

então segue-se das identidades de Parseval que

$$f - \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \phi_j = 0.$$

Portanto, e lembrando que cada uma das funções ϕ_j satisfaz o problema (3.2.2), isto é

$$(\triangle + \mu)\phi_j = -\lambda_j \phi_j,$$

obtemos o seguinte

$$\begin{aligned}
0 &= B\left[f - \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \phi_j, f - \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \phi_j\right] \\
&= B[f,f] - 2\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j B[f,\phi_j] + \sum_{i,j} \alpha_i \alpha_j B[\phi_i, \phi_j] \\
&= B[f,f] + 2\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j (f, (\triangle + \mu)\phi_j) - \sum_{i,j} \alpha_i \alpha_j (\phi_i, (\triangle + \mu)\phi_j) \\
&= B[f,f] - 2\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j (f, \lambda_j \phi_j) + \sum_{i,j} \alpha_i \alpha_j \lambda_j (\phi_i, \phi_j) \\
&= B[f,f] - 2\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \alpha_j^2 + \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \alpha_j^2 \\
&= B[f,f] - \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \alpha_j^2.
\end{aligned}$$

Usando essa última expressão, obtemos a seguinte estimativa para o primeiro autovalor λ_1

$$B[f,f] = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \alpha_j^2 \geq \lambda_1 \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j^2 = \lambda_1 \|f\|^2,$$

provando a desigualdade $\lambda_1 \leq \dfrac{D[f,f]}{\|f\|^2}$. $\square$

O próximo resultado fornece a *fórmula de Rayleigh*, e mostra que a desigualdade na proposição anterior se torna igualdade quando consideramos f uma das autofunções associadas ao primeiro autovalor λ_1.

Teorema 3.3 (Fórmula de Rayleigh)**.** (Ver [5]) Nas condições da Proposição 3.3, se λ_1 é o primeiro autovalor do operador $\triangle + \mu$, e $f \in C_0^2(M)$ é uma autofunção associada a λ_1, então

$$\lambda_1 = \frac{B[f,f]}{\|f\|^2}.$$

Demonstração. Analogamente à demonstração anterior, seja $\{\phi_1, \phi_2, ...\}$ uma base completa ortonormal de autofunções de $C_0^2(M)$, associada aos autovalores $\{\lambda_1, \lambda_2, ...\}$, e seja f uma autofunção (logo $f \in C_0^2(M)$) associada a λ_1. Se denotarmos

$$\alpha_j = (f, \phi_j),$$

então segue-se das identidades de Parseval que

$$f - \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \phi_j = 0.$$

Assim, e lembrando que para toda $\phi \in C_0^2(M)$, temos que $f \in C_0^2(M)$ satisfaz

$$((\triangle + \mu)\phi, f) = -B[\phi, f],$$

que equivale, sem perda de generalidade, a

$$(\phi, (\triangle + \mu)f) = -B[\phi, f],$$

e usando que f, por ser autofunção, satisfaz

$$(\triangle + \mu)f = -\lambda f,$$

obtemos que

$$
\begin{aligned}
0 &= B\left[f - \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \phi_j, f - \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \phi_j\right] \\
&= B[f,f] - 2\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j B[f,\phi_j] + B[f,f] \\
&= 2B[f,f] + 2\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j ((\triangle + \mu) f, \phi_j) \\
&= 2B[f,f] - 2\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j (\lambda_1 f, \phi_j) \\
&= 2B[f,f] - 2\lambda_1 \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j^2 \\
&= B[f,f] - \lambda_1 \|f\|^2,
\end{aligned}
$$

o que implica diretamente em

$$\lambda_1 = \frac{B[f,f]}{\|f\|^2}.$$

$\square$

A fórmula de Rayleigh é especialmente importante, porque usando ela e a Proposição 3.3, é imediato que

$$\lambda_1 = \inf_{f \in C_0^2(M), f \neq 0} \frac{B[f,f]}{\|f\|^2}. \tag{3.2.4}$$

Mas observe que, para $f \in C_0^2(M)$, temos que $Grad\, f = \nabla f$, e obtemos, da definição da forma bilinear B, que

$$B[f,f] = (Grad\, f, Grad\, f) - \int_M \mu f^2 = \int_M \left(\langle \nabla f, \nabla f \rangle - \mu f^2\right) = \int_M \left(|\nabla f|^2 - \mu f^2\right).$$

Assim, podemos reescrever (3.2.4) da forma

$$\lambda_1 = \inf_{f \in C_0^\infty(M), f \neq 0} \frac{\int_M \left(|\nabla f|^2 - \mu f^2\right)}{\int_M f^2}.$$

Essa expressão é utilizada como definição para λ_1 em diversos trabalhos que tratam do operador de estabilidade (ver, por exemplo, [3, 4, 17, 19]), e dela decorrem muitos resultados sobre estabilidade em subvariedades, conforme veremos na próxima seção.

3.2.2 Propriedades do Primeiro Autovalor Associado a $\triangle + \mu$

Nesta seção, apresentamos os primeiros resultado acerca do primeiro autovalor de um operador $\triangle + \mu$ em variedades riemannianas. Tais resultados serão importantes para demonstrar alguns dos principais teoremas do Capítulo 4.

Definição 3.4. Sejam M uma variedade riemanniana e $\mu : M \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Definimos o *primeiro autovalor do operador* $L_\mu = \triangle + \mu$ por

$$\lambda_1(L_\mu, M) = \inf_{f \in C_0^\infty(M), f \neq 0} \frac{\int_M \left(|\nabla f|^2 - \mu f^2\right)}{\int_M f^2}.$$

Observação 3.3. No caso em que $\mu = 0$, denotamos $\lambda_1(L_0, M)$ por $\lambda_1(M)$. É imediato, da definição, que

$$\lambda_1 \int_M f^2 \leq \int_M |\nabla f|^2, \quad \forall\, f \in C_0^\infty(M), \quad f \neq 0. \tag{3.2.5}$$

As considerações feitas na Subseção 3.2.1 esclarecem o porque é utilizada essa definição para o primeiro autovalor λ_1; não somente aqui mas em todos os trabalhos que tratam do assunto. A seguir, veremos algumas propriedades associadas a esse autovalor.

Um resultado importante que foi obtido por McKean [15] é o seguinte:

Proposição 3.4. (Ver [15]) Se M é uma variedade riemanniana simplesmente conexa e possui curvatura seccional $K_M \leq -1$, então vale

$$\lambda_1(M) \geq \frac{(n-1)^2}{4}, \tag{3.2.6}$$

onde a igualdade ocorre se, e somente se, $K_M \equiv -1$. Em particular,

$$\lambda_1(\mathbb{H}^n) = \frac{(n-1)^2}{4}.$$

Um outro resultado, em particular, que será útil mais adiante, é o seguinte:

Proposição 3.5. (Ver [9]) Seja $f : M^n \to H^{m+n}$ uma imersão no espaço hiperbólico. Se a curvatura principal satisfaz $|H| \leq \alpha$, para alguma constante $0 \leq \alpha < n-1$, então

$$\lambda_1(M) \geq \frac{(n-1-\alpha)^2}{4}. \tag{3.2.7}$$

A prova completa da Proposição 3.5 pode ser encontrada em [21]. Porém, uma ideia de como fazê-la segue abaixo.

Considere um ponto $q \in \mathbb{H}^{n+m} \backslash M^n$ e defina a função distância $r_q : \mathbb{H}^{n+m} \to \mathbb{R}$ medida em relação a q, denotada genericamente por r.

Naturalmente, tal função pode ser restrita a M, de forma que, se denotarmos por $\overline{\nabla}$ e ∇ o gradiente de funções em $\overline{M}$ e M, respectivamente, e lembrando que o referencial $\{e_A\}$ de $\overline{M}$ (sobre o qual calculamos $\overline{\nabla}$) contém m vetores a mais que o referencial $\{e_i\}$ de M (sobre o qual calculamos ∇) fica claro que, na métrica de $\overline{g}$ e, consequentemente na métrica induzida g, vale

$$|\overline{\nabla} r|^2 = 1 \geq |\nabla r|^2.$$

Mais ainda, é possível mostrar que (ver [21]), nas condições acima, vale

$$\triangle r \geq n - 1 - |H|,$$

onde $\triangle$ denota o laplaciano em M. Utilizando esse fato, é fácil mostrar que vale (3.2.7). De fato, se $|H| \leq \alpha$ então

$$\triangle r \geq n - 1 - \alpha. \tag{3.2.8}$$

Agora, seja $f \in C_0^\infty(M)$. Considerando o campo vetorial $f^2 \nabla r$, temos que

$$div(f^2 \nabla r) = f^2 \cdot div(\nabla r) + \langle \nabla r, \nabla f^2 \rangle = f^2 \triangle r + \langle \nabla r, \nabla f^2 \rangle. \tag{3.2.9}$$

Aplicando a desigualdade de Cauchy Schwarz (1.2.5), e usando que $|\nabla r|^2 \leq 1$, obtemos

$$\langle \nabla r, \nabla f^2 \rangle \leq |\nabla r| \cdot |\nabla f^2| \leq |\nabla f^2|.$$

Logo

$$\langle \nabla r, \nabla f^2 \rangle \geq -|\nabla f^2|.$$

Usando isso e (3.2.8) em (3.2.9), segue-se que

$$div(f^2 \nabla r) \geq f^2(n - 1 - \alpha) - |\nabla f^2| = f^2(n - 1 - \alpha) - 2|f| \cdot |\nabla f|. \tag{3.2.10}$$

Aplicando a desigualdade de Young (1.2.7), com $p = q = 2$ donde $C\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) = \frac{1}{2\varepsilon}$, na expressão $2|f| \cdot |\nabla f|$, temos que, para todo $\varepsilon > 0$, vale

$$2|f| \cdot |\nabla f| \leq \varepsilon |f|^2 + \frac{1}{\varepsilon} |\nabla f|^2,$$

onde é claro que $|f|^2 = f^2$. Portanto, a desigualdade (3.2.10) se torna

$$div(f^2\nabla r) \geq f^2(n-1-\alpha-\varepsilon) - \frac{1}{\varepsilon}|\nabla f|^2.$$

Agora, integrando ambos os lados sobre M, aplicando o Teorema da Divergência (1.1), e lembrando que $f^2\nabla r$ tem suporte compacto em M, teremos que

$$0 = \int_M div(f^2\nabla r) \geq \int_M \left(f^2(n-1-\alpha-\varepsilon) - \frac{1}{\varepsilon}|\nabla f|^2 \right),$$

ou seja,

$$\int_M |\nabla f|^2 \geq \int_M \varepsilon(n-1-\alpha-\varepsilon) f^2, \quad \forall\, \varepsilon > 0. \tag{3.2.11}$$

Vamos obter o valor para ε tal que $\varepsilon(n-1-\alpha-\varepsilon)$ atinja seu maior valor.

Com efeito, note que a função quadrática $g(x) = -x^2 + x(n-1-\alpha)$ atinge seu ponto de máximo quando $x = (n-1-\alpha)/2$. Portanto, a expressão $\varepsilon(n-1-\alpha-\varepsilon)$ atinge seu valor máximo quando $\varepsilon = \dfrac{n-1-\alpha}{2}$. Nesse caso, temos que

$$\varepsilon(n-1-\alpha-\varepsilon) = \frac{n-1-\alpha}{2}(n-1-\alpha-\frac{n-1-\alpha}{2}) = \frac{(n-1-\alpha)^2}{4}.$$

Portanto, a desigualdade (3.2.11) se torna

$$\int_M |\nabla f|^2 \geq \frac{(n-1-\alpha)^2}{4} \int_M f^2.$$

Lembrando que f é uma função qualquer em $C_0^\infty(M)$, concluímos que

$$\lambda_1(M) = \inf_{f \in C_0^\infty(M), f \neq 0} \frac{\int_M |\nabla f|^2}{\int_M f^2} \geq \frac{(n-1-\alpha)^2}{4}.$$

Isso finaliza a ideia da demonstração. Uma consequência imediata da proposição anterior é a seguinte:

Lema 3.2. Se $f : M^n \to H^{m+n}$ for uma imersão mínima, isto é, $H \equiv 0$, então

$$\lambda_1(M) \geq \frac{(n-1)^2}{4}. \tag{3.2.12}$$

Em seguida, tratamos de outro resultado que será utilizado posteriormente e que foi provado em [6], sobre o operador $\lambda_1(M^n)$.

Proposição 3.6. (Ver [6]) Seja M uma variedade riemanniana completa. Dado um ponto p qualquer de M, se vale

$$\lim_{R\to\infty} \frac{Vol[B_p(R)]}{R^2} = 0, \tag{3.2.13}$$

então $\lambda_1(M^n) = 0$.

Demonstração. Seja M uma variedade completa, escolha um ponto $p \in M$ e um número real $a > 0$. Denotamos por $B_p(a)$, a bola geodésica de raio a, e definimos

$$\lambda_1(B_p(a)) = \inf_{f\in C_0^\infty(B_p(a)), f\neq 0} \frac{\int_{B_p(a)} |\nabla f|^2}{\int_{B_p(a)} f^2}. \tag{3.2.14}$$

É claro que, por definição, $\lambda_1(B_p(a)) \geq 0$. Mais ainda, observamos que, se $a \to +\infty$, então $\lambda_1(B_p(a)) \to \lambda_1(M)$. Seja $r_p : M \to \mathbb{R}$ a função distância do ponto p, e defina a função $f : B_p(a) \to \mathbb{R}$ por

$$f = a - r_p.$$

Por definição, f é diferenciável, e vale $f|_{\partial B_p(a)} \equiv 0$. Portanto, $f \in C_0^\infty(B_p(a))$. Assim, de (3.2.14), obtemos

$$\lambda_1(B_p(a)) \leq \frac{\int_{B_p(a)} |\nabla f|^2}{\int_{B_p(a)} f^2} = \frac{\int_{B_p(a)} |\nabla(a-r_p)|^2}{\int_{B_p(a)} (a-r_p)^2}. \tag{3.2.15}$$

É claro que, na métrica g, temos

$$|\nabla(a-r_p)|^2 = \langle \nabla(a-r_p), \nabla(a-r_p)\rangle_g = \langle \nabla r_p, \nabla r_p\rangle_g = 1. \tag{3.2.16}$$

Por conveniência, vamos denotar r_p simplesmente por r. Além disso, dado $b < a$, temos que, se $r \leq b$, então

$$-r \geq -b \Longrightarrow (a-r)^2 \geq (a-b)^2 \Longrightarrow \int_{B_p(b)} (a-r)^2 \geq \int_{B_p(b)} (a-b)^2.$$

Portanto, considerando $r \leq a$, sendo $b < a$, podemos garantir que vale

$$\int_{B_p(a)} (a-r)^2 \geq \int_{B_p(b)} (a-b)^2 = (a-b)^2 \cdot Vol[B_p(b)]. \tag{3.2.17}$$

Usando (3.2.17) e (3.2.16) em (3.2.15), obtemos

$$\lambda_1(B_p(a)) = \frac{\int_{B_p(a)} |\nabla(a-r)|^2}{\int_{B_p(a)}(a-r)^2} \leq \frac{Vol[B_p(a)]}{(a-b)^2 \cdot Vol[B_p(b)]}. \tag{3.2.18}$$

Agora, note que a hipótese (3.2.13) implica que, para cada $C > 0$, existe uma sequência crescente $\{a_k\} \to +\infty$ tal que

$$Vol[(B_p(a_k)] \leq C \cdot (a_k)^2, \quad \forall\, k. \tag{3.2.19}$$

Recorrendo a uma subsequência, se necessário, podemos assumir que

$$a_{k+1} - a_k \geq \frac{1}{2} a_k. \tag{3.2.20}$$

Escolhendo $a = a_{k+1}$ e $b = a_k$ em (3.2.18), e usando (3.2.20), obtemos

$$\lambda_1(B_p(a_{k+1})) \leq \frac{Vol[B_p(a_{k+1})]}{(a_{k+1}-a_k)^2 \cdot Vol[B_p(a_k)]} \leq \frac{4}{(a_k)^2} \cdot \frac{Vol[B_p(a_{k+1})]}{Vol[B_p(a_k)]}. \tag{3.2.21}$$

Caso $Vol(M) < +\infty$, podemos aplicar o limite $k \to +\infty$ nessa última expressão. Para tal, lembramos que $a_k \to +\infty$ e que, sendo M completa, vale

$$\lim_{k\to+\infty} Vol[B_p(a_{k+1})] = \lim_{k\to+\infty} Vol[B_p(a_k)] = Vol(M).$$

Assim, aplicando o limite $k \to +\infty$ em (3.2.21), obtemos imediatamente que $\lambda_1(M^n) = 0$.

Por outro lado, caso $Vol(M) = +\infty$, usando (3.2.19) em (3.2.21), segue-se que

$$\lambda_1(B_p(a_{k+1})) \quad \leq \frac{4}{(a_k)^2} \cdot \frac{Vol[B_p(a_{k+1})]}{Vol[B_p(a_k)]} \leq \frac{4}{(a_k)^2} \cdot \frac{C \cdot (a_{k+1})^2}{Vol[B_p(a_k)]}. \tag{3.2.22}$$

Usando que

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = 1,$$

e que

$$\lim_{k\to+\infty} Vol[B_p(a_k)] = Vol(M) = +\infty,$$

e aplicando o limite $k \to +\infty$ em (3.2.22), concluímos que $\lambda_1(M^n) = 0$. □

Após tais resultados, podemos tratar com maior segurança do conceito de superestabilidade em subvariedades mínimas do espaço hiperbólico.

3.2.3 Superestabilidade em Subvariedades Mínimas de $\mathbb{H}^{n+m}$

Lembrando da Definição 3.2 podemos considerar, em M, a função $\mu = |A|^2 - n$, onde n é a dimensão de M. Nesse caso, o operador $L_{|A|^2-n}$ é chamado *operador de superestabilidade de* M, e seu primeiro autovalor associado (ver Definição 3.4), denotado por $\bar{\lambda}_1(M)$, claramente satisfaz

$$\int_M \left(|A|^2 - n + \bar{\lambda}_1(M)\right) f^2 \leq \int_M |\nabla f|^2, \quad \forall\, f \in C_0^\infty(M),\ f \neq 0. \tag{3.2.23}$$

É imediato das considerações anteriores e da Definição 3.2, que uma subvariedade mínima M^n do espaço hiperbólico $\mathbb{H}^{n+m}$ é superestável quando $\bar{\lambda}_1 \geq 0$, isto é, quando vale

$$\int_M \left(|A|^2 - n\right) f^2 \leq \int_M |\nabla f|^2, \quad \forall\, f \in C_0^\infty(M), f \neq 0.$$

Observação 3.4. É possível obter, a princípio, uma relação entre $\lambda_1(M)$ e $\bar{\lambda}_1(M)$. De fato, para todo $f \in C_0^\infty(M), f \neq 0$, temos que

$$\frac{\int_M \left(|\nabla f|^2 - (|A|^2 - n) f^2\right)}{\int_M f^2} \leq \frac{\int_M \left(|\nabla f|^2 + n f^2\right)}{\int_M f^2} \leq \frac{\int_M |\nabla f|^2}{\int_M f^2} + n.$$

Portanto, fica claro que

$$\bar{\lambda}_1(M) \leq \lambda_1(M) + n.$$

Essa desigualdade será posteriormente utilizada. O próximo resultado mostra um exemplo no qual a igualdade é válida.

Proposição 3.7. (Ver [4]) Se M^n é uma subvariedade completa e totalmente geodésica de $\mathbb{H}^{n+m}$, então

$$\bar{\lambda}_1(M^n) = \bar{\lambda}_1(\mathbb{H}^n) = \lambda_1(\mathbb{H}^n) + n = \frac{(n-1)^2}{4} + n.$$

Demonstração. Por um lado, $|A| \equiv 0$ implica que

$$\bar{\lambda}_1(M) = \inf_{f \in C_0^\infty(M), f \neq 0} \frac{\int_M \left(|\nabla f|^2 + n f^2\right)}{\int_M f^2} = \inf_{f \in C_0^\infty(M), f \neq 0} \frac{\int_M |\nabla f|^2}{\int_M f^2} + n = \lambda_1(M) + n. \tag{3.2.24}$$

Por outro lado, de (1.1.18), $|A| \equiv 0$ resulta em

$$|A|^2 = \sum_{i,j,\alpha} (h_{ij}^\alpha)^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad h_{ij}^\alpha = 0, \quad \forall i, j, \alpha.$$

Usando isso na equação de Gauss (1.1.19), isto é,

$$R_{ijkl} - \overline{R}_{ijkl} = \sum_{\alpha}(h^{\alpha}_{ik}h^{\alpha}_{jl} - h^{\alpha}_{il}h^{\alpha}_{jk}),$$

teremos que os componentes R_{ijkl} do tensor curvatura de M coincidem com os componentes $\overline{R}_{ijkl}$ do tensor curvatura de $\overline{M}$. Em particular, obtemos

$$K_M(e_i, e_j) = R_{ijij} = \overline{R}_{ijij} = K_{\overline{M}}(e_i, e_j),$$

ou seja, a curvatura seccional de M, assim como a de $\mathbb{H}^{n+m}$, é constante e satisfaz $K_M \equiv -1$.

Mas, pela Proposição 3.4, e por (3.2.24), isso finalmente implica que

$$\bar{\lambda}_1(M^n) = \lambda_1(M^n) + n = \frac{(n-1)^2}{4} + n.$$

□

A seguir, dois teoremas sobre superestabilidade em imersões mínimas $f : M^n \to \mathbb{H}^{m+n}$ são demonstrados.

Teorema 3.4. (Ver [17]) Seja M uma subvariedade completa mínima do espaço $\mathbb{H}^{n+m}$. Se

$$|A|^2 \leq \frac{(n-1)^2}{4} + n,$$

em todo ponto $p \in M$, então M é superestável.

Demonstração. De (3.2.5), segue-se que

$$\int_M \lambda_1 f^2 \leq \int_M |\nabla f|^2, \quad \forall f \in C_0^{\infty}(M),\ f \neq 0.$$

Isso implica diretamente em

$$\int_M |\nabla f|^2 - (|A|^2 - n) f^2 \geq \int_M (\lambda_1(M) + n - |A|^2) f^2. \tag{3.2.25}$$

Além disso, pela Proposição 3.4, sabemos que

$$\lambda_1(M) \geq \frac{(n-1)^2}{4}.$$

Usando isso em (3.2.25), temos que

$$\int_M |\nabla f|^2 - (|A|^2 - n)f^2 \geq \int_M \left(\frac{(n-1)^2}{4} + n - |A|^2 \right) f^2.$$

Finalmente, usando que $|A|^2 \leq \dfrac{(n-1)^2}{4} + n$, concluímos que

$$\int_M |\nabla f|^2 - (|A|^2 - n)f^2 \geq 0,$$

ou seja, M é superestável. $\square$

Antes de enunciar o próximo e último teorema desse capítulo, precisamos de uma importante desigualdade de Sobolev.

Proposição 3.8. (Ver [17]) Se M^n, $n \geq 3$, é uma subvariedade completa, mínima e imersa em $\mathbb{H}^{n+m}$, então existe uma constante $C_s > 0$ tal que

$$\left(\int_M |f|^{\frac{2n}{n-2}} \right)^{\frac{n-2}{n}} \leq C_s \int_M |\nabla f|^2, \quad \forall\, f \in W_0^{1,2}(M). \tag{3.2.26}$$

Observação 3.5. O resultado acima se estende naturalmente às funções $f \in C_0^\infty(M) \subset W_0^{1,2}(M)$.

A Proposição 3.8 permite provar o seguinte teorema sobre superestabilidade:

Teorema 3.5. (Ver [17]) Seja M^n, $n \geq 3$, uma subvariedade completa, mínima e imersa em $\mathbb{H}^{n+m}$. Se

$$\int_M |A|^n \leq \left(\frac{1}{C_s} \right)^{\frac{n}{2}}, \tag{3.2.27}$$

onde C_s é a constante da Proposição 3.8 , então M é superestável.

Demonstração. Usando (3.2.26), temos que

$$\int_M |\nabla f|^2 - (|A|^2 - n)f^2 \geq \frac{1}{C_s} \left(\int_M |f|^{\frac{2n}{n-2}} \right)^{\frac{n-2}{n}} - \int_M (|A|^2 - n)f^2. \tag{3.2.28}$$

Por outro lado, usando a Desigualdade de Hölder (1.2.2) para $p = \dfrac{n}{2}$ e $q = \dfrac{n}{n-2}$, segue-se que

$$\int_M |A|^2 f^2 \leq \left(\int_M |A|^{2p} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_M f^{2q} \right)^{\frac{1}{q}} = \left(\int_M |A|^n \right)^{\frac{2}{n}} \left(\int_M f^{\frac{2n}{n-2}} \right)^{\frac{n-2}{n}}.$$

Aplicando a hipótese (3.2.27) na expressão acima, obtemos

$$\int_M |A|^2 f^2 \leq \frac{1}{C_s} \left(\int_M f^{\frac{2n}{n-2}} \right)^{\frac{n-2}{n}}.$$

Por fim, usando essa última desigualdade em (3.2.28), concluímos que

$$\int_M |\nabla f|^2 - (|A|^2 - n) f^2 \geq n \int_M f^2 \geq 0,$$

mostrando que M é superestável. $\square$

Capítulo 4

Rigidez e Superestabilidade de Imersões Mínimas em $\mathbb{H}^{n+m}$

Este capítulo visa apresentar diversas aplicações, no espaço hiperbólico, dos conceitos vistos anteriormente, especialmente da equação de Simons e dos resultados iniciais decorrentes dela, vistos na Seção 2.2 do Capítulo 2. Em geral, os teoremas a seguir apresentam condições que devem ser satisfeitas para que uma subvariedade seja totalmente geodésica, ou então fornecem estimativas sobre o primeiro autovalor do operador de superestabilidade de subvariedades mínimas.

Concluir que uma subvariedade mínima (isto é, que $h_{ii}^{\alpha} \equiv 0$) do espaço hiperbólico é, na verdade, totalmente geodésica (ou seja, que h_{ij}^{α}) , não é uma questão trivial, a princípio, pois envolve uma forte restrição sobre a segunda forma fundamental. Entretanto, a equação de Simons e suas consequências (as Proposições 2.4, 2.5 e o Teorema 2.2) fornecem condições mais fracas que permitem concluir se uma subvariedade mínima é totalmente geodésica.

Uma das consequências de uma subvariedade M ser totalmente geodésica em $\mathbb{H}^{n+m}$, pela equação de Gauss, é que sua curvatura seccional será constante e igual a -1. Outrossim, é imediato da Definição 3.2 que se M é totalmente geodésica, então M também será superestável.

Seguimos as ideias constantes em [3, 4, 19] como norteadoras para o desenvolvimento das notas constantes neste capítulo.

4.1 Principais Resultados

Nos enunciados dos teoremas e nas demonstrações dos mesmos, ao integrarmos sobre a subvariedade M iremos, por conveniência, omitir o elemento de volume dV_M, mas não deixando de estar cientes de sua presença em cada uma das integrais.

Teorema 4.1. (Ver [3]) Seja $M^n, n \geq 6$, uma subvariedade mínima completa do espaço hiperbólico $\mathbb{H}^{n+m}$. Suponha que existe uma constante $d \in 2\left(1-\sqrt{\frac{2}{mn}}, 1+\sqrt{\frac{2}{mn}}\right)$ tal que

$$\lim_{R\to+\infty} \frac{1}{R^2}\int_{B_p(R)} |A|^d = 0. \tag{4.1.1}$$

Se a norma da segunda forma fundamental A de M satisfaz

$$\sup_{x\in M} |A|^2(x) < C(n) := \begin{cases} \dfrac{(n-1)^2}{4} - n, & \text{se } m = 1, \\ \dfrac{(n-1)^2}{6} - \dfrac{2}{3}n, & \text{se } m \geq 2, \end{cases} \tag{4.1.2}$$

então M é totalmente geodésica.

Prova do Teorema 4.1. Por um lado, pela definição de $\lambda_1(M)$, sabemos de (3.2.5) que

$$\lambda_1 \int_M f^2 \leq \int_M |\nabla f|^2, \quad \forall\, f \in C_0^\infty(M), f \neq 0.$$

Dado $\alpha > 0$, considere $q \geq 0$ tal que $d = 2(q+1)\alpha$.

Substituindo f pela função $f|A|^{(q+1)\alpha} \in C_0^\infty(M)$, a desigualdade anterior se torna

$$\lambda_1 \int_M f^2|A|^{2(q+1)\alpha} \leq \int_M \left|\nabla\left(f|A|^{(q+1)\alpha}\right)\right|^2, \tag{4.1.3}$$

onde pelas propriedades do gradiente, obtemos

$$\nabla\left(f|A|^{(q+1)\alpha}\right) = |A|^{(q+1)\alpha}\nabla f + (q+1)|A|^{\alpha q} f \nabla|A|^\alpha,$$

que por sua vez implica em

$$\begin{aligned} \left|\nabla\left(f|A|^{(q+1)\alpha}\right)\right|^2 &= \left\langle \nabla\left(f|A|^{(q+1)\alpha}\right), \nabla\left(f|A|^{(q+1)\alpha}\right)\right\rangle \\ &= |A|^{2(q+1)\alpha}|\nabla f|^2 + (q+1)^2|A|^{2\alpha q} f^2 |\nabla|A|^\alpha|^2 \\ &\quad + 2(q+1)|A|^{(q+1)\alpha}|A|^{\alpha q}\left\langle \nabla f, \nabla|A|^\alpha\right\rangle. \end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Cauchy Schwarz (1.2.5) na expressão acima, obtemos

$$\begin{aligned}\left|\nabla\left(f|A|^{(q+1)\alpha}\right)\right|^2 \leq |A|^{2(q+1)\alpha}|\nabla f|^2 + (q+1)^2|A|^{2\alpha q}f^2|\nabla|A||^2 \\ +2(q+1)|A|^{2\alpha q+\alpha}f|\nabla f||\nabla|A|^{\alpha}|.\end{aligned} \tag{4.1.4}$$

Agora, utilizando a Desigualdade de Young (1.2.7) no último termo na expressão (4.1.4), e usando $p = q = 2$, $C\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right) = \dfrac{1}{2\varepsilon}$, segue-se que

$$|A|^{2\alpha q+\alpha}f|\nabla f||\nabla|A|^{\alpha}| \leq \frac{\varepsilon}{2}\left(|A|^{\alpha q}f|\nabla|A|^{\alpha}|\right)^2 + \frac{1}{2\varepsilon}\left(|A|^{(q+1)\alpha}|\nabla f|\right)^2.$$

Logo

$$\begin{aligned}2(q+1)|A|^{2\alpha q+\alpha}f|\nabla f||\nabla|A|^{\alpha}| \leq (q+1)\varepsilon|A|^{2\alpha q}f^2|\nabla|A|^{\alpha}|^2 \\ +\frac{(q+1)}{\varepsilon}|A|^{2(q+1)\alpha}|\nabla f|^2.\end{aligned} \tag{4.1.5}$$

Usando (4.1.4) em (4.1.5), e agrupando fatores semelhantes, temos que

$$\begin{aligned}\left|\nabla\left(f|A|^{(q+1)\alpha}\right)\right|^2 \leq \left(1+\frac{q+1}{\varepsilon}\right)|A|^{2(q+1)\alpha}|\nabla f|^2 \\ +(q+1)(q+1+\varepsilon)|A|^{2\alpha q}f^2|\nabla|A|^{\alpha}|^2.\end{aligned} \tag{4.1.6}$$

Substituindo a desigualdade acima em (4.1.3), temos

$$\begin{aligned}\lambda_1\int_M f^2|A|^{2(q+1)\alpha} \leq \left(1+\frac{q+1}{\varepsilon}\right)\int_M |A|^{2(q+1)\alpha}|\nabla f|^2 \\ +(q+1)(q+1+\varepsilon)\int_M |A|^{2\alpha q}f^2|\nabla|A|^{\alpha}|^2.\end{aligned} \tag{4.1.7}$$

Por outro lado, visto que M é, por hipótese, subvariedade mínima completa do espaço hiperbólico $\mathbb{H}^{n+m}$, podemos usar (3.2.6) em (4.1.7). Mais ainda, lembrando que definimos $q \geq 0$ tal que $d := 2(q+1)\alpha$, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{(n-1)^2}{4}\int_M f^2|A|^d \leq \left(1+\frac{q+1}{\varepsilon}\right)\int_M |A|^d|\nabla f|^2 \\ +\left(\frac{d^2}{4\alpha^2}+(q+1)\varepsilon\right)\int_M |A|^{2\alpha q}f^2|\nabla|A|^{\alpha}|^2.\end{aligned} \tag{4.1.8}$$

Multiplicando ambos os lados da desigualdade (4.1.8) pelo valor arbitrário $\alpha > 0$, obtemos

$$\begin{aligned} \alpha\frac{(n-1)^2}{4}\int_M f^2|A|^d &\leq \alpha\left(1+\frac{q+1}{\varepsilon}\right)\int_M |A|^d|\nabla f|^2 \\ &+\underbrace{\alpha\left(\frac{d^2}{4\alpha^2}+(q+1)\varepsilon\right)}_{x}\int_M |A|^{2\alpha q}f^2|\nabla|A|^\alpha|^2. \end{aligned} \tag{4.1.9}$$

Agora, usando $d = 2(q+1)\alpha$ na desigualdade (2.2.9), resulta em

$$\begin{aligned} \underbrace{\left(\frac{d}{\alpha}-\frac{mn-2}{mn\alpha}-\varepsilon\right)}_{y}\int_M |\nabla|A|^\alpha|^2|A|^{2\alpha q}f^2 &\leq \frac{1}{\varepsilon}\int_M |A|^d|\nabla f|^2 \\ &+b(m)\alpha\int_M |A|^{d+2}f^2+\alpha n\int_M |A|^d f^2. \end{aligned} \tag{4.1.10}$$

Note que, comparando x e y nas duas desigualdades acima, e lembrando que $\alpha > 0$, temos que

$$\begin{aligned} \alpha\left(\frac{d^2}{4\alpha^2}+(q+1)\varepsilon\right) &= \frac{d}{\alpha}-\frac{mn-2}{mn\alpha}-\varepsilon \\ &\iff \frac{d^2}{4\alpha}+(q+1)\alpha\varepsilon = \frac{d}{\alpha}-\frac{mn-2}{mn\alpha}-\varepsilon \\ &\iff \frac{d^2}{4}+(q+1)\alpha^2\varepsilon = d-\frac{mn-2}{mn}-\alpha\varepsilon \\ &\iff \frac{d^2}{4}-d+\frac{mn-2}{mn} = -\varepsilon\alpha(1+\alpha(q+1)). \end{aligned} \tag{4.1.11}$$

Ora, visto que supomos $\alpha > 0$ e $q \geq 0$, então $\alpha(1+\alpha(q+1)) > 0$. Portanto, existe $\varepsilon > 0$ tal que (4.1.11) ocorre se, e somente se, garantirmos que $\frac{d^2}{4}-d+\frac{mn-2}{mn} < 0$, isto é, se, e somente se $d \in 2\left(1-\sqrt{\frac{2}{mn}}, 1+\sqrt{\frac{2}{mn}}\right)$, que é exatamente a condição sobre d no enunciado do Teorema 4.1.

Sendo assim, (4.1.11) ocorre, e podemos usar (4.1.10) em (4.1.9), obtendo

$$\begin{aligned} \alpha\frac{(n-1)^2}{4}\int_M f^2|A|^d &\leq \alpha\left(1+\frac{q+1}{\varepsilon}\right)\int_M |A|^d|\nabla f|^2+\frac{1}{\varepsilon}\int_M |A|^d|\nabla f|^2 \\ &+b(m)\alpha\int_M |A|^{d+2}f^2+\alpha n\int_M |A|^d f^2. \end{aligned}$$

Multiplicando ambos os lados da última desigualdade por $\dfrac{1}{\alpha} > 0$, e agrupando termos semelhantes, obtemos

$$\int_M \left(\frac{(n-1)^2}{4} - n - b(m)|A|^2\right)|A|^d f^2 \leq \left(1 + \frac{q+1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon\alpha}\right)\int_M |A|^d |\nabla f|^2. \quad (4.1.12)$$

Lembrando que $b(1) = 1$ e $b(m) = \dfrac{3}{2}$, $m \geq 2$, note que

$$\frac{(n-1)^2}{4} - n - b(m)|A|^2 > 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} |A|^2 < \dfrac{(n-1)^2}{4} - n, & \text{se } m = 1, \\ |A|^2 < \dfrac{(n-1)^2}{6} - \dfrac{2}{3}n, & \text{se } m \geq 2, \end{cases} \quad (4.1.13)$$

que é satisfeito pela hipótese (4.1.2). Mais ainda, observe que essa hipótese só faz sentido se tivermos

$$\begin{cases} \dfrac{(n-1)^2}{4} - n > 0\,, \\ \dfrac{(n-1)^2}{6} - \dfrac{2}{3}n > 0\,. \end{cases}$$

As duas condições acima são equivalentes a $(n-1)^2 - 4n > 0$. Para soluções inteiras positivas, essa desigualdade só é válida quando $n \geq 6$, o que justifica a hipótese sobre a dimensão de M.

Agora, lembrando da hipótese sobre a completude de M, considere a composta $f \circ r : M \to [0,1]$, onde $r : M \to [0,+\infty)$ é a função distância em relação ao ponto $p \in M$ no qual vale (4.1.1) e $f : [0,+\infty) \to [0,1]$ é uma função diferenciável tal que $f \equiv 1$ em $[0,R]$, $f \equiv 0$ em $[2R,+\infty)$, com $|f'| < \dfrac{2}{R}$. É claro que $f \circ r \in C_0^\infty(M)$. Para usar essa função em (4.1.12), primeiramente note que

$$\begin{aligned} \int_M \left(\frac{(n-1)^2}{4} - n - b(m)|A|^2\right)|A|^d (f\circ r)^2 & \\ &= \int_{B_p(2R)} \left(\frac{(n-1)^2}{4} - n - b(m)|A|^2\right)|A|^d (f\circ r)^2 \\ &\geq \int_{B_p(R)} \left(\frac{(n-1)^2}{4} - n - b(m)|A|^2\right)|A|^d (f\circ r)^2 \\ &= \int_{B_p(R)} \left(\frac{(n-1)^2}{4} - n - b(m)|A|^2\right)|A|^d, \end{aligned} \quad (4.1.14)$$

onde lembramos que $B_p(R)$ denota a bola geodésica de centro $p \in M$ e raio R.

Por outro lado, pelas hipóteses sobre a função f, temos que

$$\begin{cases} f' = 0 & \text{em } (0,R] \cup [2R,\infty), \\ |f'| < \dfrac{2}{R} & \text{em } [R,2R]. \end{cases}$$

Lembrando que $|\nabla r| \equiv 1$ e usando as propriedades do gradiente de funções, obtemos

$$\begin{aligned} \int_M |A|^d |\nabla(f \circ r)|^2 &= \int_M |A|^d |f'(r) \cdot \nabla r|^2 = \int_M |A|^d |f'(r)|^2 |\nabla r|^2 \\ &= \int_{B_p(2R)} |A|^d |f'(r)|^2 \leq \frac{4}{R^2} \int_{B_p(2R)} |A|^d. \end{aligned} \tag{4.1.15}$$

Portanto, substituindo f por $f \circ r$ em (4.1.12) e usando (4.1.14) e (4.1.15), temos finalmente que

$$\int_{B_p(R)} \left(\frac{(n-1)^2}{4} - n - b(m)|A|^2 \right) |A|^d \leq \left(1 + \frac{q+1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon\alpha} \right) \frac{4}{R^2} \int_{B_p(2R)} |A|^d, \tag{4.1.16}$$

onde observamos que, pelas hipóteses sobre α, ε e q, temos que $\left(1 + \dfrac{q+1}{\varepsilon} + \dfrac{1}{\varepsilon\alpha} \right) \geq 0$.

Passando ao limite quando $n \to +\infty$ nos dois lados de (4.1.16), e usando a hipótese (4.1.1), temos que $B_p(R) \to M$, visto que M é completa, e assim (4.1.16) se torna

$$\int_M \left(\frac{(n-1)^2}{4} - n - b(m)|A|^2 \right) |A|^d \leq 0,$$

onde o integrando é claramente não negativo, pois vale (4.1.13) e $|A| \geq 0$, por definição. Assim, decorre que

$$\int_M \left(\frac{(n-1)^2}{4} - n - b(m)|A|^2 \right) |A|^d = 0 \quad \text{implica} \quad |A| \equiv 0,$$

ou seja, M é totalmente geodésica.

□

O próximo resultado é uma versão do Teorema 4.1, na qual substituimos (4.1.2) por uma hipótese envolvendo o primeiro autovalor do operador de superestabilidade $\bar{\lambda}_1(M)$.

Teorema 4.2. (Ver [3]) Seja $M^n, n \geq 6$, uma subvariedade mínima completa do espaço hiperbólico $\mathbb{H}^{n+m}$. Se vale (4.1.1) e se

$$\sup_{x \in M} |A|^2(x) < 2(\bar{\lambda}_1 - 2n), \tag{4.1.17}$$

então M é totalmente geodésica.

Prova do Teorema 4.2. Em primeiro lugar, assim como fizemos no teorema anterior, consideramos $q \geq 0$ tal que $d = 2(q+1)\alpha$.

Pela definição do operador $\bar{\lambda}_1(M)$ (ver (3.2.23)), temos que

$$\left(|A|^2 - n + \bar{\lambda}_1\right)\int_M f^2 \leq \int_M |\nabla f|^2, \quad \forall\, f \in C_0^\infty(M), f \neq 0.$$

Substituindo f por $f|A|^{\alpha(q+1)}$ na desigualdade acima, resulta em

$$\left(|A|^2 - n + \bar{\lambda}_1\right)\int_M f^2|A|^{2\alpha(q+1)} \leq \int_M |\nabla(f|A|^{\alpha(q+1)})|^2, \tag{4.1.18}$$

onde já vimos em (4.1.6) que, para todo $\varepsilon > 0$, vale a desigualdade

$$\begin{aligned}\left|\nabla\left(f|A|^{(q+1)\alpha}\right)\right|^2 \leq{}& \left(1 + \frac{q+1}{\varepsilon}\right)|A|^{2(q+1)\alpha}|\nabla f|^2\\ &+ (q+1)(q+1+\varepsilon)|A|^{2\alpha q} f^2 |\nabla|A|^\alpha|^2,\end{aligned}$$

que substituída em (4.1.18), fornece

$$\begin{aligned}\left(|A|^2 - n + \bar{\lambda}_1\right)\int_M f^2|A|^{2\alpha(q+1)} \leq{}& \left(\frac{\varepsilon + q + 1}{\varepsilon}\right)\int_M |A|^{2\alpha(q+1)}|\nabla f|^2\\ &+ (q+1)(q+1+\varepsilon)\int_M |\nabla|A|^\alpha|^2|A|^{2\alpha q} f^2.\end{aligned}$$

Agora, lembrando que $d = 2(q+1)\alpha$, $\alpha > 0$, a última desigualdade se torna

$$\begin{aligned}\int_M f^2|A|^{d+2} + (\bar{\lambda}_1 - n)\int_M f^2|A|^d \leq{}& \left(\frac{\varepsilon + q + 1}{\varepsilon}\right)\int_M |A|^d|\nabla f|^2\\ &+ \left(\frac{d^2}{4\alpha^2} + (q+1)\varepsilon\right)\int_M |\nabla|A|^\alpha|^2|A|^{2\alpha q} f^2.\end{aligned} \tag{4.1.19}$$

Analogamente, usando $d = 2(q+1)\alpha$ na desigualdade (2.2.7),

$$\begin{aligned}\left(\frac{d}{\alpha} - \frac{mn-2}{mn\alpha} - \varepsilon\right)\int_M |\nabla|A|^\alpha|^2|A|^{2\alpha q} f^2 \leq{}& \frac{1}{\varepsilon}\int_M |A|^d|\nabla f|^2 + b(m)\alpha\int_M |A|^{d+2} f^2\\ &+ \alpha n\int_M |A|^d f^2.\end{aligned} \tag{4.1.20}$$

Pela hipótese (4.1.17), temos que $|A|^2 < 2(\bar{\lambda}_1 - 2n)$, ou seja, $n < (\bar{\lambda}_1 - n) - \frac{1}{2}|A|^2$. Em particular, vale

$$\alpha n \int_M |A|^d f^2 \leq (\bar{\lambda}_1 - n)\alpha \int_M |A|^d f^2 - \frac{\alpha}{2}\int_M |A|^{d+2} f^2. \tag{4.1.21}$$

Substituindo (4.1.21) em (4.1.20) e agrupando termos semelhantes, obtemos

$$\begin{aligned}\left(\frac{d}{\alpha} - \frac{mn-2}{mn\alpha} - \varepsilon\right)\int_M |\nabla |A|^\alpha|^2 |A|^{2\alpha q} f^2 &\leq \frac{1}{\varepsilon}\int_M |A|^d |\nabla f|^2 \\ &+ \alpha\left[\left(b(m) - \frac{1}{2}\right)\int_M |A|^{d+2} f^2 + (\bar{\lambda}_1 - n)\int_M |A|^d f^2\right],\end{aligned} \tag{4.1.22}$$

onde observamos que $b(m) - \frac{1}{2} \leq 1$, visto que $b(1) = 1$ e $b(m) = \frac{3}{2}$ se $m \geq 2$. Usando isso e (4.1.19), temos que (4.1.22) se torna

$$\begin{aligned}&\left(\frac{d}{\alpha} - \frac{mn-2}{mn\alpha} - \varepsilon\right)\int_M |\nabla |A|^\alpha|^2 |A|^{2\alpha q} f^2 \leq \frac{1}{\varepsilon}\int_M |A|^d |\nabla f|^2 \\ &+ \alpha\left[\left(\frac{\varepsilon + q + 1}{\varepsilon}\right)\int_M |A|^d |\nabla f|^2 + \left(\frac{d^2}{4\alpha^2} + (q+1)\varepsilon\right)\int_M |\nabla |A|^\alpha|^2 |A|^{2\alpha q} f^2\right],\end{aligned}$$

isto é, reagrupando termos semelhantes, resulta que

$$\begin{aligned}\left(\frac{d}{\alpha} - \frac{mn-2}{mn\alpha} - \varepsilon - \frac{d^2}{4\alpha} - (q+1)\alpha\varepsilon\right)\int_M |\nabla |A|^\alpha|^2 |A|^{2\alpha q} f^2 \\ \leq \left(\frac{1 + \alpha(\varepsilon + q + 1)}{\varepsilon}\right)\int_M |A|^d |\nabla f|^2,\end{aligned} \tag{4.1.23}$$

com $\left(\frac{1 + \alpha(\varepsilon + q + 1)}{\varepsilon}\right) \geq 0$ pelas hipóteses sobre α, q e ε.

Por outro lado, note que

$$\begin{aligned}&\frac{d}{\alpha} - \frac{mn-2}{mn\alpha} - \varepsilon - \frac{d^2}{4\alpha} - (q+1)\alpha\varepsilon > 0 \\ &\qquad \iff \quad d - \frac{mn-2}{mn} - \varepsilon\alpha - \frac{d^2}{4} - (q+1)\alpha^2\varepsilon > 0 \\ &\qquad \iff \quad -\frac{d^2}{4} + d - \frac{mn-2}{mn} > \varepsilon\alpha(1 + \alpha(q+1)),\end{aligned}$$

onde $\alpha(1 + \alpha(q+1)) \geq 0$.

Assim como fizemos no teorema anterior, uma vez que $d \in 2\left(1-\sqrt{\frac{2}{mn}}, 1+\sqrt{\frac{2}{mn}}\right)$, então podemos garantir que $-\frac{d^2}{4}+d-\frac{mn-2}{mn} > 0$, e, consequentemente, garantir que existe $\varepsilon > 0$ satisfazendo

$$\frac{d}{\alpha}-\frac{mn-2}{mn\alpha}-\varepsilon-\frac{d^2}{4\alpha}-(q+1)\alpha\varepsilon > 0.$$

Diante dessas considerações, a desigualdade (4.1.23) se torna

$$\int_M |\nabla|A|^{\alpha}|^2|A|^{2\alpha q}f^2 \leq C\int_M |A|^d|\nabla f|^2, \tag{4.1.24}$$

onde C é uma constante positiva que depende apenas de d, q, m, n, ε e α.

Agora, considere a composta $f \circ r : M \to [0,1]$, onde $r : M \to [0,\infty)$ é a função distância em relação ao ponto $p \in M$ no qual vale (4.1.1) e $f : [0,\infty) \to [0,1]$ é uma função diferenciável tal que $f \equiv 1$ em $[0,R]$, $f \equiv 0$ em $[2R,\infty)$, com $|f'| < \frac{2}{R}$.

Substituindo f por $f \circ r$ na desigualdade (4.1.24), obtemos que

$$\int_M |\nabla|A|^{\alpha}|^2|A|^{2\alpha q}(f\circ r)^2 \leq C\int_M |A|^d|\nabla(f\circ r)|^2. \tag{4.1.25}$$

Todavia, vimos em (4.1.15) que

$$\int_M |A|^d|\nabla(f\circ r)|^2 \leq \frac{4}{R^2}\int_{B_p(2R)} |A|^d,$$

onde $B_p(2R)$ denota a bola geodésica em M de raio R.

Substituindo a última desigualdade em (4.1.25), e lembrando das hipóteses sobre f, segue-se que

$$\int_{B_p(R)} |\nabla|A|^{\alpha}|^2|A|^{2\alpha q} \leq \frac{4C}{R^2}\int_{B_p(2R)} |A|^d. \tag{4.1.26}$$

Decorre da hipótese sobre a completude de M e da condição (4.1.1) que, ao aplicarmos o limite quando $R \to +\infty$ em ambos os lados da desigualdade (4.1.26), resulta em

$$\int_M |\nabla|A|^{\alpha}|^2|A|^{2\alpha q} = \lim_{R\to+\infty}\int_{B_p(R)} |\nabla|A|^{\alpha}|^2|A|^{2\alpha q} \leq 0.$$

Visto que o integrando acima é não negativo, concluímos que $|\nabla|A|^{\alpha}||A|^{\alpha q} \equiv 0$. Portanto, a segunda forma fundamental A satisfaz $|A| = c = const$.

Suponha que $c \neq 0$. Nesse caso, a hipótese (4.1.1) se torna

$$0 = \lim_{R \to +\infty} \frac{1}{R^2} \int_{B_p(R)} |A|^d = \lim_{R \to +\infty} \frac{1}{R^2} \int_{B_p(R)} c^d = \lim_{R \to +\infty} \frac{c^d}{R^2} Vol[B_p(R)],$$

onde $Vol[B_p(R)]$ denota o volume n-dimensional, na métrica g de M, da bola geodésica $B_p(R)$. Por conseguinte, temos que

$$\lim_{R \to +\infty} \frac{Vol[B_p(R)]}{R^2} = 0.$$

Mas, pela Proposição (3.6) isso implicaria que $\lambda_1(M) = 0$, o que contradiz (3.2.12), pois

$$\lambda_1(M) \geq \frac{(n-1)^2}{4} \geq \frac{25}{4} > 0, \qquad \forall\ n \geq 6.$$

Portanto, $|A| = c = 0$, isto é, M é totalmente geodésica.

□

O próximo teorema fornece condições para que hipersuperfícies ($m = 1$) de dimensão $n \geq 2$, imersas no espaço hiperbólico, sejam totalmente geodésicas. Adicionalmente, o teorema fornece uma estimativa para o primeiro autovalor do operador de superestabilidade no caso $m = n = 2$.

Recordamos, do Capítulo 3, que utilizamos a seguinte notação para o primeiro autovalor do operador de superestabilidade de M

$$\bar{\lambda}_1(M) = \lambda_1(L_{|A|^2 - n}, M).$$

Teorema 4.3. (Ver [3]) Seja M^n uma subvariedade mínima completa do espaço hiperbólico $\mathbb{H}^{n+m}$, $n \geq 2$ e $n \neq 3$. Suponha que vale (4.1.1). Então, há dois casos a considerar:

(I) Se $m = 1$ e

$$\bar{\lambda}_1(M) > \frac{n^2 d^2}{4(n(d-1)+2)} + n, \tag{4.1.27}$$

onde

$$d \in \begin{cases} \left(0, \frac{1}{2}\right), & \text{se } n = 2, \\ \left(\frac{n-1}{n}, \frac{(n-1)(n-2)}{n}\right), & \text{se } n = 4 \text{ ou } 5, \\ \left(2 - 2\sqrt{\frac{2}{n}}, 2 + 2\sqrt{\frac{2}{n}}\right), & \text{se } n \geq 6, \end{cases} \tag{4.1.28}$$

então M é totalmente geodésica.

(II) Se $m = n = 2$ e $d \in (2/3, 2)$, então $\bar{\lambda}_1 \leq \frac{d^2}{2d-1} + 2$.

Prova do Teorema 4.3. Como já vimos, considerando $q \geq 0$ tal que $d = 2(q+1)\alpha$ em (2.2.7), obtemos (4.1.20), isto é,

$$\underbrace{\left(\frac{d}{\alpha} - \frac{mn-2}{mn\alpha} - \varepsilon\right)}_{x} \int_M |\nabla |A|^\alpha|^2 |A|^{2\alpha q} f^2 \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_M |A|^d |\nabla f|^2 + b(m)\alpha \int_M |A|^{d+2} f^2 + \alpha n \int_M |A|^d f^2,$$

onde $b(1) = 1$ e $b(m) = 3/2$, se $m \geq 2$.

Por outro lado, de (4.1.19) temos que

$$\begin{aligned} \int_M f^2 |A|^{d+2} + (\bar{\lambda}_1 - n) \int_M f^2 |A|^d - \left(\frac{\varepsilon + q + 1}{\varepsilon}\right) \int_M |A|^d |\nabla f|^2 \\ \leq \underbrace{\left(\frac{d^2}{4\alpha^2} + (q+1)\varepsilon\right)}_{y} \int_M |\nabla |A|^\alpha|^2 |A|^{2\alpha q} f^2. \end{aligned} \tag{4.1.29}$$

Multiplicando a penúltima desigualdade por $\frac{d^2}{4\alpha^2} + (q+1)\varepsilon$, (4.1.29) por $\frac{d}{\alpha} - \frac{mn-2}{mn\alpha} - \varepsilon$, somando as duas desigualdades resultantes e comparando os termos identificados por x e y, obtemos

$$\begin{aligned} &\left(\frac{d}{\alpha} - \frac{mn-2}{mn\alpha} - \varepsilon\right) \left[\int_M f^2 |A|^{d+2} + (\bar{\lambda}_1 - n) \int_M f^2 |A|^d - \left(\frac{\varepsilon + q + 1}{\varepsilon}\right) \int_M |A|^d |\nabla f|^2\right] \\ &\leq \left(\frac{d^2}{4\alpha^2} + (q+1)\varepsilon\right) \left[\frac{1}{\varepsilon} \int_M |A|^d |\nabla f|^2 + b(m)\alpha \int_M |A|^{d+2} f^2 + \alpha n \int_M |A|^d f^2\right]. \end{aligned}$$

Agrupando termos semelhantes na desigualdade acima, resulta que

$$\begin{aligned}
&\left[\left(\frac{d}{\alpha}-\frac{mn-2}{mn\alpha}-\varepsilon\right)-\left(\frac{d^2}{4\alpha^2}+(q+1)\varepsilon\right)b(m)\alpha\right]\int_M |A|^{d+2}f^2\\
&+\left[\left(\frac{d}{\alpha}-\frac{mn-2}{mn\alpha}-\varepsilon\right)(\bar{\lambda}_1-n)-\left(\frac{d^2}{4\alpha^2}+(q+1)\varepsilon\right)\alpha n\right]\int_M |A|^{d}f^2\\
&\leq\left[\left(\frac{d^2}{4\alpha^2\varepsilon}+q+1\right)+\left(\frac{d}{\alpha}-\frac{mn-2}{mn\alpha}-\varepsilon\right)\left(\frac{\varepsilon+q+1}{\varepsilon}\right)\right]\int_M |A|^{d}|\nabla f|^2.
\end{aligned}\tag{4.1.30}$$

Consideraremos agora dois casos possíveis:

Se $m=1$, então neste caso $b(1)=1$ e a desigualdade (4.1.30) se torna

$$\begin{aligned}
&\left[\left(\frac{d}{\alpha}-\frac{n-2}{n\alpha}-\varepsilon\right)-\left(\frac{d^2}{4\alpha}+(q+1)\alpha\varepsilon\right)\right]\int_M |A|^{d+2}f^2\\
&+\left[\left(\frac{d}{\alpha}-\frac{n-2}{n\alpha}-\varepsilon\right)(\bar{\lambda}_1-n)-\left(\frac{d^2}{4\alpha}+(q+1)\alpha\varepsilon\right)n\right]\int_M |A|^{d}f^2\\
&\leq\left[\left(\frac{d^2}{4\alpha^2\varepsilon}+q+1\right)+\left(\frac{d}{\alpha}-\frac{n-2}{n\alpha}-\varepsilon\right)\left(\frac{\varepsilon+q+1}{\varepsilon}\right)\right]\int_M |A|^{d}|\nabla f|^2.
\end{aligned}\tag{4.1.31}$$

Provaremos que os coeficientes que aparecem multiplicando o símbolo de integração do lado esquerdo dessa última desigualdade são ambos positivos. De fato, com relação ao primeiro coeficiente, temos que a expressão

$$\left(\frac{d}{\alpha}-\frac{n-2}{n\alpha}-\varepsilon\right)-\left(\frac{d^2}{4\alpha}+(q+1)\alpha\varepsilon\right)>0$$

é equivalente a

$$-\frac{d^2}{4}+d-\frac{n-2}{n}>\varepsilon\alpha(1+\alpha(q+1)).\tag{4.1.32}$$

Mas por (4.1.28), temos que

$$d\in\left(2-2\sqrt{\frac{2}{n}},2+2\sqrt{\frac{2}{n}}\right),\quad \forall n\geq 2,$$

Logo, $-\dfrac{d^2}{4}+d-\dfrac{n-2}{n}>0$, e existe $\varepsilon>0$ tal que (4.1.32) ocorre.

Agora, com relação ao segundo coeficiente do lado esquerdo de (4.1.31), note que a desigualdade

$$\left(\frac{d}{\alpha}-\frac{n-2}{n\alpha}-\varepsilon\right)(\bar{\lambda}_1-n)-\left(\frac{d^2}{4\alpha}+(q+1)\alpha\varepsilon\right)n>0$$

é equivalente a

$$(n(d-1)+2)\,(\bar{\lambda}_1-n)-\frac{n^2d^2}{4}>\varepsilon n\alpha(\bar{\lambda}_1-n(1+\alpha(q+1))). \tag{4.1.33}$$

Mas por (4.1.27), temos que

$$\bar{\lambda}_1(M)>\frac{n^2d^2}{4(n(d-1)+2)}+n.$$

Logo

$$(n(d-1)+2)\,(\bar{\lambda}_1-n)-\frac{n^2d^2}{4}>0.$$

Portanto, existe $\varepsilon>0$ tal que (4.1.33) ocorre. Assim, as duas constantes que aparecem do lado esquerdo de (4.1.31) são positivas.

Mais ainda, a constante que ocorre do lado direito também é positiva. De fato, pelas hipóteses sobre d,q,α a ε, só precisamos mostrar que

$$\frac{d}{\alpha}-\frac{n-2}{n\alpha}-\varepsilon>0.$$

Mas isso é equivalente a

$$d-\frac{n-2}{n}>\varepsilon\alpha. \tag{4.1.34}$$

Visto que (4.1.28) implica $d>\frac{n-2}{n}$ para todo $n\geq 2$, então certamente existe $\varepsilon>0$ tal que (4.1.34) ocorre. Após essas considerações, segue de (4.1.31) que

$$\int_M |A|^{d+2}f^2\leq C\int_M |A|^d|\nabla f|^2, \tag{4.1.35}$$

onde C é uma constante positiva.

Finalmente, considere a composta $f\circ r: M\to[0,1]$, onde $r: M\to[0,\infty)$ é a função distância em relação ao ponto $p\in M$ no qual vale (4.1.1) e $f:[0,\infty)\to[0,1]$ é uma função diferenciável tal que $f\equiv 1$ em $[0,R]$, $f\equiv 0$ em $[2R,\infty)$, com $|f'|<\frac{2}{R}$.

Substituindo f por $f\circ r$ na desigualdade (4.1.35), obtemos que

$$\int_M |A|^{d+2}(f\circ r)^2\leq C\int_M |A|^d|\nabla(f\circ r)|^2, \tag{4.1.36}$$

onde $B_p(R)$ denota a bola geodésica em M de raio R. Também já vimos em (4.1.15) que

$$\int_M |A|^d |\nabla(f\circ r)|^2 \leq \frac{4}{R^2}\int_{B_p(2R)} |A|^d.$$

Substituindo essa última desigualdade em (4.1.36) e usando as hipóteses sobre f, segue-se que

$$\int_{B_p(R)} |A|^{d+2} \leq \frac{4C}{R^2}\int_{B_p(2R)} |A|^d.$$

Decorre da hipótese sobre a completude de M e da condição (4.1.1) que, ao aplicarmos o limite quando $R\to+\infty$ em ambos os lados da última desigualdade, resulta em

$$\int_M |A|^{d+2} = 0.$$

Logo $|A|\equiv 0$, ou seja, M é totalmente geodésica. Isto prova o caso (I).

Por outro lado, seja $m=n=2$. Nesse caso, temos $b(2)=\dfrac{3}{2}$ e (4.1.30) se torna

$$\begin{aligned}
&\left[-\frac{3d^2+8d-4}{8\alpha}-\varepsilon\left(1+\frac{3\alpha(q+1)}{2}\right)\right]\int_M |A|^{d+2}f^2\\
&+\left[\left(\frac{2d-1}{2\alpha}\right)(\bar{\lambda}_1-2)-\frac{d^2}{2\alpha}-\varepsilon(\bar{\lambda}_1-2+2\alpha(q+1))\right]\int_M |A|^d f^2 \qquad (4.1.37)\\
&\leq\left[\left(\frac{d^2}{4\alpha^2\varepsilon}+q+1\right)+\left(\frac{d}{\alpha}-\frac{1}{2\alpha}-\varepsilon\right)\left(\frac{\varepsilon+q+1}{\varepsilon}\right)\right]\int_M |A|^d|\nabla f|^2.
\end{aligned}$$

Mostraremos que a constante que multiplica o primeiro símbolo de integral do lado esquerdo dessa última desigualdade, assim como a constante que multiplica o símbolo de integral do lado direito são ambas positivas. Além disso, mostraremos também que a constante que multiplica o segundo símbolo de integral do lado esquerdo é não positiva.

No caso da constante no lado direito, visto que $d\in(2/3,2)$, temos que $2d-1>0$. Logo existe $\varepsilon>0$ tal que $\left(\dfrac{d}{\alpha}-\dfrac{1}{2\alpha}-\varepsilon\right)>0$, e, consequentemente, tal que

$$\left(\frac{d^2}{4\alpha^2\varepsilon}+q+1\right)+\left(\frac{d}{\alpha}-\frac{1}{2\alpha}-\varepsilon\right)\left(\frac{\varepsilon+q+1}{\varepsilon}\right)>0.$$

Agora, considere a primeira constante no lado esquerdo de (4.1.37). É claro que

$$-\frac{3d^2+8d-4}{8\alpha}-\varepsilon\left(1+\frac{3\alpha(q+1)}{2}\right)>0$$

ocorre se, e somente se,

$$-3d^2+8d-4>\varepsilon\alpha\left(8+12\alpha(q+1)\right). \tag{4.1.38}$$

Visto que $d\in(2/3,2)$, então $-3d^2+8d-4>0$ e existe $\varepsilon>0$ tal que (4.1.38) ocorre.

Com respeito à segunda constante do lado esquerdo de (4.1.37), note que

$$\left(\frac{2d-1}{2\alpha}\right)(\bar{\lambda}_1-2)-\frac{d^2}{2\alpha}-\varepsilon(\bar{\lambda}_1-2+2\alpha(q+1))>0$$

ocorre se, e somente se,

$$(2d-1)(\bar{\lambda}_1-2)-d^2>2\alpha\varepsilon(\bar{\lambda}_1-2+2\alpha(q+1)). \tag{4.1.39}$$

Suponha que $(2d-1)(\bar{\lambda}_1-2)-d^2>0$, isto é, que $\bar{\lambda}_1>\dfrac{d^2}{2d-1}+2$. Primeiramente teríamos que existe $\varepsilon>0$ tal que (4.1.39) ocorre. Portanto, as constantes em (4.1.37) seriam todas positivas e resultaria que

$$\int_M |A|^d f^2 \le C\int_M |A|^d|\nabla f|^2, \tag{4.1.40}$$

onde C é uma constante positiva. Agora, considere a composta $f\circ r: M\to[0,1]$, onde $r: M\to[0,\infty)$ é a função distância em relação ao ponto $p\in M$ no qual vale (4.1.1) e $f:[0,\infty)\to[0,1]$ é uma função diferenciável tal que $f\equiv 1$ em $[0,R]$, $f\equiv 0$ em $[2R,\infty)$, com $|f'|<\dfrac{2}{R}$.

Substituindo f por $f\circ r$ na desigualdade (4.1.40), obtemos que

$$\int_M |A|^d(f\circ r)^2 \le C\int_M |A|^d|\nabla(f\circ r)|^2, \tag{4.1.41}$$

onde $B_p(R)$ denota a bola geodésica em M de raio R. Além disso, (4.1.15) fornece

$$\int_M |A|^d|\nabla(f\circ r)|^2 \le \frac{4}{R^2}\int_{B_p(2R)}|A|^d.$$

Substituindo a última desigualdade em (4.1.41) e usando as hipóteses sobre f, segue-se que

$$\int_{B_p(R)} |A|^d \leq \frac{4C}{R^2} \int_{B_p(2R)} |A|^d. \tag{4.1.42}$$

Decorre da hipótese sobre a completude de M e da condição (4.1.1) que, ao aplicarmos o limite quando $R \to +\infty$ em ambos os lados de (4.1.42), resulta em

$$\int_{B_p(R)} |A|^d = 0.$$

Portanto $|A| \equiv 0$, ou seja, M é totalmente geodésica. Mas isso implicaria, pela Proposição (3.7), que

$$\bar{\lambda}_1(M) = \frac{(n-1)^2}{4} + n = \frac{1}{4} + 2 = \frac{9}{4}.$$

Visto que supomos $\bar{\lambda}_1 > \dfrac{d^2}{2d-1} + 2$, então teríamos que $\dfrac{9}{4} > \dfrac{d^2}{2d-1} + 2$, o que equivale a $4d^2 - 2d + 1 < 0$, que, por sua vez, é um absurdo, visto que a inequação $4d^2 - 2d + 1 < 0$ não possui soluções reais, muito menos satisfazendo a hipótese $d \in (2/3, 2)$. Portanto, concluímos que

$$\bar{\lambda}_1(M) \leq \frac{d^2}{2d-1} + 2.$$

$\square$

Observação 4.1. Podemos notar que a hipótese (4.1.1) foi utilizada nos três teoremas dessa seção. Apesar disso, uma questão em aberto é se tal hipótese é realmente necessária para concluir tais resultados. Alguns autores [4, 19] acreditam que seja possível provar esses teoremas de rigidez sem utilizar tal hipótese, o que não foi realizado até o momento.

Um dos resultados fundamentais que vimos no Capítulo 2 foi a Proposição 2.3, que apresenta a seguinte desigualdade, válida para subvariedades mínimas no espaço hiperbólico

$$|\nabla A|^2 - |\nabla |A||^2 \geq \frac{2}{mn} |\nabla |A||^2.$$

A partir dela podemos deduzir a expressão (2.2.7) que foi utilizada para demonstrar todos os resultados desse capítulo até aqui.

Entretanto, apresentamos a seguir uma sutil, mas importante, melhoria dessa estimativa, obtida por Xin [20], e cuja demonstração será suprimida.

Proposição 4.1. (Ver [20]) Se $f : M^n \to \overline{M}^{n+m}$ é uma imersão cujo vetor curvatura média é paralelo em $\overline{M}^{n+m}$, então vale

$$|\nabla A|^2 - |\nabla |A||^2 \geq \frac{2}{n}|\nabla |A||^2. \tag{4.1.43}$$

Usando a expressão (4.1.43) e argumentando de forma inteiramente análoga à Proposição 2.4, obtemos a seguinte desigualdade do tipo Simons, que pode ser encontrada em [4], para uma imersão mínima no espaço hiperbólico:

$$|A|\triangle|A| + \frac{3}{2}|A|^4 + n|A|^2 \geq \frac{2}{n}|\nabla |A||^2. \tag{4.1.44}$$

Note que o resultado acima constitui uma melhoria da Proposição 2.4 e será necessário na demonstração dos próximos resultados deste capítulo.

Teorema 4.4. (Ver [4]) Seja M^né uma subvariedade mínima completa do espaço hiperbólico $\mathbb{H}^{n+m}$, $2 \leq n \leq 5, n \neq 3$. Se

$$\lim_{R\to+\infty} \frac{1}{R^2}\int_{B_p(R)} |A|^d = 0 \tag{4.1.45}$$

e

$$\bar{\lambda}_1(M) = \lambda_1(L_{|A|^2-n}, M) > \frac{5n}{3} + \frac{(3nd^2 - 8nd + 8(n-2))(n-1)^2}{12nd^2}, \tag{4.1.46}$$

para algum d tal que

$$d \in \begin{cases} \left(0, \dfrac{1}{2}\right), & \text{se } n = 2, \\ \left(\dfrac{3}{4}, \dfrac{3}{2}\right), & \text{se } n = 4, \\ \left(\dfrac{4}{3} - \dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{2}{5}}, \dfrac{4}{3} + \dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{2}{5}}\right), & \text{se } n = 5, \end{cases} \tag{4.1.47}$$

então M é totalmente geodésica.

Prova do Teorema 4.4. Defina $q \geq 0$ tal que $d = 2(q+1)\alpha$.

Utilizando a desigualdade (4.1.44) e argumentando de forma idêntica à Proposição 2.5, obtemos

$$|A|^\alpha\triangle|A|^\alpha \geq \left(1 - \frac{n-2}{\alpha n}\right)|\nabla |A|^\alpha|^2 - \frac{3}{2}\alpha|A|^{2\alpha+2} - \alpha n|A|^{2\alpha}. \tag{4.1.48}$$

Multiplicando (4.1.48) por $|A|^{2\alpha q}f^2$, e integrando em M, segue-se que

$$\begin{aligned}\int_M |A|^{(2q+1)\alpha} f^2 \triangle |A|^\alpha \geq \left(1-\frac{n-2}{\alpha n}\right)\int_M |A|^{2\alpha q}|\nabla|A|^\alpha|^2 f^2 \\ -\frac{3}{2}\alpha\int_M |A|^{2(q+1)\alpha+2}f^2 - \alpha n\int_M |A|^{2(q+1)\alpha}f^2.\end{aligned} \tag{4.1.49}$$

Porém, já vimos em (2.2.10) que

$$\begin{aligned}\int_M |A|^{(2q+1)\alpha}\triangle|A|^\alpha f^2 \leq -(2q+1-\varepsilon)\int_M |\nabla|A|^\alpha|^2|A|^{2q\alpha}f^2 \\ +\frac{1}{\varepsilon}\int_M |A|^{2(q+1)\alpha}|\nabla f|^2.\end{aligned}$$

Substituindo a última desigualdade em (4.1.49), obtemos

$$\begin{aligned}\left(1-\frac{n-2}{\alpha n}\right)\int_M |\nabla|A|^\alpha|^2|A|^{2\alpha q}f^2 - \frac{3}{2}\alpha\int_M |A|^{2(q+1)\alpha+2}f^2 - \alpha n\int_M |A|^{2(q+1)\alpha}f^2 \\ \leq -(2q+1-\varepsilon)\int_M |\nabla|A|^\alpha|^2|A|^{2q\alpha}f^2 + \frac{1}{\varepsilon}\int_M |A|^{2(q+1)\alpha}|\nabla f|^2,\end{aligned}$$

que, reordenando, se torna

$$\begin{aligned}\left(2(q+1)-\frac{n-2}{\alpha n}-\varepsilon\right)\int_M |\nabla|A|^\alpha|^2|A|^{2\alpha q}f^2 \leq \frac{3}{2}\alpha\int_M |A|^{2(q+1)\alpha+2}f^2 \\ +\alpha n\int_M |A|^{2(q+1)\alpha}f^2 + \frac{1}{\varepsilon}\int_M |A|^{2(q+1)\alpha}|\nabla f|^2.\end{aligned} \tag{4.1.50}$$

Por outro lado, pela definição de $\bar{\lambda}_1 := \bar{\lambda}_1(M)$ e da equação (3.2.23), resulta que

$$\int_M \left(|A|^2 - n + \bar{\lambda}_1\right) f^2 \leq \int_M |\nabla f|^2, \quad \forall\, f \in C_0^\infty(M),\ f \neq 0. \tag{4.1.51}$$

Ademais, por (3.2.6) vale

$$\lambda_1(M) \geq \frac{(n-1)^2}{4} = \gamma,$$

o que implica pela definição de $\lambda_1(M)$ (ver (3.2.5)) que

$$\gamma\int_M f^2 \leq \int_M |\nabla f|^2, \quad \forall\, f \in C_0^\infty(M), f \neq 0. \tag{4.1.52}$$

Assim, para qualquer $x \in [0,1]$, temos que (4.1.51) e (4.1.52) implicam em

$$x\int_M \left(|A|^2 - n + \bar{\lambda}_1\right) f^2 + (1-x)\gamma \int_M f^2 \leq \int_M |\nabla f|^2, \quad \forall f \in C_0^\infty(M),\ f \neq 0,$$

onde reordenando os termos resulta que

$$x\int_M |A|^2 f^2 + (x(\bar{\lambda}_1 - n) + (1-x)\gamma) \int_M f^2 \leq \int_M |\nabla f|^2. \tag{4.1.53}$$

Agora, substituindo f por $f|A|^{(q+1)\alpha}$ nessa última desigualdade, obtemos

$$\begin{aligned} x\int_M |A|^{2(q+1)\alpha+2} f^2 + (x(\bar{\lambda}_1 - n) + (1-x)\gamma) \int_M |A|^{2(q+1)\alpha} f^2 \\ \leq \int_M |\nabla(|A|^{(q+1)\alpha} f)|^2, \end{aligned} \tag{4.1.54}$$

onde já vimos em (4.1.6) que, para todo $\varepsilon > 0$, vale

$$\begin{aligned} |\nabla(f|A|^{\alpha(q+1)})|^2 \leq \frac{\varepsilon+q+1}{\varepsilon} |A|^{2\alpha(q+1)} |\nabla f|^2 \\ + (q+1)(q+1+\varepsilon)|\nabla|A|^\alpha|^2 |A|^{2\alpha q} f^2. \end{aligned}$$

Usando esse resultado em (4.1.54), obtemos

$$\begin{aligned} x\int_M |A|^{2(q+1)}\alpha + 2f^2 + (x(\bar{\lambda}_1 - n) + (1-x)\gamma) \int_M |A|^{2(q+1)\alpha} f^2 \\ \leq \frac{\varepsilon+q+1}{\varepsilon} \int_M |A|^{2\alpha(q+1)} |\nabla f|^2 + (q+1)(q+1+\varepsilon) \int_M |\nabla|A|^\alpha|^2 |A|^{2\alpha q} f^2. \end{aligned}$$

Substituindo $\varepsilon > 0$ por $\dfrac{\varepsilon}{\alpha} > 0$ na última desigualdade, resulta em

$$\begin{aligned} x\int_M |A|^{2(q+1)\alpha+2} f^2 + (x(\bar{\lambda}_1 - n) + (1-x)\gamma) \int_M |A|^{2(q+1)\alpha} f^2 \\ \leq \left(1 + \frac{(q+1)\alpha}{\varepsilon}\right) \int_M |A|^{2\alpha(q+1)} |\nabla f|^2 \\ + \frac{(q+1)}{\alpha}(\varepsilon + (q+1)\alpha) \int_M |\nabla|A|^\alpha|^2 |A|^{2\alpha q} f^2. \end{aligned} \tag{4.1.55}$$

Multiplicando (4.1.55) por $\left(2(q+1)-\dfrac{n-2}{\alpha n}-\varepsilon\right)$ e (4.1.50) por $\dfrac{(q+1)}{\alpha}(\varepsilon+(q+1)\alpha)$ e somando os resultados, obtemos

$$\begin{aligned}
&\left(2(q+1)-\frac{n-2}{\alpha n}-\varepsilon\right)\left[x\int_M |A|^{2(q+1)\alpha+2}f^2+(x(\bar{\lambda}_1-n)+(1-x)\gamma)\int_M |A|^{2(q+1)\alpha}f^2\right]\\
&\qquad\leq\left(2(q+1)-\frac{n-2}{\alpha n}-\varepsilon\right)\left(1+\frac{(q+1)\alpha}{\varepsilon}\right)\int_M |A|^{2\alpha(q+1)}|\nabla f|^2\\
&\qquad\quad+\frac{(q+1)}{\alpha}(\varepsilon+(q+1)\alpha)\left[\frac{3}{2}\alpha\int_M |A|^{2(q+1)\alpha+2}f^2\right.\\
&\qquad\quad\left.+\alpha n\int_M |A|^{2(q+1)\alpha}f^2+\frac{1}{\varepsilon}\int_M |A|^{2(q+1)\alpha}|\nabla f|^2\right]
\end{aligned}$$

Denotando $d=2(q+1)\alpha$ na desigualdade acima, segue-se que

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{d}{\alpha}-\frac{n-2}{\alpha n}-\varepsilon\right)\left[x\int_M |A|^{d+2}f^2+(x(\bar{\lambda}_1-n)+(1-x)\gamma)\int_M |A|^d f^2\right]\\
&\quad\leq\left(\frac{d}{\alpha}-\frac{n-2}{\alpha n}-\varepsilon\right)\left(1+\frac{d}{2\varepsilon}\right)\int_M |A|^d|\nabla f|^2\\
&\quad+\frac{3}{2}(q+1)(\varepsilon+(q+1)\alpha)\int_M |A|^{d+2}f^2\\
&\quad+(q+1)(\varepsilon+(q+1)\alpha)n\int_M |A|^d f^2+\frac{(q+1)}{\alpha\varepsilon}(\varepsilon+(q+1)\alpha)\int_M |A|^d|\nabla f|^2.
\end{aligned}$$

Agrupando termos semelhantes na desigualdade acima, concluímos que

$$\begin{aligned}
&\left[\left(\frac{d}{\alpha}-\frac{n-2}{\alpha n}-\varepsilon\right)x-\frac{3}{2}(q+1)(\varepsilon+(q+1)\alpha)\right]\int_M |A|^{d+2}f^2\\
&+\left[\left(\frac{d}{\alpha}-\frac{n-2}{\alpha n}-\varepsilon\right)(x(\bar{\lambda}_1-n)+(1-x)\gamma)-(q+1)(\varepsilon+(q+1)\alpha)n\right]\int_M |A|^d f^2\\
&\leq\left[\left(\frac{d}{\alpha}-\frac{n-2}{\alpha n}-\varepsilon\right)\left(1+\frac{d}{2\varepsilon}\right)+\frac{(q+1)}{\alpha\varepsilon}(\varepsilon+(q+1)\alpha)\right]\int_M |A|^d|\nabla f|^2.
\end{aligned}\tag{4.1.56}$$

Note que $\left(\dfrac{d}{\alpha}-\dfrac{n-2}{\alpha n}-\varepsilon\right)>0$ ocorre se, e somente se, $d-\dfrac{n-2}{n}>\alpha\varepsilon$. Mas por (4.1.47) é imediato que $d-\dfrac{n-2}{n}>0,\ \forall\, 2\leq n\leq 5, n\neq 3$. Portanto, existe $\varepsilon>0$ tal que $\left(\dfrac{d}{\alpha}-\dfrac{n-2}{\alpha n}-\varepsilon\right)>0$.

Reescrevemos agora (4.1.56) da forma

$$C_1\int_M |A|^{d+2}f^2+C_2\int_M |A|^d f^2\leq C\int_M |A|^d|\nabla f|^2,\tag{4.1.57}$$

onde

$$\begin{aligned}
C_1 &= \left(\frac{d}{\alpha} - \frac{n-2}{\alpha n} - \varepsilon\right) x - \frac{3}{2}(q+1)(\varepsilon + (q+1)\alpha),\\
C_2 &= \left(\frac{d}{\alpha} - \frac{n-2}{\alpha n} - \varepsilon\right) (x(\bar{\lambda}_1 - n) + (1-x)\gamma) - (q+1)(\varepsilon + (q+1)\alpha)n,\\
C_3 &= \left(\frac{d}{\alpha} - \frac{n-2}{\alpha n} - \varepsilon\right)\left(1 + \frac{d}{2\varepsilon}\right) + \frac{(q+1)}{\alpha\varepsilon}(\varepsilon + (q+1)\alpha).
\end{aligned}$$

Agora, visto que $\left(\dfrac{d}{\alpha} - \dfrac{n-2}{\alpha n} - \varepsilon\right) > 0$, então pelas hipóteses sobre d, α, n e ε, é imediato que $C_3 > 0$.

Mais ainda, mostraremos que as constantes C_1 e C_2 são também positivas. Para isso, primeiro vamos mostrar que existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$0 < \varepsilon + \frac{\frac{3}{2}(q+1)(\varepsilon + (q+1)\alpha)}{\left(\frac{d}{\alpha} - \frac{n-2}{\alpha n} - \varepsilon\right)} \leq 1.$$

É claro que, pelas hipóteses sobre d, q, α, n e ε, a primeira desigualdade é valida. Por outro lado, $\varepsilon + \dfrac{\frac{3}{2}(q+1)(\varepsilon + (q+1)\alpha)}{\left(\frac{d}{\alpha} - \frac{n-2}{\alpha n} - \varepsilon\right)} \leq 1$ equivale a

$$\frac{3d^2}{8\alpha} - \frac{d}{\alpha} + \frac{n-2}{\alpha n} \leq -\varepsilon\left(\frac{d}{\alpha} - \frac{n-2}{\alpha n} - \varepsilon + \frac{3d}{4\alpha}\right). \tag{4.1.58}$$

Pela hipótese (4.1.47), é imediato que $\dfrac{3d^2}{8\alpha} - \dfrac{d}{\alpha} + \dfrac{n-2}{\alpha n} < 0$ e, portanto, existe $\varepsilon > 0$ tal que (4.1.58) ocorre.

Assim, escolhendo $x = \varepsilon + \dfrac{\frac{3}{2}(q+1)(\varepsilon + (q+1)\alpha)}{\left(\frac{d}{\alpha} - \frac{n-2}{\alpha n} - \varepsilon\right)} \in [0,1]$, o coeficiente C_1 se torna

$$C_1 = \varepsilon\left(\frac{d}{\alpha} - \frac{n-2}{\alpha n} - \varepsilon\right) > 0.$$

Mostraremos que $C_2 > 0$. De fato, se $x = \varepsilon + \dfrac{\frac{3}{2}(q+1)(\varepsilon + (q+1)\alpha)}{\left(\frac{d}{\alpha} - \frac{n-2}{\alpha n} - \varepsilon\right)}$, então a desigualdade

$$\left(\frac{d}{\alpha} - \frac{n-2}{\alpha n} - \varepsilon\right)(x(\bar{\lambda}_1 - n) + (1-x)\gamma) - (q+1)(\varepsilon + (q+1)\alpha)n > 0$$

ocorre se, e somente se,

$$\begin{aligned}\left(\frac{3d^2}{8\alpha}\right)\left(\bar{\lambda}_1-\gamma-\frac{5n}{3}\right)+\gamma\left(\frac{d}{\alpha}-\frac{n-2}{\alpha n}\right)&\\ >-\varepsilon\left[(\bar{\lambda}_1-\gamma-n)\left(\frac{d}{\alpha}-\frac{n-2}{\alpha n}+\frac{3d}{4}-\varepsilon\right)+\left(\gamma-\frac{d}{2}n\right)\right].&\end{aligned} \tag{4.1.59}$$

Mas, note que a hipótese (4.1.46) do teorema é equivalente a

$$\left(\frac{3d^2}{8\alpha}\right)\left(\bar{\lambda}_1-\gamma-\frac{5n}{3}\right)+\gamma\left(\frac{d}{\alpha}-\frac{n-2}{\alpha n}\right)>0.$$

Portanto, existe $\varepsilon>0$ tal que (4.1.59) ocorre e, consequentemente, tal que $C_2>0$. Logo, segue de (4.1.57) que

$$\int_M |A|^{d+2}f^2\leq C_0\int_M |A|^d|\nabla f|^2, \tag{4.1.60}$$

onde $C_0=\dfrac{C}{C_1}$ é uma constante positiva que depende apenas de q,α,n e ε.

Por fim, considere a composta $f\circ r: M\to[0,1]$, onde $r:M\to[0,\infty)$ é a função distância em relação ao ponto $p\in M$ no qual vale (4.1.45) e $f:[0,\infty)\to[0,1]$ é uma função diferenciável tal que $f\equiv 1$ em $[0,R]$, $f\equiv 0$ em $[2R,\infty)$, com $|f'|<\dfrac{2}{R}$.

Substituindo f por $f\circ r$ na desigualdade (4.1.60), obtemos

$$\int_M |A|^{d+2}(f\circ r)^2\leq C_0\int_M |A|^d|\nabla(f\circ r)|^2, \tag{4.1.61}$$

onde $B_p(R)$ denota a bola geodésica em M de raio R.

Por (4.1.15), sabemos que

$$\int_M |A|^d|\nabla(f\circ r)|^2\leq\frac{4}{R^2}\int_{B_p(2R)}|A|^d.$$

Substituindo a última desigualdade em (4.1.61), e lembrando as hipóteses sobre f, temos que

$$\int_{B_p(R)}|A|^{d+2}\leq C_0\frac{4}{R^2}\int_{B_p(2R)}|A|^d. \tag{4.1.62}$$

Calculando o limite em (4.1.62) quando $R \to +\infty$, a completude de M e a hipótese (4.1.45) fornecem

$$\int_M |A|^{d+2} = \lim_{R\to+\infty} \int_{B_p(R)} |A|^{d+2} = 0,$$

provando que $|A| \equiv 0$, isto é, M é totalmente geodésica.

□

4.2 Estimativas de Superestabilidade no Caso $n = 3$

É fato que, até este ponto, nenhum teorema tratou do caso $n = 3$. Mesmo assim, ainda é possível dizer algo sobre o primeiro autovalor do operador de superestabilidade $\bar{\lambda}_1(M)$ de subvariedades mínimas M^3 do espaço hiperbólico. Os dois últimos teoremas desse capítulo vão tratar do assunto.

Teorema 4.5. (Ver [4]) Seja M^3 uma subvariedade mínima e completa do espaço hiperbólico $\mathbb{H}^{3+m}$. Se

$$\lim_{R\to+\infty} \frac{1}{R^2} \int_{B_p(R)} |A|^{2/3} = 0,$$

então $\bar{\lambda}_1(M) = \lambda_1(L_{|A|^2-n}, M) \leq 4$.

Prova do Teorema 4.5. Suponha que $\bar{\lambda}_1(M) > 4$. Note que, substituindo $n = 3$ e $d = \dfrac{2}{3}$ no lado direito de (4.1.46), obtemos

$$\frac{5n}{3} + \frac{(3nd^2 - 8nd + 8(n-2))(n-1)^2}{12nd^2} = \frac{5\cdot 3}{3} + \frac{\left(3\cdot 3\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 8\cdot 3\cdot \frac{2}{3} + 8(3-2)\right)(3-1)^2}{12\cdot 3\left(\frac{2}{3}\right)^2} = 4,$$

onde

$$d = \frac{2}{3} \in \left(\frac{4}{3} - \frac{2\sqrt{2}}{3}, \frac{4}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{3}\right).$$

Assim, um argumento análogo à demonstração do Teorema 4.4 mplica que M é totalmente geodésia, com

$$\bar{\lambda}_1(M) = \frac{(n-1)^2}{4} + n = \frac{(3-1)^2}{4} + 3 = 4,$$

contradizendo a nossa suposição inicial. Portanto, vale $\bar{\lambda}_1(M) \leq 4$. □

O próximo resultado considera uma subvariedade mínima e completa, do espaço hiperbólico, cuja dimensão é menor do que ou igual a 3, e fornece uma estimativa para o primeiro autovalor do operador de superestabilidade.

Teorema 4.6. (Ver [4]) Seja M^n, $n = 2$ ou $n = 3$, uma subvariedade mínima e completa do espaço hiperbólico $\mathbb{H}^{n+m}$. Se

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{R^2} \int_{B_p(R)} |A|^d = 0, \tag{4.2.1}$$

para alguma constante d satisfazendo

$$d \in \left[2, 2 + \frac{2}{3}\left(\sqrt{\frac{12}{n} - 2} - 1\right)\right), \tag{4.2.2}$$

então

$$\bar{\lambda}_1(M) \leq \frac{5n}{3} + \frac{(3nd^2 - 8nd + 8(n-2))(n-1)^2}{12nd^2}.$$

Prova do Teorema 4.6. Suponha que

$$\bar{\lambda}_1(M) > \frac{5n}{3} + \frac{(3nd^2 - 8nd + 8(n-2))(n-1)^2}{12nd^2}. \tag{4.2.3}$$

Mostraremos que M é totalmente geodésica.

Considere $d = 2(q+1)$, onde $q \geq 0$ é uma constante, e seja $f \in C_0^\infty(M)$ uma função não nula. Vimos que, se M^n é uma subvariedade mínima completa do espaço hiperbólico $\mathbb{H}^{n+m}$, então vale (4.1.44), isto é

$$|A|\triangle|A| + \frac{3}{2}|A|^4 + n|A|^2 \geq \frac{2}{n}|\nabla|A||^2.$$

Multiplicando a última desigualdade por $f^2|A|^{2q}$ e integrando sobre M, obtemos

$$\frac{2}{n}\int_M |\nabla|A||^2|A|^{2q}f^2 \leq \int_M f^2|A|^{2q+1}\triangle|A| + \frac{3}{2}\int_M f^2|A|^{2q+4} + n\int_M f^2|A|^{2(q+1)}. \tag{4.2.4}$$

Por outro lado, usando o Teorema 1.1 (Teorema da Divergência) sobre o campo vetorial $|A|^{(2q+1)}\nabla|A|f^2$, temos que

$$0 = \int_M div\left(|A|^{2q+1}\nabla|A|f^2\right) = (2q+1)\int_M |A|^{2q}\langle\nabla|A|,\nabla|A|\rangle f^2 + 2\int_M |A|^{2q+1} f\langle\nabla f,\nabla|A|\rangle + \int_M |A|^{2q+1} f^2 \triangle|A|,$$

o que implica

$$\int_M f^2|A|^{2q+1}\triangle|A| = -(2q+1)\int_M |A|^{2q}|\nabla|A||^2 f^2 - 2\int_M |A|^{2q+1} f\langle\nabla f,\nabla|A|\rangle.$$

Substituindo a última desigualdade em (4.2.4), e agrupando termos semelhantes, obtemos

$$\begin{aligned}\left(\frac{2}{n}+2q+1\right)\int_M |\nabla|A||^2|A|^{2q}f^2 \leq & \frac{3}{2}\int_M f^2|A|^{2q+4} + n\int_M f^2|A|^{2(q+1)} \\ & - 2\int_M |A|^{2q+1} f\langle\nabla f,\nabla|A|\rangle.\end{aligned} \tag{4.2.5}$$

Agora, recordamos de (4.1.53) que, para todo $x \in [0,1]$, vale

$$x\int_M |A|^2 f^2 + (x(\bar{\lambda}_1 - n) + (1-x)\gamma)\int_M f^2 \leq \int_M |\nabla f|^2, \quad \forall f \in C_0^\infty(M), f \neq 0.$$

Substituindo f por $f|A|^{q+1}$, a última desigualdade resulta em

$$x\int_M |A|^{2q+4} f^2 + (x(\bar{\lambda}_1 - n) + (1-x)\gamma)\int_M f^2|A|^{2(q+1)} \leq \int_M |\nabla(f|A|^{q+1})|^2, \tag{4.2.6}$$

que pelas propriedades do gradiente de funções fornece

$$\nabla(f|A|^{q+1}) = |A|^{q+1}\nabla f + (q+1)|A|^q f\nabla|A|,$$

donde

$$\begin{aligned}|\nabla(f|A|^{q+1})|^2 =& \left\langle\nabla(f|A|^{q+1}),\nabla(f|A|^{q+1})\right\rangle \\ =& |A|^{2(q+1)}|\nabla f|^2 + (q+1)^2|A|^{2q}f^2|\nabla|A||^2 \\ & + 2(q+1)|A|^{2q+1} f\langle\nabla f,\nabla|A|\rangle.\end{aligned} \tag{4.2.7}$$

Aplicando a Desigualdade de Cauchy Schwars (1.2.5) e a Desigualdade de Young (1.2.7), para $p = q = 2$ e $C\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) = \frac{1}{2\varepsilon}$, no último termo do lado direito da expressão anterior, obtemos

$$\begin{aligned} |A|^{2q+1} f \langle \nabla f, \nabla |A| \rangle &\leq |A|^{2q+1} f |\nabla f| |\nabla |A|| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} |A|^{2q} f^2 |\nabla |A||^2 + \frac{1}{2\varepsilon} |A|^{2(q+1)} |\nabla f|^2, \end{aligned}$$

ou seja,

$$2(q+1)|A|^{2q+1} f \langle \nabla f, \nabla |A| \rangle \leq (q+1)\varepsilon |A|^{2q} f^2 |\nabla |A||^2 + \frac{q+1}{\varepsilon} \cdot |A|^{2(q+1)} |\nabla f|^2, \tag{4.2.8}$$

que será utilizada mais adiante.

Agora, note que, substituindo (4.2.7) em (4.2.6), resulta em

$$\begin{aligned} & x \int_M |A|^{2q+4} f^2 + (x(\bar{\lambda}_1 - n) + (1-x)\gamma) \int_M f^2 |A|^{2(q+1)} \\ & \leq \int_M |A|^{2(q+1)} |\nabla f|^2 + (q+1)^2 \int_M |A|^{2q} f^2 |\nabla |A||^2 + 2(q+1) \int_M |A|^{2q+1} f \langle \nabla f, \nabla |A| \rangle . \end{aligned} \tag{4.2.9}$$

Multiplicando (4.2.5) por $(q+1)$, somando com (4.2.9), e agrupando termos semelhantes, obtemos

$$\begin{aligned} & \left[\left(\frac{2}{n} + 2q + 1 \right) (q+1) - (q+1)^2 \right] \int_M |\nabla |A||^2 |A|^{2q} f^2 + \left(x - \frac{3}{2}(q+1) \right) \int_M |A|^{2q+4} f^2 \\ & + [x(\bar{\lambda}_1 - n) + (1-x)\gamma - n(q+1)] \int_M f^2 |A|^{2(q+1)} \leq \int_M |A|^{2(q+1)} |\nabla f|^2, \end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned} & \underbrace{(q+1)\left(\frac{2}{n} + q \right)}_{y} \int_M |\nabla |A||^2 |A|^{2q} f^2 + \left(x - \frac{3}{2}(q+1) \right) \int_M |A|^{2q+4} f^2 \\ & + [x(\bar{\lambda}_1 - n) + (1-x)\gamma - n(q+1)] \int_M f^2 |A|^{2(q+1)} \leq \int_M |A|^{2(q+1)} |\nabla f|^2. \end{aligned} \tag{4.2.10}$$

Entretanto, substituindo (4.2.8) em (4.2.9), resulta em

$$\begin{aligned} & x \int_M |A|^{2q+4} f^2 + (x(\bar{\lambda}_1 - n) + (1-x)\gamma) \int_M f^2 |A|^{2(q+1)} \leq \int_M |A|^{2(q+1)} |\nabla f|^2 \\ & + (q+1)^2 \int_M |A|^{2q} f^2 |\nabla |A||^2 + (q+1)\varepsilon \int_M |A|^{2q} f^2 |\nabla |A||^2 + \frac{q+1}{\varepsilon} \int_M |A|^{2(q+1)} |\nabla f|^2, \end{aligned}$$

que, reescrevendo, se torna

$$\begin{aligned} &x\int_M |A|^{2q+4}f^2 + (x(\bar{\lambda}_1 - n) + (1-x)\gamma)\int_M f^2|A|^{2(q+1)} \\ &\leq \left(1+\frac{q+1}{\varepsilon}\right)\int_M |A|^{2(q+1)}|\nabla f|^2 + \underbrace{(q+1)(q+1+\varepsilon)}_{z}\int_M |\nabla|A||^2|A|^{2q}f^2. \end{aligned} \tag{4.2.11}$$

Multiplicando (4.2.11) por $\dfrac{\frac{2}{n}+q}{q+1+\varepsilon}$, somando com (4.2.10), e comparando os termos identificados por y e z, obtemos

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\frac{2}{n}+q}{q+1+\varepsilon}\right)\left[x\int_M |A|^{2q+4}f^2 + (x(\bar{\lambda}_1 - n) + (1-x)\gamma)\int_M f^2|A|^{2(q+1)}\right] \\ &+\left(x - \frac{3}{2}(q+1)\right)\int_M |A|^{2q+4}f^2 + [x(\bar{\lambda}_1 - n) + (1-x)\gamma - n(q+1)]\int_M f^2|A|^{2(q+1)} \\ &\leq \int_M |A|^{2(q+1)}|\nabla f|^2 + \left(\frac{\frac{2}{n}+q}{q+1+\varepsilon}\right)\left(1+\frac{q+1}{\varepsilon}\right)\int_M |A|^{2(q+1)}|\nabla f|^2. \end{aligned}$$

Agrupando termos semelhantes na última desigualdade, obtemos

$$\begin{aligned} &\left(1+\frac{\frac{2}{n}+q}{q+1+\varepsilon}\right)\left[x\int_M |A|^{2q+4}f^2 + (x(\bar{\lambda}_1 - n) + (1-x)\gamma)\int_M f^2|A|^{2(q+1)}\right] \\ &-\frac{3}{2}(q+1)\int_M |A|^{2q+4}f^2 - n(q+1)\int_M f^2|A|^{2(q+1)} \\ &\leq \left[1+\left(\frac{\frac{2}{n}+q}{q+1+\varepsilon}\right)\left(\frac{q+1+\varepsilon}{\varepsilon}\right)\right]\int_M |A|^{2(q+1)}|\nabla f|^2, \end{aligned}$$

que, por sua vez, equivale a

$$\begin{aligned} &\left[\left(1+\frac{\frac{2}{n}+q}{q+1+\varepsilon}\right)x - \frac{3}{2}(q+1)\right]\int_M |A|^{2q+4}f^2 \\ &+\left[\left(1+\frac{\frac{2}{n}+q}{q+1+\varepsilon}\right)(x(\bar{\lambda}_1 - n) + (1-x)\gamma) - n(q+1)\right]\int_M f^2|A|^{2(q+1)} \\ &\leq \left(1+\frac{\frac{2}{n}+q}{\varepsilon}\right)\int_M |A|^{2(q+1)}|\nabla f|^2. \end{aligned} \tag{4.2.12}$$

Mostraremos que as constantes que multiplicam os símbolos de integração do lado esquerdo dessa última desigualdade são ambas positivas. Com respeito à constante do lado direito, é imediado que para todo $\varepsilon > 0$, vale $\left(1+\frac{\frac{2}{n}+q}{\varepsilon}\right) > 0$.

Agora vamos mostrar que existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$0 < \varepsilon + \frac{\frac{3}{2}(q+1)(q+1+\varepsilon)}{2q+1+\frac{2}{n}+\varepsilon} \leq 1$$

A primeira desigualdade é imediata. Por outro lado, note que, usando $d = 2(q+1)$, temos que a expressão

$$\varepsilon + \frac{\frac{3}{2}(q+1)(q+1+\varepsilon)}{2q+1+\frac{2}{n}+\varepsilon} \leq 1,$$

é equivalente a

$$-\frac{3d^2}{8}+d+\left(\frac{2}{n}-1\right) \geq \varepsilon\left(\frac{7}{2}q+\frac{2}{n}+\frac{3}{2}+\varepsilon\right). \tag{4.2.13}$$

Mas pela hipótese (4.2.15), segue-se que

$$-\frac{3d^2}{8}+d+\left(\frac{2}{n}-1\right) > 0.$$

Portanto, existe $\varepsilon > 0$ tal que (4.2.13) ocorre. Após essas considerações, podemos tomar $x = \varepsilon + \frac{\frac{3}{2}(q+1)(q+1+\varepsilon)}{2q+1+\frac{2}{n}+\varepsilon} \in [0,1]$ em (4.2.12). O primeiro termo do lado esquerdo se torna

$$\left(1+\frac{\frac{2}{n}+q}{q+1+\varepsilon}\right)\left(\varepsilon + \frac{\frac{3}{2}(q+1)(q+1+\varepsilon)}{2q+1+\frac{2}{n}+\varepsilon}\right) - \frac{3}{2}(q+1) = \varepsilon\left(1+\frac{\frac{2}{n}+q}{q+1+\varepsilon}\right),$$

que é claramente positivo. Quanto ao segundo termo do lado esquerdo de (4.2.12), vamos mostrar que

$$\left(\varepsilon + \frac{\frac{3}{2}(q+1)(q+1+\varepsilon)}{2q+1+\frac{2}{n}+\varepsilon}\right)(\bar{\lambda}_1 - n) + (1-x)\gamma > 0.$$

Para isso, basta mostrarmos que $\bar{\lambda}_1 - n > 0$. De fato, visto que supomos

$$\bar{\lambda}_1(M) > \frac{5n}{3} + \frac{(3nd^2-8nd+8(n-2))(n-1)^2}{12nd^2},$$

então

$$\bar{\lambda}_1 - n > \frac{[(8n^2+3n)d^2-8nd+8(n-2)](n-1)^2}{12nd^2}.$$

Observe que, tanto no caso $n = 2$, quanto no caso $n = 3$, a expressão $(8n^2 + 3n)d^2 - 8nd + 8(n-2)$ é positiva para todo d satisfazendo (4.2.15). Portanto, $\bar{\lambda}_1 - n > 0$, e o segundo coeficiente do lado esquerdo de (4.2.12) é positivo. Assim, pelas considerações anteriores, e denotando $d = 2(q+1)$, obtemos de (4.2.12) que

$$\int_M |A|^{d+2} f^2 \leq C_0 \int_M |A|^d |\nabla f|^2,$$

onde C_0 é uma constante positiva que depende apenas de n, q e ε.

Analogamente ao que fizemos nos teoremas anteriores, considere a composta $f \circ r : M \to [0,1]$, onde $r : M \to [0,\infty)$ é a função distância em relação ao ponto $p \in M$ no qual vale (4.2.1) e $f : [0,\infty) \to [0,1]$ é uma função diferenciável tal que $f \equiv 1$ em $[0,R]$, $f \equiv 0$ em $[2R,\infty)$, com $|f'| < \dfrac{2}{R}$.

Substituindo f por $f \circ r$ na desigualdade anterior, obtemos

$$\int_M |A|^{d+2} (f \circ r)^2 \leq C_0 \int_M |A|^d |\nabla (f \circ r)|^2. \tag{4.2.14}$$

Por (4.1.15), sabemos que

$$\int_M |A|^d |\nabla (f \circ r)|^2 \leq \frac{4}{R^2} \int_{B_p(2R)} |A|^d.$$

Substituindo a última desigualdade em (4.2.14), e lembrando as hipóteses sobre f, temos que

$$\int_{B_p(R)} |A|^{d+2} \leq C_0 \frac{4}{R^2} \int_{B_p(2R)} |A|^d.$$

Finalmente, passando a última relação ao limite quando $n \to +\infty$, usando a hipótese (4.2.1) e lembrando que supomos M completa, concluímos que

$$\int_M |A|^{d+2} = \lim_{n \to +\infty} \int_{B_p(R)} |A|^{d+2} = 0.$$

E, portanto, M é totalmente geodésica, com

$$\bar{\lambda}_1(M) = \frac{(n-1)^2}{4} + n = \begin{cases} 9/4 & \text{se} \quad n = 2, \\ 4 & \text{se} \quad n = 3, \end{cases}$$

que contradiz a suposição (4.2.3) que fizemos anteriormente, pois, caso $n = 2$, teríamos

$$\frac{9}{4} > \frac{5n}{3} + \frac{(3nd^2 - 8nd + 8(n-2))(n-1)^2}{12nd^2} = \frac{10}{3} + \frac{1}{4} - \frac{2}{3d} \iff d < \frac{1}{2},$$

o que não ocorre, visto que supomos $d \geq 2$. E se $n = 3$, então

$$4 > \frac{5n}{3} + \frac{(3nd^2 - 8nd + 8(n-2))(n-1)^2}{12nd^2} = 5 + \frac{2-6d}{9d^2} \quad \Longleftrightarrow \quad 9d^2 - 6d + 2 < 0,$$

o que por sua vez não ocorre, já que a equação quadrática $9z^2 - 6z + 2 < 0$ não tem soluções reais.

Portanto, concluímos que

$$\bar{\lambda}_1(M) \leq \frac{5n}{3} + \frac{(3nd^2 - 8nd + 8(n-2))(n-1)^2}{12nd^2}.$$

□

Considerações Finais

Podemos observar em [3, 4] que a condição (4.1.1) pode ser substituída por

$$\lim_{R \to +\infty} \frac{1}{R^k} \int_{B_p(R)} |A| = 0,$$

resultando nos seguintes teoremas, cuja demonstração será suprimida por tratar-se de um roteiro consideravelmente análogo ao que fizemos na seção anterior.

Teorema 4.7. (Ver [4]) Seja M^n uma subvariedade mínima e completa do espaço hiperbólico $\mathbb{H}^{n+m}$, $2 \leq n \leq 5$.

(I) Quando $n \neq 3$, se

$$\lambda_1(L_{|A|^2-n}, M) > \frac{5n}{3} + \frac{(3k(n-1)^2 - 8n(k-1) + 8(n-2))(n-1)^2}{12n(k-1)^2},$$

e

$$\lim_{R \to +\infty} \frac{1}{R^k} \int_{B_p(R)} |A| = 0,$$

onde

$$k \in \begin{cases} \left(1, \frac{3}{2}\right), & \text{se } n = 2, \\ \left(\frac{7}{4}, \frac{5}{2}\right), & \text{se } n = 4, \\ \left(\frac{7}{3} - \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{5}}, \frac{7}{3} + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{5}}\right), & \text{se } n = 5, \end{cases}$$

então M é totalmente geodésica.

(II) Quando $n = 3$, se

$$\lim_{R \to +\infty} \frac{1}{R^{2/3}} \int_{B_p(R)} |A| = 0,$$

então $\lambda_1(L_{|A|^2-n}, M) \leq 4$.

Teorema 4.8. (Ver [4]) Seja M^n, $n = 2$ ou $n = 3$, uma subvariedade mínima e completa do espaço hiperbólico $\mathbb{H}^{n+m}$. Se

$$\lim_{R \to +\infty} \frac{1}{R^k} \int_{B_p(R)} |A| = 0,$$

para alguma constante k satisfazendo

$$k \in \left[3, 3 + \frac{2}{3}\left(\sqrt{\frac{12}{n} - 2} - 1\right)\right), \tag{4.2.15}$$

então

$$\lambda_1(L_{|A|^2-n}, M) \leq \frac{5n}{3} + \frac{(3k(n-1)^2 - 8n(k-1) + 8(n-2))(n-1)^2}{12n(k-1)^2}.$$

Teorema 4.9. (Ver [3]) Seja M^2 uma subvariedade mínima e completa do espaço hiperbólico $\mathbb{H}^4$. Se

$$\lim_{R \to +\infty} \frac{1}{R^k} \int_{B_p(R)} |A| = 0,$$

para alguma constante $k \in (5/3, 3)$, então

$$\lambda_1(L_{|A|^2-n}, M) \leq \frac{(n-1)^2}{2k-3} + 2.$$

Bibliografia

[1] Alencar, H. and do Carmo, M. (1994). Hypersurfaces with constant mean curvature in spheres. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 120(4):1223–1229.

[2] An-Min, L. and Jimin, L. (1992). An intrinsic rigidity theorem for minimal submanifolds in a sphere. *Archiv der Mathematik*, 58(6):582–594.

[3] Bezerra, A. C. and Manfio, F. (2021). Rigidity and stability estimates for minimal submanifolds in the hyperbolic space. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 495(2):124759.

[4] Bezerra, A. C. and Wang, Q. (2017). Rigidity theorems for minimal submanifolds in a hyperbolic space. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math*, 42:905–920.

[5] Chavel, I. (1984). Eigenvalues in riemannian geometry. *Academic press*.

[6] Cheng, S. Y. and Yau, S.-T. (1975). Differential equations on riemannian manifolds and their geometric applicati ons. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 28(3):333–354.

[7] Chern, S.-S. (1968). Minimal submanifolds in a riemannian manifold. *University of Kansas, Department of Mathematics*.

[8] Chern, S.-S., Carmo, M. D., and Kobayashi, S. (1970). Minimal submanifolds of a sphere with second fundamental form of constant length. pages 59–75. Springer.

[9] Cheung, L.-F. and Leung, P.-F. (2001). Eigenvalue estimates for submanifolds with bounded mean curvature in the hyperbolic space. *Mathematische Zeitschrift*, 236(3):525–530.

[10] Do Carmo, M. P. (2015). Formas diferenciais e aplicações. *Instituto de Matemática pura e aplicada*.

[11] Do Carmo, M. P. (2019). Geometria riemanniana. *Instituto de Matemática Pura e Aplicada*.

[12] Evans, L. C. (2010). Partial differential equations. volume 19. *American Mathematical Soc.*

[13] Hardy, G. H., Littlewood, J. E., and Pólya, G. (1952). Inequalities. *University Press*.

[14] Lima, E. L. (1983). Espaços métricos. volume 4. *Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq Rio de Janeiro*.

[15] McKean, H. P. (1970). An upper bound to the spectrum of $\triangle$ on a manifold of negative curvature. *Journal of Differential Geometry*, 4(3):359–366.

[16] Pina, H. and Xia, C. (2018). Rigidity of complete minimal submanifolds in a hyperbolic space. *Manuscripta Math*, pages 1–10.

[17] Seo, K. (2010). L2 harmonic 1-forms on minimal submanifolds in hyperbolic space. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 371(2):546–551.

[18] Simons, J. (1968). Minimal varieties in riemannian manifolds. *Annals of Mathematics*, 88:62–105.

[19] Xia, C. and Wang, Q. (2016). Gap theorems for minimal submanifolds of a hyperbolic space. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 436(2):983–989.

[20] Xin, Y. (2010). Curvature estimates for submanifolds with prescribed gauss image and mean curvature. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, 37(3):385–405.

[21] Xin, Y. and Yang, L. (2009). Curvature estimates for minimal submanifolds of higher codimension. *Chinese Annals of Mathematics, Series B*, 30(4):379–396.