



UnB

Universidade de Brasília
Instituto de Física

Estrelas de Nêutrons na Gravidade Teleparalela

Tese de Doutorado

M.Sc. Hailleen Gisell Varela González

Orientador:
Dr. Sérgio Costa Ulhoa

Brasília - Brasil
Maio de 2022

“One thing I have learned in a long life: that all our science, measured against reality, is primitive and childlike – and yet it is the most precious thing we have”.

Albert Einstein

Para Iris Anaïs.

Agradecimientos

A mi tutor, el Dr. Sérgio Ulhoa, por todo su apoyo, paciencia, y dedicación. Gracias por todas aquellas charlas sobre la vida, ciencia, política y economía.

A Lydiane, Rodrigo, Arthur, Alexandre e Jucelia, por brindarme su amistad y apoyo a lo largo de toda mi trayectoria en la Universidad.

A Karla, Gloria, Diego, Adrián, Adriana, Carlos, Raksha, Rocío y Yonatan, gracias por su amistad y por hacer mi estadía en México mucho más divertida.

A mis amigas Alejandra, Andreína y Andressa, por todo el apoyo ofrecido durante estos últimos años.

A Pablo, por invitarme a formar parte de La BioZona y por su amistad.

A mi amigo Roberto, porque conversar contigo me hace bien.

A Sayed, por brindarme su amistad y apoyo.

A mi mamá, por todo su apoyo y compañía.

A CNPq por el apoyo financiero que tornaron posible la realización de esta tesis.

Resumo

O Teleparalelismo Equivalente à Relatividade Geral, mostra-se como uma alternativa à formulação métrica da Relatividade Geral, principalmente por permitir escrever, através do seu formalismo Lagrangiano, expressões consistentes para a energia e o momento angular gravitacionais. No presente trabalho foi calculada a pressão radial gravitacional para uma estrela de nêutons no formalismo do Teleparalelismo e em conjunto com o código RNS, o qual simula estrelas compactas, relativísticas e que giram rapidamente. Adicionalmente, partindo da quantização de Weyl escrevemos a equação de Schrödinger usando a densidade Hamiltoniana do formalismo Teleparalelo e quantizamos a energia gravitacional para uma estrela de nêutrons.

Abstract

The teleparallel equivalent of general relativity shows itself as an alternative to the metric formulation of general relativity, particularly for allowing through its Lagrangian formalism, to write consistent expressions for gravitational energy and angular momentum. In this work it was calculated the gravitational radial pressure for a neutron star in the Teleparallelism formalism and together with the RNS code, which simulates compact, relativistic and rapidly rotating stars. Additionally, starting from Weyl quantization we write the Schrödinger equation using the Hamiltonian density of the Teleparallel formalism and quantize the gravitational energy for a neutron star.

Sumário

1	Introdução	2
2	Relatividade Geral	4
2.1	Teoria da Relatividade Restrita	4
2.2	Geometria Riemanniana	8
2.3	Equações de Einstein pelo Princípio Variacional	12
2.4	Testes da Relatividade Geral	14
2.4.1	O aumento anômalo do periélio de Mercúrio	14
2.4.2	A deflexão dos raios de luz de estrelas que passam na vizinhança solar	15
2.4.3	O desvio para o vermelho da luz de origem gravitacional	16
2.4.4	Expansão do Universo	17
2.4.5	Detecção de Ondas Gravitacionais	17
2.4.6	Detecção de Buracos Negros	19
3	Teleparalelismo Equivalente à Relatividade Geral	22
3.1	Propriedades básicas do Campo de Tétradas	24
3.2	Formulação Lagrangiana	25
3.3	Interpretação do Campo de Tétradas	33
4	Estrelas de Nêutrons e Métodos Computacionais	35
4.1	Estrelas de Nêutrons	35
4.1.1	Como as Estrelas de Nêutrons são formadas	40
4.1.2	Estrutura Interna e Composição	43
4.1.3	Estrutura global das Estrelas de Nêutrons	44
4.1.4	Resfriamento das Estrelas de Nêutrons	47
4.2	Código RNS	49
4.2.1	Compilando o código	51
4.2.2	Equações de Estado	51
4.2.3	Parâmetros específicos do modelo e outras opções	52
4.2.4	Rotinas	54
4.2.5	Sequências	54
4.2.6	Output	55
4.2.7	Integrando uma estrela giratória	56
5	Pressão Gravitacional	57
5.1	Pressão Radial $p(r)$	57

6	Quantização da Energia Gravitacional	64
6.1	Breve história da Mecânica Quântica	64
6.2	Fundamentos da Quantização	66
6.2.1	Transformada de Fourier	68
6.3	Quantização de Weyl	68
6.4	Quantização da Energia Gravitacional de uma Estrela de Nêutrons	72
6.4.1	Solução para o limite quando $j \gg \mu$	77
6.4.2	Solução pelo Método de Decomposição de Adomian	78
7	Conclusões	83
A	Equações	85
B	Código em Maple	90

Lista de Figuras

2.1	Cone de luz de um evento \mathcal{A} e as diferentes regiões do espaço-tempo deste evento	7
2.2	Praça do Patrocínio em Sobral- Brasil onde a população se aglomerou para acompanhar o eclipse. Placa fotográfica	16
2.3	Gráficos das sinais de ondas gravitacionais detectados pelos observatórios gêmeos LIGO em Livingston, Louisiana, e Hanford, Washington	18
4.1	Interior de uma estrela de nêutrons	36
4.2	Cartoon publicado no jornal Los Angeles Times se faz referência as palavras do físico suíço Fritz Zwicky	37
4.3	Deteção do primeiro Pulsar	39
4.4	Imagem da EN aislada RX J8566-3754 capturada pelo Telescópio Espacial Hubble na ordem do óptico	40
4.5	Principais etapas da evolução de uma estrela de nêutrons.	42
5.1	Componentes Métricos para uma estrela como equação de estado EOSA15 e energia central $\varepsilon_c/c^2 = 10^{15}g/cm^3$	61
5.2	Distribuição espacial da pressão radial gravitacional $p(r)$ para 4 estrelas com diferentes EOS	62

Capítulo 1

Introdução

Na tentativa de formular uma teoria completamente covariante, capaz de descrever as leis da física, incluindo a gravidade, em qualquer sistema de coordenadas e para qualquer movimento relativo, Einstein estudou a similaridade entre referenciais inerciais acelerados e referenciais imersos em um campo gravitacional, concluindo assim que a gravidade e a aceleração são equivalentes. Usando o Princípio de Equivalência como base, Einstein apresentou em 1915 a extensão de sua teoria da Relatividade Especial a qual incluía os efeitos da gravidade e onde as leis da física são válidas em todos os referenciais inerciais. Esta nova teoria é conhecida como a teoria da Relatividade Geral, na qual trata-se a gravitação como uma consequência do espaço-tempo, enquanto que a curvatura do espaço-tempo é uma consequência da presença de matéria. No entanto, a curvatura do espaço-tempo afeta o movimento da matéria, a qual reciprocamente determina as propriedades geométricas e a evolução do espaço [1–3].

O Teleparalelismo Equivalente à Relatividade Geral (TEGR), é uma formulação geométrica alternativa à teoria da Relatividade Geral de Einstein, onde os efeitos do campo gravitacional são descritos em termos dos campos de tetradas. As primeiras tentativas para descrever o campo gravitacional usando as tetradas são atribuídas a Einstein no seu esforço para unir a gravitação e o electromagnetismo [4]. Entretanto, usando esta aproximação ele não conseguiu encontrar uma descrição fiel e consistente das equações do campo eletromagnético. Esta nova teoria é totalmente equivalente à Relatividade, dado que ambas teorias são derivadas a partir de Lagrangianas, as quais diferem somente em uma divergência total, obtendo-se assim as mesmas equações de campo. Logo, a principal vantagem do Teleparalelismo sobre a Relatividade de Einstein está na possibilidade de escrever expressões consistentes para a energia, o momento e o momento angular gravitacional [5].

A Relatividade Geral em conjunto com a mecânica quântica, descreve o mundo como nós o conhecemos em seu nível mais fundamental. O problema é que há um conjunto muito pequeno de soluções para as equações de Einstein, além disso, estas soluções são todas para situações idealizadas. Uma forma de estudar situações mais realistas, se faz necessário resolver numericamente as equações de Einstein. Existem vários códigos numéricos independentes para obter modelos precisos de estrelas de nêutrons rotativas usando relatividade geral, um deles é o RNS (Rapidly Rotating Neutron Stars). As estrelas de nêutrons contêm matéria com uma das densidades mais altas do universo observável. Como tal, elas são laboratórios valiosos para o estudo da matéria densa. Elas são tão compactas que a Relatividade Ge-

ral é essencial para suas estruturas. Na verdade, a existência de uma massa máxima das estrelas de nêutrons é uma manifestação da Relatividade Geral. No entanto, o seu estado compacto torna o seu estudo um desafio. Entretanto, desde o ponto de vista dinâmico, tanto a Relatividade Geral de Einstein como a Gravidade Teleparalela fazem as mesmas previsões. Embora o TERG permite a definição de quantidades de grande interesse físico, como a energia, momento angular e pressão radial gravitacionais, na Relatividade Geral a definição destas quantidades ainda estão em desenvolvimento. Neste trabalho faremos um estudo deste tipo de estrelas no contexto do formalismo teleparalelo.

No capítulo 2, será apresentada uma revisão da teoria da Relatividade Geral, partindo desde a Relatividade Especial até chegar nos testes clássicos que comprovam dita teoria, incluindo os testes modernos onde todas as principais revisões da Relatividade Geral se provaram correta. A seguir, no capítulo 3 abordamos o formalismo do Teleparalelismo Equivalente à Relatividade Geral fazendo ênfase na formulação Lagrangiana. No capítulo 4 fazemos uma revisão histórica do estudo das Estrelas de nêutrons além de uma introdução ao código RNS o qual nos permitirá fazer simulações astrofísicas de estrelas em rotação. No capítulo 5 se mostram os resultados do cálculo da pressão radial gravitacional calculada fazendo uso do formalismo teleparalelo em conjunto com resultados gerados pelo código. No capítulo 6 se mostram os fundamentos da quantização e a formulação da Quantização de Weyl, usada para o cálculo da quantização da Energia Gravitacional de uma estrela de nêutrons. Finalmente, no capítulo 7 as conclusões encerram o trabalho.

Os índices de espaço-tempo μ, ν, \dots e os índices do grupo de Lorentz global $SO(3,1)$ a, b, \dots variam de 0 a 3. Logo, índices de espaço e tempo são indicados de acordo com $\mu = 0, i, a = (0), (i)$. O campo e tétradas é denotado por $e^a{}_\mu$, o tensor métrico do espaço-tempo de Minkowski levanta e abaixa índices e é fixado por $\eta_{ab} = e_{a\mu}e_{b\nu}g^{\mu\nu} = (-, +, +, +)$. O determinante do campo de tétradas é indicado por $e = \det(e^a{}_\mu)$. As unidades são fixadas com a escolha $G = c = 1$, a menos que se diga o contrário.

Capítulo 2

Relatividade Geral

2.1 Teoria da Relatividade Restrita

Motivado pela teoria eletromagnética de Maxwell e pela ausência de evidência para a existência do éter, Albert Einstein formulou em 1905 a teoria da Relatividade Especial. A condição de validade das equações de Maxwell em qualquer referencial inercial levava à invariância da velocidade da luz, contradizendo-se assim à Relatividade Galileana.

Em sua teoria, Einstein enunciou dois postulados: o primeiro, conhecido como o *Princípio Galileano*, estabelece que as leis da física são iguais em qualquer referencial inercial, em outras palavras, não existe referencial inercial privilegiado. O segundo postulado afirma que a velocidade da luz é constante no vácuo e tem o mesmo valor c em todos os referenciais inerciais [1].

O Princípio da Relatividade de Einstein, supõe que as expressões matemáticas que descrevem qualquer fenômeno físico devem possuir a mesma forma em todos os referenciais inerciais, exigindo assim um novo conjunto de transformações para as grandezas físicas, de um referencial inercial para outro. Portanto, Einstein foi forçado a reavaliar as ideias de espaço e tempo aceitas para a época, e através de uma série de simples experimentos mentais ele demonstrou que as limitações da mecânica Newtoniana radicavam no conceito de simultaneidade dos eventos. Desta forma, Einstein reobteve as transformações de Lorentz sob as quais tanto as equações de Maxwell como as equações que descrevem a mecânica são covariantes.

Para escrever a forma exata destas transformações, consideremos uma fonte de luz localizada no ponto $x = y = z = 0$, de um sistema de coordenadas \mathcal{O} livre de campos gravitacionais. No instante $t = 0$, a fonte é acesa emitindo luz em todas as direções, gerando-se assim uma frente de ondas esféricas que se propagam com velocidade c e que no tempo t define a superfície esférica

$$-c^2t^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 0. \quad (2.1)$$

As coordenadas na equação (2.1), espaciais e temporal, entram de uma maneira simétrica, portanto vamos adaptar nossas coordenadas a esta esfera de luz onde tomaremos o tempo como a coordenada zero, $x^0 = ct$. Mais especificamente

$$x^\mu = (ct, x, y, z), \quad x_\mu = (-ct, x, y, z), \quad \text{com } \mu = 0, \dots, 3. \quad (2.2)$$

As coordenadas x^μ e x_μ estão relacionadas através da métrica pseudo-euclidiana $\eta_{\mu\nu}$ da

forma

$$x_\mu = \eta_{\mu\nu} x^\nu, \quad (2.3)$$

onde $\eta_{\mu\nu}$ é conhecida como métrica de Minkowski e para as coordenadas cartesianas é dada pela expressão,

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

Consideremos agora o sistema de coordenadas \mathcal{O}' , também livre da ação dos campos gravitacionais e relacionado com o referencial \mathcal{O} pela transformação de Galileu

$$(ct', x', y', z') = (ct, x - vt, y, z). \quad (2.5)$$

Se a velocidade da luz também for c neste referencial, uma esfera de luz no instante t deveria descrever uma superfície esférica com a forma

$$(x - vt)^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = 0. \quad (2.6)$$

As equações (2.1) e (2.6) obviamente são diferentes, mas como a mesma esfera não pode estar em dois locais diferentes, concluímos que as transformações de Galileu não são compatíveis com o princípio de constância da luz. Desta maneira, vamos requerer que as novas transformações deixem invariante à esfera de luz (2.1) de modo que a esfera seja a mesma nos dois referenciais. Para garantir esta invariância, Einstein afirmou que a velocidade da luz é a mesma em todos os referenciais.

Como no caso da mecânica clássica, devemos ter transformações lineares, onde se satisfaça a condição [6]

$$x^{\mu'} x_{\mu'} = \Lambda^{\mu'}{}_\nu \Lambda_{\mu'}{}^\rho x^\nu x_\rho = x^\rho x_\rho, \quad (2.7)$$

onde, para todos os x^ρ somente é possível se

$$\Lambda^{\mu'}{}_\nu \Lambda_{\mu'}{}^\rho = \delta^\rho{}_\nu, \quad \text{com } \mu', \nu, \rho = 0, \dots, 3. \quad (2.8)$$

Nas equações (2.7) e (2.8) introduzimos a conhecida *Notação de Einstein*, onde índices covariantes e índices contravariantes iguais em qualquer termo, indicam soma sob ditos índices desde 0 até 3.

Se consideramos agora que o referencial \mathcal{O}' se move ao longo do eixo x com velocidade v medida por \mathcal{O} , onde dizemos que este movimento é um *boost* na direção x [2], as transformações de Lorentz que descrevem as transformações entre os dois sistemas são

$$t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z. \quad (2.9)$$

Do conjunto de equações (2.9) temos algumas consequências interessantes nas medições de tempo e comprimento. A primeira consequência, conhecida como *Contração de Lorentz*, está relacionada com o comprimento de um corpo o qual é medido para ser máximo quando se encontra em repouso com relação a um observador. Porém, quando o corpo se move com uma velocidade v , dito comprimento é diminuído na direção do movimento pelo fator

$\sqrt{1 - v^2/c^2}$, enquanto suas dimensões perpendiculares não são afetadas. Por outro lado, a segunda consequência está relacionada com um relógio em movimento onde o tempo transcorre mais devagar do que em um relógio em repouso, ou ainda, em qualquer relógio o tempo corre à velocidade máxima desde o ponto de vista do observador em repouso. Este fenômeno se conhece com o nome de *Dilatação Temporal*.

Finalmente, temos como terceira consequência a inexistência da *Simultaneidade*. Dois eventos simultâneos, em um dado referencial inercial, acontecem no mesmo instante de tempo, no entanto, a transformação temporal de Lorentz sugere que em qualquer outro referencial inercial estes eventos podem não ser simultâneos. Em outras palavras, podemos dizer que dois relógios sincronizados em um dado referencial inercial podem não estar sincronizados em outros referenciais inerciais.

As transformações de Lorentz mostram que o tempo deve ser tratado como uma coordenada ordinária, permitindo-nos imaginar a fusão do espaço e do tempo em uma única entidade conhecida como espaço-tempo. Este conceito foi incorporado na Relatividade Especial usando o espaço-tempo de Minkowski, ou simplesmente espaço de Minkowski. Para estudar as propriedades métricas do espaço de Minkowski consideremos dois eventos separados infinitesimalmente um do outro em um referencial \mathcal{O} , logo o intervalo entre eles é dado pela expressão

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (2.10)$$

onde $\eta_{\mu\nu}$ está dada pela equação (2.4). Note-se que a quantidade ds^2 é invariante sob qualquer transformação de Lorentz do tipo $x^{\nu'} = \Lambda^{\nu'}_{\rho} x^\rho$, dado que $\Delta x^{\nu'} \Delta x_{\nu'}$ é invariante. Por outro lado, como o elemento de linha ds^2 é uma propriedade somente dos dois eventos e não do observador, podemos fazer a seguinte classificação da relação entre os eventos. Se ds^2 é positivo dizemos que os eventos estão separados por uma linha *tipo Espaço*. Se ds^2 é negativo, os eventos são separados por uma linha *tipo Tempo*. Finalmente, se $ds^2 = 0$, ditos eventos se encontram separados *tipo Luz*.

Eventos *tipo Luz* separados de um evento particular \mathcal{A} , formam um cone cujo ápice é o mesmo evento \mathcal{A} , e que é conhecido como *Cone de Luz*. Todos os eventos que se localizam dentro do cone estão separados *tipo Tempo* de \mathcal{A} , assim como todos os eventos que se acham fora do cone estão separados *tipo Espaço*. Logo, todos os eventos dentro do cone podem ser alcançados desde o evento \mathcal{A} por um objeto físico, enquanto os que estão fora nunca serão alcançados. Consequentemente, o movimento dos objetos do cotidiano cai dentro das linhas do cone de luz. As trajetórias do lado de fora do cone são proibidas, elas representam trajetórias de objetos que viajam a velocidades maiores do que a velocidade da luz. Desta maneira, todos os objetos que tem massa devem se mover a velocidades menores que a velocidade da luz.

Os eventos que se localizam dentro do *Futuro* do cone, são chamados de “*Futuro Absoluto*” do evento \mathcal{A} , ao mesmo tempo que aqueles que se encontram no *Passado* são conhecidos como “*Passado Absoluto*”, e aqueles que estão fora são chamados de “*Outro Lugar*”. Na figura (2.1) se ilustram as diferentes regiões do espaço-tempo.

Na Relatividade Especial, as linhas mundo de duas partículas livres que começam paralelas uma da outra, permanecem nesse estado de movimento sem importar quão longe elas vão. Em outras palavras, o espaço de Minkowski é um espaço plano que obedece ao axioma

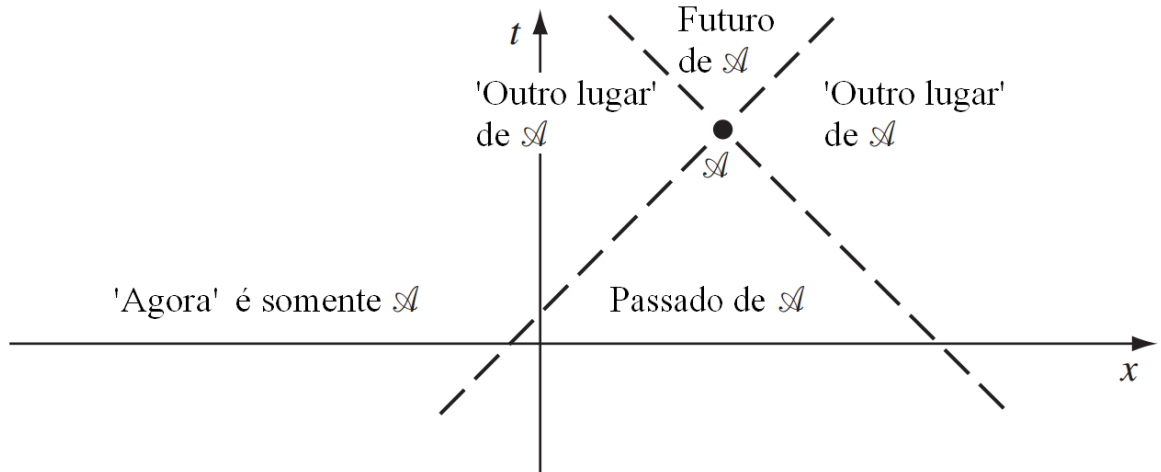


Figura 2.1: Cone de luz de um evento \mathcal{A} e as diferentes regiões do espaço-tempo deste evento [3]. As regiões conhecidas como ‘*Outro Lugar*’ são regiões proibidas dado que nada pode viajar mais rápido que a velocidade da luz.

do paralelismo de Euclides. No entanto, o espaço-tempo não é um espaço Euclidiano, dado que sua métrica é diferente. Se consideramos agora um referencial na presença de um campo gravitacional não uniforme, as linhas mundo de duas partículas geralmente não permanecem paralelas. Logo, o novo espaço-tempo gravitacional não é um espaço plano.

Na tentativa de formular uma teoria completamente covariante, capaz de descrever as leis da física, incluindo a gravidade, em qualquer sistema de coordenadas e para qualquer movimento relativo, Einstein pensou em um simples experimento mental enquanto ele trabalhava em um escritório de patentes em Berna, Suíça: Se um homem caísse livremente, em movimento acelerado, não sentiria seu peso. Ele percebeu que existe uma relação profunda entre os sistemas afetados pela gravidade e aqueles que estão acelerando. Ele estudou a similaridade entre referenciais inerciais acelerados e referenciais imersos em um campo gravitacional, concluindo assim que a gravidade e a aceleração são equivalentes. Partindo desta descoberta, Einstein formulou o conhecido *Princípio da Equivalência* entre gravidade e aceleração [3], o qual postula que qualquer experimento físico local que não implique gravidade vai ter o mesmo resultado se o executamos em um sistema inercial em queda livre ou no espaço-tempo plano da Relatividade Especial. Como consequência direta do Princípio de Equivalência temos que em um referencial inercial local, todas as leis da física conservam a forma da Relatividade Especial.

Usando o Princípio de Equivalência como base, Einstein apresentou em 1915 a extensão de sua teoria da Relatividade Especial a qual incluía os efeitos da gravidade e onde as leis da física são válidas em todos os referenciais inerciais. Esta nova teoria é conhecida como a teoria

da Relatividade Geral, onde trata-se a gravitação como uma consequência do espaço-tempo, enquanto que a curvatura do espaço-tempo é uma consequência da presença de matéria. No entanto, a curvatura do espaço-tempo afeta o movimento da matéria, a qual reciprocamente determina as propriedades geométricas e a evolução do espaço.

Para descrever rigorosamente a curvatura do espaço-tempo precisamos de ferramentas matemáticas contidas na geometria diferencial, mais especificamente das *Variedades Riemannianas*, as quais são espaços-tempo localmente planos e onde o elemento de linha (2.10) está bem definido e pode ser escrito da forma

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (2.11)$$

onde $g_{\mu\nu}$ representa a métrica do espaço-tempo curvo e é uma função das coordenadas x^μ . É importante destacar que em um espaço-tempo curvo não é possível definir um referencial de Lorentz global para o qual temos $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$.

2.2 Geometria Riemanniana

Sabemos que logo depois da publicação da Relatividade Restrita, Albert Einstein tentou por vários anos formular uma teoria da gravidade invariante de Lorentz, sem êxito algum. No entanto, seu maior avance se deu ao substituir o espaço-tempo de Minkowski por um espaço-tempo curvo. O mais relevante deste espaço-tempo é a interpretação geométrica da gravidade: a densidade de matéria numa certa região e portanto a intensidade do campo gravitacional é proporcional à curvatura do espaço-tempo. Este espaço-tempo curvo é também quadridimensional, já que Einstein utilizou a geometria Riemanniana na construção da sua teoria [7].

Logo, a construção física básica que representa a gravitação é modelada pelo conceito de Variedade, a qual é um espaço que pode ser curvo e ter uma topologia complicada, mas em regiões locais se parece com \mathfrak{R}^n . Mais precisamente, cada ponto de uma variedade de dimensão n tem uma vizinhança que é homeomorfa ao espaço euclidiano de dimensão n . Tal variedade vincula cada ponto da variedade a um ponto de um espaço euclidiano \mathfrak{R}^n , isto significa que localmente uma variedade topológica é um espaço \mathfrak{R}^n . O conceito de variedade é um dos conceitos mais fundamentais da matemática e da física.

Na teoria da Relatividade Geral estamos interessados em um tipo especial de variedade diferencial conhecida como variedade Riemanniana, onde a *distância* ou *métrica*, estão bem definidas. Logo, esta variedade diferenciável é uma coleção amorfa de pontos, conhecidos como eventos do espaço-tempo. Localmente, estes pontos são ordenados como pontos em um espaço Euclidiano. Ao especificar o conceito de distância, introduzimos a métrica $g_{\mu\nu}$ a qual contém toda a informação de como é a geometria do espaço e como a distância é medida entre os pontos.

Consideremos agora, uma curva γ em nossa variedade. A curva é parametrizada pela coordenada λ e é descrita em um sistema de coordenadas arbitrário pelas relações $x^\alpha(\lambda)$. Ao calcular a razão pela qual varia a função escalar $f(x^\alpha)$ ao longo desta curva obtemos

$$\frac{df}{d\lambda} = \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} = f_{,\alpha} u^\alpha. \quad (2.12)$$

com $f_{,\alpha} = \partial f / \partial x^\alpha$ e $u^\alpha = dx^\alpha / d\lambda$. Logo, ao fazer uma transformação de coordenadas da forma $x^\alpha \rightarrow x^{\alpha'}$ temos que a quantidade $df/d\lambda$ é uma invariante, dado que

$$f_{,\alpha'} u^{\alpha'} = f_{,\alpha} u^\alpha, \quad (2.13)$$

onde $f_{,\alpha'} = (\partial x^\alpha / \partial x^{\alpha'}) f_{,\alpha}$ e $u^{\alpha'} = (\partial x^{\alpha'} / \partial x^\alpha) u^\alpha$. Qualquer objeto A^α que transforme como u^α , em uma transformação de coordenadas

$$A^{\alpha'} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} A^\alpha, \quad (2.14)$$

será conhecido como *vetor*. Analogamente, qualquer objeto A_α que em uma transformação de coordenadas transforme como $f_{,\alpha}$

$$A_{\alpha'} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}} A_\alpha, \quad (2.15)$$

será denominado de *co-vetor* ou *vetor dual*. O fato de vetores e co-vetores se transformarem inversamente sob as mesmas transformações de coordenadas garante que a contração $A^\alpha A_\alpha$ seja uma invariante. Se generalizamos as definições (2.14) e (2.15) para o caso de um tensor $T^{\alpha\dots\beta}_{\gamma\dots\delta}$ do tipo $\binom{m}{n}$, obtemos a seguinte expressão

$$T^{\alpha'\dots\beta'}_{\gamma'\dots\delta'} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} \cdots \frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^\beta} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x^{\gamma'}} \cdots \frac{\partial x^\delta}{\partial x^{\delta'}} T^{\alpha\dots\beta}_{\gamma\dots\delta}. \quad (2.16)$$

Como a Relatividade Geral é uma teoria covariante devemos construir quantidades que representem as taxas de variação, onde ditas quantidades devem estar definidas em qualquer sistema de coordenadas. Em outras palavras, precisamos definir a derivada, a qual deve ser covariante sob uma transformação de coordenadas geral. Para construir o operador derivada, primeiro consideremos a derivada de uma função escalar qualquer ϕ definida na variedade Riemanniana. Esta derivada parcial é $\phi_{,\nu} \equiv \partial\phi/\partial x^\nu$, a qual transforma como um co-vetor

$$\phi'_{,\nu} \equiv \frac{\partial\phi(x)}{\partial x^{\nu'}} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\nu'}} \frac{\partial\phi(x)}{\partial x^\mu} \equiv \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\nu'}} \phi_{,\mu}. \quad (2.17)$$

Por outro lado, se calculamos a derivada parcial de um vetor qualquer $A^{\alpha'}$, obtemos a seguinte expressão

$$A^{\alpha'}_{,\beta'} = \frac{\partial}{\partial x^{\beta'}} \left(\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} A^\alpha \right) = \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\beta'}} \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} A^{\alpha}_{,\beta} + \frac{\partial^2 x^{\alpha'}}{\partial x^\beta \partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\beta'}} A^\alpha, \quad (2.18)$$

onde $A^{\alpha'}$ não é uma transformação tensorial. A existência do segundo termo na equação (2.18) é a razão pela qual o vetor $A^{\alpha'}$ não transforma como um tensor. A raiz do problema está no cálculo da derivada a qual envolve a subtração de dois vetores em pontos muito próximos, onde cada um dos vetores em geral obedece uma lei de transformação diferente. Para dar solução a este problema devemos transportar um dos vetores ao ponto mais próximo, de forma tal que a subtração seja feita no *mesmo* ponto da variedade. Este procedimento é conhecido como *Transporte Paralelo*, onde as componentes do vetor são transportadas ao longo de uma curva na variedade mantendo constante o ângulo entre os vetores.

Considere um ponto com coordenadas x^μ e seu vizinho mais próximo tem coordenadas $x^\mu + dx^\mu$. Agora, examinemos o transporte paralelo das componentes do vetor A_α desde $x^\mu + dx^\mu$ até x^μ . A derivada do vetor A^α será

$$DA^\alpha = dA^\alpha + \delta A^\alpha, \quad (2.19)$$

onde dA^α é a derivada comum nos pontos $x^\mu + dx^\mu$ e x^μ . Logo, a variação δA^α contém a regra do transporte paralelo e deve ser uma função linear das componentes originais, A_α , e do deslocamento dx^μ , de modo que podemos escrever

$$\delta A^\alpha = {}^0\Gamma^\alpha_{\gamma\mu} A^\gamma dx^\mu, \quad (2.20)$$

onde $\Gamma^\gamma_{\alpha\mu}$ são chamados de *Coefficientes de Conexão*, e descrevem como os vetores base em diferentes pontos da variedade mudam quando um deles se movimenta ao longo da mesma,

$$\frac{\partial \vec{e}_\alpha}{\partial x^\beta} = {}^0\Gamma^\delta_{\alpha\beta} \vec{e}_\delta. \quad (2.21)$$

Assim, a derivada covariante de um vetor é igual a

$$A^\alpha_{;\beta} \equiv A^\alpha_{,\beta} + {}^0\Gamma^\alpha_{\delta\beta} A^\delta. \quad (2.22)$$

O primeiro termo na equação (2.22) representa a variação das componentes do campo vetorial em uma base dada, enquanto que o segundo representa a variação devida à mudança dos vetores base ao longo do transporte paralelo. O mesmo procedimento pode ser feito para um co-vetor A_α , obtendo-se a seguinte expressão

$$A_{\alpha;\beta} \equiv A_{\alpha,\beta} - {}^0\Gamma^\delta_{\alpha\beta} A_\delta. \quad (2.23)$$

O fato que $A^\alpha_{;\beta}$ seja um tensor permite-nos deduzir a lei de transformação da conexão ${}^0\Gamma^\alpha_{\gamma\beta}$ [8], a qual se escreve como

$${}^0\Gamma^{\alpha'}_{\gamma'\beta'} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\beta'}} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x^{\gamma'}} {}^0\Gamma^\alpha_{\gamma\beta} - \frac{\partial^2 x^{\alpha'}}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\beta'}} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x^{\gamma'}}, \quad (2.24)$$

onde o segundo termo nesta lei de transformação revela a natureza não tensorial da conexão. Logo, a diferença entre duas conexões transforma-se como um tensor. Por outro lado, a derivada covariante pode ser estendida a outros tipos de tensor exigindo que o operador obedeça à regra do produto no cálculo diferencial, a regra de Leibniz [1]. Por exemplo, se calculamos a derivada covariante do tensor métrico $g_{\alpha\beta}$ temos

$$g_{\alpha\beta;\gamma} = g_{\alpha\beta,\gamma} - {}^0\Gamma^\mu_{\alpha\gamma} g_{\mu\beta} - {}^0\Gamma^\mu_{\beta\gamma} g_{\alpha\mu}, \quad (2.25)$$

onde $g_{\alpha\beta;\gamma}$ é identicamente igual a zero, satisfazendo assim a ausência de torção e o Princípio de Equivalência de Einstein. Logo, ao fazer uma permutação cíclica nos índices da equação (2.25) e assumindo que ${}^0\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = {}^0\Gamma^\alpha_{\gamma\beta}$, temos que

$$g_{\alpha\beta,\gamma} + g_{\alpha\gamma,\beta} - g_{\gamma\beta,\alpha} - 2{}^0\Gamma^\mu_{\beta\gamma} g_{\alpha\mu} = 0, \quad (2.26)$$

de onde podemos claramente escrever a conexão em termos do tensor métrico

$${}^0\Gamma^\mu_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} g^{\mu\alpha} (g_{\alpha\beta,\gamma} + g_{\alpha\gamma,\beta} - g_{\gamma\beta,\alpha}). \quad (2.27)$$

As conexões determinadas pela equação (2.27) são conhecidos como *Símbolos de Christoffel*, e na literatura também podem ser encontrados escritos da forma seguinte

$${}^0\Gamma^\mu{}_{\beta\gamma} = \left\{ \begin{array}{c} \mu \\ \beta \quad \gamma \end{array} \right\}.$$

Quando queremos medir a curvatura de uma superfície esférica precisamos somente do raio a da esfera. No entanto, no caso do espaço-tempo a curvatura pode ser descrita pelo tensor R conhecido como *Tensor de Riemann*, o qual depende da métrica e suas derivadas. Para descobrir a expressão matemática deste novo tensor consideremos duas partículas de prova, identificadas como 1 e 2, movimentando-se ao longo de suas geodésicas. Logo, denotando como $\xi^\mu(\tau)$ a separação infinitesimal entre as partículas no tempo próprio τ temos que

$$x_2^\mu(\tau) = x_1^\mu(\tau) + \xi^\mu(\tau), \quad (2.28)$$

onde a linha mundo de cada partícula é descrita pela equação geodésica

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + {}^0\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}(x) \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau}. \quad (2.29)$$

Ao combinar as equações geodésicas para cada uma das partículas e considerando a expansão em Taylor dos Símbolos de Christoffel, ${}^0\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}(x_2) = {}^0\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}(x_1 + \xi) = {}^0\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}(x_1) + {}^0\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta,\gamma}\xi^\gamma$, obtemos a equação para a aceleração de ξ^μ

$$\frac{d^2 \xi^\mu}{d\tau^2} + {}^0\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} v^\alpha \frac{d\xi^\beta}{d\tau} + {}^0\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} v^\beta \frac{d\xi^\alpha}{d\tau} + {}^0\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta,\gamma} \xi^\gamma v^\alpha v^\beta = 0, \quad (2.30)$$

onde usamos $v^\alpha = dx^\alpha/d\tau$. A equação (2.30) não é uma equação tensorial dado que os Símbolos de Christoffel não transformam como um tensor. Logo, para achar a solução da equação anterior, primeiro devemos calcular a derivada covariante de ξ^μ ao longo da curva geodésica, a qual tem a forma

$$\frac{D\xi^\mu}{D\tau} = \frac{d\xi^\mu}{d\tau} + {}^0\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} \xi^\alpha \frac{dx^\beta}{d\tau}. \quad (2.31)$$

Derivando de novo covariantemente ao longo da geodésica a expressão anterior tendo em consideração a regra do produto para a diferenciação

$$\frac{d}{d\tau} ({}^0\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} \xi^\alpha v^\beta) = {}^0\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta,\gamma} \frac{dx^\gamma}{d\tau} \xi^\alpha v^\beta + {}^0\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} \frac{d\xi^\alpha}{d\tau} v^\beta + {}^0\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} \xi^\alpha \frac{dv^\beta}{d\tau}. \quad (2.32)$$

Finalmente, obtemos

$$\frac{D^2 \xi^\mu}{D\tau^2} = R^\mu{}_{\alpha\beta\gamma} v^\alpha v^\beta \xi^\gamma, \quad (2.33)$$

onde

$$R^\mu{}_{\alpha\beta\gamma} = {}^0\Gamma^\sigma{}_{\alpha\gamma} {}^0\Gamma^\mu{}_{\sigma\beta} - {}^0\Gamma^\sigma{}_{\alpha\beta} {}^0\Gamma^\mu{}_{\sigma\gamma} + {}^0\Gamma^\mu{}_{\alpha\gamma,\beta} - {}^0\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta,\gamma}, \quad (2.34)$$

é conhecido como *Tensor de Riemann*. Se derivamos parcialmente em relação a x^λ a equação anterior e avaliamos o resultado em um ponto P de um referencial localmente inercial, obtemos

$$R_{\alpha\beta\mu\nu,\lambda} = \frac{1}{2} (g_{\alpha\nu,\beta\mu\lambda} - g_{\alpha\mu,\beta\nu\lambda} + g_{\beta\mu,\alpha\nu\lambda} - g_{\beta\nu,\alpha\mu\lambda}), \quad (2.35)$$

onde usamos o fato que no ponto P os Símbolos de Christoffel ${}^0\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$ são nulos, mas sua derivada não. Logo, considerando que o tensor métrico $g_{\alpha\beta}$ é simétrico e que suas derivadas parciais comutam, podemos escrever a conhecida *Identidade de Bianchi*,

$$R_{\alpha\beta\mu\nu;\lambda} + R_{\alpha\beta\lambda\mu;\nu} + R_{\alpha\beta\nu\lambda;\mu} = 0. \quad (2.36)$$

O tensor $R_{\alpha\beta\mu\nu}$ é antissimétrico no primeiro e segundo par de índices, e é simétrico no intercâmbio entre os dois pares. Fazendo a contração $R_{\alpha\beta} = R^\mu_{\alpha\mu\beta} = R_{\beta\alpha}$, podemos definir o *Escalar de Ricci*

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} R_{\alpha\mu\beta\nu}. \quad (2.37)$$

Finalmente, partindo da equação (2.36) e usando a equação anterior, podemos construir o tensor simétrico $G^{\alpha\beta}$ da forma seguinte

$$G^{\alpha\beta} = R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}R, \quad (2.38)$$

conhecido como *Tensor de Einstein* e descreve a curvatura do espaço-tempo nas equações de campo da Relatividade Geral [2]. Este tensor construído a partir do tensor de Riemann e a métrica, satisfaz a condição

$$\nabla_\beta G^{\alpha\beta} = G^{\alpha\beta}{}_{;\beta} \equiv 0. \quad (2.39)$$

Para finalizar, vamos apresentar brevemente as equações de campo completas que se mantêm na presença de outros campos além da gravitação. Esses campos são descritos pelo *tensor de Momento-Energia*, T^{ab} . A equivalência de massas e energia da Relatividade Especial sugere que todas as formas de energia atuam como fontes para o campo gravitacional, então tomamos o tensor como fonte nas equações de campo. Logo, sabemos que na Relatividade Especial o tensor momento-energia satisfaz as equações de conservação nas coordenadas de Minkowski, $\partial_b T^{ab} = 0$. Usando o Princípio de Acoplamento Gravitacional Mínimo, onde se requer que nenhum termo contendo explicitamente o tensor de curvatura deve ser adicionado ao fazer a transição da teoria Especial para a Geral, se segue que [2]

$$\nabla_b T^{ab} = 0. \quad (2.40)$$

Entretanto, sabemos que a derivada covariante do tensor de Einstein é nula, equação (2.39), então se segue imediatamente que os dois tensores são proporcionais e podem ser escritos de forma consistente como

$$G^{\alpha\beta} = \kappa T^{\alpha\beta}, \quad (2.41)$$

onde a constante $\kappa = 8\pi G/c^4$ é conhecida como *Constante de Acoplamento* e foi calculada exigindo que devemos recuperar as leis de gravidade newtoniana e da dinâmica no limite de campo gravitacional fraco e movimento não relativístico. Logo, $T^{\alpha\beta}$ representa o tensor de Momento-Energia, o qual é a fonte da curvatura do espaço-tempo. Este tensor descreve a presença e movimento da matéria gravitante.

2.3 Equações de Einstein pelo Princípio Variacional

Todas as equações fundamentais da física, incluindo as equações de Einstein, podem ser obtidas a partir do Princípio Variacional. Logo, a condição que deve ser satisfeita para obter as equações de campo é

$$\delta \int \mathcal{L} d^4x = 0, \quad (2.42)$$

onde, obviamente temos uma quantidade invariante, que em nosso caso é escrita em termos da métrica $g_{\mu\beta}$, a qual é uma variável dinâmica na Relatividade Geral. Logo, usando o fato que o único escalar dependente da métrica é o escalar de Ricci R , podemos definir a densidade de Lagrangiana como $\mathcal{L} = \sqrt{-g}R$ e escrever a ação como

$$S_{EH} = \int \sqrt{-g}Rd^4x. \quad (2.43)$$

A equação anterior é conhecida como a ação de Einstein-Hilbert [9], dado que as equações de Einstein foram também obtidas por David Hilbert, no ano de 1915, mas usando o princípio de mínima ação de Hamilton. Ao substituir a equação (2.43) na equação (2.42) e fazendo uso da expressão (2.37), obtemos

$$\begin{aligned} \delta S_{EH} &= \delta \int \sqrt{-g}Rd^4x \\ &= \int d^4x \sqrt{-g}g^{\mu\beta} \delta R_{\mu\beta} + \int d^4x \sqrt{-g} \delta g^{\mu\beta} R_{\mu\beta} + \int d^4x \delta \sqrt{-g} g^{\mu\beta} R_{\mu\beta}. \end{aligned} \quad (2.44)$$

A variação da ação (2.43) gerou 3 termos, os quais serão analisados por separado. Consideremos o primeiro termo, onde a variação do tensor de Ricci pode ser escrita como

$$\delta R_{\mu\beta} = \delta^0 \Gamma^\gamma_{\mu\beta;\gamma} - \delta^0 \Gamma^\gamma_{\mu\gamma;\beta}. \quad (2.45)$$

Se substituirmos a equação (2.45) no primeiro termo da expressão (2.44) e lembrando que a derivada covariante da métrica é zero, temos

$$\begin{aligned} \int d^4x \sqrt{-g}g^{\mu\beta} \delta R_{\mu\beta} &= \int d^4x \sqrt{-g}g^{\mu\beta} (\delta^0 \Gamma^\gamma_{\mu\beta;\gamma} - \delta^0 \Gamma^\gamma_{\mu\gamma;\beta}) \\ &= \int \sqrt{-g} \nabla_\gamma J^\gamma \end{aligned} \quad (2.46)$$

onde introduzimos o campo vetorial J^γ

$$J^\gamma = g^{\mu\beta} \delta^0 \Gamma^\gamma_{\mu\beta} - g^{\mu\gamma} \delta^0 \Gamma^\beta_{\mu\beta}. \quad (2.47)$$

A integral anterior poder ser resolvida usando o Teorema de Stokes, de onde concluímos que a contribuição dos termos de superfície no infinito são nulos. Consequentemente, a integral (2.46) é igual a

$$\int d^4x \sqrt{-g}g^{\mu\beta} \delta R_{\mu\beta} = 0. \quad (2.48)$$

Por outro lado, sabemos que a métrica satisfaz a condição $g_{\mu\beta}g^{\beta\alpha} = \delta^\alpha_\mu$, logo temos que

$$\delta \sqrt{-g} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\beta} \delta g^{\mu\beta}. \quad (2.49)$$

Assim, a variação da ação de Einstein-Hilbert, torna-se

$$\begin{aligned} \delta S_{EH} &= \int d^4x \sqrt{-g} R_{\mu\beta} \delta g^{\mu\beta} - \frac{1}{2} \int d^4x R \sqrt{-g} g_{\mu\beta} \delta g^{\mu\beta} \\ &= \int d^4x \sqrt{-g} \left[R_{\mu\beta} - \frac{1}{2} g_{\mu\beta} R \right] \delta g^{\mu\beta}. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Finalmente, usando a equação (2.42), obtemos as Equações de Einstein no vácuo, devido que somente consideramos a parte gravitacional da ação

$$R_{\mu\beta} - \frac{1}{2}g_{\mu\beta}R = 0. \quad (2.51)$$

Para obter as equações de campo completas, vamos considerar que temos presente outro campo além do campo gravitacional. Assim, a ação é escrita da forma

$$S = \frac{1}{16\pi G}S_{EH} + S_M, \quad (2.52)$$

onde S_M representa a ação da matéria. Pela equivalência de massa e energia a fonte de campo gravitacional dever ser a energia, então seguindo a equação anterior temos finalmente as Equações de Einstein completas,

$$R_{\mu\beta} - \frac{1}{2}g_{\mu\beta}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\beta}, \quad (2.53)$$

onde o lado direito representa a constante de acoplamento $\kappa = 8\pi G/c^4$ e com $T_{\mu\beta}$ escrito da forma seguinte

$$T_{\mu\beta} = -2\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\beta}}. \quad (2.54)$$

O tensor $T_{\mu\beta}$ contém informação acerca da densidade de energia total medida por um observador inercial arbitrário.

2.4 Testes da Relatividade Geral

Sendo a Relatividade de Einstein uma teoria que alterava radicalmente a maneira de ver o Universo, para ser aceita necessitava ser comprovada por medições de alta precisão que pudessem discernir entre esta nova teoria e a gravitação de Newton. Foi assim que o Einstein propôs três possíveis testes para provar a Relatividade Geral: *i*) O aumento anômalo do periélio de Mercúrio, *ii*) A deflexão dos raios de luz de estrelas que passam na vizinhança solar, e *iii*) O desvio para o vermelho da luz de origem gravitacional. Isto representou apenas o começo de uma longa lista de testes que poderiam ser realizados para apoiar a validade da Relatividade Geral.

2.4.1 O aumento anômalo do periélio de Mercúrio

A precessão da órbita de Mercúrio não é peculiar, dado que todas as órbitas dos planetas precessam. De fato, a teoria de Newton prediz estes efeitos, como sendo produzidos pela força gravitacional entre os planetas. A questão é que as predições de Newton concordam com as observações da precessão das órbitas de quase todos os planetas, exceto a de Mercúrio.

Urbain Jean Joseph Le Verrier tinha sido o primeiro a encontrar provas de uma anomalia na órbita de Mercúrio e também o primeiro em tentar explicar esse efeito. Em setembro de 1859 submeteu à Academia de Ciências de Paris o texto de uma carta a Hervé Faye na qual registrou o que descobriu: o periélio de Mercúrio avança $38''$ /século devido a alguma ação até

então desconhecida [10]. Nessa carta, Le Verrier observava ainda que o único modo de explicar o efeito em termos de corpos conhecidos consistiria em aumentar a massa de Vênus em pelo menos 10%, modificação inadmissível. Embora duvidasse fortemente, também sugeriu a possibilidade, da existência de um planeta interior a Mercúrio não observado até o momento.

Vista desde a Terra, a precessão da órbita de Mercúrio foi medida em $5600''$ /século. As equações de Newton, considerando os efeitos dos outros planetas, assim como o fato que a Terra não é um referencial inercial, prevê uma precessão de $5557''$ /século. No entanto, o formalismo Newtoniano não explicava esta discrepância. Em contraste, Einstein foi capaz de prever, usando o método da aproximação e suas equações de campo, que a órbita de Mercúrio apresenta uma precessão extra de $43''$ /século, marcando assim o início da mecânica celeste pós-Newtoniana [11].

2.4.2 A deflexão dos raios de luz de estrelas que passam na vizinhança solar

Einstein também planteou a ideia de que a luz de uma estrela ao passar próxima de um corpo massivo, neste caso o Sol, terá sua trajetória curvada, ou desviada, trazendo como consequência que dita luz quando vista desde a Terra teria uma origem aparentemente diferente. Este fenômeno foi observado no ano de 1919 no Brasil e na África fornecendo a primeira prova experimental da validade da teoria da relatividade de Albert Einstein.

Um grupo de astrônomos liderados pelo astrônomo inglês Arthur Eddington tomaram fotos do céu durante o eclipse total do Sol do dia 29 de Maio de 1919. Eles compararam fotografias das posições do campo de estrelas das Híades feitas durante o eclipse total em Sobral, Ceará no nordeste brasileiro, e fotografias feitas na ilha do Príncipe, na costa da África Ocidental, com fotografias do mesmo campo de estrelas sem a influência gravitacional do Sol. Durante o eclipse, a luz das estrelas observadas era vista apenas após passar por uma zona onde os efeitos gravitacionais do Sol são muito fortes. Com estas fotografias os astrônomos pretendiam medir um pequeno ângulo formado pela diferença entre as posições das estrelas observadas. Na figura (2.2) temos uma mostra de uma das placas fotográficas produzidas durante o eclipse pela equipe brasileira em Sobral para posteriormente estudar as protuberâncias na coroa solar.

Após meses de análise das placas fotográficas feitas em Sobral e na ilha de Príncipe, os astrônomos avaliaram os resultados e concluíram que nas observações na ilha de Príncipe apresentavam um desvio médio de 1,6 segundo de arco, enquanto nas observações de Sobral tinham um desvio de 1,9 segundo de arco, quase duas vezes o valor estimado na teoria gravitacional newtoniana, elaborada e apresentada dois séculos e meio antes. O 6 de Novembro 1919, ao considerar as margens de erro, os astrônomos reunidos na Royal Astronomical Society, confirmaram que a previsão de Einstein para o ângulo de deflexão da luz estava certa [13]. Logo depois do anúncio, a teoria da gravitação universal de Newton passou a ser um caso particular da Relatividade Geral de Einstein.

Uma das aplicações mais interessantes desta predição é a observação do fenômeno conhecido como *Lentes Gravitacionais*, onde a luz proveniente de objetos muito distantes, como galáxias, a qual está espalhada ao invés de concentrada em um único ponto do céu, sofre dife-



Figura 2.2: A população de Sobral se aglomerou na praça do Patrocínio para acompanhar o eclipse, local onde os cientistas montaram parte da estrutura de observação. Na esquina superior esquerda temos uma das placas fotográficas produzidas durante o eclipse pela equipe brasileira para observações da Coroa Solar [12].

rentes desvios ao passar pelo campo gravitacional de um objeto muito massivo. O resultado disso, será a formação de um arco, ou até mesmo um anel, em torno do objeto massivo.

2.4.3 O desvio para o vermelho da luz de origem gravitacional

De acordo com o Princípio de Equivalência da Relatividade Geral, qualquer desvio de frequência proveniente da aceleração de uma fonte radiante, também pode ser produzido por um campo gravitacional específico. Logo, se um fóton de frequência ν_0 é emitido radialmente para fora desde a superfície de uma massa gravitacional M , sua energia medida desde uma distância d do corpo será observada como sendo menor, ou desviada ao vermelho.

Em 1959, Pound e Rebka desenvolveram um método de precisão para provar experimentalmente a teoria da Relatividade Geral usando o efeito Möussbauer, descoberto em 1957 [14]. Quando um fóton é emitido ou absorvido, ocorre uma troca de momento com os núcleos, retrocedendo o núcleo, o que reduz a energia do fóton emitido, daí sua frequência. Sendo isso uma consequência da conservação do momento. Rudolf Möussbauer determinou que uma emissão de radiação gamma quase livre de recuo e absorção, pode ocorrer incorporando núcleos atômicos em um cristal de rede sólida para que fosse resistente ao recuo e assim evitar a redução da energia dos fótons emitidos. No ano seguinte, Pound e Rebka efetuaram pela primeira vez uma experiência baseada neste efeito desde uma torre de 22,6 metros do Laboratório Jefferson no campus da universidade de Harvard. Eles usaram fontes de íons de ferro que liberaram fótons gamma e concluíram que existe uma mudança na frequência com a fonte tanto no topo como na base da torre. Este experimento foi repetido múltiplas vezes, logrando a primeira verificação física da Relatividade Geral, medindo um deslocamento fracionário de $\sim -(5,13 \pm 0,51) \times 10^{-15}$, enquanto a Relatividade Geral estima um valor

de $\sim -(4,92 \pm 0,51) \times 10^{-15}$. A precisão desta medição foi independente da altura, já que as versões posteriores do experimento restringiram o resultado a cerca de 1% de erro com respeito à previsão da Relatividade [15]. Este resultado foi uma grande conquista científica para os testes experimentais da Relatividade, não somente porque usou o efeito Möussbauer e produz um resultado de alta precisão, mas também por conta do arranjo experimental único e engenhoso.

Estes três testes, são considerados os testes clássicos da Relatividade Geral. Existem vários outros testes, desde a existência e detecção de Buracos Negros até a detecção das Ondas Gravitacionais. Todas as principais previsões da Relatividade Geral que podem ser testadas com a tecnologia atual já foram feitas. E cada uma dessas previsões se provou correta por mais de 100 anos.

2.4.4 Expansão do Universo

No ano de 1922 o cosmólogo Alexander Friedmann derivou uma solução exata das equações de campo da Relatividade Geral, onde se descrevia um Universo isotrópico e homogêneo. Entretanto, a solução de Friedmann sugeria que tal Universo deveria se expandir ou se contrair, o que era contrário à crença da época, de que o Universo era estático. Logo, depois Einstein adicionou a constante cosmológica Λ às suas equações de campo para fazer com que esse Universo dinâmico se tornasse estático [16].

Então, em 1927 Georges Lemaître derivou de forma independente um conjunto de equações semelhantes às de Friedmann, mas Lemaître sugeriu que o Universo estava se expandindo desde o ponto da “criação”. As observações de Edwin Hubble em 1927 e 1929, provaram que o Universo efetivamente está se expandindo [17].

2.4.5 Detecção de Ondas Gravitacionais

Sabemos que na Relatividade Geral a regra fundamental é que matéria e energia dizem ao espaço-tempo como se curvar, enquanto que o espaço-tempo curvo, determina como a matéria e a energia se movem. Assim, as ondas gravitacionais, as quais são ondulações no tecido do espaço-tempo que chegam na Terra resultado de um evento cataclísmico no Universo distante, carregam informação a respeito das suas origens dramáticos e sobre a natureza da gravidade que não pode ser obtida de outro jeito.

O dia 14 de Setembro de 2015, foram detectadas pela primeira vez ondas gravitacionais produzidas durante uma fração de segundo final da fusão entre dois buracos negros, gerando um único e mais massivo buraco negro em rotação. Os pesquisadores já tinham previsto esta colisão, mas nunca tinha sido observada. Esta detecção confirmou uma das principais previsões da teoria da Relatividade de Einstein e abriu uma janela sem precedentes para o estudo do Cosmos. A detecção foi feita em simultâneo pelos detectores gêmeos do Observatório de Ondas Gravitacionais por Interferometria a Laser (LIGO, pelas suas siglas em inglês) localizados em Livingston, Louisiana, e em Hanford, Washington, nos Estados Unidos. Baseando-se nas perturbações observadas, se estimou que os buracos negros deste evento tinham entre 29 e 36 vezes a massa do Sol e que o evento aconteceu faz 1,3 mil milhões de

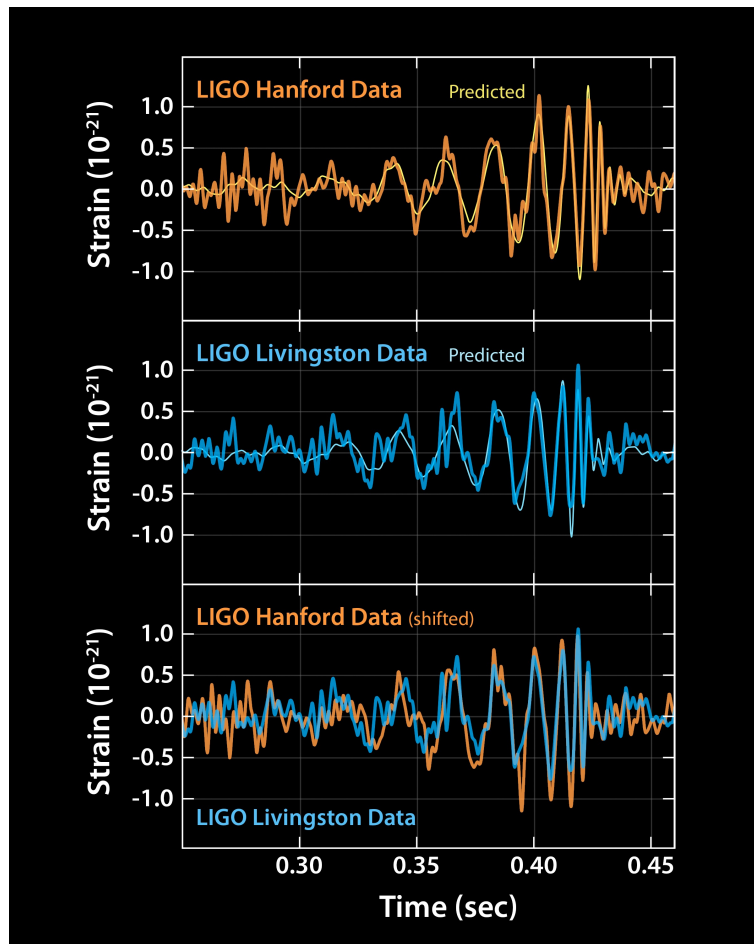


Figura 2.3: Esses gráficos mostram os sinais de ondas gravitacionais detectados pelos observatórios gêmeos LIGO em Livingston, Louisiana, e Hanford, Washington. Os sinais vieram de dois buracos negros em fusão, cada um com cerca de 30 vezes a massa do nosso Sol, situados a 1,3 bilhão de anos-luz de distância [18].

anos, figura (2.3).

A existência das ondas gravitacionais foi demonstrada indiretamente pela primeira vez no ano de 1974 por Russell Hulse e Joseph Taylor [19], quando descobriram um sistema binário, PSR 1913+16, composto por um pulsar orbitando outra estrela, que posteriormente se descobriu ser uma estrela de nêutrons. Usando ondas de rádio, eles observaram que a órbita do pulsar estava se encolhendo lentamente com o passar do tempo e concluíram que este fenômeno estava de acordo com as previsões da Relatividade Geral, as mudanças na órbita são consistentes com a perda de energia em forma de ondas gravitacionais. No ano de 1993, o Premio Nobel em Física foi concedido a Hulse e Taylor pelo descobrimento indireto das ondas gravitacionais geradas pelo sistema binário PSR 1913+16.

Posteriormente, no dia 17 de Agosto de 2017, os instrumentos do LIGO, e do interferômetro Virgo, na Itália, registraram as primeiras ondas gravitacionais produzidas por um sistema binário de estrelas de nêutrons, localizado em uma galáxia a 1300 milhões de anos-luz de distância. Até então, somente haviam sido registradas ondas gravitacionais de pares de

buracos negros. Assim, o sinal chamado de GW170817 permitiu aos pesquisadores testarem as previsões da teoria da Relatividade Geral e de teorias alternativas da gravitação para a dinâmica de um sistema binário no regime de campo gravitacional forte [20].

Até a data, tem se detectado um conjunto de 50 ondas gravitacionais. A maioria são o resultado da fusão de dois buracos negros que giravam muito rápido antes de colidirem, outras surgiram de colisão entre duas estrelas de nêutrons, e tem um par de colisões que envolvem corpos celestes que não podem ser identificados com absoluta certeza, sugerindo que os pesquisadores poderiam ter detectado a primeira fusão entre uma estrela de nêutrons e um buraco negro. Quanto mais distante a colisão está da Terra, mais tempo leva para as ondas gravitacionais chegarem até nós.

Algumas das 50 colisões formaram buracos negros surpreendentemente grandes, incluindo a maior fusão conhecida, que criou o primeiro exemplo definitivo de uma classe de buracos negros de tamanho médio. Os dados também revelaram que alguns buracos negros estão girando rapidamente antes de se fundirem e que as fusões podem ocorrer entre objetos com massas muito diferentes. Essa classe de informação pode ajudar os pesquisadores a entender como os pares de buracos negros se formam. As futuras detecções iluminarão ainda mais os movimentos furtivos desses objetos misteriosos. Está começando uma nova era da astronomia em que buracos negros e estrelas de nêutrons comunicam regularmente seus segredos a nós aqui na Terra.

2.4.6 Detecção de Buracos Negros

Pouco tempo depois de Einstein publicar suas equações de campo da Relatividade Geral, Karl Schwarzschild achou sem muita dificuldade a solução das equações para o caso da geometria do espaço-tempo de uma distribuição de matéria esférica, de massa M e completamente estacionária. Logo, considerando que o espaço exterior da distribuição é vazio, Schwarzschild obteve a equação (2.51), onde o tensor energia momento é nulo, reduzindo assim o problema para calcular a métrica $g_{\mu\beta}$ apropriada para o sistema. Desta forma, ele encontrou que o elemento de linha da métrica tem a forma

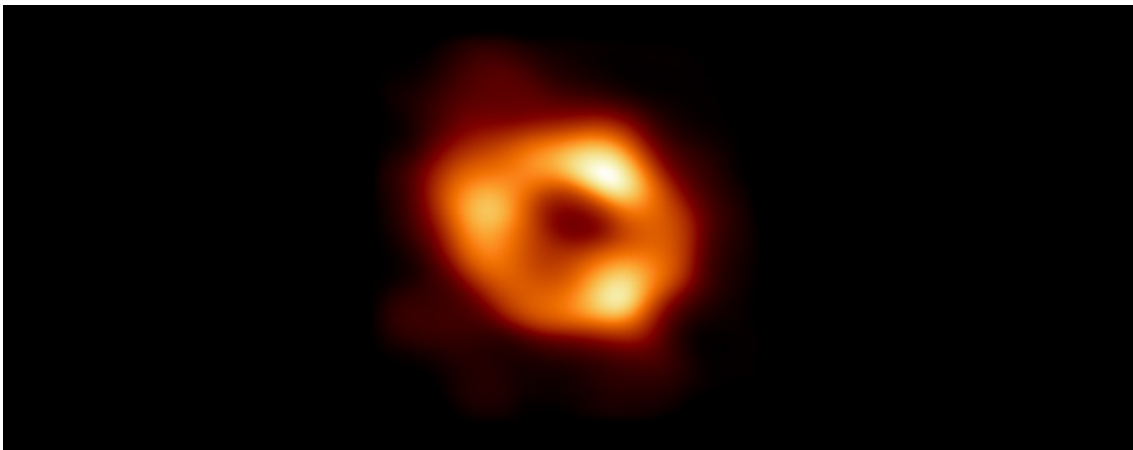
$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{rc^2} \right) c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2GM}{rc^2}} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (2.55)$$

Na equação anterior, é possível observar que existe uma singularidade quando o denominador do segundo termo é igual a zero, o qual ocorre quando o raio r associado com o corpo de massa M é igual a $r_s = 2GM/c^2$. O raio r_s é conhecido como *Raio de Schwarzschild* ou *Horizonte de Eventos*, dado que os eventos que ocorrem dentro dele não podem propagar sinais de luz para o exterior. Logo, qualquer corpo o suficientemente pequeno para existir dentro de seu próprio horizonte de eventos, está isolado do resto do universo, sendo sua única manifestação de existência o seu forte potencial gravitacional. Nos anos 60, o termo *Buraco Negro* começou a ser usado para identificar potenciais gravitacionais como estes.

Adicionalmente, a métrica de Schwarzschild, equação (2.55), também pode ser usada para derivar com exatidão tanto o avanço do pericentro da órbita do planeta Mercúrio, assim como a deflexão gravitacional da luz, comprovando novamente a validade da teoria da Relatividade de Einstein. Isto é possível devido ao *Teorema de Birkhoff*, o qual estabelece



(a) A primeira imagem de um Buraco Negro mostra um anel brilhante com um ponto central escuro. Esse anel é um disco brilhante de gás orbitando o gigante supermassivo na galáxia M87. O ponto é a sombra do buraco negro [21].



(b) Imagem do buraco negro SgrA* no centro da nossa galáxia, visto desde a Terra parece-nos ter aproximadamente o mesmo tamanho no céu que um donut na superfície da Lua [22].

que qualquer solução esfericamente simétrica das equações de campo de Einstein no vácuo devem ser estática e plana assintoticamente. Logo, a solução exterior é esta definida pela métrica de Schwarzschild.

O 10 de abril do 2019, 100 anos após a observação do eclipse solar do 1919, outra grande previsão da teoria da Relatividade de Einstein foi comprovada. Um equipe de mais de 100 pesquisadores do mundo todo anunciou que a humanidade tinha conseguido ver pela primeira vez a sombra de um buraco negro, figura (2.4a). A rede mundial de radiotelescópios chamada Event Horizon Telescope, ou EHT, olhou para o centro da galáxia Messier 87 onde se tem

o buraco negro supermassivo M87* [21]. Este buraco negro está localizado a 55 milhões de anos-luz de distância desde a Terra e se estima que tem uma massa de 6500 milhões de vezes a massa do nosso Sol.

A imagem do EHT revela a sombra do buraco negro M87* e seu disco de acreção. Esse disco parece um anel difuso e assimétrico. Ele desvendou pela primeira vez o abismo escuro de um dos objetos mais misteriosos do Universo. Sua gravidade é tão extrema que nada, nem mesmo a luz, pode escapar através da fronteira do buraco negro. Essa borda é conhecida como horizonte de eventos. Mas alguns buracos negros, especialmente os supermassivos que habitam no centro das galáxias se destacam. Eles têm discos brilhantes de gás e outros materiais que circundam o buraco negro. A nova imagem se alinha com o que os pesquisadores esperavam que um buraco negro se parecesse com base na teoria da Relatividade Geral de Albert Einstein. Essa teoria prevê como o espaço-tempo é distorcido pela massa extrema de um buraco negro. Estudos anteriores testaram a Relatividade observando os movimentos de estrelas ou nuvens de gás perto de um buraco negro, mas nunca em sua borda. A imagem é mais uma forte evidência que apóia a existência de buracos negros, e é claro, ajuda a verificar a Relatividade.

Três anos depois do anúncio da primeira imagem de um buraco negro, os astrônomos do EHT revelaram no dia 12 de Maio do 2022 a primeira imagem do buraco negro supermassivo SgrA* no centro da nossa própria galáxia, figura (2.4b). Os pesquisadores já tinham observado estrelas orbitando em torno de algo invisível, compacto e muito massivo no centro da Via Láctea. Desta maneira, este resultado fornece evidências contundentes de que o objeto é de fato um buraco negro, além de oferecer pistas valiosas sobre o funcionamento de tais gigantes, que se acredita residirem no centro da maioria das galáxias. Como o buraco negro está cerca de 27.000 anos-luz de distância da Terra, nos parece ter aproximadamente o mesmo tamanho no céu que um donut na superfície da Lua [22].

Os dois buracos negros parecem notavelmente semelhantes, embora o buraco negro SgrA* da nossa galáxia seja mais de mil vezes menor e menos massivo que M87*, mas que é quatro milhões de vezes mais massivo que o nosso Sol. O gás nas proximidades dos buracos negros se move na mesma velocidade, quase tão rápido quanto a luz. Mas enquanto que o gás leva dias ou até mesmo semanas para orbitar o M87*, no Sgr A* ele completa uma órbita em poucos minutos. Isso significa que o brilho e o padrão do gás em torno de Sgr A* estavam mudando rapidamente na medida que os astrônomos do EHT o observavam.

Os pesquisadores estão particularmente animados por finalmente terem imagens de dois buracos negros de tamanhos muito diferentes e de dois tipos de galáxias, o que oferece a oportunidade de entender como eles se comparam e contrastam, além de permitir testar como a gravidade se comporta nesses ambientes extremos.

Capítulo 3

Teleparalelismo Equivalente à Relatividade Geral

O Teleparalelismo equivalente à Relatividade Geral (TEGR) é uma formulação geométrica alternativa à teoria da Relatividade Geral de Einstein, onde os efeitos do campo gravitacional são descritos em termos dos campos de tetradas $e^a{}_\mu$, os quais estão definidos no espaço-tempo de Weitzenböck, também conhecido como espaço-tempo de Cartan. Logo, dado um conjunto de tetradas, é possível construir tanto o tensor métrico $g_{\mu\nu}$ como os símbolos de Christoffel ${}^0\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}$, e a conexão de Levi-Civita ${}^0\omega_{\mu ab}$ livre de torção, todos escritos em termos de conexões definidas neste novo espaço-tempo [23]. Usando a teoria construída a partir somente dos campos de tetradas é possível abordar questões geométricas das geometrias de Weitzenböck e da Riemanniana. Neste sentido, a teoria teleparalela da gravidade tem uma estrutura geométrica mais geral e em coerência com a geometria Riemanniana.

As primeiras tentativas para descrever o campo gravitacional usando as tetradas são atribuídas a Einstein no seu esforço para unir a gravitação e o eletromagnetismo [4]. Nos anos entre 1928 e 1931, Einstein esteve interessado em teorias teleparalelas definidas pela densidade Lagrangiana $\mathcal{L} = e(AI_1 + BI_2 + CI_3)$, com $e = \text{edet}(e^a{}_\mu)$ e onde $I_1 = AT^{abc}T_{abc}$, $I_2 = BT^{abc}T_{bac}$ e $I_3 = CT^aT_a$ são conhecidos como invariantes de Weitzenböck e estão escritas em termos do tensor de torção, e onde A, B e C são constantes numéricas arbitrárias. Em 1929, Einstein percebeu que as equações de campo obtidas a partir da densidade Lagrangiana \mathcal{L} com $A = 1/4, B = 1/2, C = -1$ são simétricas nos dois índices livres do espaço-tempo, e que a teoria linearizada resultante descreve o campo gravitacional.

No mesmo ano, Lanczos notou que a invariante definida pelas quantidades $A = 1/4, B = 1/2, C = -1$ é equivalente ao Escalar de Curvatura Riemanniano R . Einstein permitiu que as três constantes A, B e C adquirisse valores ligeiramente diferentes na tentativa de formular uma teoria de campo unificada. Os campos de tetradas adicionam 6 graus a mais dos 16 graus de liberdade nas equações de campo, e que poderiam ser identificados com os campos eletromagnéticos. Entretanto, usando esta aproximação ele não conseguiu encontrar uma descrição fiel e consistente das equações do campo eletromagnético [24]. Uma das principais dificuldades na tentativa da unificação foi a grande liberdade na escolha das equações de campo, por esta razão Einstein abandonou a abordagem já que não foi possível justificar um conjunto determinado de equações.

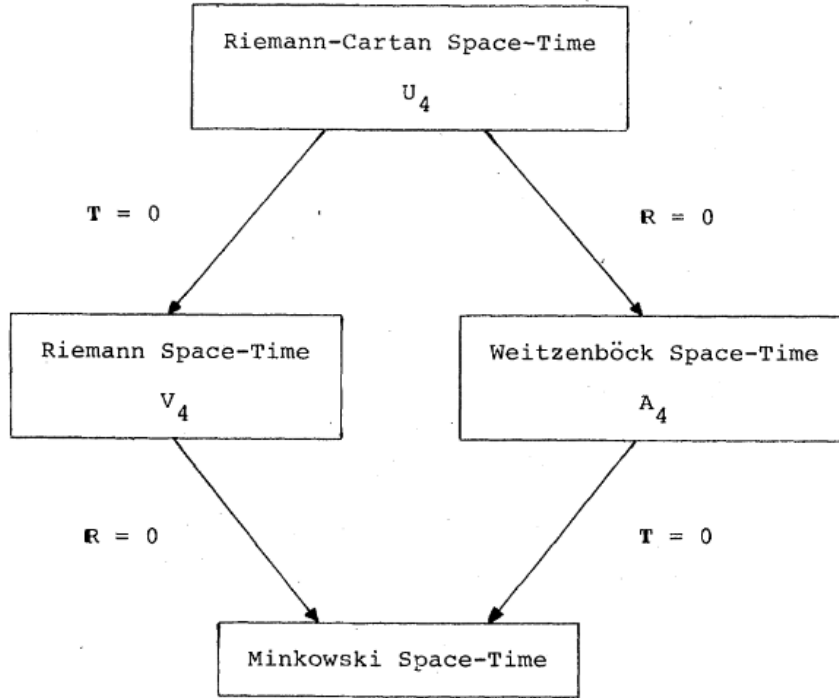


Figura 3.1: Gráfico extraído do artigo de Hayashi e Shirafuji [30] onde é mostrado como o espaço-tempo de Riemann-Cartan pode ser reduzido a um espaço-tempo de Minkowski, com curvatura $R = 0$ e torção $T = 0$ seguindo dois caminhos diferentes: *i*) o primeiro quando temos $R = 0$ mas $T \neq 0$ obtemos o espaço-tempo de Weitzenböck, *ii*) e o segundo quando se tem $T = 0$ mas $R \neq 0$ obtemos o espaço-tempo de Riemann.

Posteriormente, Møller [25,26] usando a ideia original de Einstein, notou que é impossível anular o campo gravitacional usando uma simples transformação de coordenadas, já que as quantidades físicas devem ser independentes de tais transformações. A interação gravitacional é muito fraca em comparação com as outras interações fundamentais, caracterizando o que conhecemos como “Hierarquia das interações”. Logo, baseando-se no trabalho de Møller, Pelegrini e Plebanski [27] calcularam a formulação Lagrangiana da teoria da gravidade teleparalela em termos dos campos de tetradas.

No ano de 1976, Cho derivou uma teoria da gravidade como uma teoria de calibre do grupo das translações, embora não tenha sido escrita em termos da geometria do Teleparalelismo [28, 29]. Cho argumentou que a teoria resultante do tipo Einstein-Cartan é a única teoria de calibre do grupo de Poincaré P_4 se a densidade Lagrangiana é construída a partir da menor quantidade de combinações possíveis do campo de forças. Em 1979, Hayashi e Shirafuji [30] investigaram em detalhe uma classe geral de teorias da gravidade. Essa nova teoria conhecida como “*Nova Relatividade Geral*”, representava uma forma de adicionar torção à teoria da Relatividade de Einstein. Adicionalmente, eles concluíram que para certas configurações da escolha dos parâmetros constantes, a densidade Lagrangiana se reduz ao escalar de Curvatura eR da geometria Riemanniana.

No mesmo período de tempo, Hehl [31] e Nitsch [32] estudaram a classe geral de teorias da gravidade no contexto da geometria de Riemann-Cartan. Essas são teorias escritas em termos de campos de tetradas e conexões independentes, e que incluem as teorias de teleparalelismo como um caso especial onde uma destas teorias é equivalente à Relatividade Geral. Na figura 3.1 se mostra como o espaço-tempo de Riemann-Cartan pode ser reduzido ao espaço-tempo de Minkowski da Relatividade Geral com $R = 0$ e $T = 0$ seguindo dois diferentes caminhos, um deles é o espaço-tempo de Weitzenböck. A partir desse momento, múltiplas contribuições foram feitas à teoria, gerando finalmente o que hoje é conhecida como *Teleparalelismo Equivalente à Relatividade Geral*, ou simplesmente como Gravidade Teleparalela. Entretanto, o estudo de novos aspectos assim como novos descobrimentos, ainda têm que ser feitos nesta teoria.

3.1 Propriedades básicas do Campo de Tétradas

Um campo de tetradas é um conjunto de vetores linearmente independentes que obedecem uma relação de ortogonalidade. Estes vetores são usados para construir uma base capaz de descrever um espaço-tempo. A característica mais importante das tetradas é que, na descrição do espaço-tempo em termos destes campos, o Princípio da Equivalência surge de maneira natural. Isto é devido ao fato de que os campos de tetradas, os quais descrevem ao mesmo tempo o espaço-tempo físico e o espaço tangente, podem ser interpretados como uma transformação de Lorentz entre os diferenciais dx^μ do espaço-tempo físico e dq^a do espaço-tempo tangente, através da comparação entre a métrica de Minkowski,

$$\eta_{ab} = \Lambda^c{}_a \Lambda^d{}_b \eta_{cd}, \quad (3.1)$$

e a métrica do espaço-tempo físico

$$g_{\mu\nu} = e^a{}_\mu e^b{}_\nu \eta_{ab}, \quad (3.2)$$

onde $\Lambda^a{}_b$ é a matriz de transformação de Lorentz. Logo, sempre é possível escrever as quantidades projetadas

$$e^a = e^a{}_\mu dx^\mu, \quad dq^a = e^a{}_\mu dx^\mu, \quad (3.3)$$

muito embora não possamos integrar dq^a e escrever $q^a = q^a(x^\mu)$.

Em um espaço-tempo físico arbitrário, sempre há um espaço-tempo plano tangente em cada ponto, onde o espaço físico será designado pela letra grega $\mu = (0, 1, 2, 3)$ e o espaço tangente será designado pelo índice do grupo $SO(3, 1)$ local de Lorentz $a = [(0), (1), (2), (3)]$. Desta forma, o vetor $e^{(0)}{}_\mu(x)$ é do tipo-tempo e os vetores $e^{(i)}{}_\mu(x)$ são vetores tipo-espaço com $i = (1, 2, 3)$ [33].

Os campos de tetradas $e^a{}_\mu$ nos permitem fazer a projeção de uma quantidade definida neste espaço-tempo no espaço-tempo tangente. Para isto, consideremos um vetor definido no espaço-tempo V^μ . Assim, a correspondente projeção no espaço-tempo tangente é dada pela expressão

$$V^a = e^a{}_\mu V^\mu. \quad (3.4)$$

De maneira similar, é possível projetar um vetor definido no espaço-tempo tangente V^a no espaço-tempo físico,

$$V^\mu = e_a{}^\mu V^a, \quad (3.5)$$

usando o campo de tétradas inverso $e_a{}^\mu$. Logo, as quantidades cujas componentes possuem índices do espaço-tempo físico se comportam como tensores sob transforma es de coordenadas, enquanto aquelas cujas componentes possuem índices do espaço-tempo tangente são tensores por transforma es de Lorentz. Devido   existência de um campo de tétradas inverso, a rela ao de ortogonalidade entre as tétradas pode ser expressa como

$$g^{\mu\nu} = e^{a\mu} e_a{}^\nu, \quad \eta^{ab} = e^{a\mu} e^b{}_\mu. \quad (3.6)$$

Para construir um campo de tétradas em um espaço-tempo plano, onde obviamente o espaço-tempo tangente será o próprio espaço-tempo físico, vamos considerar dois sistemas de coordenadas: o primeiro com coordenadas $q^a = (t, x, y, z)$ no espaço-tempo tangente, e o segundo $x^\mu = (t, r, \theta, \phi)$ no espaço-tempo físico. Dado que os dois sistemas estão relacionados pela transforma o de coordenadas $dq^a = e^a{}_\mu dx^\mu$, o campo de tétradas pode ser escrito como

$$e^a{}_\mu = \frac{\partial q^a}{\partial x^\mu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \theta \cos \phi & r \cos \theta \cos \phi & -r \sin \theta \sin \phi \\ 0 & \sin \theta \sin \phi & r \cos \theta \sin \phi & r \sin \theta \cos \phi \\ 0 & \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.7)$$

Quando o campo de tétradas está definido como o gradiente da fun ao q^a , equa ao (3.7), as tétradas são conhecidas como *Holon micas*, onde tanto x^μ quanto q^a descrevem os mesmos pontos do espaço-tempo, como   de se esperar em uma transforma o de coordenadas [34]. A mesma ideia pode ser usada para construir outras configura es de tétradas, por exemplo, usando uma transforma o de coordenadas que se relacionam através de um “boost” de Lorentz.

No caso geral, o campo de tétradas não pode ser escrito na forma $\partial_\mu q^a$, logo a tétradas   conhecida como *não-holonômica*. Esta categoria de transforma es satisfaz a propriedade $\partial_\mu e^a{}_\nu - \partial_\nu e^a{}_\mu \neq 0$, resultando que para um espaço-tempo com tor ao, as tétradas obedecem a condiçao de não-holonomicidade.

3.2 Formula o Lagrangiana

A descri o do campo gravitacional na teoria do TEGR não   única, dado que a formula o Lagrangiana pode ser desenvolvida utilizando-se tanto uma simetria $SO(3, 1)$ local [35–37] quanto uma simetria do grupo $SO(3, 1)$ global de Lorentz [5, 38–40], sendo essas constru es equivalentes quanto às equa es obtidas.

No presente trabalho, exigiremos inicialmente que a teoria exiba invariância local de Lorentz através da introdu o de uma conexão $\omega_{\mu ab}$ do grupo $SO(3, 1)$ local, para posteriormente impor que essa conexão seja nula, e obter assim uma densidade Lagrangiana invariante por transforma es globais de Lorentz. Partindo da densidade Lagrangiana as equa es de campo podem ser obtidas.

Quando a conexão de spin   introduzida, a condi o de Teleparalelismo exige que a derivada covariante da tétradas seja nula, garantindo deste jeito que o campo de tétradas constitua um conjunto de campos auto-paralelos, tendo-se que

$$\begin{aligned} \nabla_\mu e^a{}_\nu &= 0, \\ e^a{}_{\nu,\mu} &= 0, \\ \partial_\mu e^a{}_\nu - {}^0\Gamma_{\mu\nu}^\lambda e^a{}_\lambda + {}^0\omega_\mu{}^a{}_b e^b{}_\nu &= 0, \end{aligned} \quad (3.8)$$

onde ${}^0\omega_{\mu}{}^a{}_b$ é a conexão de Levi-Civita, a qual é livre de torção e pode ser definida como

$${}^0\omega_{\mu ab} = -\frac{1}{2}e^c{}_{\mu}(\Omega_{abc} - \Omega_{bac} - \Omega_{cab}), \quad (3.9)$$

com Ω_{abc} igual a

$$\Omega_{abc} = e_{av}(e_b{}^{\mu}\partial_{\mu}e_c{}^{\nu} - e_c{}^{\mu}\partial_{\mu}e_b{}^{\nu}). \quad (3.10)$$

Logo, na teoria do TEGR há uma identidade muito importante, a qual relaciona a conexão de Levi-Civita ${}^0\omega_{\mu ab}$, dada pela equação (3.9), como o tensor de Contorção $K_{\mu ab}$ da forma

$${}^0\omega_{\mu ab} = -K_{\mu ab}, \quad (3.11)$$

onde $K_{\mu ab}$ é definido em termos do tensor de Torção $T_{\lambda\mu\nu} = e^a{}_{\lambda}T_{a\mu\nu}$,

$$K_{\mu ab} = \frac{1}{2}e_a{}^{\lambda}e_b{}^{\nu}(T_{\lambda\mu\nu} + T_{\nu\lambda\mu} + T_{\mu\lambda\nu}). \quad (3.12)$$

A identidade (3.11), pode ser obtida por meio de cálculo direto ou através do seguinte procedimento. Primeiro, consideremos uma variedade pseudo-Riemanianna dotada com um campo de tétradas $e^a{}_{\mu}$, e uma conexão $SO(3, 1)$ arbitrária $\omega_{\mu ab}$. Estas quantidades definem tanto o tensor de torção como o tensor de curvatura [33], respectivamente, como

$$\mathcal{T}^a{}_{\mu\nu}(e, \omega) = \partial_{\mu}e^a{}_{\nu} - \partial_{\nu}e^a{}_{\mu} + \omega_{\mu}{}^a{}_b e^b{}_{\nu} - \omega_{\nu}{}^a{}_b e^b{}_{\mu}, \quad (3.13)$$

$$R^a{}_{b\mu\nu}(\omega) = \partial_{\mu}\omega_{\nu}{}^a{}_b - \partial_{\nu}\omega_{\mu}{}^a{}_b + \omega_{\mu}{}^a{}_c\omega_{\nu}{}^c{}_b - \omega_{\nu}{}^a{}_c\omega_{\mu}{}^c{}_b. \quad (3.14)$$

Logo, a equação que define $\mathcal{T}_{a\mu\nu}(e, \omega)$ pode ser resolvida para $\omega_{a\mu\nu}$. Deste jeito, fazendo certas manipulações matemáticas e considerando a condição de antissimetria $\omega_{\mu ab} = -\omega_{\mu ba}$, é possível obter a identidade

$$\omega_{\mu ab} = {}^0\omega_{\mu ab}(e) + K_{\mu ab}, \quad (3.15)$$

onde a conexão $\omega_{\mu ab}$ é conhecida como *Conexão de Spin* e com $K_{\mu ab}$ definida da forma

$$K_{\mu ab} = \frac{1}{2}e_a{}^{\lambda}e_b{}^{\nu}(\mathcal{T}_{\lambda\mu\nu} + \mathcal{T}_{\nu\lambda\mu} + \mathcal{T}_{\mu\lambda\nu}). \quad (3.16)$$

Devido que a conexão de spin não exerce influência na dinâmica dos campos de tétradas no TEGR, então aplicamos a condição de Teleparalelismo e fazemos $\omega_{\mu ab}$ igual a zero na equação (3.15), e obtemos desta maneira a identidade (3.11) onde $\mathcal{T}_{a\mu\nu}$ se reduz a $T_{a\mu\nu}$. Ao fazer a conexão igual a zero, estamos garantindo um espaço equivalente ao Riemanniano em termos de torção. Em outras palavras, estamos eliminando o efeito da torção.

Sabemos que a derivada covariante de um campo de tétradas, equação (3.8), é identicamente zero e está escrita em termos dos símbolos de Christoffel e a conexão de Levi-Civita. Se multiplicarmos todos os termos da expressão (3.8) por $e^{a\lambda}$ obtemos

$$e^{a\lambda}\partial_{\mu}e_{a\nu} = {}^0\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} - e^{a\lambda}({}^0\omega_{\mu ab})e^b{}_{\nu}. \quad (3.17)$$

Logo, ao considerar a identidade (3.11) a expressão anterior fica como

$$\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} = {}^0\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} + e^{a\lambda}K_{\mu ab}e^b{}_{\nu}. \quad (3.18)$$

onde $\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} = e^{a\lambda}\partial_\mu e_{a\nu}$ é conhecido como *Conexão de Weitzenböck*. Por outro lado, dado que a teoria do TEGR é construída em termos dos campos de tetradas e do tensor de torção, é possível calcular o tensor de curvatura em termos da conexão de Levi-Civita ${}^0\omega_{\mu ab}$

$$R_{ab\mu\nu}({}^0\omega) = \partial_\mu {}^0\omega_{\nu ab} - \partial_\nu {}^0\omega_{\mu ab} + {}^0\omega_{\mu ac} {}^0\omega_{\nu}{}^c{}_b - {}^0\omega_{\nu ac} {}^0\omega_{\mu}{}^c{}_b. \quad (3.19)$$

Usando a equação (3.17) para substituir ${}^0\omega_{\mu ab}$ na equação anterior, obtemos uma expressão do tensor de curvatura em termos dos campos de tetradas e dos símbolos de Christoffel. Agora, ao multiplicar essa nova expressão pela quantidade $ee^{a\mu}e^{b\nu}$, onde e é o determinante do campo de tetradas, obtemos o escalar de curvatura R ,

$$eR(e) = ee^{a\mu}e^{b\nu}R_{ab\mu\nu}({}^0\omega) \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} eR(e) = & ee^{a\mu}e^{b\nu}\{e_b{}^\rho e_{a\sigma}R^\sigma{}_{\rho\mu\nu}({}^0\Gamma) + {}^0\Gamma^\sigma{}_{\nu\rho}[e_{a\sigma}(\partial_\mu e_b{}^\rho) + e_b{}^\rho(\partial_\mu e_{a\sigma})] \\ & - (\partial_\mu e_b{}^\rho)(\partial_\nu e_{a\rho}) + (\partial_\nu e_b{}^\rho)(\partial_\mu e_{a\rho}) - {}^0\Gamma^\sigma{}_{\mu\rho}[e_b{}^\rho(\partial_\nu e_{a\sigma}) + e_{a\sigma}(\partial_\nu e_b{}^\rho)] \\ & - e_c{}^\rho e_{a\sigma}e_b{}^\lambda [{}^0\Gamma^\sigma{}_{\mu\rho}(\partial_\nu e^c{}_\lambda) - {}^0\Gamma^\sigma{}_{\nu\rho}(\partial_\mu e^c{}_\lambda)] \\ & - e_b{}^\lambda [{}^0\Gamma^\rho{}_{\nu\lambda}(\partial_\mu e_{a\rho}) - {}^0\Gamma^\rho{}_{\mu\lambda}(\partial_\nu e_{a\rho})] \\ & + e_c{}^\rho e_b{}^\lambda [(\partial_\nu e_{a\rho})(\partial_\nu e^c{}_\lambda) - (\partial_\mu e_{a\rho})(\partial_\mu e^c{}_\lambda)]\}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Fazendo as contrações dos índices e usando o fato que a métrica satisfaz a condição de $g^{\nu\rho} = e^{b\nu}e_b{}^\rho$, enquanto as tetradas satisfazem a condição de $\delta^\mu{}_\sigma = e^{a\mu}e_{a\sigma}$, a equação anterior pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} eR(e) = & eR({}^0\Gamma) - ee^{a\mu}e^{b\nu}(\partial_\mu e_b{}^\rho)(\partial_\nu e_{a\rho}) + ee^{a\mu}e^{b\nu}(\partial_\nu e_b{}^\rho)(\partial_\mu e_{a\rho}) \\ & + ee^{a\mu}e_c{}^\rho g^{\nu\lambda}(\partial_\mu e_{a\rho})(\partial_\nu e^c{}_\lambda) - ee^{a\mu}e_c{}^\rho g^{\nu\lambda}(\partial_\nu e_{a\rho})(\partial_\mu e^c{}_\lambda). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Combinando o segundo e o quinto termo da equação anterior, podemos ver que ditos termos se anulam entre si. Da mesma forma, ao combinar o terceiro e o quarto termo, obtemos novamente zero. Logo, a expressão (3.22) fica da seguinte forma

$$R(e) = R({}^0\Gamma), \quad (3.23)$$

a partir da qual é possível concluir que o escalar de curvatura escrito em termos da Conexão de Weitzenböck é identicamente zero, $R_{\mu\nu\alpha\beta}(\Gamma) = 0$. Adicionalmente, da equação (3.23) é possível ver como sob certas condições a teoria do teleparalelismo converge na teoria da Relatividade Geral de Einstein.

Por outro lado, usando a identidade (3.11) podemos escrever o escalar de curvatura (3.20) em termos do tensor de Torção $T_{\mu\nu} = \partial_\mu e_{a\nu} - \partial_\nu e_{a\mu}$,

$$eR(e) = -ee^{a\mu}e^{b\nu}[\partial_\mu K_{\nu ab} - \partial_\nu K_{\mu ab} + K_{\mu ac}K_{\nu}{}^c{}_b - K_{\nu ac}K_{\mu}{}^c{}_b]. \quad (3.24)$$

Ao substituir a expressão (3.16) na equação anterior e fazer algumas manipulações ma-

temáticas, obtemos

$$\begin{aligned}
eR(e) &= -\frac{1}{2}\partial_\mu [ee^{a\mu}e^{b\nu}(T_{avb} + T_{bav} + T_{\nu ab})] + \frac{1}{2}(T_{avb} + T_{bav} + T_{\nu ab})\partial_\mu(ee^{a\mu}e^{b\nu}) \\
&+ \frac{1}{2}\partial_\nu [ee^{a\mu}e^{b\nu}(T_{a\mu b} + T_{ba\mu} + T_{\mu ab})] - \frac{1}{2}(T_{a\mu b} + T_{ba\mu} + T_{\mu ab})\partial_\nu(ee^{a\mu}e^{b\nu}) \\
&- \frac{1}{4}ee^{a\mu}e^{b\nu}(T_{a\mu c} + T_{ca\mu} + T_{\mu ac})(T^c{}_{\nu b} + T_b{}^c{}_{\nu} + T_\nu{}^c{}_{b}) \\
&+ \frac{1}{4}ee^{a\mu}e^{b\nu}(T_{avc} + T_{cav} + T_{\nu ac})(T^c{}_{\mu b} + T_b{}^c{}_{\mu} + T_\mu{}^c{}_{b}). \tag{3.25}
\end{aligned}$$

Logo, fazendo as respectivas contrações dos índices com as tétradas e utilizando as propriedades de simetria e antissimetria do tensor de Torção, a expressão anterior pode ser simplificada da forma

$$\begin{aligned}
eR(e) &= -\frac{1}{4}eT_{abc}T^{abc} - \frac{1}{2}eT_{abc}T^{bac} + eT^a T_a + 2\partial_\mu(eT^\mu) \\
&+ \frac{1}{2}(T_{avb} + T_{bav} + T_{\nu ab})\partial_\mu(ee^{a\mu}e^{b\nu}) \\
&- \frac{1}{2}(T_{a\mu b} + T_{ba\mu} + T_{\mu ab})\partial_\nu(ee^{a\mu}e^{b\nu}). \tag{3.26}
\end{aligned}$$

Para resolver os termos que contêm derivada parcial da quantidade $ee^{a\mu}e^{b\nu}$, primeiro devemos considerar que dita quantidade pode ser chamada de *tensor de Densidade* $\phi^{a\mu b\nu}$ com peso ω . Logo, ao calcular a derivada covariante desta densidade ao longo de uma geodésica obtemos

$$\phi^{a\mu b\nu}{}_{;\nu} = \partial_\nu \phi^{a\mu b\nu} + {}^0\Gamma^\mu{}_{\lambda\nu} \phi^{ab\lambda\nu} + {}^0\Gamma^\nu{}_{\lambda\nu} \phi^{ab\mu\lambda} - \omega {}^0\Gamma^\lambda{}_{\lambda\nu} \phi^{a\mu b\nu} = 0. \tag{3.27}$$

Se usamos a equação (3.27) para escrever a derivada parcial $\partial_\nu \phi^{a\mu b\nu}$ em termos dos símbolos de Christoffel, a expressão (3.26) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}
eR(e) &= -\frac{1}{4}eT_{abc}T^{abc} - \frac{1}{2}eT_{abc}T^{bac} + eT^a T_a + 2\partial_\mu(eT^\mu) \\
&+ \frac{1}{2}(T_{avb} + T_{bav} + T_{\nu ab})\partial_\mu(ee^{a\mu}e^{b\nu}) \\
&- \frac{1}{2}(T_{a\mu b} + T_{ba\mu} + T_{\mu ab})(-{}^0\Gamma^\nu{}_{\lambda\mu} \phi^{ab\mu\lambda} - {}^0\Gamma^\mu{}_{\lambda\mu} \phi^{ab\lambda\nu} + \omega {}^0\Gamma^\lambda{}_{\lambda\mu} \phi^{a\mu b\nu}). \tag{3.28}
\end{aligned}$$

onde $T^a = T^b{}_b{}^a$. Ao fazer a mudança de índices $\mu \longleftrightarrow \nu$ e $a \longleftrightarrow b$ no quinto termo da expressão anterior, e aplicando as propriedades de antissimetria, temos

$$+\frac{1}{2}(T_{avb} + T_{bav} + T_{\nu ab})\partial_\mu(ee^{a\mu}e^{b\nu}) = -\frac{1}{2}(T_{avb} + T_{bav} + T_{\nu ab})\partial_\mu(ee^{b\nu}e^{a\mu}). \tag{3.29}$$

Desta maneira, se subtraímos o termo da expressão anterior ao último termo da equação (3.28), obtemos explicitamente a derivada covariante mostrada na equação (3.27). Portanto, a contribuição destes termos no escalar de curvatura $eR(e)$ é nula. Finalmente, a expressão (3.28) fica da forma

$$eR(e) = -e \left(\frac{1}{4}T_{abc}T^{abc} + \frac{1}{2}T^{abc}T_{bac} - T^a T_a \right) + 2\partial_\mu(eT^\mu). \tag{3.30}$$

Por outro lado, como já conhecemos a forma exata do escalar de curvatura escrito em termos do tensor de torção, podemos escrever a densidade Lagrangiana \mathcal{L} do TEGR. Para isso, primeiro devemos introduzir o tensor Σ^{abc} definido em [41, 42]

$$\Sigma^{abc} = \frac{1}{4}(T^{abc} + T^{bac} - T^{cab}) + \frac{1}{2}(\eta^{ac}T^b - \eta^{ab}T^c). \quad (3.31)$$

Com o tensor (3.31) podemos escrever a seguinte combinação quadrática

$$\Sigma^{abc}T_{abc} = \frac{1}{4}T^{abc}T_{abc} + \frac{1}{2}T^{abc}T_{bac} - T^aT_a. \quad (3.32)$$

Logo, a equação (3.30) pode ser reescrita como

$$eR(e) = -e\Sigma^{abc}T_{abc} + 2\partial_\mu(eT^\mu). \quad (3.33)$$

Para escrever a densidade Lagrangiana podemos desprezar o termo $\partial_\mu(eT^\mu)$, dado que ao construir a integral da ação para espaços-tempo assintoticamente planos, as integrais de superfície que surgem da integração por partes não alteram as equações. Finalmente, a densidade Lagrangiana é dada pela expressão [33]

$$\mathcal{L}(e) = -ke\Sigma^{abc}T_{abc} - \frac{1}{c}\mathcal{L}_M, \quad (3.34)$$

onde \mathcal{L}_M representa a densidade Lagrangiana do campo de matéria, e $k = c^3/16\pi G$ ou $k = 1/16\pi$ quando as unidades naturais são consideradas. O passo a seguir, uma vez conhecida a densidade Lagrangiana é obter as equações de campo a partir da variação funcional da equação (3.34) em relação à tetrada $e_{a\mu}$,

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L}(e) &= 0, \\ &= \delta(-ek\Sigma^{abc}T_{abc}) - \delta\mathcal{L}_M, \\ &= -k(\delta e)\Sigma^{abc}T_{abc} - ke(\delta\Sigma^{abc})T_{abc} - ek\Sigma^{abc}(\delta T_{abc}) + eT^{a\mu}, \end{aligned} \quad (3.35)$$

onde $T^{a\mu}$ é definido por $\delta\mathcal{L}_M = eT^{a\mu}\delta e_{a\mu}$. A variação em relação à tetrada gerou 4 termos, os quais devem ser resolvidos separadamente. Consideremos o primeiro termo da equação (3.35), onde $\delta e = ee^{d\beta}\delta e_{d\beta}$, temos que

$$-k(\delta e)\Sigma^{abc}T_{abc} = -kee^{d\beta}\Sigma^{abc}T_{abc}\delta e_{d\beta}. \quad (3.36)$$

Ao fazer a seguinte mudança de índices $a \rightarrow b, b \rightarrow c, c \rightarrow d$ e dividindo pela quantidade $\delta e_{a\mu}$, obtemos

$$\begin{aligned} -kee^{d\beta}\Sigma^{bcd}T_{bcd}\frac{\delta e_{d\beta}}{\delta e_{a\mu}} &= -kee^{d\beta}\Sigma^{bcd}T_{bcd}\delta_d^a\delta_\beta^\mu, \\ &= -kee^{a\mu}\Sigma^{bcd}T_{bcd}. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Agora, consideremos o segundo termo da equação (3.35), onde Σ^{abc} vem dado pela expressão (3.31). Logo, temos que

$$\begin{aligned} -ke(\delta\Sigma^{abc})T_{abc} &= -ke\delta\left[\frac{1}{4}(T^{abc} + T^{bac} - T^{cab}) + \frac{1}{2}(\eta^{ac}T^b - \eta^{ab}T^c)\right]T_{abc}, \\ &= -ke\left[\frac{1}{4}(\delta T^{abc} + \delta T^{bac} - \delta T^{cab}) + \frac{1}{2}(\eta^{ac}\delta T^b - \eta^{ab}\delta T^c)\right]T_{abc}, \\ &= -ke\left[\frac{1}{4}T_{abc}(\delta T^{abc} + \delta T^{bac} - \delta T^{cab}) + \frac{1}{2}T_{abc}(\eta^{ac}\delta T^b - \eta^{ab}\delta T^c)\right]. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Fazendo algumas mudanças de índices e considerando as propriedades de antissimetria do tensor de torção, a expressão anterior pode ser reescrita da forma

$$\begin{aligned} -ke \left[\frac{1}{4} T_{abc} (\delta T^{abc} + \delta T^{bac} - \delta T^{cab}) + \frac{1}{2} T_{abc} (\eta^{ac} \delta T^b - \eta^{ab} \delta T^c) \right] &= -ke \Sigma_{abc} (\delta T^{abc}), \\ &= -ke \Sigma^{abc} (\delta T_{abc}). \end{aligned} \quad (3.39)$$

Dado que a equação (3.39) é igual ao terceiro termo da expressão (3.35), estes podem ser somados, obtendo-se o seguinte resultado

$$-2ke \Sigma^{abc} (\delta T_{abc}). \quad (3.40)$$

Logo, para encontrar uma solução para a equação anterior, devemos lembrar que o tensor de torção pode ser escrito como $T_{a\mu\nu} = \partial_\mu e_{a\nu} - \partial_\nu e_{a\mu}$, com o qual é possível fazer a seguinte transformação,

$$T_{abc} = e_b^\mu e_c^\nu T_{a\mu\nu}. \quad (3.41)$$

Ao substituir a expressão anterior, na equação (3.40), temos

$$\begin{aligned} -2ke \Sigma^{abc} (\delta T_{abc}) &= -2ke \Sigma^{abc} \delta (e_b^\mu e_c^\nu T_{a\mu\nu}), \\ &= -2ke \Sigma^{abc} (\delta e_b^\mu) e_c^\nu T_{a\mu\nu} - 2ke \Sigma^{abc} e_b^\mu (\delta e_c^\nu) T_{a\mu\nu} \\ &\quad - 2ke \Sigma^{abc} e_b^\mu e_c^\nu (\partial_\mu \delta e_{a\nu} - \partial_\nu \delta e_{a\mu}). \end{aligned} \quad (3.42)$$

Usando a expressão

$$\delta e_b^\mu = -e_b^\beta e^{d\mu} \delta e_{d\beta}, \quad (3.43)$$

a equação (3.42) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} -2ke \Sigma^{abc} (-e_b^\beta e^{d\mu} \delta e_{d\beta}) e_c^\nu T_{a\mu\nu} - 2ke \Sigma^{abc} e_b^\mu (-e_c^\beta e^{d\nu} \delta e_{d\beta}) T_{a\mu\nu} \\ - 2ke \Sigma^{abc} e_b^\mu e_c^\nu (\partial_\mu \delta e_{a\nu} - \partial_\nu \delta e_{a\mu}). \end{aligned} \quad (3.44)$$

Agora, consideremos a derivada

$$\partial_\mu (e \Sigma^{abc} e_b^\mu e_c^\nu \delta e_{a\nu}) = e \Sigma^{a\mu\nu} \partial_\mu (\delta e_{a\nu}) + \delta e_{a\nu} \partial_\mu (e \Sigma^{a\mu\nu}), \quad (3.45)$$

a qual é nula na superfície de integração. Logo, a expressão anterior fica como

$$e \Sigma^{a\mu\nu} \partial_\mu (\delta e_{a\nu}) = -\delta e_{a\nu} \partial_\mu (e \Sigma^{a\mu\nu}). \quad (3.46)$$

Substituindo a expressão anterior na equação (3.44), obtemos

$$\begin{aligned} 2ke \Sigma^{abc} e_b^\beta e_c^\nu e^{d\mu} T_{a\mu\nu} \delta e_{d\beta} + 2ke \Sigma^{abc} e_b^\mu e_c^\beta e^{d\nu} T_{a\mu\nu} \delta e_{d\beta} \\ + 2k \delta e_{a\nu} \partial_\mu (e \Sigma^{a\mu\nu}) - 2k \delta e_{a\mu} \partial_\nu (e \Sigma^{a\mu\nu}). \end{aligned} \quad (3.47)$$

Fazendo primeiro a contração dos índices com as tétradas na equação anterior, e depois a mudança $\mu \rightarrow \lambda$ e $a \rightarrow b$, temos

$$\begin{aligned} 2ke \Sigma^{b\beta\nu} e^{d\lambda} (\delta e_{d\beta}) T_{b\lambda\nu} + 2ke \Sigma^{b\lambda\beta} e^{d\nu} (\delta e_{d\beta}) T_{b\lambda\nu} \\ + 2k (\delta e_{b\nu}) \partial_\lambda (e \Sigma^{b\lambda\nu}) - 2k (\delta e_b \lambda) \partial_\nu (e \Sigma^{b\lambda\nu}). \end{aligned} \quad (3.48)$$

Se dividimos a equação (3.48) por $\delta e_{a\mu}$, e fazemos algumas manipulações matemáticas, obtemos

$$-4k[\partial_\lambda(e\Sigma^{a\mu\lambda}) - e\Sigma^{b\lambda\mu}T_{b\lambda}{}^a]. \quad (3.49)$$

Finalmente, podemos escrever as equações de campo a partir da variação de $\mathcal{L}(e)$ [33]

$$\begin{aligned} 0 &= -kee^{a\mu}\Sigma^{bcd}T_{bcd} - 4k[\partial_\lambda(e\Sigma^{a\mu\lambda}) - e\Sigma^{b\lambda\mu}T_{b\lambda}{}^a] + eT^{a\mu} \\ \frac{1}{4k}eT^{a\mu} &= \partial_\lambda(e\Sigma^{a\mu\lambda}) - e\left(\Sigma^{b\lambda\mu}T_{b\lambda}{}^a - \frac{1}{4}e^{a\mu}\Sigma^{bcd}T_{bcd}\right). \end{aligned} \quad (3.50)$$

Apesar de que a densidade Lagrangiana não é invariante sob uma transformação $SO(3, 1)$ arbitrária, as equações de campo (3.50) são covariantes sob uma transformação local do grupo $SO(3, 1)$.

A teoria definida pela equação (3.34) é equivalente à Relatividade Geral de Einstein, devido ao fato que é possível demonstrar que o lado direito da equação (3.50) poder ser reescrito como

$$R^{a\mu}(e) - \frac{1}{2}e^{a\mu}R(e) = \frac{1}{2k}eT^{a\mu} \quad (3.51)$$

justificando desta maneira o próprio nome da teoria. Essa equivalência pode ser visualizada quando analisamos a forma como a Relatividade Geral é descrita. Usualmente, ela é formulada em termos de um tensor de curvatura diferente de zero, o que a faz uma teoria essencialmente geométrica, e com o tensor de torção nulo. Logo, para a teoria do Teleparalelismo a cena é oposta, mas absolutamente equivalente. Tem-se a curvatura construída a partir da conexão de Cartan nula, e a torção diferente de zero [34].

Por outro lado, reescrevendo a equação (3.50) obtemos

$$\partial_\lambda(e\Sigma^{a\mu\lambda}) = \frac{1}{4k}eT^{a\mu} + e\left(\Sigma^{b\lambda\mu}T_{b\lambda}{}^a - \frac{1}{4}e^{a\mu}\Sigma^{bcd}T_{bcd}\right). \quad (3.52)$$

Definindo o tensor

$$t^{a\mu} = k(4\Sigma^{b\lambda\mu}T_{b\lambda}{}^a - ee^{a\mu}\Sigma^{bcd}T_{bcd}), \quad (3.53)$$

conhecido como tensor de *Momento-Energia Gravitacional* [43], a equação (3.52) fica da forma,

$$\partial_\lambda(e\Sigma^{a\mu\lambda}) = \frac{1}{4k}e(t^{a\mu} + T^{a\mu}), \quad (3.54)$$

ou ainda,

$$\partial_\lambda(e\Sigma^{a\mu\lambda}) = \frac{1}{4k}ee^a{}_\lambda(t^{\lambda\mu} + T^{\lambda\mu}). \quad (3.55)$$

Dado que o tensor $\Sigma^{a\mu\nu}$ é antissimétrico nos dois últimos índices, $\Sigma^{a\mu\nu} = -\Sigma^{a\nu\mu}$, satisfaz-se que $\partial_\mu\partial_\lambda(e\Sigma^{a\mu\lambda}) = 0$. Logo, temos que

$$\partial_\mu[ee^a{}_\lambda(t^{\lambda\mu} + T^{\lambda\mu})] = 0, \quad (3.56)$$

a qual pode ser interpretada como uma lei de conservação local para o tensor de momento-energia gravitacional $t^{a\mu}$, e o tensor de campos de matéria $T^{a\mu}$. Usando a expressão (3.56) é possível escrever a equação de Continuidade para o campo gravitacional

$$\frac{d}{dt} \int_V d^3x ee^a{}_\mu(t^{0\mu} + T^{0\mu}) = - \oint_S dS_j [ee^a{}_\mu(t^{j\mu} + T^{j\mu})], \quad (3.57)$$

onde as integrações são feitas sob um volume V e uma superfície S que envolve V . Dado que o tensor $t^{a\mu}$ é o tensor de momento-energia gravitacional, o lado direito da equação (3.57) é interpretado como o quadri-vetor de momento-energia total contida em um volume V e com componentes $P^a = (E/c, \mathbf{P})$,

$$P^a = \int_V d^3x e e^a{}_{\mu} (t^{0\mu} + T^{0\mu}). \quad (3.58)$$

A expressão anterior é dependente da escolha do referencial dado que é um vetor sob transformações de Lorentz. O vetor momento-energia é também invariante sob transformações de coordenadas, permitindo às mesmas predições físicas em todos os sistemas de coordenadas usados. Consequentemente, essas características estão presentes na teoria da Relatividade Restrita e não existe uma boa razão para desistir delas quando lidamos com uma teoria de gravitação.

Consideremos agora a definição do fluxo de Momento-Energia Gravitacional como

$$\Phi^a{}_g = \oint_S dS_j (e e^a{}_{\lambda} t^{j\lambda}), \quad (3.59)$$

e do fluxo de Momento-Energia do Campo de Matéria como

$$\Phi^a{}_m = \oint_S dS_j (e e^a{}_{\lambda} T^{j\lambda}). \quad (3.60)$$

Desta maneira, usando as duas expressões anteriores e a equação (3.58), temos que

$$\frac{dP^a}{dt} = -(\Phi^a{}_g + \Phi^a{}_m). \quad (3.61)$$

Por outro lado, a equação (3.57) também pode ser escrita em termos do tensor Σ se fazemos uso da expressão (3.55) da forma seguinte

$$\frac{dP^a}{dt} = -4\kappa \oint_S dS_j \partial_{\nu} (e \Sigma^{aj\nu}). \quad (3.62)$$

Se focamos nossa atenção na parte espacial do índice de Lorentz a , $a = (i)$ com $i = 1, 2, 3$, temos que a equação anterior fica como [44]

$$\frac{dP^{(i)}}{dt} = - \oint_S dS_j \phi^{(i)j}, \quad (3.63)$$

onde

$$\phi^{(i)j} = 4\kappa \partial_{\nu} (e \Sigma^{(i)j\nu}). \quad (3.64)$$

Na equação (3.63) a derivada do momento com respeito ao tempo representa a força agindo sobre o sistema. Portanto, o tensor $-\phi^{(i)j}$ representa a pressão gravitacional ao longo da direção (i) sobre o elemento de área orientado ao longo da direção j . Em coordenadas cartesianas o índice $j = 1, 2, 3$ representa as direções x, y e z , respectivamente.

3.3 Interpretação do Campo de Tétradas

As invariâncias exibidas pela densidade Lagrangiana (3.34), são responsáveis pela interpretação do campo de tétradas como sistemas de referência. Desta maneira, a invariância da teoria por transformações globais $SO(3, 1)$ estabelece que se dois campos de tétradas que são soluções das equações de campo, produzem o mesmo tensor métrico e que não se relacionam por nenhuma transformação global de Lorentz, ditos campos descrevem dois sistemas de referência diferentes. Logo, o significado físico desses objetos é que eles representam sistemas de referência adaptados a observadores ideais de massa nula no espaço-tempo.

Cada conjunto de tétradas define uma classe de sistemas de referência [45–47]. Se denotamos por $x^\mu(s)$ a linha mundo C de um observador no espaço-tempo, e por $u^\mu(s) = dx^\mu/ds$ sua velocidade ao longo de C , podemos fazer a identificação da velocidade do observador como a componente $a = (0)$ do campo de tétradas $e_a{}^\mu$. A aceleração do observador é dada por $a^\mu = Du^\mu/ds = De_0{}^\mu = u^\alpha \nabla_\alpha e_0{}^\mu$, onde a derivada covariante é escrita em termos dos símbolos de Christoffel [48].

Vemos que a tétrada $e_a{}^\mu$ determina a velocidade e a aceleração, ao longo de uma linha mundo de um observador adaptado a um sistema de referência. Deste ponto de vista, podemos concluir que um conjunto de tétradas para o qual $e_{(0)}{}^\mu$ descreve uma congruência de curvas do tipo tempo, é adaptado a uma classe de observadores. A título de comparação, devemos lembrar que se $e^a{}_\mu \rightarrow \delta^a{}_\mu$ no limite $r \rightarrow \infty$, logo $e^a{}_\mu$ é adaptado a observadores estáticos no infinito espacial.

Podemos generalizar a noção de aceleração no espaço-tempo por meio da derivada absoluta da tétrada,

$$\frac{De_a{}^\mu}{ds} = \psi_a{}^b e_b{}^\mu, \quad (3.65)$$

onde $\psi_a{}^b$ é o tensor de acelerações antissimétrico. Seguindo o que é apresentado em [49], em analogia ao tensor de Faraday podemos identificar $\psi_{ab} \rightarrow (\mathbf{a}, \mathbf{\Omega})$, onde \mathbf{a} é a aceleração translacional, $\psi_{(0)(i)} = a_{(i)}$, e $\mathbf{\Omega}$ é a frequência de rotação de um sistema de referência em relação a outro que não está em rotação (transporte de Fermi-Walker [48]).

A equação (3.65) pode ser invertida, obtendo-se

$$\psi_a{}^b = e^b{}_\mu \frac{De_a{}^\mu}{ds} = e^b{}_\mu u^\lambda \nabla_\lambda e_a{}^\mu, \quad (3.66)$$

onde a derivada covariante é escrita em termos dos símbolos de Christoffel. Dado que esta conexão se relaciona com a conexão de spin definida em (3.15) por meio da equação (3.8), ao substituir dita conexão na expressão acima, ψ_{ab} fica como

$$\psi_{ab} = \frac{1}{2}[T_{(0)ab} + T_{a(0)b} - T_{b(0)a}], \quad (3.67)$$

onde ψ_{ab} pode ser interpretada como a aceleração inercial ao longo de $x^\mu(s)$ [34]. Entretanto, o tensor de aceleração contruído a partir da torção foi introduzido pela primeira vez em [49], e posteriormente reescrito por Mashhoon em termos da conexão de Levi-Civita [46].

Por outro lado, dado um conjunto de tétradas em um espaço-tempo arbitrário, sua interpretação geométrica pode ser obtida tanto pela adequada identificação da velocidade $u^\mu = ce_{(0)}^\mu$ do campo de observadores, junto com a orientação no espaço tridimensional das componentes $e_{(1)}^\mu, e_{(2)}^\mu, e_{(3)}^\mu$, ou pelos valores do tensor aceleração $\psi_{ab} = -\psi_{ba}$, o qual caracteriza o estado inercial do referencial. Logo, a condição $e_{(0)}^\mu = u^\mu/c$ fixa somente as três componentes $e_{(1)}^\mu, e_{(2)}^\mu, e_{(3)}^\mu$, devido que a componente $e_{(0)}^\mu$ é determinada pela condição de normalização $u^\mu u^\nu g_{\mu\nu} = -c^2$. Em ambos casos, a fixação do referencial vai depender da fixação de seis componentes do campo de tétradas.

Capítulo 4

Estrelas de Nêutrons e Métodos Computacionais

4.1 Estrelas de Nêutrons

Quando uma estrela massiva, atinge o final da sua etapa evolutiva, seu núcleo fica sem combustível para continuar produzindo calor e pressão. As camadas externas da estrela são ejetadas para fora para formar um remanescente de supernova, enquanto o coração da estrela colapsa sob seu próprio peso dando origem a uma estrela muito densa que poderia abarcar toda a extensão da ilha de Manhattan e que tem mais massa que o Sol. A estrela resultante é conhecida como Estrela de Nêutrons (ENs) e possui uma estrutura tão complexa que não se sabe muito bem o que acontece exatamente depois com os núcleos ultradensos destas estrelas. Os nêutrons persistem ou se descompõem em seus constituintes de quarks? esses quarks interagem até formar partículas mais exóticas? [50].

Os pesquisadores acreditam que as estrelas de nêutrons estão formadas por camadas de matéria, como se mostra na figura 4.1. Na superfície, uma fina atmosfera composta por átomos de hidrogênio, hélio e carbono repousa sobre uma crosta sólida de átomos mais pesados. Na crosta, o rápido aumento da pressão arranca os elétrons dos núcleos atômicos. Mais internamente, no núcleo externo, os núcleos atômicos se dividem em nêutrons, prótons e elétrons livres. A imensa pressão esmaga prótons e elétrons para formar uma sopa principalmente de nêutrons que eventualmente são compactados em até duas vezes a densidade de um núcleo atômico. Logo, no núcleo interno ainda não está claro que forma assume a matéria [51]. Uma das teorias é que os nêutrons podem dominar todo o interior da estrela, enquanto outra levanta a hipótese que a pressão compacta o material em partículas ou estados mais exóticos.

Dado que nenhum experimento de laboratório pode reproduzir as condições nos núcleos das estrelas de nêutrons, a única opção para estudar o estado da matéria é através da observação das próprias estrelas, fazendo inferências do que acontece no interior dos corpos celestes a partir das propriedades básicas, como a massa e o tamanho. Entretanto, isto não é uma tarefa fácil já que somente foram descobertas cerca de duas mil estrelas de nêutrons, mas apenas um punhado delas foi estudado, geralmente monitorando a emissão de raios-X do gás em torno da estrela.

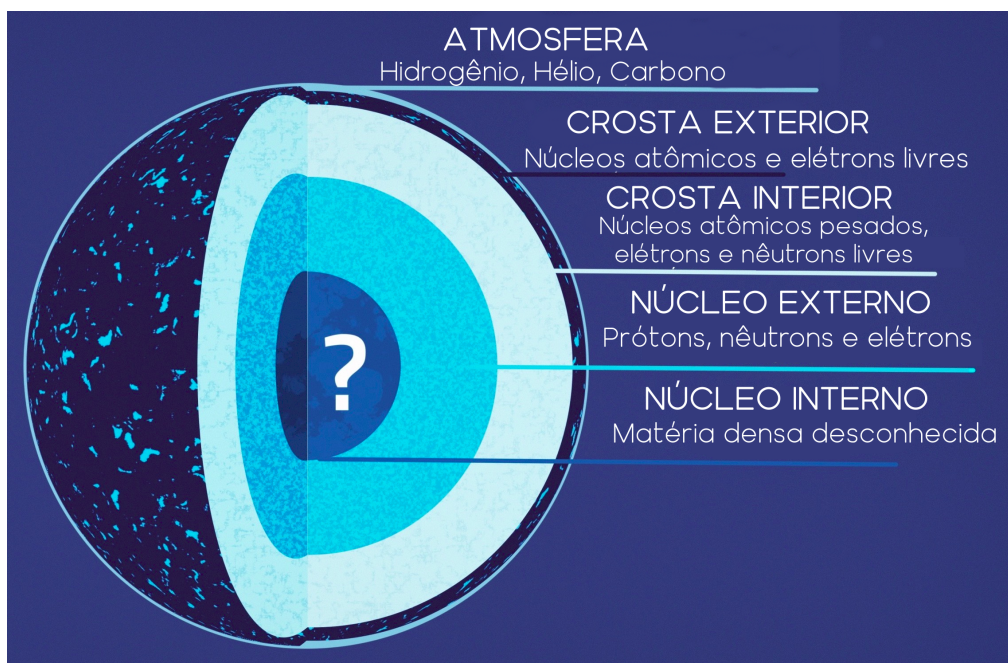


Figura 4.1: Pesquisadores acreditam que as estrelas de nêutrons estão compostas por camadas. Como se mostra na ilustração, o estado da matéria no seu núcleo interior ainda é desconhecido [51].

A existência de estrelas densas foi prevista teoricamente na década dos anos trinta pelo físico e matemático soviético Lev Landau [52, 53]. No seu estudo, Landau mencionou a possível existência de estrelas densas que se parecem com um núcleo atômico gigante. O entendimento de Landau de que prótons e elétrons constituem núcleos atômicos e não se aniquilam, fornece uma prova que esta previsão teórica foi feita inclusive antes da descoberta do nêutron. Embora a sugestão de que as fontes de energia estelar estivessem localizadas em “núcleos patológicos” (regiões de matéria muito densa onde as leis físicas foram violadas) fosse conveniente, era ingênua. Além disso ele acreditava que a produção de energia das estrelas poderia ser atribuída a uma quebra da conservação da energia na mecânica quântica. Hoje sabemos que esta última conjectura está errada [54]. Adicionalmente, Landau também calculou a massa máxima das estrelas anãs brancas, de maneira independente e posteriormente que Chandrasekhar [55] trazendo contribuições para a teoria deste tipo de estrelas. Ele apresentou a equação simples mais importante

$$M_0 = \frac{3,1}{m^2} \left(\frac{\hbar c}{G} \right)^{3/2}, \quad (4.1)$$

relacionando a massa máxima com quatro parâmetros físicos: a constante de Planck \hbar , a velocidade da luz c , a constante gravitacional universal G , e m a massa da matéria. Para o interior das estrelas anãs brancas se tem que $m \approx 2m_p$, com m_p a massa do próton, o qual dá o valor bem conhecido $M_0 \approx 1,44M_\odot$, onde M_\odot é a massa do Sol, enquanto Landau obteve o valor de $M_0 \approx 1,5M_\odot$ (Chandrasekhar originalmente obteve erroneamente o valor de $M_0 \approx 0,95M_\odot$, dado que assumiu o valor de $m = 2,5m_p$) [54]. Embora ele não escrevesse sobre a presença de nêutrons nas estrelas até quase seis anos depois, ele estava enfrentando nesta época a questão teórica do colapso de estrelas de massa maior que M_0 para densidades

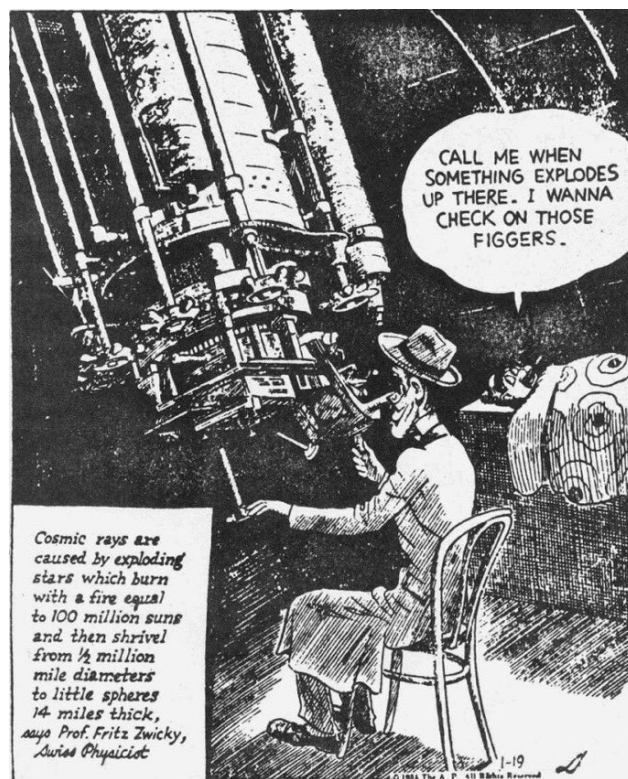


Figura 4.2: Cartoon publicado no jornal Los Angeles Times no dia 19 de Janeiro do 1934. Nele se faz referência as palavras do físico suíço Fritz Zwicky sobre a previsão da existência das estrelas de nêutrons [54].

cada vez mais altas.

No ano de 1932, foi anunciada a descoberta do nêutron pelo físico inglês James Chadwick [56, 57] apesar desta previsão ter sido feita no ano de 1920 por Ernest Rutherford [58]. Chadwick se inspirou no artigo de Curie e Joliot para fazer seus experimentos [59, 60] chegando na conclusão de ter identificado a nova partícula, inclusive ele conseguiu estimar a massa do nêutron, descobrindo ela estar muito perto da massa do próton, usando a conservação de energia e momento na Reação de Nocaute. Este evento permitiu abrir as portas para formular teorias mais precisas acerca do estado fundamental da matéria e seus constituintes.

Finalmente, os astrônomos Walter Baade e Fritz Zwicky fizeram a primeira previsão explícita de uma estrela de nêutrons [61], na tentativa de explicar a enorme energia liberada na explosão de supernova. Eles concluíram que as estrelas convencionais acabariam no final da sua vida como um objeto com um raio muito pequeno e formado por nêutrons agrupados densamente. Na figura 4.2 se mostra um cartoon onde se faz referência as palavras de Zwicky sobre a previsão da existência de estrelas densas formadas por nêutrons que podem ser empacotados muito mais próximos do que núcleos e elétrons comuns. Adicionalmente, eles concluíram que uma estrela de nêutrons representaria a configuração mais estável da matéria, já que a energia de “empacotamento gravitacional” dos nêutrons na estrela pode se tornar muito grande, e sob certas circunstâncias exceder em muitas frações o empacotamento nuclear comum. Somente por meio desse empacotamento eles poderiam entender a liberação

de energia em supernovas [62, 63]. Apesar de que as teorias e modelos atuais descrevem a matéria de um jeito bem diferente da concebida naquele momento, a maioria das previsões foram acertadas [64].

O seguinte aporte teórico fundamental no estudo das ENs foi desenvolvido no ano de 1939 em simultâneo pelos físicos Richard Tolman [65], Robert Oppenheimer e George Volkoff [66]. Em ambos trabalhos fazendo uso da Relatividade Geral, se calcularam as equações de equilíbrio hidrostático para uma estrela com simetria esférica. Estas equações são conhecidas como equações TOV e representam as equações básicas na construção dos modelos de ENs. Eles assumiram que a matéria estava composta por um gás ideal de nêutrons livres em alta densidade. Durante a década dos anos 30, apesar de que ainda não se incluíam nos modelos muitas das propriedades da interação forte da matéria nuclear e das partículas elementares que hoje se conhecem, diferentes equações de estado foram desenvolvidas [64]. Nos artigos de Harrison, Wakano e Wheeler [67], Cameron [68, 69], Ambartsumyan e Saakyan [70], e Hamada e Salpeter [71] contêm discussões detalhadas sobre a equação de estado e modelos de estrelas de nêutrons. Posteriormente, na década dos anos 60 as ENs não tiveram tanto protagonismo na comunidade astronômica devido às dificuldades na observação de objetos com áreas tão pequenas e com brilho muito fraco para ser observadas a distâncias astronômicas com telescópios ópticos, e foram caracterizadas mais como objetos teóricos hipotéticos que como objetos reais [72].

No entanto, a descoberta de fontes cósmicas de raios-X não solares no ano de 1962 [73] gerou uma grande onda de interesse nas ENs. Um número considerável de teóricos especulou independentemente que o telescópio de raios-X estava observando uma estrela de nêutrons jovem e quente, e eles começaram a calcular febrilmente o processo de resfriamento das ENs. No ano de 1963, foi identificado o primeiro “objeto quase estelar” (QSO pelas suas siglas em inglês ou Quasar). O objeto denominado como *3C 273* tinha um desvio ao vermelho de $\delta\lambda/\lambda = 0,158$, o qual era um resultado sem precedentes para uma estrela “normal” [74]. Este descobrimento despertou mais o interesse nas ENs, surgindo a possibilidade de que os grandes desvios para o vermelho observados das linhas espectrais para os quasares pudessem ser atribuídos ao desvio para vermelho gravitacional na superfície de um objeto compacto. Os argumentos mostrando que o maior desvio ao vermelho de um quasar já excedia o máximo desvio ao vermelho gravitacional de uma estrela de nêutrons estável, rapidamente dissipou qualquer conexão entre quasares e estrelas de nêutrons isoladas [72].

Em qualquer caso, com a descoberta de fontes de raios-X e dos quasares, dezenas de teóricos focaram sua atenção nas propriedades de equilíbrio das estrelas compactas e no colapso gravitacional das estrelas. Mas, apesar desse crescente esforço, a maioria dos físicos e astrônomos não levava muito a sério a possibilidade da existência das ENs. Este panorama mudou repentinamente no ano de 1967, quando foi detectada a primeira ENs pela estudante Jocelyn Bell, a partir da observação de ondas de rádio [75]. A estudante detectou acidentalmente uma fonte de rádio fraca e variável com uma antena que tinha sido construída com a finalidade de estudar ondas de rádio de fontes astronômicas por conta do vento solar. A periodicidade do sinal resultou ser extremamente constante, o qual gerou inicialmente a suspeita que poderia se tratar de um sinal de origem artificial, emitido por algum satélite artificial, ou inclusive se pensou que poderia ser um sinal emitido por tecnologia desenvolvida por alguma forma de vida extraterrestre. Foi por esta razão que originalmente chamaram

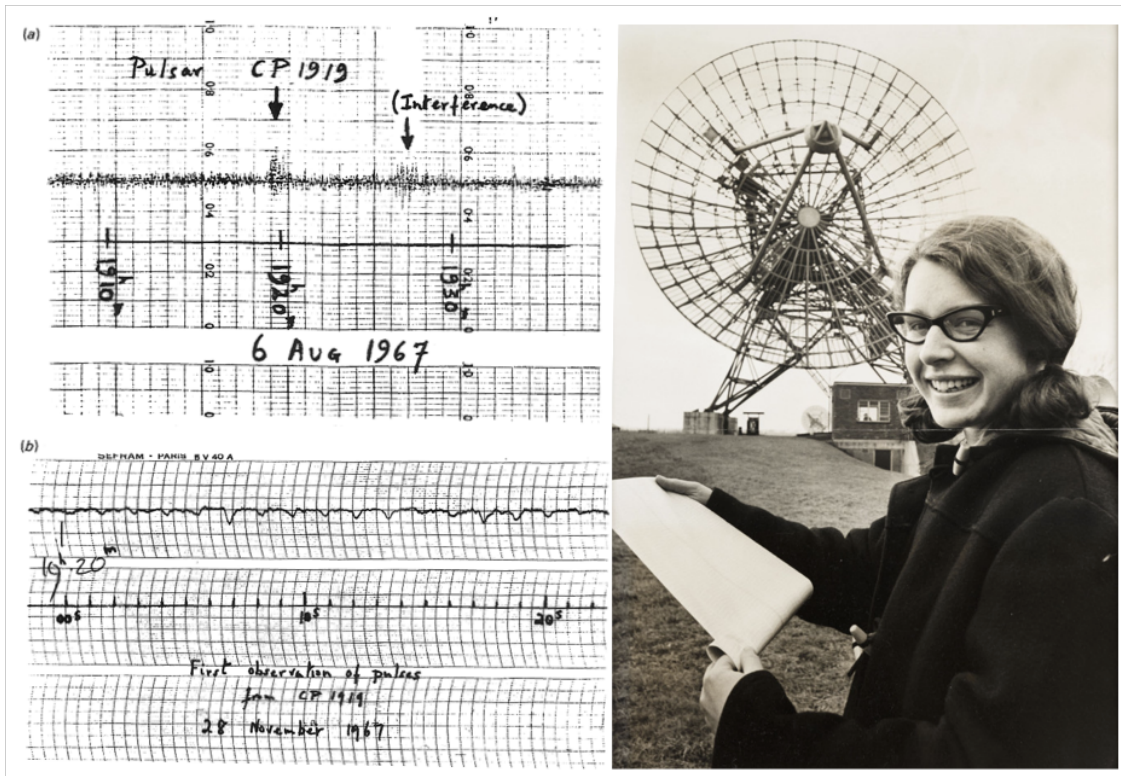


Figura 4.3: Depois de detectar sinais inesperados no mesmo local no céu, a estudante Jocelyn Bell observou pulsos individuais da nova fonte no final de 1967 [76].

a fonte como LGM (pela suas siglas em inglês para “Pequeno homem verde”). Finalmente se entendeu que a fonte, o pulsar, estava localizada além do nosso Sistema Solar e que era o resultado da oscilação de uma ENs. No ano de 1968, Gold [77] propôs que estas estrelas eram ENs em rotação e com campos magnéticos muito fortes, descartando a hipótese de um objeto compacto oscilando. Os polos do campo magnético do pulsar, inclinados na direção do eixo de rotação, giram junto com a estrela e a radiação, apontada na direção destes polos, gera o efeito de pulsação quando o feixe de ondas de rádio aponta na direção da Terra.

No outono de 1968, foram descobertos quase simultaneamente o pulsar da Vela [78] e o pulsar do Caranguejo [79, 80], ambos catalogados como remanescentes de Supernovas e que forneceram evidências da formação das ENs depois das explosões de supernovas. A nebulosa do Caranguejo, por exemplo, é o remanescente da explosão de supernova observada pelos astrônomos chineses em 1054 d.C. Adicionalmente, observações no óptico e em raios-X de fontes binárias de raios-X permitem determinar as massas das ENs em alguns desses sistemas, tendo a descoberta do primeiro pulsar binário por Hulse e Taylor no ano de 1975 [81] também oferece uma oportunidade para medir a massa de uma estrela de nêutrons. Depois da década dos anos 70, começou a chamada época moderna no estudo das ENs, a partir deste momento se construíram progressivamente os modelos de ENs que vem até nossos dias.

Desde meados dos anos 90 do século passado, foram identificadas algumas outras famílias de ENs, onde a grande variedade depende dos fenômenos de emissão eletromagnética associados às estrelas: *Pulsares Anômalos de raios-x* (AXP), *Repetidores de raios- γ* (SGR)

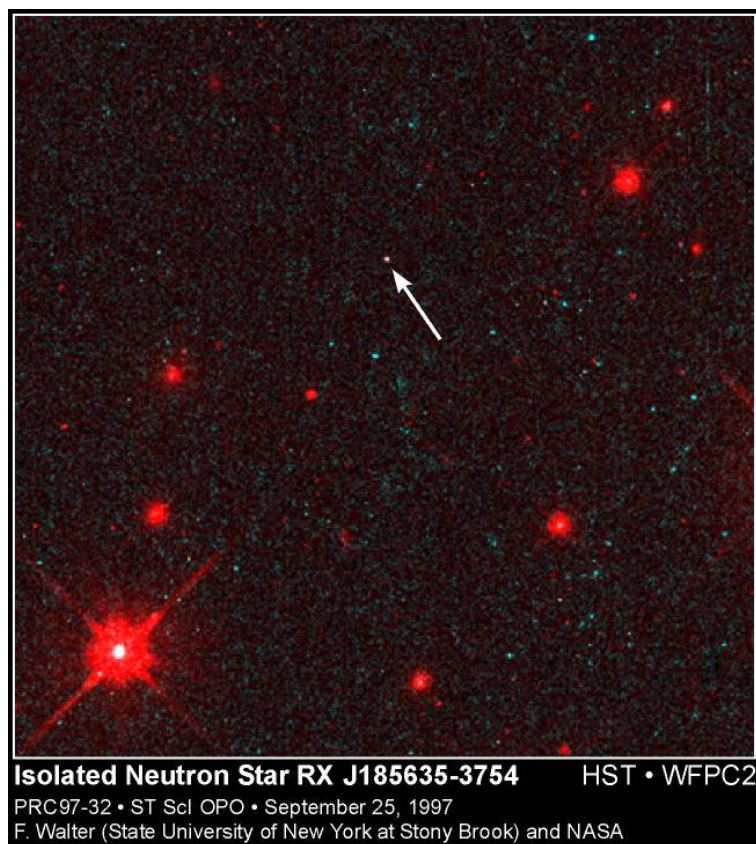


Figura 4.4: Imagem da EN isolada RX J8566-3754 capturada pelo Telescópio Espacial Hubble na ordem do óptico [85, 86].

e *Pulsares Isolados*. Na atualidade os Repetidores e os Pulsares Anômalos são comumente utilizados para representar *Magnetares*, ambos associados à presença de campos magnéticos superficiais extremamente fortes, $B_{sup} \sim 10^{15}$ Gauss. Os SGR são emissores de raios- γ em forma de rajadas irregulares e de curta duração. Enquanto que os AXP emitem pulsos de raios-X com grande luminosidade e em períodos que tem uma duração de vários segundos. Pelo menos uns 30 Magnetares têm sido confirmados [82, 83].

Finalmente, as ENs isoladas emitem um espectro térmico centrado nos raios-X suaves, incluindo uma componente fraca no óptico ou em ultravioleta. Este tipo de estrelas são encontradas no centro de algum remanescentes de supernova, apresentando um dobre espectro térmico originado pela presença do gás quente. Não existe uma população muito grande de estas ENs, mas temos o conjunto das *As 7 magnificas*, que são de grande relevância e renomada particularidade [84]. Na imagem 4.4 temos a observação uma de estas magnificas estrelas, a EN isolada RX J856.5-3754 realizada em 1997 pelo Telescópio Espacial Hubble [85].

4.1.1 Como as Estrelas de Nêutrons são formadas

As ENs são criadas depois do colapso gravitacional do núcleo de estrelas massivas, com massas superiores a 8 massas solares (M_{\odot}), no final da sua vida desencadeando uma explosão de Supernova tipo II. O resultado é uma estrela com uma massa da ordem de $1,5 M_{\odot}$ com um raio de ~ 12 km e com uma energia central n_c tão alta quanto 5 até 10 vezes a densidade

de equilíbrio nuclear $n_0 \cong 0,16 \text{ fm}^{-3}$ de elétrons e prótons encontrados em núcleos em experimentos de laboratórios. Portanto, as ENs são umas das formas mais densas de matéria no Universo observável [87–89]. Estas estrelas têm uma temperatura superficial da ordem de $10^6 K$, onde sua maior emissão térmica está na ordem dos raios-X. Durante o processo de colapso da estrela progenitora, a conservação do momento angular e o fluxo magnético gera que a ENs adquira velocidades de rotação muito altas, com períodos desde segundos até milissegundos, e com campos magnéticos extremamente intensos, desde 10^{12} Gauss até 10^8 Gauss na sua superfície. Justamente, por estas propriedades é possível associar as ENs com os pulsares [90].

Nos núcleos das ENs dominam os nêutrons, contudo existem também prótons (e suficientes elétrons e múons para neutralizar a matéria). Em densidades supranucleares podem aparecer partículas exóticas como bárions [90,91], condensado de mésons (píons ou kaons), ou mesmo quarks desconfinados. Espera-se que os férmions, seja na forma de hádrons ou quarks desconfinados, também exibam superfluidez e supercondutividade [92]. Estrelas recém nascidas ou protoestrelas de nêutrons, são ricas em léptons, principalmente elétrons e^- e neutrinos do elétron ν_e . Acredita-se que estes neutrinos desempenhem um papel crucial no mecanismo de explosão de supernova. Um dos aspectos mais notáveis é que os neutrinos ficam temporariamente presos dentro da estrela durante o colapso. A seção transversal típica dos neutrinos é $\sigma \approx 10^{-40} \text{ cm}^2$, resultando em um caminho livre médio $\lambda \approx (\sigma n)^{-1} \approx 10 \text{ cm}$, onde o número de densidade bariônica vai desde $n \cong 2$ até $3n_0$. Este comprimento é muito menor do que o raio da protoestrela de nêutrons, a qual ultrapassa os 20 km. A energia de ligação gravitacional liberada no colapso de um estrela progenitora com núcleo semelhante a uma anã branca é $eGM/5R^2 \cong 3 \times 10^{53} \text{ erg}$ (onde G é a constante gravitacional), sendo este valor 10% da sua energia de massa total Mc^2 . Logo, a energia cinética do remanescente em expansão está na ordem de 1×10^{51} até $2 \times 10^{51} \text{ erg}$, e a energia total irradiada em fótons é ainda mais reduzida em um fator de 100. Quase toda a energia é transportada por neutrinos e antineutrinos de todos os sabores em proporções aproximadamente iguais [92].

A evolução de protoestrela de nêutrons prossegue por vários estágios distintos e com vários resultados, conforme se mostra na figura 4.5. O colapso do núcleo se interrompe quando a densidade do interior atinge n_0 , isto desencadeia a formação de uma onda de choque no manto externo do núcleo. A onda de choque se propaga entre o manto entre 100 a 200 km antes de parar, tendo perdido energia tanto com os neutrinos e com a dissociação nuclear do material que atravessou (estágio 1). Neste ponto, o núcleo tem uma massa $M_c \simeq 0,7 M_\odot$ cercado pelo manto de baixa densidade e alta entropia ($5 < s < 10$). Aparentemente, os neutrinos do núcleo, auxiliados talvez pela rotação, convecção e os campos magnéticos, eventualmente ressuscitam a onda de choque, que em segundos acelera expelindo o manto estelar. A protoestrela de nêutrons se encolhe rapidamente devido às perdas de pressão pela emissão de neutrinos e á deleptonização (estágio 2). A fuga dos neutrinos desde o interior acontece em um tempo de difusão igual a $\tau \cong 3R^2/\lambda c \approx 10 \text{ s}$, onde λ representa o livre caminho médio dos neutrinos. Esta relação genérica ilustra como a equação de estado e a composição, as quais determinam tanto R como λ , influenciam as escalas temporais de evolução das estrelas. A energia de ligação total, que é principalmente uma função da massa estelar e do raio, é uma das grandezas medidas com mais precisão a partir de observatórios de neutrinos. Os neutrinos observados na supernova 1987A localizada na Grande Nuvem de Magalhães confirmou esta escala de tempo e a liberação geral de energia [93–95].

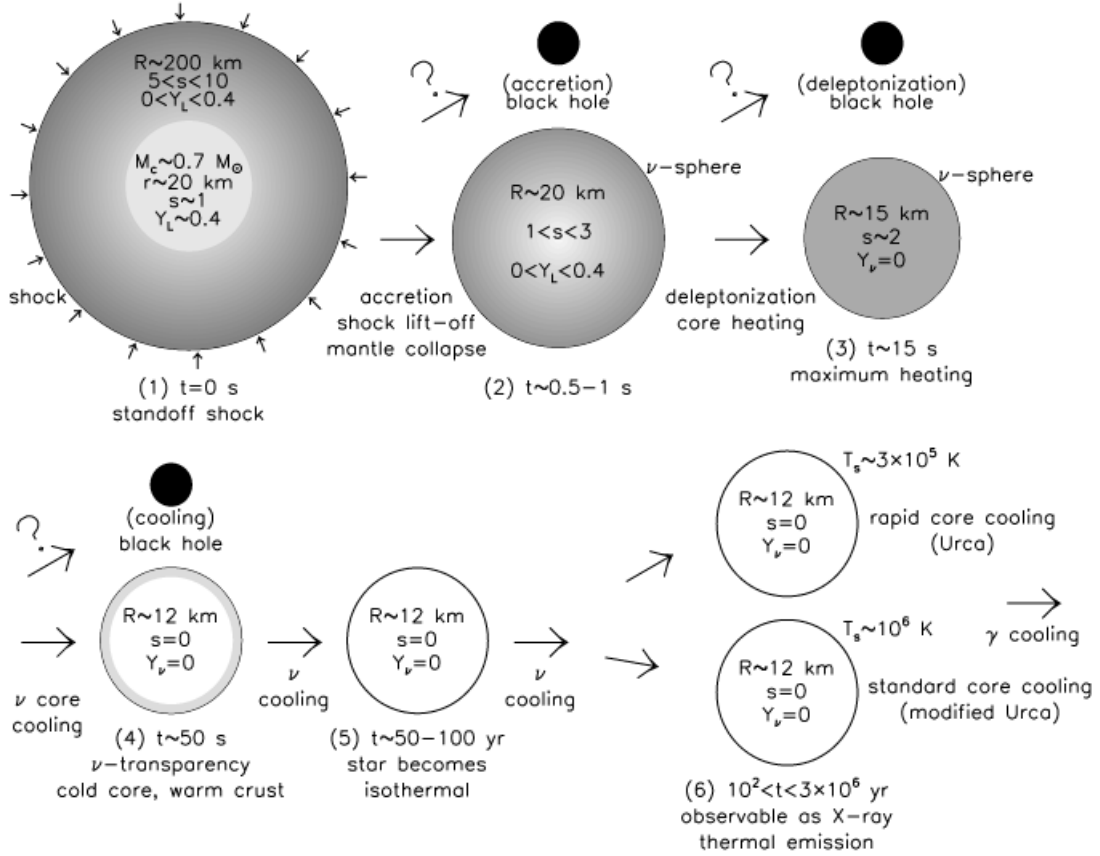


Figura 4.5: Esquema da formação e evolução de uma ENs. Se mostram as principais etapas da evolução com seus tempos característicos t , o raio r , a entropia por bárion escrita em termos da constante de Boltzmann, abundância de léptons Y_L e abundância de neutrinos Y_ν [96].

A perda de neutrinos gera uma fase de desleptonização do núcleo em um período de tempo de 10-15 s (estágio 3). A difusão de neutrinos de altas energias (200-300 MeV) desde o núcleo até a superfície, onde eles escapam como neutrinos de baixa energia (10-20 MeV) gera grandes quantidades de calor no interior da estrela. A entropia do núcleo se duplica, produzindo temperatura no intervalo de 30 – 60 MeV, durante este tempo os neutrinos continuam sendo emitidos desde a superfície efetiva da estrela [96]. Matéria desconhecida e estranha, em forma de híperons, um condensado de Bose, ou matéria de quarks, que é comprimida a densidades extremamente grandes quando os neutrinos estão presos na matéria, pode aparecer no final da fase de desleptonização. A aparição desta nova matéria, leva a uma diminuição na massa máxima teórica que a estrela é capaz de suportar.

Algumas protoestrelas de nêutrons não sobrevivem a sua evolução inicial, colapsando novamente e dando origem a um buraco negro. Isto, pode acontecer por duas razões diferentes: i) protoestrelas de nêutrons sofrem processos de acreção da massa que foi expelida pelas ondas de choque. Antes desta acreção acabar, a massa da estrela já tem excedido sua massa máxima, gerando o novo colapso gravitacional do objeto e interrompendo a emissão de neutrinos. ii) A massa de uma protoestrela de nêutrons é maior em relação a uma estrela fria, devido aos léptons e a energia térmica presentes na protoestrela. Esta massa adicional

está por baixo da massa máxima das ENs mas ainda é maior de que a massa de uma ENs estável, levando ao colapso gravitacional e formando o buraco negro [92].

Assim como as Anãs Brancas, as ENs também tem limite inferior e superior para a quantidade de massa. O limite superior é tem uma origem relativística e o valor é desconhecido, mas se encontra no intervalo entre 1,44 até 3 M_{\odot} . O limite superior foi calculado com base na Relatividade de Einstein, no princípio da Causalidade e no princípio de Le Chatelier [97], e onde se segue que a velocidade do som na matéria densa é menor que a velocidade da luz. Enquanto o limite inferior, representa a medição com maior precisão da massa de um pulsar, $1,4408 \pm 0,0003 M_{\odot}$, no pulsar binário PSR 1913+16 [92,98]. O valor mínimo estável de massa de uma estrela de nêutrons está cerca de $0,1 M_{\odot}$, embora um mínimo mais realista resulte da origem de uma estrela de nêutrons em uma supernova. Protoestrelas de nêutrons ricas em léptons não são estáveis se suas massas são menores que $1M_{\odot}$.

Neste ponto, as protoestrelas de nêutrons podem ser consideradas como pobres em léptons, mas ainda está quente. Se bem a estrela tem um número neto de neutrinos igual a zero, pares de neutrinos de todos os sabores, produzidos termicamente, são abundantes e dominam a emissão. A difusão continua de neutrinos começa a esfriar o interior da estrela, mas energia média dos neutrinos diminui e o livre caminho livre aumenta. Dado que a seção transversal $\sigma \propto \lambda^{-1}$ aumenta como o quadrado da energia média do neutrino, a condição $\lambda > R$ é alcançada em 50 s (estágio 4). Neste ponto, a estrela começa a ser transparente para os neutrinos e sua taxa de resfriamento se acelera.

4.1.2 Estrutura Interna e Composição

Sabemos que as ENs são o segundo objeto mais denso no Universo, sendo os buracos negros os primeiros. Logo, em muitos aspectos as ENs podem ser consideradas como núcleos gigantes com $N \approx 10^{57}$. Se considera que estas estrelas estão formadas por 5 regiões, figura 4.1: o núcleo interno e o externo, a crosta interna e a exterior e a atmosfera. A atmosfera e a crosta exterior, também conhecida como envelope, contêm quantidades insignificantes de massa. A matéria nestas duas regiões está composta por plasma. A atmosfera tem apenas 1 cm de espessura, mas controla a distribuição de energia espectral observada. Em uma aproximação de ordem zero, essa distribuição é de corpo negro, mas a composição e a intensidade do campo magnético na superfície redistribuem a energia. A segunda região é o envelope, a qual atua como isolante térmico. A temperatura efetiva da estrela, depende de sua composição: estrelas com um atmosfera hidrogenada parecem mais frias do que aquelas com atmosferas compostas de elementos mais pesados [92,99].

A seguinte região é a crosta interior, e se estende entre 1 a 2 km baixo a superfície. Nesta região se tem densidades com magnitudes entre 10^4 g/cm^3 e $4 \times 10^{11} \text{ g/cm}^3$. Adicionalmente, esta é uma região sólida composta por uma rede de cristais de Coulomb de núcleos atômicos ricos em nêutrons e submersos em um gás uniforme de elétrons. Estes cristais também são encontrados no interior das estrelas anãs brancas [100]. A medida que a densidade aumenta, e dado que a energia eletrônica de Fermi aumenta rapidamente com a densidade, torna-se energeticamente favorável para os elétrons serem capturados pelos prótons, gerando a formação de cristais de Coulomb de núcleos progressivamente mais ricos em nêutrons. A progressão começa com núcleos com ^{56}Fe , o núcleo com menor massa por nucléon, e se prevê que termine

com o núcleo exótico e rico em nêutrons ^{118}Kr [101]. O núcleo mais estável em uma dada densidade surge da competição entre a energia eletrônica de Fermi (a qual favorece núcleos com Z baixos) e a energia de simetria nuclear (que favorece núcleos com $N \simeq Z$) [102]. Eventualmente, a assimetria entre o número de nêutron-próton torna-se muito grande para que os núcleos absorvam mais nêutrons e este excesso de nêutrons forma um vapor de nêutrons diluído, provavelmente superfluido. Isto sinaliza a transição da crosta para o núcleo externo. Com uma densidade de gotejamento de nêutrons de cerca de $4 \times 10^{11} \text{ g/cm}^3$, ^{118}Kr é incapaz de reter mais nêutrons. Para densidades que se aproxima da densidade de saturação da matéria nuclear ($\approx 2,5 \times 10^{14} \text{ g/cm}^3$), a uniformidade no sistema será restaurada.

A transição desde o cristal altamente ordenado para o líquido uniforme é interessante e complexa. Isto ocorre porque as escalas de distância na fase cristalina (onde domina a interação de Coulomb de longo alcance) e na fase uniforme (onde domina a interação forte de curto alcance) se tornam comparáveis. Esta situação dá origem a um fenômeno caracterizado pela existência de um número muito grande de configurações de baixa energia, impossibilitando a possibilidade de minimizar simultaneamente todas as interações elementares no sistema. Este fenômeno é conhecido como *Frustração de Coulomb* [101]. Na medida que essas escalas de comprimento se tornam comparáveis, a competição entre as interações elementares resulta na formação de uma miríade de estruturas complexas radicalmente diferentes em topologia, mas extremamente próximas em energia. Dado que essas estruturas complexas, chamadas coletivamente de *Pasta nuclear*, são muito próximas em energia, se acredita que a transição do cristal altamente ordenado para a fase uniforme deve ocorrer por meio de uma série de mudanças na dimensionalidade e topologia dessas estruturas.

Finalmente, temos o núcleo que constitui quase o 99% da massa da estrela. A composição do núcleo interno é amplamente desconhecida: pode variar de uma extensão do núcleo externo e ser principalmente nucleônico, ou ser uma mistura de núcleons e matéria estranha em forma de híperons, um condensado de Bose ou quarks desconfiados. Em casos extremos, os núcleons podem dar lugar inteiramente a quarks desconfiados no centro, embora isso pareça improvável. Felizmente, os detalhes da composição não afetam a estrutura geral da estrela, a qual é controlada pelas equações da estrutura estelar da Relatividade Geral (equações TOV) que como serão apresentadas na próxima seção.

4.1.3 Estrutura global das Estrelas de Nêutrons

Aspectos globais das ENs, tais como a relação entre a massa e o raio, são determinados pelas equações de equilíbrio hidrostático. Logo, na Relatividade Geral para um objeto com simetria esférica estas equações são conhecidas como equações TOV (Tolman- Oppenheimer-Volkov) [65, 66],

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{G}{c^4} \frac{(mc^2 + 4\pi pr^3)(\varepsilon + p)}{r(r - 2Gm/c^2)}, \quad \frac{dm}{dr} = \frac{4\pi r^2 \varepsilon}{c^2}, \quad (4.2)$$

onde p é a pressão, $\varepsilon = \rho c^2$ é a densidade de energia, e m é a massa gravitacional contida no interior do raio r . Estas equações têm condições de contorno: para $r = 0$, todos os gradientes radiais e a massa m são iguais a zero. A pressão p é igual a zero na superfície com $r = R$ e $m = M$. Portanto, dada uma equação de estado (EOS) onde se especifica $p(\varepsilon)$, determina

uma única curva massa-raio ($M - R$) [103].

Por outro lado, para temperaturas baixas e para matéria com interação fraca em equilíbrio, o único aspecto da EOS que é relevante para a estrutura global das ENs é a relação entre a pressão e a densidade de energia. A composição da matéria, que usualmente é parametrizada pelo número de elétrons por bárions Y_e , é determinada implicitamente em cada densidade n mediante a minimização da densidade de energia ε , dando como resultado a condição de equilíbrio- β ,

$$\left(\frac{\partial\varepsilon/n}{\partial Y_e}\right)_n = \mu_e + \mu_p - \mu_n = 0, \quad (4.3)$$

onde μ_e, μ_p e μ_n são os potenciais químicos dos elétrons, prótons e nêutrons, respectivamente [104]. Para EOS hadrônicas, $\varepsilon_{surf} = 0$, embora este não seja o caso para estrelas com núcleos com matéria pura de quarks estranha (SQM, pelas sua sigla em inglês Strange Quark Matter) onde a densidade de energia permanece finita. As EOS hadrônicas do tipo $p = Kn^\gamma$ consiste em dois polítrópos, onde os expoentes $\gamma_1 = 4/3$ e $\gamma_2 = 3$ tem relação com a pressão de transição $p_t = p_s/8$, onde $p_s = 2,5 \text{ MeV fm}^{-3}$ é a densidade de saturação (geralmente expressada como densidade bariônica). Assim, a transição acontece a densidades bariônicas $n_s/2$.

Uma série de conclusões podem ser extraídas das curvas $M - R$. Primeiro, é uma consequência da Relatividade Geral que exista uma massa máxima para qualquer equação de estado causal (EOS), a causalidade é a condição onde a velocidade isotérmica do som $\sqrt{dp/d\rho}$ nunca excede a velocidade da luz. Na gravidade Newtoniana, este valor máximo para a massa não existe. Segundo, a natureza da equação de estado dita a inclinação da curva $M - R$, onde isto pode ser concluído a partir da análise dimensional das equações ignorando os termos relativísticos. No limite newtoniano, as equações do equilíbrio hidrodinâmico são $dp/dr = -G\rho m/r^2$ e $dm/dr = 4\pi\rho r^2$, onde $\rho = nm_b$. Logo, se a EOS é dominada por uma lei politrópica $p = Kn^\gamma$, a partir do análise dimensional temos que

$$M \propto K^{1/(2-\gamma)} R^{(4-3\gamma)/(2-\gamma)}. \quad (4.4)$$

Para densidades de subsaturação, a matéria é dominada pela pressão de degenerescência relativística de elétrons para a qual $\gamma = 4/3$: neste caso de pequenas massas temos que $M \propto R^0$, então a massa se torna independente do raio. No caso que a matéria próxima ou moderadamente maior do que n_s , aplicável para massas intermediárias, temos que $\gamma \approx 2$ e onde $R \propto M^0$, de modo que o raio se torna independente da massa, mas dependente da EOS. O que controla o valor do raio é K na lei pressão-densidade. A massa típica de uma ENs, $1,4 M_\odot$, é caracterizada por uma energia central entre $2-3\rho_s$, onde a densidade média é quase ρ_s . Isso sugere fortemente que o valor de K para valores muito pertos de ρ_s , está fundamentalmente relacionado ao raio típico de uma ENs. Adicionalmente, isto é de muita importância, porque sugere que a determinação dos raios das ENs está dentro do âmbito dos estudos tanto da estrutura nuclear como da matéria de nêutrons.

Correlação entre raio-pressão

Lattimer e Prakash [105] descobriram que o raio das ENs estão altamente correlacionados com a pressão da matéria deste tipo de objetos nas proximidades de ρ_s . A equação 4.4 prediz

que a correlação deve ser da forma $R \propto \sqrt{p}$, mas devido aos efeitos relativísticos a relação fenomenológica fica como $R \propto p^{1/4}$. Logo, a relação pode ser expressada como

$$R_M = C(n, M)[p_\beta(n)/\text{MeV fm}^{-3}]^{1/4}, \quad (4.5)$$

onde R_M é o raio de uma estrela com massa M e C são coeficientes que dependem da densidade e a massa. Embora $C(n, M)$ se torne mais preciso para densidades mais altas, p_β pode ser expressa de forma relativamente independente em termos de S_ν e L para $n = n_s$, duas quantidades que veremos um pouco mais para frente. Em [105] calcularam-se estes coeficientes para estrelas com massas $M = 1,4 M_\odot$, $C(n_s, 1,4M_\odot) = 9,30 \pm 0,60$ km e $C(2n_s, 1,4M_\odot) = 5,72 \pm 0,25$ km. Posteriormente, Lattimer e Lim [106], recalcularam estes valores usando EOS restringidas para aquelas estrelas que satisfazem $M_{max} > 2M_\odot$ encontrando que $C(n_s, 1,4M_\odot) = 9,22 \pm 0,49$ km com um desvio padrão 20% que o obtido anteriormente. Para $2n_s$, eles obtiveram $C(n_s, 1,4M_\odot) = 5,68 \pm 0,14$. Embora, estes valores derivam de um ajuste muito mais refinado quando aplicado a densidades acima da densidade de saturação, por exemplo $1,5-2n_s$, a pressão da matéria estelar não pode ser calculada com precisão usando somente os parâmetros de simetria S_ν e L nessas densidades, portanto a equação 4.5 avaliada em n_s também deve ser considerada.

A pressão da matéria das ENs perto do ρ_s é principalmente determinada pela energia de simetria nuclear. Para densidades por baixo de $\rho_s/3$, a pressão é principalmente devida aos elétrons degenerados relativísticos. Para densidades mais altas, os núcleos se dissolvem e a pressão torna-se cada vez maior devido à interação com os bárions não-relativísticos. Para matéria nuclear, com uma fração de prótons $x = 1/2$, se tem pressão bariônica igual a zero para ρ_s . No entanto, a matéria de uma estrela de nêutrons com equilíbrio- β tem $x \ll 1/2$: a energia no mínimo com respeito a x resulta da condição de equilíbrio- β , $\mu_n - \mu_p = \mu_e$ [99]. A energia pode ser descrita como uma expansão quadrática em x da seguinte forma

$$E(n, x) \simeq E(n, 1/2) + S_2(n)(1 - 2x)^2, \quad (4.6)$$

onde o coeficiente de expansão S_2 está intimamente relacionado á energia de simetria nuclear definida como $S_\nu(n) = E(n, 0) - E(n, 1/2)$. Agora, fazendo uma expansão em Série de Taylor para S_2 ,

$$S_2(n) \simeq S_\nu + L(n - n_s)/(3n_s) + \dots, \quad (4.7)$$

onde $S_\nu \simeq 31$ MeV e $L \simeq 50$ MeV, valores extraídos das observações astrofísicas e da sistemática nuclear. Na aproximação quadrática, as propriedades da matéria de nêutrons pura em n_s são facilmente determinadas

$$E(n_s, 0) \simeq S_\nu + E(n_s, 1/2) \equiv S_\nu - B, \quad p(n_s, 0) \simeq Ln_s/3, \quad (4.8)$$

onde $B \simeq -16$ MeV é a energia de ligação para a matéria simétrica em n_s . Para matéria em equilíbrio- β em ENs, a fração de prótons a n_s é pequena

$$x_\beta \simeq (4S_\nu/\hbar c)^3(3\pi^2n_s)^{-1} \simeq 0,04. \quad (4.9)$$

A pressão para n_s em equilíbrio- β em segunda ordem é igual a

$$p(n_s, x_\beta) \simeq \frac{Ln_s}{3} \left[1 - \left(\frac{4S_\nu}{\hbar c} \right)^3 \frac{4 - 3S_\nu/L}{3\pi^2n_s} \right]. \quad (4.10)$$

Portanto, o conhecimento de S_ν e L é suficiente para prever os raios das ENs. Dados nucleares estão disponíveis para estimar os valores destas quantidades. A maneira mais fácil de ver a conexão com os dados experimentais é usando as massas nucleares e as fórmulas de massa. A base do modelo da Gota Líquida é a fórmula de massa de Bethe-Weizsäcker, também conhecida como fórmula semi-empírica de massa (SEMF) [107],

$$E(A, Z) = -BA + a_s A^{2/3} + a_C Z^2 A^{-1/3} + S_\nu A I^2, \quad (4.11)$$

onde $a_s \approx 18$ MeV e $a_C \approx 0,75$ MeV, são conhecidos como termo de superfície e termo de Coulomb ou termo eletrostático, respectivamente, parâmetros calculados a partir do ajuste das energias de ligação, e $I = (N - Z)/(N + Z)$ é definida com a assimetria nuclear. Myers e Swiatecki [108] encontraram uma grande melhoria nos ajustes introduzindo o termo de assimetria de superfície $-S_s I^2 A^{2/3}$. O coeficiente de simetria de superfície é $S_s \approx 40$ MeV. Este modelo simples leva à previsão para o núcleo mais estável, a partir de $\partial(E/A)/\partial A = \partial(E/A)/\partial I = 0$,

$$A = \frac{2a_s - S_s I^2}{a_C(1 - I)^2} \simeq 60, \quad I = \frac{a_C A^{2/3}}{4(S_\nu - S_s A^{-1/3}) + a_C A^{2/3}} \simeq 1/8, \quad (4.12)$$

assim como a predição para o ponto de estabilidade de β ,

$$Z \simeq \frac{A}{2} - \frac{a_C A^{5/3}}{8} (S_\nu - S_\nu A^{-1/3})^{-1/3}. \quad (4.13)$$

É importante destacar que o ajuste para as massas nucleares no modelo de Gota Líquida restringe os parâmetros B, a_s, a_C, S_ν e S_s . Particularmente, os núcleos assimétricos restringem os valores de S_ν e S_s . Devido ao fato de haver um fator de $A^{1/3}$ entre as energias de simetrias e volume e superfície, estes parâmetros são individualmente mal determinados. No entanto, uma correlação estreita entre seus valores pode ser encontrada [107]. Analiticamente, as propriedades desta correlação podem ser determinadas [104].

4.1.4 Resfriamento das Estrelas de Nêutrons

Logo depois do início da transparência para os neutrinos, o núcleo continua se esfriando devido à emissão de neutrinos, mas a crosta exterior da estrela permanece quente e esfria menos rapidamente. Esta crosta impede a estrela atingir o equilíbrio térmico completo, já que age com uma manta isolante, e mantém a superfície relativamente quente com uma temperatura de $T \approx 3 \times 10^6$ K por até 100 anos (estágio 5 na figura 4.5). Esta escala de tempo é principalmente sensível ao raio da estrela e à condutividade térmica do manto, como poder ser observada a partir da relação aproximada para a difusão $\tau \cong \Delta R^2/\lambda$ onde ΔR é a espessura da crosta [109]. A temperatura da superfície após o interior da estrela se tornar isotérmica é determinada pela taxa de emissão de neutrinos desde o núcleo. A estrela emite fótons continuamente, predominantemente em raios-X, com uma temperatura efetiva T_{eff} que rastreia a temperatura interna, mas que é menor por um fator de ~ 100 . A energia perdida pelos fótons emitidos, é inundada pela emissão de neutrinos desde o interior até a estrela tenha cerca de 3×10^5 anos de idade (estágio 6 na figura 4.5).

O tempo total que permanece visível para os observadores terrestres ainda não é conhecido, mas há duas possibilidades do cenário: resfriamento padrão e aprimoramento. As

reações dominantes de resfriamento de neutrinos são do tipo geral, conhecidas como processos URCA¹, onde as partículas excitadas termicamente sofrem alternadamente decaimentos beta e beta inverso. Cada reação produz um neutrino ou antineutrino, antes de continuar perdendo energia térmica [111].

O processo mais eficiente de URCA é o processo direto envolvendo núcleons,

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e \quad p \rightarrow n + e^+ + \nu_e. \quad (4.14)$$

O processo direto de URCA envolvendo híperons, condensado de Bose e quarks também é possível. Em termos gerais, a taxa para o URCA direto é proporcional a T^4 e é tão grande que as temperaturas na superfície desabam para apenas algumas vezes 10^5 K, o que dificulta a observação em raio-X, exceto para estrelas muito próximas. Por outro lado, este processo é permitido somente se a energia e o momento podem ser conservados simultaneamente. Para isso, é preciso que a razão próton-nêutron exceda $1/8$, ou a fração de prótons seja $x \geq 1/9$, que está muito acima do valor encontrado na matéria das ENs no em torno de n_0 . Em uma mistura de nêutrons, prótons e elétrons, a fração de prótons x em equilíbrio- β satisfaz a relação [112]

$$x \cong 0.048[S_\nu(n)/S_\nu(n_0)]^3(n_0/n)(1-2x)^3, \quad (4.15)$$

onde se tem que $S_\nu \cong 30$ MeV, tipicamente. Como geralmente x aumenta com a densidade, o processo direto de URCA ainda pode ocorrer acima de algum limite de densidade. Porém, caso o processo direto não seja possível, o resfriamento dos neutrinos deve ocorrer pelo processo de URCA modificado, o qual inclui núcleons,

$$n + (n, p) \rightarrow p + (n, p) + e^- + \bar{\nu}_e, \quad p + (n, p) \rightarrow n + (n, p) + e^+ + \nu_e, \quad (4.16)$$

onde o núcleon adicional (n, p) ajuda na conservação do momento. O processo URCA modificado reduz por um fator de $(T/\mu_n)^2 \lesssim 10^{-4}$ até 10^{-5} comparado com o processo URCA direto, assim o resfriamento da ENs é correspondentemente mais lento. O cenário de resfriamento padrão assume que os processos diretos de URCA não podem ocorrer e prevê que as ENs devem permanecer observáveis por emissão térmica desde a superfície por até alguns milhões de anos [92]. Saber se o processo direto de URCA ocorre ou não em ENs é de fundamental importância. A dependência da densidade com a função de energia de simetria S_ν , determina os valores de x , equação 4.15, e o limiar da densidade em que ocorre o processo nucleônico direto de URCA. Também desempenha um papel essencial na determinação das densidades limiares de outras partículas, como híperons, píons, kaons, ou quarks, cujas existências desencadeiam outros processos diretos de URCA. Se a densidade central da estrela está por baixo do limiar do processo de URCA, o resfriamento aprimorado não pode ocorrer. Novamente a quantidade $S_\nu(n)$ desempenha um papel crucial para as ENs, apesar de sua incerteza inerente significar que não é possível saber se processos diretos de URCA podem acontecer nas ENs.

Adicionalmente, existem duas questões que afetam os processos de resfriamento das ENs: a superfluidez [112, 113] e a composição da Crosta Exterior ou envelope [114]. A superfluidez extingue o resfriamento desde o processo direto de URCA. Neste caso, quando a temperatura

¹O termo “URCA” foi tirado de um casino muito glamouroso, mas agora extinto, no Rio de Janeiro onde os jogadores perdiam dinheiro continuamente [110].

central cai por baixo da temperatura crítica do superfluido, o resfriamento rápido é encerrado. No caso de um superfluido, o resfriamento do núcleo e portanto, a temperatura da superfície estará entre aqueles valores previstos pelos modelos de resfriamento padrão e rápido. A emissão de neutrinos continua dominando até que a estrela tenha aproximadamente 1 milhão de anos, quando o resfriamento pelos fótons da superfície começa a dominar. A menos que o interior esfrie muito mais rapidamente, as emissões de raios-X das estrelas permanecem relativamente altas até a época de resfriamento pelos fótons [96]. Foi sugerido que várias ENs têm emissões térmicas observáveis em raios-X. Além disso, a estrela de nêutrons RX J185635-3754, que é a ENs mais próxima conhecida localizada a uma distância de aproximadamente 60 pc, tem UV detectável e emissões térmicas ópticas também. Esses objetos representam a melhor chance para medir o raio de uma ENs, especialmente se o desvio para o vermelho das linhas espectrais puder ser determinado.

A composição da Crosta exterior também desempenha um papel nas temperaturas inferidas na superfície. Embora seja comumente assumido que o envelope é dominado por núcleos de pico de ferro, pode não ser o caso. Os elementos leves (H ou He) têm opacidades menores de fótons, aumentando desse jeito a emissão de fótons na superfície. As ENs parecem mais quentes com crostas externas de elementos mais leves durante seus primeiros 100000 anos de resfriamento, mas eventualmente a situação se inverte [115].

As ENs são laboratórios perfeitos para o estudo da matéria densa e a física gravitacional. Observações de ENs de fontes como pulsares de rádio, sistemas binários de baixa massa com emissão de rajadas de raios-X e ENs com emissão térmica, estão estabelecendo limites para as massas das estrelas de nêutrons, raios, taxas de rotação, temperaturas e idades. As medições de massa restringem a equação de estado para as densidades mais altas e estabelecem limites firmes para a densidade mais alta possível de matéria fria. As medições de raios restringem a equação de estado na vizinhança da densidade de saturação nuclear e fornecem informações sobre a dependência da densidade da energia de simetria nuclear. Experimentos de laboratório e estudos teóricos de matéria neutrônica pura estão em notável acordo com os limites observacionais [99]. Consequentemente, estas estrelas são perfeitas candidatas para testar as novas previsões da teoria da gravidade em conjunto com ferramentas computacionais desenvolvidas especialmente para modelar sistemas astrofísicos complexos. Uma destas ferramentas é o código para Estrelas de Nêutrons em Rotação Rápida ou RNS (pelas suas siglas em inglês), o qual será explicado na próxima seção.

4.2 Código RNS

O código RNS (Rapidly Rotating Neutron Stars) é um programa computacional que constrói modelos de estrelas compactas, relativísticas e que giram rapidamente, usando equações de estado tabuladas fornecidas pelos usuários. O código foi desenvolvido por Nikolaus Stergioulas [116] baseando-se no método KEH [117] com posteriores modificações introduzidas por Cook, Shapiro e Teukolsky [118]. O programa simula modelos individuais, assim como sequências que incorporam modelos de massas fixas, massas em repouso, velocidade angular e momento angular. Adicionalmente, todos os modelos assumem rotação uniforme. O RNS está disponível publicamente no link <https://cgca.uwm.edu/index.html>, onde também é possível encontrar a documentação do código e uma lista de publicações feitas

usando o programa.

Por outro lado, o código usa uma grade uniforme 2-dimensional das variáveis $s = r/(r+r_e)$ e $\mu = \cos \theta$, onde r_e é a coordenadas radial no equador. A origem está em $s = 0$, o equador para $s = 0.5$ e o infinito em $s = 1$. O plano equatorial é quanto temos $\theta = \pi/2$, enquanto o polo é definido para $\theta = 0$. Se usamos $SDIV$ pontos na s -direção e $MDIV$ pontos na μ -direção, a posição na grade pode ser obtida usando as seguintes expressões

$$s[i] = 0.9999 \left(\frac{1-i}{SDIV-1} \right), \quad (4.17)$$

$$\mu[j] = \left(\frac{1-j}{MDIV-1} \right). \quad (4.18)$$

O tamanho padrão da grade é igual a $MDIV \times SDIV = 65 \times 129$. Esta configuração pode ser mudada editando o arquivo `Makefile`,

```
#STANDARD
SIZE = -DMDIV= 65 -DSDIV= 129
```

A função `make_grid` é chamada no inicio do código para configurar a grade numérica. A grade numérica é construída da forma seguinte

```

/*****
/* Create computational grid */
/* Points in the mu-direction are stored in the array mu[i]. */
/* Points in the s-direction are stored in the array s_gp[j]. */
*****/

void make_grid(double s_gp[SDIV+1],
               double mu[MDIV+1])

{
    int m, s;                /* counters */
    for(s=1;s<=SDIV;s++)
        s_gp[s] = SMAX*(s-1.0)/(SDIV-1.0);

    /* s_gp[1] = 0.0 corresponds to the center of the star
       s_gp[SDIV] = SMAX corresponds to infinity */

    /* SMAX is defined in the file consts.h */

    for(m=1;m<=MDIV;m++)
        mu[m] = (m-1.0)/(MDIV-1.0);

    /* mu[1] = 0.0 corresponds to the plane of the equator
       mu[MDIV] = 1.0 corresponds to the axis of symmetry */

```

```

/* s_gp[0] and mu[0] are not used by the program */
}

```

4.2.1 Compilando o código

O código RNS está escrito na linguagem de programação ANSI C e contém um código fonte contido em um arquivo Unix nomeado como `Makefile`. Antes de compilar pela primeira vez o arquivo `Makefile`, é recomendado verificar se o código está usando o compilador certo (o padrão é `-cc`), as flags corretas para escolher a opção da plataforma ANSI C (o padrão é `-std1`) e a otimização, dado que o padrão é `-O`. Se todas estas condições não são cumpridas, o arquivo `Makefile` deve ser modificado. Logo disto, quando o arquivo está certo, devemos fazer `make` para obter o executável `kepler`.

4.2.2 Equações de Estado

O programa precisa como dados de entrada ou input para executar a rotina uma equação de estado (EOS) tabulada e com temperatura zero. Dentro do código existe um arquivo contendo as EOS, onde são especificadas as quantidades densidade de energia (em g/cm^3), a pressão (em $dynes/cm^2$), a entalpia (em cm^2/s^2) e a densidade de números de bárions (em cm^{-3}). Logo, a entalpia vem definida como

$$H(p) = \int_0^p \frac{c^2 dp}{(\epsilon + p)}, \quad (4.19)$$

onde ϵ é a densidade de energia, p a pressão e c a velocidade da luz. O número de pontos deve ser limitado a 200. A função `load_eos` é chamada no início do código para carregar o arquivo da equação de estado especificado. O arquivo das EOS deve ser especificado fazendo uso da seguinte linha de comandos

```
./kepler -f nome do arquivo.
```

O programa “`HnG.c`” é incluído e converterá o arquivo da EOS o qual está na forma pressão *vs* densidade de energia para a forma requerida pelo RNS. Por outro lado, o RNS também pode calcular estrelas politrópicas, onde a equação de estado politrópica vem dada pela expressão

$$p = K \rho_0^{1+1/n}, \quad (4.20)$$

onde p é a pressão, ρ_0 é a densidade de massa bariônica, K é a constante politrópica e n é o índice politrópico. O programa usa as unidades adimensionais descritas em [118]. Para especificar um politropo com o índice n , devemos usar a seguinte linha de comandos

```
./kepler -q poly -N índice.
```

O arquivo desde onde são carregadas as EOS tem a seguinte estrutura

```

/*****
/* Load EOS file.
*/

```

```

/*****
void load_eos( char eos_file[],
               double log_e_tab[201],
               double log_p_tab[201],
               double log_h_tab[201],
               double log_n0_tab[201],
               int *n_tab)

{
    int i;                /* counter */
    double p,             /* pressure */
           rho,           /* density */
           h,             /* enthalpy */
           n0;            /* number density */

    FILE *f_eos;          /* pointer to eos_file */

    /* OPEN FILE TO READ */

    if((f_eos=fopen(eos_file, "r")) == NULL ) {
        printf("cannot open file:  %s\n",eos_file);
        exit(0);
    }

    /* READ NUMBER OF TABULATED POINTS */

    fscanf(f_eos,"%d\n",n_tab);

    /* READ EOS, H, NO AND MAKE THEM DIMENSIONLESS */

    for(i=1;i<=(*n_tab);i++) {
        fscanf(f_eos,"%lf %lf %lf %lf\n",&rho,&p,&h,&n0) ;
        log_e_tab[i]=log10(rho*C*C*KSCALE);    /* multiply by C^2 to get */
        log_p_tab[i]=log10(p*KSCALE);          /* energy density.  */
        log_h_tab[i]=log10(h/(C*C));
        log_n0_tab[i]=log10(n0);
    }
}

```

4.2.3 Parâmetros específicos do modelo e outras opções

O RNS possui muitas opções que permitem ao usuário especificar os parâmetros do modelo assim como escolher o formato do output. Desta maneira, o modelo a usar é definido ao especificar dois parâmetros: um deles sempre deve ser a densidade de energia central, e o outro pode ser a massa, a massa em repouso, a velocidade angular, o momento angular, ou

a proporção entre a coordenada raio polar e a coordenada raio equatorial. Por outro lado, para especificar os parâmetros anteriores devemos usar as seguintes flags,

- -e Densidade de energia central (g/cm^3)
- -r Razão entre os eixos
- -m Massa em M_{\odot} (M_{\odot} unidades de massa solar)
- -z Massa em repouso em M_{\odot}
- -o Velocidade Angular em $10^4 s^{-1}$
- -j Momento Angular in GM_{\odot}^2/c

O código vem escrito de maneira de construir diretamente um modelo quando especificamos a razão entre os eixos. Entretanto, ao especificar um parâmetro diferente, por exemplo, a massa, o código constrói pelo menos mais de dez modelos variando a razão entre os eixos, até ele encontrar um modelo para o qual o parâmetro escolhido está entre a tolerância dos valores especificados. A tolerância padrão ou erro relativo é igual a 10^{-4} , e pode ser mudada usando a seguinte flag,

-b *tolerância*.

A menor erro ou tolerância, mais modelos serão construídos. Por outro lado, um modelo é construído resolvendo iterativamente as equações de campo e a equação de equilíbrio hidrostático, até que a coordenada raio equatorial mude por menos do que a precisão relativa especificada. Logo, a precisão padrão é igual a 10^{-5} , e pode ser mudada com a seguinte linha de comandos

-d 0.

A convergência é monitorada imprimindo na tela a diferença relativa na coordenada raio equatorial de uma iteração com a próxima. Esta ação pode ser suprimida usando a seguinte flag

-a *tolerância*.

Em casos raros, tal como acontece quando temos um modelo instável com uma equação de estado muito rígida, a interação pode não convergir. Por conseguinte, estes casos podem ser corrigidos usando o fator de relaxamento na iteração. O fator de 0.8, geralmente ajuda a iteração convergir, dado que o padrão é igual a 1.0 e representa não relaxamento. Para especificar este fator, usamos a linha

-c *Fator de relaxamento*.

Existem ocasiões onde os parâmetros anteriores não são suficientes para fazer o programa compilar. Nestes casos, precisamos especificar para o código algumas rotinas para serem realizadas.

4.2.4 Rotinas

O RNS pode realizar 8 diferentes rotinas, as quais requerem comandos específicos para cada uma delas. Desta maneira, temos que

- `-t model` Computa um modelo com densidade de energia central fixa ϵ_c e razão entre os eixos. Precisa de `-e` e `-r`
- `-t gmass` Computa um modelo com densidade de energia central fixa ϵ_c e *Massa Gravitacional*. Precisa de `-e` e `-m`
- `-t rmass` Computa um modelo com densidade de energia central fixa ϵ_c e *Massa Repouso*. Precisa de `-e` e `-z`
- `-t omega` Computa um modelo com densidade de energia central fixa ϵ_c e *Velocidade Angular*. Precisa de `-e` e `-o`
- `-t jmoment` Computa um modelo com densidade de energia central fixa ϵ_c e *Momento Angular*. Precisa de `-e` e `-j`
- `-t static` Para uma ϵ_c dada, computa o modelo sem rotação. Precisa de `-e`
- `-t kepler` Para uma ϵ_c dada, computa o modelo com velocidade angular de Kepler. A precisão relativa padrão é 10^{-4} e pode ser modificada usando `-b tolerância`. Precisa de `-e`
- `-t test` Computa o modelo de prova.

Finalmente, é possível saber se o código fonte compilou corretamente, podemos compilar o modelo de prova

```
kepler -f eosC -t test
```

e comparar o output como o arquivo `test.out`. Adicionalmente, o programa possui um arquivo, chamado de `examples.test`, contendo exemplos específicos usando as rotinas descritas anteriormente.

4.2.5 Sequências

O RNS nos permite gerar uma sequência de modelos a partir de dois parâmetros fixados. Para isto, devemos especificar o intervalo de densidades de energia central e o número de modelos desejados, da seguinte maneira

```
-e 1e15 -l 3e15 -n 10
```

onde obteremos uma sequência de dez modelos entre o intervalo 10^{15} e $3 \times 10^{15} \text{gr/cm}^3$ de densidades de energia central. Os modelos gerados estão espaçados igualmente pela quantidade $\log \epsilon_c$.

4.2.6 Output

O código fornece como dados de saída ou output 17 quantidades físicas depois da compilação bem sucedida de um modelo. Logo, estas quantidades são

- ϵ_c Densidade de Energia Central
- M Massa Gravitacional
- M_0 Massa em repouso
- R_e Raio no equador
- Ω Velocidade Angular
- Ω_p Velocidade Angular da partícula em uma orbita circular no equador
- T/W Energia Rotacional/ Energia Gravitacional
- cJ/GM_\odot^2 Momento Angular
- I Momento de Inercia (exceto para modelos não rotantes)
- Φ_2 Momento de Quadripolo
- h_+ Altura desde a superfície da última orbita circular estável no plano equatorial
- h_- Altura desde a superfície da última orbita
- Z_p Desvio ao vermelho polar
- Z_b Desvio ao vermelho equatorial para trás
- Z_f Desvio ao vermelho equatorial para a frente
- ω_c/Ω Razão entre o valor central dos potenciais ω e Ω
- r_e Coordenada raio equatorial
- r_p/r_e Razão entre os eixos (polar e equatorial)

O programa usa as seguintes constantes físicas: $c = 2.9929 \times 10^{10} \text{cm/s}^{-1}$, $G = 6.6732 \times 10^{-8} \text{gcm}^3 \text{s}^2$, $m_B = 1.66 \times 10^{-24} \text{g}$, e $M_\odot = 1.987 \times 10^{33} \text{g}$. Por outro lado, as coordenadas do espaço-tempo estacionário e com simetria axial usadas para modelar estrelas compactas são definidas a partir da métrica seguinte

$$ds^2 = -e^{\gamma+\rho} dt^2 + e^{2\alpha} (dr^2 + r^2 d\theta^2) + e^{\gamma-\rho} r^2 \sin^2 \theta (d\phi - \omega dt)^2, \quad (4.21)$$

onde os potenciais γ, ρ, α e ω são funções somente das variáveis r e θ . Adicionalmente, a matéria dentro das estrelas de nêutrons é aproximada por um fluido perfeito.

O usuário especifica o valor da densidade de energia central da estrela no núcleo, assim o código deve calcular os valores da pressão e da entalpia no centro da estrela. Isto é feito chamando a função `make_center()`. Antes de calcular os coeficientes métricos de uma ENs em

rotação, primeiro devemos calcular a forma de uma ENs. Logo, a estrela esférica será usada como uma primeira aproximação para a estrela em rotação. A função `sphere()` é chamada pelo código para calcular a métrica de uma estrela esférica. A função recebe informações sobre a equação de estado e os valores da densidade de energia, a pressão e a entalpia no núcleo e na superfície da estrela, para calcular os valores da coordenada radial r assim como os potenciais métricos γ, ρ, α e ω .

4.2.7 Integrando uma estrela giratória

Uma vez que a métrica da estrela esférica foi calculada, o código está pronto para resolver as equações de campo de Einstein para uma ENs em rotação. Entretanto antes de fazer isso, é preciso escolher um valor da proporção entre o raio polar da estrela e o raio equatorial. Esta proporção é denotada como

`r_ratio`

Normalmente, é necessário tentar vários valores da proporção antes que o valor desejado para as quantidades como a velocidade angular, a massa, etc, sejam encontrados. Depois de definir o valor da proporção, deve-se chamar a função `spin()`. O programa também pode calcular várias quantidades em equilíbrio, tais como a massa gravitacional da estrela, a massa bariônica, o momento angular, o raio. Isso é feito usando a função `mass_radius()`.

Capítulo 5

Pressão Gravitacional

Estrelas relativísticas rotativas são de interesse fundamental na física e têm sido estudadas extensivamente nos últimos anos, tanto teórica quanto observacionalmente, por serem consideradas os laboratórios apropriados para o estudo da matéria densa, já que elas contêm altas densidades de matéria fria do universo. Existem vários códigos numéricos independentes para obter modelos precisos de estrelas de nêutrons rotativas usando relatividade geral, incluindo o RNS que usaremos nesta seção.

Por outro lado, dado que o TERG permite a definição de quantidades de grande interesse físico, como a energia, momento angular e pressão radial gravitacionais, na Relatividade Geral ditas quantidades ainda estão em desenvolvimento, abordaremos o estudo das estrelas de nêutrons frias e uniformemente rotativas na formulação teleparalela.

5.1 Pressão Radial $p(r)$

Para o problema do cálculo da pressão radial gravitacional na direção do raio r , devemos considerar na equação (3.64) somente o índice j com valor igual 1, dado que esse índice representa a parte espacial das coordenadas do espaço curvo, o qual está escrito em coordenadas esféricas. Portanto, $j = 1$ representa a direção radial.

Por outro lado, o índice i da equação (3.64) representa a parte espacial das coordenadas do espaço plano tangente, que vem escrito em coordenadas cartesianas. Logo, para calcular a pressão radial devemos fazer uma transformação de coordenadas, destas coordenadas planas para suas equivalentes no espaço curvo. Por conseguinte, em coordenadas esféricas temos que a pressão radial gravitacional $-\phi^{(r)1}$ projetada na direção radial, pode ser definida como

$$-\phi^{(r)1} = -[\sin\theta \cos\phi\phi^{(1)1} + \sin\theta \sin\phi\phi^{(2)1} + \cos\theta\phi^{(3)1}]. \quad (5.1)$$

Logo, usando a equação anterior e a equação (3.63), podemos definir a pressão radial $p(r)$ como

$$p(r) = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta (-\phi^{(r)1}). \quad (5.2)$$

Para resolver a integral da expressão anterior, primeiro devemos estabelecer nosso espaço-tempo, o qual está definido para um observador estacionário. Desta maneira, o campo de tétradas mais geral para um observador estacionário pode ser escrito da forma seguinte

$$e^a{}_{\mu} = \begin{pmatrix} \sqrt{g_{11}} \sin \theta \cos \phi & \sqrt{g_{22}} \cos \theta \cos \phi & -(\sin \phi \sqrt{\delta})/\sqrt{-g_{00}} & 0 \\ \sqrt{g_{11}} \sin \theta \cos \phi & \sqrt{g_{22}} \cos \theta \sin \phi & (\cos \phi \sqrt{\delta})/\sqrt{-g_{00}} & 0 \\ \sqrt{g_{11}} \cos \theta & -\sqrt{g_{22}} \sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -g_{30}/\sqrt{-g_{00}} & \sqrt{-g_{00}} \end{pmatrix}, \quad (5.3)$$

onde as coordenadas estão representadas como $[0, 1, 2, 3] = [t, r, \theta, \phi]$ e onde estabelecemos que a métrica g seja uma função somente das coordenadas r e θ , com $g = g(r, \theta)$ e onde temos que $\delta = -g_{33}g_{00} + g_{30}^2$. Por outro lado, para encontrar o valor da pressão radial $p(r)$, devemos calcular a forma exata de cada um dos $\phi^{(1)1}$, $\phi^{(2)1}$ e $\phi^{(3)1}$, fazendo uso da equação (3.64) com $\nu = 0, 1, 2, 3$. Por conseguinte, expandindo o índice ν e lembrando que a métrica não depende das variáveis t e ϕ , temos que

$$\phi^{(1)1} = 4\kappa[\partial_1(e\Sigma^{(1)11}) + \partial_2(e\Sigma^{(1)12})], \quad (5.4)$$

$$\phi^{(2)1} = 4\kappa[\partial_1(e\Sigma^{(2)11}) + \partial_2(e\Sigma^{(2)12})], \quad (5.5)$$

$$\phi^{(3)1} = 4\kappa[\partial_1(e\Sigma^{(3)11}) + \partial_2(e\Sigma^{(3)12})]. \quad (5.6)$$

Desta maneira, usando as expressões anteriores podemos reescrever a equação (5.1) da forma seguinte

$$\begin{aligned} -\phi^{(r)1} &= -4\kappa\{\sin \theta \cos \phi[\partial_1(e\Sigma^{(1)11}) + \partial_2(e\Sigma^{(1)12})] \\ &\quad -4\kappa\{\sin \theta \sin \phi[\partial_1(e\Sigma^{(2)11}) + \partial_2(e\Sigma^{(2)12})] \\ &\quad -4\kappa\{\cos \theta[\partial_1(e\Sigma^{(3)11}) + \partial_2(e\Sigma^{(3)12})]\}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Agora, dado que já conhecemos a expressão para $-\phi^{(r)1}$ devemos calcular o valor dos tensores Σ . Para isso, usamos um código muito simples desenvolvido em Maple, obtendo as seguintes expressões

$$e\Sigma^{(1)11} = 0, \quad (5.8)$$

$$\begin{aligned} e\Sigma^{(1)12} &= -\frac{1}{4} \frac{\cos \phi}{\sqrt{g_{11}g_{22}\delta}} [\partial_2(g_{33})\sqrt{g_{11}} \sin \theta g_{00} + \partial_2(g_{00})\sqrt{g_{11}} \sin \theta g_{33} \\ &\quad -2\partial_2(g_{30})\sqrt{g_{11}} \sin \theta g_{30} - \partial_1(g_{33})\sqrt{g_{22}} \cos \theta g_{00} \\ &\quad -\partial_1(g_{00})\sqrt{g_{22}} \cos \theta g_{33} + 2\partial_1(g_{30})\sqrt{g_{22}} \cos \theta g_{30}], \end{aligned} \quad (5.9)$$

$$e\Sigma^{(2)11} = 0, \quad (5.10)$$

$$\begin{aligned} e\Sigma^{(2)12} &= -\frac{1}{4} \frac{\sin \phi}{\sqrt{g_{11}g_{22}\delta}} [\partial_2(g_{33})\sqrt{g_{11}} \sin \theta g_{00} + \partial_2(g_{00})\sqrt{g_{11}} \sin \theta g_{33} \\ &\quad -2\partial_2(g_{30})\sqrt{g_{11}} \sin \theta g_{30} - \partial_1(g_{33})\sqrt{g_{22}} \cos \theta g_{00} \\ &\quad -\partial_1(g_{00})\sqrt{g_{22}} \cos \theta g_{33} + 2\partial_1(g_{30})\sqrt{g_{22}} \cos \theta g_{30}], \end{aligned} \quad (5.11)$$

$$e\Sigma^{(3)11} = 0, \quad (5.12)$$

$$\begin{aligned} e\Sigma^{(3)12} &= -\frac{1}{\sqrt{g_{11}g_{22}\delta}} [g_{00} \sin \theta \partial_1(g_{33})\sqrt{g_{22}} + g_{00} \cos \theta \partial_2(g_{33})\sqrt{g_{11}} \\ &\quad + g_{33} \sin \theta \partial_1(g_{00})\sqrt{g_{22}} + g_{33} \cos \theta \partial_2(g_{00})\sqrt{g_{11}} \\ &\quad -2g_{30} \sin \theta \partial_1(g_{30})\sqrt{g_{22}} - 2g_{30} \cos \theta \partial_2(g_{30})\sqrt{g_{11}} \\ &\quad + 2\sqrt{-g_{00}g_{11}g_{22}\delta}]. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Finalmente, usando as equações anteriores podemos escrever a expressão analítica para $\phi^{(r)1}$ como segue

$$-\phi^{(r)1} = -4\kappa[\sin\theta\cos\phi\partial_2(e\Sigma^{(1)12}) + \sin\theta\sin\phi\partial_2(e\Sigma^{(2)12}) + \cos\theta\partial_2(e\Sigma^{(3)12})], \quad (5.14)$$

onde as derivadas com respeito à coordenada θ podem ser escritas como se mostra no Apêndice A.

Por outro lado, para modelar estrelas compactas e que giram com uma velocidade angular arbitrária usamos o código RNS onde as coordenadas do espaço-tempo estacionário e simétrico são definidas através da seguinte métrica

$$ds^2 = g_{00}(r, \theta)dt^2 + g_{11}(r, \theta)dr^2 + g_{11}(r, \theta)d\theta^2 + g_{33}(r, \theta)d\phi^2 + 2g_{30}(r, \theta)d\phi dt, \quad (5.15)$$

onde os potenciais γ, ρ, α e ω são funções somente das coordenadas r e θ . Desta maneira, temos que as componentes da métrica vem escritas como

$$g_{00}(r, \theta) = -e^{\gamma+\rho} - e^{\gamma-\rho}r^2\omega^2\sin^2\theta \quad (5.16)$$

$$g_{11}(r, \theta) = e^{2\alpha} \quad (5.17)$$

$$g_{22}(r, \theta) = r^2e^{2\alpha} \quad (5.18)$$

$$g_{33}(r, \theta) = e^{\gamma-\rho}r^2\sin^2\theta, \quad (5.19)$$

$$g_{30}(r, \theta) = -\omega r^2 e^{\gamma-\rho} \sin^2\theta, \quad (5.20)$$

onde ρ, γ, α e ω dependem exclusivamente das variáveis r e θ . A função $1/2(\gamma+\rho)$ é a generalização relativística do potencial gravitacional newtoniano, logo o fator de dilatação temporal entre um observador que se movimenta com uma velocidade angular ω e um observador no infinito é $e^{1/2(\alpha+\rho)}$. É importante destacar que r não é a coordenada radial de Schwarzschild \bar{r} . No limite de simetria esférica, r corresponde com a coordenada isotrópica de Schwarzschild. O potencial métrico ω é a velocidade angular em torno do eixo de simetria dos observadores com momento angular zero e é responsável pelo efeito Lense-Thirring. O quarto potencial métrico α , especifica a geometria das duas superfícies com t e ϕ constantes. Por outro lado, sabemos que o código RNS usa a coordenada compacta s , a qual está relacionada com a coordenada radial r da forma seguinte

$$s = \frac{r}{r + r_e}, \quad (5.21)$$

onde r_e é o valor de r no equador da estrela. Logo, a definição de s que $s = 0,5$ quando $r = r_e$ e $s = 1$ quando $r \rightarrow \infty$. Adicionalmente, temos a variável angular μ definida como

$$\mu = \cos\theta, \quad (5.22)$$

a partir da qual se pode escrever a expressão

$$\sin\theta = \sqrt{1 - \mu^2}. \quad (5.23)$$

Lembrando que a métrica g é uma função das coordenadas r e θ , $g = g(r, \theta)$, e estas coordenadas dependem dos componentes métricos. Então, as componentes da métrica podem

ser reescritas como

$$g_{00}(r, \theta) = -e^{\gamma+\rho} - e^{\gamma-\rho}\omega^2 r_e^2 \left(\frac{s}{1-s}\right)^2 (1-\mu^2), \quad (5.24)$$

$$g_{11}(r, \theta) = e^{2\alpha}, \quad (5.25)$$

$$g_{22}(r, \theta) = r_e^2 \left(\frac{s}{1-s}\right)^2 e^{2\alpha}, \quad (5.26)$$

$$g_{33}(r, \theta) = e^{\gamma-\rho} r_e^2 \left(\frac{s}{1-s}\right)^2 (1-\mu^2), \quad (5.27)$$

$$g_{30}(r, \theta) = -\omega e^{\gamma-\rho} r_e^2 \left(\frac{s}{1-s}\right)^2 (1-\mu^2), \quad (5.28)$$

Logo, vamos ter que as derivadas parciais com respeito a essas variáveis ficam da forma seguinte

$$\frac{\partial g(r, \theta)}{\partial r} = \frac{(1-s)^2}{r_e} \frac{\partial g}{\partial s}, \quad (5.29)$$

$$\frac{\partial g(r, \theta)}{\partial \theta} = -\sqrt{1-\mu^2} \frac{\partial g}{\partial \mu}. \quad (5.30)$$

Desta maneira, usando as expressões anteriores e as equações (5.16)-(5.20), podemos calcular as derivadas das componentes da métrica $g(r, \theta)$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{00}(r, \theta)}{\partial r} &= -\frac{(1-s)^2}{r_e} e^{\gamma+\rho} \left(\frac{\partial \gamma}{\partial s} + \frac{\partial \rho}{\partial s}\right) - r_e (1-\mu^2) e^{\gamma-\rho} \left[\omega^2 s^2 \left(\frac{\partial \gamma}{\partial s} - \frac{\partial \rho}{\partial s}\right) \right. \\ &\quad \left. + 2\omega s^2 \frac{\partial \omega}{\partial s} + 2\omega^2 \left(\frac{s}{1-s}\right) \right], \end{aligned} \quad (5.31)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{00}(r, \theta)}{\partial \theta} &= -\sqrt{1-\mu^2} \left\{ -e^{\gamma+\rho} \left(\frac{\partial \gamma}{\partial \mu} + \frac{\partial \rho}{\partial \mu}\right) - r_e^2 \left(\frac{s}{1-s}\right)^2 e^{\gamma-\rho} \times \right. \\ &\quad \left. \left[\omega^2 (1-\mu^2) \left(\frac{\partial \gamma}{\partial \mu} - \frac{\partial \rho}{\partial \mu}\right) + 2\omega (1-\mu^2) \frac{\partial \omega}{\partial \mu} - 2\mu\omega^2 \right] \right\}, \end{aligned} \quad (5.32)$$

$$\frac{\partial g_{11}(r, \theta)}{\partial r} = 2e^{2\alpha} \frac{(1-s)^2}{r_e} \frac{\partial \alpha}{\partial s}, \quad (5.33)$$

$$\frac{\partial g_{11}(r, \theta)}{\partial \theta} = -2\sqrt{1-\mu^2} e^{2\alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial \mu}, \quad (5.34)$$

$$\frac{\partial g_{22}(r, \theta)}{\partial r} = 2r_e e^{2\alpha} \left[s^2 \frac{\partial \alpha}{\partial s} + \left(\frac{s}{1-s}\right) \right], \quad (5.35)$$

$$\frac{\partial g_{22}(r, \theta)}{\partial \theta} = -2\sqrt{1-\mu^2} r_e^2 e^{2\alpha} \left(\frac{s}{1-s}\right)^2 \frac{\partial \alpha}{\partial \mu}, \quad (5.36)$$

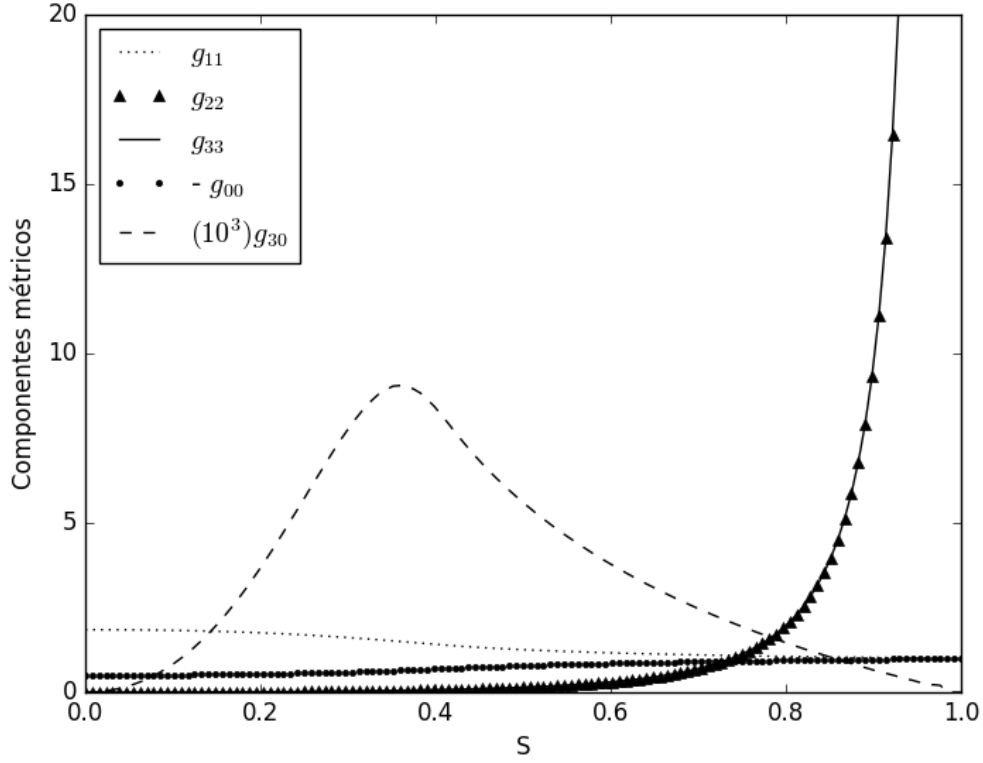


Figura 5.1: Componentes Métricos para o caso quando $\mu = 0$ de uma estrela com equação de estado EOSA [120] e energia central $\varepsilon_c/c^2 = 10^{15}g/cm^3$.

$$\frac{\partial g_{33}(r, \theta)}{\partial r} = r_e(1 - \mu^2)e^{\gamma-\rho} \left[s^2 \left(\frac{\partial \gamma}{\partial s} - \frac{\partial \rho}{\partial s} \right) + 2 \left(\frac{s}{1-s} \right) \right], \quad (5.37)$$

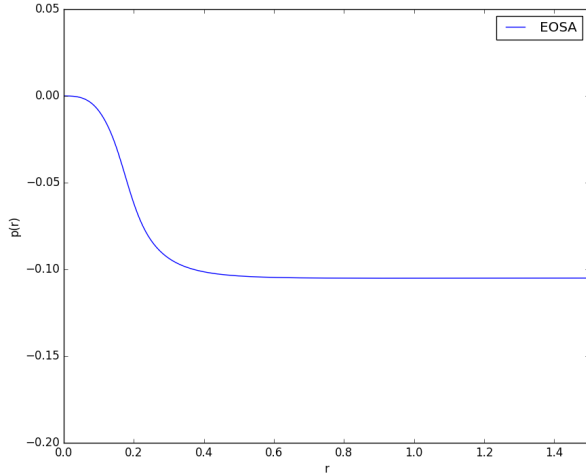
$$\frac{\partial g_{33}(r, \theta)}{\partial \theta} = -\sqrt{1 - \mu^2}r_e^2 \left(\frac{s}{1-s} \right)^2 e^{\gamma-\rho} \left[\left(\frac{\partial \gamma}{\partial \mu} - \frac{\partial \rho}{\partial \mu} \right) (1 - \mu^2) - 2\mu \right], \quad (5.38)$$

$$\frac{\partial g_{30}(r, \theta)}{\partial r} = -r_e(1 - \mu^2)e^{\gamma-\rho} \left[s^2 \frac{\partial \omega}{\partial s} + 2\omega \left(\frac{s}{1-s} \right) + \omega s^2 \left(\frac{\partial \gamma}{\partial s} - \frac{\partial \rho}{\partial s} \right) \right], \quad (5.39)$$

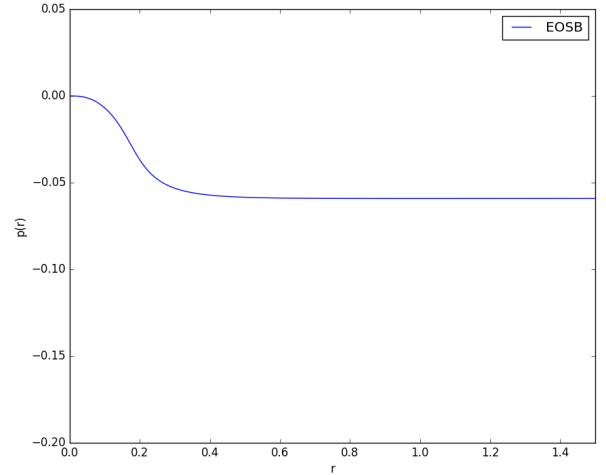
$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{30}(r, \theta)}{\partial \theta} = & \sqrt{1 - \mu^2}r_e^2 \left(\frac{s}{1-s} \right)^2 e^{\gamma-\rho} \left[\frac{\partial \omega}{\partial \mu} (1 - \mu^2) - 2\omega\mu \right. \\ & \left. + \omega \left(\frac{\partial \gamma}{\partial s} - \frac{\partial \rho}{\partial s} \right) (1 - \mu^2) \right]. \end{aligned} \quad (5.40)$$

As derivadas segundas assim como as derivadas cruzadas se mostraram no Apêndice A. Na figura 5.1 se mostra um exemplo ilustrativo da saída do código. Usando as equações (5.16) até (5.20) calculamos numericamente os componentes métricos de uma estrela com energia central $\varepsilon_c/c^2 = 10^{15}g/cm^3$ e com equação de estado extraída de [120], onde EOSA é a sigla para matéria densa de nêutrons (dense neutron matter). É importante destacar que as componentes da métrica mostradas na figura recuperam o espaço-tempo de Minkowski em coordenadas esféricas no infinito.

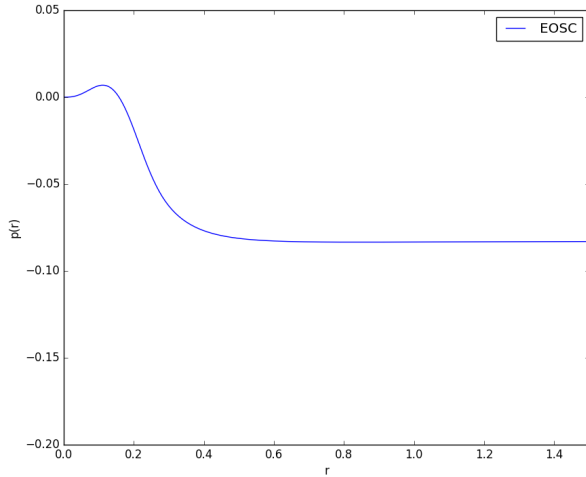
Logo, usando a equação (5.2) calculamos a pressão radial gravitacional $p(r)$ para estrelas



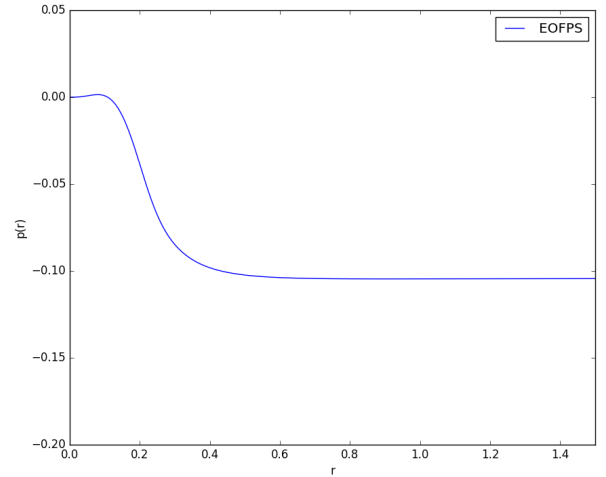
(a) EOSA



(b) EOSB



(c) EOSC



(d) EOSFPS

Figura 5.2: Distribuição espacial da pressão radial gravitacional $p(r)$ para estrelas com energia central $\varepsilon_c/c^2 = 10^{15}g/cm^3$, mas para diferentes equações de estado: *a*) EOSA [120], *b*) EOSB [121], *c*) EOSC [122] e *d*) EOSFPS [123].

com equações de estado diferentes já que para matéria de alta densidade, como a encontrada em estrelas de nêutrons, a composição não é bem compreendida. Na figura 5.2, se mostra a variação da pressão gravitacional para estrelas de nêutrons considerando uma energia central igual a $\varepsilon_c/c^2 = 10^{15}g/cm^3$ e com equação de estado: *a*) matéria densa de nêutrons EOSA [120], *b*) matéria Híperonica EOSB [121], *c*) matéria densa bariônica EOSC [122] e *d*) matéria de nêutrons para um Hamiltoniano nuclear EOSFPS [123]. Podemos notar que a pressão radial $p(r)$ vai diminuindo até se estabilizar na superfície da estrela. Adicionalmente, esta pressão tem valores negativos o que indica que a pressão está tentando comprimir a estrela em vez de expandi-la.

Por outro lado, sabemos que o estrelas de nêutrons são os restos de estrelas massivas cujos

núcleos colapsam durante as explosões de supernovas no final de suas vidas. A conservação do momento angular e do fluxo magnético da estrela progenitora durante o colapso dá à estrela de nêutrons uma taxa de rotação e um campo magnético extremamente altos. O colapso termina quando a pressão de degenerescência predominantemente dos nêutrons e possivelmente de outras excitações de matéria exótica como híperons, ou condensado de Bose de píons ou Kaons, ou mesmo matéria estranha de quarks, iguala as fortes forças gravitacionais. Lembremos que a pressão de degenerescência é uma consequência do Princípio de Exclusão de Pauli, onde dois férmions não podem compartilhar um estado quântico. Essa resistência em ocupar o mesmo estado se manifesta como uma pressão, e essa pressão pode ser calculada explicitamente usando uma combinação de mecânica quântica e estatística.

Finalmente, como a pressão dos nêutrons é análoga à pressão de degenerescência dos elétrons nas estrelas anãs brancas, a qual mantêm a estabilidade da estrela, podemos concluir que a a pressão radial gravitacional $p(r)$ contribui evitando o colapso gravitacional da estrela de nêutrons.

Capítulo 6

Quantização da Energia Gravitacional

Ao estudar certos sistema percebemos que a sua energia é quantizada, o que significa que o sistema pode ter apenas certos valores de energia e não um contínuo de valores, como acontece no caso clássico. Adicionalmente, também se tem que algumas formas de transferência de energia ocorrem com valores discretos de energia. Embora a maioria de nós esteja familiarizada com a quantização da matéria em pedaços, já seja em átomos, moléculas e formas similares, estamos menos cientes de que a energia também pode ser quantizada. Desta maneira, algumas das primeiras pistas sobre a necessidade de uma teoria nova sobre a Física Clássica vieram da quantização da energia. Esta nova teoria é conhecida como Física Quântica e ao contrário da teoria da Relatividade, o nascimento da teoria quântica foi lento e precisou da contribuição de muitos físicos, incluindo o mesmo Einstein.

Para traçar a linha de evolução na construção da teoria quântica são consideradas diversas condições de quantização, as quais vão desde a introdução de uma nova constante fundamental no ano de 1900 pelo Max Planck no seu tratamento da radiação de Corpo Negro, até a interpretação de Werner Heisenberg das relações de comutação em termos do seu Princípio de Incerteza em 1927. No sentido mais geral, tais condições são relações entre a teoria clássica e a teoria quântica que nos permitem construir a nova teoria a partir da mecânica clássica.

6.1 Breve história da Mecânica Quântica

No final do ano 1900 e no início de 1901, Plank usou unidades de energia discretas da forma $\varepsilon = h\nu$ no seu tratamento estatístico de osciladores harmônicos carregados e com frequência de ressonância ν . Planck usou a relação com o objetivo de contar o número de microestados possíveis de uma coleção de tais ressonadores. Ele inseriu esse número na fórmula de Boltzmann relacionando a entropia de um macroestado ao número de microestados que o realizam. A fórmula que Planck encontrou para a entropia de um ressonador leva diretamente à lei para a radiação de corpo negro agora nomeada em sua homenagem [124, 125]. No entanto, ele ainda permitiu que a energia desses osciladores assumisse todo o contínuo de valores.

Depois de cinco anos, Albert Einstein mostrou pela primeira vez que somente se chega à Lei de Planck para a radiação de Corpo Negro se a energia dos osciladores de Planck for restrita a múltiplos inteiros de $\varepsilon = h\nu$ [126, 127]. Einstein examinou o efeito fotoelétrico, onde

ocorre a liberação de elétrons de certos metais ou semicondutores pela ação da luz. Desta maneira, Einstein propôs uma teoria quântica da luz para resolver a dificuldade e então percebeu que a teoria de Planck fazia uso implícito da hipótese quântica da luz.

A condição de Planck-Einstein estava ligada a um sistema mecânico particular, ou seja, um oscilador harmônico simples unidimensional. Em suas palestras sobre a teoria da radiação, Planck sugeriu uma condição mais geral para sistemas periódicos unidimensionais, dividindo o espaço de fase de tais sistemas em áreas de tamanho h . No final de 1915, o Planck generalizou essa ideia para sistemas com vários graus de liberdade. Naquela época, Arnold Sommerfeld havia encontrado independentemente um procedimento para quantizar o espaço de fase que acabou sendo equivalente ao de Planck. Usando este procedimento, Sommerfeld foi capaz de generalizar as órbitas circulares do átomo de hidrogênio de Niels Bohr para um conjunto maior de órbitas Keplerianas de tamanho e excentricidade variados, selecionadas com base na quantização das integrais de fase $\oint pdq$, onde p é o momento conjugado de alguma coordenada generalizada q e a integral deve ser tomada ao longo de um período do movimento [128, 129].

O número quântico do momento angular de Bohr deu o valor de apenas uma dessas integrais, mais especificamente para a coordenada angular. Órbitas quantizadas com diferentes excentricidades tornaram-se possíveis uma vez que a integral de fase para a coordenada radial foi similarmente submetida à quantização. Logo foi percebido pelo astrônomo Karl Schwarzschild que os procedimentos de Planck e Sommerfeld são semelhantes e equivalem a tratar o problema clássico em variáveis de ângulo de ação (p_i, q_i) , com as variáveis de ação restritas a múltiplos de h , $J_i = \oint p_i dq_i = n_i h$ [130]. Nessa época, dada a imagem básica dos átomos como sistemas solares em miniatura e o uso de técnicas emprestadas da mecânica celeste para calcular os níveis de energia permitidos, era natural pensar nos elétrons orbitando o núcleo em órbitas clássicas.

Inspirada pelo princípio da correspondência de Bohr, a transição da velha para a nova teoria quântica começou em 1924 com a transcrição da derivada da ação clássica d/dJ como um quociente discreto da forma $(1/h)\Delta/\Delta n$ por Hans Kramers, John Van Vleck, Max Born e outros [131]. Este procedimento foi fundamental no desenvolvimento da teoria de dispersão para o espalhamento elástico da luz. Isso levou à introdução de amplitudes de coordenadas complexas dependendo de um par de estados ligados por uma transição quântica. Heisenberg reinterpreto essas amplitudes como matrizes de dois índices com uma regra de multiplicação não comutativa. Aplicando o procedimento de transcrição à integral de fase de Sommerfeld, ele chegou a uma restrição de quantização não linear dessas amplitudes. Ele mostrou que essa restrição é apenas o limite de alta frequência da fórmula de dispersão de Kramers, conhecida como regra da soma de Thomas-Kuhn [132]. Born reconheceu que as matrizes de dois índices de Heisenberg eram matrizes simples e que a regra da multiplicação era a regra da multiplicação de matrizes. Reescrevendo a condição de quantização de Heisenberg em linguagem matricial, Born e P. Jordan chegaram na relação de comutação familiar $[p_k, q_l] = (\hbar/i)\delta_{kl}$ [131].

Na mesma época e independentemente de Born e Jordan, Paul Dirac mostrou que essa relação de comutação é o análogo exato dos colchetes de Poisson na mecânica clássica. A relação de comutação para a posição e o momento também foi satisfeita pelos operadores

que representam essas quantidades e atuam sobre funções de onda na forma alternativa da mecânica quântica desenvolvida por Erwin Schrödinger no final de 1925 e início de 1926 [131]. Essa relação de comutação representa o lugar central para a introdução da constante de Planck na nova teoria quântica. Em 1927, Heisenberg interpretou isso em termos de seu Princípio de Incerteza.

No ano de 1927 Hermann Weyl [133] publicou um artigo apresentando a transformada de Weyl, onde descreve como as funções que atuam no espaço de fase podem ser relacionadas aos operadores que atuam no espaço de Hilbert. Posteriormente, no ano de 1932 Eugene P. Wigner [134] usando transformações de Weyl introduziu o conceito de como a mecânica quântica poder ser definida no espaço de fase. Wigner apresentou funções de distribuição definidas no espaço de fase representando o estado do sistema. Ao calcular a média da transformada de Weyl de um observável com essas chamadas funções de distribuição de Wigner, pode-se obter o valor esperado do observável quântico correspondente. Trabalhos posteriores feitos independentemente por H. J. Groenewold no 1946 [135] e Moyal no 1949 [136] estenderam a teoria de Wigner introduzindo regras sobre como se deve multiplicar as funções do espaço de fase de acordo com a mecânica quântica. Com o produto Moyal é possível calcular a evolução temporal da função de distribuição de Wigner. Tudo isto, fez com que a mecânica quântica definida no espaço de fase seja uma formulação completa da mecânica quântica e equivalente à formulação do espaço de Hilbert.

6.2 Fundamentos da Quantização

Na representação de Schrödinger da mecânica quântica o estado do sistema é representado pela função de onda $\psi \in L^2(\mathfrak{R}^d)$. Logo, a interpretação de ψ é tal que $|\psi(x)|^2$ tem a significação de uma Densidade de Probabilidade ou Distribuição de Probabilidade de achar a partícula na posição x . Desta maneira, o valor esperado para x^n é dado pela expressão

$$\int x^n |\psi(x)|^2 dx. \quad (6.1)$$

Em geral, os observáveis são representados por operadores autoadjuntos \hat{A} ou operadores hermitianos, os quais nos permitem escrever quantidades fisicamente significativas, como os valores esperados

$$\langle \hat{A} \rangle = \langle \psi, \hat{A}\psi \rangle = \int_{\mathfrak{R}^d} \bar{\psi}(x) (\hat{A}\psi)(x) d^d x, \quad (6.2)$$

onde assumimos que a função de onda está normalizada, $\langle \psi(x), \psi(x) \rangle = 1$.

Na imagem de Schrödinger a evolução temporal está determinada pela equação de Schrödinger,

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}(x, t) = \hat{H}\psi(x, t), \quad (6.3)$$

onde o Hamiltoniano quântico \hat{H} é a quantização do Hamiltoniano clássico $H(p, x)$, como veremos mais abaixo. Portanto, temos que

$$\psi(x, t) = e^{\frac{i}{\hbar} \hat{H}t} \psi(x, 0), \quad (6.4)$$

onde a informação da evolução no tempo é transportada pela função de onda enquanto os operadores são independentes do tempo. No caso da imagem de Heisenberg, a função de onda é independente do tempo e os operadores evoluem de acordo com

$$\hat{A} = e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}t} \hat{A} e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t} \quad (6.5)$$

e onde se verifica facilmente que

$$\dot{\hat{A}} = -\frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{A}(t)]. \quad (6.6)$$

Os observáveis na Representação de Heisenberg seguem as mesmas equações de movimento que seguem as grandezas clássicas correspondentes. É importante destacar que em ambas representações, os valores esperados dos observáveis, assim como sua dependência no tempo, são iguais. Adicionalmente, podemos notar que a equação (6.6) parece muito com a equação que define a evolução temporal de um observável A na mecânica clássica,

$$\dot{A} = \{H, A\} \quad (6.7)$$

onde H representa o Hamiltoniano clássico. Veremos se é possível achar uma equivalência entre os Parênteses de Poisson, equação (6.7), e o comutador da mecânica quântica, equação (6.6).

Para fazer a equivalência, os observáveis clássicos são “traduzidos” para a mecânica quântica pelas regras seguintes [137],

$$\begin{aligned} \text{variável do espaço de fase} &\longrightarrow \text{operador na representação de Schrödinger} \\ x &\longrightarrow \hat{x} = x, \\ p &\longrightarrow \hat{p} = \frac{\hbar}{i} \nabla, \end{aligned} \quad (6.8)$$

as quais implicam as relações de comutação canônicas

$$[\hat{p}_j, \hat{x}_k] = \frac{\hbar}{i} \delta_{jk}. \quad (6.9)$$

Este processo de “tradução” se conhece como Quantização, e geralmente pode ser considerado como a transformação linear na qual para uma função no espaço de fase $b : \mathfrak{R}^{2d} \rightarrow \mathbb{C}$ se associa um operador que atua no espaço de Hilbert $L^2(\mathfrak{R}^d)$ [138].

Para observáveis mais gerais do tipo $A \rightarrow \hat{A} = “A(\hat{p}, \hat{x})”$ podem gerar uma leve dificuldade no momento da quantização. Então, uma estratégia para vencer isto, é considerar os produtos simetrizados de p e x (quando se tem somente uma grau de liberdade, por exemplo), de tal forma que

$$xp \longrightarrow \frac{1}{2}(\hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x}). \quad (6.10)$$

Esta escolha é conhecida como o *Ordem de Weyl*. Adicionalmente, existem outras dois regras de quantização possíveis para xp , onde todos os operadores resultantes são operadores diferentes devido ao fato de que x e p não comutam, mas tem uma relação de comutação bem definida pela equação (6.9). A *Quantização de Weyl* a ser discutida proximamente, atribui a x e p o operador de ordem simétrica mostrado na expressão (6.10). É preciso especificar

como tratar as diferentes ordenações para fornecer uma prescrição completa para as funções que não são lineares em x e p .

Antes de apresentar a receita mais geral sobre como tratar funções de (x, p) usando a Quantização de Weyl, vamos introduzir o conceito de Transformada de Fourier.

6.2.1 Transformada de Fourier

Para uma função $f \in L^1(\mathfrak{R}^d)$ definimos a Transformada de Fourier como

$$\tilde{f}(p) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^d} \int_{\mathfrak{R}^d} f(x) e^{-\frac{i}{\hbar}px} d^d x = \mathcal{F}[f](p). \quad (6.11)$$

Enquanto a transformada inversa se define como

$$f(x) = \int_{\mathfrak{R}^d} \tilde{f}(p) e^{\frac{i}{\hbar}px} d^d p = \mathcal{F}^{-1}[\tilde{f}](x). \quad (6.12)$$

Definamos agora, duas propriedades que serão implementadas posteriormente. Primeiro, temos que a Transformada de Fourier de uma derivada produz a Transformada de Fourier da própria função multiplicada por n potências da variável de Fourier, resultado da integração parcial n vezes,

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \left[\frac{\partial^n f}{\partial x_j \dots \partial x_k} \right] (p) &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^d} \int_{\mathfrak{R}^d} \frac{\partial^n f(x)}{\partial x_j \dots \partial x_k} e^{-\frac{i}{\hbar}px} d^d x, \\ &= \left(\frac{i}{\hbar} \right)^n p_j \dots p_k \tilde{f}(p). \end{aligned} \quad (6.13)$$

Por outro lado, ao aplicar subsequentemente a Transformada de Fourier e a transformada inversa de Fourier, temos que

$$f(x) = \int_{\mathfrak{R}^d} \tilde{f}(p) e^{\frac{i}{\hbar}px} d^d p = \frac{1}{(2\pi\hbar)^d} \int_{\mathfrak{R}^d} \int_{\mathfrak{R}^d} f(y) e^{\frac{i}{\hbar}(px-py)} d^d y d^d p. \quad (6.14)$$

Na expressão anterior é possível identificar a Transformada de Fourier da distribuição δ de Dirac como

$$\delta(x) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^d} \int_{\mathfrak{R}^d} e^{\frac{i}{\hbar}px} d^d p, \quad (6.15)$$

com as seguintes propriedades avaliadas em funções $f \in \mathcal{S}(\mathfrak{R}^d)$,

$$\int_{\mathfrak{R}^d} f(x) \delta(x-y) d^d x = f(y), \quad (6.16)$$

$$f(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \delta(x) = -\delta(x) \frac{\partial}{\partial x_j} f(x). \quad (6.17)$$

6.3 Quantização de Weyl

Consideremos agora, um observável clássico $A(x)$ o qual depende somente da variável x . De acordo com as regras de quantização temos que

$$A(x) \longrightarrow \hat{A} = A(\hat{x}). \quad (6.18)$$

Usando a propriedade (6.16) da distribuição δ , é possível escrever uma expressão para o operador \hat{A} como,

$$\hat{A} = \int_{\mathbb{R}^d} A(x)\delta(x - \hat{x})d^d x. \quad (6.19)$$

Logo, usando a Transformada de Fourier da distribuição δ , equação (6.15), a expressão anterior pode ser reescrita como

$$\hat{A} = \frac{1}{(2\pi\hbar)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} A(x)e^{\frac{i}{\hbar}\xi(x-\hat{x})}d^d \xi d^d x. \quad (6.20)$$

É importante destacar que a variável ξ tem dimensões de momento, já que a integral na equação (6.20) se estende sobre todo o espaço de fase. Analogamente, podemos escrever uma expressão para um observável que depende apenas de p , mas não de x [137]. Por outro lado, para um observável geral da forma $A(p, x)$ temos que o operador \hat{A} pode ser escrito como

$$\hat{A} = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} A(p, x)\delta(x - \hat{x})\delta(p - \hat{p})d^d p d^d x. \quad (6.21)$$

Para resolver a integral da equação anterior primeiro devemos substituir a Transformação de Fourier da cada uma das distribuições δ . Porém, também é possível escrever uma representação do tipo Fourier do produto das duas distribuições da forma

$$\frac{1}{(2\pi\hbar)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{\frac{i}{\hbar}[\xi(x-\hat{x})+y(p-\hat{p})]}d^d \xi d^d y. \quad (6.22)$$

Para comprovar se a expressão anterior é equivalente com o Ordem de Weyl, calculemos a quantização do operador xp . Para isso introduzimos a notação $\mathcal{W}[A] = \hat{A}$. Então, usando as equações (6.20) e (6.21), se tem que

$$\mathcal{W}[xp] = \frac{1}{(2\pi\hbar)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (xp)e^{\frac{i}{\hbar}[\xi(x-\hat{x})+y(p-\hat{p})]}d\xi dy dp dx, \quad (6.23)$$

$$= \frac{1}{(2\pi\hbar)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (xp)e^{\frac{i}{\hbar}[\xi x+yp]}e^{-\frac{i}{\hbar}[\xi \hat{x}+y\hat{p}]}d\xi dy dp dx. \quad (6.24)$$

Usando a regra de Baker-Campbell-Hausdorff [139], o exponencial pode ser separado de acordo com a expressão

$$e^{-\frac{i}{\hbar}[\xi \hat{x}+y\hat{p}]} = e^{-\frac{i}{\hbar}\xi \hat{x}}e^{-\frac{i}{\hbar}y\hat{p}}e^{\frac{i}{\hbar}\frac{\xi y}{2}}. \quad (6.25)$$

Se introduzimos a seguinte mudança de variáveis $x' = x + y/2$ e usamos a equação anterior, o operador $\mathcal{W}[xp]$ fica como

$$\begin{aligned} \mathcal{W}[xp] &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(x' - \frac{y}{2}\right) p e^{\frac{i}{\hbar}[\xi(x'-\frac{y}{2})+yp]}e^{-\frac{i}{\hbar}\xi \hat{x}}e^{-\frac{i}{\hbar}y\hat{p}}e^{\frac{i}{\hbar}\frac{\xi y}{2}}d\xi dy dp dx', \\ &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(x' - \frac{y}{2}\right) p e^{\frac{i}{\hbar}\xi(x'-\hat{x})}e^{\frac{i}{\hbar}y(p-\hat{p})}d\xi dy dp dx'. \end{aligned} \quad (6.26)$$

A equação anterior pode ser separadas em duas integrais, I_1 e I_2 , e resolvidas separadamente. A primeira integral é

$$I_1 = \frac{1}{(2\pi\hbar)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} px' e^{\frac{i}{\hbar}\xi(x'-\hat{x})} e^{\frac{i}{\hbar}y(p-\hat{p})} d\xi dy dp dx'. \quad (6.27)$$

Usando a Transformada de Fourier para a distribuição δ e a propriedade (6.16), a expressão anterior pode ser resolvida como

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x' p \delta(x' - \hat{x}) \delta(p - \hat{p}) dp dx', \\ I_1 &= \hat{x} \hat{p}. \end{aligned} \quad (6.28)$$

Vamos agora resolver a segunda parte da integral da expressão (6.26),

$$I_2 = \frac{1}{(2\pi\hbar)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(-\frac{y}{2}\right) p e^{\frac{i}{\hbar}\xi(x'-\hat{x})} e^{\frac{i}{\hbar}y(p-\hat{p})} d\xi dy dp dx'. \quad (6.29)$$

Novamente, para resolver a integral I_2 usamos a Transformada de Fourier da distribuição δ e usamos também a seguinte definição

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1. \quad (6.30)$$

Desta maneira, se segue que

$$\begin{aligned} I_2 &= -\frac{1}{(2\pi\hbar)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{2} p \left[\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x' - \hat{x}) dx' \right] e^{\frac{i}{\hbar}y(p-\hat{p})} dy dp, \\ &= -\frac{1}{(2\pi\hbar)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{2} p e^{\frac{i}{\hbar}y(p-\hat{p})} dy dp. \end{aligned} \quad (6.31)$$

Recordemos que

$$\frac{\partial}{\partial p} e^{\frac{i}{\hbar}y(p-\hat{p})} = \frac{i}{\hbar} y e^{\frac{i}{\hbar}y(p-\hat{p})}, \quad (6.32)$$

de onde podemos concluir o seguinte

$$y e^{\frac{i}{\hbar}y(p-\hat{p})} = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial p} e^{\frac{i}{\hbar}y(p-\hat{p})}. \quad (6.33)$$

Ao substituir a expressão (6.33) na equação (6.31) e usando a propriedade (6.17), poder calcular a integral I_2 ,

$$\begin{aligned} I_2 &= -\frac{1}{(2\pi\hbar)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hbar}{2i} \frac{\partial}{\partial p} e^{\frac{i}{\hbar}y(p-\hat{p})} dy dp, \\ &= -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hbar}{2i} \frac{\partial}{\partial p} \left[\frac{1}{(2\pi\hbar)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{i}{\hbar}y(p-\hat{p})} dy \right] dp, \\ &= -\frac{\hbar}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} p \delta'(p - \hat{p}) dp, \\ I_2 &= \frac{\hbar}{2i}. \end{aligned} \quad (6.34)$$

Finalmente, temos que a quantização do operador xp fica como

$$\mathcal{W}[xp] = \hat{x}\hat{p} + \frac{\hbar}{2i}. \quad (6.35)$$

Ao comparar a expressão anterior com o seguinte

$$\frac{1}{2}(\hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x}) = \frac{1}{2}(\hat{x}\hat{p} + \hat{x}\hat{p} - [\hat{x}, \hat{p}]) = \hat{x}\hat{p} + \frac{\hbar}{2i}, \quad (6.36)$$

podemos concluir que

$$\hat{A} \equiv \mathcal{W}[A] = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{2d}} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} A(p, x) e^{\frac{i}{\hbar}[\xi(x-\hat{x})+y(p-\hat{p})]} d^d\xi d^d y d^d p d^d x, \quad (6.37)$$

é uma excelente definição e é conhecida como *Quantização de Weyl*. Este tipo de quantização deixa invariante a quantização de Dirac, a qual oferece uma descrição completa para funções lineares em x e em p . Por outro lado, se $A(p, x)$ satisfaz certas condições, então \hat{A} é um operador pseudo-diferencial (ψ DO), como veremos a continuação.

Para escrever uma formulação mais explícita, vamos calcular $(\hat{A}\psi)(z)$ na Representação de Schrödinger. Lembremos que [137]

$$\left(e^{-\frac{\hbar}{i}\xi\hat{x}} \psi \right) (z) = e^{-\frac{\hbar}{i}\xi z} \psi(z), \quad (6.38)$$

$$\left(e^{-\frac{\hbar}{i}y\hat{p}} \psi \right) (z) = \psi(z - y), \quad \text{onde usamos } \hat{p} = \frac{\hbar}{i}\nabla. \quad (6.39)$$

Vamos escrever uma expressão para o operador $(\hat{A}\psi)(z)$ em correspondência com a equação (6.37). Então se tem que

$$(\hat{A}\psi)(z) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{2d}} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} A(p, x) e^{\frac{i}{\hbar}[\xi(x-\hat{x})+y(p-\hat{p})]} \psi(z) d^d\xi d^d y d^d p d^d x. \quad (6.40)$$

Fazendo uso das equações (6.25), (6.38) e (6.39), podemos reescrever a expressão anterior como

$$\begin{aligned} (\hat{A}\psi)(z) &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^{2d}} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} A(p, x) e^{\frac{i}{\hbar}(\xi x + y p + \frac{\xi y}{2})} e^{-\frac{i}{\hbar}\xi z} \psi(z - y) d^d\xi d^d y d^d p d^d x, \\ &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^{2d}} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} A(p, x) e^{\frac{i}{\hbar}\xi(x + \frac{y}{2} - z)} e^{\frac{i}{\hbar}y p} \psi(z - y) d^d\xi d^d y d^d p d^d x, \\ &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} A(p, x) \delta\left(x - \left(z - \frac{y}{2}\right)\right) e^{\frac{i}{\hbar}y p} \psi(z - y) d^d y d^d p d^d x, \\ &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} A\left(p, z - \frac{y}{2}\right) e^{\frac{i}{\hbar}p y} \psi(z - y) d^d y d^d p. \end{aligned} \quad (6.41)$$

Ao fazer a mudança de variável $x = z - y$, obtemos que

$$(\hat{A}\psi)(z) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} A\left(p, \frac{z + x}{2}\right) e^{\frac{i}{\hbar}p(z-x)} \psi(x) d^d p d^d x, \quad (6.42)$$

a qual é usualmente a definição de Quantização de Weyl [137]. Por outro lado, se assumimos que \hat{A} pode ser representado com o kernel $K_{\hat{A}}(x, y)$ da forma seguinte,

$$(\hat{A}\psi)(x) = \int_{\mathfrak{R}^d} K_{\hat{A}}(x, y)\psi(y)d^d y. \quad (6.43)$$

Se comparamos a expressão anterior com a equação (6.42), é possível fazer a seguinte identificação,

$$K_{\hat{A}}(x, y) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^d} \int_{\mathfrak{R}^d} A\left(p, \frac{y+x}{2}\right) e^{\frac{i}{\hbar}p(x-y)} d^d p. \quad (6.44)$$

Para obter a relação inversa do operador $A(p, x)$, introduzimos as variáveis $X = \frac{x+y}{2}$ e $z = x - y$, e reescrevemos o kernel como,

$$K_{\hat{A}}\left(X + \frac{z}{2}, X - \frac{z}{2}\right) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^d} \int_{\mathfrak{R}^d} A(p, X) e^{\frac{i}{\hbar}pz} d^d p, \quad (6.45)$$

sendo a inversa da Transformada de Fourier igual a,

$$A(p, X) = \int_{\mathfrak{R}^d} K_{\hat{A}}\left(X + \frac{z}{2}, X - \frac{z}{2}\right) e^{-\frac{i}{\hbar}Pz} d^d z. \quad (6.46)$$

Com as equações (6.42), (6.44) e (6.46) temos definições rigorosas e convenientes, ademais que podemos ir e voltar entre operadores (kenels) e símbolos (que vivem no espaço de fase).

6.4 Quantização da Energia Gravitacional de uma Estrela de Nêutrons

Sabemos que o TEGR é uma teoria dinamicamente equivalente à Relatividade Geral porque as equações de Einstein são as equações de campo para ambas formulações. No entanto, o TEGR tem previsões completamente diferentes da Relatividade nos aspectos fundamentais do campo gravitacional. No caso da definição do tensor momento-energia, se apresenta uma definição diferente na Relatividade, onde as expressões não satisfazem a física adequadamente. Logo, como no TEGR existe uma expressão bem definida para o tensor é possível analisar as consequências da aplicação de técnicas de quantização no campo gravitacional. Dentre as diversas técnicas, a quantização de Weyl se destaca por ser adequada para funções que não são definidas no espaço de fase. Sendo que essa regra de quantização foi aplicada em outros sistemas gravitacionais produzindo sempre uma discretização do parâmetro físico [140].

Por outro lado, uma vez que estabelecemos as bases da teoria da quantização, nesta seção vamos a quantizar a energia gravitacional de uma estrela de nêutrons a qual é calculada no contexto do Teleparalelismo. Para isso, primeiro lembremos que uma estrela de nêutrons pode ser descrita pelo modelo simples estabelecido pelo elemento de linha seguinte

$$ds^2 = -\alpha^2 dt^2 + \beta^2 dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta (d\phi - \Omega dt)^2. \quad (6.47)$$

Sendo R o raio da estrela, então temos que para o caso de $r < R$,

$$\alpha = \frac{1}{2} \left[3 \left(1 - 8\pi\rho \frac{R^2}{3} \right)^{1/2} - \left(1 - 8\pi\rho \frac{r^2}{3} \right)^{1/2} \right], \quad (6.48)$$

$$\beta^2 = \left(1 - 8\pi\rho \frac{r^2}{3} \right)^{-1}, \quad (6.49)$$

$$\Omega = \Omega(0) \left[1 - b \left(\frac{r}{R} \right)^2 - b\tau \left(\frac{r}{R} \right)^4 \right], \quad (6.50)$$

enquanto que para $r \geq R$,

$$\alpha^2 = \left[1 - 2m \frac{R}{r} \right], \quad (6.51)$$

$$\beta^2 = \left[1 - 2m \frac{R}{r} \right]^{-1}, \quad (6.52)$$

$$\Omega = \frac{2J}{r^3}, \quad (6.53)$$

onde Ω é a velocidade angular dos referenciais inercias ao longo do eixo de rotação e onde J representa o momento angular da estrela. A densidade ρ nos permite calcular a massa contida no raio r , $m(r) = 4\pi\rho r^3/3$. O parâmetro b é igual a $b = 3/(5 + 7\tau)$, onde τ é uma quantidade arbitrária e em nosso caso se tem que $\tau = 0$, onde se descreve uma estrela completamente rígida em rotação [141].

Sabemos que para analisar um sistema físico é indispensável definir o referencial, e no caso do TEGR se faz necessário estabelecer o observador para o qual o campo de tétradas será adaptado. Na formulação teleparalela o estado cinemático do referencial vem dado pelo tensor (3.67), o qual representa o tensor de aceleração. As componentes translacionais da velocidade do observador u^μ estão relacionadas com as componentes do tensor aceleração $\psi^{(0)(i)}$, enquanto a velocidade angular do observador está relacionada com $\psi^{(i)(j)}$. Desta maneira os seis graus de liberdade extras no campo de tétradas são completamente fixados pelo tensor de aceleração ψ^{ab} . Quando temos um observador estacionário, basta exigir $e_{(0)}^\mu = (u^0, 0, 0, 0)$ dado que $e_{(0)}^\mu$ é identificado com a velocidade de campo do observador. O campo de tétradas que satisfaz estes requerimentos pode ser escrito como

$$e_{a\mu}(t, r, \theta, \phi) = \begin{pmatrix} -A & 0 & 0 & -C \\ 0 & B \sin \theta \cos \phi & r \cos \theta \cos \phi & -Dr \sin \theta \sin \phi \\ 0 & B \sin \theta \sin \phi & r \cos \theta \sin \phi & Dr \sin \theta \cos \phi \\ 0 & B \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.54)$$

onde se tem que

$$\begin{aligned} A &= (-g_{00})^{1/2}, \\ B &= (g_{11})^{1/2}, \\ C &= -\frac{g_{03}}{(-g_{00})^{1/2}}, \\ D &= \left(\frac{-\delta}{g_{00}g_{33}} \right)^{1/2}, \\ \delta &= g_{03}g_{03} - g_{00}g_{33}. \end{aligned} \quad (6.55)$$

Por outro lado, temos que as componentes não nulas do tensor de torção dadas pela equação (3.41), são [142],

$$\begin{aligned}
T_{013} &= \frac{2J^2 \sin^2 \theta}{r^2} \left(\frac{1 - \frac{m}{r} + \frac{4J^2 \sin^2 \theta}{r^4}}{1 - \frac{2m}{r} - \frac{4J^2 \sin^2 \theta}{r^4}} \right), \\
T_{023} &= -\frac{4J \sin \theta \cos \theta}{r} \left(\frac{1 - \frac{2m}{r} - \frac{2J^2 \sin^2 \theta}{r^4}}{1 - \frac{2m}{r} - \frac{4J^2 \sin^2 \theta}{r^4}} \right), \\
T_{001} &= \frac{1}{r} \left(\frac{m}{r} + \frac{8J^2 \sin^2 \theta}{r^4} \right), \\
T_{002} &= -\frac{4J^2}{r^4} \sin \theta \cos \theta, \\
T_{212} &= r \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2m}{r}}} \right), \\
T_{313} &= r \sin^2 \theta \left[1 - \left(1 - \frac{2m}{r} - \frac{4J^2 \sin^2 \theta}{r^4} \right)^{-1/2} \right], \\
T_{323} &= r^2 \sin \theta \cos \theta \left[1 - \sqrt{1 - \frac{2m}{r}} \left(1 - \frac{2m}{r} - \frac{4J^2 \sin^2 \theta}{r^4} \right)^{-1/2} \right].
\end{aligned} \tag{6.56}$$

Uma vez que conhecemos as componentes não nulas de T_{abc} , é possível calcular as componentes relevantes do tensor $\Sigma^{a\mu\nu}$ dadas pela equação (3.31). Então, temos que

$$\begin{aligned}
4e\Sigma^{(0)01} &= -2 \left[2 \left(1 - \frac{2m}{r} - \frac{4J^2 \sin^2 \theta}{r^4} \right)^{1/2} r \sin \theta - r \sin \theta \right. \\
&\quad \left. - r \sin \theta \left(1 - \frac{2m}{r} \right)^{-1/2} \left(1 - \frac{2m}{r} - \frac{4J^2 \sin^2 \theta}{r^4} \right)^{1/2} \right].
\end{aligned} \tag{6.57}$$

Da formulação do Teleparallelismo mostrado anteriormente, sabemos que a equação (3.58) representa o momento-energia total contido em um volume V . Então, usando a equação (3.55), P^a pode ser rescrito da forma [33]

$$P^a = - \int_V d^3x \partial_j \Pi^{aj} = - \oint_S dS_j \Pi^{aj}, \tag{6.58}$$

onde se tem que $\Pi^{aj} = -4\kappa e \Sigma^{(a)0j}$. A expressão anterior é a definição do momento-energia gravitacional apresentado nas referencias [5, 143], obtida a partir das equações de campo no vácuo na formulação Hamiltoniana. A equação (6.58) é invariante sob transformações de coordenadas do espaço tridimensional, sob reparametrizações de tempo e sob transformações globais do tipo $\text{SO}(3,1)$.

A formulação Hamiltoniana doTEGR é feita fazendo $\mathcal{L}_M = 0$ na expressão (3.34) com o objetivo de escrever uma densidade Lagrangiana na forma $\mathcal{L} = p\dot{q} - \mathcal{H}$, onde \mathcal{H} é uma densidade Hamiltoniana. O procedimento requer a realização da transformada de Legendre, onde se exige a capacidade de identificar os multiplicadores de Lagrange como componentes

não dinâmicos dos campos de tétradas, além das componentes do momento. Este tipo de formulação foi abordada pela primeira vez pelo Maluf [41], onde a escolha de calibre de tempo de Schwinger foi imposta para simplificar os cálculos. Logo, a formulação Hamiltoniana resultante é muito semelhante à formulação introduzida por Arnowitt, Deser e Misner [145]. É importante destacar que a formulação ADM é usada em abordagens da quantização do campo gravitacional, assim como no estabelecimento do problema de valor inicial para configurações como buracos negros binários, com o objetivo de investigar a evolução temporal do sistema.

Com o uso de análise numérica e ferramentas computacionais, a formulação Hamiltoniana permite a investigação da natureza de campo forte e não linear do campo gravitacional [33]. Posteriormente, a formulação hamiltoniana completa do TEGR foi apresentada por Maluf e Rocha-Neto [42] e mais tarde uma formulação mais refinada foi introduzida por Rocha-Neto, Maluf e Ulhoa [144]. A álgebra de restrições apresentada em [144] é semelhante à álgebra do grupo de Poincaré. De fato, ao longo dos anos, o TEGR foi testado em várias matizes, sendo a formulação Hamiltoniana muito bem sucedida. Em [119] Ulhoa e Rocha calcularam as expressões derivadas de tal formulação para o vetor de momento-energia gravitacional e o momento angular para o caso de estrelas de nêutrons em rotação rápida .

Por outro lado, a equação (6.57) pode ser identificada como a densidade Hamiltoniana gravitacional devido ao fato de,

$$P^{(0)} = 4\kappa \int dS_1 e \Sigma^{(0)01}. \quad (6.59)$$

Então, podemos escrever a densidade Hamiltoniana, $\mathcal{H} = 4e\kappa\Sigma^{(0)01}$, da forma seguinte

$$\mathcal{H} = -2r\kappa \sin \theta \left[\left(1 - \frac{2m}{r} - \frac{4J^2 \sin^2 \theta}{r^4} \right)^{1/2} \left(2 - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2m}{r}}} \right) - 1 \right]. \quad (6.60)$$

Agora, tentaremos simplificar a densidade (6.60) usando as aproximações $m/r \ll 1$ e $J/r^2 \ll 1$. Então, se segue que \mathcal{H} fica como [142]

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= -2r\kappa \sin \theta \left[-\frac{m}{r} \left(2 - \frac{m}{r} - \frac{2J^2 \sin^2 \theta}{r^4} \right) - \frac{2J^2 \sin^2 \theta}{r^4} \right], \\ &= -2\kappa \sin \theta \left[-m \left(2 - \frac{m}{r} \right) - 2J^2 \sin^2 \theta \left(\frac{1}{r^3} - \frac{m}{r^4} \right) \right], \\ \mathcal{H} &= 2m\kappa \sin \theta \left(2 - \frac{m}{r} \right) + 4\kappa J^2 \sin^3 \theta \left(\frac{1}{r^3} - \frac{m}{r^4} \right). \end{aligned} \quad (6.61)$$

Ao integrar sobre uma hipersuperfície de raio infinito obtemos a energia total do espaço-tempo, conseguindo-se como resultado a massa m , já que a estrela de nêutrons se comporta como uma partícula de massa m neste limite.

Uma vez que conhecemos a forma da densidade Hamiltoniana podemos proceder com a quantização. Como falamos na seção anterior, existem diversos processos de quantização, mas nós faremos uso da Quantização de Weyl, equação (6.37), onde os operadores de coordenadas

devem satisfazer uma álgebra não comutativa. A Quantização de Weyl é superior à canônica porque na primeira pode ser aplicada a qualquer função mesmo que tal função não esteja definida no espaço de fase. Por outro lado, a Quantização de Weyl ao ser aplicada a um polinômio produz um polinômio de operadores.

Assim, usando a Quantização de Weyl na densidade Hamiltoniana gravitacional, é possível obter uma equação quântica para a gravitação da forma $\hat{\mathcal{H}}\psi = \epsilon\psi$, onde se tem que $\hat{\mathcal{H}} = \mathcal{W}[\mathcal{H}]$. Usando as seguintes representações

$$\begin{aligned}\hat{x} &= x, & \hat{x} &= \mathcal{W}[x], \\ \hat{r} &= \beta \frac{\partial}{\partial x}, & \hat{r} &= \mathcal{W}[r].\end{aligned}\quad (6.62)$$

com $x = \sin \theta$ e β sendo o parâmetro de não comutatividade $[\hat{r}, \hat{x}] = \beta$, é possível reescrever a equação (6.61) da forma [142]

$$\hat{r}^4 \hat{\mathcal{H}} = m\kappa x(2\hat{r}^4 - m\hat{r}^3) + m\kappa(2\hat{r}^4 - m\hat{r}^3)x + 2\kappa J^2 x^3(\hat{r} - m) + 2\kappa J^2(\hat{r} - m)x^3. \quad (6.63)$$

É importante destacar que β é uma constante independente da constante de Planck, porém se houver alguma relação entre ambas constantes, ela deve ser determinada mediante experimentação. Adicionalmente, uma implicação física da existência do parâmetro não comutativo representa um princípio de incerteza nas medições de r e θ em β . Vamos agora introduzir algumas relações,

$$\hat{r}x = \beta \frac{\partial}{\partial x}(x) + x\beta \frac{\partial}{\partial x} = \beta + x\beta \frac{\partial}{\partial x}, \quad (6.64)$$

$$\hat{r}^2 x = \hat{r}(\hat{r}x) = 2\beta \frac{\partial}{\partial x} + x\beta^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad (6.65)$$

$$\hat{r}^3 x = \hat{r}(\hat{r}^2 x) = 3\beta^3 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + x\beta^3 \frac{\partial^3}{\partial x^3}, \quad (6.66)$$

$$\hat{r}^4 x = \hat{r}(\hat{r}^3 x) = 4\beta^4 \frac{\partial^3}{\partial x^3} + x\beta^4 \frac{\partial^4}{\partial x^4}. \quad (6.67)$$

com as quais é possível reescrever a equação (6.63) da forma seguinte, onde também se fez uso de $\hat{\mathcal{H}}\psi = \epsilon\psi$,

$$\begin{aligned}\epsilon\beta^4 \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} &= m\kappa x \left(2\beta^4 \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} - m\beta^3 \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} \right) \\ &+ m\kappa \left(8\beta^4 \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} + 2x\beta^4 \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} - 3m\beta^3 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - mx\beta^3 \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} \right) \\ &+ 2\kappa J^2 x^3 \left(\beta \frac{\partial \psi}{\partial x} - m\psi \right) + 6\kappa\beta J^2 x^2 \psi + 2\kappa\beta J^2 x^3 \frac{\partial \psi}{\partial x} - 2m\kappa J^2 x^3 \psi.\end{aligned}\quad (6.68)$$

Se usamos as quantidades adimensionais $m = \beta\mu$ e $J^2 = \beta^4 j^2 \mu^2$, a expressão anterior novamente pode ser reescrita em termos delas,

$$\begin{aligned}\frac{\epsilon}{\beta} \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} &= 4\kappa\mu x \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} + \mu\kappa(8 - 2\mu x) \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} - 3\mu^3 \kappa \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \\ &+ 2\kappa j^2 \mu^2 x^2 \left(2x \frac{\partial \psi}{\partial x} + 3\psi - 2\mu x \psi \right).\end{aligned}\quad (6.69)$$

Ao considerar $\varepsilon = \epsilon/\kappa\beta$ temos que,

$$(4\mu x - \varepsilon) \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} + (8\mu - 2\mu^2 x) \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} - 3\mu^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + 2j^2 \mu^2 \left(2x^3 \frac{\partial \psi}{\partial x} + 3x^2 \psi - 2\mu x^3 \psi \right) = 0, \quad (6.70)$$

a qual é a equação da energia gravitacional quantizada resultado da aplicação da Quantização de Weyl [142]. Sabemos, que as equações diferenciais não lineares na maioria dos casos tem soluções analíticas difíceis de alcançar. Logo, na necessidade de procurar técnicas alternativas para resolver analiticamente a equação anterior, vamos a considerar a solução para o limite quando $j \gg \mu$ e a solução usando o método de decomposição de Adomian.

6.4.1 Solução para o limite quando $j \gg \mu$

Estrelas de nêutrons têm sido estudadas extensivamente nos últimos anos, tanto teórica quanto observacionalmente, por causa das informações que podem fornecer sobre a equação de estado da matéria em densidades extremamente altas e por serem consideradas fontes promissoras de ondas gravitacionais. Entretanto, estas estrelas podem ter uma estrutura complicada (como uma crosta sólida, campo magnético, possível interior superfluido, possível núcleo de quarks, etc). Dependendo de qual fase da vida da estrela se deseja estudar, vários efeitos físicos podem ser ignorados, de modo que a descrição se torna significativamente simplificada.

Ao considerar o caso de estrelas relativísticas rotativas, uniformemente compactas e frias, com valores típicos de velocidades, raios e massas, se obteve que o momento angular é dez ordens de grandeza maior que a massa das estrelas [119]. Desta maneira, faz sentido considerar o caso particular $j \gg \mu$ e analisar as consequências disto. Logo, neste limite a equação (6.70) fica como

$$2x^3 \frac{\partial \psi}{\partial x} + 3x^2 \psi - 2\mu x^3 \psi = 0. \quad (6.71)$$

A equação anterior é uma equação diferencial ordinária de primeira ordem e pode ser facilmente resolvida usando separação de variáveis, obtendo-se uma solução da forma seguinte

$$\psi(x) = \psi_0 x^{-3/2} e^{\mu x}. \quad (6.72)$$

Impondo condições de contorno periódicas da forma $\psi(1) = \psi(-1)$ na variável x , e considerando que a constante β é igual a $i\gamma$, podemos concluir que

$$ie^{-im/\gamma} = e^{im/\gamma}. \quad (6.73)$$

A equação anterior somente se satisfaz quando temos múltiplos ímpares de $\pi/4$. Então, obtemos que m é igual a

$$m = (4n + 1)\pi\gamma/4, \quad (6.74)$$

onde n é um número inteiro. Por outro lado, se calculamos classicamente a massa de uma estrela com densidade constante $\rho(r) = \rho$ usando a equação de continuidade para a massa, temos que

$$m(r) = \int dm(r) = 4\pi \int_0^r r^2 \rho(r) dr = (4\pi/3)r^3 \rho, \quad (6.75)$$

Para o caso de uma estrela com raio R , a massa fica como

$$M = m(R) = (4\pi/3)R^3\rho. \quad (6.76)$$

Logo, se comparamos a equação (6.74) com (6.76) é possível dizer que m é a expressão quantizada da massa das estrelas de nêutrons onde γ é interpretada como a massa fundamental, de forma tal que todo aumento na massa da estrela está determinada por ela. Adicionalmente, pode ser comparado com dados observacionais que catalogam a massa das estrelas de nêutrons [104, 146] conhecidas e assim identificar um padrão discreto. Vale ressaltar que o parâmetro não comutativo imaginário não leva a um operador Hamiltoniano não Hermitiano, pois o operador inteiro é multiplicado por um fator imaginário [142].

6.4.2 Solução pelo Método de Decomposição de Adomian

O método de decomposição de Adomian [147–149] é quantitativo, analítico, não requer linearização nem perturbação, e contínuo sem recorrer à discretização. Para problemas não-lineares, por exemplo, o método mostra interessantes resultados, pois sua aplicação tem possibilitado encontrar aproximações analíticas que convergem rapidamente quando a solução do problema existe. O método consiste em dividir a equação dada em partes lineares e não lineares, invertendo o operador derivativo de maior ordem, identificando as condições iniciais e/ou de contorno e os termos que envolvem apenas as variáveis independentes. Logo, decompondo a função desconhecida em uma série cujas componentes vão a ser determinadas, decompondo a função não linear em termos de polinômios especiais chamados polinômios de Adomian, e encontrando os termos sucessivos da solução em série pela relação recorrente usando polinômios de Adomian. Desta maneira, temos que a equação diferencial não linear [150],

$$Fy(x) = g(x), \quad (6.77)$$

pode ser separada em duas componentes

$$Ly(x) + Ry(x) + Ny(x) = g(x), \quad (6.78)$$

onde $L + R$ representa a parte linear do operador diferencial F , N é a parte não linear e $g(x)$ representa uma função de variável independente tal que $x \in \mathcal{D} \subset \mathfrak{R}$. Na decomposição do operador linear, o termo L representa a derivada de ordem mais alta da equação diferencial e o termo R representa do restante da parte linear. Resolvendo para $L(y)$, temos que

$$Ly(x) = g(x) - Ry(x) - Ny(x). \quad (6.79)$$

Logo, assumimos que o operador L é um operador invertível. Aplicando a inversa do operador L em ambos lados da equação anterior se segue

$$L^{-1}[Ly(x)] = L^{-1}[g(x)] - L^{-1}[Ry(x)] - L^{-1}[Ny(x)], \quad (6.80)$$

e considerando que $L^{-1}[Ly(x)] = y(x)$, obtemos

$$y(x) = L^{-1}[g(x)] - L^{-1}[Ry(x)] - L^{-1}[Ny(x)] + \varphi(x). \quad (6.81)$$

A quantidade $\varphi(x)$ é a constante de integração que satisfaz a condição $L(\varphi) = 0$. Agora, se assumindo que a solução de $y(x)$ pode ser representada como uma série infinita

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x). \quad (6.82)$$

Adicionalmente, suponha que o termo não linear $Ny(x)$ pode também ser escrito como uma série infinita dos polinômios de Adomian A_n de forma seguinte

$$Ny(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x), \quad (6.83)$$

onde os polinômios vem definidos pela expressão [147],

$$A_n(x) = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} N \left(\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda^n y_n(x)) \right) \Big|_{\lambda=0}. \quad (6.84)$$

Substituindo as equações (6.82) e (6.83) na expressão (6.81), temos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n(x) = \varphi(x) + L^{-1}[g(x)] - L^{-1} \left[\sum_{n=0}^{\infty} Ry_n(x) \right] - L^{-1} \left[\sum_{n=0}^{\infty} A_n(x) \right]. \quad (6.85)$$

Cada componente da série infinita dada pela equação (6.82) pode ser calculada por comparação direta entre os lados direito e esquerdo da equação anterior. Fazendo isso, se obtém o seguinte algoritmo para a solução [151]

$$y_0 = \varphi(x) + L^{-1}[g(x)], \quad (6.86)$$

$$y_{n+1} = -L^{-1}[Ry_n(x)] + L^{-1}[A_n(x)]. \quad (6.87)$$

Note-se que a solução é obtida de forma iterativa das equações anteriores. Adicionalmente, os termos de $y_n(x)$ dependem explicitamente dos polinômios de Adomian, equação (6.84), os quais podem se entender como a expansão em séries de Taylor da função não-linear $Ny(x)$ em torno da função inicial $y_0(x)$. Logo, usando a expressão (6.84) podemos calcular os cinco primeiros polinômios, os quais são iguais a

$$A_0(x) = Ny_0(x), \quad (6.88)$$

$$A_1(x) = y_1(x)N'y_0(x), \quad (6.89)$$

$$A_2(x) = \frac{y_1^2(x)}{2}N''y_0(x) + y_2(x)N'y_0(x), \quad (6.90)$$

$$A_3(x) = y_3(x)N'y_0(x) + y_1(x)y_2(x)N''y_0(x) + \frac{y_1(x)^3}{3!}N'''y_0(x), \quad (6.91)$$

$$A_4(x) = y_4(x)N'y_0(x) + \left(y_1(x)y_3(x) + \frac{y_2(x)^2}{2} \right) N''y_0(x) + \frac{y_1(x)^2y_2(x)}{2}N'''y_0(x) + \frac{y_1(x)^4}{4!}N^{(4)}y_0(x). \quad (6.92)$$

Na prática alguns dos termos das séries na equação (6.85) não podem ser determinados, desta maneira a solução é aproximada usando a série truncada $\sum_{n=0}^N y_n(x)$. Este método provou ser muito eficiente na resolução de vários tipos de problemas de limite não linear e de valor inicial [152, 153]. Adicionalmente, é importante discutir sobre a convergência do método o qual ajudará na verificação da visibilidade do método em determinadas situações. Considerando de forma geral a equação funcional

$$y - Ny = f, \quad (6.93)$$

onde $N : H \rightarrow H$ é um operador não linear contínuo, $f \in H$ e H um espaço de Hilbert. Logo, o objetivo do método da decomposição de Adomian é encontrar uma função $y \in H$ tal que possamos satisfazer a equação (6.93), considerando que a $y(x)$ pode ser escrita como na equação (6.82) e que $Ny(x)$ pode ser escrito como na equação (6.83), obtendo-se as relações de recorrência (6.86) e (6.87). Baseando-nos nisto, é possível enunciar o teorema sobre a convergência do método da forma seguinte [154], se $N : H \rightarrow H$ é um operador contínuo no espaço de Hilbert H e $y(x)$ é uma solução da equação (6.93), a série $y_0, y_1, \dots, y_n, \dots$ converge para $y(x)$ sempre que existir $0 \leq \alpha < 1$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ satisfazendo $\|y_{k+1}\|_\infty \leq \alpha \|y_k\|_\infty$, para todo $k \geq n_0$. Este resultado nos oferece um jeito simples de verificar se o método da decomposição de Adomian irá convergir para um determinado tipo de problema [151].

Por outro lado, para aplicar o método na equação (6.70), primeiro vamos reescrever a expressão da forma seguinte,

$$\frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} = \frac{1}{(4\mu x - \varepsilon)} \left[-(8\mu - 2\mu^2 x) \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} + 3\mu^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - 2j^2 \mu^2 \left(2x^3 \frac{\partial \psi}{\partial x} + 3x^2 \psi - 2\mu x^3 \psi \right) \right], \quad (6.94)$$

onde consideramos o operador L como o operador diferencial de maior ordem e a parte no linear da equação diferencial, $N\psi(x)$, é representada pelo lado direito da equação anterior. Logo, temos que

$$L\psi(x) = N\psi(x), \quad (6.95)$$

Vamos considerar as seguintes condições de iniciais,

$$\psi(0) = 1, \quad (6.96)$$

$$\frac{\partial^3 \psi(0)}{\partial x^3} = \frac{\partial^2 \psi(0)}{\partial x^2} = \frac{\partial \psi(0)}{\partial x} = 0. \quad (6.97)$$

Para achar solução à equação (6.94) usamos o código mostrado no Apêndice B e que foi extraído de [155]. Dadas as equações (6.94),(6.95), (6.96), usamos as seguintes linhas de código

```
ICs:= [0, [1,0,0,0]]:
A:= (8*m - 2*(m^2)*t)/(4*m*t - b):
B:= (3*m^2)/(4*m*t - b):
C:= (2*(j^2)*(m^2))/(4*m*t - b):
Eqs:= [[u->0, u-> A*diff(u,'$(t,3)) - B*diff(u,'$(t,2)) + C*(2*(t^3)*diff(u,t)
- 3*(t^2)*u - 2*m*(t^3)*u),t->0]]:
n:= 3:
result1:= Adomian(ICs,Eqs,n):.
```

onde t se usa como variável independente, ICs é uma lista com as condições iniciais, Eqs é uma lista das equações diferenciais e n é lo número de termos da soma. É possível repetir esse processo até obter a precisão desejada. No nosso caso, o código nos forneceu uma solução

analítica aproximada para $\psi(x)$ expandida até o termo x^{11} da forma seguinte,

$$\begin{aligned}\psi(x) \approx & 1 - \frac{\mu^2}{8}x^4 - \frac{\mu^3}{10\varepsilon}x^5 + \frac{\mu^2 j^2}{60\varepsilon}x^6 + \frac{8\mu^3 j^2}{7\varepsilon}x^7 \\ & + \frac{1}{8} \left(\frac{\mu^4 j^2}{\varepsilon} - \frac{4\mu^6}{35\varepsilon^2} \right) x^8 \\ & + \frac{1}{9} \left[\frac{(2\mu^2 + 8\mu)j^2 \mu^3}{2\varepsilon^2} - \frac{\mu^5 j^2}{\varepsilon^2} \right] x^9 + \frac{\mu^6 j^2}{11} x^{11} + \dots\end{aligned}\quad (6.98)$$

Vemos que para cada ordem da expansão de $\psi(x)$ se gera um valor discreto de j_n , lembrando que j está relacionado com o momento angular da estrela. Desta maneira, usando a condição de continuidade $\psi(1) = \psi(-1)$, podemos calcular os valores da expansão para j_n . Para a componente j_1 consideramos a expansão até o termo x^7 . Desta maneira, se obtém

$$\begin{aligned}\psi(1) &= \psi(-1), \\ -\frac{\mu^3}{10\varepsilon} + \frac{8\mu^3 j_1^2}{7\varepsilon} &= \frac{\mu^3}{10\varepsilon} - \frac{8\mu^3 j_1^2}{7\varepsilon}, \\ \frac{16 j_1^2}{7 \varepsilon} &= \frac{2}{10\varepsilon}, \\ j_1 &= \sqrt{\frac{7}{80}}.\end{aligned}\quad (6.99)$$

Para o caso da componente j_2 consideramos a expansão até o termo x^9 . Se segue que,

$$\begin{aligned}-\frac{\mu^3}{10\varepsilon} + \frac{8\mu^3 j_2^2}{7\varepsilon} + \frac{1}{9} \left[\frac{(2\mu^2 + 8\mu)j_2^2 \mu^3}{2\varepsilon^2} - \frac{\mu^5 j_2^2}{\varepsilon^2} \right] &= \frac{\mu^3}{10\varepsilon} - \frac{8\mu^3 j_2^2}{7\varepsilon} - \frac{1}{9} \left[\frac{(2\mu^2 + 8\mu)j_2^2 \mu^3}{2\varepsilon^2} - \frac{\mu^5 j_2^2}{\varepsilon^2} \right], \\ j_2^2 \left(\frac{18\varepsilon + 7\mu}{126} \right) &= \frac{\varepsilon}{80}, \\ j_2^2 &= \frac{126\varepsilon}{80(18\varepsilon + 7\mu)}, \\ j_2 &= \sqrt{\frac{(7 \cdot 18)\varepsilon}{80(7\mu + 18\varepsilon)}}.\end{aligned}\quad (6.100)$$

De maneira similar que nos casos anteriores, para calcular o valor de j_3 vamos considerar a função $\psi(x)$ expandida até x^{11} , e com isso obtemos o seguinte

$$\begin{aligned}\psi(1) &= \psi(-1), \\ j_3^2 \left[\frac{88(7\mu + 18\varepsilon) + 126\mu^3 \varepsilon^2}{7 \cdot 18 \cdot 88} \right] &= \frac{1}{80}\varepsilon, \\ j_3 &= \sqrt{\frac{(88 \cdot 7 \cdot 18)\varepsilon}{80[126\mu^3 \varepsilon^2 + 88(7\mu + 18\varepsilon)]}}.\end{aligned}\quad (6.101)$$

Como vemos, para cada ordem da função $\psi(x)$ é possível calcular um valor discreto do j_n . Por outro lado, dado que ε resulta da integração da densidade Hamiltoniana quantizada, então ele representa o observável físico do nosso problema. Assim é natural fazer

a identificação $\epsilon = m$. Logo, lembrando que $\varepsilon = \epsilon/\kappa\beta$ se obtém que ε deve ser igual a $\varepsilon = \mu 16\pi$ o que reforça o fato que a massa da estrela de nêutrons pode ser quantizada, e vem dada pela quantização do momento angular J . Finalmente, como já se falou anteriormente o parâmetro não comutativo β deve ser independente da constante de Planck, e por sua vez tem que ser muito pequeno e ter dimensões de comprimento. Tal parâmetro pode ser escolhido como o quantum de massa, se assumirmos essa quantidade como a massa do elétron, logo o parâmetro β pode ser aproximada á quantidade $mG/c^2 \sim 10^{-55}m$, a qual é muito menor que a Longitude de Planck e portanto não deveria impactar significativamente a estrutura atômica conhecida [142].

Capítulo 7

Conclusões

No presente trabalho analisamos a física de uma estrela de nêutrons desde o ponto de vista da Gravidade Telaparelela, permitindo-nos calcular quantidades físicas que na Relatividade Geral não estão bem definidas. Primeiro, partindo do formalismo Lagrangiano do Teleparalelismo Equivalente à Relatividade Geral escrevemos uma expressão para a pressão gravitacional a qual foi implementada no calculo da pressão radial gravitacional $p(r)$ para estrelas de nêutrons que foram modeladas usando o código RNS, que simula estrelas compactas, relativísticas e que giram rapidamente. Na figura 5.2 mostra-se a pressão $p(r)$ para estrelas de nêutrons com quatro diferentes tipos de matéria densa e com energia central igual a $\varepsilon_c/c^2 = 10^{15}g/cm^3$. Podemos notar que a pressão radial $p(r)$ vai diminuindo até se estabilizar na superfície da estrela. Adicionalmente, esta pressão tem valores negativos o que indica que a pressão está tentando comprimir a estrela em vez de expandi-la. Então é possível concluir que esta pressão contribui nos processos de estabilidade das estrelas em conjunto com a pressão de degenerescência dos nêutrons.

Por outro lado, fazendo uso dos formalismo Hamiltoniano do Teleparalelismo e da Quantização de Weyl, foi possível achar uma expressão quantizada da energia gravitacional para uma estrela de nêutrons. Esta equação foi resolvida analiticamente considerando dois casos particulares, quando $j \gg \mu$ e aplicando o método de decomposição de Adomian, concluindo-se que as massas das estrelas de nêutrons podem ter valores discretos. Sabemos que uns dos problemas da observação deste tipo de estrelas é a medição simultânea dos valores de raio e massas das estrelas. Este ultimo resultado da quantização da massa, poderia contribuir na determinação dos valores exatos dos raios dos corpos celestes. Um dos pontos chaves na implementação do método de Adomian é que ele permite a solução de equações funcionais sem a necessidade de discretização ou aproximação dos operadores. Para problemas não-lineares, por exemplo, o método mostra interessantes resultados, pois sua aplicação tem possibilitado encontrar aproximações analíticas que convergem rapidamente quando a solução do problema existe.

Para finalizar, poderia considerar-se para trabalhos subsequentes o calculo da pressão $p(r)$ para outros tipos de equações de estado, assim como o estudo da termodinâmica gravitacional das Estrelas de Nêutrons a partir da expressão $TdS = dE + p(r)dV$, onde dE representa a densidade de Energia Total Gravitacional também calculada no formalismo Teleparalelo. Adicionalmente, também seria de interesse estudar a dependência da pressão gravitacional com respeito à variação da temperatura. As estrelas de nêutrons também podem nos ensinar

sobre mecânica quântica, sendo laboratórios incríveis para observar alguns dos efeitos da mecânica quântica ocorrendo em ambientes extremos, como a quantização da massa. Se continuarmos aplicando a mecânica quântica e outras áreas de grande alcance da física nos objetos astronômicos, como as estrelas de nêutrons, certamente podemos aprender muito mais sobre como nosso fascinante Universo funciona.

Apêndice A

Equações

As derivadas segundas e as derivadas parciais das componentes da métrica $g(r, \theta)$, assim como as derivadas parciais $\partial_2(e\Sigma^{(1)12})$, $\partial_2(e\Sigma^{(2)12})$, $\partial_2(e\Sigma^{(3)12})$ ficam da forma seguinte,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 g_{00}(r, \theta)}{\partial^2 \theta} = & -\mu \left\{ -e^{\gamma+\rho} \left(\frac{\partial \gamma}{\partial \mu} + \frac{\partial \rho}{\partial \mu} \right) - r_e^2 \left(\frac{s}{1-s} \right)^2 e^{\gamma-\rho} \times \right. \\
 & \times \left[\omega^2(1-\mu^2) \left(\frac{\partial \gamma}{\partial \mu} - \frac{\partial \rho}{\partial \mu} \right) + 2\omega(1-\mu^2) \frac{\partial \omega}{\partial \mu} - 2\omega^2 \mu \right] \left. \right\} \\
 & + (1-\mu^2) \left\{ -e^{\gamma+\rho} \left(\frac{\partial \gamma}{\partial \mu} + \frac{\partial \rho}{\partial \mu} \right)^2 - e^{\gamma+\rho} \left(\frac{\partial^2 \gamma}{\partial \mu^2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial \mu^2} \right) \right. \\
 & - r_e^2 \left(\frac{s}{1-s} \right)^2 e^{\gamma-\rho} \left(\frac{\partial \gamma}{\partial \mu} - \frac{\partial \rho}{\partial \mu} \right) \left[\omega^2(1-\omega^2) \left(\frac{\partial \gamma}{\partial \mu} - \frac{\partial \rho}{\partial \mu} \right) \right. \\
 & \left. \left. + 2\omega(1-\omega^2) \frac{\partial \omega}{\partial \mu} - 2\omega^2 \mu \right] \right. \\
 & - r_e^2 \left(\frac{s}{1-s} \right)^2 e^{\gamma-\rho} \left[2\omega(1-\omega^2) \frac{\partial \omega}{\partial \mu} \left(\frac{\partial \gamma}{\partial \mu} - \frac{\partial \rho}{\partial \mu} \right) \right. \\
 & \left. - 2\mu\omega^2 \left(\frac{\partial \gamma}{\partial \mu} - \frac{\partial \rho}{\partial \mu} \right) + \omega^2(1-\mu^2) \left(\frac{\partial^2 \gamma}{\partial \mu^2} - \frac{\partial^2 \rho}{\partial \mu^2} \right) \right. \\
 & \left. \left. + 2(1-\mu^2) \left(\frac{\partial \omega}{\partial \mu} \right)^2 - 4\omega\mu \frac{\partial \omega}{\partial \mu} + 2\omega(1-\mu^2) \frac{\partial^2 \omega}{\partial \mu^2} - 4\omega\mu - 2\omega^2 \right] \right\}, \text{(A.1)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 g_{00}(r, \theta)}{\partial^2 \theta} &= -\sqrt{1-\mu^2} \left\{ -\frac{(1-s)^2}{r_e} e^{\gamma+\rho} \left[\left(\frac{\partial \gamma}{\partial \mu} + \frac{\partial \rho}{\partial \mu} \right) \left(\frac{\partial \gamma}{\partial s} + \frac{\partial \rho}{\partial s} \right) + \left(\frac{\partial^2 \gamma}{\partial \mu \partial s} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial \mu \partial s} \right) \right] \right. \\
&\quad - r_e e^{\gamma-\rho} \left[-2\mu + (1-\mu^2) \left(\frac{\partial \gamma}{\partial \mu} - \frac{\partial \rho}{\partial \mu} \right) \right] \times \\
&\quad \times \left[\omega^2 s^2 \left(\frac{\partial \gamma}{\partial s} - \frac{\partial \rho}{\partial s} \right) + 2\omega s^2 \frac{\partial \omega}{\partial s} + 2\omega^2 \left(\frac{s}{1-s} \right) \right] \\
&\quad - r_e (1-\mu^2) e^{\gamma-\rho} \left[2\omega s^2 \frac{\partial \omega}{\partial \mu} \left(\frac{\partial \gamma}{\partial s} - \frac{\partial \rho}{\partial s} \right) + \omega^2 s^2 \left(\frac{\partial^2 \gamma}{\partial \mu \partial s} - \frac{\partial^2 \rho}{\partial \mu \partial s} \right) \right. \\
&\quad \left. \left. + 2s^2 \frac{\partial \omega}{\partial \mu} \frac{\partial \omega}{\partial s} + 2\omega s^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial \mu \partial s} + 4\omega \frac{\partial \omega}{\partial \mu} \left(\frac{s}{1-s} \right) \right] \right\}, \tag{A.2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 g_{33}(r, \theta)}{\partial^2 \theta} &= r_e^2 \left(\frac{s}{1-s} \right)^2 e^{\gamma-\rho} \left\{ \left[-\mu + (1-\mu^2) \left(\frac{\partial \gamma}{\partial \mu} - \frac{\partial \rho}{\partial \mu} \right) \right] \times \right. \\
&\quad \times \left[\left(\frac{\partial \gamma}{\partial \mu} - \frac{\partial \rho}{\partial \mu} \right) (1-\mu^2) - 2\mu \right] \\
&\quad \left. + (1-\mu^2) \left[\left(\frac{\partial^2 \gamma}{\partial \mu^2} - \frac{\partial^2 \rho}{\partial \mu^2} \right) (1-\mu^2) - 2\mu \left(\frac{\partial \gamma}{\partial \mu} - \frac{\partial \rho}{\partial \mu} \right) - 2 \right] \right\}, \tag{A.3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 g_{33}(r, \theta)}{\partial r \partial \theta} &= -\sqrt{1-\mu^2} r_e e^{\gamma-\rho} \left\{ \left[-2\mu + (1-\mu^2) \left(\frac{\partial \gamma}{\partial \mu} - \frac{\partial \rho}{\partial \mu} \right) \right] \times \right. \\
&\quad \times \left[s^2 \left(\frac{\partial \gamma}{\partial \mu} - \frac{\partial \rho}{\partial \mu} \right) + 2 \left(\frac{s}{1-s} \right) \right] \\
&\quad \left. + (1+\mu^2) s^2 \left(\frac{\partial^2 \gamma}{\partial \mu \partial s} - \frac{\partial^2 \rho}{\partial \mu \partial s} \right) \right\}, \tag{A.4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 g_{30}(r, \theta)}{\partial^2 \theta} &= -r_e^2 \left(\frac{s}{1-2} \right)^2 e^{\gamma-\rho} \left\{ \left[-\mu + (1-\mu^2) \left(\frac{\partial \gamma}{\partial \mu} - \frac{\partial \rho}{\partial \mu} \right) \right] \times \right. \\
&\quad \times \left[\frac{\partial \omega}{\partial \mu} (1-\mu^2) + \omega \left(\frac{\partial \gamma}{\partial \mu} - \frac{\partial \rho}{\partial \mu} \right) (1-\mu^2) - 2\mu \omega \right] \\
&\quad + (1-\mu^2) \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial \mu^2} (1-\mu^2) - 4\mu \frac{\partial \omega}{\partial \mu} - 2\omega + 2\mu \omega \left(\frac{\partial \gamma}{\partial \mu} - \frac{\partial \rho}{\partial \mu} \right) \right. \\
&\quad \left. + \omega \left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial \mu^2} - \frac{\partial^2 \gamma}{\partial \mu^2} \right) (1-\mu^2) + \frac{\partial \omega}{\partial \mu} \left(\frac{\partial^2 \gamma}{\partial \mu^2} - \frac{\partial^2 \rho}{\partial \mu^2} \right) (1-\mu^2) \right] \right\}, \tag{A.5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 g_{30}(r, \theta)}{\partial r \partial \theta} &= r_e \sqrt{1-\mu^2} e^{\gamma-\rho} \left\{ \left[-2\mu + (1-\mu^2) \left(\frac{\partial \gamma}{\partial \mu} - \frac{\partial \rho}{\partial \mu} \right) \right] \times \right. \\
&\quad \times \left[s^2 \frac{\partial \omega}{\partial s} + 2\omega \left(\frac{s}{1-s} \right) + \omega s^2 \left(\frac{\partial \gamma}{\partial s} - \frac{\partial \rho}{\partial s} \right) \right] \\
&\quad + (1-\mu^2) \left[s^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial \mu \partial s} + 2 \left(\frac{s}{1-s} \right) \frac{\partial \omega}{\partial \mu} \right. \\
&\quad \left. + s^2 \frac{\partial \omega}{\partial \mu} \left(\frac{\partial \gamma}{\partial s} - \frac{\partial \rho}{\partial s} \right) + \omega s^2 \left(\frac{\partial^2 \gamma}{\partial \mu \partial s} - \frac{\partial^2 \rho}{\partial \mu \partial s} \right) \right] \right\}, \tag{A.6}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_2(e\Sigma^{(1)12}) = & -\frac{1}{8} \frac{\cos \phi}{(g_{11}g_{22}\delta)^{3/2}} \left[4g_{11}^{3/4} \sin \theta g_{22}g_{33}g_{30}g_{00} \partial_2^2(g_{30}) \right. \\
& -4g_{11}g_{22}^{3/2} g_{33}g_{30}g_{00} \cos \theta \partial_2(\partial_r(g_{30})) - 4g_{11}^{3/2} g_{22}g_{30}^2 \sin \theta \partial_2^2(g_{30}) \\
& -4g_{11}^{3/2} g_{22}g_{33}g_{30} \sin \theta \partial_2(g_{00})\partial_2(g_{00}) - 4g_{11}g_{22}^{3/2} g_{33}g_{30}g_{00} \sin \theta \partial_1(g_{30}) \\
& -2g_{11}^{3/2} g_{22}g_{33}g_{00} \sin \theta \partial_2(g_{00})\partial_2(g_{33}) - 4g_{11}^{3/2} g_{22}g_{30}g_{00}\partial_2(g_{34}) \sin \theta \partial_2(g_{00}) \\
& -2g_{11}^{3/2} g_{30}g_{33}g_{00} \sin \theta \partial_2(g_{22})\partial_2(g_{30}) + 2g_{22}^{3/2} g_{11}g_{33}g_{30} \cos \theta \partial_2(g_{00})\partial_1(g_{33}) \\
& +4g_{11}^{3/2} g_{22}g_{33}g_{30} \cos \theta \partial_2(g_{30})g_{00} + 2g_{22}^{3/2} g_{11}g_{33}g_{30} \cos \theta \partial_2(g_{30})\partial_1(g_{00}) \\
& +g_{22}^{3/2} g_{11}g_{33}g_{00} \cos \theta \partial_2(g_{00})\partial_1(g_{33}) - 4g_{11}g_{22}^{3/2} g_{33}g_{30}g_{00} \cos \theta \partial_1(g_{30})\partial_2(g_{34}) \\
& +g_{11}g_{22}^{3/2} g_{33}g_{00} \cos \theta \partial_2(g_{33})\partial_1(g_{00}) + 2g_{11}g_{22}^{3/2} g_{30}g_{00} \cos \theta \partial_2(g_{30})\partial_1(g_{33}) \\
& +2g_{11}g_{22}^{3/2} g_{30}g_{00} \cos \theta \partial_2(g_{33})\partial_1(g_{30}) + 2g_{22}^{3/2} g_{30}g_{00}g_{33} \cos \theta \partial_2(g_{11})\partial_1(g_{30}) \\
& -g_{11}^{3/2} g_{30}^2 g_{33} \sin \theta \partial_2(g_{00})\partial_2(g_{22}) - g_{11}^{3/2} g_{30}^2 g_{00} \sin \theta \partial_2(g_{22})\partial_2(g_{33}) \\
& -g_{11}g_{22}^{3/2} g_{33}^2 \cos \theta \partial_2(g_{00})\partial_1(g_{00}) - g_{11}g_{22}^{3/2} g_{00}^2 \cos \theta \partial_1(g_{33})\partial_2(g_{33}) \\
& -g_{22}^{3/2} g_{33}^2 g_{00} \cos \theta \partial_2(g_{11})\partial_2(g_{00}) - g_{22}^{3/2} g_{00}^2 g_{33} \cos \theta \partial_1(g_{33})\partial_2(g_{11}) \\
& +2g_{11}^{3/2} g_{30}^2 g_{22}g_{00} \sin \theta \partial_2^2(g_{33}) + 2g_{11}g_{22}^{3/2} g_{33}^2 g_{00} \cos \theta \partial_2(\partial_1(g_{00})) \\
& -2g_{11}g_{22}^{3/2} g_{30}^2 g_{33} \cos \theta \partial_2(\partial_1(g_{00})) + 2g_{11}g_{22}^{3/2} g_{00}^2 g_{33} \cos \theta \partial_2(\partial_1(g_{33})) \\
& -2g_{11}g_{22}^{3/2} g_{30}^2 g_{00} \cos \theta \partial_2(\partial_1(g_{33})) - 2g_{11}^{3/2} g_{33}^2 g_{22}g_{00} \sin \theta \partial_2^2(g_{00}) \\
& +2g_{11}^{3/2} g_{22}g_{30}^2 g_{33} \sin \theta \partial_2^2(g_{00}) - 2g_{11}^{3/2} g_{22}g_{00}^2 g_{33} \sin \theta \partial_2^2(g_{33}) \\
& +g_{11}^{3/2} g_{22}g_{33}^2 \sin \theta (\partial_2(g_{00}))^2 - 4g_{22}^{3/2} g_{11}g_{30}^3 \sin \theta \partial_1(g_{30}) \\
& +g_{11}^{3/2} g_{22}g_{00}^2 \sin \theta (\partial_2(g_{33}))^2 + 2g_{11}^{3/2} g_{30}^3 \sin \theta \partial_2(g_{22})\partial_2(g_{30}) \\
& -4g_{11}^{3/2} g_{22}g_{30}^4 \cos \theta \partial_2(g_{30}) - 2g_{22}^{3/2} g_{30}^3 \cos \theta \partial_2(g_{11})\partial_1(g_{30}) \\
& +4g_{11}^{3/2} g_{22}g_{30}^4 \sin \theta \partial_2(g_{00})\partial_2(g_{33}) + 2g_{11}g_{22}^{3/2} g_{30}^2 g_{00} \sin \theta \partial_1(g_{33}) \\
& +g_{11}^{3/2} g_{00}g_{33}^2 \sin \theta \partial_2(g_{00})\partial_2(g_{22}) + g_{11}^{3/2} g_{33}g_{00}^2 \sin \theta \partial_2(g_{33})\partial_2(g_{22}) \\
& -2g_{11}^{3/2} g_{22}g_{00}g_{33}^2 \cos \theta \partial_2(g_{00}) + 2g_{11}^{3/2} g_{22}g_{33}g_{30}^2 \cos \theta \partial_2(g_{00}) \\
& -2g_{11}^{3/2} g_{22}g_{33}g_{44}^2 \cos \theta \partial_2(g_{33}) - 2g_{11}g_{22}^{3/2} g_{30}^2 \cos \theta \partial_2(g_{00})\partial_1(g_{33}) \\
& +2g_{11}^{3/2} g_{22}g_{00}g_{30}^2 \cos \theta \partial_2(g_{33}) - 2g_{11}g_{22}^{3/2} g_{30}^2 \cos \theta \partial_2(g_{33})\partial_1(g_{00}) \\
& +g_{22}^{3/2} g_{33}g_{30}^2 \cos \theta \partial_2(g_{11})\partial_1(g_{00}) + g_{22}^{3/2} g_{00}g_{30}^2 \cos \theta \partial_1(g_{33})\partial_2(g_{11}) \\
& -2g_{11}g_{22}^{3/2} g_{33}^2 g_{00} \sin \theta \partial_1(g_{00}) + 2g_{11}g_{22}^{3/2} g_{30}^2 g_{33} \sin \theta \partial_1(g_{00}) \\
& \left. -2g_{11}g_{22}^{3/2} g_{00}^2 g_{33} \sin \theta \partial_1(g_{33}) + 4g_{11}^{3/2} g_{22}g_{33}g_{00} \sin \theta (\partial_2(g_{30}))^2 \right], \tag{A.7}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_2(e^{\Sigma^{(2)12}}) = & -\frac{1}{8} \frac{\sin \phi}{(g_{11}g_{22}\delta)^{3/2}} \left[-2g_{22}^{3/2}g_{30}^2g_{11}g_{33} \cos \theta \partial_2(\partial_1(g_{00})) \right. \\
& +2g_{11}^{3/2}g_{30}^2g_{22}g_{00} \sin \theta \partial_2^2(g_{33}) - 2g_{11}^{3/2}g_{33}^2g_{22}g_{00} \sin \theta \partial_2^2(g_{00}) \\
& +2g_{11}^{3/2}g_{30}^2g_{22}g_{33} \sin \theta \partial_2^2(g_{00}) + 2g_{22}^{3/2}g_{00}^2g_{11}g_{33} \cos \theta \partial_2(\partial_1(g_{33})) \\
& -2g_{22}^{3/2}g_{30}^2g_{11}g_{00} \cos \theta \partial_2(\partial_1(g_{33})) + 2g_{22}^{3/2}g_{33}^2g_{11}g_{00} \cos \theta \partial_2(\partial_1(g_{00})) \\
& -4g_{11}^{3/2}g_{30}g_{22}g_{00} \sin \theta \partial_2(g_{33})\partial_2(g_{30}) - 2g_{11}^{3/2}g_{33}g_{22}g_{00} \sin \theta \partial_2(g_{33})\partial_2(g_{00}) \\
& -4g_{11}^{3/2}g_{30}g_{22}g_{33} \sin \theta \partial_2(g_{44})\partial_2(g_{30}) - 2g_{11}^{3/2}g_{33}g_{30}g_{00} \sin \theta \partial_2(g_{30})\partial_2(g_{22}) \\
& +g_{11}^{3/2}g_{33}g_{00}^2 \sin \theta \partial_2(g_{33})\partial_2(g_{22}) + g_{11}^{3/2}g_{00}g_{33}^2 \sin \theta \partial_2(g_{00})\partial_2(g_{22}) \\
& +g_{22}^{3/2}g_{00}g_{30}^2 \cos \theta \partial_1(g_{33})\partial_2(g_{11}) + g_{22}^{3/2}g_{33}g_{30}^2 \cos \theta \partial_1(g_{00})\partial_2(g_{11}) \\
& +4g_{11}^{3/2}g_{00}g_{30}g_{22}g_{33} \cos \theta \partial_2(g_{30}) + 2g_{22}^{3/2}g_{00}g_{30}g_{11} \cos \theta \partial_2(g_{33})\partial_1(g_{30}) \\
& +2g_{22}^{3/2}g_{00}g_{30}g_{11} \cos \theta \partial_1(g_{33})\partial_2(g_{30}) + 2g_{22}^{3/2}g_{00}g_{30}g_{33} \cos \theta \partial_2(g_{11})\partial_1(g_{30}) \\
& -4g_{22}^{3/2}g_{00}g_{33}g_{11} \cos \theta \partial_2(g_{30})\partial_1(g_{30}) + 2g_{22}^{3/2}g_{33}g_{30}g_{11} \cos \theta \partial_2(g_{00})\partial_1(g_{30}) \\
& +2g_{22}^{3/2}g_{33}g_{30}g_{11} \cos \theta \partial_1(g_{00})\partial_2(g_{30}) + 4g_{22}^{3/2}g_{00}g_{30}g_{11}g_{33} \sin \theta \partial_1(g_{30}) \\
& -4g_{22}^{3/2}g_{00}g_{30}g_{11}g_{33} \cos \theta \partial_2(\partial_1(g_{30})) + 4g_{11}^{3/2}g_{00}g_{30}g_{22}g_{33} \sin \theta \partial_2^2(g_{30}) \\
& -2g_{22}^{3/2}g_{30}^2g_{11} \cos \theta \partial_1(g_{00})\partial_2(g_{33}) - g_{22}^{3/2}g_{33}^2g_{11} \cos \theta \partial_1(g_{00})\partial_2(g_{00}) \\
& -2g_{22}^{3/2}g_{00}^2g_{11}g_{33} \sin \theta \partial_1(g_{33}) + 2g_{22}^{3/2}g_{30}^2g_{11}g_{00} \sin \theta \partial_1(g_{33}) \\
& +g_{11}^{3/2}g_{00}^2g_{22} \sin \theta (\partial_2(g_{33}))^2 + g_{11}^{3/2}g_{33}^2g_{22} \sin \theta (\partial_2(g_{00}))^2 \\
& -2g_{22}^{3/2}g_{33}^2g_{11}g_{00} \sin \theta \partial_1(g_{00}) + 4g_{11}^{3/2}g_{33}g_{22}g_{00} \sin \theta (\partial_1(g_{30}))^2 \\
& +4g_{11}^{3/2}g_{30}^2g_{22} \sin \theta \partial_2(g_{33}) + \partial_2(g_{00}) + 2g_{22}^{3/2}g_{30}^2g_{11}g_{33} \sin \theta \partial_1(g_{00}) \\
& -g_{11}^{3/2}g_{30}^2g_{00} \sin \theta \partial_2(g_{33})\partial_2(g_{22}) - g_{11}^{3/2}g_{30}^2g_{33} \sin \theta \partial_2(g_{00})\partial_2(g_{22}) \\
& -2g_{11}^{3/2}g_{00}^2g_{22}g_{33} \cos \theta \partial_2(g_{33}) - g_{22}^{3/2}g_{00}^2g_{11} \cos \theta \partial_1(g_{33})\partial_2(g_{33}) \\
& -g_{22}^{3/2}g_{00}^2g_{33} \cos \theta \partial_1(g_{33})\partial_2(g_{11}) + 2g_{11}^{3/2}g_{30}^2g_{22}g_{00} \cos \theta \partial_2(g_{33}) \\
& -2g_{11}^{3/2}g_{33}^2g_{22}g_{00} \cos \theta \partial_2(g_{00}) - g_{22}^{3/2}g_{33}^2g_{00} \cos \theta \partial_1(g_{00})\partial_2(g_{11}) \\
& +2g_{11}^{3/2}g_{30}^2g_{22}g_{33} \cos \theta \partial_2(g_{00}) - 2g_{22}^{3/2}g_{30}^2g_{11} \cos \theta \partial_1(g_{33})\partial_2(g_{00}) \\
& +4g_{22}^{3/2}g_{30}^2g_{11} \cos \theta \partial_2(\partial_1(g_{30})) - 4g_{11}^{3/2}g_{30}^2g_{22} \sin \theta (\partial_2(g_{30}))^2 \\
& +2g_{11}^{3/2}g_{30}^2 \sin \theta \partial_2(g_{22})\partial_2(g_{30}) - 4g_{11}^{3/2}g_{30}^2g_{22}g_{33} \cos \theta \partial_2(g_{30}) \\
& -2g_{22}^{3/2}g_{30}^2 \cos \theta \partial_2(g_{00})\partial_1(g_{30}) + g_{22}^{3/2}g_{00}g_{22}g_{33}g_{11} \cos \theta \partial_1(g_{00})\partial_2(g_{33}) \\
& -g_{22}^{3/2}g_{30}g_{22}g_{33}g_{11} \cos \theta \partial_2(g_{00})\partial_1(g_{33}) - 4g_{22}^{3/2}g_{30}^2g_{11} \sin \theta \partial_1(g_{30}) \\
& \left. -2g_{11}^{3/2}g_{00}^2g_{22}g_{33} \sin \theta \partial_2^2(g_{33}) \right], \tag{A.8}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_2(e\Sigma^{(3)12}) = & -\frac{1}{8g_{00}(g_{11}g_{22}\delta)^{3/2}} \left[4g_{11}^{3/2}g_{00}^2g_{22}g_{33}g_{30} \cos\theta \partial_2^2(g_{30}) \right. \\
& + 4g_{22}^{3/2}g_{00}^2g_{33}g_{30}g_{11} \sin\theta \partial_2(\partial_1(g_{30})) + 2g_{11}^{3/2}g_{30}^2g_{22}g_{33}g_{00} \cos\theta \partial_2^2(g_{00}) \\
& + 2g_{22}^{3/2}g_{30}^2g_{00}g_{33}g_{11} \sin\theta \partial_2(\partial_1(g_{00})) - 2g_{22}^{3/2}g_{00}^2g_{33}^2g_{11} \sin\theta \partial_2(\partial_1(g_{00})) \\
& + 2g_{11}^{3/2}g_{30}^2g_{22}g_{00}^2 \cos\theta \partial_2^2(g_{33}) + 2g_{22}^{3/2}g_{00}^2g_{11}g_{30}^2 \sin\theta \partial_2(\partial_1(g_{33})) \\
& - 4g_{11}^{3/2}g_{30}^3g_{22}g_{00} \cos\theta \partial_2^2(g_{30}) - 4g_{22}^{3/2}g_{30}^3g_{11}g_{00} \sin\theta \partial_2(\partial_1(g_{30})) \\
& - 2g_{11}^{3/2}g_{00}^3g_{22}g_{33} \cos\theta \partial_2^2(g_{33}) - 2g_{22}^{3/2}g_{00}^3g_{11}g_{33} \sin\theta \partial_2(\partial_1(g_{33})) \\
& - 4g_{11}^{3/2}g_{00}g_{22}g_{30}g_{33} \cos\theta \partial_2(g_{00})\partial_2(g_{30}) - g_{22}^{3/2}g_{00}^2g_{11}g_{33} \sin\theta \partial_2(g_{33})\partial_1(g_{00}) \\
& - 2g_{22}^{3/2}g_{00}g_{11}g_{33}g_{30} \sin\theta \partial_2(g_{30})\partial_1(g_{00}) - g_{22}^{3/2}g_{00}^2g_{11}g_{33} \sin\theta \partial_1(g_{33})\partial_2(g_{00}) \\
& - 2g_{22}^{3/2}g_{00}g_{11}g_{33}g_{30} \sin\theta \partial_1(g_{30})\partial_2(g_{00}) - g_{22}^{3/2}g_{00}g_{33}g_{30}^2 \sin\theta \partial_2(g_{11})\partial_1(g_{00}) \\
& - g_{11}^{3/2}g_{00}g_{33}g_{30}^2 \cos\theta \partial_2(g_{22})\partial_2(g_{00}) - g_{22}^{3/2}g_{00}^2g_{30}^2 \sin\theta \partial_2(g_{11})\partial_1(g_{11}) \\
& - g_{11}^{3/2}g_{00}^2g_{30}^2 \cos\theta \partial_2(g_{22})\partial_2(g_{33}) + 4g_{22}^{3/2}g_{00}^2g_{33}g_{30}g_{11} \cos\theta \partial_1(g_{30}) \\
& - 4g_{11}^{3/2}g_{00}^2g_{33}g_{30}g_{22} \sin\theta \partial_2(g_{34}) - 2g_{22}^{3/2}g_{00}^2g_{33}g_{30} \sin\theta \partial_1(g_{30})\partial_2(g_{11}) \\
& - 2g_{11}^{3/2}g_{00}^2g_{33}g_{30} \cos\theta \partial_2(g_{30})\partial_2(g_{22}) - 2g_{11}^{3/2}g_{00}^2g_{33}g_{22} \cos\theta \partial_2(g_{33})\partial_2(g_{00}) \\
& + 4g_{22}^{3/2}g_{00}^2g_{33}g_{11} \sin\theta \partial_2(g_{30})\partial_1(g_{30}) - 2g_{22}^{3/2}g_{11}g_{00}^2g_{33}g_{30} \sin\theta \partial_2(g_{30})\partial_1(g_{33}) \\
& - 4g_{11}^{3/2}g_{00}^2g_{22}g_{30} \cos\theta \partial_2(g_{33})\partial_2(g_{30}) - 2g_{22}^{3/2}g_{00}^2g_{11}g_{30} \sin\theta \partial_1(g_{30})\partial_2(g_{33}) \\
& + g_{22}^{3/2}g_{33}^2g_{00}g_{11} \sin\theta \partial_2(g_{00})\partial_1(g_{00}) + 2g_{22}^{3/2}g_{30}^2g_{33}g_{00}g_{11} \cos\theta \partial_1(g_{00}) \\
& - 2g_{11}^{3/2}g_{30}^2g_{33}g_{00}g_{22} \sin\theta \partial_2(g_{00}) + 2g_{22}^{3/2}g_{30}^2g_{11}g_{00} \sin\theta \partial_1(g_{33})\partial_2(g_{00}) \\
& + 4g_{11}^{3/2}g_{30}^2g_{22}g_{00} \cos\theta \partial_1(g_{33})\partial_2(g_{00}) + 2g_{22}^{3/2}g_{30}^2g_{11}g_{00} \sin\theta \partial_2(g_{33})\partial_1(g_{00}) \\
& + 2g_{22}^{3/2}\partial_2(g_{00})g_{11}^{3/2}g_{33}(-g_{00})^{3/2}\sqrt{\delta} + 2g_{11}^{3/2}g_{33}^2g_{00}^2g_{22} \sin\theta \partial_2(g_{00}) \\
& + g_{22}^{3/2}g_{33}^2g_{00}^2 \sin\theta \partial_2(g_{11})\partial_1(g_{00}) + g_{11}^{3/2}g_{33}^2g_{00}^2 \cos\theta \partial_2(g_{22})\partial_2(g_{00}) \\
& + 4(\partial_2(g_{30}))^2g_{11}^{3/2}g_{22}g_{33}g_{00}^2 \cos\theta + 2g_{22}^{3/2}g_{30}^2g_{00}^2g_{11} \cos\theta \partial_1(g_{33}) \\
& - 2g_{11}^{3/2}g_{30}^2g_{00}^2g_{22} \sin\theta \partial_2(g_{33}) + (\partial_2(g_{00}))^2g_{11}^{3/2}g_{22}g_{33}g_{00}^2 \cos\theta \\
& - 4g_{22}^{3/2}g_{30}^2g_{00}g_{11} \cos\theta \partial_1(g_{30}) + 4g_{11}^{3/2}g_{30}^2g_{00}g_{22} \sin\theta \partial_2(g_{30}) \\
& + 2g_{22}^{3/2}g_{30}^2g_{00} \sin\theta \partial_1(g_{30})\partial_2(g_{11}) + 2g_{11}^{3/2}g_{30}^2g_{00} \cos\theta \partial_2(g_{30})\partial_2(g_{22}) \\
& - 2g_{22}^{3/2}g_{00}^3g_{33}g_{11} \cos\theta \partial_1(g_{33}) + 2g_{11}^{3/2}g_{30}^2g_{22}^{3/2}\partial_2(g_{00})\sqrt{-g_{44}}\sqrt{\delta} \\
& + 2g_{11}^{3/2}g_{00}^3g_{22}g_{33} \sin\theta \partial_2(g_{33}) + g_{22}^{3/2}g_{00}^3g_{33} \sin\theta \partial_1(g_{33})\partial_2(g_{11}) \\
& + g_{11}^{3/2}g_{00}^3g_{33} \cos\theta \partial_2(g_{33})\partial_2(g_{22}) + g_{22}^{3/2}g_{00}^3g_{11} \sin\theta \partial_2(g_{33})\partial_1(g_{33}) \\
& - 2g_{22}^{3/2}g_{00}^2g_{33}^2g_{11} \cos\theta \partial_1(g_{00}) + g_{11}^{3/2}g_{00}^3g_{22} \cos\theta (\partial_2(g_{33}))^2 \\
& \left. - 2\partial_2^2(g_{00}) \cos\theta g_{11}^{3/2}g_{22}g_{33}g_{00}^2 \right]. \tag{A.9}
\end{aligned}$$

Apêndice B

Código em Maple

O cálculo dos polinômios de Adomian pode ser feito usando um código simples feito no Maple. Para resolver as equações diferenciais com base no método de decomposição [147], somente é necessário inserir informação sobre a equação, como a expressão do operador não linear N , o operador restante R , a função $g(x)$, as condições iniciais e o número de termos da soma parcial. Desta maneira o programa fornecerá a solução analítica aproximada da equação. A continuação se mostra o código extraído do [155]. Por conveniência, se usa t para representar a variável independente e se define os parâmetros da seguinte forma

```
# ICs: list of intial conditions in the form [t0,[v0,v'0,...],...,[w0,w'0,...]];
# Eqs: list of differential equations in the form[[R1,N1,g1],...,[Rm,Nm,gm]];
# n : needed item number of the partial sum.

Adomian:=proc(ICs,Eqs,n)
local nEq,t0,m,v0,R,N,g,nOrder,u,k,nu,tempN,A,i:
nEq:=nops(ICs)-1:
nOrder:=[seq(nops(ICs[m]),m=2..nEq+1)]:
t0:=ICs[1]:
v0:=[seq(ICs[m],m=2..nEq+1)]:
R:=[seq(Eqs[m,1],m=1..nEq)]:
N:=[seq(Eqs[m,2],m=1..nEq)]:
g:=[seq(Eqs[m,3],m=1..nEq)]:
u:=array(1..nEq,0..n):
for m from 1 to nEq do
    u[m,0]:=g[m](t):
    for i from 1 to nOrder[m] do
        u[m,0]:=v0[m,nOrder[m]-i+1]+int(subs(t=s,u[m,0]),s=t0..t):
    od:
od:
for k from 0 to n-1 do
    nu:=seq(sum(lambda^i*(u[mm,ii]),ii=0..k),mm=1..nEq): #####Modified line#####

for m from 1 to nEq do
    tempN:=unapply(N[m](nu),lambda);A[m,k]:=(D@@k)(tempN)(0)/k!
od:
```

```

for m from 1 to nEq do
  u[m,k+1]:=-R[m](seq(u[i,k],i=1..nEq))-A[m,k]:
  for i from 1 to nOrder[m] do
    u[m,k+1]:=int(subs(t=s,u[m,k+1]),s=t0..t):
  od:
od:
od:

[seq(sum(u[mm,kk], kk=0..n), mm=1..nEq)]: #####Modified line#####

end:

```

Referências Bibliográficas

- [1] A. Einstein, *Prinzipielles Zur Allgemeinen Relativitätstheorie*. Annalen der Physik. **55**, 1918.
- [2] R. d’Inverno, *Introducing Einstein’s Relativity*, 3^{ra} Edição. Cambridge University Press. Cambridge, 2004.
- [3] B. Schutz, *A First Course in General Relativity*. 2^{da} Edição. Cambridge University Press. Cambridge, 2009.
- [4] A. Einstein, *Auf die Riemann-Metrik und den Fern-Parallelismus gegründete einheitliche Feldtheorie*. Mathematische Annalen. **102**, 1930.
- [5] J. W. Maluf, J. F. da Rocha-Neto, T. M. L. Toribio, K. H. Castello-Branco, *Energy and Angular Momentum of the Gravitational Field in the Teleparallel Geometry*. Physical Review. **D65**, 124001. 2002. doi: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.65.124001>
- [6] H. M. Nussenzeig, *Curso de Física Básica Vol 4. Ótica, Relatividade e Física Quântica*. Editora Blucher, 2^a Edição, 2014.
- [7] R. G. G. Amorim, S. Ulhoa, P. M. M. Rocha e R. A. S. Paiva. *Elementos de geometria Riemanniana: Análise da esfera S_2* . Revista Brasileira de Ensino de Física. **37**(2), 2302, 2015. <https://doi.org/10.1590/S1806-11173721687>
- [8] S. Carroll, *Spacetime and Geometry. An Introduction to General Relativity*. Addison Wesley, 2003.
- [9] R. Feynman, F. Morinigo, W. Wagner, *Feynman Lectures on Gravitation*. 1^{ra} Edição. Westview Press, 2002.
- [10] C. Herdeiro, *Notas de Teoria da Relatividade*. Volumen 1, Departamento de Física, Universidade de Aveiro. Portugal, 2011.
- [11] G. t’Hooft. *Introduction to General Relativity*. Institute for Theoretical Physics, Utrecht University. Holanda, 2010. <http://www.phys.uu.nl/~thooft/>
- [12] R. de Oliverira A. e M Pivetta, *Quando a Luz se curvou*. Pesquisa FAPESP, **278**, 18-23, 2019. https://revistapesquisa.fapesp.br/wp-content/uploads/2019/04/018-027_CAPA_Eclipse_278NOVO.pdf.
- [13] R. de Oliveira A., *O Eclipse que confirmou Einstein*. Pesquisa FAPESP, **240**, 90-93, 2016. https://revistapesquisa.fapesp.br/wp-content/uploads/2016/02/090-093_Mem%C3%B3ria_240.pdf.

- [14] R. V. Pound e G. A. Rebka. *Gravitational Red-Shift in Nuclear Resonance*. Physical Review Letters. **3**(9), 439- 441, 1959. <https://journals.aps.org/prl/pdf/10.1103/PhysRevLett.3.439>
- [15] R. V. Pound e G. A. Rebka. *Apparent Weight of Photons*. Physical Review Letters. **3**(7), 337- 341, 1960. doi: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.4.337>
- [16] A. Eigenbrod. *Gravitational Lensing of Quasars*. EPFL Press . 1^{ra} Edição. 2011.
- [17] A. Das, e A. DeBenedictis. *The general theory of relativity: A mathematical exposition*. Springer. 2012.
- [18] <https://www.ligo.caltech.edu/image/ligo20160211a>.
- [19] R. A. Hulse e J. H. Taylor. *Discovery of a Pulsar in a Binary System*. The Astrophysical Journal. **195**(2), 51-53, 1975. <http://adsabs.harvard.edu/full/1975ApJ...195L..51H>
- [20] B. P. Abbott et al.(LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration). *Tests of General Relativity with GW170817*. Physical Review Letters. **123**(1), 011102, 2019. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.123.011102>
- [21] The Event Horizon Telescope Collaboration et al. *First M87 Event Horizon Telescope Results. I. The Shadow of the Supermassive Black Hole*. The Astrophysical Journal Letters. **875**, L1, 2019. doi: <https://iopscience.iop.org/article/10.3847/2041-8213/ab0ec7>.
- [22] The Event Horizon Telescope Collaboration et al. *First Sagittarius A* Event Horizon Telescope Results. I. The Shadow of the Supermassive Black Hole in the Center of the Milky Way*. The Astrophysical Journal Letters, **930**, L12, 2022. doi: <https://iopscience.iop.org/article/10.3847/2041-8213/ac6674>.
- [23] R. Weitzenböck, *Invariantem Theorie*. Nordhoff, Groningen, 1923.
- [24] T. Sauer, *Field equations in teleparallel space-time: Einstein's Fernparallelismus approach toward unified field theory*. Historia Mathematica. **33**(4), 399-439, 2006. doi: <https://doi.org/10.1016/j.hm.2005.11.005>
- [25] C. Møller, *Conservation Laws and Absolute Parallelism in General Relativity*. K. Dan. Vidensk, Selsk. Mat. Fys. Skr. **1**, 10, 1961.
- [26] C. Møller, *Evidence for Gravitational Theories*. Varenna, Italy. Scuola Internazionale Di Fisica. Edited by C. Møller. 252, 1961.
- [27] C. Pellegrini, J. Plebanski, *Tetrad Fields and Gravitational Fields* K. Dan. Vidensk, Selsk. Mat. Fys. Skr. **2**, 4, 1963. doi:<https://doi.org/10.15161/oar.it/1448441725.83>
- [28] Y. M. Cho, *Einstein Lagrangian as the Translational Yang-Mills Lagrangian*. Physical Review. **D14**, 2521, 1976. doi: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.14.2521>

- [29] Y. M. Cho, *Gauge theory of Poincaré symmetry*. Physical Review. **D14**, 3335, 1976. doi: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.14.3335>
- [30] K. Hayashi, T. Shirafuji, *New General Relativity*. Physical Review. **D19**, 3524, 1979. doi: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.19.3524>
- [31] F. W. Hehl, *Four lectures on Poincaré Gauge Field Theory*, in *Cosmology and Gravitation: Spin, Torsion, Rotation and Supergravity*. Editado por P.G. Bergmann e V. de Sabbata, Plenum Press. New York, 1980. doi: https://doi.org/10.1007/978-1-4613-3123-0_2
- [32] J. Nitsch, *The Macroscopic Limit of the Poincaré Gauge Field Theory on Gravitation*, in *Cosmology and Gravitation: Spin, Torsion, Rotation and Supergravity*. Editado por P.G. Bergmann e V. de Sabbata, Plenum Press. New York, 1980. doi: https://doi.org/10.1007/978-1-4613-3123-0_3
- [33] J. W. Maluf. *The Teleparallel equivalent to General Relativity*. Annalen der Physik, Vol 525, **339**, 2013. doi: <https://doi.org/10.1002/andp.201200272>
- [34] S. C. Ulhoa, *O Teleparalelismo Equivalente à Relatividade Geral e o Momento Angular Gravitacional*. Physiaë 8, **11**, 2009. doi: <https://doi.org/10.5196/physicae.8.2>
- [35] F. W. Hehl, *Proceedings of the 6th School of Cosmology and Gravitation on Spin, torsion, Rotation and Supergravity*. Editado por P.G. Bergmann V. de Sabbata. Plenum, New York, 1980; F. W. Hehl, J. D. MacCrea, E. W. Mielke and Y. Ne'eman, Phys. Rep. **258**, 1, 1995. <https://doi.org/10.1007/978-1-4613-3123-0>
- [36] Y. N. Obukov e J. G. Pereira, *Metric-affine Approach to Teleparallel Gravity*. Physical Review. **D67**, 044016, 2003. doi: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.67.044016>
- [37] M. Blagojevic e M. Vasilic, *Conservation Laws in the Teleparallel Theory of Gravity*. Physical Review. **D64**, 044010, 2001. doi: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.64.044010>
- [38] C. Møller, *Conservation Laws in the Tetrad Theory of Gravitation*. Proceedings of the conference on Theory of Gravitation, Warszawa and Jablona 1962 (PWN- Polish Scientific Publishers, Warszawa and Gauthier-Villars, Paris, 1964).
- [39] J. M. Nester, *Positive Energy via the Teleparallel Hamiltonian*. International Journal of Modern Physics A. **4**, 1755, 1989. doi: <https://doi.org/10.1142/S0217751X89000704>
- [40] V. C. de Andrade e J. G. Pereira, *Gravitational Lorentz Force and the Description of the Gravitational Interaction*. Physical Review. **D56**, 4689, 1997. doi: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.56.4689>
- [41] J. W. Maluf, *Hamiltonian Formulation of the Teleparallel Description of the General Relativity*. Journal of Mathematical Physical. **35**. 335. 1994. doi: <https://doi.org/10.1063/1.530774>
- [42] J. W. Maluf, J. F. da Rocha-Neto, *Hamiltonian Formulation of General Relativity in the Teleparallel Geometry*. Physical Review. **D64**, 084014, 2001. doi: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.64.084014>

- [43] J. W. Maluf, *The Gravitational Energy-Momentum Tensor and the Gravitational Pressure*. Annalen der Physik, **14**, 723, 2005. doi: <https://doi.org/10.1002/andp.200510161>
- [44] S. C. Ulhoa, A. F. Santos e R. G. G. Amorim, *On the energy-momentum flux in Gödel-type models*. Modern Physics Letters A, **28**, 10, 2013. doi: <https://doi.org/10.1142/S0217732313500399>
- [45] J. W. Maluf, M. V. O. Veiga e J. F. da Rocha-Neto, *Regularized expression for the gravitational energy-momentum in teleparallel gravity and the principle of equivalence*. General Relativity and Gravitation, **39**, 227-240, 2007. doi: <https://doi.org/10.1007/s10714-006-0339-5>
- [46] B. Mashhoon, U. Muench, *Length measurement in accelerated systems*. Annalen der Physik. **11**(7), 532-547, 2002. doi: [https://doi.org/10.1002/1521-3889\(200208\)11:7<532::AID-ANDP532>3.0.CO;2-3](https://doi.org/10.1002/1521-3889(200208)11:7<532::AID-ANDP532>3.0.CO;2-3)
- [47] B. Mashhoon, *Vacuum electrodynamics of accelerated systems: Nonlocal Maxwell's equations*. Annalen der Physik. **12**(10), 586-598, 2003. doi: <https://doi.org/10.1002/andp.200310028>
- [48] F. H. Hehl, J. Lemke e E. W. Mielke, *Geometry and Theoretical Physics*, Editado por J. Debrus e A. C. Hirshfeld. Springer, Berlim. 1991.
- [49] J. W. Maluf, F. F. Faria, S. C. Ulhoa, *On Reference Frames in Spacetime and Gravitational Energy in Freely Falling Frames*. Classical and Quantum Gravity. **24**, 10, 2007. doi: <https://doi.org/10.1088/0264-9381/24/10/017>
- [50] A. Mann, *The golden age of neutron-star physics has arrived*. Nature. **579**, 20 - 22, 2020. doi: <https://doi.org/10.1038/d41586-020-00590-8>.
- [51] NASA's Goddard Space Flight Center Conceptual Image Lab. URL: <https://svs.gsfc.nasa.gov/20267>.
- [52] L. D. Landau, *On the theory of star*. Physikalishe Zeitschrift der Sowjetunion. **1**, 285, 1932.
- [53] D. T. Haar, *Collected Papers of L.D. Landau*. Elsevier Science, 2013. <https://doi.org/10.1016/C2013-0-01806-3>
- [54] D. G. Yakovlev, P. Haensel, G. Baym e Ch. Pethick, *Lev Landau and the concept of neutron stars*. Physical Uspekhi. **56**(3), 289 - 295, 2013. doi: <https://doi.org/10.3367/UFNe.0183.201303f.0307>.
- [55] S. Chandrasekhar, *The Maximum Mass of Ideal White Dwarfs*. Astrophysical Journal. **74**, 81, 1931. doi: <https://doi.org/10.1086/143324>.
- [56] J. Chadwick, *Possible existence of a neutron*. Nature, **129**(3252), 312-312, 1932. doi: <https://doi.org/10.1038/129312a0>
- [57] J. Chadwick. Proceedings of the 10th International Congress of the History of Science. **1**, 159, Paris: Hermann, 1962.

- [58] E. Rutherford, *Bakerian Lecture: Nuclear Constitution of Atoms*. Proceedings of the Royal Society A. **97**,374-400, 1920. doi: <https://doi.org/10.1098/rspa.1920.0040>
- [59] I. Curie e F. Joliot, *Émission de pronçons à grande vitesse par les substances hydrogénées sous l'influence des rayons γ très pénétrants*. C. r. hebd. séances Acad. sci. Paris, **194**, 273, 194.
- [60] V. Nesvizhevsky e J. Villain, *The discovery of the Neutron and its consequences (1930-1940)*. Comptes Rendus Physique. **18**, 592-600, 2017. doi: <https://doi.org/10.1016/j.crhy.2017.11.001>
- [61] W. Baade e F. Zwicky, *Remarks on Super - Novae and Cosmic Rays*. Physical Review. **46**(1), 76 - 77, 1934. doi: <https://doi.org/10.1103/PhysRev.46.76.2>
- [62] W. Baade e F. Zwicky, *On Super-Novae*. Proceedings of the National Academy of Science. **20**(5), 254-259, United States of America, 1934. doi: <https://doi.org/10.1073/pnas.20.5.254>
- [63] W. Baade e F. Zwicky, *Cosmic Rays from Super-Novae*. Proceedings of the National Academy of Science. **20**(5), 259-263, United States of America, 1934. doi: <https://doi.org/10.1073/pnas.20.5.259>
- [64] P. Haensel, A. Y. Potekhin, e D. G. Yakovlev. *Neutron Stars 1: Equation of State and Structure*. Astrophysics and Space Science Library. Springer New York, 2006. url: <https://books.google.com.ar/books?id=iIrj9nfHnesC>
- [65] R. C. Tolman, *Static Solutions of Einstein's Field Equations for Spheres of Fluid*. Physical Review. **55**, 364, 1939. doi: <https://doi.org/10.1103/PhysRev.55.364>
- [66] J. R. Oppenheimer e G. M. Volkoff, *On Massive Neutron Cores*. Physical Review. **55**, 374, 1939. doi: <https://doi.org/10.1103/PhysRev.55.374>
- [67] B. K. Harrison, M. Wakano, e J. A. Wheeler, *Onzième Conseil de Physique Solway: La structure et l'évolution de l'univers*. Stoop, Brussels. 1958.
- [68] A. G. W. Cameron, *Carbon Thermonuclear Reactions and the Formation of Heavy Elements*. The Astrophysical Journal, **130**, 429. 1959a. doi: <https://doi.org/10.1086/146734>
- [69] A. G. W. Cameron, *Pycnonuclear Reactions and Nova Explosions*. The Astrophysical Journal, **130**, 916. 1959. doi: <https://doi.org/10.1086/146782>
- [70] V. A. Ambartsumyan e G. S. Saakyan, *The Degenerate Superdense Gas of Elementary Particles*. Soviet Astronomy, **4**,187, 1960. <http://adsabs.harvard.edu/full/1960SvA....4..187A>
- [71] T. Hamada e E. E. Salpeter, *Models for Zero-Temperature Stars*. The Astrophysical Journal, **134**, 683, 1961. <http://adsabs.harvard.edu/full/1961ApJ...134..683H>
- [72] S. L. Shapiro e S. A. Teukolsky, *Black Holes, White Dwarfs, and Neutron Stars: The Physics of Compact Objects*. Wiley, 2004. doi: <https://doi.org/10.1002/9783527617661>

- [73] R. Giacconi, H. Gursky, F. R. Paolini e B. B. Rossi, *Evidence for x Rays From Sources Outside the Solar System*. Physical Review Letters, **9**, 439, 1962. doi: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.9.439>
- [74] M. Schmidt, *3C 273 : A Star-Like Object with Large Red-Shift*. Nature, **197**, 1040, 1963. doi: <https://doi.org/10.1038/1971040a0>
- [75] A. Hewish, S. J. Bell, J. D. H. Pilkington, P. F. Scott e R. A. Collins, *Observation of a rapidly pulsating radio source*. Nature, **217**(5130),709-713, 1968. doi:<https://doi.org/10.1038/217709a0>
- [76] NANOGrav. Pulsar watchers close in on galaxy merger history. <http://nanograv.org/press/2018/02/28/Pulsar-Watchers-Close-In-On-Galaxy-Merger-History.html>
- [77] T. Gold, *Rotating neutron stars as the origin of the pulsating radio sources*. Nature, **218**(5143),731-732, 1968. doi: <https://doi.org/10.1038/218731a0>
- [78] M. I. Large, A. E. Vaughan e B. Y. Mills, *A Pulsar Supernova Association?*. Nature, **220**, 340-341, 1968. doi: <https://doi.org/10.1038/220340a0>
- [79] D. H. Staelin e E. C. Reifenstein III, *Pulsating Radio Sources near the Crab Nebula*. Science, **162**, 1481-1483, 1968. doi: <https://doi.org/10.1126/science.162.3861.1481>
- [80] D. W. Richards e J. M. Comella, *The Period of Pulsar NP 0532*. Nature, **222**, 551-552, 1969. doi: <https://doi.org/10.1038/222551a0>
- [81] R. A. Hulse e J. H. Taylor, *Discovery of a pulsar in a binary system*. The Astrophysical Journal, **195**(2), L51-L53, 1975. url: <http://adsabs.harvard.edu/full/1975ApJ...195L..51H>
- [82] S. A. Olausen e V. M. Kaspi, *The McGill Magnetar Catalog*. The Astrophysical Journal Supplement Series, **212**(6), 2014. doi: <https://doi.org/10.1088/0067-0049/212/1/6>
- [83] F. Coti Zelati, N. Rea, J. A. Pons, S. Campana e P. Esposito. *Systematic study of magnetar outbursts*. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, **474**(1), 961-1017, 2018. doi: <https://doi.org/10.1093/mnras/stx2679>.
- [84] A. Treves, S. B. Popov, M. Colpi, M. E. Prokhorov e R. Turolla. *The Magnificent Seven: Close-by Cooling Neutron Stars?*. Riccardo Giacconi, Salvatore Serio, e Luigi Stella, editors, X-ray Astronomy 2000, **234** of Astronomical Society of the Pacific Conference Series, 225, 2001. url: <https://arxiv.org/pdf/astro-ph/0011564.pdf>
- [85] F. M. Walter e L. D. Matthews. *The optical counterpart of the isolated neutron star RX J185635-3754*. Nature, **389**, 358-360, Septiembre 1997. doi: <https://doi.org/10.1038/38682>.
- [86] Astronomy Picture of the Day. url: <https://apod.nasa.gov/apod/ap970926.html>
- [87] G. Baym e C. Pethick, *Neutron Stars*. Annual Review of Nuclear Science. **25**, 27-77, 1975. doi: <https://doi.org/10.1146/annurev.ns.25.120175.000331>

- [88] G. Baym e C. Pethick, *Physics of Neutron Stars*. Annual Review of Astronomy and Astrophysics . **17**, 415-443, 1979. doi: <https://doi.org/10.1146/annurev.aa.17.090179.002215>
- [89] H. Heiselberg e V. Pandharipande, *Recent Progress in Neutron Star Theory*. Annual Review of Nuclear and Particle Science. **50**, 481-524, 2000. doi: <https://doi.org/10.1146/annurev.nucl.50.1.481>
- [90] N. K. Glendenning, *Compact Stars, Nuclear Physics, Particle Physics and General Relativity*. Springer, 1997. url: http://www.ift.uni.wroc.pl/~blaschke/vorles/Glendenning_CompactStars.pdf
- [91] N. K. Glendenning, *Neutron stars are giant hypernuclei?*. Astrophysical Journal. **293**, 470-493, 1985. doi: <https://doi.org/10.1086/163253>
- [92] J. M. Lattimer e M. Prakash. *The Physics of Neutron Stars*. Science. **304**, 536, 536-542, 2004. doi: <https://doi.org/10.1126/science.1090720>
- [93] A. Burrows e J. M. Lattimer, *The Birth of Neutron Stars* . The Astrophysical Journal. **307**, 178, 1986. doi: <https://doi.org/10.1086/164405>
- [94] K. Hirata, T. Kajita, M. Koshiba, M. Nakahata, Y. Oyama, N. Sato, A. Suzuki, M. Takita, Y. Totsuka, T. Kifune, T. Suda, K. Takahashi, T. Tanimori, K. Miyano, M. Yamada, E. W. Beier, L. R. Feldscher, S. B. Kim, A. K. Mann, F. M. Newcomer, R. Van, W. Zhang, e B. G. Cortez. *Observation of a neutrino burst from the supernova SN1987A*. Physical Review Letters. **58**, 1490, 1987. doi: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.58.1490>
- [95] R. M. Bionta et al. *Observation of a neutrino burst in coincidence with supernova 1987A in the Large Magellanic Cloud*. Physical Review Letters. **58** , 1494, 1987. doi: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.58.1494>
- [96] M. Prakash, J. M. Lattimer, J. A. Pons, A. W. Steiner e S. Reddy, *Evolution of a Neutron Star from Its Birth to Old Age*. In: Blaschke D., Sedrakian A., Glendenning N.K. (eds). *Physics of Neutron Star Interiors*. Lecture Notes in Physics, **578**, 2001. Springer, Berlin, Heidelberg. doi: https://doi.org/10.1007/3-540-44578-1_14
- [97] C. E. Rhoades, Jr. e R. Ruffini, *Maximum Mass of a Neutron Star*. Physical Review Letters. **32**, 324, 1974. doi: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.32.324>
- [98] M. Bailes, D. J. Nice, e S. E. Thorsett, *Radio Pulsars*. Radio Pulsars, ASP Conference Proceedings, **302**. 26-29, 2002. Editado por M. Bailes, D. J. Nice e S. E. Thorsett, Astronomical Society of the Pacific, 2003. url: <https://adsabs.harvard.edu/full/record/seri/ASPC./0302/0000001,012.html>
- [99] J. M. Lattimer, *Neutron Star*. General Relativity and Gravitation. Springer. **46**(5), 1713, 2014. doi: <https://doi.org/10.1007/s10714-014-1713-3>
- [100] D. A. Baiko, *Coulomb crystals in neutron star crust*. Journal of Physics: Conference Series, **496**, 012010, 2014. doi:<https://doi.org/10.1088/1742-6596/496/1/012010>

- [101] J. Piekarewicz e R. Utama, *The Nuclear Physics of Neutron Stars*. ACTA PHYSICA POLONICA B. **47**(3), 659-671, 2016. doi: <https://doi.org/10.5506/APhysPolB.47.659>
- [102] X. Roca-Maza e J. Piekarewicz, *Impact of the symmetry energy on the outer crust of nonaccreting neutron stars*. Physical Review C. **78**(2), 025807, 2008. doi: <https://doi.org/10.1103/PhysRevC.78.025807>
- [103] M. S. R. Delgaty e K. Lake, *Physical acceptability of isolated, static, spherically symmetric, perfect fluid solutions of Einstein's equations*. Computer Physics Communications. **115**, 395-415, 1998. doi: [https://doi.org/10.1016/S0010-4655\(98\)00130-1](https://doi.org/10.1016/S0010-4655(98)00130-1)
- [104] J. M. Lattimer, *The Nuclear Equation of State and Neutron Star Masses*. Annual Review of Nuclear and Particle Science, **62**(1), 485-515, 2012. doi: <https://doi.org/10.1146/annurev-nucl-102711-095018>
- [105] J. M. Lattimer e M. Prakash, *Neutron Star Structure and the Equation of State*. The Astrophysical Journal. **550**, 426, 2001. doi: <https://doi.org/10.1086/319702>
- [106] J. M. Lattimer e Y. Lim, *Constraining the Symmetry Parameters of the Nuclear Interaction*. The Astrophysical Journal, **771**(51), 14, 2013. doi: <https://doi.org/10.1088/0004-637X/771/1/51>
- [107] J. M. Lattimer, *Introduction to neutron stars*. AIP Conference Proceedings. **1645**, 61, 2015. doi: <https://doi.org/10.1063/1.4909560>
- [108] W. D. Myers e W.J Swiatecki, *Average nuclear properties*. Annals of Physics. **55**, 395-505, 1965. doi: [https://doi.org/10.1016/0003-4916\(69\)90202-4](https://doi.org/10.1016/0003-4916(69)90202-4)
- [109] J. M. Lattimer, K. A. van Riper, M. Prakash e M. Prakash, *Rapid Cooling and the Structure of Neutron Stars*. The Astrophysical Journal. **425**, 802, 1994. doi: <https://doi.org/10.1086/174025>
- [110] B. W. Carroll e D. A. Ostlie, *An Introduction to Modern Astrophysics*. Cambridge University Press, 2da Edição, 2017. doi: <https://doi.org/10.1017/9781108380980>
- [111] C. J. Pethick, *Cooling of neutron stars*. Reviews of Modern Physics. **64**, 1133, 1992. doi: <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.64.1133>
- [112] J. M. Lattimer, C. J. Pethick, M. Prakash e P. Haensel, *Direct URCA process in neutron stars*. Physical Review Letters. **66**, 2701, 1991. doi: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.66.2701>
- [113] S. Tsuruta, *Thermal properties and detectability of neutron stars. II. Thermal evolution of rotation-powered neutron stars*. Physics Reports. **292**, 1- 130, 1998. doi: [https://doi.org/10.1016/S0370-1573\(97\)00041-0](https://doi.org/10.1016/S0370-1573(97)00041-0)
- [114] G. Chabrier, A. Y. Potekhin e D. G. Yakovlev, *Cooling Neutron Stars with Accreted Envelopes*. The Astrophysical Journal. **477**, 2, 1992. url: <https://iopscience.iop.org/article/10.1086/310535/pdf>

- [115] D. Page, J. M. Lattimer, M. Prakash e A. W. Steiner, *Minimal Cooling of Neutron Stars: A New Paradigm*. The Astrophysical Journal Supplement Series. **155**(2), 623-650, 2004. url: <https://iopscience.iop.org/article/10.1086/424844/pdf>
- [116] N. Stergioulas e J. L. Friedman. *Comparing Models of Rapidly Rotating Relativistic Stars Constructed by Two Numerical Methods*. The Astrophysical Journal. **444**, 306, 1995. doi: <https://doi.org/10.1086/175605>
- [117] H. Komatsu, Y. Eriguchi e I. Hachisu, *Rapidly rotating general relativistic stars-I. Numerical method and its applications to uniformly rotating polytropes*. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. **237**, 355, 1989.
- [118] G. B. Cook, S. L. Shapiro e S. A. Teukolsky, *Rapidly Rotating Polytropes in General Relativity*. The Astrophysical Journal. **422**, 227, 1994. doi: <https://doi.org/10.1086/173721>
- [119] S. C. Ulhoa e P. M. M. Rocha. *Neutron Stars in Teleparallel Gravity*. Brazilian Journal of Physics. **43**(3), 162-171, 2013. doi: [doi:10.1007/s13538-013-0121-6](https://doi.org/10.1007/s13538-013-0121-6)
- [120] V. R. Pandharipande. *Dense neutron matter with realistic interactions*. Nuclear Physics A. **174**(3), 641-656, 1971. doi: [https://doi.org/10.1016/0375-9474\(71\)90413-1](https://doi.org/10.1016/0375-9474(71)90413-1)
- [121] V. R. Pandharipande. *Hyperonic matter*. Nuclear Physics A. **178**(1), 123-144, 1971. doi: [https://doi.org/10.1016/0375-9474\(71\)90193-X](https://doi.org/10.1016/0375-9474(71)90193-X)
- [122] H. A. Bethe e M. B. Johnson. *Dense baryon matter calculations with realistic potentials*. Nuclear Physics A. **230**(1), 1-58, 1974. doi: [https://doi.org/10.1016/0375-9474\(74\)90528-4](https://doi.org/10.1016/0375-9474(74)90528-4)
- [123] C. P. Lorenz, D. G. Ravenhall, e C. J. Pethick. *Neutron star crusts*. Physical Review Letters. **70**, 379, 1993. doi: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.70.379>
- [124] M. Planck. *Über eine Verbesserung der Wien'schen Spectralgleichung*. Deutsche Physikalische Gesellschaft. Verhandlungen **2**, 202-204. 1900a. Tradução ao inglês em Kangro, 35-45, 1972.
- [125] M. Planck. *Zur Theorie des Gesetzes der Energieverteilung im Normal-spektrum*. Deutsche Physikalische Gesellschaft. Verhandlungen **2**, 237-245. 1900b. Tradução ao inglês em Kangro, 35-45, 1972.
- [126] A. Einstein. *Über eine die Erzeugung und die Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkts*. Annalen der Physik **17**, 132-148, 1905.
- [127] A. Einstein. *Zur Theorie der Lichterzeugung und Lichtabsorption*. Annalen der Physik. **20**, 199-206, 1906.
- [128] A. Sommerfeld. *Zur Theorie der Balmer'schen Serie*. Königlich Bayerische Akademie der Wissenschaften zu München. Mathematisch-physikalische Klasse. Sitzungsberichte. 425-458, 1915a.

- [129] A. Sommerfeld. *Die Feinstruktur der Wasserstoff- und der Wasserstoff-ähnlichen Linien*. Königlich Bayerische Akademie der Wissenschaften zu München. Mathematisch-physikalische Klasse. Sitzungsberichte. 459-500, 1915b.
- [130] K. Schwarzschild. *Zur Quantenhypothese*. Königlich Preussische Akademie der Wissenschaften. Sitzungsberichte. 548-568, 1916.
- [131] A. Duncan e M. Janssen. *Quantization Conditions, 1900-1927*. <https://arxiv.org/pdf/2003.04466.pdf>
- [132] W. Heisenberg. *Über die quantentheoretische Umdeutung kinematischer und mechanischer Beziehungen*. Zeitschrift für Physik **33**, 879-893, 1925.
- [133] H. Weyl. *Quantenmechanik und gruppentheorie*. Zeitschrift für Physik. **46**, 1-46, 1927.
- [134] E.P. Wigner. *On the quantum correction for thermodynamic equilibrium*. Physics Review. **40**, 749-759, 1932. <https://doi.org/10.1103/physrev.40.749>
- [135] H.J. Groenewold. *On the Principles of Elementary Quantum Mechanics*. Physica. **12**(7), 405-460, 1946. [https://doi.org/doi:10.1016/s0031-8914\(46\)80059-4](https://doi.org/doi:10.1016/s0031-8914(46)80059-4)
- [136] J.E. Moyal. *Quantum mechanics as a statistical theory*. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. **45**(1), 99-124, 1949. doi: <https://doi.org/10.1017/S0305004100000487>
- [137] S. Keppeler. *Introduction to Wigner-Weyl Calculus*. 2004. https://www.math.uni-tuebingen.de/user/stke/teaching/wigner_weyl/wigner_weyl_color.pdf
- [138] J. Dereziński. *Introduction to Quantization*. 2021. <https://www.fuw.edu.pl/~derezins/quantize.pdf>
- [139] R. Gilmore. *Baker-Campbell-Hausdorff formulas*. Journal of Mathematical Physics. **15**, 2090, 1974. doi: <https://doi.org/10.1063/1.1666587>
- [140] S. C. Ulhoa. *On the quantization of the charge-mass ratio*. General Relativity and Gravitation. **49**(1), 2017. doi: <https://doi.org/10.1007/s10714-016-2170-y>
- [141] R. C. Adams, J. M. Cohen, R. J. Adler e C. Sheffield. *Analytic Pulsar Models*. The Astrophysical Journal. **192**, 525-528, 1974. <https://adsabs.harvard.edu/pdf/1974ApJ...192..525A>
- [142] S. C. Ulhoa, E. P. Spaniol, H. G. V. González e R. G. G. Amorim. *On the quantization of a neutron star*. Modern Physics Letters A. **35**(9), 2050051, 2019. doi: <https://doi.org/10.1142/S0217732320500510>
- [143] J. W. Maluf e J. F. da Rocha-Neto. *General relativity on a null surface: Hamiltonian formulation in the teleparallel geometry*. General Relativity and Gravitation. **31**, 173-185, 1999. doi: <https://doi.org/10.1023/A:1018836025605>
- [144] J. F. da Rocha-Neto, J. W. Maluf e S. C. Ulhoa. *Hamiltonian formulation of unimodular gravity in the teleparallel geometry*. Physical Review D. **82**, 124035, 2010. doi: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.82.124035>

- [145] R. Arnowitt, S. Deser e C. W. Misner. *Gravitation: an Introduction to Current Research*. Editado pelo L. Witten. Wiley, New York, 1962. doi: <https://doi.org/10.1063/1.3050988>
- [146] Base de dados das medições das massas das Estrelas de Nêutrons, mantida atualizada pelo J. M. Lattimer. <http://www.stellarcollapse.org/>
- [147] G. Adomian. *Solving Frontier Problems on Physics: The Decomposition Method*. Kluwer Academic Publisher, Boston, 1994. doi: <https://doi.org/10.1007/978-94-015-8289-6>
- [148] G. Adomian. *A review of the decomposition method in applied mathematics*. Journal of Mathematical Analysis and Applications. **135**, 501-544, 1988. doi: [https://doi.org/10.1016/0022-247x\(88\)90170-9](https://doi.org/10.1016/0022-247x(88)90170-9)
- [149] G. Adomian. *Solution of the Thomas-Fermi equation*. Applied Mathematics Letters. **11**(3), 31-133, 1998.
- [150] F. M. Allan. *Derivation of the Adomian decomposition method using the homotopy analysis method*. Applied Mathematics and Computation. 190, 6-14, 2007. <https://numericaltank.sjtu.edu.cn/1stBook/paper/others/Allan%20AMC%202007.pdf>
- [151] R. G. G. Amorim, D. F. Sens, A. F. P. Barbosa, V. C. Rispoli. *Resolvendo Equações Diferenciais pelo Método da Decomposição de Adomian*. Revista Brasileira de Ensino de Física. **42**, e20200095, 2020. doi: <https://doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2020-0095>
- [152] K. Al Khaled e F. Allan. *Construction of solution of shallow water equation by decomposition method*. Mathematics and Computers in Simulation. **66**(6), 479-486, 2004.
- [153] K. AL Khaled e F. Allan. *Decomposition method for solving nonlinear integro-differential equations*. The Korean Journal of Computational & Applied Mathematics. **19**(1), 415-425, 2005. doi: <https://doi.org/10.1007/bf02935815>
- [154] M. M. Hosseini e H. Nasabzadeh. *On the Convergence of Adomian Decomposition Method*. Applied Mathematics and Computation. **182**, 536-543, 2006. doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.amc.2006.04.015>
- [155] W. Chen e Z. Lu. *An algorithm for Adomian decomposition method*. Applied Mathematics and Computation. **159**(1), 221-235, 2004. doi: <https://doi.org/10.1016/j.amc.2003.10.037>