

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
INSTITUTO DE FÍSICA

HENRIQUE ALVES DE LIMA

**REDISTRIBUIÇÃO DE RENDA COMO UMA  
TRANSIÇÃO DE FASE EM SISTEMAS ECONÔMICOS**

BRASÍLIA  
ABRIL DE 2022



Henrique Alves de Lima

**Redistribuição de renda como uma transição de fase em  
sistemas econômicos**

Dissertação apresentada ao Instituto de Física da Universidade de Brasília como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Física

Orientador: Professor Dr. Fernando Albuquerque de Oliveira

Coorientador: Professor Dr. Pedro Dias Pinto

Universidade de Brasília – UnB

Instituto de Física

Brasília

Abril de 2022

---

Henrique Alves de Lima

Redistribuição de renda como uma transição de fase em sistemas econômicos/  
Henrique Alves de Lima. – Brasília, Abril de 2022-  
134 p. : il. (algumas color.) ; 30 cm.

Orientador: Professor Dr. Fernando Albuquerque de Oliveira

Dissertação – Universidade de Brasília – UnB  
Instituto de Física, Abril de 2022.

1. Redistribuição de renda. 2. Transições de fase. 3. Equações diferenciais.  
4. Modelo de Ising. 5. Modelo de Kuramoto. 6. Física computacional 7. Física aplicada

---

*Este trabalho é dedicado aos nascidos na periferia,  
que preferiram contrariar as estatísticas.*

# Agradecimentos

*Este trabalho não tem a intenção de mudar o mundo de maneira alguma, porém, mudará a vida de uma pessoa disposta a fazer a diferença por onde passar.*

Dedico essa conquista à todas as pessoas que dedicaram um pouco da sua vida para que eu construísse a totalidade da minha. A minha mãe, Irene Alves de Jesus, a mulher mais incrível do mundo, que lutou com todas as suas forças para que esse sonho fosse construído. A meu saudoso pai, José Miranda, homem provedor, que nunca deixou que nada nos faltasse. À minha família. Meus irmãos José Lucas, Pedro Gabriel, Pedro Thiago e Paulo Henrique.

Aos professores Fernando Oliveira e Pedro Dias, cujos ensinamentos guardarei pelo resto da vida. Que esse seja o primeiro de muitos outros trabalhos em conjunto. Aos professores Leonardo Castro e Márcio Sampaio Gomes Filho por sua prestativa participação na avaliação desse trabalho.

Aos mais de 600 mil irmãos brasileiros que perderam suas vidas devido à pandemia de COVID - 19, seja pela doença, incompetência, desinformação ou fome, suas vidas não serão esquecidas.

Ao saudoso professor Ivan Ferreira, que precocemente nos deixou. Sua memória jamais será esquecida.

Ao CNPq pela bolsa de estudos e auxílio financeiro que possibilitou a minha dedicação exclusiva no programa de pós graduação e também a operacionalização do trabalho.

A Kátilla Macedo, que compartilhou os momentos mais difíceis ao meu lado. A todos os meus incontáveis amigos e colegas que compartilharam comigo momentos na vida. A Clarissa Martins, por ter acreditado em meu sonho e me apoiado no momento mais difícil da minha vida. Dedico a todos vocês muito mais do que a alegria da realização desse trabalho, dedico a felicidade de perceber que os dias difíceis que se passaram foram necessários para forjar o meu caráter.

Por um mundo mais igual e por uma ciência que realize o seu papel fundamental: o de mudar vidas. Que possamos voltar a pensar num mundo em que todos possam ter os mesmos direitos de fato. Venceremos, de fato, venceremos esses tempos sombrios!

A todos, muito obrigado.

BRASIL, 2021

# A DOR DA FOME



“Antes, as pessoas passavam aqui e pediam um pedaço de osso para dar para os cachorros. Hoje, elas imploraram por um pouco de ossada para fazer comida. O meu coração dói.”

JOSÉ DIVINO SANTOS  
MOTORISTA DO CAMINHÃO DOS OSSOS

Em um país com inflação galopante, desemprego em alta e 19 milhões de brasileiros passando fome, um caminhão carregado de pelanca e osso virou a esperança de famílias inteiras. No Rio, uma fila do desespero é formada no bairro da Glória por moradores de várias regiões, que percorrem quilômetros para levar ao prato esses restos. O material, descartado por mercados e açougues, iria para fábricas de sabão e ração de cachorro. **PÁGINA 3**

**COLUNISTA**



LEONARDO FERREIRA

**IZA planeja filhos e uma agenda mais calma no futuro**

PÁGINA 16

**JOGO EXTRA**



**Mengão com força máxima**

Renato terá todos os titulares à disposição para a decisão contra o Barcelona, no Equador.

**COLUNISTA**



IKER CASILLAS

**Paes prevê quase R\$ 40 bilhões no orçamento de 2022**

PÁGINA 7

**Pfizer pede o reforço para todas as idades**

PÁGINA 9

**INSS: Congresso suspende a prova de vida**

PÁGINA 12

Figura 1 – Retirado de: <https://extra.globo.com/noticias/rio/a-dor-da-fome-capa-do-jornal-extra-ganha-repercussao-internacional-25222868.html>, Acessado em: 04/10/2021

*A ciência é, portanto, uma perversão de si mesma, a menos que tenha como fim último,  
melhorar a humanidade.  
(Nikola Tesla)*



# Resumo

O estudo da distribuição de riqueza é um tema antigo, porém, longe de ter uma resposta exata. Alguns trabalhos buscam descrever por algoritmos matemáticos o processo em que se gera as distribuições de riqueza, e discutir se essas são inevitavelmente desiguais. Este trabalho busca estudar como a redistribuição de riqueza pode ser compreendida dentro de um sistema econômico como uma transição de fase. Assim como nos modelos conhecidos para estudar essas transições, mudanças nas variáveis macroscópicas tendem a causar alterações nas estruturas desses sistemas. Seria então a distribuição desigual de riqueza um fato inevitável, ou consequência de algum processo estrutural? Os modelos que buscam estudar o processo de distribuição de riqueza, apresentam resultados coerentes com a realidade das economias? Nos apoiaremos em processos matemáticos conhecidos, e em teorias sobre o surgimento das desigualdades, para buscar alguma resposta para esse assunto.

**Palavras-chaves:** Econofísica. Riqueza. Modelo de Ising. Redistribuição de renda. Monte Carlo. Transições de fase. Modelo de Kuramoto. Sincronização.



# Abstract

The study of the wealth distribution is an old topic, however, far from an exact answer. Some works seek to describe the process in which wealth distributions are generated using mathematical algorithms, and to discuss whether these are inevitably unequal. This work seeks to study how the redistribution of wealth can be understood within an economic system as a phase transition. As in the known models to study these transitions, changes in macroscopic variables tend to cause alterations in the structures of these systems. Is the unequal distribution of wealth, then, an inevitable fact or a consequence of some structural process? Do the models that seek to study the wealth distribution process, successfully present results that are consistent with the reality of economies? We will rely on known mathematical processes and theories about the emergence of inequalities, trying to find some answer to this issue.

**Key-words:** Econophysics. Wealth. Ising Model. Wealth Redistribution. Monte Carlo. Phase Transitions. Kuramoto Model. Synchronization.



# Sumário

	<b>Introdução</b> . . . . .	<b>15</b>
<b>I</b>	<b>DISTRIBUIÇÕES E ANÁLISES ESTATÍSTICAS DE MODELOS DA ECONOFÍSICA</b>	<b>17</b>
<b>1</b>	<b>DISTRIBUIÇÕES NA FÍSICA, ECONOMIA E ECONOFÍSICA</b> . . .	<b>19</b>
<b>1.1</b>	<b>Uma prévia dos conceitos mais importantes</b> . . . . .	<b>19</b>
<b>1.2</b>	<b>A mecânica estatística da distribuição de dinheiro</b> . . . . .	<b>20</b>
1.2.1	Distribuição de Boltzmann-Gibbs . . . . .	20
1.2.2	Aplicação em um sistema econômico . . . . .	22
1.2.3	Função logística como determinante de $\Delta m$ . . . . .	28
1.2.3.1	Caso da negociação justa . . . . .	30
1.2.3.2	Caso da negociação injusta . . . . .	32
1.2.3.3	Considerações sobre os métodos . . . . .	34
<b>II</b>	<b>COMO É GERADA A DESIGUALDADE: A APROXIMAÇÃO DO DINHEIRO COMO CONSTANTE DE MOVIMENTO DE UM SISTEMA ECONÔMICO</b>	<b>37</b>
<b>2</b>	<b>TEORIAS DA DISTRIBUIÇÃO DE RIQUEZA E O DINHEIRO COMO ENERGIA DOS SISTEMAS ECONÔMICOS.</b> . . . . .	<b>39</b>
<b>2.1</b>	<b>A desigualdade é um processo inevitável?</b> . . . . .	<b>39</b>
<b>2.2</b>	<b>Teoria do excedente (Surplus Theory)</b> . . . . .	<b>40</b>
2.2.1	Teoria do excedente na estratificação social . . . . .	41
2.2.2	Processo de geração de desigualdade . . . . .	42
2.2.3	Discussões sobre a teoria do excedente . . . . .	46
<b>III</b>	<b>CONDENSAÇÃO DA RIQUEZA POR PROCESSOS ESTOCÁSTICOS</b>	<b>51</b>
<b>3</b>	<b>CONDENSAÇÃO DA RIQUEZA POR PROCESSOS ESTOCÁSTICOS</b> . . . . .	<b>53</b>
<b>3.1</b>	<b>Processos Estocásticos</b> . . . . .	<b>53</b>
<b>3.2</b>	<b>Equação de Langevin</b> . . . . .	<b>53</b>
<b>3.3</b>	<b>Condensação de riquezas por processos Estocásticos</b> . . . . .	<b>55</b>

3.3.1	Lema de Itô . . . . .	55
<b>3.4</b>	<b>Equação de Fokker-Planck . . . . .</b>	<b>58</b>
3.4.0.1	Caso estacionário da equação de Fokker-Planck . . . . .	59
3.4.1	Distribuição de Boltzmann-Gibbs a partir da equação de Fokker-Planck . . . . .	60
<b>3.5</b>	<b>Efeitos da redistribuição da renda no modelo de troca de capitais . . . . .</b>	<b>61</b>
3.5.0.1	Solução numérica da equação com efeito da redistribuição de renda - Primeira etapa . . . . .	65
3.5.0.2	Solução numérica da equação com efeito da redistribuição de renda - Segunda etapa . . . . .	67
3.5.0.3	Resultados e discussão sobre as curvas resultantes do modelo com redistribuição . . . . .	68
<b>IV</b>	<b>TRANSIÇÕES DE FASE E MODELOS DE SPINS APLICADOS À SISTEMAS ECONÔMICOS . . . . .</b>	<b>71</b>
<b>4</b>	<b>MODELOS TERMODINÂMICOS APLICADOS À ECONOMIA . . . . .</b>	<b>73</b>
4.1	Transições de fase . . . . .	73
4.2	Fenômenos críticos e grupo de renormalização . . . . .	73
4.3	Modelo de Ising e aproximação por campo médio (mean-field) . . . . .	76
4.4	Método de Monte Carlo e modelo de Ising no estudo das distribuições de riqueza . . . . .	81
4.4.1	Modelo de Ising como gerador de curvas similares às de distribuição de renda . . . . .	83
4.4.1.1	O parâmetro de ordem no modelo de Ising aplicado ao contexto econômico . . . . .	86
4.4.1.2	Fundamentos sobre o modelo de Ising e transições de fase em sistemas econômicos . . . . .	86
<b>V</b>	<b>O MODELO DE KURAMOTO NO ESTUDO DAS DISTRIBUIÇÕES DE RIQUEZA . . . . .</b>	<b>89</b>
<b>5</b>	<b>O MODELO DE KURAMOTO NO ESTUDO DAS DISTRIBUIÇÕES DE RIQUEZA . . . . .</b>	<b>91</b>
5.1	O modelo de Kuramoto . . . . .	92
5.2	Aplicação do modelo de Kuramoto à simulação de distribuição de riquezas . . . . .	94
5.2.1	Algoritmo da distribuição de riqueza utilizando o modelo de Kuramoto . . . . .	96
5.2.2	Introdução do fator $\gamma_i$ . . . . .	98
5.2.2.1	O parâmetro de ordem no modelo de Kuramoto aplicado ao contexto econômico . . . . .	99
5.2.3	Uma breve discussão sobre o modelo de Kuramoto na análise das distribuições de riqueza . . . . .	100

<b>6</b>	<b>CONCLUSÃO</b> . . . . .	<b>103</b>
	Conclusão . . . . .	103
	Bibliografia . . . . .	105
	<b>ANEXOS</b>	<b>119</b>
	ANEXO A – ALGORITMO DO <i>YARD SALE MODEL</i> . . . . .	121
	ANEXO B – ALGORITMO PARA O MODELO DE KURAMOTO COM N OSCILADORES . . . . .	123
	ANEXO C – FIGURAS REFERENTES AO CAPÍTULO 3 . . . . .	131
C.1	- Simulação no software <i>Maplesoft™</i> para o modelo com redistri- buição de renda . . . . .	131



# Introdução

A discussão sobre como surge a desigualdade é antiga e ainda sem uma resposta objetiva. Diversos pensadores fizeram proposições sobre quais relações humanas levam a alguns indivíduos possuírem uma riqueza tão superior a outros. Entram no jogo até mesmo relações que escapam do aspecto humano e entram num aspecto "divino". Um Rei da idade média tinha comando sobre seus vassallos por conta da benevolência e da ordem de um deus. Esse comando de deus condenava até mesmo interações que hoje são básicas entre os humanos, como por exemplo, o empréstimo de dinheiro a juros, que era o pecado da usura. Há extensas literaturas sobre os processos humanos que levaram à acumulação de riqueza e todas elas nos levam às mais diversas interpretações do fenômeno que leva as sociedades serem mais ou menos desiguais [1][2].

De outro lado, os físicos e matemáticos procuram expressar essas relações, de um ponto de vista tecnicamente "neutro". Buscamos resumir as interações humanas em nossos algoritmos de computador e equações diferenciais, o que a princípio pode parecer apequenar o problema e torna-lo simples demais. A grande questão é que seria impossível atribuir a parâmetros matemáticos todas as características dos seres humanos. Alguns algoritmos computacionais, como o *Yard Sale Model*, tenta expressar de uma maneira geral como seriam essas interações, e retornar uma curva de distribuição de riqueza que seja interessante.

Imaginemos então dois sistemas diferentes: o primeiro é uma simples chaleira com alguma quantidade de água, e o segundo composto por agentes econômicos negociando de diversas maneiras diferentes. Sabemos que após uma certa temperatura a água na chaleira começará a evaporar. Sabemos também que se aumentarmos a quantidade de água nessa chaleira, levará mais tempo para alcançarmos esse ponto de ebulição. Aqui temperatura e volume são parâmetros macroscópicos desse sistema, e o fenômeno da transição de fase decorre da mudança desses parâmetros.

Quais seriam os parâmetros macroscópicos do segundo sistema? Qual parâmetro poderia ser caracterizado como a "temperatura" desse sistema econômico? A taxa em uma economia e a redistribuição de renda parecem ser excelentes candidatos. Imagine que num país extremamente desigual, o governo passe a retirar dinheiro dos mais ricos e redistribuir aos mais pobres. Essa seria, excluindo todas as complexidades de uma sociedade, uma maneira efetiva de "aquecer" a economia desse sistema.

**A proposta desse trabalho é analisar a transição de fases nesses sistemas econômicos, geradas pela redistribuição da riqueza dos agentes.**

Dividimos esse trabalho da seguinte forma:

- Capítulo 1: Um análise geral dos métodos utilizados na área da econofísica e a apresentação do modelo *Yard Sale*. - Esse é um capítulo introdutório, e que serve para apresentar ao leitor fundamentos e modelos usados na econofísica. É um capítulo bastante gráfico, com algoritmos explicados e algumas propostas interessantes;
- Capítulo 2: A teoria do excedente de John Angle - Nesse capítulo seremos apresentados à teoria do excedente, de John Angle. A proposta é analisar um algoritmo computacional que surge a partir de uma teoria social de produção de riqueza;
- Capítulo 3: Distribuições de riqueza geradas por processos estocásticos;
- Capítulo 4: O modelo de Ising na geração de curvas de distribuição de riqueza - Uma aproximação termodinâmica do problema econômico;
- Capítulo 5: O modelo de Kuramoto e uma nova proposta na análise das distribuições de riqueza.

Esse trabalho foi estruturado em tópicos para proporcionar ao leitor uma visão ampla do problema a partir de vários métodos diferentes. Buscamos analisar uma robusta bibliografia e reproduzir em nossos desenvolvimentos uma série de modelos.

## Parte I

# Distribuições e análises estatísticas de modelos da econofísica



# 1 Distribuições na física, economia e economia física

Esse capítulo tem como intuito apresentar ao leitor conceitos iniciais sobre o que será feito a posteriori no trabalho. Queremos demonstrar como surgem os modelos e como são feitas as análises mais fundamentais e necessárias para compreendermos quais são as melhorias que podem ser feitas aos modelos.

## 1.1 Uma prévia dos conceitos mais importantes

- **Distribuições de riqueza:** São curvas de densidade de probabilidade relacionadas à riqueza de um agente econômico. O que buscamos ao analisar essas curvas é *qual a probabilidade de encontrarmos, numa economia, um agente com uma riqueza igual a um valor  $x$* . Nos modelos mais simples, essas curvas de riqueza se confundem com curvas de distribuição de renda, pois a princípio, quanto maior a renda de um indivíduo, maior sua riqueza acumulada. Curvas que apresentam economias desiguais tendem a apresentar uma concentração para valores de  $x$  muito baixos.
- **Yard Sale Model:** O algoritmo se baseia na seguinte premissa: Dois indivíduos negociam um objeto qualquer, onde um dos indivíduos recebe um valor  $x$  pelo objeto e outro perde o mesmo valor  $x$  na negociação. O modelo trata de uma venda de garagem pois o bem negociado não possui valor, nem outra variável que entre no cálculo do preço. Esse modelo não calcula, por exemplo, um possível ganho do comprador ao adquirir o bem, apenas a quantidade monetária que foi despendida.
- **Transições de fase:** É uma transformação da estrutura macroscópica de um sistema pela mudança de algum parâmetro que controla variáveis pertencentes ao sistema. Um caso simples, corriqueiro e muito didático é o da água. Ao aquecermos a água (sistema) variamos sua temperatura (parâmetro de controle) até o ponto em ela passa de uma fase, que é o estado líquido, para outra que é o estado gasoso. Esse é um conceito muito amplo e pode ser aplicado aos mais diversos tipos de sistemas físicos, biológicos, sociais e econômicos [3].
- **Redistribuição de riqueza/renda:** Consiste em garantir com que parte da riqueza acumulada pelos agentes mais ricos seja distribuída para os agentes com menor riqueza acumulada. Tecnicamente, consiste em tornar a curva de distribuição de renda "mais gaussiana". Pode-se argumentar também que há na curva gaussiana

uma dispersão que também gera desigualdade, a questão é que essa dispersão não possui as mesmas simetrias que existem nas curvas de distribuição de riqueza.

## 1.2 A mecânica estatística da distribuição de dinheiro

O estudo da física aplicada à economia engloba os mais diversos métodos e conceitos, sendo essencial para pessoas que desejam estudar essa área um arcabouço de matemática, física, e economia, sólido o suficiente para apresentar soluções para as demandas. A motivação inicial desse tópico é construir alguns paralelos fortes entre teorias consolidadas na física e conceitos fundamentais no estudo da economia, assim, queremos ao longo desse capítulo apresentar fundamentos de como são desenvolvidos os trabalhos nessa área. Processos aleatórios, de maneira geral, são usados para descrever a dinâmica de diversos sistemas econômicos. Vamos inicialmente utilizar a teoria cinética de Boltzmann, analisando assim as interações entre agente econômicos como sendo independentes.

O primeiro caso que iremos estudar é uma abstração de um sistema econômico, descrita tal qual as que conhecemos na mecânica estatística usadas para reproduzir o comportamento de partículas. Todas as considerações utilizadas na teoria cinética dos gases possuem um paralelo com o que vamos descrever, assim, há uma capacidade imediata da implementação desses métodos [4][5].

### 1.2.1 Distribuição de Boltzmann-Gibbs

Sistemas com um número elevado de agentes ( $N \gg 1$ ) fazem parte da mecânica estatística e da economia. Sendo assim, é necessária uma teoria que explique essas diversas interações, que são impossíveis de serem descritas independentemente, por uma visão probabilística. A distribuição de probabilidades de Boltzmann-Gibbs, usada para descrever sistemas que possuem uma estrutura interna complexa, será utilizada numa visão inicial do que seria um modelo econômico simples [6][7][8].

Para derivar a distribuição, vamos separar um sistema em duas partes, que não são necessariamente iguais. A energia total do sistema composto pelas duas partes é:  $\epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2$ , e a probabilidade de se encontrar o sistema em um estado com energia  $\epsilon$  é igual ao produto das probabilidades dos sistemas

$$P(\epsilon) = P(\epsilon_1)P(\epsilon_2), \quad (1.1)$$

Uma possível solução para essa equação é da forma de uma exponencial

$$P(\epsilon) = C e^{-\epsilon/T}, \quad (1.2)$$

onde  $T$  é a temperatura do sistema e  $C$  é uma constante de normalização. Na expressão 1.2 a constante de Boltzmann foi tomada como sendo 1. Se formos mais adiante e considerarmos a entropia dos sistemas, os microestados acessíveis para os sistemas e algumas identidades termodinâmicas, podemos chegar ao mesmo resultado apresentado em 1.2, por uma demonstração mais sofisticada.

Vamos considerar que as duas partes em que separamos nosso sistema, sejam um reservatório a temperatura constante e um átomo. Vamos chamar de  $\Omega_R(s_1)$  a multiplicidade de estados associada ao reservatório quando o átomo está no estado  $s_1$ , analogamente  $\Omega_R(s_2)$ , para o átomo no estado  $s_2$ . De forma geral a probabilidade de se encontrar o átomo em um estado particular é diretamente proporcional ao número de microestados acessíveis ao reservatório, assim, a razão das probabilidades para os dois estados será

$$\frac{P(s_2)}{P(s_1)} = \frac{\Omega_R(s_2)}{\Omega_R(s_1)}. \quad (1.3)$$

Sendo  $S$  a entropia definida por  $S = k \ln \Omega$ , então

$$\frac{P(s_2)}{P(s_1)} = \frac{e^{S_R(s_2)/k}}{e^{S_R(s_1)/k}} = e^{[S_R(s_2) - S_R(s_1)]/k}. \quad (1.4)$$

Podemos observar que no lado direito de 1.4 apresenta a diferença da entropia no reservatório. Vamos considerar que a diferença seja pequena o suficiente para que possamos usar a seguinte identidade termodinâmica:

$$dS_R = \frac{1}{T}(dU_R + P dV_R - \mu dN_R). \quad (1.5)$$

O termo  $dN_R$  é igual a zero, pois não há mudanças no número de partículas quando consideramos o subsistema composto apenas por um tipo de átomo. O termo  $dV_R$ , que representa a variação do volume do reservatório, pode ser também desprezado em comparação a  $dU_R$  que representa a variação da energia interna do sistema. Assim, podemos reescrever 1.5 como sendo

$$S_R(s_2) - S_R(s_1) = \frac{1}{T}[U_R(s_2) - U_R(s_1)], \quad (1.6)$$

mas como a variação de energia nesse sistema se dá apenas pela variação do calor, ou seja, o sistema não realiza trabalho, redefinimos a energia como

$$\begin{aligned}\Delta U(s_1) &= \Delta E(s_1) \\ \Delta U(s_2) &= -\Delta E(s_2).\end{aligned}\tag{1.7}$$

Aplicando os dois resultados anteriores em 1.4:

$$\frac{P(s_2)}{P(s_1)} = \frac{e^{-E(s_2)/kT}}{e^{-E(s_1)/kT}},\tag{1.8}$$

organizando os termos:

$$\frac{P(s_2)}{e^{-E(s_2)/kT}} = \frac{P(s_1)}{e^{-E(s_1)/kT}}.\tag{1.9}$$

Os lados da equação 1.4 são independentes entre si, assim, só serão iguais se forem constantes. Com essa consideração, chegamos ao resultado apresentado anteriormente:

$$\frac{P(s_2)}{e^{-E(s_2)/kT}} = \frac{P(s_1)}{e^{-E(s_1)/kT}} = C,\tag{1.10}$$

$$P(s) = C e^{-E(s)/kT}.\tag{1.11}$$

Tomando  $k = 1$ , temos a um resultado igual ao apresentado em 1.2. Podemos também utilizar a expressão usada anteriormente para descrever a entropia, juntamente com a aproximação de Stirling, para encontrarmos a entropia por partículas [8]. Vamos separar os valores da energia em vários intervalos de tamanho  $\Delta e$ , e contar o número de partículas que possuem energia no intervalo  $e$  e  $e + \Delta e$ . O termo  $N_k/N = P_k$  nos dá a probabilidade de encontrarmos uma partícula com energia  $e_k$ . Assim [9][6]:

$$\frac{S}{N} = -\sum_k \frac{N_k}{N} \ln\left(\frac{N_k}{N}\right) = -\sum_k P_k \ln P_k,\tag{1.12}$$

com a energia total do sistema sendo dada por:

$$E = \sum_k N_k e_k.\tag{1.13}$$

### 1.2.2 Aplicação em um sistema econômico

Vamos começar a fazer alguns paralelos interessantes. A distribuição de Boltzmann-Gibbs é construída sobre a premissa de que a energia total desse sistema é conservada,

porém, teríamos resultados semelhantes se considerássemos a conservação de qualquer outra grandeza referente a qualquer outra aplicação, em nosso caso, poderíamos relacionar o dinheiro à energia. Vamos considerar um sistema de  $N$  agentes, onde a grandeza total conservada é o **dinheiro** possuído pelo conjunto. Ao considerarmos que o dinheiro como uma quantia que se conserva, estamos desprezando efeitos econômicos como inflação e aumento da base monetária, por estes não serem relevantes em nossas simulações.

No início da simulação, todos os agentes possuem a mesma quantia de dinheiro, dada por:  $m = M/N$ , onde  $M$  é o dinheiro total no sistema e  $N$  o número de agentes. Seleccionamos aleatoriamente dois agentes desse sistema, escolhemos um para ser o vencedor e outro para ser o perdedor na negociação. O vencedor recebe uma quantia  $\Delta m$  do perdedor, que é subtraído da mesma quantia:  $[m_i, m_j] \rightarrow [m'_i, m'_j] = [m_i - \Delta m, m_j + \Delta m]$ . Estamos considerando que os agentes não podem ter riqueza negativa, ou seja, não podem entrar em débito com outros agentes. Sendo assim, caso haja uma negociação em que um agente ficaria com  $m_i < 0$ , essa negociação é cancelada e outra toma lugar. Existem modelos que consideram essa possibilidade, ou seja, modelos que tratam de agentes com débitos, mas esses não serão tratados aqui. A figura 2 nos apresenta de uma maneira mais clara o algoritmo dessa simulação [10][4][5][11].

Para fazer uma analogia interessante, podemos imaginar um gás, onde as partículas colidem e trocam energia. Essas diversas interações conservam o dinheiro total do sistema, que no caso análogo de um gás, seria a energia total do sistema.

O primeiro caso que vamos estudar, trata de um valor fixo para cada troca:  $\Delta m = \alpha M/N$ , ou seja, uma fração do valor inicial de cada agente. Escolhemos esse valor como sendo  $\alpha = 0.025$ . O número de agentes da simulação é  $N = 500$ , e o valor inicial de dinheiro para cada agente igual a 1000. A figura 3 apresenta o comportamento da distribuição de probabilidades de encontrarmos um indivíduo com dinheiro entre  $m + \delta m$ . Inicialmente, todos os agentes possuem uma quantia de 1000 u.m e conforme o tempo passa, a distribuição se transforma em uma gaussiana, e para tempos mais longos, toma a forma, se aproxima, de uma distribuição de Boltzmann-Gibbs. Note que nesse contexto, dizer que o tempo passa é equivalente a aumentar o número de simulações no programa. A figura 5 apresenta um ajuste da forma  $P(x) = Ae^{-x/t}$  e os parâmetros encontrados para o ajuste estão apresentados na mesma.



Figura 2 – Algoritmo da simulação de troca entre agentes, *Yard Sale Model* ou modelo de venda de garagem.

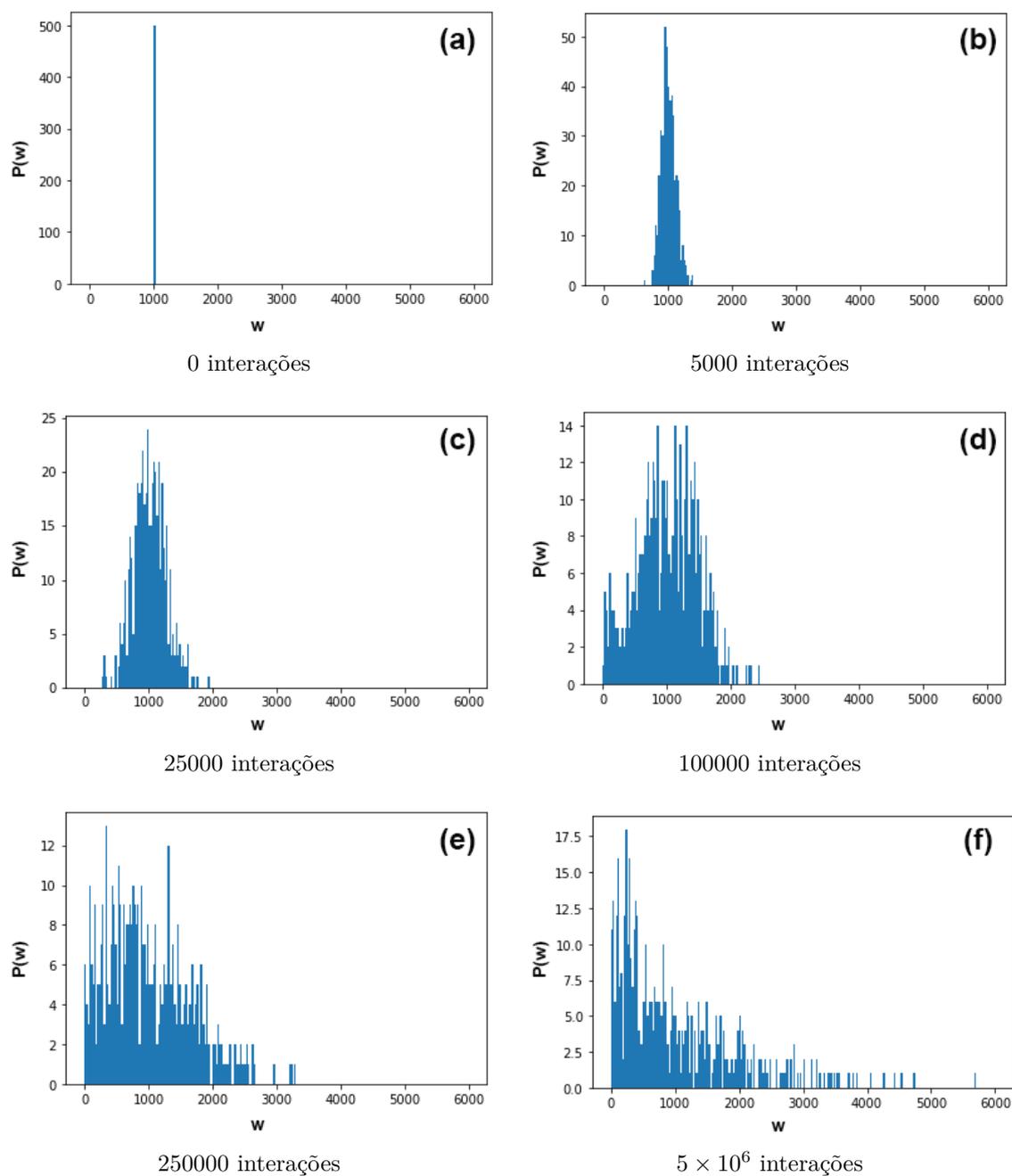


Figura 3 – Evolução da distribuição de probabilidades com o aumento do número de simulações.  $P(w)$  é a probabilidade de se encontrar um indivíduo com riqueza  $w$ .

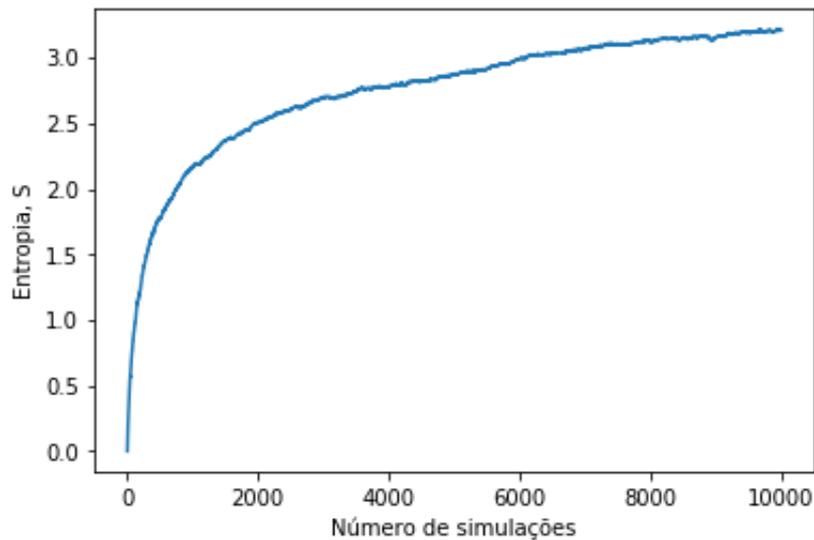


Figura 4 – Variação da entropia do sistema conforme aumentamos o número de simulações. A curva expressa na figura está associada ao valor de  $\Delta m = 25$ .

A figura 4 apresenta a evolução da entropia conforme avançamos nessa simulação. O valor nulo para entropia significa a certeza dos estados em que os agentes se encontram, ou seja, para zero simulações, temos a garantia de que todos os agentes possuem uma quantia de dinheiro igual a 100.

Um caso interessante se apresenta quando escolhemos outra função para ser o nosso  $\Delta m$ . Até o momento, a quantia  $\Delta m$  era independente da riqueza que cada agente possuía no momento, o que tornava possível a elevada quantidade de agentes com valores nulos quando o sistema entra em equilíbrio. Vamos verificar como se comporta a distribuição se  $\Delta m$  for igual a uma fração do dinheiro atual possuído por um agente, ou seja:

$$\Delta m = \gamma m_i. \quad (1.14)$$

Esse modelo não fere a nossa premissa da conservação do dinheiro total no sistema, porém, a distribuição resultante dessa escolha não tem mais a forma de uma distribuição de Boltzmann-Gibbs. O que foi observado na execução desse programa, é que elimina-se a possibilidade de que existam agentes com quantidades nulas de dinheiro. Como o valor subtraído do agente que perde a negociação, é uma fração do valor atual que ele possui, então são nulas as chances de que um agente chegue a possuir nenhuma quantidade de dinheiro.

O artigo [5] apresenta uma função para o ajuste da distribuição, que difere da função de Boltzmann-Gibbs por um fator de lei de potências. Essa função é semelhante à distribuição

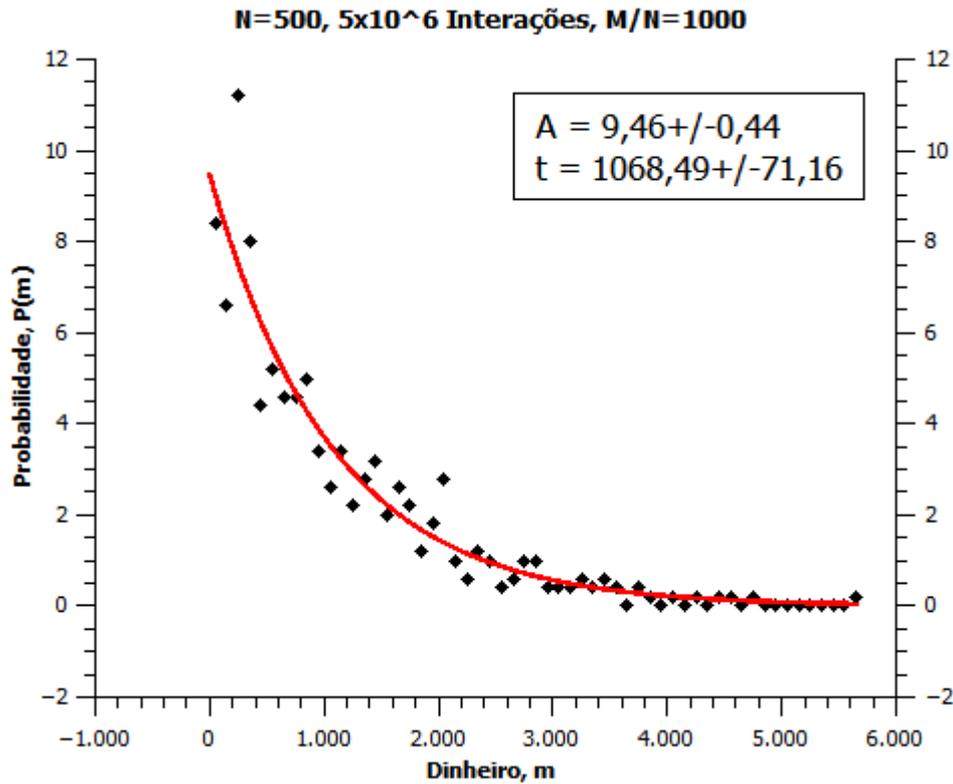


Figura 5 – Ajuste exponencial para a distribuição de probabilidades gerada computacionalmente. Os pontos estão associados ao histograma presente na figura 1 (f).

gama, e tem a forma:

$$P(m) = cm^\beta e^{-m/T}. \quad (1.15)$$

A relação entre os parâmetros  $\gamma$  e  $\beta$  é dada por:

$$\beta = -1 - \ln 2 / \ln(1 - \gamma). \quad (1.16)$$

Quando  $\gamma < 1/2$  temos  $\beta > 0$ , assim, o número de agentes com pequenas quantidades de dinheiro é reduzido e  $P(0) = 0$ . Seguindo a análise feita no artigo, executamos o programa com o parâmetro  $\gamma = 1/3$ . Para valores de  $\gamma$  próximos a  $1/2$ , o programa começa apresentar resultados semelhantes aos apresentados na figura 5. A figura 6 expressa o que foi discutido anteriormente, uma distribuição que possui a propriedade de ser nula em  $m = 0$ , e com baixa probabilidade para valores próximos de 0. O ponto crucial a se analisar é que uma distribuição dessa forma, gerada por um modelo puramente computacional, gera distribuições muito semelhantes à distribuição de renda em setores da economia.

Há uma interessante discussão sobre outros modelos que geram distribuições semelhantes à encontrada na figura 6, ou seja, diversas outras construções de ideias, que levam a dis-

tribuições semelhantes a uma distribuição Gamma. Um dos objetivos desse trabalho, ao menos em sua etapa inicial, é analisar diversos modelos e comparar as aplicações desses métodos para descrever as distribuições de renda e riqueza.

Dentre esses modelos, existe um apresentado por *John Angle*, baseado em uma teoria de estratificação social chamada *Surplus Theory*, que analisa a distribuição de riquezas nos setores de uma sociedade.

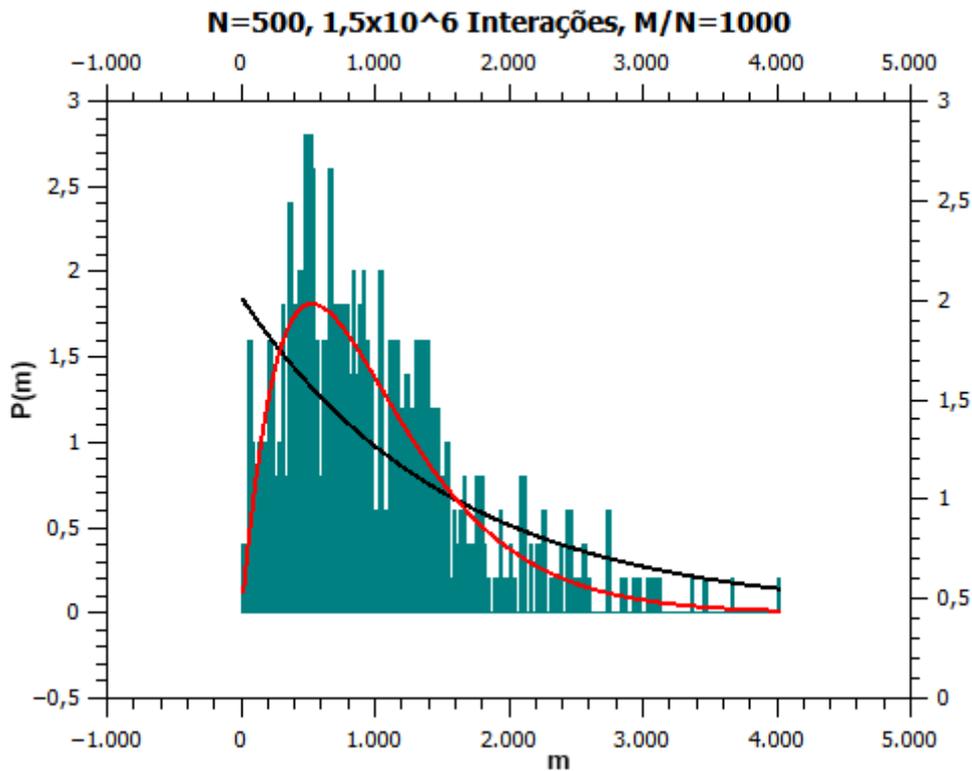


Figura 6 – Distribuição de probabilidades para  $\Delta m = \gamma m_i$ , com  $\gamma = 1/3$ . O ajuste em vermelho está associado à expressão 1.15, e o ajuste em preto está associado à distribuição de Boltzmann-Gibbs.

Aspectos teóricos e conceituais precisam ser apresentados para que possamos entender com maior profundidade os modelos mais sofisticados. Iremos discutir mais detalhadamente a *Surplus Theory* no capítulo 2.

### 1.2.3 Função logística como determinante de $\Delta m$

Podemos também verificar o caso em que a expressão  $\Delta m = \gamma m_i$  tome uma forma mais complexa, onde  $\gamma$  deixe de ser um número constante, e se torne uma função de  $m_i$ . Ou seja, queremos analisar o caso em que:

$$\Delta m(m_i) = \gamma(m_i)m_i. \quad (1.17)$$

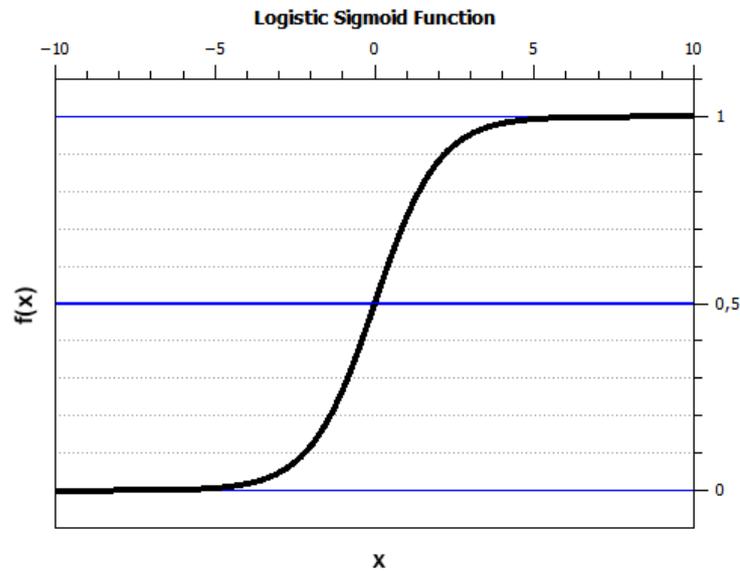


Figura 7 – Função logística do tipo Sigmoid; *Sigmoid function*. Representa a função logística com os parâmetros:  $L = 1$ ,  $k = 1$ ,  $x_o = 0$ .

Dentre as diversas formas que a quantia  $\Delta m$  trocada pelos agentes pode tomar, queremos aqui supor que ela tenha a forma da conhecida função logística. Essa função tem um comportamento muito estudado em diversas áreas da ciência, pois apresenta a característica de ser uma curva exponencial com saturação. A forma mais geral da função logística é dada por:

$$f(x) = \frac{L}{1 + e^{-k(x-x_0)}}. \quad (1.18)$$

A figura 7 mostra um conhecido caso da função logística, a *Sigmoid function*. Essa função possui diversas aplicações, em especial nas áreas de ciência da computação, na construção de comandos lógicos. Devido à sua rápida saturação, a função retorna valores 1 e 0 para valores de  $x$  muito grandes e muito pequenos respectivamente.

A função utilizada nesse trabalho é na verdade uma adaptação da função logística, e pode ser expressa por:

$$f(x) = \frac{A}{1 + e^{\frac{-Bx}{100}}} + C. \quad (1.19)$$

A curva pode assumir as mais diversas formas, devido aos seus três parâmetros, porém, vamos tratar aqui de dois casos específicos, que possuem uma motivação econômica para serem estudados.

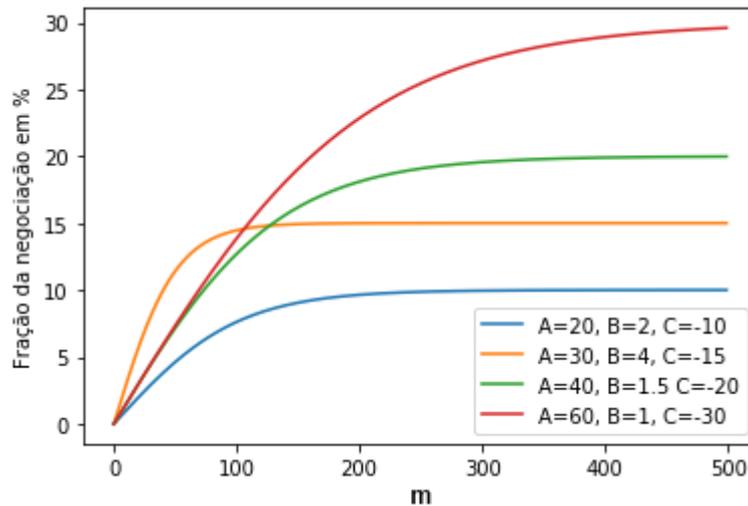


Figura 8 – Curvas da função logística adaptada, para diversos parâmetros.

### 1.2.3.1 Caso da negociação justa

Nesse primeiro caso, vamos tratar de uma espécie de negociação justa, em que os agentes que possuem a **menor** quantidade de dinheiro, ao serem escolhidos como perdedores na negociação, tenham que ceder frações menores do dinheiro que possuem. Ao contrário, os agentes que possuem a **maior** quantidade de dinheiro, devem ceder frações maiores.

Como estamos tratando de uma função que apresenta saturação, a partir de algum ponto  $x$ , todos os agentes que possuírem dinheiro  $m_i > x$ , irão ceder em suas negociações a mesma fração do dinheiro que possuem. Queremos então estudar curvas para  $\Delta m$  como as apresentadas na figura 8.

Para verificarmos a diferença desse modelo para aquele no qual  $\gamma$  é uma constante, vamos fazer diversas simulações e comparar as distribuições resultantes. As simulações serão feitas sob os mesmos parâmetros, número de simulações e valor inicial dos agentes, assim, o que estamos querendo ver de fato é como se comporta a desigualdade entre os agentes na comparação entre os modelos.

A figura 13 apresenta um conjunto de comparações entre o novo modelo e aquele no qual  $\gamma$  é uma constante. As curvas sombreadas em magenta (curvas mais claras) representam o modelo anterior, com  $\gamma = 1/3$ . Já as curvas em azul (curvas mais escuras) variam, conforme um conjunto de parâmetros que foram escolhidos:

- (a)  $A = 30, B = 4, C = -15$ ,

- (b)  $A = 40, B = 1, C = -20,$
- (c)  $A = 60, B = 1, C = -30,$
- (d)  $A = 80, B = 2, C = -40.$

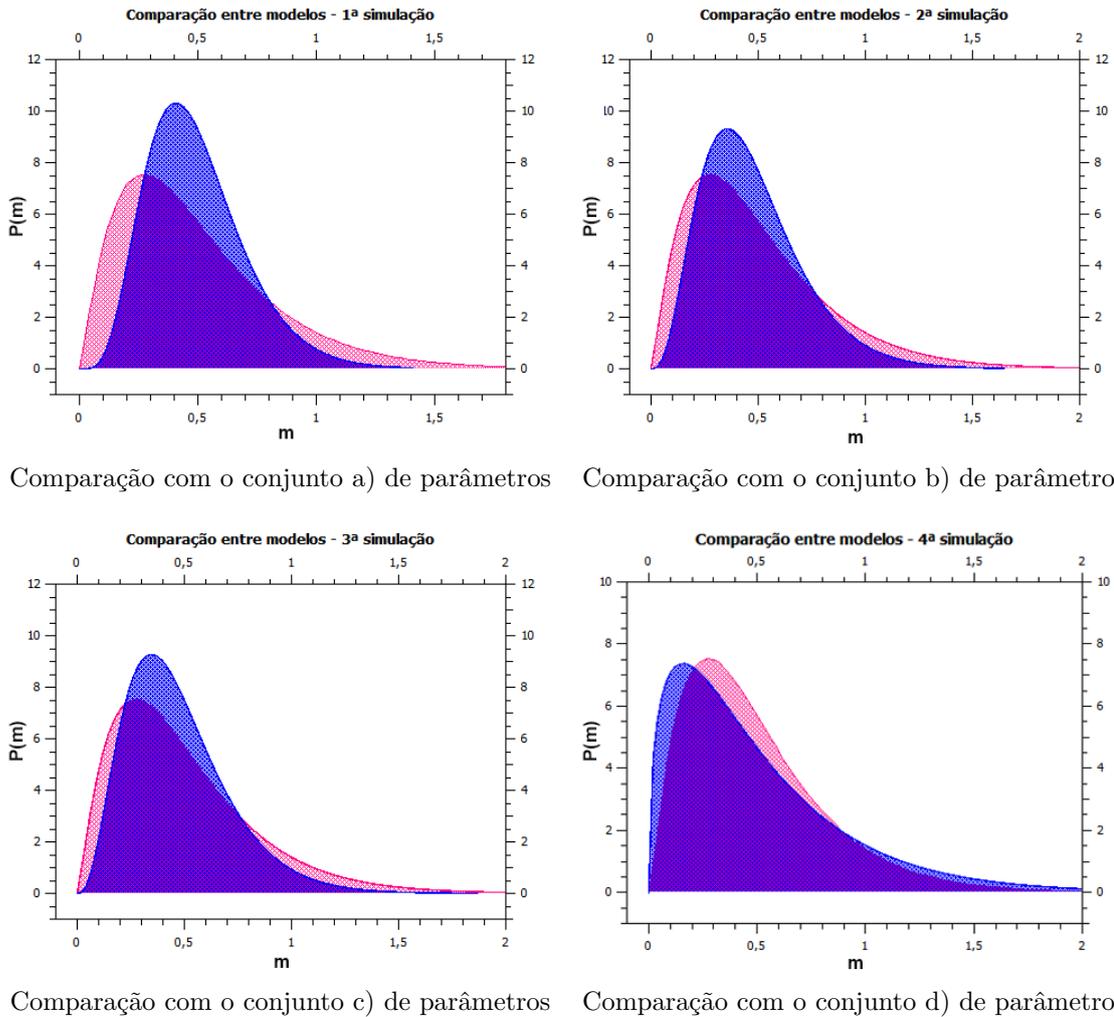


Figura 9 – Comparações entre os modelos  $\gamma$  constante e o modelo por função logística. As curvas em magenta (mais claras) de todas as figuras, estão associadas a  $\gamma$  constante e igual a  $1/3$ . As simulações foram feitas com  $2 \times 10^6$  interações, e com o  $m_0 = M/N = 500$ .

Essas curvas, porém, não nos dão nenhum resultado explícito sobre a desigualdade da distribuição do dinheiro entre os agentes. Para verificar com maior clareza, vamos analisar as funções distribuição acumulada de cada curva. A função distribuição acumulada nos apresenta a probabilidade de encontrarmos uma variável menor ou igual a um valor  $x$ , matematicamente falando:

$$F(x) = P(X \leq x), \quad (1.20)$$

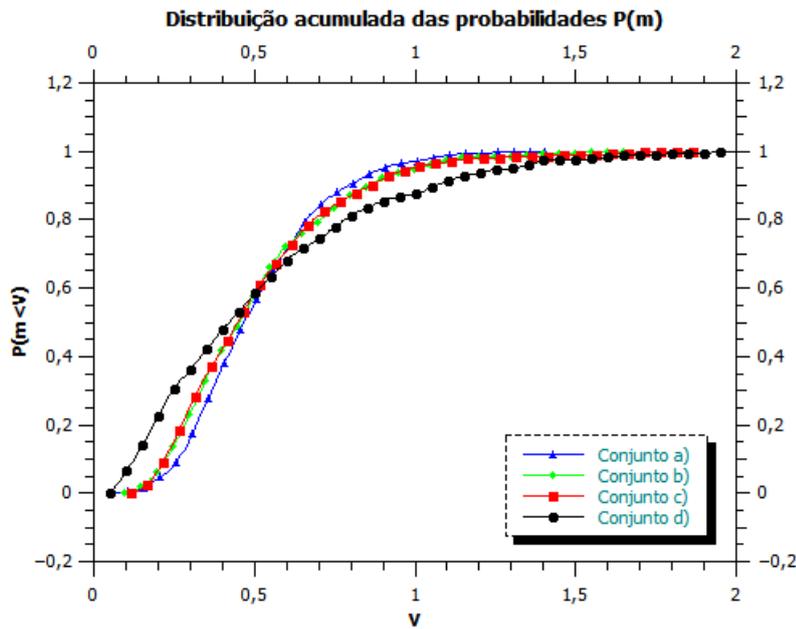


Figura 10 – Distribuições acumuladas para cada conjunto de parâmetros.

e é dada pela expressão:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x') dx'. \quad (1.21)$$

A intuição aqui é simples: Quanto maior a desigualdade de uma distribuição, menor a possibilidade de se encontrar um indivíduo com valores de  $m$  mais elevados. Levando em conta essa ideia, podemos verificar com maior clareza os gráficos das distribuições acumuladas associadas a cada conjunto de parâmetros. A figura 10 apresenta a distribuição acumulada para cada dos conjuntos de parâmetros anteriormente citados.

Podemos perceber que as curvas associadas aos conjunto b) e c), são semelhantes, e pouco acrescentam em nossa análise. Ao compararmos porém, as curvas associadas aos conjuntos a) e d), podemos fazer algumas colocações interessantes. Se escolhermos um ponto na figura 11,  $x = 0,2$  por exemplo, iremos perceber que a probabilidade referente ao conjunto d) é maior do que em a). **Isso significa que a probabilidade de se encontrar um agente com dinheiro menor que 200 na simulação de d) é maior do que na de a).**

### 1.2.3.2 Caso da negociação injusta

Ao contrário do que foi analisado anteriormente, podemos verificar o caso em que a negociação entre os agentes seja mais vantajosa para o indivíduo que possui a maior quantia de dinheiro. É exatamente o oposto do caso discutido antes, assim, é esperado

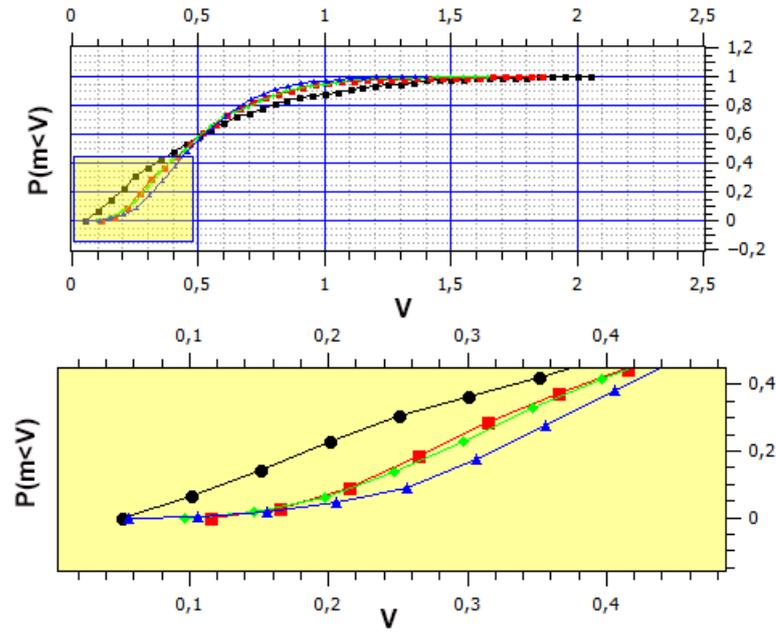


Figura 11 – Aproximação gráfica da figura 10.

que as distribuições apresentem um número considerável de agentes com dinheiro muito próximo a zero. A forma das curvas esperadas para  $\Delta m$  como uma função de  $m$  nessa versão do modelo, estão graficamente descritas na figura 12.

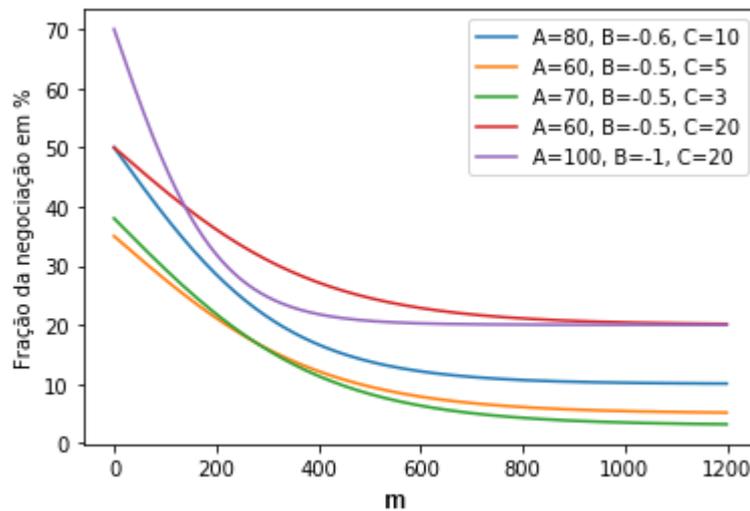


Figura 12 – Curvas da função logística, adaptadas para o caso de uma negociação injusta.

A figura 12 é uma síntese da idéia que nos levou a desenvolver esse tópico. Vamos pensar em um cenário em que quanto menor a quantidade de dinheiro que o indivíduo possuir, maior será a fração desse dinheiro que ele terá que ceder em uma eventual negociação, caso ele seja escolhido como perdedor. As simulações realizadas comprovam que a densidade de agentes com dinheiro próximo a zero é muito alta.

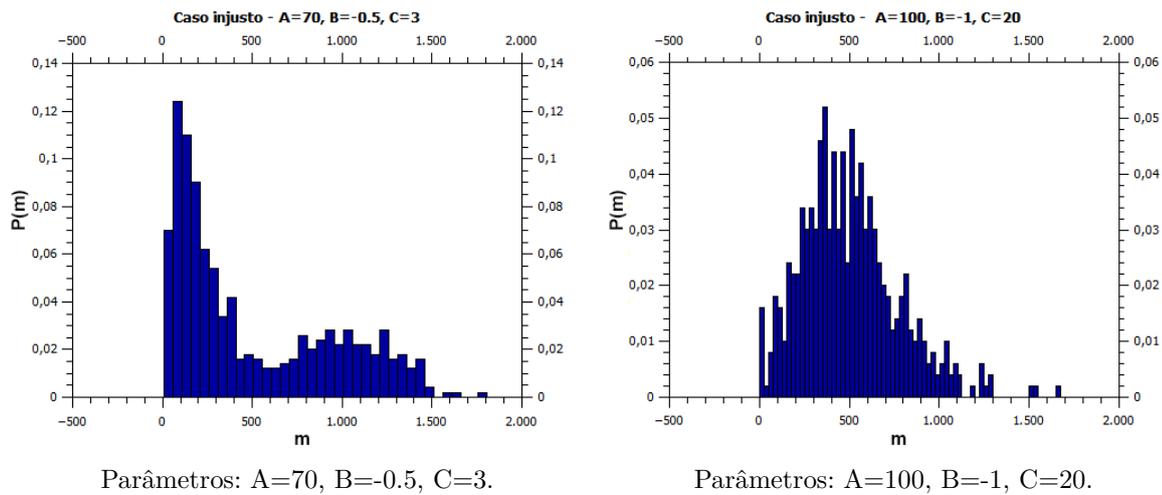


Figura 13 – Simulações realizadas para o caso da negociação injusta, com os devidos parâmetros utilizados. Em todas as simulações,  $m_0 = M/N = 500$ ,  $2 \times 10^6$  interações,  $N = 500$ .

Apesar dessas observações, as distribuições encontradas para os parâmetros foram as mais diversas possíveis, assim, vamos apresentar duas das distribuições encontradas durante a realização do trabalho. As figuras 13(a) e 13(b), apresentam as distribuições encontradas para dois conjuntos de parâmetros diferentes.

Podemos reparar na figura 13(a) um comportamento peculiar, uma separação nítida das rendas. Um setor com alta densidade de indivíduos com renda abaixo de 500, e outro com indivíduos acima de 500. Poderíamos assumir que para o caso em justo com os parâmetros da figura 13(a), há a diminuição de indivíduos que pertencem a uma classe média.

### 1.2.3.3 Considerações sobre os métodos

Em geral, a discussão sobre essas distribuições são sempre complexas, e há pouco conteúdo que mostre explicitamente que existem soluções analíticas, geradas por processos estocásticos, que resultem nessas distribuições. Os processos estocásticos possuem em geral, e observando a literatura disponível, maior quantidade de conteúdo quando estamos estudando ações, e mercados financeiros. Aplicações desses processos estocásticos no estudo das distribuições de renda não são tão comuns assim. *Iremos abordar a natureza e os fundamentos teóricos desses processos estocásticos mais adiante no trabalho.*

Os próximos tópicos vão gerar uma base conceitual e nos apresentar fundamentos econômicos, para que possamos estudar o cenário da distribuição de renda, e da distri-

buição de riquezas.



## Parte II

Como é gerada a desigualdade: A aproximação do dinheiro como constante de movimento de um sistema econômico



## 2 Teorias da distribuição de riqueza e o dinheiro como energia dos sistemas econômicos.

Esse capítulo cumpre um papel importante na conjuntura desse trabalho, buscar conceitos teóricos que mostram por que surgem as distribuições de renda e riqueza como conhecemos. Além disso, vamos começar a fazer os pararelos necessários para adaptar esses modelos, a princípio puramente econômicos, com modelos conhecidos na física. Queremos construir um caminho suave até chegar ao ponto em que faça sentido utilizar modelos mais complexos, como são os modelos de Ising e de Kuramoto, nesses sistemas econômicos.

### 2.1 A desigualdade é um processo inevitável?

O artigo [12] apresenta uma das discussões que fundamentam nosso trabalho. Ele analisa o modelo de troca apresentado no **capítulo 1** e faz algumas considerações muito importantes. Usando o modelo de troca mais básico, onde os agentes negociam entre si e não existe nenhuma vantagem para nenhum dos agentes (modelo apresentado no tópico 1.1), chamado de *Yard Sale Model* ou modelo de venda de garagem, chegamos ao resultado de que após uma grande quantidade de transações, independentemente do número escolhido de agentes ou valor inicial da riqueza que cada um desses possui, teremos um caso em que uma fração muito pequena de agentes terá quase toda a riqueza de todos os agentes, o que é um fato a princípio muito surpreendente devido à simetria do sistema.

O que queremos é estudar o processo físico por de trás dessa quebra de simetria. Autores que estudam os processos de distribuição de renda associam isso ao fato que existe uma alta probabilidade de que os agentes mais pobres transfiram parte de sua renda para os agentes mais ricos, assim, esse modelo move a renda de um estrato social para outro, formando duas camadas sociais muito claras [11][12][13].

Além da existência desse processo físico, devemos entender que o *Yard Sale Model*, devido à sua simplicidade, não corresponde a um processo econômico realista. Assim, modelos com distribuição de riqueza são mais úteis para entendermos melhor a complexidade desses sistemas, e analisar posteriormente algumas *transições de fase* que ocorrem nestes. Discutiremos posteriormente com maiores detalhes.

## 2.2 Teoria do excedente (Surplus Theory)

Essa seção apresenta um ponto fundamental para nosso trabalho, uma teoria social que implica um processo estocástico chamado de "processo de desigualdade", que gera as distribuições de riqueza que iremos estudar a seguir. O principal artigo usado nessa parte do trabalho, é o artigo que fundamenta essa ideia, "*The surplus theory of social stratification and the size distribution of personal wealth*" de John Angle [14].

As distribuições de riqueza observadas ao longo do tempo, podem ser aproximadas por diversas funções de densidade conhecidas, como por exemplo a distribuição gama. A distribuição gama é dada pela expressão:

$$P(x) = (\beta^k \Gamma(k))^{-1} x^{k-1} e^{-x/\theta}. \quad (2.1)$$

A figura 14 apresenta o formato da curva de distribuição gama para diversos parâmetros.

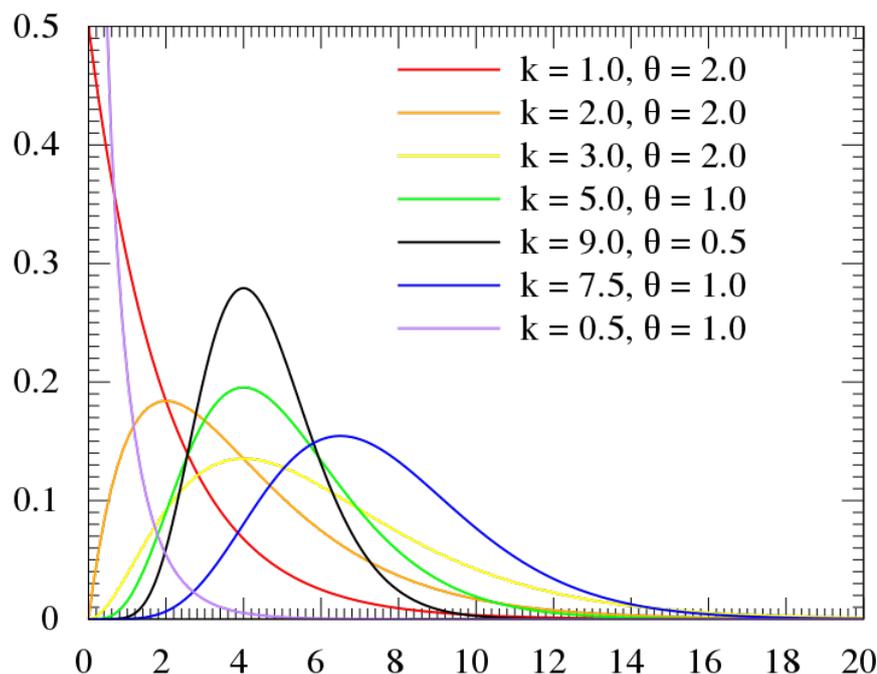


Figura 14 – Distribuição gama para diversos parâmetros  $k$  e  $\theta$ . Fonte: [https://pt.wikipedia.org/wiki/Distribuição\\_gama](https://pt.wikipedia.org/wiki/Distribuição_gama). Acessado em 02/10/2020.

O economista, sociólogo e cientista político Vilfredo Pareto (1848-1923), havia atentado para o fato de que mesmo as sociedades mais distantes no tempo, espaço ou cultura, apresentavam características semelhantes nas suas distribuições de riqueza, assim, poderíamos pensar que há um processo social/econômico comum entre todas essas sociedades [15]. A principal característica observada por Pareto foi que em todas as distri-

buições, a cauda direita dessas apresenta um comportamento semelhante, sendo chamadas de caudas de Pareto (*Pareto Tails*). Essas distribuições são descritas por uma expressão da forma:

$$P_{>}(W) \approx \left(\frac{W_0}{W}\right)^\mu. \quad (2.2)$$

Na equação 2.2,  $P_{>}(W)$  representa a probabilidade de encontrar um indivíduo com riqueza maior que  $W$ , e  $\mu$  é um fator amplamente estudado, onde alguns pesquisadores dizem ser aproximadamente 1,4 ou 1,5 dependendo das análises feitas. O importante é notar que diversas funções de densidade apresentam essas caudas, como por exemplo, as funções normal, lognormal, beta e gama. Um ponto a favor da distribuição lognormal é o fato de que essa distribuição pode ser gerada por um processo estocástico, no caso um processo de Markov da forma:

$$X(t) = X(t-1) + \eta, \quad (2.3)$$

com  $X(t-1) = \ln Y(t-1)$  e  $\eta$  tendo valor esperado igual a 0. Um fato observado é que funções de distribuição com mais parâmetros tem sido melhor aproveitadas nas tentativas de aproximação das distribuições, sendo as funções beta generalizada e a função gama as melhores escolhas. Vamos voltar um pouco e analisar a discussão do artigo [14] sobre como a desigualdade é gerada socialmente.

### 2.2.1 Teoria do excedente na estratificação social

Numa breve síntese, a estratificação social é um processo que separa os indivíduos em classes (estratos), porém o que nos interessa aqui é observar como a riqueza dos indivíduos de um sistema é distribuída. Nesse trabalho, não iremos discutir os efeitos sociais da estratificação, mas queremos entender como é criada e desigualdade. A teoria trabalha a partir de duas proposições:

- Definição 1: Subsistência é a riqueza necessária para manter vivos os produtores de riqueza e seus familiares, assim como assegurar os custos da produção;
- Definição 2: Excedente é a diferença entre subsistência e a riqueza produzida;
- Proposição 1: Considerando que os indivíduos são capazes de produzir excedentes, a maior parte desse excedente deixa de ser posse do produtor;
- Proposição 2: Riqueza garante à pessoa que a possui a habilidade de extrair riqueza dos outros indivíduos. Pessoas mais ricas tendem a extrair o excedente dos mais pobres;

- Proposição 3: Conforme a riqueza excedente é transferida do produtor, menos desse excedente fica disponível para transferência;
- Proposição 4: Sociedades industriais extraem menos excedente dos produtores do que sociedades mais primitivas.

A teoria assume que os produtores de riqueza se tornam com o tempo mais propícios a reter apenas o suficiente para a subsistência, e os indivíduos que extraem o excedente dos produtores, tendem a deixar para esses uma pequena, ou nenhuma, parte do excedente produzido. Se analisarmos a proposição 2, veremos que ela é uma definição quase que "matemática" de como a riqueza é transferida entre os indivíduos de um sistema. O trabalho faz uma extensa descrição social e política sobre a distribuição de renda e riqueza, mas aqui nos interessa estudar o algoritmo que expressa essas relações entre produtor de excedente e aquele que toma posse do excedente [14][16][17][18].

### 2.2.2 Processo de geração de desigualdade

É possível perceber analisando a teoria que há um processo matemático de transferência desse excedente, que chamaremos de processo de desigualdade. Vamos partir da proposição 1 e vamos avançando complementando o algoritmo com as outras proposições. A proposição 1 é o ponto de partida para a criação do nosso modelo estocástico. Consideremos apenas interações par a par, ou seja, cada indivíduo se encontra com um outro, escolhemos então um vencedor e um ganhador, onde o vencedor ganha uma parte do excedente do perdedor sem entregar partes de seu próprio excedente. Podemos analisar todas essas considerações pelas seguintes equações:

$$X_1(t) = X_1(t-1) + d UX_2(t-1) - (1-d) UX_1(t-1), \quad (2.4)$$

$$X_2(t) = X_2(t-1) + (1-d) UX_1(t-1) - d UX_2(t-1), \quad (2.5)$$

onde  $X_1$  e  $X_2$  são as riquezas dos agentes 1 e 2 da interação,  $d$  é uma variável que pode assumir os valores 0 e 1 com probabilidades 0.5, e  $U$  é uma variável continua do intervalo  $[0, 1]$ .

A proposição de número 2 nos permite fazer uma implementação interessante no algoritmo. Pessoas com mais riqueza tendem a estar mais propícias a retirar dinheiro das pessoas com menos riqueza, assim, a probabilidade  $d$  não seria apenas 0.5, mas um valor acima de 0.5 para o indivíduo mais rico. Vamos utilizar um valor fixo de 0.65 para essa probabilidade, assim, o indivíduo mais rico é mais capaz de retirar dinheiro do indivíduo

mais pobre.

Fazendo a comparação da simulação gerada apenas com a proposição número 1 e a simulação agregada com a proposição de número 2, não foi percebida uma diferença substancial no comportamento da distribuição gerada, apenas diferenças na escala. As figuras 15 e 16 mostram as diferenças nessas escalas. Ambas as simulações foram realizadas com os parâmetros  $N = 1000$ ,  $W_0 = 500$  e  $N_S = 500000$ , representando respectivamente o número de agentes na simulação, o valor inicial para a riqueza de cada agente e o número de encontros simulados.

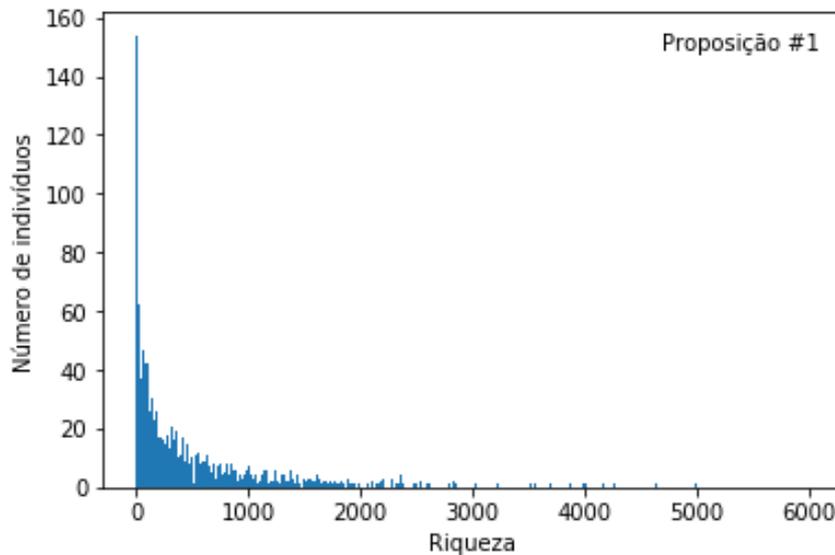


Figura 15 – Resultados para a simulação feita sobre a proposição de número 1.  $N = 1000$ ;  $W_0 = 500$ ;  $N_S = 500000$ .

Essas simulações são bastante simples e apresentam apenas o fato que aumentando a probabilidade de o agente mais rico extrair riqueza, o número de pessoas com riqueza próxima a zero aumenta consideravelmente.

Vamos agora acrescentar ao algoritmo a proposição de número 3. Essa consideração é mais sofisticada e afirma que o excedente deve ser visto como feito de camadas, e as camadas superiores estão mais expostas a perderem esse excedente num encontro de pares. Se temos por exemplo um sistema feito de  $L$  camadas, a porcentagem perdida no encontro seria a média de um série de potências de  $L$  termos em  $U$ , onde  $U$  é uma variável aleatória entre 0 e 1. O termo que expressa essa ideia é dado por:

$$Z = \sum_{i=1}^L \frac{U_i^i}{L}. \quad (2.6)$$

Existindo  $L$  camadas,  $U_i^i$  representa uma variável aleatória elevada a  $i$ , ou seja, a soma é

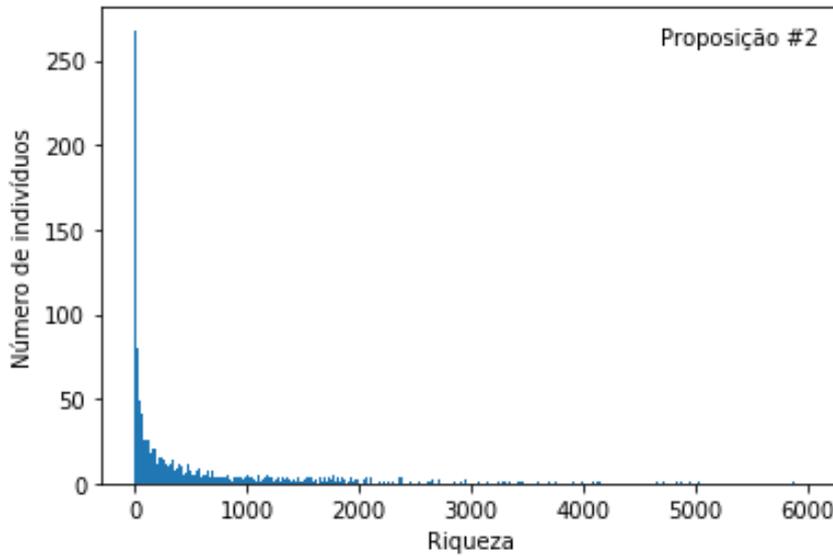


Figura 16 – Resultados para a simulação feita sobre a proposição de número 2.  $N = 1000$ ;  $W_0 = 500$ ;  $N_S = 500000$ .

feita da forma  $U_1^1 + U_2^2 + U_3^3 \dots$  até  $i = L$ . Temos então alterações nas equações 2.4 e 2.5 que as tornam da forma:

$$X_1(t) = X_1(t - 1) + d Z X_2(t - 1) - (1 - d) Z X_1(t - 1), \quad (2.7)$$

$$X_2(t) = X_2(t - 1) + (1 - d) Z X_1(t - 1) - d Z X_2(t - 1). \quad (2.8)$$

O termo  $Z$  está descrito em 2.6 e os outros termos permanecem como explicado anteriormente. O que percebemos durante a execução da simulação é que existe a necessidade de usar uma proporção razoável entre o número de indivíduos da simulação  $N$  e o número de camadas  $L$ . A figura 17 apresenta o comportamento dessa terceira simulação.

Podemos ver que a implementação da consideração número 3 transforma por completo o resultado das simulações, temos agora uma distribuição de riqueza semelhante às conhecidas empiricamente. Para atestar a eficiência do programa, vamos comparar dados reais da distribuição de renda domiciliar dos Estados Unidos, com os dados gerados pela simulação. A figura 18 mostra a distribuição de renda domiciliar dos Estados Unidos da América no ano de 2014, enquanto a figura 19 apresenta o histograma dos dados gerados pela simulação e seu ajuste por uma função de distribuição gama.

Comparando as duas figuras é possível notar que o programa apresentou resultados alinhados com o esperado e obtivemos sucesso ao comparar o modelo com dados empíricos, ao menos em uma análise do formato das curvas. A questão é entender de fato o que determina a **desigualdade** do sistema. Para criar a ideia de como analisar as

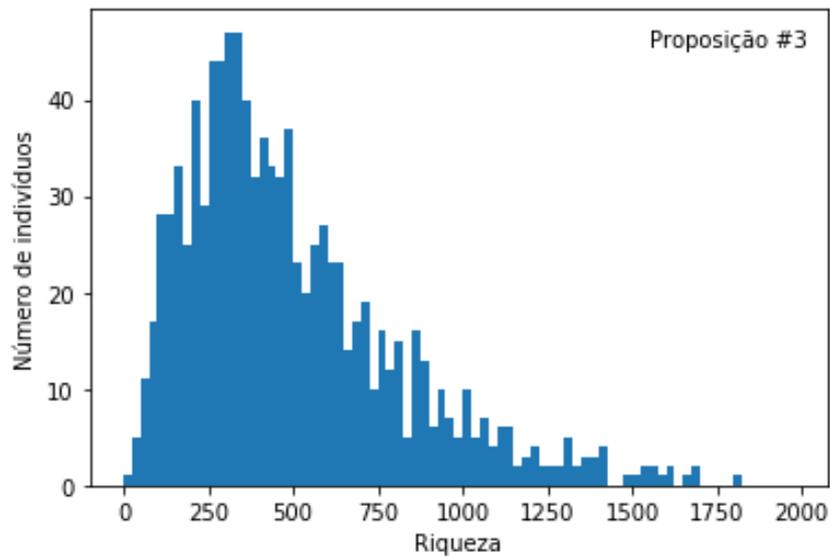


Figura 17 – Resultados para a simulação feita sobre a proposição de número 3.  $N = 1000$ ;  $W_0 = 500$ ;  $N_S = 500000$ .

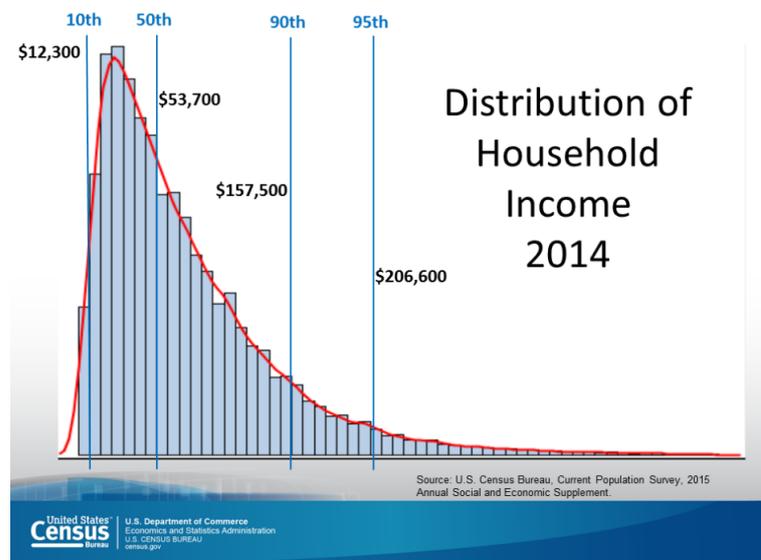


Figura 18 – Distribuição de renda domiciliar dos EUA no ano de 2014. Fonte: <https://www.census.gov/library/visualizations/2015/demo/distribution-of-household-income-2014.html>. Acessado em 27/09/2020.

desigualdades dos sistemas, precisamos poder comparar diferentes sistemas, assim como foi apresentado no capítulo anterior.

Vamos analisar as simulações para diferentes valores de  $\delta$ , ou seja, analisar as probabilidades do indivíduo mais rico extrair o excedente do mais pobre. A figura 20 mostra como ficaram as distribuições para diversos valores de  $\delta$ .

É possível perceber que mudanças no valor de  $\delta$  geram distribuições consideravelmente

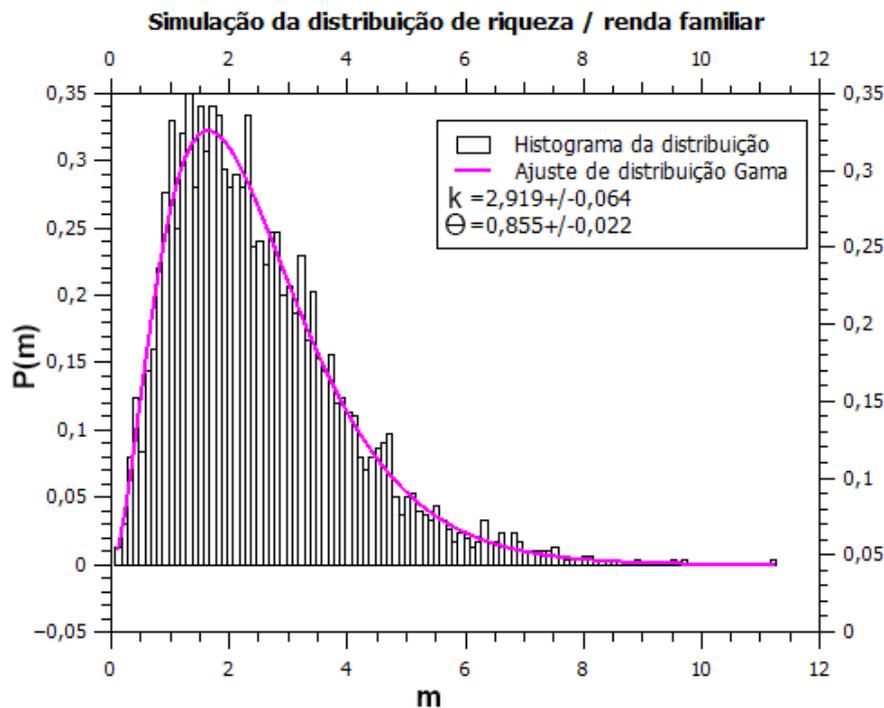


Figura 19 – Resultados para a simulação feita sobre a proposição de número 3 ajustada por distribuição gama.  $N = 3000$ ;  $W_0 = 500$ ;  $N_S = 500000$ ;  $L = 25$ ;  $\delta = 0.6$ .

diferentes. Para entender explicitamente qual dessas curvas representa o sistema com menor desigualdade, podemos analisar as distribuições acumuladas de cada caso.

Sabendo como funcionam as distribuições acumuladas, podemos apenas observando a figura 21 inferir que a distribuição em azul, referente a  $\delta = 0.4$  é a que gera a menor desigualdade, pois apresenta a menor probabilidade de encontrar um agente com uma renda baixa. Podemos também fazer a análise comparando os valores de  $\alpha$  das distribuições.

### 2.2.3 Discussões sobre a teoria do excedente

Os resultados obtidos até esse ponto do trabalho são satisfatórios e condizem com o exposto na literatura. A teoria do excedente fornece um arcabouço técnico/teórico amplo para a maioria dos tópicos abordados nesse trabalho, mas falha em não apresentar minimamente uma estrutura que estude o fenômeno da transição de um sistema em estado mais desigual para um menos desigual, ou seja a condensação da renda. Apesar das análises mostrarem a condensação dessa riqueza relacionada com o valor de  $\delta$ , apenas a existência desse parâmetro, ainda mais considerando um modelo com tantas abstrações, não é o suficiente para caracterizar com qualidade transições de fase nesses sistemas. Uma das propostas desse trabalho é exatamente estudar como funcionam essas transições, que

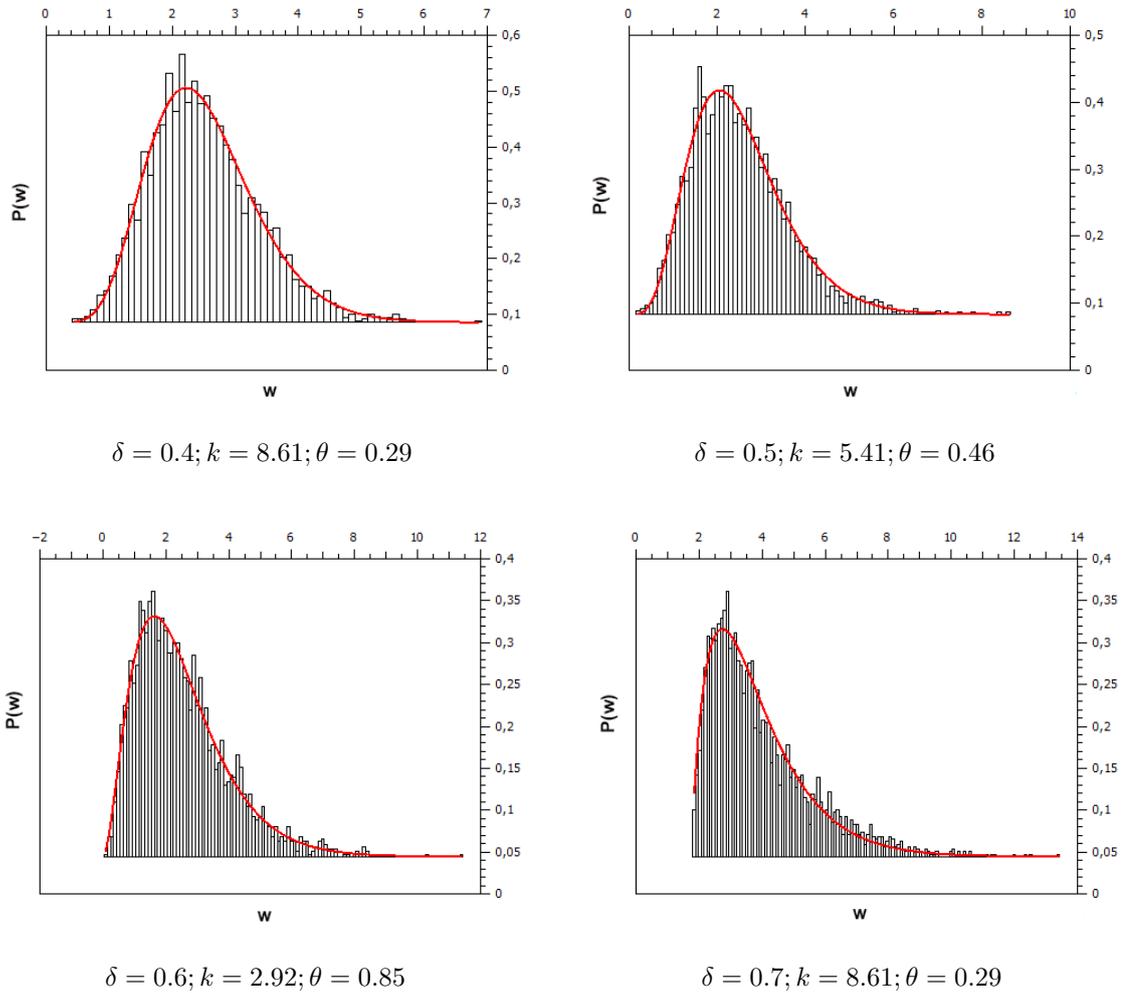


Figura 20 – Simulações para diversos valores de  $\delta$ . Os parâmetros  $k$  e  $\theta$  do ajuste por distribuição gama estão descritos nas figuras. Nas figuras,  $P(w)$  representa a probabilidade de se encontrar um agente com riqueza  $w$ .

serão discutidas nos capítulos a seguir, com maior riqueza de detalhes.

É importante pontuar que alguns modelos termodinâmicos surgem pelo descrédito de físicos e economistas em modelos estocásticos [19], onde existem tantas abstrações e simplificações que no fim esses modelos se tornam simplórios demais. A resposta para esses problemas, na forma de uma teoria que não se preocupa com as interações individuais dos agentes, e sim com a estrutura macroscópica dos agentes. Essa parece ser uma boa solução para os problemas que surgem a partir dessas abstrações, pois estudar esses modelos como se fossem estruturas termodinâmicas nos dá a possibilidade de entender seu comportamento a partir de variáveis globais do sistema [20][19][21]

Quando estudamos áreas da ciência como física e economia, algumas similaridades matemáticas entre essas duas disciplinas aparecem, nos levando a tentar fazer analogias entre

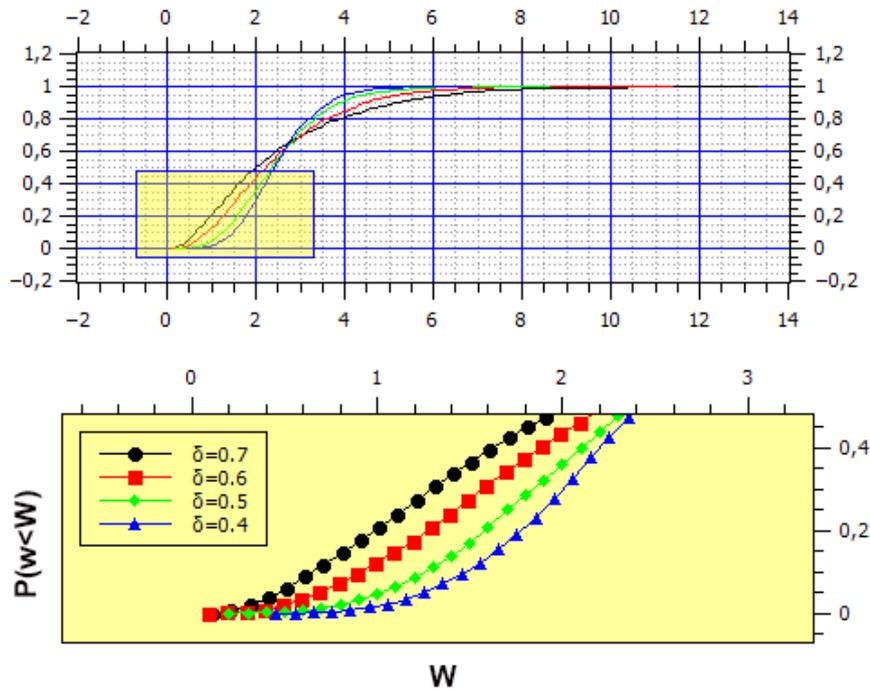


Figura 21 – Distribuições acumuladas referentes às distribuições presentes na figura 20.

seus fenômenos. Podemos descrever as propriedades dos sistemas como sendo extensivas e intensivas. Propriedades extensivas tem seu valor proporcional ao tamanho do sistema, propriedades intensivas não dependem do tamanho do sistema. Na física, quando estamos tratando de sistemas que não estão em equilíbrio, buscamos descrever a situação em que, existe o fluxo de uma grandeza que foi gerado pela diferença nas quantidades de outra grandeza. Por exemplo, sistemas em contato e com diferentes temperaturas, geram um fluxo de calor, no intuito de fazer o sistema caminhar ao equilíbrio. Uma das analogias que podem ser feitas na economia, é a de que a diferença de preços gera um fluxo de demanda por bens de consumo, ou serviços ou mão de obra e etc. Na termodinâmica, temos a existência de parâmetros extensivos, que dependem do tamanho do sistema (volume, massa, energia) e parâmetros intensivos, que não dependem do tamanho do sistema (temperatura, pressão), vamos definir quais seriam esses parâmetros em um sistema econômico.

O artigo *Energy theory of periodic economic growth* trata da diferença de preços como válvulas que são abertas ou fechadas com o intuito de gerar fluxo, o que a princípio faz sentido se pensarmos que reduções gerais de preços aumentam a demanda, gerando a ampliação da procura dos agentes por bens e serviços. Ao longo da história da humanidade, as melhorias tecnológicas trouxeram consigo ainda mais consumo do combustível necessário para o desenvolvimento humano, não a redução. O autor do texto usa esse argumento para expressar o papel do dinheiro na humanidade como facilitador no fluxo de bens e serviços. Assim como melhorias tecnológicas tendem a facilitar o fluxo das mer-

cadorias, a evolução do papel da moeda cumpre uma tarefa semelhante. O artigo [12] propõe uma alteração no *Yard Sale Model* para que esse se torne mais de acordo com a realidade. A proposta é que o modelo inclua também a **redistribuição de riqueza** entre os indivíduos, gerando assim, transições de fase no sistema que podem ser verificadas se tivermos ferramentas para determinar a desigualdade deste.

Vamos apresentar nos próximos capítulos os métodos e ferramentas que serão utilizados nesse trabalho para verificar como esses sistemas econômicos mudam de um estado mais desigual para um menos desigual.



## Parte III

# Condensação da riqueza por processos estocásticos



## 3 Condensação da riqueza por processos estocásticos

### 3.1 Processos Estocásticos

A maioria dos observáveis físicos acessíveis a medições experimentais (compreende) muitos componentes: partículas ou átomos. Acontece que, para entender o resultado dos experimentos de medição e reivindicar sua previsibilidade, não é possível nem razoável seguir o movimento de todos esses constituintes. Em vez disso, usamos o conceito de desvios do resultado esperado. Da mesma forma, o movimento errático do pólen em suspensão aquosa é o resultado de muitas colisões com as moléculas do solvente [22][23]. A agitação (o deslocamento em ziguezague) das moléculas de pólen observadas e as mudanças abruptas de velocidades no curso de seu movimento resultam dessas colisões alimentadas por ruído térmico [24, 25, 26, 27, 28, 29]. Este é o ruído térmico que força o movimento e causa distúrbios observáveis de trajetórias; a mesma fonte de flutuações fornece energia para motores moleculares [30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39], potencializa caminhos reativos químicos [40] e pode amplificar o sinal no fenômeno de ressonância estocástica [41, 42], e crescimento [43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53]. As implicações das flutuações são cruciais em muitas áreas das ciências naturais, desde sistemas microscópicos e biologia molecular até ecologia, modelos de mercados financeiros [54], análise de contatos sociais [55] e dinâmica climática [56].

### 3.2 Equação de Langevin

Embora a ideia de processos estocásticos já estivesse contida nos trabalhos originais de Boltzmann e Einstein, Langevin explicitou essa nova era na física considerando a equação de movimento para uma partícula se movendo em um fluido como [24]:

$$m \frac{dv(t)}{dt} = -m\gamma v(t) + f(t), \quad (3.1)$$

onde  $m$  e  $\gamma$  são respectivamente a massa da partícula e o atrito. A proposta engenhosa e elegante foi de modular as interações complexas entre as partículas, considerando todas as interações como duas forças principais. A primeira contribuição representa uma força de atrito,  $-m\gamma v$ , onde a escala de tempo característica é  $\tau = \gamma^{-1}$  enquanto a segunda contribuição vem de uma força estocástica,  $f(t)$ , com escala de tempo  $\Delta t \ll \tau$ , que está relacionada com as colisões aleatórias entre a partícula e as moléculas do fluido. A força flutuante  $f(t)$ , na Eq. (3.1), obedece às seguintes condições: (i) a força média devido às

colisões aleatórias na partícula é zero

$$\langle f(t) \rangle = 0, \quad (3.2)$$

(ii) não há correlação entre a velocidade inicial da partícula e a força aleatória

$$\langle f(t)v(0) \rangle = 0, \quad (3.3)$$

e (iii) a força aleatória em momentos diferentes  $t$  e  $t'$  não são correlacionados

$$\langle f(t)f(t') \rangle = \sigma\delta(t - t'), \quad (3.4)$$

sendo  $\sigma$  uma constante a ser determinada. A equação acima é conhecida como processo gaussiano ou também chamado de ruído branco. Para entender as propriedades dinâmicas de uma partícula que obedece à equação de movimento (3.1) e as condições (3.2) to (3.4), começamos com o seguinte solução:

$$v(t) = v(0) + \int_0^t \exp[-\gamma(t - t')]f(t')dt'. \quad (3.5)$$

Depois de um longo tempo o sistema atinge o equilíbrio, o que significa que

$$\langle v^2(t \rightarrow \infty) \rangle = \langle v^2 \rangle_{eq} = k_B T/m. \quad (3.6)$$

(ou seja, o teorema da equipartição). Em seguida, usamos as condições acima para obter  $\sigma = 2m\gamma k_B T$  e reescrever a Eq. (3.4) como

$$\langle f(t)f(t') \rangle = 2m\gamma k_B T\delta(t - t'). \quad (3.7)$$

Essa última relação é o teorema de flutuação-dissipação (TFD). A bela e simples abordagem de Langevin nos ajuda a lidar com muitas situações na física. Ele nos permite fazer alguns cálculos analíticos para alguns modelos simplificados e até mesmo obter alguns limites para sistemas mais complexos. Também é fácil realizar experimentos de computador dentro de sua estrutura. Portanto, a equação de Langevin e sua formulação quântica [57, 58], com o conceito de campos flutuantes, abriu um amplo ramo de investigações em muitos sistemas, como espalhamento de luz [59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66], espalhamento de nêutrons em metais líquidos [67, 68], dinâmica de cadeia polimérica [69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78], motores moleculares [38, 79, 80], condutividade [81, 82], teoria de taxas de reação [83, 84, 85, 86, 87], e sincronização [88, 89, 90, 91, 92, 93]. O uso de conceitos de difusão encontra muitas aplicações na ciência, por exemplo, na entrega controlada de medicamentos, o bom entendimento dos mecanismos de liberação de medicamentos, bem como os tempos de liberação característicos, é uma necessidade [94, 95, 96, 97, 98, 99, 100, 101]. Todos esses fenômenos, no entanto, são alguma forma do amplo, realmente amplo campo de difusão anômala [31, 37, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 109, 110, 111, 112, 113, 114].

Os dois termos do lado direito da Eq. (3.1) atuam como um reservatório de calor. Assim, após o sistema atingir o equilíbrio, o TFD garante alguma forma de conservação de energia. I.e. pequenas flutuações em torno do valor médio da energia.

A violação do TFD é bem conhecida na literatura, em vidros [115, 116, 117, 118, 119], proteínas [120], na transferência de calor radioativo mesoscópico [121, 122], e também na difusão balística [9, 104, 123, 124]. Para uma revisão sobre processos estóásticos ver [125, 126].

A inexistência de um TFD na economia, faz com que tenhamos que postular a conservação de riquezas nos modelos aqui apresentados. Podemos dizer que os processos de troca são mais rápidos que o crescimento da economia, ou por outro lado, podemos dizer que estamos falando na parcela que cada grupo tem do total.

### 3.3 Condensação de riquezas por processos Estóásticos

A condensação da riqueza é o processo em que a maior parte da riqueza de um sistema está em posse de um estrato específico, em resumo, é o caso em que um pequeno grupo de indivíduos, uma oligarquia, possui quase toda a riqueza de uma economia. A proposta de nosso trabalho é verificar quais processos geram uma transição de fase nesse sistema, levando a diminuição dessa condensação, gerando uma renda mais bem distribuída.

Precisamos antes estudar os fundamentos da dinâmica estocástica e principalmente, entender a fundo como funciona a equação de Fokker-Planck.

#### 3.3.1 Lema de Itô

O caso que queremos estudar é um pouco mais complexo, pois buscamos considerar a equação de Langevin em uma forma mais geral. Podemos descrever essa forma generalizada como:

$$dx(t) = \mu(x(t), t)dt + \sigma(x(t), t)dB(t). \quad (3.8)$$

Os coeficientes  $\mu(x(t), t)$  e  $\sigma(x(t), t)$  na equação 3.8 são chamados respectivamente coeficiente de *drift* e difusão (*drift coefficient*, *diffusion coefficient*). O termo  $dB(t)$  representa o um intervalo infinitesimal de um processo aleatório  $B(t)$  e esse intervalo também é um processo aleatório, um ruído branco. Para fazer a dedução da equação de Fokker-Planck associada à equação 3.8, é preciso primeiro apresentar o conceito do lema de Itô. Va-

mos considerar que exista um processo estocástico  $x(t)$ , onde sua diferencial pode ser representada pela equação

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_N) + \eta_i(t). \quad (3.9)$$

Uma função desse processo estocástico também é um processo estocástico, assim, caso exista uma função da forma  $F(x(t), t)$ , podemos fazer algumas considerações interessantes.

Façamos a expansão em série de Taylor da função  $F(x(t), t)$ :

$$dF = \frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} (dx)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} (dt)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial x} dt dx + \dots \quad (3.10)$$

onde queremos apenas os termos até a segunda ordem. Nessa equação, o termo  $dx^2$  é dado pelo quadrado da expressão 3.8

$$\mu^2(dt^2) + 2\mu\sigma(dt dB) + \sigma^2(dB^2). \quad (3.11)$$

Iremos desconsiderar os termos  $(dt)^2$  e  $dt dx$  por serem termos de ordem maior em  $dt$ . O termo quadrático em  $dB$  respeita a igualdade  $dB^2 = dt$ . Assim, a equação se torna

$$dF = \left( \frac{\partial F}{\partial t} + \mu(x(t), t) \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2(x(t), t) \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right) dt + \sigma^2(x(t), t) \frac{\partial F}{\partial x} dB. \quad (3.12)$$

Caso a função  $F(x(t), t)$  não possua uma dependência explícita em  $t$ , podemos desconsiderar o primeiro termo do lado direito em 3.12. Na intenção de demonstrar exemplos mais relevantes sobre esses métodos, vamos estudar um processo estocástico fundamental na área de finanças, um processo onde a variável estocástica representa um movimento Browniano geométrico. A equação diferencial estocástica que descreve esse comportamento é:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW. \quad (3.13)$$

Nessa equação, os coeficientes de *drift* e difusão ( $\mu$ ,  $\sigma$ ) são constantes, assim, é possível apresentar facilmente uma solução analítica para essa equação diferencial. Vamos fazer a mudança de variáveis  $Z = \ln S$ , e aplicando na formula de Itô onde  $F(S) = \ln S$ , teremos a seguinte expressão

$$d(\ln S) = \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dW. \quad (3.14)$$

A integração dessa equação nos dá a seguinte expressão

$$F(S) = F(S_0) + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(t - t_0) + \sigma(W(t) - W(t_0)). \quad (3.15)$$

Aplicando a função exponencial dos dois lados da equação 3.15, chegamos à solução de 3.13:

$$S(t) = S_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(t - t_0) + \sigma(W(t) - W(t_0))\right), \quad (3.16)$$

em que  $W(t) - W(t_0)$  é uma variável aleatória de ruído branco, responsável pela aleatoriedade do processo. Essa solução é usada na econofísica na importante dedução da formula de Black-Scholes, que é um modelo matemático para o estudo de derivativos em mercados de finanças. Um simples algoritmo computacional pode ser usado para descrever a evolução temporal de um sistema financeiro, abstraindo ainda mais, podemos usar a solução anterior para gerar possíveis caminhos para preços de ações no tempo [127]. A figura 22 apresenta uma aplicação para a equação 3.16. Foram feitas algumas simulações da evolução do preço de uma ação no tempo, todas as simulações começando no mesmo valor  $S_0 = 50$ .

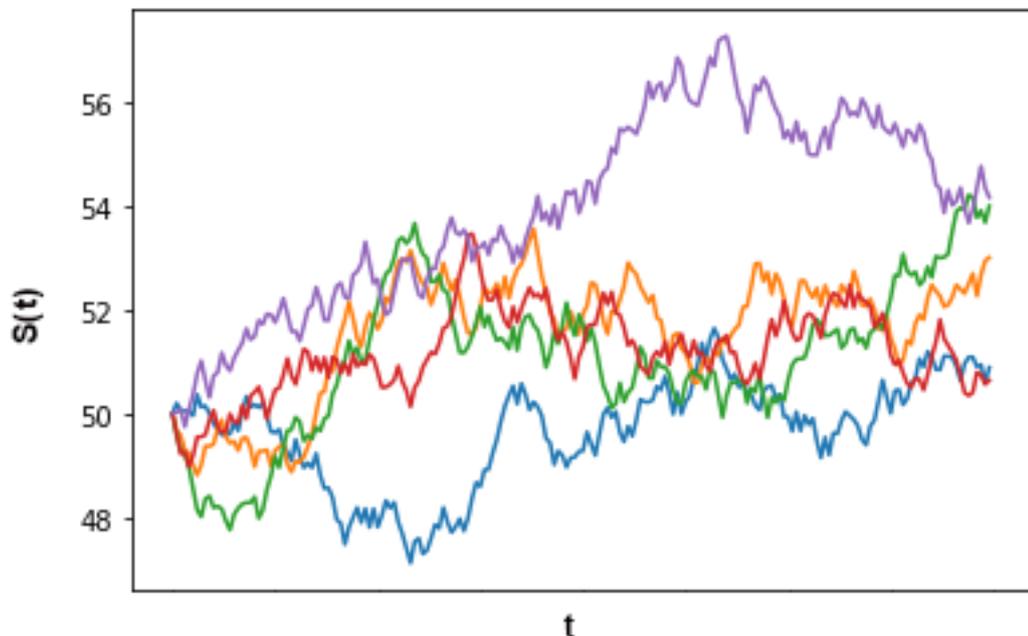


Figura 22 – Caminhos possíveis para o preço de uma ação no tempo. Os caminhos foram gerados a partir de um programa e o preço inicial da ação  $S_0$  é igual a  $50u.m$  em todas as simulações.

A fim de apresentar expressões mais adequadas à proposta do trabalho, ou seja, fórmulas matemáticas que nos auxiliem na avaliação de distribuições estatísticas, vamos unir as

discussões sobre processos estocásticos com uma famosa equação da física, a equação diferencial de Fokker-Planck.

### 3.4 Equação de Fokker-Planck

Equações diferenciais estocásticas compõem um setor da matemática bastante sofisticado, e em geral, quando tratam de variáveis aleatórias, elas não precisam ser totalmente independentes como discutimos anteriormente em nossas deduções. A equação diferencial de Fokker-Planck [128] pode ser apresentada das mais diversas formas, e surge a partir de várias deduções e conceitos matemáticos, como por exemplo, um caso particular da equação de Chapman-Kolmogorov e dos coeficientes de Kramers-Moyal [129]. O trabalho a ser feito, em geral, é deduzir a equação de Fokker-Planck associada a cada equação diferencial estocástica, e em nosso caso, iremos estudar a equação associada a 3.13.

Para uma equação de Langevin da forma

$$dX(t) = \mu(X(t), t)dt + \sigma(X(t), t)dB(t), \quad (3.17)$$

vamos considerar a expansão de uma função  $F$  apresentada no lema de Itô, ou seja

$$dF = \left( \frac{\partial F}{\partial t} + \mu(x(t), t) \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2(x(t), t) \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right) dt + \sigma^2(x(t), t) \frac{\partial F}{\partial x} dB, \quad (3.18)$$

que já foi discutida anteriormente em 3.12. Vamos tomar o valor esperado dessa equação, ou seja

$$\langle dF \rangle = \left\langle \left( \frac{\partial F}{\partial t} + \mu(x(t), t) \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2(x(t), t) \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right) dt + \sigma^2(x(t), t) \frac{\partial F}{\partial x} dB \right\rangle. \quad (3.19)$$

A derivada parcial de  $F$  em relação ao tempo será nula, pois estamos considerando que essa função arbitrária tem dependência implícita. O termo que contém o fator  $dB$  tem valor esperado igual a zero, assim, podemos também descartá-lo de nossa expressão. O valor esperado para uma função  $F$  pode ser descrito a partir de uma integral que envolve a função densidade de probabilidade associada à variável, assim, podemos escrever:

$$\langle f \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) p(x, t) dx, \quad (3.20)$$

ou seja, reescrevemos 3.19 na forma

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} F(x) p(x, t) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \mu F'(x) p(x, t) dx + \int_{-\infty}^{\infty} \sigma^2 F(x)'' p(x, t) dx. \quad (3.21)$$

Fazendo a simples integração por partes dos termos em 3.21 e considerando que a densidade de probabilidade nos extremos é zero, vamos obter

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} F(x)p(x,t)dx = - \int_{-\infty}^{\infty} F(x) \frac{\partial}{\partial x} (\mu(x,t)p(x,t)) + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} F(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma^2(x,t)p(x,t)) dx. \quad (3.22)$$

Como a função  $F(x)$  é uma função arbitrária, podemos reescrever 3.22 da forma:

$$\frac{\partial}{\partial t} p(x,t) = - \frac{\partial}{\partial x} (\mu(x,t)p(x,t)) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma^2(x,t)p(x,t)). \quad (3.23)$$

A equação 3.23 é a equação de Fokker-Planck associada à equação diferencial estocástica 3.8. Essa é a equação que usaremos para resolver a maior parte dos problemas propostos nesse trabalho. Em geral, para deduzirmos a equação de Fokker-Planck para os casos mais gerais possíveis, é necessária uma discussão matemática mais elaborada, porém, para a nossa proposta, a equação 3.23 será o suficiente para a maioria dos casos. Para demonstrar o uso dessa equação, vamos a partir dela chegar nas distribuições mais relevantes para nossos estudos.

#### 3.4.0.1 Caso estacionário da equação de Fokker-Planck

Separamos essa pequena seção para discutirmos uma maneira simples de se obter a solução estacionária para a equação de Fokker-Planck. Se integrarmos o lado esquerdo da equação 3.23, temos

$$\frac{d}{dt} \int_a^b p(x,t) dx = \frac{d}{dt} (p(b,t) - p(a,t)). \quad (3.24)$$

Estamos considerando porém, casos onde a densidade de probabilidade  $p(x,t)$  seja sempre normalizada, ou seja

$$\int_b^a p(x,t) dx = 1, \quad (3.25)$$

então, a equação 3.24 deve se anular. A conservação da probabilidade total é consequência das condições de contorno e também da equação de Fokker-Planck. Em suma, quando consideramos o regime estacionário, estamos analisando o caso em que passado tempo suficiente, a densidade de probabilidade será independente do tempo. As análises feitas anteriormente por simulações computacionais, mostram que a distribuição tende a se estabilizar após certo período de tempo, então, o caso estacionário da equação de Fokker-Planck trata exatamente da situação em que temos uma distribuição de probabilidades estável.

### 3.4.1 Distribuição de Boltzmann-Gibbs a partir da equação de Fokker-Planck

Vamos supor a solução **estacionária** da equação de Fokker-Planck associada à equação 3.8, ou seja, queremos resolver uma equação da forma

$$-\mu(x, t)p(x, t) + \frac{\partial}{\partial x}(\sigma^2 p(x, t)) = 0. \quad (3.26)$$

Fazendo a derivada do produto e arrumando os termos

$$2\sigma \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \sigma^2 \frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial x} = \mu, \quad (3.27)$$

separando as variáveis novamente, e fazendo as devidas integrações

$$\int \left( \frac{\mu}{\sigma^2} - \frac{2}{\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right) dx = \int \frac{\partial p}{p}. \quad (3.28)$$

Assim, chegaremos na seguinte expressão

$$p(x, t) = c \exp \left( \int_0^x \left( \frac{\mu}{\sigma^2} - \frac{2}{\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right) dx' \right). \quad (3.29)$$

Se considerarmos que  $\mu$  e  $\sigma$  são constantes, e fazendo um substituição simples, a equação 3.29 já teria a forma da distribuição de Boltzmann-Gibbs. Vamos antes estudar qual seria a forma da equação diferencial estocástica que satisfaz essa condição. Tomando como constantes os termos de *drift* e difusão, e fazendo  $\sigma = 1$ , teríamos uma equação diferencial estocástica da forma:

$$\frac{dx}{dt} = \mu + \eta(t). \quad (3.30)$$

Como vimos anteriormente, a distribuição de Boltzmann-Gibbs gerada pela a simulação computacional parte de uma delta de Dirac, se tornando uma gaussiana, e com o passar do tempo se torna uma distribuição de decaimento exponencial. Para verificarmos analiticamente esse comportamento, podemos resolver a equação 3.23 para o caso não estacionário, e com a condição inicial  $p(x, 0) = \delta(x)$ .

A solução da equação 3.23 é da forma

$$p(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp \left( -\frac{(x - ct)^2}{2t} \right), \quad (3.31)$$

ou seja, a partir do estudo das equações diferenciais estocásticas, e da equação de Fokker-Planck, podemos verificar analiticamente o comportamento da curva de distribuição. O

objetivo de descrever todas essas análises sobre as curvas de distribuição, é entender também de um ponto de vista técnico, desligado de conceitos econômicos, os aspectos estruturais dessa parte de nosso trabalho. Vamos observar que a criação de uma equação diferencial estocástica, ou seja, a compreensão de como se constroi a dinâmica aleatória de um sistema, gera como resposta uma distribuição que pode ser analisada pela equação de Fokker-Planck.

Nesse ponto, podemos construir uma equação dinâmica para o sistema, tal qual fazemos no estudo de sistemas físicos, e associar uma equação de Fokker-Planck a essa. O próximo exemplo elucidará melhor nossas ideias.

### 3.5 Efeitos da redistribuição da renda no modelo de troca de capitais

Vamos então escrever uma equação diferencial estocástica, que associada à uma equação de Fokker-Planck, gera uma distribuição de riquezas semelhante à apresentada anteriormente como sendo uma distribuição similar à distribuição gamma. Essa seria uma forma mais clara de como podemos escrever os modelos de troca de capitais, e entender as distribuições resultantes.

Bruce M. Boghosian escreve em [12] que um modelo de troca entre agentes gera a situação em que a maior parte da riqueza está concentrada em poucos agentes, uma espécie de **oligarquia**, e que modelos com redistribuição da renda servem para expressar com maior clareza, ou seja, apresentar a situação de um mundo mais coerente com a realidade. Assim, queremos trabalhar aqui apenas o caso em que há uma redistribuição de renda em nosso sistema. Fazendo um resumo do problema, analisar um modelo de trocas de capitais sem considerar a redistribuição de renda, não é algo que se aproxime da realidade, assim, vamos considerar um modelo com redistribuição.

Como descrito por Pareto em [15], a fração de agentes com riqueza maior do que  $w$  pode ser descrito como:

$$A(w, t) := \frac{1}{N} \int_w^\infty P(x, t) dx, \quad (3.32)$$

que é uma forma de uma função distribuição acumulada (normalizada) para  $P(w, t)$ , onde  $A(0) \approx 1$  no caso estacionário, ou seja, quando muito tempo se passa. Vamos também

definir o potencial de Pareto  $B(w, t)$ , dado por

$$B(w, t) := \frac{1}{N} \int_0^w P(x, t) \frac{x^2}{2} dx, \quad (3.33)$$

onde  $B(0) \approx 1$ . Em nosso modelo, temos um par de agentes escolhidos em cada etapa e que realizam uma transação com seus capitais. Escolhemos um agente com renda  $\bar{w}$  para negociar com outro agente com renda  $\bar{x}$ .

Durante essa transação a nova riqueza do agente  $\bar{w}$  será descrita por:

$$w = \bar{w} + \Delta w. \quad (3.34)$$

Na equação 3.34 o termo  $\Delta w$  é escrito da seguinte forma

$$\Delta w = \sqrt{\gamma \Delta t} \min(\bar{w}, \bar{x}) \eta, \quad (3.35)$$

$$\beta = \sqrt{\gamma \Delta t}. \quad (3.36)$$

Na equação 3.35 o termo  $\Delta t$  está relacionado ao tempo discreto de cada interação, e será usado com mais detalhes posteriormente.

Como nossa simulação prevê uma negociação em que existe necessariamente um perdedor, o fator  $\eta$  é responsável por essa escolha. Como ambos os agentes tem a mesma chance de serem escolhidos, temos que o valor esperado de  $\eta$  é dado por:

$$E[\eta] = 0, \quad (3.37)$$

assim como

$$E[\eta^2] = 1. \quad (3.38)$$

Se temos uma função  $f(\eta, \bar{x})$ , que depende dessas variáveis em um tempo  $t$ , podemos definir o valor esperado no tempo a partir da média  $E[f(\eta, \bar{x})]$ :

$$\varepsilon[f] = \frac{1}{N} \int_0^\infty d\bar{x} P(\bar{x}, t) E[f(\eta, \bar{x})]. \quad (3.39)$$

Seguindo o artigo "Oligarchy as a phase transition", vamos computar o coeficiente de *drift* como:

$$\sigma = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \varepsilon \left[ \frac{\Delta w}{\Delta t} \right] = 0, \quad (3.40)$$

assim, o coeficiente de *drift* é igual zero. Já o coeficiente de difusão:

$$D = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \varepsilon \left[ \frac{(\Delta w)^2}{\Delta t} \right]. \quad (3.41)$$

Dadas as expressões:

$$(\Delta w)^2 = \gamma \Delta t \min(w, x)^2 \eta^2, \quad (3.42)$$

$$\varepsilon[\gamma \min(w, x)^2 \eta^2] = \gamma \min(w, x)^2, \quad (3.43)$$

assim,

$$D = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \varepsilon \left[ \frac{(\Delta w)^2}{\Delta t} \right] = \frac{\gamma}{N} \int_0^\infty dx P(x, t) [\min(w, x)^2]. \quad (3.44)$$

Vamos reescrever a equação 3.44 da seguinte forma:

$$\frac{\gamma}{N} \int_0^\infty dx P(x, t) [\min(w, x)^2] = \frac{\gamma}{N} \int_0^{w'} dx P(x, t) [\min(w, x)^2] + \frac{\gamma}{N} \int_{w'}^\infty dx P(x, t) [\min(w, x)^2]. \quad (3.45)$$

Se tomarmos  $w$  como sendo o  $\min(w, x)$ :

$$\frac{\gamma}{N} \int_0^\infty dx P(x, t) [\min(w, x)^2] = \frac{\gamma}{N} \int_0^{w'} dx P(x, t) w^2 + \frac{\gamma}{N} \int_{w'}^\infty dx P(x, t) w^2, \quad (3.46)$$

$$= \frac{\gamma}{N} \int_0^{w'} dx P(x, t) w^2 + \frac{\gamma}{N} \int_{w'}^\infty dx P(x, t) w^2, \quad (3.47)$$

$$D = 2\gamma \left[ B(w, t) + \frac{w^2}{2} A(w, t) \right] = 2\gamma \left[ B + \frac{w^2}{2} A \right]. \quad (3.48)$$

Usando os coeficientes  $\sigma = 0$  e  $D = 2\gamma \left[ B + \frac{w^2}{2} A \right]$ , computamos a equação de Fokker-Planck da forma:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial w}(\sigma P) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial w^2}(DP). \quad (3.49)$$

A equação anterior, alimentada das expressões para  $\sigma$  e  $D$ , gera a seguinte expressão:

$$\boxed{\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial w^2} \left[ \gamma \left( B + \frac{w^2}{2} A \right) P \right]} \quad (3.50)$$

A equação 3.50 representa um processo estocástico onde uma riqueza  $w$  é transferida entre agentes em uma economia que não trabalha a redistribuição de renda, ou seja, precisamos ainda implementar nosso sistema para estudar o caso em que há redistribuição de renda [130],[131],[132],[133].

Seguindo o que é apresentado no artigo [13], vamos estudar um modelo que imponha taxas sobre os agentes e faça a redistribuição baseada no montante total que foi taxado de todos os agentes. O modelo se baseia em aplicar uma taxa  $\tau$  em cada agente e em seguida parcelamos o montante total que foi taxado de todos esses agentes em  $N$  parcelas iguais, distribuindo para todos os  $N$  agentes. O total taxado por unidade de tempo de um agente com riqueza  $\bar{w}$  é  $(\tau\Delta t)\bar{w}$ , assim, o total taxado de **todos** os agentes por unidade de tempo é  $(\tau\Delta t)W$ , e uma quantia  $(\tau\Delta t)W/N$  retorna a cada agente por unidade de tempo.

Vamos então fazer um resumo do sistema que estamos estudando. Com a redistribuição de renda, o processo se torna:

- Os agentes trocam riqueza numa interação de pares. A variação de uma riqueza  $\bar{w}$  é dada por  $\Delta w = \sqrt{\gamma\Delta t} \min(\bar{w}, \bar{x})\eta$ , como discutimos anteriormente;
- Nesse novo modelo com redistribuição, os agentes são taxados proporcionalmente à sua riqueza e também recebem uma quantia referente a redistribuição da riqueza;
- Como todos os agentes são taxados proporcionalmente às suas riquezas, indivíduos com maior riqueza irão ser taxados numa quantia maior, e contribuirão mais no montante total taxado de todos os indivíduos;
- A ideia principal de se estudar esse modelo, é verificar se o mesmo nos apresenta uma maneira adequada de se analisar a redução das desigualdades.

A variação da riqueza  $\bar{w}$  de um agente devido à redistribuição de renda é:

$$(\Delta w)' = (\tau \Delta t) \frac{W}{N} - (\tau \Delta t) \bar{w}, \quad (3.51)$$

assim, considerando os efeitos da redistribuição, a equação 3.35 se torna:

$$\Delta w = (\tau \Delta t) \frac{W}{N} - (\tau \Delta t) \bar{w} + \Delta w = \sqrt{\gamma \Delta t} \min(\bar{w}, \bar{x}) \eta. \quad (3.52)$$

A equação 3.52 mostra que agora a renda de um indivíduo não depende mais apenas das negociações dele com os outros agentes, mas agora também, de um sistema de redistribuição de renda que atinge todos os envolvidos nessa economia. Esse modelo funciona como um exemplo simples de como atuaria um agente controlador do sistema, como por exemplo, o governo de um país. O termo de *drift* do sistema agora não é mais igual a zero e se torna

$$\sigma = \tau \left( \frac{W}{N} - w \right). \quad (3.53)$$

O termo de difusão  $D$  permanece inalterado.

A equação de Fokker-Plack que representa o novo processo é

$$\boxed{\frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial w} \left[ \tau \left( \frac{W}{N} - w \right) P \right] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial w^2} \left[ \gamma \left( B + \frac{w^2}{2} A \right) P \right]} \quad (3.54)$$

A equação 3.54 é do tipo integrodiferencial, e não há uma solução analítica simples mesmo para o caso estacionário. Vamos estudar uma forma de encontrar uma solução numérica que possa nos dar indícios de como o fator  $\tau$  influencia as curvas [130][131][132][134].

### 3.5.0.1 Solução numérica da equação com efeito da redistribuição de renda - Primeira etapa

A equação 3.54 pode ser resolvida por uma solução numérica, assim, vamos analisar essas soluções diferentemente do que foi feito em capítulos anteriores. Primeiro, vamos referenciar o termo  $[\tau (\frac{W}{N} - w)]$  como sendo  $f$ , ou seja  $f = [\tau (\frac{W}{N} - w)]$  e então utilizar o método apresentado no artigo *Nonlinear redistribution of wealth from a Fokker-Planck description* para resolver a equação.

Antes de tudo, vamos definir  $\gamma = 1$  e  $[(w^2/2)A + B]P(w) = \mu(w)$ , assim, a equação 3.54 em sua forma estacionária se torna

$$\frac{1}{2} \mu' - fP = 0. \quad (3.55)$$

Vamos então separar a equação 3.55 em três equações diferenciais acopladas:

$$A' = -P = \frac{-\mu}{w^2A + B}, \quad (3.56)$$

$$B' = w^2P = \frac{w^2\mu}{w^2A + B}, \quad (3.57)$$

$$\mu' = 2fP = \frac{2f\mu}{w^2A + B}. \quad (3.58)$$

As condições iniciais para as equações 3.56, 3.57 e 3.58 são respectivamente  $A(0) = 1$ ,  $B(0) = \mu(0) = 0$ . Vamos utilizar os seguintes procedimentos para resolver o problema:

- Próximo de zero, a equação 3.54 se torna:  $wP(w) + \frac{w^2}{2} \frac{dP(w)}{dw} - (\tau(\frac{W}{N} - w))P(w) = 0$ , devido às condições de contorno citadas anteriormente;
- Vamos então resolver a equação exposta acima, para saber o comportamento da função  $P(w)$  para todos os pontos próximos de zero;
- Usamos os valores encontrados como condições de contorno para resolvermos o sistema de equações diferenciais acopladas;
- Repetimos esse procedimento para diversos valores de  $\tau$ .

Usamos o software *Maplesoft<sup>TM</sup>* para a solução dessas equações diferenciais. Vamos apresentar algumas capturas de tela (*printscreen*), demonstrando como foram realizados os procedimentos. Usamos como exemplo, o caso em que  $\tau = 6$  e  $\frac{W}{N} = 1$ . Comentamos abaixo os procedimentos que foram adotados em cada etapa. Convidamos o leitor para que veja as figuras presentes no anexo e avalie o processo computacional que foi executado para chegarmos aos devidos resultados.

Figura 39 - Definimos a equação diferencial *eq1* na primeira linha, e então usamos a ferramenta *dsolve* para resolver a equação diferencial. A função  $P(w)$  descreve a distribuição de renda de um agente **para pontos próximos a zero**.

Figuras 40 e 41 - A partir do valor encontrado para  $P(w)$ , resolvemos a equação para  $A(w)$ , também para valores próximos de zero. Fazemos também a normalização de  $P(w)$ , encontrando o valor para a constante de normalização  $C1$ .

Figura 42 - Com o valor de  $P(w)$ , realizamos a integração para encontrar o valor da função  $B(w)$ .

Figura 43 - Com os valores definidos das funções  $P(w)$ ,  $A(w)$  e  $B(w)$ , podemos definir o valor para  $\mu(w)$ , que na figura está representado por  $\Lambda(w)$ .

Figura 44 - Definimos os valores de  $\Lambda(w)$ ,  $A(w)$  e  $B(w)$  para um valor próximo de zero, no caso, 0, 41.

### 3.5.0.2 Solução numérica da equação com efeito da redistribuição de renda - Segunda etapa

Agora que definimos as funções em pontos próximos de zero, podemos ir para a **segunda etapa** do procedimento, que consiste em trabalhar nas equações diferenciais acopladas 3.56, 3.57 e 3.58.

Figura 45 - Nesta figura, os termos  $eq1$ ,  $eq2$  e  $eq3$  estão associados respectivamente às equações 3.56, 3.57 e 3.58. Fazemos a declaração dessas funções.

Figura 46 - Esse ponto é fundamental para entender o processo. Definimos a variável  $inc$ (initial conditions), como uma lista ou um conjunto de condições iniciais para resolver nosso problema. Estamos basicamente falando ao software qual o valor da função  $\mu$ ,  $A$  e  $B$  no ponto 0, 41.

Declaramos também  $sys1$  como um conjunto de equações que iremos resolver posteriormente.

Figura 47 - Usamos a ferramenta  $dsolve$  para resolver numericamente o sistema de equação diferenciais  $sys1$ , com as condições iniciais presentes no conjunto  $inc$ .  $fA$ ,  $fB$  e  $f\mu$  são as funções individuais  $A$ ,  $B$  e  $\mu$  resolvidas para todos os pontos.

Usamos a ferramenta  $eval$  para encontrar individualmente essas funções.

Figura 48 - Com as funções definidas para todos os pontos, podemos achar numericamente a solução para  $P(w)$ , expressa na figura pelo nome  $finalf(w)$ , usamos a ferramenta  $plot(finalf(w), w = 0 ..3)$  para plotar a função do intervalo de 0 até 3.

Figura 49 - Por fim, para obter os pontos das distribuições, usamos uma das ferramentas de programação existentes no *Maplesoft<sup>TM</sup>*.

É possível perceber nas figuras 48 e 49 que existem alguns poucos pontos problemáticos no início da distribuição e esse comportamento foi observado em todos os casos. Acreditamos que seja um erro sistemático, e esse mesmo influencia muito pouco nas curvas finais.

### 3.5.0.3 Resultados e discussão sobre as curvas resultantes do modelo com redistribuição

A pergunta a ser respondida após todos esses procedimentos é: Qual o real efeito da redistribuição de renda nas curvas de riqueza dos agentes?

Para responder de maneira sucinta essa pergunta, vamos analisar praticamente as curvas para diferentes valores de  $\tau$ .

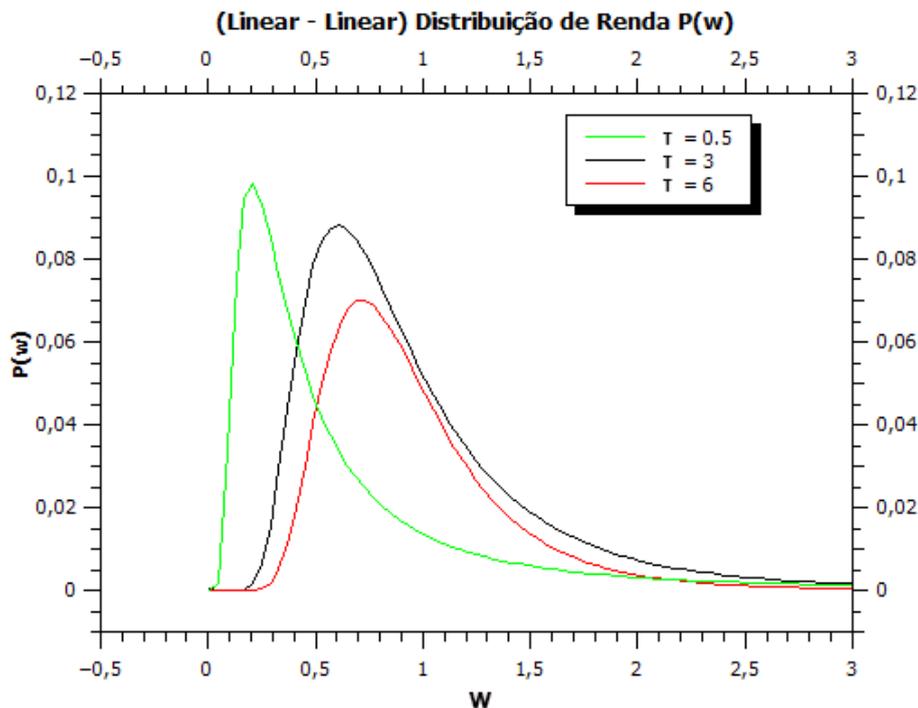


Figura 23 – Curvas de probabilidade  $P(w)$  para diferentes valores de  $\tau$ .

A figura 23 é uma representação excelente para estudarmos o efeito da redistribuição de renda no sistema. Podemos perceber de maneira clara que a transição de fases proposta nos trabalhos [13][130], ocorre conforme alteramos o valor do termo  $\tau$  da redistribuição de renda. **Podemos considerar então que para esse sistema, as fases são controladas pelo parâmetro  $\tau$ , e que as transições ocorrem entre sistemas menos**

**desiguais para outros mais desiguais economicamente.**

A curva em vermelho apresenta um sistema menos desigual, consequência de um elevado valor da taxa  $\tau = 6$ . A curva em verde, que está relacionada à taxa  $\tau = 0.5$  apresenta um sistema mais desigual. Definimos essa desigualdade observando as probabilidades apresentadas nessas curvas, numa análise simples, é mais fácil encontrar na curva em verde do que na curva em vermelho, um agente com uma riqueza próxima de zero. Apesar de ser técnico e objetivo, esse modelo trata apenas uma dinâmica de redistribuição de riqueza, que é a taxa direta. Podemos pensar em outras formas de distribuir a riqueza, como por exemplo, possibilitar que numa sociedade, as pessoas com menor riqueza acumulada tenham acesso às mesmas condições sociais que aquelas que possuam mais riqueza acumulada. Esse contudo, seria um procedimento complexo de ser transformado em um algoritmo computacional. Realmente, muito complexo!

Uma outra possibilidade, mais tangível à nossa realidade, é alterar a estrutura do *Yard Sale Model* de forma a favorecer o agente com menor riqueza, como veremos nos capítulos que seguem.



## Parte IV

Transições de fase e modelos de spins  
aplicados à sistemas econômicos



## 4 Modelos termodinâmicos aplicados à economia

Neste capítulo vamos propor que os sistemas econômicos possuem características semelhantes aos sistemas termodinâmicos, sendo assim, queremos analisar a possibilidade de se encontrar parâmetros macroscópicos e fazer paralelos.

### 4.1 Transições de fase

Um princípio fundamental no estudo de sistemas com um número elevado de graus de liberdade, ou seja, sistemas que obedecem o limite termodinâmico, é que esses sistemas possuem fases. As fases dos sistemas são, em síntese, uma representação macroscópica da estrutura molecular. Podemos pensar em casos simples, como por exemplo a água em estados sólido, líquido e gasoso, mas também podemos considerar casos mais complexos, onde materiais possuem fases ferromagnéticas e antiferromagnéticas. Quando um sistema possui uma transição de fases, essas fases se diferenciam pelo valor de parâmetros do sistema que podem flutuar. Por exemplo, numa transição gás-líquido onde a pressão é constante, as fases se distinguem por variações no volume do sistema. No caso de sistemas que são influenciados por campos magnéticos, é importante analisar, por exemplo, a temperatura e a magnetização do sistema. As transições de fase, caracterizadas por essas mudanças na estrutura macroscópica dos sistemas, ocorrem principalmente quando existem singularidades nas funções que representam as grandezas físicas do sistema. Quando a primeira derivada da função da energia livre  $F = E - TS$  apresenta uma descontinuidade, dizemos que a transição é de primeira ordem. No caso em que a segunda derivada ou derivadas de ordem superior apresentam descontinuidades, dizemos que a transição é contínua.

A figura 24 apresenta a ideia por de trás dessas descontinuidades nas funções das grandezas físicas dos sistemas. Esses fenômenos que ocorrem ao trabalharmos nos pontos críticos são interessantes pois caracterizam o momento em que aparecem anomalias no sistemas, por exemplo, a coexistência de duas fases que são indistinguíveis.

### 4.2 Fenômenos críticos e grupo de renormalização

Quando estamos tratando do estudo desses sistemas e estamos também próximos de pontos críticos, fenômenos anômalos ocorrem, como dito anteriormente. O que nos

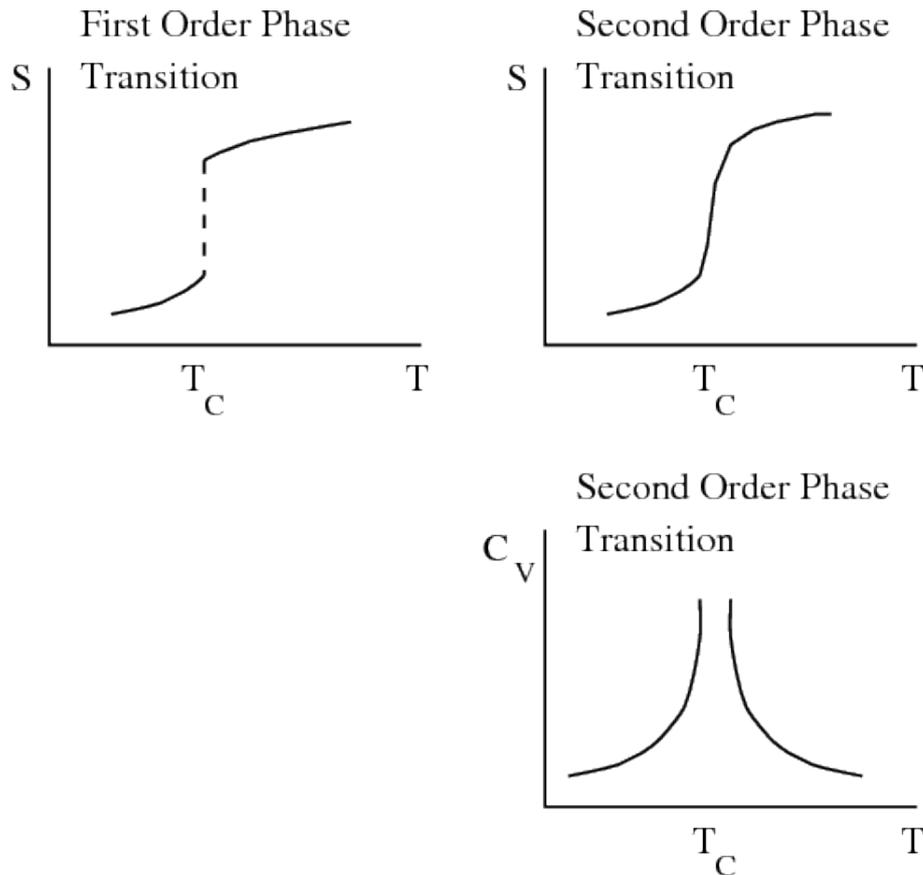


Figura 24 – Descontinuidades nas transições de fases para algumas grandezas físicas. Fonte: [https://ps.uci.edu/~cyu/p115A/LectureNotes/Lecture19/html\\_version/lecture19.html](https://ps.uci.edu/~cyu/p115A/LectureNotes/Lecture19/html_version/lecture19.html). Acessado em 17/03/2021.

interessa nesse ponto é conseguir descrever com algum rigor as características das grandezas físicas que nos interessam. Vamos caracterizar o grau dessas singularidades a partir de expoentes críticos, pois em geral essas grandezas possuem divergências que surgem da forma de lei de potências. Podemos citar os seguintes exemplos conhecidos:

- $\chi \approx |t|^{-\gamma} (T > T_c), |t|^{-\gamma'} (T < T_c)$ ;
- $C \approx |t|^{-\alpha} (T > T_c), |t|^{-\alpha'} (T < T_c)$ ;
- $m \approx |t|^\beta (T < T_c)$ ;
- $m \approx |h|^{1/\delta} (T = T_c)$ .

Nos exemplos apresentados acima, o fator  $\chi$  representa a susceptibilidade do sistema,  $C$  o calor específico,  $m$  a magnetização e o termo  $|t|$  é uma quantidade adimensional da forma  $|t| = (T - T_c)/T_c$ . Esses expoentes críticos são fundamentais para descrevermos todo o escopo dos fenômenos que ocorrem próximos às temperaturas críticas, e vamos posteriormente mostrar um exemplo de como chegamos a um desses expoentes.

As transformações de escalas[135, 136, 137, 138, 139] , em resumo, consistem em reduzir um bloco de spins por sua média, e assim eliminar flutuações em escalas de pequenos comprimentos. Na figura 25, os pontos brancos representam spins *up*, e os pontos pretos spins *down*, e essa simulação foi gerada por um programa feito durante a execução do trabalho, que discutiremos posteriormente. Podemos imaginar que se pegamos blocos de spins e considerarmos sua média, iremos caminhar até o ponto em que toda a simulação se torne um único ponto branco e esses aglomerados de spins *down* desapareçam.

Os casos em que a diminuição da escala não faz com que desapareçam as flutuações correspondem ao fato de que existem flutuações em todas as escalas do sistema. As etapas da transformação por blocos de spins servem para ilustrar a ideia do grupo de renormalização [135], que serve exatamente para eliminar essas flutuações em pequenas escalas.

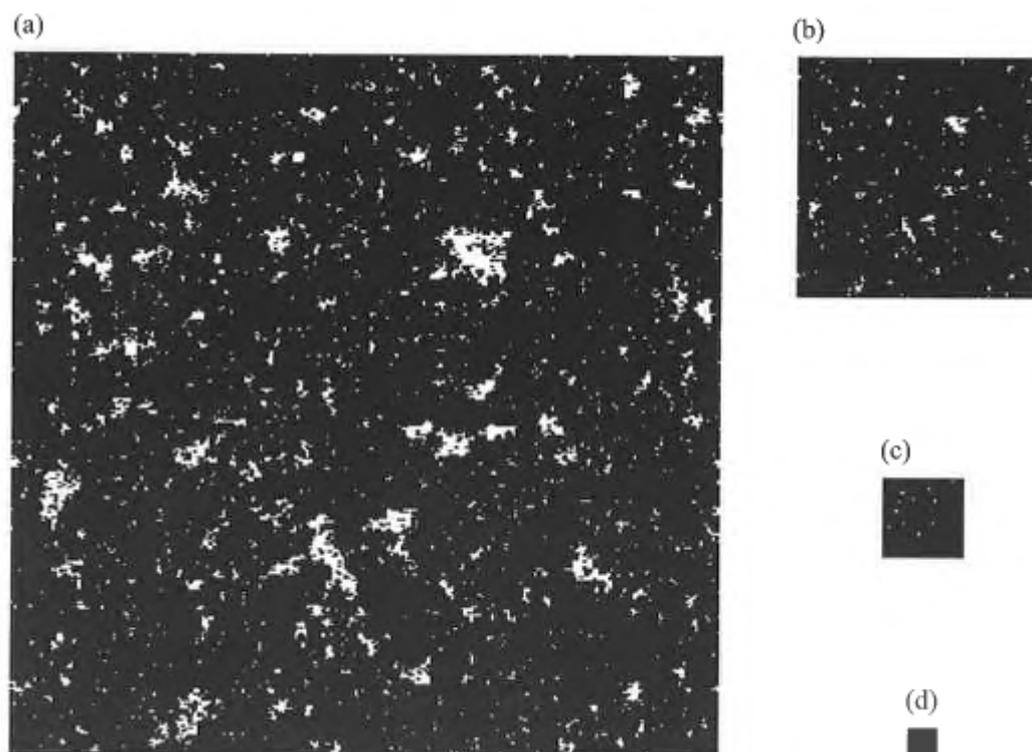


Figura 25 – Configurações de spins para  $T = 0.995T_c$ , e aplicações de transformações de blocos de spins. Retirado de [140].

Usaremos uma teoria de campo médio para descrever todos esses fenômenos. Iremos estudar essas transições de fase em sistemas econômicos, buscando fazer uma espécie de tradução do significado que os parâmetros possuem no contexto da física, para o correspondente na economia.

### 4.3 Modelo de Ising e aproximação por campo médio (mean-field)

O livro [140] nos apresenta logo em seus capítulos iniciais conceitos muito interessantes. O autor nos apresenta a ideia de que não precisamos de um modelo que possua uma Hamiltoniana precisa, para descrevermos os fenômenos observáveis da matéria. Assim, queremos modelos que façam as abstrações necessárias para que possamos estudar os parâmetros que são realmente significativos para a análise dos fenômenos que acontecem nessas transições de fase.

O modelo mais fundamental e didático para entender esses fenômenos é chamado de modelo de *Ising*. O modelo foi estudado primeiramente por Wilhelm Lenz e Ernest Ising em 1920 e buscava estudar o ferromagnetismo, mais precisamente, ordenamento de momentos magnéticos. O modelo proposto em 1920 era mais simples, sendo uma análise unidimensional, onde cada spin interage com seus vizinhos próximos. Podemos definir esse modelo pela seguinte equação Hamiltoniana:

$$H = -J \sum_{\langle i,j \rangle} S_i S_j - h \sum_i S_i. \quad (4.1)$$

Na equação 4.1,  $S_i$  é a variável de spin do sistema, e  $\langle i, j \rangle$  significa que essa soma é feita sobre os spins na vizinhança. A ideia é que as partículas se alinham em uma rede, que consideraremos aqui como sendo bidimensional, e que a interação de um spins de índice  $i$  com os spins próximos, assim, é um campo magnético efetivo que atua sobre esse spin. A figura 26 apresenta graficamente a ideia dessa vizinhança de spins, enquanto a figura 27 demonstra a ideia básica da substituição dos valores dos spins pelas médias.

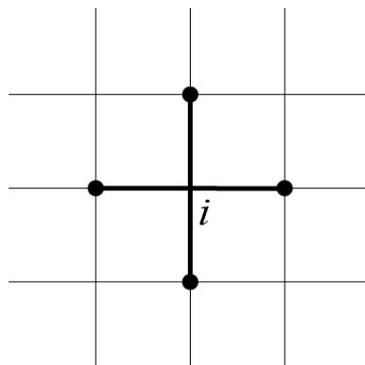


Figura 26 – Spin de índice  $i$  e os vizinhos mais próximos na rede de spins.

Vamos considerar que para cada variável de spin  $S_i$ , podemos expressar uma média  $m = \langle S_i \rangle$ , e um flutuação ou desvio da média  $\delta S_i = S_i - m$ . Num primeiro momento, vamos considerar a equação 4.1, onde o termo  $h \sum_i S_i$  está associado à interação do campo

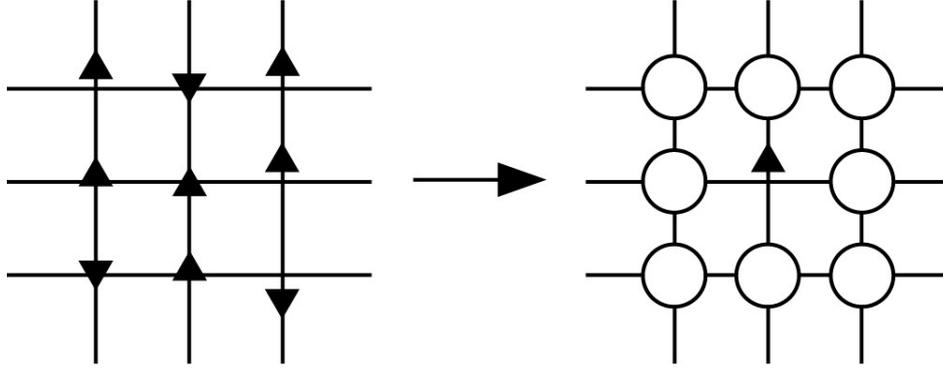


Figura 27 – Esquema da substituição dos spins na rede por seus valores médios, englobando um spin de índice  $i$ . Os círculos representam as médias dos spins.

magnético externo nos spins. Vamos posteriormente verificar o caso em que  $h = 0$ .

Usando a relação  $S_i = m + \delta S_i$  e fazendo a substituição na equação 4.1 teremos:

$$H = -J \sum_{\langle i,j \rangle} (m + \delta S_i)(m + \delta S_j) - h \sum_i S_i, \quad (4.2)$$

$$H = -J \sum_{\langle i,j \rangle} (m^2 + m\delta S_i + m\delta S_j + \delta S_i \delta S_j) - h \sum_i S_i. \quad (4.3)$$

Vamos desconsiderar o termo quadrático  $\delta S_i \delta S_j$  para assim obtermos:

$$H \approx -Jm^2 \sum_{\langle i,j \rangle} -Jm \sum_{\langle i,j \rangle} (\delta S_i + \delta S_j) - h \sum_i S_i. \quad (4.4)$$

O termo  $\sum_{\langle i,j \rangle}$  pode ser descrito da seguinte forma, é uma soma sobre todos os pares que interagem na rede. Assim, podemos expressar da seguinte forma essa interação total de pares:

$$N_b = \sum_{\langle i,j \rangle} 1 = z \frac{N}{2}, \quad (4.5)$$

assim, a equação 4.4 pode ser reescrita da forma:

$$H \approx -Jm^2 N_b - Jm \sum_{\langle i,j \rangle} (\delta S_i + \delta S_j) - h \sum_i S_i. \quad (4.6)$$

Como estamos interessados apenas nos pares próximos interagentes, o termo  $N_b$  apresenta exatamente essa relação, sendo igual ao número de pares próximos em toda a

rede de spins, ou seja, o número de ligações em todo o sistema:

$$\sum_{\langle i,j \rangle} 1 = N_b. \quad (4.7)$$

Utilizando também esse mesmo argumento, podemos escrever o segundo termo do lado direito da equação 4.6 como sendo

$$-Jm \sum_{\langle i,j \rangle} (\delta S_i + \delta S_j) = -Jm \sum_i (\delta S_i). \quad (4.8)$$

Aliando-se à essa informação, a condição de que podemos escrever a variável  $S_i$  em termos da média e do desvio, ou seja,  $\delta S_i = S_i - m$ , escrever a expressão como sendo

$$H = N_b J m^2 - (Jmz + h) \sum_i S_i. \quad (4.9)$$

A equação 4.9 é escrita de forma que  $N_b = zN/2$ . Assim, temos uma forma de descrever o número de ligações com os vizinhos próximos a partir de uma relação com o número de partículas da rede. Vamos utilizar esse resultado, mas antes disso, façamos uma breve discussão sobre como iremos prosseguir, analisando a função partição dessa Hamiltoniana. A função partição, aplicada à Hamiltoniana da equação 4.9, pode ser descrita como

$$Z = \sum_{\{\sigma\}} e^{-\beta H} = \sum_{\{\sigma\}} e^{-\beta(N_b J m^2 - (Jmz+h) \sum_i \sigma_i)}. \quad (4.10)$$

O termo  $\sum_{\{\sigma\}}$  está associado ao fato de que estamos fazendo a soma sobre todos os estados possíveis disponíveis, assim, podemos expandir essa expressão como sendo:

$$Z_N = \sum_{\{\sigma\}} e^{-\beta H} = e^{-N_b J m^2 \beta} \left( \sum_{\sigma=\pm 1} e^{\beta(Jmz+h)\sigma} \right)^N. \quad (4.11)$$

Podemos também usar a relação do cosseno hiperbólico e escrever:

$$Z_N = e^{-N_b J m^2 \beta} (2 \cosh \beta(Jmz + h))^N, \quad (4.12)$$

sendo a energia livre por spin dada por

$$F = -\frac{1}{\beta N} \ln Z_N = \frac{1}{2} J m^2 - \frac{1}{\beta} \ln [2 \cosh(\beta(Jmz + h))]. \quad (4.13)$$

A magnetização do sistema, que será um parâmetro importante para determinarmos as características do sistema, é dada pela derivada parcial da energia livre pelo campo  $B$ , ou seja:

$$m = -\frac{\partial F}{\partial B} = \tanh(\mathcal{J}zm + B). \quad (4.14)$$

Queremos observar se existe uma magnetização espontânea com  $B \rightarrow 0$ , assim, buscaremos as soluções para  $m$  diferente de zero da equação transcendental:

$$m = \tanh(\mathcal{J}zm). \quad (4.15)$$

Podemos recorrer a métodos gráficos para observar o comportamento dessa equação. Para achar uma solução, vamos analisar onde os lados esquerdo e direito da equação 4.15 se intersectam, observando a figura 28.

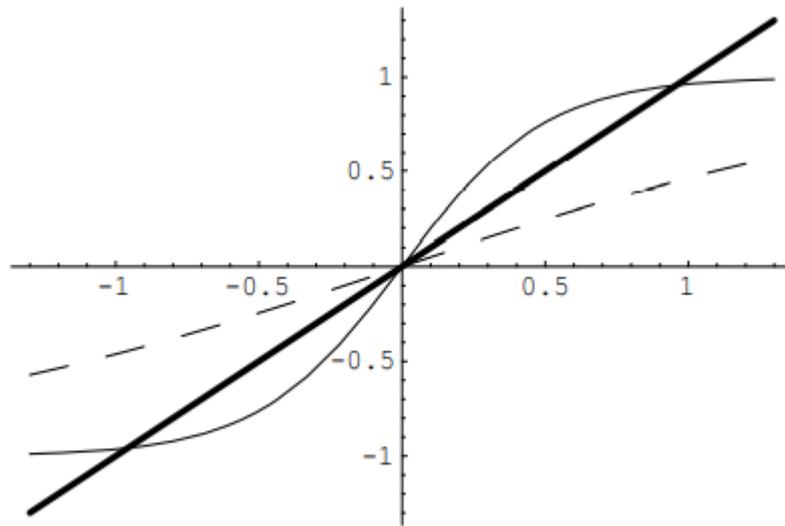


Figura 28 – Solução gráfica da equação transcendental 4.15. Retirado de [8].

Quando a derivada de  $\tanh(\mathcal{J}zm)$  é maior que 1 na origem, temos duas soluções, como mostra a figura 28, soluções da forma  $\pm m_0$ . Quando o sistema se aproxima de uma temperatura crítica, surge a transição de uma fase desordenada para uma ordenada. Foi colocada anteriormente a condição de  $B \rightarrow 0$ , e é essa condição que nos diz o valor da magnetização  $m_0$ . Para  $T < T_c$  os spins estão alinhados na direção do campo magnético externo (paramagnetismo), assim, se  $B \rightarrow 0^+$  temos que  $m = m_0$  e caso  $B \rightarrow 0^-$  temos  $m = -m_0$ .

Para calcular os expoentes críticos na aproximação de campo médio, vamos considerar a variável

$$t = \frac{T - T_c}{T_c}. \quad (4.16)$$

Como mostrado anteriormente, a magnetização de um sistema em função da temperatura decai com um expoente  $\beta$  da forma:

$$m \approx |t|^\beta \quad (T < T_c). \quad (4.17)$$

Nossa tarefa será determinar qual é o valor desse parâmetro  $\beta$ , para isso, façamos algumas considerações. Vamos expandir o lado direito da equação 4.14 em torno de  $m = 0$ , tendo então:

$$m = \beta J z m - \frac{1}{3}(\beta J z)^3 m^3 + \dots \quad (4.18)$$

Dividindo ambos os lados dessa equação por  $m$  e fazendo algumas manipulações:

$$1 = \beta J m - \frac{1}{3}(\beta J z)^3 m^2, \quad (4.19)$$

$$\frac{1}{3}(\beta J z)^3 m^2 = \beta J z - 1, \quad (4.20)$$

$$m^2 = \frac{3\beta J z - 3}{(\beta J z)^3}. \quad (4.21)$$

Fazendo  $\beta = 1/T$ , pois a constante de Boltzmann aqui será dada como valendo 1, temos:

$$m^2 = \frac{\frac{3}{T} J z - 3}{(\frac{1}{T} J z)^2 J z \frac{1}{T}} = \frac{3(J z - T)}{(\beta J z)^2 J z}, \quad (4.22)$$

Próximo ao ponto crítico  $T_c$ , temos que  $\beta J z \approx 1$ , reduzindo a equação anterior a

$$m \approx \pm \left( \frac{3(T_c - T)}{T_c} \right)^{1/2}. \quad (4.23)$$

**Temos então que o expoente crítico para a magnetização do sistema é igual a 1/2 na aproximação de campo médio.** A solução exata de Onsager para duas dimensões é  $\beta = 1/8$ .

O modelo de Ising é sem dúvidas bem desenvolvido, e diversas áreas do conhecimento fazem uso dessas técnicas. Poderíamos avançar ainda mais no arcabouço teórico que acompanha o modelo de Ising, porém, vamos agora verificar sua aplicação no caso de uma análise da distribuição de renda.

## 4.4 Método de Monte Carlo e modelo de Ising no estudo das distribuições de riqueza

Esse tópico é uma aplicação do modelo de Ising num caso muito adequado para nossa proposta [141][142]. Antes de tudo, vamos descrever o processo que utilizaremos.

Vamos inicialmente criar uma rede quadrada da forma  $M = l \times l$  com  $l = 300$ , com cada spin da rede definido aleatoriamente no início e com condições de contorno periódicas. As condições de contorno periódicas nos garantem que não haja interação de um spin  $i, n$  da rede com um spin  $i, n + 1$ , pois esse último spin não existe.

Façamos então as seguintes etapas:

- 1. Geramos aleatoriamente um estado inicial de spin  $S_i = 1$  ou  $S_i = -1$  para cada ponto na rede. Os autores do artigo [142] realizam a primeira etapa de forma que todos os spins possuem o valor  $S_i = 1$  no intuito de reduzir a carga computacional, porém, não usaremos esse método;
- 2. Escolhemos aleatoriamente um spin na rede e calculamos a quantidade  $\Delta E = -2S_j J \sum_i S_i$  onde essa soma é feita sobre a vizinhança de Von Neumann do spin  $S_j$ , apresentada na figura 26;
- 3. Se  $\Delta E \geq 0$  mudamos a direção do spin, caso contrário, geramos um número aleatório  $w$  entre 0 e 1 de forma que se  $w < \exp(\Delta E / K_B T)$  também mudamos a direção do spin. No caso de nenhuma dessas condições seja satisfeita, mantem a direção do spin inalterada.
- 4. Fazemos a repetição das etapas 2 e 3 até o fim da simulação.

Descrevemos então um algoritmo eficiente para realizar o processo que desejamos. Porém, é importante destacar que as simulações dependem intrinsecamente da temperatura escolhida pois essa define o estado da matéria que estamos analisando, assim, vamos verificar os resultados para as temperaturas propostas no artigo [142].

As temperaturas são:

- $T = 0.7 \cdot T_c$  - Referente à fase ferromagnética;
- $T = 1 \cdot T_c$  - Referente ao estado crítico;
- $T = 1.3 \cdot T_c$  - Referente à fase paramagnética.

Os resultados encontrados estão apresentados nas figuras a seguir, bem como as magnetizações dos sistemas.

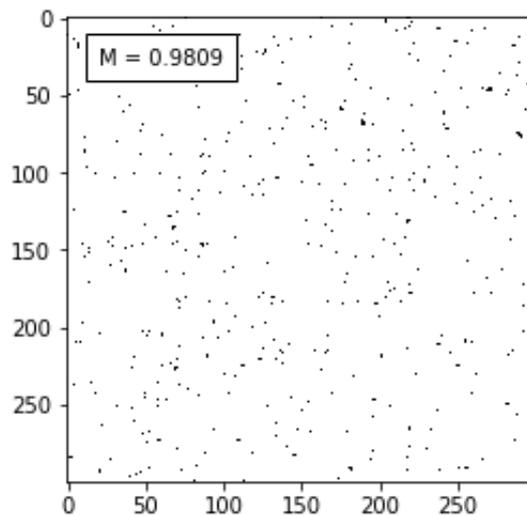


Figura 29 – Resultado da simulação do modelo de Ising para  $T = 0.7T_c$ .

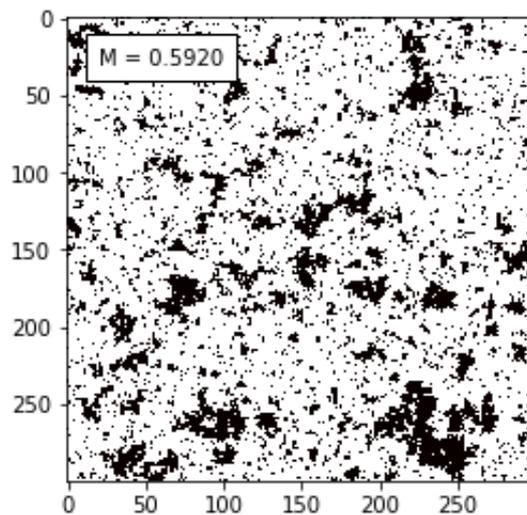


Figura 30 – Resultado da simulação do modelo de Ising para  $T = T_c$ .

Os resultados estão de acordo com o esperado na literatura [141][142][8][7], o que nos mostra que o programa foi escrito e executado de maneira correta. Vamos então avançar e aprimorar o programa para entender como esse processo de alinhamento de spins pode

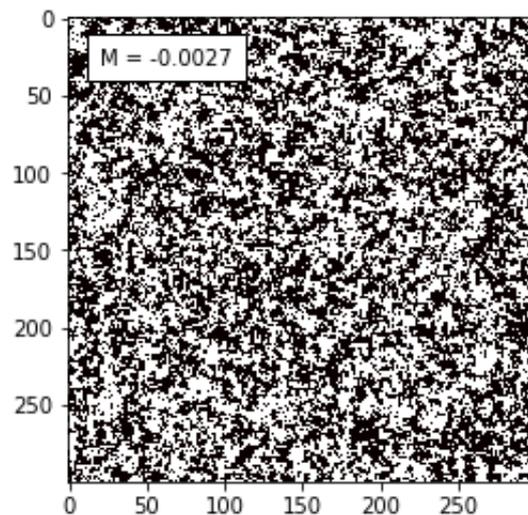


Figura 31 – Resultado da simulação do modelo de Ising para  $T = 1.3T_c$ .

gerar distribuições semelhantes às distribuições de renda. Vale a pena antecipar a discussão de que o processo computacional que será executado faz bastante sentido se o analisarmos do ponto de vista econômico e social. Esse debate será feito posteriormente com todos os detalhes necessários.

#### 4.4.1 Modelo de Ising como gerador de curvas similares às de distribuição de renda

Esse método abre caminho para uma série de novas ideias sobre como podemos trabalhar em cima do modelo de Ising.

Primeiro, precisamos repensar a nomenclatura e entender esses spins como agentes econômicos, assim, podemos pensar o alinhamento dos spins como o alinhamento de opiniões entre esses agentes. Vale destacar que esse método de analisar spins como agentes que podem assumir uma opinião binária (comprar ou vender, votar ou não votar em um candidato, etc...) já foi usado em estudos diversos, como por exemplo, o de dinâmica de opiniões.

Outra análise bastante interessante, é perceber o sistema como um todo a partir da magnetização encontrada, por exemplo, um sistema de magnetização próxima de 1 ou igual a 1 se refere ao caso em que todos os spins possuem o mesmo alinhamento. Podemos então fazer uma analogia com o caso em que existe um agrupamento social, onde todos os indivíduos consomem aproximadamente da mesma forma, ou possuem a mesma opinião sobre algum tema.

Consideremos que cada agente econômico ganha uma unidade monetária a cada tempo  $t$  em que seu spin tem orientação positiva  $S_i = 1$  e perde uma unidade quando seu spin tem orientação negativa  $S_i = -1$ .  $C_i(t)$  representa a riqueza do agente  $i$  no tempo  $t$ . Analisando apenas essa parte do modelo, já podemos perceber que os agentes ganharão mais dinheiro caso estejam na vizinhança de outros agentes que estejam também ganhando dinheiro. As etapas do processo são:

- Executando a simulação do modelo de Ising, esperamos até o ponto em que o sistema chegue ao equilíbrio;
- Em cada instante de tempo  $t$  após o equilíbrio verificamos o sentido do spin de cada elemento;
- Após o equilíbrio, se:
 
$$S_i = 1 \rightarrow C_i(t) = C_i(t - 1) + 1;$$

$$S_i = -1 \rightarrow C_i(t) = C_i(t - 1) - 1.$$
- Para cada temperatura, acumulamos uma quantidade significativa de dados, verificamos o valor possuído pelo agente com menor quantidade de dinheiro e montamos o histograma da distribuição.

Os resultados obtidos durante as simulações foram coerentes com o exposto no artigo. As figuras 32(a) 32(c) e 32(e) apresentam as distribuições de riqueza para diferentes valores de  $T$  nas simulações. Em destaque, as figuras 32(c) e 32(d) mostram um comportamento interessante: Formam-se *clusters* de agentes com alta riqueza. Esse padrão claramente segue a distribuição de spins para  $T = T_c$ , porém, o paralelo de que a distribuição mais desigual surge juntamente com a formação desses aglomerados nos leva a pensar algumas situações interessantes:

- Agentes que estão próximos a outros que possuem  $S_i(t) = 1$  na maior parte do tempo, tendem também a aumentar sua riqueza. Falando de outra maneira, a forma mais fácil de tornar-se rico é estando próximo de quem é rico;
- Também é interessante perceber, olhando ainda para os *heatmaps* das distribuições, que para  $T = T_c$  esses *clusters* podem ser considerados uma espécie de "região de alta densidade de riqueza";
- O *heatmap* para  $T = 0.7T_c$  também possui pequenos aglomerados, porém, esses não são capazes de gerar consideráveis mudanças no histograma associado;

- O *heatmap* para  $T = 1.3T_c$  está associado a uma situação de menor desigualdade e apresenta a quase ausência desses *clusters*. Ou seja, a riqueza possuída pelos agentes está simetricamente distribuída nesse mapa.

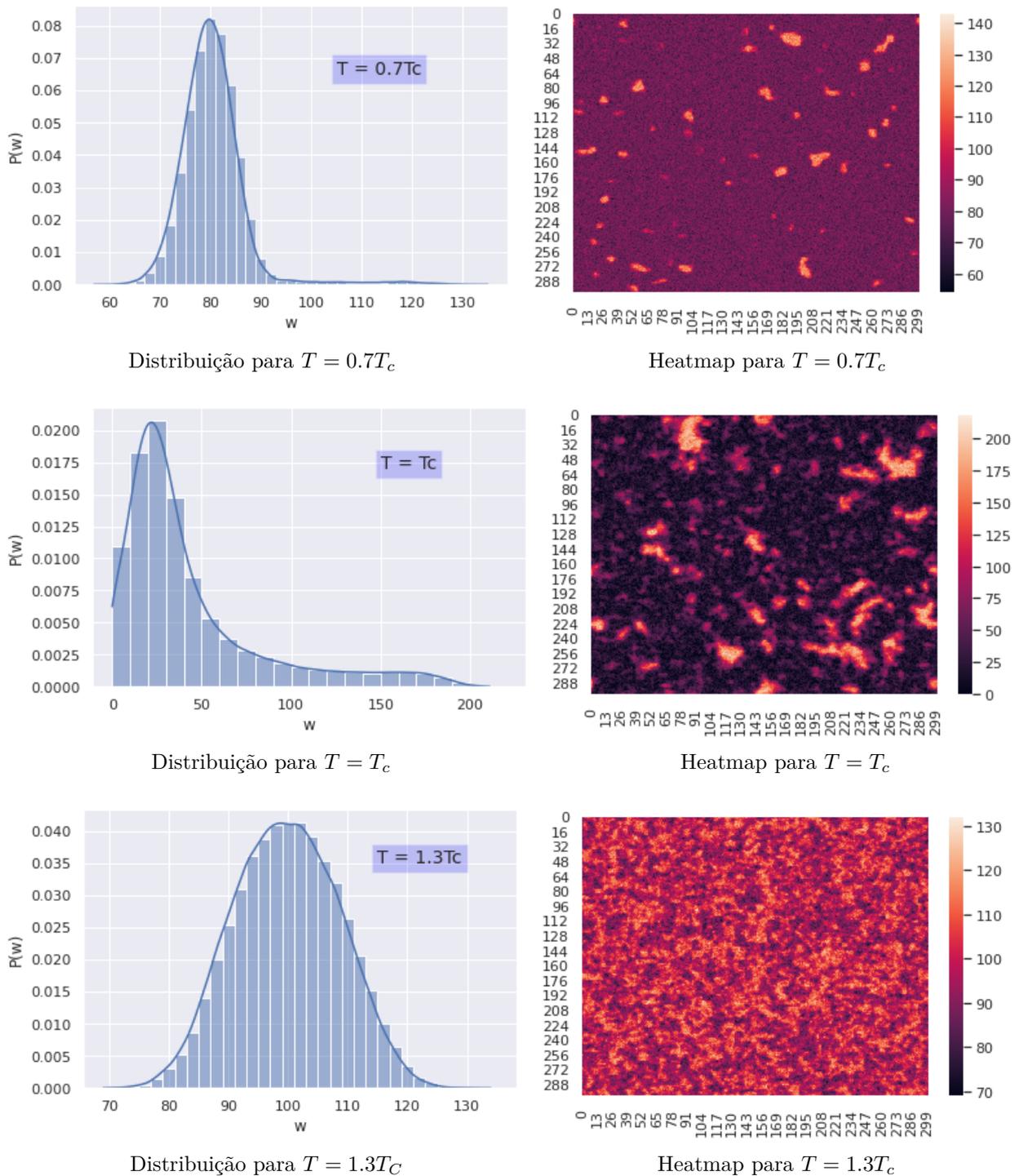


Figura 32 – Distribuições de riqueza resultantes e seus respectivos *Heatmaps* para diversos valores de  $T$ .

#### 4.4.1.1 O parâmetro de ordem no modelo de Ising aplicado ao contexto econômico

Essa é uma discussão revelante, mas que se torna subjetiva na aplicação do modelo físico num problema econômico. A magnetização no modelo Ising é dada por

$$M = (N_+ - N_-)\mu, \quad (4.24)$$

e representa objetivamente a diferença momentânea entre os *spins up* e *spins down*, multiplicada por um fator  $\mu$  que é o momento magnético do sistema. No contexto do sistema econômico, um agente com *spin up*, ao menos nesse instante de tempo  $t$ , estará sujeito a aumentar sua riqueza em uma unidade de moeda. A magnetização representará a diferença entre os agentes que estão aumentando sua riqueza e os que estão diminuindo-a. Nesse sentido:

- Uma magnetização  $M > 0$  representa a situação em que há mais agentes capazes de aumentar a riqueza;
- $M = 0$ , a quantidade dos dois tipos de agentes é igual. Temos uma economia em que metade dos indivíduos conseguem aumentar seu acumulo de riqueza, enquanto a outra metade não. O ponto é que um número elevado de indivíduos com *spin down* tende a alterar significativamente o formato das curvas;
- $M < 0$ , baixa quantidade de agentes com capacidade de aumentar sua riqueza. Essa situação é quase auto explicativa, representa a situação de um sistema desigual. Como há poucos agentes com capacidade de acumular riqueza, apenas os que estão perto o bastante conseguirão mudar seus *spins*.

#### 4.4.1.2 Fundamentos sobre o modelo de Ising e transições de fase em sistemas econômicos

Assim como no modelo de Ising padrão, as transições de fase nas distribuições de riqueza ocorrem conforme mudamos o valor de  $T$ . O artigo, contudo, não apresenta fundamentos teóricos para a função desse parâmetro  $T$  num possível sistema econômico. Ele falha em não tentar responder algumas perguntas fundamentais e também ao não considerar aspectos técnicos importantes, como por exemplo:

- Considerando que o sistema em consideração é em princípio um sistema econômico, qual o análogo econômico para os parâmetros físicos. Qual seria o análogo de  $T$  num sistema econômico?
- A existência de apenas um parâmetro macroscópico relevante  $T$  não limita o trabalho?

- As interações nesse modelo não consideram a conservação de uma riqueza global total, assim, conforme as simulações avançam, distorções ocorrerão;
- O artigo foca em mostrar algumas características técnicas dessas curvas, como por exemplo seus ajustes, mas falha ao não apresentar fundamentos para essas curvas.

O artigo [142] passa a impressão de que, busca gerar essas curvas semelhantes às de distribuição de riqueza, mas sem nenhum compromisso de tentar explicar o fenômeno da condensação dessa riqueza nas transições de fase. Apesar de ser um trabalho tecnicamente acurado, precisamos de ferramentas mais complexas. **A nossa análise sobre o modelo é a seguinte:**

Um modelo de spins aplicado a um sistemas econômico representa a seguinte dinâmica. Agentes que estão próximos a outros com maior riqueza, tendem a ser mais capazes de multiplicar sua riqueza. Pensando socialmente, é mais simples acumular riqueza onde há uma qualidade de vida melhor, onde as possibilidades de ascensão social são maiores. Contudo, para  $T = T_c$  os *clusters* são expressivos, o que representa a situação em que poucos agentes acumulam muita riqueza, e apenas os agentes mais próximos aumentam tendem a aumentar sua riqueza acumulada. Nessa situação, seria necessário outro mecanismo de redistribuição de riqueza. A temperatura  $T = 0.7T_c$  representa a situação em que não existem *clusters* muito expressivos, assim, os agentes são mais capazes de aumentar seu acúmulo de riqueza. Pensando em situações reais, podemos comparar o sistema em  $T = T_c$  a um país como é o Brasil. Não é difícil, no Brasil, ver numa mesma rua pessoas que possuem uma renda elevada morando próximas a pessoas em péssimas condições sociais. As que estão em vulnerabilidade socioeconômica, apesar disso, buscam consumir os mesmos produtos (celular, televisão, secadora de roupas, etc) e ter os mesmos acessos que aquelas. As tentativas de redistribuição de renda, a princípio, passam pelos programas de distribuição direta de renda, como é o bolsa família.

A situação em  $T = 1.3$  representa um sistema socialista perfeitamente implementado, em que todos os agentes possuem as mesmas condições e a riqueza é perfeitamente distribuída em torno de um valor comum. O que queremos encontrar é o ponto intermediário entre essas duas distribuições, onde se torna possível estudar curvas de distribuição de renda compatíveis com a realidade. Essas curvas estão entre a alta desigualdade e o socialismo utópico. Para isso, é preciso estudar um modelo que nos forneça uma gama maior de parâmetros.

Análises mais técnicas serão feitas no próximo capítulo, usando o modelo de Kuramoto.



## Parte V

O modelo de Kuramoto no estudo das  
distribuições de riqueza



## 5 O modelo de Kuramoto no estudo das distribuições de riqueza

A sincronização é um fenômeno observável em diversas situações do mundo real [88, 89, 90, 91, 92, 93, 143, 144, 145]. Ao andar do lado de uma pessoa, percebe-se que ao longo da caminhada seus passos estão sincronizados com os dela. Aplausos num show podem inicialmente parecer desordenados, mas ao longo do tempo o público tende a ajustar esses aplausos. Diversos outros fenômenos de sincronização podem ser observados, e o modelo proposto por Y. Kuramoto [146] se destacou dentre os outros por ser simples e suficiente para ter uma solução tipo campo médio, e ser facilmente implementado em vários sistemas, mas complexo o bastante para explicar uma série de problemas sofisticados. Vamos avançar na ideia de estudar distribuições de riqueza a partir de redes de indivíduos que negociam entre si, para isso utilizaremos um modelo que estuda o comportamento e de uma forma mais geral, a sincronização entre osciladores ou agentes econômicos representados por osciladores; O modelo de Kuramoto.

Buscar essas distribuições a partir do modelo de Ising, como foi feito no capítulo anterior, ocasionaria em uma série de limitações. Primeiramente, o modelo de Ising é um modelo binário, nos permitindo trabalhar apenas com dois estados definidos. Além disso, há uma limitação na vizinhança de interação entre esses spins. A nossa proposta é buscar quebrar essas limitações a partir de um modelo mais sofisticado, que é o modelo proposto por Y. Kuramoto.

O modelo de Kuramoto é um dos mais simples e mais utilizados no estudo do fenômeno da sincronização em sistemas físicos, e já podemos adiantar que o termo **sincronização** será usado em diversas oportunidades durante esse capítulo. O foco durante nosso trabalho foi mostrar que a redistribuição de renda funciona como uma transição de fase num sistema econômico, e nesse capítulo usaremos o modelo mais completo que temos em mãos para estudar a proposta [147].

## 5.1 O modelo de Kuramoto

Vamos inicialmente considerar uma coleção de osciladores harmônicos, cuja equação diferencial é dada por:

$$I \frac{d^2\theta_i}{dt^2} = -\gamma \frac{d\theta_i}{dt} + F_i, \quad (5.1)$$

onde  $F$  é uma força, e se não considerarmos os termos inerciais, ou seja,  $I = 0$  teremos:

$$\dot{\theta} = \omega_i + F_i. \quad (5.2)$$

Para definirmos bem nosso problema precisamos dizer o tipo de força que descreve  $F$ . Podemos pensar inicialmente que  $F$  controla a intensidade das interações, ou seja, a intensidade da sincronização entre esses osciladores. Se  $F = 0$ , então não há interação, e entre dois osciladores a interação deve ser da forma  $F = F(\theta_i - \theta_j)$ , Kuramoto descobriu que a força que melhor explicava esse fenômeno era descrita por:

$$F_i = \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_i - \theta_j) = \sigma \sum_{j=1}^N \sin(\theta_i - \theta_j). \quad (5.3)$$

Na equação 5.3  $N$  é o total de osciladores no sistema,  $K$  é uma constante que determina o nível de acoplamento do sistema, que iremos trabalhar usando a constante  $\sigma = K/N$ .

Existem soluções analíticas para a equação 5.3 caso consideremos um modelo de campo médio, semelhante ao que foi feito anteriormente no modelo de Ising. Este modelo seria da forma:

$$F_i = \sigma \sum_{j=1}^N \sin(\theta_i - \psi). \quad (5.4)$$

Além disso, teríamos soluções para  $\theta_i \approx \theta_j$  e  $\sigma = 0$ . O caso em que  $\sigma = 0$  é particularmente interessante pois reduz o sistema a um estado em que não há sincronização, ou seja, osciladores variando segundo suas frequências naturais.

Em nosso trabalho, usaremos uma equação da forma:

$$\dot{\theta} = \omega_i + f_i(\theta) = \omega_i + \sigma \sum_{j=1}^N \sin(\theta_i - \theta_j), \quad (5.5)$$

Há ainda a situação em que o modelo acopla um termo  $\sqrt{g_i(\theta)}\eta_i(t)$  para descrever um ruído branco gaussiano, mas não iremos usar durante esse trabalho.

Para analisar o progresso dessa sincronização ao longo do tempo, Kuramoto introduz o parâmetro de ordem:

$$r(t)e^{i\theta_j} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N e^{i\theta_i}. \quad (5.6)$$

Em resumo, o que esse parâmetro de ordem descreve é o nível de sincronização em que se encontra o sistema. **Quando o sistema atinge um equilíbrio, a diferença de fases tende a permanecer fixa.** Quando o sistema atinge um nível razoável de sincronização, com o parâmetro de ordem indo ao valor de 1, a diferença de fases entre os osciladores passa a ser fixa. O valor das fases permanece mudando, mas não a diferença entre essas fases.

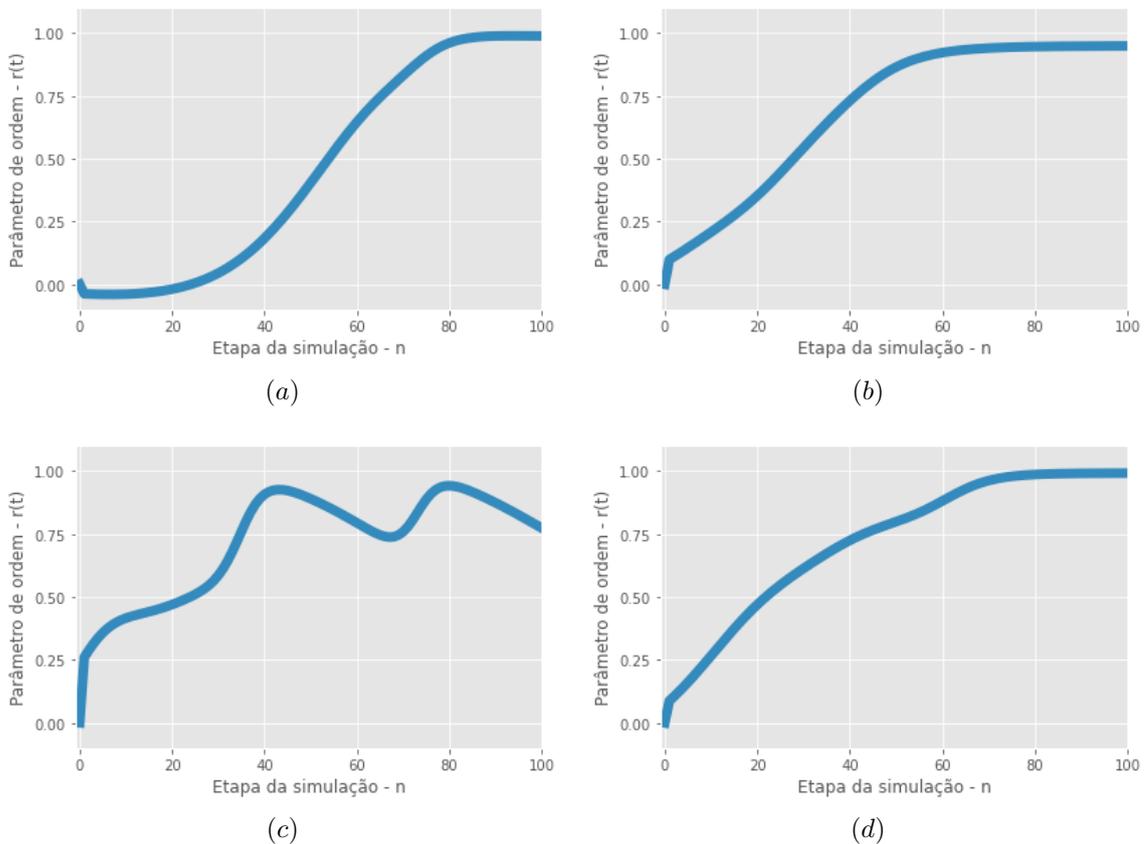


Figura 33 – Parâmetro de ordem ao longo do tempo para uma série de simulações diferentes.

As figuras em 33 mostram como o parâmetro de ordem evolui com o número de simulações, e as figuras 34 e 36 mostram respectivamente as diferenças de fase num plano e as fases ao longo do tempo. A figura 36 é particularmente interessante pois expressa

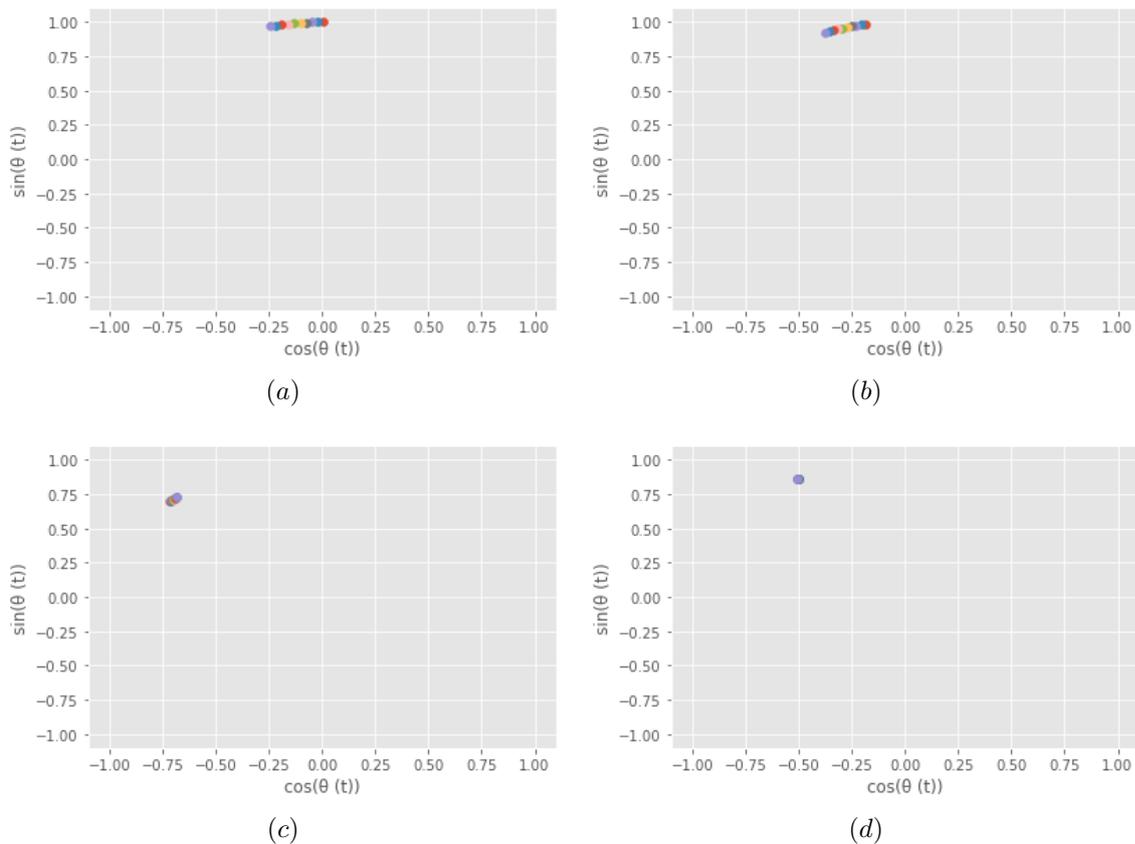


Figura 34 – Diferença de fases ao longo das etapas de uma simulação. Podemos perceber que inicialmente as fases são espaçadas, e ao longo da simulação essas fases tendem se tornar próximas de 0, ou seja, a diferença das fases entre todos os osciladores se torna constante e muito pequena.

bem o que esperamos da sincronização por modelo de Kuramoto: Fases que inicialmente são desordenadas e tendem a sincronizar mantendo as suas diferenças constantes entre os diversos osciladores. Vale a pena destacar que **altas diferenças de fase não significam que os osciladores não estejam sincronizados**; Os osciladores podem estar com alto nível de sincronização e ainda sim as diferenças de fase serem altas.

## 5.2 Aplicação do modelo de Kuramoto à simulação de distribuição de riquezas

Antes de começar a exposição de nossa proposta, é preciso que se façam alguns avisos importantes. **Essa aplicação do modelo de Kuramoto é original** e como veremos posteriormente, apresenta resultados compatíveis com o esperado.

Usamos o modelo de Kuramoto pois ele fornece uma quantidade interessante de parâmetros, tornando o modelo um tanto mais complexo, porém, tão mais adequado à

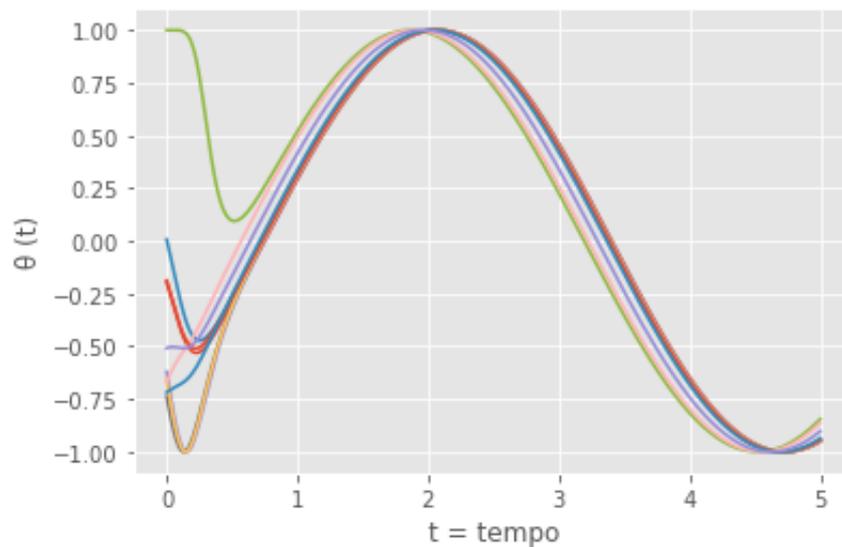


Figura 35 – Fases ao longo do tempo. Inicialmente cada oscilador possui sua própria fase, ou seja, todos estão dessincronizados. Ao longo da simulação eles tendem a sincronizar e então as diferenças de fases se tornam constantes, e para esse caso, próximas de zero.

procura de curvas de distribuição que representem situações reais. Vamos analisar alguns pontos no modelo tradicional de trocas entre agentes:

- Ao escolhermos dois agentes, o único parâmetro que diferencia-os é a renda de cada um;
- As probabilidades de troca em geral são fixas ou números puramente aleatórios;
- Os agentes em geral não possuem nenhuma característica que os diferencie dos demais. O que geralmente torna difícil categorizar os diversos estratos existentes em uma sociedade;
- Os modelos não consideram, ou ao menos não deixam claro, uma interferência ou choque externo nesses sistemas. Algo que poderia ser compreendido como uma interferência governamental ou situação atípica, como por exemplo uma pandemia.

O modelo de Kuramoto consegue, a princípio, englobar respostas para todos esses pontos. Se consideramos cada agente dessa economia como um oscilador, podemos então descrever:

- A frequência natural  $\omega_i$  de cada oscilador funcionará como um resumo das características individuais de cada agente (oscilador) nessa economia;
- O parâmetro  $\sigma$  funciona como o choque externo nessa economia, ou seja, o fator externo que controla o nível de sincronização desses osciladores. Um elevado valor para  $\sigma$  funcionaria como uma espécie de imposição governamental;

- Existe ainda a possibilidade de agregarmos a  $\sigma$  uma constante  $\gamma_{ij}$  que funcionaria como uma interação particular entre dois indivíduos. Assim, as interações entre esses agentes poderiam ter características próprias a depender do par escolhido;

### 5.2.1 Algoritmo da distribuição de riqueza utilizando o modelo de Kuramoto

Vamos discutir o processo utilizado para gerar as curvas da distribuição de riqueza.

- Primeiro geramos um sistema de  $N = 500$  osciladores;
- As frequências naturais de cada oscilador são dadas por um número aleatório de uma distribuição log-normal com média 0 e desvio padrão 1;
- Fazemos simulações para diversos valores de  $\sigma$ , o que irá gerar diferentes acoplamentos para os sistemas;
- Quando o sistema se torna estável, usamos as diferenças de fases para caracterizar as probabilidades nas negociações;
- a probabilidade entre os agentes  $i$  e  $j$  é dada por  $P_{ij} = 1 - \sin^2(\theta_i - \theta_j)$ ;
- Escolhemos dois agentes  $i$  e  $j$ . Calculamos a probabilidade entre eles dois. Sorteamos um número aleatório entre 0 e 1, se esse for maior que a probabilidade, o mais pobre perderá uma fração  $\delta W$  de sua riqueza que será entregue ao mais rico. Se o número aleatório for menor que a probabilidade  $P_{ij}$ , o mais pobre dos dois ganhará  $\delta W$  da riqueza do mais rico;
- Em todas as simulações  $\delta = 0.33$ ;
- Repetimos a etapa anterior um número  $N = 1000000$  de vezes.

**Duas fases distantes significa baixa probabilidade de favorecer o mais pobre desses agentes, duas fases próximas significa alta probabilidade.** Se os dois agentes tem fases muito próximas  $P \approx 1$ , então será muito difícil que o número aleatório sorteado seja maior que  $P_{ij}$ . Em nossas simulações, conseguimos resgatar com precisão as distribuições apresentadas nos artigos que estudam o *Yard Sale Model*.

As figuras em 36 demonstram os resultados encontrados em nossas simulações. Se as fases são muito espaçadas e sem nenhuma ordem a priori, teremos uma distribuição de riqueza muito desigual. Mas por que isso acontece? Com fases mais espaçadas, a probabilidade de pegarmos dois agentes que terão  $P_{ij} \approx 0$  é maior, ou seja, há uma alta probabilidade

de que ocorram negociações onde o agente com maior riqueza sairá vencedor.

A contrapartida é: Quando as fases estão muito próximas a probabilidade média será  $P_{ij} \approx 1$ , ou seja, o número aleatório terá de ser muito próximo de 1 para o agente mais rico saia vencedor na negociação. Um caso raro mas possível, basta percebermos que a distribuição na figura 36(d) não demonstra ser perfeitamente gaussiana pois existem algumas distorções.

Na figura 36(g) e 36(h) temos uma situação interessante. Formam-se dois *clusters*, então a probabilidade média fica em torno de  $P_{ij} \approx 0.65$  pois agentes que estão no mesmo *cluster* tem diferenças de fase muito baixas, mas quando em *clusters* diferentes, as diferenças tendem a ser altas.

Vale a pena destacar que a **sincronização do sistema está relacionada à diferença entre as fases ser constante, e não com o valor absoluto dessa diferença**. Um sistema pode apresentar uma diferença média de fases alta, como em 36-e e estar perfeitamente sincronizado. Vamos então observar a diferença de fases média para cada valor de  $\sigma$ . A figura 38 mostra a diferença média das fases dos osciladores para vários valores de  $\sigma/K$ . Um valor particularmente interessante para o parâmetro de acoplamento  $\sigma/K$  é de 0.2449, mostrado na figura 36-c e d como sendo aquele que gera acoplamento com a menor diferença média entre fases.

### 5.2.2 Introdução do fator $\gamma_i$

Todas as simulações até aqui apresentadas foram realizadas com os mesmos valores da constante de acoplamento  $K/N$  para todos os osciladores. Mas e se cada oscilador tivesse o seu próprio fator de acoplamento, por exemplo, um  $\sigma_i = \sigma\gamma_i$ . Quais seriam as mudanças finais nas distribuições de riqueza?

A simulação apresentada na figura 38 foi executada com os seguintes parâmetros:

- Número de osciladores  $N = 500$ ;
- $\sigma = K/N = 0.2449$ ;
- $\delta = 0.33$ ;
- Cada agente possui um fator  $\gamma_i$  que é um número aleatório entre 0 e 1.

A ideia aqui é analisar a situação em que agentes possuam fator  $\gamma_i \approx 0$ , ou seja, osciladores que tendem a não sincronizar. Podemos perceber em 38-b que apesar de  $K/N$  ser o valor da constante de acoplamento que minimiza a média das diferenças de fases, haverá osciladores que não irão sincronizar, como podemos perceber em 38-a. A consequência é que a distribuição que antes era uma gaussiana quase perfeita, agora possui alterações. Esses poucos indivíduos que não sincronizam são suficientes para gerar anomalias na distribuição de riqueza esperada. Imagine a seguinte situação para que seja feita uma analogia com o que acontece nas simulações:

- O governo de um país aumenta a porcentagem de taxaçoão da renda e riqueza, a fim de diminuir a desigualdade em sua economia. Uma açãõ um tanto quanto radical e com alto nível de interferência na economia desse país. Porém os 10 indivíduos mais ricos dessa economia são contrários à essa açãõ do governo e então enviam para outro país suas riquezas ou sonegam seus impotos. A arrecadação que era esperada será menor, o que irá gerar distorções na nova curva de riqueza esperada.

As figuras 36-d e 36-f mostram que uma variação sutil nos acoplamentos dos osciladores gera distorções expressivas nas curvas de distribuição de renda. A introdução do fator  $\gamma_i$  cria a possibilidade de termos mais um parâmetro para realizarmos o ajuste fino nos resultados dessas distribuições. Diferentemente do modelo apresentado no capítulo anterior, que trabalhava apenas com um parâmetro  $T$ .

### 5.2.2.1 O parâmetro de ordem no modelo de Kuramoto aplicado ao contexto econômico

Buscando uma interpretação para o parâmetro de ordem do modelo de Kuramoto, que é dado por:

$$r(t)e^{i\theta_j} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N e^{i\theta_i}, \quad (5.7)$$

nos deparamos com um obstáculo, que é colocado por conta de nossa aplicação em sistemas econômicos. Observando apenas a equação acima, podemos chegar a uma simples interpretação: Nosso parâmetro de ordem será a diferença de fases entre os osciladores, portanto, a diferença entre da posição social que cada agente ocupa nesse sistema. Vamos lembrar que quanto menor a diferença dessas fases, menor a desigualdade de riquezas nesse sistema.

A nossa aplicação, no entanto, é uma combinação do modelo de Kuramoto com *Yard Sale Model*, assim, é preciso desenvolver essa interpretação original sobre um parâmetro que englobe o resultado dos processos. Aqui o parâmetro de ordem, precisa ser coerente com nossa análise, então vamos propor a seguinte interpretação:

Neste modelo, as distribuições de riqueza são mais ou menos desiguais de acordo com a proximidade da fase dos agentes, representados por osciladores. Quanto menor forem as diferenças fases, menos desigual será a curva, maiores sejam as diferenças, mais desigual será a curva. Uma boa sugestão para um parâmetro de ordem, seria então, uma média das diferenças de fase dos osciladores, algo da forma:

$$P = \sum_{i,j} \frac{\Delta\theta_{ij}}{2}, \quad (5.8)$$

como  $\Delta\theta_{ij} = \Delta\theta_{ji}$  adicionamos um fator  $1/2$ . Essa seria possivelmente uma boa aproximação para um parâmetro de ordem coerente com nosso modelo. Para valores altos de  $P$ , temos um sistemas que em média esses osciladores estão muito afastados, o que como vimos, gera distribuições desiguais de riqueza. Para  $P \approx 0$ , os osciladores estão muito próximos, gerando uma distribuição mais equalitária.

Outra observação interessante que realizamos é que, essa aplicação do modelo de Kuramoto pode ser melhorada se consideramos outro fator, as distâncias espaciais dos agentes. Ou seja, os agentes não teriam apenas um fator  $\omega_i$  que representa suas

características pessoais, mas terão também um ponto bem definido no espaço. Poderíamos então considerar que agentes mais próximos espacialmente tendem a se influenciar mais.

### 5.2.3 Uma breve discussão sobre o modelo de Kuramoto na análise das distribuições de riqueza

O modelo de Kuramoto oferece uma cobertura melhor e mais ampla para reproduzirmos essas curvas de distribuição de riqueza. Utilizando esse modelo, podemos usar os parâmetros  $\omega_i$ ,  $K/N$  e  $\gamma_i$  como representações do mundo real, ou seja, a princípio podemos usar essa variedade de opções para gerar distribuições empíricas de economias.

Temos agora interações específicas entre os agentes, diferentemente do modelo *Yard Sale* mais simples, que considerava um valor único para todas as interações. Podemos também encontrar uma forma, de por exemplo, usar o parâmetro  $K/N$  como uma função da taxa de um país em específico, ou seu PIB, de forma a recuperar com alguma precisão sua distribuição de riqueza. Além disso, podemos observar que para diferentes valores de  $K/N$  o sistema resultou em diferentes distribuições, ou seja, mantidas constantes as outras variáveis, esse parâmetro controla as transições de fase nesses sistemas. Apesar de ainda não ser possível abordar todos os aspectos técnicos, como por exemplo pontos críticos nessas distribuições, acreditamos que com o modelo de Kuramoto podemos caminhar ao desenvolvimento de uma teoria bastante abrangente.

Reproduzir essas curvas de distribuição reais dos países é a proposta para trabalhos futuros utilizando o modelo de Kuramoto e todo o leque de recursos que esse nos oferece.

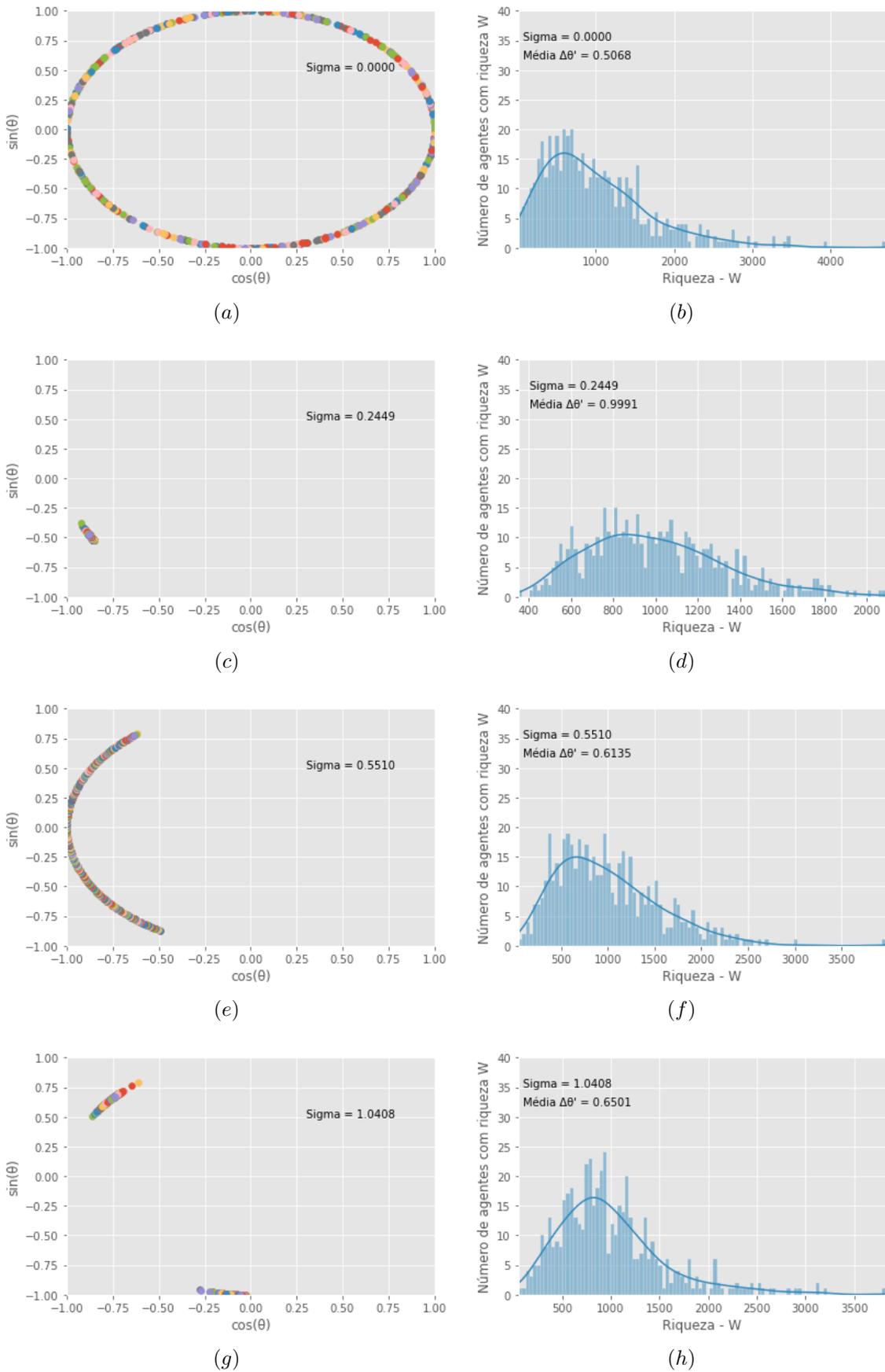


Figura 36 – Distribuições de fases no plano e suas respectivas distribuições de riqueza. Nas legendas: Média  $\Delta\theta' = \overline{P_{ij}}$  e Sigma =  $K/N$

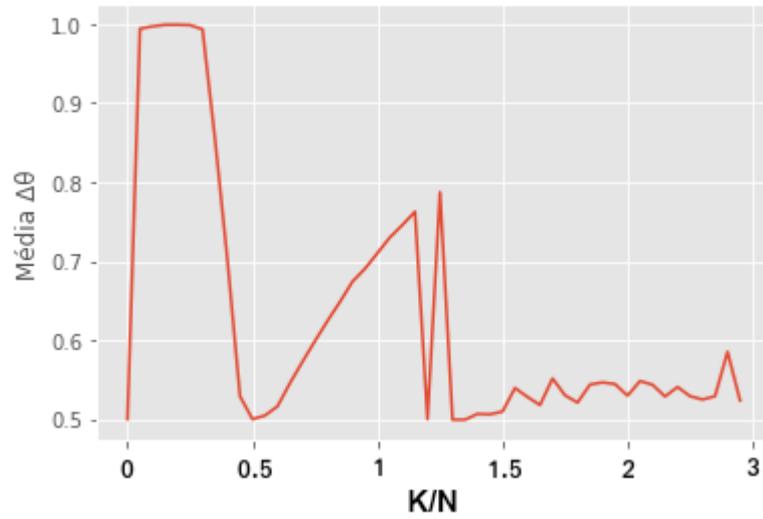
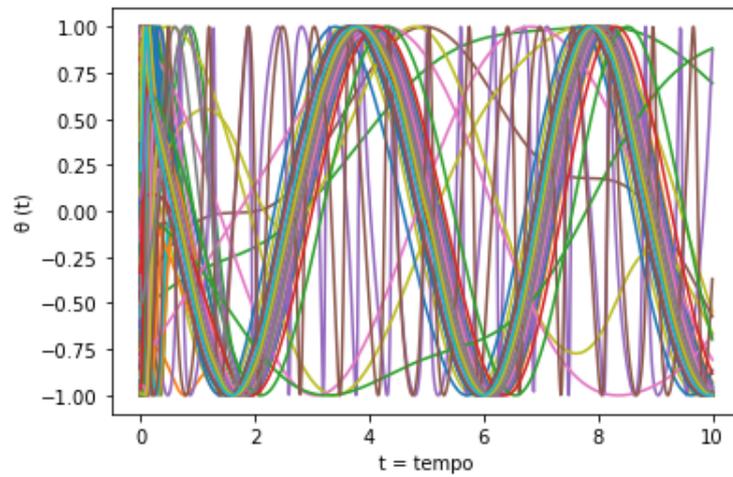
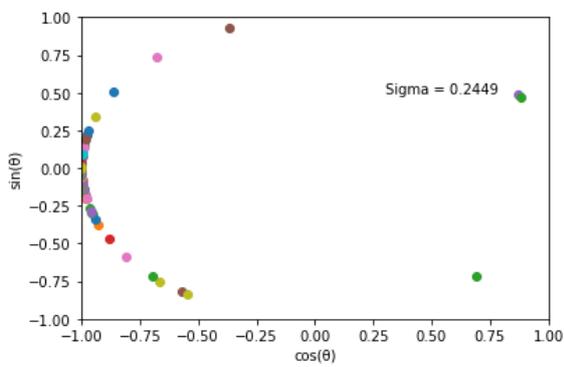


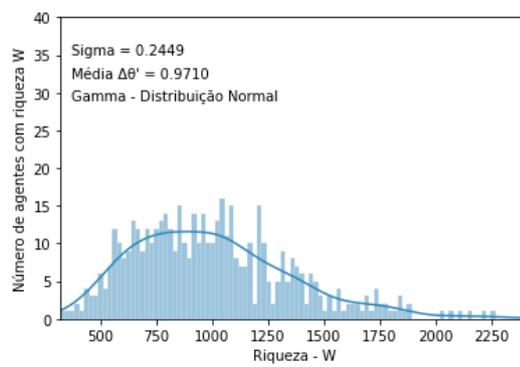
Figura 37 – Diferença média das fases em função de vários valores para  $K/N$ .



(a)



(b)



(c)

Figura 38

## 6 Conclusão

Buscamos neste desenvolver uma análise crítica mas propositiva do estudo das curvas de distribuição de riqueza. A conclusão deste trabalho passa primeiramente por algumas críticas aos modelos usados. Entendemos que o *Yard Sale Model* é um modelo introdutório, que funciona como uma apresentação aos métodos e que não tem a pretensão de solucionar os problemas referentes às análises sobre as distribuições de riqueza. O ponto é que, em alguns dos artigos que estudamos, esse modelo é usado com rigor desproporcional à capacidade de suas aplicações. Em geral, gerar curvas que se assemelham às de distribuição de renda, pode ou não significar algo com rigor científico. Mesmo no contexto em que há um processo lógico que corresponda ao processo econômico, os resultados podem significar apenas um sorteio aleatório de números. Este trabalho buscou apontar, para cada um dos modelos, suas aplicações úteis e mais adequadas.

No capítulo 2, ao apresentarmos a teoria do excedente, buscamos introduzir o leitor a um modelo que parte da análise do processo econômico e social da distribuição da riqueza. Apesar do excelente fundamento teórico, este vai falhar em suas propriedades técnicas e quantitativas. O algoritmo desenvolvido a partir da teoria do excedente, não oferece em si, mecanismos para estudarmos as transições de fase aqui propostas e nem as redistribuições de riqueza. No capítulo 3, com o modelo oriundo da equação de Fokker-Planck já não temos o mesmo rigor na análise do comportamento econômico. O que percebemos ao longo deste trabalho, é que o material produzido nessa área, em geral, é muito técnico, com implementação pouco didática e que não busca representar o fenômeno real. Esse é um problema que precisa ser discutido. Imagine um modelo de estrutura da matéria que não serve para explicar fenômenos de espectroscopia. Ou um modelo quântico que não serve para explicar os fenômenos ondulatórios ou os estados atômicos. Em geral, é isso que está acontecendo com os modelos de distribuição de renda. Geram curvas semelhantes às de distribuição de renda, mas não comparam com as curvas reais dos países.

O trabalho, e mais especificamente o modelo de Kuramoto utilizado no capítulo 5, apresentou um bom caminho para chegarmos mais próximos de distribuições de riqueza condizentes com a realidade. O grande ponto desse modelo é que ele foi muito oneroso computacionalmente e de aplicação pouquíssimo simples. Mais se cabe uma avaliação positiva, essa vai no ponto em que o modelo de Kuramoto nos oferece parâmetros o bastante para buscarmos distribuições de riqueza compatíveis com a realidade.

É preciso então destacar pontos positivos e negativos de nossa abordagem:

- Ampla variedade de parâmetros para que sejam feitos os ajustes até chegarmos à distribuições de riqueza reais;
- Alto rigor técnico e conceitual sobre o problema;
- Possibilidade de novas implementações ou alterações no modelo já proposto.

Os pontos negativos:

- Custo computacional elevado;
- Pouco didático e pouco intuitivo;
- Carente ainda de um explicação do fenômeno econômico que gera o modelo computacional.

Em suma, em nossas observações concluímos que os modelos apresentados não reproduzem com rigor os resultados esperados para a realidade de uma economia, e na tentativa de chegar a esses resultados nos deparamos com modelos computacionais muito complexos. Entretanto, esses modelos são didáticos o bastante para introduzir o leitor a conceitos iniciais muito importantes, como a ideia inicial de como funcionam processos econômicos básicos. Apesar dos requisitos para a compreensão dos tópicos serem relativamente altos, esse trabalho pode representar uma síntese de como trabalhar com problemas de econofísica e outros sistemas computacionais.

# Bibliografia

- [1] Perry Anderson. “Passagens da antiguidade ao feudalismo”. Em: Editora brasiliense, 1987.
- [2] Eric Hobsbawm. *A era do capital: 1848-1875*. Editora Paz e Terra, 2015.
- [3] Vasiliki Plerou, Parameswaran Gopikrishnan e H Eugene Stanley. “Two-phase behaviour of financial markets”. Em: *Nature* 421.6919 (2003), pp. 130–130.
- [4] Victor M Yakovenko. “Econophysics, statistical mechanics approach to”. Em: *arXiv preprint arXiv:0709.3662* (2007).
- [5] Victor M Yakovenko e J Barkley Rosser Jr. “Colloquium: Statistical mechanics of money, wealth, and income”. Em: *Reviews of modern physics* 81.4 (2009), p. 1703.
- [6] Silvio RA Salinas. *Introdução a física estatística vol. 09*. Edusp, 1997.
- [7] Daniel V Schroeder. *An introduction to thermal physics*. 1999.
- [8] Giuseppe Mussardo. *Statistical field theory: an introduction to exactly solved models in statistical physics*. Oxford University Press, 2010.
- [9] L. C Lapas, I. V. L Costa, M. H Vainstein e F. A Oliveira. “Entropy, non-ergodicity and non-Gaussian behaviour in ballistic transport”. Em: *Europhysics Letters (EPL)* 77.3 (jan. de 2007), p. 37004. DOI: <10.1209/0295-5075/77/37004>. URL: <<https://doi.org/10.1209/0295-5075/77/37004>>.
- [10] José-Roberto Iglesias, Sebastian Gonçalves, Guillermo Abramson e José-Luis Vega. “Correlation between risk aversion and wealth distribution”. Em: *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 342.1-2 (2004), pp. 186–192.
- [11] JR Iglesias, S Gonçalves, S Pianegonda, JL Vega e G Abramson. “Wealth redistribution in our small world”. Em: *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 327.1-2 (2003), pp. 12–17.
- [12] Bruce M Boghosian. “Is inequality inevitable”. Em: *Sci. Am* 321 (2019), pp. 70–77.
- [13] Bruce M Boghosian, Adrian Devitt-Lee, Merek Johnson, Jie Li, Jeremy A Marq e Hongyan Wang. “Oligarchy as a phase transition: The effect of wealth-attained advantage in a Fokker–Planck description of asset exchange”. Em: *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 476 (2017), pp. 15–37.
- [14] John Angle. “The surplus theory of social stratification and the size distribution of personal wealth”. Em: *Social Forces* 65.2 (1986), pp. 293–326.
- [15] Vilfredo Pareto. *Manual d’Economia Política - 2ª Edição*. Editora Nova Cultural LTDA. 1987.

- 
- [16] David Harvey. *Para entender O Capital-livro 1*. Boitempo Editorial, 2015.
- [17] Milton Santos. “Pobreza urbana”. Em: *Pobreza urbana*. 2009.
- [18] Adam Smith. *A Riqueza das Nações-Adam Smith: Vol. I*. Vol. 1. LeBooks Editora, 2020.
- [19] Adrian Bejan, Marcelo R Errera e Umit Gunes. “Energy theory of periodic economic growth”. Em: *International Journal of Energy Research* 44.7 (2020), pp. 5231–5242.
- [20] Hernando Quevedo e Maria N Quevedo. “Statistical thermodynamics of economic systems”. Em: *Journal of Thermodynamics* 2011 (2011).
- [21] AM Tishin e OB Baklitskaya. “EconoThermodynamics, or the world economy"thermal death"paradox”. Em: *arXiv preprint arXiv:0807.0372* (2008).
- [22] Robert Brown. “XXVII. A brief account of microscopical observations made in the months of June, July and August 1827, on the particles contained in the pollen of plants; and on the general existence of active molecules in organic and inorganic bodies”. Em: *The philosophical magazine* 4.21 (1828), pp. 161–173.
- [23] Robert Brown. *A brief account of microscopical observations made... on the particles contained in the pollen of plants, and on the general existence of active molecules in organic and inorganic bodies*. 1828.
- [24] Paul Langevin. *On the theory of Brownian motion*. 1908.
- [25] Harry Nyquist. “Thermal agitation of electric charge in conductors”. Em: *Physical review* 32.1 (1928), p. 110.
- [26] John Bertrand Johnson. “Thermal agitation of electricity in conductors”. Em: *Physical review* 32.1 (1928), p. 97.
- [27] Lars Onsager. “Reciprocal relations in irreversible processes. I.” Em: *Physical review* 37.4 (1931), p. 405.
- [28] Herbert B Callen e Theodore A Welton. “Irreversibility and generalized noise”. Em: *Physical Review* 83.1 (1951), p. 34.
- [29] Herbert B Callen e Richard F Greene. “On a theorem of irreversible thermodynamics”. Em: *Physical Review* 86.5 (1952), p. 702.
- [30] Frank Jülicher, Armand Ajdari e Jacques Prost. “Modeling molecular motors”. Em: *Reviews of Modern Physics* 69.4 (1997), p. 1269.
- [31] R Dean Astumian e Martin Bier. “Fluctuation driven ratchets: molecular motors”. Em: *Physical review letters* 72.11 (1994), p. 1766.
- [32] Manfred Schliwa e Günther Woehlke. “Molecular motors”. Em: *Nature* 422.6933 (2003), pp. 759–765.

- [33] Massimo Baroncini, Serena Silvi e Alberto Credi. “Photo-and redox-driven artificial molecular motors”. Em: *Chemical reviews* 120.1 (2019), pp. 200–268.
- [34] Debashish Chowdhury. “Stochastic mechano-chemical kinetics of molecular motors: a multidisciplinary enterprise from a physicist’s perspective”. Em: *Physics Reports* 529.1 (2013), pp. 1–197.
- [35] R Dean Astumian e Martin Bier. “Mechanochemical coupling of the motion of molecular motors to ATP hydrolysis”. Em: *Biophysical journal* 70.2 (1996), pp. 637–653.
- [36] Peter M Hoffmann. “How molecular motors extract order from chaos (a key issues review)”. Em: *Reports on Progress in Physics* 79.3 (2016), p. 032601.
- [37] Jing-Dong Bao e Yi-Zhong Zhuo. “Ballistic diffusion induced by a thermal broadband noise”. Em: *Physical review letters* 91.13 (2003), p. 138104.
- [38] Jing-Dong Bao, Yi-Zhong Zhuo, Fernando A Oliveira e Peter Hänggi. “Intermediate dynamics between Newton and Langevin”. Em: *Physical Review E* 74.6 (2006), p. 061111.
- [39] Guilherme Nettesheim, Ibtissem Nabti, Chandrashekhar U Murade, Gabriel R Jaffe, Stephen J King e George T Shubeita. “Macromolecular crowding acts as a physical regulator of intracellular transport”. Em: *Nature Physics* 16.11 (2020), pp. 1144–1151.
- [40] Carlos Conca, Jesus Ildefonso Diaz, Amable Linan e Claudia Timofte. “Homogenization in chemical reactive flows.” Em: *Electronic Journal of Differential Equations (EJDE)[electronic only]* 2004 (2004), Paper–No.
- [41] Luca Gammaitoni, Peter Hänggi, Peter Jung e Fabio Marchesoni. “Stochastic resonance”. Em: *Reviews of modern physics* 70.1 (1998), p. 223.
- [42] Roberto Benzi, Alfonso Sutera e Angelo Vulpiani. “The mechanism of stochastic resonance”. Em: *Journal of Physics A: mathematical and general* 14.11 (1981), p. L453.
- [43] A-L Barabási, Harry Eugene Stanley et al. *Fractal concepts in surface growth*. Cambridge university press, 1995.
- [44] Samuel Frederick Edwards e DR Wilkinson. “The surface statistics of a granular aggregate”. Em: *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences* 381.1780 (1982), pp. 17–31.
- [45] Mehran Kardar, Giorgio Parisi e Yi-Cheng Zhang. “Dynamic scaling of growing interfaces”. Em: *Physical Review Letters* 56.9 (1986), p. 889.

- [46] Alex Hansen, Jean Schmittbuhl, G George Batrouni e Fernando A de Oliveira. “Normal stress distribution of rough surfaces in contact”. Em: *Geophys. Res. Lett.* 27.22 (2000), pp. 3639–3642.
- [47] Bernardo A. Mello, Alaor S. Chaves e Fernando A. Oliveira. “Discrete atomistic model to simulate etching of a crystalline solid”. Em: *Phys. Rev. E* 63 (4 mar. de 2001), p. 041113. DOI: <[10.1103/PhysRevE.63.041113](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.63.041113)>. URL: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.63.041113>>.
- [48] Evandro A Rodrigues, Bernardo A Mello e Fernando A Oliveira. “Growth exponents of the etching model in high dimensions”. Em: *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* 48.3 (dez. de 2014), p. 035001. DOI: <[10.1088/1751-8113/48/3/035001](https://doi.org/10.1088/1751-8113/48/3/035001)>. URL: <<https://doi.org/10.1088/1751-8113/48/3/035001>>.
- [49] Waldenor P. Gomes, André L. A. Penna e Fernando A. Oliveira. “From cellular automata to growth dynamics: The Kardar-Parisi-Zhang universality class”. Em: *Phys. Rev. E* 100 (2 ago. de 2019), p. 020101. DOI: <[10.1103/PhysRevE.100.020101](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.100.020101)>. URL: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.100.020101>>.
- [50] Washington S. Alves, Evandro A. Rodrigues, Henrique A. Fernandes, Bernardo A. Mello, Fernando A. Oliveira e Ismael V. L. Costa. “Analysis of etching at a solid-solid interface”. Em: *Phys. Rev. E* 94 (4 out. de 2016), p. 042119. DOI: <[10.1103/PhysRevE.94.042119](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.94.042119)>. URL: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.94.042119>>.
- [51] Márcio S. Gomes-Filho e Fernando A. Oliveira. “The hidden fluctuation-dissipation theorem for growth sup(a)/sup”. Em: *Europhysics Letters* 133.1 (jan. de 2021), p. 10001. DOI: <[10.1209/0295-5075/133/10001](https://doi.org/10.1209/0295-5075/133/10001)>. URL: <<https://doi.org/10.1209/0295-5075/133/10001>>.
- [52] Márcio S. Gomes-Filho, André L.A. Penna e Fernando A. Oliveira. “The Kardar-Parisi-Zhang exponents for the 2+1 dimensions”. Em: *Results in Physics* 26 (2021), p. 104435. ISSN: 2211-3797. DOI: <<https://doi.org/10.1016/j.rinp.2021.104435>>. URL: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2211379721005520>>.
- [53] Petrus H. R. dos Anjos, Márcio S. Gomes-Filho, Washington S. Alves, David L. Azevedo e Fernando A. Oliveira. “The Fractal Geometry of Growth: Fluctuation–Dissipation Theorem and Hidden Symmetry”. Em: *Frontiers in Physics* 9 (2021). ISSN: 2296-424X. DOI: <[10.3389/fphy.2021.741590](https://doi.org/10.3389/fphy.2021.741590)>. URL: <<https://www.frontiersin.org/article/10.3389/fphy.2021.741590>>.
- [54] V Gontis, J Ruseckas e A Kononovičius. “A long-range memory stochastic model of the return in financial markets”. Em: *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 389.1 (2010), pp. 100–106.

- [55] John Urry. “Small worlds and the new ‘social physics’”. Em: *Global networks* 4.2 (2004), pp. 109–130.
- [56] Mickaël D Chekroun, Eric Simonnet e Michael Ghil. “Stochastic climate dynamics: Random attractors and time-dependent invariant measures”. Em: *Physica D: Nonlinear Phenomena* 240.21 (2011), pp. 1685–1700.
- [57] Hazime Mori. “Transport, collective motion, and Brownian motion”. Em: *Progress of theoretical physics* 33.3 (1965), pp. 423–455.
- [58] Ryogo Kubo, Mario Yokota e Sadao Nakajima. “Statistical-mechanical theory of irreversible processes. II. Response to thermal disturbance”. Em: *Journal of the Physical Society of Japan* 12.11 (1957), pp. 1203–1211.
- [59] Rogerio CC Leite, Robert S Moore e Sergio PS Porto. “Use of a Gas Laser in Studies of the Depolarization of the Rayleigh Scattering from Simple Liquids”. Em: *The Journal of Chemical Physics* 40.12 (1964), pp. 3741–3742.
- [60] AF Penna, A Chaves, P da R Andrade e Sergio PS Porto. “Light scattering by lithium tantalate at room temperature”. Em: *Physical Review B* 13.11 (1976), p. 4907.
- [61] Rudolph A Marcus. “Exchange reactions and electron transfer reactions including isotopic exchange. Theory of oxidation-reduction reactions involving electron transfer. Part 4.—A statistical-mechanical basis for treating contributions from solvent, ligands, and inert salt”. Em: *Discussions of the Faraday Society* 29 (1960), pp. 21–31.
- [62] F. A. Oliveira. “Time-Reversal symmetry in light scattering by excitations in a film”. Em: *Solid State Commun.* 40 (1981), pp. 859–861.
- [63] R. Loudon. *The Quantum Theory of Light*. New York: Oxford University Press, 2000.
- [64] M. B. L. Santos, E. A. Oliveira e A. M. F. Neto. “Rayleigh scattering of a new lyotropic nematic liquid crystal system: crossover of propagative and diffusive behavior”. Em: *Liq. Cryst.* 27 (2000), p. 1485.
- [65] F. Benmouna, B. Peng, J. Gapinski, A. Patkowski, J. Ruhe e D. Johannsmann. “Dynamic light scattering from liquid crystal polymer brushes swollen in a nematic solvent”. Em: *Liq. Cryst.* 28 (2001), p. 1353.
- [66] FA Oliveira, MG Cottam e DR Tilley. “Green functions, power spectra, and Raman scattering of thin film polaritons”. Em: *physica status solidi (b)* 107.2 (1981), pp. 737–747.

- [67] A. Rahman, K. S. Singwi e A. Sjölander. “Stochastic Model of a Liquid and Cold Neutron Scattering. II”. Em: *Phys. Rev.* 126 (3 mai. de 1962), pp. 997–1004. DOI: <[10.1103/PhysRev.126.997](https://doi.org/10.1103/PhysRev.126.997)>. URL: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.126.997>>.
- [68] Renat M. Yulmetyev, Anatolii V. Mokshin e Peter Hänggi. “Diffusion time-scale invariance, randomization processes, and memory effects in Lennard-Jones liquids”. Em: *Phys. Rev. E* 68 (5 nov. de 2003), p. 051201. DOI: <[10.1103/PhysRevE.68.051201](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.68.051201)>. URL: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.68.051201>>.
- [69] J. Florencio e M. H. Lee. “Exact time evolution of a classical harmonic-oscillator chain”. Em: *Phys. Rev. A* 31 (1985), p. 3231.
- [70] J. A. Odell e M. A. Taylor. “Dynamics and thermomechanical stability of DNA in solution”. Em: *Biopolymers* 34 (1994), p. 1483.
- [71] R. Toussaint, G. Helgesen e E. G. Flekkøy. “Dynamic Roughening and Fluctuations of Dipolar Chains”. Em: *Phys. Rev. Lett.* 93 (2004), p. 108304. DOI: <[10.1103/PhysRevLett.93.108304](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.93.108304)>.
- [72] T. P. Doerr e P. L. Taylor. “Breaking in polymer chains. I. The harmonic chain”. Em: *The Journal of Chemical Physics* 101.11 (1994), pp. 10107–10117.
- [73] F. A. Oliveira e J. A. Gonzalez. “Bond-stability criterion in chain dynamics”. Em: *Phys. Rev. B* 54 (6 ago. de 1996), pp. 3954–3958. DOI: <[10.1103/PhysRevB.54.3954](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.54.3954)>. URL: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.54.3954>>.
- [74] F. A. Oliveira. “Transition-state analysis for fracture nucleation in polymers: The Lennard-Jones chain”. Em: *Phys. Rev. B* 57 (17 mai. de 1998), pp. 10576–10582.
- [75] Armando M. Maroja, Fernando A. Oliveira, Michał Cie śła e Lech Longa. “Polymer fragmentation in extensional flow”. Em: *Phys. Rev. E* 63 (6 mai. de 2001), p. 061801. DOI: <[10.1103/PhysRevE.63.061801](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.63.061801)>. URL: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.63.061801>>.
- [76] Cristiano L. Dias, Martin Dubé, Fernando A. Oliveira e Martin Grant. “Scaling in force spectroscopy of macromolecules”. Em: *Phys. Rev. E* 72 (1 jul. de 2005), p. 011918. DOI: <[10.1103/PhysRevE.72.011918](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.72.011918)>. URL: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.72.011918>>.
- [77] Anirban Sain, Cristiano L. Dias e Martin Grant. “Rupture of an extended object: A many-body Kramers calculation”. Em: *Phys. Rev. E* 74 (4 out. de 2006), p. 046111. DOI: <[10.1103/PhysRevE.74.046111](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.74.046111)>. URL: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.74.046111>>.

- [78] DL Azevedo, Kleber AT da Silva, PW Mauriz, GM Viswanathan e FA Oliveira. “Fractal behavior of poly (GC) and poly (TA) DNA segments arranged in quasi-periodic Fibonacci sequence”. Em: *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 445 (2016), pp. 27–34.
- [79] Jing-Dong Bao. “Transport in a flashing ratchet in the presence of anomalous diffusion”. Em: *Phys. Lett. A* 314.3 (2003), pp. 203–208. ISSN: 0375-9601. DOI: <10.1016/S0375-9601(03)00910-1>. URL: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0375960103009101>>.
- [80] Q Qiu, X-Y Shi e J-D Bao. “Mixed nonergodicity of a forced system and its non-stationary strength”. Em: *EPL (Europhysics Letters)* 128.2 (2019), p. 20005.
- [81] Jeppe C. Dyre e Thomas B. Schrøder. “Universality of AC conduction in disordered solids”. Em: *Rev. Mod. Phys.* 72 (3 jul. de 2000), pp. 873–892. DOI: <10.1103/RevModPhys.72.873>. URL: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.72.873>>.
- [82] F. A. Oliveira, R. Morgado, A. Hansen e J. M. Rubi. “Superdiffusive conduction: AC conductivity with correlated noise”. Em: *Physica A* 357 (2005), pp. 115–121. DOI: <10.1016/j.physa.2005.05.056>.
- [83] H. A. Kramers. “Brownian motion in a field of force and the diffusion model of chemical reactions”. Em: *Physica* 7 (1940), p. 284.
- [84] F. A. Oliveira. “Reaction rate theory for non-Markovian systems”. Em: *Physica A* 257 (1998), p. 128.
- [85] P. Hänggi e H. Thomas. “Time evolution, correlations, and linear response of non-Markov processes”. Em: *Z. Physik B* 26 (1977), p. 85. DOI: <10.1007/BF01313376>.
- [86] Peter Hänggi, Peter Talkner e Michal Borkovec. “Reaction-rate theory: fifty years after Kramers”. Em: *Rev. Mod. Phys.* 62 (2 abr. de 1990), pp. 251–341. DOI: <10.1103/RevModPhys.62.251>. URL: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.62.251>>.
- [87] J. A. Gonzalez e F. A. Oliveira. “Nucleation theory, the escaping processes, and nonlinear stability”. Em: *Phys. Rev. B* 59 (1999), p. 6100.
- [88] S. Boccaletti, J. Kurths, G. Osipov, D. L. Valladares e C. S. Zhou. “The synchronization of chaotic systems”. Em: *Phys. Rep.* 366 (2002), pp. 1–101.
- [89] L. Longa, E. M. F. Curado e F. A. Oliveira. “Roundoff-induced coalescence of chaotic trajectories”. Em: *Phys. Rev. E* 54 (1996), R2201.
- [90] Amos Maritan e Jayanth R Banavar. “Chaos, noise, and synchronization”. Em: *Physical Review Letters* 72.10 (1994), p. 1451.

- [91] M. Cieřła, S. P. Dias, L. Longa e F. A. Oliveira. “Synchronization induced by Langevin dynamics”. Em: *Phys. Rev. E* 63 (6 mai. de 2001), p. 065202. DOI: <[10.1103/PhysRevE.63.065202](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.63.065202)>. URL: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.63.065202>>.
- [92] Grigory V Osipov, Jürgen Kurths e Changsong Zhou. *Synchronization in oscillatory networks*. Springer Science & Business Media, 2007.
- [93] R. Morgado, M. Cieřła, L. Longa e F. A. Oliveira. “Synchronization in the presence of memory”. Em: *Europhys. Lett.* 79 (2007), p. 10002. DOI: <[10.1209/0295-5075/79/10002](https://doi.org/10.1209/0295-5075/79/10002)>.
- [94] Juergen Siepmann e Florence Siepmann. “Modeling of diffusion controlled drug delivery”. Em: *Journal of Controlled Release* 161.2 (2012). Drug Delivery Research in Europe, pp. 351–362.
- [95] Márcio Sampaio Gomes Filho, Fernando Albuquerque Oliveira e Marco Aurélio Alves Barbosa. “A statistical mechanical model for drug release: Investigations on size and porosity dependence”. Em: *Physica A* 460.C (2016), pp. 29–37. DOI: <[10.1016/j.physa.2016.04.040](https://doi.org/10.1016/j.physa.2016.04.040)>.
- [96] Maxime Ignacio, Mykyta V Chubynsky e Gary W Slater. “Interpreting the Weibull fitting parameters for diffusion-controlled release data”. Em: *Physica A* 486 (2017), pp. 486–496.
- [97] Kulveer Singh, Soumitra Satapathi e Prateek K Jha. ““Ant-Wall” model to study drug release from excipient matrix”. Em: *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 519 (2019), pp. 98–108. ISSN: 0378-4371. DOI: <<https://doi.org/10.1016/j.physa.2018.12.029>>.
- [98] Constantin Mircioiu, Victor Voicu, Valentina Anuta, Andra Tudose, Christian Celia, Donatella Paolino, Massimo Fresta, Roxana Sandulovici e Ion Mircioiu. “Mathematical modeling of release kinetics from supramolecular drug delivery systems”. Em: *Pharmaceutics* 11.3 (2019), p. 140.
- [99] Márcio Sampaio Gomes-Filho, Marco Aurélio Alves Barbosa e Fernando Albuquerque Oliveira. “A statistical mechanical model for drug release: Relations between release parameters and porosity”. Em: *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 540 (2020), p. 123165.
- [100] Yikun Yang, Xiaoyin Qiao, Ruiying Huang, Haoxiang Chen, Xuelei Shi, Jian Wang, Weihong Tan e Zhikai Tan. “E-jet 3D printed drug delivery implants to inhibit growth and metastasis of orthotopic breast cancer”. Em: *Biomaterials* 230 (2020), p. 119618. ISSN: 0142-9612. DOI: <<https://doi.org/10.1016/j.biomaterials.2019.119618>>.

- [101] Márcio Sampaio Gomes-Filho, Fernando Albuquerque Oliveira e Marco Aurélio Alves Barbosa. “Modeling the diffusion-erosion crossover dynamics in drug release”. Em: *Phys. Rev. E* 105 (4 abr. de 2022), p. 044110. DOI: <[10.1103/PhysRevE.105.044110](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.105.044110)>. URL: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.105.044110>>.
- [102] R. Morgado, F. A. Oliveira, G. G. Batrouni e A. Hansen. “Relation between Anomalous and Normal Diffusion in Systems with Memory”. Em: *Phys. Rev. Lett.* 89 (2002), p. 100601. DOI: <[10.1103/PhysRevLett.89.100601](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.89.100601)>.
- [103] J. M. Sancho, A. M. Lacasta, K. Lindenberg, I. M. Sokolov e A. H. Romero. “Diffusion on a Solid Surface: Anomalous is Normal”. Em: *Phys. Rev. Lett.* 92 (25 jun. de 2004), p. 250601. DOI: <[10.1103/PhysRevLett.92.250601](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.92.250601)>. URL: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.92.250601>>.
- [104] Luciano C Lapas, Rafael Morgado, Mendeli H Vainstein, J Miguel Rubi e Fernando A Oliveira. “Khinchin theorem and anomalous diffusion”. Em: *Physical review letters* 101.23 (2008), p. 230602.
- [105] Aleksander Weron e Marcin Magdziarz. “Generalization of the Khinchin Theorem to Lévy Flights”. Em: *Phys. Rev. Lett.* 105 (26 dez. de 2010), p. 260603.
- [106] Felix Thiel, Franziska Flegel e Igor M. Sokolov. “Disentangling Sources of Anomalous Diffusion”. Em: *Phys. Rev. Lett.* 111 (1 jul. de 2013), p. 010601. DOI: <[10.1103/PhysRevLett.111.010601](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.111.010601)>. URL: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.111.010601>>.
- [107] C. C. Y. Dorea e A. V. Medino. “Anomalous diffusion index for Lévy motions”. Em: *J. Stat. Phys.* 123 (2006), p. 685.
- [108] Scott A McKinley e Hung D Nguyen. “Anomalous diffusion and the generalized Langevin equation”. Em: *SIAM Journal on Mathematical Analysis* 50.5 (2018), pp. 5119–5160. DOI: <[doi.org/10.1137/17M115517X](https://doi.org/10.1137/17M115517X)>.
- [109] Maike AF dos Santos. “Analytic approaches of the anomalous diffusion: A review”. Em: *Chaos, Solitons & Fractals* 124 (2019), pp. 86–96.
- [110] M. H. Vainstein, R. Morgado, F. A. Oliveira, F. A. B. F. de Moura e M. D. Coutinho-Filho. “Stochastic description of the dynamics of the random-exchange Heisenberg chain”. Em: *Phys. Lett. A* 339 (2005), pp. 33–38. DOI: <[10.1016/j.physleta.2005.02.059](https://doi.org/10.1016/j.physleta.2005.02.059)>.
- [111] M. H. Vainstein, L. C. Lapas e F. A. Oliveira. “Anomalous Diffusion”. Em: *Acta Physica Polonica B* 39 (5 2008).
- [112] Scott A McKinley e Hung D Nguyen. “Anomalous Diffusion and the Generalized Langevin Equation”. Em: *arXiv preprint arXiv:1711.00560* (2017).

- [113] C.C. Donato, F.A. Oliveira e M.A.F. Gomes. “Anomalous diffusion on crumpled wires in two dimensions”. Em: *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 368.1 (2006), pp. 1–6.
- [114] Luciano C Lapas, Rogelma MS Ferreira, J Miguel Rubi e Fernando A Oliveira. “Anomalous law of cooling”. Em: *J. Chem. Phys.* 142.10 (2015), p. 104106. DOI: <[10.1063/1.4914872](https://doi.org/10.1063/1.4914872)>.
- [115] Tomás S Grigera e NE Israeloff. “Observation of fluctuation-dissipation-theorem violations in a structural glass”. Em: *Physical Review Letters* 83.24 (1999), p. 5038.
- [116] Federico Ricci-Tersenghi, Daniel A Stariolo e Jeferson J Arenzon. “Two time scales and violation of the fluctuation-dissipation theorem in a finite dimensional model for structural glasses”. Em: *Physical Review Letters* 84.19 (2000), p. 4473.
- [117] Andrea Crisanti e Felix Ritort. “Violation of the fluctuation–dissipation theorem in glassy systems: basic notions and the numerical evidence”. Em: *Journal of Physics A: Mathematical and General* 36.21 (2003), R181.
- [118] A Barrat. “Monte Carlo simulations of the violation of the fluctuation-dissipation theorem in domain growth processes”. Em: *Physical Review E* 57.3 (1998), p. 3629.
- [119] Ludovic Bellon e Sergio Ciliberto. *Experimental study of the fluctuation dissipation relation during an aging process*. 2002.
- [120] Kumiko Hayashi e Mitsunori Takano. “Violation of the fluctuation-dissipation theorem in a protein system”. Em: *Biophysical journal* 93.3 (2007), pp. 895–901.
- [121] Agustín Pérez-Madrid, Luciano Calheiros Lapas e J. Miguel Rubi. “Heat Exchange between Two Interacting Nanoparticles beyond the Fluctuation-Dissipation Regime”. Em: *Phys. Rev. Lett.* 103 (4 jul. de 2009), p. 048301. DOI: <[10.1103/PhysRevLett.103.048301](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.103.048301)>. URL: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.103.048301>>.
- [122] Dmitri V. Averin e Jukka P. Pekola. “Violation of the Fluctuation-Dissipation Theorem in Time-Dependent Mesoscopic Heat Transport”. Em: *Phys. Rev. Lett.* 104 (22 jun. de 2010), p. 220601. DOI: <[10.1103/PhysRevLett.104.220601](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.104.220601)>. URL: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.104.220601>>.
- [123] Ismael VL Costa, Rafael Morgado, Marcos VBT Lima e Fernando A Oliveira. “The Fluctuation-Dissipation Theorem fails for fast superdiffusion”. Em: *EPL (Europhysics Letters)* 63.2 (2003), p. 173.
- [124] Ismael VL Costa, Mendeli H Vainstein, Luciano C Lapas, Adriano A Batista e Fernando A Oliveira. “Mixing, ergodicity and slow relaxation phenomena”. Em: *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 371.1 (2006), pp. 130–134.

- [125] Mendeli H Vainstein, Costa, Ismael VL e FA Oliveira. “Mixing, Ergodicity and the Fluctuation-Dissipation Theorem in complex systems”. Em: *Jamming, Yielding, and Irreversible Deformation in Condensed Matter*. Springer, 2006, pp. 159–188.
- [126] F.A. Oliveira, R. Ferreira, L.C. Lapas e M.H. Vainstein. “Anomalous diffusion: A basic mechanism for the evolution of inhomogeneous systems”. Em: *Frontiers in Physics* 7 (2019), p. 18.
- [127] Giovani L Vasconcelos. “A guided walk down wall street: an introduction to econophysics”. Em: *Brazilian Journal of Physics* 34.3b (2004), pp. 1039–1065.
- [128] R. Metzler e J. Klafter. “The random walk’s guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach”. Em: *Phys. Rep.* 339 (2000), p. 1. DOI: <[10.1016/S0370-1573\(00\)00070-3](https://doi.org/10.1016/S0370-1573(00)00070-3)>.
- [129] Tânia Tomé. *Dinâmica Estocástica e Irreversibilidade Vol. 35*. Edusp, 2001.
- [130] Hugo Lima, Allan R Vieira e Celia Anteneodo. “Nonlinear redistribution of wealth from a Fokker-Planck description”. Em: *arXiv preprint arXiv:2007.11680* (2020).
- [131] Bruce M Boghosian. “Kinetics of wealth and the Pareto law”. Em: *Physical Review E* 89.4 (2014), p. 042804.
- [132] Bruce Boghosian. “Fokker–Planck description of wealth dynamics and the origin of Pareto’s law”. Em: *International Journal of Modern Physics C* 25.12 (2014), p. 1441008.
- [133] David Ricardo. *Princípios de economia política e tributação*. LeBooks Editora, 2018.
- [134] Constantino Tsallis, Celia Anteneodo, Lisa Borland e Roberto Osorio. “Nonextensive statistical mechanics and economics”. Em: *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 324.1-2 (2003), pp. 89–100.
- [135] Leo P Kadanoff. *Statistical physics: statics, dynamics and renormalization*. World Scientific Publishing Company, 2000.
- [136] F. A. Oliveira. “Dynamical renormalization of anharmonic lattices at the onset of fracture: Analytical results for scaling, noise, and memory”. Em: *Phys. Rev. B* 52 (1995), p. 1009.
- [137] F. A. Oliveira, B. A. Mello e I. M. Xavier. “Scaling transformation of random walk distributions in a lattice”. Em: *Phys. Rev. E* 61 (2000), p. 7200.
- [138] F. A. Oliveira, J. A. Cordeiro, A. S. Chaves, B. A. Mello e I. M. Xavier. “Scaling transformation of random walk and generalized statistics”. Em: *Physica A* 295 (2001), p. 201.

- [139] V I Yukalov, E P Yukalova e F A Oliveira. “Renormalization-group solutions for Yukawa potential”. Em: *Journal of Physics A: Mathematical and General* 31.18 (mai. de 1998), pp. 4337–4348. DOI: <[10.1088/0305-4470/31/18/021](https://doi.org/10.1088/0305-4470/31/18/021)>. URL: <<https://doi.org/10.1088/0305-4470/31/18/021>>.
- [140] Hidetoshi Nishimori e Gerardo Ortiz. *Elements of phase transitions and critical phenomena*. Oup Oxford, 2010.
- [141] Valter L. Líbero. “De Ising a Metrópolis”. Em: *Revista Brasileira de Ensino de Física* 22.3 (2000), pp. 346–352.
- [142] AR Hernandez-Montoya, HF Coronel-Brizio, A Aguilar-Salas e N Bagatella-Flores. “On Ising spin models and statistical wealth condensation: Generating a wealth-like distribution”. Em: *Revista Mexicana de Física S* 58.1 (2012), pp. 110–115.
- [143] Pedro D. Pinto, Fernando A. Oliveira e André L. A. Penna. “Thermodynamics aspects of noise-induced phase synchronization”. Em: *Phys. Rev. E* 93 (5 mai. de 2016), p. 052220. DOI: <[10.1103/PhysRevE.93.052220](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.93.052220)>. URL: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.93.052220>>.
- [144] Pedro D Pinto, Andre LA Penna e Fernando A Oliveira. “Critical behavior of noise-induced phase synchronization”. Em: *EPL (Europhysics Letters)* 117.5 (2017), p. 50009.
- [145] Martin Bier, Bartosz Lisowski e Ewa Gudowska-Nowak. “Phase transitions and entropies for synchronizing oscillators”. Em: *Phys. Rev. E* 93.1 (2016), p. 012143.
- [146] Yoshiki Kuramoto. “Chemical turbulence”. Em: *Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence*. Springer, 1984, pp. 111–140.
- [147] Juan A Acebrón, Luis L Bonilla, Conrad J Pérez Vicente, Félix Ritort e Renato Spigler. “The Kuramoto model: A simple paradigm for synchronization phenomena”. Em: *Reviews of modern physics* 77.1 (2005), p. 137.
- [148] Jean-Philippe Bouchaud e Marc Mézard. “Wealth condensation in a simple model of economy”. Em: *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 282.3-4 (2000), pp. 536–545.
- [149] Francisco A Rodrigues, Thomas K DM Peron, Peng Ji e Jürgen Kurths. “The Kuramoto model in complex networks”. Em: *Physics Reports* 610 (2016), pp. 1–98.
- [150] Moshe Levy. “Social phase transitions”. Em: *Journal of Economic Behavior & Organization* 57.1 (2005), pp. 71–87.
- [151] Bruce M Boghosian, Merek Johnson e Jeremy A Marcq. “An H theorem for Boltzmann’s equation for the Yard-Sale Model of asset exchange”. Em: *Journal of Statistical Physics* 161.6 (2015), pp. 1339–1350.

- [152] Johan Grasman, A Onno et al. *Asymptotic methods for the Fokker-Planck equation and the exit problem in applications*. Springer Science & Business Media, 1999.
- [153] A Christian Silva e Victor M Yakovenko. “Temporal evolution of the ‘thermal’ and ‘superthermal’ income classes in the USA during 1983–2001”. Em: *EPL (Europhysics Letters)* 69.2 (2004), p. 304.
- [154] Maciej Jagielski e Ryszard Kutner. “Modelling of income distribution in the European Union with the Fokker–Planck equation”. Em: *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 392.9 (2013), pp. 2130–2138.
- [155] Slava Ispolatov, Paul L Krapivsky e Sidney Redner. “Wealth distributions in asset exchange models”. Em: *The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems* 2.2 (1998), pp. 267–276.
- [156] J Gonzalez-Estevez, MG Cosenza, O Alvarez-Llamoza e R López-Ruiz. “Transition from Pareto to Boltzmann–Gibbs behavior in a deterministic economic model”. Em: *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 388.17 (2009), pp. 3521–3526.
- [157] Adrian Antoniu Dragulescu. “Applications of physics to economics and finance: Money, income, wealth, and the stock market”. Tese de dout. University of Maryland, College Park, 2002.
- [158] Malte Schröder, Marc Timme e Dirk Witthaut. “A universal order parameter for synchrony in networks of limit cycle oscillators”. Em: *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* 27.7 (2017), p. 073119.
- [159] Frantisek Slanina. *Essentials of econophysics modelling*. OUP Oxford, 2013.
- [160] Zdzislaw Burda, D Johnston, Jerzy Jurkiewicz, M Kamiński, Maciej A Nowak, Gabor Papp e Ismail Zahed. “Wealth condensation in pareto macroeconomies”. Em: *Physical Review E* 65.2 (2002), p. 026102.
- [161] Niall Kishtainy. *Uma breve história da economia*. L&PM Editores, 2019.
- [162] Rosario N Mantegna e H Eugene Stanley. *Introduction to econophysics: correlations and complexity in finance*. Cambridge university press, 1999.
- [163] Vanesa Avalos-Gayt, Yajaira Cardona Vald et al. *Synchronization of globalized economies*. Rel. técn. 2019.
- [164] Zdzislaw Burda, Pawel Wojcieszak e Konrad Zuchniak. “Dynamics of wealth inequality”. Em: *Comptes Rendus Physique* 20.4 (2019), pp. 349–363.



# Anexos



## ANEXO A – Algoritmo do *Yard Sale Model*

Durante a execução desse trabalho uma quantidade expressiva de códigos foram desenvolvidos. Vamos agregar aos anexos dois dos que consideramos mais relevantes.

**Esse é o algoritmo da versão mais simples do *Yard Sale Model* escrito na linguagem *Python*, com  $\gamma = 0.33$  e o número de agentes  $N = 50000$ .**

```
# -*- coding: utf-8 -*-
"""
Created on Thu Apr  2 17:36:21 2020

@author: Henrique Alves de Lima
"""

import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib.collections import EventCollection
import numpy as np
import random

with open('saida.txt', 'w') as arquivo:

    nmrsim = 200000

    x = np.ones((50000))

    nmb=list(range(0, len(x), 1))

    fbin=list(range(0, 2600, 20))

    gamma=0.333

    z=list(x)

    for i in range(len(x)):
```

```
z[i]*=500

print('\n')

print (z)

print ('\n')

for j in range(0,nmrsim,1):

    select=random.sample(nmb,2)

    print(select)

    for k in range(0,2,1):

        if (k==0):
            z[select[k]]+=gamma*z[select[(k+1)]]
        else:
            z[select[k]]-=gamma*z[select[k]]

            if z[select[k]]<0:
                z[select[k]]+=gamma*z[select[k]]
                z[select[(k-1)]]-=gamma*z[select[k]]

z.sort()
print(z)
plt.hist(z, bins=fbin)

for l in range(len(z)):
    print(int(z[l]), file=arquivo)

#Recomendo fazer mais de 1 milhao de simulacoes ,
ou seja , nmrsim > 1kk
```

## ANEXO B – Algoritmo para o modelo de Kuramoto com N osciladores

Esse é o algoritmo desenvolvido durante o trabalho para a solução do modelo de Kuramoto. Foi desenvolvido em *Python* para um modelo com N osciladores. O algoritmo abaixo calcula também a média das diferenças de fases desses osciladores, procedimento que foi usado na execução do capítulo 5.

```
#!/usr/bin/env python3
# -*- coding: utf-8 -*-
"""
Created on Fri Jul  2 09:50:52 2021

@author: Henrique Alves de Lima
"""
#Vamos importar as bibliotecas
necessarias para o desenvolvimento
do código

import matplotlib.pyplot as plt

import numpy as np

import math

import random

import seaborn as sns

sigma_list = np.linspace(0,3,50)
sigma_list2 = []
f_list2 = []

for sigma in sigma_list:
```

```

#Vamos definir as variaveis necessarias:

#K = 5 #Constante Acoplamento K

N = 500 #Numero de osciladores

tf = 10 #Tempo final da simulacao

dt=0.01 #Intervalo infinitesimal

#sigma = 0.53 #Constante de acoplamento

w = np.ones(N) #Vetor das frequencias naturais

gamma = np.ones(N)

t = np.arange(0, tf+0.01, dt) #Vetor de intervalo de tempo;
#Para visualizar o vetor t, use o print abaixo.

#print(t)

n=len(t) #Tamanho do vetor t - | Depende do tamanho do intervalo dt |

c = np.ones(N)

cf =np.ones((N,n))

sum1=0

for i in range (N):

    c[i] = random.uniform(0,2*np.pi)

for i in range(N):

    #w[i] = random.normalvariate(5,2)
    #w[i] = random.uniform(0,1)
    w[i] = random.lognormvariate(0,1)
    #w[i] = 2*random.random()

```

---

```
#w[i] = 1
for i in range(N):
    #gamma[i] = random.uniform(5,1)
    #gamma[i] = random.lognormvariate(0,2)
    #gamma[i] = random.random()
    gamma[i] = 1

#Laco para integracao das equacoes diferenciais dos osciladores;
#| Metodo de Euler |

for k in range(n):

    for i in range (N):

        sum1=0

        for j in range(N):

            sum1+=np.sin(c[j]-c[i])

        c[i] += (dt*w[i])+ (sigma*gamma[i]*sum1*dt)

        cf[i,k] = c[i]

#Plot das fases dos osciladores
for i in range(N):

    plt.plot(t, np.sin(cf[i,:]))
    #plt.plot(np.cos(cf[i,n]),np.sin(cf[i,n]))

plt.xlabel('t = tempo')
plt.ylabel('\u03B8 (t)')
plt.show()
print(np.sin(cf))

for i in range(len(c)):
    plt.xlim(-1,1)
```

```

plt.ylim(-1,1)
plt.xlabel('cos(\u03B8)')
plt.ylabel('sin(\u03B8)')
plt.scatter(np.sin(cf[i,-1]), np.cos(cf[i,-1]))

plt.text(0.3, 0.5, f'Sigma = {sigma:.4f}')
plt.show()

#####
#Diferenca media

dif = []

for i in range(N):

    for j in range(N):

        dif.append(np.radians(cf[i,-1] - cf[j,-1]))

dif = np.abs(dif)
dif_2 = []

for element in dif:
    if element not in dif_2:
        dif_2.append(element)

print(np.mean(dif_2))

fases_ = []

for i in range(N):
    fases_.append(np.cos(cf[i,-1]))

#print(np.max(dif_2))

plt.hist(fases_)

#####

```

---

```
##Agora faremos a distribuicao

x = np.ones((N))
nmb=list(range(0,N,1))
fbin=list(range(0,2000,20))

z=list(x)

for i in range(len(x)):
    z[i]*=1000

print('\n')

print (z)

print('\n')

f_list = []

sigma_list = [0.001, 1, 0.53, 3]

for j in range(0,1000000,1):

    select = random.sample(range(N),2)
    #print(select)

    #gamma=np.random.random()
    #gamma=0.15

    dim=25
    vect=np.random.random(dim)
    #print(vect)

    #for i in range(0,dim,1):
```

```
#vect [ i]=vect [ i]** i

#ae=sum( vect )/dim
#gamma=ae

rand1 = random.random()

#print (gamma)

f_ = (cf[select [0], -1] - cf[select [1], -1])
f_ = abs(np.sin(f_))

f_ = 1-(f_*f_)

print(f_)

f_list.append(f_)

gamma = 0.33

if z[select [0]] >= z[select [1]]:

    temp1 = z[select [0]]
    temp2 = z[select [1]]

else:

    temp1 = z[select [1]]
    temp2 = z[select [0]]

if rand1 > f_:

    temp1+=gamma*temp2
    temp2-=gamma*temp2
    z[select [0]] = temp1
    z[select [1]] = temp2
```

```
else :

    temp2+=gamma*temp1
    temp1-=gamma*temp1
    z[select [1]]=temp2
    z[select [0]]=temp1

z.sort()
print(z)
#plt.hist(z, bins = 100)
plt.style.use('ggplot')
sns.histplot(z, kde=True, bins = 100)
plt.xlim(min(z), max(z))
plt.ylim(0, 40)
plt.xlabel('Riqueza - W')
plt.ylabel('Numero de agentes com riqueza W')
plt.legend(scatterpoints=1, frameon=False, labelspacing=1)
plt.text(min(z)+50, 35, f'Sigma = {sigma:.4f}')
plt.text(min(z)+50, 32, f'Media \u0394\u03B8\' =
{np.mean(f_list):0.4f}')

plt.show()

print(np.mean(f_list))

f_list2.append(np.mean(f_list))
sigma_list2.append(sigma)

plt.plot(f_list2)
plt.xlabel('Valor de \u03C3/K')
plt.ylabel("Media \u0394\u03B8")
```



## ANEXO C – Figuras referentes ao capítulo 3

### C.1 - Simulação no software *Maplesoft*<sup>TM</sup> para o modelo com redistribuição de renda

Aqui iremos apresentar algumas capturas de tela do procedimento realizado para encontrarmos as curvas presentes na figura 23. Recomendamos ao leitor que faça a visualização das figuras e acompanhe a descrição das etapas na página 65 deste trabalho.

$$\begin{aligned} & \text{eq1} := w P(w) + \frac{1}{2} w^2 \left( \frac{d}{dw} P(w) \right) - 6 \cdot (1 - w) \cdot P(w) = 0 \\ & w P(w) + \frac{1}{2} w^2 \left( \frac{d}{dw} P(w) \right) - 6 (1 - w) P(w) = 0 \\ & \text{dsolve}(\text{eq1}) \\ & P(w) := \frac{C1 e^{-\frac{12}{w}}}{w^{14}} \\ & P(w) = \frac{C1 e^{-\frac{12}{w}}}{w^{14}} \\ & w \rightarrow \frac{C1 e^{-\frac{12}{w}}}{w^{14}} \\ & A(w) := \int_w^{\text{infinity}} P(x) dx \\ & w \rightarrow \int_w^{\infty} P(x) dx \end{aligned}$$

Figura 39

$$\begin{aligned}
 A(w) &:= \int_w^{\text{infinity}} P(x) dx \\
 & \quad w \rightarrow \int_w^{\infty} P(x) dx \\
 A(w) & \\
 & \frac{1}{1283918464548864} - CI w \left( \frac{5748019200}{w} + \frac{12}{13} \frac{1}{w} \left( \left( -\frac{115909305827328}{w^{12}} - \frac{115909305827328}{w^{11}} - \frac{106250197008384}{w^{10}} - \frac{88541830840320}{w^9} - \frac{66406373130240}{w^8} \right. \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \left. - \frac{44270915420160}{w^7} - \frac{25824700661760}{w^6} - \frac{12912350330880}{w^5} - \frac{5380145971200}{w^4} - \frac{1793381990400}{w^3} - \frac{448345497600}{w^2} - \frac{74724249600}{w} - 6227020800 \right) e^{-\frac{12}{w}} \right) \\
 \int_0^{\text{infinity}} P(x) dx &= 1 \\
 & \quad \frac{1925}{429981696} - CI = 1 \\
 -CI &:= \frac{429981696}{1925} \\
 & \quad \frac{429981696}{1925}
 \end{aligned}$$

Figura 40

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\text{infinity}} P(x) dx &= 1 \\
 & \quad \frac{1925}{429981696} - CI = 1 \\
 -CI &:= \frac{429981696}{1925} \\
 & \quad \frac{429981696}{1925} \\
 P(w) & \\
 & \quad \frac{429981696}{1925} e^{-\frac{12}{w}} \\
 & \quad \frac{429981696}{1925} \frac{e^{-\frac{12}{w}}}{w^{14}}
 \end{aligned}$$

Figura 41

$$\begin{aligned}
 B(w) &:= \int_0^w P(x) \frac{x^2}{2} dx \\
 & \quad w \rightarrow \int_0^w \frac{1}{2} P(x) x^2 dx \\
 B(w) & \\
 & \frac{1}{79833600} \frac{1}{w} \left( 43545600 w + \frac{12}{11} w \left( -681091006464 w^{10} - 56757838720 w^9 - 425681879040 w^8 - 283787919360 w^7 - 165542952960 w^6 - 82771476480 w^5 \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - 34488115200 w^4 - 11496038400 w^3 - 2874009600 w^2 - 479001600 w - 39916800 \right) e^{-12w} \right)
 \end{aligned}$$

Figura 42

$$\Lambda(w) := (w^2 \cdot \mathcal{A}(w) + B(w)) \cdot P(w)$$

$$w \rightarrow (w^2 \cdot \mathcal{A}(w) + B(w)) \cdot P(w)$$

total :=  $\Lambda(w)$

$$\frac{429981696}{1925} \frac{1}{w^{14}} \left( \left( \frac{1}{5748019200} w^3 \left( \frac{5748019200}{w} + \frac{12}{13} \frac{1}{w} \left( \left( -\frac{115909305827328}{w^{12}} - \frac{115909305827328}{w^{11}} - \frac{106250197008384}{w^{10}} - \frac{88541830840320}{w^9} \right. \right. \right. \right. \right.$$

$$- \frac{66406373130240}{w^8} - \frac{44270915420160}{w^7} - \frac{25824700661760}{w^6} - \frac{12912350330880}{w^5} - \frac{5380145971200}{w^4} - \frac{1793381990400}{w^3} - \frac{448345497600}{w^2} - \frac{74724249600}{w}$$

$$- 6227020800 \left. \right) e^{-\frac{12}{w}} \left. \right) + \frac{1}{79833600} \frac{1}{w} \left( 43545600 w + \frac{12}{11} w \left( -681091006464 w^{10} - 567575838720 w^9 - 425681879040 w^8 - 283787919360 w^7 \right. \right.$$

$$\left. \left. - 165542952960 w^6 - 82771476480 w^5 - 34488115200 w^4 - 11496038400 w^3 - 2874009600 w^2 - 479001600 w - 39916800 \right) e^{-\frac{12}{w}} \right)$$

Figura 43

$\Lambda(0.41)$	0.001925273604
$\mathcal{A}(0.41)$	0.9997370545
$B(0.41)$	0.00002001451842

Figura 44

$$eq1 := \text{diff}(\mathcal{A}(w), w) = -\frac{\mu(w)}{(w^2 \cdot \mathcal{A}(w) + B(w))}$$

$$\frac{d}{dw} \mathcal{A}(w) = -\frac{\mu(w)}{w^2 \cdot \mathcal{A}(w) + B(w)}$$

$$eq2 := \text{diff}(B(w), w) = \frac{w^2 \cdot \mu(w)}{(w^2 \cdot \mathcal{A}(w) + B(w))}$$

$$\frac{d}{dw} B(w) = \frac{w^2 \mu(w)}{w^2 \cdot \mathcal{A}(w) + B(w)}$$

$$eq3 := \text{diff}(\mu(w), w) = \frac{6 \cdot (1 - w) \cdot \mu(w)}{(w^2 \cdot \mathcal{A}(w) + B(w))}$$

$$\frac{d}{dw} \mu(w) = \frac{6(1-w)\mu(w)}{w^2 \cdot \mathcal{A}(w) + B(w)}$$

Figura 45

inc :=  $\mu(0.41) = 0.001925273604$ ,  $\mathcal{A}(0.41) = 0.9997370545$ ,  $B(0.41) = 0.00002001451842$

$\mu(0.41) = 0.001925273604$ ,  $\mathcal{A}(0.41) = 0.9997370545$ ,  $B(0.41) = 0.00002001451842$

$$sys1 := \text{diff}(\mathcal{A}(w), w) = -\frac{\mu(w)}{(w^2 \cdot \mathcal{A}(w) + B(w))}, \text{diff}(B(w), w) = \frac{w^2 \cdot \mu(w)}{(w^2 \cdot \mathcal{A}(w) + B(w))}, \text{diff}(\mu(w), w) = \frac{6 \cdot (1 - w) \cdot \mu(w)}{(w^2 \cdot \mathcal{A}(w) + B(w))}$$

$$\frac{d}{dw} \mathcal{A}(w) = -\frac{\mu(w)}{w^2 \cdot \mathcal{A}(w) + B(w)}, \frac{d}{dw} B(w) = \frac{w^2 \mu(w)}{w^2 \cdot \mathcal{A}(w) + B(w)}, \frac{d}{dw} \mu(w) = \frac{6(1-w)\mu(w)}{w^2 \cdot \mathcal{A}(w) + B(w)}$$

Figura 46

```

dsI := dsolve({sysI, inc}, numeric, output = listprocedure)
      [w = proc(w) ... end proc, A(w) = proc(w) ... end proc, B(w) = proc(w) ... end proc, μ(w) = proc(w) ... end proc]

dsI(0.41)
      [w(0.41) = 0.4100000000000000, A(w)(0.41) = 0.9997370545000000, B(w)(0.41) = 0.0000200145184200000, μ(w)(0.41) = 0.00192527360400000]

fA := eval(A(w), dsI)
      proc(w) ... end proc
fB := eval(B(w), dsI)
      proc(w) ... end proc
fμ := eval(μ(w), dsI)
      proc(w) ... end proc

```

Figura 47

$$finalf(w) := \frac{f_{\mu}(w)}{w^2 f_A(w) + f_B(w)}$$

```
plot(finalf(w), w = 0..3)
```

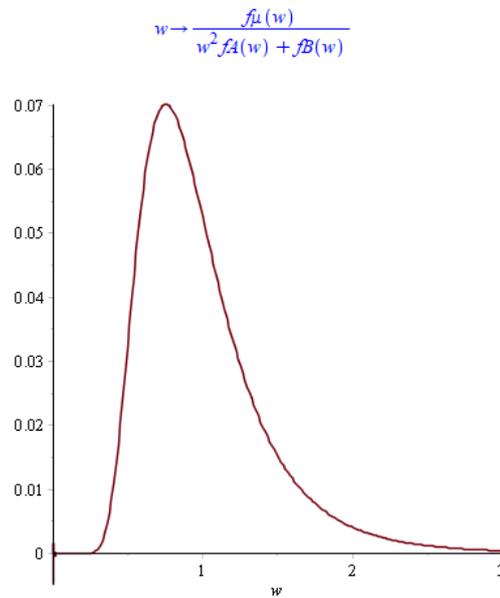


Figura 48

```
for i from 0.01 by 0.04 to 6 do print(finalf(i)) end do;
```

```

-0.0000564900214737638
0.00000396678046820778
3.22383336983341 10-9
-1.12357371308655 10-7
-1.89970015609720 10-8
0.00000182849773741519
0.0000508343989603853
0.000428143336685373
0.00187157992380910
0.00535169907847517
0.0114547927229046
0.0199791541518201
0.0300302627228818

```

Figura 49