
**O método da função característica aplicado na
renormalização da energia potencial e da
força resultante média em um sistema com N
partículas distribuídas aleatoriamente**

Everton Luis da Silva e Silva

Orientador: Prof. Dr. Annibal Dias de Figueiredo Neto



UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

INSTITUTO DE FÍSICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

TESE DE DOUTORADO

**O método da função característica aplicado na renormalização da
energia potencial e da força e resultante média em um sistema com
N partículas distribuídas aleatoriamente**

Everton Luis da Silva e Silva

Orientador: Prof. Dr. Annibal Dias de Figueiredo Neto

Brasília - DF

Fevereiro de 2022

**O método da função característica aplicado na
renormalização da energia potencial e da força
resultante média em um sistema com N
partículas distribuídas aleatoriamente**

Everton Luis da Silva e Silva

Tese de doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade de Brasília (PPGF-UnB) como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de doutor em Física.

Orientador: Prof. Dr. Annibal Dias de Figueiredo Neto.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Annibal D. de F. Neto - UnB (Orientador)

Prof. Dr. Tarcísio M. da R. Filho - UnB (Membro Interno)

Prof. Dr. Luciano Hugo M. Filho - UFRPE (Membro Externo)

Prof. Dr. Raul Y. Matsushita - UnB (Membro Externo)

Prof. Dr. Márcio T. de Castro - IFB (Suplente)

Brasília - DF

Fevereiro de 2022

Ficha catalográfica elaborada automaticamente,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

LS586m Luis da Silva e Silva, Everton
O método da função característica aplicado na renormalização da energia potencial e da força e resultante média em um sistema com N partículas distribuídas aleatoriamente / Everton Luis da Silva e Silva; orientador Annibal Dias de Figueiredo Neto. -- Brasília, 2022.
81 p.

Tese (Doutorado - Doutorado em Física) -- Universidade de Brasília, 2022.

1. Física Estatística. 2. Termodinâmica. 3. Teoria de Probabilidades. 4. Convergência de somas de variáveis aleatórias. 5. Convergência da energia de interação de um gás. I. Dias de Figueiredo Neto, Annibal, orient. II. Título.

Resumo

O método da função característica aplicado na renormalização da energia e da força resultante em um sistema com N partículas distribuídas aleatoriamente

Everton Luis da Silva e Silva

Orientador: Prof. Dr. Annibal Dias de Figueiredo Neto

Neste trabalho nós estudamos a distribuição de probabilidade da energia potencial de interação de uma partícula teste imersa em um gás de N partículas não interagentes através de um potencial central $V(R) = k/R^{\delta-1}$ definido no espaço d -dimensional, onde R é a distância entre a partícula teste e a i -ésima partícula do sistema, $\delta > 0$ é o expoente associado ao módulo da força e k é o parâmetro de acoplamento. A fim de garantir um limite bem definido para a função característica da energia potencial e da força resultante sobre a partícula teste nós renormalizamos a energia média no limite $N \rightarrow \infty$. Além disso, nós caracterizamos as condições para a renormalização do parâmetro de acoplamento e determinamos a relação exata entre o tamanho do sistema L_N e o número de partículas N que garanta a convergência da energia. Nós mostramos essencialmente a existência de três regimes distintos: (i) para $\delta < d$ o tamanho do sistema é necessariamente constante e como consequência a energia potencial bem como a força resultante têm um valor médio bem definido com flutuação nula quando $N \rightarrow \infty$, caracterizando o limite de Vlasov puro, (ii) para $\delta > d + 1$ a energia potencial e a força não têm média bem definida quando $N \rightarrow \infty$, e são portanto puramente causadas por flutuações, o que caracteriza o limite flutuativo puro. Neste caso particular o limite termodinâmico pode ser aplicado e garante a convergência da energia, (iii) para $d < \delta < d + 1$ um valor médio bem definido existe para a energia, contudo é impossível definir uma renormalização que garanta a convergência da força resultante para um vetor bem definido quando $N \rightarrow \infty$.

Palavras-chave: Renormalização da energia, função característica, limite de Vlasov, limite flutuativo.

Abstract

Characteristic function method applied to renormalize the potential energy and the resultant average force in a N body random distributed system

Everton Luis da Silva e Silva

Supervisor: Prof. Dr. Annibal Das de Figueiredo Neto

We study the probability distribution for the potential energy of a given test particle interacting with N random particles through a central potential $V(R) = k/R^{\delta-1}$ defined in a d -dimensional space, where R is the relative distance between the particles, $\delta > 0$ is the power law exponent associated to the force intensity and k is the coupling parameter. In order to assure a well-defined limit for the probability distribution of potential energy, together with the probability distribution of the resultant force we renormalize the system energy when N grows to infinity. We also characterize the renormalization conditions for the coupling parameter and the necessary relationship between the size L_N and the number N of the system particles. We show essentially the existence of three possible renormalization, depending on the exponent δ and the space dimension d : (i) for $\delta < d$ the system size is necessarily constant and as a consequence the potential energy as well as the resultant force have a well-defined average value with a null fluctuation as $N \rightarrow \infty$, characterizing the pure Vlasov limit, (ii) for $\delta > d + 1$ the potential energy and the resultant force do not have a well-defined average value and are both purely due to fluctuation, which characterizes the pure fluctuation limit. In this particular case the thermodynamic is valid and ensures the convergence of the system, (iii) for $d < \delta < d + 1$ a well-defined average value exists for the potential energy, however there is no possible renormalization that can be defined in order to assure that the resultant force converges to a well-defined vector for $N \rightarrow \infty$.

Keywords: Energy renormalization, characteristic function, Vlasov limit, fluctuation limit.

Agradecimentos

Porquanto pese escrever uma tese e se tornar doutor apesar e ao pesar da dor de pesquisar e trabalhar em um país que a tempos deixou de valorizar o trabalho de um pesquisador, devo dizer que a despeito deste horror em que nosso país se afundou fico feliz em concluir a missão que honra e dignifica um pesquisador. Nesta jornada fiéis amigos tive o privilégio de fazer no meio da estrada. A viagem e o aprendizado não existiriam sem eles e por isso para evitar minha danação, não posso deixar de registrar que sou profundamente grato a:

- o professor Annibal Figueiredo pela postura inigualavelmente profissional, pela autonomia concedida a mim, sem a qual eu jamais teria terminado este doutorado “bem da cabeça” e com um emprego garantido. Agradeço também pela paciência e compreensão quando as coisas ficaram apertadas. Professor, Annibal, agradeço de verdade pela orientação durante estes quatro anos de doutorado;
- Sarah, esposa, namorada, amiga, grande amor, parceira de bar, por ficar do meu lado nos últimos 5 anos me ajudando a tomar as decisões que mudaram a nossa vida e que permitiram a conclusão deste trabalho;
- meus pais que desde o meu primeiro sopro de vida nunca deixaram de se sacrificar por mim;
- o grande amigo Carlos Oeiras que acreditou em mim e me fez desenvolver habilidades e realizar coisas que nunca imaginei possíveis;
- Zup Innovation, empresa que me deu a oportunidade de aplicar na prática tudo o que eu aprendi em mais de 10 anos de vida acadêmica;
- o amigo Luciano pela parceria e pela disponibilidade de avaliar este trabalho com tanto interesse;
- o amigo Danilo Pedrelli, vulgo Tio Pedra, parceiro de projetos e ideias que fizeram toda a diferença na minha vida profissional;
- os amigos Igor Sousa, Lucas Bernar, Moisés Fabiano Júnior, José Solano pelos momentos de descontração regados por cervejas baratas;
- os Professores Tarcísio M. da R. Filho, Luciano Hugo M. Filho, Raul Y. Matsushita e Márcio T. de Castro pela disponibilidade de compor a banca examinadora deste trabalho;

- ao CNPq pelo auxílio financeiro;

“If the doors of perception were cleansed everything would appear as it is, infinite”

(William Blake, The Marriage of Heaven and Hell)

Lista de Figuras

2.1	Transformação de um volume δV representado pelo desenho de um círculo para um volume $T(\delta(V))$ representado pelo desenho de um triângulo.	18
3.1	Comportamento da função $\tilde{g}(b_N) = -b_N \ln b_N$	57
3.2	Comportamento do tamanho dos sistema em função de N para $d = 1$, $d = 2$ e $d = 3$. Consideramos $K = K' = 1$	58
3.3	Este diagrama resume os resultados deste trabalho.	62

Sumário

1	Introdução	xii
2	Noções preliminares	11
2.1	Espaço de probabilidade	11
2.2	Função distribuição e função densidade de probabilidade	14
2.3	Sequência de variáveis aleatórias	16
2.3.1	Transformações	17
2.4	Função característica	19
2.4.1	Função característica para uma soma de vetores aleatórios independentes	20
2.5	Convergência de sequências de variáveis aleatórias	21
2.6	Distribuições infinitamente divisíveis	22
2.7	Limites de somas de variáveis aleatórias e distribuições estáveis	23
2.7.1	Distribuição de Gauss	24
2.7.2	Distribuição de Lorentz	26
2.8	Representação canônica da função característica	31
3	Distribuição de probabilidade da força de um sistema de N partículas	41
3.1	Introdução	41
3.2	Renormalização da força resultante média sobre uma partícula teste	42
3.3	Energia e função densidade de um sistema com N partículas	47
3.3.1	Função característica da variável aleatória associada à energia	50
3.3.2	O limite de Vlasov puro	51
3.3.3	Limite flutuativo puro	53
3.3.4	O limite misto	54
3.3.5	A fronteira de transição $\delta = d + 1$	55

3.3.6 O caso $\delta = d$	58
Conclusões	61
A Renormalização da força	64
A.1 O caso $\alpha = 1$	64
A.2 O caso $\alpha = 2$	65
A.3 O caso $0 < \alpha < 1$	67
A.4 O caso $1 < \alpha < 2$	68
B Função característica para $\delta = 1$	69

Capítulo 1

Introdução

O desenvolvimento axiomático da teoria de probabilidades, segundo o padrão e o rigor matemático só foram satisfatoriamente desenvolvidos em um livro publicado em 1933 por A. Kolmogorov [1]. Neste trabalho, um dos principais de sua carreira, intitulado "*Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*", Kolmogorov lança as bases axiomáticas da teoria de probabilidades levando em conta os trabalhos de E. Borel sobre teoria métrica das funções de uma variável real. Além de Kolmogorov vários outros autores, entre as décadas de 1920 e 1940, contribuíram grandemente para o desenvolvimento e consolidação desta disciplina, entre eles podemos citar: B. de Finetti, Alexandr Yakovlevich Khintchine e P. Lévy. Dentro deste terreno fértil de descobertas, alguns dos primeiros trabalhos de Khintchine [3, 4] e A. N. Kolmogorov fundaram a conhecida escola de teoria de probabilidades na Universidade de Moscow.

Neste cenário, um dos problemas mais comuns na época era definir as condições para que uma sequência de Variáveis Aleatórias convirja para o domínio de atração da distribuição de Gauss. Assim, de maneira completamente independente, A. Ya. Khitchine [8], P. Lévy [9] e W. Feller [10] resolveram este problema e determinaram as condições suficientes e necessárias da convergência de uma sequência de variáveis aleatórias para uma distribuição Gaussiana. Nas palavras de Khitchine [8]: uma distribuição $F(x)$ pertence ao domínio de atração de outra distribuição $G(x)$ (por exemplo uma Gaussiana) quando para a soma S_N de N variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas de acordo com $F(x)$, existe um número $\zeta_N > 0$, η_N tal que a distribuição de $S_N/\zeta_N - \eta_N$ tende a $G(x)$ quando $N \rightarrow \infty$.

O Teorema Central do Limite e a Lei dos Grandes Números surgiram neste contexto e estão hoje entre os mais importantes resultados dentro da teoria de probabilidades. O teorema central do limite, por exemplo, lida com as condições necessárias para que $\frac{S_N - E[S_N]}{\sqrt{Var[S_N]}}$ convirja

em distribuição para a distribuição normal com parâmetros 0 e 1 quando $N \rightarrow \infty$, onde $S_N = X_1 + \cdots + X_N$ é a soma de N variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas. Por outro lado, lei dos grandes números estabelece as condições necessárias para que $\frac{S_N - E[S_N]}{N}$ convirja para zero, ou equivalentemente, para que $\frac{S_N}{N}$ convirja para o valor médio (ou esperança) das variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas. Em ambos os casos estas seqüências são do tipo $\frac{S_N + b_N}{a_N}$, onde $a_N > 0$ e b_N são números reais. Caracterizar os possíveis limites desse tipo de seqüência foi o trabalho da vida de muitos dos pesquisadores citados no parágrafo inicial deste trabalho, já que seqüências de variáveis aleatórias não necessariamente convergem para uma variável aleatória com distribuição normal como na lei dos grandes números e no teorema central do limite. Deste modo, na caracterização da convergência de seqüências de variáveis aleatórias estes pesquisadores foram levados naturalmente ao estudo das distribuições infinitamente divisíveis e estáveis, as quais são fundamentalmente importantes para o estudo que será desenvolvido nesta tese.

Em 1925 A.Ya. Khitchine e A. N. Kolmogorov iniciaram um trabalho sistemático sobre convergência de séries infinitas cujos termos são variáveis aleatórias mutuamente independentes [6]. Neste trabalho, os autores mostraram que para uma seqüência contável de variáveis aleatórias a convergência das médias e das variâncias garante quase com certeza a convergência da série. Em outras palavras, os autores mostraram que $\sum_{j=1}^N X_j/N = E[S_N] \rightarrow E[X_i]$ para qualquer seqüência X_1, X_2, \dots de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com variância finita. Dizemos que, uma seqüência de variáveis aleatórias X_1, X_2, \dots satisfaz a lei fraca dos grandes números quando $\frac{S_N - E[S_N]}{N} \xrightarrow{P} 0$, onde $S_N = X_1 + \cdots + X_N$. Analogamente, dizer que X_1, X_2, \dots satisfaz a lei forte dos grandes números significa que $\frac{S_N - E[S_N]}{N}$ converge em quase toda parte para zero. No caso em que as variáveis aleatórias são identicamente distribuídas com média $E[X_i] = m < \infty$, temos $\frac{S_N - E[S_N]}{N} = \frac{S_N}{N} - m$ e portanto a lei fraca $\frac{S_N - E[S_N]}{N} \xrightarrow{P} 0$ é equivalente a $\frac{S_N}{N} \xrightarrow{P} m$. Este resultado é conhecido na literatura como a lei fraca dos grandes números de Khintchin. Entretanto, se eliminarmos a condição de que a média das variáveis aleatórias é finita será que podemos dizer que $\frac{S_N}{N}$ converge em distribuição para alguma variável aleatória X ? Em outras palavras: o que podemos dizer do limite $\frac{S_N}{N} \xrightarrow{D} X$? A resposta para essa pergunta (que será explicitamente demonstrada no próximo capítulo) é que X é uma variável aleatória com distribuição estável. Deste modo, para caracterizar os possíveis limites das seqüências de variáveis aleatórias torna-se necessário conhecer como se comportam as classes de distribuições infinitamente divisíveis e estáveis e para isso torna-se indispensável

fazer um estudo detalhado sobre as funções características.

Foi exatamente nesse cenário que, em 1928, B. de Finetti iniciou uma sequência de trabalhos [11, 12, 13, 14, 15] envolvendo funções com incrementos aleatórios baseados na teoria das distribuições infinitamente divisíveis (estas distribuições serão abordadas com mais detalhes no próximo capítulo). O problema geral analisado por Finetti em seus trabalhos, incluindo também os casos com variância infinita, foi investigado de maneira independente por P. Lévy [16, 17], que estudou o comportamento das distribuições estáveis conhecidas por exibir variância infinita, exceto no caso particular da Gaussiana (que é uma distribuição estável com variância finita). O trabalho desenvolvido por Lévy, posteriormente descrito no seu livro clássico “*Théorie de l’addition des variables aléatoires*” [18], apresenta uma fórmula geral para representar funções características infinitamente divisíveis que ficou conhecida posteriormente na literatura como *representação canônica de Lévy* para funções características infinitamente divisíveis. Contudo, em 1937, em um trabalho intitulado “*A new derivation of a formula of P. Lévy*” [19], Khintchine mostrou que o resultado obtido por Lévy pode ser derivado a partir de uma extensão do método de Kolmogorov, de modo que hoje na literatura este resultado é conhecido como *representação canônica de Lévy-Khintchine* para funções características infinitamente divisíveis. Estes resultados podem ser encontrados no livro escrito por Khintchine em 1938 intitulado “*Limit Distributions for Sums of Independent Random Variables*” [20]. Embora todos estes autores tenham trabalhado de maneira independente, a importância dos trabalhos de A.Ya. Khintchine, B. de Finetti e Kolmogorov, etc foi reconhecido pelo próprio P. Lévy [21], que escreveu:

“Sem pensar em minimizar o papel de Khintchine, que me antecedeu em vários pontos e que sem dúvida teria encontrado os pontos em que eu o antecedi, sem esquecer também as obras anteriores de Cauchy, Pólya, B. de Finetti e Kolmogorov, creio (também posso dizer) que esta teoria é essencialmente meu trabalho.”¹

P. Lévy e A.Ya. Khintchine publicaram apenas um trabalho juntos [22] cujo principal resultado é o teorema que estabelece a representação canônica para a função característica de distribuições estáveis. É realmente uma pena que esses dois grandes gênios, que deram contribuições tão importantes para o campo da teoria de probabilidades, tenham publicado apenas um trabalho juntos. O leitor pode ficar agora imaginando o que mais eles poderiam ter desenvolvido se tivessem trabalhado juntos mais vezes.

¹Tradução livre do autor

Uma vez que todos esses resultados envolvem o estudo da convergência da soma de uma sequência de N variáveis aleatórias, podemos aplicá-los a fim de descrever as propriedades de sistemas com N partículas, tais como estrelas, galáxias, partículas de um gás, etc. Em outras palavras podemos sempre considerar que a soma de N variáveis aleatórias pode ser interpretada como a energia potencial ou mesmo a força resultante sobre uma partícula teste imersa num gás de N partículas não interagentes. Dentro do contexto da mecânica estatística, as propriedades de sistemas com N corpos tem sido extensivamente estudadas por muitos autores, em particular no contexto da astrofísica [23, 24] e da termodinâmica [25]. Além disso, muitos resultados interessantes foram obtidos por Chavanis [26] no contexto da força gravitacional em d -dimensões seguindo a mesma metodologia utilizada por Chandrasekhar [23] para a força gravitacional em três dimensões. Chavanis mostrou que em $d = 3$ dimensões, a distribuição da força gravitacional resultante é um tipo particular de distribuição de Lévy conhecida como distribuição de Holtsmark [27]. Isto significa que a variância da força gravitacional produzida por uma partícula diverge algebricamente. Por outro lado, para $d = 1$ a variância é finita e portanto a distribuição da força resultante é uma Gaussiana. Em particular, o caso $d = 2$ é um ponto crítico pois a distribuição da força é Gaussiana, embora a variância apresente uma divergência fraca, enquanto que a calda dessa distribuição é algébrica e produzida pelas partículas da vizinhança.

Muito embora a força gravitacional desempenhe um papel central neste problema fundamental de N corpos, os autores da referência [28] levaram em conta um modelo guiado por uma força cujo módulo é descrito por uma função que escala com $1/r^\delta$, onde $\delta > 0$ generalizando assim os resultados obtidos por Chavanis. Os autores calcularam a função característica da soma de N vetores aleatórios que representam a posição de cada uma das partículas do sistema em relação à uma partícula teste. Deste modo é possível renormalizar o valor médio da força resultante no limite em que $N \rightarrow \infty$ sob diferentes regimes denominados: limite de Vlasov e limite Flutuativo. Usualmente o limite flutuativo é bem definido quando o expoente da força é $\delta > d$, onde d é a dimensão do sistema, embora este limite possa ser definido para $\delta < d$ contanto que a força resultante média seja nula. Em contraste, o limite de Vlasov é bem definido quando $\delta < d$, neste caso a força resultante média converge para um vetor bem definido quando $N \rightarrow \infty$. Estes resultados serão descritos explicitamente no capítulo 3 desta tese.

Apesar de todo progresso reportado, surpreendentemente não há estudos sistemáticos que utilizem o método da função característica a fim de renormalizar a energia de um gás com N

partículas. Para desenvolver este estudo, todo o *framework* desenvolvido por Lévy, Khintchine, Kolmogorov, Finetti, etc será utilizado por nós a fim de caracterizar a densidade de probabilidade associada a energia potencial de uma partícula teste imersa num gás de N partículas. Além disso, nós aplicaremos o teorema da continuidade de Lévy a fim de garantir a convergência da função característica e consequentemente a convergência da energia nos limites de Vlasov e flutuativo, devidamente caracterizados na referência [28] (que serão descritos em detalhes no capítulo 3). Esta não é uma tarefa simples, pois a energia potencial se comporta de maneiras absolutamente distintas para $\delta = 1$ e para $\delta \neq 1$ fazendo com que seja necessária uma análise cuidadosa da forma da função característica em cada *range* possível de valores do expoente δ .

Esta tese está dividida em dois capítulos. No capítulo dois apresentaremos todas as noções preliminares e todas as ferramentas necessárias para o desenvolvimento dos cálculos necessários para atacar o problema de interesse. Além disso, ainda no capítulo dois apresentamos o cálculo explícito para a obtenção da função característica que vamos usar para renormalizar a energia do sistema. No capítulo 3 apresentaremos um breve resumo dos resultados obtidos na referência [28] a fim de contextualizar os resultados originais deste trabalho. Por fim apresentaremos os resultados obtidos ao longo deste projeto de doutorado.

Capítulo 2

Noções preliminares

Para a compreensão dos resultados apresentados nesta tese de doutorado é necessário o conhecimento prévio de teoria de probabilidades, em particular sobre a convergência de somas de variáveis aleatórias. Neste sentido, este capítulo é dedicado a definir e enunciar os principais pontos que serão utilizados no desenvolvimento do trabalho. Por uma questão de objetividade apenas enunciaremos a maioria das proposições e teoremas, sem nos preocuparmos com as devidas demonstrações. Contudo, caso o leitor queira se debruçar nas deduções elas podem ser encontradas nas referencias [29, 30, 31, 32, 33].

2.1 Espaço de probabilidade

Dado um experimento aleatório qualquer e fixado um conjunto \mathcal{S} não vazio definimos:

1. \mathcal{S} é chamado *espaço amostral* ou *evento certo* (aquele que ocorrerá com certeza),
2. um subconjunto \mathcal{A} de \mathcal{S} é denominados *evento*
3. os elementos de \mathcal{S} representam os resultados possíveis do experimento aleatório
4. o conjunto $\{\emptyset\}$ é o evento impossível

Uma vez fixado o conjunto não vazio \mathcal{S} , podemos afirmar que \mathcal{F} é uma σ -álgebra de \mathcal{S} se uma coleção de subconjuntos de \mathcal{S} satisfaz:

1. $\emptyset \in \mathcal{F}$;
2. $\mathcal{A}^c \in \mathcal{F}$ para todo $\mathcal{A} \in \mathcal{F}$;

3. $\mathcal{A}_i \in \mathcal{F}$, $i \in \mathbb{N}$ implica que $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_i \in \mathcal{F}$.

Deste modo o par $(\mathcal{S}, \mathcal{F})$ é chamado espaço mensurável. Em palavras e de maneira simples, uma sigma álgebra de um conjunto \mathcal{S} é uma coleção de subconjuntos de \mathcal{S} incluindo o conjunto vazio e o próprio \mathcal{S} , de modo que a sigma álgebra é fechada sob complementariedade e é fechada sob uniões contáveis. Em teoria de probabilidades os elementos da σ -álgebra são considerados *eventos aleatórios*.

A definição de uma sigma álgebra pode parecer um pouco assustadora a primeira vista, contudo é necessária uma vez que estamos interessados em associar um número (denominado probabilidade) a um dado evento \mathcal{A} dentro de um espaço amostral \mathcal{S} . Em outras palavras, precisamos garantir que estes subconjuntos são mensuráveis, caso contrário não faz sentido associar probabilidades a eles. Portanto, basicamente queremos evitar conjuntos não mensuráveis na nossa teoria e é exatamente isso o que a σ -álgebra definida anteriormente faz!

Os axiomas

Dado um espaço mensurável $(\mathcal{S}, \mathcal{F})$, uma medida de probabilidade é uma função $P : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$, tal que:

1. $P(\mathcal{A}) \geq 0$;
2. $P(\mathcal{S}) = 1$;
3. se \mathcal{A}_i com $i \in \mathbb{N}$ são conjuntos mutuamente exclusivos (disjuntos) então $P\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_i\right) = \sum_{i \in \mathbb{N}} P(\mathcal{A}_i)$.

Deste modo, definimos que uma medida em \mathcal{S} é uma função que associa aos subconjuntos de \mathcal{S} ¹ um número real entre zero e um. É importante notar que só é possível definir esta medida pois os subconjuntos de \mathcal{S} pertencem a uma sigma álgebra. Assim, essas condições são os axiomas da teoria de probabilidade, de modo que qualquer conclusão é baseada direta ou indiretamente dos axiomas e apenas dos axiomas.

Definição 2.1. (Espaço de Probabilidade). Chamamos de espaço de probabilidade o trio definido por $(\mathcal{S}, \mathcal{F}, P)$.

Em palavras, um espaço de probabilidade é bem definido se temos um espaço amostral \mathcal{S} , uma σ -álgebra \mathcal{F} e uma medida P .

¹Os subconjuntos de \mathcal{S} são a própria σ -álgebra.

Definição 2.2. (Variável aleatória). Seja $(\mathcal{S}, \mathcal{F}, P)$ um espaço de probabilidade, uma função $X : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ será chamada de variável aleatória se for uma função mensurável, isto é, se para todo $x \in \mathbb{R}$, $\{X \leq x\}$ é um evento aleatório.

Desta maneira, uma variável aleatória (VA) é uma função X que associa a cada resultado possível ζ de um experimento aleatório um número real $X(\zeta)$. Uma questão que em geral surge quando estamos lidando com fenômenos aleatórios é o problema de determinar a probabilidade de uma variável aleatória X assumir um valor menor que um dado x real, ou qual a probabilidade de X estar dentro de um intervalo contínuo $[x_1, x_2]$. Conforme a definição (2.2) probabilidades são atribuídas apenas a eventos aleatórios representados por:

$$\{X \leq x\}.$$

Esta notação representa um subconjunto de \mathcal{S} formado por todos os resultados ζ tal que $X(\zeta) \leq x$. Em geral é comum lidar com eventos aleatórios independentes, isto é, quando a ocorrência de um evento não altera a probabilidade do outro.

Definição 2.3. (Eventos aleatórios independentes). Os eventos aleatórios \mathcal{A}_i com $i \in \mathbb{N}$ são ditos independentes se $P\left(\bigcap_{i=1}^N \mathcal{A}_i\right) = \prod_{i=1}^N P(\mathcal{A}_i)$.

Para concluir a nossa análise é importante ressaltar que $\{X \leq x\}$ não é um conjunto de números, mas sim um conjunto de resultados experimentais. Por exemplo, no experimento de lançar um dado nós podemos associar para cada um dos seis resultados possíveis ζ_i os números $X(\zeta_i) = 10i$ onde $i = 1, \dots, 6$. Sendo assim o conjunto $\{X \leq 35\}$ consiste dos elementos $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ pois $X(\zeta_i) \leq 35$ apenas se $i = 1, 2$ ou 3 . De maneira similar, a notação $\{x_1 \leq X \leq x_2\}$ representa os subconjuntos de \mathcal{S} que contém todos os resultados ζ tal que $x_1 \leq X(\zeta) \leq x_2$ onde x_1 e x_2 são dois números dados. Por fim, a notação $\{X = x\}$ é um subconjunto de \mathcal{S} consistindo de todos os resultados ζ tal que $X(\zeta) = x$. Em aplicações práticas estamos em geral interessados em determinar a probabilidade de uma variável aleatória assumir um valor em uma certa região na reta real.

A probabilidade de uma variável aleatória X assumir um valor real x é denotada por $P(X = x)$. Quando os valores assumidos pela variável aleatória são discretos, isto é, $X \in \{x_1, x_2, \dots\}$ definimos a *função de probabilidade*², $f_X(x) = P(X = x)$ tal que, como consequência dos

²As vezes também denominada função massa de probabilidade.

axiomas apresentados no início deste capítulo podemos afirmar que

$$\sum_x f_X(x) = \sum_x P(X = x) = 1 \quad (2.1)$$

A fim de elucidar a compreensão sobre o significado da função de probabilidade, vamos considerar o lançamento ao acaso de uma moeda no qual, naturalmente, apenas dois resultados são possíveis: cara, denotado por h e coroa, denotado por t . Assim, o espaço amostral é o conjunto $\mathcal{S} = \{h, t\}$. Podemos então definir que $X(\zeta = h) = 0$ e $X(\zeta = t) = 1$ são os dois únicos valores possíveis que esta variável aleatória pode assumir, então as respectivas probabilidades de cada evento são $P(X = 0) = p$ e $P(X = 1) = q$. Sendo assim, a função de probabilidade fica definida como

$$f_X(x) = \begin{cases} p & \text{se } x = 0, \\ q & \text{se } x = 1, \end{cases} \quad (2.2)$$

tal que pela equação (2.1) podemos afirmar que $p + q = 1$.

2.2 Função distribuição e função densidade de probabilidade

Os elementos do espaço \mathcal{S} que estão contidos no evento $\{X \leq x\}$ mudam a medida em que o número x assume diferentes valores. A probabilidade $P\{X \leq x\}$ do evento $\{X \leq x\}$ é portanto um número que depende de x . Esse número é denotado por $F_x(x)$ e é conhecido como *função distribuição acumulada da variável aleatória X* .

Definição 2.4. (Função de Distribuição). Seja um espaço de probabilidade $(\mathcal{S}, \mathcal{F}, P)$ e $X : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ uma variável aleatória. Definimos a função distribuição de X , $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$F(x) = P\{X \leq x\} \quad (2.3)$$

com as seguintes propriedades:

Proposição 2.1. Seja $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função distribuição, então vale que

1. $F(\infty) = 1$ e $F(-\infty) = 0$
2. É uma função crescente, isto é, se $x_1 < x_2$ então $F(x_1) \leq F(x_2)$
3. Se $F(x_0) = 0$ então $F(x) = 0$ para todo $x \leq x_0$

$$4. P(X > x) = 1 - F(x)$$

$$5. P\{x_1 \leq x \leq x_2\} = F(x_2) - F(x_1)$$

Em vez de trabalhar com a função distribuição é muitas vezes mais útil utilizar a *função densidade de probabilidade* $\rho_X(x)$ definida da seguinte maneira

$$\rho_X(x) = \frac{dF(x)}{dx}. \quad (2.4)$$

Definição 2.5. Dizemos que X é uma variável aleatória absolutamente contínua se existe uma função $\rho : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ tal que a função de distribuição é dada por

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_X(x) dx, \forall x \in \mathbb{R} \quad (2.5)$$

Proposição 2.2. (Propriedades da Função Densidade). Se ρ_X é uma função densidade, então valem as seguintes propriedades

1. $\rho_X(x) \geq 0$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} \rho_X(x) dx = 1$
3. $\int_{x_1}^{x_2} \rho_X(x) dx = P\{x_1 \leq x \leq x_2\} = F(x_2) - F(x_1)$

Definição 2.6. (Variáveis Aleatórias Independentes). Duas variáveis aleatórias X e Y são ditas independentes se $\rho_{X,Y}(x, y) = \rho_X(x)\rho_Y(y)$ ou equivalentemente $F(x, y) = F(x)F(y)$.

Deste modo, a função densidade de probabilidade desempenha um papel similar ao da função de probabilidade (2.1) definida previamente para variáveis aleatórias discretas. Em outras palavras, a função densidade determina a probabilidade de uma variável aleatória assumir valores dentro de um intervalo definido. Esse intervalo pode ser um intervalo na reta real para uma variável unidimensional, ou pode ser um volume no espaço d -dimensional quando estamos trabalhando com vetores aleatórios. Além disso, podemos definir a média da variável aleatória X através da função densidade da seguinte maneira:

Definição 2.7. (Esperança ou média). Seja $X : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ uma variável aleatória cuja função densidade é ρ . A esperança ou média de X é definida como

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \rho_X(x). \quad (2.6)$$

desde que a integral seja bem definida. Se $\mathbb{E}[X] < \infty$ dizemos que X é integrável.

Proposição 2.3. (Propriedades da média). Sejam $X, Y :: \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ variáveis aleatórias integráveis. Então valem as seguintes propriedades:

1. $\mathbb{E}[aX + bY] = a\mathbb{E}[X] + b\mathbb{E}[Y] \forall a, b \in \mathbb{R}$;
2. se $X \leq Y$, então $\mathbb{E}[X] \leq \mathbb{E}[Y]$;
3. Se X_1, \dots, X_N são variáveis aleatórias independentes, então $\mathbb{E}[X_1, \dots, X_N] = \mathbb{E}[X_1] \cdots \mathbb{E}[X_N]$;
4. para toda função mensurável $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a esperança de uma variável aleatória $\varphi(X)$ é dada por

$$\mathbb{E}[\varphi(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dF(x).$$

No caso em que a variável X for absolutamente contínua com densidade $\rho_X(x)$, segue da definição 2.5 que

$$\mathbb{E}[\varphi(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \rho_X(x) dx.$$

Definição 2.8. (Momentos). Seja X uma variável aleatória e $a \in \mathbb{R}$. Definimos o k -ésimo momento de X em torno de a como $\mathbb{E}(X - a)^k$. Se $a = \mathbb{E}[X]$, então $\mathbb{E}(X - \mathbb{E}[X])^k$ é o k -ésimo momento central de X .

Naturalmente o primeiro momento de X é a própria média $\mathbb{E}[X]$.

Definição 2.9. (Variância). A variância da variável aleatória X corresponde ao segundo momento central de X , isto é,

$$Var[X] = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}[X])^2 = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 \quad (2.7)$$

2.3 Sequência de variáveis aleatórias

Ao longo desta tese estamos interessados em trabalhar com sequências de variáveis aleatórias uma vez que nosso objetivo final (desenvolvido no capítulo 3) é descrever as condições de renormalização de um sistema com N partículas, onde iremos considerar que a posição relativa entre essas partículas e uma dada partícula teste é um vetor aleatório \vec{X} . Com isto em mente,

podemos dizer que um vetor aleatório é o vetor

$$\vec{X} = (X_1, \dots, X_d) \quad (2.8)$$

cujas componentes X_i são variáveis aleatórias. Assim, da mesma maneira que fizemos anteriormente, podemos definir a função de distribuição associada a essa sequência da seguinte maneira:

Definição 2.10. Sejam X_1, \dots, X_d variáveis aleatórias definidas no espaço de probabilidade $(\mathcal{S}, \mathcal{F}, P)$. A função distribuição multivariada (ou conjunta) é a função $F : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$F(x_1, \dots, x_d) = P\{X_1 \leq x_1, \dots, X_d \leq x_d\} = P\{\vec{X} \in D\} \quad (2.9)$$

Assim, a probabilidade de \vec{X} assumir qualquer valor em uma dada região D do espaço d -dimensional é dado por

$$P\{\vec{X} \in D\} = \int_D \rho_{X_1, \dots, X_d}(x_1, \dots, x_d) dx_1 \dots dx_d, \quad (2.10)$$

tal que

$$\rho_{\vec{X}}(\vec{x}) = \rho_{X_1, \dots, X_d}(x_1, \dots, x_d) = \frac{\partial^d F(x_1, \dots, x_d)}{\partial x_1 \dots \partial x_d} \quad (2.11)$$

é a função densidade de probabilidade multivariada.

Proposição 2.4. Se X_1, \dots, X_d são independentes, então

$$F(x_1, \dots, x_d) = \prod_{i=1}^d F(x_i), \forall (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d. \quad (2.12)$$

2.3.1 Transformações

Funções densidade se comportam de maneira bastante peculiar sob mudanças de variáveis. Sendo assim, vamos considerar dois vetores aleatórios \vec{X} e \vec{Y} em d dimensões e uma transformação $T : \vec{X} \rightarrow \vec{Y}$ de um conjunto de variáveis \vec{X} para outro conjunto de variáveis $\vec{Y}(\vec{X})$. A fim de preservar a probabilidade em qualquer volume do espaço precisamos modificar a função densidade. Vamos representar as funções densidade associadas a essas variáveis por $\rho_{\vec{X}}(\vec{x})$ e $\rho_{\vec{Y}}(\vec{y})$. Consideremos agora um pequeno volume δV em torno de um ponto arbitrário \vec{x}_0 pertencente ao espaço de \vec{X} . Esse volume será transformado para um volume $T(\delta V)$ em torno do ponto $\vec{y}(\vec{x}_0)$ no espaço de \vec{Y} , conforme ilustrado na figura 2.1.

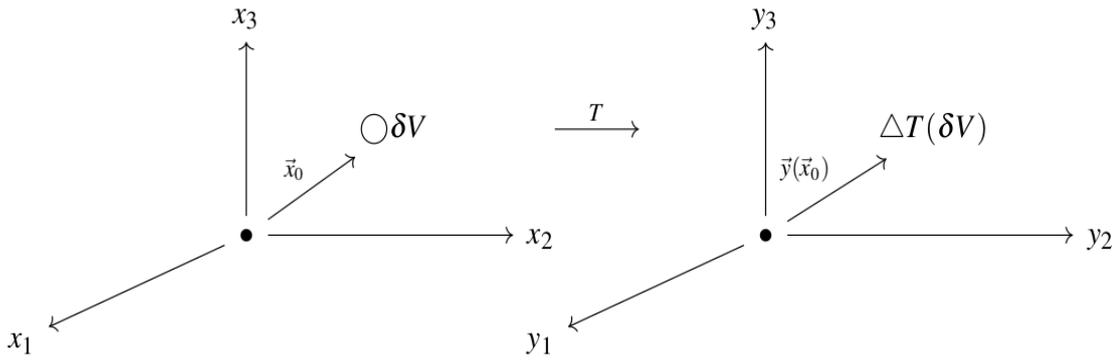


Figura 2.1: Transformação de um volume δV representado pelo desenho de um círculo para um volume $T(\delta V)$ representado pelo desenho de um triângulo.

Como estamos falando do mesmo evento precisamos considerar que a probabilidade associada a um volume do espaço deve ser a mesma em ambos os sistemas de coordenadas, tal que

$$\int_{\vec{x} \in \delta V} \rho_{\vec{X}}(\vec{x}) d\vec{x} = \int_{\vec{y} \in T(\delta V)} \rho_{\vec{Y}}(\vec{y}) d\vec{y}. \quad (2.13)$$

Assim, supondo que a densidade é aproximadamente a mesma em δV e em $T(\delta V)$ podemos escrever

$$\int_{\vec{x} \in \delta V} \rho_{\vec{X}}(\vec{x}) d\vec{x} \approx \rho_{\vec{X}}(\vec{x}_0) \delta V \quad \text{e} \quad \int_{\vec{y} \in T(\delta V)} \rho_{\vec{Y}}(\vec{y}) d\vec{y} \approx \rho_{\vec{Y}}(\vec{y}(\vec{x}_0)) T(\delta V). \quad (2.14)$$

Essa aproximação tornar-se-á exata no limite $\delta V \rightarrow 0$, isto é:

$$\rho_{\vec{Y}}(\vec{y}(\vec{x})) = \rho_{\vec{X}}(\vec{x}_0) \lim_{\delta V \rightarrow 0} \frac{\delta V}{T(\delta V)}. \quad (2.15)$$

A razão entre esses dois volumes é dada pelo valor absoluto do determinante da jacobiana

$$\lim_{\delta V \rightarrow 0} \frac{\delta V}{T(\delta V)} = |J_{\vec{y} \rightarrow \vec{x}}(\vec{y}(\vec{x}_0))| \quad (2.16)$$

tal que o determinante da jacobiana para o mapeamento de \vec{y} para $\vec{x}(\vec{y})$ calculada no ponto \vec{y} é dada por

$$J_{\vec{y} \rightarrow \vec{x}}(\vec{y}) = \left| \frac{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial(y_1, y_2, \dots, y_n)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1(y)}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2(y)}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial x_n(y)}{\partial y_1} \\ \frac{\partial x_1(y)}{\partial y_2} & \frac{\partial x_2(y)}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial x_n(y)}{\partial y_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_1(y)}{\partial y_n} & \frac{\partial x_2(y)}{\partial y_n} & \dots & \frac{\partial x_n(y)}{\partial y_n} \end{vmatrix} \quad (2.17)$$

O determinante da jacobiana mede a variação local de um volume infinitesimal de lado dx_i em relação a um volume infinitesimal de lado dy_i

$$\int_{\vec{x} \in \delta V} g(\vec{x}) dx = \int_{\vec{y} \in T(\delta V)} g(\vec{x}(\vec{y})) |J_{\vec{y} \rightarrow \vec{x}}(\vec{y})| d\vec{y}. \quad (2.18)$$

Desta maneira, a condição de que a probabilidade é preservada em qualquer volume do espaço sob mudança de coordenada pode ser escrita como

$$\rho_{\vec{Y}}(\vec{y}) = \rho_{\vec{X}}(\vec{x}(\vec{y})) |J_{\vec{y} \rightarrow \vec{x}}(\vec{y})|. \quad (2.19)$$

Em uma dimensão podemos escrever

$$\rho_Y(y) = \rho_X(x(y)) \left| \frac{dx}{dy} \right|. \quad (2.20)$$

Este resultado é fundamental para o desenvolvimento do modelo que será desenvolvido nesta tese (no capítulo 3) uma vez que nosso foco principal é estudar o comportamento de uma sequência de variáveis e vetores aleatórios que representam, respectivamente, a energia potencial e força resultante média sobre uma dada partícula teste imersa em um gás de N partículas não interagentes.

2.4 Função característica

Estudar o comportamento de uma sequência de variáveis aleatórias não é em geral uma tarefa simples. Contudo podemos definir uma função complexa $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ que forneça uma rota analítica alternativa para que não precisemos trabalhar diretamente com funções distribuição e densidade. Esta função é denominada **função característica** do vetor aleatório \vec{X} e é definida como a transformada de Fourier da função densidade.

Definição 2.11. Seja $\vec{X} = (X_1, \dots, X_d)$ um vetor aleatório d -dimensional, tal que X_i onde $i = 1, \dots, d$ são variáveis aleatórias contínuas. Define-se como **função característica** $\varphi(\vec{z})$ do vetor aleatório \vec{X} a função $\varphi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$\varphi_X(\vec{z}) = \mathbb{E} \left[e^{i\vec{z} \cdot \vec{X}} \right] = \mathbb{E} \left[\cos(\vec{z} \cdot \vec{X}) \right] + i \mathbb{E} \left[\sin(\vec{z} \cdot \vec{X}) \right]. \quad (2.21)$$

Da proposição 2.3 segue imediatamente que

$$\varphi_X(\vec{z}) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\vec{z} \cdot \vec{x}) dF(\vec{x}) + i \int_{-\infty}^{\infty} \sin(\vec{z} \cdot \vec{x}) dF(\vec{x}), \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^d. \quad (2.22)$$

tal que $\vec{z} \in \mathbb{R}^d$ e $\vec{z} \cdot \vec{x} = z_1x_1 + \dots + z_dx_d$. Se \vec{X} é absolutamente contínuo, então a função densidade $\rho_{\vec{X}}(\vec{x})$ existe, de modo que a função característica assume a forma

$$\varphi(\vec{z}) = \int_{\mathbb{R}^d} \rho_{\vec{X}}(\vec{x}) e^{i\vec{z} \cdot \vec{x}} d\vec{x} \quad (2.23)$$

A densidade $\rho_{\vec{X}}(\vec{x})$ de uma realização simultânea $\vec{x} = (x_1, \dots, x_d)$ de cada componente de \vec{X} satisfaz as propriedades definidas na seção 2.2, ou seja, $\rho_{\vec{X}}(\vec{x}) \geq 0$ e $\int_{\mathbb{R}^d} \rho_{\vec{X}}(\vec{x}) d\vec{x} = 1$. É comum na solução de problemas práticos usar o logaritmo natural da função característica

$$\Psi(\vec{z}) = \ln \varphi(\vec{z}), \quad (2.24)$$

de modo que $\Psi(\vec{z})$ é conhecido como *segunda função característica* de \vec{X} .

2.4.1 Função característica para uma soma de vetores aleatórios independentes

Vamos considerar agora uma sequência \vec{S} definida como a soma de N vetores aleatórios independentes e identicamente distribuídos, isto é, $\vec{S} = \vec{X}_1 + \vec{X}_2 + \dots + \vec{X}_N$. Assim, a cada vetor aleatório d -dimensional \vec{X}_i associamos uma função densidade de probabilidade $\rho_{\vec{X}_i}(\vec{x}_i)$, onde $i = 1, 2, \dots, N$.

Teorema 2.1. Se $\vec{S} = \vec{X}_1 + \vec{X}_2 + \dots + \vec{X}_N$, onde $\vec{X}_1, \dots, \vec{X}_N$ são VA's independentes e identicamente distribuídos, então a função característica de \vec{S} é dada por $\Phi_{\vec{S}}(\vec{z}) = \varphi_{\vec{X}_1}(\vec{z}) \cdot \varphi_{\vec{X}_2}(\vec{z}) \cdot \dots \cdot \varphi_{\vec{X}_N}(\vec{z}) = [\varphi(\vec{z})]^N$.

Demonstração. Sabemos que a função densidade da soma de dois ou mais vetores aleatórios independentes é a convolução de suas densidades individuais, isto é, $\rho_{\vec{S}}(\vec{x}) = \rho_{\vec{X}_1}(\vec{x}_1) * \rho_{\vec{X}_2}(\vec{x}_2) * \dots * \rho_{\vec{X}_N}(\vec{x}_N)$. A fim de obter a função característica associada à soma dessas N variáveis aleatórias tomamos a transformada de Fourier $\rho_{\vec{S}}(\vec{x})$ e obtemos

$$\mathcal{F}\{\rho_{\vec{S}}(\vec{x})\} = \int_{\mathbb{R}^d} \rho_{\vec{S}}(\vec{x}) e^{i\vec{z} \cdot \vec{x}} d\vec{x} \equiv \Phi_{\vec{S}}(\vec{z}), \quad (2.25)$$

portanto

$$\Phi_{\vec{S}}(\vec{z}) = \mathcal{F}\{\rho_{\vec{X}_1}(\vec{x}_1) * \rho_{\vec{X}_2}(\vec{x}_2) * \dots * \rho_{\vec{X}_N}(\vec{x}_N)\}. \quad (2.26)$$

Entretanto, sabemos que o teorema da convolução estabelece que a transformada de fourier da convolução de duas ou mais funções é igual ao produto das transformadas de Fourier de cada função individual, o que nos leva a seguinte conclusão

$$\mathcal{F}\{\rho_{\vec{X}_1}(\vec{x}_1) * \rho_{\vec{X}_2}(\vec{x}_2) * \dots * \rho_{\vec{X}_N}(\vec{x}_N)\} = \mathcal{F}\{\rho_{\vec{X}_1}(\vec{x}_1)\} \cdot \mathcal{F}\{\rho_{\vec{X}_2}(\vec{x}_2)\} \cdot \dots \cdot \mathcal{F}\{\rho_{\vec{X}_N}(\vec{x}_N)\} \quad (2.27)$$

tal que $\mathcal{F}\{\rho_{\vec{X}_i}(\vec{x}_i)\} \equiv \varphi(\vec{z})^3$ nada mais é do que a função característica do vetor aleatório \vec{X}_i . Desta maneira, a equação acima tornar-se-á

$$\begin{aligned} \Phi_{\vec{S}}(\vec{z}) &= \varphi_{\vec{X}_1}(\vec{z}) \cdot \varphi_{\vec{X}_2}(\vec{z}) \cdot \dots \cdot \varphi_{\vec{X}_N}(\vec{z}), \\ &= [\varphi(\vec{z})]^N, \end{aligned} \quad (2.28)$$

Como queríamos mostrar. □

Teorema 2.2. Seja X uma variável aleatória cuja função característica é φ , então X é integrável se, e somente se, φ é uma função de classe C^1 . Ao mesmo tempo, X tem variância finita se, e somente se, φ é uma função de classe C^2 . Em particular, $\mathbb{E}[X] = -i\varphi'(0)$ e $Var[X] = -\varphi''(0) + \varphi'(0)^2$.

2.5 Convergência de sequências de variáveis aleatórias

Seja $\{X_N\}_{N \geq 1}$ uma sequência de VA's, tal que as sequências $\{F_N\}_{N \geq 1}$ e $\{\varphi_N\}_{N \geq 1}$ são formadas, respectivamente pelas funções de distribuição e funções características correspondentes. A questão que surge é a seguinte: se uma das sequências converge de alguma forma, então o que deve acontecer com as demais? De fato, há uma relação biunívoca entre função distribuição e função característica, e portanto é completamente natural pensarmos que se garantirmos a convergência da função característica então a função distribuição também converge. De fato isso ocorre e pode ser sintetizado a partir da definição e dos teoremas descritos abaixo.

Definição 2.12. Seja $\{X_N\}_{N \geq 1}$ uma sequência de VA's, e seja $\{F_N\}_{N \geq 1}$ a sequência de funções de distribuição correspondente. Dizemos que $\{F_N\}_{N \geq 1}$ **converge fracamente** para uma

³Omitimos o índice i em $\varphi(q)$ pois as variáveis aleatórias são identicamente distribuídas.

distribuição F se $F_N(x) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} F(x)$;

Teorema 2.3. Seja a sequência $\{F_N\}_{N \geq 1}$ de funções de distribuição, então $\{F_N\}_{N \geq 1}$ converge fracamente para F se e somente se a função característica da sequência $\varphi_N(z)$ converge para alguma função $\varphi(z)$ à medida que $N \rightarrow \infty$, isto é, $\varphi_N(z) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \varphi(z)$.

Assim, podemos finalmente enunciar o teorema de P. Lévy

Teorema 2.4. (Teorema da continuidade de Paul Lévy). Sejam as funções de distribuição F_1, F_2, \dots e $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ as funções características correspondentes. Se φ_N converge para uma certa função φ então temos que

1. existe uma função de distribuição F tal que F_N converge fracamente para F ;
2. φ é a função característica correspondente a F .

2.6 Distribuições infinitamente divisíveis

Na seção anterior discutimos a convergência da função distribuição e da função característica associada a uma sequência de VA's $\{X_N\}_{N \geq 1}$. Contudo o que podemos dizer da convergência da própria sequência $\{X_N\}_{N \geq 1}$? Conforme discutimos na introdução desta tese, sabemos que se a média e a variância da sequência são finitas e bem definidas então a lei dos grandes números e o teorema central do limite descrevem bem a convergência desta série. Por outro lado se a condição de média finita não é garantida então o que deve acontecer?

Para responder essa pergunta vamos considerar as sequências de números reais $\{a_N\}_{N \geq 1}$ e $\{b_N\}_{N \geq 1}$ tais que $b_N < \infty$ e $a_N < \infty$ para todo N . Assim, vamos definir a variável $X_{N,k} = \frac{X_k}{a_N} - \frac{b_N}{Na_N}$, onde $1 \leq k \leq N$. Note que não estamos fazendo nenhuma consideração em relação à média ou à variância da variável aleatória $X_{N,k}$. Portanto, a sequência $\{X_N\}_{N \geq 1}$ pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
 X_{N,1} + \dots + X_{N,N} &= \frac{X_1 + \dots + X_N}{a_N} - \frac{\overbrace{b_N + \dots + b_N}^{N \text{ vezes}}}{Na_N}, \\
 &= \frac{X_1 + \dots + X_N}{a_N} - \frac{Nb_N}{Na_N}, \\
 &= \frac{S_N - b_N}{a_N}
 \end{aligned} \tag{2.29}$$

onde $S_N = X_1 + \cdots + X_N$. Deste modo podemos escrever o seguinte arranjo triangular

$$\begin{aligned} \frac{S_1 - b_1}{a_1} &= X_{1,1} \\ \frac{S_2 - b_2}{a_2} &= X_{2,1} + X_{2,2} \\ &\vdots \\ \frac{S_N - b_N}{a_N} &= X_{N,1} + X_{N,2} + \cdots + X_{N,N} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Assim, de acordo com o teorema 2.1 podemos afirmar que, para todo $N > 1$, existe uma função característica

$$\Phi(z) = \varphi_{X_{N,1}}(z) \cdot \varphi_{X_{N,2}}(z) \cdot \cdots \cdot \varphi_{X_{N,N}}(z) = [\varphi(z)]^N. \quad (2.30)$$

Deste modo podemos afirmar que (Veja a demonstração do 2.1)

$$F(x) = F_{X_{N,1}} * F_{X_{N,2}} * \cdots * F_{X_{N,N}}, \quad (2.31)$$

onde $F(x)$ é a função distribuição da sequência $\frac{S_N - b_N}{a_N} = X_{N,1} + X_{N,2} + \cdots + X_{N,N}$. Com base nestes resultados podemos enunciar a seguinte definição:

Definição 2.13. Seja X uma variável aleatória cuja função de distribuição é $F(x)$ e a função característica é Φ então X tem distribuição infinitamente divisível se:

1. para todo $N \geq 1$ existem VA's $X_{N,1} + X_{N,2} + \cdots + X_{N,N}$ independentes e identicamente distribuídas tais que $X \stackrel{D}{=} X_{N,1} + X_{N,2} + \cdots + X_{N,N}$;
2. para todo $N \geq 1$ existe uma função característica $\Phi(z)$ tal que $\Phi(z) = \varphi_{X_{N,1}}(z) \cdot \varphi_{X_{N,2}}(z) \cdot \cdots \cdot \varphi_{X_{N,N}}(z) = [\varphi(z)]^N$.

Desta maneira fará sentido nos referirmos também à função característica Φ como infinitamente indivisível.

2.7 Limites de somas de variáveis aleatórias e distribuições estáveis

Vimos na seção anterior que se uma sequência do tipo $\frac{S_N + b_N}{a_N}$ converge para uma variável aleatória X então sua distribuição será infinitamente divisível. Nesta seção estamos interessados

em definir o que são distribuições estáveis. Conforme veremos no capítulo 3 precisamos garantir que a função característica de uma soma de VAs $S = X_1 + X_2 + \dots + X_N$ ⁴ seja convergente quando o número de partículas cresce ao infinito garantindo a validade do teorema da continuidade de Lévy. Neste cenário, o conceito de distribuição estável é fundamental no trabalho que vamos desenvolver. Para compreender melhor do que isto se trata vamos estudar a função característica nos casos particulares em que a variável aleatória em questão tem distribuição Gaussiana ou distribuição Lorentziana.

2.7.1 Distribuição de Gauss

Definição 2.14. A variável aleatória X tem distribuição normal padrão se ela tiver função densidade dada por

$$\rho_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \forall x \in \mathbb{R}. \quad (2.32)$$

Contudo, podemos alterar sua amplitude da distribuição por um parâmetro σ e deslocá-la no eixo das abscissas por um parâmetro μ a fim de obter uma distribuição centralizada. Assim podemos definir:

Definição 2.15. Uma variável aleatória Y tem distribuição normal com parâmetros μ e σ se tivermos $Y = \sigma X + \mu$, onde X tem distribuição normal padrão. Neste caso escrevemos $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Teorema 2.5. A função característica correspondente à distribuição normal com parâmetros μ e σ^2 é

$$\varphi(z) = \exp\left(i\mu z - \frac{1}{2}\sigma^2 z^2\right) \quad (2.33)$$

Demonstração. Pela definição, a função característica de Y é dada por

$$\varphi(y) = \int \rho_Y(y) e^{izy} dy. \quad (2.34)$$

Contudo, pela equação (2.20) podemos facilmente mostrar que

$$\rho_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{y^2}{2}}, \quad (2.35)$$

⁴Onde X_i representa a posição relativa entre a i -ésima partícula do sistema e uma dada partícula teste.

assim, como $Y = \sigma X + \mu$, temos

$$\begin{aligned}\varphi(z) &= \frac{e^{iz\mu}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int e^{-\frac{x^2}{2} + iz\sigma x} \sigma dx, \\ &= \frac{e^{iz\mu}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 z^2} \int e^{-\frac{1}{2}(x-iz\sigma)^2} dx, \\ &= \exp\left(i\mu z - \frac{1}{2}\sigma^2 z^2\right).\end{aligned}\tag{2.36}$$

□

Vamos considerar agora uma sequência $S = X_1 + X_2 + \dots + X_N$ de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas. Concluímos imediatamente pelo teorema (2.1) que

$$\Phi_S(z) = \exp\left(iN\mu z - \frac{N}{2}\sigma^2 z^2\right),\tag{2.37}$$

qualquer que seja N , onde $\Phi_S(z)$ é a função característica associada à soma de variáveis aleatórias definidas.

Aplicando a transformada inversa de Fourier concluímos que a densidade de probabilidade associada à soma tornar-se-á

$$\rho_S(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi N\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2N\sigma^2}}.\tag{2.38}$$

Portanto, a densidade associada à soma é também Gaussiana.

Afirmção 2.1. Sejam X_1, X_2, \dots, X_N VA's independentes com distribuição de Gauss e seja $S = X_1 + X_2 + \dots + X_N$. Então a soma normalizada dessas VA's também tem distribuição de Gauss.

Corolário 2.1. Se Y tem distribuição normal com parâmetros μ e σ , então $\mathbb{E}[Y] = \mu$ e $Var Y = \sigma^2$.

Demonstração. Do teorema 2.5 $\varphi_Y(z) = \exp\left(i\mu z - \frac{\sigma^2 z^2}{2}\right)$ é a função característica de Y , então

$$\varphi'(z) = (i\mu - \sigma^2 z) \exp\left(i\mu z - \frac{\sigma^2 z^2}{2}\right),\tag{2.39}$$

$$\varphi''(z) = (i\mu - \sigma^2 z - \sigma^2) \exp\left(i\mu z - \frac{\sigma^2 z^2}{2}\right),\tag{2.40}$$

que são funções contínuas em \mathbb{R} com $\varphi'(0) = i\mu$ e $\varphi''(0) = -\sigma^2 - \mu^2$. Segue do teorema 2.2 que

$$\mathbb{E}[X] = -i\varphi'(0) = \mu \quad (2.41)$$

$$\text{Var}[X] = -\varphi''(0) + \varphi'(0)^2 = \sigma^2. \quad (2.42)$$

Como queríamos demonstrar □

2.7.2 Distribuição de Lorentz

Definição 2.16. A variável aleatória X tem distribuição de Lorentz padrão se

$$\rho_X(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \quad (2.43)$$

Assim como fizemos anteriormente, podemos alterar a amplitude da distribuição por um parâmetro σ e deslocá-la no eixo das abscissas por um parâmetro μ a fim de obter uma distribuição centralizada. Assim podemos definir:

Definição 2.17. Uma variável aleatória Y tem distribuição de Lorentz com parâmetros $\mu \in \mathbb{R}$ e $\gamma > 0$ se $Y = \gamma X + \mu$, onde X tem distribuição de Lorentz padrão.

Teorema 2.6. A função característica correspondente à distribuição de Lorentz com parâmetros μ e γ é

$$\varphi(z) = \exp(i\mu z - \gamma|z|). \quad (2.44)$$

Demonstração. Pela equação (2.20) podemos facilmente mostrar que

$$\rho_Y(y) = \frac{1}{\gamma\pi(1+x^2)}, \quad (2.45)$$

assim, como $Y = \gamma X + \mu$, temos

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \frac{e^{iz\mu}}{\gamma\pi} \int \frac{e^{iz\gamma x}}{(1+x^2)} \gamma dx, \\ &= \frac{e^{iz\mu}}{\pi} \pi e^{-\gamma|z|}, \\ &= \exp(i\mu z - \gamma|z|). \end{aligned} \quad (2.46)$$

Como queríamos mostrar. □

De maneira análoga ao que fizemos no caso da distribuição de Gauss vamos considerar agora uma sequência $S = X_1 + X_2 + \dots + X_N$ de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas. Mais uma vez concluímos imediatamente pelo teorema (2.1) que

$$\Phi_N(z) = \exp(i\mu Nz - \gamma N|z|). \quad (2.47)$$

Aplicando a transformada inversa de Fourier obtemos a densidade de probabilidade associada à soma

$$\begin{aligned} \rho_N(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dq \Phi_N(q) e^{-iqx}, \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{N\gamma}{(N\gamma)^2 + x^2}. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Afirmção 2.2. Sejam X_1, X_2, \dots, X_N VA's independentes com distribuição de Lorentz e seja $S = X_1 + X_2 + \dots + X_N$. Então a soma normalizada dessas VA's também têm distribuição de Lorentz.

Comparando as equações (2.44) com (2.33) observamos que a função característica associada aos processos de Gauss e Lorentz possui a mesma forma funcional que podemos generalizar como

$$\varphi(q) = \exp(i\mu Nz - \sigma|z|^\alpha), \quad (2.49)$$

tal que $\alpha = 1$ para Lorentz, $\alpha = 2$ para Gauss e σ é um parâmetro de escala. Sendo assim, podemos observar que a densidade $\rho_N(x)$ associada à soma de N variáveis aleatórias idênticas é também uma Lorentziana. Em outras palavras, a distribuição da soma de N variáveis aleatórias Lorentzianas também é Lorentziana. Este resultado é bastante curioso, pois em vez da distribuição da soma se tornar uma Gaussiana ela permanece Lorentziana. Portanto, dizemos neste caso que a distribuição de Lorentz é uma **distribuição estável**, pois sua convolução resulta numa mesma distribuição. Usando este raciocínio, podemos então afirmar que a distribuição Gaussiana é também estável. Com base nesses resultados podemos dizer que uma distribuição é estável⁵ se satisfaz a seguinte definição:

Definição 2.18. Seja X_1, \dots, X_N cópias de uma variável aleatória X . Então dizemos que a distribuição de X é estável se a variável aleatória $X_1 + \dots + X_N$ tem a mesma distribuição de

⁵do inglês: Stable laws, α -stable, ou Lévy stable distribution

X .

Proposição 2.5. Seja X uma variável aleatória cuja função característica é φ , então as seguintes afirmações são equivalentes:

1. X tem distribuição estável;
2. Para todo $n \geq 1$ existem variáveis aleatórias X_1, \dots, X_N independentes e identicamente distribuídas a X , e constantes a_N e b_N tais que $a_N X + b_N \stackrel{D}{=} X_1, \dots, X_N$;
3. para todo $N \geq 1$ existem constantes a_N e b_N tais que $(\varphi(z))^N = \varphi(a_N z) e^{i b_N z}$.

No caso da distribuição Gaussiana, por exemplo, temos:

$$(\varphi(z))^N = \exp\left(iz\mu - \frac{\sigma^2 z^2}{2}\right)^N = \varphi(\sqrt{N}z) \exp(it\mu(N - \sqrt{N})) = \varphi(a_N z) e^{i b_N z}, \quad (2.50)$$

tal que $a_n = \sqrt{N}$ e $b_N = (N - \sqrt{N})\mu$. De modo análogo é fácil mostrar que no caso da distribuição de Lorentz $a_N = N$ e $b_N = 0$.

Proposição 2.6. Toda distribuição estável é infinitamente divisível.

Este resultado é bastante interessante e deve deixar o leitor se questionando “que outros tipos de distribuições também gozam dessa propriedade?”. Lévy [5] e Khintchine [22] resolveram esse problema analiticamente e determinaram a forma da função característica de toda a classe de distribuições estáveis. O resultado obtido por esses autores pode ser condensado no teorema que segue.

Teorema 2.7. (Representação canônica de Lévy-Khintchin). Toda função característica estável pode ser representada canonicamente por

$$\ln \varphi(z) = \begin{cases} i\mu z - \sigma|z|^\alpha \left[1 - i\beta \frac{z}{|z|} \tan\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right)\right] & \alpha \neq 1, \\ i\mu z - \sigma|z| \left[1 + \beta \frac{z}{|z|} \frac{2}{\pi} \ln|z|\right] & \alpha = 1 \end{cases} \quad (2.51)$$

onde $0 < \alpha \leq 2$, $-1 < \beta < 1$, $\sigma > 0$ e $\frac{t}{|t|} = 0$ se $t = 0$. A forma analítica de uma distribuição estável de Lévy é conhecida apenas para os seguintes valores de α e β :

1. $\alpha = 1/2$ e $\beta = 1$ (Distribuição de Lévy),
2. $\alpha = 1$, $\beta = 0$ (Distribuição Lorentz),

3. $\alpha = 2, \beta = 0$ (Distribuição Gaussiana).

Corolário 2.2. Seja X uma variável aleatória com distribuição estável e função característica dada em (2.51), então segue que:

1. X não é integrável para $0 < \alpha \leq 1$;
2. $\mathbb{E}[X] = \mu$ para $1 < \alpha \leq 2$;
3. $Var[X] = 2\sigma$ para $\alpha = 2$;
4. $VarX = \infty$ para $0 < \alpha \leq 2$.

Demonstração. Se $\alpha \neq 1$, temos pelo teorema 2.7 que,

$$\varphi'(z) = \begin{cases} [i\mu - \alpha\sigma (1 + i\beta \tan \frac{\pi\alpha}{2}) z^{\alpha-1}] \varphi(z), & \text{se } z > 0 \\ [i\mu + \alpha\sigma (1 - i\beta \tan \frac{\pi\alpha}{2}) (-z)^{\alpha-1}] \varphi(z), & \text{se } z < 0 \end{cases} \quad (2.52)$$

e

$$\varphi''(z) = \begin{cases} \left\{ -\alpha\sigma(\alpha-1) (1 + i\beta \tan \frac{\pi\alpha}{2}) z^{\alpha-2} + [i\mu - \alpha\sigma (1 + i\beta \tan \frac{\pi\alpha}{2}) z^{\alpha-1}]^2 \right\} \varphi(z), & \text{se } z > 0 \\ \left\{ -\alpha\sigma(\alpha-1) (1 - i\beta \tan \frac{\pi\alpha}{2}) (-z)^{\alpha-2} + [i\mu + \alpha\sigma (1 - i\beta \tan \frac{\pi\alpha}{2}) (-z)^{\alpha-1}]^2 \right\} \varphi(z). & \text{se } z < 0 \end{cases}$$

Assim, para $0 < \alpha \leq 1$ temos

$$\lim_{z \rightarrow 0} |\varphi'(z)| = \infty, \quad (2.53)$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} |\varphi''(z)| = \infty. \quad (2.54)$$

Logo, pelo teorema 2.2 X não é integrável e $Var[X]$ diverge. Para $1 < \alpha \leq 2$ temos que

$$\lim_{z \rightarrow 0} \varphi'(z) = i\mu, \quad (2.55)$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} |\varphi''(z)| = \infty. \quad (2.56)$$

Portanto, pelo teorema 2.2 concluímos que $\mathbb{E}[X] = \mu$ e $Var[X]$ diverge. Por outro lado, para $\alpha = 1$ temos pelo teorema 2.7

$$\varphi'(z) = \begin{cases} i\mu - \sigma - \frac{2i\sigma\beta}{\pi} \ln z - \frac{2i\sigma\beta}{\pi}, & \text{se } z > 0 \\ i\mu + \sigma - \frac{2i\sigma\beta}{\pi} \ln(-z) - \frac{2i\sigma\beta}{\pi}. & \text{se } z < 0 \end{cases} \quad (2.57)$$

Assim, concluímos que

$$\lim_{z \rightarrow 0} |\varphi'(z)| = \infty, \text{ se } \beta \neq 0 \quad (2.58)$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} \varphi'(z) = i - \sigma \neq 1 + \sigma, \text{ se } \beta = 0 \text{ e } \sigma \neq 0 \quad (2.59)$$

e portanto X não é integrável e $Var[X]$ diverge. Por fim, para $\alpha = 2$ temos $\varphi(z) = \exp(i\mu z - \frac{1}{2}\sigma^2 z^2)$ de modo que pelo corolário 2.1, $\mathbb{E}[X] = \mu$ e $Var[X] = 2\sigma$. \square

A fim de compreender o comportamento das distribuições estáveis no limite assintótico $x \rightarrow \infty$ vamos considerar uma distribuição estável simétrica ($\beta = 0$) com média nula ($\mu = 0$), de modo que a respectiva função densidade pode ser escrita como

$$\rho_X(x) \equiv \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-\sigma|z|^\alpha} \cos(zx) dz. \quad (2.60)$$

fazendo uma expansão em série de potência para $\sigma = 1$ e $|x| \gg 0$ [34] obtemos

$$\rho(x) = -\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k \Gamma(\alpha k + 1)}{k! |x|^{\alpha k + 1}} \sin\left[\frac{k\pi\alpha}{2}\right] + R(|x|), \quad (2.61)$$

tal que $R(|x|) = \mathcal{O}(|x|^{-\alpha(n+1)-1})$ e $\Gamma(x)$ é a função gama de Euler. Assim concluímos que a função densidade de uma distribuição estável se comporta assintoticamente como uma lei de potência, isto é,

$$\rho_X(x) \sim \frac{\Gamma(1 + \alpha) \sin(\pi\alpha/2)}{\pi |x|^{1+\alpha}} \sim \frac{1}{|x|^{1+\alpha}}. \quad (2.62)$$

A distribuição definida em (2.62) é conhecida na literatura como distribuição de Pareto [35]. Em outras palavras, podemos afirmar que o comportamento assintótico de distribuições estáveis de Lévy converge para a distribuição de Pareto. A fim analisar o comportamento dos momentos estatísticos desta distribuição assintótica, vamos considerar a densidade (2.62) não normalizada e analisar como o primeiro e o segundo momento se comportam em relação a x . O segundo momento pode ser calculado a partir de

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(x^2) &= \int_{x_{min}}^\infty \frac{x^2}{|x|^{1+\alpha}} dx, \\ &\propto x^{-\alpha+2} \Big|_{x_{min}}^\infty \end{aligned} \quad (2.63)$$

De modo análogo o primeiro momento tornar-se-á

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(x) &= \int_{x_{min}}^{\infty} \frac{x}{|x|^{1+\alpha}} dx, \\ &\propto x^{-\alpha+1} \Big|_{x_{min}}^{\infty}. \end{aligned} \quad (2.64)$$

Assim, a partir das equações (2.63) e (2.64) concluímos que:

1. o primeiro e o segundo momento divergem para $\alpha < 2$, ou seja, distribuições estáveis de Lévy têm variância e média divergente quando $\alpha < 2$,
2. o primeiro momento é finito se $\alpha > 1$.

Em síntese, quando $\alpha < 2$ a variância é infinita, quando $\alpha > 1$ a média da distribuição existe e é igual a μ , já quando $\alpha = 2$ a distribuição gaussiana resulta. Estes resultados estão de acordo com o corolário 2.2.

2.8 Representação canônica da função característica

Vamos considerar um vetor aleatório $\vec{U} \in \mathbb{R}^d$ cuja densidade $\rho_{\vec{U}}(\vec{u})$ é definida como

$$\rho_{\vec{U}}(\vec{u}) = \begin{cases} f(\vec{u}), & \text{se } |\vec{u}| \leq u_c \\ \frac{C(\hat{u})}{|\vec{u}|^{1+\alpha}}, & \text{se } |\vec{u}| \geq u_c \end{cases} \quad (2.65)$$

tal que $u_c > 0$, $\alpha > 0$. Além disso, $C(\hat{u})$ e $f(\vec{u})$ são duas funções não negativas definidas de um modo tal que $\rho_{\vec{U}}(\vec{u})$ é normalizada. Portanto, a função característica do vetor aleatório \vec{U} é dada por

$$\Psi_{\vec{U}}(\vec{z}) = \int_{|\vec{u}| \leq u_c} e^{i\vec{u} \cdot \vec{z}} d\vec{u} + \int_{\hat{u} \in S_d} \left[C(\hat{u}) \int_{u_c}^{\infty} \frac{e^{i|\vec{u}|\hat{u} \cdot \vec{z}}}{|\vec{u}|^{1+\alpha}} d|\vec{u}| \right] dS_d. \quad (2.66)$$

Fazendo $y = |\vec{u}|$ e $\hat{u} \cdot \vec{z} = z$ podemos escrever a integral sobre a variável radial da seguinte forma

$$J_{\alpha}(z) = \int_R^{\infty} \frac{e^{izy}}{y^{1+\alpha}} dy, \quad (2.67)$$

na qual $\alpha, R > 0$ e $z \in \mathbb{R}$. Fazendo a transformação $\xi = zy$ para $z > 0$ chegamos a

$$J_{\alpha}(z) = z^{\alpha} \int_{zR}^{\infty} \frac{e^{i\xi}}{\xi^{1+\alpha}} d\xi, \quad (2.68)$$

Vamos considerar inicialmente que α é um não inteiro positivo. Expandindo a exponencial em série de potência obtemos

$$e^{i\xi} = \mathcal{P}(i\xi) + \mathcal{R}(i\xi) \quad (2.69)$$

onde

$$\mathcal{P}(i\xi) = \sum_{k=0}^p \frac{(i\xi)^k}{k!}, \quad (2.70)$$

$$\mathcal{R}(i\xi) = \sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{(i\xi)^k}{k!}, \quad (2.71)$$

de modo que p é o maior inteiro menor que α , isto é, $p < \alpha < p + 1$. Assim, a equação (2.68) tornar-se-á

$$\begin{aligned} J_{\alpha}(z) &= z^{\alpha} \int_{zR}^{\infty} \frac{\mathcal{P}(i\xi)}{\xi^{1+\alpha}} d\xi + z^{\alpha} \int_{zR}^{\infty} \frac{\mathcal{R}(i\xi)}{\xi^{1+\alpha}} d\xi, \\ &= z^{\alpha} \int_{zR}^{\infty} \frac{\mathcal{P}(i\xi)}{\xi^{1+\alpha}} d\xi - z^{\alpha} \int_0^{zR} \frac{\mathcal{R}(i\xi)}{\xi^{1+\alpha}} d\xi + z^{\alpha} \int_0^{\infty} \frac{\mathcal{R}(i\xi)}{\xi^{1+\alpha}} d\xi, \end{aligned} \quad (2.72)$$

tal que

$$\begin{aligned} \int_{zR}^{\infty} \frac{\mathcal{P}(i\xi)}{\xi^{1+\alpha}} d\xi &= \int_{zR}^{\infty} \sum_{k=0}^p \frac{(i\xi)^k}{k!} \frac{d\xi}{\xi^{\alpha+1}}, \\ &= \sum_{k=0}^p \frac{i^k}{k!} \int_{zR}^{\infty} \frac{d\xi}{\xi^{\alpha+1-k}}, \\ &= \sum_{k=0}^p \frac{i^k}{k!} \left. \frac{\xi^{\alpha+1-k}}{k-\alpha} \right|_{zR}^{\infty}, \\ &= \sum_{k=0}^p \frac{i^k}{k!} \frac{(zR)^{k-\alpha}}{\alpha-k}, \end{aligned} \quad (2.73)$$

onde $\alpha - k > 0$. Temos ainda o termo

$$\begin{aligned} \int_0^{zR} \frac{\mathcal{R}(i\xi)}{\xi^{1+\alpha}} d\xi &= \int_0^{zR} \sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{(i\xi)^k}{k!} \frac{d\xi}{\xi^{\alpha+1}}, \\ &= \sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{i^k}{k!} \left. \frac{\xi^{k-\alpha}}{k-\alpha} \right|_0^{zR}, \\ &= \sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{i^k}{k!} \frac{(zR)^{k-\alpha}}{k-\alpha}, \end{aligned} \quad (2.74)$$

de modo que $k - \alpha > 0$. Por fim,

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty \frac{\mathcal{R}(i\xi)}{\xi^{1+\alpha}} d\xi &= \int_0^\infty \frac{e^{i\zeta} - \mathcal{P}(i\zeta)}{\zeta^{\alpha+1}} d\zeta, \\
 &= \int_0^\infty \sum_{k=p+1}^\infty \frac{(i\zeta)^k}{k!} \frac{d\zeta}{\zeta^{\alpha+1}}, \\
 &= \frac{i^{-\alpha}\Gamma(-\alpha)}{\Gamma(p+1-\alpha)} \int_0^\infty \frac{e^{-y}}{y^{\alpha-p}} dy, \\
 &= i^{-\alpha}\Gamma(-\alpha).
 \end{aligned} \tag{2.75}$$

Levando em conta que $i^{-\alpha} = e^{-i\alpha\frac{\pi}{2}}$ e $\Gamma(\alpha+1)\Gamma(-\alpha) = \pi/\sin(\pi\alpha)$ obtemos o seguinte resultado

$$\int_0^\infty \frac{\mathcal{R}(i\xi)}{\xi^{1+\alpha}} d\xi = -\frac{\pi}{\Gamma(\alpha+1)} \frac{\cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) - i\sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)}{\sin(\alpha\pi)}. \tag{2.76}$$

Substituindo (2.73), (2.74) e (2.76) em (2.72)

$$\begin{aligned}
 J_\alpha(z) &= z^\alpha \sum_{k=0}^p \frac{i^k (zR)^{k-\alpha}}{k!} \frac{1}{\alpha-k} - \sum_{k=p+1}^p \frac{i^k (zR)^{k-\alpha}}{k!} \frac{1}{k-\alpha} - \frac{z^\alpha \pi}{\Gamma(\alpha+1)} \frac{\cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) - i\sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)}{\sin(\alpha\pi)} \\
 &= \sum_{k=0}^\infty \frac{(iz)^k R^{k-\alpha}}{k!(\alpha-k)} - \frac{z^\alpha \pi}{\Gamma(\alpha+1)} \frac{\cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) - i\sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)}{\sin(\alpha\pi)}.
 \end{aligned} \tag{2.77}$$

A fim de obter a expressão de $J_\alpha(z)$ para todo z real precisamos considerar que

$$J_\alpha(z) = J_\alpha^{Re}(z) + iJ_\alpha^{Im}(z) \tag{2.78}$$

onde $J_\alpha^{Re}(-z) = J_\alpha^{Re}(z)$ e $J_\alpha^{Im}(-z) = -J_\alpha^{Im}(z)$. Assim, para todo $z > 0$

$$J_\alpha^{Re}(z) = \sum_{k \text{ épar}} \frac{R^{k-\alpha}}{k!|\alpha-k|} (iz)^k - \frac{\pi}{\Gamma(\alpha+1)} \frac{\cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)}{\sin(\alpha\pi)} z^\alpha, \tag{2.79}$$

$$J_\alpha^{Im}(z) = \sum_{k \text{ ímpar}} \frac{R^{k-\alpha}}{k!|\alpha-k|} i^{k-1} z^k + \frac{\pi}{\Gamma(\alpha+1)} \frac{\sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)}{\sin(\alpha\pi)} z^\alpha. \tag{2.80}$$

Portanto, para $z < 0$ as somas pares e ímpares acima mantém a mesma forma que para $z > 0$. Por outro lado, z^α deve ser substituído por $|z|^\alpha$ na parte real e por $(z/|z|)|z|^\alpha$ na parte imaginária. Assim, podemos escrever (2.77) para todo z

$$J_\alpha(z) = T_\alpha(z) + g(z) \tag{2.81}$$

$$T_\alpha(z) = -\frac{\pi|z^\alpha|}{\Gamma(\alpha+1)} \frac{\cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) - i\frac{z}{|z|}\sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)}{\sin(\alpha\pi)} \quad (2.82)$$

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iz)^k R^{k-\alpha}}{k!|\alpha-k|} \quad (2.83)$$

Logo, se α não é um inteiro concluímos que a integral $J_\alpha(z)$ é igual a uma série de potenciais mais um termo analítico.

Por outro lado se considerarmos que α é um inteiro positivo, podemos resolver a integral (2.67) por partes fazendo a mudança de variáveis $u = e^{iyz} \implies \frac{du}{dy} = iz e^{iyz}$ e $v = -\frac{y^{-\alpha}}{\alpha} \implies \frac{dv}{dy} = y^{-(\alpha+1)}$ com $J_\alpha(z) = uv|_R^\infty - \int_R^\infty v du$. Assim podemos escrever

$$J_\alpha(z) = -\frac{y^{-\alpha}}{\alpha} e^{iyz} \Big|_R^\infty - \int_R^\infty \left(\frac{-y^{-\alpha}}{\alpha}\right) iz e^{iyz} dy. \quad (2.84)$$

Fazendo uma nova mudança de variáveis $u = e^{iyz} \implies \frac{du}{dy} = iz e^{iyz}$ e $v = \frac{y^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \implies \frac{dv}{dy} = y^{-\alpha}$ obtemos:

$$\begin{aligned} J_\alpha(z) &= -\frac{y^{-\alpha}}{\alpha} e^{iyz} \Big|_R^\infty + \frac{iz}{\alpha} \left\{ \frac{y^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} e^{iyz} \Big|_R^\infty - \int_R^\infty \left(\frac{y^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right) iz e^{iyz} dy \right\}, \\ &= -\frac{y^{-\alpha}}{\alpha} e^{iyz} \Big|_R^\infty + \frac{iz y^{-\alpha+1}}{\alpha(-\alpha+1)} e^{iyz} \Big|_R^\infty - \frac{(iz)^2}{\alpha(-\alpha+1)} \int_R^\infty y^{-\alpha+1} e^{iyz} dy. \end{aligned} \quad (2.85)$$

Seguindo o mesmo raciocínio podemos escrever uma outra mudança de variáveis $u = e^{iyz} \implies \frac{du}{dy} = iz e^{iyz}$ e $v = \frac{y^{-\alpha+2}}{-\alpha+2} \implies \frac{dv}{dy} = y^{-\alpha+1}$ e então chegamos a:

$$\begin{aligned} J_\alpha(z) &= -\frac{y^{-\alpha}}{\alpha} e^{iyz} \Big|_R^\infty + \frac{iz y^{-\alpha+1}}{\alpha(-\alpha+1)} e^{iyz} \Big|_R^\infty - \frac{(iz)^2}{\alpha(-\alpha+1)} \left\{ \frac{y^{-\alpha+2}}{-\alpha+2} e^{iyz} \Big|_R^\infty + \right. \\ &\quad \left. - \int_R^\infty \frac{y^{-\alpha+2}}{-\alpha+2} iz e^{iyz} dy \right\} \end{aligned} \quad (2.86)$$

$$\begin{aligned} J_\alpha(z) &= \left[-\frac{y^{-\alpha}}{\alpha} e^{iyz} + \frac{iz y^{-\alpha+1}}{\alpha(-\alpha+1)} e^{iyz} - \frac{(iz)^2 y^{-\alpha+2} e^{iyz}}{\alpha(-\alpha+1)(-\alpha+2)} \right]_R^\infty + \\ &\quad + \frac{(iz)^3}{\alpha(-\alpha+1)(-\alpha+2)} \int_R^\infty y^{-\alpha+2} e^{iyz} dy. \end{aligned} \quad (2.87)$$

Por fim, fazendo uma última mudança $u = e^{iyz} \implies \frac{du}{dy} = iz e^{iyz}$ e $v = \frac{y^{-\alpha+3}}{-\alpha+3} \implies \frac{dv}{dy} = y^{-\alpha+2}$ concluímos que

$$\begin{aligned} J_\alpha(z) &= \left[-\frac{y^{-\alpha}}{\alpha} + \frac{iz y^{-\alpha+1}}{\alpha(-\alpha+1)} - \frac{(iz)^2 y^{-\alpha+2}}{\alpha(-\alpha+1)(-\alpha+2)} + \frac{(iz)^3 y^{-\alpha+3}}{\alpha(-\alpha+1)(-\alpha+2)(-\alpha+3)} \right] e^{iyz} \Big|_R^\infty + \\ &\quad + \frac{(iz)^4}{\alpha(-\alpha+1)(-\alpha+2)(-\alpha+3)} \int_R^\infty y^{-\alpha+3} e^{iyz} dy. \end{aligned} \quad (2.88)$$

Após executar essa sequência de mudanças de variáveis podemos observar o padrão que se forma na equação. Deste modo, é possível generalizar o resultado da seguinte maneira:

$$J_\alpha(z) = \left[-\frac{y^{-\alpha}}{\alpha} - \frac{izy^{-\alpha+1}}{\alpha(\alpha-1)} - \frac{(iz)^2 y^{-\alpha+2}}{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)} + \dots - \frac{(iz)^n y^{-\alpha+n}}{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)} \right] e^{iyz} \Big|_R^\infty + \frac{(iz)^{n+1}}{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n)} \int_R^\infty y^{-\alpha+n} e^{iyz} dy. \quad (2.89)$$

A fim manter essa série convergente quando $y \rightarrow \infty$ vamos truncar a série considerando $n = \alpha - 1$

$$J_\alpha(z) = \left[-\frac{y^{-\alpha}}{\alpha} - \frac{izy^{-\alpha+1}}{\alpha(\alpha-1)} - \frac{(iz)^2 y^{-\alpha+2}}{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)} + \dots - \frac{(iz)^{\alpha-1} y^{-1}}{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots 1} \right] e^{iyz} \Big|_R^\infty + \frac{(iz)^{\alpha}}{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots 1} \int_R^\infty y^{-1} e^{iyz} dy, \quad (2.90)$$

assim podemos reescrever essa série como

$$\begin{aligned} J_\alpha(z) &= -\frac{e^{iyz}}{\alpha!} \sum_{k=0}^{\alpha-1} y^{-\alpha+k} (\alpha-k-1)! (iz)^k \Big|_R^\infty + \frac{(iz)^\alpha}{\alpha!} \int_R^\infty \frac{e^{iyz}}{y} dy, \\ &= \frac{e^{iRz}}{\alpha! R^\alpha} \sum_{k=0}^{\alpha-1} (\alpha-k-1)! (iRz)^k + \frac{(iz)^\alpha}{\alpha!} \int_R^\infty \frac{e^{iyz}}{y} dy, \end{aligned} \quad (2.91)$$

tal que $\alpha > k$. Fazendo $izy = -T \implies \frac{dy}{dT} = -\frac{1}{iz}$

$$\int_R^\infty \frac{e^{iyz}}{y} dy = \int_{-izR}^\infty \frac{e^{-T}}{T} dT = \Gamma(0, -izR) \quad (2.92)$$

onde $\Gamma(0, -izR)$ é a função gama incompleta descrita por

$$\begin{aligned} \Gamma(0, -izR) &= -\gamma - \ln(-izR) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(izR)^k}{kk!}, \\ &= -\gamma - \ln(-i) - \ln z - \ln R - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(izR)^k}{kk!}, \\ &= -\gamma - \frac{i\pi}{2} - \ln z - \ln R - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(izR)^k}{kk!}, \end{aligned} \quad (2.93)$$

concluimos que

$$\int_R^\infty \frac{e^{iyz}}{y} dy = -\gamma + \frac{i\pi}{2} - \ln z - \ln R - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(izR)^k}{kk!}. \quad (2.94)$$

Substituindo este resultado na integral (2.91) obtemos

$$J_\alpha(z) = \frac{e^{iRz}}{\alpha!R^\alpha} \sum_{k=0}^{\alpha-1} (\alpha - k - 1)! (iRz)^k + \frac{(iz)^\alpha}{\alpha!} \left\{ -\gamma + \frac{i\pi}{2} - \ln z - \ln R - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(izR)^k}{kk!} \right\}. \quad (2.95)$$

Reagrupando os termos podemos escrever

$$J_\alpha(z) = g(z) + T_\alpha(z) \quad (2.96)$$

tal que

$$T_\alpha(z) = \frac{i(iz)^\alpha \pi}{\alpha!} \frac{\pi}{2} + (iz)^\alpha \left[-\frac{\gamma}{\alpha!} - \frac{\ln R}{\alpha!} \right] - \frac{(iz)^\alpha}{\alpha!} \ln z, \quad (2.97)$$

$$g(z) = \frac{e^{iRz}}{\alpha!R^\alpha} \sum_{k=0}^{\alpha-1} (\alpha - k - 1)! (iRz)^k - \frac{(iz)^\alpha}{\alpha!} \sum_{k=1}^{\alpha} \frac{(izR)^k}{kk!}. \quad (2.98)$$

Voltando para as variáveis originais chegamos a

$$\int_{zR}^{\infty} \frac{e^{i|\vec{u} \cdot \vec{z}|}}{|\vec{u}|^{1+\alpha}} d|\vec{u}| = T_\alpha(\vec{z} \cdot \hat{u}) + g(\vec{z} \cdot \hat{u}), \quad (2.99)$$

tal que a partir das equações (2.82) e (2.97) o primeiro termo do lado direito da equação acima pode ser escrito explicitamente como

$$T_\alpha(\vec{z} \cdot \hat{u}) = \begin{cases} \frac{\pi |\hat{u} \cdot \vec{z}|^\alpha \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) - i \frac{\hat{u} \cdot \vec{z}}{|\hat{u} \cdot \vec{z}|} \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)}{\Gamma(\alpha+1) \sin(\alpha\pi)}, & \text{se } \alpha \text{ não inteiro} \\ \frac{i i^\alpha (\hat{u} \cdot \vec{z})^\alpha \pi}{\alpha!} + i^\alpha (\hat{u} \cdot \vec{z})^\alpha \left[-\frac{\gamma}{\alpha!} - \frac{\ln R}{\alpha!} \right] - \frac{i^\alpha (\hat{u} \cdot \vec{z})^\alpha}{\alpha!} \ln |\hat{u} \cdot \vec{z}|. & \text{se } \alpha \text{ inteiro} \end{cases} \quad (2.100)$$

Do mesmo modo, a partir das equações (2.98) e (2.83) o segundo termo da equação (2.99) tornar-se-á

$$g(\hat{u} \cdot \vec{z}) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\hat{u} \cdot \vec{z})^k R^{k-\alpha}}{k! |\alpha-k|}, & \text{se } \alpha \text{ não inteiro} \\ \frac{e^{iR\hat{u} \cdot \vec{z}}}{\alpha! R^\alpha} \sum_{k=0}^{\alpha-1} (\alpha - k - 1)! (iR\hat{u} \cdot \vec{z})^k - \frac{(i\hat{u} \cdot \vec{z})^\alpha}{\alpha!} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(i\hat{u} \cdot \vec{z} R)^k}{kk!} & \text{se } \alpha \text{ inteiro.} \end{cases}$$

Substituindo (2.99) em (2.66) temos

$$\Psi_{\vec{U}}(\vec{z}) = \int_{|\vec{u}| \leq u_c} e^{i\vec{u} \cdot \vec{z}} d\vec{u} + \int_{\hat{u} \in S_d} C(\hat{u}) T_\alpha(\vec{z} \cdot \hat{u}) dS_d + \int_{\hat{u} \in S_d} g(\vec{z} \cdot \hat{u}) dS_d, \quad (2.101)$$

de onde podemos definir os seguintes objetos

$$\begin{aligned} F(z) &= \int_{|\vec{u}| \leq u_c} e^{i\vec{u} \cdot \vec{z}} d\vec{u} + \int_{\hat{u} \in S_d} g(\vec{z} \cdot \hat{u}) dS_d, \\ I_\alpha(\vec{z}) &= \int_{\hat{u} \in S_d} C(\hat{u}) T_\alpha(\vec{z} \cdot \hat{u}) dS_d. \end{aligned} \quad (2.102)$$

A partir da equação (2.100) para α inteiro podemos obter a função $T_\alpha(\vec{z} \cdot \hat{u})$ para $\alpha = 1$ e $\alpha = 2$

$$T_1(\vec{z} \cdot \hat{u}) = -i(\hat{u} \cdot \vec{z}) \ln |\hat{u} \cdot \vec{z}| - \frac{\pi}{2} |\hat{u} \cdot \vec{z}| + i(\hat{u} \cdot \vec{z}) [-\gamma - \ln u_c] \quad (2.103)$$

$$T_2(\vec{z} \cdot \hat{u}) = -\frac{i\pi}{4} \hat{u} \cdot \vec{z} |\hat{u} \cdot \vec{z}| - \frac{(\hat{u} \cdot \vec{z})^2}{2} \{-\gamma - \ln R - \ln |\hat{u} \cdot \vec{z}|\} \quad (2.104)$$

Assim, para $\alpha = 1$ podemos escrever a equação (2.102) como

$$\begin{aligned} I_1(\vec{z}) &= \int_{\hat{u} \in S_d} C(\hat{u}) \left\{ -i(\hat{u} \cdot \vec{z}) \ln |\hat{u} \cdot \vec{z}| - \frac{\pi}{2} |\hat{u} \cdot \vec{z}| + i(\hat{u} \cdot \vec{z}) [-\gamma - \ln u_c] \right\} dS_d, \\ &= \int_{\hat{u} \in S_d} \left\{ -i|\vec{z}|(\hat{u} \cdot \hat{z}) (\ln |\vec{z}| + \ln |\hat{u} \cdot \hat{z}|) - \frac{\pi}{2} |\vec{z}| |\hat{u} \cdot \hat{z}| + i|\vec{z}|(\hat{u} \cdot \hat{z}) [-\gamma - \ln u_c] \right\} C(\hat{u}) dS_d, \\ &= |\vec{z}| \int_{\hat{u} \in S_d} \left\{ -i(\hat{u} \cdot \hat{z}) (\ln |\vec{z}| + \ln |\hat{u} \cdot \hat{z}|) - \frac{\pi}{2} |\hat{u} \cdot \hat{z}| + i(\hat{u} \cdot \hat{z}) [-\gamma - \ln u_c] \right\} C(\hat{u}) dS_d. \end{aligned} \quad (2.105)$$

assim

$$\begin{aligned} I_1(\vec{z}) &= |\vec{z}| \left\{ -i \int_{\hat{u} \in S_d} (\hat{u} \cdot \hat{z}) \ln |\hat{u} \cdot \hat{z}| C(\hat{u}) dS_d - \frac{\pi}{2} \int_{\hat{u} \in S_d} |\hat{u} \cdot \hat{z}| C(\hat{u}) dS_d + \right. \\ &\quad \left. + i(-\gamma - \ln u_c - \ln |\vec{z}|) \int_{\hat{u} \in S_d} (\hat{u} \cdot \hat{z}) C(\hat{u}) dS_d \right\}, \end{aligned} \quad (2.106)$$

definindo

$$A_1(\hat{z}) = \int_{\hat{u} \in S_d} |\hat{u} \cdot \hat{z}| C(\hat{u}) dS_d, \quad (2.107)$$

$$B_1(\hat{z}) = \int_{\hat{u} \in S_d} (\hat{u} \cdot \hat{z}) C(\hat{u}) dS_d, \quad (2.108)$$

$$D_1(\hat{z}) = \int_{\hat{u} \in S_d} (\hat{u} \cdot \hat{z}) \ln |\hat{u} \cdot \hat{z}| C(\hat{u}) dS_d. \quad (2.109)$$

deste modo a equação (2.106) tornar-se-á

$$I_1(\vec{z}) = - \left\{ \frac{\pi}{2} A_1(\hat{z}) - i[-D_1(\hat{z}) + (-\gamma - \ln u_c - \ln |\vec{z}|) B_1(\hat{z})] \right\} |\vec{z}|. \quad (2.110)$$

Por outro lado, para $\alpha = 2$

$$\begin{aligned}
I_2(\vec{z}) &= \int_{\hat{u} \in S_d} C(\hat{u}) \left\{ -\frac{i\pi}{4} \hat{u} \cdot \vec{z} |\hat{u} \cdot \vec{z}| - \frac{(\hat{u} \cdot \vec{z})^2}{2} \{-\gamma - \ln u_c - \ln |\hat{u} \cdot \vec{z}|\} \right\} dS_d, \\
&= \int_{\hat{u} \in S_d} \left\{ -\frac{i\pi}{4} |\vec{z}|^2 \hat{u} \cdot \hat{z} |\hat{u} \cdot \hat{z}| - |\vec{z}|^2 \frac{(\hat{u} \cdot \hat{z})^2}{2} \{-\gamma - \ln u_c - \ln |\vec{z}| - \ln |\hat{u} \cdot \hat{z}|\} \right\} C(\hat{u}) dS_d, \\
&= -\frac{|\vec{z}|^2}{2} \int_{\hat{u} \in S_d} \left\{ \frac{i\pi}{2} \hat{u} \cdot \hat{z} |\hat{u} \cdot \hat{z}| + (\hat{u} \cdot \hat{z})^2 \{-\gamma - \ln u_c - \ln |\vec{z}| - \ln |\hat{u} \cdot \hat{z}|\} \right\} C(\hat{u}) dS_d. \quad (2.111)
\end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned}
I_2(\vec{z}) &= -\frac{|\vec{z}|^2}{2} \left\{ \frac{i\pi}{2} \int_{\hat{u} \in S_d} \hat{u} \cdot \hat{z} |\hat{u} \cdot \hat{z}| C(\hat{u}) dS_d + (-\gamma - \ln u_c - \ln |\vec{z}|) \int_{\hat{u} \in S_d} (\hat{u} \cdot \hat{z})^2 C(\hat{u}) dS_d \right. \\
&\quad \left. - \int_{\hat{u} \in S_d} (\hat{u} \cdot \hat{z})^2 \ln |\hat{u} \cdot \hat{z}| C(\hat{u}) dS_d \right\} \quad (2.112)
\end{aligned}$$

definimos

$$A_2(\hat{z}) = \int_{\hat{u} \in S_d} (\hat{u} \cdot \hat{z})^2 C(\hat{u}) dS_d, \quad (2.113)$$

$$B_2(\hat{z}) = \int_{\hat{u} \in S_d} \hat{u} \cdot \hat{z} |\hat{u} \cdot \hat{z}| C(\hat{u}) dS_d \quad (2.114)$$

$$D_2(\hat{z}) = \int_{\hat{u} \in S_d} (\hat{u} \cdot \hat{z})^2 \ln |\hat{u} \cdot \hat{z}| C(\hat{u}) dS_d, \quad (2.115)$$

logo

$$I_2(\vec{z}) = -|\vec{z}|^2 \left\{ \frac{i\pi}{4} B_2(\hat{z}) + (-\gamma - \ln u_c - \ln |\vec{z}|) \frac{1}{2} A_2(\hat{z}) - \frac{1}{2} D_2(\hat{z}) \right\}. \quad (2.116)$$

Por outro lado, a partir da equação (2.100) para α não inteiro podemos obter a função $T_\alpha(\vec{z} \cdot \hat{u})$

$$T_\alpha(\hat{u} \cdot \vec{z}) = -\frac{\pi |\hat{u} \cdot \vec{z}|^\alpha \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) - i \frac{\hat{u} \cdot \vec{z}}{|\hat{u} \cdot \vec{z}|} \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)}{\Gamma(\alpha + 1) \sin(\alpha\pi)} \quad (2.117)$$

Assim a equação (2.102) tornar-se-á

$$\begin{aligned}
 I_\alpha(\vec{z}) &= \int_{\hat{u} \in S_d} C(\hat{u}) \left\{ \frac{\pi |\hat{u} \cdot \vec{z}|^\alpha \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) - i \frac{\hat{u} \cdot \vec{z}}{|\hat{u} \cdot \vec{z}|} \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)}{\Gamma(\alpha+1) \sin(\alpha\pi)} \right\} dS_d, \\
 &= -\frac{\pi |\vec{z}|^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \left\{ \frac{\cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)}{\sin(\alpha\pi)} \int_{\hat{u} \in S_d} |\hat{u} \cdot \vec{z}|^\alpha C(\hat{u}) dS_d + \right. \\
 &\quad \left. -i \frac{\sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)}{\sin(\alpha\pi)} \int_{\hat{u} \in S_d} \frac{\hat{u} \cdot \vec{z}}{|\hat{u} \cdot \vec{z}|} |\hat{u} \cdot \vec{z}|^\alpha C(\hat{u}) dS_d \right\} \quad (2.118)
 \end{aligned}$$

assim definimos

$$A_\alpha(\hat{z}) \equiv \int_{\hat{u} \in S_d} |\hat{u} \cdot \hat{z}|^\alpha C(\hat{u}) dS_d \quad (2.119)$$

$$B_\alpha(\hat{z}) \equiv \int_{\hat{u} \in S_d} \frac{\hat{u} \cdot \hat{z}}{|\hat{u} \cdot \hat{z}|} |\hat{u} \cdot \hat{z}|^\alpha C(\hat{u}) dS_d \quad (2.120)$$

$$I_\alpha(\vec{z}) = -\frac{\pi}{\Gamma(\alpha+1)} \left\{ \frac{A_\alpha(\hat{z}) \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) - i B_\alpha(\hat{z}) \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)}{\sin(\alpha\pi)} \right\} |\vec{z}|^\alpha \quad (2.121)$$

Definindo $\Psi(z) = \ln \Phi(z)$ chegamos a

$$\Phi(z) = \begin{cases} \exp(-|\vec{z}|^\alpha [\Xi(\vec{z}) + \Omega(\vec{z})]), & \text{se } 0 < \alpha < 1 \\ \exp(-|\vec{z}| [\Xi_1(z) + \Omega(\vec{z})]), & \text{se } \alpha = 1 \\ \exp(i\vec{z} \cdot \langle \vec{U} \rangle - |\vec{z}|^\alpha [\Xi_\alpha(\vec{z}) + \Omega(\vec{z})]), & \text{se } 1 < \alpha < 2 \\ \exp(i\vec{z} \cdot \langle \vec{U} \rangle - |\vec{z}|^2 [\Xi_2(\vec{z}) + \Omega(\vec{z})]), & \text{se } \alpha = 2 \\ \exp(i\vec{z} \cdot \langle \vec{U} \rangle - |\vec{z}|^2 [\Xi_\alpha(\vec{z}) + \Omega(\vec{z})]), & \text{se } 2 < \alpha < \infty \end{cases} \quad (2.122)$$

A partir das equações (2.121), (2.110) e (2.116) concluímos então que

$$\Xi_\alpha(z) = \frac{\pi}{\Gamma(\alpha+1)} \left\{ \frac{A_\alpha(\hat{z}) \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) - i B_\alpha(\hat{z}) \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)}{\sin(\alpha\pi)} \right\}, \quad (2.123)$$

$$\Xi_1(z) = \frac{\pi}{2} A_1(\hat{z}) - i [-D_1(\hat{z}) + (-\gamma - \ln u_c - \ln |\vec{z}|) B_1(\hat{z})], \quad (2.124)$$

$$\Xi_2(z) = \frac{i\pi}{4} B_2(\hat{z}) + (-\gamma - \ln u_c - \ln |\vec{z}|) \frac{1}{2} A_2(\hat{z}) - \frac{1}{2} D_2(\hat{z}). \quad (2.125)$$

Estes resultados serão utilizados no próximo capítulo a fim de renormalizar a energia de um

sistema composto por uma partícula teste imersa em um gás de N partículas não interagentes. Nosso propósito é caracterizar os limites que garantem a convergência simultânea tanto da energia potencial quanto da força resultante sobre a partícula teste. Sendo assim, no próximo capítulo vamos apresentar as condições necessárias para a normalização da força resultante média para contextualizar os resultados originais desta tese que serão apresentados logo em seguida.

Capítulo 3

Distribuição de probabilidade da força de um sistema de N partículas

3.1 Introdução

Dentro do contexto que envolve problemas de N partículas, a força gravitacional naturalmente ocupa um papel de destaque e vem sendo extensivamente estudada na literatura. Em particular, os estudos de Chandrasekhar [23], Antonov [36] e Lynden-Bell e Wood [37] trouxeram grandes avanços no contexto da compreensão das propriedades estatísticas da força gravitacional. Vale destacar o trabalho de Chandrasekhar [23] no contexto da física de plasmas no qual o autor considerou a força gravitacional em $d = 3$ com expoente da lei de potencia que caracteriza a força $\delta = 2$. O autor obteve a distribuição da força resultante sobre uma partícula teste localizada no centro de uma esfera de raio L em um sistema com N partículas uniformemente distribuídas dentro da esfera. Chandrasekhar mostrou que no limite termodinâmico a razão entre o número de partículas e o volume do sistema é constante levando a uma distribuição de Lévy simétrica com $\alpha = 3/2$, que é o mesmo expoente da distribuição de Holtsmark [27]. Neste mesmo contexto, simulações numéricas foram conduzidas por Ahmad e Cohen [38] e mais recentemente por Del Popolo [39] a fim de testar a previsões descritas na literatura além de considerar os efeitos causados quando se considera que o tamanho do sistema é finito. Neste caso, a distribuição da força resultante não converge para uma distribuição independente de N . Mais recentemente, em uma série de trabalhos Chavanis e Sire [40, 41] e Chavanis [26, 42] estudaram a distribuição da força gravitacional em $d = 1$ e $d = 2$ usando o mesmo procedimento desenvolvido por Chandrasekhar [23] em $d = 3$. Além disso, Chavanis [26] estendeu

estes resultados para qualquer dimensão d com $\delta > 0$, considerando uma distribuição isotrópica $\rho(r)Cr^\nu$, onde $C > 0$ e o expoente ν é restrito ao intervalo $-d < \nu \leq 0$. Partindo dessas considerações, Chavanis obteve a distribuição da força resultante no limite $N, L \rightarrow \infty$ levando em conta que $NL^{d+\nu}$ é constante, de modo que a distribuição obtida é uma distribuição de Lévy simétrica com expoente $\alpha = \frac{d+\nu}{d} < 2$. Apesar de todos estes avanços na caracterização da distribuição da força gravitacional resultante sobre uma partícula teste em um sistema com N partículas, as condições necessárias para a convergência de uma força resultante que escala de acordo com uma lei de potência com um expoente $\delta > 0$ arbitrário só foi descrita em 2019 na referência [28]. Na próxima seção vamos detalhar o estudo desenvolvido nesta referência levando em conta todos os cálculos apresentados no capítulo anterior.

3.2 Renormalização da força resultante média sobre uma partícula teste

O comportamento de um sistema de N partículas idênticas não interagentes pode ser descrito através do formalismo apresentado no capítulo anterior. Vamos considerar um gás de N partículas aleatoriamente distribuídas de modo que a função densidade é dada por $\rho_{\vec{X}}(\vec{x})$, onde $\vec{x} \in \mathbb{R}$ tal que d é a dimensão espacial. O vetor aleatório $\vec{X}_i = \vec{x} - \vec{x}_i$ representa a distância entre uma partícula teste idealizada, localizada em \vec{x} , e a i -ésima partícula do sistema, localizada em \vec{x}_i . Assim, a força resultante \vec{F}_{res}^N que a partícula teste experimenta pode ser escrita como

$$\vec{F}_{res}^N = \sum_{i=1}^N \vec{F}^N(\vec{X}_i), \quad (3.1)$$

onde $\vec{F}^N(\vec{X}_i)$ é a contribuição devido a presença da i -ésima partícula. É importante ressaltar que neste modelo a partícula teste interage com todas as partículas do gás, mas as partículas do gás não interagem entre si. Vamos considerar que $\{\vec{X}_i\}$ para todo $i = 1, \dots, N$ é uma sequência de N vetores aleatórios independentes e identicamente distribuídos de modo que $|\vec{X}_i| = |\vec{X}|$. Assim, podemos escrever a força individual sobre a partícula teste de uma maneira geral como uma potência inversa de um δ arbitrário

$$\vec{F}^N(\vec{X}) = \kappa_N \frac{\hat{X}}{|\vec{X}|^\delta}, \quad (3.2)$$

onde $\kappa_N, \delta > 0$. A fim de definir uma escala de renormalização podemos introduzir uma fator de escala L_N tal que $|\vec{X}| \rightarrow L_N |\vec{R}|$. Assim a equação (3.2) tornar-se-á

$$\vec{F}^N(\vec{X}) = a_N \frac{\hat{R}}{|\vec{R}|^\delta}, \quad \text{onde} \quad a_N = \frac{\kappa_N}{L_N^\delta}. \quad (3.3)$$

Vamos definir a variável aleatória auxiliar $\vec{U} = \hat{R}/|\vec{R}|^\delta$ cuja função densidade é dada por $\rho_{\vec{U}}(\vec{u})$, tal que $\vec{u} = \hat{r}/|\vec{r}|^\delta$. Assim, a partir dos resultados obtidos na seção 2.3.1 podemos escrever

$$\rho_{\vec{U}}(\vec{u}) = \rho_{\vec{R}}(\vec{r}) \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \vec{u}} \right\| = \frac{1}{\delta} \frac{\rho_{\vec{R}}(\hat{u}/|\vec{u}|^\delta)}{|\vec{u}|^{1+\frac{d}{\delta}}}. \quad (3.4)$$

Precisamos determinar como a função densidade se comporta quando $|\vec{u}| \rightarrow \infty$. Deste modo, vamos considerar o limite

$$\lim_{|\vec{u}| \rightarrow \infty} \rho_{\vec{U}}(\vec{u}) = \frac{1}{\delta |\vec{u}|^{1+\frac{d}{\delta}}} \lim_{|\vec{r}| \rightarrow 0} \rho_{\vec{R}}(\vec{r}). \quad (3.5)$$

Assim, o comportamento assintótico de $\rho_{\vec{U}}(\vec{u})$ é determinado pelo comportamento de $\rho_{\vec{R}}(\vec{r})$ a curtas distancias. Ademais, vamos considerar que existe uma constante r_c tal que $\rho_{\vec{R}}(r)$ para $r < r_c$ (ou equivalentemente $|\vec{u}| < u_c$) é dado por

$$\rho_{\vec{R}}(r) = g(\hat{r}) |\vec{r}|^\nu. \quad (3.6)$$

Logo, da equação (3.2) obtemos

$$\rho_{\vec{U}}(\vec{u}) = \frac{1}{\delta} \frac{g(\hat{u})}{|\vec{u}|^{1+\frac{d+\nu}{\delta}}}. \quad (3.7)$$

Assim, a densidade $\rho_{\vec{U}}(u)$ pode ser escrita na mesma forma da equação (2.65), isto é,

$$\rho_{\vec{U}}(\vec{u}) = \begin{cases} f(\vec{u}), & \text{se } |\vec{u}| \leq u_c \\ \frac{C(\hat{u})}{|\vec{u}|^{1+\alpha}}, & \text{se } |\vec{u}| \geq u_c \end{cases} \quad (3.8)$$

tal que

$$\alpha = \frac{d+\nu}{\delta}, \quad (3.9)$$

$$C(\hat{u}) = \frac{g(\hat{u})}{\delta}. \quad (3.10)$$

Ao longo deste trabalho vamos considerar $\nu = 0$. A fim de obter a função característica associada a força resultante, podemos escrever

$$\Phi_{\vec{F}_{res}^N}(z) = \prod_{i=1}^N \Phi_{\vec{F}_i^N}(z). \quad (3.11)$$

Definimos $\Phi_{\vec{F}_i^N}(\vec{z}) = \exp\left(\Psi_{\vec{F}_i^N}(\vec{z})\right)$

$$\begin{aligned} \Phi_{\vec{F}_{res}^N}(\vec{z}) &= \prod_{i=1}^N \exp\left(\Psi_{\vec{F}_i^N}(\vec{z})\right) \\ &= \left[\exp\left(\Psi_{\vec{F}_i^N}(\vec{z})\right)\right]^N, \\ &= \exp\left(N\Psi_{\vec{F}_i^N}(\vec{z})\right). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Logo, da equação (3.3)

$$\begin{aligned} \Phi_{\vec{F}_{res}^N}(\vec{z}) &= \exp\left(N\Psi_{a_N\vec{U}}(\vec{z})\right) \\ &= \exp\left(N\Psi_{\vec{U}}(a_N\vec{z})\right), \end{aligned} \quad (3.13)$$

portanto

$$\ln \Phi^N(z) = \lim_{N \rightarrow \infty} \{N\Psi_{\vec{U}}(a_N\vec{z})\}, \quad (3.14)$$

Pelo teorema de Levy (2.4), se o limite acima existe, então $\Phi^N(z)$ é uma função característica. Assim, usando a equação (2.122) obtida no capítulo anterior podemos escrever a função característica associada à força resultante para todo α da seguinte maneira

$$\ln \Phi(z) = \lim_{N \rightarrow \infty} \begin{cases} (-N|a_N|^\alpha |\vec{z}|^\alpha [\Xi(q\hat{z}) + \Omega(a_N\vec{z})]), & \text{se } 0 < \alpha < 1 \\ (-N|a_N| |\vec{z}| [\Xi_1(a_N\vec{z}) + \Omega(a_N\vec{z})]), & \text{se } \alpha = 1 \\ \left(iN|a_N|\vec{z} \cdot \langle q\vec{U} \rangle - N|a_N|^\alpha |\vec{z}|^\alpha [\Xi_\alpha(q\hat{z}) + \Omega(a_N\vec{z})] \right), & \text{se } 1 < \alpha < 2 \\ \left(iN|a_N|\vec{z} \cdot \langle q\vec{U} \rangle - N|a_N|^2 |\vec{z}|^2 [\Xi_2(a_N\vec{z}) + \Omega(a_N\vec{z})] \right), & \text{se } \alpha = 2 \\ \left(iN|a_N|\vec{z} \cdot \langle q\vec{U} \rangle - |\vec{z}|^2 [\Xi_\alpha(a_N\vec{z}) + \Omega(a_N\vec{z})] \right), & \text{se } 2 < \alpha < \infty \end{cases} \quad (3.15)$$

Fluctuation ($0 < \alpha < 1$)	Singular ($\alpha = 1$)	Vlasov ($1 < \alpha < \infty$)
$N a_N ^\alpha = K$	$-N a_N \ln a_N = K$	$N a_N = K$
$ a_N = \left(\frac{K}{N}\right)^{1/\alpha}$	$ a_N = \exp\left(-\frac{K}{N a_N }\right)$	$ a_N = \frac{K}{N}$
$N > 0$	$N \geq 2eK$	$N > 0$

 Tabela 3.1: Renormalizações de a_N que garantem a convergência da função característica.

onde $q = a_N/|a_N| = \text{sgn}(\kappa_N)$. A partir das equações (2.121), (2.110) e (2.116) podemos concluir que

$$\Xi_\alpha(z) = \frac{\pi}{\Gamma(\alpha + 1)} \left\{ \frac{A_\alpha(\hat{z}) \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) - iB_\alpha(\hat{z}) \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)}{\sin(\alpha\pi)} \right\}, \quad (3.16)$$

$$\Xi_1(z) = \frac{\pi}{2} A_1(\hat{z}) - i[-D_1(\hat{z}) + (-\gamma - \ln u_c - \ln |\vec{z}|) B_1(\hat{z})], \quad (3.17)$$

$$\Xi_2(z) = \frac{i\pi}{4} B_2(\hat{z}) + (-\gamma - \ln u_c - \ln |\vec{z}|) \frac{1}{2} A_2(\hat{z}) - \frac{1}{2} D_2(\hat{z}). \quad (3.18)$$

As possíveis renormalizações de a_N são dadas de modo a garantir um limite bem definido para a equação (3.15) e estão resumidas na tabela 3.1. Para todas as renormalizações da tabela 3.1 temos que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} a_N = 0 \implies \lim_{N \rightarrow \infty} \Omega(a_N \vec{z}) = 0 \quad (3.19)$$

Assim, a equação (3.15) tornar-se-á (Para mais detalhes sobre o processo de renormalização e a obtenção da equação abaixo veja o apêndice A)

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \Phi(z) = \lim_{N \rightarrow \infty} \begin{cases} -\sigma_N^\alpha |\vec{z}|^\alpha \Xi_\alpha(q\hat{z}), & \text{onde } \sigma_N = K^{1/\alpha} & \text{se } 0 < \alpha < 1 \\ i\vec{z} \cdot (qK\vec{v}) - \frac{\pi}{2} \sigma_N A_1(\hat{z}) |\vec{z}|, & \text{onde } \sigma_N = K/\ln a_N & \text{se } \alpha = 1 \\ i\vec{z} \cdot \langle qK\vec{U} \rangle - \sigma_N^\alpha |\vec{z}| \Xi_\alpha(q\hat{z}), & \text{onde } \sigma_N = KN^{(1-\alpha)/\alpha} & \text{se } 1 < \alpha < 2 \\ i\vec{z} \cdot \langle qK\vec{U} \rangle + \frac{\sigma_N^2}{2} \vec{z} \cdot M \cdot \vec{z}, & \text{onde } \sigma_N = K(N^{-1} \ln N)^{1/2} & \text{se } \alpha = 2 \\ i\vec{z} \cdot \langle qK\vec{U} \rangle - \frac{\sigma_N^2}{2} \vec{z} \cdot M \cdot \vec{z}, & \text{onde } \sigma_N = KN^{-1/2} & \text{se } 2 < \alpha < \infty \end{cases} \quad (3.20)$$

onde σ_N é o parâmetro global de dispersão, já o vetor \vec{v} e a matriz M são definidas nos apêndices A.1 e A.2. Podemos notar que quando $\alpha > 1$ usamos a renormalização (ver tabela 3.1)

$$|a_N| = \frac{K}{N}, \quad (3.21)$$

de modo que no limite em que $N \rightarrow \infty$ o parâmetro de dispersão σ_N vai pra zero. Desta

maneira, chegamos a

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sigma_N = 0 \Rightarrow \ln \Phi(\vec{z}) = i \langle qK\vec{U} \rangle. \quad (3.22)$$

Esse resultado sugere que a força resultante converge para um valor médio dado por

$$\vec{F}_{mf} \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \langle \vec{F}_{res}^N \rangle = \langle qK\vec{U} \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \vec{F}_{res}^N, \quad (3.23)$$

tal que *mf* significa *mean-field*, uma vez que o sistema é dominado pelo campo médio gerado devido a natureza de longo alcance da interação, conforme veremos com mais detalhes ao abordar o caso da energia potencial no próximo capítulo. Este limite é definido na referência [28] como o *limite de Vlasov*. Em síntese, podemos dizer que quando $\alpha > 1$ a renormalização (3.21) garante a convergência da força resultante média no limite de Vlasov.

Por outro lado, para o caso singular $\alpha = 1$ podemos observar que usando a renormalização (ver tabela 3.1)

$$|a_N| \ln |a_N| = -\frac{K}{N}, \quad (3.24)$$

chegamos a

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sigma_N = 0 \Rightarrow \ln \Phi(\vec{z}) = i\vec{z} \cdot \langle qK\vec{v} \rangle \iff \lim_{N \rightarrow \infty} \vec{F}_{res}^N = qK\vec{v}. \quad (3.25)$$

Assim, de maneira similar ao que acontece no limite de Vlasov, definido anteriormente, podemos ver que a força resultante média também converge para um valor bem definido quando $N \rightarrow \infty$.

Por fim, para concluir nossa análise, podemos observar que para $0 < \alpha < 1$ a força \vec{F}_i^N não tem média finita definida, e diferente do caso singular, não há uma renormalização que possa ser definida a fim de garantir que a força resultante média convirja para um valor bem definido quando $N \rightarrow \infty$. Como consequência notamos que aplicando a renormalização

$$|a_N| = \left(\frac{K}{N} \right)^{1/\alpha}, \quad (3.26)$$

a respectiva função característica assuma a seguinte forma:

$$\ln \Phi(\vec{z}) = - \lim_{N \rightarrow \infty} \sigma_N^\alpha |\vec{z}|^\alpha \Xi_\alpha(q\hat{z}). \quad (3.27)$$

De modo que no limite $N \rightarrow \infty$ obtemos

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \vec{F}_{res}^N = \lim_{N \rightarrow \infty} \sigma_N \vec{S}_\alpha = K^{1/\alpha} \vec{S}_\alpha, \quad (3.28)$$

onde \vec{S}_α é um vetor obtido a partir de $\Xi_\alpha(q\hat{z})$. Deste modo, embora o valor médio da força resultante não seja definido, a sua flutuação é. Assim podemos dizer que para $0 < \alpha < 1$ a força é puramente devido flutuações e o limite de Vlasov não pode ser definido. O regime $0 < \alpha < 1$ é definido na referência [28] como o *limite flutuativo*. Em síntese podemos então dizer que se $\alpha < 1$ a renormalização (3.21) garante a convergência da função característica no limite flutuativo, mas a média da força resultante não é bem definida.

3.3 Energia e função densidade de um sistema com N partículas

Uma vez que definimos na seção anterior as condições necessárias para garantir a convergência da função característica da variável aleatória associada à força resultante do sistema, podemos analisar o que acontece com a energia potencial. Isto posto, vamos definir a energia potencial de interação do sistema apresentado na seção anterior como

$$V_{Res}^N \equiv \sum_{i=1}^N V^N(\vec{X}_i). \quad (3.29)$$

Vamos considerar uma sequencia de N partículas idênticas tal que $\vec{X}_i = \vec{X}$ para todo $i = 1, \dots, N$. Assim, podemos definir a energia potencial de interação entre a i -ésima partícula do sistema e a partícula teste como

$$V^N(\vec{X}) = \begin{cases} \frac{\kappa_N}{\delta-1} \frac{1}{|\vec{X}|^{\delta'}} & \text{se } \delta \neq 1, \\ -\kappa_N \ln |\vec{X}| & \text{se } \delta = 1, \end{cases} \quad (3.30)$$

na qual

$$\delta' = \delta - 1, \quad (3.31)$$

é o *expoente da energia*. Este tipo de interação é tipicamente definida como interação de curto ou longo alcance dependendo do valor do expoente da energia. Se a condição $\delta' < d$ (ou de maneira equivalente $\delta < d+1$) é satisfeita a interação é por definição de longo alcance, por outro lado se $\delta' > d$ (ou de maneira equivalente $\delta > d+1$) a interação é de curto alcance [43]. Deste modo, concluímos que $\delta = d+1$ é uma fronteira de transição entre a entre um potencial de curto e longo alcance. A natureza de longo alcance da interação significa que a dinâmica do sistema é dominada por um campo médio e não pela interação com as partículas da vizinhança. A fim

de obter a distribuição da energia potencial apresentada em (3.30) nós podemos renormalizar o sistema através de uma escolha adequada do parâmetro de acoplamento κ_N e do tamanho do sistema L_N . Assim, a equação (3.30) assume a seguinte forma

$$V^N(\vec{X}) = \begin{cases} b_N \sum_{i=1}^N U & \text{se } \delta \neq 1, \\ -b_N N \ln L_N + b_N \sum_{i=1}^N U & \text{se } \delta = 1, \end{cases} \quad (3.32)$$

onde

$$b_N = \begin{cases} \frac{L_N a_N}{\delta - 1} & \text{se } \delta \neq 1, \\ L_N a_N & \text{se } \delta = 1. \end{cases} \quad (3.33)$$

Além disso, nós definimos a variável aleatória auxiliar $U \equiv R^{1-\delta}$ para $\delta \neq 1$ e $U \equiv -\ln R$ para $\delta = 1$, onde $R = |\vec{R}|$. Isto posto, vamos considerar uma transformação $T : R \rightarrow U$ de um conjunto de variáveis R para outro conjunto de variáveis U (veja a subseção 2.3.1). Ademais vamos denotar a função densidade de probabilidade em relação a essas variáveis por $\rho_R(r)$ e $\rho_U(u)$ tal que $u \equiv r^{1-\delta}$ para $\delta \neq 1$ e $u \equiv \ln r$ para $\delta = 1$. Assim, a partir dos resultados da subseção (2.3.1) temos que

$$\rho_U(u) = \rho_R(r) \left| \frac{\partial r}{\partial u} \right|. \quad (3.34)$$

Logo

$$\rho_U(u) = f(u) \rho_R(r), \quad (3.35)$$

onde

$$f(u) = \begin{cases} \frac{u^{\delta/1-\delta}}{|1-\delta|} & \text{se } \delta \neq 1 \\ e^{-u} & \text{se } \delta = 1. \end{cases} \quad (3.36)$$

Portanto, podemos calcular a função densidade $\rho_R(r)$ da posição relativa R escrevendo esta densidade em coordenadas esféricas e integrando sobre a variável angular,

$$\begin{aligned} \int \rho(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{d-1}) dV &= \int_{S_d} \rho(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{d-1}) r^{d-1} dr dS_d \\ &= r^{d-1} g(r) dr, \end{aligned} \quad (3.37)$$

tal que $g(r) = \int_{S_d} \rho(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{d-1}) dS_d$ é uma função da variável radial. A partir do resultado acima, obtemos,

$$\rho_R(r) = r^{d-1} g(r). \quad (3.38)$$

Substituindo este resultado na equação (3.36) chegamos a

$$\rho_U(u) = \begin{cases} \frac{u^{d-1+\delta/1-\delta}}{|1-\delta|} & \text{se } \delta \neq 1 \\ e^{-ud}g(r) & \text{se } \delta = 1. \end{cases} \quad (3.39)$$

Com este resultado em mãos, precisamos analisar o comportamento assintótico de $\rho_U(u)$ para $\delta > 1$ e para $\delta < 1$. No primeiro caso, isto é, quando $\delta > 1$ podemos concluir que

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \rho_U(u) = \frac{1}{\delta' u^{1+d/\delta'}} \lim_{r \rightarrow 0} g(r). \quad (3.40)$$

Em palavras, podemos então dizer que o comportamento de $\rho_U(u)$ quando $u \rightarrow \infty$ é determinado pelo comportamento a curtas distancias de $g(r)$. A fim de garantir que $\rho_U(u)$ seja descrito por uma lei de potência vamos considerar que $g(r \rightarrow 0) = c$, onde c é uma constante positiva de modo que

$$\rho_U(u) = \frac{c}{\delta' u^{1+\alpha'}}. \quad (3.41)$$

Deste modo, a função densidade da variável aleatória U tem um comportamento de lei de potencia com o parâmetro de escala

$$\alpha' = \frac{d}{\delta'}, \quad (3.42)$$

para $\delta > 1$. De outra maneira, podemos dizer que a calda da distribuição é dominada pela contribuição das partículas mais próximas. Por outro lado, quando $\delta < 1$ precisamos considerar valores grandes de r , uma vez que $u = r^{1-\delta}$, e portanto neste caso quando $u \rightarrow \infty$ implica que $r \rightarrow \infty$. Assim o comportamento assintótico de $\rho_U(u)$ pode ser descrito por

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \rho_U(u) = \frac{1}{\delta' u^{1+d/\delta'}} \lim_{r \rightarrow \infty} g(r). \quad (3.43)$$

Por simplicidade, vamos supor que o comportamento de $\lim_{r \rightarrow \infty} g(r)$ é tal que a variável aleatória U tem variância finita e portanto podemos considerar que $\alpha' > 2$. Finalmente, para o caso $\delta = 1$ onde $U = -\ln R$, obtemos

$$\rho_U(u) = r \rho_R(r). \quad (3.44)$$

A partir da equação (3.38) chegamos a

$$\rho_U(u) = g(r)r^d \Rightarrow \rho_U(u) = g(r)e^{-ud}. \quad (3.45)$$

$0 < \alpha' < 1$	$d + 1 < \delta < \infty$	$0 < \alpha < \frac{d}{d+1}$	$d < \delta' < \infty$
$\alpha' = 1$	$\delta = d + 1$	$\alpha = \frac{d}{d+1}$	$\delta' = d$
$1 < \alpha' < 2$	$\frac{d}{2} + 1 < \delta < d + 1$	$\frac{d}{d+1} < \alpha < \frac{2d}{d+2}$	$\frac{d}{2} < \delta' < d$
$\alpha' = 2$	$\delta = \frac{d}{2} + 1$	$\alpha = \frac{2d}{d+2}$	$\delta' = \frac{d}{2}$
$2 < \alpha' < \infty$	$1 < \delta < \frac{d}{2} + 1$	$\frac{2d}{d+2} < \alpha < d$	$0 < \delta' < \frac{d}{2}$

Tabela 3.2: Nesta tabela apresentamos o comportamento dos parâmetros δ , α e δ' em cada intervalo possível de α' .

Logo, o comportamento assintótico de $\rho_U(u)$ também é determinado pelo comportamento de $g(r)$ para r grande, isto é:

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \rho_U(u) = \lim_{r \rightarrow \infty} g(r) e^{-ud}, \quad (3.46)$$

e mais uma vez consideraremos que a calda de $g(r)$ se comporta de um modo tal que U tem variância finita.

A partir da equação (3.9) (com $\nu = 0$) se considerarmos $d < \delta < \infty$ é simples ver que o expoente associado a distribuição da força fica restrito ao intervalo $0 < \alpha < 1$ (veja a tabela 3.2). Portanto, a condição $\delta > d$ implica que o limite flutuativo definido na seção anterior e descrito pela equação (3.26) é válido. Assim, podemos analisar cada um dos possíveis intervalos de α' e verificar como os demais parâmetros (δ , α e δ') se comportam em cada caso conforme resumimos na tabela 3.2.

3.3.1 Função característica da variável aleatória associada à energia

A função característica da soma $b_N \sum_{i=1}^N U$ quando $\delta \neq 1$, tal que $\alpha' \neq 1$ e $\alpha' \neq 2$ é dada por

$$\ln \Phi(z) = \lim_{N \rightarrow \infty} \begin{cases} \left(-N |b_N|^{\alpha'} |z|^{\alpha'} [\Xi(qz) + \Omega(b_N z)] \right), & \text{se } 0 < \alpha' < 1 \\ iz N b_N \langle \vec{U} \rangle - N |b_N|^{\alpha'} |z|^{\alpha'} [\Xi_\alpha(qz) + \Omega(b_N z)], & \text{se } 1 < \alpha' < 2 \\ iz N b_N \langle \vec{U} \rangle - N |b_N|^2 |z|^2 \frac{\sigma_U^2}{2} [1 + \Omega(b_N z)], & \text{se } 2 < \alpha' < \infty \end{cases} \quad (3.47)$$

$$\ln \Phi(z) = \lim_{N \rightarrow \infty} \begin{cases} \left(-N |b_N|^{\alpha'} |z|^{\alpha'} [\Xi(qz) + \Omega(b_N z)] \right), & \text{se } 0 < \alpha' < 1 \\ iz N b_N \langle \vec{U} \rangle - N |b_N|^{\alpha'} |z|^{\alpha'} [\Xi_\alpha(qz) + \Omega(b_N z)], & \text{se } 1 < \alpha' < 2 \\ iz N b_N \langle \vec{U} \rangle - N |b_N|^2 |z|^2 \frac{\sigma_U^2}{2} [1 + \Omega(b_N z)], & \text{se } 2 < \alpha' < \infty \end{cases} \quad (3.48)$$

onde $q = b_N/|b_N|$. Por outro lado, para os casos singulares, temos

$$\ln \Phi(z) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ -iN b_N z (\ln(|b_N||z|) + \ln u_c + \gamma) - N|b_N||z| \left(\frac{\pi}{2} + \Omega(b_N z) \right) \right\}, \quad \text{se } \alpha' = 1 \quad (3.49)$$

e

$$\ln \Phi(z) = \lim_{N \rightarrow \infty} iN b_N z \left\{ \langle U \rangle - \frac{\pi}{4} |b_N||z| + \frac{1}{2} N |b_N||z|^2 (\ln |b_N| + \ln |z| + \ln u_c + \gamma - \Omega(b_N z)) \right\}, \quad \text{se } \alpha' = 2. \quad (3.50)$$

Uma vez que estamos interessados em um limite bem definido para as equações (3.49) e (3.50), a seguinte condição deve ser satisfeita

$$\lim_{N \rightarrow \infty} b_N = 0 \Rightarrow \lim_{N \rightarrow \infty} \Omega(b_N z) = 0. \quad (3.51)$$

Note que se esse limite é válido, de acordo com o teorema (2.5), quando $2 < \alpha' < \infty$ a distribuição correspondente é uma gaussiana com variância σ_U^2 . Por fim, para o caso particular $\delta = 1$ a função característica pode ser escrita como (para uma visão mais detalhada veja o Apêndice B)

$$\ln \Phi_U(z) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ iN b_N (\ln L_N + \langle U \rangle) - \frac{N b_N^2 \sigma_U^2 z^2}{2} (1 + \Omega(-b_N z)) \right\}, \quad (3.52)$$

onde $\langle U \rangle = -\langle \ln R \rangle$. Nosso principal objetivo nas próximas subseções é renormalizar b_N a fim de garantir um limite bem definido para as equações (3.49), (3.50) e (3.52) levando em conta o limite flutuativo e o limite de Vlasov definidos na seção anterior e caracterizados respectivamente por (3.21) e (3.26).

3.3.2 O limite de Vlasov puro

Para o caso $\delta < d$ ($\delta' < d$) notamos que $\alpha > 1$, o que corresponde ao limite de Vlasov definido na seção anterior. Neste caso $\alpha' > 1$ levando a uma distribuição com média finita (veja o corolário 2.2 e a equação 2.64). Note que nas equações (3.48) e (3.52) o termo que depende da energia média $\langle U \rangle$ diverge quando $N \rightarrow \infty$. A fim de garantir um limite bem definido para a energia vamos considerar que

$$b_N = \frac{K'}{N}, \quad (3.53)$$

onde K' tem o sinal de K para $\delta \geq 1$ e o sinal de $-K$ para $0 < \delta < 1$. É fácil ver que $b_N \rightarrow 0$ quando $N \rightarrow \infty$ de modo que a condição (3.51) é satisfeita. Esse procedimento corresponde a reescalar a intensidade da interação por um fator que varia com $1/N$, conhecido na literatura como prescrição de Kac [44]. Usando as equações (3.53), (3.33) e (3.21) obtemos

$$\lim_{N \rightarrow \infty} L_N = \begin{cases} \frac{K'}{K}(\delta - 1), & \text{se } \delta \neq 1 \\ \frac{K'}{K} & \text{se } \delta = 1. \end{cases} \quad (3.54)$$

Além disso, como consequência direta de (3.33) é fácil mostrar que

$$N|b_N|^{\alpha'} = \frac{|K'|^{\alpha'}}{N}, \quad (3.55)$$

o que leva a uma flutuação nula quando $N \rightarrow \infty$. Além disso

$$\kappa_N = \frac{K'}{N} \lim_{N \rightarrow \infty} L_N, \quad (3.56)$$

o que implica que $\kappa_N \rightarrow 0$ quando $N \rightarrow \infty$. Isso corresponde a um regime de acoplamento fraco, uma vez que o parâmetro de acoplamento é assintoticamente nulo. Portanto, a energia potencial pode ser escrita como

$$V_{mf} \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \langle V_{Res}^N \rangle = \begin{cases} K' \langle U \rangle, & \text{se } \delta \neq 1 \\ K' \langle U \rangle - K' \ln \left(\frac{K'}{K} \right) & \text{se } \delta = 1 \end{cases} \quad (3.57)$$

onde mf significa *mean-field*, uma vez que o sistema é dominado pelo campo médio gerado devido a natureza de longo alcance da interação, uma vez que $\delta' < d$. Isso significa que a interação entre a partícula teste e as N partículas restantes do sistema é dominada por um campo médio e não pela interação com as partículas da vizinhança. Assim a correlação entre a partícula teste e as partículas vizinhas deve ser nula e a dinâmica não pode ser descrita pela equação de Boltzman e sim pela equação de Vlasov. Estes resultados mostram que a única maneira de manter tanto a energia quanto a força resultante convergentes quando $N \rightarrow \infty$ levando a um *limite de Vlasov puro* é mantendo o tamanho do sistema fixo, conforme descrito pela equação (3.54) no regime de acoplamento fraco ($\kappa_N \rightarrow 0$).

3.3.3 Limite flutuativo puro

Notamos que $\delta > d$ implica que o parâmetro de escala associado à distribuição da força pertence ao intervalo $0 < \alpha < 1$. Este intervalo corresponde ao limite flutuativo definido na seção anterior onde a equação (3.26) vale. Contudo, no caso particular onde $\delta > d + 1$ ($\delta' > d$) podemos mostrar que o parâmetro de escala associado a distribuição da energia também pertence ao intervalo $0 < \alpha' < 1$. Uma vez que $\delta' > d$ a interação é descrita por um potencial de curto alcance, assim a energia da partícula teste depende da interação com as partículas da vizinhança bem como a distribuição descrita em (3.41). A fim de garantir que (3.48) para $0 < \alpha' < 1$ convirja quando $N \rightarrow \infty$ vamos considerar que

$$|b_N|^{\alpha'} = \frac{K'}{N}, \quad (3.58)$$

onde K' é uma constante positiva. Usando as equações (3.26) e (3.33) para $\delta \neq 1$ podemos obter uma relação direta entre o tamanho do sistema e as constantes K e K' que é dada por

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{L_N^d}{N} &= \frac{1}{\rho}, \\ &= (\delta - 1)^d \frac{K'^{\delta-1}}{K^\delta}, \end{aligned} \quad (3.59)$$

onde a densidade de partículas $\rho \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N}{L_N^d}$ é portanto constante. Assim, aplicando o limite termodinâmico $N \rightarrow \infty$, $L_N^d \rightarrow \infty$ com $\rho \equiv \frac{N}{L_N^d}$ fixo obtemos

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \kappa_N = (\delta - 1) \left(\frac{K'}{\rho} \right)^{\frac{\delta-1}{d}}, \quad (3.60)$$

que corresponde ao regime de acoplamento forte, uma vez que a constante de acoplamento κ_N tende a um valor constante quando $N \rightarrow \infty$. Por outro lado, a condição (3.51) é satisfeita, uma vez que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} b_N = \frac{K^{\frac{\delta}{d}}}{(\delta - 1)L_N^{d-1}N^{\frac{\delta}{d}-1}\rho} = 0. \quad (3.61)$$

De posse dos resultados apresentados até aqui a função característica de U para $\delta > d + 1$ pode ser expressa no limite assintótico $N \rightarrow \infty$ em termos das constantes ρ e κ_N na forma

$$\ln \Phi(z) = -\frac{\rho \kappa_N^{\alpha'}}{(\delta - 1)^{\alpha'}} |z|^{\alpha'} \Xi(qz). \quad (3.62)$$

Podemos observar que neste caso, diferente do limite de Vlasov puro, não há nenhuma renormalização que garanta a convergência da energia potencial à medida em que $N \rightarrow \infty$. Como consequência tanto a energia quanto a força resultante são causadas por flutuações de modo que o limite de Vlasov não pode ser definido. Por conta disso chamaremos o caso em que $\delta > d + 1$ de *limite flutuativo puro*. Assim, podemos dizer que no limite flutuativo puro a relação entre o número de partículas N e o volume do sistema L_N^d implica no já conhecido limite termodinâmico onde N e L_N^d tendem ao infinito enquanto a razão entre essas grandezas se mantém constante. Em outras palavras, quando $\delta > d + 1$ o limite termodinâmico garante que tanto a energia quanto a força resultante sobre a partícula teste sejam convergentes.

3.3.4 O limite misto

Assim como fizemos anteriormente, vamos considerar $\delta > d$ o que implica que o parâmetro de escala associado à distribuição da força pertence ao intervalo $0 < \alpha < 1$, o que corresponde ao limite flutuativo onde a equação (3.26) vale. Contudo, quando $\delta < d + 1$ ($\delta' < d$) a interação é por definição de longo alcance e podemos facilmente checar que o respectivo parâmetro de escala é $\alpha' > 1$. Assim, a fim de garantir que a equação (3.48) para $\alpha' > 1$ convirja quando $N \rightarrow \infty$ vamos considerar que

$$\frac{Na_N L_N}{\delta - 1} = K', \quad (3.63)$$

Substituindo a equação (3.26) na equação acima chegamos facilmente a

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{L_N}{N^{\frac{\delta-d}{d}}} \right) = \eta, \quad (3.64)$$

onde $\eta = (\delta - 1)K'/K$ é uma constante positiva. Esse resultado deixa claro que o limite termodinâmico não pode ser aplicado neste caso. Em outras palavras, é impossível manter a densidade de partículas ρ constante quando L_N^d e N tendem ao infinito. Além disso, podemos escrever o parâmetro de acoplamento como

$$\kappa_N = \eta \frac{K'}{N^{\frac{\delta(d+1-\delta)}{d}}}. \quad (3.65)$$

Uma vez que $d + 1 - \delta > 0$ então $\kappa_N \rightarrow 0$ quando $N \rightarrow \infty$ o que caracteriza o regime de acoplamento fraco. Usando a equação (3.63) chegamos a

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N |b_N|^{\alpha'} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{K^{\frac{d}{\delta}}}{N^{\alpha'-1}} = 0, \quad (3.66)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N |b_N|^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{K'^2}{N} = 0, \quad (3.67)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N |b_N|^2 \ln |z b_N| \approx \frac{K' \ln N}{N} = 0. \quad (3.68)$$

Assim, a função característica da energia potencial se reduz a $\Phi(z) = e^{iK'\langle U \rangle z}$. Este resultado é bastante similar com aquele que obtemos no caso do limite de Vlasov puro, o que é esperado uma vez que estamos lidando com uma interação de longo alcance já que $\delta' < d$. Contudo, neste caso o limite não é de Vlasov nem flutuativo uma vez que embora seja possível definir um limite convergente para a energia potencial não é possível definir o mesmo para a força resultante média. Este resultado nos leva a definir um novo limite que denominaremos *limite misto*. Em síntese, podemos dizer que quando analisamos o limite de Vlasov puro vimos que o tamanho do sistema se mantém fixo de modo que quando aumentamos o número de partículas o acoplamento se torna cada vez mais fraco. Ou seja, no limite de Vlasov nós podemos mexer no acoplamento, mas não podemos mexer no tamanho do sistema. Por outro lado, no limite flutuativo puro, onde vale o limite termodinâmico, vimos que o parâmetro de acoplamento se mantém fixo quando aumentamos o número de partículas, enquanto que o tamanho do sistema cresce junto com N . Ou seja, no limite flutuativo puro podemos mexer no tamanho do sistema, mas não podemos mexer no acoplamento. Dessa maneira chegamos ao limite misto onde o quando o número de partículas cresce o tamanho do sistema cresce junto enquanto o acoplamento se torna cada vez mais fraco. Ou seja, no limite misto podemos mexer tanto no tamanho do sistema quanto no acoplamento.

3.3.5 A fronteira de transição $\delta = d + 1$

Conforme discutimos no início deste capítulo o caso $\delta = d + 1$ caracteriza a fronteira de transição que define o potencial como de curto ou longo alce. Além disso, conforme vimos na subseção 3.3.3 se $\delta > d + 1$ a interação é de curto alcance e neste caso tanto a energia potencial quanto a força resultante não têm média bem definida de modo que no limite termodinâmico a função característica do sistema converge. Contudo, para o caso $\delta = d + 1$ que queremos analisar nesta subseção é fácil checar a partir da equações (3.42) e (3.31) que $\alpha' = 1$ e $\delta' = d$.

Neste caso, a função característica é dada pela equação (3.49). Usando a equação (3.31) para $\delta \neq 1$ e a equação (3.26) concluímos imediatamente que

$$b_N = \frac{K^{\frac{d+1}{d}}}{d} \frac{L_N}{N^{\frac{d+1}{d}}}, \quad (3.69)$$

e

$$\kappa_N = \left(\frac{K^{\frac{1}{d}}}{N^{\frac{1}{d}}} L_N \right). \quad (3.70)$$

Para garantir a convergência da equação (3.49) vamos considerar que $Nb_N \ln b_N = -K'$, onde K' é uma constante positiva. Desta maneira podemos reescrever essa condição na forma:

$$b_N - \exp\left(-\frac{K'}{Nb_N}\right) = 0. \quad (3.71)$$

Podemos ver que a equação acima é uma equação transcendental e portanto não possui solução analítica. Apesar disso, podemos analisar alguns limites, por exemplo, notamos que $b_N \rightarrow 1$ se $Nb_N \rightarrow \infty$, contudo $b_N = 1$ não é uma solução desejada por nós pois a condição (3.51) não é satisfeita. Além disso, se $Nb_N \rightarrow \infty$ diverge, então a função característica (3.49) também diverge. Por outro lado, $b_N \rightarrow 0$ se $Nb_N \rightarrow 0$ satisfazendo a equação (3.51) e garantindo a convergência de (3.49). A fim de determinar o número de partículas $N = N_0$ a partir do qual $b_N \ln b_N$ se aproxima de zero à medida em que N cresce, vamos definir a função

$$\tilde{g}(b_N) \equiv -b_N \ln b_N \Rightarrow \tilde{g}(b_N) = \frac{K'}{N}. \quad (3.72)$$

Diferenciando esta expressão com respeito a b_N é fácil ver que $\tilde{g}(b_N)$ é máximo quando $b_{N_0} = \frac{1}{e}$ (veja a figura 3.1), onde N_0 é o número de partículas para o qual $\tilde{g}(b_N)$ é máximo. Notamos também que $\tilde{g}(b_N = \frac{1}{e}) = \frac{1}{e}$ e portanto

$$\frac{1}{e} = \frac{K'}{N_0} \Rightarrow N_0 = eK'. \quad (3.73)$$

Deste modo, se $N > eK'$ implica que $\tilde{g}(b_N) < \frac{1}{e}$ (lado esquerdo da linha tracejada vermelha na figura 3.1). Assim, concluímos que precisamos apenas garantir que $N > eK'$ a fim de garantir que $\tilde{g}(b_N)$ seja próximo de zero. Analisando as equações (3.69) e (3.70) podemos ver que à medida que N cresce, L_N deve ir para infinito mais devagar do que $\frac{1}{N^{\frac{1}{d}}}$ vai para zero a fim de garantir que b_N e κ_N sejam assintoticamente nulos satisfazendo a (3.51) e garantindo a conver-

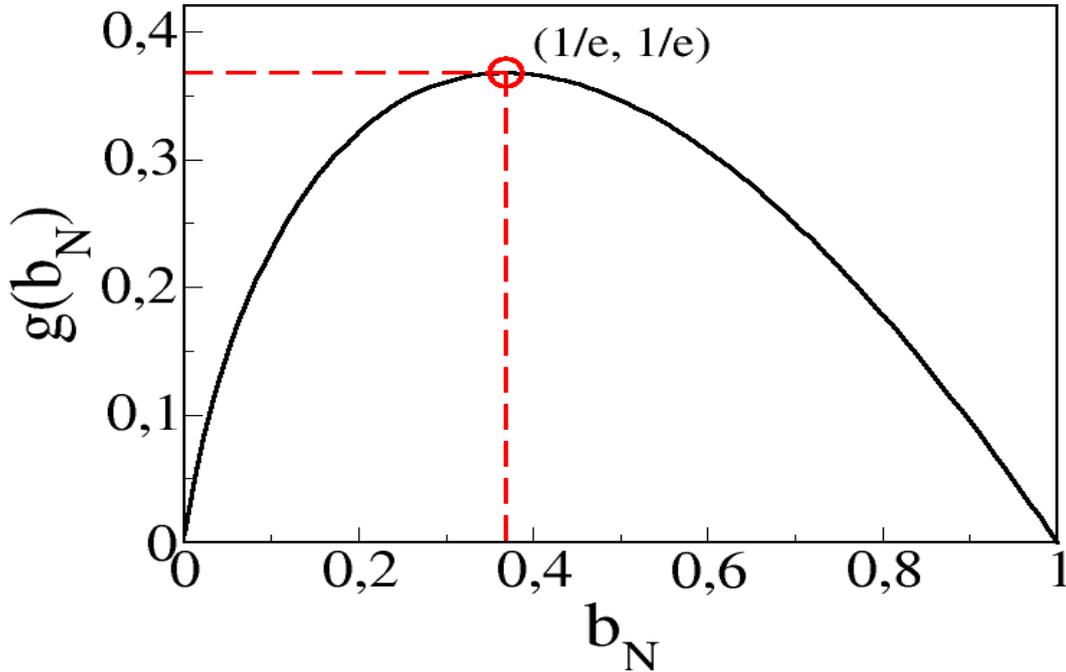


Figura 3.1: Comportamento da função $\tilde{g}(b_N) = -b_N \ln b_N$.

gência de (3.49). Substituindo (3.69) em (3.71) chegamos à seguinte equação transcendental relacionando L_N e N

$$L_N - \frac{dN^{\frac{\delta d}{d}}}{K^{\frac{\delta}{d}}} \exp\left(-\frac{K' d N^{\frac{\delta}{d}-1}}{K^{\frac{\delta}{d}} L_N}\right) = 0. \quad (3.74)$$

A fim de determinar como o tamanho do sistema L_N cresce com N resolvemos a equação (3.74) numericamente e plotamos a solução para $d = 1$, $d = 2$ e $d = 3$ na figura 3.2. Os quadrados pretos representam a solução numérica, enquanto que as linhas contínuas representam o *fitting* que mais se aproxima da solução numérica. Estas curvas *fitadas* para $d = 1$, $d = 2$ e $d = 3$ são dadas respectivamente por: $L_N = 0.33N^{0.88}$, $L_N = 0.65N^{0.38}$ e $L_N = 0.77N^{0.21}$. Deste modo podemos concluir que para as três dimensões analisadas, L_N vai para infinito mais devagar do que $\frac{1}{N^{\frac{1}{d}}}$ vai pra zero, garantindo assim que $b_N \rightarrow 0$ quando $N \rightarrow \infty$. Com base nestes resultados, concluímos que a função característica (3.49) tornar-se-á

$$\ln \Phi(z) = iK'z. \quad (3.75)$$

Portanto, dadas as condições apresentadas na simulação numérica a energia potencial do sistema converge para um valor bem definido. Embora neste caso não seja possível aplicar nem o limite de Vlasov puro nem o limite flutuativo puro e embora o sistema não seja por definição de

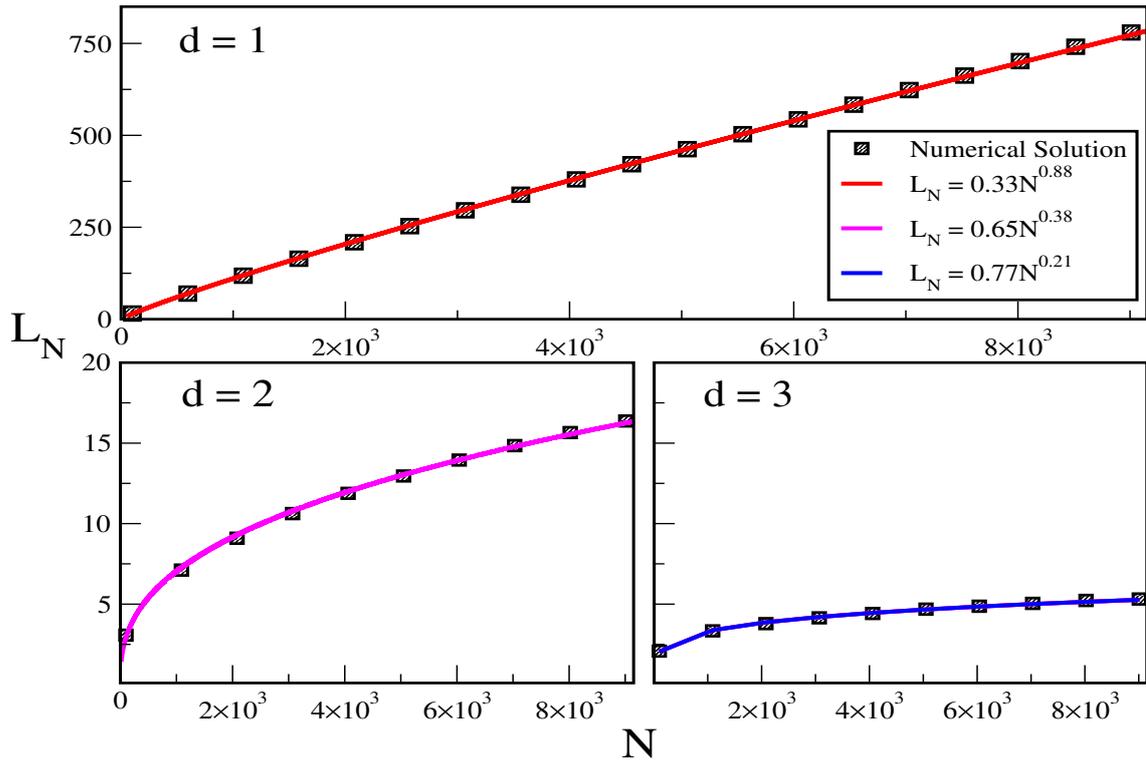


Figura 3.2: Comportamento do tamanho dos sistema em função de N para $d = 1$, $d = 2$ e $d = 3$. Consideramos $K = K' = 1$.

curto nem de longo alcance ele incorpora características de ambos. Por exemplo, o acoplamento é fraco como acontece no limite de Vlasov puro (longo alcance) e tem média bem definida. Por outro lado, o tamanho do sistema cresce com o número de partículas da mesma maneira que ocorre no limite flutuativo puro, contudo o limite termodinâmico não garante a convergência da energia.

O caso

3.3.6 O caso $\delta = d$

O caso $\delta = d$ leva ao caso singular $\alpha = 1$ onde vale a condição (3.24). Podemos verificar que $a_N \rightarrow 0$, $\ln a_N \rightarrow 0$ e $Na_N \rightarrow 0$ quando $N \rightarrow \infty$. Para o caso particular em que $d = 1$, de acordo com a equação (3.30) a energia potencial é logarítmica. Portanto a função característica correspondente é dada por (3.52) e o comportamento assintótico da função densidade é dada por (3.46), onde assumimos que a variável aleatória U possui variância finita. Combinando as equações (3.33) e (3.3) concluímos imediatamente que $b_N = \kappa_N$. A fim de garantir a convergência

de (3.52) vamos considerar que

$$N\kappa_N \ln L_N = K' \quad (3.76)$$

Combinando (3.33) e (3.24), $b_N = a_N L_N$ concluímos que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} L_N \ln L_N = \frac{K'}{Na_N} = 0, \quad (3.77)$$

e portanto, quando $N \rightarrow \infty$ implica que $Na_N \rightarrow 0$ e $L_N \ln L_N \rightarrow \infty$. De outra forma, podemos dizer que $L_N \rightarrow \infty$ quando $N \rightarrow \infty$. Além disso

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \kappa_N = \frac{K'}{N \ln L_N} = 0, \quad (3.78)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N\kappa_N^2 = \frac{K'}{N \ln^2 L_N} = 0, \quad (3.79)$$

que corresponde ao regime de acoplamento fraco. Como consequência,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \Omega(-\kappa_N z) = 0, \quad (3.80)$$

e portanto a função característica (3.52) converge para $\Phi(z) = e^{iK'z}$, implicando que para o caso $d = 1$ a energia converge para um valor bem definido no limite $N \rightarrow \infty$.

Por outro lado, quando $d = 2$ e $d = 3$ temos respectivamente que $\alpha' = 2$ e $\alpha' = \frac{3}{2}$. Assim, a fim de garantir a convergência da energia vamos considerar que

$$b_N = \frac{K'}{N}. \quad (3.81)$$

Contudo, a partir da equação (3.33) podemos escrever

$$b_N = \frac{a_N L_N}{d-1}. \quad (3.82)$$

Uma vez que, neste caso, $\alpha > 1$ vale a condição (3.24), assim concluímos que

$$Nb_N = -\frac{K}{\ln a_N} \frac{L_N}{(d-1)}. \quad (3.83)$$

A fim de garantir que Nb_N vai pra zero quando $N \rightarrow \infty$, garantindo também a convergência

da função característica, o tamanho do sistema $L_N = L$ precisa ser constante. Deste modo podemos escrever

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N b_N = \frac{LK}{(d-1)} \lim_{a_N \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{\ln a_N} \right) = 0 \quad (3.84)$$

Portanto, quando renormalizamos o termo da energia via (3.81) na função característica teremos como consequência que o tamanho do sistema $L_N = L$ deve ser constante. Além disso podemos mostrar que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N |b_N|^{\alpha'} = \frac{KL^{\alpha'}}{(d-1)^{\alpha'}} \lim_{N \rightarrow \infty} \left(-\frac{a_N^{\alpha'-1}}{\ln a_N} \right) = 0, \quad (3.85)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N |b_N|^2 = L^2 \lim_{N \rightarrow \infty} \left(-\frac{a_N}{\ln a_N} \right) = 0, \quad (3.86)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N |b_N|^2 \ln b_N = -L^2 \lim_{N \rightarrow \infty} \left(a_N + \frac{a_N}{\ln a_N} L \right) = 0. \quad (3.87)$$

Assim, concluímos que quando $d = 2$ e $d = 3$ o tamanho do sistema deve ser mantido fixo a fim de que a função característica, e portanto a energia do sistema, seja convergente quando $N \rightarrow \infty$. É curioso notar que, conforme vimos anteriormente, quando $d = 1$ o tamanho do sistema tende ao infinito junto com o número de partículas. Conforme vimos nas subseções (3.3.3) e (3.3.4), onde δ é sempre maior do que d , notamos que o tamanho do sistema não é fixo e vai pra infinito junto com o número de partículas. Já na subseção (3.3.3), onde definimos o limite de Vlasov puro com $\delta < d$, notamos que o tamanho do sistema deve ser mantido fixo para garantirmos a convergência simultânea da energia potencial e da força resultante média. Com base em todos estes resultados podemos observar que o ponto $\delta = d$ é um ponto de transição a partir do qual o tamanho do sistema deve ser fixo ou deve variar com o número de partículas, de modo que quando estamos exatamente no ponto $\delta = d$ o tamanho do sistema só é fixo quando $d = 2$ e $d = 3$.

Conclusão

Neste trabalho, calculamos a função característica de uma variável aleatória associada à energia potencial de interação de uma distribuição de partículas no espaço d -dimensional. Nós consideramos um sistema de N partículas que interagem com uma partícula teste através de um potencial que escala com $1/R^{\delta-1}$, onde R é a distância entre a i -ésima partícula do sistema e a partícula teste e $\delta > 0$. Nós renormalizamos a energia potencial e a força resultante sobre a partícula teste impondo a convergência da função característica no limite $N \rightarrow \infty$. Este procedimento nos leva a uma relação entre o tamanho do sistema L_N e o número de partículas de um modo tal que podemos definir três regimes diferentes: o limite de Vlasov puro, o limite flutuativo puro e o limite misto. Para $\delta > d + 1$ definimos o limite flutuativo puro, de modo que o parâmetro de acoplamento é constante quando $N \rightarrow \infty$ caracterizando um regime de acoplamento fraco. Neste caso, o limite termodinâmico pode ser aplicado, uma vez que a razão entre o tamanho do sistema L_N e o número de partículas permanece constante no limite $N \rightarrow \infty$. Além disso, a energia potencial e a força resultante não têm média bem definida, isto é, a força resultante e a energia potencial são puramente devido a flutuações $\delta\vec{F}$ e δV , conforme mostrado na figura 3.3.

Em contraste, para $\delta < d$ nós definimos o limite de Vlasov puro, onde o tamanho do sistema deve ser mantido fixo de modo que o parâmetro de acoplamento tende a zero quando $N \rightarrow \infty$, caracterizando um regime de acoplamento fraco. Neste caso, o limite termodinâmico não pode ser aplicado e a força resultante bem como a energia potencial tem uma média bem definida $\langle\vec{F}\rangle$ e $\langle V\rangle$, conforme é ilustrado na figura 3.3. É importante notar que neste caso as flutuações $\delta\vec{F}$ e δV são pequenas e tendem a zero quando $N \rightarrow \infty$.

Finalmente, para $d < \delta < d + 1$ nós definimos o limite misto de modo que o parâmetro de acoplamento tende a zero quando $N \rightarrow \infty$. Neste caso, o limite de Vlasov puro e o limite flutuativo puro não são válidos pois embora exista um valor médio bem definido para a energia δV não é possível definir uma renormalização capaz de garantir que a força resultante média

$$\begin{array}{ccc}
\vec{F}_{Res} = \langle \vec{F} \rangle + \delta \vec{F} & & \vec{F}_{Res} = \delta \vec{F} & & \vec{F}_{Res} = \delta \vec{F} \\
V_{Res} = \langle V \rangle + \delta V & & V_{Res} = \langle V \rangle + \delta V & & V_{Res} = \delta V \\
\delta = d & & & & \delta = d + 1
\end{array}$$

Figura 3.3: Este diagrama resume os resultados deste trabalho.

convirja para um vetor bem definido quando $N \rightarrow \infty$. Este resultado é ilustrado na região $d < \delta < d+1$ da figura 3.3. Além disso, mostramos que a densidade de probabilidade da variável aleatória R é dada por $\rho_R(r) = r^{d-1}g(r)$, onde $g(r)$ é uma função não negativa. Nossa análise é às vezes baseada em algumas simplificações, por exemplo, assumimos que quando $\delta > 1$ a função $g(r)$ é constante quando $r \rightarrow 0$ de modo que a calda da densidade de probabilidade $\rho_U(u)$ se comporta como uma lei de potencia com expoente $\alpha' = d/\delta - 1$. Caso contrário, quando $\delta < 1$, consideramos que a função $g(r)$ se comporta de um modo tal que a densidade $\rho_U(u)$ se comporta de modo que a variável aleatória U tenha variância finita. É importante enfatizar que no caso da força não é necessário fazer qualquer consideração sobre o comportamento da distribuição para $r \rightarrow \infty$, pois é suficiente conhecer o comportamento de $\rho_U(u)$ em torno da partícula teste.

Um último comentário pode ser necessário: o caso particular onde $\delta = d + 1$ é exatamente a fronteira de transição entre a existência de uma energia média onde o acoplamento é fraco e a interação é de longo alcance, e a sua não existência ($\delta > d + 1$) onde o acoplamento é forte e a interação é de curto alcance. De modo que quando $\delta = d + 1$ o tamanho do sistema cresce com N de tal maneira que a anergia do sistema converge para um valor bem definido. Por outro lado, o caso $\delta = d$ caracteriza um ponto crítico a partir do qual o tamanho do sistema deve ser mantido fixo ($\delta < d$) ou deve variar com N ($\delta > d$), de modo que quando $\delta = d$ o tamanho do sistema é fixo apenas se $d = 2$ ou $d = 3$. Portanto os resultados apresentados neste trabalho para um sistema de N partículas em d -dimensões generaliza as condições necessárias para a convergência simultânea da energia e da força resultante sobre uma partícula teste.

Como perspectivas para este trabalho podemos destacar: o desenvolvimento de simulações numéricas em $d = 1$, $d = 2$ e $d = 3$ para verificar a validade dos resultados apresentados. Podemos ainda verificar se estes resultados são alterados se confinarmos as partículas, por exemplo, em um anel como no caso do modelo do anel auto-gravitante (*Ring-model*). Embora o modelo

apresentado neste trabalho não seja dinâmico, os resultados obtidos apresentam uma descrição precisa de quais são as condições iniciais que devem ser satisfeitas para que a energia do sistema não divirja logo no início da dinâmica.

Apêndice A

Renormalização da força

Neste apêndice vamos determinar a forma da função característica associada a força resultante

A.1 O caso $\alpha = 1$

A partir das equações (3.48), (2.125) e (3.14) podemos escrever a função característica da força resultante para o caso $\alpha = 1$ como

$$\Phi(\vec{z}) = \lim \exp \left\{ -N|a_N||\vec{z}| \left[-iB_1(q\hat{z})(-\gamma - \ln u_c) + iB_1(q\hat{z}) \ln |a_N||\vec{z}| + iD_1(q\hat{z}) + \frac{\pi}{2}A_1(q\hat{z}) \right] \right\}$$

logo

$$I_1(\vec{z}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \exp \left[-iN|a_N| \ln(|a_N||\vec{z}|) B_1(q\hat{z})|\vec{z}| - N|a_N||\vec{z}| \frac{\pi}{2} A_1(q\hat{z}) \right] + iN|a_N||\vec{z}| (B_1(q\hat{z})(-\gamma - \ln u_c) - D_1(q\hat{z})) \right\}$$

a partir da equação (2.108) temos que

$$B_1(\hat{z}) = \int (\hat{u} \cdot \hat{z}) C(\hat{u}) dS_d = \hat{z} \cdot \left(\int C(\hat{u}) \hat{u} dS_d \right) = -\vec{z} \cdot \vec{v},$$

tal que

$$\vec{v} = \int C(\hat{u}) \hat{u} dS_d,$$

logo

$$I_1(\vec{z}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \exp \left[iN|a_N| \ln(|a_N||\vec{z}|) \vec{z} \cdot \vec{v} |\vec{z}| - N|a_N||\vec{z}| \frac{\pi}{2} A_1(q\hat{z}) \right] + iN|a_N||\vec{z}| (-\vec{z} \cdot \vec{v} (-\gamma - \ln u_c) - D_1(q\hat{z})) \right\},$$

e portanto

$$I_1(\vec{z}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \exp \left[iN|a_N| \ln(|a_N||\vec{z}|) \vec{z} \cdot \vec{v} |\vec{z}| - N|a_N||\vec{z}| \frac{\pi}{2} A_1(q\hat{z}) \right] + iN|a_N||\vec{z}| (-\vec{z} \cdot \vec{v} (-\gamma - \ln u_c - \ln |\vec{z}|) - D_1(q\hat{z})) \right\}. \quad (\text{A.1})$$

A fim de manter a convergência da equação acima vamos considerar que

$$|a_N| \ln |a_N| = \frac{K}{N},$$

assim, quando $N \rightarrow \infty$ então $a_N \rightarrow 0$ e $\ln a_N \rightarrow -\infty$. Na equação (A.1) observamos dois elementos imaginários de modo que podemos desprezar o segundo em relação ao primeiro, uma vez que $N \gg 1$. Assim, chegamos a

$$I_1(\vec{z}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \exp \left[i\vec{z} \cdot (qK\vec{v}) - \sigma_N \frac{\pi}{2} A_1(q\hat{z}) |\vec{z}| \right] \right\},$$

onde $\sigma_N = Na_N = \frac{K}{\ln a_N}$, de modo que $\sigma_N \rightarrow 0$ quando $N \rightarrow \infty$ conforme aparece na equação (3.20).

A.2 O caso $\alpha = 2$

A partir das equações (3.48), (2.125) e (3.14) podemos escrever a função característica da força resultante para o caso $\alpha = 2$ como

$$\Phi(z) = \lim_{N \rightarrow \infty} \exp \left\{ iNa_N \vec{z} \langle U \rangle - \frac{1}{2} N |a_N|^2 |\vec{z}|^2 \left[\frac{i\pi}{4} B_2(\hat{z}) + (-\gamma - \ln u_c - \ln(|a_N||\vec{z}|)) \frac{1}{2} A_2(\hat{z}) - \frac{1}{2} D_2(\hat{z}) + \Omega(a_N \vec{z}) \right] \right\}.$$

A partir da equação (2.115) chegamos a

$$A_2(\hat{z}) = \int_{\hat{u} \in S_d} (\hat{u} \cdot \hat{z})^2 C(\hat{u}) dS_d = \int C(\hat{u}) \left(\sum_{k=1}^d [\hat{z}]_k [\hat{u}]_k \right)^2 dS_d = \hat{z} \cdot M \cdot \hat{z},$$

onde

$$[M]_{ij} = \int_{S_d} [\hat{u}]_i [\hat{u}]_j C(\hat{u}) dS_d,$$

e

$$\begin{aligned} \hat{u} &= ([\hat{u}]_1, \dots, [\hat{u}]_d), \\ \hat{z} &= ([\hat{z}]_1, \dots, [\hat{z}]_d). \end{aligned}$$

A partir destes resultados podemos escrever a função característica como

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \exp \left\{ iNa_N \bar{z} \langle U \rangle - \frac{1}{2} N |a_N|^2 |\bar{z}|^2 \left[\frac{i\pi}{4} B_2(\hat{z}) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (-\gamma - \ln u_c - \ln(|a_N| |\bar{z}|)) \hat{z} \cdot M \cdot \hat{z} - \frac{1}{2} D_2(\hat{z}) + \Omega(a_N \bar{z}) \right] \right\}. \end{aligned}$$

A fim de manter a convergência da equação acima consideramos que

$$a_N = \frac{K}{N},$$

assim, $\lim_{N \rightarrow \infty} \Omega(a_N \bar{z}) \rightarrow 0$ quando $N \rightarrow \infty$ (vamos de antemão desprezar esse termo nas próximas equações). A partir dos resultados acima chegamos a

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \exp \left\{ i\bar{z} \cdot \langle KU \rangle + \left[-\frac{i\pi}{8} \frac{K^2}{N} |\bar{z}|^2 B_2(\hat{z}) - \frac{1}{2} \frac{K^2}{N} |\bar{z}|^2 (-\gamma - \ln u_c) A_2(\hat{z}) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{2} N |a_N|^2 |\bar{z}|^2 \ln(|a_N| |\bar{z}|) \hat{z} \cdot M \cdot \hat{z} + N |a_N|^2 |\bar{z}|^2 \frac{1}{4} D_2(\hat{z}) \right] \right\} \end{aligned}$$

Uma vez que $N \gg 1$ podemos desprezar os termos que dependem de $\frac{K^2}{N}$. Assim chegamos a

$$\Phi(z) = \lim_{N \rightarrow \infty} \exp \left(i\bar{z} \cdot \langle KU \rangle + \left[\frac{1}{2} N |a_N|^2 \ln(|a_N|) |\bar{z}|^2 \hat{z} \cdot M \cdot \hat{z} + N |a_N|^2 |\bar{z}|^2 \frac{1}{2} D_2(\hat{z}) \right] \right),$$

onde,

$$N |a_N|^2 \ln |a_N| = \frac{K^2}{N} \ln K + \frac{K^2}{N} \ln N.$$

Mas como $N \gg 1$, podemos escrever

$$N|a_N|^2 \ln |a_N| \approx \frac{K^2}{N} \ln N.$$

$$\Phi(z) = \lim_{N \rightarrow \infty} \exp \left(i\vec{z} \cdot \langle KU \rangle + \left[\frac{1}{2} \frac{K^2}{N} \ln N \vec{z} \cdot M \cdot \vec{z} + \frac{K^2}{4N} D_2(\vec{z}) \right] \right).$$

Deste modo, podemos ver que o termo que depende de $\vec{z} \cdot M \cdot \vec{z}$ vai pra zero mais devagar do que o termo que depende de $D_2(\vec{z})$. Sendo assim, podemos escrever

$$\Phi(\vec{z}) = i\vec{z} \cdot \langle K\vec{U} \rangle + \frac{\sigma_N^2}{2} \vec{z} \cdot M \cdot \vec{z},$$

onde $\sigma_N = \frac{K^2}{N} \ln N$, conforme aparece na equação (3.20) para $\alpha = 2$.

A.3 O caso $0 < \alpha < 1$

A partir das equações (3.48), (2.125) e (3.14) podemos escrever a função característica da força resultante para o caso $\alpha < 1$ como

$$\Phi(z) = \lim_{N \rightarrow \infty} \exp(-N|a_N|^\alpha |\vec{z}|^\alpha [\Xi_\alpha(\vec{z}) + \Omega(a_N \vec{z})]), \quad (\text{A.2})$$

onde

$$\Xi_\alpha(\vec{z}) = \frac{\pi}{\Gamma(\alpha + 1)} \left\{ \frac{A_\alpha(\hat{z}) \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) - iB_\alpha(\hat{z}) \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)}{\sin(\alpha\pi)} \right\}.$$

A fim de manter a convergência de (2.116) vamos considerar que

$$a_N = \left(\frac{K}{N}\right)^{\frac{1}{\alpha}},$$

onde K é uma constante positiva. Deste modo, $\lim_{N \rightarrow \infty} \Omega(a_N \vec{z}) \rightarrow 0$ e chegamos a

$$\Phi(z) = \exp(-K|\vec{z}|^\alpha \Xi_\alpha(\vec{z})). \quad (\text{A.3})$$

conforme aparece na equação (3.20) para $\alpha < 1$.

A.4 O caso $1 < \alpha < 2$

A partir das equações (3.48), (2.125) e (3.14) podemos escrever a função característica da força resultante para o caso $1 < \alpha < 2$ como

$$\Phi(z) = \exp \left(iNa_N \vec{z} \cdot \langle \vec{U} \rangle - N|\vec{a}_N|^\alpha |\vec{z}|^\alpha [\Xi_\alpha(a_N \vec{z}) + \Omega(a_N \vec{z})] \right).$$

A fim de garantir a convergência vamos considerar que

$$a_N = \frac{K}{N}.$$

Assim

$$\Phi(z) = \lim_{N \rightarrow \infty} \exp \left(iK \vec{z} \cdot \langle \vec{U} \rangle - \frac{|K|^\alpha}{N^{\alpha-1}} |\vec{z}|^\alpha [\Xi_\alpha(a_N \vec{z}) + \Omega(a_N \vec{z})] \right).$$

Aplicando o limite chegamos a

$$\Phi(z) = \exp \left(iK \vec{z} \cdot \langle \vec{U} \rangle - \sigma_N^\alpha |\vec{z}|^\alpha \Xi_\alpha(a_N \vec{z}) \right),$$

onde $\sigma_N = KN^{(1-\alpha)/\alpha}$, conforme aparece na equação (3.20) para $1 < \alpha < 2$.

Apêndice B

Função característica para $\delta = 1$

Conforme pontuamos no final da subseção 3.3.1, para o caso $\delta = 1$ consideramos que a variância da variável aleatória U é finita e portanto se o limite $\lim_{N \rightarrow \infty} \Omega(b_n z) = 0$ é válido, podemos afirmar que a função característica é dada pelo resultado do teorema 3.3.1. Assim, podemos escrever

$$\Phi(z) = \exp \left[i \langle U \rangle z - \frac{\sigma_U^2 z^2}{2} (1 + \Omega(z)) \right]$$

Da equação (3.30) temos que $V = -\kappa_N \ln(L_N R) = -\kappa_N U_N$, onde $U_N = \ln L_N + \ln R$. Assim, a função característica pode ser escrita como $\Phi_V(z) = \Phi_{-\kappa_N U_N}(z) = \Phi_{U_N}(-\kappa_N z)$. Portanto, de acordo como teorema 2.1, a função característica da soma $V^N \equiv \sum_{i=1}^N V$ pode ser escrita como $\Phi_{V^N}(z) = [\Phi_{U_N}(-\kappa_N z)]^N$. Então

$$\Phi_{V^N}(z) = \exp \left[i N \kappa_N (-\ln L_N + \langle U \rangle) z - \frac{N \kappa_N^2 \sigma_U^2 z^2}{2} (1 + \Omega(z)) \right]$$

onde $\langle U \rangle = -\langle \ln R \rangle$. Conforme aparece na equação (3.52).

Referências Bibliográficas

- [1] A. N. Kolmogorov, *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung* (Julius Springer-Berlin) (1933).
- [2] P. Lévy, “Théorie des erreurs. La loi de Gauss et les lois exceptionnelles,” *Bull. Soc. Math. France* **2**, 49–85 (1924).
- [3] A.Ya. Khintchine, “Sur une théorème général relatif aux probabilités dénombrables,” *C.R. Acad. Sci. Paris* **178**, 617-619 (1924)
- [4] A.Ya. Khintchine, “Ueber einen Satz der Wahrscheinlichkeitsrechnung,” *Fundamenta Mathematicae* **6**, 9–20 (1924).
- [5] P. Lévy, “Sur les lois stables em calcul des probabilités,” *C. R. Acad. Sci.* **176**, 1284–1286 (1923).
- [6] A.Ya. Khintchine and A.N. Kolmogorov, ”Ueber Konvergenz von Reihen, deren Glieder durch den Zufall bestimmt werden,” *Mat. Sb.* **32**, 668-677 (1925).
- [7] A.Ya. Khintchine, “Sul dominio di attrazione della legge di Gauss, *Giornale dell’Istituto Italiano degli Attuari*,” **6** No 4, 378-393 (1935)
- [8] A.Ya. Khintchine, “Sul dominio di attrazione della legge di Gauss, *Giornale dell’Istituto Italiano degli Attuari*,” **6**, No 4, 378-393 (1935).
- [9] P. Lévy, “Determination générale des lois limites,” *Compt. Rendus Acad. Sci. Paris* **203**, 698-700 (1936).
- [10] W. Feller, “Ueber den zentralen Grenzwertsatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung,” *Math. Z.* **40**, 521-559 (1935).

- [11] B. de Finetti, “Sulle funzioni ad incremento aleatorio, Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei,” (Ser VI) **10**, 163-168 (1929).
- [12] B. de Finetti, “Sulla possibilità di valori eccezionali per una legge di incrementi aleatori, Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei,” (Ser VI) **10**, 325-329 (1929).
- [13] B. de Finetti, “Integrazione delle funzioni ad incremento aleatorio, Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei,” (Ser VI) **10**, 548-553 (1929).
- [14] B. de Finetti, “Le funzioni caratteristiche di legge istantanea,” Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei,” (Ser VI) **12**, 278-282 (1930).
- [15] B. de Finetti, “Le funzioni caratteristiche di legge istantanea dotate di valori eccezionali. Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei,” (Ser VI) **14**, 259-265 (1931).
- [16] P. Lévy, “Sur les intégrales dont les éléments sont des variables aléatoires indépendentes,” Ann. R. Scuola Norm. Pisa (Ser. II) **3**, 337-366 (1934).
- [17] P. Lévy, “Observation sur un précédent mémoire de l’auteur,” Ann. R. Scuola Norm. Pisa (Ser. II) **4** 217-218 (1935).
- [18] P. Lévy, *Théorie de l’addition des variables aléatoires* (Gauthier-Villars, Paris, 1954).
- [19] A.Ya. Khintchine, “A new derivation of a formula of P. Lévy,” Bull. Moscow Gov. Univ. 1, vyp. **1**, 1-5 (1937).
- [20] A.Ya. Khintchine, *Limit Distributions for the Sum of Independent Random Variables* O.N.T.I., Moscow, 1938, pp. 115.
- [21] P. Lévy, *Quelques aspects de la pensée d’un mathématicien* (Albert Blanchard - Paris) (1970).
- [22] A. Ya. Khintchine and P. Lévy, “Sur le lois stables,” C.R. Acad. Sci. Paris **202**, 374-376 (1937).
- [23] S. Chandrasekhar, “Stochastic Problems in Physics and Astronomy,” Rev. Mod. Phys. **15**, 1 (1943).
- [24] T.Padmanabhan, “Statistical mechanics of gravitating systems,” Physics Reports **188**, 285-362 (1990).

- [25] T. Tatekawa, F. Bouchet, T. Dauxois and S. Ruffo, “Thermodynamics of the self-gravitating ring model,” *Physical review E* **71**, 4 (2010).
- [26] P. H. Chavanis, “Statistics of the gravitational force in various dimensions of space: from Gaussian to Lévy laws,” *Eur. Phys. J. B* **70**, 413–433 (2009).
- [27] J. Holtzmark. *Ann. Phys.* **58**, 577 (1919).
- [28] A. D. Figueiredo, T.M. da Rocha Filho and M. A. Amato, “Distribution probability of force for a physical system of N random particles,” *J. Math. Phys.* **60**, 073301 (2019).
- [29] E. R. Waiandt, *Alguns teoremas limites para sequências de variáveis aleatórias*, (Dissertação de mestrado - UFES) (2014).
- [30] Chung, L.A, *A Course in probability theory*, San Diego, California: Academic Press (2001).
- [31] Papoulis, A., *Probability random variables and stochastic processes*, McGraw-Hill, Inc. (1991)
- [32] James, B.R, *Probabilidade: um curso em nível intermediário*, Rio de Janeiro: IMPA (2006).
- [33] A. Prugel-Bennett, *The probability companion for engeneering and computer science*, (Cambridge-University press) (2019).
- [34] Bergstrom, H., *On some expansions of stablle distribution functions*. *Arkiv for Matematik II*, 375-378 (1952).
- [35] B. C. Arnold, *Pareto Distributions*, International Co-operative Publishing House. ISBN 978-0-89974-012-6 (1983).
- [36] V. A. Antonov, *Vest. Leningr. Gos. Univ.* **7**, 135 (1962); *IAU Symposium* **113**, 525 (1985).
- [37] D. Lynden-Bell and R. Wood, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **138**, 495 (1969).
- [38] A. Ahmad and L. Cohen, *Astrophys. J.* **179**, 885 (1973).
- [39] A. Del Popolo, *A&A* **305**, 999 (1996); *A&A* **311**, 715 (1996).
- [40] P. H. Chavanis and C. Sire, *Phys. Rev. E* **62**, 490 (2000).
- [41] P. H. Chavanis and C. Sire, *Phys. Fluids* **13**, 1904 (2001).

- [42] P. H. Chavanis, Phys. Rev. E 65, 056302 (2002).
- [43] A. Campa, T. Dauxois and S. Ruo, *Statistical mechanics and dynamics of solvable models with long-range interactions*, Physics Reportsb **480** (2009).
- [44] M. Kac, G. E. Uhlenbeck, and P. C. Hemmer, “On the van der Waals Theory of the Vapor-Liquid Equilibrium. I. Discussion of a One-Dimensional Model,” J. Math. Phys. **4**, 216 (1963).
- [45] P. Lévy, “Théorie des erreurs. La loi de Gauss et les lois exceptionnelles,” Bull. Soc. Math. France **2**, 49–85 (1924).