



UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA - UnB  
INSTITUTO DE FÍSICA - IF  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

ESTUDO DA COMPACTAÇÃO DO ÉTER E CORREÇÕES RADIATIVAS  
PARA MASSAS KALUZA-KLEIN

RAFAEL DE JESUS DOS SANTOS OLIVEIRA

Brasília - DF  
Março de 2022

**RAFAEL DE JESUS DOS SANTOS OLIVEIRA**

**ESTUDO DA COMPACTAÇÃO DO ÉTER E CORREÇÕES RADIATIVAS  
PARA MASSAS KALUZA-KLEIN**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Instituto de Física da Universidade de Brasília - UnB, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Física.

Área de concentração: Teoria de Campos e Partículas

**Orientador:** Prof. Dr. Aleksandr Nikolaievich Pinzul

**Coorientador:** Prof. Dr. Eduardo M. Rodrigues dos Passos

**Brasília - DF**  
**Março de 2022**

*“Após conhecer e obedecer à vontade de Deus, o próximo alvo deve ser conhecer algo dos Seus atributos de sabedoria, poder e bondade evidenciados nas obras de Suas mãos”.* James Prescott Joule

*Dedico este trabalho à minha querida e amada esposa Debora Oliveira, quem tem me acompanhado nesta empreitada e me apoiado significativamente. Assim como à minha mãe Nádia Rodrigues dos Santos que sempre me motivou a seguir perseverando durante todo o processo de elaboração deste trabalho.*

*Obrigado!*

## AGRADECIMENTOS

Inicialmente quero deixar claro e evidente citando: ... *até aqui nos ajudou o Senhor.* (1 Sm 7.12), o meu pleno reconhecimento da mão poderosa do meu Deus guiando cada etapa até aqui, e a minha total gratidão pelo Seu amor explicitado em todas as áreas da minha vida, inclusive na salvação deste pecador, a qual foi alcançada pelo sacrifício perfeito executado na cruz. Louvo a Deus, que é o detentor de todo o conhecimento, rico em sabedoria, por ter misericórdia ao conceder a mim um infinitésimo de sua sapiência para escrever esta tese.

Agradeço ao meu orientador professor Dr. Aleksandr Nikolaievich Pinzul, por ter me ajudado compartilhando seus conhecimentos através de agradáveis conversas, onde muitas vezes usou de paciência ao compreender as minhas dificuldades no conteúdo deste trabalho. Agradeço também ao coorientador professor Dr. Eduardo Marcos Rodrigues dos Passos, o qual tem me ajudado, compreendendo minhas dificuldades e motivando-me sempre a buscar uma melhor compreensão da realidade de um apreciador desta área de conhecimento tão fascinante que é a Física.

Deixo também meus agradecimentos à minha fiel companheira de jornada, osso dos meus ossos e carne da minha carne, minha amada esposa Debora Oliveira. Adiciono neste parágrafo a minha alegria em agradecer às três mulheres que juntamente com minha esposa me acompanharam nessa jornada. Cito minha mãe Nádia Rodrigues dos Santos e minhas duas irmãs Bruna de Oliveira Mendes e Laysa Monayla dos Santos Quitino.

Não poderia deixar de agradecer aos meus queridos amigos José Rivaldo e Vilma Viana, por terem, mesmo sem nos conhecer, confiado sua casa e sua valiosa amizade; confiança essa que foi fundamental para o início dessa jornada.

Quero agradecer ao meu caro amigo Rodrigo Silva por ter compartilhado suas experiências na dinâmica acadêmica e pelos agradáveis momentos de conversas.

Deixo registrado a minha gratidão ao Robson Reis e família, que nos acompanharam tratando-nos como integrantes de sua família, cuidando, apoiando e se importando sempre.

Aproveito o momento para agradecer a Igreja Presbiteriana do Guará II, cuja atuação efetiva foi como corpo de Cristo e família da fé. Grato sou pelo acolhimento

e cuidado completo ao longo destes anos.

Agradeço também aos professores que contribuíram para minha formação, assim como ao programa de pós-graduação em física da UnB pela oportunidade da realização deste trabalho. Finalmente, quero agradecer ao programa de bolsas da CAPES pelo apoio financeiro durante o doutorado.

# Resumo

Através da teoria efetiva da compactação éter é feito o estudo de quais são as implicações (efeitos) da compactação da quinta dimensão com o campo éter sendo propagado ao longo desta dimensão extra. Nesse contexto são analisadas as modificações ocorridas nas relações de dispersão, propagador e tensor energia-momento dos campos do Modelo Padrão. O foco desta tese é em abordar a questão das correções radiativas para as massas Kaluza-Klein (KK) na eletrodinâmica quântica de cinco dimensões suplementada pelos termos devido o campo éter que violam a invariância de Lorentz. Especificamente, é feito o cálculo das correções para as massas de fótons KK de um loop de férmions. Em geral, as massas KK recebem correções radiativas devido à quebra da invariância de Lorentz de cinco dimensões por compactação. Como foi mostrado, a presença do fator de violação de Lorentz adicional, o éter como background, leva à modificação não trivial dessas correções. Este modelo pode ser de interesse para abordar questões fenomenológicas importantes, como a relação entre a divisão de massa KK corrigida por radiação de um modo particular e incertezas nas medições e/ou possível variação espacial da constante de estrutura fina. Para os dados recentes sobre a constante de estrutura fina, é encontrado uma divisão de massa KK de magnitude  $\sim 0,01$  MeV para o primeiro bóson excitado de Kaluza-Klein na escala TeV. Por outro lado, o grande limite dos modos KK apresenta um fenômeno muito interessante, mostrando o papel muito especial do éter na proteção dos modos superiores das correções quânticas.

**Palavras-Chave:** Compactação do éter. Dimensões extras. Violação da Invariância de Lorentz. Massas Kaluza-Klein.

# Abstract

Through the effective theory of aether compactification, we study what are the implications (effects) of compactification of the fifth dimension with the aether field being propagated along this extra dimension. In this context, the changes that occurred in the dispersion relations, propagator, and energy momentum tensor of the Standard Model fields are analyzed. The focus of this thesis is to address the issue of radiative corrections for the Kaluza-Klein (KK) masses in five-dimensional quantum electrodynamics supplemented by terms due to the aether field that violate the Lorentz invariance. Specifically, corrections for the KK photon masses of a fermionic one-loop are calculated. In general, the KK masses receive radiative corrections due to the breaking of the five-dimensional Lorentz invariance by compaction. As shown, the presence of the additional Lorentz violation factor, aether as a background, leads to a nontrivial modification of these corrections. This model may be of interest in addressing important phenomenological issues such as the relation between radiative corrected KK mass splitting of a particular mode and uncertainties in the measurements and/or possible spatial variation of the fine-structure constant. For the recent data on the fine-structure constant, a KK mass splitting of magnitude  $\sim 0.01$  MeV is found for the first excited Kaluza-Klein boson on the TeV scale. On the other hand, the large KK modes limit displays a very interesting phenomenon, showing the very special role of the aether in protecting the higher modes from the quantum corrections.

**Key-words:** Aether compactification. Extra dimensions. Lorentz Invariance Violation. Kaluza-Klein masses.



# Lista de siglas

KK *Kaluza-Klein*

QFT *Quantum Field Theory (Teoria Quântica dos Campos)*

SM *Standard Model (Modelo Padrão)*

LIV *Lorentz Invariance Violation (Violação da Invariância de Lorentz)*

GR *General Relativity (Relatividade Geral)*

SME *Standard Model Extension (Extensão do Modelo Padrão)*

LI *Lorentz Invariance (Invariância de Lorentz)*

QED *Quantum Electrodynamics (Eletrodinâmica Quântica)*

QED<sub>5</sub> *Quantum Electrodynamics in 5-D (Eletrodinâmica Quântica em 5-D)*

# Lista de Figuras

8.1	Contribuição no nível de um-loop para o tensor polarização. . . . .	44
-----	---------------------------------------------------------------------	----

# Lista de Tabelas

7.1	Contrações tensoriais. . . . .	36
-----	--------------------------------	----

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>A teoria Kaluza-Klein e o campo éter</b>	<b>5</b>
2.1	A teoria de Kaluza-Klein . . . . .	6
2.2	Sobre a ideia do éter . . . . .	8
2.3	Compactação Kaluza-Klein na presença do campo éter . . . . .	12
<b>3</b>	<b>A dinâmica do campo éter</b>	<b>14</b>
3.1	O modelo dinâmico . . . . .	14
3.2	Tensor energia-momento e compactação . . . . .	16
<b>4</b>	<b>Teoria do campo escalar modificada</b>	<b>18</b>
4.1	Compactação explícita no setor do campo escalar estendido . . . . .	19
4.2	Análise da relação de dispersão . . . . .	21
4.3	Tensor energia-momento . . . . .	22
<b>5</b>	<b>Eletrodinâmica modificada</b>	<b>24</b>
5.1	O modelo e as equações de Maxwell modificada . . . . .	24
5.2	Método de Compactação explícita . . . . .	26
5.2.1	Setor de Proca: relação de dispersão modificada . . . . .	29
<b>6</b>	<b>Tensor energia-momento canônico</b>	<b>32</b>
<b>7</b>	<b>Propagador de Feynman: unitariedade</b>	<b>34</b>
7.1	Propagador saturado e unitariedade . . . . .	38

---

<b>8</b>	<b>Correção quântica na QED<sub>5</sub> com compactação do éter</b>	<b>41</b>
8.0.1	Contribuição induzida pela compactação do éter . . . . .	45
<b>9</b>	<b>Conclusão e perspectivas</b>	<b>56</b>
<b>A</b>	<b>Variação de <math>\sqrt{(-1)^{D-1}g}</math></b>	<b>60</b>
<b>B</b>	<b>Cálculo de <math>\frac{\delta g_{cd}}{\delta g^{ab}}</math> e <math>\frac{\delta g^{cd}}{\delta g^{ab}}</math></b>	<b>62</b>
<b>C</b>	<b>Tensor energia-momento métrico</b>	<b>64</b>
<b>D</b>	<b>Verificação de <math>u^a</math> em qualquer espaço-tempo</b>	<b>66</b>
<b>E</b>	<b>Delta de Kronecker</b>	<b>67</b>
<b>F</b>	<b>Propriedade vinda da condição do campo do SM ser real em 5-<math>D</math></b>	<b>68</b>
<b>G</b>	<b>Processo de simetrização</b>	<b>69</b>
<b>H</b>	<b>Tensor energia-momento métrico e conclusões</b>	<b>70</b>
<b>I</b>	<b>Cálculo da integral</b>	<b>72</b>

# Capítulo 1

## Introdução

A compactação<sup>1</sup> do éter foi apresentada há algum tempo como uma alternativa à compactação na presença de grandes dimensões extras sem introdução de branas para controlar a influência de massa em um espaço-tempo de cinco dimensões no conteúdo do campo em nosso universo de quatro dimensões. Uma vez que, dentro do ambiente da teoria de branas são considerados cenários nos quais campos do Modelo padrão estão localizados sobre uma brana mergulhada em uma massa maior [1][2][3][4]. A questão é que, neste cenário, as dimensões extras são difíceis de serem percebidas, devido não ser possível chegar lá.

Diferentemente dos mundos-brana, neste tipo de compactação não há correções à lei newtoniana quadridimensional [5]. No entanto, a possibilidade de suprimir os modos Kaluza-Klein (cuja abreviatura que será usada é KK), torna o mecanismo eficiente para garantir uma teoria efetiva quadridimensional descrevendo a física do nosso Universo após a compactação. Isso ocorre porque campos de éter violando Lorentz ao longo de dimensões extras afetam o esquema convencional de compactação Kaluza-Klein, uma vez que suas interações desempenham um papel fundamental na divisão de massa das torres KK: os espaçamentos de massa entre diferentes estados são agora modificados, como será visto mais adiante em maiores detalhes. No caso de grandes dimensões extras, mesmo modos KK muito altos podem, em princípio, ser acessíveis a um observador quadridimensional.

A estabilização da dimensão extra na compactação do éter também foi estudada em [6], onde foram discutidos os efeitos do campo éter no mecanismo de estabilização dos módulos. Neste caso, os autores consideraram um campo de éter do tipo-espaço alinhado ao longo da quinta direção compacta com um termo do tipo Maxwell. Eles mostram que uma interação entre a energia de Casimir devido a campos massivos e sem massa pode produzir um potencial para estabilização da dimensão extra compacta.

---

<sup>1</sup>Termo que será usado em todo texto, uma vez que é a forma aceita no Português-Brasil. Embora na matemática e na topologia geral, o termo usado seja *compactificação*.

Outro problema importante em relação às massas KK diz respeito às suas correções radiativas. Em [7], este problema foi abordado considerando as correções radiativas de um loop para massas KK em teorias de cinco e seis dimensões. Tal cálculo mostrou produzir um resultado finito, uma vez que, as contribuições não triviais do número de enrolamento (correspondente à compactação) para os diagramas de loop de Feynman são bem definidas e independentes de métodos cutoff, mesmo que teorias dimensionais mais altas não sejam renormalizáveis. Como isso corresponde exatamente a parte dos diagramas de loop que leva à violação da invariância de Lorentz de cinco dimensões induzida pela presença de uma dimensão compacta (como sondado por IR ou física de grande distância), isto contribui para a correção do KK massas. (Ver [8] para um estudo abrangente sobre a violação de Lorentz em dimensões extras e [9][10] para o estudo mais aprofundado da fenomenologia de um modelo KK simples com o espectro de massa de um loop melhorado (devido às correções finitas subcondutoras).) Por outro lado, para o número de enrolamento zero, ou seja, para a física de curta distância, a contribuição para diagramas de loop é invariante de Lorentz (e divergente). Para isolar as correções finitas violadoras de Lorentz das contribuições divergentes invariantes de Lorentz procede-se da seguinte forma: de cada loop da teoria compactada subtrai-se o loop correspondente da teoria não compactada. Como as teorias são equivalentes em regime UV (curta distância), as divergências são canceladas. No entanto, as correções de massa KK permanecem inalteradas e finitas devido à invariância de Lorentz da prescrição de subtração.

Vários estudos combinando o campo de éter, violação de simetria de Lorentz e paridade, e correções radiativas em quatro e mais dimensões da eletrodinâmica quântica estendida (QED) têm sido realizados na literatura. O termo de violação de Lorentz semelhante ao éter induzido radiativamente em QED de quatro e cinco dimensões violando Lorentz estendido foi abordado anteriormente em [11][12]. As modificações do campo de éter da lei de Stefan-Boltzmann e do efeito Casimir em temperatura zero e finita foram investigadas em [13]. Em [14], a indução de um termo de quebra de paridade foi encontrada calculando o tensor de polarização do vácuo de uma QED de cinco dimensões compactado em um fundo de fluxo magnético. Outros modelos, como cosmologia na presença de um campo de éter de quatro vetores dinâmicos do tipo tempo em uma teoria de quatro dimensões (um éter sigma-modelo) bem como na presença de um campo constante de éter ao longo da dimensão extra no Universo inflacionário, também foram examinados em [15].

Dentro deste cenário de investigação, a presente tese tem como objetivo principal o de investigar as correções radiativas de um loop para as massas KK na QED estendida de cinco dimensões (QED<sub>5</sub>) violando a invariância de Lorentz por um campo vetorial (éter) com valor esperado alinhado ao longo da dimensão extra. Para tanto, é feita a aplicação da prescrição de subtração introduzida em [7] e brevemente resumida acima. Mais espe-

cificamente, é feito o cálculo das correções para as massas dos fótons KK provenientes de um loop fermiônico. Sabe-se [7] que nesta ordem as massas recebem correções mesmo sem a presença do éter. Contudo, aqui o objetivo é estudar o efeito da interação com o background de éter. Será visto que as correções radiativas de um loop são modificadas de forma não trivial, o que poderia, em princípio, levar a novos limites fenomenológicos nos parâmetros violadores de Lorentz e medições da constante de estrutura fina. Ao considerar os resultados recentes da Ref. [16], ou seja,  $\Delta\alpha/\alpha = -2,18 \pm 7,27 \times 10^{-5}$ , e assumindo o raio de compactação  $R \sim 1$  mm, para bósons de calibre Kaluza-Klein na escala TeV, é encontrada a incerteza da divisão de massa KK com magnitude  $\sim 0,01$  MeV para o primeiro modo excitado.

Esta tese está organizada da seguinte forma: no capítulo 2 é feita uma apresentação descritiva, sem exaurir sobre o tema, dos importantes componentes a serem abordados durante todo o processo de construção desta tese. Enquanto que no capítulo 3 é feita uma breve descrição da estrutura do modelo éter e sobre quais parâmetros pode haver contribuição da energia devido o éter. No capítulo 4 são apresentados os critérios para construção da teoria efetiva do campo escalar com a interação do campo éter em cinco dimensões (tais critérios também são usados para construção da teoria efetiva no setor eletromagnético e gravitacional), onde é feita a compactação explícita da dimensão extra, através da conhecida teoria KK. Já neste capítulo é possível visualizar que a participação do éter implica na adição de mais um parâmetro, além do tamanho da dimensão, que controla o tamanho das massas KK. Os cálculos e resultados feitos neste setor são usados para visualizar quais as influências do éter interagindo com os campos do SM, como é o caso do tensor energia-momento. Já no capítulo 5 é feito o estudo das consequências do éter interagindo na eletrodinâmica em cinco dimensões, onde são apresentadas as equações de Maxwell modificadas pela presença do éter e a dimensão extra, e em seguida é feito o procedimento da compactação explícita, resultando em uma ação composta pelos setores de campo de Maxwell, do campo escalar e de Stueckelberg. Então, com a aplicação do calibre de Stueckelberg, é obtido a ação de Proca, o que permite obter a equação de movimento e relação de dispersão, onde é feita análise das características do meio. Prosseguindo no estudo no setor eletromagnético, no capítulo 6 é calculado o tensor energia-momento do setor Maxwell-éter, e é analisado a aparência da componente 00 do mesmo. No capítulo 7 é feito o cálculo do propagador para este modelo, além de verificado sob quais parâmetros a propriedade de unitariedade é assegurada. Enquanto que no capítulo 8 são fornecidas algumas informações básicas sobre a extensão aether-QED em 5D. Neste contexto é feita a descrição da simetria de calibre do modelo seguida da definição do tensor de polarização do vácuo no nível de um loop. Em seguida, usando o propagador fermiônico modificado são feitos os cálculos de correções radiativas para massas de modos de Kaluza-Klein na QED<sub>5</sub> estendida pelo éter compactado acoplado a férmions sem massa. Assim a forma integral exata para as massas KK é obtida, o



---

que permite analisar diferentes limites interessantes, controlados por alguma constante de acoplamento efetiva  $\Lambda$ : (i) crítica,  $\Lambda = 0$ , que inclui o caso sem éter estudado em [7]; (ii) próximo do crítico, e (iii) KK grande, que é um limite muito interessante, mostrando o papel muito especial do éter na proteção dos modos superiores das correções quânticas. Além disso, a existência de um limite unitário é estabelecida. Os resultados obtidos estão contidos no corpo do artigo cujo título é *Radiatively corrected Kaluza-Klein masses in an aether compactification*, publicado na revista PHYSICAL REVIEW D, em 2020. Finalmente no capítulo 9 são apresentadas as conclusões e perspectivas.

No decorrer desta tese será adotado o sistema de unidades naturais, o que significa  $c = \hbar = 1$ . Os índices com letras latinas representam contagem das cinco dimensões, isto é,  $a, b, c$  vão de  $\mu, 5$  (embora em um momento específico serão usadas as letras  $i, j, k$  para representar as coordenadas espaciais de um quadrivetor, como já é de costume), enquanto que letras gregas representam as quatro dimensões usuais, ou seja,  $\mu, \nu, \gamma$  significam índices que correm de 0 até 3. A letra grega “ $\eta$ ” será reservada para representar o espaço-tempo plano, de modo que para um espaço-tempo mais geral será usada a letra “ $g$ ”; e a assinatura métrica a ser usada será  $(+, -, -, -, -)$ .

## Capítulo 2

# A teoria Kaluza-Klein e o campo éter

A teoria quântica de campo (com abreviatura QFT, do inglês Quantum Field Theory) é uma estrutura teórica que combina a teoria de campo clássica, relatividade especial e mecânica quântica [17]. Esta teoria é usada na física de partículas para construir modelos físicos de partículas subatômicas e na física da matéria condensada para construir modelos de quasipartículas.

Na QFT o conceito de *campo* como uma quantidade física, representada por um tensor, que tem um valor para cada ponto no espaço e no tempo, desempenha um papel fundamental na física teórica [18]. Especificamente, ela trata as partículas como estados excitados (também chamados de quanta) de seus campos quânticos subjacentes, que são mais fundamentais do que as partículas. As interações entre as partículas são descritas por termos de interação na Lagrangiana envolvendo seus campos quânticos correspondentes. Cada interação pode ser representada visualmente por diagramas de Feynman de acordo com a teoria de perturbação na mecânica quântica.

Estando a QFT bem estabelecida em um espaço-tempo plano quadridimensional, de modo que além da interação eletromagnética, tanto a interação fraca quanto a interação forte são também descritas pela mesma, as quais reunidas formam o que é conhecido por Modelo Padrão (SM, vinda do inglês Standard Model) que considera tanto as partículas que compõem a matéria (quarks e léptons) quanto as partículas mediadoras de forças (bósons de calibre) como excitações de campos fundamentais; mostra-se de grande relevância considerar a QFT em um espaço-tempo generalizado, ou seja, um espaço-tempo que não seja plano, junto com a admissão de dimensões adicionais às quatro dimensões usuais; além da inclusão de mais campos interagindo com os campos do SM, de modo a permitir o vislumbre de respostas para questões significantes sobre fenômenos ocorridos no universo. Seguindo esta linha de pensamento, o presente trabalho é construído, uma vez

que, traz consigo a ideia de partículas do SM representadas como campos propagando-se em um determinado espaço-tempo mais abrangente, e as mesmas interagem com outros campos, na qual, tal interação tem consequências de alta relevância para a compreensão dos fenômenos no universo. De forma mais clara, aqui o que está fortemente presente é o resgatar a ideia do éter, mas agora como um campo com características específicas, de modo a interagir com os campos do SM. Então, conforme será explicado nos próximos capítulos, fazendo a adição da teoria do campo éter (o qual pode ter sua propagação em todas as dimensões consideradas) na teoria de Kaluza-Klein, certas dificuldades presentes no Modelo sem éter podem ser abordadas de forma a se ter resultados mais favoráveis, assim como possibilita o estudo dos efeitos da Violação da Invariância de Lorentz (cuja sigla é LIV, do inglês Lorentz Invariance Violation).

Sendo assim, para dar prosseguimento de forma didática a este trabalho, será então apresentada uma breve revisão sobre os ingredientes presentes dentro da proposta da respectiva teoria efetiva, assim como no decorrer dos cálculos; a saber, a teoria Kaluza-Klein e o éter.

## 2.1 A teoria de Kaluza-Klein

Historicamente, a abordagem Kaluza-Klein, assim chamada porque as primeiras tentativas nesse sentido foram feitas por Theodor Kaluza (1921) e, um pouco mais tarde, por Oskar Klein (1926), começou como um programa teórico que procurou unificar as forças gravitacional (teoria de Einstein) e eletromagnética (teoria de Maxwell) como efeitos de curvatura de uma variedade pseudoriemanniana em 5 dimensões.

Estando as duas teorias bem estabelecidas, era perceptível a incompatibilidade entre elas. Em meio a essa busca, eis que em 1919, Einstein recebeu uma carta que o deixou sem fala. A mesma era de um matemático desconhecido, Theodor Kaluza (da universidade de Königsberg), onde em um artigo curto de apenas algumas páginas, foi proposta uma solução para este problema, ou seja, em poucas linhas Kaluza unia as duas teorias, introduzindo a quinta dimensão (isto é, quatro dimensões de espaço e uma de tempo)[19].

Nessa curta nota, Kaluza começou, de maneira bastante inocente, escrevendo as equações de campo de Einstein para a gravidade em cinco dimensões, não nas quatro usuais (lembrando que o tensor métrico de Riemann pode ser formulado em qualquer número de dimensões). Desta forma, verificou-se que as equações pentadimensionais continham em si a teoria quadridimensional anterior de Einstein (o que era de se esperar) com uma parte adicional. Porém, o que chocou Einstein foi que essa parte adicional era

precisamente a teoria da Luz de Maxwell<sup>1</sup>.

Sabendo que a base do trabalho de Riemann e de Einstein é o tensor métrico, o qual, em cinco dimensões trata-se de um conjunto de quinze números definidos em cada ponto no espaço, percebe-se que há “espaço suficiente” dentro das 15 componentes da gravidade pentadimensional para acomodar tanto as dez componentes do campo de Einstein, quanto as quatro componentes do campo de Maxwell. Assim a brilhante ideia de Kaluza pode ser sintetizada como:

$$15 = 10 + 4 + 1,$$

onde a componente restante é uma partícula escalar. Então, o tensor métrico pentadimensional acomodando a métrica quadridimensional  $g_{\mu\nu}$  e o quadripotencial vetor  $A_\mu$  do campo eletromagnético, mais uma função escalar  $\phi$ , pode ser escrito de forma explícita como:

$$\tilde{g}_{ab} \doteq \begin{pmatrix} g_{\mu\nu} + \kappa^2 \phi^2 A_\mu A_\nu & \kappa \phi^2 A_\mu \\ \kappa \phi^2 A_\nu & \phi^2 \end{pmatrix},$$

onde  $\tilde{g}_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu} + \kappa^2 \phi^2 A_\mu A_\nu$ ,  $\tilde{g}_{5\nu} = g_{\nu 5} \equiv \phi^2 A_\nu$  e  $\tilde{g}_{55} \equiv \phi^2$ . Sendo que, de forma mais detalhada, a convenção seguida é de que as letras do alfabeto latino  $a, b, \dots$  representam índices tensoriais que vão de  $\mu, 5$ , enquanto que as letras do alfabeto grego  $\mu, \nu, \dots$  representam índices tensoriais de 0 a 3. Assim, as 5 coordenadas de um espaço-tempo de Kaluza seriam  $x^a = (x^\mu, x^5)$ , onde a coordenada 0-ésima é a coordenada temporal e a coordenada 5-ésima é a coordenada associada à quinta dimensão adicional e as outras três são as coordenadas espaciais ordinárias.

O passo seguinte da proposta de Kaluza é impor artificialmente a chamada condição cilíndrica, ou como é mais conhecida, compactação da quinta dimensão, que consiste em impor que nenhuma das componentes do tensor pentadimensional  $\tilde{g}_{ab}$  dependa da coordenada adicional  $x^5$ . Nesse caso, as equações de campo de Einstein se reduzem às condições do eletromagnetismo clássico mais equações da relatividade geral, além de uma equação adicional para o campo escalar, ou seja,

$$\tilde{R}_{ab} - \frac{1}{2} \tilde{g}_{ab} \tilde{R} = 0 \Rightarrow \begin{cases} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{\kappa^2 \phi^2}{2} T_{\mu\nu}^{(EM)} - \frac{1}{\phi} [\nabla_\mu (\partial_\nu \phi) - g_{\mu\nu} \square \phi]; \\ \nabla^\mu F_{\mu\nu} = -3 \frac{\partial^\mu \phi}{\phi} F_{\mu\nu}; \\ \square \phi = \frac{\kappa^2 \phi^3}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \end{cases}$$

Estas equações têm a seguinte interpretação: uma vez considerado um espaço-tempo quase-vazio, de topologia  $\mathcal{M} \times S^1$ , pentadimensional com a métrica adequada; sendo  $\mathcal{M}$

<sup>1</sup>O leitor que tiver interesse na história de como ocorreu a proposta da teoria KK, pode ver mais detalhes em [19]

a variedade quadridimensional usual, enquanto  $S^1$  representa a dimensão extra compactada em um círculo de raio  $R$ . Então, o movimento de uma pequena partícula de prova carregada na quinta dimensão se pareceria a uma partícula num espaço-tempo de quatro dimensões  $\mathcal{M}$  no qual, conseqüentemente, é introduzido um campo eletromagnético. Assim, o campo eletromagnético efetivo no qual vê uma partícula carregada no espaço-tempo ordinário pode interpretar-se como o resultado geométrico da curvatura de um espaço-tempo de cinco dimensões [20].

Como é possível perceber, a ideia original de Kaluza era puramente clássica, o que culminou em descobertas extensas da relatividade geral. Porém a grande percepção de Klein foi olhar essa teoria de dimensões extras através de uma perspectiva mais fundamental. Na época da contribuição de Klein, as descobertas de Heisenberg, Schrödinger e de Broglie estavam recebendo muita atenção. O artigo da Nature de Klein [21] sugeriu que a quinta dimensão é fechada e periódica, e que a identificação da carga elétrica com o movimento na quinta dimensão pode ser interpretada como ondas estacionárias, cuja distância percorrida por tal partícula antes de atingir sua posição inicial é dita como o tamanho da dimensão. Tal configuração se apresenta muito parecida com os elétrons ao redor de um núcleo no modelo de átomo de Bohr. Nesse contexto, o momento das dimensões extras é quantizado em unidades de  $R^{-1}$ , e a massa invariante de tais ondas estacionárias seria  $M_n = 2\pi n\hbar/cR$ . Esse conjunto de possíveis valores de massa é frequentemente chamado de torre KK; sendo  $R$  suficientemente pequeno, as dimensões só serão percebidas no regime de energias muito altas.

A teoria KK está presente em várias teorias. Por exemplo, as diversas versões das teorias de cordas e supercordas são, de fato, teorias de KK combinando princípios de quantização; na prática, existem versões de teoria de cordas de 10, 11 e 26 dimensões. Especificamente, na versão da teoria de supercordas, além da dimensão temporal e das três dimensões espaciais ordinárias, se conjectura que as dimensões adicionais poderiam ter uma topologia de variedade de Calabi-Yau de seis dimensões (isto contrasta com a topologia simples da teoria original de Kaluza na qual a dimensão adicional é um círculo:  $S^1$ ).

## 2.2 Sobre a ideia do éter

Na física, quando se fala sobre teorias do éter, a ideia central é a de propor a existência de um meio, uma substância ou campo que preenche o espaço como meio de transmissão para a propagação de forças eletromagnéticas ou gravitacionais.

Essa ideia já havia sido usada por Isaac Newton, onde ele sugere a existência de um éter no Terceiro Livro de Óptica (1<sup>a</sup> ed. 1704; 2<sup>a</sup> ed. 1718). Contudo, foi no século 19

que esse termo foi implementado de forma mais evidente, onde éter luminífero (ou éter), era um meio teorizado para a propagação da luz. James Clerk Maxwell desenvolveu um modelo para explicar fenômenos elétricos e magnéticos usando o éter, um modelo que levou ao que hoje é conhecido como equações de Maxwell e ao entendimento de que a luz é uma onda eletromagnética [22]. No entanto, uma série de experimentos cada vez mais complexos foram realizados no final dos anos 1800, como o experimento Michelson-Morley, em uma tentativa de detectar o movimento da Terra através do éter, o qual mostrou definitivamente a inexistência do éter. Apesar disso, há uma série de teorias de arrastamento do éter propostas que poderiam explicar o resultado nulo, mas eram mais complexas e tendiam a usar coeficientes de aparência arbitrária e suposições físicas.

O próprio Hendrik Lorentz, juntamente com George Francis FitzGerald, ofereceu dentro da estrutura da teoria do éter de Lorentz uma explicação de como o experimento de Michelson-Morley poderia ter falhado em detectar movimento através do éter. No entanto, a teoria inicial de Lorentz previu que o movimento através do éter criaria um efeito de birrefringência, o qual Rayleigh e Brace testaram e não conseguiram encontrar (Experimentos de Rayleigh e Brace). Todos esses resultados exigiram a aplicação completa da transformação de Lorentz por Lorentz e Joseph Larmor em 1904 [23][24][25][26]. Mais tarde, resumindo os resultados de Michelson, Rayleigh e outros, Hermann Weyl escreveria que o éter havia “se encaminhado para a terra das sombras em um esforço final para escapar da busca inquisitiva do físico”.

Além de possuir mais clareza conceitual, a teoria da relatividade especial de Albert Einstein de 1905 poderia explicar todos os resultados experimentais sem se referir a nenhum éter. Isso acabou levando a maioria dos físicos a concluir que a noção anterior de um éter luminífero não era um conceito útil. Assim, as teorias que usam um éter substancial caíram em desuso na física moderna e agora são substituídas por modelos mais abstratos.

Cabe aqui ressaltar algumas interpretações que não estão tão dentro dos padrões; como um primeiro exemplo, cita-se o caso em que Einstein às vezes usava a palavra éter para o campo gravitacional dentro da relatividade geral, embora a única semelhança desse conceito de éter relativístico com os modelos clássicos de éter reside na presença de propriedades físicas no espaço, que podem ser identificadas por meio da geodésica. Contudo, o uso que Einstein fez da palavra “éter” encontrou pouco apoio na comunidade científica e não desempenhou nenhum papel no desenvolvimento contínuo da física moderna. Além desse exemplo, há o caso em que a mecânica quântica pode ser usada para descrever o espaço-tempo como sendo não vazio em escalas extremamente pequenas, flutuando e gerando pares de partículas que aparecem e desaparecem com uma rapidez incrível. Neste caso foi sugerido por alguns como Paul Dirac [27] que este vácuo quântico pode ser o equivalente na física moderna a um tipo de éter particulado. No entanto, a hipótese do éter de Dirac foi motivada por sua insatisfação com a eletrodinâmica quântica e nunca

ganhou o apoio da comunidade científica convencional.

Nos dias atuais, devido a existência de razões para suspeitar que o vácuo na gravidade quântica pode determinar um referencial inercial preferido no nível microscópico, sendo que, se tal referencial existe, deve estar oculto de forma muito eficaz, foi feito a proposta do resgate da ideia de éter.

Nesse contexto, para que seja permitida a violação gravitacional de Lorentz sem abandonar a estrutura da Relatividade Geral (GR, General Relativity em inglês), o(s) campo(s) tensor(es) de fundo que quebram a simetria devem ser dinâmicos. Então, como uma teoria efetiva que tem exatamente esta característica, foi apresentada a chamada teoria de Einstein-æther (cuja abreviação usada é æ-theory) [28]. Além do campo tensor métrico do espaço-tempo  $g_{\mu\nu}$ , ela envolve um campo vetorial dinâmico unitário do tipo  $u^\mu$ . Como a métrica, e ao contrário de outros campos clássicos, o vetor unitário não pode desaparecer em qualquer lugar, então ele quebra a simetria de Lorentz local em um subgrupo de rotação. Ele define uma congruência de curvas semelhantes ao tempo que preenchem todo o espaço-tempo, como um fluido onipresente, e por isso foi apelidado de “éter”.

Esta teoria tem como motivação primária a suspeita da gravidade quântica conforme mencionada acima. Um objetivo secundário é desenvolver uma folha viável e razoavelmente natural com a qual comparar as observações gravitacionais, em uma era quando numerosas teorias alternativas da gravidade já foram descartadas ou severamente restringidas; e uma terceira fonte de interesse é o laboratório teórico que ela oferece para estudar a física invariante do difeomorfismo com efeitos de referenciais preferidos.

A ação envolvendo métrica e éter é altamente restringida pela invariância do difeomorfismo, localidade e a restrição da unidade sobre  $u^\mu$ . O único termo sem derivadas é a constante cosmológica, não há termos com uma derivada (exceto uma divergência total) e há cinco termos com duas derivadas,

$$S = -\frac{1}{16\pi G} \int \sqrt{-g} (R + K_{\sigma\rho}^{\mu\nu} \nabla_\mu u^\sigma \nabla_\nu u^\rho) d^4x. \quad (2.1)$$

Aqui  $R$  é o escalar de Ricci, e o tensor  $K_{\sigma\rho}^{\mu\nu}$  é definido por

$$K_{\sigma\rho}^{\mu\nu} = c_1 g^{\mu\nu} g_{\sigma\rho} + c_2 \delta_\sigma^\mu \delta_\rho^\nu + c_3 \delta_\rho^\mu \delta_\sigma^\nu + c_4 u^\mu u^\nu g_{\sigma\rho}, \quad (2.2)$$

onde os  $c_i$  são acoplamentos constantes adimensionais.

Como a relatividade geral, a æ-theory clássica pura definida por esta ação não tem escala. (A assinatura métrica é  $(+, -, -, -)$ , a velocidade da luz definida pela métrica  $g_{\mu\nu}$  é a unidade, e o éter é considerado adimensional.) O termo  $R_{\mu\nu} u^\mu u^\nu$  pode ser expresso como a diferença dos termos  $c_3$  e  $c_2$ , até uma derivada total, portanto, não é independente.

Em cálculos, a restrição da unidade tipo-tempo<sup>2</sup> no éter é geralmente imposta pela adição de um termo multiplicador de Lagrange  $\lambda(g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu - 1)$  à ação. O operador derivada covariante  $\nabla_\mu$  envolve derivadas da métrica através das componentes da conexão, e o vetor unitário não está desaparecendo em lugar nenhum, portanto, os termos quadráticos em  $\nabla_\mu u^\sigma$  são quadráticos nas derivadas de ambos éter e perturbações da métrica, de modo que, os modos métrico e éter são acoplados. As equações de campo são escritas em detalhes em muitas das referências, começando com a Ref. [29]. É digno de nota que o tensor inclui os termos da segunda derivada decorrentes da variação da métrica nas conexões. Na maioria dos trabalhos de fenomenologia até agora, foi assumido que o éter está alinhado em grandes escalas com o referencial inercial da radiação de fundo de microondas.

A questão da restrição ser não mais do que duas derivadas é motivada pelos preceitos padrão da teoria de campo efetiva [40]: derivadas mais altas seriam suprimidas por uma potência de uma escala pequena para cada derivada extra. O tamanho natural das constantes de acoplamento  $c_i$  depende da física desconhecida em altas energias. Se a escala de Planck for a única escala relevante, então os  $c_i$  são, naturalmente, todos da ordem de unidade. Se, por outro lado, houver uma escala ou escalas adicionais caracterizando a física que viola a simetria de Lorentz, então o  $c_i$  pode ser naturalmente menor e pode diferir um do outro em ordem de magnitude. É notável que embora o termo  $c_4$  na ação seja quártico no campo éter, ele faz uma contribuição quadrática para os termos cinéticos para perturbações métricas e éter quando expandido em torno de um background plano com um éter constante de norma unitária.

A teoria de Einstein-æther é semelhante às teorias do vetor-tensor gravitacional estudadas há muito tempo por Will e Nordvedt [31], mas com a diferença crucial de que o campo vetorial é restrito a ter uma norma unitária. Esta restrição elimina um termo cinético de sinal errado para o modo de alongamento de comprimento [32], portanto, dá à teoria uma chance de ser viável. Uma teoria equivalente usando o formalismo tétrade foi estudada pela primeira vez por Gasperini [33], e na forma acima foi introduzida por Jacobson e Mattingly [34]. Teorias de vetor-tensor gravitacional relacionadas são aquelas de Kostelecky e Samuel [35] que corresponde ao caso especial de tipo-Maxwell da æ-theory ( $c_3 = -c_1$ ,  $c_2 = c_4 = 0$ ), ambas com uma norma fixa e com uma simetria potencial de quebra para o vetor, de Gripaio [36] que tem todos os termos de duas derivadas e um potencial de quebra de simetria para o vetor, e as teorias de Einstein-æther generalizadas de Zlosnik, Ferreira e Starkman [37] e de Zhao [38], em que os outros termos cinéticos de (2.1) são substituídos por suas funções. Kanno e Soda [39] introduziram a dependência dos parâmetros de acoplamento em um campo escalar que tem sua própria dinâmica, e

---

<sup>2</sup>É necessário ressaltar que tal restrição não impede que seja considerado o campo éter como sendo um vetor tipo-espaço. Tal consideração é exatamente a que será feita mais adiante.



estudaram a cosmologia inflacionária para tal modelo. Outras teorias envolvendo campos escalares, além de um campo vetorial com uma ação do tipo-Maxwell para o vetor são TeVeS proposta por Bekenstein [40] e STVG introduzida por Moffat [41].

## 2.3 Compactação Kaluza-Klein na presença do campo éter

Quando se pensa no espaço-tempo com dimensões extras além das quatro usualmente consideradas (uma dimensão temporal e três espaciais), percebe-se que tais dimensões devem estar de alguma forma escondidas dentro de nós. Por um longo tempo, a única maneira conhecida para o estudo de dimensões extras foi, conforme citado acima, a teoria KK. Mais Recentemente, uma ideia que tem se tornado popular é a introduzida por Randall-Sundrum (RS) no fim dos anos 1990, onde o nosso Universo pode ser na verdade representado por branas curvas no espaço de de Sitter e Anti-de Sitter. Originalmente o sistema RS representaria um Universo com cinco dimensões onde o modelo padrão ficaria confinado em uma brana e os grávitons ficariam confinados na outra brana de massa maior, e neste quadro, as dimensões extras são difíceis de serem percebidas, devido, na escala de energia acessíveis, não ser possível chegar lá.

Embora a teoria KK seja uma forma de manter o estudo de dimensões extras sem lançar mão da ideia de branas, os resultados obtidos evidenciam a relação da magnitude das massas KK com o tamanho da dimensão extra compactada. Isso gera uma dificuldade, uma vez que experimentalmente as massas das torres KK sejam consideravelmente grandes, o que implica diretamente que o tamanho  $R$  da dimensão extra deva ser muito pequeno, tornando assim, impossível a detecção de tal dimensão. Isto acarreta a real necessidade de uma maneira de proporcionar um “relaxamento” da responsabilidade residida sobre  $R$ , o que seria permitido caso houvesse como envolver mais parâmetros de controle sobre tais massas.

É neste intento que reside a motivação de propor uma teoria efetiva surgida da união de duas teorias (teoria KK e  $\mathfrak{a}$ -theory, sendo nesta segunda agora considerado o campo éter tipo-espaço), promovendo assim a possibilidade da adição de um novo parâmetro para as massas KK, ou seja, podendo ser atribuído ao campo éter o controle do tamanho das massas devido a quinta dimensão. Minimizando o problema da impossibilidade da detecção de tal dimensão extra.

Uma vez feita essa união, é proporcionada uma forma de estudar os efeitos da Violação da Invariância de Lorentz LIV (sigla vinda do inglês Lorentz Invariance Violation), a qual é viabilizada efetuando a propagação de campos ao longo de direções ortogonais às quatro dimensões macroscópicas (isto é, direção das dimensões extras); e para tais

dimensões extras, é feita a adição de campos tensoriais que produzem efeitos LIV (neste caso, especificamente o campo tipo “éter”), com valores esperados alinhados ao longo das direções extras. Tal procedimento apresenta como consequência das interações do éter, modificações nas relações de dispersão para cada campo do SM, conduzindo (com escolhas apropriadas de parâmetros) à grandes energias associadas com o momento extradimensional. Tal modificação, no regime do ultravioleta, traz consigo a caracterização de anisotropia quando calculado o valor esperado do vácuo diferente de zero no regime do infravermelho. Fica evidente que neste processo, sendo aplicada a teoria KK para compactação da dimensão extra com o campo éter na respectiva direção, as massas KK embora em função do inverso do raio da dimensão compactada, têm a presença do campo éter. O que agora pode ser visto como mais um parâmetro de controle para as massas KK. Permitindo com que o tamanho da dimensão extra não seja obrigatoriamente pequeno, embora as massas KK ainda sejam grandes.

# Capítulo 3

## A dinâmica do campo éter

Neste capítulo o propósito é apresentar a estrutura do modelo éter como campo que pode permear as cinco dimensões, porém com a escolha certa, é efetuado a propagação deste campo ao longo de direções ortogonais às quatro dimensões usuais. Tal campo tensorial é responsável por controlar os efeitos da LIV, o qual tem valor esperado alinhado ao longo da quinta dimensão. Com isso, os efeitos da LIV são expressos como modificações nas relações de dispersão dos campos do SM, cujos resultados, além de interessantes para meio científico, é de grande relevância para a compreensão de fenômenos do universo.

### 3.1 O modelo dinâmico

Por definição, é considerado um espaço-tempo pentadimensional com coordenadas  $x^a = \{x^\mu, x^5\}$  e a métrica  $\text{diag}(+1, -1, -1, -1, -1)$ . Nesse quadro, a quinta dimensão é compactada sobre um círculo de raio  $R$ , e o éter é um pentavetor tipo espaço  $u^a$ , de modo a ser possível construir um tensor “intensidade de campo” dado como

$$V^{ab} = \nabla^a u^b - \nabla^b u^a. \quad (3.1)$$

Aqui é importante ressaltar que este campo não está relacionado ao pentavetor potencial eletromagnético  $A^a$ , ou seu tensor intensidade de campo  $F^{ab} = \nabla^a A^b - \nabla^b A^a$ , e nem a dinâmica de  $u^a$  se transforma como conexão com respeito ao grupo de transformação  $U(1)$ . Em vez disso, o campo éter será fixado para ter um norma constante, cuja ação é da seguinte forma:

$$S = S_u + \sum_i (S_{u\varphi_i} + S_{\varphi_i}), \quad (3.2)$$

ou seja<sup>1</sup>

$$S = M_* \int d^5x \sqrt{g} \left\{ -\frac{1}{4} V_{ab} V^{ab} - \lambda (u_a u^a + v^2) + \sum_i (\mathcal{L}_{u\varphi_i} + \mathcal{L}_{\varphi_i}) \right\}, \quad (3.3)$$

onde  $\varphi_i$  são os campos do SM, enquanto que  $M_*$  é um parâmetro de dimensionamento geral. É importante ressaltar que  $\lambda$  não deve ser confundido com um parâmetro fixado, pois aqui, o mesmo é um multiplicador de Lagrange impondo a seguinte restrição:

$$u^a u_a = -v^2. \quad (3.4)$$

Aqui foi convencionado que  $u^a$  tenha dimensão de massa.

Antes do cálculo da equação de movimento para o campo éter, serão desconsiderados os termos de interação dele com os campos do SM. Logo o estudo do campo éter é conduzido onde  $u^a$  e  $\phi_i$  são desacoplados. Então, usando a equação de Euler-Lagrange

$$\frac{\nabla \mathcal{L}}{\nabla u_b} - \nabla_a \left( \frac{\nabla \mathcal{L}}{\nabla (\nabla_a u_b)} \right) = 0, \quad (3.5)$$

com a densidade de Lagrangiana agora como

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} V_{ab} V^{ab} - \lambda (u_a u^a + v^2) + \sum_i \mathcal{L}_{\varphi_i}, \quad (3.6)$$

tem-se que

$$\frac{\nabla \mathcal{L}}{\nabla u_b} = -2\lambda u^b \quad (3.7)$$

assim como

$$\frac{\nabla \mathcal{L}}{\nabla (\nabla_a u_b)} = -V^{ab}. \quad (3.8)$$

Deste modo, substituindo as Eq's.(3.7) e (3.8) em (3.5), o resultado é

$$\nabla_a V^{ab} - 2\lambda u^b = 0. \quad (3.9)$$

Assim, multiplicando a equação acima por  $u_b$  e usando a restrição (3.4), obtém-se

$$\lambda = \frac{u_c \nabla_d V^{cd}}{2v^2}, \quad (3.10)$$

de modo que a equação de movimento para o campo éter é

$$\nabla_a V^{ab} - v^{-2} u^b u_c \nabla_d V^{cd} = 0. \quad (3.11)$$

---

<sup>1</sup>Aqui foi aplicada a forma da ação geral para  $D$ -dimensão  $S = \int d^D x \sqrt{(-1)^{D-1} g} \mathcal{L}$  para  $D = 5$ .

Analisando a equação acima, nota-se que qualquer configuração para o qual  $V^{ab} = 0$  em todo lugar, resolverá esta equação. Em particular, há uma solução background da forma

$$u^a = (0, 0, 0, 0, v), \quad (3.12)$$

tal que o campo éter aponta exclusivamente ao longo da direção extra.

## 3.2 Tensor energia-momento e compactação

Uma propriedade crucial do campo éter a ser verificada é a dependência de sua densidade de energia sobre a geometria do espaço-tempo. Uma vez que, o tensor energia-momento canônico para um espaço  $D$ -dimensional para  $D = 5$  é dado por<sup>2</sup>:

$$\mathcal{T}_{ab} = \frac{2}{\sqrt{g}} \frac{\delta(\sqrt{g}\mathcal{L}_u)}{\delta g^{ab}}, \quad (3.13)$$

onde

$$\frac{\delta(\sqrt{g}\mathcal{L}_u)}{\delta g^{ab}} = \frac{\delta\sqrt{g}}{\delta g^{ab}}\mathcal{L}_u + \sqrt{g}\frac{\delta\mathcal{L}_u}{\delta g^{ab}}. \quad (3.14)$$

Sendo<sup>3</sup>

$$\frac{\delta\sqrt{g}}{\delta g^{ab}} = -\frac{\sqrt{g}}{2}g_{ab}, \quad (3.15)$$

enquanto que

$$\frac{\delta\mathcal{L}_u}{\delta g^{ab}} = -\frac{1}{2}V_{ac}V_b{}^c - \frac{u_a u_b u_c}{2v^2}\nabla_d V^{cd}, \quad (3.16)$$

onde foi usado a Eq.(3.10), fazendo com que a partir de agora  $\mathcal{L}_u$  seja composto pelo termo  $-\frac{1}{4}V_{ab}V^{ab}$ . Assim, substituindo esses resultados em (3.14) e em seguida na Eq.(3.13), o tensor energia-momento canônico é dado como

$$\mathcal{T}_{ab} = -V_{ac}V_b{}^c + \frac{1}{4}g_{ab}V_{cd}V^{cd} - v^{-2}u_a u_b u_c \nabla_d V^{cd}. \quad (3.17)$$

Em particular, nota-se que  $\mathcal{T}_{ab}$  será nulo quando  $V_{ab}$  for nulo, e tal resultado acontece para uma configuração do campo éter sendo um background constante (3.12) no espaço plano. Assim, o valor esperado não nulo do éter não produz por si só qualquer densidade de energia. No contexto de uma dimensão extra, isto implica que o éter não fornecerá uma contribuição para o potencial efetivo do radion<sup>4</sup>. Então, a tarefa para estabilizar a dimensão extra deve ser deixada para outros mecanismos.

<sup>2</sup>ver detalhe em Apêndice C.

<sup>3</sup>Ver detalhes em Apêndice A.

<sup>4</sup>Campo que é uma função descrevendo um raio variável de acordo com as coordenadas do espaço-tempo

Por exemplo, quando o background não é Minkowski, mesmo o campo éter sendo “fixado”, pode resultar em um tensor energia-momento diferente de zero. É possível observar no trabalho [44] que um campo éter tipo-tempo produziria uma densidade de energia proporcional ao quadrado da constante de Hubble, enquanto que em [45] é visto que um campo éter tipo-espaço produz um tensor anisotrópico. Então, faz-se necessário verificar se um campo éter quiescente de outra forma orientado ao longo de uma dimensão extra, poderia criar uma densidade de energia quando a geometria quadridimensional é curva.

Nesse intuito será considerada uma geometria fatorizável com uma métrica quadridimensional arbitrária e um campo radion  $b(x^\sigma)$  parametrizando o tamanho da única dimensão extra, ou seja

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu - b(x)^2 dx_5^2, \quad (3.18)$$

onde  $x$  aqui representa as coordenadas quadridimensionais  $x^\sigma$ . Agora que em qualquer espaço-tempo, uma solução background possível seria

$$u^a = \left(0, 0, 0, 0, \frac{v}{b(x)}\right). \quad (3.19)$$

Aqui é direto verificar que a configuração (3.19) satisfaz a equação de movimento (3.11), assim como a restrição (3.4), embora com essa solução o tensor  $v^{ab}$  não desapareça, ou seja<sup>5</sup>

$$V_{\mu 5} = -V_{5\mu} = -v \nabla_\mu b. \quad (3.20)$$

Agora, reescrevendo a Eq.(3.17) usando a métrica<sup>6</sup> (3.18), é possível analisar as componentes do tensor energia-momento para o campo éter, obtém-se

$$\mathcal{T}_{\mu\nu}^{(u)} = \frac{v^2}{b^2} \left( \nabla_\mu b \nabla_\nu b - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \nabla_\sigma b \nabla^\sigma b \right); \quad (3.21)$$

$$\mathcal{T}_{\mu 5}^{(u)} = 0; \quad (3.22)$$

$$\mathcal{T}_{55}^{(u)} = -v^2 \left( b \nabla_\sigma \nabla^\sigma b + \frac{1}{2} \nabla_\sigma b \nabla^\sigma b \right). \quad (3.23)$$

A característica importante nos resultados acima, está no fato de  $\mathcal{T}_{ab}^{(u)}$  ser nulo quando  $\nabla_\mu b = 0$ . Então, enquanto a dimensão extra estiver estabilizada e o éter assumir a configuração (3.19), não haverá contribuições para o tensor energia-momento; em particular, nem a expansão do universo nem a geometria do espaço-tempo em torno de uma fonte gravitacional localizada serão afetadas.

<sup>5</sup>Estas verificações são feitas no Apêndice D

<sup>6</sup>A métrica contravariante nesse caso é  $g^{ab} = (g^{\mu\nu}, -b^{-2})$ .

# Capítulo 4

## Teoria do campo escalar modificada

Neste capítulo serão estudados os efeitos da LIV como consequência da interação do campo éter com a teoria do campo escalar. Nesse contexto de interação, o éter, deixa de ter dinâmica, o que implica que o mesmo torna-se um tipo de background (que controla os efeitos da LIV exclusivamente na direção da dimensão extra), especificamente, o éter é representado na forma (3.12). Este objetivo não só será aplicado ao campo escalar, como também para o setor dos campos de calibre. Assim, este mecanismo será usado para construir extensões da ação dos campos usuais.

Na construção de tais extensões, será considerada a permanência no espaço-tempo plano ( $g_{ab} = \eta_{ab}$ ) e ao mesmo tempo será imposta a existência de uma simetria  $\mathbb{Z}_2$ , tal que  $u^a \rightarrow -u^a$ . Além disso, os seguintes critérios serão adotados:

- (i) Derivadas sendo de segunda ordem (para evitar problemas que surgem em teorias com ordem maiores nas derivadas, como por exemplo a instabilidade);
- (ii) Ser invariante de calibre;
- (iii) Não ser um termo de superfície (por simplicidade será considerada que a teoria contenha tal característica).

A ação envolvendo um campo escalar real  $\phi$ , para acoplamento de baixas ordens derivativas é dada na forma,

$$S = \int d^5x \left\{ \frac{1}{2} \partial_a \phi \partial^a \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \frac{1}{2\mu_\phi^2} u^a u^b \partial_a \phi \partial_b \phi \right\}. \quad (4.1)$$

## 4.1 Compactação explícita no setor do campo escalar estendido

A partir daqui a finalidade é obter a ação (4.1) em quatro dimensões, a qual será obtida através da compactação explícita da dimensão extra em um círculo de raio  $R$ . Neste processo será considerada a solução (3.12), de modo que decompondo as derivadas em termos de  $\mu$  e  $5$ , a Eq.(4.1) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$S = \frac{1}{2\pi R} \int d^4x \int_0^{2\pi R} dx^5 \left\{ \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \frac{1}{2} (1 + \alpha_\phi^2) \partial_5 \phi \partial_5 \phi \right\}. \quad (4.2)$$

Sendo possível notar que a presença do éter, representado por  $\alpha_\phi = v/\mu_\phi$ , aumenta a contribuição devida a quinta dimensão, sendo esta descrita pelo último termo em (4.2).

Aqui, deve-se estar ciente que o campo escalar  $\phi$  depende de  $x^a$ . Seguindo o procedimento usual para compactação espontânea em [9], o campo escalar será reescrito nos harmônicos de Fourier, isto é

$$\phi(x^\mu, x^5) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi_{(n)}(x) e^{ik_5 x^5}, \quad (4.3)$$

de modo que a quantização do momento da dimensão extra compactada é dada como  $|k_5| = 2\pi n/L_5$ , cujo  $L_5 = 2\pi R$  é o comprimento da dimensão extra, tem-se que

$$|k_5| = \frac{n}{R}, \quad (4.4)$$

e a Eq.(4.3) torna-se

$$\phi(x^\mu, x^5) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi_{(n)}(x) e^{inx^5/R}. \quad (4.5)$$

Com a equação acima a ação (4.2) torna-se<sup>1</sup>

$$S = \frac{1}{2\pi R} \int d^4x \int_0^{2\pi R} dx^5 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{i(n-l)x^5/R} \left\{ \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_{(n)} \partial^\mu \phi_{(-l)} - \frac{1}{2} m^2 \phi_{(n)} \phi_{(-l)} + \right. \\ \left. - \frac{1}{2} (1 + \alpha_\phi^2) \frac{nl}{R^2} \phi_{(n)} \phi_{(-l)} \right\}, \quad (4.6)$$

de modo que da integral em  $x^5$  da exponencial o resultado será proporcional ao delta de

---

<sup>1</sup>Sabendo que  $\partial_\mu \phi(x^\mu, x^5) = \sum (\partial_\mu \phi_{(n)}(x)) e^{inx^5/R}$ , enquanto que  $\partial_5 \phi(x^\mu, x^5) = \sum \phi_{(n)}(x) \left(\frac{in}{R}\right) e^{inx^5/R}$



Kronecker, o qual será diferente de zero para  $l = n$ , assim<sup>2</sup>

$$S = \int d^4x \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2} \partial_{\mu} \phi_{(n)} \partial^{\mu} \phi_{(-n)} - \frac{1}{2} m^2 \phi_{(n)} \phi_{(-n)} - \frac{1}{2} (1 + \alpha_{\phi}^2) \frac{n^2}{R^2} \phi_{(n)} \phi_{(-n)} \right\}. \quad (4.7)$$

Neste momento será aberto o somatório, ou seja,

$$S = \int d^4x \left\{ \frac{1}{2} \partial_{\mu} \phi_{(0)} \partial^{\mu} \phi_{(0)} - \frac{1}{2} m^2 \phi_{(0)}^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{-1} \partial_{\mu} \phi_{(n)} \partial^{\mu} \phi_{(-n)} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \partial_{\mu} \phi_{(n)} \partial^{\mu} \phi_{(-n)} + \right. \\ \left. - \frac{1}{2} m^2 \sum_{n=-\infty}^{-1} \phi_{(n)} \phi_{(-n)} - \frac{1}{2} m^2 \sum_{n=1}^{\infty} \phi_{(n)} \phi_{(-n)} - \frac{1}{2} (1 + \alpha_{\phi}^2) \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{n^2}{R^2} \phi_{(n)} \phi_{(-n)} + \right. \\ \left. - \frac{1}{2} (1 + \alpha_{\phi}^2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{R^2} \phi_{(n)} \phi_{(-n)} \right\}, \quad (4.8)$$

de modo que ao fazer a troca  $n \rightarrow -n$  no terceiro, quarto e sexto termo da equação acima, o resultado será

$$S = \int d^4x \left\{ \frac{1}{2} \partial_{\mu} \phi_{(0)} \partial^{\mu} \phi_{(0)} - \frac{1}{2} m^2 \phi_{(0)}^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \partial_{\mu} \phi_{(n)} \partial^{\mu} \phi_{(-n)} - m^2 \phi_{(n)} \phi_{(-n)} - (1 + \alpha_{\phi}^2) \frac{n^2}{R^2} \phi_{(n)} \phi_{(-n)} \right] \right\}. \quad (4.9)$$

Desde que  $\phi(x^{\mu}, x^5)$  seja uma quantidade real, isso implica em<sup>3</sup>  $\phi_{(-n)} = \phi_{(n)}^*$ , assim a ação efetiva devida a compactação explícita da quinta dimensão com a adição do éter é

$$S = \int d^4x \left\{ \frac{1}{2} \partial_{\mu} \phi_{(0)} \partial^{\mu} \phi_{(0)} - \frac{1}{2} m^2 \phi_{(0)}^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \partial_{\mu} \phi_{(n)} \partial^{\mu} \phi_{(n)}^* - m^2 \phi_{(n)} \phi_{(n)}^* - (1 + \alpha_{\phi}^2) \frac{n^2}{R^2} \phi_{(n)} \phi_{(n)}^* \right] \right\}. \quad (4.10)$$

Analisando a Eq.(4.10), nota-se que a compactação explícita da dimensão extra com o campo éter totalmente em sua direção, conduz à uma ação constituída de uma parte que pode ser vista como o setor do campo escalar usual. Além disso, surge uma parte que apresenta os modos massivos KK para o campo escalar com incremento na massa não só devido a compactação, mas também em consequência da presença do éter.

Neste ponto a atenção será dada apenas a parte dos modos KK, ou seja,

$$\mathcal{S} = \int d^4x \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \partial_{\mu} \phi_{(n)} \partial^{\mu} \phi_{(n)}^* - m^2 \phi_{(n)} \phi_{(n)}^* - (1 + \alpha_{\phi}^2) \frac{n^2}{R^2} \phi_{(n)} \phi_{(n)}^* \right\}, \quad (4.11)$$

<sup>2</sup>Ver detalhes no Apêndice E

<sup>3</sup>Detalhes deste processo está no Apêndice F.

cuja densidade de Lagrangiana é dada como

$$\mathcal{L} = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \partial_{\mu} \phi_{(n)} \partial^{\mu} \phi_{(n)}^{*} - m^2 \phi_{(n)} \phi_{(n)}^{*} - (1 + \alpha_{\phi}^2) \frac{n^2}{R^2} \phi_{(n)} \phi_{(n)}^{*} \right\}. \quad (4.12)$$

Com o objetivo de obter a equação de movimento, será usada a equação de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{(n)}^{*}} - \partial_{\mu} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \phi_{(n)}^{*})} \right) = 0, \quad (4.13)$$

onde

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{(n)}^{*}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ -m^2 \phi_{(n)} - (1 + \alpha_{\phi}^2) \frac{n^2}{R^2} \phi_{(n)} \right], \quad (4.14)$$

enquanto que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \phi_{(n)}^{*})} = \sum_{n=1}^{\infty} \partial^{\mu} \phi_{(n)}. \quad (4.15)$$

Assim, substituindo as Eq's.(4.14) e (4.15) em (4.13), o resultado é a equação de movimento para o campo  $\phi_{(n)}$ , ou seja,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[ -\partial_{\mu} \partial^{\mu} - m^2 - (1 + \alpha_{\phi}^2) \frac{n^2}{R^2} \right] \phi_{(n)} = 0. \quad (4.16)$$

Evidenciando de forma enfática o que já era perceptível, as equações para  $\phi_{(n)}$  são desacopladas. Além de ser notável que para parâmetro devido o campo éter  $\alpha_{\phi} = 0$  o caso das massa KK usual é recuperado.

## 4.2 Análise da relação de dispersão

Com o objetivo de estudar quais os resultados da influência da presença do éter, o campo  $\phi_{(n)}$  será expandido em modos Fourier, ou seja

$$\phi_{(n)} = C_{(n)}(k) e^{ik_{\sigma} x^{\sigma}}, \quad (4.17)$$

deste modo a Eq.(4.16) torna-se

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[ -(-k_{\mu} k^{\mu}) - m^2 - (1 + \alpha_{\phi}^2) \right] \phi_{(n)} = 0, \quad (4.18)$$

e igualando a zero a parte entre colchetes é obtida a relação de dispersão associada a este modelo, cuja forma é

$$k_{\mu} k^{\mu} = m^2 + (1 + \alpha_{\phi}^2) \frac{n^2}{R^2}. \quad (4.19)$$

Com o cálculo realizado acima, através da Eq.(4.19) fica evidente o efeito do acoplamento do campo vetor tipo-espaço  $u^a$ . Uma vez que na teoria padrão de KK, com o procedimento de compactação da dimensão extra ocorre o aparecimento de uma torre de estados massas dadas por  $m_{KK}^2 = m^2 + (n/R)^2$ . Porém, agora com a adição do campo éter, os espaçamentos massivos entre os diferentes estados na torre KK são aprimorados da seguinte forma:

$$m_{AC}^2 = m^2 + (1 + \alpha_\phi^2) \frac{n^2}{R^2}, \quad (4.20)$$

onde  $m_{AC}$  é a massa devido a compactação do éter na dimensão extra.

Neste caso, o parâmetro  $\alpha_\phi$  pode ser interpretado como a razão do valor esperado do vácuo ( $vev$ ) diferente de zero do éter e a escala de massa  $\mu_\phi$  que caracteriza o acoplamento, podendo ser muito maior do que a unidade, dependendo da intensidade do efeito. Se o  $vev$  é da ordem de  $v \sim M_P$  (devido ser esperado que qualquer modelo com dimensão extra deva estar relacionado à teoria fundamental da gravitação quântica, na qual a escala típica é a massa de Plank) e o parâmetro de acoplamento seja  $\mu_\phi \sim \text{TeV}$ , a massa dos estados excitados é fortalecida por um fator de  $10^{15}$ . A dimensão extra compactada poderá ser maior do que  $R \sim 1\text{mm}$  e o estado  $n = 1$ , poderá ter uma massa da ordem de TeV, o que é compatível com as energias dos atuais aceleradores de partículas [5].

### 4.3 Tensor energia-momento

Ainda nesse contexto de interação do éter com o campo escalar, um passo importante é o de obter o tensor energia-momento, sendo possível fazer a análise de como este modelo afeta as propriedades relacionadas à energia e o momento. Assim, uma vez que, a interação está no domínio de espaço-tempo plano, o tensor energia-momento é canônico, o qual é obtido através do teorema de Noether para o campo escalar em cinco dimensões

$$T^{ab} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_a \phi)} \partial^b \phi - \eta^{ab} \mathcal{L}, \quad (4.21)$$

onde

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_a \phi)} = \partial^a \phi - \mu_\phi^{-2} u^a u^c \partial_c \phi, \quad (4.22)$$

sendo que aqui é necessário lembrar que a densidade de Lagrangiana na equação acima é dada como integrando da ação não compactada (4.1). Então com a substituição da Eq.(4.22) em (4.21), o tensor energia-momento canônico é dado por

$$T^{ab} = \partial^a \phi \partial^b \phi - \frac{1}{2} \eta^{ab} \partial_c \phi \partial^c \phi + \frac{1}{2} \eta^{ab} m^2 \phi^2 - \frac{1}{\mu_\phi^2} \left[ u^a u^c \partial_c \phi \partial^b \phi - \frac{1}{2} \eta^{ab} u^c u^d \partial_c \phi \partial_d \phi \right]. \quad (4.23)$$

É possível notar que este tensor não é completamente simétrico na troca dos índices  $a$  e  $b$ . Contudo, embora exista um procedimento para a simetrização, o mesmo não é eficaz para este caso<sup>4</sup>; uma vez que, é necessário ter equações de movimento completas para todos os campos envolvidos, o que não é o caso para  $u^a$ . Isso é uma consequência do negligenciamento dos termos de interação na ação (3.3), de maneira que, embora o éter tenha um comportamento de campo de fundo (responsável pela LIV), a equação de movimento para ele é incompleta por não conter os campos do SM interagindo<sup>5</sup>.

Esta análise feita foi importante para a compreensão de como as propriedades do tensor energia-momento foram afetadas, o que foi possível pelo fato de o campo escalar ser um campo de características mais simples. Assim, a partir destas conclusões, será possível uma melhor compreensão do que acontece para campos de maior complexidade, como por exemplo, os campos eletromagnético (sendo este um vetor) e o gravitacional (o qual trata-se de um tensor).

---

<sup>4</sup>Conforme pode ser visto no Apêndice G.

<sup>5</sup>Esta escolha para o campo éter também tem um efeito para o caso do tensor obtido através da variação da métrica, sendo este chamado de tensor energia-momento métrico. Embora neste caso o efeito é a não conservação do mesmo. Mais detalhes desta discussão são mostrados no Apêndice H.

# Capítulo 5

## Eletrodinâmica modificada

Neste capítulo será feito o estudo sobre quais os efeitos devido a interação do campo éter no setor do campo eletromagnético em cinco dimensões. Esse estudo partirá da ação de Maxwell com o éter acoplado (a qual será chamado de ação Maxwell-Éter) seguindo os mesmos critérios usados para a construção da ação efetiva do campo escalar. Sendo o éter, o campo responsável pelos efeitos da LIV, modificando as quantidades já bem estabelecidas, será tomado como ponto de partida a verificação de como esta interação mudará as equações de Maxwell.

### 5.1 O modelo e as equações de Maxwell modificada

Para a construção do modelo, será considerado um campo de calibre Abelian  $A^a$ , cujo tensor intensidade de campo associado é  $F^{ab}$ . A ação de Maxwell com acoplamento de baixas ordens para  $u^a$  é dada como

$$S = \int d^5x \left\{ -\frac{1}{4} F_{ab} F^{ab} + \frac{1}{2\mu_A^2} u^a u^b \eta^{cd} F_{ac} F_{bd} \right\}, \quad (5.1)$$

sendo esta ação invariante sob a transformação de calibre:  $\partial A^a = \partial^a \omega(x)$ .

Dada a equação de Euler-Lagrange para o campo eletromagnético

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_b} - \partial_a \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_a A_b)} \right) = 0, \quad (5.2)$$

com

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_b} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_a A_b)} = -F^{ab} + \mu_A^{-2} (u^a u_c F^{cb} - u^b u_c F^{ca}), \quad (5.3)$$

a equação de movimento para este modelo é

$$\partial_a F^{ab} = \mu_A^{-2} (u^a u_c \partial_a F^{cb} - u^b u_c \partial_a F^{ca}). \quad (5.4)$$

Através da decomposição da Eq.(5.4) é possível analisar como o éter modifica as equações de Maxwell. Para isso é necessário saber como é a forma matricial de  $F^{ab}$ , sendo que para o alcance de tal resultado, será usado as ideias apresentadas no trabalho [46].

Definindo o campo  $A^a = (A^0, A^i, A^5)$ , onde a componente zero é o potencial elétrico, as componentes  $i = 1, 2, 3$  formam o potencial vetor no espaço-tempo quadridimensional e a componente 5 é o potencial vetor da dimensão extra. Já o operador derivada é definida como  $\partial_a = (\partial_0, \partial_i, \partial_5) = (\partial_t, \nabla_i, \nabla_5)$ , de modo que com a utilização da métrica, nota-se que  $\partial^a = (\partial^0, \partial^i, \partial^5) = (\partial^t, -\nabla^i, -\nabla^5)$ . Desta forma, as componentes dos tensor  $F^{ab}$  são

$$F^{0i} = \partial^0 A^i - \partial^i A^0 = \frac{\partial A^i}{\partial t} + \nabla^i \phi = -E^i; \quad (5.5)$$

$$F^{ij} = \partial^i A^j - \partial^j A^i = -\epsilon^{ijk} B_k; \quad (5.6)$$

$$F^{05} = \partial^0 A^5 - \partial^5 A^0 = \frac{\partial A^5}{\partial t} + \nabla^5 \phi = -Q; \quad (5.7)$$

$$F^{i5} = \partial^i A^5 - \partial^5 A^i = -\nabla^i \cdot A^5 + \nabla^5 \cdot A^i = -G^i, \quad (5.8)$$

cuja representação matricial é

$$F^{ab} \doteq \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 & -Q \\ E^1 & 0 & -B^3 & B^2 & -G^1 \\ E^2 & B^3 & 0 & -B^1 & -G^2 \\ E^3 & -B^2 & B^1 & 0 & -G^3 \\ Q & G^1 & G^2 & G^3 & 0 \end{pmatrix},$$

com a matriz do tensor covariante sendo

$$F_{ab} \doteq \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 & Q \\ -E_1 & 0 & -B_3 & B_2 & -G_1 \\ -E_2 & B_3 & 0 & -B_1 & -G_2 \\ -E_3 & -B_2 & B_1 & 0 & -G_3 \\ -Q & G_1 & G_2 & G_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Então, decompondo a Eq.(5.4) para  $b = 0$ , usando a solução (3.12), o resultado é

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} + (1 + \alpha_A^2) \nabla_5 Q = 0, \quad (5.9)$$

que é a lei Gauss (na ausência de fonte devido espaço-tempo quadridimensional) para o

campo elétrico quadridimensional. Enquanto que para  $b = j$ , o resultado é

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + (1 + \alpha_A^2) \nabla_5 \vec{G} = 0, \quad (5.10)$$

onde este resultado expressa a lei de Ampère quadridimensional (também na ausência de fonte devido o espaço-tempo quadridimensional).

Nas duas equações apresentadas acima é possível observar que embora as duas equações sejam consideradas em um contexto de ausência das fontes quadridimensionais (densidade de carga e densidade de corrente), a presença da quinta dimensão implica no surgimento de uma fonte para as equações quadridimensionais inhomogêneas do eletromagnetismo. No entanto, a presença do campo éter como background na quinta dimensão, aumenta o valor dessa fonte por um fator dado como a razão do *vev* e a constante de acoplamento  $\mu_A$ , ou seja  $\alpha_A = v/\mu_A$ .

Um detalhe interessante está no resultado obtido considerando  $b = 5$ , pois embora o campo éter esteja presente, a equação obtida é

$$(1 + \alpha_A^2) \partial_\mu F^{\mu 5} = 0 \quad \implies \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{G} = -\frac{\partial Q}{\partial t}. \quad (5.11)$$

Relacionando apenas os campos da dimensão extra, sem a influência do éter. Caso similar acontece com as outras duas equações de Maxwell, ou seja, ocorre apenas a influência dos campos  $Q$  e  $\vec{G}$  advindos da dimensão extra. O interessante é que a Eq.(5.11) tem uma aparência semelhante a uma equação da continuidade entre densidade de carga e densidade de corrente.

## 5.2 Método de Compactação explícita

Aqui será feito o mesmo processo executado na seção 4.1, seguindo as mesmas considerações para a métrica e a solução de  $u^a$ . Então, com a compactação da dimensão extra em um círculo de raio  $R$ , a ação de Maxwell com o campo éter (5.1) é reescrita como

$$S = \frac{1}{2\pi R} \int d^4x \int_0^{2\pi R} dx^5 \left\{ -\frac{1}{4} F_{ab} F^{ab} + \frac{1}{2\mu_A^2} u^a u^b \eta^{cd} F_{ac} F_{bd} \right\}. \quad (5.12)$$

O tensor de Maxwell  $F^{ab}$  é definido em termos do penta-vetor potencial  $A^a$  pela relação usual

$$F^{ab} = \partial^a A^b - \partial^b A^a. \quad (5.13)$$

Assim, decompondo o penta-vetor  $A^a$  na parte quadridimensional e um campo escalar,

ou seja  $A^a = (A^\mu, \phi)$ , com  $\mu = 0, 1, 2$  e  $3$ . Assim, a ação (5.12) torna-se<sup>1</sup>

$$S = \frac{1}{2\pi R} \int d^4x \int_0^{2\pi R} dx^5 \left\{ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} (1 + \alpha_A^2) F_{5\mu} F^{5\mu} \right\}. \quad (5.14)$$

Então, reescrevendo a equação acima em termos do campo  $A^a$ , o resultado é

$$S = \frac{1}{2\pi R} \int d^4x \int_0^{2\pi R} dx^5 \left\{ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} (1 + \alpha_A^2) (\partial_\mu A_5 \partial^\mu A^5 + \partial_5 A_\mu \partial^5 A^\mu - 2\partial_\mu A_5 \partial^5 A^\mu) \right\}, \quad (5.15)$$

de modo que decompondo, obtém-se

$$S = \frac{1}{2\pi R} \int d^4x \int_0^{2\pi R} dx^5 \left\{ \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} (1 + \alpha_A^2) (\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \partial^5 A^\mu \partial_5 A_\mu) - (1 + \alpha_A^2) \partial^\mu \phi \partial^5 A_\mu \right\}. \quad (5.16)$$

É necessário tomar cuidado, pois o primeiro termo na equação acima não pode ser identificado com a densidade de lagrangiana de Maxwell quadridimensional, pois  $A^\mu$  depende de ambos  $x^\mu$  e  $x^5$ .

Seguindo o procedimento usual de compactação (espontânea), serão realizadas as expansões de  $A^\mu$  e  $\phi$  nos harmônicos de Fourier, isto é

$$A^\mu(x^\mu, x^5) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{(n)}^\mu(x) e^{inx^5/R} \quad (5.17)$$

e

$$\phi(x^\mu, x^5) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi_{(n)}(x) e^{inx^5/R}. \quad (5.18)$$

Portanto a ação (5.16) torna-se<sup>2</sup>

$$S = \frac{1}{2\pi R} \int d^4x \int_0^{2\pi R} dx^5 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{i(n-m)x^5/R} \left\{ -\frac{1}{4} F_{(n)}^{\mu\nu} F_{(-m)\mu\nu} + \frac{1}{2} (1 + \alpha_A^2) \left( \partial_\mu \phi_{(n)} \partial^\mu \phi_{(-m)} + \frac{nm}{R^2} A_{(n)}^\mu A_{(-m)\mu} \right) - \frac{im}{R} (1 + \alpha_A^2) A_{(-m)}^\mu \partial_\mu \phi_{(n)} \right\}. \quad (5.19)$$

De modo similar ao que aconteceu durante o procedimento de compactação explícita no setor do campo escalar, aqui a integral em  $x^5$  da exponencial dará um resultado pro-

<sup>1</sup>Sabendo que  $F_{ab} F^{ab} = F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + 2F_{\mu 5} F^{\mu 5}$ .

<sup>2</sup>Foi usado os resultados  $\partial_\mu A^\mu(x^\mu, x^5) = \sum (\partial_\mu A_{(n)}^\mu(x)) e^{inx^5/R}$ ,

$\partial_5 A^\mu(x^\mu, x^5) = \frac{i}{R} \sum n A_{(n)}^\mu(x) e^{inx^5/R}$  junto com as derivadas apresentadas na seção 4.1.



porcional ao delta de Kronecker, o qual será diferente de zero para  $m = n$ , então

$$S = \int d^4x \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ -\frac{1}{4} F_{(n)}^{\mu\nu} F_{(-n)\mu\nu} + (1 + \alpha_A^2) \left( \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_{(n)} \partial^\mu \phi_{(-n)} + \frac{n^2}{2R^2} A_{(n)}^\mu A_{(-n)\mu} + \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{in}{R} A_{(-n)}^\mu \partial_\mu \phi_{(n)} \right) \right\}. \quad (5.20)$$

Agora abrindo explicitamente o somatório, o resultado será

$$S = \int d^4x \left\{ -\frac{1}{4} F_{(0)}^{\mu\nu} F_{(0)\mu\nu} + \frac{1}{2} (1 + \alpha_A^2) \partial_\mu \phi_{(0)} \partial^\mu \phi_{(0)} + \right. \\ \left. -\frac{1}{4} \sum_{n=-\infty}^{-1} F_{(n)}^{\mu\nu} F_{(-n)\mu\nu} - \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} F_{(n)}^{\mu\nu} F_{(-n)\mu\nu} + \right. \\ \left. + (1 + \alpha_A^2) \left[ \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{-1} \partial^\mu \phi_{(n)} \partial_\mu \phi_{(-n)} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \partial^\mu \phi_{(n)} \partial_\mu \phi_{(-n)} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2R^2} \sum_{n=-\infty}^{-1} n^2 A_{(n)}^\mu A_{(-n)\mu} + \frac{1}{2R^2} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 A_{(n)}^\mu A_{(-n)\mu} + \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{i}{R} \sum_{n=-\infty}^{-1} n A_{(-n)}^\mu \partial_\mu \phi_{(n)} - \frac{i}{R} \sum_{n=1}^{\infty} n A_{(-n)}^\mu \partial_\mu \phi_{(n)} \right] \right\}, \quad (5.21)$$

onde ao trocar  $n \leftrightarrow -n$  no terceiro, quinto, sétimo e nono termo, obtém-se

$$S = \int d^4x \left\{ -\frac{1}{4} F_{(0)}^{\mu\nu} F_{(0)\mu\nu} + \frac{1}{2} (1 + \alpha_A^2) \partial_\mu \phi_{(0)} \partial^\mu \phi_{(0)} + \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ -\frac{1}{2} F_{(n)}^{\mu\nu} F_{(-n)\mu\nu} + (1 + \alpha_A^2) \left( \partial^\mu \phi_{(n)} \partial_\mu \phi_{(-n)} + \frac{n^2}{R^2} A_{(n)}^\mu A_{(-n)\mu} + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \frac{in}{R} A_{(n)}^\mu \partial_\mu \phi_{(-n)} - \frac{in}{R} A_{(-n)}^\mu \partial_\mu \phi_{(n)} \right) \right] \right\}. \quad (5.22)$$

Desde que  $A^a(x^\mu, x^5)$  seja uma quantidade real, implica em<sup>3</sup>  $A_{(-n)}^\mu = A_{(n)}^{*\mu}$  e  $\phi_{(-n)} = \phi_{(n)}^*$ , assim, a ação efetiva devido a compactação explícita da quinta dimensão com a adição

<sup>3</sup>Detalhes deste processo está no Apêndice F.

do éter é

$$S = \int d^4x \left\{ -\frac{1}{4} F_{(0)}^{\mu\nu} F_{(0)\mu\nu} + \frac{1}{2} (1 + \alpha_A^2) \partial_\mu \phi_{(0)} \partial^\mu \phi_{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ -\frac{1}{2} F_{(n)}^{\mu\nu} F_{(n)\mu\nu}^* + (1 + \alpha_A^2) \left( \partial^\mu \phi_{(n)} \partial_\mu \phi_{(n)}^* + \frac{n^2}{R^2} A_{(n)}^\mu A_{(n)\mu}^* + \frac{in}{R} A_{(n)}^\mu \partial_\mu \phi_{(n)}^* - \frac{in}{R} A_{(n)}^{*\mu} \partial_\mu \phi_{(n)} \right) \right] \right\}, \quad (5.23)$$

a qual poderá ser reescrita da seguinte forma:

$$S = \int d^4x \left\{ -\frac{1}{4} F_{(0)}^{\mu\nu} F_{(0)\mu\nu} + \frac{1}{2} (1 + \alpha_A^2) \partial_\mu \phi_{(0)} \partial^\mu \phi_{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ -\frac{1}{2} F_{(n)}^{\mu\nu} F_{(n)\mu\nu}^* + (1 + \alpha_A^2) \frac{n^2}{R^2} \left( A_{(n)}^\mu - \frac{iR}{n} \partial^\mu \phi_{(n)} \right) \left( A_{(n)\mu}^* + \frac{iR}{n} \partial_\mu \phi_{(n)}^* \right) \right] \right\}, \quad (5.24)$$

onde agora todos os campos são definidos no espaço-tempo quadridimensional.

Analisando este resultado, nota-se que o éter como background não afeta o termo do modo zero em quatro dimensões, correspondendo à teoria de Maxwell, mas reescala a parte cinética do setor escalar. Para  $n \neq 0$ , a ação efetiva (5.24) assume a forma da soma infinita das ações de Stueckelberg desacopladas para os campos complexos  $A_{(n)}^\mu$  e  $\phi_{(n)}$  [47].

Como é bem conhecido, esta teoria é invariante de calibre U(1) se  $A_{(n)}^\mu$  se transforma como a conexão usual e  $\phi_{(n)}$  está na representação afim, ou seja, sob U(1) eles se transformam como

$$A_{(n)}^\mu \rightarrow A_{(n)}^\mu + \partial^\mu \omega_{(n)} \quad \text{e} \quad \phi_{(n)} \rightarrow \phi_{(n)} - \frac{in}{R} \omega_{(n)}. \quad (5.25)$$

### 5.2.1 Setor de Proca: relação de dispersão modificada

Embora na seção 5.1 já tenha sido calculada a equação de movimento para uma ação em cinco dimensões não compactada, fica implícito que depois da compactação feita, a relação de dispersão associada será a mesma para os dois casos.

Como já de costume, é possível fixar o calibre  $\phi_{(n)} = 0$  na ação (5.24), de modo a ser obtido a ação para a família dos campos massivos de Proca não interagentes [48], dados por

$$S_P = \int d^4x \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ -\frac{1}{2} F_{(n)}^{\mu\nu} F_{(n)\mu\nu}^* + m_{KK(n)}^2 A_{(n)}^\mu A_{(n)\mu}^* \right\}, \quad (5.26)$$

onde  $m_{KK(n)}^2 = (1 + \alpha_A^2) \frac{n^2}{R^2}$ .

Agora para obter a equação de movimento, basta usar a equação de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}_P}{\partial A_{(n)\nu}^*} - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}_P}{\partial (\partial_\mu A_{(n)\nu}^*)} \right) = 0, \quad (5.27)$$

onde

$$\frac{\partial \mathcal{L}_P}{\partial A_{(n)\nu}^*} = \sum_{n=1}^{\infty} m_{(n)}^2 A_{(n)}^\nu, \quad (5.28)$$

enquanto que

$$\frac{\partial \mathcal{L}_P}{\partial (\partial_\mu A_{(n)\nu}^*)} = - \sum_{n=1}^{\infty} F_{(n)}^{\mu\nu}. \quad (5.29)$$

Logo, substituindo as equações (5.28) e (5.29) em (5.27), o resultado é a equação de movimento

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \partial_\mu F_{(n)}^{\mu\nu} + m_{(n)}^2 A_{(n)}^\nu \right) = 0. \quad (5.30)$$

Agora escrevendo em termos do campo  $A_{(n)}^\mu$ , tem-se

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \partial_\mu \partial^\mu A_{(n)}^\nu - \partial_\mu \partial^\nu A_{(n)}^\mu + m_{(n)}^2 A_{(n)}^\nu \right) = 0, \quad (5.31)$$

de modo que, usando o calibre de Lorentz  $\partial_\mu A_{(n)}^\mu = 0$  obtém-se

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \partial_\mu \partial^\mu + m_{(n)}^2 \right) A_{(n)}^\nu = 0. \quad (5.32)$$

Agora expandindo  $A_{(n)}^\nu$  em modos Fourier, ou seja,  $A_{(n)}^\nu = \epsilon_{(n)}^\nu(k) e^{ik_\alpha x^\alpha}$ , o resultado é

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( -k_\mu k^\mu + m_{(n)}^2 \right) \epsilon_{(n)}^\nu(k) e^{ik_\alpha x^\alpha} = 0. \quad (5.33)$$

Assim, uma vez que o campo  $A^\mu$  não pode ser igual a zero (que é uma solução trivial), a relação de dispersão modificada é dada como

$$k_\mu k^\mu - m_{(n)}^2 = 0, \quad (5.34)$$

ou seja

$$k_\mu k^\mu - (1 + \alpha_A^2) \frac{n^2}{R^2} = 0, \quad (5.35)$$

onde  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Logo as massas KK são aumentadas por um fator  $(1 + \alpha_A^2)$ , se comparadas com a compactação usual sem o éter como background.

Assim, decompondo em termos de  $k_\mu = (E, \vec{k})$ , a energia é dada como

$$E^2 = k^2 + (1 + \alpha_A^2) \frac{n^2}{R^2}. \quad (5.36)$$

onde  $k = |\vec{k}|$ .

É necessário observar que embora tenha sido fixado o calibre da parte KK da teoria (lembrando que a ação completa resultante, é uma soma de  $n = 0$  sendo a parte Maxwell/escalar e a parte para  $n \neq 0$  da Eq.(5.24)), ainda há a simetria residual  $U(1)$  sob a qual os modos KK para  $n \neq 0$  se transformam trivialmente<sup>4</sup>.

Uma vez que, o meio externo, devido a quinta dimensão compactada com a adição do campo éter, funciona como gerador de modos massivos, como uma aplicação interessante pode ser feita uma análise das características do meio reproduzido por este sistema. Tal verificação pode ser feita através da investigação da relação entre as velocidades de fase e de grupo.

Sendo a velocidade de grupo dada por

$$v_g = \frac{\partial E}{\partial k} = \frac{1}{\sqrt{1 + (1 + \alpha_A^2) \left(\frac{n}{kR}\right)^2}}, \quad (5.37)$$

enquanto que a velocidade de fase é

$$v_f = \frac{E}{k} = \sqrt{1 + (1 + \alpha_A^2) \left(\frac{n}{kR}\right)^2}, \quad (5.38)$$

de modo que, calculando a seguinte relação entre as velocidades:

$$\frac{v_f - v_g}{v_g} = (1 + \alpha_A^2) \left(\frac{n}{kR}\right)^2, \quad (5.39)$$

o qual concorda completamente com a clássica fórmula de Rayleigh  $\frac{v_f - v_g}{v_g} = -\frac{k}{v_g} \frac{\partial v_f}{\partial k}$ .

O ponto interessante neste resultado está no fato de que para qualquer valor de  $\alpha_A$ , implicará em  $v_f > v_g$ , significando que o meio é normal. Tal resultado é importante, pois garante que a informação não vai se propagar com velocidade maior que a velocidade da luz.

---

<sup>4</sup>Essa discussão também é feita na próxima seção.

## Capítulo 6

# Tensor energia-momento canônico

De modo similar ao caso do setor do campo escalar, é possível verificar as influências da interação do campo éter ao campo de calibre (campo eletromagnético). Assim, através do teorema de Noether é possível obter o tensor energia-momento canônico, isto é,

$$T^{ab} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_a A_c)} \partial^b A_c - \eta^{ab} \mathcal{L}, \quad (6.1)$$

de modo que, ao aplicar a densidade de lagrangiana (5.1),

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\ell f} F^{\ell f} + \frac{1}{2\mu_A^2} u^d u^e \eta^{\ell f} F_{d\ell} F_{ef},$$

obtém-se o seguinte resultado

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_a A_c)} = -F^{ac} + \mu_A^{-2} (u^a u^d F_d^c - u^c u^d F_d^a). \quad (6.2)$$

Com este resultado, o tensor energia momento canônico é dado por:

$$T^{ab} = -F_c^a F^{bc} + \mu_A^{-2} u_c u_d F^{ac} F^{bd} - \eta^{ab} \mathcal{L} + \mu_A^{-2} [u^a u^c F_{cd} \partial^b A^d - u_c u_d F^{ca} \partial^d A^b], \quad (6.3)$$

onde no processo de determinação foi usada a forma  $F^{bc} = \partial^b A^c - \partial^c A^b$ .

Neste resultado é possível notar que  $T^{ab}$  é composto por uma parte simétrica e uma parte não simétrica na troca de  $a \leftrightarrow b$ , isto é

$$T_{sim}^{ab} = -F_c^a F^{bc} + \mu_A^{-2} u_c u_d F^{ac} F^{bd} - \eta^{ab} \mathcal{L}, \quad (6.4)$$

e

$$T_{\tilde{sim}}^{ab} = \mu_A^{-2} [u^a u^c F_{cd} \partial^b A^d - u_c u_d F^{ca} \partial^d A^b]. \quad (6.5)$$

Aqui seria possível aplicar o método de simetrização, porém assim como foi visto no caso

do campo escalar, não será possível pelos mesmos motivos apresentados na seção 4.3.

Com o resultado (6.3) é possível verificar quais serão as influências da interação do campo éter no setor eletromagnético, o qual pode ser feito considerando a componente  $T^{00}$ , de modo que, seja verificada a modificação da densidade de energia. Assim, tem-se que

$$\varepsilon \equiv T^{00} = -F^0_c F^{0c} + \mu_A^{-2} u_c u_d F^{0c} F^{0d} - \eta^{00} \mathcal{L} + \mu_A^{-2} [u^0 u^c F_{cd} \partial^0 A^d - u_c u_d F^{c0} \partial^d A^0], \quad (6.6)$$

onde ao considerar a matriz de  $F^{ab}$  e  $F_{ab}$  apresentadas na seção 5.1, junto com a métrica plana em 5D e a solução (3.12), o resultado é dado como:

$$\varepsilon = \frac{1}{2} (|\vec{E}|^2 + |\vec{B}|^2) + \frac{1}{2} (1 + \alpha_A^2) (Q^2 + |\vec{G}|^2) + \alpha_A^2 Q \nabla^5 \phi. \quad (6.7)$$

Com este resultado é possível notar que, embora exista uma contribuição devido a dimensão extra, surge ainda um acréscimo como consequência da interação do campo éter; o qual devido a escolha do éter como background, surge com uma assimetria quando feito a comparação com a parte vinda dos campos quadridimensionais. O último termo da Eq.(6.7) apresenta a interação entre o potencial elétrico usual e um certo tipo de carga elétrica vinda da quinta dimensão, o que é de sumo interesse pra verificar sua contribuição na energia.

# Capítulo 7

## Propagador de Feynman: unitariedade

Em teoria quântica de campos, é possível obter informações do sistema analisando a equação de movimento do mesmo. No estudo de interações do sistema, como no caso simples, em que a equação de movimento interage com uma fonte externa, a equação de movimento sofre alterações. Essa interação é descrita via uma função de Green específica, conhecida como propagador. No caso do campo eletromagnético esta função é chamada de *propagador de Feynman*.

O propagador de Feynman  $\langle A_a, A_b \rangle$  é usualmente definido como o valor esperado do produto T-ordenado dos campos  $A_a A_b$ , ou seja

$$\langle 0 | T [A_a(x) A_b(y)] | 0 \rangle = i \Delta_{ab}(x - y). \quad (7.1)$$

Como ponto de partida para o cálculo desta quantidade, será considerada a ação  $S$  do modelo eletromagnético com éter, dada por:

$$S = \int d^5x \left\{ -\frac{1}{4} F_{ab} F^{ab} + \frac{1}{2\mu_A^2} u^a u^b \eta^{cd} F_{ac} F_{bd} - \frac{1}{2\xi} \partial_a A^a \partial_b A^b \right\}, \quad (7.2)$$

onde o último termo representa um termo de fixação de calibre que controla os graus de liberdade, enquanto  $\xi$  é o parâmetro de controle de calibre.

O objetivo aqui é reescrever a Eq.(7.2) na forma  $S = \int d^5x A_a \boxplus^{ab} A_b$ , na qual  $\boxplus^{ab}$  é um operador diferencial, tradicionalmente denominado *operador onda*. Tal objetivo é alcançado reescrevendo separadamente os termos constituintes da ação (7.2), onde ao ser mudado os índices “mudos” e descartado os termos de superfície, obtém-se para o primeiro termo

$$-\frac{1}{4} F_{ab} F^{ab} = \frac{1}{2} A_a [\eta^{ab} \square - \bar{\omega}^{ab}] A_b, \quad (7.3)$$

sendo que<sup>1</sup>

$$\square = \partial_c \partial^c, \quad (7.4)$$

$$\bar{\omega}^{ab} = \partial^a \partial^b. \quad (7.5)$$

Enquanto que o termo

$$\frac{1}{2\mu_A^2} u^a u^b \eta^{cd} F_{ac} F_{bd} = \frac{1}{2} A_a [\bar{\lambda} \bar{\Sigma}^{ab} - \square \Lambda^{ab} - \bar{\lambda}^2 \eta^{ab} + \bar{\lambda} \bar{\Sigma}^{ba}] A_b, \quad (7.6)$$

onde foram feitas as seguintes definições:

$$\bar{\Sigma}^{ab} = \frac{u^a}{\mu_A} \partial^b, \quad \Lambda^{ab} = \frac{u^a u^b}{\mu_A^2} \quad \text{e} \quad \bar{\lambda} = \frac{u^a}{\mu_A} \partial_a = \mu_A^{-1} (u \cdot \partial). \quad (7.7)$$

Por fim, o termo

$$-\frac{1}{2\xi} \partial_a A^a \partial_b A^b = \frac{1}{2\xi} A_a \bar{\omega}^{ab} A_b. \quad (7.8)$$

Com estes resultados em mãos, a Eq.(7.2) torna-se

$$S = \frac{1}{2} \int d^5 x A_a \boxplus^{ab} A_b, \quad (7.9)$$

onde o operador onda tem a seguinte forma:

$$\boxplus^{ab} = (\square - \bar{\lambda}^2) \eta^{ab} - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) \bar{\omega}^{ab} + \bar{\lambda} (\bar{\Sigma}^{ab} + \bar{\Sigma}^{ba}) - \square \Lambda^{ab}. \quad (7.10)$$

Como operador tensorial,  $\boxplus^{ab}$  possui uma representação matricial própria. Adianta-se que tal matriz exibe  $\det[\boxplus^{ab}] \neq 0$ , o que assegura a existência de sua inversa. Essa inversa é exatamente o propagador  $\langle A_b, A_d \rangle$  procurado. Então o intuito é determinar a matriz  $\Delta_{bd} = \langle A_b, A_d \rangle$  que satisfaz

$$\boxplus^{ab} \Delta_{bd}(x) = i \delta^a_d \delta^5(x). \quad (7.11)$$

Como parte do processo, a Eq.(7.11) é escrita no espaço dos momentos através da inversa da transformada de Fourier, onde as seguintes quantidades tomam a forma

$$\Delta_{bd}(x) = \int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} \Delta_{bd}(k) e^{ikx}, \quad (7.12)$$

enquanto que

$$\delta^5(x) = \int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} e^{ikx}, \quad (7.13)$$

---

<sup>1</sup>Tal definição foi feita para não causar confusão com a notação usada para o operador D'Alambertiano quadridimensional.



de modo que

$$\partial^a \partial^b \Delta_{bd}(x) = \int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} \Delta_{bd}(k) (-k^a k^b) e^{ikx}. \quad (7.14)$$

Assim a Eq.(7.11) torna-se

$$\int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} \left[ -(\mathbb{k}^2 - \lambda^2) \eta^{ab} + \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) \omega^{ab} - \lambda(\Sigma^{ab} + \Sigma^{ba}) + \mathbb{k}^2 \Lambda^{ab} \right] \times \\ \times \Delta_{bd}(k) e^{ikx} = i\delta^a_d \int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} e^{ikx}, \quad (7.15)$$

onde deve-se entender que (por motivos de simplificar a escrita de resultados posteriores),  $\mathbb{k}^2 = k_c k^c$ . Então, ao analisar a equação acima, conclui-se que

$$\left[ -(\mathbb{k}^2 - \lambda^2) \eta^{ab} + \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) \omega^{ab} - \lambda(\Sigma^{ab} + \Sigma^{ba}) + \mathbb{k}^2 \Lambda^{ab} \right] \Delta_{bd}(k) = i\delta^a_d, \quad (7.16)$$

onde, agora

$$\omega^{ab} = k^a k^b, \quad \Sigma^{ab} = \frac{u^a}{\mu_A} k^b \quad \text{e} \quad \lambda = \frac{u^a}{\mu_A} k_a = \mu_A^{-1} (u \cdot k). \quad (7.17)$$

Analisando a estrutura da Eq.(7.16), é possível propor o seguinte *ansatz* composto pelos operadores  $[\eta_{bd}, \omega_{bd}, \Sigma_{bd}, \Sigma_{db}, \Lambda_{bd}]$ :

$$\Delta_{bd}(k) = A\eta_{bd} + B\omega_{bd} + C\Sigma_{bd} + D\Sigma_{db} + E\Lambda_{bd}. \quad (7.18)$$

Então, substituindo (7.18) em (7.16), o resultado é uma equação que permite determinar os coeficientes  $A, B, C, D$  e  $E$ . Contudo, para executar este cálculo é necessário obter os resultados das contrações tensoriais que aparecerão em tal equação, para isso será apresentada abaixo uma tabela com a álgebra do set  $[\eta_{bd}, \omega_{bd}, \Sigma_{bd}, \Sigma_{db}, \Lambda_{bd}]$ :

	$\eta_{bd}$	$\omega_{bd}$	$\Sigma_{bd}$	$\Sigma_{db}$	$\Lambda_{bd}$
$\eta^{ab}$	$\delta^a_d$	$\omega^a_d$	$\Sigma^a_d$	$\Sigma^a_d$	$\Lambda^a_d$
$\omega^{ab}$	$\omega^a_d$	$\mathbb{k}^2 \omega^a_d$	$\lambda \omega^a_d$	$\mathbb{k}^2 \Sigma^a_d$	$\lambda \Sigma^a_d$
$\Sigma^{ab}$	$\Sigma^a_d$	$\mathbb{k}^2 \Sigma^a_d$	$\lambda \Sigma^a_d$	$\mathbb{k}^2 \Lambda^a_d$	$\lambda \Lambda^a_d$
$\Sigma^{ba}$	$\Sigma^a_d$	$\lambda \omega^a_d$	$\frac{u^2}{\mu_A^2} \omega^a_d$	$\lambda \Sigma^a_d$	$\frac{u^2}{\mu_A^2} \Sigma^a_d$
$\Lambda^{ab}$	$\Lambda^a_d$	$\lambda \Sigma^a_d$	$\frac{u^2}{\mu_A^2} \Sigma^a_d$	$\lambda \Lambda^a_d$	$\frac{u^2}{\mu_A^2} \Lambda^a_d$

Tabela 7.1: Contrações tensoriais.

Com isso, o resultado é a seguinte equação:

$$\begin{aligned}
& -A(\mathbb{k}^2 - \lambda^2)\delta_d^a + \left[ A\left(1 - \frac{1}{\xi}\right) - B\frac{\mathbb{k}^2}{\xi} + C\left(1 - \frac{1}{\xi} - \frac{u^2}{\mu_A^2}\right)\lambda \right] \omega_d^a + \\
& - \left[ A\lambda + C\left(1 - \frac{u^2}{\mu_A^2}\right)\mathbb{k}^2 \right] \Sigma_d^a - \left[ A\lambda + D\frac{\mathbb{k}^2}{\xi} - E\left(1 - \frac{1}{\xi} - \frac{u^2}{\mu_A^2}\right)\lambda \right] \Sigma_d^a + \\
& + \left[ A - E\left(1 - \frac{u^2}{\mu_A^2}\right) \right] \mathbb{k}^2 \Lambda_d^a = i\delta_d^a, \quad (7.19)
\end{aligned}$$

o que proporciona o seguinte sistema de equações:

$$-A(\mathbb{k}^2 - \lambda^2) = i; \quad (7.20)$$

$$A\left(1 - \frac{1}{\xi}\right) - B\frac{\mathbb{k}^2}{\xi} + C\left(1 - \frac{1}{\xi} - \frac{u^2}{\mu_A^2}\right)\lambda = 0; \quad (7.21)$$

$$A\lambda + C\left(1 - \frac{u^2}{\mu_A^2}\right)\mathbb{k}^2 = 0; \quad (7.22)$$

$$A\lambda + D\frac{\mathbb{k}^2}{\xi} - E\left(1 - \frac{1}{\xi} - \frac{u^2}{\mu_A^2}\right)\lambda = 0; \quad (7.23)$$

$$A - E\left(1 - \frac{u^2}{\mu_A^2}\right) = 0. \quad (7.24)$$

Assim, da Eq.(7.20), obtém-se

$$A = -\left(\frac{i}{\mathbb{k}^2 - \lambda^2}\right), \quad (7.25)$$

de modo que ao substituir em (7.22),o resultado é

$$C = \left(\frac{i}{\mathbb{k}^2 - \lambda^2}\right) \left(\frac{\lambda}{\mathbb{k}^2}\right) \left(1 - \frac{u^2}{\mu_A^2}\right)^{-1}. \quad (7.26)$$

Através da Eq.(7.24), é obtido

$$E = -\left(\frac{i}{\mathbb{k}^2 - \lambda^2}\right) \left(1 - \frac{u^2}{\mu_A^2}\right)^{-1} \quad (7.27)$$

Agora, substituindo as Eq's.(7.25) e (7.26) em (7.21), obtém-se

$$B = \left(\frac{i}{\mathbb{k}^2 - \lambda^2}\right) \left[ \frac{(1 - \xi)}{\mathbb{k}^2} - \frac{\lambda^2}{\mathbb{k}^4} \left( \left(1 - \frac{u^2}{\mu_A^2}\right)^{-1} - \xi \right) \right]. \quad (7.28)$$

Assim, por último, para obter o valor de  $D$ , basta substituir (7.25) e (7.27) na Eq.(7.23), de modo que

$$D = \left(\frac{i}{\mathbb{k}^2 - \lambda^2}\right) \left(\frac{\lambda}{\mathbb{k}^2}\right) \left(1 - \frac{u^2}{\mu_A^2}\right)^{-1}. \quad (7.29)$$

Finalmente, com esses resultados em mãos, substituindo em (7.18), o resultado é o propagador deste modelo, ou seja

$$\Delta_{ab}(k) = \frac{i}{\mathbb{D}} \left\{ -\eta_{ab} + \left[ \frac{(1-\xi)}{\mathbb{k}^2} - \frac{\lambda^2}{\mathbb{k}^4} \left( \left( 1 - \frac{u^2}{\mu_A^2} \right)^{-1} - \xi \right) \right] \omega_{ab} + \frac{\lambda}{\mathbb{k}^2} \left( 1 - \frac{u^2}{\mu_A^2} \right)^{-1} (\Sigma_{bd} + \Sigma_{db}) - \left( 1 - \frac{u^2}{\mu_A^2} \right)^{-1} \Lambda_{bd} \right\}, \quad (7.30)$$

onde

$$\mathbb{D} = \mathbb{k}^2 - \lambda^2 \quad (7.31)$$

é a relação de dispersão quando  $\mathbb{D} = 0$ .

Escrevendo o propagador de forma explícita, sua aparência é

$$\Delta_{ab}(k) = \frac{i}{k_c k^c - \mu_A^{-2} u^d u^f k_d k_f} \left\{ -\eta_{ab} + \left[ \frac{(1-\xi)}{k_\ell k^\ell} - \frac{(u^e k_e)^2}{\mu_A^2 (k_n k^n)^2} \left( \left( 1 - \frac{u^m u_m}{\mu_A^2} \right)^{-1} - \xi \right) \right] k_a k_b + \mu_a^{-2} \left( 1 - \frac{u^m u_m}{\mu_A^2} \right)^{-1} \left[ \frac{u^n k_n}{k_\ell k^\ell} (u_a k_b + u_b k_a) - u_a u_b \right] \right\}. \quad (7.32)$$

Com o resultado (7.32) é possível notar claramente como a presença do campo éter modifica o propagador. Tal propagador será usado em estudos futuros das propriedades do modelo.

## 7.1 Propagador saturado e unitariedade

Uma questão de grande relevância em uma teoria efetiva é saber se a mesma preserva a propriedade de unitariedade.

A unitariedade está relacionada a propriedade da matriz de espalhamento da teoria quântica de campos. Sendo que esta condição garante a hermiticidade, isto é, garante que os estados definidos no espaço de Hilbert possuam normas positivas. No caso de haver estados de norma negativa, a teoria é dita não unitária, e tem-se os chamados *modos fantasmas* (do inglês, *ghosts*).

A condição necessária, mas não suficiente<sup>2</sup> para verificar a unitariedade pode ser obtida através do propagador saturado. Esta técnica consiste em calcular, utilizando o propagador, onde o mesmo é saturado com correntes conservadas, tal que  $k_a J^a = 0$ , de

<sup>2</sup>Para garantir que esse modelo possui tal propriedade, mais estudos devem ser feitos. Porém, se o resultado da análise do propagador saturado aponta para existência de modos fantasmas, então esse modelo já demonstra sérios problemas de estabilidade.

modo que obtém-se

$$\text{PS} \equiv J^a \Delta_{ab} J^b, \quad (7.33)$$

ou seja

$$\text{PS} = \frac{i}{k_c k^c - \mu_A^{-2} u^c u^d k_c k_d} \left\{ -J_a J^a - \mu_a^{-2} \left( 1 - \frac{u^\ell u_\ell}{\mu_A^2} \right)^{-1} u_a u_b J^a J^b \right\}. \quad (7.34)$$

Assim a unitariedade deste modelo é assegurada se o resíduo do PS calculado em seus polos simples for sempre positivo (maior que zero) para os modos de propagação. Caso o resíduo do PS seja igual a zero, a teoria será não física, visto que não contribui em cálculos da matriz de espalhamentos em interações; e caso seja menor que zero, a mesma será não unitária, com aparecimento de fantasmas.

Partindo do background (3.12) junto com  $J^a = (J^0, J^1, J^2, J^3, J^5)$  e considerando  $k_1 = k_2 = k_3 = 0$ , de modo que  $J_5 = \frac{k_0 J_0}{k_5}$ , o seguinte resultado é obtido:

$$\text{PS} = \frac{i}{k_c k^c - \alpha_A^2 k_5^2} \left\{ -J_a J^a - \frac{\alpha_A^2 J_5^2}{(1 - \alpha_A^2)} \right\}. \quad (7.35)$$

Então, fazendo o denominador geral igual a zero, é obtido o polo, isto é

$$k_c k^c = m_+^2, \quad (7.36)$$

onde  $m_+^2 = \alpha_A^2 k_5^2$ . Assim, obtém-se

$$\text{PS} = \frac{-i}{k_c k^c - m_+^2} \left\{ J_a J^a + \frac{\alpha_A^2 J_5^2}{(1 - \alpha_A^2)} \right\}. \quad (7.37)$$

Uma vez que,  $m_+^2$  é um polo de ordem simples, o resíduo do propagador para este caso é dado por

$$\text{Res}[f] = \lim_{z \rightarrow p} (z - p) f(z). \quad (7.38)$$

Então, sendo  $z = k_c k^c$ , assim como  $p = m_+^2$  e  $f(z) = f(k_c k^c) = \text{PS}$ , obtém-se o seguinte resultado:

$$\begin{aligned} \text{Res}[\text{PS}]_{k_c k^c = m_+^2} &= \lim_{k_c k^c \rightarrow m_+^2} (k_c k^c - m_+^2) \left\{ \frac{-i}{k_c k^c - m_+^2} \left[ J_a J^a + \frac{\alpha_A^2 J_5^2}{(1 - \alpha_A^2)} \right] \right\} \\ &= \lim_{k_c k^c \rightarrow m_+^2} \left\{ -i \left[ J_a J^a + \frac{\alpha_A^2 J_5^2}{(1 - \alpha_A^2)} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (7.39)$$

de modo que

$$\begin{aligned} \text{Res[PS]}_{k_c k^c = m_+^2} &= -i \left[ J_0^2 - J_5^2 + \frac{\alpha_A^2 J_5^2}{(1 - \alpha_A^2)} - (J_1^2 + J_2^2 + J_3^2) \right] \\ &= i \left[ -J_0^2 + \left( 1 - \frac{\alpha_A^2}{(1 - \alpha_A^2)} \right) \frac{k_0^2 J_0^2}{k_5^2} + (J_1^2 + J_2^2 + J_3^2) \right], \end{aligned} \quad (7.40)$$

ou seja, finalmente é obtido que

$$\text{Res[PS]}_{k_c k^c = m_+^2} = i \left\{ \left[ \left( \frac{1 - 2\alpha_A^2}{1 - \alpha_A^2} \right) - 1 \right] J_0^2 + (J_1^2 + J_2^2 + J_3^2) \right\}. \quad (7.41)$$

É possível constatar que o resíduo dado pela Eq.(7.41) será positivo com a condição de que a contribuição do primeiro termo seja menor do que  $(J_1^2 + J_2^2 + J_3^2)$ , o que apontará para uma garantia da unitariedade deste modelo.

## Capítulo 8

# Correção quântica na QED<sub>5</sub> com compactação do éter

As correções quânticas têm sido um importante mecanismo para se estabelecer termos que controlam os efeitos da LIV em certas teorias tal como o Modelo Padrão Estendido (cuja abreviatura é SME, vinda do inglês Standard Model Extension).

Neste capítulo o principal objetivo é apresentar o modelo dentro do qual serão calculadas as correções radiativas para as massas KK dos fótons [dada pela relação de dispersão (5.36)]. Esse modelo é dado pelo éter que quebra a simetria de Lorentz na QED sem massa em cinco dimensões descrita pela seguinte ação efetiva:

$$S_{QED}^{(5)} = \int d^5x \left\{ i\bar{\psi}\gamma^a\partial_a\psi - \frac{i}{\mu_\psi^2}u_a u^b\bar{\psi}\gamma^a\partial_b\psi - e_5\bar{\psi}\gamma^a A_a\psi \right\}, \quad (8.1)$$

onde as componentes matrizes  $\gamma$  em 5D são  $\gamma^a = (\gamma^\mu, i\gamma^5)$ , sendo  $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ , tal que as matrizes  $\gamma^\mu$  (conhecidas como matrizes de Dirac) satisfazem a álgebra de Clifford  $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}$  e a assinatura métrica quadrimensional é  $\eta^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ .

Considerando a solução (3.12) a ação (8.1) toma a seguinte forma

$$S_{QED}^{(5)} = \int d^5x \left\{ i[\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi + i\bar{\psi}(1 + \alpha_\psi^2)\gamma^5\partial_5\psi] - e_5\bar{\psi}\gamma^a A_a\psi \right\}, \quad (8.2)$$

onde  $\alpha_\psi = v/\mu_\psi$ . Lembrando que a ação completa é composta pela soma de (8.2) e a ação da seção sobre compactação explícita, a saber a Eq.(5.24) (sendo usado calibre de Stueckelberg, resultando na Eq.(5.26)). Sendo a ação (8.2) invariante sob a transformação de calibre

$$\begin{aligned} \delta A_a &= \frac{1}{e_5}\partial_a\omega(x), \\ \delta\psi(x) &= -i\omega(x)\psi(x), \\ \delta\bar{\psi}(x) &= i\omega(x)\bar{\psi}(x), \end{aligned} \quad (8.3)$$

onde  $\partial_5\omega(x) = 0$ .

Esta simetria é compatível com a simetria de calibre residual U(1) de (5.24) depois de fixar o calibre de Stueckelberg, ou seja, enquanto os modos KK mais altos ( $n \neq 0$ ) de  $A_\mu$  e o único sobrevivente ( $n = 0$ ) modo de  $\phi \equiv A_5$  são os escalares sob esta simetria, o modo zero de  $A_\mu$  é o bóson de calibre usual U(1), e  $\psi$  pertence à representação fundamental.

Uma situação interessante está na possibilidade de ver que o efeito da interação com o background éter em (8.2), pode ser reescrita de forma com que este modelo se pareça com o cenário “sem éter”. Isso é conseguido definindo o conjunto das matrizes  $\gamma$  deformadas como:

$$\tilde{\gamma}^a = (\gamma^\mu, i(1 + \alpha_\psi^2)\gamma^5), \quad (8.4)$$

sendo que neste caso

$$\{\tilde{\gamma}^a, \tilde{\gamma}^b\} = 2g^{ab}, \quad (8.5)$$

com

$$g^{ab} = \text{diag}(1, -1, -1, -1, -(1 + \alpha_\psi^2)). \quad (8.6)$$

Então, a Eq.(8.2) torna-se

$$S_{QED}^{(5)} = \int d^5x \left\{ i\bar{\psi}\tilde{\gamma}^a\partial_a\psi - e_5\bar{\psi}\tilde{\gamma}^a A_a\psi \right\}, \quad (8.7)$$

de modo que, todo o efeito da interação éter-férmion é reduzido à diferença entre as escalas física e efetiva [amplificado pelo fator de  $(1 + \alpha_\psi^2)$ ] da quinta dimensão<sup>1</sup> e é levado em

<sup>1</sup>Este efeito está no espírito da geometria espectral, onde a geometria física é determinada por algum operador de Dirac relevante. Nesse sentido, o efeito do acoplamento ao éter é semelhante ao acoplamento da matéria à gravidade Horava-Lifshitz no regime de baixa energia, onde o reescalamento semelhante acontece efetivamente para toda a parte espacial da métrica e não apenas para uma direção [49][50][51].

conta exatamente pela modificação mínima do propagador fermiônico:

$$\tilde{S}(k) := \frac{i}{\tilde{\gamma}^a k_a}. \quad (8.8)$$

É claro que essa incompatibilidade de escala terá consequências não triviais após a compactação.

Cabe aqui, antes de prosseguir, observar que em (8.7) há dois tipos de matrizes  $\gamma$ : uma está inserida no propagador (8.8), enquanto que a outra é responsável pelo vértice da série de perturbações. Na verdade, é fácil perceber que a ação mínima (8.2) não é a mais geral. Pelo contrário, deve ser também incluído o termo  $e_u u_a u^b \bar{\psi} \gamma^a A_b \psi \equiv -i e_u v^2 \bar{\psi} \gamma^5 A_5 \psi$ , onde  $e_u$  aqui é outro parâmetro arbitrário. Contudo, este termo pode ser tratado exatamente da mesma maneira que acima, definindo o segundo conjunto de matrizes deformadas, ou seja,

$$S_{QED}^{(5)} = \int d^5 x \left\{ i \bar{\psi} \tilde{\gamma}^a \partial_a \psi - e_5 \bar{\psi} \tilde{\gamma}^a A_a \psi \right\}, \quad (8.9)$$

onde agora  $\tilde{\gamma}^a = (\gamma^\mu, i(1 + e_u/e_5)\gamma^5)$ . Portanto, o resultado será novamente como em (8.7), mas com um vértice modificado. Essa modificação terá um efeito no modo escalar,  $n = 0$ , e  $\phi \equiv A_5$  (lembrando que todos os modos superiores de  $A_5$  foram “engolidos” pelo calibre de Stueckelberg).

Dentro do modelo, tal qual acabou de ser definido, buscar-se-á estudar as correções às massas KK dos fótons induzidas pela interação com o setor fermiônico. Essas correções virão da parte do tensor de polarização do vácuo,  $i\Pi^{ab}$ , proporcional à métrica. O interesse será focado nas correções para os modos KK vetoriais, ou seja, dados por<sup>2</sup>  $i\Pi^{\mu\nu}$  (Sendo assim não importa quais das matrizes  $\gamma$  entram no vértice, uma vez que  $\tilde{\gamma}^\mu \equiv \tilde{\gamma}^\mu \equiv \gamma^\mu$ ).

A primeira contribuição não trivial para o tensor  $i\Pi^{\mu\nu}$  vem do diagrama apresentado na Fig. 8.1. Para a conveniência dos cálculos futuros, a partir de agora serão adotadas as seguintes notações:  $k, p$ , etc com índices (ou sem) serão usados para denotar momentos quadridimensionais, enquanto que para os momentos na quinta direção o índice 5 será usado explicitamente.

---

<sup>2</sup>Sendo que a contribuição para a massa KK do modo zero escalar virá de  $i\Pi^{55}$  e pode ser calculada de forma completamente análoga.



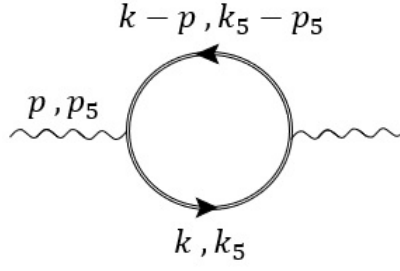


Figura 8.1: Contribuição no nível de um-loop para o tensor polarização.

Para calcular a contribuição do diagrama na Fig. 8.1, serão usadas as regras padrão de Feynman com a única exceção de que deve-se considerar o propagador fermiônico sem massa modificado (8.8), ou seja,

$$\begin{array}{c} \longrightarrow \\ \longrightarrow \end{array} \quad \tilde{S}(k) = \frac{i}{k_a \tilde{\gamma}^a} ; \quad (8.10a)$$

$$\begin{array}{c} \text{~~~~~} \\ \text{~~~~~} \\ \longrightarrow \end{array} \quad V(e_5) = -ie_5 \gamma^a . \quad (8.10b)$$

Então, nesta ordem, a parte quadridimensional do tensor polarização do vácuo de fótons é dada por (como de costume, cada loop fechado de férmions leva a um fator  $(-1)$  e ainda não há compactação),

$$i\Pi^{\mu\nu} = - \int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} \text{tr} [(-ie_5 \gamma^\mu) \tilde{S}(k) (-ie_5 \gamma^\nu) \tilde{S}(k-p)], \quad (8.11)$$

ou de forma mais explícita

$$i\Pi^{\mu\nu} = -e_5 \int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} \text{tr} \left[ (-i\gamma^\mu) \frac{i}{\not{k} + i(1 + \alpha_\psi^2) \gamma^5 k_5} (-i\gamma^\nu) \frac{i}{(\not{k} - \not{p}) + i(1 + \alpha_\psi^2) \gamma^5 (k_5 - p_5)} \right]. \quad (8.12)$$

A compactação em um círculo do raio  $R$  ao longo da quinta direção é normalmente levada em consideração passando da integral sobre  $k_5$  para a soma sobre  $k_5 = \frac{m}{R}$ , sendo  $m \in \mathbb{Z}$ , ou seja

$$\int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} \rightarrow \frac{1}{2\pi R} \sum_{k_5} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4}, \quad (8.13)$$

de modo que a expressão para a polarização no caso compactado torna-se [após definir a

carga elétrica quadridimensional efetiva  $e^2 = e_5^2/(2\pi R)$

$$i\Pi^{\mu\nu} = -e^2 \sum_{k_5} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\text{tr}[\gamma^\mu (\not{k} + i(1 + \alpha_\psi^2)\gamma^5 k_5) \gamma^\nu (\not{k} - \not{p} + i(1 + \alpha_\psi^2)\gamma^5 (k_5 - p_5))]}{(k^2 - (1 + \alpha_\psi^2)^2 k_5^2) [(k - p)^2 - (1 + \alpha_\psi^2)^2 (k_5 - p_5)^2]}.$$
(8.14)

Antes de calcular essa contribuição de um-loop para a polarização do vácuo (o que será feito na próxima seção), é útil comparar (8.14) ao caso sem o background éter violando a simetria de Lorentz, discutido em [7].

Em primeiro lugar, é evidente que em ambos os casos o diagrama correspondente é divergente e esta divergência é tratada da mesma maneira, a saber pela subtração do resultado não compactado. Isso é feito por meio da fórmula da soma de Poisson, que essencialmente negocia os números de voltas e números de KK. Tal procedimento será explicado com mais detalhes na próxima seção.

É notável que aqui há duas diferenças óbvias com o caso sem éter: (i) a relação de dispersão modificada (5.36) para os fótons KK sobre a casca, e (ii) o propagador fermiônico modificado (8.8) [que é, obviamente, a consequência da modificação da relação de dispersão análoga à (5.36), mas agora para o setor de férmions]. Mais adiante será visto que, enquanto o primeiro leva a algumas complicações técnicas nos cálculos, o último (combinado com o primeiro) tem uma consequência física bastante interessante, relacionando as constantes de acoplamento aparentemente independentes  $\alpha_A$  e  $\alpha_\psi$ .

### 8.0.1 Contribuição induzida pela compactação do éter

A partir daqui o objetivo é apresentar os resultados dos cálculos para correções de um-loop por meio da prescrição de subtração e em seguida é aplicado os resultados obtidos para encontrar as correções para as massas KK dos fótons.

Conforme foi mencionado anteriormente, para tornar a expressão (8.14) finita, basta subtrair dela o resultado não compactado (8.12) [7]. Este procedimento tem um significado físico muito claro (e normalmente usado na teoria quântica de campos em espaços curvos). Uma vez que, a divergência é devido ao mau comportamento do diagrama de ultra-violeta, isto deve ser exatamente o mesmo que no caso não compactado (a física de ultra-violeta faz com que não “se saiba” que o espaço é compacto em uma direção). Na prática, isso é feito reescrevendo a soma KK na Eq.(8.14) em termos dos modos de voltas

usando a fórmula de soma de Poisson<sup>3</sup> [7]

$$\frac{1}{2\pi R} \sum_{m=-\infty}^{\infty} F(m/R) \rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(2\pi Rn), \quad (8.15)$$

onde as funções  $f(x)$  e  $F(k)$  são relacionadas pela transformada de Fourier

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}\{F(k)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} F(k) e^{ikx}, \quad (8.16)$$

e descartar o termo correspondente ao número de enrolamento zero. (Aqui,  $m$  corresponde ao número KK, enquanto  $n$  denota o número de voltas.) Pode-se pensar nisso como descartando a contribuição, que não percebe a compactação da dimensão extra. Realmente, a contribuição de  $n = 0$  para a soma é idêntica à integral sobre a dimensão extra não compactada:

$$f(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_5}{2\pi} F(k_5). \quad (8.17)$$

Logo, é óbvio que, desta forma, a prescrição de subtração simplesmente remove o termo divergente  $n = 0$ , enquanto que os demais termos da soma, ou seja,  $n \neq 0$ , são exatamente os que guardam as informações sobre a quinta dimensão compacta. Como será visto explicitamente a seguir, eles são todos finitos e a soma é convergente.

Antes de aplicar a prescrição de subtração descrita para o respectivo caso, serão realizadas primeiro as manipulações padrão com a Eq.(8.14). Sendo assim, calculando o traço sobre os índices espinoriais e usando a parametrização de Feynman

$$\frac{1}{A^p B^q} = \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} \int_0^1 dx \frac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}}{[Ax + B(1-x)]^{p+q}} \quad \text{para todo } A \text{ e } B, \quad (8.18)$$

sendo  $p = q = 1$  para o caso de (8.14), enquanto que  $A = (k-p)^2 - (1 + \alpha_\psi^2)^2 (k_5 - p_5)^2$  e  $B = k^2 - (1 + \alpha_\psi^2)^2 k_5^2$ . O resultado do traço é dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{N}^{\mu\nu} &:= \text{tr}[\gamma^\mu (\not{k} + i(1 + \alpha_\psi^2)\gamma^5 k_5) \gamma^\nu (\not{k} - \not{p} + i(1 + \alpha_\psi^2)\gamma^5 (k_5 - p_5))] \\ &:= 4[k^\mu(k^\nu - p^\nu) + k^\nu(k^\mu - p^\mu) - \eta^{\mu\nu} k \cdot (k - p) + \eta^{\mu\nu} (1 + \alpha_\psi^2)^2 k_5 (k_5 - p_5)]. \end{aligned} \quad (8.19)$$

Então (8.14) torna-se

$$i\Pi^{\mu\nu} = -e^2 \int_0^1 dx \sum_{k_5} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\tilde{\mathcal{N}}^{\mu\nu}}{[k^2 - (1 + \alpha_\psi^2)^2 k_5'^2 + x(1-x)(p^2 - (1 + \alpha_\psi^2)^2 p_5^2)]^2}, \quad (8.20)$$

<sup>3</sup>Ver [52] para a discussão do método de regularização para teorias de campo quântico em espaços-tempos com dimensões extras compactadas não contando com a fórmula de soma de Poisson.

onde, no processo foi definido  $k'^2 := k_5^2 - p_5 x$ , além de  $\tilde{\mathcal{N}}^{\mu\nu} = \mathcal{N}^{\mu\nu} \Big|_{k^\mu \rightarrow k^\mu + p^\mu x}$ .

Nesta fórmula é necessário estar ciente de que  $p^2$  é um momento 4D do fóton sobre a casca KK correspondente a  $p_5 = l/R$ , com  $l \in \mathbb{Z}$ .

Para essa ordem de aproximação, é possível usar a condição sobre a casca de ordem zero (5.36), ou seja,  $p^2 = (1 + \alpha_A^2)p_5^2$ . Conectando isso em (8.20), descartando os termos de ordem ímpar em  $k^\mu$  e trocando  $k^\mu k^\nu$  por  $\frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}k^2$  (devido às simetrias óbvias da integral) e, finalmente, reescalando todos os momentos por  $R$  de modo que tornem-se números adimensionais (agora,  $p_5 = l$  e  $k'_5 = m - lx$ , com  $l, m \in \mathbb{Z}$ ) obtém-se

$$i\Pi^{\mu\nu} = -\frac{4e^2}{R^2} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_0^1 dx \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left\{ \eta^{\mu\nu} \left[ -\frac{k^2}{2} + x(1-x)(1 + \alpha_A^2 - (1 + \alpha_\psi^2)^2)p_5^2 + (2x-1)(1 + \alpha_\psi^2)^2 p_5 k'_5 + (1 + \alpha_\psi^2)^2 k'_5 \right] - 2x(1-x)p^\mu p^\nu \right\} \times \frac{1}{[k^2 - (1 + \alpha_\psi^2)^2 k_5'^2 + x(1-x)(1 + \alpha_A^2 - (1 + \alpha_\psi^2)^2)p_5^2]^2}. \quad (8.21)$$

Antes de dar prosseguimento aos cálculos, é de grande proveito fazer uma breve análise na expressão obtida. Em primeiro lugar, como uma verificação trivial, verifica-se facilmente que para  $\alpha_A = \alpha_\psi = 0$  tem-se a expressão correta para o caso sem éter em [7]. Porém, para o valor geral das constantes de acoplamento, há um recurso muito novo. De fato, enquanto o fator de  $(1 + \alpha_\psi^2)^2$  na frente de  $k_5'^2$  no denominador é apenas uma consequência da relação de dispersão fermiônica modificada acima mencionada, o fator de  $(1 + \alpha_A^2 - (1 + \alpha_\psi^2)^2)$  na frente de  $p_5^2$  é muito mais interessante. Isso é devido o fato de  $x(1-x)$  não ser negativo para todo  $x \in [0, 1]$ , de modo que o sinal de  $x(1-x)(1 + \alpha_A^2 - (1 + \alpha_\psi^2)^2)p_5^2$  depende apenas do sinal de  $(1 + \alpha_A^2 - (1 + \alpha_\psi^2)^2)$ . Nesse caso é possível perceber que, se for positivo, pode-se sempre encontrar um momento KK  $p_5$  alto o suficiente, de modo que esse termo dominaria  $(1 + \alpha_\psi^2)^2(k_5 - p_5 x)^2$  para qualquer  $k_5^2$  fixo e algum  $x$ . O que conduziria a um polo imaginário em (8.21) sinalizando sobre problemas com a unitariedade. Portanto, deve-se concluir que a teoria tem um *limite unitário* nas constantes de acoplamento<sup>4</sup>:

$$(1 + \alpha_\psi^2)^2 \geq 1 + \alpha_A^2. \quad (8.22)$$

A partir de agora, para garantir a unitariedade de um-loop, será assumido que (8.22) é satisfeita. (Claro, no caso sem éter, esta é satisfeita trivialmente.)

É bem sabido que as correções para as massas KK dos fótons virão da parte de (8.21) proporcional à métrica,  $\eta^{\mu\nu}\Pi_\eta$ . Assim após a rotação Wick usual,  $k_0 \rightarrow ik_0$ , de

<sup>4</sup>É claro, isso pode ser visto diretamente em (8.14): se  $(1 + \alpha_\psi^2)^2 < 1 + \alpha_A^2$  então  $\tilde{S}(k-p)$  tem um polo imaginário para qualquer  $k_5$  fixo e  $p_5$  alto o suficiente. Isso também mostra que o limite unitário não depende do procedimento de subtração.

modo que  $dk_0 \rightarrow idk_0$ , implicando em  $k^2 \rightarrow -k_E^2$ , o termo responsável pela correção da massa é

$$\Pi_\eta = -\frac{4e^2\Lambda_\psi^2}{R^2} \sum_m \int_0^1 dx \int \frac{d^4\bar{k}_E}{(2\pi)^4} \left\{ \frac{\frac{\bar{k}_E^2}{2} - x(1-x)\Lambda^2 p_5^2 + (2x-1)p_5 k_5' + k_5'^2}{[\bar{k}_E^2 + k_5'^2 + x(1-x)\Lambda^2 p_5^2]^2} \right\}, \quad (8.23)$$

onde foi usado a notação  $\bar{k}_E = \bar{k}_E/\Lambda_\psi$  com  $\Lambda_\psi := 1 + \alpha_\psi^2$  e foi introduzido a constante de acoplamento efetiva,

$$\Lambda^2 := -\frac{(1 + \alpha_A^2 - \Lambda_\psi^2)}{\Lambda_\psi^2}. \quad (8.24)$$

É claro que todo o efeito de  $\Lambda_\psi$  é reduzido à modificação multiplicativa da carga elétrica, enquanto  $\Lambda$  realmente controla como as correções quânticas se desviam do caso sem éter. É notável que o limite unitário (8.22) é importante para garantir que  $\Lambda^2$  não seja negativo. Além do mais, é fácil ver que  $\Lambda^2 \in [0, 1]$ .

Com ajuda da fórmula

$$\frac{1}{A^r} = \frac{1}{(r-1)!} \int_0^\infty d\ell \ell^{r-1} e^{-A\ell}, \quad (8.25)$$

a Eq.(8.23) pode ser transformada na forma que permite a integração sobre  $\bar{k}_E$ , de modo que o resultado é da seguinte forma (depois da mudança de variável  $\ell = 1/t$ )<sup>5</sup>

$$\Pi_\eta = -\frac{e^2\Lambda_\psi^2}{4\pi^2 R^2} \sum_m \int_0^1 dx \int_0^\infty dt \left\{ 1 + \frac{(2x-1)p_5 k_5'}{t} - \frac{x(1-x)\Lambda^2 p_5^2}{t} + \frac{k_5'^2}{t} \right\} e^{-[k_5'^2 + x(1-x)\Lambda^2 p_5^2]/t}. \quad (8.26)$$

Neste ponto, tem-se em mãos todas as ferramentas para finalmente aplicar a fórmula da soma de Poisson (8.15). Para isso, é necessário calcular a transformação inversa de Fourier do integrando em (8.26) em relação a  $k_5$ . Neste caso, as integrais de Fourier relevantes são padrão e são fornecidos por

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}\{e^{-[k_5^2 + x(1-x)\Lambda^2 p_5^2]/t}\} &= \sqrt{\frac{t}{4\pi}} e^{-x(1-x)\Lambda^2 p_5^2/t} e^{-\frac{y^2 t}{4}}; \\ \mathcal{F}^{-1}\{k_5 e^{-[k_5^2 + x(1-x)\Lambda^2 p_5^2]/t}\} &= \left(\frac{iyt}{2}\right) \sqrt{\frac{t}{4\pi}} e^{-x(1-x)\Lambda^2 p_5^2/t} e^{-\frac{y^2 t}{4}}; \\ \mathcal{F}^{-1}\{k_5^2 e^{-[k_5^2 + x(1-x)\Lambda^2 p_5^2]/t}\} &= \left(\frac{t}{2} - \frac{t^2 y^2}{4}\right) \sqrt{\frac{t}{4\pi}} e^{-x(1-x)\Lambda^2 p_5^2/t} e^{-\frac{y^2 t}{4}}. \end{aligned} \quad (8.27)$$

<sup>5</sup>É evidente que o limite unitário (8.22) garante que a transformação (8.25) faça sentido: se (8.22) for violada, a aplicação de (8.25) em (8.23) seria divergente.

Sendo que é direto ver que transformar sobre  $k'_5$  é resultado será simplesmente

$$\mathcal{F}^{-1}\{F\{k'_5 = k_5 - xp_5\}\} = f(y)e^{ixyp_5}. \quad (8.28)$$

Agora usando esses resultados na fórmula da soma de Poisson (8.15), é possível transformar a soma em (8.26), de modo que sai dos modos KK,  $m$ , para a soma dos números de voltas,  $n$ ,

$$\Pi_\eta = -\frac{\Lambda_\psi^2 e^2}{2\pi R^2} \sum_{y=-\infty}^{\infty} \int_0^1 dx e^{ixyp_5} \int_0^\infty dt \sqrt{\frac{t}{4\pi}} e^{-x(1-x)\Lambda^2 p_5^2/t} e^{-\frac{y^2 t}{4}} \left\{ \frac{3}{2} + i \left( x - \frac{1}{2} \right) yp_5 + \right. \\ \left. -\frac{y^2 t}{4} - \frac{x(1-x)\Lambda^2 p_5^2}{t} \right\}, \quad (8.29)$$

onde  $y = 2\pi n$ .

Esta equação pode ser simplificado notando que

$$\int_0^\infty dt \left\{ \frac{d}{dt} \left[ t^{\frac{3}{2}} e^{-x(1-x)\Lambda^2 p_5^2/t - \frac{y^2 t}{4}} \right] \right\} = 0 \\ \int_0^\infty dt \sqrt{t} \left[ \frac{3}{2} + \frac{x(1-x)\Lambda^2 p_5^2}{t} - \frac{y^2 t}{4} \right] e^{-x(1-x)\Lambda^2 p_5^2/t} e^{-\frac{y^2 t}{4}} = 0, \quad (8.30)$$

de modo que para a equação acima é válida:

$$\frac{3}{2} - \frac{y^2 t}{4} = -\frac{x(1-x)\Lambda^2 p_5^2}{t}. \quad (8.31)$$

Então substituindo em (8.29) o resultado é uma forma mais simplificada, isto é,

$$\Pi_\eta = -\frac{\Lambda_\psi^2 e^2}{2\pi R^2} \sum_{y=-\infty}^{\infty} \int_0^1 dx e^{ixyp_5} \int_0^\infty dt \sqrt{\frac{t}{4\pi}} e^{-x(1-x)\Lambda^2 p_5^2/t} e^{-\frac{y^2 t}{4}} \left\{ i \left( x - \frac{1}{2} \right) yp_5 + \right. \\ \left. -\frac{2x(1-x)\Lambda^2 p_5^2}{t} \right\}. \quad (8.32)$$

Finalmente, a integral sobre  $t$  será calculada com a ajuda do seguinte resultado padrão<sup>6</sup>:

$$\int_0^\infty e^{-(ax^2 + \frac{b}{x^2})} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-2\sqrt{ab}}, \quad \text{para qualquer } a, b > 0. \quad (8.33)$$

<sup>6</sup>A demonstração deste resultado está no Apêndice I.

O resultado desta integração é dado por

$$\Pi_\eta = -\frac{\Lambda_\psi^2 e^2}{2\pi R^2} \sum_{y=-\infty}^{\infty} \int_0^1 dx e^{ixyp_5} \left\{ i(2x-1) \frac{yp_5}{|y|^3} [1 + \sqrt{x(1-x)}\Lambda|p_5||y|] + \frac{2x(1-x)\Lambda^2|p_5|^2}{|y|} \right\} e^{-\sqrt{x(1-x)}\Lambda|p_5||y|}. \quad (8.34)$$

Embora isso pudesse ser reescrito de várias maneiras equivalentes, não parece que qualquer uma delas tenha alguma vantagem em relação à forma (8.34). (Veja, porém, a discussão do limite para grande KK abaixo.) No momento, não se é capaz de calcular (8.34) analiticamente para um valor arbitrário de  $\Lambda$ . Então, o que será feito é analisar e testar este resultado de vários pontos de vista diferentes e em limites diferentes.

Em primeiro lugar, será verificado que as correções de massa não dependem do sinal de  $p_5$ , ou seja, que (8.34) é uma função par de  $p_5$ . Isso é muito fácil de ver mudando  $p_5 \rightarrow -p_5$  e usando a simetria da soma sobre os modos de volta com respeito a  $y \rightarrow -y$ . Então, como uma primeira verificação trivial, conclui-se que

$$\delta m_{KK}^2 \equiv \Pi_\eta(p_5) = \Pi_\eta(-p_5). \quad (8.35)$$

Conforme discutido após a Eq. (8.3), o modo zero KK do fóton corresponde ao bóson sem massa  $p_5 = 0$ , de calibre U(1). Portanto, deve-se esperar que esta simetria de calibre residual seja respeitada pela quantização e este modo não receba nenhuma correção quântica para a massa. Este é realmente o caso, porque é trivial de (8.34) que

$$\Pi_\eta(p_5 = 0) = 0. \quad (8.36)$$

Para estudar os modos KK massivos, deve ser, como foi discutido acima, realizado uma subtração mínima descartando o modo  $y = 0$  da soma em (8.34) (é notável que o termo  $y = 0$  é de fato o único divergente). Como foi explicado, isso corresponde à subtração do tensor de polarização para o modelo não compactado. A próxima observação, trivial (e algum tipo de verificação de consistência) é que para o caso de  $\Lambda = 0$  a integração em (8.34) é trivial e é reproduzido exatamente o resultado trivialmente redimensionado de [7] sem éter (lembrando que  $y = 2\pi n$ )

$$\begin{aligned} \delta m_{KK}^2 \equiv \Pi_\eta(\Lambda = 0) &= -\frac{e^2 \Lambda_\psi^2}{2\pi R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{|2\pi n|^3} \\ &= -\frac{\Lambda_\psi^2 e^2 \zeta(3)}{4\pi^4 R^2}, \end{aligned} \quad (8.37)$$

onde  $\zeta(x)$  é a função zeta de Riemann padrão. Na verdade, esse resultado não é totalmente

trivial. O limite unitário saturado  $\Lambda = 0$  impõe uma relação entre as constantes de acoplamento:  $1 + \alpha_A^2 = (1 + \alpha_\psi^2)^2$ . Normalmente, isso sinalizaria sobre alguma simetria em uma teoria fundamental subjacente. Vale lembrar ao leitor que este resultado é *exato* nessas constantes de acoplamento (o parâmetro de perturbação é a carga elétrica  $e$  ou, melhor, a constante de estrutura fina). Portanto, a forma exata das correções quânticas (8.37) pode ser uma boa maneira de testar tal simetria.

Essa observação mostra a importância do estudo das correções quânticas próximas à saturação do limite unitário, ou seja, para  $\Lambda \ll 1$ . É difícil estudar esse limite diretamente da Eq.(8.34), porque  $\Lambda$  efetivamente entra no expoente na combinação  $\Lambda|y|$ , que pode ser arbitrariamente grande para termos altos na soma. Sendo assim, é mais conveniente trabalhar diretamente com (8.32), onde  $\Lambda$  é um bom parâmetro de expansão para qualquer  $y$  (na verdade, o parâmetro de expansão efetivo é  $\Lambda|p_5|$ , então o resultado obtido será válido apenas para os modos KK inferiores, tais que  $\Lambda|p_5| \ll 1$ , veja também abaixo)

$$\begin{aligned} \Pi_\eta = -\frac{\Lambda_\psi^2 e^2}{2\pi R^2} \sum_{y=-\infty}^{\infty} \int_0^1 dx e^{ixyp_5} \int_0^\infty dt \sqrt{\frac{t}{4\pi}} e^{-\frac{y^2 t}{4}} \left\{ i \left( x - \frac{1}{2} \right) yp_5 + \right. \\ \left. - \frac{x(1-x)\Lambda^2 p_5^2}{t} \left( i \left( x - \frac{1}{2} \right) yp_5 + 2 \right) \right\} + \mathcal{O}(\Lambda^4), \end{aligned} \quad (8.38)$$

o qual pode ser facilmente integrado em  $t$  e, em seguida, em  $x$ . Então, o resultado até  $\mathcal{O}(\Lambda^4)$  assume a forma

$$\begin{aligned} \delta m_{KK}^2 \equiv \Pi_\eta = -\frac{\Lambda_\psi^2 e^2}{2\pi R^2} \sum_{y \neq 0} \int_0^1 dx e^{ixyp_5} \left\{ i(2x-1) \frac{yp_5}{|y|^3} - \frac{x(1-x)\Lambda^2 p_5^2}{|y|} \left( i \left( x - \frac{1}{2} \right) yp_5 + 2 \right) \right\} \\ = -\frac{\Lambda_\psi^2 e^2}{2\pi R^2} \sum_{n \neq 0} \frac{2 + 8\Lambda^2}{(2\pi n)^3} \equiv -\frac{\Lambda_\psi^2 e^2 \zeta(3)}{4\pi^4 R^2} (1 + 4\Lambda^2). \end{aligned} \quad (8.39)$$

Assim, é possível ver que todo o efeito de  $\Lambda \neq 0$  é novamente apenas um fator geral e o resultado não depende do número de um modo KK como no caso  $\Lambda = 0$ , Eq. (8.37). Mas, conforme foi mencionado acima, isso é verdade apenas para os modos mais baixos, como  $\Lambda|p_5| \ll 1$ . Mais a frente será visto que no limite oposto o efeito é muito mais drástico.

Para estudar o limite de grande número KK, é conveniente usar o resultado final exato (8.34). Pois para grande número KK (com isso, dar-se a entender que  $\Lambda|p_5| \gg 1$ ) o expoente em (8.34) será dominado pelo valor de  $x$  próximo aos pontos finais do intervalo  $[0, 1]$ . Assim, usando a simetria da soma em relação a  $y$  e com a ajuda da mudança do variável,  $s := \sqrt{x(1-x)}\Lambda|p_5||y|$ , que é bem definida para  $x \in [0, 1/2]$ , pode-se facilmente



trazer (8.34) para a seguinte forma equivalente (ainda sem aproximação):

$$\Pi_\eta = -\frac{\Lambda_\psi^2 e^2}{\pi R^2} \sum_{y \neq 0} \int_0^{\frac{1}{2}\Lambda|p_5||y|} e^{iy p_5 \frac{1-\sqrt{1-4s^2/\Lambda^2 p_5^2 y^2}}{2}} \frac{2s ds}{|y|^5 \Lambda^2 p_5^2} \left\{ -i(1+s)yp_5 + \right. \\ \left. - \frac{2s^2}{\sqrt{1-4s^2/\Lambda^2 p_5^2 y^2}} \right\} e^{-s}. \quad (8.40)$$

No regime onde  $\Lambda|p_5| \gg 1$ , é possível estender o limite de integração para infinito; isso irá introduzir um erro de ordem de  $\mathcal{O}\left(e^{-\frac{1}{2}\Lambda|p_5||y|}\right)$ . Então, é permitido expandir o integrando em  $1/\Lambda|p_5|$  até o primeiro termo não trivial

$$\Pi_\eta = -\frac{\Lambda_\psi^2 e^2}{\pi R^2} \sum_{n \neq 0} \int_0^\infty \frac{2ds}{|2\pi n|^5 \Lambda^2 p_5^2} \left\{ \frac{s^3}{\Lambda^2} (1+s) - 2s^3 \right\} e^{-s} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\Lambda^4 p_5^4}\right). \quad (8.41)$$

Agora, a integral e a soma podem ser calculadas trivialmente levando a correções grandes números KK

$$\delta m_{KK}^2 \equiv \Pi_\eta = -\frac{\Lambda_\psi^2 e^2}{2\pi R^2} \frac{1}{\Lambda^2 p_5^2} \left( \frac{2}{\Lambda^2} (\Gamma(3) + \Gamma(4)) - 4\Gamma(3) \right) \sum_{n \neq 0} \frac{1}{(2\pi n)^5} \\ \equiv -\frac{\Lambda_\psi^2 e^2 \zeta(5)}{4\pi^6 R^2} \frac{1}{\Lambda^2 p_5^2} \left( \frac{2}{\Lambda^2} - 1 \right). \quad (8.42)$$

É possível observar que este resultado é não perturbativo em  $\Lambda$ , em particular, não faz sentido tomar  $\Lambda \rightarrow 0$  [para  $\Lambda = 0$  a mudança de variável que leva a (8.40) é degenerada]. O resultado (8.42) mostra um papel muito importante do éter no caso do acoplamento não crítico,  $\Lambda \neq 0$ . Enquanto no caso do limite unitário saturado (incluindo o caso sem éter),  $\Lambda = 0$ , as correções da massa descritas por Eq. (8.37) são universais, ou seja, independentes do momento KK  $p_5$ , longe da criticidade, o mesmo é verdadeiro apenas para os modos KK mais baixos, Eq. (8.39). Para as excitações KK mais altas, as correções quânticas para as massas são suprimidas pelas potências inversas de  $p_5^2$ . Isso poderia, em princípio, ser de grande importância experimental, se um experimento for projetado para sondar os modos KK superiores.

Neste ponto, será desenvolvido algumas análises das possíveis consequências fenomenológicas dos resultados obtidos. No caso da constante de acoplamento pequena efetiva,  $\Lambda \ll 1$ , a Eq. (8.39), leva à seguinte modificação da relação de dispersão (5.36):

$$k_\mu k^\mu = \bar{m}_{KK}^2 = \Lambda_\psi^2 (1 - \Lambda^2) \frac{n^2}{R^2} - \lambda_{(n)} \Lambda_\psi^2 (1 + 4\Lambda^2) \frac{n^2}{R^2}. \quad (8.43)$$

É notável que as correções para as massas Kaluza-Klein são modificadas (em comparação com [7]) por um fator  $\lambda_{(n)}\Lambda_\psi^2(1 + 4\Lambda^2)$  [com  $\lambda_{(n)} = e^2 n^{-2} \zeta(3)/4\pi^2$ ], o qual envolve o parâmetro éter que quebra a invariância de Lorentz e a constante de estrutura fina, que pode ser importante para a precisão fenomenológica. Ao escrever (8.43), trivialmente reescreve-se a Eq.(5.36)

$$k_\mu k^\mu = m_{KK}^2 = \Lambda_\psi^2(1 - \Lambda^2) \frac{n^2}{R^2}, \quad (8.44)$$

onde foi usada a definição (8.24).

Para uma discussão relacionada de restrições experimentais no parâmetro éter, é aconselhável consultar Refs. [15],[53]. A seguir, a concentração será nos limites da variação da constante de estrutura fina.

Para este fim, será feita a comparação das massas KK dadas na Eq.(8.43) e Eq.(8.44), de modo que

$$\left| \frac{\bar{m}_{KK}^2 - m_{KK}^2}{m_{KK}^2} \right| = \lambda_{(n)} + \mathcal{O}(\Lambda^2), \quad (8.45)$$

onde  $\lambda_{(n)}$  pode ser reescrito em termos da constante de estrutura fina  $\alpha = e^2/4\pi$ , ou seja,  $\lambda_{(n)} = \alpha\zeta(3)/n^2\pi^3$ . Nota-se que como foi discutido acima, até a ordem de  $\mathcal{O}(\Lambda^2)$ , esse resultado é o mesmo que no caso da compactação sem éter. Agora é possível relacionar as correções radiativas às massas KK com a pequena incerteza  $\Delta\alpha$  da constante de estrutura fina pura [54]. Substituindo  $\alpha \rightarrow \alpha + \Delta\alpha$  em (8.45) é encontrado, até o termo principal (ou no limite crítico,  $\Lambda = 0$ ), e para  $n = 1$

$$\left| \frac{\bar{m}_{KK}^2 - m_{KK}^2}{m_{KK}^2} \right| \approx 0,00028 + 0,00028 \frac{\Delta\alpha}{\alpha}, \quad (8.46)$$

onde foi considerado os seguintes valores:  $(\alpha\zeta(3)/\pi^3) \approx 0,00028$ ,  $\zeta(3) \approx 1,20205$  para o valor puro  $\alpha \approx 1/137$ .

É importante notar que o efeito da incerteza da estrutura fina em (8.46) pode ser *completamente* mascarado pelos termos de ordem  $\Lambda^2$  descartados em (8.45). Realmente, até estes termos, tem-se

$$\left| \frac{\bar{m}_{KK}^2 - m_{KK}^2}{m_{KK}^2} \right| = \lambda_{(n)}(1 + 3\Lambda^2) + \mathcal{O}(\Lambda^4). \quad (8.47)$$

Agora fazendo a comparação, isso mostra que se  $\Lambda^2$  não for identicamente zero, mas, em vez disso  $\Lambda^2 \sim \frac{\Delta\alpha}{\alpha}$ , seria impossível dizer se o efeito é devido a  $\Delta\alpha$  ou algum  $\Lambda$  não crítico, ou ambos. Para distinguir essas duas contribuições, é necessário ir para a análise de KK altas (veja abaixo) ou para usar algum outro experimento para colocar limites independentes.

Para o caso quando  $\Lambda|p_5| \gg 1$  (8.42) (devido  $\Lambda \in [0, 1)$ , isto corresponde necessa-

riamente a modos KK mais altos), fazendo algumas manipulações é possível reescrever, utilizando a mesma definição de  $\lambda_{(n)}$  como acima, de modo que

$$k_\mu k^\mu = \bar{m}_{KK}^2 = \Lambda_\psi^2 (1 - \Lambda^2) \frac{n^2}{R^2} - \frac{\lambda_{(n)} \zeta(5)}{\pi^2 \zeta(3)} \frac{\Lambda_\psi^2}{\Lambda^4 p_5^2} (2 - \Lambda^2) \frac{n^2}{R^2}, \quad (8.48)$$

e usando a Eq.(8.44), o resultado é

$$\left| \frac{\bar{m}_{KK}^2 - m_{KK}^2}{m_{KK}^2} \right| = \lambda_{(n)} \frac{\zeta(5)}{\zeta(3)} \frac{(2 - \Lambda^2)}{(1 - \Lambda^2)} \left( \frac{1}{\pi \Lambda} \right)^2 \left( \frac{1}{\Lambda |p_5|} \right)^2. \quad (8.49)$$

Nota-se que em (8.49) existem duas possibilidades concorrentes. Por um lado, devido  $\Lambda |p_5| \gg 1$  é possível concluir que as correções radiativas relativas são suprimidas pelo fator  $\frac{1}{(\Lambda |p_5|)^2}$  [assim como as correções absolutas (8.42)]. Por outro lado, uma vez estando no forte regime não crítico, ou seja,  $\Lambda$  está próximo a 1 (o que observando (8.24) corresponde a  $\Lambda_\psi^2 \gg 1 + \alpha_A^2$ ), então o termo  $(1 - \Lambda^2)$  no denominador de (8.49) pode tornar-se importante, uma vez que fazem as relativas correções serem grandes. Tudo isso mostra a importância do limite de KK grande, pois revela o papel não trivial do éter (um pouco oculto para os modos inferiores). Em princípio, isso deve permitir distinguir entre os modelos críticos (o modelo sem éter sendo um caso especial), para o qual os resultados (8.45), (8.46) são válidos para qualquer valor de  $p_5$ , e os não críticos. Ao mesmo tempo, isso tornaria possível distinguir os efeitos devido às variações da estrutura fina e  $\Lambda \neq 0$ .

Neste ponto é útil calcular algumas estimativas para o caso crítico (8.46). Partindo da consideração onde o raio da quinta dimensão  $R \sim 1$  mm,  $v \sim M_P$  e  $\mu_A \sim 1$  TeV, o resultado encontrado é  $m_{KK} \sim 1$  TeV, sendo para o modo  $n = 1$  [5]. Enquanto que para o caso da variação espacial e a incerteza da constante da estrutura fina, isto é,  $\Delta\alpha/\alpha = -2,18 \pm 7,27 \times 10^{-5}$ , foi testado muito recentemente, mesmo em grandes redshifts como no início do universo [16]. No presente cenário, é possível impor limites a esta incerteza se for assumido que mudanças mais altas de  $\alpha$  aparecem na direção da quinta dimensão e seja conhecida a incerteza da massas KK corrigidas radiativamente. Alternativamente, se for assumido os desvios bem conhecidos de  $\alpha$ , é possível estimar a incerteza de tais massas KK. No exemplo acima, a massa KK pura é  $m_{KK} \sim 1$  TeV, então a incerteza na abertura da massa tem a magnitude  $|\Delta\bar{m}_{KK}| \sim 0,01$  MeV para o primeiro modo excitado.

Em um modelo de Randall-Sundrum [3][55], as excitações Kaluza-Klein de bósons de calibre  $V_{KK}$  [56] é esperado a serem excitadas no Grande Colisor de Hádrons (LHC) [sigla vinda do inglês Large Hadron Collider] através do Processo Drell-Yan,

$$pp \rightarrow q\bar{q} \rightarrow V_{KK} \rightarrow Q\bar{Q},$$

onde  $q$  e  $Q$  são férmions pesados iniciais e finais, assim como quarks up e down. O bóson de calibre KK decai em férmions leves, como léptons, e as geração baixa de quarks não podem ser negligenciados em geral [57], tal que a massa de luz KK aberta pode ser sondada. Assim, dentro da massa KK aberta corrigida radiativamente mencionada acima, existe a possibilidade de realizar um excesso de decaimento de bóson de calibre KK em férmions leves conhecidos, como Muon Neutrino,  $m_{\nu_\mu} < 0,2 \text{ MeV}$ , Neutrino Eletrônico,  $m_{\nu_e} < 2 \text{ eV}$ , e assim por diante, como consequência da variação espacial e da incerteza da constante de estrutura fina.

# Capítulo 9

## Conclusão e perspectivas

Neste ponto cabe então escrever as conclusões a partir dos resultados obtidos e apresentados nesta tese. Sendo que, a primeira constatação está no fato da escolha do campo éter como um campo background. Sendo este propagado especificamente na quinta dimensão traz como consequência para o universo quadridimensional, modificação nas relações de dispersão para cada setor do SM. Tal modificação apresenta-se como a adição de um fator na massa composta por um parâmetro que controla a LIV (surgido devido a presença do éter) juntamente com participação da dimensão extra; ou seja, a nova massa agora é  $m_{AC}^2 = m^2 + (1 + \alpha_\phi^2) \frac{n^2}{R^2}$ . Com isso, para que haja grandes massas KK, o tamanho da dimensão extra não tem a obrigação de ser pequeno, pois, uma vez que, para o caso da teoria KK sem a presença do éter, a responsabilidade de haver massas KK grandes está totalmente sobre o raio  $R$  da dimensão extra. Porém, agora é possível usar o parâmetro  $\alpha_\phi$  para controlar o tamanho das massas KK, permitindo assim a possibilidade de detecção da quinta dimensão. Contudo, em contrapartida, foi verificado que com a consideração da solução (3.12) para o éter, o conteúdo da energia e o momento descrito pelo tensor energia-momento apresenta-se não conservado (o que acontece nos setores do campo escalar e eletromagnético).

Através do método de compactação KK no setor eletromagnético em cinco dimensões, o resultado em quatro dimensões foi o modo zero KK sendo a parte usual da ação de Maxwell mais um campo escalar; mas a contribuição KK  $n \neq 0$  assume a forma da soma infinita das ações de Stueckelberg para o campo eletromagnético e escalar desacoplados. Esta é invariante por transformação de calibre U(1), de modo que, na fixação de calibre  $\phi_{(n)} = 0$ , é obtida a ação de Proca com a massa KK incrementada devido a presença do campo éter. Assim é obtida a equação de movimento, seguida da relação de dispersão apresentando massas KK incrementadas devido a presença do éter, a qual é representada pelo fator  $\alpha_A$ . Além disso, a partir da relação de dispersão modificada, é feita a análise quanto as características do meio reproduzido pelo sistema, de modo a ser

verificado que para qualquer valor de  $\alpha_A$ , o meio apresenta-se normal.

A partir da ação chamada de Maxwell-éter em cinco dimensões, é feito o cálculo do propagador de Feynman, no qual é evidente que a presença do campo éter modifica significativamente o propagador. Sendo então imprescindível a verificação de como essa modificação influencia na estabilidade da propagação das informações, a qual é dada através da unitariedade do propagador. Uma vez feita tal verificação, constatou-se que tal propriedade está totalmente ligada ao parâmetro  $\alpha_A$ .

Por sua vez, ainda no setor eletromagnético, a teoria quadridimensional efetiva apresentou excitações com massas de KK corrigidas radiativamente provenientes dos bósons de calibre 5D. Essas massas KK dependem fundamentalmente do campo éter (e das constantes de acoplamento correspondentes) e da constante de estrutura fina  $\alpha$ . A compactação do éter modificou o espaçamento de massa entre os diferentes estados de KK como consequência da interação com o campo éter alinhado ao longo da quinta dimensão compactada. Então, foi feita a investigação das correções radiativas para as massas KK calculando a polarização do vácuo na presença de uma quinta dimensão compacta com o raio de compactação  $R$ . Com isso, um resultado finito foi encontrado considerando uma prescrição onde de cada loop de férmions da teoria compactada o correspondente loop de férmions da teoria não compactada foi subtraído. É necessário enfatizar que os cálculos são não perturbativos nas constantes de acoplamento; a perturbação é feita apenas em relação à constante de estrutura fina. Isso permite que possa ser visto o limite unitário, invisível na abordagem perturbativa em  $\alpha_\psi$ . Foi então, obtida a forma integral exata para as correções radiativas às massas, o que permitiu fazer a análise de diferentes limites interessantes: (i) crítico,  $\Lambda = 0$  (isto inclui o caso sem éter estudado em [7]); (ii) quase crítico; (iii) KK grande - este limite é muito interessante, mostrando o papel muito especial do éter na proteção dos modos superiores das correções quânticas, entre outros efeitos.

Os resultados apresentados no presente trabalho demonstram uma possibilidade potencial de abordar várias questões fenomenológicas importantes. Uma rota interessante é relacionar os desvios das medições da constante de estrutura fina à divisão de massa KK. A variação e a incerteza da constante de estrutura fina foram testadas muito recentemente, mesmo em grandes redshifts, como no início do Universo [16]. No cenário atual, no caso crítico de  $\Lambda = 0$ , é possível, em princípio, impor limites a essa incerteza se for assumido que mudanças maiores de  $\alpha$  aparecem na direção da quinta dimensão. Ao ser considerar os resultados de Ref. [16], ou seja,  $\Delta\alpha/\alpha = -2,18 \pm 7,27 \times 10^{-5}$  e assumindo  $R \sim 1$  mm, para bósons de calibre KK na escala TeV foi encontrado incerteza de divisão de massa KK com a magnitude  $\sim 0,01$  MeV para o primeiro modo excitado.

Já para o caso não crítico, para desembaraçar os efeitos devidos a  $\Delta\alpha$  e  $\Lambda \neq 0$ , foi necessário ir para os modos KK superiores (ou usar outros experimentos independentes). Outras investigações sobre a possibilidade de decaimentos de tais bósons de calibre KK

em férmions leves, associados à divisão de massa KK relacionada à variação espacial e incertezas da constante de estrutura fina, parecem ser fenomenologicamente interessantes do ponto de vista da física de partículas e da astrofísica.

Por último, mas não menos importante, é de grandiosa importância comentar sobre a relevância potencial destes resultados para o futuro colisor próton-próton de 100 TeV. Como enfatizado em [58], se for considerado o tipo de compactação estudado em neste trabalho como uma complementação UV natural da teoria quadridimensional, “é simplesmente impossível manter o escalar muito mais leve do que os novos estados KK”. Nesta situação o controle total sobre as correções radiativas torna-se crucial. Devido a física do colisor na escala de 100 TeV dever ter uma resolução muito maior do ponto de vista da compactação KK e terá um potencial para testar dimensões extras em uma escala submilimétrica (da ordem de  $10^{-2}$  mm), isso daria uma chance para testar essas correções, mesmo além do primeiro nível KK. Neste sentido, um dos principais resultados/previsões que se tem é que tais correções não seriam universais na presença do éter em comparação com o caso sem éter. Embora analiticamente se tenha estabelecido apenas o comportamento limitante, conforme as equações (8.39) e (8.42), é bastante óbvio que a forma exata das correções [que poderiam ser avaliadas, por exemplo, numericamente, usando (8.34) ou (8.40)] irá extrapolar entre esses dois limites levando a uma correção diferente, mesmo para o segundo modo KK. Porém, é claro que deve-se fazer esse tipo de cálculo em um modelo mais realista, envolvendo todos os campos relevantes, de tal forma que a verificar se ainda assim o comportamento devido a compactação do éter será de um parâmetro que aumente os modos massivos. Ainda dentro desse contexto é importante ressaltar que embora os cálculos feitos estejam focados nas correções para os modos KK vetoriais dadas pelo tensor polarização  $i\Pi^{\mu\nu}$ , o cálculo da contribuição para a massa KK do modo zero escalar expressada por  $i\Pi^{55}$  é importante para a compreensão das características física da quinta dimensão. Os resultados apresentados neste trabalho mostram a importância desse estudo.

Neste ponto será elencado algumas perspectivas diretas concernente a esta tese. Sendo considerada como primeira ação a de fazer um estudo da compactação do campo éter no setor gravitacional, seguindo os mesmos passos feitos no setor eletromagnético, dando ênfase no processo de correções radiativas para a correção das massas. Espera-se que com a mudança na interação, onde agora o campo presente é o gráviton, surjam novas regras de Feynman com resultados que possibilitarão interpretações interessantes. No processo, será considerado principalmente os seguintes trabalhos [7][59][60].

No setor eletromagnético, a partir da relação de dispersão (5.36), será feita a verificação de quais as implicações da compactação do éter nas equações de estados termodinâmico para o gás de fóton; podendo ser verificada as mudanças no comportamento da radiação de corpo negro [61]. E será revisitada [13], onde a partir do tensor energia-

momento associado, será analisada as consequências sobre a lei de Stefan-Boltzmann e o efeito de Casimir em temperatura finita quando calculados usando o formalismo Thermo Field Dynamics.

Também faz parte das ações futuras a serem executadas, o estudo da compactação do éter como teoria efetiva no cenário de operadores de altas ordens derivativas, usando como base os trabalhos [62][63]; e quais as consequências fenomenológicas ligadas a esta teoria. Neste contexto será verificada a viabilidade dos vínculos dos limites fenomenológicos para os parâmetros da LIV através da compactação do éter.

Seria interessante generalizar este modelo para o caso mais realístico, envolvendo campos de Yang-Mills dentro da QED em baixas dimensões.

Ainda dentro das perspectivas desta tese, será feito o estudo para verificar sobre quais condições é mantida a estabilidade do modelo apresentado nesta tese. Uma vez que os resultados alcançados estão sobre um fundo clássico, é de grande relevância a análise através de correções quânticas aplicada ao campo éter investigar os limites da estabilidade do presente modelo efetivo.



# Apêndice A

## Variação de $\sqrt{(-1)^{D-1}g}$

Aqui será considerado que para qualquer matriz  $M$  com determinante não nulo, é tido que

$$\ln[\det M] = \text{Tr}(\ln[M]), \quad (\text{A.1})$$

onde  $\ln[M]$  aqui é definido por  $M = e^{\ln[M]}$ .

A variação da Eq.(A.1) é da seguinte forma:

$$\frac{1}{\det M} \delta(\det M) = \text{Tr}(M^{-1} \delta M). \quad (\text{A.2})$$

Aqui foi usada a propriedade cíclica do traço para assim ser possível ignorar o fato de que  $M^{-1}$  e  $\delta M$  pode não comutar.

Para o caso onde  $M = g_{ab}$ , tal que  $\det M = \det(g_{ab}) = g$ , obtém-se

$$\frac{1}{g} \delta g = \text{Tr}(g^{ab} \delta g_{ab}), \quad (\text{A.3})$$

onde ao ser considerada que  $g_{ab}$  seja diagonal, é possível escrever

$$\delta g = g(g^{ab} \delta g_{ab}). \quad (\text{A.4})$$

Agora notando que  $g_{ab}g^{cd} = \delta_b^d$ , que é imutável, logo  $\delta(g_{ab}g^{cd}) = 0$ , o que implica em

$$\delta g_{ab} = -g_{ac}g_{db} \delta g^{cd}. \quad (\text{A.5})$$

Substituindo este resultado em (A.4), obtém-se que

$$\delta g = -g(g_{ab} \delta g^{ab}). \quad (\text{A.6})$$

Agora calculando

$$\delta\sqrt{(-1)^{D-1}g} = \frac{1}{2} \frac{(-1)^{D-1}\delta g}{\sqrt{(-1)^{D-1}g}}, \quad (\text{A.7})$$

de modo que racionalizando e usando a Eq.(A.6), o resulta do é

$$\frac{\delta\sqrt{(-1)^{D-1}g}}{\delta g^{ab}} = -\frac{\sqrt{(-1)^{D-1}g}}{2} g_{ab}. \quad (\text{A.8})$$

## Apêndice B

### Cálculo de $\frac{\delta g_{cd}}{\delta g^{ab}}$ e $\frac{\delta g^{cd}}{\delta g^{ab}}$

Este resultado não é difícil de obter, basta pegar a Eq.(A.5) e reescrever da seguinte forma

$$\delta g_{cd} = -\frac{1}{2} \left( g_{ac} g_{bd} \delta g^{ab} + g_{ac} g_{bd} \delta g^{ab} \right), \quad (\text{B.1})$$

de modo que fazendo a troca  $a \leftrightarrow b$ , no segundo termo da equação acima, o resultado é

$$\delta g_{ab} = -\frac{1}{2} \left( g_{ac} g_{bd} \delta g^{ab} + g_{bc} g_{ad} \delta g^{ba} \right). \quad (\text{B.2})$$

Assim ao usar a simetria do tensor métrico, obtém-se que

$$\frac{\delta g_{ab}}{\delta g^{ab}} = -\frac{1}{2} \left( g_{ac} g_{bd} + g_{ad} g_{bc} \right). \quad (\text{B.3})$$

Agora, para calcular  $\frac{\delta g^{cd}}{\delta g^{ab}}$ , basta lembrar que  $g_{cd} g^{cd} = D$ , onde  $D$  é a dimensão do espaço-tempo. Então

$$\delta(g_{cd} g^{cd}) = 0, \quad (\text{B.4})$$

de modo que

$$\begin{aligned} g_{cd} \delta g^{cd} &= -g^{cd} \delta g_{cd} \\ g_{cd} \delta g^{cd} &= - \underbrace{\delta_l^c}_{=g_{lf} g^{fc}} g^{ld} \delta g_{cd} \\ g_{cd} \delta g^{cd} &= -g_{lf} g^{fc} g^{ld} \delta g_{cd}. \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Agora trocando  $l \leftrightarrow c$  e  $f \leftrightarrow d$  no lado esquerdo da equação acima, obtém-se

$$g_{cd}\delta g^{cd} = -g_{cd}g^{dl}g^{cf}\delta g_{lf}, \quad (\text{B.6})$$

de modo que comparando, conclui-se que

$$\delta g^{cd} = -g^{dl}g^{cf}\delta g_{lf}. \quad (\text{B.7})$$

Então substituindo a Eq.(A.5) no resultado acima, Tem-se que

$$\begin{aligned} \delta g^{cd} &= -g^{dl}g^{cf}(-g_{la}g_{fb}\delta g^{ab}) \\ \delta g^{cd} &= \delta_a^d\delta_b^c\delta g^{ab} \\ \delta g^{cd} &= \frac{1}{2}\left(\delta_a^d\delta_b^c\delta g^{ab} + \delta_a^c\delta_b^d\delta g^{ab}\right), \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

de modo que trocando  $a \leftrightarrow b$  no primeiro termo e usando a simetria da métrica, o resultado é

$$\frac{\delta g^{cd}}{\delta g^{ab}} = \frac{1}{2}\left(\delta_a^c\delta_b^d + \delta_a^d\delta_b^c\right). \quad (\text{B.9})$$

# Apêndice C

## Tensor energia-momento métrico

A obtenção da equação para o tensor energia-momento métrico, começa a partir da ação de Einstein-Hilbert em  $D$ -dimensão, ou seja

$$S_{EH} = -\frac{1}{2\kappa} \int d^D x \sqrt{(-1)^{D-1} g} R, \quad (\text{C.1})$$

também chamada de gravidade pura.

Para o caso de mais campos envolvidos, tal como campos de matéria, deve ser adicionado o termo de matéria

$$S_M = \int d^D x \sqrt{(-1)^{D-1} g} \mathcal{L}_M. \quad (\text{C.2})$$

Então a ação completa é

$$S = \int d^D x \sqrt{(-1)^{D-1} g} \left\{ -\frac{1}{2\kappa} (R - 2\Lambda) + \mathcal{L}_M \right\}, \quad (\text{C.3})$$

onde  $\Lambda$  é a constante cosmológica.

A equação de movimento é obtida usando o “princípio da mínima”  $\delta S = 0$ , ou seja ação variando a ação  $S$  com respeito ao campo métrico, resultando em

$$-\frac{1}{2\kappa} \left[ \frac{\delta(\sqrt{(-1)^{D-1} g})}{\delta g^{ab}} R + \sqrt{(-1)^{D-1} g} \frac{\delta R}{\delta g^{ab}} \right] + \frac{\delta(\sqrt{(-1)^{D-1} g} \mathcal{L}_M)}{\delta g^{ab}} = 0. \quad (\text{C.4})$$

Agora falta calcular  $\frac{\delta R}{\delta g^{ab}}$ , o qual é feito lembrando que  $R = g^{cd} R_{cd}$ , de modo que

$$\delta R = R_{cd} \delta g^{cd} + \nabla_l (g^{cd} \delta \Gamma_{dc}^l - g^{cl} \delta \Gamma_{fc}^f), \quad (\text{C.5})$$

onde o 2º termo é um termo de contorno, o que vai a zero quando feito a integral. Então

$$\frac{\delta R}{\delta g^{ab}} = R_{cd} \frac{\delta g^{cd}}{\delta g^{ab}}, \quad (\text{C.6})$$

de modo que usando o resultado (B.9), obtém-se que

$$\frac{\delta R}{\delta g^{ab}} = R_{ab}. \quad (\text{C.7})$$

Finalmente, substituindo as Eq's.(A.8) e (C.7) em (C.4), o resultado é a equação de movimento

$$R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R = \kappa \left[ \frac{2}{\sqrt{(-1)^{D-1}g}} \frac{\delta(\sqrt{(-1)^{D-1}g}\mathcal{L}_M)}{\delta g^{ab}} \right], \quad (\text{C.8})$$

onde ao ser considerada  $\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$ , enquanto que

$$\mathcal{T}_{ab} = \frac{2}{\sqrt{(-1)^{D-1}g}} \frac{\delta(\sqrt{(-1)^{D-1}g}\mathcal{L}_M)}{\delta g^{ab}}, \quad (\text{C.9})$$

é obtido a equação de Einstein

$$R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R = \frac{8\pi G}{c^4} \mathcal{T}_{ab}. \quad (\text{C.10})$$

A Eq.(C.9) é o tensor energia-momento canônico para um espaço-tempo de dimensão  $D$ .

## Apêndice D

### Verificação de $u^a$ em qualquer espaço-tempo

Dada a solução  $u^a = \left(0, 0, 0, 0, \frac{v}{b(x)}\right)$ , é direto verificar que esta configuração satisfaz a equação de movimento  $\nabla_a V^{ab} - v^{-2} u^b u_c \nabla_d V^{cd} = 0$ . Basta fazer a substituição,

$$\begin{aligned}\nabla_a V^{a5} - v^{-2} u^5 u_5 \nabla_d V^{5d} &= 0 \\ \nabla_a V^{a5} - v^{-2} \eta_{55} u^5 u^5 \nabla_d V^{5d} &= 0,\end{aligned}\tag{D.1}$$

de modo que, usando a métrica (3.18), obtém-se

$$\begin{aligned}\nabla_a V^{a5} - v^{-2} (-b^2) \frac{v^2}{b^2} \nabla_d V^{5d} &= 0 \\ \nabla_a V^{a5} + \nabla_d V^{5d} &= 0.\end{aligned}\tag{D.2}$$

Assim, usando a antissimetria de  $V^{ab}$  é alcançado o objetivo desta verificação, isto é,

$$\nabla_a V^{a5} - \nabla_d V^{d5} = 0.\tag{D.3}$$

A verificação da restrição (3.4) é direta, ou seja, substituindo a solução, o resultado é

$$u^4 u_5 = -b^2 u^5 u^5 = -b^2 \frac{v^2}{b^2} = -v^2.\tag{D.4}$$

Embora  $V_{ab}$  não desapareça, sendo

$$V_{\mu 5} = \nabla_\mu u_5 - \nabla_5 u_\mu = \nabla_\mu (\eta_{55} u^5) = -\nabla_\mu \left(b^2 \frac{v}{b}\right),\tag{D.5}$$

de modo que

$$V_{\mu 5} = -V_{5\mu} = -v \nabla b.\tag{D.6}$$

# Apêndice E

## Delta de Kronecker

Uma vez que na equação em questão estão envolvidos os somatórios nos índices  $n$  e  $l$ , juntamente com a integral sobre  $x^5$ , o objetivo é mostrar que uma solução que descreve os resultados para os casos onde  $l \neq n$  e  $l = n$  é descrito pela função delta de Kronecker. Assim, notando que o que se tem é

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi R} e^{i(n-l)x^5/R} dx^5, \quad (\text{E.1})$$

de modo que renomeando  $\tilde{x}^5 = x^5/R \Rightarrow dx^5 = R d\tilde{x}^5$ , fazendo que quando  $x^5 \rightarrow 0$ ,  $\tilde{x}^5 \rightarrow 0$ , e enquanto  $x^5 \rightarrow 2\pi R$ ,  $\tilde{x}^5 \rightarrow 2\pi$ . Assim

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi R} e^{i(n-l)x^5/R} dx^5 = \frac{R}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(n-l)\tilde{x}^5} d\tilde{x}^5, \quad (\text{E.2})$$

de modo que sendo

$$\delta_{n,l} = \frac{R}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(n-l)\tilde{x}^5} d\tilde{x}^5. \quad (\text{E.3})$$

Conclui-se que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi R} e^{i(n-l)x^5/R} dx^5 = R\delta_{n,l}, \quad (\text{E.4})$$

onde a função delta de Kronecker tem os seguintes resultados:

$$\delta_{n,l} = \begin{cases} 1, & \text{para } l = n; \\ 0, & \text{para outros casos.} \end{cases}$$



# Apêndice F

## Propriedade vinda da condição do campo do SM ser real em 5- $D$

Desde que  $A^a$  seja uma quantidade real, tem-se que

$$A^a = A^{*a}, \quad (\text{F.1})$$

então

$$A^a(x^\mu, x^5) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( A_{(n)}^{*\mu}(x) e^{-inx^5/R}, \phi_{(n)}^*(x) e^{-inx^5/R} \right), \quad (\text{F.2})$$

de modo que uma vez assumido  $A_{(-n)}^\mu = A_{(n)}^{*\mu}$  e  $\phi_{(-n)} = \phi_{(n)}^*$ , como consequência a Eq.(F.1) é satisfeita, ou seja

$$A^a(x^\mu, x^5) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( A_{(-n)}^\mu(x) e^{-inx^5/R}, \phi_{(-n)}(x) e^{-inx^5/R} \right), \quad (\text{F.3})$$

assim, chamando  $m = -n$ , o resultado é

$$A^a(x^\mu, x^5) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( A_{(m)}^\mu(x) e^{imx^5/R}, \phi_{(m)}(x) e^{imx^5/R} \right). \quad (\text{F.4})$$

Mostrando que surge uma propriedade em relação aos campos quadridimensionais vinda da condição do campo pentadimensional.

# Apêndice G

## Processo de simetrização

Partindo do tensor energia-momento canônico

$$T^{ab} = \partial^a \phi \partial^b \phi - \frac{1}{2} \eta^{ab} \partial_c \phi \partial^c \phi + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \frac{1}{\mu_\phi^2} \left[ u^a u^c \partial_c \phi \partial^b \phi - \frac{1}{2} \eta^{ab} u^c u^d \partial_c \phi \partial_d \phi \right], \quad (\text{G.1})$$

o qual pode ser diretamente verificado que é conservado, isto é,  $\partial_a T^{ab} = 0$ .

A simetrização deste tensor é acontece executando o seguinte procedimento: partindo do fato de que o que se quer é uma quantidade que satisfaça a seguinte lei de conservação:

$$\partial_a \Theta^{ab} = 0, \quad (\text{G.2})$$

de tal forma que é permitido adicionar ao  $T^{ab}$  qualquer quantidade  $\mathcal{V}^{ab}$  tal que

$$\partial_a \mathcal{V}^{ab} = 0, \quad (\text{G.3})$$

e ainda assim a conservação é mantida, isto é,

$$\partial_a \Theta^{ab} = \partial_a (T^{ab} + \mathcal{V}^{ab}) = 0. \quad (\text{G.4})$$

A escolha conveniente que pode ser feita é

$$\mathcal{V}^{ab} = \mu_\phi^{-2} u^a u^c \partial_c \phi \partial^b \phi, \quad (\text{G.5})$$

e tudo o que deve ser verificado é se (G.3) é satisfeita. A questão é que para esse caso, o resultado é

$$\partial_a \mathcal{V}^{ab} = \mu_\phi^{-2} u^a u^c \partial_a [\partial_c \phi \partial^b \phi], \quad (\text{G.6})$$

mostrando que a escolha do éter como background não permite o procedimento de simetrização.

# Apêndice H

## Tensor energia-momento métrico e conclusões

Para obter o tensor energia-momento métrico (nome dado devido ser obtido através da variação da métrica) é necessário antes “covariantizar” a ação do campo escalar com éter, o que é feito passando do espaço-tempo plano para um espaço-tempo com uma métrica geral, ou seja,  $\eta^{ab} \rightarrow g^{ab}$ ; e mudar as derivadas parciais por derivadas covariantes  $\partial \rightarrow \nabla$ . Além de multiplicar a ação pelo jacobiano  $\sqrt{g}$ , assim o resultado é

$$S = \int d^5x \sqrt{g} \left\{ \frac{1}{2} g^{ab} \nabla_a \phi \nabla_b \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \frac{1}{2\mu_\phi^2} u^a u^b \nabla_a \phi \nabla_b \phi \right\}. \quad (\text{H.1})$$

Agora, usando a Eq.(C.9) juntamente com os resultados apresentados nos Apêndices A e B, lembrando que  $\nabla_a \phi = \partial_a \phi$ , o resultado é o tensor energia-momento métrico,

$$\mathcal{T}^{ab} = \nabla^a \phi \nabla^b \phi - g^{ab} \left( \frac{1}{2} \nabla_c \phi \nabla^c \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \frac{1}{2\mu_\phi^2} u^c u^d \nabla_c \phi \nabla_d \phi \right), \quad (\text{H.2})$$

onde foi levantado os índices  $a$  e  $b$ , usando a métrica, ou seja,  $\mathcal{T}^{ab} = g^{ac} g^{bd} \mathcal{T}_{cd}$ .

É claro que, uma vez que a métrica  $g^{ab}$  é simétrica, o tensor energia-momento métrico também assim o é (como pode ser visto no resultado acima). A questão é verificar se o mesmo é conservado, ou seja,  $\nabla_a \mathcal{T}^{ab} = 0$ . Então

$$\begin{aligned} \nabla_a \mathcal{T}^{ab} &= (\nabla_a \nabla^a \phi) \nabla^b \phi + \nabla^a \phi (\nabla_a \nabla^b \phi) - \nabla^c \phi (\nabla^b \nabla_c \phi) + m^2 \phi \nabla^b \phi + \mu_\phi^{-2} u^c u^d \nabla_c \phi (\nabla^b \nabla_d \phi) \\ &= (\nabla_a \nabla^a \phi) \nabla^b \phi + m^2 \phi \nabla^b \phi + \mu_\phi^{-2} u^c u^d \nabla_c \phi (\nabla^b \nabla_d \phi), \end{aligned} \quad (\text{H.3})$$

tal que usando a equação de movimento (obtida ao inserir a densidade de lagrangiana

(H.1) na equação de Euler-Lagrange)

$$\nabla_a \nabla^a \phi + m^2 \phi = \mu_\phi^{-2} \nabla_a (u^a u^b \nabla_b \phi), \quad (\text{H.4})$$

obtém-se que

$$\nabla_a \mathcal{T}^{ab} = \mu_\phi^{-2} u^c u^d (\nabla_d \nabla_c \phi) \nabla^b \phi + \mu_\phi^{-2} u^c u^d \nabla_c \phi (\nabla_d \nabla^b \phi). \quad (\text{H.5})$$

Aqui foi considerada a solução constante para o éter, o que permitiu que a derivada covariante passe sobre os campos  $u^c$ ; além do fato de  $\nabla_c \nabla_d = \nabla_d \nabla_c$ . Então o resultado é

$$\nabla_a \mathcal{T}^{ab} = \mu_\phi^{-2} u^c u^d \nabla_d [\nabla_c \phi \nabla^b \phi], \quad (\text{H.6})$$

o qual se assemelha muito com o resultado obtido no procedimento de simetrização do tensor energia-momento canônico, Eq.(G.6).

Este resultado expressa a não conservação do tensor energia-momento métrico. Isso é uma consequência da escolha feita em relação ao campo éter, na qual foi desprezados os termos de interação dos campos do MP e o éter na ação (3.3), fazendo com que o éter tenha uma característica de background. Porém, para que se tenha a conservação do tensor energia-momento é necessário a equação de movimento completa, não sendo o caso de (3.11).

# Apêndice I

## Cálculo da integral

Seja  $f$  qualquer função integrável no intervalo  $[0, \infty)$ , tal que  $f(x) = f(-x)$ , ou seja, é uma função par. Considerando

$$\mathcal{I} = \int_0^{\infty} f\left(ax - \frac{b}{x}\right) dx \quad ; \quad a, b > 0. \quad (\text{I.1})$$

Agora definindo  $z = ax - \frac{b}{x}$ , de modo que quando  $x \rightarrow 0$ ,  $z \rightarrow -\infty$ ; e quando  $x \rightarrow \infty$ ,  $z \rightarrow \infty$ , implicando que  $z \in (-\infty, \infty)$ . Além disso, tem-se que

$$dz = \left(a + \frac{b}{x^2}\right) dx. \quad (\text{I.2})$$

Neste ponto será considerada a seguinte integral:

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2} f\left(ax - \frac{b}{x}\right) dx, \quad (\text{I.3})$$

de modo que, fazendo  $y = -\frac{b}{ax} \Rightarrow dy = \frac{b dx}{a x^2}$ , de modo que quando  $x \rightarrow 0$ ,  $y = -\infty$ ; e quando  $x \rightarrow \infty$ ,  $y \rightarrow 0$ , obtém-se

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2} f\left(ax - \frac{b}{x}\right) dx = \frac{a}{b} \int_{-\infty}^0 f\left(-\frac{b}{y} - ay\right) dy \equiv \frac{a}{b} \int_{-\infty}^0 f\left(ax - \frac{b}{x}\right) dx. \quad (\text{I.4})$$

Então notando que a integral

$$\int_0^{\infty} \left(a + \frac{b}{x^2}\right) f\left(ax - \frac{b}{x}\right) dx = a \int_0^{\infty} f\left(ax - \frac{b}{x}\right) dx + b \int_0^{\infty} \frac{1}{x^2} f\left(ax - \frac{b}{x}\right) dx, \quad (\text{I.5})$$

tal que, usando a Eq.(I.4) no segundo termo da equação acima, o resultado obtido é

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \left( a + \frac{b}{x^2} \right) f \left( ax - \frac{b}{x} \right) dx &= a \int_0^{\infty} f \left( ax - \frac{b}{x} \right) dx + a \int_{-\infty}^0 f \left( ax - \frac{b}{x} \right) dx \\ &\equiv a \int_{-\infty}^{\infty} f \left( ax - \frac{b}{x} \right) dx, \end{aligned} \quad (\text{I.6})$$

ou melhor, lembrando que a função  $f$  é par, obtém-se

$$\int_0^{\infty} \left( a + \frac{b}{x^2} \right) f \left( ax - \frac{b}{x} \right) dx = 2a \int_0^{\infty} f \left( ax - \frac{b}{x} \right) dx. \quad (\text{I.7})$$

Assim, usando (I.1),

$$\int_0^{\infty} \left( a + \frac{b}{x^2} \right) f \left( ax - \frac{b}{x} \right) dx = 2a\mathcal{I}, \quad (\text{I.8})$$

onde, ao aplicar a mudança de variável para  $z$ , tem-se que

$$\mathcal{I} = \frac{1}{2a} \int_{-\infty}^{\infty} f(z) dz. \quad (\text{I.9})$$

Agora, sendo a integral

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-ax^2 - \frac{b}{x^2}} dx &= \int_0^{\infty} e^{-\left[ (\sqrt{ax})^2 + \left( \frac{\sqrt{b}}{x} \right)^2 \right]} dx \\ &= \int_0^{\infty} e^{-\left[ (\sqrt{ax})^2 + \left( \frac{\sqrt{b}}{x} \right)^2 + 2\sqrt{ab} - 2\sqrt{ab} \right]} dx \\ &= e^{-2\sqrt{ab}} \int_0^{\infty} e^{-\left[ \sqrt{ax} + \frac{\sqrt{b}}{x} \right]^2} dx, \end{aligned} \quad (\text{I.10})$$

na segunda linha foi completado o quadrado. Assim, considerando

$$f \left( \sqrt{ax} - \frac{\sqrt{b}}{x} \right) = e^{-\left[ \sqrt{ax} + \frac{\sqrt{b}}{x} \right]^2}, \quad (\text{I.11})$$

e usando (I.8)

$$\int_0^{\infty} e^{-ax^2 - \frac{b}{x^2}} dx = \frac{e^{-2\sqrt{ab}}}{2\sqrt{a}} \int_0^{\infty} \left( \sqrt{a} + \frac{\sqrt{b}}{x^2} \right) e^{-\left[ \sqrt{ax} - \frac{\sqrt{b}}{x} \right]^2} dx. \quad (\text{I.12})$$

---

Agora fazendo a seguinte mudança de variável:  $z = \sqrt{a}x - \frac{\sqrt{b}}{x}$ , tal que

$$dz = \left( \sqrt{a} + \frac{\sqrt{b}}{x^2} \right) dx, \quad (\text{I.13})$$

o resultado obtido é (lembrando que embora o intervalo de integração, após a mudança de variável, seja de  $\infty$  até  $-\infty$ , como a função é par, a ordem do intervalo de integração não influenciará no resultado)

$$\int_0^{\infty} e^{-\left(ax^2 + \frac{b}{x^2}\right)} dx = \frac{e^{-2\sqrt{ab}}}{2\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz, \quad (\text{I.14})$$

ou seja

$$\int_0^{\infty} e^{-\left(ax^2 + \frac{b}{x^2}\right)} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-2\sqrt{ab}}. \quad (\text{I.15})$$

# Referências Bibliográficas

- [1] ARKANI-HAMED N., DIMOPOULOS S., DVALI G. R., The Hierarchy Problem and New Dimensions at a Millimeter. **Physical Letter B**, v. 429, 263 (1998)
- [2] ANTONIADIS I., ARKANI-HAMED N., DIMOPOULOS S., DVALI G. R., New Dimensions at a Millimeter to a Fermi and Superstrings at a TeV. **Physical Letter B**, v. 436, 25 (1998)
- [3] RANDALL L., SUNDRUM R., A Large Mass Hierarchy from a Small Extra Dimension. **Physical Review Letters**, 83, 3370 (1999)
- [4] RANDALL L., SUNDRUM R., An Alternative to Compactification. **Physical Review Letters**, 83, 4690 (1999)
- [5] CARROLL S. M., TAM H., Aether Compactification. **Physical Review D**, v. 78, 044047 (2008)
- [6] CHATRABHUTI A., PATCHARAMANEPAKORN P., WONGJUN P., Aether field, Casimir energy and stabilization of the extra dimension. **Journal of High Energy Physics**, 08, (2009) 019
- [7] CHENG H. C., MATCHEV K. T., SCHMALTZ M., Radiative corrections to Kaluza-Klein masses. **Physical Review D**, v. 66, 036005 (2002).
- [8] RIZZO T. G., Lorentz violation in extra dimensions. **Journal of High Energy Physics**, 09, (2005) 036
- [9] PEREZ-LORENZANA A., An Introduction to Extra Dimensions. **Journal of Physics: Conference Series**, v. 18, 224 (2005).
- [10] FREITAS A., KONG K., WIEGAND D., Radiative corrections to masses and couplings in universal extra dimensions. **Journal of High Energy Physics**, 03 (2018) 093
- [11] BAETA SCARPELLI A. P., MARIZ T., NASCIMENTO J. R., PETROV A. Yu., Four-dimensional aether-like Lorentz-breaking QED revisited and problem of ambiguities. **The European Physical Journal C**, v. 73, 2526 (2013)



- [12] MARIZ T., NASCIMENTO J., PETROV A. Yu., On aether terms in a space-time with a compact extra dimension. (2016) arXiv:1609.02467
- [13] SANTOS A., KHANNA F. C., Aether field in extra dimensions: Stefan-Boltzmann law and Casimir effect at finite temperature. **Physical Review D**, v. 95, 025021 (2017)
- [14] TTIRA C. C., FOSCO C., MALBOUISSON A., RODITI I., Vacuum polarization for compactified QED<sub>4+1</sub> in a magnetic flux background. **Physical Review A**, v. 81, 032116 (2010)
- [15] CARROLL S. M., DULANEY T. R., GRESHAM M. I., TAM H., Sigma-model aether. **Physical Review D**, v. 79, 065012 (2009)
- [16] WILCZYNSKA M. R., et al., Four direct measurements of the fine-structure constant 13 billion years ago. **Science Advances**, v. 6, eaay9672 (2020)
- [17] PESKIN M., SCHROEDER D., An Introduction to Quantum Field Theory. **Westview Press.**, ISBN 978-0-201-50397-5. (1995)
- [18] GRIBBIN J., Q is for Quantum: Particle Physics from A to Z. **London: Weidenfeld & Nicolson**, p. 138. ISBN 0-297-81752-3 (1998)
- [19] KAKU M., Hiperespaço: uma odisséia científica através de universos paralelos, empenamentos do tempo e a décima dimensão. **Ed. Ciência Atual - Rocco**, Rio de Janeiro, ISBN 85-325-1046-9 (2000)
- [20] BEICHLER J. E., Three Logical Proofs: The Five-Dimensional Reality of Space-Time. **Journal of Scientific Exploration**, v. 21, No. 3, 539-541 (2007)
- [21] KLEIN O., The Atomicity of Electricity as a Quantum Theory Law. **Nature**, v. 118, 516 (1926)
- [22] MAXWELL J. C., A Treatise on Electricity and Magnetism. Part IV, Chapter XX.
- [23] WILLIAM J. (Lord Rayleigh), LXXIII. Does motion through the Aether cause double refraction?. **The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science**, v. 4, 678-683, ISSN 1941-5982 (1902)
- [24] NEWBURGH R. G., Motional Effects in Retardation Plates and Mode Locking in Ring Lasers. **Applied Optics**, v. 12, 116-119 (1973)
- [25] SCHAFFNER K. F., Einstein Versus Lorentz: Research Programmes and the Logic of Comparative Theory Evaluation. **The British Journal for the Philosophy of Science**, v. 25, 45-78, ISSN 0007-0882 (1974)

- [26] WETZEL R. A., The New Relativity in Physics. **Science**, v. 38, 466-474, ISSN 0036-8075. JSTOR 1640709. PMID 17808012 (1913)
- [27] DIRAC P., Is there an Aether?. **Nature**, 168, p. 906, (1951)
- [28] JACOBSON T., Einstein-æther gravity: a status report. **Proceedings of Science**, arXiv:0801.1547 [gr-qc] (2007)
- [29] ELING C., JACOBSON T., Static post-Newtonian equivalence of GR and gravity with a dynamical preferred frame. **Physical Review D**, 69, 064005 (2004) [arXiv:gr-qc/0310044].
- [30] BURGESS C. P., Quantum gravity in everyday life: General relativity as an effective field theory. **Living Reviews in Relativity**, 7, 5 (2004) [arXiv:gr-qc/0311082].
- [31] WILL C. M., NORDVEDT K. Jr., Conservation laws and preferred frames in relativistic gravity. I. Preferred frame theories and an extended PPN formalism. **Astrophys. J.** 177, 757 (1972); NORDVEDT K. Jr. WILL C. M., Conservation laws and preferred frames in relativistic gravity. II. Experimental evidence to rule out preferred frame theories of gravity. **Astrophys. J.** 177, 775 (1972); HELTINGS R. W., NORDVEDT K. Jr., Vector-metric theory of gravity. **Physical Review D**, 7, 3593 (1973).
- [32] ELLIOTT J. W., MOORE G. D., STOICA H., Constraining the new æther: Gravitational Cherenkov radiation. 0508, 066 (2005) [arXiv:hep-ph/0505211].
- [33] Ver, por exemplo, GASPERINI M., Singularity prevention and broken Lorentz symmetry. **Classical and Quantum Gravity**, 4, 485 (1987); Repulsive gravity in the very early Universe. **General Relativity and Quantum Cosmology**, 30, 1703 (1998)
- [34] JACOBSON T., MATTINGLY D., Gravity with a dynamical preferred frame. **Physical Review D**, 64, 024028 (2001) [arXiv:gr-qc/0007031].
- [35] KOSTELECKY V. A., SAMUEL S., Gravitational Phenomenology In Higher Dimensional Theories And Strings. **Physical Review D**, 40, 1886 (1989).
- [36] GRIPAIS B. M., Modified gravity via spontaneous symmetry breaking. 0410, 069 (2004) [arXiv:hep-th/0408127].
- [37] ZLOSNIK T. G., FERREIRA P. G., STARKMAN G. D., Modifying gravity with the æther: An alternative to dark matter. **Physical Review D**, 75, 044017 (2007) [arXiv:astro-ph/0607411].

- [38] ZHAO H., Coincidences of Dark Energy with Dark Matter - Clues for a Simple Alternative?. arXiv:0710.3616 [astro-ph].
- [39] KANNO S., SODA J., Lorentz violating inflation. **Physical Review D**, 74, 063505 (2006) [arXiv:hep-th/0604192].
- [40] BEKENSTEIN J. D., Relativistic gravitation theory for the MOND paradigm. **Physical Review D**, 70, 083509 (2004) [Erratum-ibid. D 71, 069901 (2005)] [arXiv:astro-ph/0403694].
- [41] MOFFAT J. W., Scalar-tensor-vector gravity theory. 0603, 004 (2006) [arXiv:gr-qc/0506021].
- [42] ARKANI-HAMED N., DIMOPOULOS S., DVALID G., The Hierarchy Problem and New Dimensions at a Millimeter. **Physical Letters B**, 429, 263 (1998)
- [43] ANTONIADIS I., ARKANI-HAMED N., DIMOPOULOS S., DVALID G., New Dimensions at a Millimeter to a Fermi and Superstrings at a TeV. **Physical Letters B**, 436, 257 (1998)
- [44] CARROLL S. M., LIM E. A., Lorentz-Violating Vector Fields Slow the Universe Down. **Physical Review D**, v. 70, 123525 (2004)
- [45] ACKERMAN L., CARROLL S. M., WISE M. B., Imprints of a primordial preferred direction on the microwave background. **Physical Review D**, v. 75, 083502 (2007)
- [46] ANDREEV V. A., TSIPENYUK D. Yu., The 5-dimensional model for electromagnetism and gravity. **Natural Science**, v. 6, No. 4, 248-253 (2014)
- [47] KÖRS B., NATH P., Aspects of the Stueckelberg extension. **Journal of High Energy Physics**, V. 2005, (2005)
- [48] GREINER W., REINHARDT J., Field Quantization. **Springer**, ISBN 3-540-59179-6 (1996)
- [49] PINZUL A., On geodesics in space-times with a foliation structure: a spectral geometry approach. **Classical and Quantum Gravity**, 31, 205010 (2014)
- [50] LOPES D., MAMIYA A., PINZUL A., Infrared Horava-Lifshitz gravity coupled to Lorentz violating matter: a spectral action approach. **Classical Quantum Gravity**, 33, 045008 (2016)
- [51] PINZUL A., Spectral geometry approach to Horava-Lifshitz type theories: gravity and matter sectors in IR regime. **Proceedings of Science**, CORFU2015 (2016) 095 [arXiv:1603.08611]

- [52] BAUMAN S., DIENES K. R., New regulators for quantum field theories with compactified extra dimensions. I. Fundamentals. **Physical Review D**, v. 77, 125005 (2008); 125006 (2008)
- [53] JACOBSON T., MATTINGLY D., Einstein-aether waves. **Physical Review D**, v. 70, 024003 (2004)
- [54] MARTINS C., The status of varying constants: a review of the physics, searches and implications. **Reports on Progress in Physics**, v. 80, 126902 (2017)
- [55] GOGBERASHVILI M., Hierarchy problem in the shell-universe model. **International Journal Modern Physics D**, v. 11, 1635 (2002)
- [56] DJOUADI A., MOREAU G., SINGH R. K., Kaluza-Klein excitations of gauge bosons at the LHC. **Nuclear Physics B**, v. 797, 1 (2008)
- [57] ANGELESCU A., MOREAU G., RICHARD F., Scalar production in association with a  $Z$  boson at the LHC and ILC: The mixed Higgs-radion case of warped models. **Physical Review D**, v. 96, 015019 (2017)
- [58] ARKANI-HAMED N., HAN T., MANGANO M., WANG L. T., Physics opportunities of a 100 TeV proton-proton collider. **Physics Reports**, v. 652, 1 (2016)
- [59] OLIVEIRA R. J. S., PINZUL A., ANACLETO M. A., PASSOS E., BRITO F. A., HOLANDA O., Radiatively corrected Kaluza-Klein masses in an aether compactification. **Physical Review D**, v. 102, 075008 (2020)
- [60] MARIZ T., NASCIMENTO J. R., PASSOS E., RIBEIRO R. F., Chern-Simons-like action induced radiatively in general relativity. **Physical Review D**, v. 70, 024014 (2004)
- [61] ANACLETO M. A., BRITO F. A., MACIEL E., MOHAMMADI A., PASSOS E., SANTOS W. O., SANTOS J. R. L., Lorentz-violating dimension-five operator contribution to the black body radiation. **Physics Letters B**, v. 785, 191-196 (2018)
- [62] MYERS R. C., POSPELOV M., Ultraviolet Modifications of Dispersion Relations in Effective Field Theory. **Physical Review Letters**, v. 90, 211601 (2003)
- [63] REYES C. M., Causality and stability for Lorentz- $CPT$  violating electrodynamics with dimension-5 operators. **Physical Review D**, v. 82, 125036 (2010)