



Universidade de Brasília

**Sólitons de Translação para o Fluxo da
Curvatura Média em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$**

Katianny Rosa Freitas

Orientador: Dr. João Paulo dos Santos

Departamento de Matemática

Universidade de Brasília

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de

Mestre em Matemática

Brasília, 29 de Novembro de 2021.

Aos meus pais, à Katielly e à memória de Linda.

Agradecimentos

Aos meus pais, Lizelma e José, e aos meus irmãos, Kevin e Katielly, obrigada por todo o apoio, amor e cuidado. Ao Vinicius, agradeço pelo companheirismo e parceria nestes últimos anos, por compartilhar comigo todas as alegrias e medos durante o mestrado. Agradeço também a Dona Dione, a minha tia Ângela e minha prima Kessya por terem me recebido quando cheguei em Brasília.

Ao professor João Paulo, agradeço pela paciência, cuidado e pela oportunidade de trabalhar sob sua orientação. Aos meus amigos Desirée, Linda, Pucllas, Mateus, Bruno, Mirelly, Rodrigo, Rômulo e Andres, obrigada pelas risadas, bolos, açaís, pizzas, cervejas, conversas e desabafos. Agradeço aos meus professores da graduação e do mestrado, em especial a Cátia, ao Porfírio, ao Fernando e ao Igor, por terem me incentivado e me ensinado tanto, não só sobre matemática.

Agradeço aos membros da banca, professor Ronaldo, professora Luciana e professor Tarcísio pelas sugestões e correções, as quais enriqueceram meu trabalho. Ao Antônio Bueno, agradeço a disponibilidade para discutir pontos importantes sobre a teoria de sólitons de translação, tais discussões me ajudaram a compreender esta teoria com mais clareza. Por fim, agradeço a CAPES e ao CNPq pelo auxílio financeiro.

Resumo

Nesta dissertação, baseando-se nos trabalhos de Bueno [5, 6], apresentamos um estudo detalhado dos sólitons de translação do fluxo de curvatura média no espaço produto $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Utilizando ferramentas de equações diferenciais ordinárias, princípio do máximo e o método de reflexão de Alexandrov são abordados resultados de existência de sólitons de translação rotacionalmente simétricos, um teorema de unicidade do *Bowl* Sóliton em termos do seu comportamento assintótico e um teorema que afirma que, sob certas condições na fronteira de um sóliton de translação compacto, este sóliton de translação é uma parte do *Bowl* Sóliton. Prova-se também que não existem sólitons de translação compactos sem bordo ou sólitons de translação cilíndricamente limitados.

Abstract

In this dissertation, based on articles due to Bueno [5, 6], we present a detailed study of the translating solitons of the mean curvature flow in the product space $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Using tools of ordinary differential equations, the maximum principle and Alexandrov's reflection method, we discuss results on the existence of rotationally symmetrical translating solitons, a uniqueness of the *Bowl Soliton* in terms of its asymptotic behaviour and a theorem which states that, under certain conditions at the boundary of a compact translating soliton, this translating soliton is a piece of the *Bowl Soliton*. We also prove that there is no translating solitons which is either compact boundary or cylindrically bounded.

Conteúdo

Lista de Figuras	viii
Introdução	1
1 Preliminares	4
1.1 Imersões isométricas e curvatura média	4
1.1.1 Fórmula da Primeira Variação do Volume com Peso	11
1.2 O Plano Hiperbólico	16
1.3 Produtos Riemannianos	18
1.4 Princípio do Máximo	23
1.5 Teorema de Alexandrov	30
2 Sólitons de Translação	34
2.1 Introdução ao Fluxo da Curvatura Média	34
2.2 Sólitons de Translação em \mathbb{R}^{n+1}	37
2.2.1 Unicidade do <i>Bowl</i> Sóliton em \mathbb{R}^3	40
2.3 Sólitons de Translação em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$	50
2.3.1 Problema de Dirichlet	51
2.3.2 O Método de Reflexão de Alexandrov em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$	55
3 Sólitons de Translação Rotacionais	60
3.1 Sólitons de Translação Rotacionalmente Simétricos	60
3.2 Análise do Espaço de Fase de um Sóliton de Translação Rotacional	66
3.3 Existência de Sólitons de Translação Rotacionais	70
4 Sólitons compactos, Teoremas de Não-Existência e a Unicidade do <i>Bowl</i> Sóliton	74
4.1 Sólitons Compactos e Teoremas de Não-Existência	75

Conteúdo	vii
4.2 Unicidade do <i>Bowl</i> Sóliton em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$	81
Bibliografia	92
Índice	95

Lista de Figuras

1.1	Folheação de planos em \mathbb{R}^3 , semi-espacos, $M_+(t)$ e $M_-(t)$	31
1.2	Primeiro ponto de contato q com o plano $\Pi(t_0)$	32
1.3	$M_+(t_1)$ não satisfaz as condições (a) e (b).	33
2.1	Esfera de raio r evoluindo pelo fluxo de curvatura média.	36
2.2	Grim Reaper em \mathbb{R}^3	39
2.3	Reflexão em relação ao plano $\Pi(r)$	42
2.4	A está ao lado direito de B	42
2.5	Motivação para a relação “estar ao lado direito”.	43
2.6	Relação entre $M_-(r)$ e $M_+^*(r)$ em \mathbb{R}^3	46
2.7	Reflexão com respeito ao plano $\Pi(r)$	49
2.8	Folheação de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ por planos verticais, considerando \mathbb{H}^2 no modelo da bola.	56
2.9	Projeção no plano Π	57
2.10	A está ao lado direito de B	58
2.11	Relação “estar ao lado direito” sobre plano horizontal.	58
3.1	Monotonicidade de $y(r)$	70
3.2	<i>Bowl</i> Sóliton no espaço $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{R}$	72
3.3	Catenoide de Translação.	73
4.1	Distância $\tau(\sigma)$	78
4.2	M intersecta $\mathcal{B}(2\sigma)$ transversalmente.	79
4.3	Relação entre $M_+^*(r)$ e $M_-(r)$	87
4.4	Reflexão de M em relação a $\Pi(r)$ e $\Pi(r_0)$	89

Introdução

Os sólitons de translação do fluxo de curvatura média (ou translatores) são hipersuperfícies que evoluem pelo fluxo de curvatura média como a translação da superfície inicial na direção de um certo vetor vertical v . A partir disto, verifica-se que qualquer hipersuperfície é um sóliton de translação quando sua curvatura média é dada pelo produto interno entre o campo normal e o vetor v .

Nos últimos anos, foram desenvolvidas importantes pesquisas acerca dessas superfícies no espaço Euclidiano. Citamos [9], [22], [30] e [31]. Em [22], Ilmanen prova que um sóliton de translação no espaço Euclidiano é uma hipersuperfície mínima em um espaço conforme. Assim, podemos utilizar importantes ferramentas da teoria de superfícies mínimas para investigar os sólitons de translação, como por exemplo, o princípio do máximo geométrico.

Além disso, surgiram diversos exemplos de sólitons de translação em \mathbb{R}^{n+1} nos últimos anos, como o *grim reaper*, *Bowl Sóliton* e o *Catenoide de Translação*. Em [30], os autores provam um Teorema de Unicidade do *grim reaper* e, em [9], Clutterbuck *et. al* provam que existem sólitons de translação rotacionalmente simétricos, gráficos inteiros em \mathbb{R}^{n+1} conhecidos como *Bowl Sóliton* e *Catenoide de Translação*.

Martin *et. al.* mostram em [31] que o único sóliton de translação com um fim que é assintótico ao *Bowl Sóliton* (propriedade a ser definida no Capítulo 4) é o *Bowl Sóliton*. Para provar este teorema, os autores utilizam uma ferramenta fundamental na teoria de superfícies, a saber, o Método de Reflexão de Alexandrov.

Motivados por estes trabalhos, a teoria de sólitons de translação se estendeu a variedades Riemannianas mais gerais, como podemos ver em [5], [6], [11] e [26]. Nosso trabalho é baseado nestas duas primeiras referências. Nelas, Bueno prova a existência do *Bowl Sóliton* e do *Catenoide de Translação* no espaço produto $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ (inspirado por [9]). Além disto, prova um teorema de unicidade do *Bowl Sóliton* (como em [31]) utilizando o princípio do máximo e o método de Reflexão de Alexandrov.

O princípio do máximo é uma poderosa ferramenta que nos permite investigar o máximo (respectivamente o mínimo) de soluções de um operador linear elíptico. No contexto geométrico, se duas superfícies *cumprem o princípio do máximo* (ver 1.4) e são tangentes em um ponto, então estas superfícies coincidem na vizinhança deste ponto. Este caso denominamos princípio do máximo geométrico (ou princípio da tangência). Embora seja frequente o uso do princípio do máximo na teoria de superfícies com curvatura média constante, encontramos também aplicações em outras classes de superfícies, como veremos neste trabalho. Pode-se encontrar uma boa exposição do princípio do máximo e suas aplicações em [14], [16], [19], e [21].

Uma das mais relevantes aplicações do princípio do máximo é visto no Método de Reflexão de Alexandrov. Este método foi desenvolvido por Alexandrov em [1], onde ele demonstra que uma superfície de \mathbb{R}^3 compacta, conexa, com curvatura média constante é uma esfera geodésica.

As ideias desenvolvidas por Alexandrov neste teorema foram generalizadas e utilizadas em teoremas de existência nos quais a superfície em questão não é necessariamente compacta. Como feito por Schoen em [38], que utilizou o método de Alexandrov em superfícies mínimas. Ainda, o método de Alexandrov foi aplicado no estudo de sólitons de translação no espaço Euclidiano e no espaço produto $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Este último é o principal interesse deste trabalho.

Nesta dissertação, discorreremos sobre os sólitons de translação em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, como feito em [5] e [6]. Prova-se que os sólitons de translação neste espaço produto são também superfícies mínimas em uma métrica conforme e assim, verifica-se que tais superfícies cumprem um princípio de tangência. Entre os principais resultados neste trabalho temos o Teorema de Existência do *Bowl* Sóliton e o Teorema de Unicidade do *Bowl* Sóliton.

Para a prova do Teorema de Existência do *Bowl* Sóliton, apresentada na Seção 3.3, utiliza-se um estudo acerca de sólitons de translação rotacionalmente simétricos. Em particular, prova-se, utilizando a existência da solução de um problema de Dirichlet (ver 2.3) e o Método de Alexandrov, que existe um sóliton de translação em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ rotacionalmente simétrico ortogonal ao eixo de rotação.

O Método de Reflexão de Alexandrov é usado para provar outros importantes resultados neste trabalho. Dentre eles, o Teorema de Unicidade do *Bowl* Sóliton. Verifica-se também (utilizando o Método de Alexandrov) que um sóliton de translação compacto M , com algumas hipóteses geométricas sob sua fronteira, é uma parte do *Bowl* Sóliton.

Além desses resultados, apresentamos a prova de que não existem sólitons de translação compactos sem fronteira, que não existem sólitons de translação cilíndricamente limitados e que há uma estimativa de altura para sólitons de translação compactos.

Nosso objetivo aqui é apresentar uma demonstração detalhada destes teoremas. Assim, no Capítulo 1 apresentamos alguns resultados fundamentais para a prova dos teoremas principais. Destacamos as Seções 1.4 e 1.5 e o Teorema 1.5.

No Capítulo 2, introduzimos a teoria de sólitons de translação, tanto no espaço Euclidiano quanto no espaço produto $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Apresentamos, em linhas gerais, a prova do Teorema de Unicidade do *Bowl* Sóliton em \mathbb{R}^3 . Verificamos que os solitons de translação em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ são superfícies mínimas em um espaço conforme, que estes satisfazem um teorema de princípio da tangência. Analisamos, ainda, um problema de Dirichlet associado aos sólitons de translação em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$.

No Capítulo 3, vemos que os sólitons de translação rotacionalmente simétricos são soluções de uma equação diferencial e apresentamos uma descrição do espaço de fase desta equação. Além disto, exibimos a prova de um lema que garante a existência de um sóliton de translação rotacional. Por fim, expomos a prova do Teorema de Existência do *Bowl* Sóliton.

No Capítulo 4, apresentamos a prova de resultados sobre sólitons de translação compactos, resultados de não existência e estimativa de altura. Finalizamos o trabalho exibindo a demonstração do Teorema de Unicidade do *Bowl* Sóliton em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo faremos uma breve apresentação sobre imersões isométricas e curvatura média, modelos do espaço hiperbólico, produtos Riemannianos, princípio do máximo e Método de Reflexão de Alexandrov. Estes conceitos são fundamentais para o desenvolvimento deste trabalho, especialmente o princípio do máximo e o Método de Alexandrov, os quais são utilizados na prova de teoremas de não-existência e Unicidade do *Bowl* Sóliton.

1.1 Imersões isométricas e curvatura média

Iniciaremos nosso trabalho tratando de imersões isométricas, definindo a segunda forma fundamental e a curvatura média de variedades Riemannianas isometricamente imersas. Discutiremos alguns pontos sobre a curvatura média, importantes para o desenvolver da dissertação. São eles: determinar a curvatura média de uma hipersuperfície ao efetuar uma mudança conforme na métrica do espaço ambiente e desenvolver a fórmula a primeira variação do volume com peso. A abordagem sobre a segunda forma fundamental e curvatura média de imersões isométricas discutido a seguir foram baseados em [13]. Além disso, apresentaremos a fórmula da primeira variação do volume com peso, como em [3].

Sejam \overline{M}^{n+k} uma variedade Riemanniana de dimensão $n+k$, munida de uma métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e $F : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+k}$ uma imersão, em que M é uma variedade diferenciável n -dimensional. Consideremos em M a métrica Riemanniana induzida por F dada da seguinte forma: se $u, v \in T_p M$ então

$$\langle u, v \rangle_p := \langle dF_p(u), dF_p(v) \rangle_{F(p)}.$$

Com tal métrica, F é uma imersão isométrica.

Para todo $p \in M$, existe uma vizinhança U de p tal que F restrita a U é um mergulho, de modo que $F(U)$ é uma subvariedade de \overline{M} . Como os cálculos a seguir serão locais, no que segue, identificaremos para cada $p \in M$, U com $F(U)$, $q \in U$ com $F(q) \in F(U)$ e $T_q M$ com $T_{F(q)} F(M)$. Assim, para cada $p \in M$, podemos escrever

$$T_p \overline{M} = T_p M \oplus (T_p M)^\perp$$

em que $(T_p M)^\perp$ denota o complemento ortogonal de $T_p M$ em $T_p \overline{M}$. Neste caso, escrevemos para cada $v \in T_p \overline{M}$, $v = v^T + v^\perp$, sendo que v^T e v^\perp denotam, respectivamente, a parte tangente e normal de v em relação a M . Pode-se mostrar que, quando consideramos um campo de vetores X em M , podemos estendê-lo localmente X a um campo $\overline{X} \in \mathfrak{X}(\overline{M})$. Esta extensão não é necessariamente única.

Dessa forma, sejam X e Y campos de vetores em M e \overline{X} , \overline{Y} suas respectivas extensões locais, considerando-se a métrica induzida, podemos verificar que a conexão de Levi-Civita em M é dada por

$$\nabla_X Y = \left(\overline{\nabla_{\overline{X}} \overline{Y}} \right)^T,$$

onde $\overline{\nabla}$ é a conexão de Levi-Civita em \overline{M} .

No que segue, denote por $(\mathfrak{X}(U))^\perp$ o conjunto de campos de \overline{M} que são normais a $U \subset M$. Nas condições estabelecidas acima, definimos a aplicação $B : \mathfrak{X}(U) \times \mathfrak{X}(U) \rightarrow (\mathfrak{X}(U))^\perp$ por

$$B(X, Y) = \overline{\nabla_{\overline{X}} \overline{Y}} - \nabla_X Y. \quad (1.1)$$

Proposição 1.1. Sejam X e Y em $\mathfrak{X}(U)$, \overline{X} e \overline{Y} extensões locais de X e Y , respectivamente, e $B : \mathfrak{X}(U) \times \mathfrak{X}(U) \rightarrow (\mathfrak{X}(U))^\perp$ definida em (1.1). Então B é uma aplicação bilinear simétrica que não depende das extensões \overline{X} e \overline{Y} .

Demonstração. A condição de bilinearidade segue imediatamente do fato de ∇ ser uma conexão afim. Observe que, em M , $[\overline{X}, \overline{Y}] = [X, Y]$. Assim,

$$\begin{aligned} B(X, Y) &= \overline{\nabla_{\overline{X}} \overline{Y}} - [\overline{X}, \overline{Y}] - (\nabla_X Y - [X, Y]) \\ &= \overline{\nabla_{\overline{Y}} \overline{X}} - \nabla_Y X \\ &= B(Y, X). \end{aligned}$$

de onde concluímos que B é simétrica. Para mostrarmos que B não depende das extensões, consideremos \bar{X}_1 outra extensão de X . Temos que

$$\left(\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y} - \nabla_X Y\right) - \left(\bar{\nabla}_{\bar{X}_1}\bar{Y} - \nabla_X Y\right) = \bar{\nabla}_{\bar{X} - \bar{X}_1}\bar{Y}.$$

Note que $\bar{X} - \bar{X}_1$ se anula em U e então, em U temos que

$$\left(\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y} - \nabla_X Y\right) - \left(\bar{\nabla}_{\bar{X}_1}\bar{Y} - \nabla_X Y\right) = 0.$$

Analogamente, tomando outra extensão \bar{Y}_1 de Y , como $\bar{Y} - \bar{Y}_1$ ao longo de trajetórias de X em M se anula, provamos que B não depende da extensão de Y . \square

Pela proposição acima, $B(X, Y)(p)$ depende apenas de X e Y em p . No que segue, escrevendo $x = X(p)$ e $y = Y(p)$, então denotaremos $B(X, Y)(p)$ por $B(x, y)$, de forma que $x, y \in T_p M$ e $B(x, y) \in (T_p M)^\perp$. Assim, definimos a forma bilinear simétrica $H_\eta(x, y) := \langle B(x, y), \eta \rangle$ em que $\eta \in (T_p M)^\perp$. Através dela, podemos definir também a segunda forma fundamental.

Definição 1.1. A segunda forma fundamental de uma imersão isométrica F em p segundo o vetor normal η é a aplicação $II_\eta : T_p M \rightarrow T_p M$ dada por

$$II_\eta(x) = H_\eta(x, x).$$

Observe que, como H_η é uma aplicação bilinear e simétrica, podemos associar a H_η uma aplicação linear $S_\eta : T_p M \rightarrow T_p M$, auto-adjunta, tal que

$$H_\eta(x, y) = \langle S_\eta(x), y \rangle.$$

Além disso, como pode ser visto em [13, Capítulo VI], a aplicação S_η satisfaz $S_\eta x = -\left(\bar{\nabla}_x N\right)^T$, em que N é uma extensão local de η normal a M . Denominaremos S_η de *operador forma*.

Estamos interessados em estudar o caso em que a diferença entre a dimensão n de M e a dimensão $n + k$ de \bar{M} é 1, ou seja, $k = 1$. Neste caso, denominaremos $F : M \rightarrow \bar{M}$ como uma hipersuperfície. Para simplificar a notação e terminologia, identificaremos M com $F(M)$ e escreveremos $M^n \subset \bar{M}^{n+1}$. Diremos neste caso que M^n é uma hipersuperfície de \bar{M}^{n+1} . Além disso, nos restringiremos ao caso em que M e \bar{M} são orientáveis e estão orientadas. Neste caso, fica determinado um único vetor unitário normal unitário $\eta \in (T_p M)^\perp$, para todo $p \in M$, no

seguinte sentido: se e_1, \dots, e_n é uma base na orientação de M , então e_1, \dots, e_n, η é uma base na orientação de \overline{M} .

Dessa maneira, a *curvatura média de M* é dada como na definição abaixo.

Definição 1.2. Sejam M uma hipersuperfície de \overline{M} , $p \in M$ e $\eta \in (T_p M)^\perp$ o vetor normal de M em p . Definimos a curvatura média (não normalizada) $H_M(p)$ de M em p como o traço do operador forma S_η em p .

Seja e_1, \dots, e_n uma base ortonormal em $T_p M$ e denotemos $h_{ij} := H_\eta(e_i, e_j)$. Então, a curvatura média H_M pode ser escrita como

$$H_M = \sum_{i=1}^n h_{ii}.$$

Observe que a curvatura média depende da métrica dada no espaço ambiente. Além disso, sendo S_η auto-adjunta, existe uma base ortonormal e_1, \dots, e_n de autovetores de S_η , isto é, $S_\eta e_i = \lambda_i e_i$. Neste caso, dizemos que e_i e λ_i são as direções principais e as curvaturas principais de M . Segue da definição da curvatura média que $H_M = \sum_{i=1}^n \lambda_i$.

Posteriormente, provaremos um teorema em que é necessário relacionar a curvatura média de uma superfície M em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, munido de uma métrica g , com a curvatura média de M tomando uma métrica conforme a g em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Para isto, precisamos do seguinte resultado ([13, Exercício 5, Capítulo VIII]).

Proposição 1.2. Sejam M uma variedade Riemanniana munida da métrica g , $\mu : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável e $\tilde{g} := \mu g$ uma métrica em M conforme à g . Consideremos ∇ e $\tilde{\nabla}$ as conexões Riemannianas de g e \tilde{g} , respectivamente. Então, para todo X e Y em $\mathfrak{X}(M)$ temos que

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \frac{1}{2\mu} [(X\mu)Y + (Y\mu)X - g(X, Y)\nabla\mu],$$

onde $\nabla\mu$ denota o gradiente de μ calculado na métrica g , isto é, $X(\mu) = g(X, \nabla\mu)$.

Demonstração. Provaremos que $\tilde{\nabla}$ é a conexão de Levi-Civita em (M, \tilde{g}) , ou seja, $\tilde{\nabla}$ é uma conexão afim, simétrica e compatível com a métrica \tilde{g} .

Sejam X, Y, Z campos de vetores em M e $f, h : M \rightarrow \mathbb{R}$ funções em M . Os itens (i), (ii) e (iii) a seguir nos garantem que $\tilde{\nabla}$ é uma conexão afim.

i)

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_{fX+hY}Z &= \nabla_{fX+hY}Z + \frac{1}{2\mu} [(fX+hY)(\mu)Z] \\
&+ \frac{1}{2\mu} [(Z\mu)(fX+hY) - g(fX+hY, Z)\nabla\mu] \\
&= f\nabla_XZ + h\nabla_YZ + \frac{1}{2\mu} [fX\mu Z + hY\mu] \\
&+ \frac{1}{2\mu} [(Z\mu)fX + (Z\mu)hY - fg(X, Z)\nabla\mu - hg(Y, Z)\nabla\mu] \\
&= f \left[\nabla_XZ + \frac{1}{2\mu} (X\mu Z + Z\mu X - g(X, Z)\nabla\mu) \right] \\
&+ h \left[\nabla_YZ + \frac{1}{2\mu} (Y\mu Z + Z\mu Y - g(Y, Z)\nabla\mu) \right] \\
&= f\tilde{\nabla}_XZ + h\tilde{\nabla}_YZ;
\end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_X(Y+Z) &= \nabla_X(Y+Z) + \frac{1}{2\mu} [X(\mu)(Y+Z) + (Y+Z)\mu X] \\
&+ \frac{1}{2\mu} [-g(X, Y+Z)\nabla\mu] \\
&= \nabla_XY + \nabla_XZ + \frac{1}{2\mu} [X\mu Y + X\mu Z + Y\mu X + Z\mu X] \\
&- \frac{1}{2\mu} [g(X, Y)\nabla\mu + g(X, Z)\nabla\mu] \\
&= \nabla_XY + \frac{1}{2\mu} (X\mu Y + Y\mu X - g(X, Y)\nabla\mu) \\
&+ \nabla_XZ + \frac{1}{2\mu} (X\mu Z + Z\mu X - g(X, Z)\nabla\mu) \\
&= \tilde{\nabla}_XY + \tilde{\nabla}_XZ;
\end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_X(fY) &= \nabla_X(fY) + \frac{1}{2\mu} [(X\mu)fY + (fY\mu)X - g(X, fY)\nabla\mu] \\
&= f\nabla_X Y + X(f)Y + \frac{1}{2\mu} [f(X\mu)Y + f(Y\mu)X + fg(X, Y)\nabla\mu] \\
&= f\nabla_X Y + f\frac{1}{2\mu} (X\mu Y + Y\mu X - g(X, Y)\nabla\mu) + X(f)Y \\
&= f\tilde{\nabla}_X Y + X(f)Y.
\end{aligned}$$

Note que a condição de simetria de $\tilde{\nabla}$ decorre imediatamente de ∇ ser simétrica e da simetria de g . Resta-nos verificar que $\tilde{\nabla}$ é compatível com a métrica \tilde{g} , ou seja, basta provarmos que

$$X\tilde{g}(Y, Z) = \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y, Z) + \tilde{g}(Y, \tilde{\nabla}_X Z). \quad (1.2)$$

Denotemos $S(X, Y) = (1/2\mu) [(X\mu)Y + (Y\mu)X - g(X, Y)\nabla\mu]$. Observe que o esquerdo da equação (1.2) é

$$X(\mu g(Y, Z)) = X(\mu)g(Y, Z) + \mu [g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)]$$

e o lado direito é

$$\begin{aligned}
\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y, Z) + \tilde{g}(Y, \tilde{\nabla}_X Z) &= \mu [g(\nabla_X Y, Z) + g(S(X, Y), Z)] \\
&\quad + \mu [g(Y, \nabla_X Z) + g(Y, S(X, Z))].
\end{aligned}$$

Dessa forma, basta verificarmos que

$$X(\mu)g(Y, Z) = \mu [g(S(X, Y), Z) + g(Y, S(X, Z))], \quad (1.3)$$

o que decorre de um cálculo direto. De fato, desenvolvendo as expressões $g(S(X, Y), Z)$, $g(Y, S(X, Z))$ e aplicando $g(\nabla\mu, W) = W(\mu)$, para qualquer $W \in \mathfrak{X}(M)$, obtemos que

$$\begin{aligned}
g(S(X, Y), Z) &= \frac{1}{2\mu} [X(\mu)g(Y, Z) + Y(\mu)g(X, Z) - g(X, Y)Z(\mu)] \\
g(Y, S(X, Z)) &= \frac{1}{2\mu} [X(\mu)g(Y, Z) + Z(\mu)g(X, Y) - g(X, Z)Y(\mu)].
\end{aligned}$$

Portanto, substituindo tais expressões na equação (1.3), o resultado segue. \square

Proposição 1.3. Sejam M uma hipersuperfície de (\bar{M}, g) , f uma função diferenciável em M e \tilde{g} uma métrica conforme a g em \bar{M} definida por

$$\tilde{g} = e^{2f} g.$$

Então, a curvatura média \tilde{H}_M de M em \bar{M} com a métrica \tilde{g} , é

$$\tilde{H}_M = e^{-f} (H_M(p) - (n-1)g(\nabla f, \eta)),$$

em que H_M é a curvatura média de M , ∇f denota o gradiente de f e η é o campo normal unitário em M , dados em relação à métrica g .

Demonstração. Sejam X e Y em $\mathfrak{X}(M)$. Denotaremos por $\tilde{\nabla}_X Y$ a conexão de Levi-Civita de M em relação à métrica \tilde{g} e $\nabla_X Y$ a conexão de M em relação à métrica g . Note que, pela Proposição 1.2 temos:

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + (Xf)Y + (Yf)X - g(X, Y)\nabla f. \quad (1.4)$$

Consideremos $p \in M$, E_i um referencial ortonormal em uma vizinhança de p e η campo unitário normal a M , ambos com respeito a métrica g . Então,

$$\tilde{E}_i = e^{-f} E_i$$

é um referencial ortonormal de (M, \tilde{g}) em uma vizinhança de p e

$$\tilde{\eta} = e^{-f} \eta$$

é um campo de vetor unitário normal a (M, \tilde{g}) em p . Dessa forma, pela equação (1.4), obtemos que

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_{\tilde{E}_j} \tilde{E}_i &= e^{-f} \left(e^{-f} \tilde{\nabla}_{E_j} E_i + E_j(e^{-f}) E_i \right) \\ &= e^{-2f} (\nabla_{E_j} E_i + (E_j f) E_i + (E_i f) E_j - g(E_i, E_j) \nabla f). \end{aligned}$$

Por outro lado, temos que $g(\nabla_{E_j} E_i, \eta)(p) = (B(E_j, E_i), \eta)(p) = h_{ij}(p)$. Analogamente para \tilde{g} . Portanto, como η é ortogonal a E_i e E_j e $g(E_i, E_j) = \delta_{ij}$, obtemos que

$$\begin{aligned}\tilde{h}_{ij} &= \tilde{g}\left(\tilde{\nabla}_{\tilde{E}_j} \tilde{E}_i, \tilde{\eta}\right) \\ &= e^{-f} g\left(\nabla_{E_j} E_i - \delta_{ij} \nabla f, \eta\right).\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}\tilde{H}_M &= \sum_{i=1}^n \tilde{h}_{ii} \\ &= \sum_{i=1}^n e^{-f} g\left(\nabla_{E_i} E_i - \nabla f, \eta\right) \\ &= e^{-f} \left[\sum_{i=1}^n h_{ii} - ((n-1)g(\nabla f, \eta)) \right] \\ &= e^{-f} (H_M - (n-1)g(\nabla f, \eta)).\end{aligned}$$

□

Utilizaremos a Proposição 1.3 acima para mostrar que superfícies mínimas em um espaço conforme a \mathbb{R}^n cumprem o princípio do máximo, em um sentido a ser estabelecido na Seção 1.4. Além disto, através desta proposição, pode-se verificar que sólitons são superfícies mínimas em um espaço conforme (ver Teorema 2.2). Vejamos, a seguir, a Fórmula da Primeira variação do volume com Peso.

1.1.1 Fórmula da Primeira Variação do Volume com Peso

Sejam (\bar{M}^{n+1}, g) uma variedade Riemanniana, $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável e $F : M^n \rightarrow \bar{M}$ uma imersão. Consideraremos em \bar{M} a métrica conforme dada por $\tilde{g} = e^{2f} g$ e, em M , a métrica induzida pela imersão F .

Tomemos coordenadas locais $x = (x_1, \dots, x_n)$ em M e denotamos $\tilde{g}_{ij} = \tilde{g}(\partial x_i, \partial x_j)$, para $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Temos que $d\tilde{\mu} := \sqrt{\det \tilde{g}_{ij}}$ é um elemento de volume de M e, então, o volume de M é dada pela função

$$\mathcal{G}(M) = \int_M d\tilde{\mu}.$$

Em nosso caso, vemos que a função \mathcal{G} pode também ser obtida em termos da métrica g , dado que $\tilde{d}\mu = \sqrt{e^{2f} g_{ij}} = e^f \sqrt{g_{ij}} = e^f d\mu$. Assim, escrevemos a função $\mathcal{G}(M)$ como:

$$\mathcal{G}(M) = \int_M e^f d\mu. \quad (1.5)$$

Definimos $\mathcal{G}(M)$, dada na equação (1.5), como a área de M com peso f . Estamos interessados em deduzir uma fórmula para a primeira variação de \mathcal{G} , feito na Proposição 1.5 abaixo. As ideias aqui desenvolvidas são baseadas na Seção 4 de [3].

Inicialmente, precisamos definir alguns elementos e enunciar dois resultados: a *identidade de Jacobi* e o *Teorema de Divergência*. Neste sentido, definamos a variação

$F : M \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \bar{M}$ com suporte compacto dada por

- $F(p, 0) = p, \forall p \in M$;
- Para p fora de um conjunto compacto $K \subset M$, temos que $F(p, t) = F(p), \forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$,

e consideramos $F_s := \frac{\partial F}{\partial s}$ o campo variacional de F .

No que segue, p é um ponto de M , $\{x_i\}_{i=1}^n$ um sistema de coordenadas ortonormal em torno de p e $M_s := F(M, s)$. Identificaremos $F(p, s) = F(x(q), s)$ com $x(q) = p$ e $F_{x_i}(s) = \frac{\partial}{\partial x_i} F(p, s)$.

Então, para cada s , definimos a métrica em M_s dada por

$$g_{ij}(s) = g(F_{x_i}(s), F_{x_j}(s)).$$

Assim, $\bar{\nabla}_{\bar{Y}} \bar{X}$ e $\nabla_Y X$ são as conexões de Levi-Civita em \bar{M} e em M , respectivamente. Note que $\nabla_Y X = \left(\bar{\nabla}_{\bar{Y}} \bar{X} \right)^T$.

Identificaremos, ainda, f como $f(s) = f \circ F(p, s)$. Dessa forma, temos que $f(s) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ não depende da escolha do sistema de coordenadas em M .

Definamos a função

$$v(s) = e^{f(s)} \frac{\sqrt{\det g_{ij}(s)}}{\sqrt{\det g_{ij}(0)}}.$$

Observe que, assim como f , v também não depende da escolha do sistema de coordenadas em M .

Enunciemos a seguir, sem demonstrar, a Identidade de Jacobi e o Teorema da Divergência. Estas demonstrações não são relevantes para o objetivo desta subseção, no entanto, vemos no Capítulo 4 de [12] que o Teorema da Divergência é uma consequência do Teorema de Stokes,

ou ainda, uma consequência do Teorema de Green (ver [24], *Appendix 6*). A Identidade de Jacobi pode ser consultada [27].

Proposição 1.4 (Identidade de Jacobi). Seja $A_{n \times n}(t)$ uma matriz $n \times n$. Então,

$$\frac{d}{dt} \det A(t) = \text{Tr} \left(\text{adj}(A(t)) \frac{d}{dt} A(t) \right).$$

Teorema 1.1 (Teorema da Divergência). Sejam M uma variedade Riemanniana orientada e X um campo de vetores em M com suporte compacto. Então,

$$\int_M \text{div} X d\mu = 0.$$

Assim, enunciamos e apresentamos uma prova da variação do volume com peso, como obtida por Arezzo em [3]. É importante observar que o resultado de Arezzo considera subvariedades de codimensão qualquer, enquanto aqui nos restringiremos ao caso de hipersuperfícies.

Proposição 1.5. Considerando as hipóteses mencionadas acima, a primeira variação do funcional volume com peso é dada por

$$\frac{d}{ds} \mathcal{G}(M) = \int_M g \left((\nabla f)^\perp - \vec{H}_M, F_s \right) e^f d\mu,$$

onde ∇f é o campo gradiente de f segundo a métrica g .

Demonstração. Primeiramente, determinemos a derivada de $v(s)$. Para isto, observe que

$$\frac{d}{ds} f(s) = \frac{d}{ds} f \circ F(p, s) = df_{F(p, s)} \circ F_s = g(\nabla f(s), F_s).$$

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} v(s) &= \frac{1}{\sqrt{\det g_{ij}(0)}} \left(\sqrt{\det g_{ij}(s)} \frac{d}{ds} e^{f(s)} + e^{f(s)} \frac{d}{ds} \sqrt{\det g_{ij}(s)} \right) \\ &= \frac{\sqrt{\det g_{ij}(s)}}{\sqrt{\det g_{ij}(0)}} e^{f(s)} \frac{d}{ds} f(s) + \frac{e^{f(s)}}{\sqrt{\det g_{ij}(0)}} \frac{1}{2\sqrt{\det g_{ij}(s)}} \frac{d}{ds} \det g_{ij}(s) \\ &= v(s) g(\nabla f(s), F_s) + \frac{e^{f(s)}}{\sqrt{\det g_{ij}(0)}} \frac{1}{2\sqrt{\det g_{ij}(s)}} \frac{d}{ds} \det g_{ij}(s). \end{aligned}$$

Pela Identidade de Jacobi, enunciada na Proposição 1.4, segue que

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{ds} \det g_{ij}(s) &= \text{Tr} \left(\text{adj} [g_{ij}] (s) \frac{d}{dt} [g_{ij}] (s) \right) \\
 &= \det g_{ij}(s) \text{Tr} ([g^{ij}(s)] [g'_{ij}(s)]) \\
 &= \det g_{ij} \text{Tr} \left(\sum_{r=1}^n g^{ir} g'_{rj} \right) \\
 &= \det g_{ij} \sum_{i,j} g^{ij} g'_{ij},
 \end{aligned}$$

onde g^{ij} denota as entradas da matriz inversa de $[g_{ij}]$ e

$$g'_{ij} = \frac{d}{ds} g(F_{x_i}(s), F_{x_j}(s)) = g(\bar{\nabla}_{F_s} F_{x_i}, F_{x_j}) + g(F_{x_i}, \bar{\nabla}_{F_s} F_{x_j}).$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{ds} v(s) &= v(s) g(\nabla f(s), F_s) + \frac{e^{f(s)}}{\sqrt{\det g_{ij}(0)}} \frac{1}{2\sqrt{\det g_{ij}(s)}} \left(\det g_{ij} \sum_{i,j} g^{ij} g'_{ij} \right) \\
 &= v(s) g(\nabla f(s), F_s) + e^{f(s)} \frac{\sqrt{\det g_{ij}}}{\sqrt{\det g_{ij}(0)}} \left(\sum_{i,j} g^{ij} g'_{ij} \right) \\
 &= v(s) \left(g(\nabla f(s), F_s) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} g^{ij} g'_{ij} \right)
 \end{aligned}$$

Considerando um sistema de coordenadas local ortonormal em torno de $p \in M$, temos que $[g_{ij}]$ é uma matriz diagonal. Então $g^{ii} = \frac{1}{g_{ii}} = 1$ e $g^{ij} = 0$, para todo $\forall i \neq j$. Além disto, usando que

a conexão $\bar{\nabla}$ é simétrica, temos que $\bar{\nabla}_{F_s} F_{x_i} = \bar{\nabla}_{F_{x_i}} F_s$. Logo,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \sum_{i,j} g^{ij}(0) g'_{ij}(0) &= \frac{1}{2} \sum_i g'_{ii}(0) \\
&= \sum_i g \left(\bar{\nabla}_{F_s} F_{x_i}(0), F_{x_i}(0) \right) \\
&= \sum_i g \left(\bar{\nabla}_{F_{x_i}} F_s(0), F_{x_i}(0) \right) \\
&= \sum_i g \left(\bar{\nabla}_{F_{x_i}} F_s^\perp(0), F_{x_i}(0) \right) + \sum_i g \left(\bar{\nabla}_{F_{x_i}} F_s^T(0), F_{x_i}(0) \right) \\
&= \sum_i g \left(-S_{F_s^\perp(0)}(F_{x_i}(0)), F_{x_i}(0) \right) + \text{Tr} \left(F_{x_i}(0) \mapsto \bar{\nabla}_{F_{x_i}(0)} F_s^T(0) \right) \\
&= -g(H_M(p), F_s) + \text{div}_M F_s^T(0).
\end{aligned}$$

Isto implica que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds} v(s) \Big|_{s=0} &= e^f \left(g(\nabla f, F_s) - g(H_M(p), F_s) + \text{div}_M F_s^T(0) \right) \\
&= e^f \left(g \left((\nabla f)^\perp, F_s \right) + g \left((\nabla f)^T, F_s \right) - g(H_M(p), F_s) + \text{div}_M F_s^T(0) \right) \\
&= e^f \left(g \left((\nabla f)^\perp - H_M(p), F_s \right) + \text{div}_M F_s^T(0) \right).
\end{aligned}$$

Portanto, a primeira variação de

$$\mathcal{G}(M_s) = \int_M v(s) \sqrt{\det g_{ij}(0)}$$

é dada por

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds} \mathcal{G}(M) &= \int_M \frac{d}{ds} v(s) \Big|_{s=0} \sqrt{\det g_{ij}(0)} \\
&= \int_M e^f \left(g \left((\nabla f)^\perp - H_M(p), F_s \right) + \text{div}_M F_s^T(0) \right) d\mu
\end{aligned}$$

Uma vez que a variação é de suporte compacto, pelo Teorema da Divergência, temos que

$$\frac{d}{ds} \mathcal{G}(M) = \int_M e^f g \left((\nabla f)^\perp - H_M(p), F_s \right) d\mu$$

e o resultado segue. \square

Portanto, por meio dessa proposição, encontramos uma condição necessária e suficiente para garantir quando a hipersuperfície M é um ponto crítico da primeira variação do volume com peso. Isto é, M é ponto crítico de \mathcal{G} quando $H_M = (\nabla f)^\perp$.

Veremos que as superfícies que nos dedicamos a estudar neste trabalho, os sólitons de translação, tanto em \mathbb{R}^3 quanto em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ são pontos críticos de um funcional como \mathcal{G} .

1.2 O Plano Hiperbólico

Nesta seção apresentaremos três modelos para o plano Hiperbólico \mathbb{H}^2 : o do semi-plano superior, o do disco de Poincaré e o de Lorentz-Minkowski. Faremos apenas uma breve introdução sobre estes, enfatizando os principais resultados que utilizaremos no desenvolver do trabalho. No entanto, estes e outros resultados podem ser consultados com mais detalhes em [10], [13] e [37].

O Semi-Plano Superior: Seja \mathbb{R}_+^2 o semi-plano superior em \mathbb{R}^2 dado por

$$\mathbb{R}_+^2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; x_2 > 0\}.$$

Definamos, no mesmo, a métrica Riemanniana

$$g = \frac{1}{x_2^2} (dx_1^2 + dx_2^2).$$

Verifica-se que (\mathbb{R}_+^2, g) é uma variedade Riemanniana isométrica a \mathbb{H}^2 . Neste modelo, as geodésicas são retas verticais e semi-círculos superiores que formam um ângulo reto ao intersectarem o eixo x_1 .

O Modelo do Disco de Poincaré: Seja $\mathbb{D}^2 := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ um disco em \mathbb{R}^2 centrado na origem com raio 1 e $\rho : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função dada por

$$\rho(x_1, x_2) = \frac{2}{1 - (x_1^2 + x_2^2)}.$$

Definimos a métrica \tilde{g} em \mathbb{D}^2 como $\tilde{g} = \rho^2 \langle \cdot, \cdot \rangle$, em que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota o produto interno de \mathbb{R}^2 . Dessa forma, o espaço $(\mathbb{D}^2, \tilde{g})$, é uma variedade Riemanniana denominada *Disco de Poincaré*. Pode-se ver no Capítulo 4 de [10] que as geodésicas do Disco de Poincaré são os arcos das circunferências ortogonais a fronteira \mathbb{S}^1 .

O Modelo do Hiperboloide: Consideramos a forma quadrática $Q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$, temos que Q induz uma métrica semi-Riemanniana \tilde{g} em \mathbb{R}^3 . Neste caso, $(\mathbb{R}^3, \tilde{g})$ é conhecido como *espaço de Lorentz-Minkowski* denotado por \mathbb{L}^3 .

Definimos o *plano hiperbólico* em \mathbb{L}^3 como o conjunto

$$\mathbb{H}^2 := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{L}^3; Q(x_1, x_2, x_3) = -1 \text{ e } x_3 > 0\},$$

munido da métrica induzida por \tilde{g} . Este espaço pode ser visto em \mathbb{R}^3 coma a folha superior de um hiperboloide de duas folhas e é uma variedade Riemanniana com a métrica induzida por \tilde{g} .

Observação 1.1. Em [10], os autores se dedicam a estudar curvas e superfícies no espaço pseudo-Riemanniano \mathbb{R}_v^n . Particularmente, são obtidas importantes informações a cerca do espaço hiperbólico no modelo de Lorentz-Minkowski, as quais resumimos na observação seguinte.

- i) O plano tangente a \mathbb{H}^2 em um ponto $p \in \mathbb{H}^2$ é um subespaço vetorial de \mathbb{L}^3 ;
- ii) Para cada ponto p no espaço hiperbólico, o vetor normal a \mathbb{H}^2 em p é $\eta(p) = -p$;
- iii) Seja $f : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. O gradiente de f na métrica hiperbólica é dado por

$$\nabla_L f(p) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(p), \frac{\partial f}{\partial x_2}(p), -\frac{\partial f}{\partial x_3}(p) \right),$$

em que $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ denota a derivada parcial de f como são dadas em \mathbb{R}^3 .

Observação 1.2. Uma transformação linear $A : \mathbb{L}^3 \rightarrow \mathbb{L}^3$ é chamada *transformação de Lorentz* se A preserva o produtor interno induzido por Q . No Capítulo 4 de [10], mostra-se que as isometrias de \mathbb{H}^2 são dadas pelas restrições de transformações de Lorentz à \mathbb{H}^2 .

Observação 1.3. Seja $p \in \mathbb{H}^2$ e $v \in T_p \mathbb{H}^2$. A geodésica γ em \mathbb{H}^2 tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v$ é dada por

$$\gamma(t) = \cosh(|v|t)p + \sinh(|v|t) \frac{v}{|v|}.$$

De fato, basta observar que $\gamma''(t) = |v|^2 \eta(\gamma(t))$, isto é, o campo γ'' é normal a \mathbb{H}^2 . Logo, $\frac{D\gamma'}{dt}(t) \equiv 0$.

Observação 1.4. Considere o caso particular em que $p = (0, 0, 1)$ e $v = (0, 1, 0)$. Neste caso, temos que $\Gamma(t) = (0, \sinh(t), \cosh(t))$. Para cada $r \in \mathbb{R}$, considere o grupo a 1-parâmetro de

transformações de Lorentz dadas pelas matrizes

$$T_r = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh(r) & \sinh(r) \\ 0 & \sinh(r) & \cosh(r) \end{pmatrix}.$$

Observe que $T_r(\Gamma(t)) = (\Gamma(r+t))$. De acordo com [37], T_r é chamada *translação hiperbólica ao longo de Γ* . Para definir translações hiperbólicas ao longo de uma outra geodésica σ de \mathbb{H}^2 , basta usar a unicidade das geodésicas para encontrar uma transformação de Lorentz $A_{\sigma,\Gamma}$ que leva σ a Γ , realizar a translação ao longo de Γ e depois aplicar $A_{\sigma,\Gamma}^{-1}$ ao resultado encontrado. Além disto, se T_r é uma translação hiperbólica, para cada $q \in \mathbb{H}^2$, pelo Teorema 5.1 de [23], a curva $\alpha_r(q) := T_r(q)$ é uma geodésica.

Nosso objetivo neste trabalho é investigar sólitons de translações imersos na variedade Riemanniana $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Dessa forma, utilizaremos fortemente os resultados apresentados nesta seção e transitaremos entre os modelos do Espaço Hiperbólico que nos referimos. Completamos nosso estudo sobre o espaço $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ tratando de Produtos Riemannianos na seção a seguir.

1.3 Produtos Riemannianos

Como mencionado anteriormente, os resultados apresentados neste trabalho, feito por Bueno em [5] e [6], são desenvolvidos na variedade Riemanniana $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Esta é, em particular, um *produto Riemanniano*. Nesta seção apresentando alguns resultados fundamentais sobre estas variedades. Tais resultados são baseados em [15] e no Capítulo 3 de [35].

Sejam (M_1, g_1) e (M_2, g_2) duas variedades Riemannianas e $M_1 \times M_2$ o produto cartesiano entre elas, este espaço é uma variedade diferencial a qual é conhecida como variedade produto (vide [25]).

Consideremos π_1 e π_2 as projeções naturais do produto cartesiano $M_1 \times M_2$ em M_1 e M_2 , respectivamente. Tomemos um ponto $(p, q) \in M_1 \times M_2$, para quaisquer $u, v \in T_{(p,q)}M_1 \times M_2$, definimos uma métrica Riemanniana em $M_1 \times M_2$ como

$$g(u, v) = g_1(d\pi_1(u), d\pi_1(v)) + g_2(d\pi_2(u), d\pi_2(v)).$$

A métrica dada por esta equação acima é denominada *métrica produto*. Dizemos que $M_1 \times M_2$ munida com tal métrica é um *produto Riemanniano*. Dadas estas definições, podemos

determinar a conexão de Levi-Civita e as geodésicas no produto Riemanniano $M_1 \times M_2$, através de informações sobre as variedades M_1 e M_2 , como faremos nas proposições a seguir.

Primeiramente, como pode ser visto em [25], para cada $(p, q) \in M_1 \times M_2$, podemos identificar o plano tangente de $M_1 \times M_2$ em (p, q) da seguinte maneira:

$$T_{(p,q)}M_1 \times M_2 = T_pM_1 \oplus T_qM_2.$$

Assim, escrevemos um campo $X \in \mathfrak{X}(M_1 \times M_2)$ como $X = X_1 + X_2$ em que $X_1 \in \mathfrak{X}(M_1)$ e $X_2 \in \mathfrak{X}(M_2)$.

Proposição 1.6. Seja ∇^1 a conexão de Levi-Civita em M_1 e seja ∇^2 a conexão de Levi-Civita em M_2 . Então, a conexão de Levi-Civita ∇ em $M_1 \times M_2$ é dada por:

$$\nabla_Y X = \nabla_{Y_1}^1 X_1 + \nabla_{Y_2}^2 X_2.$$

Demonstração. Observe que ∇ está bem definida, provemos que ∇ é uma conexão afim, simétrica e compatível com a métrica produto. Note que, como ∇^1 e ∇^2 são conexões afins, é imediato verificar que ∇ é também uma conexão afim. Provaremos, agora, que ∇ é compatível com a métrica g .

Observe que, pela definição da métrica g , temos que $g(X_i, Y_j) = 0$ para todo $i \neq j$ e para todo campo $X = X_1 + X_2$ e $Y = Y_1 + Y_2$ em $M_1 \times M_2$. Tomemos X, Y e Z campos em $M_1 \times M_2$, então

$$\begin{aligned} Xg(Y, Z) &= Xg(Y_1 + Y_2, Z_1 + Z_2) \\ &= X[g(Y_1, Z_1) + g(Y_2, Z_2)] \\ &= X_1g^1(Y_1, Z_1) + X_2g^2(Y_2, Z_2). \end{aligned}$$

Pela compatibilidade da conexão ∇^1 e ∇^2 com a métrica g^1 e g^2 , respectivamente, concluímos que

$$Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z).$$

Por fim, pela simetria de ∇^1 e ∇^2 , é imediato verificar que ∇ também é simétrica. Logo, pela unicidade do Teorema de Levi-Civita, obtemos que ∇ é a conexão Riemanniana em $M_1 \times M_2$, como queríamos provar. \square

Definiremos o campo $X = X_1 + X_2$ em $M_1 \times M_2$ como um *campo vertical* quando a componente X_1 é identicamente nula. Analogamente, dizemos que X é um *campo horizontal* se $X_2 \equiv 0$. Sejam X e Y dois campos horizontais em $M_1 \times M_2$ e Z um campo qualquer também em $M_1 \times M_2$, pela fórmula de Koszul temos que

$$\begin{aligned}
 g(\nabla_X Y, Z) &= \frac{1}{2} \{Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(X, Y)\} \\
 &+ \frac{1}{2} \{g([X, Y], Z) + g([Z, X], Y) + g([Z, Y], X)\} \\
 &= \frac{1}{2} \{X_1 g_1(Y_1, Z_1) + Y_1 g_1(Z_1, X_1) - Z_1 g_1(X_1, Y_1)\} \\
 &+ \frac{1}{2} \{g_1([X_1, Y_1], Z_1) + g_1([Z_1, X_1], Y_1) + g_1([Z_1, Y_1], X_1)\} \\
 &= g_1(\nabla_{X_1}^1 Y_1, Z_1) \\
 &= g(\nabla_{X_1} Y_1, Z).
 \end{aligned}$$

Logo, $\nabla_X Y$ é também um campo vertical e $\nabla_X Y = \nabla_{X_1}^1 Y_1$. Dessa forma, podemos também verificar que se V e W são campos verticais em $M_1 \times M_2$, então $\nabla_W V$ é um campo vertical e $\nabla_W V = \nabla_{W_2}^2 V_2$. Este resultado é dado na Proposição 56 do Capítulo 3 de [35], a qual enunciaremos a seguir. Através dele, determinamos todas as geodésicas do espaço produto $M_1 \times M_2$.

Proposição 1.7. Sejam $X, Y \in \mathfrak{X}(M_1 \times M_2)$ campos horizontais e $V, W \in \mathfrak{X}(M_1 \times M_2)$ campos verticais. Então,

- 1) $\nabla_X Y$ é um campo vertical e $\nabla_X Y \in \mathfrak{X}(M_1)$;
- 2) $\nabla_W V$ é um campo horizontal e $\nabla_W V \in \mathfrak{X}(M_2)$;
- 3) $\nabla_V X = \nabla_X V = 0$.

Corolário 1.1. Uma curva $\lambda(t) = (\lambda_1(t), \lambda_2(t))$ é uma geodésica em $M_1 \times M_2$ se, e somente se, as projeções de λ_1 e λ_2 em M_1 e M_2 , respectivamente, são geodésicas. Além disto, $M_1 \times M_2$ é um espaço completo quando M_1 e M_2 são também completos.

Observação 1.5. Uma observação importante sobre a geometria dos espaços produto $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ é a existência de difeomorfismos conformes entre estes espaços e abertos $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Ou seja, suas correspondentes métricas produto são conformes à métrica Euclidiana. Este fato será importante para o estudo de sólitons de translação em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. O leitor interessado nos

difeomorfismos mencionados acima poderá consultar [28]. Especificamente para o caso $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, o difeomorfismo dado em [28] é como segue. Considere em \mathbb{H}^2 o modelo do hiperboloide e tome em \mathbb{L}^3 uma base pseudo-ortonormal e_0, e_1 e e_2 tal que $\langle e_0, e_0 \rangle = \langle e_2, e_2 \rangle = 0$, $\langle e_0, e_2 \rangle = -\frac{1}{2}$, $\langle e_1, e_i \rangle = \delta_{1i}$, $0 \leq i \leq 2$. Então $\Psi : \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{R}$ é dado por

$$\Psi(x_0 e_0 + x_1 e_1 + x_2 e_2, z) = \frac{1}{x_0} (x_1, \cos(t), \text{sen}(t)).$$

Feitas essas considerações acerca de produtos Riemannianos, nos dedicaremos agora a estudar superfícies imersas no produto Riemanniano $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Nosso objetivo é verificar que a *função altura* e a *função ângulo* de uma superfície satisfazem uma certa equação, como efetuado no Lema 3.2.1 em [15] para espaços $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$, em que \mathbb{M}^2 é uma variedade Riemanniana.

Primeiramente, definimos a *função altura* $\sigma : \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como a projeção natural em \mathbb{R} . Isto é, $\sigma(p, z) = z$, para cada $(p, z) \in \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Segue que $\nabla \sigma = \partial_z$, em que $\nabla \sigma$ é o gradiente da função altura σ em relação à métrica produto. A altura de uma superfície M imersa em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ é definida como a restrição $h = \sigma|_M$.

Observação 1.6. O campo ∂_z é um campo paralelo. De fato, seja $X = X_1 + X_2$ campo em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, com $X_1 \in \mathfrak{X}(\mathbb{H}^2)$ e $X_2 \in \mathfrak{X}(\mathbb{R})$. Sendo ∂_z é uma base de $\mathfrak{X}(\mathbb{R})$, podemos escrever as componentes do campo X como

$$X_1 = X - g(X, \partial_z) \partial_z \quad \text{e} \quad X_2 = g(X, \partial_z) \partial_z.$$

Assim, pelo Item (3) da Proposição 1.7, temos que

$$\nabla_X \partial_z = \nabla_{X_1}^{\mathbb{H}^2} \partial_z + \nabla_{X_2}^{\mathbb{R}} \partial_z = \nabla_{X_2}^{\mathbb{R}} \partial_z = g(X, \partial_z) \nabla_{\partial_z}^{\mathbb{R}} \partial_z.$$

Por outro lado,

$$g(\nabla_{\partial_z} \partial_z, \partial_z) = \frac{1}{2} \partial_z g(\partial_z, \partial_z) = 0.$$

Logo, o campo $\nabla_{\partial_z} \partial_z = 0$ e, então, $\nabla_X \partial_z = 0$.

Consideramos a superfície M imersa em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ com a métrica induzida e sejam η o campo de vetor normal unitário à M e S o operador forma $SX = -\nabla_X \eta$. Note que, a conexão Riemanniana de M é dada por

$$\nabla_X^M Y = \nabla_X Y - g(SX, Y) \eta. \quad (1.6)$$

Finalmente, definimos a *função ângulo* de M por $\nu(p) = g(\eta, \partial_z)$. Dessa forma, provamos os principais resultados desta seção.

Proposição 1.8. Sejam M uma superfície imersa em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, h a função altura de M , ν a função ângulo de M e S o operador forma. Então, para todo campo $X \in \mathfrak{X}(M)$, temos que

$$\nabla_X^M \nabla h = SX\nu,$$

sendo ∇h o gradiente de h na métrica induzida.

Demonstração. Inicialmente, escrevemos o campo ∂_z como a soma da componente normal a M com a componente tangente T da superfície, ou seja,

$$\partial_z = T + \nu\eta.$$

Como ∂_z é o gradiente da função altura σ , então devemos ter que $T = \nabla h$.

Pela observação feita anteriormente, ∂_z é um campo paralelo. Combinando estes últimos resultados com a equação (1.6), obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_X \partial_z = \nabla_X (\nabla h + \nu\eta) = \nabla_X \nabla h + \nu \nabla_X \eta + d\nu(X)\eta \\ &= \nabla_X^M \nabla h + g(SX, \nabla h)\eta - \nu SX + d\nu(X)\eta \\ &= (\nabla^M \nabla h - \nu SX) + (g(SX, \nabla h) + d\nu(X))\eta. \end{aligned}$$

Por outro lado, note que $g(SX, \nabla h) + d\nu(X)$ é a componente normal e $\nabla^M \nabla h - \nu SX$ é a componente tangente do campo $\nabla_X \partial_z$. Logo, como $\nabla_X \partial_z = 0$, cada uma das suas componentes também são nulas. Em particular,

$$\nabla^M \nabla h = \nu SX.$$

□

Corolário 1.2. Seja Δ_M o operador de Laplace-Beltrami em M . Então, a curvatura média de M satisfaz

$$\Delta_M h = 2H_M \nu. \quad (1.7)$$

Demonstração. Sejam $p \in M$ e $\{e_1, e_2\}$ uma base de T_pM formada por direções principais. Pela definição do operador Δ_M , temos que

$$\Delta_M h(p) = \sum_{i=1}^2 g(\nabla_{e_i}^M \nabla h(p), e_i).$$

Por outro lado, pela Proposição anterior, concluímos que

$$\Delta_M h(p) = \sum_{i=1}^2 g(v(p) S e_i, e_i) = v(p) g(S e_i, e_i) = v(p) H_M(p).$$

□

A equação 1.7 é importante para a provar que não existe sóliton de translação compacto sem bordo. A prova deste resultado será apresentada no último capítulo deste trabalho. Por agora, expomos brevemente uma ferramenta que nos permite comparar localmente duas superfícies: princípio do máximo.

1.4 Princípio do Máximo

Nesta seção faremos uma breve exposição a respeito do princípio do máximo (PM) de Hopf (ver [19]), baseada em [15] e [16]. Enfatizamos o princípio de tangência e o princípio do máximo geométrico, o qual nos permitirá comparar duas hipersuperfícies de \mathbb{R}^{n+1} . Omitiremos a demonstração de alguns resultados, que podem ser vistos com mais detalhes em [15], [16], [19] e [21].

O teorema de princípio do máximo e princípio do máximo geométrico são verificados para operadores definidos no espaço Euclidiano e, conseqüentemente, valem para hipersuperfícies em \mathbb{R}^{n+1} . No entanto, Fontenele e Silva em [17] e Souam em [40] estabelecem um princípio de tangência para casos mais gerais. O nosso principal resultado apresentado nesta seção é provado no Teorema 1.5, onde mostramos que uma superfície mínima em um espaço conforme a \mathbb{R}^{n+1} cumpre o princípio do máximo (em um sentido a ser estabelecido).

Sejam Ω um domínio limitado de \mathbb{R}^n e $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe $C^2(\Omega)$. Definamos o operador linear de segunda ordem L por

$$Lu = \sum_{i,j} a_{ij} \partial_{ij}^2 u(x) + \sum_i b_i \partial_i u(x) + cu(x)$$

em que $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega$, a_{ij} , b_i e c são funções contínuas em Ω , a matriz $A = (a_{ij})$ é simétrica e $\partial_i u(x)$ denota a derivada parcial de u em relação a x_i .

Classificaremos um *operador linear elíptico* como o operador L tal que os coeficientes da matriz A são positivos. Neste caso, sejam $\lambda(x)$ e $\Lambda(x)$ o mínimo e o máximo dos auto valores de $A(x)$, respectivamente, então

$$0 < \lambda(x)|\xi|^2 \leq a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq \Lambda(x)|\xi|^2$$

para todo $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n - \{0\}$. Dizemos que L é *uniformemente elíptico* quando Λ/λ é limitado. Além disto, definimos também um operador *localmente uniformemente elíptico* como segue.

Definição 1.3. Dizemos que o operador L é localmente uniformemente elíptico quando, para todo x_0 , existem constantes λ_{x_0} e Λ_{x_0} tais que

$$\lambda_{x_0}|\xi|^2 \leq \sum_{i,j} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq \Lambda_{x_0}|\xi|^2.$$

Definimos operadores elípticos visto que o princípio do máximo de Hopf é verificado para estes operadores. Uma ideia geral do princípio do máximo é que dada algumas hipóteses sobre o operador L , sendo u satisfazendo $Lu = 0$, temos que se u atinge o máximo no interior de Ω então u deve ser constante.

Enunciemos o teorema do princípio do máximo de Hopf no interior e na fronteira e um corolário que utilizaremos para provarmos o princípio da tangência. Como estamos interessados em uma breve exposição destes conceitos, não iremos prová-los, mas, suas respectivas demonstrações podem ser vistas detalhadamente em [16], [19] e [14].

Teorema 1.2 (Princípio do Máximo no Interior). Seja L um operador uniformemente elíptico em Ω . Suponha que

$$Lu = \sum_{i,j} a_{ij}\partial_{ij}^2 u(x) + \sum_i b_i\partial_i u(x) + cu(x) \geq 0$$

para uma função u em $C^2(\Omega)$. Logo,

- se $c = 0$ e u atinge um máximo em Ω então u é constante em Ω ;
- se $c \leq 0$ e u atinge um máximo não negativo em Ω , então u é constante em Ω .

Teorema 1.3 (Princípio do Máximo na fronteira). Seja L um operador elíptico em Ω com fronteira $\partial\Omega$ duas vezes diferenciável. Consideremos x_0 em $\partial\Omega$ tal que

- $u \in C^1(\Omega)$ em x_0 ;
- x_0 é um ponto de máximo de u em Ω ;
- $\frac{\partial u}{\partial \eta}(x_0) = 0$, sendo η o normal interior de $\partial\Omega$.

Então,

- se $c = 0$ temos que u é constante;
- se $c \leq 0$ e $u(x_0) \geq 0$ temos que u é constante.

Corolário 1.3. Suponha que a fronteira $\partial\Omega$ de Ω é regular,

$$Lu = \sum_{i,j} a_{ij} \partial_{ij}^2 u(x) + \sum_i b_i \partial_i u(x) + cu(x)$$

é um operador uniformemente elíptico com c limitado. Seja $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ com $Lu \geq 0$, $u \leq 0$ em Ω e $x_0 \in \bar{\Omega}$. Assim,

- Se $x_0 \in \Omega$ e $u(x_0) = 0$ então $u \equiv 0$ em uma vizinhança de x_0 ;
- se $x_0 \in \partial\Omega$, $u(x_0) = 0$ e $u \in C^1(\Omega)$ em x_0 e $\frac{\partial u}{\partial \eta}(x_0) \leq 0$, onde η é o normal interior, então u se anula em uma vizinhança de x_0 em $\Omega \cup \{x_0\}$.

Para os propósitos desse trabalho, que irá abordar a curvatura média de gráficos de funções, será conveniente estudar uma classe mais geral de operadores, chamados *operadores quasi-lineares*. Seja $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe $C^0(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$. Dizemos que Q um operador *quasi-linear* quando Q é dado por

$$Q_u := \sum_{i,j} a_{ij}(x, u, \nabla u) \partial_{ij} u + b(x, u, \nabla u)$$

sendo que $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega$, a_{ij} e b são funções C^1 definidas em $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Analogamente a operadores lineares, classificamos o operador Q como elíptico, uniformemente elíptico e uniformemente localmente elíptico.

Em alguns casos, podemos escrever o operador Q na sua *forma divergente*, isto é, Q está na sua forma divergente quando existe uma função vetorial $A(x, z, p) = (A_1(x, z, p), \dots, A_n(x, z, p))$ e uma função escalar B tal que o operador Q é pode ser escrito como

$$Qu = \operatorname{div}(A(x, u, \nabla u)) + B(x, u, \nabla u). \quad (1.8)$$

Exemplo 1.1. Seja M uma hipersuperfície de \mathbb{R}^{n+1} , para cada $p \in M$, podemos tomar uma vizinha de p em que M é o gráfico de uma função diferenciável u definida sobre o plano tangente de M em p . Sem perda de generalidade, identificamos este plano tangente com $\mathbb{R}^n \times \{0\}$. Como provado no Lema 1.2.1 em [18], a curvatura média de M em p satisfaz a seguinte equação:

$$H_M = \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right),$$

ou seja, podemos escrever a equação acima da forma $H_M = \mathcal{M}u$, em que \mathcal{M} é um operador quasi-linear na forma divergente.

Enunciemos um lema que, combinado com o princípio do máximo, nos permitirá provar o teorema a seguir. A prova deste lema pode ser encontrada em [16], [21] e [40]. Quanto ao teorema abaixo, após estabelecermos a condição de hipersuperfícies cumprirem o princípio do máximo, esse é fundamental para a prova do princípio do máximo geométrico.

Lema 1.1. Sejam $\Omega \in \mathbb{R}^n$ um domínio e $u_k : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, para $k = 1, 2$ duas soluções da mesma equação quasilinear $Q(u_k) = 0$. Então, $u := u_1 - u_2$ satisfaz uma equação linear elíptica $Lu = 0$.

Teorema 1.4 (Princípio da tangência). Sejam $u_k : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, para $k = 1, 2$, duas funções diferenciáveis em um domínio convexo Ω , com $x_0 \in \bar{\Omega}$ e $u_k \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$. Assuma que u_k são soluções da mesma equação quase-linear elíptica. Dessa forma,

- Se x_0 é um ponto interior, com $u_1(x_0) = u_2(x_0)$ e $u_1 \leq u_2$ em Ω , então $u_1 \equiv u_2$ em uma vizinhança de x_0 .
- Se x_0 é um ponto de fronteira, com $u_1(x) \equiv u_2(x)$, $u_1 \leq u_2$ e $\frac{\partial u_1}{\partial \eta}(x_0) = \frac{\partial u_2}{\partial \eta}(x_0)$, então $u_1 \equiv u_2$ em uma vizinhança de x_0 .

Demonstração. Definamos $u := u_1 - u_2$. Pelo Lema anterior, u é solução de uma equação linear elíptica $Lu = 0$. Observe que u satisfaz

$$u(x_0) = 0 \quad \text{e} \quad u = u_1 - u_2$$

quando x_0 é um ponto do interior de Ω ou da fronteira $\partial\Omega$. Além disso,

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}(x_0) = \frac{\partial u_1}{\partial \eta} - \frac{\partial u_2}{\partial \eta}(x_0) = 0.$$

Pelo Corolário 1.3, $u \equiv 0$ em uma vizinhança de x_0 . Logo, $u_1 \equiv u_2$ em uma vizinhança de x_0 . \square

Como já mencionado, estamos interessados em utilizar o princípio da tangência para comparar duas superfícies, em um certo sentido. Para isto, suponha que duas hipersuperfícies de \mathbb{R}^{n+1} , M_1 e M_2 , são escritas localmente como o gráfico de uma função u_1 e u_2 , respectivamente, sobre seu plano tangente. Definimos a seguir a condição para que M_i , $i = 1, 2$, cumpra o princípio do máximo.

Definição 1.4. Dizemos que $M_i = \text{graf}(u_i)$, $i = 1, 2$, cumpre o princípio do máximo quando a diferença $u = u_1 - u_2$ verifica uma equação diferencial $Lu \geq 0$ que satisfaz a conclusão do princípio da tangência (Teorema 1.4), em que L é um operador invariante por isometrias de \mathbb{R}^{n+1} .

Exemplo 1.2. Sejam M_1 e M_2 duas hipersuperfícies de \mathbb{R}^{n+1} com curvatura média constante igual a k e denotemos por \mathcal{M} o operador quasi-linear elíptico tal que

$$\mathcal{M}u = \text{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right).$$

Consideremos que, localmente, M_i é o gráfico de u_i . Então, pelo Exemplo 1.1, u_1 e u_2 satisfazem a equação $\mathcal{M}u_i - k = 0$. Pelo Lema 1.1, a função $u := u_1 - u_2$ é solução de um operador linear elíptico. Logo, M_1 e M_2 cumprem o princípio do máximo.

Introduziremos agora, outras duas definições que nos permitirá enunciar princípio do máximo geométrico.

Definição 1.5 (Ponto de Tangência Interior). Sejam M_i , para $i = 1, 2$, duas hipersuperfícies de \mathbb{R}^n e p um ponto no interior de M_i . Dizemos que p é um ponto de tangência interior de M_i quando os planos tangentes $T_p M_1$ e $T_p M_2$ coincidem e quando o campo de vetor normal unitário de M_1 e M_2 em p também coincidem.

Definição 1.6 (Ponto de Tangência na Fronteira). Sejam M_i , para $i = 1, 2$, duas superfícies regulares com fronteiras ∂M_i não-vazia e p ponto da fronteira de M_i . Dizemos que p é ponto de

tangência na fronteira de M_i quando os planos tangentes e os vetores normais a M_i , e conormais a ∂M_i em p coincidem.

Dadas estas definições, podemos finalmente enunciar o princípio do máximo geométrico. Observe que sua demonstração decorre diretamente do Teorema 1.4. Por esta razão, muitas vezes nos referimos ao princípio do máximo geométrico apenas como princípio da tangência.

Proposição 1.9 (Princípio do Máximo Geométrico). Sejam $M_i = \text{graf}(u_i)$, para $i = 1, 2$, que cumprem o princípio do máximo. Suponha que p é um ponto de tangência (no interior ou na fronteira) de M_i tal que existe uma vizinhança de p com $u_1 \leq u_2$. Então, M_1 coincide com M_2 em uma vizinhança de p .

Provaremos, agora, o principal resultado desta seção. Por meio dele, verificaremos no capítulo a seguir que sólitons de translação em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ satisfazem um princípio de tangência análoga ao que enunciamos anteriormente.

Teorema 1.5. Seja $(\tilde{M}^{n+1}, \tilde{g})$ uma variedade Riemanniana conforme a \mathbb{R}^{n+1} . Se M_1 e M_2 são duas superfícies mínimas tangentes em um ponto p , então M_1 e M_2 coincidem em uma vizinhança de p .

Demonstração. Dada uma hipersuperfície $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$, sejam H_M a curvatura média de M em relação à métrica Euclidiana e \tilde{H}_M a curvatura média de M em relação à métrica conforme \tilde{g} . Pela Proposição 1.3, temos que

$$\tilde{H}_M = e^{-\frac{\phi}{2}} (H_M - (n-1) \langle \nabla \phi, \eta \rangle),$$

sendo η o campo vetorial normal a M . Se M é uma hipersuperfície mínima no espaço conforme (ou seja, $\tilde{H}_M \equiv 0$), então

$$H_M - (n-1) \langle \nabla \phi, \eta \rangle = 0.$$

Por outro lado, sem perda de generalidade, dado $p \in M$, podemos tomar uma vizinhança de p em M como sendo o gráfico de uma função u diferenciável definida sobre um aberto do plano tangente de M , o qual identificaremos com $\mathbb{R}^n \times \{0\}$, com coordenadas $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $\eta(p) = \partial_{x_{n+1}}$. Logo, pela equação acima, cada função u satisfaz

$$\text{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right) - (n-1) \langle \nabla \phi(x, u), \eta \rangle = 0, \quad (1.9)$$

em que $\eta = \frac{(\nabla u, -1)}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}}$.

Em particular, se M_1 e M_2 , como na hipótese, são dadas localmente como gráficos de funções u_1 e u_2 , então temos que u_1 e u_2 são soluções de uma mesma equação quasi-linear do tipo $Qu_i = 0$, onde o operador Q é dado por (1.8). Pelo Lema 1.1, $u := u_1 - u_2$ satisfaz a equação linear elíptica Lu , assim, podemos aplicar o princípio do máximo e o resultado segue. \square

Observação 1.7. Na próxima seção veremos o Teorema de Alexandrov para superfícies compactas com curvatura média constante em \mathbb{R}^3 . O propósito ao abordar este teorema é apresentar uma das principais técnicas utilizadas em geometria diferencial, a saber, o Método de Reflexão de Alexandrov, que se baseia fortemente no Princípio do Máximo Geométrico apresentado nesta seção na Proposição 1.9. Aplica-se este princípio para mostrar que uma superfície compacta S com curvatura média constante possui um plano de simetria em toda direção. Para isso, será necessário que duas superfícies $M_i = \text{graf}(u_i)$ que cumpram o princípio do máximo e sejam tangentes em um ponto p , coincidam enquanto são gráficos de u_i e não apenas em uma vizinhança de p . De acordo com Hopf [21], vale tal propriedade uma vez que superfícies de curvatura constante são analíticas.

De fato, de acordo com o Lema 1 do Capítulo 6 de [24], se duas aplicações analíticas $f, g : M \rightarrow M'$, coincidem em um aberto de M , em que M e M' são variedades analíticas, então f e g coincidem em M . Por outro lado, o Teorema 13 do Capítulo 10 de [41] nos diz que uma solução u de classe C^3 de uma equação elíptica da forma $F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0$ é analítica, desde que F seja uma função analítica. Assim, gráficos de tais soluções sobre abertos de \mathbb{R}^2 são superfícies analíticas.

A ideia é então proceder como segue. Sejam M_1 e M_2 duas superfícies que cumprem o princípio do máximo para uma equação elíptica dada por uma função F como acima. Podemos escrever M_i , para $i = 1, 2$, localmente o gráfico de uma função u_i definida sobre o plano tangente. Segue do exposto que M_1 e M_2 coincidem até que uma das destas duas superfícies deixem de ser gráfico. Neste caso, temos um ponto de tangência limite e, pelo princípio do máximo, M_1 e M_2 coincidem novamente em outra vizinhança em que ambas as superfícies são tomadas como o gráfico. O argumento acima mostra que os subconjuntos de M_1 e M_2 em que M_1 e M_2 coincidem são abertos e fechados nas respectivas superfícies. Se M_1 e M_2 são conexas, concluímos que $M_1 = M_2$.

Observação 1.8. As técnicas que apresentamos foram desenvolvidas no espaço \mathbb{R}^{n+1} . No entanto, em [17], os autores provam um princípio de tangência para variedades Riemannianas mais gerais. Neste caso, dizemos que uma subvariedade Riemanniana M^n de \tilde{M}^{n+1} é localmente o gráfico de uma função u , definida em uma vizinhança aberta W da origem de T_pM , com $p \in M$, quando M é parametrizada localmente por

$$\phi(x) = \exp_p(x + u(x)\eta),$$

em que η é o campo normal a M .

Dessa forma, considere M_1 e M_2 hipersuperfícies de \tilde{M} , tangentes em um ponto, localmente gráficos de u_1 e u_2 sobre seus respectivos planos tangentes. Verifica-se em [17] que a função $u := u_1 - u_2$ é solução de um operador elíptico e, assim, obtém-se resultados de comparação destas.

Concluimos que o princípio do máximo é uma ferramenta poderosa para o estudo de superfícies com curvatura média constante, como veremos a seguir, esse princípio foi fundamental para a prova do Teorema de Alexandrov. Além de superfícies com curvatura média constante, vemos em nosso trabalho que os sólitons de translação, tanto em \mathbb{R}^n quanto em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, são exemplos de superfícies que cumprem o princípio do máximo e verificam o princípio da tangência.

1.5 Teorema de Alexandrov

Nesta seção apresentaremos os principais passos para a demonstração do Teorema de Alexandrov, baseados em [16]. O Teorema de Alexandrov é visto na literatura como uma das principais aplicações do princípio do máximo. Além disto, as técnicas abordadas na demonstração de tal teorema tem sido utilizadas por vários pesquisadores para a provar teoremas de unicidade, citamos [6], [18], [31] e [32], [38].

O Método de Reflexão de Alexandrov foi desenvolvido para o caso de superfícies compactas de \mathbb{R}^3 e podem ser estendidas para casos mais gerais. Por exemplo, Schoen [38] aplica as técnicas de Alexandrov em superfícies mínimas; Martín et. al [5] e Bueno [6] utilizam o Método de Reflexão de Alexandrov para provarem a unicidade do *Bowl Sóliton* em \mathbb{R}^n e em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, respectivamente.

Introduziremos algumas notações e definições essenciais para o desenvolvimento da prova do Teorema de Alexandrov. A começar pela definição de *folheação por planos* como segue.

Definição 1.7. Seja Π plano de \mathbb{R}^3 com vetor normal v . Definimos a folheação por planos associados a Π , denotada por $\Pi(t)$, como a família de planos paralelos a Π a uma distância $|t|$, isto é, cada $\Pi(t)$ é dado por

$$\Pi(t) = \{p + tv; p \in \Pi + tv\}.$$

Observe que, os planos $\Pi(t)$ são uma translação de Π na direção do vetor normal v . Dada esta definição, denotaremos por $\Pi^-(t)$ e $\Pi^+(t)$ os semi-espacos dados por

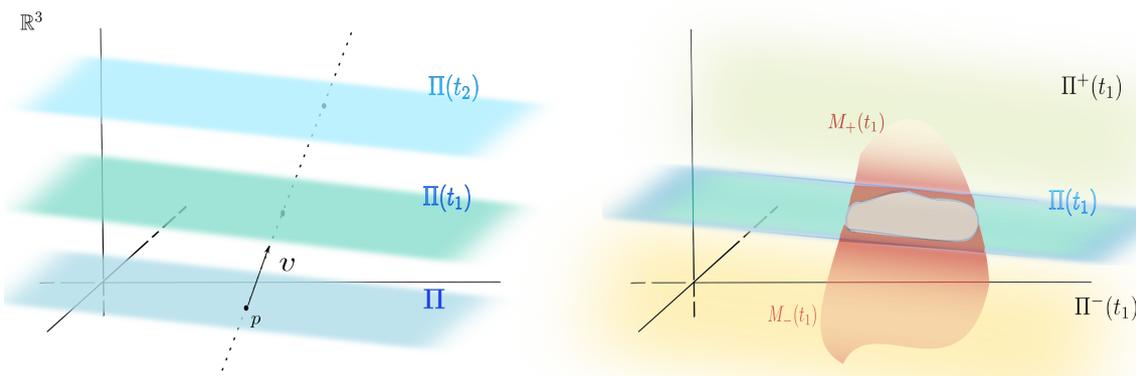
$$\begin{aligned}\Pi^-(t) &= \bigcup_{s \leq t} \Pi(s), \\ \Pi^+(t) &= \bigcup_{s \geq t} \Pi(s).\end{aligned}$$

Para cada subconjunto M de \mathbb{R}^3 , definimos:

$$\begin{aligned}M_-(t) &= M \cap \Pi^-(t), \\ M_+(t) &= M \cap \Pi^+(t).\end{aligned}$$

Vejamos na Figura 1.1 um exemplo destes conceitos apresentados em que o lado direito mostra uma folheação de planos em \mathbb{R}^3 e o lado esquerdo os semi-planos e os conjuntos $M_+(t)$ e $M_-(t)$.

Figura 1.1 Folheação de planos em \mathbb{R}^3 , semi-espacos, $M_+(t)$ e $M_-(t)$.



Por fim, definamos os conjuntos $M_-^*(t)$ e $M_+^*(t)$ como a reflexão de $M_-(t)$ e $M_+(t)$, respectivamente. Enunciaremos um lema, sem prová-lo, que será útil para garantir a conclusão do Teorema de Alexandrov (vide Lem[21], pag.147).

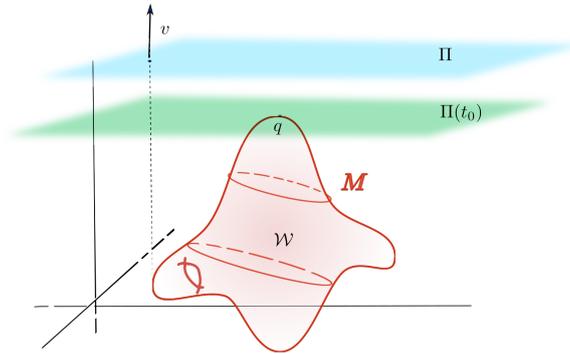
Lema 1.2. Se uma superfície compacta S tem um plano de simetria em toda direção, então S é uma esfera.

Teorema 1.6 (Alexandrov). Seja M uma superfície regular de \mathbb{R}^3 conexa, compacta sem bordo, com curvatura média constante. Então M é uma esfera.

Demonstração (Principais passos): Como estamos considerando M uma superfície conexa e compacta, temos que M separa \mathbb{R}^3 em duas componentes conexas. Seja \mathcal{W} a região compacta de \mathbb{R}^3 tal que $\partial\mathcal{W} = M$. Assim, pela compacidade de \mathcal{W} , para qualquer direção v de \mathbb{R}^3 , existe um Π ortogonal a v tal que $\Pi \cup \mathcal{W} = \emptyset$.

Dessa forma, consideraremos uma folheação de planos Π com $\mathcal{W} \subset \Pi^-(0)$. Podemos decrescer t até que o plano $\Pi(t)$ intercepte \mathcal{W} . Neste caso, denotaremos por t_0 o primeiro instante tal que $\Pi(t_0) \cap \mathcal{W} \neq \emptyset$. A Figura 1.2 mostra um exemplo destas afirmações.

Figura 1.2 Primeiro ponto de contato q com o plano $\Pi(t_0)$.



Assim, existe $\varepsilon > 0$ tal que, para todo $t \in (t_0 - \varepsilon, t_0)$, temos que as condições (a) e (b) são satisfeitas:

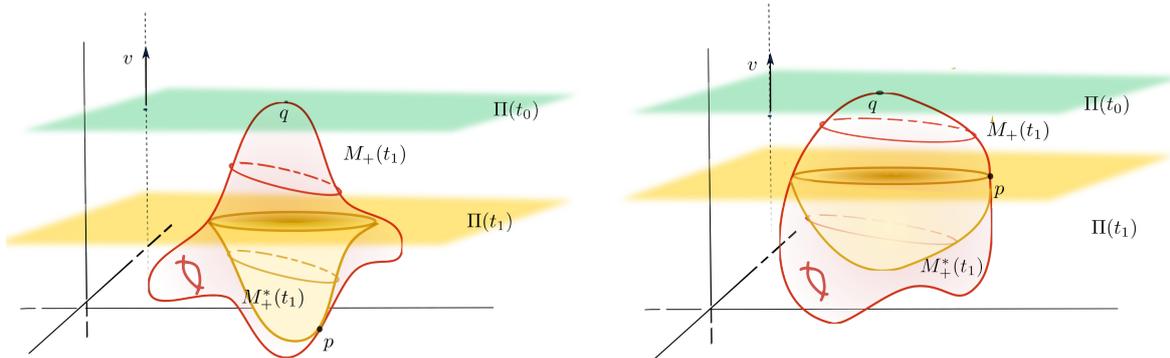
- (a) $\text{int}(M_+^*(t)) \subset \mathcal{W}$;
- (b) $M_+(t)$ é gráfico sobre o plano $\Pi(t)$.

Continuemos a decrescer t até que uma das duas condições acima não seja verdadeira. Tomemos t_1 o primeiro instante tal que $M(t_1)$ satisfaça (a) ou (b). Observe que o vetor normal de $M_+^*(t_1)$ é uma reflexão do normal de $M_+(t_1)$.

Logo, caso a condição (a) não ocorra para $t = t_1$, temos que $M_-(t) \cap M_+^*(t) \neq \emptyset$. Ainda, se $p \in M_-(t) \cap M_+^*(t)$, então p é um ponto de tangência no interior. Pelo princípio do máximo geométrico e analiticidade concluímos que $M_+^*(t_1) = M_-(t)$.

Analogamente, caso a condição (b) não ocorra para $t = t_1$, temos que existe um ponto $p \in M \cap \Pi(t_1)$ tal que p é um ponto de tangência na fronteira. A Figura 1.3 apresenta um exemplo das afirmações feitas acima. Ao lado direito da figura, a condição (a) não é satisfeita e, ao lado esquerdo, a superfície não satisfaz a condição (b).

Figura 1.3 $M_+(t_1)$ não satisfaz as condições (a) e (b).



Concluimos que, em ambos os casos, o plano $\Pi(t_1)$ é um plano de simetria de M na direção v . Repetindo estas mesmas técnicas para qualquer direção em \mathbb{R}^3 , pelo Lema 1.2, segue que M é uma esfera. \square

Estenderemos, naturalmente, as técnicas de reflexão de Alexandrov em superfícies não-compactas de \mathbb{R}^3 para superfícies não-compactas em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Daremos mais detalhes sobre isto no Capítulo 4. Agora, dedicaremos nossa atenção aos conceitos mais básicos da teoria do fluxo de curvatura média e de sólitons de translação.

Capítulo 2

Sólitons de Translação

Neste capítulo introduzimos os sólitons de translação do fluxo de curvatura média, tanto no espaço Euclidiano quanto na variedade produto $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Como veremos, os sólitons de translação constituem soluções do fluxo de curvatura média e têm propriedades interessantes, como exemplo, satisfazer o princípio do máximo.

Começamos discorrendo sobre o fluxo de curvatura média. Em seguida, na Seção 2.2, definimos sólitons de translação no espaço Euclidiano de dimensão $n + 1$ e citamos brevemente alguns resultados sobre tais superfícies. Em particular, apresentamos a prova de Unicidade do *Bowl Sóliton* dada em [31].

Por fim, na Seção 2.3, definimos sólitons de translação no espaço produto $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ e apresentamos alguns resultados fundamentais para a teoria de sólitons de translação neste espaço, como foi feito nas Seções 1 e 2 de [5]. Além disto, introduzimos algumas definições e notações essenciais para a aplicação do Método de Alexandrov em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$.

2.1 Introdução ao Fluxo da Curvatura Média

O estudo do fluxo de curvatura média (FCM) e suas singularidades se consolidou ao longo dos anos e, atualmente, pode-se encontrar na literatura notáveis trabalhos que tratam a respeito deste tema. Citamos [20] e [39], os quais nos baseamos para o desenvolver esta seção.

O fluxo de curvatura média, analiticamente, é retratado por um sistema de equações diferenciais que envolve hipersuperfícies em \mathbb{R}^{n+1} e suas respectivas curvaturas médias. As hipersuperfícies se movimentam, em cada ponto, na direção do seu vetor normal com a velocidade dada pela sua curvatura média, essas ideias são formalizadas na definição a seguir.

Definição 2.1. Seja $F_0 : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão. O fluxo de curvatura média (FCM) é uma família de imersões $F_t : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ com $t \in [0, T)$ tal que $F_t(p) := F(p, t)$ é uma aplicação $F : M \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ satisfazendo o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} F(p, t) = H(p, t)\eta(p, t) \\ F(p, 0) = F_0(p) \end{cases} \quad (2.1)$$

onde $H(p, t)$ é a curvatura média de $F_t(M)$ e $\eta(p, t)$ é um vetor normal a $F_t(M)$ em $F(p, t)$.

Dada uma hipersuperfície inicial $F(M)$, denotaremos $F_t(M) = M_t$ e diremos que M evolui pelo fluxo de curvatura média quando M satisfaz as condições da Definição 2.1.

Um questionamento natural ao se definir o fluxo de curvatura média é quando a equação (2.1) possui solução. Para o caso de hipersuperfícies compactas, [39] garante que tais soluções existem em um tempo finito T . Vejamos um exemplo frequentemente encontrado na literatura sobre a evolução de uma superfície compacta pelo fluxo de curvatura média, a saber, a evolução da esfera S_r^2 de raio r e dimensão 2.

Exemplo 2.1. Seja $S_{r_0}^2$ uma esfera de raio r_0 e suponha que para cada $t \in [0, T)$ a evolução de $S_{r_0}^2$ pelo fluxo de curvatura média é também uma esfera cuja dimensão é 2 e o raio é uma função $r(t)$.

De modo geral, consideremos uma curva $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow S_R^2$, $R > 0$, parametrizada pelo comprimento de arco. Observe que

$$\langle \alpha(s), \alpha'(s) \rangle = 0.$$

Logo, a menos de uma escolha de orientação de S_R^2 , um campo de vetores unitários normais a S_R^2 é dado seguinte forma

$$N(\alpha(s)) = -\frac{\alpha(s)}{R}.$$

Segue da equação acima que sabemos que a curvatura média de S_R^2 é constante $\frac{2}{R}$.

Busquemos então como solução para o fluxo da curvatura média, uma família de superfícies da forma, $F(p, t) = r(t)p$, em que $p \in S_1^2$ e $r(0) = r_0$. Ou seja, cada M_t é uma esfera de raio $r(t)$ e M é a esfera de raio r_0 . Pela definição de fluxo de curvatura média, obtemos que

$$r'(t)p = -\frac{2}{r(t)} \frac{r(t)p}{r(t)}.$$

Portanto, $r(t)$ é solução do problema de valor inicial

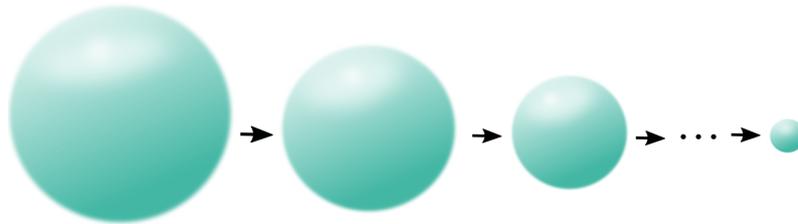
$$r'(t) = -\frac{2}{r(t)}, r(0) = r_0,$$

de forma que

$$r(t) = \sqrt{r_0^2 - 4t}.$$

A Figura 2.1 retrata esta evolução da esfera de raio r pelo FCM, onde as setas indicam o comportamento de S_r^2 após um certo tempo t . Podemos observar que existe um tempo finito $T > 0$ de tal forma que, quando t se aproxima de T , o raio $r(t)$ diminui se aproximando de 0.

Figura 2.1 Esfera de raio r evoluindo pelo fluxo de curvatura média.



Utilizando um princípio do máximo para equações parabólicas, pode-se mostrar unicidade de soluções para o FCM quando a hipersuperfície inicial é compacta (veja [20]). De forma que a solução obtida acima é a única quando consideramos uma esfera como condição inicial.

Vemos neste exemplo que, depois de um certo T finito, a esfera $S_{r(T)}^2$ deixa de ser uma superfície regular. Situações como esta são conhecidos na literatura com singularidades do fluxo de curvatura média. O que acontece nestes casos é que a norma da segunda forma fundamental explode.

No artigo [39], Smoczyk prova que hipersuperfícies compactas tem singularidades em um tempo finito. Pode-se consultar mais a respeito de singularidades do fluxo da curvatura média em [20] e [39].

Questionamos, então, o que acontece com uma superfície não-compacta quando evolui pelo fluxo de curvatura média. Veremos um caso específico de superfícies não-compactas que evoluem pelo FCM e não deixam de ser superfícies regulares. Na verdade, esta evolução se comporta como uma translação da superfície inicial.

2.2 Sólitos de Translação em \mathbb{R}^{n+1}

Nesta seção estudaremos resultados iniciais sobre a teoria de sólitos de translação. Definiremos os sólitos de translação em \mathbb{R}^{n+1} e, motivados por tal definição, definiremos também um sólito de translação no espaço $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Além disso, alguns resultados obtidos na teoria de sólitos de translação em \mathbb{R}^{n+1} serão generalizados para o espaço $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$.

Esta seção é baseada na Seção 2 de [31] e na Seção 3 de [20]. No que segue, consideraremos $F_0 : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão, $F : M \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma variação de F_0 tal que $F(p, 0) = F_0(p)$, para todo p em M e η campo de vetor normal unitário em M .

Definimos um *sólito de translação* (ou *translator*) em \mathbb{R}^{n+1} como uma hipersuperfície M que evolui pelo fluxo de curvatura média da seguinte forma: $\forall t \in \mathbb{R}$ temos que

$$M_t = M + tv \quad (2.2)$$

onde $v \in \mathbb{R}^{n+1}$ é um vetor vertical fixado chamado *vetor de translação*. Equivalentemente, M é um sólito de translação quando a imersão F dada por

$$F(p, t) = F(p, 0) + tv$$

é uma solução do fluxo de curvatura média.

Através da equação (2.2) e da Definição 2.1, obtemos uma caracterização simples para os sólitos de translação em \mathbb{R}^{n+1} dada pela seguinte proposição:

Proposição 2.1. Uma hipersuperfície M em \mathbb{R}^{n+1} é um sólito de translação, a menos de reparametrizações se, e somente se,

$$H_M = \langle \eta, v \rangle. \quad (2.3)$$

Demonstração. Suponha que M é um sólito de translação, isto é,

$$M_t = F(t, p) = F_0(p) + tv \quad (2.4)$$

é uma solução do fluxo de curvatura média

$$\frac{\partial F}{\partial t}(p, t) = H_M(p, t)\eta(p, t) \quad \forall (p, t) \in M \times \mathbb{R}.$$

Então,

$$v = \frac{\partial F}{\partial t}(p, t) = H_M(p, t)\eta(p, t),$$

para todo $(p, t) \in M \times \mathbb{R}$. Como M é congruente a M_t , para todo $t \in \mathbb{R}$ e para cada p , temos que

$$\eta(p, t) = \eta(p) \text{ e } H_M(p, t) = H_M(p). \quad (2.5)$$

Portanto,

$$H_M = \langle \eta, v \rangle.$$

Reciprocamente, suponha que $H_M = \langle \eta, v \rangle$, para algum vetor unitário $v \in \mathbb{R}^{n+1}$. Provaremos que M_t dada em (2.4) é uma solução do fluxo da curvatura média, a menos de reparametrizações. Usando novamente (2.5), temos que

$$\left\langle \frac{\partial F}{\partial t}, \eta(p, t) \right\rangle = \langle v, \eta \rangle.$$

Segue do Corolário 1.3.5 de [29] (veja também [36, Corolário 1.23]) que, a menos de reparametrizações, (2.4) é uma solução para o fluxo da curvatura média. \square

Vejamos agora, como exemplo de sóliton de translação em \mathbb{R}^3 , uma superfície parametrizada \mathcal{G} denominada por *grim reaper*.

Exemplo 2.2. Seja $\mathcal{G} : \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada por

$$\mathcal{G}(x_1, x_2) = (x_1, x_2, -\log(\cos x_1)).$$

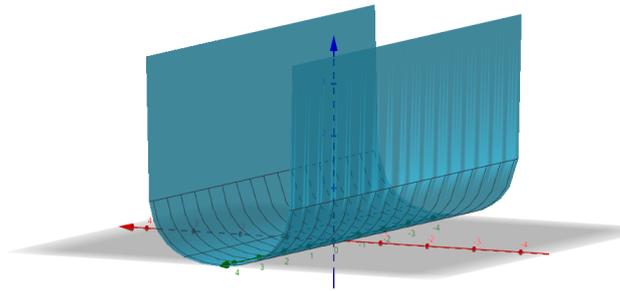
Através de cálculos dos coeficientes da primeira e da segunda forma fundamental, concluímos que

$$N(x_1, x_2) = \left(\frac{-\tan x_1}{\sec^2 x_1}, 0, \frac{1}{\sec^2(x_1)} \right)$$

é um campo de vetor unitário normal a \mathcal{G} e que

$$H(x_1, x_2) = \frac{1}{\sec^2 x_1}$$

é a curvatura média de \mathcal{G} em $\mathcal{G}(x_1, x_2)$. Observe que $H = \langle N, e_3 \rangle$, dessa forma, pela Proposição 2.3, temos que \mathcal{G} é um sóliton de translação em \mathbb{R}^3 .

Figura 2.2 Grim Reaper em \mathbb{R}^3 

O *grim reaper* é um importante exemplo na teoria dos sólitos de translação. Segundo os autores em [30], se um sólito de translação é dado pelo produto cartesiano de uma curva plana e \mathbb{R} , então este pode ser obtido através de uma combinação adequada de rotação e dilatação do *grim reaper*.

Outros importantes exemplos encontrados na literatura são o *Bowl Sólito* e o *Catenoide de Translação*. Em [2], Altschuler e Wu provam a existência de um soliton de translação definido como a seguir.

Definição 2.2 (*Bowl Sólito*). O *Bowl Sólito* imerso em \mathbb{R}^{n+1} é um sólito de translação rotacionalmente simétrico em relação a um eixo vertical passando pela origem de \mathbb{R}^{n+1} , gráfico inteiro e estritamente convexo.

Além disso, Clutterbuck *et al.* [9] mostram que o *Bowl Sólito* é assintótico ao gráfico da função u dada por

$$u(x) = \frac{|x|^2}{2(n-1)} - \frac{1}{2} \log(|x|^2) + O\left(\frac{1}{|x|^2}\right).$$

Os *Catenoides de Translação* são uma família de um parâmetro $\{C_r\}_{r>0}$ em que cada C_r é um sólitos de translação rotacionalmente simétrico. Quando $r \rightarrow 0$, pode-se ver cada *Catenoide de Translação* C_r como dois *Bowl Sólitos* conectados por um pequeno *neck* de raio r (ver [9], [20] e [31]).

Em [22], Ilamanen prova um dos principais resultados da teoria de sólito de translações. Como consequência deste, uma superfície M em \mathbb{R}^3 é um sólito de translação se, e somente se, M é uma superfície mínima no espaço conforme $(\mathbb{R}^3, e^{x_3} \langle \cdot, \cdot \rangle)$, sendo x_3 a terceira coordenada de cada ponto.

Além disto, verifica-se em [31] que os sólitos de translação cumprem o princípio do máximo e, conseqüentemente, o Princípio da Tangência. Assim, utilizando o Método de Alexandrov e o Princípio da Tangência, Martin *et al.* [31] provam que o *Bowl Sólito* é o único

sóliton de translação com um fim assintótico ao gráfico de u . Apresentaremos as principais ideias da prova deste teorema na seção a seguir.

2.2.1 Unicidade do *Bowl* Sóliton em \mathbb{R}^3

Nesta seção apresentaremos a demonstração do Teorema de unicidade do *Bowl* Sóliton em \mathbb{R}^{n+1} , dada por Martin *et. al* em [31]. Utilizaremos o Método de Reflexão de Alexandrov e o princípio de tangência para provarmos que um sóliton de translação, com um fim *assintótico ao Bowl Sóliton* é o *Bowl* Sóliton. Por simplicidade, apresentaremos a prova para $n = 2$ e, conforme observado por Martin *et. al*, a prova para o *Bowl* Sóliton em \mathbb{R}^{n+1} segue uma estrutura análoga.

Introduziremos algumas notações e definições úteis para o desenvolvimento da prova do Teorema de Unicidade. A começar pela Definição de *superfície assintótica ao Bowl Sóliton*, motivada pelo estudo do comportamento assintótico de sólitos de translação gráficos rotacionais, feito por Clutterbuck em [9].

Como mencionamos acima, provou-se em [2] e [9] que o *Bowl* Sóliton em \mathbb{R}^{n+1} é um sóliton de translação rotacionalmente simétrico, gráfico inteiro, estritamente convexo e assintótico ao gráfico de

$$u(x) = \frac{|x|^2}{2(n-1)} - \frac{1}{2} \log |x|^2 + O\left(\frac{1}{|x|}\right),$$

em que $x \in \mathbb{R}^n$.

Definição 2.3. Uma superfície M em \mathbb{R}^3 é assintótica ao *Bowl* quando, para $r \in \mathbb{R}$ suficientemente grande, fora da bola $B(0; r)$, M é o gráfico da função:

$$g(x_1, x_2) = \frac{1}{2} (x_1^2 + x_2^2) - \frac{1}{2} \log (x_1^2 + x_2^2) + O\left(\frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}\right).$$

Esta definição garante que se M é assintótica ao *Bowl* Sóliton, então, fora de uma bola centrada na origem com raio suficientemente grande, a distância entre M e o *Bowl* tende a zero. Definamos, agora, outros elementos que serão utilizados na aplicação do Método de Alexandrov.

Seja Π o plano vertical em \mathbb{R}^3 ortogonal ao vetor $e_1 = (1, 0, 0)$, isto é,

$$\Pi = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1 = 0\}.$$

Denotemos por $\mathfrak{p} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \Pi$ a projeção no plano Π definida como

$$\mathfrak{p}(x_1, x_2, x_3) = (0, x_2, x_3).$$

Consideremos a família de planos verticais $\{\Pi(r)\}_{r \geq 0}$ em que cada plano $\Pi(r)$ é a translação vertical r de Π na direção do vetor e_1 , ou seja,

$$\Pi(r) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1 = r\}.$$

Deste modo, definimos os semi-espacos $\Pi_+(r)$ e $\Pi_-(r)$ e os conjuntos $M_+(r)$ e $M_-(r)$ como:

$$\begin{aligned} \Pi_+(r) &= \bigcup_{t \geq r} \Pi(t) \\ \Pi_-(r) &= \bigcup_{t \leq r} \Pi(t) \\ M_+(r) &= M \cap \Pi_+(r) \\ M_-(r) &= M \cap \Pi_-(r). \end{aligned}$$

Denotaremos por $M_+^*(r)$ a reflexão de $M_+(r)$ em relação ao plano $\Pi(r)$. Observe que a reflexão em relação à $\Pi(r)$ é dada por $\tilde{p} = p + d(p, \mathfrak{p}(p))e_1$, onde d é a distância Euclidiana. Sendo assim, podemos escrever $M_+^*(r)$ como o conjunto de pontos

$$M_+^*(r) = \{(2r - x_1, x_2, x_3); (x_1, x_2, x_3) \in M_+(r)\}.$$

As definições e notações dadas até então podem ser ilustradas como no exemplo dado na Figura 2.3.

Finalmente, definamos a relação “estar ao lado direito” entre dois subconjuntos de \mathbb{R}^3 .

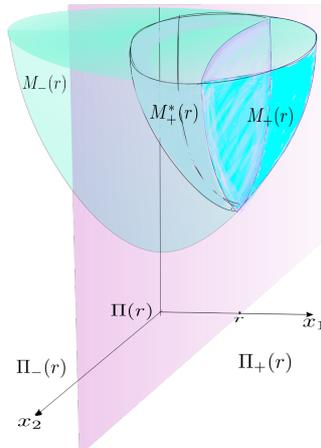
Definição 2.4. Sejam A e B subconjuntos de \mathbb{R}^3 . Dizemos que A está ao lado direito de B e escrevemos $A \geq B$ quando para cada $x \in \Pi$ com

$$\mathfrak{p}^{-1}(x) \cap A \neq \emptyset \quad \text{e} \quad \mathfrak{p}^{-1}(x) \cap B \neq \emptyset,$$

temos que

$$\inf [x_1 \{\mathfrak{p}^{-1}(x) \cap A\}] \geq \sup [x_1 \{\mathfrak{p}^{-1}(x) \cap B\}],$$

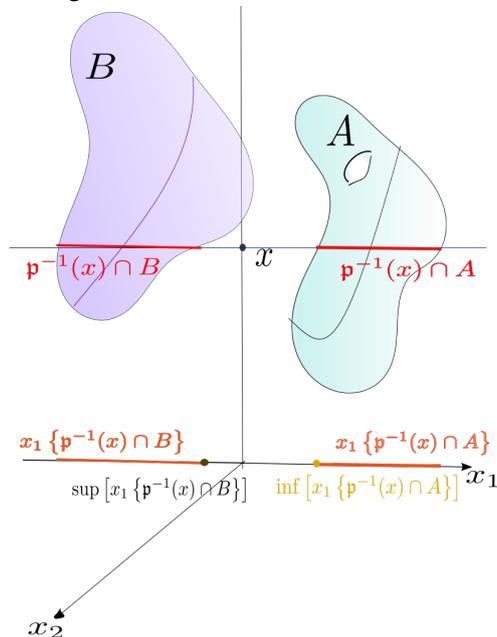
Figura 2.3 Reflexão em relação ao plano $\Pi(r)$.



em que $x_1\{P\}$ denota a primeira coordenada dos pontos em $P \subset \mathbb{R}^3$ e p é a projeção sobre o plano Π .

Observe que a relação “estar do lado direito” não é uma relação bem ordenada, visto que existem subconjuntos de \mathbb{R}^3 que não necessariamente se relacionam desta forma. Podemos ver um exemplo da relação “estar ao lado direito” na Figura 2.4.

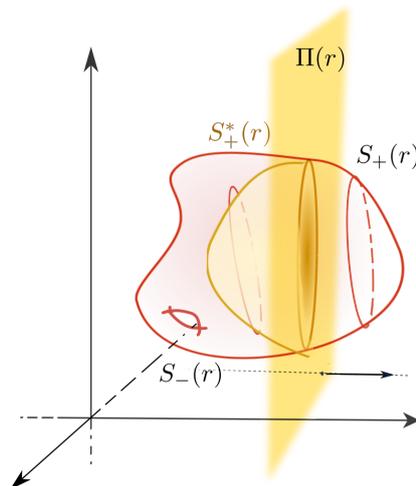
Figura 2.4 A está ao lado direito de B



Uma motivação para a Definição 2.4 acima é dada na prova do Teorema de Alexandrov. No caso de Alexandrov, se estuda superfícies S compactas separando \mathbb{R}^3 em duas componentes conexas. Consideremos a componente conexa compacta \mathcal{W} , cuja fronteira é S e analisamos o

caso em que $S_+^*(r) \subset \text{int}(\mathcal{W})$, como observado na Seção 1.5. Desta forma, quando tomamos um plano vertical $\Pi(r)$ paralelo ao eixo z e consideramos $S_+^*(r)$ a reflexão em relação a tal plano, se $S_+^*(r) \subset \text{int}(\mathcal{W})$, então $S_+^*(r) \geq S_-(r)$. Vemos um exemplo desta situação na Figura 2.5.

Figura 2.5 Motivação para a relação “estar ao lado direito”.



Enunciemos o Teorema de unicidade do *Bowl Sóliton* em \mathbb{R}^3 . As ideias para a sua demonstração serão apresentadas através das provas de três afirmações e utilizando um argumento de simetria. Apresentaremos as linhas gerais das provas das afirmações, detalhando principalmente aquelas etapas em que serão baseados a prova da unicidade do *Bowl Sóliton* em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$.

Teorema 2.1. Seja $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}^3$ um sólito de translação completo, mergulhado em \mathbb{R}^{n+1} , com um único fim e assintótico ao *Bowl Sóliton*. Então $M = f(M)$ é o *Bowl Sóliton*.

(*Ideia da demonstração.*) Nosso objetivo é provar que o sólito M é simétrico em relação a qualquer plano vertical que passa pela origem de \mathbb{R}^3 . Provaremos inicialmente que M é simétrico em relação ao plano vertical Π definido anteriormente e, repetindo o mesmo argumento apresentado a seguir, concluiremos que M é simétrico em relação a qualquer outro plano vertical que passa pela origem de \mathbb{R}^3 . Dessa forma, definimos o conjunto

$$\mathcal{A} = \{r \in [0, +\infty); M_+(r) \text{ é gráfico sobre } \Pi \text{ e } M_+^*(r) \geq M_-(r)\}.$$

Prova-se, inicialmente que o conjunto \mathcal{A} é não vazio e conexo, em seguida, que \mathcal{A} é um subintervalo fechado de $[0, +\infty)$ e, por fim, mostra-se que $0 = \min \mathcal{A}$ e assim teremos que $0 \in \mathcal{A}$. Como veremos a seguir, este fato será fundamental para obter a simetria mencionada acima.

De fato, definamos o conjunto

$$\mathcal{A}^- = \{r \leq 0; M_-(r) \text{ é gráfico sobre } \Pi \text{ e } M_-(r) \leq M_+(r)\},$$

em que o símbolo “ \leq ” denota a relação “estar ao lado esquerdo” definida analogamente a relação “estar ao lado direito”. Assim nas Afirmações 2.1, 2.2 e 2.3, apresentadas a seguir, concluímos que $\mathcal{A}^- = (-\infty, 0]$ e, então, $M_-(0) \leq M_+(0)$. Portanto, $M_-(0) \geq M_+(0)$.

Como $M_-(0) \leq M_+(0)$ concluímos que $M_+^*(0) = M_-(0)$ e Π é um plano de simetria de M . Repetimos estes argumentos anteriores, verificamos que M é simétrica a qualquer outro plano vertical que passa pela origem. Dessa forma, M é uma superfície de rotação, com um fim, que toca o eixo de rotação ortogonalmente. Logo, M é o *Bowl Sóliton*.

No que segue, mostraremos que \mathcal{A} é não vazio e, se $r \in \mathcal{A}$, então $[r, \infty) \subset \mathcal{A}$. Na sequência, mostraremos que \mathcal{A} é um subconjunto fechado de $[r, \infty)$. Finalmente, daremos as linhas gerais para a demonstração de que $0 \in \mathcal{A}$.

Afirmção 2.1. O conjunto \mathcal{A} é não vazio. Além disso, se $r \in \mathcal{A}$, então $[r, \infty) \subset \mathcal{A}$.

Provaremos esta afirmação através dos dois passos a seguir.

Passo 2.1. Pelo comportamento assintótico de M , temos que para $x_1^2 + x_2^2 > r' > 0$ suficientemente grande, podemos escrever M como o gráfico da função

$$g(x_1, x_2) = \frac{1}{2} (x_1^2 + x_2^2) - \frac{1}{2} \log (x_1^2 + x_2^2) + O\left(\frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}\right).$$

Assim, $\frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1, x_2) > 0$ quando $x_1 > r'$. Neste caso, sendo $M_+(r')$ o gráfico de g , o vetor normal η em $M^+(r')$ é dado por

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla g|^2}} \left(\frac{\partial g}{\partial x_1}, \frac{\partial g}{\partial x_2}, -1 \right),$$

e, então, $\langle \eta, e_1 \rangle > 0$. Além disso, $M_+(r')$ não tem auto-interseções, é conexa e, pelo comportamento assintótico de M , vemos que $M_+(r')$ delimita o domínio $M_+(r') \cap \mathfrak{p}(M_+(r'))$ em \mathbb{R}^3 . Assim, concluímos que $M_+(r')$ é gráfico sobre o plano Π . Em particular, para todo $r > r'$ temos que $M_+(r)$ é gráfico sobre Π .

Passo 2.2. Seja $r > r' > R$ suficientemente grande. Pelo comportamento assintótico de M , $M_+^*(r)$ é dada pelo gráfico da função $\tilde{g}(x_1, x_2) := g(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$, em que $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3)$ é a reflexão de $x = (x_1, x_2, x_3)$ em relação ao plano $\Pi(r)$ e x está à direita do plano $\Pi(r)$.

Consideremos (x_1, x_2) tal que $x_1^2 + x_2^2 > R^2$ e $x_1 < r$. Neste caso, $(x_1, x_2, g(x_1, x_2))$ é um ponto de $M_-(r)$ e $(x_1, x_2, \tilde{g}(x_1, x_2))$ está em $M_+^*(r)$. Observe que, pela forma que definimos a função \tilde{g} , podemos escrevê-la como

$$\tilde{g}(x_1, x_2) = \frac{1}{2} \left\{ (2r - x_1)^2 + x_2^2 \right\} - \frac{1}{2} \log \left\{ (2r - x_1)^2 + x_2^2 \right\} + O \left(\frac{1}{\sqrt{(2r - x_1)^2 + x_2^2}} \right).$$

Queremos comparar as superfícies $M_-(r)$ e $M_+^*(r)$ na vizinhança de (x_1, x_2) .

$$\begin{aligned} \tilde{g}(x_1, x_2) - g(x_1, x_2) &= -\frac{1}{2} \left[(2r - x_1)^2 + x_2^2 - (x_1^2 + x_2^2) \right] - \frac{1}{2} \log \left((2r - x_1)^2 + x_2^2 \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \log (x_1^2 + x_2^2) + O \left(\frac{1}{\sqrt{(2r - x_1)^2 + x_2^2}} \right) - O \left(\frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \right) \\ &= 2r(r - x_1) - \frac{1}{2} \log \left(\frac{4r(r - x_1)}{x_1^2 + x_2^2} + 1 \right) \\ &\quad + O \left(\frac{1}{\sqrt{(2r - x_1)^2 + x_2^2}} \right) - O \left(\frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \right) \\ &\geq 2r(r - x_1) - \frac{1}{2} \log \left(\frac{4r(r - x_1)}{x_1^2 + x_2^2} + 1 \right) \\ &\quad - \frac{C}{\sqrt{(2r - x_1)^2 + x_2^2}} - \frac{C}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}. \end{aligned}$$

em que C é uma constante positiva. Por outro lado, sendo $e^t - 1 \geq t$, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que

$$\log \left(\frac{4r(r - x_1)}{x_1^2 + x_2^2} + 1 \right) \leq \frac{4r(r - x_1)}{x_1^2 + x_2^2}$$

e ainda

$$\begin{aligned} (2r - x_1)^2 + x_2^2 &= (r + r - x_1)^2 + x_2^2 \\ &> r^2 + (r - x_1)^2 + x_2^2 \\ &> R^2. \end{aligned}$$

Logo,

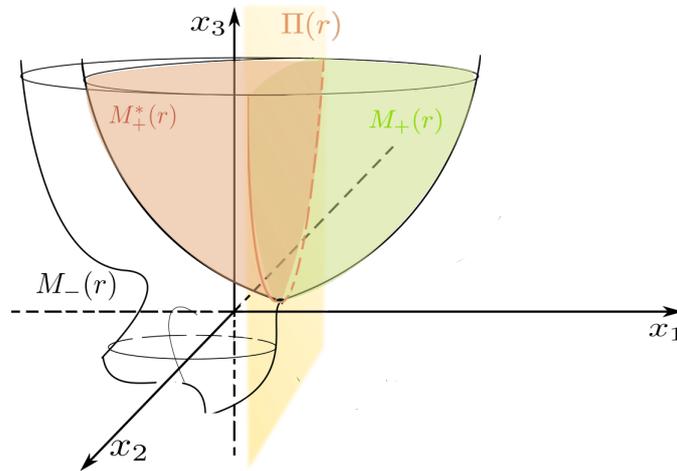
$$\begin{aligned}
 \tilde{g}(x_1, x_2) - g(x_1, x_2) &\geq 2r(r - x_1) - \frac{2r(r - x_1)}{x_1^2 + x_2^2} - \frac{2C}{R} \\
 &= \frac{2r(r - x_1)}{x_1^2 + x_2^2}(x_1^2 + x_2^2 - 1) - \frac{2C}{R} \\
 &> \frac{2r(r - x_1)}{R^2}(R^2 - 1) - \frac{2C}{R} \\
 &> \frac{2R(r - x_1)(R^2 - 1) - 2RC}{R^2}.
 \end{aligned}$$

Tomemos uma constante positiva a que não depende de R e que $r - x_1 > a$. Então, para R suficientemente grande, temos que

$$\tilde{g}(x_1, x_2) - g(x_1, x_2) > \frac{2Ra(R^2 - 1) - 2RC}{R^2} > 0. \quad (2.6)$$

Utilizaremos (2.6) para verificar que $M_+^*(r)$ está ao lado direito de $M_-(r)$, segundo a Definição 2.4. Observe que, pelo comportamento assintótico de M , parte de $M_-(r)$ é simultaneamente dado pelo gráfico de g e por outro gráfico sobre o plano Π .

Figura 2.6 Relação entre $M_-(r)$ e $M_+^*(r)$ em \mathbb{R}^3 .



Para analisarmos a relação entre $M_+^*(r)$ e $M_-(r)$ é suficiente considerarmos a parte em $M_-(r)$ que é dada pelo gráfico sobre Π . Logo, para cada $x \in \Pi$ tal que a curva $p^{-1}(x)$ intersepta $M_+^*(r)$ e $M_-(r)$, estas interseções acontecem em um único ponto em cada uma das superfícies.

Sejam \tilde{x} e y os únicos pontos de interseção da curva $p^{-1}(x)$ com $M_+^*(r)$ e com $M_-(r)$, respectivamente. Para provarmos que $M_+^*(r) \geq M_-(r)$ é suficiente verificarmos que a primeira coordenada de \tilde{x} é maior ou igual à primeira coordenada de y .

Em coordenadas, escrevemos $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{g}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2))$ e $y = (y_1, y_2, g(y_1, y_2))$, em que $x = (x_1, x_2, g(x_1, x_2))$ é a reflexão de \tilde{x} em relação ao plano $\Pi(r)$. Por hipótese, \tilde{x} , x e y estão sob a curva $p^{-1}(x)$, então

$$\tilde{x}_2 = x_2 = y_2 \quad \text{e} \quad g(y_1, y_2) = \tilde{g}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = g(x_1, x_2).$$

Dessa forma, obtemos que

$$\begin{aligned} g(x_1, x_2) - \tilde{g}(x_1, x_2) &= g(y_1, y_2) - g(\tilde{x}_1, y_2) \\ &= \frac{1}{2}(y_1^2 - \tilde{x}_1^2) - \frac{1}{2} \log \left(\frac{y_1^2 + y_2^2}{\tilde{x}_1^2 + y_2^2} \right) + o \left(\frac{1}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}} \right) \\ &\quad - o \left(\frac{1}{\sqrt{\tilde{x}_1^2 + y_2^2}} \right). \end{aligned}$$

Por outro lado, observe que

$$\frac{y_1^2 + y_2^2}{\tilde{x}_1^2 + y_2^2} = \frac{y_1^2}{\tilde{x}_1^2 + y_2^2} + \frac{y_2^2}{\tilde{x}_1^2 + y_2^2} < \frac{y_1^2}{\tilde{x}_1^2 + y_2^2} + 1$$

e, então,

$$-\log \left(\frac{y_1^2 + y_2^2}{\tilde{x}_1^2 + y_2^2} \right) > -\log \left(\frac{y_1^2}{\tilde{x}_1^2 + y_2^2} + 1 \right) \geq -\frac{y_1^2}{\tilde{x}_1^2 + y_2^2}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} g(x_1, x_2) - \tilde{g}(x_1, x_2) &> \frac{1}{2} \left[y_1^2 - \tilde{x}_1^2 - \frac{y_1^2}{\tilde{x}_1^2 + y_2^2} \right] - \frac{C}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}} - \frac{C}{\sqrt{\tilde{x}_1^2 + y_2^2}} \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{(y_1^2 - \tilde{x}_1^2)(\tilde{x}_1^2 - y_1^2) - y_1^2}{\tilde{x}_1^2 - y_1^2} \right] - \frac{C}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}} - \frac{C}{\sqrt{\tilde{x}_1^2 + y_2^2}} \\ &> \frac{R^2(y_1^2 - \tilde{x}_1^2) - 2RC - y_1^2}{2R^2}. \end{aligned}$$

Suponha, por contradição que $y_1^2 - \tilde{x}_1^2 > 0$. Neste caso, para R suficientemente grande, temos que $g(x_1, x_2) - \tilde{g}(x_1, x_2) > 0$. Contradizendo a equação (2.6). Portanto, $M_+^*(r) \geq M_-(r)$. Além disto, se $r_0 > r$ provamos analogamente que $M_+^*(r_0)$ também está à direita de $M_-(r_0)$ e, como foi constatado na afirmação anterior, concluímos que se $r \in \mathcal{A}$, então $[r, \infty) \subset \mathcal{A}$.

Afirmção 2.2. O conjunto \mathcal{A} é um subintervalo fechado de $[0, +\infty)$.

Consideremos uma sequência de números $\{r_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ em \mathcal{A} que converge para r_0 e suponha, por contradição, que $r_0 \notin \mathcal{A}$. Lembremos que, pela afirmação anterior, se $r \in \mathcal{A}$ então $[r, +\infty) \subset \mathcal{A}$. Assim, $\{r_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ decresce para r_0 a menos de subsequências. Logo, se $r_1 > r_0$ e $\delta = r_1 - r_0$ então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $r_n \in (r_0, r_1)$ para todo $n > n_0$. Portanto, $r_1 \in \mathcal{A}$ e concluímos que $(r_0, +\infty) \subset \mathcal{A}$.

Nosso objetivo é provar que $r_0 \in \mathcal{A}$. Pela hipótese de contradição, suponha inicialmente que $M_+(r_0)$ não é gráfico sobre o plano Π . Neste caso, existem ao menos dois pontos diferentes $P = (p_1, p_2, p_3)$ e $Q = (q_1, q_2, q_3)$ em $M_+(r_0)$ tais que $\mathfrak{p}(P) = \mathfrak{p}(Q)$. Então, sem perda de generalidade, podemos supor que $q_1 > p_1$.

Observe que, como $P \in M_+(r_0)$, temos que $p_1 \geq r_0$ e ainda P e Q são pontos de $M_+(p_1)$. Caso $p_1 > r_0$, sendo $(r_0, \infty) \subset \mathcal{A}$, então $M_+(p_1)$ é gráfico sobre o plano Π . Contudo, isto não pode ocorrer, pois P e Q são pontos de $M_+(p_1)$ e estamos supondo que $\mathfrak{p}(P) = \mathfrak{p}(Q)$. Dessa forma, $p_1 = r_0$.

Provaremos que $M_+(r_0)$ é gráfico sobre o plano Π . De fato, tomemos

$$r := \frac{q_1 + 3r_0}{4}.$$

Como $q_1 > p_1 = r_0$, temos que

$$q_1 + 3r_0 > 4r_0 \Leftrightarrow r = \frac{q_1 + 3r_0}{4} > r_0.$$

Isto nos diz que $P \in M_-(r)$ e que $r \in \mathcal{A}$. Por outro lado, note também que

$$q_1 + 3r_0 < 4q_1 \Leftrightarrow r = \frac{q_1 + 3r_0}{4} < q_1.$$

Logo, $Q \in M_+(r)$.

Consideremos \tilde{Q} a reflexão de Q em relação ao plano $\Pi(r)$. Podemos escrever \tilde{Q} em coordenadas como

$$\tilde{Q} = (\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \tilde{q}_3) = (2r - q_1, q_2, q_3) = \left(\frac{3r_0 - q_1}{2}, q_2, q_3 \right).$$

Observe que $\tilde{q}_1 = \frac{3r_0 - q_1}{2} < r_0$ e assim $\tilde{Q} \in M_-(r_0) = M_-(p_1)$. Portanto, existe um $x \in \Pi$ tal que

$$\begin{aligned} \mathfrak{p}^{-1}(x) \cap M_-(r) &= \{P\} \neq \emptyset \\ \mathfrak{p}^{-1}(x) \cap M_+^*(r) &= \{\tilde{Q}\} \neq \emptyset, \end{aligned}$$

e

$$\tilde{q}_1 = \inf [x_1 \{ \mathfrak{p}^{-1}(x) \cap M_+^*(r) \}] < r_0 = \sup [x_1 \{ \mathfrak{p}^{-1}(x) \cap M_-(r) \}].$$

Portanto, $M_+^*(r)$ não está ao lado direito de $M_-(r)$. Contradizendo $r \in \mathcal{A}$. A Figura 2.7, baseada na Figura 5 de [31], auxilia na compreensão deste argumento.

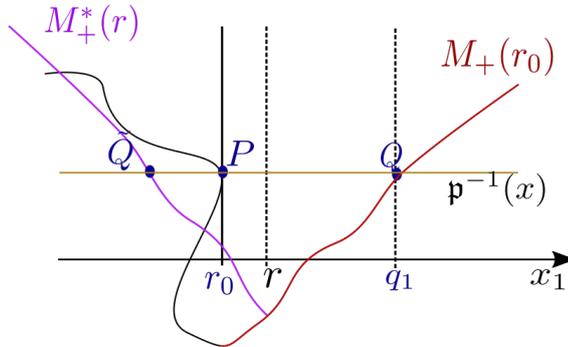


Figura 2.7 Reflexão com respeito ao plano $\Pi(r)$.

Consequentemente, $M_+(r_0)$ é um gráfico sobre o plano Π . Por esta condição e o fato de que $(r_0, \infty) \subset \mathcal{A}$, concluímos por continuidade que $M_+^*(r_0) \geq M_-(r_0)$ e, então, $r_0 \in \mathcal{A}$.

Afirmção 2.3. O mínimo de \mathcal{A} é 0. Em particular, $\mathcal{A} = [0, \infty)$.

A prova desta afirmação é feita por Martin *et al.* em [31] supondo, por contradição, que $s_0 := \min \mathcal{A} > 0$. Em seguida, os autores provam que existe $\varepsilon > 0$ com $s_0 - \varepsilon > 0$ tal que $M_+(s_0 - \varepsilon)$ é gráfico sobre o plano Π e que $M_+^*(s_0 - \varepsilon)$ está à direita de $M_-(s_0 - \varepsilon)$, concluindo que $0 = \min \mathcal{A}$. Também pode ser visto um argumento análogo a este na Seção 3.4 de [18] e

em [30]. No entanto, não daremos detalhes sobre a prova desta afirmação visto que esta não será relevante para o Teorema de Unicidade do *Bowl* em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$.

□

2.3 Sólitos de Translação em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$

Nosso objetivo nesta seção é apresentar a demonstração de alguns resultados fundamentais para a teoria de sólitos de translação no espaço $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, como foi feito por Bueno em [5]. Exibiremos a prova de que, assim como no espaço Euclidiano, os sólitos de translação são também superfícies mínimas com uma certa métrica conforme, enunciaremos um princípio da tangência e apresentaremos um problema de Dirichlet o qual permite investigar a existência de gráficos sólitos de translação.

Por fim, introduziremos algumas notações e definições essenciais para a aplicação do Método de Alexandrov. Utiliza-se a existência de solução do problema de Dirichlet e este método para provar que existe um sólito de translação rotacionalmente simétrico em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$.

A partir de agora, denotaremos por M uma superfície de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ isometricamente imersa, η campo unitário de vetor normal a M e tomaremos em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ a métrica produto usual denotada por $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Assim como em \mathbb{R}^3 , definiremos um sólito de translação em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ como uma superfície M que evolui pelo fluxo de curvatura média como uma translação, como segue.

Definição 2.5. Seja M uma superfície orientável imersa em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Dizemos que M é um sólito de translação quando, para cada $p \in M$, a curvatura média H_M de M satisfaz a seguinte equação:

$$H_M(p)\eta(p) = (\partial_z)^\perp,$$

sendo ∂_z o gradiente da projeção de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ sobre \mathbb{R} .

Equivalentemente, M é um sólito de translação em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ quando sua curvatura média é dada por

$$H_M = \langle \eta, \partial_z \rangle.$$

Um exemplo trivial de sólito de translação em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ é dado pelo plano vertical $\Pi_\gamma = \gamma \times \mathbb{R}$ em que γ é uma geodésica em \mathbb{H}^2 . De fato, Π_γ é uma superfície mínima com $\langle \eta, \partial_z \rangle = 0$. Além dos planos verticais, pode-se encontrar em [5] outros dois exemplos de sólitos de translação em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$: o Catenoide de Translação e o *Bowl Sólito*.

Como em sólitos de translação em \mathbb{R}^3 , o teorema a seguir garante que os sólitos de translação em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ também podem ser descritos como superfícies mínimas com uma certa métrica conforme.

Teorema 2.2. Seja M uma superfície imersa em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ e z a coordenada em \mathbb{R} de um ponto $p \in \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Então, as afirmações são equivalentes:

- 1) M é um sólito de translação em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$;
- 2) M é uma superfície mínima no espaço $(\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}, e^z \langle \cdot, \cdot \rangle)$;
- 3) M é uma superfície mínima com peso z .

Demonstração. Provaremos, primeiramente que a Afirmação 1) é equivalente à Afirmação 2), utilizaremos a Proposição 1.3 que nos diz que se N é uma hipersuperfície de (\bar{N}, g) , f uma função diferenciável em N e $\bar{g} = e^{2f}g$ uma métrica conforme a g , então podemos relacionar as curvaturas médias H_M e \tilde{H}_M através da seguinte equação:

$$\tilde{H}_M = e^{-f} (H_M(p) - 2g(\nabla f, \eta)).$$

No nosso problema, estamos supondo que $N = \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, $\bar{g} = e^z \langle \cdot, \cdot \rangle$ e que M é uma superfície imersa em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Nestas condições, obtemos que

$$\bar{H}_M(p) = e^{-z/2} (H_M - \langle \nabla z, \eta \rangle).$$

Como $\nabla z = \partial z$, em que ∇ é o gradiente em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, concluímos que M é um sólito de translação se, e somente se, M é uma superfície mínima de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. A equivalência entre (1) e (3) segue diretamente da Proposição 1.5. \square

2.3.1 Problema de Dirichlet

Nos dedicamos agora a estudar sólitos de translação em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ gráficos de funções suaves definidas em um certo domínio Ω de \mathbb{H}^2 . Através da proposição a seguir, que é um caso particular da Proposição 6 de [11], vemos que os sólitos de translação gráficos são soluções de um operador diferencial quasilinear elíptico.

Proposição 2.2. Seja $u : \Omega \subset \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação suave e $M = \{(x, u(x)), x \in \Omega\} \subset \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ o gráfico de u . Então M é um sólito de translação se, e somente se, a aplicação u satisfaz a

seguinte equação.

$$\operatorname{div}^{\mathbb{H}} \left(\frac{\nabla^{\mathbb{H}} u}{\sqrt{1 + |\nabla^{\mathbb{H}} u|^2}} \right) = \frac{2}{\sqrt{1 + |\nabla^{\mathbb{H}} u|^2}}.$$

Além disso, o vetor normal de M é dado por

$$\eta = \frac{\nabla^{\mathbb{H}} u - \partial_z}{\sqrt{1 + |\nabla^{\mathbb{H}} u|^2}},$$

em que ∂_z é o gradiente da função altura z , $\nabla^{\mathbb{H}}$ é o gradiente de u em relação a métrica hiperbólica e $\operatorname{div}^{\mathbb{H}}$ é o operador divergente definido em \mathbb{H}^2 .

Investigaremos a existência de sólitos de translação gráficos no espaço $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Fazemos isto resolvendo um *problema de Dirichlet* para hipersuperfícies *f-mínima*. Tal problema foi resolvido por Casteras *et. al* em [8].

Dizemos que uma hipersuperfície Σ imersa em uma variedade Riemanniana $\bar{M} = M \times \mathbb{R}$ é uma hipersuperfície *f-mínima* quando, dada uma função diferenciável $f : \bar{M} \rightarrow \mathbb{R}$, temos que

$$H = \langle \nabla f, N \rangle,$$

onde N denota o vetor normal a Σ . Observe que um sólito de translação em $M \times \mathbb{R}$ com a função $f(p, t) = -t, \forall (p, t) \in M \times \mathbb{R}$ é um gráfico *f-mínima*.

O problema de Dirichlet para gráficos *f-mínima* consiste em determinar uma solução u para o seguinte problema:

$$\begin{cases} \operatorname{div} \frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} = \langle \nabla f, \nu \rangle, & \text{em } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = \phi, \end{cases} \quad (2.7)$$

em que os operadores div e ∇ estão associados à métrica de M . Sendo $\Omega \subset M$ um domínio limitado, η um campo de vetor unitário normal a Σ que aponta para dentro do gráfico de u o qual pode ser escrito como

$$\eta = \frac{(\nabla u, -1)}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}}.$$

Tal problema foi resolvido em [8] provando o teorema seguinte.

Teorema 2.3. Seja $\Omega \subset M^n$ um domínio limitado com fronteira ∂M sendo $C^{2,\alpha}$. Suponha que $f \in C^2(\bar{\Omega} \times \mathbb{R})$ é uma função diferenciável da forma $f(x, t) = m(x) + r(t)$, sendo m e r funções

diferenciáveis. Se

$$F := \sup_{\Omega \times \mathbb{R}} |\nabla f| < \infty, \quad \text{Ric}_\Omega \geq -\frac{F^2}{n-1}, \quad H_{\partial M} \geq F.$$

Então, para todo $\phi \in C(\partial M)$, existe uma solução $u \in C^{2,\alpha} \cap C(\overline{\Omega})$ para a equação (2.7) com valores ϕ na fronteira.

No nosso caso, usaremos este teorema para provar a seguinte proposição:

Proposição 2.3. Seja $\Omega \subset \mathbb{H}^2$ um domínio limitado com fronteira $C^{2,\alpha}$ e considere $\phi \in C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$ para $\alpha \in (0, 1)$. Suponha que $H_{\partial\Omega} \geq 2$ onde $H_{\partial\Omega}$ representa a curvatura geodésica de $\partial\Omega$. Então, o problema de Dirichlet

$$\begin{cases} 2H_M = \frac{2}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} = \text{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} \right) & \text{em } \Omega, \\ u = \phi & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.8)$$

tem uma única solução $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$.

Demonstração. Precisamos verificar que esta proposição satisfaz as hipóteses do Teorema 2.3. Neste caso, tomemos $f(p) = 2\sigma(p)$, para $p \in \Omega$, e definamos

$$F := \sup_{\overline{\Omega} \times \mathbb{R}} |\nabla f| = 2 \sup_{\Omega \times \mathbb{R}} |\partial_z| = 2.$$

Observe que:

- (1) É trivial que $F \leq 2$, satisfazendo a primeira condição de 2.3.
- (2) Como a curvatura de Ricci de \mathbb{H}^2 é igual a -1 , temos $\text{Ric}_\Omega = -1 > -F^2$, cumprindo a segunda hipótese do Teorema 2.3.
- (3) A condição $H_{\partial\Omega} \geq F$ faz parte da hipótese.

Portanto, podemos concluir que existe u satisfazendo a equação (2.7), completando a prova desta proposição. \square

Segue da Observação 1.5 e dos Teoremas 2.2 e 1.5 que dois sólitos de translação M_1 e M_2 em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ satisfazem o princípio da tangência enunciado a seguir. Além disso, os sólitos de translação são superfícies analíticas visto que são superfícies mínimas em um espaço conforme ao espaço Euclidiano.

Teorema 2.4 (Princípio da Tangência). Sejam M_1 e M_2 dois sólitos de translação conexos em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ com suas respectivas fronteiras ∂M_1 e ∂M_2 não vazias. Suponha que vale uma das duas afirmações:

- Existe um $p \in \text{int}(M_1) \cap \text{int}(M_2)$ com $(\eta_1)_p = (\eta_2)_p$, em $\eta_i : M_i \rightarrow \mathbb{S}^2$ é o campo de vetor unitário normal a M_i ;
- Existe um $p \in \partial M_1 \cap \partial M_2$ e $(\xi_1)_p = (\xi_2)_p$ onde ξ_i é o campo de vetor unitário normal interior a ∂M_i .

Então, M_1 e M_2 coincidem em uma vizinhança de p .

Além do Princípio da Tangência, estabeleceremos outro critério para comparar duas superfícies em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Considere S_1 e S_2 duas superfícies de \mathbb{R}^3 , tangentes em um ponto $p \in S_1 \cap S_2$. Na vizinhança de p , tomemos S_i como o gráfico de uma função f_i definida em $T_p S_i$. Vemos no Exercício 17 do Capítulo 3 de [33] que se S_1 está acima de S_2 , ou seja, $f_1 \geq f_2$, então $H_1(p) \geq H_2(p)$, onde H_i denota a curvatura média de S_i . Assim, através dessa afirmação e da Proposição 1.3, obtemos um resultado similar no espaço produto $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$.

Proposição 2.4. Sejam M_1 e M_2 duas superfícies em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ e $p \in M_1 \cap M_2$ um ponto de tangência. Em uma vizinhança de p , escrevemos M_i como o gráfico da função u_i definida em $T_p M_i$. Se M_1 está sobre M_2 , isto é, $u_1 \geq u_2$, então $H_1(p) \geq H_2(p)$.

Demonstração. Considere o difeomorfismo conforme entre $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ e o espaço Euclidiano \mathbb{R}^3 que mencionamos na Observação 1.5, com um fator conforme e^φ . Sejam \tilde{H}_i e H_i as curvaturas médias de M_i com respeito as métricas de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ e Euclidiana, respectivamente. Pelo resultado em [33], mencionado anteriormente, temos que $H_1(p) \geq H_2(p)$. Por outro lado, como p é um ponto de tangência, obtemos que $\eta_1 = \eta_2$, em que η_i denota o normal a M_i . Logo, pela Proposição 1.4, obtemos que

$$\begin{aligned} \tilde{H}_1(p) &= e^\varphi (H_1 - 2g(\nabla\varphi, \eta_1))(p) \\ &= e^\varphi (H_1 - 2g(\nabla\varphi, \eta_2))(p) \\ &\geq (H_2 - 2g(\nabla\varphi, \eta_2))(p) \\ &= \tilde{H}_2(p), \end{aligned}$$

como queríamos provar. □

O princípio de tangência e o problema de Dirichlet são duas ferramentas indispensáveis para o desenvolvimento desta dissertação. Em particular, na seção seguinte, usaremos ambos resultados para provar que existe um sóliton de translação rotacionalmente simétrico (ver 2.1).

2.3.2 O Método de Reflexão de Alexandrov em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$

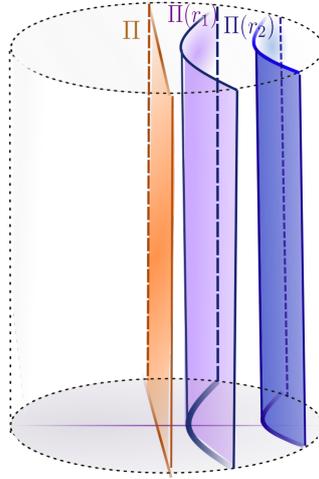
Nesta subseção introduziremos algumas notações e definições fundamentais para estabelecer o Método de Reflexão de Alexandrov em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Utilizaremos este método e a existência de soluções do problema de Dirichlet, visto na subseção anterior, para provarmos que existe um sóliton de translação rotacionalmente simétrico. Além disto, o Método de Alexandrov será usado também no Capítulo 4.

Consideraremos o modelo de Lorentz-Minkowski em \mathbb{H}^2 e transitaremos para o modelo do Disco de Poincaré sempre que necessário. Em geral, recorreremos ao modelo do disco para visualizarmos os elementos geométricos definidos em algumas figuras.

Tomemos $\sigma(t) = (\sigma_1(t), z)$ uma geodésica em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R} \subset \mathbb{L}^3 \times \mathbb{R}$ com $z \in \mathbb{R}$ constante e suponha que $\sigma(0) = \mathbf{o}$ e $\sigma'(0) = e_1$, em que $\mathbf{o} = (0, 0, 1, 0)$ denota a origem de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ e $e_1 = (1, 0, 0, 0)$ é um vetor do plano tangente de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ na origem. Chamaremos σ de geodésica horizontal visto que e_1 é um vetor horizontal. Consideremos $\gamma(t) = (\gamma_1(t), z)$ outra geodésica horizontal em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, tal que $\gamma(0) = \mathbf{o}$ e $\gamma'(0) = e_2$ ortogonal a e_1 . Definamos o plano vertical passando pela origem σ , ortogonal a e_1 , por $\Pi = \gamma_1(t) \times \mathbb{R}$. Pela Observação 1.3, podemos escrever Π como

$$\Pi = \{(0, \sinh(t), \cosh(t), z) : t, z \in \mathbb{R}\}.$$

Seja $\{T_r\}$ a família de translações hiperbólicas (como definidas na Seção 1.2) ao longo de σ sendo $T_r(\sigma(0)) = \sigma(r)$. Dizemos que a família de planos $\{\Pi(r)\}_r$ é uma *folheação de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ por planos verticais* onde cada $\Pi(r) := T_r(\Pi)$ é a translação de Π ao longo de σ . Observe que o parâmetro r é a distância entre $\Pi(r)$ ao plano Π .

Figura 2.8 Folheação de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ por planos verticais, considerando \mathbb{H}^2 no modelo da bola.

Seja M uma superfície de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, definamos também os semi-espacos $\Pi_+(r)$ e $\Pi_-(r)$ e os subconjuntos $M_+(r)$ e $M_-(r)$ exatamente como feito em \mathbb{R}^3 , isto é:

$$\Pi_+(r) = \bigcup_{t \geq r} \Pi(t),$$

$$\Pi_-(r) = \bigcup_{t \leq r} \Pi(t),$$

$$M_+(r) = M \cap \Pi_+(r),$$

$$M_-(r) = M \cap \Pi_-(r).$$

Denotaremos por $M_+^*(r)$ a reflexão de $M_+(r)$ em relação ao plano $\Pi(r)$. Esta reflexão é realizada da seguinte maneira: tomamos $x = (x_1, x_2, \sqrt{1+x_1^2+x_2^2}, x_3) \in M_+(r)$ e uma geodésica horizontal β sobre o plano $\mathbb{H}^2 \times \{x_3\}$, parametrizada pelo comprimento de arco, orientada, tal que $\beta(0)$ intersecta o plano $\Pi(r)$ e $\beta(r_1) = x$, para algum $r_1 > r$. Então, a reflexão \tilde{x} de x em relação ao plano $\Pi(r)$ é o ponto $\tilde{x} = \beta(2r - r_1)$. Em coordenadas, $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \sqrt{1+\tilde{x}_1^2+\tilde{x}_2^2}, x_3)$.

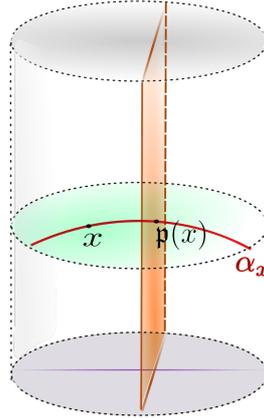
A seguir, definamos a projeção de um ponto no plano Π . Para cada $x \in \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, consideremos a curva $\alpha_x(r) := T_r(x)$, fluxo da translação hiperbólica $\{T_r\}$. Vimos no Capítulo 1 que α_x , assim definida, é uma geodésica. Em particular, pela Observação 1.3,

$$\alpha_x(r) = \cosh(r)x + \sinh(r)e_1.$$

A projeção $\mathfrak{p}(x)$ de x no plano Π é a interseção de $\alpha_x(r)$ com Π . Observe que esta interseção é única e, então, $\mathfrak{p}(x)$ está bem definida.

Tomaremos a curva $\alpha_x(r)$ parametrizada pelo comprimento de arco. Sem perda de generalidade, podemos supor que α_x intersecta o plano Π em $r = 0$, ou seja $\alpha_x(0) = \mathfrak{p}(x)$. Além disto, orientamos de modo que $\alpha_x((-\infty, 0)) \subset \Pi_-(r)$ e $\alpha_x((0, \infty)) \subset \Pi_+(r)$.

Figura 2.9 Projeção no plano Π



Definimos também, para cada $x \in \Pi$, o instante I_x da seguinte forma: se $y \in \mathfrak{p}^{-1}(x)$, então $I_x(y)$ é o único instante r_0 tal que $y = \alpha_x(r_0)$. Note que, sendo α_x uma geodésica parametrizada pelo comprimento de arco, temos que r_0 é a distância entre o ponto y ao plano Π . Denotaremos $I_x(A \cap \mathfrak{p}^{-1}(x))$, para algum subconjunto A de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, como o conjunto de instantes $I_x(y)$ onde $y \in A \cap \mathfrak{p}^{-1}(x)$.

Por fim, definamos a relação entre dois conjuntos de “estar ao lado direito”, motivada pela definição em \mathbb{R}^3 .

Definição 2.6. Sejam A e B subconjuntos de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Dizemos que A está ao lado direito de B quando, para cada $x \in \Pi$ com

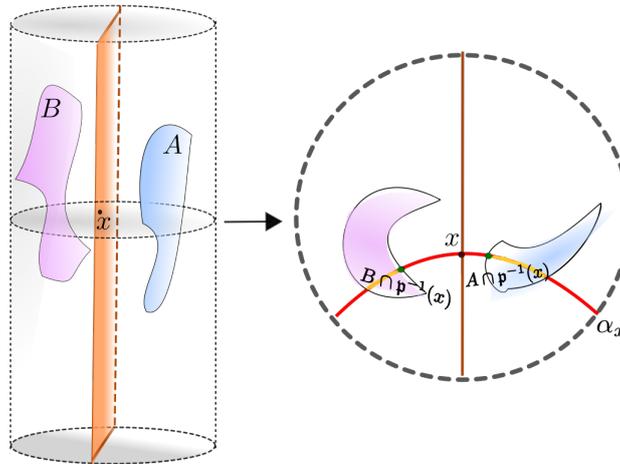
$$\mathfrak{p}^{-1}(x) \cap A \neq \emptyset \text{ e } \mathfrak{p}^{-1}(x) \cap B \neq \emptyset$$

temos que

$$\inf(I_x(\mathfrak{p}^{-1}(x) \cap A)) \geq \sup(I_x(\mathfrak{p}^{-1}(x) \cap B)).$$

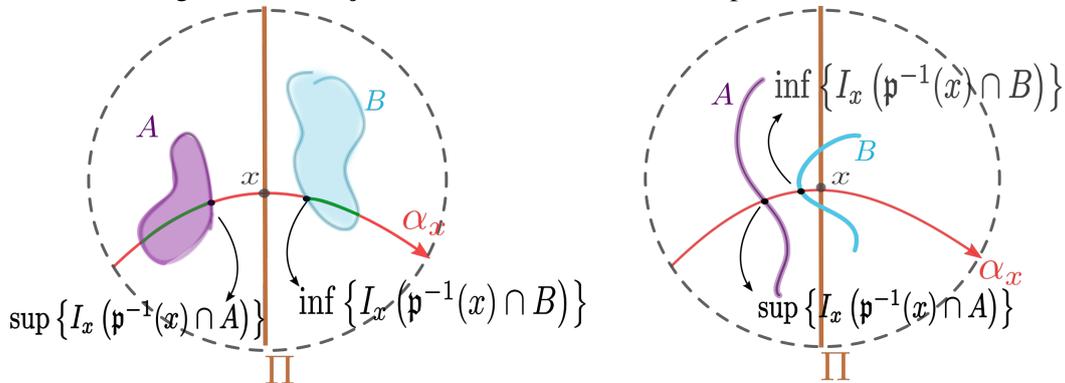
Como podemos ver na Figura 2.9, se $x \in \Pi$ está a uma altura z da origem de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, então a curva $\mathfrak{p}^{-1}(x) = \alpha_x$ está sob o plano horizontal $\mathbb{H}^2 \times \{z\}$. Logo, os conjuntos $A \cap \mathfrak{p}^{-1}(x)$ e $B \cap \mathfrak{p}^{-1}(x)$ estão a uma mesma altura z em relação à origem. Vemos um exemplo da definição de “estar ao lado direito” na Figura 2.10.

Figura 2.10 A está ao lado direito de B



Podemos também interpretar “A está à direita de B” como a condição que, para cada $x \in \Pi$ tal que a curva α_x intersecta A e B, devemos ter que α_x passa primeiro por B antes ou, em simultâneo, que chega em A. Essa relação é análoga ao caso do espaço Euclidiano. Observamos na Figura 2.11 mais exemplos desta relação olhando apenas para uma projeção sobre um plano horizontal.

Figura 2.11 Relação “estar ao lado direito” sobre plano horizontal.



Assim como em \mathbb{R}^3 , a relação “estar ao lado direito” não é bem ordenada, visto que dois subconjuntos de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ não necessariamente se relacionam. Entretanto, é uma boa ordenação para gráficos sobre o plano Π .

O Método da Reflexão de Alexandrov será ferramenta fundamental em demonstrações de resultados deste trabalho. Como primeira aplicação, este método será utilizado para provar um importante resultado sobre a geometria de soluções para o problema de Dirichlet dada na subseção anterior.

Lema 2.1. Existe um disco Ω centrado na origem de \mathbb{H}^2 e uma função $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que a superfície $M := \text{graf}(u)$ é um sólito de translação em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, rotacionalmente simétrico com respeito ao eixo vertical passando pela origem e tocando o eixo de rotação ortogonalmente em $p \in M$. Além disto, M é o único gráfico, a menos de translação, entre os sólitos de translação sobre Ω com dados de Dirichlet constante.

Demonstração. Seja Ω um disco centrado na origem de \mathbb{H}^2 com raio suficientemente pequeno. Pela Proposição 2.3, existe uma aplicação $u \in C^2(\Omega)$ tal que $M := \text{graf}(u)$ é um sólito de translação. Provaremos que qualquer plano vertical passando pela origem de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ é um plano de simetria de M , aplicando o método de Alexandrov.

Consideremos r suficientemente grande de forma que $\Pi(r) \cap M = \emptyset$. Então, decrescemos a distância r até r_0 tal que $\Pi(r_0)$ intersecte M em um primeiro ponto de contato. Neste caso, pode-se decrescer r_0 ainda mais até r_1 tal que $M_+(r_1)$ é gráfico sobre o plano $\Pi(r_1)$ e $M_+(r_1) \geq M_-(r_1)$. Continuemos a decrescer r_1 até uma distância r_2 tal que uma dessas duas condições mencionadas anteriormente não ocorra. Em ambas as situações, temos que $M_-(r_2)$ e $M_+(r_2)$, tem um ponto de tangência p no interior ou na fronteira.

Por outro lado, note que $M_+(r_2)$ é também um sólito de translação. Portanto, podemos utilizar o princípio da tangência (Teorema 2.4) para concluir que $M_+(r_2) = M_-(r_2)$. Logo, $\Pi(r_2)$ é um plano de simetria.

Como M é gráfico sobre o disco Ω , então $\Pi(r_2)$ deve ser também um plano de simetria de Ω e isto só ocorre quando $r_2 = 0$, uma vez que Ω está centrado na origem. Dessa forma, M é simétrica ao plano vertical $\Pi(0) = \Pi$. Analogamente, provamos que M é simétrica a qualquer outro plano vertical que passa pela origem de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Concluimos que M é uma superfície de rotação que passa pela origem e, pela regularidade de M , temos que M deve intersectar o eixo de rotação ortogonalmente. A unicidade, a menos de translação, segue diretamente do princípio da tangência. \square

No que segue, apresentamos mais informações sobre sólitos de translação rotacionalmente simétricos. Em particular, provamos que existe um sólito de translação rotacionalmente simétrico, gráfico inteiro em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, o *Bowl Sólito*.

Capítulo 3

Sólitos de Translação Rotacionais

Neste capítulo apresentamos a prova de que existe um sólido de translação rotacionalmente simétrico, gráfico vertical inteiro em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Este resultado denominamos por Teorema de Existência do *Bowl Sólito* e sua prova é apresentada na Seção 3.3. Para a demonstração do Teorema de Existência do *Bowl Sólito*, utiliza-se o Lema 2.1 e um estudo sobre o espaço de fase de um certo sistema de equações diferenciais.

Na primeira seção, discutimos brevemente acerca de sólidos de translação rotacionais e, em seguida, verificamos que estas superfícies são soluções desse sistema de equações. Assim, a Seção 3.2 é dedicada ao estudo do espaço de fase de tal sistema. Finalizamos o capítulo enunciando um Teorema de Existência dos Catenoides de Translação. Todos os resultados aqui apresentados foram provados na Seção 3 de [5].

3.1 Sólitos de Translação Rotacionalmente Simétricos

Nesta seção apresentamos alguns resultados da teoria de sólidos de translação rotacionalmente simétricos em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Realizaremos um breve estudo acerca de um tal sólido determinando sua curvatura média e verificando que uma parametrização do mesmo é solução de uma certa equação diferencial.

No que segue, consideramos o modelo de Lorentz-Minkowski e definiremos o eixo vertical no espaço $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ como o conjunto $\{(0, 0, 1)\} \times \mathbb{R}$. Seja α uma curva em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, parametrizada pelo comprimento de arco, dada por

$$\alpha(t) = (\sinh r(t), 0, \cosh r(t), w(t)),$$

em que $w, r : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ são funções de classe $C^2(I)$. Ao rotacionar a curva α em relação ao eixo vertical obtemos em uma superfície M imersa em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ parametrizada por:

$$\Psi(t, \theta) = (\sinh r(t) \cos \theta, \sinh r(t) \sen \theta, \cosh r(t), w(t)). \quad (3.1)$$

Através da parametrização de M dada por Ψ , determinamos um campo de vetor normal a M em um ponto $\Psi(r, \theta)$, como mostrado na proposição a seguir.

Proposição 3.1. Seja $M \subset \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ uma superfície de rotação parametrizada por Ψ dada na equação (3.1). Para cada $p = \Psi(t, \theta) \in M$, o vetor normal N de M em p é dado por

$$N(t, \theta) = -(w'(t) \cosh r(t) \cos \theta, w'(t) \cosh r(t) \sen \theta, w'(t) \sinh r(t), r'(t)).$$

Demonstração. Escrevamos o vetor normal N em coordenadas (N_1, N_2, N_3, N_4) . Observe que o vetor $\xi = (\sinh r(t) \cos \theta, \sinh r(t) \sen \theta, \cosh r(t), 0)$ é normal a $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ em \mathbb{L}^4 , de forma que o espaço tangente de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ é dado pelo complemento ortogonal de ξ . Além disso, $\Psi_t = \frac{\partial}{\partial t} \Psi$, $\Psi_\theta = \frac{\partial}{\partial \theta} \Psi$ formam uma base para $T_p M$.

Como N é um vetor no espaço tangente de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, N satisfaz o seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} g(\Psi_\theta, N) = 0 & (3.2) \\ g(\xi, N) = 0 & (3.3) \\ g(\Psi_t, N) = 0, & (3.4) \end{cases}$$

onde g é a métrica produto em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ (considerando em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ a métrica induzida de \mathbb{L}^4). No que segue, tome θ tal que $\sen \theta \neq 0$ e $\cos \theta \neq 0$. Pela equação (3.2), obtemos que $\sen \theta N_1 = \cos \theta N_2$, equivalentemente,

$$\sen \theta \cos \theta N_1 = \cos^2 \theta N_2. \quad (3.5)$$

Pela equação (3.3), obtemos que

$$N_3 \cosh r = N_1 \sinh r \cos \theta + N_2 \sinh r \sen \theta.$$

Assim, multiplicando ambos os lados da equação acima por $\sin \theta$ e substituindo $\sin \theta \cos \theta N_1 = \cos^2 \theta N_2$, temos que

$$N_3 \cosh r(t) \sin \theta = N_2 \sinh r(t)$$

e então

$$\cosh r(t) \sinh r(t) \sin \theta N_3 = \sinh^2 r(t) N_2. \quad (3.6)$$

Por fim, pela equação (3.4), obtemos

$$0 = r' \cosh r \cos \theta N_1 + r' \cosh \sin \theta N_2 - r' \sinh r N_3 + w' N_4.$$

Analogamente, multiplicamos a esta equação por $\sin \theta$ temos que

$$\begin{aligned} 0 &= r'(t) \cosh r(t) \cos \theta \sin \theta N_1 + r'(t) \cosh r(t) \sin^2 \theta N_2 \\ &\quad - r'(t) \sinh r(t) \sin \theta N_3 + w'(t) \sin \theta N_4 \\ &\stackrel{(3.5)}{=} r' \cosh^2 r(t) N_2 - r'(t) \sinh r(t) \sin \theta N_3 + \sin \theta w'(t) N_4 \\ &\stackrel{(3.6)}{=} r' N_2 + w' \cosh r(t) \sin \theta N_4. \end{aligned}$$

Portanto, tomando $N_4 = -r'$, podemos escrever o vetor normal N como segue:

$$N = -(w'(t) \cosh r(t) \cos \theta, w'(t) \cosh r(t) \sin \theta, w'(t) \sinh r(t), r'(t)).$$

□

Agora, podemos determinar a curvatura média de M em função de (t, θ) utilizando a parametrização Ψ e a expressão do normal N dada na proposição acima. Nosso principal interesse em determinar tal curvatura é, supondo que M é um sólito de translação, encontrar uma equação diferencial tal que r é uma solução desta.

Proposição 3.2. Seja M uma superfície em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ dada pela rotação da curva $\alpha(t) = (\sinh r(t), 0, \cosh r(t), w(t))$, parametrizada pelo comprimento de arco. Então, as curvaturas principais de M são

$$k_1 = k_\alpha = r'w'' - r''w' \quad \text{e} \quad k_2 = w' \coth r,$$

em que k_α denota a curvatura geodésica de α . Além disto, a curvatura média de M é dada por

$$2H_M = r'(t)w''(t) - r''(t)w'(t) + w'(t)\coth r(t).$$

Demonstração. Sejam X e Y campos diferenciáveis em M . Denotamos por $\nabla_Y X$, $\tilde{\nabla}_Y X$ e $D_Y X$ as conexões Riemannianas em $M \subset \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R} \subset \mathbb{L}^4$, $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ e em \mathbb{L}^4 , respectivamente. No caso de \mathbb{L}^4 , $D_Y X$ é a derivação usual. Seja S o operador forma dado por $SX = -(\tilde{\nabla}_X N)^T$, em que T é a componente tangente de $\tilde{\nabla}_Y X$.

Tomamos o campo normal N dado na Proposição 3.1, note que $g(N, Y) = 0$. Logo, pela compatibilidade da conexão com a métrica, temos que $g(-\tilde{\nabla}_X N, Y) = g(\tilde{\nabla}_X Y, N)$. Assim, para quaisquer campos X e Y em M , temos que

$$g(SX, Y) = g(-\tilde{\nabla}_X N, Y) = g(\tilde{\nabla}_X Y, N) = g(D_X Y, N). \quad (3.7)$$

Por outro lado, observe que também que os vetores

$$\begin{aligned} \Psi_t(t, \theta) &= (r'(t)\cosh r(t)\cos\theta, r'(t)\cosh r(t)\sin\theta, r'(t)\sinh r(t), w'(t)) \text{ e} \\ \Psi_\theta(t, \theta) &= (-\sinh r(t)\sin\theta, \sinh r(t)\cos\theta, 0, 0) \end{aligned}$$

formam uma base ortogonal de $T_p M$ em $p = \Psi(t, \theta)$. Pela equação (3.7), obtemos que

$$g(S\Psi_t, \Psi_\theta) = g(S\Psi_\theta, \Psi_t) = g(\Psi_{t\theta}, N) = 0.$$

Neste caso, como $\{\Psi_t, \Psi_\theta\}$ é uma base ortogonal, então

$$S\Psi_t = \lambda_1 \Psi_t \quad \text{e} \quad S\Psi_\theta = \lambda_2 \Psi_\theta.$$

Em particular, a base $\{\Psi_t, \Psi_\theta\}$ é uma base de direções principais e os coeficientes λ_1 e λ_2 são as curvaturas principais de M . Além disto, vemos que

$$\lambda_1 = \frac{g(S\Psi_t, \Psi_t)}{|\Psi_t|^2} \stackrel{(3.7)}{=} \frac{g(\Psi_{tt}, N)}{|\Psi_t|^2} \quad \text{e} \quad \lambda_2 = \frac{g(S\Psi_\theta, \Psi_\theta)}{|\Psi_\theta|^2} \stackrel{(3.7)}{=} \frac{g(\Psi_{\theta\theta}, N)}{|\Psi_\theta|^2}.$$

Logo, as curvaturas principais de M são $\lambda_1 = -w'r'' + r'w'$ e $\lambda_2 = w'\coth r$ e a curvatura média de $2H_M = -w'r'' + r'w' + w'\coth r$.

Provaremos que $k_\alpha = r'w'' - r''w'$ determinando a norma de $\tilde{\nabla}_{\alpha'}\alpha'$. Observe que podemos escrever o campo α'' como

$$\alpha'' = D_{\alpha'}\alpha' - g(\alpha'', \xi)\xi, \quad (3.8)$$

onde ξ é o campo normal a $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Consideremos q sobre a curva α , neste caso, $\xi(q) = -(\sinh r(t), 0, \cosh r(t), 0)$. Por outro lado, temos que

$$\alpha'' = (r'' \cosh r + r'^2 \sinh r, 0, r'' \sinh r + r'^2 \cosh r, w'').$$

Então, por (3.8), obtemos

$$\tilde{\nabla}_{\alpha'}\alpha' = (r'' \cosh r, 0, r'' \sinh r, w'').$$

Logo,

$$k_\alpha = |\tilde{\nabla}_{\alpha'}\alpha'|^2 = w''^2 + r''^2.$$

Como a curva α está parametrizada pelo comprimento de arco, ou seja $r'^2 + w'^2 = 1$, então, $r'r'' + w'w'' = 0$. Dessa forma,

$$\begin{aligned} 0 &= w''^2 w'^2 + 2r'r''w'w'' + r''^2 r'^2 \\ 0 &= w''^2 - r'^2 w''^2 + 2r'r''w'w'' + r''^2 - r''^2 w'^2 \\ \Leftrightarrow w''^2 + r''^2 &= (r'w'' - r''w')^2 \end{aligned}$$

e concluímos que $k_\alpha = r'w'' - r''w'$.

□

Estamos interessados em analisar o caso em que M é um sólito de translação, isto é, $H_M = g(N, \partial_z)$. Em particular, pela parametrização Ψ de M , temos que $H_M = r'(t)$. Observe que garantir a existência desta função r é suficiente para provar a existência de um sólito de translação rotacional M . Assim, segue da Proposição 3.2 que

$$2r' = r'w'' - r''w' + w' \coth r. \quad (3.9)$$

Por simplicidade, omitimos o parâmetro t na equação acima.

Enfatizamos, por hipótese, que a curva $\alpha(t) = (\sinh r(t), 0, \cosh r(t), w(t))$ está parametrizada pelo comprimento de arco, ou seja,

$$r'^2(t) + w'^2(t) = 1. \quad (3.10)$$

Então, existe uma função $\theta(t) \in [0, 2\pi)$, com $t \in I$, tal que r' e w' satisfazem, adicionalmente, o sistema de equações

$$\begin{cases} r'(t) = \cos \theta(t) \\ w'(t) = \sin \theta(t). \end{cases}$$

Substituindo estes valores de r' e w' na equação (3.9), através de um cálculo direto, concluímos que

$$\theta'(t) = 2 \cos \theta(t) - \sin \theta(t) \coth r(t).$$

Assim, reescrevemos o sistema acima como

$$\begin{cases} r'(t) = \cos \theta(t) \\ w'(t) = \sin \theta(t) \\ \theta'(t) = 2 \cos \theta(t) - \sin \theta(t) \coth r(t). \end{cases} \quad (3.11)$$

Além disso, segue de (3.10) que

$$r' r'' + w' w'' = 0 \quad \text{e} \quad w' = \varepsilon \sqrt{1 - r'^2},$$

onde $\varepsilon = \text{sign}(w') = \pm 1$. Dessa forma, supondo que $w' \neq 0$ e então multiplicando (3.9) por w' tem-se que

$$\begin{aligned} 2w'r' &= r'w'w'' - r''(w')^2 + (w')^2 \coth(r) \\ &= -(r')^2 r'' - r''(w')^2 + \sqrt{1 - (r')^2} \coth(r) \\ &= -r'' + (1 - (r')^2) \coth(r). \end{aligned}$$

Como $w' = \varepsilon \sqrt{1 - (r')^2}$, segue que

$$r'' = (1 - r'^2) \coth r - 2r' \varepsilon \sqrt{1 - r'^2}. \quad (3.12)$$

Portanto, r é uma solução desta EDO em um intervalo $J \subset I$ onde $w' \neq 0$.

Nosso objetivo é obter mais informações sobre a solução r e sua primeira derivada r' . No entanto, a equação diferencial acima não pode ser resolvida algebricamente. Desse modo,

utilizaremos uma técnica recorrente na teoria de sistemas dinâmicos, física e outras grandes áreas das ciências exatas. Associamos a equação (3.12) a um *espaço de fase*, mais informações a respeito de espaços de fase podem ser vistas em [34].

3.2 Análise do Espaço de Fase de um Sóliton de Translação Rotacional

Nosso objetivo nesta seção é analisar a equação (3.12) através do espaço de fase e, por meio desta análise, provar o Lema 3.1 enunciado ao fim desta seção. Os resultados aqui apresentados são baseados na Seção 3 de [5] e [7].

Consideramos a mudança de coordenada $y(t) = r'(t)$, pela equação (3.12) obtemos um sistema autônomo $F(r, y)$ descrito por

$$F(r, y) = \begin{pmatrix} r' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ (1 - y^2) \coth r - 2y\sqrt{1 - y^2} \end{pmatrix}. \quad (3.13)$$

Chamaremos órbita de F a curva $\gamma(t) = (r(t), y(t))$ que satisfaz o sistema acima.

Note que, no nosso problema, para todo $t \in I$, temos que $r(t) \in [0, \infty)$ dado que r mede a distância de M ao eixo de rotação e $y(t) \in (-1, 1)$ pois $y = r'(t) = \cos \theta(t)$. Assim, definimos o *espaço de fase* do sistema (3.13) como o conjunto $\Theta_\varepsilon := (0, \infty) \times (-1, 1)$ em \mathbb{R}^2 com coordenadas (r, y) .

Observação 3.1. Para cada ponto no espaço de fase Θ_ε , o problema de Cauchy (ver [4]) garante que existe uma única órbita de F passando por este ponto. Em particular, uma órbita γ de F não pode ter como ponto final pontos da forma (x_0, y_0) tais que $x_0 \neq 0$ e $y_0 \neq \pm 1$. Caso contrário, se γ tem com ponto final (r_0, y_0) , em que $r_0 \neq 0$ e $y_0 \neq \pm 1$, então podemos estender a curva γ a (x_0, y_0) , obtendo uma nova órbita de F que passa por (r_0, y_0) . Contradizendo a unicidade de γ . Daremos mais detalhes sobre o problema de Cauchy na seção posterior.

Sejam $(r(t), y(t))$ os pontos em Θ_ε tais que $y'(t) = 0$. Usando a segunda equação do sistema (3.13),

$$\begin{aligned}\tanh r &= \frac{1 - y^2}{2\varepsilon\sqrt{1 - y^2}} \\ &= \frac{\sqrt{1 - y^2}}{2\varepsilon},\end{aligned}$$

e então

$$r = \operatorname{arctanh}\left(\frac{\sqrt{1 - y^2}}{2\varepsilon y}\right).$$

Denotamos a curva acima por $r = \Gamma_\varepsilon(y)$ e definamos a $\Gamma_\varepsilon = \Theta_\varepsilon \cap \Gamma_\varepsilon(y)$. Como a função $\operatorname{arctanh}$ está definida apenas no intervalo $(-1, 1)$, então, a curva $\Gamma_\varepsilon(y)$ está definida apenas para y tal que

$$-1 < \frac{\sqrt{1 - y^2}}{2\varepsilon y} < 1.$$

Temos que $\left|\frac{\sqrt{1 - y^2}}{2\varepsilon y}\right| < 1$ e, assim, é fácil verificar que

$$|y| > \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Logo, a curva Γ_ε possui duas assíntotas horizontais $y_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$ e $y_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Definamos os conjuntos acima e abaixo do eixo $y = 0$, respectivamente, por $\Theta_\varepsilon^+ := \Theta_\varepsilon \cap \{y > 0\}$ e $\Theta_\varepsilon^- := \Theta_\varepsilon \cap \{y < 0\}$. Note que interseção $\Gamma_\varepsilon = \Theta_\varepsilon \cap \Gamma_\varepsilon(y)$ é não-vazia apenas nos pontos em que $\varepsilon y \geq 0$. Caso contrário, $r = \Gamma_\varepsilon(y) = \operatorname{arctanh}\left(\frac{\sqrt{1 - y^2}}{2\varepsilon y}\right) < 0$.

Assim, o conjunto Γ_1 está definido em Θ_1 para os pontos $y \in \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, 1\right]$ e, analogamente, Γ_{-1} está definido em Θ_{-1} para os pontos $y \in \left[-1, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$. Observe que Γ_ε e o eixo $y = 0$ dividem o espaço Θ_ε em três componentes conexas. De fato, se $\varepsilon = 1$, temos a região Θ_1^- , enquanto Θ_1^+ é dividida entre as regiões acima e baixo de Γ_1 . Se $\varepsilon = -1$, tais regiões são dadas por Θ_{-1}^+ e as regiões de Θ_{-1}^- divididas por Γ_{-1} .

Desta forma, para $\varepsilon = 1$, as regiões acima e abaixo da curva Γ_ε , são dadas respectivamente, por:

$$\begin{aligned}\Lambda_1^+ &= \left\{ (r,y); y > \frac{1}{\sqrt{5}}, r > \Gamma_1(y) \right\}, \\ \Lambda_1^- &= \left(\Theta_1^+ \cap \left\{ y \leq \frac{1}{\sqrt{5}} \right\} \right) \cup \left\{ (r,y); y > \frac{1}{\sqrt{5}}, r < \Gamma_1(y) \right\}.\end{aligned}$$

Analogamente, para $\varepsilon = -1$ temos

$$\begin{aligned}\Lambda_{-1}^+ &= \left\{ (r,y); y < -\frac{1}{\sqrt{5}}, r > \Gamma_1(y) \right\}, \\ \Lambda_{-1}^- &= \left(\Theta_{-1}^- \cap \left\{ y \geq -\frac{1}{\sqrt{5}} \right\} \right) \cup \left\{ (r,y); y < -\frac{1}{\sqrt{5}}, r < \Gamma_{-1}(y) \right\}.\end{aligned}$$

Em cada uma dessas componentes conexas as funções y e r são monótonas. De fato, suponha que existe uma órbita $(r(t), y(t)) \in \Lambda_\varepsilon^+$ tal que $y'(t)$ muda de sinal. Então, teremos que existe $(r_0, y(r_0))$ tal que $y'(r_0) = 0$. De modo análogo, como y não muda de sinal dentro das regiões, temos que r' também mantém o seu sinal. Sendo assim, sempre que $y \neq 0$, podemos escrever t em função de r e considerar y como uma função de r em cada uma das regiões de monotonicidade. Neste caso, temos

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dr} &= \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dr} \\ &= y' \frac{1}{r'},\end{aligned}$$

de forma que $y \frac{dy}{dr} = y'$. Então, pelo sistema (3.13), temos

$$y \frac{d}{dr} y(r) = (1 - y^2) \coth r - 2y\varepsilon \sqrt{1 - y^2}. \quad (3.14)$$

Em particular, o sinal de $\frac{d}{dr}y$ depende apenas do sinal de y e de $r - \Gamma_\varepsilon(y)$, visto que $r - \Gamma_\varepsilon(y) > 0$ é equivalente a $(1 - y^2) \coth r - 2\varepsilon y \sqrt{1 - y^2} < 0$. De fato,

$$\begin{aligned} r &> \Gamma_\varepsilon(y) \\ \Leftrightarrow r &> \operatorname{arctanh} r \left(\frac{\sqrt{1 - y^2}}{2\varepsilon y} \right) \\ \Leftrightarrow \tanh r &> \frac{\sqrt{1 - y^2}}{2\varepsilon y} \\ \Leftrightarrow \coth r &< \frac{2\varepsilon y}{\sqrt{1 - y^2}} \\ \Leftrightarrow (1 - y^2) \coth r &< 2\varepsilon y \sqrt{1 - y^2}. \end{aligned}$$

Sob estas condições, analisaremos alguns casos de modo a determinar o sinal de $\frac{d}{dr}y$. Para isto, tomemos $(r_0, y_0) \in \Theta_\varepsilon$ e suponha que:

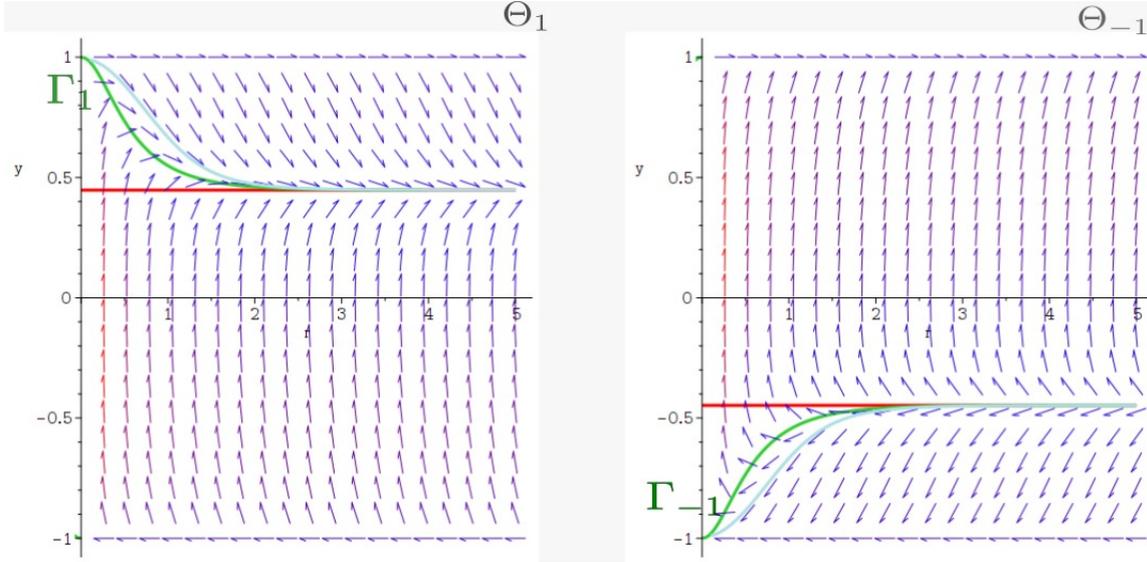
- (i) $y_0 > 0$ e $r_0 < \Gamma_\varepsilon(y_0)$. Então $\frac{d}{dr}y(r_0) > 0$;
- (ii) $y_0 > 0$ e $r_0 > \Gamma_\varepsilon(y_0)$. Então $\frac{d}{dr}y(r_0) < 0$;
- (iii) $y_0 < 0$ e $r_0 < \Gamma_\varepsilon(y_0)$. Então $\frac{d}{dr}y(r_0) < 0$;
- (iv) $y_0 < 0$ e $r_0 > \Gamma_\varepsilon(y_0)$. Então $\frac{d}{dr}y(r_0) > 0$.

Para melhor interpretar as opções que temos acima, tome $\varepsilon = 1$. Observe que se $(r_0, y_0) \in \Lambda_1^+$, então $r_0 > \Gamma_1(y_0)$ e $y_0 > 1/\sqrt{5} > 0$. Pelo item (ii) e pela monotonicidade desta região, concluímos que $y(r)$ é decrescente a partir de r_0 . Além disto, se $(r_0, y_0) \in \Lambda_1^-$ é tal que $r_0 < \Gamma_1(y_0)$ e $0 < y_0 < 1/\sqrt{5}$, então pelo item (i) e pela monotonicidade, temos que $y(r)$ é crescente a partir de r_0 . Obtemos também resultados análogos para o caso de $\varepsilon = -1$.

Portanto, condensaremos essas informações obtidas com o estudo do espaço de fase de F no lema a seguir. Ainda, podemos ver na Figura 3.1 as regiões de monotonicidade de uma órbita $(r, y(r))$ e seu comportamento.

Lema 3.1. Conforme as configurações acima, para qualquer $(r_0, y_0) \in \Theta_\varepsilon$ valem as propriedades:

- Se $r_0 > \Gamma_\varepsilon(y_0)$ e $y_0 > 0$, então $y(r)$ é estritamente decrescente a partir de r_0 (respectivamente para $r_0 < \Gamma_\varepsilon(y_0)$ e $y_0 < 0$).

Figura 3.1 Monotonicidade de $y(r)$.

- Se $r_0 > \Gamma_\varepsilon(y_0)$ e $y_0 < 0$, então $y(r)$ é estritamente crescente a partir de r_0 (respectivamente para $r_0 > \Gamma_\varepsilon(y_0)$ e $y_0 < 0$).
- Se $y_0 = 0$ então a órbita passando por $(r_0, 0)$ é ortogonal ao eixo r .
- Se $r_0 = \Gamma_\varepsilon(y_0)$ então $y'(r_0) = 0$ e $y(r)$ tem um extremo local.

Utilizaremos estes resultados na demonstração do Teorema de Existência do *Bowl* Sóliton, apresentado na seção seguinte.

3.3 Existência de Sólitons de Translação Rotacionais

Como mencionado anteriormente, assegurar que existe uma função r satisfazendo o sistema de equação (3.14) é suficiente para garantirmos a existência de uma superfície de rotação que é um sóliton de translação. Dessa forma, comecemos a investigar tal sistema (3.14) através do *problema de Cauchy para sistema não-linear e não-autônomo*. Podem ser vistos mais detalhes a respeito deste problema em [4].

Motivados pelo Lema 3.1, consideremos o seguinte sistema de equação diferenciais não-lineares e não autônomos

$$\begin{cases} y(r_0) = y_0 \\ y'(r) = f(r, y(r)), \end{cases}$$

em que (r_0, y_0) são pontos fixados de um aberto $A \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e função $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. A solução para o problema de Cauchy para sistemas como este garante que, existe uma única solução $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ para cada (r_0, y_0) , com I um intervalo aberto.

Em nosso caso, tomamos a função f acima como

$$f(r, y) = (1 - y^2) \coth r - 2\varepsilon \sqrt{1 - y^2}.$$

Observe que f não é uma aplicação contínua em $r = 0$. Assim, não podemos concluir, pela discussão acima, a existência e unicidade de $y(r)$ em $r = 0$. Por outro lado, o Lema 2.1 assegura a existência de um sólito de translação, rotacionalmente simétrico, ortogonal ao eixo de rotação, gráfico de uma função u sobre um disco centrado na origem de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$.

Neste sentido, usaremos a existência local dada pelo Lema 2.1 e os resultados obtidos na Seção 3.2, para provarmos o teorema que garante a existência do *Bowl* Sólito.

Teorema 3.1 (Existência do *Bowl* Sólito). Existe um gráfico vertical inteiro, orientado para cima, sólito de translação rotacionalmente simétrico em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$.

Demonstração. O Lema 2.1 garante que existe um sólito de translação rotacional M orientado para cima ortogonal ao eixo de rotação em $p_0 = M \cap l$, onde l é uma linha vertical sobre o eixo de rotação. Logo,

$$H_M(p_0) = v(p_0) = 1.$$

Além disto, como M é um sólito de translação rotacional, podemos parametrizar M pela rotação de uma curva $\alpha(t) = (\sinh r(t), 0, \cosh r(t), w(t))$, em que as funções r e w satisfazem o sistema de equações (3.11)

$$\begin{cases} r'(t) = \cos \theta(t) \\ w'(t) = \sin \theta(t) \\ \theta'(t) = 2 \cos \theta(t) - \sin \theta(t) \coth r(t). \end{cases}$$

Pelo Lema 2.1, α está bem definida em $t = 0$, com $\alpha(0) = p_0$. Estudaremos o sinal de w' em uma pequena vizinhança de $t = 0$. Seja $\mathbb{H}^2 \times \{z_0\}$ um plano horizontal em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ que está a uma mesma altura z_0 de p_0 . Observe que $\mathbb{H}^2 \times \{z_0\}$ é tangente a M em p_0 e também é uma superfície totalmente geodésica em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Logo, $H_{\mathbb{H}^2 \times \{z_0\}}(p) = 0$, para todo p . Em particular, $H_{\mathbb{H}^2 \times \{z_0\}}(p_0) = 0$.

Suponha, por contradição, que a superfície M está abaixo do plano $\mathbb{H}^2 \times \{z_0\}$. Pela proposição 2.4, temos que $H_{\mathbb{H}^2 \times \{z_0\}}(p_0) = 0 \geq 1 = H_M(p_0)$, que é uma contradição. Então, a superfície M está acima do plano $\mathbb{H}^2 \times \{z_0\}$. Neste caso, existe uma vizinhança $(0, \delta)$ suficientemente pequena tal que, para todo t nesta vizinhança, a função altura w da curva α é crescente, isto é $w'(t) > 0$.

Dessa forma, nossa análise do retrato de fase será feita para $\varepsilon = \text{sign}(w') = 1$. Tomemos uma órbita $\gamma(t) := (r(t), y(t))$ no espaço de fase Θ_1 , para t suficientemente pequeno. Como o sólito é ortogonal ao eixo de rotação, a curva γ começa no ponto $(0, 1) \in \Theta_1$. Então, γ tem pontos em Λ_1^+ perto de $(0, 1)$ e, pela monotonicidade de Λ_1^+ , a órbita γ está inteiramente contida em Λ_1^+ . Como discutimos na Observação 3.1, podemos estender a órbita para todo $t > 0$.

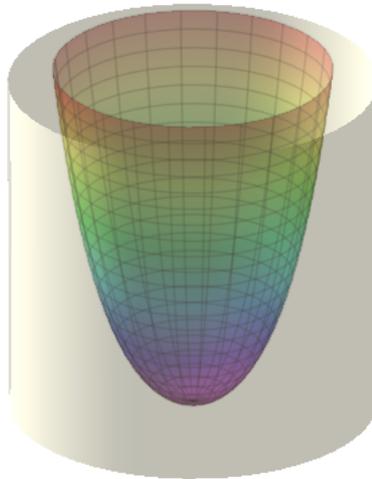
Logo, y é uma função de r , isto é $y = f(r)$, tal que $f \in C^2([0, \infty))$ satisfaz $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$, $1 > f(r) > 1/\sqrt{5}$ e $f'(r) < 0$ para todo $r > 0$. Além disso, Como $r' = y$, e $w' = \sqrt{1 - (r')^2}$, segue que

$$\frac{dw}{dr} = \frac{\sqrt{1 - f^2}}{f}.$$

Portanto, M é um sólito de translação gerado pela rotação de $\alpha(r) = (\sinh r, 0, \cosh r, w(r))$ com respeito ao eixo l . Segue que M é um gráfico inteiro vertical, como queríamos provar. \square

A superfície M tratada no Teorema 3.1 acima é denominada *Bowl Sólito* e usualmente denotada por \mathcal{B} . Apresentamos na Figura 3.2 este sólito de translação, utilizando o modelo do disco de Poincaré no espaço hiperbólico. É importante observarmos que qualquer plano vertical passando pela origem de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ é um plano de simetria do *Bowl*.

Figura 3.2 *Bowl Sólito* no espaço $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{R}$.

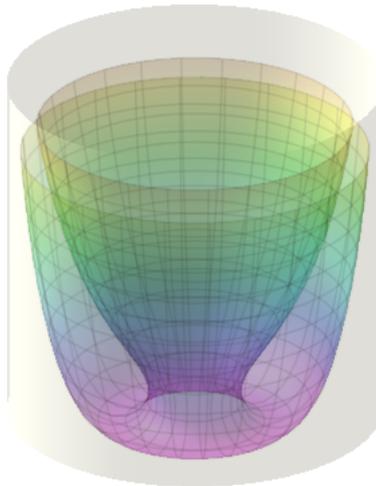


No espaço Euclidiano, Altschuler e Wu em [2] provam um resultado análogo ao que foi provado nesta seção, o qual garante a existência do *Bowl Sóliton* em \mathbb{R}^3 . Além disto, [9] estuda o comportamento deste sóliton no infinito e [31] garante a unicidade do *Bowl*. Neste trabalho, nosso objetivo é apresentar com detalhes estes mesmos resultados no espaço $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Na seção a seguir, faremos um estudo a respeito do comportamento de sólitos de translação rotacional e, posteriormente, exibiremos a prova do Teorema de Unicidade do *Bowl Sóliton* como em [6].

Antes de encerrar esta seção, enunciemos outro teorema o qual garante a existência de outro sóliton rotacional, conhecido como *Catenoide de Translação* em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, provado por Bueno em [5] na Seção 3.2. Não provaremos este resultado visto que nosso interesse principal neste trabalho se limita ao estudo do *Bowl Sóliton*. Contudo, a existência deste sóliton de translação é um interessante resultado para a teoria. Além disso, utilizaremos o *Catenoide de Translação* para provarmos um resultado de não-existência apresentados no capítulo a seguir.

Teorema 3.2 (Existência de Catenoides de Translação). Existe uma família de um parâmetro de sólitos de translação propriamente imersos, cada um com a topologia de um anel. Cada fim do anel aponta para a direção ∂_z e é um gráfico fora de um conjunto compacto. Estes exemplos, denotados por $\{\mathcal{C}_r\}_{r>0}$, são chamados Catenoides de Translação ou *wing-like solutions*.

Figura 3.3 Catenoide de Translação.



Observação 3.2. O parâmetro r da família de Catenoides $\{\mathcal{C}_r\}_{r>0}$ denota a distância entre cada \mathcal{C}_r e o eixo de rotação. Além disto, para todo $r_0 > r$, o cilindro $C(r_0)$ centrado na origem e com raio r_0 intersecta \mathcal{C}_r em uma única circunferência chamada *neck* do Catenoide de Translação e cada \mathcal{C}_r está no conjunto não-compacto $\overline{\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R} \setminus C(r_0)}$.

Capítulo 4

Sólitons compactos, Teoremas de Não-Existência e a Unicidade do *Bowl* Sóliton

Neste capítulo, daremos continuidade ao estudo de sólitons de translação em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, baseado em [5] e [6]. Na primeira seção, apresentaremos resultados sobre sólitons de translação compactos, com e sem fronteira. Em particular, utilizando o Método de Alexandrov (ver Subseção 2.3.2), exibimos a prova de que um sóliton de translação compacto, sob certas hipóteses na sua fronteira, contém um pedaço do *Bowl* Sóliton. Prova-se também, através do Teorema da Divergência, que não existem sólitons de translação compactos sem fronteira. Ainda sobre não-existência, verifica-se que não existem sólitons de translação cilíndricamente limitados.

Além disso, nessa seção, exibimos uma prova de um teorema de estimativa de altura, provado por Bueno em [5], garantindo que, sob certas condições na fronteira de um sóliton de translação compacto, devemos ter que a altura deste sóliton é limitada, usamos fortemente o Princípio da Tangência.

Por fim, apresentaremos um teorema de Unicidade do *Bowl* Sóliton no espaço produto $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, provado por Bueno em [5] e [6]. Esta prova é baseada na demonstração do Teorema de Unicidade do *Bowl* Sóliton em \mathbb{R}^{n+1} , provado por Martin *et. al* em [31]. Em ambas as demonstrações, utiliza-se o Método de Reflexão de Alexandrov e o Princípio de Tangência.

4.1 Sólitos Compactos e Teoremas de Não-Existência

Começaremos esta seção estudando resultados para sólitos compactos, com fronteira e sem fronteira. Para sólitos M com fronteira ∂M , estudaremos resultados a partir de hipóteses sob ∂M . Na sequência, mostraremos que não existem sólitos de translação compactos e sem fronteira. Ainda sobre não-existência, apresentaremos a prova de que não existem sólitos de translação cilíndricamente limitados. Esses resultados são baseados na exposição feita na Seção 5 de [5].

Proposição 4.1. Seja M um sólito de translação compacto com fronteira. Então a altura de M não pode atingir um máximo local em um ponto interior de M .

Demonstração. Suponha, por contradição, que existe p e uma vizinhança U_p de p tal que $h(U_p) \leq h(p) := p_3$, onde h é a função altura de M . Neste caso, $\nabla h(p) = 0$ e assim $\eta_p := \langle \eta(p), \partial_z \rangle = \pm 1$, em que η denota o campo de vetores normais a M .

Observe que $\Sigma = \mathbb{H}^2 \times \{p_3\}$ é uma superfície mínima, tangente a M em p e que está acima de U_p . Observe também que Σ pode ser orientada para cima ou para baixo de forma que a curvatura média permaneça a mesma. Assim, suponha que $\mathbb{H}^2 \times \{p_3\}$ está orientada para cima e $\eta_p = 1$. Logo, M está abaixo deste plano horizontal, p está sobre este plano e $H_M(p) = \eta_p = 1$.

Pela Proposição 2.4, como Σ está acima de M , temos que $H_\Sigma(p) = 0 \geq H_M = 1$, o que é uma contradição. Analogamente, se $\eta_p = -1$, orientamos $\mathbb{H}^2 \times \{p_3\}$ para baixo e obtemos o mesmo resultado. \square

Dois observações importantes relativas à Proposição 4.1 são dadas abaixo:

Observação 4.1. Observe que a função altura de um sólito de translação pode alcançar um mínimo local, como é o caso do *Bowl Sólito* e do *Catenoide*.

Observação 4.2. Pela prova desta proposição, podemos concluir que um sólito de translação compacto com fronteira sobre um plano horizontal deve estar totalmente abaixo deste plano.

O caso em que a fronteira de M é uma curva contínua em um plano horizontal $\mathbb{H}^2 \times \{t_0\}$ fornece uma importante propriedade geométrica para M . O teorema abaixo nos diz que pedaços compactos do *Bowl Sólito* são únicos no seguinte sentido:

Teorema 4.1. Seja $\Gamma \subset \mathbb{H}^2 \times \{t_0\}$ uma curva mergulhada, fechada, invariante por rotação em torno do eixo vertical l de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Seja M um sólito de translação mergulhado, compacto com fronteira $\partial M = \Gamma$. Então, M é rotacionalmente simétrico e, a menos de translação, é um pedaço do *Bowl Sólito*.

Demonstração. Provaremos este teorema utilizando o Método de Reflexão de Alexandrov com respeito a planos verticais. Sem perda de generalidade, podemos transladar o eixo l para o eixo vertical $(0,0,t)$, $t \in \mathbb{R}$ de forma que a curva Γ é uma circunferência centrada na origem e com um certo raio.

Conforme vimos na Observação 4.2, M está completamente abaixo de $\mathbb{H}^2 \times \{t_0\}$, isto é, os pontos de máximo para a altura de M estão na fronteira. Esta observação é fundamental para aplicarmos o Método de Alexandrov. De fato, suponha que a superfície M tenha um ponto interior tal que a função altura atinge um máximo global. Neste caso, pode acontecer que, ao refletirmos parte de M em relação a um plano vertical, obtemos um ponto de tangência que pode estar no interior de M e na fronteira da reflexão.

Utilizaremos as mesmas notações e definições dadas na Seção 2.3.2. Provaremos aqui que qualquer plano vertical passando pela origem de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ é um plano de simetria de M .

Consideremos v um vetor horizontal e um plano vertical Π ortogonal a v , passando pela origem. Pela compacidade de M , existe r suficientemente grande tal que $M \cap \Pi(r) = \emptyset$. Assim, decrescemos r até que a translação de Π intersecte M em um primeiro ponto de contato p . Vamos supor que isto ocorre no instante $r = r_0$.

Observe que para $s < r_0$, suficientemente próximo de r_0 , temos que $M_+(s)$ é gráfico sobre o plano $\Pi(s)$ e $M_+^*(s)$ está à direita de $M_-(s)$. Equivalente à condição de estar ao lado direito, temos $M_+^*(s)$ está dentro do domínio delimitado por M e por $\mathbb{H}^2 \times \{t_0\}$.

Decrescemos s até o primeiro r_1 tal que $M_+(r_1)$ deixa de ser gráfico sobre $\Pi(r_1)$ ou $M_+^*(r_1)$ intersecta $M_-(r_1)$. No primeiro caso, $M_+(r_1)$ intersecta $M_-(r_1)$ em um ponto de tangência na fronteira e, no segundo caso, $M_+^*(r_1)$ intersecta $M_-(r_1)$ em um ponto de tangência interior. Em ambos os casos, utilizamos o Teorema 2.4 (Princípio de Tangência) e concluímos que $M_+^*(r_1) = M_-(r_1)$.

Portanto, $\Pi(r_1)$ é um plano de simetria. Em particular, a fronteira de M deve ser também simétrica ao plano $\Pi(r_1)$. Como estamos supondo que ∂M é um círculo centrado na origem, então $r_1 = 0$.

Analogamente, repetimos este mesmo argumento para qualquer outra direção u horizontal concluindo que M é simétrica a qualquer plano vertical que passa pela origem de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, intersectando o eixo horizontal que passa pela origem ortogonalmente, ou seja, M é rotacionalmente simétrica e pelo Lema 2.1, M é um pedaço do *Bowl* Sóliton a menos de translação. \square

Provaremos uma proposição, ainda sobre sólitos de translação compactos, utilizando o Princípio da Tangência.

Proposição 4.2. Seja M um sólito de translação compacto com fronteira $\Gamma = \partial M$. Se Γ está entre dois planos verticais, então M também está entre estes dois planos.

Demonstração. Denotemos por P_1 e P_2 os planos verticais tais que Γ esteja entre estes dois planos. Observe que cada um destes planos divide o espaço $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ em duas componentes conexas. Provaremos que, se Γ está inteiramente contida em uma dessas regiões, então M está também contida nesta mesma região.

Denotemos por P_1^+ a componente conexa em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ tal que $\Gamma \subset P_1^+$ e P_1^- a outra componente. Suponha, por contradição, que $M \cap P_1^- \neq \emptyset$. Pela compacidade de M e pela hipótese sobre Γ , temos que a superfície $M^- := M \cap P_1^-$ é também uma superfície compacta com fronteira em P_1 . Dessa forma, existe um ponto interior $p \in M^-$ com maior distância entre P_1 e M^- .

Tomemos $P_1(\lambda)$ plano paralelo a P_1 contido em P_1^- tal que $P_1(\lambda) \cap M = \emptyset$. Podemos ver $P_1(\lambda)$ como uma translação horizontal de P_1 a uma distância λ . Assim, movemos o parâmetro λ transladando o plano $P_1(\lambda)$ até a uma distância λ_0 em que $P_1(\lambda_0)$ intersecta M^- em um primeiro ponto de contato. Neste caso, o plano $P_1(\lambda_0)$, intersecta M em p . Então p é um ponto de tangência interior de M e $P_1(\lambda_0)$.

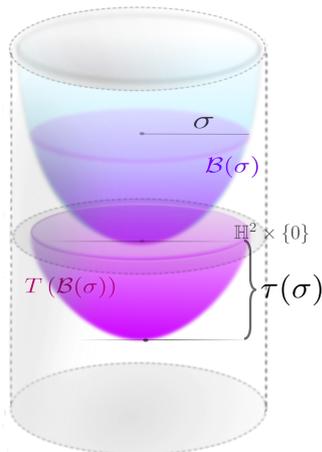
Como planos verticais são sólitos de translação, ambas superfícies são mínimas no espaço conforme $(\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}, e^h \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Pelo princípio da tangência $M = P_1(\lambda_0)$. Contradizendo M ser compacta. Aplicamos novamente este argumento para o plano P_2 e o resultado segue. \square

Como resultado da Proposição 4.1, sólitos de translação compactos com fronteiras em cima de um plano horizontal, devem estar abaixo deste plano. O que provaremos agora, basicamente, é que a altura de um sólito de translação compacto é limitada, sob certas hipóteses sobre a sua fronteira. Esta limitação será dada em termos do diâmetro da fronteira.

Primeiramente, introduziremos algumas notações úteis para a prova do próximo teorema. Seja σ uma constante positiva. Denotemos por $\mathcal{B}(\sigma)$ o pedaço compacto do *Bowl* Sólito que tem como fronteira a circunferência $C(0, \sigma)$, contida em um plano horizontal, de raio σ e centro na origem. Observe que podemos ver $\mathcal{B}(\sigma)$ como a interseção do *Bowl* com um cilindro vertical de raio σ e eixo passando pela origem.

Aplicando uma translação vertical T em $\mathcal{B}(\sigma)$ tal que sua fronteira esteja sobre o plano $\mathbb{H}^2 \times \{0\}$, denotamos a distância entre o vértice de $T(\mathcal{B}(\sigma))$ ao plano $\mathbb{H}^2 \times \{0\}$ como $\tau(\sigma)$. Por simplicidade, fazemos a identificação $T(\mathcal{B}(\sigma)) = \mathcal{B}(\sigma)$.

Teorema 4.2. Seja Γ uma curva fechada de diâmetro σ contida em um plano horizontal $\mathbb{H}^2 \times \{t_0\}$ e seja M um sólito de translação conexo, compacto com fronteira $\partial M = \Gamma$. Então,

Figura 4.1 Distância $\tau(\sigma)$

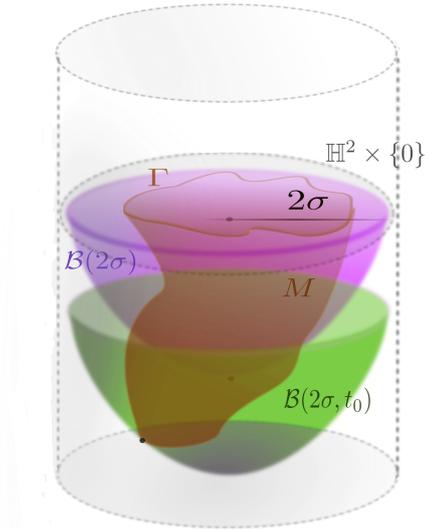
para todo $p \in M$, a distância de p a $\mathbb{H}^2 \times \{t_0\}$ é menor ou igual a $\tau(2\sigma)$, onde τ é a constante definida acima.

Demonstração. Seja σ o diâmetro da curva Γ e $D(0, 2\sigma)$ um disco sobre o plano vertical $\mathbb{H}^2 \times \{0\}$ centrado na origem de raio 2σ . Aplicamos uma translação T sobre M tal que $T(\Gamma) \subset D(0, 2\sigma)$. Por simplicidade, denotemos $T(M) = M$. Pela Proposição 4.1, temos que M está abaixo do plano $\mathbb{H}^2 \times \{0\}$. Vamos provar que M está inteiramente contida na região delimitada por $\mathcal{B}(2\sigma)$ e pelo plano $\mathbb{H}^2 \times \{0\}$.

Como $\Gamma \subset D(0, 2\sigma)$, então parte de M está na região delimitada por $\mathcal{B}(2\sigma)$ e por $\mathbb{H}^2 \times \{0\}$. Afirmamos que M está inteiramente contida nesta região. Suponha por contradição que M e $\mathcal{B}(2\sigma)$ tem interseção não vazia. Neste caso, esta interseção deve ser transversal. Caso contrário, sendo M e $\mathcal{B}(2\sigma)$ sólitos de translação, pelo Princípio da Tangência no Teorema 2.4, temos que $M = \mathcal{B}(2\sigma)$. Em particular, a fronteira Γ de M coincide com a fronteira de $\mathcal{B}(2\sigma)$, contradizendo Γ ter diâmetro σ .

Dessa forma, apliquemos uma translação T em $\mathcal{B}(2\sigma)$ verticalmente para baixo a uma distância t_0 e denotemos esta translação por $T_{t_0}(\mathcal{B}(2\sigma)) = \mathcal{B}(2\sigma, t_0)$. Procedemos com esta translação até que $\mathcal{B}(2\sigma, t_0) \cap M = \emptyset$. Em seguida, movemos $\mathcal{B}(2\sigma, t_0)$ para cima, aumentando t_0 , até alcançarmos o primeiro ponto de contato de $\mathcal{B}(2\sigma, t_1)$ com M . Este ponto deve ser um ponto de tangência no interior. Logo, pelo princípio da tangência, M e $\mathcal{B}(2\sigma, t_1)$ coincidem. Em particular, $\Gamma = \partial\mathcal{B}(2\sigma, t_1)$.

Por outro lado, observe que a fronteira de $\mathcal{B}(2\sigma, t_1)$ é um círculo sobre o plano $\mathbb{H}^2 \times \{t_1\}$ e que $\Gamma \subset \mathbb{H}^2 \times \{0\}$. Como a interseção é transversal, temos necessariamente que $t_1 < 0$, contradizendo $\Gamma = \partial\mathcal{B}(2\sigma, t_1)$. Portanto, M está inteiramente contida na região convexa dentro de $\mathcal{B}(2\sigma)$ e, assim, obtemos a estimativa de altura desejada. \square

Figura 4.2 M intersecta $\mathcal{B}(2\sigma)$ transversalmente.

A proposição a seguir é um resultado de não-existência de sólitos de translação o qual é uma consequência forte do Teorema da Divergência (Teorema 1.1), enunciado no primeiro capítulo deste trabalho.

Proposição 4.3. Não existe sólito de translação fechado (compacto sem fronteira).

Demonstração. Como vimos no capítulo 1, a curvatura média de uma superfície M satisfaz a equação (1.7),

$$\Delta_M h = 2H_M v,$$

em que Δ_M é o operador de Laplace-Beltrami em M . Logo, sendo M um sólito de translação, temos que

$$\Delta_M h = 2H_M v = 2v^2.$$

Pelo Teorema de divergência,

$$0 = \int_M \Delta_M h = 2 \int_M v^2.$$

Então, $v(p) = 0$ para todo $p \in M$. Isto é, M está contida em um plano e, portanto, M não pode ser fechada. \square

Observação 4.3. Podemos também utilizar o princípio da tangência para provarmos a proposição acima. De fato, suponha por contradição que M é um sólito de translação fechado. Pela compacidade de $M \cup \partial M$, podemos tomar um plano vertical Π em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ que tangência M em algum ponto. Sendo M uma superfície mínima no espaço conforme $(\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}, e^h \langle \cdot, \cdot \rangle)$, então

M e Π satisfazem o princípio da tangência de onde concluímos que M está contida em um plano vertical.

Observação 4.4. Outra demonstração para a proposição acima utilizando o *Bowl Sóliton* e o princípio da tangência, como alternativa às duas provas acima apresentadas pelo autor. Suponha, por contradição, que M é um sóliton de translação fechado. Então, existem t e $\sigma > 0$ tal que M está contido na região delimitada por $\mathcal{B}(\sigma, t)$ e $M \cap \mathcal{B}(\sigma, t) = \emptyset$. Assim, movemos o parâmetro t até $t = t_1$ tal que $\mathbb{B}(\sigma, t_1)$ tangencie M em um ponto de interior. Pelo Princípio da Tangência, $M = \mathcal{B}(\sigma, t)$ contradizendo M ser fechado sem fronteira.

Observação 4.5. Podemos também utilizar a Proposição 4.1 para provar a Proposição 4.3. Suponha, por contradição, que existe um sóliton de translação M compacto sem fronteira. Considere um plano vertical $\mathbb{H}^2 \times \{t_0\}$ que intersecta M de forma não tangencial. Definamos o conjunto

$$N = M \cap \left\{ \bigcup_{t \geq t_0} (\mathbb{H}^2 \times \{t\}) \right\},$$

ou seja, N é a parte de M cuja altura é maior que t_0 . Note que N é um sóliton de translação compacto e que a função altura de N atinge um valor máximo em um ponto de interior de N , contradizendo a Proposição 4.1.

Observe que as demonstrações sugeridas nas observações acima recorrem ao Princípio do Máximo (e então ao Princípio da Tangência) sendo resultados mais fortes do que o Teorema da Divergência.

Por fim, provaremos o último resultado desta seção utilizando a existência dos catenoides de translação e que estas superfícies estão definidas fora de um conjunto compacto, como enunciado no Teorema 3.2 no Capítulo 3.

Teorema 4.3. Não existe sóliton de translação propriamente imerso em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ contido num cilindro vertical $B \times \mathbb{R}$, em que B é uma bola fechada de \mathbb{H}^2 .

Demonstração. Suponha, por contradição, que M está contida em um cilindro vertical de raio r_0 e denotemos este cilindro por $C(r_0)$. Transladamos M e $C(r_0)$ tal que o eixo de $C(r_0)$ é $l = (0, 0, t)$, $t \in \mathbb{R}$. Consideremos uma família de Catenoides de translação $\{\mathcal{C}_r\}_{\{r > 0\}}$ rotacionais em torno do eixo l . Pelo Teorema de Existência destes catenoides (Teorema 3.2) e a Observação 3.2, temos que para cada $r > r_0$ cada \mathcal{C}_r está no conjunto não-compacto $\overline{\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R} \setminus C(r_0)}$. Dessa forma, decrescemos r até $r_1 \geq r_0$ em que \mathcal{C}_{r_1} tangencie M em um ponto de interior. Pelo princípio da tangência $M = \mathcal{C}_{r_1}$, contradizendo M estar no cilindro. \square

4.2 Unicidade do *Bowl* Sóliton em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$

Esta seção é dedicada a apresentar a prova do Teorema de Unicidade do *Bowl* Sóliton em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, provado por Bueno em [5] e [6]. A demonstração deste teorema foi baseada na prova do Teorema de Unicidade do *Bowl* Sóliton em \mathbb{R}^3 , dada por Martin *et. al* [31] a qual apresentamos no Capítulo 2.

Motivado pelo estudo assintótico de sólitons de translação rotacional no espaço Euclidiano provado no Lema 2.2 de [9], Bueno analisa o comportamento assintótico de sólitons de translação rotacionalmente simétricos em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ na Seção 4 de [5] e na Seção 2 de [6]. Nestes dois últimos trabalhos, verifica-se que o *Bowl* Sóliton é assintótico ao gráfico da função

$$f_B(x_1, x_2) := 2 \left(\operatorname{arcsenh}(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}) + \varphi(x_1, x_2) \right)$$

em que φ satisfaz

$$|\varphi(x_1, x_2)| + |d_{(x_1, x_2)}\varphi(v)| \leq C e^{-2 \operatorname{arcsenh} \sqrt{x_1^2 + x_2^2}},$$

para todo $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tal que $x_1^2 + x_2^2 > R_0 > 0$, com R_0 suficientemente grande, e para todo $v \in \mathbb{R}^2$. Dessa forma, Bueno [6] define uma superfície assintótica ao *Bowl* Sóliton como segue. A terminologia para esta definição, como mencionado por Bueno em [6], é motivada pelo Teorema A em [11].

Definição 4.1. Seja M um sóliton de translação imerso em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. De acordo com [6], dizemos que M é assintótico ao *Bowl* Sóliton se M pode ser escrito, fora de uma boa de raio $R_0 > 0$, como o gráfico vertical

$$\left(x_1, x_2, \sqrt{1 + x_1^2 + x_2^2}, G(x_1, x_2) \right)$$

da função $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, tal que para todo $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ com $x_1^2 + x_2^2 > R_0^2$,

$$G(x_1, x_2) = 2 \operatorname{arcsenh} \left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \right) + \phi(x_1, x_2),$$

onde $\phi \in C^1(\mathbb{R}^2)$ satisfaz:

$$|\phi(x_1, x_2)| + |d\phi_v(x_1, x_2)| \leq C e^{-2 \operatorname{arcsenh}(\sqrt{x_1^2 + x_2^2})}$$

para alguma constante $C > 0$ e para todo $v \in \mathbb{R}^2$.

É importante observarmos que se uma superfície M é assintótica ao *Bowl*, então, fora de uma bola com centro na origem e raio suficientemente grande, a distância entre M e \mathcal{B} tende a zero. Aplicaremos este argumento mais de uma vez em alguns passos da demonstração.

Estabelecida a definição de superfície assintótica ao *Bowl*, enunciemos novamente o Teorema da Unicidade do *Bowl* Sóliton em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ e procedemos com a sua prova.

Teorema 4.4. Seja M um sóliton de translação com um fim, mergulhado em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, assintótico ao *Bowl* Sóliton. Então, M é o *Bowl* Sóliton.

Demonstração. Nosso objetivo é provar que a superfície M é simétrica em relação a todo plano vertical que passa pela origem de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Em particular, provaremos inicialmente que M é simétrica ao plano Π . Em seguida, utilizando o mesmo argumento após uma rotação em torno de uma reta vertical passando pela origem, o resultado seguirá para os demais planos.

Conforme adiantamos anteriormente, a prova é baseada nas ideias utilizadas na demonstração da unicidade do *Bowl* Sóliton de \mathbb{R}^3 . Procedemos como segue. Definimos o conjunto

$$\mathcal{A} = \{r \in [0, \infty); M_+(r) \text{ é gráfico sobre } \Pi(r) \text{ e } M_+^*(r) \geq M_-(r)\}.$$

Primeiramente, verificaremos que \mathcal{A} é não vazio, garantindo que as Afirmações 4.1 e 4.2 abaixo são verdadeiras. Em seguida, mostraremos que \mathcal{A} é um intervalo fechado de $[0, \infty)$ e, por fim, provaremos que $0 = \min \mathcal{A}$.

Observe que, como M tem topologia finita e é uma superfície analítica, pela Observação 1.7, concluímos que se $M_+^*(r)$ coincide com $M_-(r)$ na vizinhança de um ponto, então $M_+^*(r) = M_-(r)$, para todo $r \in \mathbb{R}$.

Como mencionado em [5] e enfatizado em [32], estas Afirmações 4.1 e 4.2 são fundamentais para iniciar o Método de Reflexão de Alexandrov em relação aos planos verticais distantes da origem.

Afirmção 4.1. Existe R_0 suficientemente grande tal que se $r > R_0$ então $M_+(r)$ é gráfico sobre o plano $\Pi(r)$.

Demonstração. Por hipótese, a superfície M é assintótica ao *Bowl* Sóliton, ou seja, existe R_0 suficientemente grande e $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tal que para $x_1^2 + x_2^2 > R_0$ temos que M é o gráfico vertical

$$\left(x_1, x_2, \sqrt{1 + x_1^2 + x_2^2}, G(x_1, x_2) \right)$$

da função

$$G(x_1, x_2) = 2 \operatorname{arcsenh} \left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \right) + \phi(x_1, x_2),$$

onde

$$|\phi(x_1, x_2)| + |\mathbf{d}\phi_{(x_1, x_2)}(v)| \leq C e^{-2 \operatorname{arcsenh}(\sqrt{x_1^2 + x_2^2})},$$

para todo (x_1, x_2) e v em \mathbb{R}^2 e para alguma constante $C > 0$.

Em particular,

$$\left| \frac{\partial \phi}{\partial x_1}(x_1, x_2) \right| \leq C e^{-2 \operatorname{arcsenh}(\sqrt{x_1^2 + x_2^2})},$$

Logo,

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_1}(x_1, x_2) \geq -C e^{-2 \operatorname{arcsenh}(\sqrt{x_1^2 + x_2^2})}. \quad (4.1)$$

Então,

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial x_1}(x_1, x_2) &= \frac{2x_1}{\sqrt{1+x_1^2+x_2^2}\sqrt{x_1^2+x_2^2}} + \frac{\partial \phi}{\partial x_1}(x_1, x_2) \\ &\stackrel{(4.1)}{\geq} \frac{2x_1}{\sqrt{1+x_1^2+x_2^2}\sqrt{x_1^2+x_2^2}} - C e^{-2 \operatorname{arcsenh}(\sqrt{x_1^2+x_2^2})}. \end{aligned}$$

Por outro lado, observe que se a e b são números reais tais que $b = \operatorname{arcsenh} a$, então

$$\begin{aligned} \operatorname{senh} a = b &\Leftrightarrow \frac{e^a - e^{-a}}{2} = b \\ &\Leftrightarrow e^{2a} - 2be^a - 1 = 0 \\ &\Rightarrow e^a = \frac{2b \pm \sqrt{4b^2 + 4}}{2}. \end{aligned}$$

Como $e^a > 0$, temos que $e^a = b + \sqrt{b^2 + 1}$. Logo, $e^{2 \operatorname{arcsenh} b} = \left(b + \sqrt{b^2 + 1} \right)^2$. Em particular, considere $X = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ e seja $|X| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ a norma de X em \mathbb{R}^2 , então

$$e^{2 \operatorname{arcsenh} |X|} = \left(|X| + \sqrt{|X|^2 + 1} \right)^2 = 2|X|^2 + 1 + 2|X|\sqrt{1 + |X|^2}.$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} \frac{2x_1}{|X|\sqrt{1+|X|^2}} - Ce^{-2\operatorname{arcsenh}|X|} &= \frac{2x_1}{|X|\sqrt{1+|X|^2}} - \frac{C}{2|X|^2 + 1 + 2|X|\sqrt{1+|X|^2}} \\ &> \frac{2x_1}{|X|\sqrt{1+|X|^2}} - \frac{C}{2|X|\sqrt{1+|X|^2}} \\ &= \frac{4x_1 - C}{2|X|\sqrt{1+|X|^2}}. \end{aligned}$$

Para $x_1 > r$ suficientemente grande, obtemos que a desigualdade acima é positiva e assim concluímos que $\frac{\partial G}{\partial x_1} > 0$. Utilizamos novamente que M é assintótica ao *Bowl* Sóliton, neste caso, o ponto $p = \left(x_1, x_2, \sqrt{1+x_1^2+x_2^2}, G(x_1, x_2)\right)$ tal que $x_1^2 + x_2^2 > r$ é um ponto de $M_+(r)$ e o vetor normal de $M_+(r)$ em p é dado por

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla G|^2}} \left(\frac{\partial G}{\partial x_1}(x_1, x_2), \frac{\partial G}{\partial x_2}(x_1, x_2), 0, -1 \right).$$

Portanto, $\langle e_1, \eta \rangle > 0$ em que $e_1 = (1, 0, 0, 0)$ é o vetor normal ao plano $\Pi(r)$. Finalmente, ainda por M ser assintótica ao *Bowl* Sóliton, temos que $M_+(r) \cup T_r\{\mathfrak{p}(M_+(r))\}$ limita uma região conexa em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, uma vez que $T_r\{\mathfrak{p}(M_+(r))\} \subset \Pi(r)$. Finalmente, como $M_+(r)$ não tem auto-interseções, segue que $M_+(r)$ é um gráfico sobre o plano $\Pi(r)$. \square

Observe que, a afirmação “ $M_+(r)$ é gráfico sobre o plano $\Pi(r)$ ” pode ser vista como: para cada $q \in \Pi(r)$ e $p \in M$, a geodésica que passa por q e por p intersepta M somente no ponto p .

Provaremos agora uma segunda afirmação, que junto a Afirmação 4.1, garante que o conjunto \mathcal{A} definido anteriormente é não vazio.

Afirmação 4.2. Existe R_0 suficientemente grande tal que para todo $r > R_0$ temos que $M_+^*(r)$ está ao lado direito de $M_-(r)$.

Demonstração. Primeiramente, observe que para r suficientemente grande tal que $M_+(r)$ é gráfico da função G , devemos ter que a reflexão $M_+^*(r)$ é gráfico da função \tilde{G} definida como $\tilde{G}(|X|) = G(|\tilde{X}|)$. Em seguida, considere o ponto $p = \left(X, \sqrt{1+|X|^2}, z\right)$ em $\Pi_-(r)$ com $|X| > r$ suficientemente grande e seja $\tilde{p} = \left(\tilde{X}, \sqrt{1+|\tilde{X}|^2}, z\right)$ a reflexão de p em relação ao plano $\Pi(r)$. Observe também que $|\tilde{X}| > |X|$.

De fato, tome $x = \left(0, x_0, \sqrt{1+x_0^2}, z\right)$ sobre o plano Π tal que $p = \alpha_x(s_0)$ e então, $\tilde{p} = \alpha_x(2r - s_0)$. Em coordenadas, escrevemos

$$p = \left(\sinh(s_0), x_0 \cosh(s_0), \sqrt{1+x_0^2} \cosh(s_0), z \right) \text{ e}$$

$$\tilde{p} = \left(\sinh(2r - s_0), x_0 \cosh(2r - s_0), \sqrt{1+x_0^2} \cosh(2r - s_0), z \right).$$

Neste caso,

$$|X|^2 = \sinh^2(s_0) + x_0^2 \cosh^2(s_0) \text{ e}$$

$$|\tilde{X}|^2 = \sinh^2(2r - s_0) + x_0^2 \cosh^2(2r - s_0).$$

Definimos a função $f(t) = \sinh^2(2r - t) + x_0^2 \cosh^2(2r - t) - \sinh^2(t) - x_0^2 \cosh^2(t)$ e provaremos que f é positiva para todo $t < r$. Em particular, provaremos que $f(s_0) = |\tilde{X}|^2 - |X|^2 > 0$. Note que

$$f'(t) = -(1+x_0^2) [2 \sinh(2r - t) \cosh(2r - t) + 2 \sinh(t) \cosh(t)]$$

$$= -(1+x_0^2) [\sinh(4r - 2t) + \sinh(2t)],$$

sendo que a última igualdade decorre do fato de $\sinh(2a) = 2 \sinh(a) \cosh(a)$, para qualquer $a \in \mathbb{R}$. Note também que $4r - 2t > 2t$ e $4r - 2t > 0$, pois $r > t$ e $r > 0$. Assim, como a função \sinh é crescente, temos que $\sinh(4r - 2t) + \sinh(2t) > 0$. Logo, $f'(t) < 0$ e então f é decrescente. Além disso, $f(r) = 0$. Dessa forma, $f(t) > 0$ para todo $t > r$, como queríamos provar.

Portanto, se $p \in \Pi_-(r)$, então

$$\operatorname{arcsenh}(|\tilde{X}|) > \operatorname{arcsenh}(|X|). \quad (4.2)$$

Ainda, verificamos que esta diferença se aproxima de 0 a medida que o ponto p se aproxima do plano $\Pi(r)$.

Assim, tomemos $\left(X, \sqrt{1+|X|^2}, G(X)\right)$ em $\Pi_-(r)$ com $|X| > r$ suficientemente grande. Obtemos que:

$$\begin{aligned} \tilde{G}(X) - G(X) &= G(\tilde{X}) - G(X) \\ &= 2(\operatorname{arcsenh}(|\tilde{X}|) - \operatorname{arcsenh}(|X|)) - \phi(X) + \phi(\tilde{X}) \\ &\geq 2(\operatorname{arcsenh}(|\tilde{X}|) - \operatorname{arcsenh}(|X|)) + \phi(\tilde{X}) - C e^{-2\operatorname{arcsenh}(|X|)} \\ &\geq 2(\operatorname{arcsenh}(|\tilde{X}|) - \operatorname{arcsenh}(|X|)) - C \left(e^{-2\operatorname{arcsenh}|\tilde{X}|} + e^{-2\operatorname{arcsenh}(|X|)} \right). \end{aligned}$$

Nosso objetivo é provar que esta desigualdade acima é positiva. Dessa forma, definimos a função $v(x_1, x_2) = 2(x_1, x_2) - C(e^{-2x_1} + e^{-2x_2})$ e, supondo que $x_1 > x_2 > r$, analisamos quando v é negativa. Seja $\{(x_n^1, x_n^2)\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em \mathbb{R}^2 tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, temos $x_n > y_n > n$ e suponha que $v(x_n, y_n) \leq 0$. Equivalentemente,

$$2(x_n - y_n) \leq C(e^{-2x_n} + e^{-2y_n}).$$

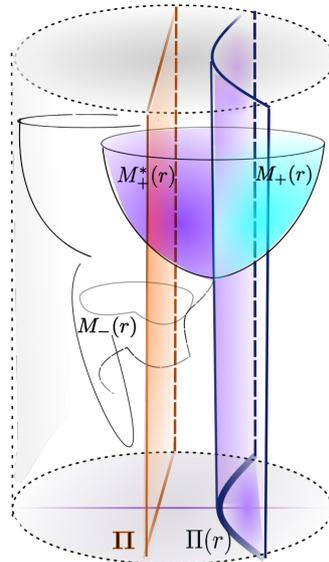
Como $x_n > y_n$, temos que $0 < 2(x_n - y_n)$. Assim, $\lim_{n \rightarrow \infty} 2(x_n - y_n) = 0$. Portanto, v é negativa quando a diferença $x_n - y_n$ tende a zero. Em nosso caso, podemos tomar $|X|$ suficientemente grande tal que $\operatorname{arcsenh}|\tilde{X}| - \operatorname{arcsenh}|X|$ seja suficientemente grande e $v(\operatorname{arcsenh}|\tilde{X}|, \operatorname{arcsenh}|X|) > 0$. Portanto,

$$\tilde{G}(X) - G(X) > 0 \tag{4.3}$$

para $|X|$ suficientemente grande. Utilizamos esta equação para provarmos que $M_+^*(r) \geq M_-(r)$. Veja a Figura 4.3.

Note que $M_+^*(r)$ é também gráfico sobre o plano $\Pi(r)$. Além disto, como na afirmação anterior, utilizando a hipótese do comportamento assintótico de M , pode-se provar que parte de $M_-(r)$, fora da bola de raio r , é gráfico sobre o plano $\Pi(r)$. Para compararmos as superfícies $M_-(r)$ e $M_+^*(r)$ é suficiente analisarmos apenas $M_+^*(r)$ e este pedaço de $M_-(r)$ que é gráfico sobre $\Pi(r)$.

Seja x no plano Π tal que $\mathfrak{p}^{-1}(x) \cap M_+^*(r) \neq \emptyset$, $\mathfrak{p}^{-1}(x) \cap M_-(r) \neq \emptyset$ e $\mathfrak{p}^{-1}(x) \cap M_+(r) \neq \emptyset$. Segue da discussão acima que tais interseções são dadas por conjuntos unitários. Sejam u, \tilde{u} e v os únicos pontos em $\mathfrak{p}^{-1}(x) \cap M_+(r)$, $\mathfrak{p}^{-1}(x) \cap M_+^*(r)$ e $\mathfrak{p}^{-1}(x) \cap M_-(r)$, respectivamente.

Figura 4.3 Relação entre $M_+^*(r)$ e $M_-(r)$.

Escrevemos u, \tilde{u} e v como:

$$\begin{aligned} u &= \left(X_1, \sqrt{1 + |X|^2}, G(X_1) \right) = \alpha_x(s_1), \\ \tilde{u} &= \left(\tilde{X}_1, \sqrt{1 + |\tilde{X}_1|^2}, G(X_1) \right) = \alpha_x(\tilde{s}_1) \text{ e} \\ v &= \left(X_2, \sqrt{1 + |X_2|^2}, G(X_2) \right) = \alpha_x(s_2), \end{aligned}$$

onde $s_1 = \tilde{2}r - s_1$ e $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$.

Dessa forma, pela Definição 2.6, para verificarmos que $M_+^*(r) \geq M_-(r)$, é suficiente provarmos que $\tilde{s}_1 \geq s_2$. Suponha, por contradição que $s_2 > \tilde{s}_1$. Neste caso, utilizando um argumento análogo ao que fizemos anteriormente, pode-se verificar que

$$\operatorname{arcsenh}(|X_2|) > \operatorname{arcsenh}(|\tilde{X}_1|)$$

e então

$$G(X_2) > G(\tilde{X}_1). \quad (4.4)$$

Por outro lado, como os pontos \tilde{u} e v estão sobre a curva α_x , devemos ter que $G(X_2) = G(X_1)$, visto que esta curva tem altura constante. Logo, pela equação 4.4 acima,

$$G(X_1) > G(\tilde{X}_1)$$

contradizendo 4.3. Portanto, concluímos que $\tilde{s}_1 \geq s_2$ e que $M_+^*(r) \geq M_-(r)$. \square

Afirmção 4.3. Se $r_0 \in \mathcal{A}$, então $[r_0, \infty) \subset \mathcal{A}$.

Para a prova dos passos dessa afirmação precisamos lembrar que a curva $\alpha_x(r_0) := T_{r_0}(x)$ é uma geodésica para cada $x \in \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ e, se $p = \alpha_x(r_0)$ para algum x , então a reflexão \tilde{p} de p em relação a um certo plano $\Pi(r_0)$ também está sob a curva α_x .

Demonstração. Seja $r_1 > r_0$, provaremos que $M_+(r_1)$ é gráfico sobre o plano $\Pi(r_1)$ e que $M_+^*(r_1) \geq M_-(r_1)$. Note que, pela definição de $M_+(r_0)$ e de $M_-(r_0)$ devemos ter que $M_+(r_1) \subset M_+(r_0)$ e $M_-(r_0) \subset M_-(r_1)$.

Suponha, por contradição, que $r_1 \notin \mathcal{A}$. Então, $M_+(r_1)$ não é gráfico sobre o plano $\Pi(r_1)$ ou $M_+^*(r_1)$ não está ao lado direito de $M_-(r_1)$. Caso $M_+(r_1)$ não seja gráfico sobre o plano $\Pi(r_1)$, existe um $x \in \Pi$ tal que a curva α_x intersepta $M_+(r_1)$ em mais de um ponto. Isto contradiz $M_+(r_0)$ ser gráfico sobre $\Pi(r)$, visto que $M_+(r_1) \subset M_+(r_0)$.

Por outro lado, suponha que $M_+^*(r_1)$ não está à direita de $M_-(r_1)$. Assim, como $r_0 > r$ e $r \in \mathcal{A}$ temos que $M_+^*(r_1)$ intersecta $M_-(r_1)$. Então, diminuindo r a partir de r_1 , existe $r_2 \in (r_0, r_1]$ tal que $M_+^*(r_2)$ intersecta $M_-(r_2)$ em um primeiro ponto de contato. Pelo princípio da tangência, $M_-(r_2) = M_+^*(r_2)$.

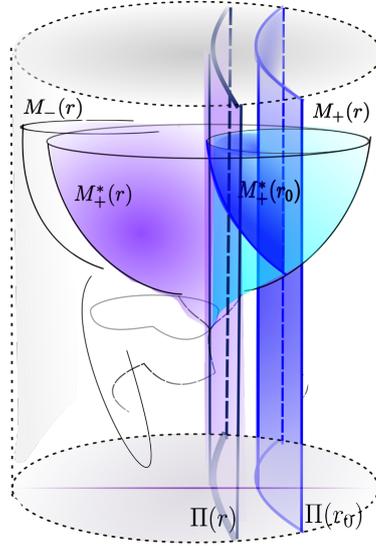
Pelo comportamento assintótico de M , temos que as distâncias entre $M_+^*(r_2)$ e $\mathcal{B}_+^*(r_2)$ e entre $M_-(r_2)$ e $\mathcal{B}_-(r_2)$ tendem a zero. No entanto, a distância entre $\mathcal{B}_+^*(r_2)$ e $\mathcal{B}_-(r_2)$ é positiva e, então, a distância entre $M_-(r_2) = M_+^*(r_2)$ e $\mathcal{B}_-(r_2)$ também é positiva. Isto é uma contradição.

Em ambos os casos, concluímos que $r_1 \in \mathcal{A}$, como queríamos provar. \square

Afirmção 4.4. O conjunto \mathcal{A} é um subconjunto fechado de $[0, \infty)$.

Demonstração. Seja $\{r_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em \mathcal{A} que converge para um certo $r_0 \in [0, \infty)$. Suponha, por contradição, que $r_0 \notin \mathcal{A}$. Observe que $(r_0, \infty) \subset \mathcal{A}$, visto que, pela afirmação anterior $[r_n, \infty) \subset \mathcal{A}$, para todo n .

Suponha, por contradição, que $M_+(r_0)$ não é gráfico sobre $\Pi(r_0)$. Então existem p e q em $M_+(r_0)$ tais que $p \neq q$ e $\mathfrak{p}(p) = \mathfrak{p}(q)$. Note que, como $(r_0, \infty) \subset \mathcal{A}$, devemos ter que $I_x(p) = r_0$

Figura 4.4 Reflexão de M em relação a $\Pi(r)$ e $\Pi(r_0)$.

ou $I_x(q) = r_0$, para algum $x \in \Pi$, em que $I_x(y)$ é o instante em que a curva α_x passa por y . Isto é, p ou q deve estar em $\Pi(r_0)$. De fato, caso contrário, existiria $s > r_0$ tal que $M_+(s)$ não é gráfico sobre $\Pi(s)$.

Sem perda de generalidade, tomemos $I(p) = r_0$, $I(q) = r_1$ e $r_1 > r_0$. Definamos

$$r = \frac{r_1 + 3r_0}{4}.$$

Observe que $r \in \mathcal{A}$ e $p \in M_-(r)$, uma vez que

$$r_1 + 3r_0 > 4r_0 \Leftrightarrow r = \frac{r_1 + 3r_0}{4} > r_0.$$

Por outro lado, sendo $r_1 > r_0$, temos que

$$3r_1 > 3r_0 \Leftrightarrow 4r_1 > 3r_0 + r_1 \Leftrightarrow r_1 > r = \frac{r_1 + 3r_0}{4},$$

e, então, $q \in M_+(r)$.

Além disto, considerando \tilde{q} a reflexão de q em relação ao plano $\Pi(r)$, temos que $I_x(\tilde{q}) = 2r - r_1 = \frac{3r_0 - r_1}{2} < r_0$. Assim, $M_+^*(r)$ não está à direita de $M_-(r)$ pois $r_0 = I(p) > I(\tilde{q})$, o que contradiz o fato de que $r \in \mathcal{A}$. Portanto, $M_+(r_0)$ é gráfico sobre $\Pi(r_0)$. De forma análoga à demonstração da unicidade do *Bowl* Sóliton em \mathbb{R}^3 (veja 2.2), segue da condição de ser gráfico e da continuidade que $M_+(r_0) \geq M_-(r_0)$. \square

Afirmção 4.5. O mínimo do conjunto \mathcal{A} é 0. Em particular, $\mathcal{A} = [0, \infty)$.

Demonstração. Suponha, por contradição, que $s_0 := \min \mathcal{A} > 0$. Então, para todo $\varepsilon > 0$ tal que $s_0 - \varepsilon > 0$, uma das duas condições a seguir é verdadeira:

- (i) $M_+(s_0 - \varepsilon)$ não é gráfico sobre o plano $\Pi(s_0 - \varepsilon)$. Neste caso, o normal η de M em $p \in M(s_0) \cap \Pi(s_0)$ é ortogonal ao vetor normal de $\Pi(s_0)$.
- (ii) $M_+^*(s_0 - \varepsilon)$ não está ao lado direito de $M_-(s_0 - \varepsilon)$. Logo, como $s_0 \in \mathcal{A}$, $M_+^*(s_0)$ intersecta $M_-(s_0)$ tangencialmente em um ponto interior.

Note que, no caso (i), p é um ponto de tangência na fronteira de $M_-(s_0)$ e $M_+^*(s_0)$. Assim, em ambos os casos, utilizamos o princípio da tangência (Teorema 2.4) para concluir que $M_+^*(s_0) = M_-(s_0)$ e, então, $\Pi(s_0)$ é um plano de simetria de M .

Por outro lado, o *Bowl* Sóliton é simétrico apenas em relação a planos verticais que passam pela origem de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, dado que \mathcal{B} é uma superfície de rotação em torno do eixo vertical l . Dessa forma, é imediato que $\mathcal{B}_+^*(s_0)$ está à direita de $\mathcal{B}_-(s_0)$ o qual está a uma distância positiva de $\mathcal{B}_-(0)$.

No entanto, por hipótese sobre M , temos que a distância entre $M_+^*(s_0)$ e $\mathcal{B}_+^*(s_0)$ tende a zero. Então, $M_-(s_0) = M_+^*(s_0)$ tem distância positiva de $\mathcal{B}_-(0)$. Contradizendo o comportamento assintótico de M . Portanto, $\min \mathcal{A} = 0$. \square

Por fim, definimos o conjunto

$$\mathcal{A}^- = \{r \in (-\infty, 0]; M_-(r) \text{ é gráfico sobre } \Pi(r) \text{ e } M_-(r) \leq M_+(r)\},$$

onde o símbolo “ \leq ” denota a relação de “estar ao lado esquerdo” definida analogamente a relação de estar ao lado direito (Definição 2.6).

Como fizemos nas afirmações anteriores, provamos que \mathcal{A}^- é um intervalo não-vazio e que $\min \mathcal{A}^- = 0$. Logo, $M_-(0) \leq M_+(0)$. Após refletir estas duas superfícies em relação ao plano $\Pi(0) = \Pi$, temos que $M_-(0)$ está ao lado direito de $M_+^*(0)$. Portanto, $M_-(0) = M_+^*(0)$ e Π é um plano de simetria de M .

Analogamente, provamos que M é simétrica a qualquer outro plano vertical que passa pela origem de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Em particular, M é uma superfície de rotação em torno do eixo vertical l que toca este eixo ortogonalmente. Além disto, como por hipótese M tem um único fim, concluimos (por unicidade) que M é o *Bowl* Sóliton. \square

Observe que a prova do Teorema de Unicidade do *Bowl* Sóliton em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ é similar ao que foi feito no espaço Euclidiano. Em ambos os casos, definimos um conjunto real \mathcal{A} , o qual é essencialmente o mesmo, e provamos que \mathcal{A} é o intervalo $[0, \infty)$. As principais diferenças entre as demonstrações destes dois teoremas é a forma que definimos alguns elementos e como provamos que $0 = \min \mathcal{A}$.

Bibliografia

- [1] Alexandrov, A. D. (1962). A characteristic property of spheres. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, 58(1):303–315.
- [2] Altschuler, S. J. and Wu, L. F. (1994). Translating surfaces of the non-parametric mean curvature flow with prescribed contact angle. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, 2(1):101–111.
- [3] Arezzo, C. and Sun, J. (2013). Conformal solitons to the mean curvature flow and minimal submanifolds. *Mathematische Nachrichten*, 286(8-9):772–790.
- [4] Bagagiolo, F. (2009). Ordinary differential equations. Disponível em: <http://www.science.unitn.it/~bagagiolo/noteODE.pdf>. Acessado em 11 nov. 2021.
- [5] Bueno, A. (2018). Translating solitons of the mean curvature flow in the space $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. *Journal of Geometry*, 109(3):1–26.
- [6] Bueno, A. (2020). Uniqueness of the translating bowl in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. *Journal of Geometry*, 111(3):1–7.
- [7] Bueno, A., Gálvez, J., and Mira, P. (2020). The global geometry of surfaces with prescribed mean curvature in \mathbb{R}^3 . *Transactions of the American Mathematical Society*, 373(6):4437–4467.
- [8] Casteras, J.-B., Heinonen, E., and Holopainen, I. (2019). Dirichlet problem for f-minimal graphs. *Journal d'Analyse Mathématique*, 138(2):917–950.
- [9] Clutterbuck, J., Schnürer, O. C., and Schulze, F. (2007). Stability of translating solutions to mean curvature flow. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, 29(3):281–293.
- [10] Couto, Ivo Terek e Lymberopoulos, A. (2018). *Introdução à Geometria Lorentziana: Curvas e Superfícies*. Sociedade Brasileira de Matemática.
- [11] de Lira, J. H. and Martín, F. (2019). Translating solitons in riemannian products. *Journal of Differential Equations*, 266(12):7780–7812.
- [12] Do Carmo, M. P. (1998). *Differential forms and applications*. Springer Science & Business Media.
- [13] do Carmo, M. P. (2008). *Geometria Riemanniana*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada.

- [14] Eschenburg, J.-H. (1989). Maximum principle for hypersurfaces. *manuscripta mathematica*, 64(1):55–75.
- [15] Espinar, J. M. (2008). *La ecuación de Codazzi en superficies*. PhD thesis, Universidad de Granada.
- [16] Espinar, J. M. (2014). Maximum principles and geometric applications. Notas do curso Maximum Principles and Geometric Applications realizado XVIII Escola de Geometria Diferencial em Brasília. Disponível em: <http://iemath.ugr.es/cms/wp-content/uploads/MPGeometricApplications.pdf>. Acessado em 14 nov. 2021.
- [17] Fontenele, F. and Silva, S. L. (2001). A tangency principle and applications. *Illinois Journal of Mathematics*, 45(1):213–228.
- [18] García, J. P. (2016). *Translating solitons of the mean curvature flow*. PhD thesis, Universidad de Granada.
- [19] Gilbarg, D. and Trudinger, N. S. (2015). *Elliptic partial differential equations of second order*, volume 224. Springer.
- [20] Hoffman, D., Ilmanen, T., Martín, F., and White, B. (2019). Notes on translating solitons for mean curvature flow. *arXiv preprint arXiv:1901.09101*.
- [21] Hopf, H. (2003). *Differential geometry in the large: seminar lectures New York University 1946 and Stanford University 1956*, volume 1000. Springer.
- [22] Ilmanen, T. (1994). *Elliptic regularization and partial regularity for motion by mean curvature*, volume 520. American Mathematical Soc.
- [23] Kobayashi, S. (2012). *Transformation groups in differential geometry*. Springer Science & Business Media.
- [24] Kobayashi, S. and Nomizu, K. (1996). *Foundations of differential geometry. Vol. II*. Wiley Classics Library. John Wiley & Sons, Inc., New York. Reprint of the 1969 original, A Wiley-Interscience Publication.
- [25] Lages Lima, E. (2011). Variedades diferenciáveis. *Brasil: Instituto de Matemática*.
- [26] Lawn, M.-A. and Ortega, M. (2016). Translating solitons from semi-riemannian foliations. *arXiv preprint arXiv:1607.04571*.
- [27] Magnus, J. R. and Neudecker, H. (2019). *Matrix differential calculus with applications in statistics and econometrics*. John Wiley & Sons.
- [28] Manfio, F., Tojeiro, R., and Van der Veken, J. (2020). Geometry of submanifolds with respect to ambient vector fields. *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, 199(6):2197–2225.
- [29] Mantegazza, C. (2011). *Lecture notes on mean curvature flow*, volume 290. Springer Science & Business Media.
- [30] Martín, F., Pérez-García, J., Savas-Halilaj, A., and Smoczyk, K. (2019). A characterization of the grim reaper cylinder. *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)*, 2019(746):209–234.

- [31] Martín, F., Savas-Halilaj, A., and Smoczyk, K. (2015). On the topology of translating solitons of the mean curvature flow. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, 54(3):2853–2882.
- [32] Martínez, A. and Martínez-Triviño, A. (2019). Equilibrium of surfaces in a vertical force field. *arXiv preprint arXiv:1910.07795*.
- [33] Montiel, S. and Ros, A. (2009). *Curves and surfaces*, volume 69 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI; Real Sociedad Matemática Española, Madrid, second edition. Translated from the 1998 Spanish original by Montiel and edited by Donald Babbitt.
- [34] Nolte, D. D. (2010). The tangled tale of phase space. *Physics today*, 63(4):33–38.
- [35] O’neill, B. (1983). *Semi-Riemannian geometry with applications to relativity*. Academic press.
- [36] Reis, H. F. S. d. (2017). *Sobre o fluxo da furtatura Média em formas espaciais*. PhD thesis, Universidade de Brasília.
- [37] Reynolds, W. F. (1993). Hyperbolic geometry on a hyperboloid. *The American mathematical monthly*, 100(5):442–455.
- [38] Schoen, R. M. (1983). Uniqueness, symmetry, and embeddedness of minimal surfaces. *Journal of Differential Geometry*, 18(4):791–809.
- [39] Smoczyk, K. (2012). Mean curvature flow in higher codimension: introduction and survey. In *Global differential geometry*, pages 231–274. Springer.
- [40] Souam, R. (2021). Mean curvature rigidity of horospheres, hyperspheres, and hyperplanes. *Archiv der Mathematik*, 116(1):115–120.
- [41] Spivak, M. (1979). *A comprehensive introduction to differential geometry. Vol. V*. Publish or Perish, Inc., Wilmington, Del., second edition.

Índice

Bowl Sóliton, 1, 39, 72

campo horizontal, 20

campo vertical, 20

Catenoide de Translação, 1, 39

Catenoides de Translação, 39

catenoides de translação, 73

Disco de Poincaré, 16

espaço de fase, 66

espaço de Lorentz-Minkowski, 17

evolui pelo fluxo de curvatura média, 35

forma divergente, 26

função altura, 21

função ângulo, 22

grim reaper, 1, 38

métrica produto, 18

operador forma, 6

operador linear elíptico, 24

plano hiperbólico, 17

problema de Cauchy para sistema não-linear e
não-autônomo, 70

produto Riemanniano, 18

projeção, 57

sóliton de translação em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, 50

sóliton de translação em \mathbb{R}^{n+1} , 37

translator em \mathbb{R}^{n+1} , 37

uniformemente elíptico, 24

vetor de translação, 37