Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Problema de Dirichlet superlinear sem a condição de Ambrosetti-Rabinowitz.

por

Laura Cristina Lobato de Olivindo

Brasília

2009

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de matemática

Problema de Dirichlet superlinear sem a condição de Ambrosetti-Rabinowitz.

por

Laura Cristina Lobato de Olivindo *

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos para obtenção do grau de

MESTRE EM MATEMÁTICA

Brasília, 31 de março de 2009

Comissão Examinadora:

Prof. Elves Alves de Barros e Silva-UnB- Orientador

Prof. Uberlândio Batista Severo - UFPB - Examinador

Prof. Marcelo Fernandes Furtado - UnB - Examinador

*A autora foi bolsista do CNPQ durante a elaboração deste trabalho.

"Se pude enxergar mais longe foi porque estava sobre os ombros de gigantes"
Isaac Newton

Agradecimentos

Agradeço sobretudo a Deus por tudo o que tenho em minha vida e pelas oportunidades em meu caminho. Agradeço aos meus pais e a minha irmã, em especial à minha mãe, pelos conselhos, amor, carinho, paciência, encorajamento e confiança durante todos esses anos. Ao meu namorado que sempre acreditou em mim e me faz ver um lado bom em todas as coisas da vida. À minha família pelo apoio.

Agradeço às minhas amigas Araceli, Karol, Jaque e Lívia pelas conversas, conselhos e por divirem comigo os momentos bons e ruins durante tantos anos de amizade. À galera do meu semestre (SEMPRE!) Léo, Bruno, Harudgy, Isaac , Diego, Clarissa, Hebert e Carlão. Aos colegas da graduação e aos colegas do mestrado com quem aprendi muito: Paloma, Vinícius (Stander), Batata, Mariana, Kaliana, Adriana, Dani, João Paulo, Wembesom, Simone, André, Sérgio, Igor, Maxwell, Gilberto, Claudiney e todos os demais que fizeram parte desta etapa da minha vida. Agradeço também aos demais amigos que não mencionei aqui mas que estão guardados em meu coração.

Agradeço ao CNPQ pelo suporte financeiro.

Agradeço aos professores que são um exemplo para mim, Célius, José Alfredo, Nigel, Marcelo e Cátia. Ao professor Uberlândio por aceitar participar da banca examinadora. Ao meu orientador, professor Elves, pela paciência, disposição, conselhos, confiança e por sempre me ajudar durante a elaboração desta dissertação. Aos funcionários do MAT pelos serviços prestados.

Resumo

Nesta dissertação, apresentamos vários resultados sobre múltiplas soluções para equações elípticas superlineares em um domínio limitado de $\mathbb{R}^N$ ou no espaço todo. Mostramos que a condição superlinear de *Ambrosetti-Rabinowitz* pode ser substituída por uma condição de superquadraticidade mais natural ao assumir uma condição do tipo Nehari.

Palavras chave: Equações elípticas, funções de Carathéodory, condição superlinear, variedade de Nehari, múltiplas soluções nodais.

Abstract

In this dissertation we present various results on multiple solutions for superlinear elliptic equations in a bounded domain of $\mathbb{R}^N$ or in the whole space. We show that the standard *Ambrosetti-Rabinowitz* superlinear condition can be replaced by a more natural superquadraticity condition when we assume a Nehari type condition.

Key words: Elliptic equations, Caratheodory functions, superlinear condition, Nehari manifold, multiple nodal solutions.

Sumário

Introdução

Nesta dissertação, estudamos a existência de soluções para o problema de Dirichlet elíptico semilinear

$$(\mathbf{P}) \begin{cases} -\Delta u = f(x,u) \text{ em } \Omega \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

onde $N \geq 2$, Ω é um domínio do $\mathbb{R}^N$ e $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função de Carathéodory que satisfaz as seguintes condições:

(f_1) $\displaystyle\lim_{|s|\to\infty} \frac{|f(x,s)|}{|s|^{q-1}} = 0$, uniformemente em x, onde $q = 2^* = \dfrac{2N}{N-2}$, se $N \geq 3$ e $2 < q < 2^* = \infty$ se $N = 2$;

(f_2) $f(x,s) = o(|s|)$ quando $|s| \to 0$ uniformemente em x;

(f_3) $\displaystyle\lim_{|s|\to\infty} \frac{F(x,s)}{s^2} = \infty$ uniformemente em x;

(f_4) $f(x,s)s - 2F(x,s)$ é não decrescente em $|s|$ e crescente para $|s| > 0$ pequeno;

onde $F(x,s) = \displaystyle\int_0^s f(x,t)\, dt$ é a primitva da função $f(x,s)$ em relação à segunda variável.

Em 1973, Ambrosetti e Rabinowitz [3] demonstraram o Teorema do Passo da Montanha e o utilizaram para resolver o Problema $(\mathbf{P})$. A condição utilizada por Ambrosetti e Rabinowitz que garante a dependência superlinear em s foi a seguinte:

(AR) Existem $\mu > 2$ e $M > 0$ tais que para $|s| \geq M$ temos

$$0 < \mu F(x,s) \leq s f(x,s).$$

A condição (AR) implica na condição de crescimento superquadrático (f_3) para F. De fato, usando integração e a condição (AR) temos que existe $C > 0$ tal que $F(x,s) \geq C|s|^\mu$, para $|s|$ suficientemente grande.

Uma condição superlinear mais fraca e natural do que (AR) é a seguinte:

(SL) $\lim\limits_{|s|\to\infty} \dfrac{f(x,s)}{s} = \infty$, uniformemente em x.

Observamos que, na aplicação de teoremas de minimax para o estudo do Problema (**P**), a condição (AR) é utilizada por ser crucial no estabelecimento da geometria do passo da montanha e na verificação da limitação das seqüências de Palais-Smale (PS) (veja Rabinowitz [13]).

Outro método utilizado na resolução de problemas do tipo superlinear é o método da variedade de Nehari que desenvolve um estudo sobre os pontos críticos do funcional ϕ associado ao Problema (**P**), sobre a variedade

$$\mathcal{N} = \left\{ u \in H_0^1(\Omega) \backslash \{0\} \, ; \phi'(u)u = 0 \right\}.$$

No entanto, algumas condições técnicas sobre a função f devem ser assumidas para que $\mathcal{N}$ seja uma variedade de classe C^1. Estas condições não são satisfeitas no nosso caso. Além disto, mesmo na utilização deste método, a condição (AR) é necessária para obter a limitação das seqüências (PS).

Nesta dissertação, estudamos o artigo *On the Ambrosetti-Rabinowitz superlinear condition*, escrito por Z. Liu e Z.Q. Wang [15], no qual se mostra que as condições (f_4) e (SL) são suficientes para mostrar a existência de soluções positivas e negativas do Problema (**P**) e, sendo assim, podemos descartar a hipótese (AR). Na realidade, a condição de superquadraticidade (f_3), mais fraca do que (SL), já é suficiente.

Para discutir a existência dessas soluções utilizamos o método variacional, associando ao Problema (**P**) o funcional $\phi : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ definido por

$$\phi(u) = \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} |\nabla(u)|^2 \, dx - \int\limits_{\Omega} F(x,u) \, dx,$$

o qual mostramos ser de classe C^1 (veja Corolário 2.5). Além disto, observamos que soluções fracas do Problema (**P**) correspondem aos pontos críticos do funcional ϕ.

Admitindo a condição (AR) Ambrosetti e Rabinowitz [3] obtiveram uma solução positiva e outra negativa para o Problema (**P**). Supondo condições de regularidade mais fortes sobre a função f, Wang [14] mostrou a existência de três soluções para o mesmo problema.

O primeiro resultado desta dissertação estabelece a existência de uma solução para o Problema (**P**).

Teorema A. *Suponha que f satisfaça as hipóteses (f_1) - (f_4). Então o Problema* ($\boldsymbol{P}$) *possui uma solução não trivial $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que*

$$\phi(u) = \max_{t>0} \phi(tu) = \inf_{v \in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}} \max_{t>0} \phi(tv) > 0.$$

Como corolário deste teorema, mostramos no Capítulo 2 que o Problema (**P**) possui uma solução positiva e uma solução negativa em $H_0^1(\Omega)$.

Antes de enunciarmos os próximos teoremas, relembramos que, dados $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ e uma função u definida em Ω, definimos por *domínio nodal* de u um subconjunto conexo de Ω onde u não muda de sinal.

Para os Teoremas **B** e **C**, adicionamos a seguinte hipótese:

(f_5) $f(x,s)$ é diferenciável em s.

Teorema B. *Suponha que f satisfaça as hipóteses (f_1) - (f_5). Então o Problema* ($\boldsymbol{P}$) *possui uma solução $w \in H_0^1(\Omega)$ que troca de sinal e possui exatamente dois domínios nodais. Além disto, w é tal que*

$$\phi(w) = \max_{t>0} \phi(tw_+) + \max_{t>0} \phi(tw_-) = \inf_{v^\pm \neq 0} \left\{ \max_{t>0} \phi(tv_+) + \max_{t>0} \phi(tv_-) \right\} > 0.$$

A existência de soluções que mudam de sinal para problemas do tipo superlinear também foi estudada por Bartsch e Wang [12] supondo f de classe C^1 e $f(0) = 0$ (veja também [8]). Diremos que uma função u tem um nó em $\rho > 0$ se $u(\rho) = 0$. No próximo teorema estudamos a existência de soluções radiais, possuindo um número específico de nós, para a equação elíptica em todo $\mathbb{R}^N$. Mais especificamente, considerando o problema

$$(\mathbf{P^*}) \begin{cases} -\Delta u + u = f(|x|, u) \\ \qquad\quad u \in H^1(\mathbb{R}^N) \end{cases}$$

podemos enunciar:

Teorema C. *Suponha que f satisfaça as hipóteses (f_1) - (f_5). Então, para cada inteiro $k > 0$, existe um par u_k^+ e u_k^- de soluções radiais do Problema* ($\boldsymbol{P^*}$)*, com $u_k^-(0) < 0 < u_k^+(0)$, tendo exatamente k nós*

$$0 < \rho_1^\pm < \cdots < \rho_k^\pm < \infty$$

Observamos que as condições (f_1) - (f_4) admitidas no artigo [15] não são suficientes para os Teoremas B e C, pois não há garantia da existência de um único ponto crítico das aplicações $t \mapsto \phi(tu)$, $t > 0$, sendo este um ponto crucial para a demonstração dos mesmos. De acordo com os próprios autores (comunicação pessoal) a hipótese (f_5) deve ser adicionada.

Supondo condições de regularidade mais fortes sobre f e a condição (AR), Bartsch e Willem [11] estudaram o Problema (**P***) e estabeleceram versões do Teorema C.

Finalmente, observamos que as técnicas aqui utilizadas também se aplicam à vários problemas do tipo superlinear.

Esta dissertação está organizada da seguinte maneira: o **Capítulo 1** está dividido em três seções. Na Seção 1.1 enunciamos alguns resultados sobre teoria da medida, espaços de Sobolev e funções de Carathéodory. Na Seção 1.2 exploramos propriedades adicionais que f e F satisfazem e, finalmente, na Seção 1.3 enunciamos resultados da Teoria do Grau Topológico de Brouwer que serão utilizados ao longo da dissertação.

No **Capítulo 2**, inicialmente apresentamos algumas das propriedades técnicas que o funcional ϕ satisfaz. Nas Seções 2.2 e 2.3 demonstramos os Teoremas A e B, respectivamente.

O **Capítulo 3** consiste de três seções. Na Seção 3.1 introduzimos o espaço $H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$ e enunciamos alguns resultados de regularidade para as soluções radiais do Problema (**P***). Após a apresentação de algumas definições preliminares na Seção 3.2, demonstramos o Teorema C na última seção deste capítulo.

Notações

- $L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mensuráveis } ; \int\limits_\Omega |f|^p dx < \infty \right\}, \ 1 \leq p < \infty,$
- $W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^1_{loc}(\Omega) \ ; \text{ para todo multiíndice } |\alpha| \leq k, \ D^\alpha u \text{ existe e } D^\alpha u \in L^p(\Omega)\}, 1 \leq p \leq \infty.$
- $H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega)$
- $H_0^1(\Omega)$ é o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ na norma do espaço $H^1(\Omega)$.
- $L(X, Y) = \{T : X \to Y \ ; \ T \text{ é linear e contínua.}\}$
- $|\Omega|$ denota a medida de Lebesgue do conjunto Ω.
- ∇ é o operador gradiente.
- Δ é o operador laplaciano.
- $\| \cdot \|$ denota a norma do espaço H_0^1.
- $\| \cdot \|_E$ denota a norma do espaço E.
- $u^+(x) = \max\{u(x), 0\}$
- $u^-(x) = \min\{u(x), 0\}$
- $A \subset\subset B$ significa que A está compactamente contido em B, isto é $\overline{A}$ é compacto e $\overline{A} \subset B$.

Capítulo

1

Resultados preliminares

1.1 Teoria da medida, Espaços de Sobolev e funções de Carathéodory

Nesta seção Ω denota um aberto do $\mathbb{R}^N$ e dx é a medida de Lebesgue no $\mathbb{R}^N$. Vamos usar como principais referências [1, 2, 6, 9]. Inicialmente, enunciamos alguns teoremas de convergência que serão utilizados ao longo deste trabalho.

Lema 1.1. *(Lema de Fatou) Se $h_1, h_2, \ldots$ são funções mensuráveis em Ω, não negativas q.t.p., então*

$$\int_{\Omega} \liminf_{n\to\infty} h_n \, dx \leq \liminf_{n\to\infty} \int_{\Omega} h_n \, dx.$$

Teorema 1.2. *(Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue) Sejam $h_1, h_2, \ldots, h, g$ funções mensuráveis em Ω tais que, para todo $n \geq 1$, tenhamos $|h_n| \leq g$ q.t.p. onde $g \in L^1(\Omega)$. Se $h_n \to h$ q.t.p. em Ω, então h é integrável. Além disto,*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\Omega} h_n \, dx = \int_{\Omega} h \, dx.$$

Teorema 1.3. *Se $u_n \to u$ em $L^p(\Omega)$, então existem uma subsequência (u_{n_k}) e $h \in L^p(\Omega)$ tais que*

$$u_{n_k} \to u, \ \text{q.t.p. em}\, \Omega.$$

$$|u_{n_k}| \leq h, \ \text{q.t.p. em}\, \Omega.$$

Definição 1.4. *Sejam E e F espaços métricos.*

(i) Dizemos que $K \subset E$ é relativamente compacto se $\overline{K}$ for compacto.

(ii) Dada a aplicação $T : E \to F$, dizemos que T é compacta se T leva conjuntos limitados em conjuntos relativamente compactos.

Definição 1.5. *Sejam X e Y espaços de Banach reais. Dizemos que X está imerso continuamente em Y, $X \hookrightarrow Y$, se $X \subset Y$ e a inclusão $i : X \to Y$ é contínua, isto é, existe $c > 0$ tal que*

$$\|u\|_Y \leq c\|u\|_X, \text{ para todo } u \in X.$$

Se a inclusão for compacta, diremos que a imersão $X \hookrightarrow Y$ é compacta.

Teorema 1.6. *Suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um aberto limitado com fronteira $\partial\Omega$ de classe $C^{0,1}$, e sejam $k \geq 1$ e $1 \leq p < \infty$. Então*

(i) se $kp < N$, $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, para todo $1 \leq q \leq Np/(N - kp)$.

(ii) se $kp = N$, $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, para todo $q \in [1, \infty)$.

(iii) se $0 \leq m < k - \frac{N}{p} < m + 1$, então $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{m,\alpha}(\overline{\Omega})$ para $0 \leq \alpha \leq k - m - \frac{N}{p}$.

Além disto, as seguintes imersões são compactas

(i)' se $kp < N$, $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, para todo $1 \leq q < Np/(N - kp)$.

(ii)' se $kp = N$, $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, para todo $q \in [1, \infty)$.

(iii)' se $0 \leq m < k - \frac{N}{p} < m + 1$, então $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{m,\alpha}(\overline{\Omega})$ para $\alpha < k - m - \frac{N}{p}$.

As mesmas imersões valem para $W_0^{k,p}(\Omega)$ sem hipótese de regularidade em $\partial\Omega$.

Lema 1.7. *Dada $u \in H_0^1(\Omega)$, para cada $\delta > 0$ o conjunto $\{x \in \Omega \; ; \; |u(x)| \leq \delta\}$ tem medida positiva.*

Demonstração: Suponha que o lema seja falso, isto é: para algum $\delta > 0$ tenhamos $|u| > \delta$ em Ω.

Como $u \in H_0^1(\Omega)$ segue que $u^{\pm}$, $|u| \in H_0^1(\Omega)$ (veja [5]). Além disto, $(u - a)^{\pm} \in H_0^1(\Omega)$, $\forall\, a \in \mathbb{R}$.

Deste modo, teríamos

$$-\delta = (|u| - \delta) - |u| = (|u| - \delta)^{\pm} - |u| \in H_0^1(\Omega),$$

o que é um absurdo, pois a única função constante que pertence ao espaço $H_0^1(\Omega)$ é a função identicamente nula.

Portanto o Lema está demonstrado. ■

Em vários pontos desta dissertação, utilizamos as seguintes desigualdades:

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \text{ onde } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \text{ (desigualdade de Young);} \tag{1.1}$$

$$(|a| + |b|)^\tau \leq 2^{\tau-1}(|a|^\tau + |b|^\tau),\ \tau \geq 1\ ,\ a, b \in \mathbb{R}. \tag{1.2}$$

O restante desta seção é dedicado ao estudo das funções de Carathéodory.

Definição 1.8. *Dizemos que $H : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função de Carathéodory se satisfaz:*

(i) *$s \mapsto H(x, s)$ é contínua para quase todo $x \in \Omega$,*

(ii) *$x \mapsto H(x, s)$ é mensurável para todo $s \in \mathbb{R}$.*

Sejam $p, q \geq 1$ e H uma função de Carathéodory em $\Omega \times \mathbb{R}$ que satisfaz

$$|H(x, s)| \leq a + b|s|^\alpha, \alpha = \frac{p}{q}, \tag{1.3}$$

para certas constantes $a, b > 0$.

Teorema 1.9. *Seja H uma função de Carathéodory em $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ limitado que satisfaz (1.3). Então $H \in C(L^p, L^q)$.*

Demonstração: Primeiro note que, se $u \in L^p(\Omega)$, usando (1.3) e a desigualdade (1.2), obtemos

$$\int_\Omega |H(x, u)|^q dx \leq \int_\Omega (a + b|u|^\alpha)^q dx \leq 2^{q-1} \int_\Omega a^q + b^q|u|^p dx < \infty.$$

Para verificar a continuidade de H, consideramos $(u_n) \subset L^p(\Omega), u \in L^p(\Omega)$ tais que $\|u_n - u\|_{L^p} \to 0$. Pelo Teorema 1.3 e pela desigualdade (1.2), a menos de subsequência, temos que

$$H(x, u_n) - H(x, u) \to 0, \text{ q.t.p. em } \Omega$$

$$|H(x, u_n) - H(x, u)|^q \leq 2^{2(q-1)} \left[2a^q + b^q(|h|^p + |u|^p)\right] \in L^1(\Omega).$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue temos

$$\int_\Omega |H(x, u_n) - H(x, u)|^q dx \to 0,$$

concluindo a demonstração do teorema. ■

Observe que o teorema acima vale quando a constante a é substituída por uma função $a(x) \in L^q(\Omega)$.

Teorema 1.10. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ limitado e suponha $p > 2$. Considere H uma função de Carathéodory com $H(x,0)$ limitada e com derivada parcial $H_s = h$, sendo também uma função de Carathéodory, satisfazendo*

$$|h(x,s)| \leq a + b|s|^{p-2}. \tag{1.4}$$

Então $H : L^p(\Omega) \to L^{p'}(\Omega)$ é Frechét diferenciável em $L^p(\Omega)$ com diferencial

$$dH(x,u) : v \to h(x,u) \cdot v.$$

Demonstração: Integrando (1.4) encontramos constantes $c, d > 0$ tais que

$$|H(x,s)| \leq c + d|s|^{p-1},$$

e pelo teorema anterior temos que $H \in C(L^p, L^{p'})$, onde $p' = p/(p-1)$. Dadas $u, v \in L^p(\Omega)$, vamos escrever

$$\begin{aligned} \omega(u,v) &= \|H(x,u+v) - H(x,u) - h(x,u)v\|_{L^{p'}} \\ &= \left[\int_\Omega |H(x,u(x)+v(x)) - H(x,u(x)) - h(x,u(x))v(x)|^{p'} dx \right]^{\frac{1}{p'}}. \end{aligned}$$

Usando o teorema do valor médio segue que, para quase todo $x \in \Omega$,

$$\begin{aligned} &|H(x,u(x)+v(x)) - H(x,u(x)) - h(x,u(x))v(x)| \\ &= \left| v(x) \int_0^1 \left[h(x,u(x)+\varsigma v(x)) - h(x,u(x)) \right] d\varsigma \right| \\ &= |v(x)w(x)|, \end{aligned}$$

onde $w(x) = \displaystyle\int_0^1 \left[h(x,u(x)+\varsigma v(x)) - h(x,u(x)) \right] d\varsigma$.

Com esta notação e utilizando a desigualdade de Hölder com expoentes $\frac{p}{p'}$ e $\frac{(p-1)}{(p-2)}$, obtemos

$$\omega(u,v) = \left[\int_\Omega |v(x)w(x)|^{p'} dx \right]^{\frac{1}{p'}} \leq \|v\|_{L^p} \|w\|_{L^r}, \text{ onde } r = \frac{p}{p-2}. \tag{1.5}$$

Agora, a norma $\|w\|_{L^r}$ pode ser estimada como se segue:

$$\begin{aligned}\|w\|_{L^r}^r &\leq \int_\Omega dx \int_0^1 |h(x,u(x)+\varsigma v(x)) - h(x,u(x))|^r d\varsigma \\ &= \int_0^1 d\varsigma \int_\Omega |h(x,u(x)+\varsigma v(x)) - h(x,u(x))|^r dx \qquad (1.6) \\ &= \int_0^1 \|h(u+\varsigma v) - h(u)\|_{L^r}^r d\varsigma.\end{aligned}$$

Como h satisfaz (1.4), podemos aplicar o Teorema 1.9 para concluir que h é contínua de L^p em L^r. Assim,

$$\|h(u+\varsigma v) - h(u)\|_{L^r}^r \to 0, \text{ quando } \|v\|_{L^p} \to 0, \ \varsigma \in [0,1]. \qquad (1.7)$$

De (1.5), (1.6) e (1.7) segue que $\omega(u,v) = o(\|v\|_{L^p})$ e o teorema está demonstrado. ■

Defina o funcional

$$I(u) := \int_\Omega H(x,u)\, dx, \text{ onde } H(x,u) = \int_0^u h(x,s)\, ds. \qquad (1.8)$$

Teorema 1.11. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ limitado e H uma função de Carathéodory satisfazendo (1.3) com $\alpha \leq 2^* - 1$. Então I é um funcional de classe C^1 em $H_0^1(\Omega)$ e*

$$I'(u)v = \int_\Omega h(x,u)v\, dx, \text{ para toda } v \in E.$$

Demonstração: Pela imersão de Sobolev, temos que $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$ e então existe uma constante $c > 0$ tal que

$$\|v\|_{L^{2^*}} \leq c\|v\|.$$

Usando o Teorema 1.9, segue que $h \in C(L^{2^*}, L^q)$, com $q = \dfrac{2^*}{\alpha} \geq \dfrac{2N}{N+2}$. Em particular, $h(x,u) \in L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega)$ para toda $u \in H_0^1(\Omega)$. Consequentemente, $h(x,u)v \in L^1(\Omega)$ para todas $u, v \in H_0^1(\Omega)$ e a igualdade

$$N(u)v := \int_\Omega h(x,u(x))v\, dx, \ u,v \in H_0^1(\Omega), \qquad (1.9)$$

define um operador $N : H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$. Afirmamos que N é contínuo. De fato, se

$u_n \to u$ em $H_0^1(\Omega)$, então $u_n \to u$ em $L^{2^*}(\Omega)$. Usando a desigualdade de Hölder e a imersão de Sobolev,

$$\begin{aligned} \|N(u_n) - N(u)\| &= \sup \left\{ \left| \int_\Omega [h(x,u_n) - h(x,u)]v \; dx \right| \; ; \; \|v\| \leq 1 \right\} \\ &\leq c \; \sup \left\{ \|h(x,u_n) - h(x,u)\|_{L^{\frac{2N}{N+2}}} \|v\| \; ; \; \|v\| \leq 1 \right\} \\ &\leq c \; \|h(x,u_n) - h(x,u)\|_{L^{\frac{2N}{N+2}}} \to 0, \text{ quando } n \to \infty. \end{aligned}$$

Novamente, como h satisfaz (1.3) para $\alpha \leq 2^* - 1$, podemos encontrar constantes $c_1, d > 0$ tais que

$$|H(x,s)| \leq c_1 + d|s|^{2^*}.$$

Então $H(\cdot, u(\cdot)) \in L^1(\Omega)$ para toda $u \in H_0^1(\Omega) \subset L^{2^*}(\Omega)$ e o funcional I em (1.8) está bem definido. Aplicando o Teorema 1.10 à função H vista como uma função de $L^{2^*}(\Omega)$ em $L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega)$ e usando a regra de derivação para funções compostas, segue que I é diferenciável e

$$I'(u)v = \int_\Omega h(x, u(x))v \; dx.$$

Portanto o teorema está demonstrado. ■

1.2 Propriedades do termo não linear

Inicialmente, mostramos que $f(x,s)$ é limitada quando $r < |s| < R$, onde $0 < r < R$. A partir desse resultado, juntamente com as hipóteses (f_1) - (f_4), obtemos outras propriedades técnicas que f e F satisfazem.

Lema 1.12. *Suponha que f satisfaça as hipóteses (f_1) - (f_4). Dados $0 < r < R$, existe uma constante $\hat{M}(R,r)$ tal que*

$$0 < f(x,s) < \hat{M}(R,r), \textit{ para todo } r < |s| < R, \textit{ e quase todo } x \in \Omega.$$

Demonstração: É suficiente demonstrar o lema para r suficientemente pequeno e R suficientemente grande. Seja $h(x,s) = f(x,s)s - 2F(x,s)$. Dado $s \neq 0$ temos

$$h(x,s)s = \frac{f(x,s)s^2 - 2F(x,s)s}{(s^2)^2} s^4$$

e consequentemente, para quase todo $x \in \Omega$,

$$h(x,s) = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{F(x,s)}{s^2}\right)s^3.$$

Inicialmente, supomos que $s > 0$. Como $h(x,0) = 0$, segue de (f_4) que $h(x,s) > 0$ se $s > 0$ para quase todo $x \in \Omega$. Fixado um tal valor de x, temos que

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{F(x,s)}{s^2}\right) > 0 \text{ e, consequentemente, } \frac{F(x,s)}{s^2} \text{ é crescente em } s.$$

Portanto, se $r < s < R$,

$$\frac{F(x,r)}{r^2} < \frac{F(x,s)}{s^2} < \frac{F(x,R)}{R^2}. \tag{1.10}$$

Além disto, por (f_2),

$$\frac{F(x,r)}{r^2} > 0.$$

A condição (f_4), para $s > 0$, implica na seguinte desigualdade

$$\frac{F(x,s)}{s^2} < \frac{1}{2}\frac{f(x,s)}{s} = \frac{1}{2}\frac{f(x,s)}{s^{q-1}}s^{q-2}. \tag{1.11}$$

Dado $\epsilon = 2$ na condição (f_1), existe $R_0 > 0$ tal que

$$\frac{f(x,s)}{s^{q-1}} < 2, \ \forall\, s > R_0. \tag{1.12}$$

Como estamos supondo R suficientemente grande, a estimativa acima vale quando $s = R$. Substituindo a expressão acima, quando $s = R$, na equação (1.11) temos

$$F(x,R) < R^q, \tag{1.13}$$

e, consequentemente, pela equação (1.10)

$$F(x,s) < R^q, \ \forall\, r < s < R.$$

Além disto, a equação (1.10) também implica em $F(x,s) > 0$ para $s \in [r,R]$. Utilizando esta informação, a condição (f_4) e as equações (1.12) e (1.13) temos

$$\begin{aligned} 0 &< 2F(x,s) < f(x,s)s \leq f(x,R)R - 2F(x,R) + 2F(x,s) \\ &\leq f(x,R)R + 2F(x,s) < 2R^q + 2R^q = 4R^q, \end{aligned}$$

e como $s > 0$ podemos reescrever a equação acima

$$0 < f(x,s) < \frac{4R^q}{r} = \hat{M}(R,r).$$

Para o caso em que $s < 0$ basta definir as funções

$$g(x,s) = -f(x,-s) \text{ e } G(x,s) = \int_0^s g(x,t)\,dt, \ \forall\, s > 0. \tag{1.14}$$

Então, as hipóteses (f_1) a (f_4) são satisfeitas por $g(x,s)$ e $G(x,s)$. De fato, a verificação de (f_1) a (f_3) é imediata. Para a condição (f_4), basta notar que

$$g(x,s)s - 2G(x,s) = f(x,-s)(-s) - 2\int_0^s -f(x,-t)\,dt$$

e fazendo a mudança de variável $\tau = -t$ temos

$$f(x,-s)(-s) - 2\int_0^{-s} f(x,\tau)\,d\tau = f(x,-s)(-s) - 2F(x,-s), \forall\, s > 0.$$

Logo, para o caso $s < 0$ basta tomar g e G como acima e aplicar o que foi feito no caso em que $s > 0$. Isto demonstra o Lema 1.12 ∎

Lema 1.13. *Suponha que f satisfaça as hipóteses (f_1) - (f_4). Então dado $\epsilon > 0$, existe $C > 0$ tal que*

$$|f(x,s)| \leq \epsilon|s| + C|s|^{2^*-1}, \ \textit{para quase todo } x \in \Omega\,,\ \forall\, s \in \mathbb{R}.$$

Demonstração: De fato, dado $\epsilon > 0$, existem $r > 0$ e $R > 0$ tais que

$$|f(x,s)| \leq \epsilon|s|, \text{para todo } |s| \leq r, \text{ uniformemente em } \Omega; \tag{1.15}$$

$$|f(x,s)| \leq \epsilon|s|^{2^*-1}, \text{para todo } |s| \geq R, \text{ uniformemente em } \Omega. \tag{1.16}$$

A seguir, aplicando o Lema 1.12, encontramos $\hat{M}(R,r)$ tal que, se $r < |s| < R$,

$$|f(x,s)| < \hat{M}(R,r), \text{ q.t.p. em } \Omega. \tag{1.17}$$

Consequentemente, existe $C > \epsilon > 0$ tal que, se $r < |s| < R$,

$$|f(x,s)| < \hat{M}(R,r) \leq C|s|^{2^*-1}, \text{ q.t.p. em } \Omega. \tag{1.18}$$

Por (1.15), (1.16) e (1.18) segue que

$$|f(x,s)| < \epsilon|s| + C|s|^{2^*-1},$$

demonstrando o Lema 1.13. ■

Lema 1.14. *Suponha que f satisfaça as hipóteses* (f_1) - (f_3). *Então*

$$\lim_{t\to\infty}\int_\Omega \frac{F(x,tu)}{t^2} = \infty,$$

para cada $u \in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}$.

Demonstração: Seja

$$A = \{x \in \Omega; |u(x)| > 0\}.$$

Como $u \neq 0$ segue que $|A| > 0$. Vamos definir, para $\delta > 0$, o conjunto

$$A_\delta = \{x \in \Omega; |u(x)| > \delta\} \tag{1.19}$$

Então, existe $\delta > 0$ suficientemente pequeno tal que $med(A_\delta) > 0$. De fato, dado $B \subset \mathbb{R}^N$ considere $\mathcal{X}_B$ a função característica do conjunto B. Se nossa afirmativa não fosse verdade teríamos

$$\mathcal{X}_{A_\delta}(x) \to \mathcal{X}_A(x), \text{ q.t.p em } \Omega \text{ quando } \delta \to 0.$$

$$|\mathcal{X}_{A_\delta}| \leq 1 \in L^1(\Omega), \text{ pois } \Omega \text{ é limitado.}$$

Então, pelo teorema da convergência dominada de Lebesgue,

$$0 = |A_\delta| = \int_\Omega \mathcal{X}_{A_\delta}(x)\,dx \to \int_\Omega \mathcal{X}_A(x)\,dx = |A| > 0$$

o que é um absurdo. De agora em diante fixaremos um δ tal que $|A_\delta| > 0$.

Pela condição (f_3), dado $M > 0$ existe $R_0 > 0$ tal que

$$\frac{F(x,s)}{s^2} > M, \quad \text{sempre que } |s| > R_0$$

Então, dado x em A_δ, $t|u(x)| > t\delta > R_0$ para t suficientemente grande e assim

$$\frac{F(x,tu)}{t^2} > Mu^2.$$

Note que fora de A_δ temos $\dfrac{F(x,s)}{s^2} \geq 0$. Logo,

$$\int_\Omega \frac{F(x,tu)}{t^2}\,dx = \int_{A_\delta} \frac{F(x,tu)}{t^2}\,dx + \int_{\Omega\setminus A_\delta} \frac{F(x,tu)}{t^2}\,dx \geq M \int_{A_\delta} u^2 dx$$

Como M é arbitrário temos $\lim\limits_{t\to\infty} \displaystyle\int_\Omega \frac{F(x,tu)}{t^2}\,dx = \infty$. ■

Teorema 1.15. *Suponha que f satisfaça as hipóteses (f_1) - (f_4). Então $I(u) = \displaystyle\int_\Omega F(x,u)\,dx$ é fracamente contínuo em $H_0^1(\Omega)$.*

Demonstração: Por (f_1), dado $\epsilon > 0$, existe $R > 0$ tal que

$$|f(x,s)| < \epsilon |s|^{q-1}, \forall\ |s| > R.$$

Usando essa informação e as equações (1.15), (1.16) e (1.18)

$$\begin{aligned} |F(x,s)| = \left|\int_0^s f(x,s)d\xi\right| &\leq \left|\int_0^R |f(x,\xi)|d\xi\right| + \left|\int_R^s |f(x,\xi)|d\xi\right| \\ &\leq \left|\int_0^R (\epsilon|\xi| + \hat{M})d\xi\right| + \left|\int_R^s |f(x,\xi)|d\xi\right| \\ &\leq \frac{\epsilon R^2}{2} + \hat{M}|R| + \frac{\epsilon}{q}\left(|s|^q - |R|^q\right) \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{F(x,s)}{|s|^q} \to 0 \text{ quando } |s| \to \infty \tag{1.20}$$

Além disso, vimos que se $r < |s| < R$ então

$$|F(x,s)| \leq M(R,r)$$

Seja agora $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$ tal que $u_n \rightharpoonup u$. Suponha que existe $\epsilon_0 > 0$ tal que

$$\epsilon_0 \leq \left|\int_\Omega \left(F(x,u_n) - F(x,u)\right)\,dx\right|,$$

Temos

$$\int_{\Omega} |F(x,u_n) - F(x,u)|\, dx = \int_{\{|u|\geq 2R\}} |F(x,u_n) - F(x,u)|\, dx + \int_{\{|u|<2R\}} |F(x,u_n) - F(x,u)|\, dx. \tag{1.21}$$

Como $u_n \rightharpoonup u$ em $H_0^1(\Omega)$, segue que existe uma constante $M_1 > 0$ tal que $\|u_n\| \leq M_1$. Pela imersão compacta, a menos de subsequência, temos

$$\begin{aligned} u_n \to u \text{ em } L^r(\Omega),\ r \in [2, 2^*) \text{ e} \\ u_n(x) \to u(x),\ \text{q.t.p. em } \Omega. \end{aligned}$$

Defina os seguintes subconjuntos de Ω

$$\begin{aligned} B_n = \{|u| \geq 2R\ ,\ |u_n| < R\}\ ,\quad C_n = \{|u| \geq 2R\ ,\ |u_n| \geq R\} \\ D_n = \{|u| < 2R\ ,\ |u_n| \geq 3R\}\ ,\ \ E_n = \{|u| < 2R\ ,\ |u_n| < 3R\}\,. \end{aligned}$$

Temos $\mathcal{X}_{B_n}(x) \to 0$ q.t.p. em Ω. Além disso,por (1.20) dado $\epsilon > 0$ qualquer, temos

$$|F(x,u_n) - F(x,u)| \leq |F(x,u_n)| + |F(x,u)| \leq M(R) + \epsilon|u|^q \ \in\ L^1(\Omega),\ \text{em } B_n.$$

Consequentemente

$$\begin{aligned} \int_{B_n} |F(x,u_n) - F(x,u)|\, dx \ &\leq \int_{B_n} (M(R) + \epsilon|u(x)|^q)\, dx \\ &= \int_{\Omega} (M(R) + \epsilon|u(x)|^q)\mathcal{X}_{B_n}(x)\, dx. \end{aligned} \tag{1.22}$$

Como

$$\begin{aligned} |(M(R) + \frac{\epsilon}{q}|u|^q)\mathcal{X}_{B_n}| \leq |(M(R) + \frac{\epsilon}{q}|u|^q)| \in\ L^1(\Omega) \text{ e} \\ (M(R) + \frac{\epsilon}{q}|u(x)|^q)\mathcal{X}_{B_n}(x) \to 0,\ \text{q.t.p. em } \Omega, \end{aligned}$$

basta utilizar o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue para concluir que

$$\int_{\Omega} (M(R) + \epsilon|u(x)|^q)\mathcal{X}_{B_n}(x)\, dx \to 0,\ \text{quando } n \to \infty.$$

Portanto,

$$\int_{B_n} |F(x,u_n) - F(x,u)|\, dx \to 0.$$

Em C_n usamos a equação (1.20) para obter

$$\begin{aligned}\int_{C_n} |F(x,u_n) - F(x,u)|\, dx &\leq \int_{C_n} |F(x,u_n)|\, dx + \int_{C_n} |F(x,u)|\, dx \\ &\leq \epsilon \int_{C_n} |u_n|^q dx + \epsilon \int_{C_n} |u|^q dx \\ &\leq \epsilon \int_{\Omega} |u_n|^q dx + \epsilon \int_{\Omega} |u|^q dx \ \leq \ \epsilon M_1\end{aligned}$$

Segue que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\{|u|\geq 2R\}} |F(x,u_n) - F(x,u)|\, dx \leq 0.$$

Para a última integral em (1.21) temos $\mathcal{X}_{D_n}(x) \to 0$ q.t.p. em Ω e

$$|F(x,u_n) - F(x,u)| \leq |F(x,u_n)| + |F(x,u)| \leq \frac{\epsilon}{q}|u_n|^q + M(2R,r) \ \in L^1(\Omega),$$

e então basta proceder como na integral sobre B_n.
Sobre E_n, temos

$$|F(x,u_n) - F(x,u)| \leq |F(x,u_n)| + |F(x,u)| \leq M(3R,r) + M(2R,r) \ \in L^1(\Omega)$$

e

$$F(x,u_n(x)) - F(x,u(x)) \to 0, \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Logo, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\int_{E_n} |F(x,u_n) - F(x,u)|\, dx \to 0$$

Desse modo teríamos

$$\epsilon_0 \leq \limsup \int_{\Omega} |F(x,u_n) - F(x,u)|\, dx \leq 0,$$

o que é um absurdo. Portanto o teorema está demonstrado. ∎

Teorema 1.16. *Suponha que f satisfaça as hipóteses (f_1) - (f_4). Se $u_n \rightharpoonup u$ em $H_0^1(\Omega)$,* *então*

$$\int_\Omega u_n f(x,u_n)\,dx \to \int_\Omega u f(x,u)\,dx.$$

Demonstração: Novamente, suponha que existe $\epsilon_0 > 0$ tal que

$$\epsilon_0 \leq \left| \int_\Omega [u_n f(x,u_n) - u f(x,u)]\,dx \right|$$

Podemos escrever:

$$\int_\Omega |u_n f(x,u_n) - u f(x,u)|\,dx \leq \int_\Omega |u_n||f(x,u_n) - f(x,u)|\,dx + \int_\Omega |f(x,u)||u_n - u|\,dx. \tag{1.23}$$

Como f é função de Carathéodory, a menos de subsequência,

$$|f(x,u_n) - f(x,u)| \to 0, \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Pelo Lema 1.13, dado $\epsilon > 0$ existe $C > 0$ tal que

$$|f(x,u_n)| \leq \epsilon |u_n| + C|u_n|^{2^*-1}.$$

Pelo Teorema 1.3, existe $h \in L^r(\Omega)$, $r \in [2, 2^*)$, tal que

$$\begin{aligned}
|f(x,u_n) - f(x,u)| &\leq |f(x,u_n)| + |f(x,u)| \leq \epsilon|u_n| + C|u_n|^{2^*-1} + |f(x,u)| \\
&\leq \epsilon|u_n| + C|u_n|^{2^*-1} + |f(x,u)| \\
&\leq \epsilon h + C h^{2^*-1} + |f(x,u)| \in L^1(\Omega).
\end{aligned}$$

Segue, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, que

$$\int_\Omega |u_n||f(x,u_n) - f(x,u)|\,dx \to 0. \tag{1.24}$$

Por outro lado,

$$f(x,u)(u_n - u) \to 0 \text{ quando } n \to \infty, \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Além disto,

$$|f(x,u)||u_n - u| \le |f(x,u)|(h + |u|) \in L^1(\Omega).$$

Novamente, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, segue que

$$\int_\Omega |f(x,u)||u_n - u|\, dx \to 0.$$

Sendo assim teríamos

$$0 < \epsilon_0 < \int_\Omega |u_n f(x,u_n) - u f(x,u)|\, dx \to 0$$

quando $n \to \infty$, o que é um absurdo. Portanto o Teorema 1.16 está demonstrado. ■

1.3 Teoria do grau

Nesta seção, assumimos que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é aberto, limitado e tem fronteira $\partial\Omega$. Aqui $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^N$ será uma aplicação de classe C^1 e $p \in \mathbb{R}^N \backslash f(\partial\Omega)$

Além disso, vamos assumir que p é um valor regular de f (isto é, o jacobiano $J_f(x)$ é diferente de zero para cada $x \in f^{-1}(p)$). Com essas condições, temos que o conjunto $f^{-1}(p)$ é não vazio e podemos definir o grau de f (com respeito a Ω e p) como

$$\deg(f,\Omega,p) = \sum_{x \in f^{-1}(p)\cap\Omega} sgn[J_f(x)] \tag{1.25}$$

Note que o conjunto $f^{-1}(p)\cap\Omega$ é finito. De fato, $f^{-1}(p)\cap\Omega$ é limitado e fechado, logo é um conjunto compacto. Considere, para cada $x \in f^{-1}(p)\cap\Omega$ a bola aberta $B_{r_x}(x) \subset \Omega$. Então

$$f^{-1}(p)\cap\Omega \subset \bigcup_{x \in f^{-1}(p)\cap\Omega} B_{r_x}(x).$$

Pelo Teorema de Borel-Lebesgue, temos

$$f^{-1}(p)\cap\Omega \subset \bigcup_{i=1}^{k} B_{r_{x_i}}(x_i).$$

Como $f^{-1}(p)\cap\Omega\cap B_{r_{x_i}}(x_i) = \{x_i\}$ segue que o conjunto $f^{-1}(p)\cap\Omega$ é finito.

Vamos convencionar que $\deg(f,\Omega,p) = 0$ quando o conjunto $f^{-1}(p)\cap\Omega$ for vazio. Dessa definição é imediato verificar que o grau satisfaz as seguintes propriedades:

(D1) $\deg(id, \Omega, p) = \begin{cases} 1, & \text{se } p \in \Omega \\ 0, & \text{se } p \notin \overline{\Omega}. \end{cases}$

De fato, como $f = id$ é injetiva, se $p \in \Omega$ existe um único y em Ω tal que

$$f^{-1}(p) \cap \Omega = \{y\}.$$

Além disso, como $J_f(x) = 1$ segue que $\deg(id, \Omega, p) = 1$.
Se $p \notin \overline{\Omega}$ então $f^{-1}(p) \cap \Omega = \emptyset$. Logo, $\deg(id, \Omega, p) = 0$

(D2) $\deg(f, \Omega, p) \neq 0$ *implica que existe* $x \in \Omega$ *tal que* $f(x) = p$.

Caso contrário, o conjunto $f^{-1}(p) \cap \Omega$ seria vazio e consequentemente

$$\deg(f, \Omega, p) = 0,$$

contrariando a nossa hipótese.

(D3) $\deg(f, \Omega, p) = 0$ *se* $p \notin f(\Omega)$.

(D4) *Se* $\Omega_1, \Omega_2 \subset \Omega$ *são abertos com* $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ *e* $p \notin f(\overline{\Omega} \backslash (\Omega_1 \cup \Omega_2))$, *então*

$$\deg(f, \Omega, p) = \deg(f, \Omega_1, p) + \deg(f, \Omega_2, p).$$

A verificação deste fato provém da seguinte igualdade

$$f^{-1}(p) \cap \Omega = [f^{-1}(p) \cap \Omega_1] \cup [f^{-1}(p) \cap \Omega_2] \cup [f^{-1}(p) \cap (\Omega \backslash (\Omega_1 \cup \Omega_2))]$$

onde a união é disjunta.

Sendo assim, como o terceiro conjunto é vazio, segue que

$$\begin{aligned} \deg(f, \Omega, p) &= \sum_{x \in f^{-1}(p) \cap \Omega_1} sgn[J_f(x)] + \sum_{x \in f^{-1}(p) \cap \Omega_2} sgn[J_f(x)] \\ &= \deg(f, \Omega_1, p) + \deg(f, \Omega_2, p). \end{aligned}$$

(D5) Sejam $f : \overline{\Omega}_1 \to \mathbb{R}^m$ e $g : \overline{\Omega}_2 \to \mathbb{R}^n$ funções contínuas tais que $0 \notin f(\partial\Omega_1) \cap g(\partial\Omega_2)$. Então, para $f \times g : \overline{\Omega}_1 \times \overline{\Omega}_2 \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ o grau $\deg(f \times g, \Omega_1 \times \Omega_2, (0,0))$ está bem definido e

$$\deg(f \times g, \Omega_1 \times \Omega_2, (0,0)) = \deg(f, \Omega_1, 0) \cdot \deg(g, \Omega_2, 0)$$

Vale mencionar que a noção de grau que foi dada acima junto com as propriedades $(D1)$ até $(D4)$ se aplicam à funções contínuas $\phi : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^N$ e $p \in \mathbb{R}^N \backslash \phi(\partial\Omega)$. No entanto a fórmula (1.25) pode não fazer mais sentido.

Os próximos resultados podem ser encontrados em [13].

Proposição 1.17. *Se $H \in C([0,1] \times \overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ e $p \notin H([0,1] \times \partial\Omega)$ então*

$$\deg(H(t,.), \Omega, p) = \text{ cte, para } t \in [0,1]$$

Corolário 1.18. *Se $\phi, \psi \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ são tais que $\phi = \psi$ em $\partial\Omega$ e $p \in \mathbb{R}^N \backslash \psi(\partial\Omega)$ então*

$$\deg(\psi, \Omega, p) = \deg(\phi, \Omega, p)$$

Demonstração: Defina $H(t,x) = t\phi(x) + (1-t)\psi(x)$. Então $H \in C([0,1] \times \overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ e $p \notin H([0,1] \times \partial\Omega)$ pois $p \notin \phi(\partial\Omega)$.

Pela proposição anterior segue que $\deg(H(t,.), \Omega, p) = $ cte $\forall\, t \in [0,1]$. Em particular para $t = 0$ e $t = 1$,

$$\deg(\psi, \Omega, p) = \deg(\phi, \Omega, p)$$

■

Capítulo

2

Existência de solução em domínios limitados

2.1 Propriedades do funcional ϕ

A *derivada de Frechét* é uma extensão do conceito usual de derivada em espaços Euclidianos para espaços de Banach. Dados E e Y espaços de Banach reais, $U \subset E$ um aberto e uma aplicação $G : U \to Y$ temos a seguinte definição:

Definição 2.1. *Seja $u \in U$. Dizemos que G é Frechét diferenciável em u se existe $A \in L(X, Y)$ tal que, se definirmos $R(h) = G(u + h) - G(u) - A(h)$ então*

$$R(h) = o(\|h\|).$$

Uma tal aplicação A é unicamente determinada e é chamada a derivada de Frechét de G em u.

Assim como para funções em $\mathbb{R}^N$, podemos definir derivada direcional em espaços de Banach. Nestes espaços ela é conhecida como *derivada de Gâteaux*.

Definição 2.2. *Seja $u \in U$. Dizemos que G é Gâteaux diferenciável em u se existe $A \in L(X, Y)$ tal que para todo $h \in X$*

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{G(u + \epsilon h) - G(u)}{\epsilon} = A(h).$$

A aplicação A é unicamente determinada e é chamada derivada de Gâteaux de G em u.

O próximo resultado pode ser encontrado em [2].

Teorema 2.3. *[2] Suponha que $G : U \to Y$ é Gâteaux diferenciável em U e que a sua derivada seja contínua em $u^* \in U$. Então G é Frechét diferenciável em u^* e as derivadas de Frechét e Gâteaux em u^* coincidem.*

Pela imersão de Sobolev temos

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega), \text{ para } r \in [2, 2^*], \text{continuamente.} \tag{2.1}$$

Segue, pela imersão acima, que é possível encontrar uma constante C_0 tal que

$$\|w\|_{L^2} \leq C_0\|w\| \ , \ \|w\|_{L^{2^*}} \leq C_0\|w\|, \ \ \forall \ w \in H_0^1(\Omega). \tag{2.2}$$

Defina $I(u) := \displaystyle\int_\Omega F(x,u)\,dx$, onde $F(x,u) = \displaystyle\int_0^u f(x,s)\,ds.$

Lema 2.4. *Suponha que f satisfaça as hipóteses (f_1) - (f_4). Então $I \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$. Além disto I é Frechét diferenciável com derivada dada por*

$$I'(u)h = \int_\Omega f(x,u)h\,dx, \textit{para toda } h \in H_0^1(\Omega).$$

Demonstração: Pelo Lema 1.13, dado $\epsilon = 1$ existe $C_0 > 0$ tal que

$$|f(x,s)| \leq |s| + C_0|s|^{2^*-1}, \text{ q.t.p. em } \Omega, \ \forall \ s \in \mathbb{R}. \tag{2.3}$$

Pela equação acima e pelo Teorema 1.11 segue que o funcional I é de classe C^1 e o lema está demonstrado. ■

Corolário 2.5. *Suponha que f satisfaça as hipóteses (f_1)-(f_4). Então o funcional ϕ é de classe C^1.*

Lema 2.6. *Suponha que f satisfaça as hipóteses (f_1) - (f_4). Então*

(i) ϕ possui um mínimo local estrito em 0.

(ii) $\phi(tu) \to -\infty$ quando $t \to \infty$, para todo $u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$.

Demonstração: (i) Temos que $\phi(0) = 0$ e $\langle \phi'(0), \varphi \rangle = 0$, $\forall \ \varphi \in H_0^1(\Omega)$. Pelo Lema 1.13, dado $\epsilon > 0$ existem constantes $c_0, c_1 > 0$ tais que

$$|F(x,u)| \leq c_0\epsilon|u|^2 + c_1|u|^{2^*}, \tag{2.4}$$

e consequentemente

$$\left|\int\limits_{\Omega} F(x,u)\ dx\right| \leq c_0\epsilon \int\limits_{\Omega} u^2 dx + c_1 \int\limits_{\Omega} |u|^{2^*}. \tag{2.5}$$

Utilizando a desigualdade de Poincaré e a imersão de Sobolev, podemos encontrar uma constante $c_3 > 0$ tal que

$$\left|\int\limits_{\Omega} F(x,u)\ dx\right| \leq c_3 \left(\epsilon + \|u\|^{2^*-2}\right) \|u\|^2,$$

Escolhendo $\|u\| \leq \epsilon^{\frac{1}{(2^*-2)}}$, temos

$$\left|\int\limits_{\Omega} F(x,u)\ dx\right| \leq c_4\epsilon\|u\|^2.$$

Como ϵ foi arbitrário segue que $\int\limits_{\Omega} F(x,u)\ dx = o(\|u\|^2)$ quando $u \to 0$. Assim

$$\phi(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int\limits_{\Omega} F(x,u)\ dx = \frac{1}{2}\|u\|^2 + o(\|u\|^2) > 0$$

quando $u \to 0$. Segue que ϕ tem um mínimo local estrito em 0 e o item (i) está demonstrado.

(ii) Basta aplicar o Lema 1.14 para obter

$$\phi\,(tu) \to -\infty \text{ quando } t \to \infty.$$

Portanto o Lema 2.6 está demonstrado. ■

Lema 2.7. *Suponha que f satisfaça as hipóteses (f_1) - (f_4). Se $0 < t_1 < t_2$ são tais que $\langle \phi'(t_i u), u\rangle = 0$, $i = 1, 2$, então $\phi(t_1 u) < \phi(t_2 u)$ para $u \in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}$.*

Demonstração: Utilizaremos a função $h(x,u) = f(x,u)u - 2F(x,u)$ definida no Lema 1.12 e a propriedade (f_4). Como $u \neq 0$ existe $\delta > 0$ suficientemente pequeno para o qual o conjunto A_δ definido em (1.19) tem medida positiva. Por este fato e pelo Lema 1.7 podemos escrever

$$\begin{aligned}
\phi(t_1u) &= \frac{t_1^2}{2}\|u\|^2 - \int\limits_\Omega F(x,t_1u)\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_\Omega [f(x,t_1u)t_1u - 2F(x,t_1u)]\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int\limits_{\{|t_2u|\geq\delta\}} h(x,t_1u)\,dx + \frac{1}{2}\int\limits_{\{|t_2u|<\delta\}} h(x,t_1u)\,dx \\
&\leq \frac{1}{2}\int\limits_{\{|t_2u|\geq\delta\}} h(x,t_2u)\,dx + \frac{1}{2}\int\limits_{\{|t_2u|<\delta\}} h(x,t_1u)\,dx \\
&< \frac{1}{2}\int\limits_{\{|t_2u|\geq\delta\}} h(x,t_2u)\,dx + \frac{1}{2}\int\limits_{\{|t_2u|<\delta\}} h(x,t_2u)\,dx = \phi(t_2u).
\end{aligned}$$

Portanto, o lema está demonstrado. ■

Corolário 2.8. *Suponha que f satisfaça as hipóteses $(f_1)-(f_4)$. Então a aplicação $\gamma(t)=\phi(tu):[0,\infty)\to\mathbb{R}$ tem um único ponto de máximo $t_0>0$ para $u\neq 0$. Além disto, esta aplicação é crescente para $0<t<t_0$ e decrescente para $t>t_0$.*

Demonstração: Usando o Lema 2.6 concluímos que ϕ tem um ponto de máximo t_0. Sem perda de generalidade vamos supor que $t_0=1$. Suponha que existem $0<t_1<t_2$ tais que $\gamma(t_1)=\gamma(t_2)$. Pelo Teorema de Rolle teríamos as seguntes possibilidades

(i) $\gamma(t)$ é constante entre t_1 e t_2. Neste caso teríamos dois pontos críticos em (t_1,t_2) onde $\gamma(t)$ teria o mesmo valor, o que contradiz o lema anterior. Logo esta possibilidade não pode ocorrer.

(ii) Existe um ponto $t_3\in(t_1,t_2)$ tal que $\gamma(t_3)=\max\limits_{t\in(t_1,t_2)}\gamma(t)>\gamma(t_1)$. Então existe $t_4\in(t_3,1)$ tal que $\gamma(t_4)=\min\limits_{t\in(t_3,1)}\gamma(t)<\gamma(t_3)$. Novamente obtemos uma contradição com o Lema 2.7.

(iii) Existe um ponto $t_3\in(t_1,t_2)$ tal que $\gamma(t_3)=\min\limits_{t\in(t_1,t_2)}\gamma(t)<\gamma(t_1)$. Então existe $t_4\in(0,t_3)$ tal que $\gamma(t_4)=\max\limits_{t\in(0,t_3)}\gamma(t)>\gamma(t_3)$. O que também contradiz o Lema 2.7.

Como $\lim\limits_{t\to 0}\phi(tu)=0$ e $\lim\limits_{t\to 1}\phi(tu)=\phi(u)>0$, podemos concluir que $\gamma(t)$ é crescente no intervalo $0<t<1$. Um argumento análogo mostra que $\gamma(t)$ é decrescente para $t>1$. Portanto, o corolário está demonstrado. ■

Lema 2.9. *Suponha que f satisfaça as hipóteses (f_1) - (f_4). Se $u_n \to u$ em $H_0^1(\Omega)$ e $\phi(t_n u_n) = \max_{t>0} \phi(tu_n)$ então $t_n \to t_0$, onde $\phi(t_0 u) = \max_{t>0} \phi(tu)$.*

Demonstração: Suponha que o lema não seja verdade. Então, a menos de subsequência, existe $\delta > 0$ tal que

$$|t_n - t_0| \geq \delta.$$

Afirmação 1: t_n não pode convergir para 0.

Como (u_n) é limitada, se $t_n \to 0$ teríamos $\phi(t_n u_n) \to \phi(0) = 0$, contrariando a definição de c

$$0 < c = \inf_{v \in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}} \max_{t>0} \phi(tv) \leq \max_{t>0} \phi(tu_n) = \phi(t_n u_n).$$

Logo, a Afirmação 1 está demonstrada.

Afirmação 2: (t_n) é uma sequência limitada.

Como $\lim_{t\to\infty} \phi(tu) = -\infty$, existe $R_0 > 0$ tal que $\phi(Ru) < 0$ sempre que $R \geq R_0$. Além disso $u_n \to u$ implica que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq n_0$ temos

$$\phi(R_0 u_n) < 0. \tag{2.6}$$

Afirmamos que $t_n \leq R_0$. De fato, se fosse $t_n > R_0$ teríamos $\phi(t_n u_n) > 0$ e $\phi(R_0 u_n) < 0$.

Então existiria $t_1 \in (0, t_n)$ tal que $\phi(t_1 u_n) < 0$ e $t_1 u_n$ seria ponto de mínimo local para $\phi(tu_n)$. Como 0 é mínimo local de ϕ, existiria $t_2 \in (0, t_1)$ tal que $\phi(t_2 u_n) > 0$ e $t_2 u_n$ seria ponto de máximo local de $\phi(tu_n)$.

Assim, encontramos $t_2 < t_1$ pontos críticos de $\phi(tu_n)$ com $\phi(t_2 u_n) > \phi(t_1 u_n)$, o que é um absurdo pois contraria o Lema 2.7. Portanto

$$0 < t_n < R_0.$$

Então, a menos de subsequência, $t_n \to t_1$, $t_1 \neq 0$ e $t_1 \neq t_0$.

Como $t_n u_n \to t_1 u$ em $H_0^1(\Omega)$ e ϕ é contínuo segue que

$$\phi(t_1 u) = \lim_{n\to\infty} \phi(t_n u_n) \geq \lim_{n\to\infty} \phi(t_0 u_n) = \phi(t_0 u) = \max_{t>0} \phi(tu),$$

de onde concluímos que $t_1 = t_0$, um absurdo. Portanto o Lema 2.9 está demonstrado. ■

Lema 2.10. *Suponha que f satisfaça as hipóteses (f_1) - (f_4). Então $\phi(u)$ é fracamente semi-contínuo inferiormente.*

Demonstração: Se $u_n \rightharpoonup u$ em $H_0^1(\Omega)$ então

$$\phi(u) = \frac{\|u\|^2}{2} - \int_\Omega F(x,u)\,dx \le \liminf_{n\to\infty} \frac{\|u_n\|^2}{2} - \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega F(x,u_n)\,dx$$

$$\le \liminf_{n\to\infty} \left(\frac{\|u_n\|^2}{2} - \int_\Omega F(x,u_n)\,dx \right) = \liminf_{n\to\infty} \phi(u_n).$$

Portanto o Lema 2.10 está demonstrado. ■

Lema 2.11. *Suponha que f satisfaça as hipóteses (f_1) - (f_5). Então $\dfrac{f(x,t)}{|t|}$ é não decrescente para todo $t \in \mathbb{R}$ e é crescente em $|t|$ para t suficientemente pequeno.*

Demonstração: Sem perda de generalidade supomos $t > 0$. Usando a hipótese (f_5) temos

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{f(x,t)}{t}\right) = \frac{f'(x,t)t - f(x,t)}{t^2}.$$

Pela hipótese (f_4) temos

$$\frac{d}{dt}\left(f(x,t)t - 2F(x,t)\right) = f'(x,t)t - f(x,t) \ge 0.$$

Logo $\dfrac{f(x,t)}{t}$ é não decrescente. Novamente usando a hipótese (f_4), se $0 < s < t$ são suficientemente pequenos, existe $t_0 \in (s,t)$ tal que $\dfrac{d}{d\tau}\left(\dfrac{f(x,\tau)}{\tau}\right)(t_0) > 0.$

Por continuidade segue que existe $\epsilon > 0$ pequeno tal que $\dfrac{f(x,t)}{t}$ é estritamente crescente em $(t_0-\epsilon, t_0+\epsilon)$. Sendo assim temos

$$\frac{f(x,t)}{t} - \frac{f(x,s)}{s} = \int_s^t \frac{d}{d\tau}\left(\frac{f(x,\tau)}{\tau}\right) > 0.$$

Os mesmos cálculos feitos acima também valem quando $t < 0$ e isto conclui a demonstração do lema. ■

Teorema 2.12. *Suponha que f satisfaça as hipóteses (f_1) - (f_5). Então para qualquer $u \in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}$ existe um único $t > 0$ tal que $\dfrac{d}{dt}\phi(tu) = 0$.*

Demonstração: Lembre que para $\delta > 0$ suficientemente pequeno o conjunto A_δ definido em (1.19) tem medida positiva. Assumindo que $\phi(tu)$ assume seu máximo em $t = 1$ temos, para $t \in (0,1)$,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\phi(tu) &= t\|u\|^2 - \int_\Omega f(x,tu)u\,dx = \int_\Omega (f(x,u)tu - f(x,tu)u)\,dx = \int_{\{u\neq 0\}} tu^2\left[\frac{f(x,u)}{u} - \frac{f(x,tu)}{tu}\right] \\
&= \int_{\{|tu|>\delta\}} tu^2\left[\frac{f(x,u)}{u} - \frac{f(x,tu)}{tu}\right] + \int_{\{|tu|\leq\delta, u\neq 0\}} tu^2\left[\frac{f(x,u)}{u} - \frac{f(x,tu)}{tu}\right] \\
&\geq \int_{\{|tu|\leq\delta, u\neq 0\}} tu^2\left[\frac{f(x,u)}{u} - \frac{f(x,tu)}{tu}\right] > 0,
\end{aligned}$$

onde na última integral obtemos a desigualdade estrita ao aplicar o Lema 2.11. Para $t > 1$ os cálculos são análogos. Portanto, o Teorema 2.12 está demonstrado. ■

2.2 Demonstração do Teorema A

Nesta seção apresentamos a demonstração do Teorema A enunciado na introdução deste trabalho. Para uma melhor visualização e entendimento da demonstração, optamos por dividí-la em dois lemas e uma conclusão.

Sob as condições do Teorema A, usamos o Lema 2.6 e vemos que o valor

$$c := \inf_{v \in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}} \max_{t>0} \phi(tv)$$

está bem definido e $c > 0$. Podemos sempre supor, sem perda de generalidade, que o máximo de $\phi(tv)$ é atingido em $t = 1$ para $v \in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}$.

Considere $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$ uma sequência minimizante para c tal que

$$\phi(u_n) = \max_{t>0} \phi(tu_n) \to c, \text{ quando } n \to \infty. \tag{2.7}$$

Lema A.1 *A sequência $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$ é limitada.*

Demonstração: Suponha que isto não seja verdade. Passando a uma subsequência se necessário, para excluir os possíveis termos onde $\|u_n\| = 0$, vamos definir a sequência $(v_n) \subset H_0^1(\Omega)$ por

$$v_n := \frac{u_n}{\|u_n\|}.$$

Como (v_n) é limitada segue que, a menos de subsequência, $v_n \rightharpoonup v$ em $H_0^1(\Omega)$ e $v_n \to v$ em $L^r(\Omega)$, $r \in [2, 2^*)$.

Se $v \neq 0$ então, definindo o conjunto $A_n = \{x \in \Omega\ ;\ u_n(x) \neq 0\}$, podemos escrever

$$\phi(u_n) = \frac{\|u_n\|^2}{2} - \int\limits_{A_n} F(x, u_n)\ dx = \|u_n\|^2 \left[\frac{1}{2} - \int\limits_{A_n} \frac{F(x, u_n)}{u_n^2} v_n^2\ dx \right]$$

Como $\phi(u_n) \to c$ segue que

$$\frac{c + o(1)}{\|u_n\|^2} = \frac{1}{2} - \int\limits_{A_n} \frac{F(x, u_n)}{u_n^2} v_n^2\ dx.$$

Passando ao limite quando $n \to \infty$ temos

$$\frac{1}{2} = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{A_n} \frac{F(x, u_n)}{u_n^2} v_n^2\ dx.$$

Defina a função $g_n(x) = \dfrac{F(x, u_n(x))}{u_n^2(x)} v_n^2(x) \mathcal{X}_{A_n}$. Na demonstração do Lema 1.12, vimos que

$$\frac{F(x, s)}{s^2} \geq 0.$$

Consequentemente, $g_n(x) \geq 0$,e aplicando o Lema de Fatou a esta função, temos

$$\int\limits_{\Omega} \liminf_{n\to\infty} g_n(x)\ dx \leq \liminf_{n\to\infty} \int\limits_{\Omega} g_n(x)\ dx.$$

Assim teríamos

$$\frac{1}{2} = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\Omega} g_n(x)\ dx \geq \liminf_{n\to\infty} \int\limits_{\Omega} g_n(x)\ dx \geq \int\limits_{\Omega} \liminf_{n\to\infty} g_n(x)\ dx \tag{2.8}$$

Mas, observando que, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{F(x, u_n)}{u_n^2} = \infty$ e $v_n^2(x) \to v^2(x) \neq 0$, teríamos

$$\liminf_{n\to\infty} g_n(x) = \infty,$$

contrariando a igualdade na expressão (2.8).

Se fosse $v = 0$, então fixando um $R > \sqrt{2c}$ e usando o fato que

$$\phi(u_n) = \max_{t>0} \phi(tu_n) \geq \phi(tu_n)\ ,\ \forall\ t > 0$$

teríamos, para $t = \dfrac{R}{\|u_n\|}$,

$$\phi(u_n) \geq \phi(Rv_n) = \frac{R^2}{2} - \int\limits_{\Omega} F(x, Rv_n)\, dx.$$

Sabemos que $v_n \rightharpoonup 0$ em $H_0^1(\Omega)$ implica na convergência de $Rv_n \rightharpoonup 0$ neste mesmo espaço e, pelo Teorema 1.15, concluímos que

$$c = \lim_{n\to\infty} \phi(u_n) \geq \frac{R^2}{2} - \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\Omega} F(x, Rv_n)\, dx = \frac{R^2}{2} > c,$$

o que também é um absurdo. Portanto a sequência (u_n) é limitada e o Lema A.1 está demonstrado. ■

Pelo Lema A.1, a menos de subsequência,

$$u_n \rightharpoonup u \text{ em } H_0^1(\Omega).$$

Lema A.2 *Existe $t_0 > 0$ tal que $\phi(t_0 u) = c$.*
Demonstração: Desde que $\phi(u_n)$ converge para $c > 0$, deve existir $\alpha > 0$ tal que $\alpha < \|u_n\|^2$. Pela igualdade em (2.7) e usando o Teorema 1.16 segue que

$$\alpha < \|u_n\|^2 = \int\limits_{\Omega} u_n f(x, u_n)\, dx \to \int\limits_{\Omega} u f(x, u)\, dx \tag{2.9}$$

quando $n \to \infty$. Logo, $u \neq 0$. Então, existe $t_0 > 0$ tal que

$$\phi(t_0 u) = \max_{t>0} \phi(tu).$$

Como o funcional ϕ é fracamente semi-contínuo inferiormente, temos

$$c \leq \phi(t_0 u) \leq \liminf_{n\to\infty} \phi(t_0 u_n) \leq \liminf_{n\to\infty} \phi(u_n) = c, \tag{2.10}$$

concluindo que $\phi(t_0 u) = c$. Portanto, o Lema A.2 está demonstrado. ■

Pelo Corolário 2.8 temos que $\max\limits_{t>0} \phi(tu)$ é atingido no único ponto $t = t_0$. Vamos assumir, sem perda de generalidade, que $t_0 = 1$. Resta verificar que u é um ponto crítico de ϕ. Se isto não fosse verdade teríamos

$$\langle \phi'(u), u \rangle \neq 0.$$

Como $C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $H_0^1(\Omega)$, existiria $\zeta_u \in C_0^\infty(\Omega)$ tal que

$$\langle \phi'(u), \zeta_u \rangle = -a \neq 0,$$

onde, sem perda de generalidade, vamos supor que $a > 0$. Então, para $v = \dfrac{2\zeta_u}{a}$ teríamos

$$\langle \phi'(u), v \rangle = -2.$$

Além disso, existe $\epsilon_0 > 0$ tal que se $|t-1| + \epsilon < \epsilon_0$ então

$$\langle \phi'(tu + \epsilon v), v \rangle \leq -1. \tag{2.11}$$

De fato, se não existisse tal ϵ_0 seria possível obter sequências t_n, ϵ_n tais que $t_n \to 1$, $\epsilon_n \to 0$ e

$$\langle \phi'(t_n u + \epsilon_n v), v \rangle > -1, \text{ para todo } n \geq 1.$$

Assim, $t_n u + \epsilon_n v \to u$ em $H_0^1(\Omega)$ e por continuidade

$$-1 < \langle \phi'(t_n u + \epsilon_n v), v \rangle \to \langle \phi'(u), v \rangle = -2,$$

o que é um absurdo.

Conclusão da demonstração do Teorema A

Lembremos que estamos supondo que a função u do Lema A.2 não é ponto crítico do funcional ϕ.

Considere o plano bidimensional P gerado por u e v:

$$P = \{au + bv \; ; \; a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Dado $\epsilon > 0$, denotemos por t_ϵ o único número tal que

$$\max_{t>0} \phi\left(t(u + \epsilon v)\right) = \phi\left(t_\epsilon(u + \epsilon v)\right) \tag{2.12}$$

Vimos, no Lema 2.9, que $t_\epsilon \to 1$ quando $\epsilon \to 0$. Então, escolhendo $\epsilon > 0$ pequeno o suficiente para que tenhamos $|t_\epsilon - 1| + \epsilon t_\epsilon \leq \epsilon_0$, obtemos uma contradição argumentando como se segue. Por (2.12) vale a seguinte desigualdade

$$c \leq \phi\left(t_\epsilon(u + \epsilon v)\right).$$

Como ϕ é de classe C^1, utilizamos o Teorema Fundamental do Cálculo para escrever

$$\phi\left(t_\epsilon(u+\epsilon v)\right) = \phi(t_\epsilon u) + \int_0^1 \langle \phi'(t_\epsilon u + s\epsilon v t_\epsilon), \epsilon v t_\epsilon\rangle \; ds \tag{2.13}$$

Observe que devemos ter $\phi(t_\epsilon u) \leq c$, caso contrário teríamos $c < \phi(t_\epsilon u) \to \phi(u) = c$, uma contradição. Utilizando esta última desigualdade e as equações (2.13) e (2.11) segue que

$$c \leq \phi\left(t_\epsilon(u+\epsilon v)\right) \leq c + \epsilon t_\epsilon \int_0^1 \langle \phi'(t_\epsilon u + s\epsilon v t_\epsilon), v\rangle \; ds \leq c - \epsilon t_\epsilon < c,$$

o que é um absurdo. Observe que a contradição foi obtida pois estávamos supondo que $\langle \phi'(u), u\rangle \neq 0$. Portanto a função u do Lema A.2 é um ponto crítico de ϕ e o Teorema A está demonstrado. ■

Corolário 2.13. *Sob as hipóteses do Teorema A, o Problema(**P**) possui uma solução positiva u_+ e uma solução negativa u_-.*

Demonstração: Defina

$$c_+ := \inf_{v\in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}, v\geq 0} \max_{t>0} \phi(tv)$$

Então $c_+ \geq c > 0$, onde c é o nível do Teorema A. Se considerarmos $(u_{n_+}) \subset H_0^1(\Omega)$ uma sequência minimizante para c_+ então, assim como fizemos no Lema A.1, mostramos que (u_{n_+}) é limitada e consequentemente

$$u_{n_+} \rightharpoonup u_+ \neq 0, \text{em } H_0^1(\Omega).$$

Pelos mesmos argumentos utilizados no Lemas A.2 e na conclusão do Teorema A, u_+ é um ponto crítico de ϕ e é uma solução positiva para o Problema (**P**). Para a solução negativa basta definir

$$c_- := \inf_{v\in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}, v\leq 0} \max_{t>0} \phi(tv)$$

e proceder como acima.

Observação: É importante frisar que no Teorema A a aplicação $\phi(tu)$ pode ter mais de um ponto crítico, diferente daquilo que é afirmado na demonstração deste mesmo teorema em [15]. Para que haja apenas um ponto crítico de $\phi(tu)$ é necessária a hipótese (f_5).

2.3 Demonstração do Teorema B

Novamente, vamos dividir a demonstração do Teorema B em dois lemas e uma conclusão. Lembremos que as hipóteses do Teorema B são (f_1)-(f_5), logo essas serão as hipóteses dos dois lemas abaixo.

Defina

$$c_1 := \inf_{v^\pm \neq 0} \left\{ \max_{t>0} \phi(tv^+) + \max_{t>0} \phi(tv^-) \right\}. \tag{2.14}$$

Temos, pelas propriedades do ínfimo,

$$c_1 \geq \inf_{v^+ \neq 0} \max_{t>0} \phi(tv^+) + \inf_{v^- \neq 0} \max_{t>0} \phi(tv^-) \geq c + c = 2c > 0. \tag{2.15}$$

A equação (2.15) nos garante que c_1 está bem definido e que a solução que procuramos não está no mesmo nível da solução do teorema anterior.

Observe que dada $u \in H_0^1(\Omega)$, é sempre possível escrever $\phi(u)$ da seguinte maneira

$$\begin{aligned}
\phi(u) &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u(x)|\, dx + \int_\Omega F(x,u)\, dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{\{u\geq 0\}} |\nabla u(x)|\, dx + \int_{\{u\geq 0\}} F(x,u)\, dx + \frac{1}{2}\int_{\{u<0\}} |\nabla u(x)|\, dx + \int_{\{u<0\}} F(x,u)\, dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{\{u\geq 0\}} |\nabla u^+(x)|\, dx + \int_{\{u\geq 0\}} F(x,u^+)\, dx + \frac{1}{2}\int_{\{u<0\}} |\nabla u^-(x)|\, dx + \int_{\{u<0\}} F(x,u^-)\, dx \\
&= \phi(u^+) + \phi(u^-).
\end{aligned}$$

Considere $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$ uma sequência minimizante para c_1 tal que $\phi(u_n) \to c_1$ quando $n \to \infty$ e que também satisfaça

$$\begin{aligned}
\phi(u_n^+) = \max_{t>0} \phi(tu_n^+) > \alpha > 0, \\
\phi(u_n^-) = \max_{t>0} \phi(tu_n^-) > \alpha > 0,
\end{aligned}$$

onde α é dado pelo Teorema do Passo da Montanha.

Do mesmo modo que no Lema A.1 mostra-se que a sequência (u_n) é limitada e consequentemente (u_n^+) e (u_n^-) também são limitadas. Então, a menos de subsequência, temos

$u_n \rightharpoonup u$, $u_n^+ \rightharpoonup v_1$ e $u_n^- \rightharpoonup v_2$ em $H_0^1(\Omega)$, onde $v_1 \geq 0$ e $v_2 \leq 0$.

Lema B.1 *As funções v_1 e v_2 acima são tais que $v_1 = u^+ \neq 0$, $v_2 = u^- \neq 0$.*
Demonstração: Dada $y \in H_0^1(\Omega)$ temos

$$\langle y, u_n \rangle = \left\langle y, u_n^+ \right\rangle + \left\langle y, u_n^- \right\rangle \to \langle y, v_1 \rangle + \langle y, v_2 \rangle = \langle y, v_1 + v_2 \rangle .$$

Como $u_n \rightharpoonup u$, pela unicidade do limite concluímos que

$$\langle y, (v_1 + v_2) - u \rangle = 0, \ \forall \, y \in H_0^1(\Omega).$$

Sendo assim, $v_1 = u^+$ e $v_2 = u^-$, pois a decomposição de u como soma de uma função não negativa e outra não positiva é única. Além disto, argumentando como na demonstração do Teorema A encontramos $\alpha^\pm$ tais que

$$0 < \alpha^\pm < \|u_n^\pm\| = \int_\Omega u_n^\pm f(x, u_n^\pm) dx \to \int_\Omega u^\pm f(x, u^\pm) dx$$

Isto conclui a demonstração do Lema B.1. ■

Do Lema B.1 também concluímos que $u \neq 0$. Aplicando o Teorema 2.12 às funções $u^\pm \in H_0^1(\Omega)$, encontramos únicos $s^\pm \in \mathbb{R}$, $s^\pm > 0$ tais que

$$\phi(s^\pm u^\pm) = \max_{t>0} \phi(tu^\pm) = c^\pm > 0.$$

Lembre que o Teorema 2.12 nos diz que os pontos $s^\pm$ são os únicos para os quais a derivada $\dfrac{d}{dt}\phi(tu^\pm)$ se anula, respectivamente. Defina

$$w := s^+ u^+ + s^- u^-. \tag{2.16}$$

Note que é sempre possível fazer a decomposição

$$\begin{aligned} \phi(w) &= \frac{1}{2} \int_{\{w \geq 0\}} |\nabla w|^2 \, dx - \int_{\{w \geq 0\}} F(x, w) \, dx + \frac{1}{2} \int_{\{w < 0\}} |\nabla w|^2 \, dx - \int_{\{w < 0\}} F(x, w) \, dx. \\ &= \phi(w^+) + \phi(w^-). \end{aligned}$$

Lema B.2 *Considere a função $w \in H_0^1(\Omega)$ definida em (2.16). Então $\phi(w) = c_1$.*
Demonstração: Escrevendo $\phi(w)$ como acima e utilizando a semi-continuidade inferior

fraca de ϕ, Lema 2.10, temos

$$\begin{aligned} c_1 \leq \phi(w) &= \phi(w^+) + \phi(w^-) = \phi(s^+u^+) + \phi(s^-u^-) \\ &\leq \liminf_{n\to\infty} \phi(s^+u_n^+) + \liminf_{n\to\infty} \phi(s^-u_n^-) \\ &\leq \liminf_{n\to\infty} \phi(u_n^+) + \liminf_{n\to\infty} \phi(u_n^-) \\ &\leq \liminf_{n\to\infty} \{\phi(u_n^+) + \phi(u_n^-)\} \\ &= \liminf_{n\to\infty} \phi(u_n) = c_1. \end{aligned}$$

Então $\phi(w) = c_1$ e o Lema B.2 está demonstrado. ■

Nos resta mostrar que w é solução do Teorema B. Argumentando como na Seção 2.2, se w não fosse um ponto crítico de ϕ, existiria $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ tal que

$$\langle \phi'(w), \varphi \rangle = -2.$$

Afirmamos que existe $\delta > 0$ tal que se $|t-1| + |s-1| \leq \delta$ e $0 \leq \epsilon \leq \delta$ então

$$\left\langle \phi'(tw^+ + sw^- + \epsilon\varphi), \varphi \right\rangle \leq -1. \tag{2.17}$$

De fato, se não existisse tal δ seria possível construir sequências $(t_n), (s_n), (\epsilon_n) \subset \mathbb{R}$ tais que $t_n \to 1$, $s_n \to 1$, $\epsilon_n \to 0$ e

$$\left\langle \phi'(t_nw^+ + s_nw^- + \epsilon_n\varphi), \varphi \right\rangle > -1, \ \forall\, n \geq 1.$$

Tomando o limite, quando $n \to \infty$, na expressão acima e utilizando a continuidade de ϕ' chegamos a uma contradição pois

$$-1 < \lim_{n\to\infty} \left\langle \phi'(t_nw^+ + s_nw^- + \epsilon_n\varphi), \varphi \right\rangle = \left\langle \phi'(w^+ + w^-), \varphi \right\rangle = \langle \phi'(w), \varphi \rangle = -2.$$

Escolhendo um $\delta > 0$ tal que (2.17) seja verdade, defina o conjunto $D = \{(t,s) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ |t-1| \leq \delta, |s-1| \leq \delta\}$ e considere uma função contínua $\eta : D \to [0,1]$ tal que

$$\eta(t,s) = \begin{cases} 1, \text{ se } |t-1| \leq \delta/4 \text{ e } |s-1| \leq \delta/4 \\ 0, \text{ se } |t-1| \geq \delta/2 \text{ ou } |s-1| \geq \delta/2. \end{cases}$$

Para $(t,s) \in D$ defina $Q : D \to H_0^1(\Omega)$ como

$$Q(t,s) = tw^+ + sw^- + \delta\eta(t,s)\varphi.$$

É imediato verificar que $Q \in C(D, H_0^1(\Omega))$. Defina também as funções $G(u) = \langle \phi'(u), u \rangle$ para $u \in H_0^1(\Omega)$ e $H : D \to \mathbb{R}^2$

$$H(t,s) = \left(G\left([Q(t,s)]^+\right), G\left([Q(t,s)]^-\right)\right).$$

Conclusão do Teorema B

Verificaremos que a função w definida em (2.16) é solução do Teorema B. Para tal vamos utilizar as definições, propriedades e resultados apresentados na Seção 1.3.

Vimos que $w^\pm \neq 0$. Sendo assim as aplicações $t \mapsto \phi(tw^\pm)$ assumem um máximo, os quais podemos assumir, sem perda de generalidade, que ocorrem em $t = 1$.

Como ϕ é de classe C^1 e $Q \in C(D, H_0^1(\Omega))$ segue que $H \in C(D, \mathbb{R}^2)$. Se $|t-1| = \delta$ ou $|s-1| = \delta$ então $\eta(t,s) = 0$ e $Q(t,s) = tw^+ + sw^-$. Desse modo,

$$H(t,s) = \left(G(tw^+), G(sw^-)\right) \neq (0,0). \tag{2.18}$$

De fato, como $t \neq 1$, pelo Corolário 2.8 e pelo Teorema 2.12 segue que $G(tw^+) > 0$ se $t = 1 + \delta$ e $G(tw^+) < 0$ se $t = 1 - \delta$. O mesmo vale se t é substituído por s.

Note também que $\deg(H, int(D), (0,0))$ está bem definido. Considere agora a função

$$h(r) = 1 - r. \tag{2.19}$$

Observe que as funções $h(r)$ e $\langle \phi'(rw^\pm), rw^\pm \rangle$ terão o mesmo sinal. De fato:
Se $r < 1$ então $h(r) > 0$ e $\phi(rw^\pm)$ é crescente, logo $\langle \phi'(rw^\pm), rw^\pm \rangle > 0$.
Se $r = 1$, então $h(r) = 0$ e $\langle \phi'(rw^\pm), rw^\pm \rangle = 0$.
Se $r > 1$, então $h(r) < 0$ e $\phi(rw^\pm)$ é decrescente, logo $\langle \phi'(rw^\pm), rw^\pm \rangle < 0$.

Considere a homotopia

$$H_\lambda(t,s) = \left(\lambda h(t) + (1-\lambda) G\left([Q(t,s)]^+\right), \lambda h(s) + (1-\lambda) G\left([Q(t,s)]^-\right)\right), \lambda \in [0,1].$$

Vimos que, se $(t,s) \in \partial D$, $H_0(t,s) = (G(tw^+), G(sw^-)) \neq (0,0)$. Além disso $H_1(t,s) =$

$(h(t), h(s))$ e como $(t,s) \in \partial D$, por (2.19), segue que

$$h(t) = \begin{cases} \delta, & \text{se } t = 1-\delta \\ -\delta, & \text{se } t = 1+\delta. \end{cases}$$

Portanto, $H_1(t,s) \neq (0,0)$ quando $(t,s) \in \partial D$. Na verdade temos

$$H_\lambda(t,s) \neq (0,0), \ \forall\ (t,s) \in \partial D, \ \forall\ \lambda \in [0,1].$$

Para $\lambda = 0$ e $\lambda = 1$ é o que foi feito acima. Se $\lambda \in (0,1)$ então basta usar o fato que $h(t)$ e $\langle \phi'(tw^\pm), tw^\pm \rangle$ têm sempre o mesmo sinal, garantido pela hipótese (f_5), de onde concluímos que $H_\lambda(t,s)$ não se anula sobre ∂D.

Observação: Note que usamos fortemente a hipótese (f_5) para verificar as afirmações acima. Sem esta hipótese não teríamos meios de prosseguir com a demonstração pois não teríamos apenas um ponto crítico de $\phi(tu)$. Poderia até mesmo existir uma sequência de pontos de sela antes do único ponto de máximo desta aplicação(dado pelo Lema 2.8).

Então $H(t,s)$ e $(h(t), h(s))$ são homotópicos sobre ∂D. Como o grau é invariante por homotopias, segue que

$$\deg(H, int(D), (0,0)) = \deg((h(t), h(s)), int(D), (0,0)) = (-1)^2 = 1.$$

Logo, existe $(t,s) \in int(D)$ tal que $H(t,s) = (0,0)$, isto é: $\langle \phi'[Q(t,s)]^\pm, [Q(t,s)]^\pm \rangle$. Daqui em diante vamos fixar um (t,s) para o qual $H(t,s) = (0,0)$. Temos

$$c_1 \leq \max_{r>0} \phi(rQ(t,s)^+) + \max_{r>0} \phi(rQ(t,s)^-) = \phi(Q(t,s)^+) + \phi(Q(t,s)^-) = \phi(Q(t,s))$$

Por outro lado, usando o Teorema Fundamental do Cálculo e a desigualdade em (2.17) concluímos que

$$\phi(Q(t,s)) - \phi(tw^+ + sw^-) = \int_0^1 \left\langle \phi'\left(tw^+ + sw^- + \theta\delta\eta(t,s)\varphi\right), \delta\eta(t,s)\varphi \right\rangle d\theta \leq -\delta\eta(t,s)$$

Se $t \neq 1$ ou $s \neq 1$, então

$$\begin{aligned} \phi(Q(t,s)) &\leq \phi\left(tw^+ + sw^-\right) - \delta\eta(t,s) = \phi(tw^+) + \phi(sw^-) - \delta\eta(t,s) \\ &< \phi(w^+) + \phi(w^-) - \delta\eta(t,s) = \phi(w) - \delta\eta(t,s) \leq c_1 \end{aligned}$$

Se $t = s = 1$, então

$$\phi(Q(t,s)) \le \phi(w^+ + w^-) - \delta = c_1 - \delta < c_1,$$

o que também é um absurdo. Portanto w é ponto crítico de ϕ.

Para concluir a demonstração do Teorema B basta mostrar que w tem apenas dois domínios nodais. Vamos argumentar por absurdo. Suponha que existem Ω_i, $i = 1,2,3$, conjuntos abertos tais que $w_i = w\big|_{\Omega_i}$ satisfazem

$$w_1 > 0, w_2 < 0, w_3 < 0.$$

Como $\langle \phi'(w), w \rangle = 0$ e como cada w_i se anula fora de Ω_i temos $\langle \phi'(w_i), w_i \rangle = 0$. Como estamos supondo w_i não nula e a hipótese (f_5) é satisfeita, cada w_i satisfaz

$$\phi(w_i) = \max_{t>0} \phi(tw_i) > 0.$$

Considere $v = w_1 + w_2$. Então $v^+ = w_1 \neq 0$ e $v^- = w_2 \neq 0$. Assim

$$\begin{aligned} c_1 &\le \max_{t>0} \phi(tv^+) + \max_{t>0} \phi(tv^-) = \phi(v^+) + \phi(v^-) = \phi(v) = \phi(w_1 + w_2) \\ &< \phi(w_1 + w_2) + \max_{t>0} \phi(tw_3) \\ &= \phi(w_1 + w_2) + \phi(w_3) < \phi(w) = c_1, \end{aligned}$$

o que é um absurdo. Portanto o Teorema B está demonstrado. ■

Capítulo 3

Soluções radiais com um número pré-estabelecido de nós

Neste capítulo, sob as condições (f_1) - (f_5), vamos apresentar uma demonstração do Teorema C com uma perspectiva diferente daquela utilizada por Bartsch e Willem [11] para o Problema (**P***) apresentado na introdução desta dissertação. O método aqui utilizado nos dá uma caracterização global dos valores críticos das soluções radiais em suas regiões nodais.

3.1 Espaço $H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$ e regularidade de soluções fracas

Ao utilizar métodos variacionais no estudo de equações diferenciais parciais é necessário algum tipo de compacidade. Porém, nos problemas onde Ω não é limitado, por exemplo $\Omega = \mathbb{R}^N$, há uma perda de compacidade nas imersões de Sobolev e não conseguimos as limitações nas sequências (PS). A fim de contornar esse problema, vamos estudar o subespaço $H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$ das funções radiais de $H^1(\mathbb{R}^N)$. Como referências para esta seção, citamos os trabalhos de Freitas [8], Kavian [10] e Brezis [6].

Definição 3.1. *Dados $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ radialmente simétrico e $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, dizemos que u é uma função radial se existe $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ tal que $u(x) = f(|x|)$ para quase todo $x \in \Omega$.*

Definição 3.2. *Definimos o espaço $H^1_{rad}(\Omega)$ como*

$$H^1_{rad}(\Omega) = \left\{ u \in H^1(\Omega) \; ; \; \textit{existe } f : [0, +\infty) \to \mathbb{R} \textit{ tal que } u(x) = f(|x|) \right\}.$$

Lema 3.3. *O espaço $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ é denso em $H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$*

Proposição 3.4. *As seguintes imersões são contínuas*

$$H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N),\ se\ 2 \leq p < \infty\ ,\ N = 1, 2. \tag{3.1}$$

$$H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N),\ se\ 2 \leq p < 2^*\ ,\ N \geq 3. \tag{3.2}$$

Proposição 3.5. $H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$ *é um espaço de Hilbert.*

Demonstração: Pela definição de função radial é imediato que $0 \in H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$. Além disso, se $u_1, u_2 \in H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, temos

$$(u_1 + \alpha u_2)(x) = u_1(x) + \alpha u_2(x) = f_1(|x|) + \alpha f_2(|x|) = g(|x|)$$

onde $g = f_1 + \alpha f_2$. Então $H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$ é um espaço vetorial normado com a norma $\|\cdot\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}$

Considere agora uma sequência de Cauchy $(u_n) \subseteq H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$. Como $H^1(\mathbb{R}^N)$ é um espaço de Hilbert segue que

$$u_n \to u \text{ para alguma função } u \in H^1(\mathbb{R}^N).$$

Pelas imersões em (3.1) e (3.2), a menos de subsequência, temos $u_n(x) \to u(x)$ q.t.p. em $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Segue que

$$u(x) = \lim_{n\to\infty} u_n(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(|x|) = f(|x|),$$

para quase todo $x \in \mathbb{R}^N$. Portanto $u \in H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$ e a Proposição 3.5 está demonstrada. ■

Lema 3.6. *(Desigualdade de Strauss) Seja $u \in H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$. Então, existe uma constante dependendo apenas de $N, c(N) > 0$, tal que*

$$|u(x)| \leq c(N)|x|^{\frac{1-N}{2}} \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}$$

para quase todo $x \in \mathbb{R}^N$. Na verdade mostra-se que as funções de $H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$ possuem representantes Hölder-contínuos com expoente 1/2 exceto na origem.

Teorema 3.7. *Sejam $N \geq 2$, $p > 1$ tais que $(N-2)p < N+2$. Então a imersão*

$$H^1_{rad}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{p+1}(\mathbb{R}^N)$$

é compacta.

Corolário 3.8. *Sejam $N \geq 2$ um inteiro e $0 < R_1 < R_2$ números reais. Considere o anel*

$$\Omega := \left\{ x \in \mathbb{R}^N\ ;\ R_1 < |x| < R_2 \right\}.$$

Então, para $1 \leq q < \infty$, as seguintes imersões são compactas

$$H^1_{rad}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega}).$$

Lema 3.9. *Suponha $F \in C^1(\mathbb{R})$, com F' limitada. Suponha que Ω é limitado e $u \in W^{1,p}(\Omega)$ para algum $1 \leq p \leq \infty$. Então $v = F(u) \in W^{1,p}(\Omega)$ e*

$$v_{x_i} = F'(u).u_{x_i}\ ,\ i = 1, \ldots, N.$$

O mesmo resultado vale se Ω é ilimitado e $F(0) = 0$.

Lema 3.10. *Se $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $c \in \mathbb{R}$ e $\Omega_c = \{x \in \Omega; u(x) = c\}$, então $Du = 0$ q.t.p. em Ω_c.*

Demonstração: Defina $g(x) = u(x) - c$. Então $g = 0$ sobre Ω_c. Além disso

$$\int_\Omega |g(x)|^p\, dx \leq \int_\Omega (|u(x)| + c)^p\, dx \leq 2^{p-1} \int_\Omega |u(x)|^p\, dx + 2^{p-1}|c|^p|\Omega| < \infty,$$

de onde vemos que $g \in L^p(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$. Como $Dg = Du$ q.t.p. em Ω também temos $Dg \in L^p(\Omega)$. Portanto $g \in W^{1,p}(\Omega)$. Como $Dg = 0$ em Ω_c segue que $Du = 0$ q.t.p em Ω_c e o Lema 3.10 está demonstrado. ■

Os próximos dois teoremas podem ser encontrados em [6].

Teorema 3.11. *Seja $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, com supp$(u) \subset\subset \Omega$. Então $u \in W^{1,p}_0(\Omega)$.*

Teorema 3.12. *Suponha que Ω seja de classe C^1. Seja $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ com $1 \leq p < \infty$. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) $u = 0$ *sobre* $\partial\Omega$*;*

(ii) $u \in W^{1,p}_0(\Omega)$.

Demonstração: Inicialmente mostramos que (i) implica em (ii). Denote por $S =$ supp(u). Suponhamos primeiro que S é limitado. Seja $G \in C^1(\mathbb{R})$ uma função com derivada limitada e satisfazendo

$$G(t) \leq |t|,\ \forall\, t \in \mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad G(t) = \begin{cases} 0, & se \quad |t| \leq 1, \\ t, & se \quad |t| \geq 2. \end{cases} \tag{3.3}$$

Então, pelo Lema 3.9, $u_n := \dfrac{G(nu)}{n} \in W^{1,p}(\Omega)$, para $n \geq 1$. Denote por $S_n =$ supp(u_n). Afirmamos que $u_n \to u$ em $W^{1,p}(\Omega)$. De fato, quando $n \to \infty$, temos

$$u_n \to u, \text{ q.t.p. em } \Omega, \text{ e} \tag{3.4}$$

$$|u_n|^p = \frac{|G(nu)|^p}{n^p} \leq |u|^p \in L^1(\Omega) \tag{3.5}$$

Se $u(x) \neq 0$, então $G'(nu) \to 1$ e

$$Du_n = G'(nu)Du \to Du, \text{ q.t.p. em } \Omega \tag{3.6}$$

Se $u(x) = 0$, pelo Lema 3.10, temos

$$Du = 0 \text{ e } G'(0) = 0 \text{ de onde segue que } Du_n = 0 \tag{3.7}$$

Utilizando as equações (3.4) - (3.7) e o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, concluímos que

$$u_n \to u \text{ em } W^{1,p}(\Omega).$$

Por outro lado $S_n \subset \left\{ x \in \Omega \;;\; |u(x)| \geq \frac{1}{n} \right\} = A.$

Afirmamos que A é compacto. De fato, se (x_k) é uma sequência em A tal que $x_k \to x$, então

$$\frac{1}{n} \leq |u(x_k)| \to |u(x)|,$$

e consequentemente $x \in A$. Além disso $A \subset S$, e estamos supondo S limitado. Portanto,

$$S_n \subset\subset \Omega.$$

Pelo Teorema 3.11 segue que $u \in W^{1,p}_0(\Omega)$.

No caso em que S não é limitado, basta considerar a sequência $\xi_n u$ de truncamentos de u, onde

$$\xi_n(x) = \xi\left(\frac{x}{n}\right),\ n = 1, 2, \dots\ ,\ \xi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N),\ 0 \leq \xi \leq 1,\ \text{e } \xi(x) = \begin{cases} 1, & se \quad |x| \leq 1 \\ 0, & se \quad |x| \geq 2 \end{cases}$$

Então, $\xi_n u \in W^{1,p}(\Omega)$. Além disto, $|\xi u| \leq |u| \in L^p(\Omega)$ e

$$\xi_n(x)u(x) = \xi\left(\frac{x}{n}\right) u(x) \to u(x) \text{ q.t.p. em } \Omega,$$

de onde segue que $\xi_n u \to u$ em $L^p(\Omega)$.

De maneira análoga, mostra-se que $\xi_n Du \to Du$ em $L^p(\Omega)$ e assim

$$\|D(\xi_n u) - Du\|_{L^p} \leq \frac{C}{n}\|u\|_{L^p} + \|\xi_n Du - Du\|_{L^p} \to 0.$$

Portanto,

$$\xi_n u \to u \text{ em } W^{1,p}(\Omega)$$

Note também que $supp(\xi_n u) \subset\subset \Omega$. Sendo assim $\xi_n u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ e pela convergência acima concluimos que $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Para mostrar que (ii) implica (i) utilizaremos alguma notações.

$$\begin{aligned}
&\mathbb{R}^N_+ = \{x = (x', x_N) \ ; \ x_N > 0\} \\
&Q = \{x = (x', x_N) \ ; \ |x'| < 1 \text{ e } |x_N| < 1\} \\
&Q^+ = Q \cap \mathbb{R}^N_+ \\
&Q_0 = \{x = (x', x_N) \ ; \ |x'| < 1 \text{ e } x_N = 0\}
\end{aligned}$$

Utilizando cartas locais, basta mostrar que se $u \in W_0^{1,p}(Q_+) \cap C(Q_+)$, então $u = 0$ sobre Q_0.

Considere uma sequência $(u_n) \subset C^1_0(Q_+)$ tal que $u_n \to u$ em $W^{1,p}(Q_+)$. Para $(x', x_N) \in Q_+$ temos,

$$|u_n(x', x_N)| \leq \int_0^{x_N} \left| \frac{\partial u(x',t)}{\partial x_N} \right| \ dt \tag{3.8}$$

e, para $0 < \epsilon < 1$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\epsilon} \int_{|x'|<1} \int_0^{\epsilon} |u_n(x', x_N)| \ dx' \ dx_N \ &\leq \frac{1}{\epsilon} \int_{|x'|<1} \int_0^{\epsilon} \int_0^{x_N} \left| \frac{\partial u(x',t)}{\partial x_N} \right| dt dx' dx_N \\
&\leq \frac{1}{\epsilon} \int_{|x'|<1} \int_0^{\epsilon} \int_0^{\epsilon} \left| \frac{\partial u_n(x',t)}{\partial x_N} \right| dt dx' dx_N \\
&= \frac{1}{\epsilon} \int_{|x'|<1} \int_0^{\epsilon} \left| \frac{\partial u_n(x',t)}{\partial x_N} \right| dt dx' \cdot \int_0^{\epsilon} dx_N \\
&= \int_{|x'|<1} \int_0^{\epsilon} \left| \frac{\partial u_n(x',t)}{\partial x_N} \right| dt dx'
\end{aligned}$$

Fixado ϵ e tomando o limite quando $n \to \infty$ na seguinte expressão

$$\frac{1}{\epsilon} \int_{|x'|<1} \int_0^{\epsilon} |u_n(x', x_N)| \ dx' \ dx_N \leq \int_{|x'|<1} \int_0^{\epsilon} \left| \frac{\partial u_n(x',t)}{\partial x_N} \right| \ dt \ dx'$$

obtemos, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\frac{1}{\epsilon} \int_{|x'|<1} \int_0^{\epsilon} |u(x', x_N)| \ dx' \ dx_N \leq \int_{|x'|<1} \int_0^{\epsilon} \left| \frac{\partial u(x',t)}{\partial x_N} \right| \ dt \ dx'$$

Fazendo $\epsilon \to 0$, lembrando que $u \in C(\overline{Q_+})$ e $\dfrac{\partial u}{\partial x_N} \in L^1(Q_+)$, temos

$$\int_{|x'|<1} |u(x',0)|\, dx' = 0$$

Pela igualdade acima concluimos que $u = 0$ sobre Q_0. Portanto o Teorema 3.12 está demonstrado. ■

Os próximos dois resultados podem ser encontrados em [7].

Teorema 3.13. *(Brezis-Kato) Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto limitado e $g : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de Caratheodóry. Suponha que existe $a(x) \in L^{\frac{N}{2}}_{loc}(\Omega)$ tal que*

$$|g(x,s)| \leq a(x)(1+|s|) \text{ para quase todo } x \in \Omega, \forall\, s \in \mathbb{R}.$$

Se $u \in H^1_{loc}(\Omega)$ é solução fraca de

$$-\triangle u = g(x,u), \text{ em } \Omega,$$

então $u \in L^q_{loc}(\Omega)$, para todo $q < \infty$. Se $u \in H^1_0(\Omega)$ e $a \in L^{\frac{N}{2}}(\Omega)$, então $u \in L^q(\Omega)$ para todo $q < \infty$.

Teorema 3.14. *(Agmon-Douglis-Nirenberg) Suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é limitado e $u \in H^1_0(\Omega)$ é solução fraca de*

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x) \\ \quad u \in H^1_0(\Omega) \end{cases}$$

Se $\partial\Omega$ é limitada e $f \in L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$, então $u \in W^{2,p}(\Omega)$.

Antes de enunciar o próximo lema, serão necessárias algumas definições. Considere o operador uniformemente elíptico dado por

$$Lu := -\sum_{i,j=1}^{N} a_{i,j}(x) u_{x_i} u_{x_j} + a_0(x) u,$$

definido em $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado. Vamos admitir $a_{i,j} = a_{j,i}$, $a_{i,j}, a_0 \in L^\infty(\Omega)$ e $a_0(x) \geq 0$. À este operador vamos associar a forma bilinear $a : H^1_0(\Omega) \times H^1_0(\Omega) \to \mathbb{R}$ definida por

$$a[u,v] = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{N} a_{i,j} \cdot u_{x_i} v_{x_j} + a_0(x) uv, \tag{3.9}$$

onde $a_{i,j}$, u e v são funções que dependem da variável x e a integração é feita com respeito a esta variável.

Esta forma bilinear define um produto interno em $H^1_0(\Omega)$ equivalente ao usual pois satisfaz

$$a[u,v] = a[v,u], \quad |a[u,v]| \leq c\|u\| \cdot \|v\|, \quad |a[u,u]| \geq d\|u\|^2.$$

Definição 3.15. *Dizemos que um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ satisfaz a condição da esfera interior em $x_0 \in \partial\Omega$ se existe uma bola $B \subset \Omega$ com $x_0 \in B$.*

No próximo lema a expressão $a[\cdot,\cdot]$ se refere à forma bilinear definida em (3.9). O seguinte resultado está em [4].

Lema 3.16. *(Lema de Höpf para funções de classe C^1) Seja $u \in C^1(\overline{\Omega})$ e admita que $a[u,\psi] \leq 0$ para toda $\psi \in H^1_0(\Omega)$, $\psi \geq 0$. Suponha que $\partial\Omega$ satisfaz a condição da esfera interior em $x_0 \in \partial\Omega$ e $u(x_0) > u(x)$ para cada $x \in \Omega$. Então a derivada normal exterior de u em x_0 satisfaz $\dfrac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) > 0$, desde que u não seja constante em Ω e $u(x_0) \geq 0$. A última restrição não é necessária quando $a_0(x) = 0$.*

Demonstração: Considere $B_R(y) \subset \Omega$ uma bola aberta de raio R centrada em y e tal que $\{x_0\} = B_R(y) \cap \partial\Omega$. Fixe ρ tal que $0 < \rho < R$ e considere a função auxiliar

$$v(x) = e^{-\alpha r^2} - e^{-\alpha R^2}, \; r = |x-y|, \tag{3.10}$$

definida no anel $\Gamma = B_R(y) \backslash \overline{B_\rho(y)}$, onde α será escolhido posteriormente.

Defina $w(x) = u(x) - u(x_0) + \epsilon v(x)$, para $\epsilon > 0$ pequeno, em Γ. Vamos admitir que u não é constante em Ω.

Então,

$$w(x) = u(x) - u(x_0) + \epsilon v(x) \leq 0, \text{ sobre } \partial B_R(y),$$

e sobre $\partial B_\rho(y)$ podemos escolher ϵ suficientemente pequeno para que tenhamos $w(x) < 0$. Pelas hipóteses $a[u,\psi] \leq 0$, $u(x_0) \geq 0$ e pelo Teorema do Divergente temos

$$\begin{aligned} a[w,\psi] &= \int_\Gamma \left[\sum a_{i,j} w_{x_i}\psi_{x_j} + a_0(x) w \cdot \psi\right] \\ &= \int_\Gamma \left[\sum a_{i,j} u_{x_i}\psi_{x_j} + a_0(x) u \cdot \psi\right] + \epsilon\left[\sum a_{i,j} v_{x_i}\psi_{x_j} + a_0(x) v \cdot \psi\right] - \int_\Gamma a_0(x) u(x_o)\psi \\ &\leq \epsilon \int_\Gamma \left[\sum a_{i,j} v_{x_i}\psi_{x_j} + a_0(x) v \cdot \psi\right] = -\epsilon \int_\Gamma \psi \left[\sum a_{i,j} v_{x_i x_j} - a_0(x) v\right]. \end{aligned}$$

Observe que se $a_0(x) = 0$ então $\int\limits_{\Gamma} a_0(x)u(x_0)\psi = 0$ e não é necessária nenhuma restrição quanto ao sinal de $u(x_0)$.

Substituindo $v_{x_ix_j} = 4\alpha^2 x_i x_j e^{-\alpha r^2}$ e a função v na expressão acima, segue que

$$a[w,\psi] \leq -\epsilon \int\limits_{\Gamma} \left[e^{-\alpha r^2} \left(\sum a_{i,j} 4\alpha^2 x_i x_j - a_0(x) \right) + a_0(x) e^{-\alpha R^2} \right].$$

Pela condição de elipticidade de L basta escolher $\alpha > 0$ suficientemente grande para que se tenha $a[w,\psi] \leq 0$, para toda $\psi \in H_0^1(\Gamma),\ \psi \geq 0$. Novamente usando o princípio do máximo forte, concluímos que $w(x) < 0$ em Γ e assim devemos ter $\dfrac{\partial w}{\partial \nu}(x_0) \geq 0$.

Deste modo $\dfrac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) \geq -\epsilon \dfrac{\partial v}{\partial \nu}(x_0) > 0$, e isto conclui a demonstração do lema. ■

3.2 Definições e notações preliminares

Lembremos que soluções do Problema (**P***) correspondem aos pontos críticos do funcional

$$\phi(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int\limits_{\mathbb{R}^N} F(|x|, u)\, dx,$$

onde o espaço $X = H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$ está munido do seguinte produto interno

$$\langle u, v \rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \cdot \nabla v + u \cdot v)\, dx.$$

Note que mesmo trabalhando em $\mathbb{R}^N$ o funcional ϕ é de classe C^1. De fato, a presença do termo $|s|$ na condição de crescimento de f (veja Lema 1.13) e as imersões (3.1) e (3.2) nos permitem aplicar o Lema 2.4 mesmo estando num conjunto ilimitado.

Definição 3.17. *Dada $u \in X$, diremos que $\rho > 0$ é um nó da função u se $u(\rho) = 0$.*

Definição 3.18. *Para $0 \leq \rho < \sigma \leq \infty$, definimos o conjunto $\Omega_{\rho,\sigma}$ como*

$$\Omega_{\rho,\sigma} := int \left\{ x \in \mathbb{R}^N \ ;\ \rho \leq |x| < \sigma \right\}$$

Na próxima seção, trabalharemos na variedade de Nehari

$$\mathcal{N} = \{ u \in X \ ;\ u \neq 0,\ G(u) = \langle \phi'(u), u \rangle = 0 \}.$$

Note que para o Teorema C assumimos a hipótese (f_5), logo $\mathcal{N}$ é uma variedade de classe C^1.

Se trocarmos $\mathbb{R}^N$ por $\Omega_{\rho,\sigma}$ e $H^1(\mathbb{R}^N)$ por $H_0^1(\Omega_{\rho,\sigma})$, então os respectivos conjuntos X e $\mathcal{N}$ serão denotados por

$$X_{\rho,\sigma} = H^1_{0,rad}(\Omega_{\rho,\sigma}) \text{ e } \mathcal{N}_{\rho,\sigma} = \{u \in X_{\rho,\sigma} \; ; \; u \neq 0, \; G(u) = \langle \phi'(u), u \rangle = 0\}.$$

Para $u \in X_{\rho,\sigma}$, definindo $u(x) = 0$ para $x \notin [\rho,\sigma]$, temos que u é radial e $u \in H_0^1(\Omega_{\rho,\sigma}) \subset H_0^1(\mathbb{R}^N) = H^1(\mathbb{R}^N)$. Assim $X_{\rho,\sigma} \subset X$ e consequentemente $\mathcal{N}_{\rho,\sigma} \subset \mathcal{N}$. Na próxima seção vamos demonstrar a existência da solução u_k^+ descrita no Teorema C.

Daqui em diante, para simplificar a leitura do texto, vamos utilizar as seguintes notações: dados $0 \leq \rho_j < \rho_{j+1}$ e $0 \leq \rho_j^n < \rho_{j+1}^n$, os conjuntos $\Omega_{\rho_j,\rho_{j+1}}, \Omega_{\rho_j^n,\rho_{j+1}^n}$ e $\Omega_{\rho_j-\epsilon,\rho_{j+1}+\epsilon}$ serão denotados por $\Omega_j, \Omega_{j,n}$ e Ω_j^ϵ, respectivamente. Além disso, as funções $u_n\big|_{\Omega_{j,n}}$ e $u\big|_{\Omega_j}$ serão denotadas por $u_{j,n}$ e u_j, respectivamente. Finalmente, os conjuntos $\mathcal{N}_{\rho_j^n,\rho_{j+1}^n}$ e $\mathcal{N}_{\rho_j,\rho_{j+1}}$ serão identificados por $\mathcal{N}_{j,n}$ e $\mathcal{N}_j$.

Definição 3.19. *Fixado k, definimos o conjunto $\mathcal{N}_k^+$ como*

$$\mathcal{N}_k^+ := \left\{ u \in X \; ; \; \begin{array}{l} \textit{existem } 0 = \rho_0 < \rho_1 < \cdots < \rho_k < \rho_{k+1} = \infty \textit{ tais que} \\ (-1)^j u\big|_{\Omega_j} \geq 0 \;\; e \;\; u\big|_{\Omega_j} \in \mathcal{N}_j \;\; para \;\; j = 0,1,\ldots,k \end{array} \right\}$$

Definição 3.20. *Definimos o valor c_k^+ como sendo*

$$c_k^+ := \inf_{\mathcal{N}_k^+} \phi.$$

Observamos que o ínfimo acima é o máximo de ϕ na direção radial.

3.3 Demonstração do Teorema C

O objetivo desta seção é mostrar que o valor c_k^+, definido na seção anterior, é atingido por uma função $u_k^+ \in \mathcal{N}_k^+$. Por ser muito extensa, optamos por dividir a demonstração do Teorema C em sete lemas e uma conclusão.

Observações iniciais: Defina em $[0,\infty) \times \mathbb{R}$ as funções

$$f^+(r,u) = \begin{cases} f(r,u), \text{se } u \geq 0 \\ -f(r,-u), \text{se } u < 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad F^+(r,u) = \int_0^u f^+(r,s)\, ds.$$

Trocando F por F^+ na definição de ϕ, obtemos um novo funcional que será denotado por ϕ^+. Note que a função f^+ definida acima é ímpar e, consequentemente, F^+ é par. Pelo Teorema A, o ínfimo

$$c^+(\rho,\sigma) := \inf_{\mathcal{N}_{\rho,\sigma}} \phi^+ \tag{3.11}$$

é atingido, desde que $0 \le \rho < \sigma < \infty$.

Como $\phi^+(u) = \phi^+(|u|)$ segue que se u é um minimizante para a equação acima então $|u|$ também será. Logo, podemos assumir sempre que a função minimizante u da equação (3.11) é uma solução positiva do problema

$$\left\{ \begin{array}{r} -\Delta u + u = f(|x|, u) \\ u \in X_{\rho,\sigma} \end{array} \right. \tag{3.12}$$

De maneira análoga, se definirmos em $[0,\infty) \times \mathbb{R}$ as funções

$$f^-(r,u) = \left\{ \begin{array}{r} -f(r,-u), \text{se } u \ge 0 \\ f(r,u), \text{se } u < 0 \end{array} \right. \quad \text{e} \quad F^-(r,u) = \int_0^u f^-(r,s)\, ds.$$

obtemos um novo funcional ϕ^- ao substituírmos F por F^- na definição de ϕ. Novamente o Teorema A implica que o ínfimo

$$c^-(\rho,\sigma) := \inf_{\mathcal{N}_{\rho,\sigma}} \phi^-$$

é atingido por minimizantes negativos que serão as soluções negativas de (3.12).

Feitas estas observações, iniciamos a demonstração do Teorema C.

Seja $(u_n) \subset \mathcal{N}_k^+$ uma sequência minimizante para c_k^+. Pelos mesmos argumentos do Teorema A é possível mostrar que a sequência (u_n) é limitada. Como $(u_n) \subset \mathcal{N}_k^+$, existem

$$0 = \rho_0^n < \rho_1^n < \cdots < \rho_k^n < \rho_{k+1}^n = \infty$$

tais que

$$(-1)^j u_{j,n} \ge 0 \;\text{ e }\; u_{j,n} \in \mathcal{N}_{j,n}, \text{ para } j = 0, \ldots, k. \tag{3.13}$$

Segue que, para cada $n \ge 1$, a seguinte igualdade é satisfeita

$$\|u_{j,n}\|^2 = \int\limits_{\Omega_{j,n}} u_{j,n} f(r, u_{j,n})\, dx.$$

Observe que o Lema 2.6 vale mesmo num domínio ilimitado pela presença do termo $|s|$ na condição de crescimento de f (Lema 1.13) e pelas imersões em (3.1) e (3.2). Como

f satisfaz (f_1) - (f_4), pelo Lema 2.6 segue que 0 é um ponto de mínimo local estrito de ϕ. Sendo assim existe $\delta > 0$ tal que $\|u\| \geq \delta$, para toda $u \in \mathcal{N}$.

De maneira análoga ao que foi feito no Lema 1.13, usando as condições (f_1) - (f_4) e fixado $p \in (2, 2^*)$, dado $\epsilon > 0$ existe uma constante $c > 0$ tal que

$$|f(x,s)| \leq \epsilon|s| + c|s|^{p-1} + \epsilon|s|^{2^*-1}, \text{ para quase todo } x \in \mathbb{R}^N, \ \forall\, s \in \mathbb{R}.$$

Com esta condição de crescimento, temos

$$\int\limits_{\Omega_{j,n}} u_{j,n} f(r, u_{j,n})\, dx \leq \epsilon \int\limits_{\Omega_{j,n}} |u_{j,n}|^2 + c \int\limits_{\Omega_{j,n}} |u_{j,n}|^p + \epsilon \int\limits_{\Omega_{j,n}} |u_{j,n}|^{2^*}. \tag{3.14}$$

Se $j = 0$ então $\Omega_{0,n}$ é limitado e pelo Teorema 1.6 item *i'* concluímos que $H_0^1(\Omega_{0,n}) \hookrightarrow L^q(\Omega_{0,n})$ para $q \in [1, 2^*]$. Para $j \geq 1$ basta aplicar o Corolário 3.8 e obter a imersão $H_0^1(\Omega_{j,n}) \hookrightarrow L^q(\Omega_{j,n})$, que é compacta para $q \in [1, \infty)$. Então, para $q = 2$ e $q = 2^*$, existem constantes c_1 e c_2, respectivamente, tais que

$$\|u_{j,n}\|_{L^2}^2 \leq c_1 \|u_{j,n}\|^2 \ , \ \|u_{j,n}\|_{L^{2^*}}^{2^*} \leq c_2 \|u_{j,n}\|^{2^*}$$

Substituindo estas desigualdades na expressão (3.14), obtemos

$$\|u_{j,n}\|^2 \leq \epsilon c_1 \|u_{j,n}\|^2 + c \int\limits_{\Omega_{j,n}} |u_{j,n}|^p\, dx + \epsilon c_2 \|u_{j,n}\|^2 \|u_{j,n}\|^{2^*-2}.$$

Utilizando a limitação da sequência (u_n), isto é $\|u_n\| \leq M$, podemos escrever

$$\|u_{j,n}\|^2 \leq \epsilon c_1 \|u_{j,n}\|^2 + c \int\limits_{\Omega_{j,n}} |u_{j,n}|^p\, dx + \epsilon c_2 \|u_{j,n}\|^2 M^{2^*-2}.$$

$$\|u_{j,n}\|^2 \left(1 - \epsilon c_1 - \epsilon c_2 M^{2^*-2}\right) \leq c \int\limits_{\Omega_{j,n}} |u_{j,n}|^p\, dx.$$

Então, como ϵ é arbitrário, basta escolher ϵ que satisfaça $\epsilon\left(c_1 + c_2 M^{2^*-2}\right) < \dfrac{1}{2}$ e assim obter

$$0 < \delta^2 \leq \|u_{j,n}\|^2 \leq c_3 \int\limits_{\Omega_{j,n}} |u_{j,n}|^p\, dx. \tag{3.15}$$

Lema C.1 *A sequência $(\rho_j^n)_n$ satisfaz*

(i) $(\rho_j^n)_n$ é limitada para $j = 0, \ldots, k$;

(ii) A sequência $(\rho_{j+1}^n - \rho_j^n)_n$ *não pode convergir para* 0 *quando* $n \to \infty$*, para* $j = 0, \ldots, k-1$.

Demonstração: Para o item (i) é suficiente considerar $j = k$. Pela desigualdade de Strauss (Lema 3.6) e pela limitação da sequência (u_n) temos

$$|u_{k,n}(x)| \leq c(N)|x|^{\frac{1-N}{2}}\|u_{k,n}\| \leq c_5|x|^{\frac{1-N}{2}}, \tag{3.16}$$

onde a constante c_5 depende de N.

Integrando a equação acima sobre $\Omega_{k,n}$ e usando coordenadas polares temos

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Omega_{k,n}} |u_{k,n}|^p &\leq c_5 \int\limits_{\Omega_{k,n}} |x|^{\frac{p(1-N)}{2}}\, dx = c_5\omega_N \int_{\rho_k^n}^{\infty} r^{\frac{p(1-N)}{2}} \cdot r^{N-1} dr \\ &= c_5\omega_N \int_{\rho_k^n}^{\infty} r^{(N-1)(1-\frac{p}{2})} dr \\ &= \frac{c_5\omega_N}{(N-1)(1-\frac{p}{2})+1} r^{(N-1)(1-\frac{p}{2})+1}\Big|_{\rho_k^n}^{\infty}\end{aligned}$$

Agora, observe que

$$(N-1)\frac{(2-p)}{2}+1 < 0 \Leftrightarrow (N-1)(2-p) < -2 \Leftrightarrow 2-p < \frac{-2}{N-1} \Leftrightarrow p > \frac{2N-2+2}{N-1} = \frac{2N}{N-1}.$$

Como $2 < \frac{2N}{N-1} < 2^*$, basta escolher p tal que $\frac{2N}{N-1} < p < 2^*$ para obter

$$\int\limits_{\Omega_{k,n}} |u_{n(k)}|^p \leq \frac{c_5\omega_N}{(N-1)(1-\frac{p}{2})+1} (\rho_k^n)^{(N-1)(1-\frac{p}{2})+1}.$$

Se $(\rho_k^n)_n$ não é limitada, então $\rho_k^n \to \infty$ quando $n \to \infty$. Pela expressão acima teríamos

$$0 < \delta^2 \leq c_3 \int\limits_{\Omega_{k,n}} |u_{n(k)}|^p \leq \frac{c_5\omega_N}{(N-1)(1-\frac{p}{2})+1} (\rho_k^n)^{(N-1)(1-\frac{p}{2})+1} \to 0$$

o que é um absurdo.

Agora, suponha que o item (ii) seja falso. Aplicando Hölder com expoentes $\frac{2^*}{p}$ e $\frac{2^*}{2^*-p}$, considerando a imersão $H_0^1(\Omega_{j,n}) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega_{j,n})$ e a limitação da sequência $(u_n)_n$

obtemos

$$\int\limits_{\Omega_{j,n}} |u_n|^p \, dx \leq \|u_n\|_{L^{2^*}}^p \cdot |\Omega_{j,n}|^{\frac{2^*-p}{2^*}} \leq c_6 \|u_n\|^p \cdot |\Omega_{j,n}|^{\frac{2^*-p}{2^*}} \leq c_7 |\Omega_{j,n}|$$

$$= c_7 \omega_N \int_{\rho_j^n}^{\rho_{j+1}^n} r^{N-1} dr = c_7 \omega_N \frac{r^N}{N} \Big|_{\rho_j^n}^{\rho_{j+1}^n}$$

$$= \frac{c_7 \omega_N}{N} \left(\left(\rho_{j+1}^n\right)^N - \left(\rho_j^n\right)^N \right)$$

Pelo item (i) a sequência (ρ_k^n) é limitada. Se o item (ii) fosse falso, teríamos

$$\left(\left(\rho_{j+1}^n\right)^N - \left(\rho_j^n\right)^N \right) \to 0,$$

o que é um absurdo, pois

$$0 < \delta^2 \leq c_3 \int\limits_{\Omega_{j,n}} |u_n|^p \, dx \leq \frac{c_8 \omega_N}{N} \left(\left(\rho_{j+1}^n\right)^N - \left(\rho_j^n\right)^N \right) \to 0.$$

Portanto o Lema C.1 está demonstrado. ■

Até agora sabemos que a sequência $(u_n) \subset X$ é limitada, X é um espaço de Hilbert e $X \hookrightarrow L^r(\mathbb{R}^N)$ compactamente para $r \in (2, 2^*)$ pelo Teorema 3.7. Disto podemos concluir que existe $u \in X$ tal que

$$\begin{cases} u_n \rightharpoonup u \text{ em } X \\ u_n \to u \text{ em } L^r(\mathbb{R}^N), \ r \in (2, 2^*) \\ u_n(x) \to u(x) \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N. \end{cases} \tag{3.17}$$

Pelo Lema C.1 e as desigualdades $0 = \rho_0^n < \rho_1^n < \cdots < \rho_k^n < \rho_{k+1}^n = \infty$ concluímos que, a menos de subsequência,

$$0 = \rho_0 < \rho_1 < \cdots < \rho_k < \rho_{k+1} = \infty,$$

onde $\rho_j = \lim\limits_{n \to \infty} \rho_j^n$.

Lema C.2 *Considere a sequência minimizante (u_n) associada a c_k^+. Então $(u_{j,n})$ converge fracamente para u_j em X, para $j = 0, \ldots, k$.*

Demonstração: Inicialmente, vamos mostrar que $u_j \in H_0^1(\Omega_j)$. Usando o Lema 3.6 e a convergência de $(\rho_j^n)_n$ segue que

$$u(\rho_j^n) \to u(\rho_j).$$

Temos $(u_n - u)(\rho_j^n) = -u(\rho_j^n)$, pois $u_n(\rho_j^n) = 0$. Novamente, pelo Lema 3.6 temos

$$\lim_{n\to\infty} (u_n - u)(\rho_j^n) = 0.$$

Segue que $u(\rho_j) = 0$. De maneira semelhante mostra-se que $u(\rho_{j+1}) = 0$. Pelo Corolário 3.8, $u_j \in C(\overline{\Omega}_j)$ e pelo Teorema 3.12 segue que $u_j \in H_0^1(\Omega_j)$ para $j = 1, \ldots, k$. Quando $j = 0$ basta notar que sobre $\partial\Omega_0$ não há problemas quanto a continuidade de u.

De fato, escolhendo $R > 0$ tal que $\Omega_0 \subset\subset B_R(0)$ e considerando $\psi \in C_0^\infty(B_R(0))$ tal que $0 \leq \psi \leq 1$ e $\psi = 1$ sobre Ω_0 temos que $u_0 = u_0.\psi$. Além disto, $u_0.\psi \in H^1(\Omega_0)$ e $supp(u_0.\psi) \subset\subset \Omega_0$. Pelo Teorema 3.11 segue que $u_0 \in H_0^1(\Omega)$.

Como $\rho_j^n \to \rho_j$, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq n_0$ vale

$$|\rho_j^n - \rho_j| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Para tal ϵ considere o conjunto Ω_j^ϵ definido na Seção 3.2. Então, para todo $n \geq n_0$,

$$\Omega_{j,n} \subset \Omega_j^\epsilon.$$

Tome $\psi \in C_0^\infty(\Omega_j^\epsilon)$ tal que

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, \ x \in \Omega_j^{\epsilon/2} \\ 0, \ x \in \mathbb{R}^N \backslash \left[\Omega_j^{3\epsilon/2}\right]. \end{cases}$$

Então $u_{j,n} \cdot \psi = u_{j,n} \in X$ para todo $n \geq n_0$. Utilizando a limitação da sequência (u_n) concluímos que a sequência $(u_{j,n} \cdot \psi)$ é limitada para $n \geq n_0$. Logo existe $w \in X$ tal que $u_{j,n} \cdot \psi \rightharpoonup w$ em X e

$$u_{j,n} \cdot \psi \to w, \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N. \tag{3.18}$$

Por outro lado, usando o fato que $u_n \rightharpoonup u$ em X, $\Omega_{j,n} \subset \Omega_j^\epsilon$ para $n \geq n_0$, $\Omega_j \subset \Omega_j^\epsilon$ e ϵ é arbitrário, temos que

$$u_{j,n} \cdot \psi = u_n\Big|_{\Omega_j^\epsilon} \to u\Big|_{\Omega_j^\epsilon} = u_j, \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N. \tag{3.19}$$

Por (3.18) e (3.19) segue que $w = u_j$ e o Lema C.2 está demonstrado. ■

São consequências do Lema C.2, para $j = 0, \ldots, k$,

$$u_{j,n} \to u_j \text{ em } L^r(\mathbb{R}^N),\ r \in (2, 2^*) \text{ e}$$

$$u_{j,n}(x) \to u_j(x) \text{ q.t.p. em } \Omega_j.$$

Como $(u_n) \subset \mathcal{N}_k^+$ segue que $(-1)^j \cdot u_n\Big|_{\Omega_{j,n}} \geq 0$. Pelo Lema C.2, $(-1)^j \cdot u\Big|_{\Omega_j} \geq 0$.

Tomando o limite quando $n \to \infty$ na expressão (3.15) e lembrando que $p \in (2, 2^*)$ temos

$$0 < \delta^2 \leq c_3 \|u_{j,n}\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq c_3 \cdot 2^{p-1} \cdot \left(\|u_{j,n} - u_j\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)} + \|u_j\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)} \right) \to c_3 2^{p-1} \cdot \int_{\mathbb{R}^N} |u_j|^p \, dx$$

de onde concluímos que $u_j \neq 0$ para $j = 0, \ldots, k$.

Pelo Teorema 2.12 existem únicos $\alpha_j > 0$ tais que $\alpha_j u_j \in \mathcal{N}_j$, $j = 0, \ldots, k$. Defina

$$u_k^+ := \sum_{j=0}^{k} \alpha_j u_j. \tag{3.20}$$

Temos $u_k^+ \in X$, pois X é espaço vetorial. Além disto existem $0 = \rho_0 < \rho_1 < \cdots < \rho_k < \rho_{k+1} = \infty$ tais que

$$(-1)^j u_k^+\Big|_{\Omega_j} = (-1)^j \alpha_j u_j \ \geq 0, \ \ u_k^+\Big|_{\Omega_j} = \alpha_j u_j \in \mathcal{N}_j.$$

Daí concluímos que $u_k^+ \in \mathcal{N}_k^+$. Nosso objetivo é mostrar que u_k^+ é uma solução radial de (**P***) satisfazendo $u_k^+(0) > 0$ e tendo nós

$$0 < \rho_1 < \cdots < \rho_k < \infty.$$

Lema C.3 *A função u_k^+ definida em (3.20) satisfaz $\phi(u_k^+) = c_k^+$.*

Demonstração: Pelo Lema C.2 temos que

$$c_k^+ \leq \phi(u_k^+) = \phi(\sum_{j=0}^{k} \alpha_j u_j)$$

Note que cada u_j se anula fora de Ω_j e as fronteiras desses conjuntos têm medida

N-dimensional nula. Escrevendo $\mathbb{R}^N$ como a união disjunta $\mathbb{R}^N = \bigcup_{j=0}^{k} \overline{\Omega}_j$, segue que

$$\phi(\sum_{j=0}^{k} \alpha_j u_j) = \sum_{j=0}^{k} \phi(\alpha_j u_j).$$

Logo, assumindo novamente que o máximo de $\phi(tu_{j,n})$ é atingido em $t=1$, obtemos

$$c_k^+ \leq \phi(u_k^+) = \sum_{j=0}^{k} \phi(\alpha_j u_j) \leq \liminf_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{k} \phi(\alpha_j u_{j,n}) \leq \liminf_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{k} \phi(u_{j,n}) = \liminf_{n\to\infty} \phi(u_n) = c_k^+.$$

Portanto, $\phi(u_k^+) = c_k^+ = \inf_{\mathcal{N}_k^+} \phi$ e o Lema C.3 está demonstrado. ∎

Para $j = 0, \ldots, k$ definimos

$$\epsilon_j = \begin{cases} +, \text{se } j \text{ é par} \\ -, \text{se } j \text{ é ímpar} \end{cases}$$

Considere o conjunto P^{ϵ_j}, onde $P^{\pm} = \{u \in X \; ; \; \pm u \geq 0\}$. Observe que, para cada j, $u_j \in P^{\epsilon_j}$.

Lema C.4 *Para cada $j = 0, \ldots, k$, a função $\alpha_j u_j$ é um minimizante do problema*

$$\inf_{\mathcal{N}_j \cap P^{\epsilon_j}} \phi^{\epsilon_j}.$$

Demonstração: De início note que se j é par temos $\phi^{\epsilon_j} = \phi^+ = \phi$ e se j é ímpar temos $\phi^{\epsilon_j} = \phi^- = \phi$. Suponha que o Lema seja falso para algum j. Tomando, por exemplo, $j = 0$, teríamos

$$\phi(\alpha_0 u_0) = \phi^+(\alpha_0 u_0) > \inf_{\mathcal{N}_0 \cap P^+} \phi^+.$$

Pelas observações feitas no início desta seção, existe $v_0 \in \mathcal{N}_0$ que é um minimizante positivo do problema

$$\inf_{\mathcal{N}_0} \phi^+.$$

Sendo assim v_0 é um minimizante de

$$\inf_{\mathcal{N}_0\cap P^+}\phi^+.$$

Tome $\bar{u} = v_0 + \sum_{j=1}^{k}\phi(\alpha_j u_j)$. Então $\bar{u}\in\mathcal{N}_k^+$ e

$$c_k^+ \leq \phi(\overline{u}) = \phi(v_0) + \sum_{j=1}^{k}\phi(\alpha_j u_j) < \phi(\alpha_0 u_0) + \sum_{j=1}^{k}\phi(\alpha_j u_j) = \phi(u_k^+) = c_k^+,$$

o que é um absurdo. Portanto o Lema C.4 está demonstrado. ■

Observe que para todo $j = 1,\ldots,k$, a função ϕ^{ϵ_j} é par. Logo, tomar o ínfimo desta função sobre $\mathcal{N}_j \cap P^{\epsilon_j}$ ou só sobre $\mathcal{N}_j$ é irrelevante. Sendo assim $\alpha_j u_j$ também é um minimizante do problema

$$\inf_{\mathcal{N}_j}\phi^{\epsilon_j}.$$

Considere o problema (3.12), com $\rho = \rho_j$ e $\sigma = \rho_{j+1}$. Levando em consideração as observações feitas no início desta seção concluímos que $\alpha_j u_j$ é uma solução positiva (respectivamente negativa) deste problema quando j é par (respectivamente ímpar).

Note que a função u_k^+ tem nós em ρ_j, para $j = 1,\cdots,k$, pois nestes pontos a função u troca de sinal.

Lema C.5 *A função u_k^+ é de classe C^1 sobre (ρ_j,ρ_{j+1}), para cada $j = 0,\ldots,k$. Além disto a função u_k^+ satisfaz*

(i) $u_k^+(0) > 0$;

(ii) $(-1)^j u_k^+(x) > 0$ *para* $\rho_j < |x| < \rho_{j+1}$ *e* $j = 0,\ldots,k$;

(iii) $(-1)^j \lim_{|x|\uparrow\rho_j}\frac{\partial u_k^+}{\partial|x|}(x) > 0$ *e* $(-1)^j \lim_{|x|\downarrow\rho_j}\frac{\partial u_k^+}{\partial|x|}(x) > 0$ *para* $j = 1,\ldots,k$.

Demonstração: Para demonstrar este lema vamos utilizar os Teoremas 3.13 (*Brezis-Kato*) e 3.14 (*Agmon-Douglis-Nirenberg*). Note que para mostrar que u é de classe C^1 sobre (ρ_j,ρ_{j+1}), basta mostrar que u é de classe C^1 sobre $B_j := B_\delta(x_0)$, onde $x_0\in(\rho_j,\rho_{j+1})$ e $\delta > 0$ é tal que $B_j\subset\Omega_j$.

Fixado j, considere um domínio $U\subset\subset B_j$. Na demonstração do Lema C.2 vimos que $u_j\in H_0^1(\Omega_j)$ para $j = 0,\ldots,k$. Deste modo temos $u_j\in H^1_{loc}(B_j)$, $\forall\ j = 0,\ldots,k$. Dado

$\epsilon = 1$ no Lema 1.13, existe $C > 0$ tal que

$$\int\limits_U \left| \frac{f(x,u_j)}{u_j} \right|^{\frac{N}{2}} dx \leq \int\limits_U (2^{\frac{N}{2}} + 2^{\frac{N}{2}} C^{\frac{N}{2}} |u_j|^{\frac{(2^*-2)N}{2}}) = \int\limits_U (2^{\frac{N}{2}} + C^{\frac{N}{2}} |u_j|^{(2^*)}) < \infty,$$

Tomando $a(x) = \dfrac{|f(x,u_j)|}{1+|u_j|}$ temos

$$\int\limits_U |a(x)|^{\frac{N}{2}} = \int\limits_U \frac{|f(x,u_j)|^{\frac{N}{2}}}{(1+|u_j|)^{\frac{N}{2}}} \leq \int\limits_U \frac{|f(x,u_j)|^{\frac{N}{2}}}{|u_j|^{\frac{N}{2}}} < \infty.$$

Pelo Teorema 3.13 (Brezis-Kato) segue que

$$u_j \in L^q_{loc}(B_j), \ \forall\, q \geq 1. \tag{3.21}$$

Por outro lado, se $s > N$ temos que $(2^* - 1) \cdot s > 2$. Novamente, dado $\epsilon = 1$ no Lema 1.13, existe $C > 0$ tal que

$$\int\limits_U |f(x,u_j)|^s \, dx \leq \int\limits_U (|u_j| + C|u_j|^{2^*-1})^s \leq \int\limits_U 2^{s-1}|u_j|^s \, dx + \int\limits_U 2^{s-1}C|u_j|^{(2^*-1)s}$$

A penúltima integral é finita por (3.21) e a última integral é finita pois $(2^* - 1) \cdot s > 2$.

Usando o Teorema 3.14 (Agmon-Douglis-Nirenberg) concluímos que $u_j \in W^{2,s}(B_j)$, para $s > N$. Como $2s > s > N$, basta usar o Teorema 1.6 (iii) e obter

$$W^{2,s}(B_j) \hookrightarrow C^{1,\alpha}(\overline{B_j}). \tag{3.22}$$

Como x_0 foi arbitrário segue que $u_j \in C^1(\rho_j, \rho_{j+1})$, para $j = 0, \ldots, k$.

Para demonstrar os itens (i) e (ii) basta aplicar o princípio do máximo (Teorema 8.19 de [5]). Para o item (iii) basta utilizar a imersão em (3.22) e o Lema 3.16 (Lema de Hopf). Portanto o Lema C.5 está demonstrado. ∎

Resta mostrar que u_k^+ é um ponto crítico de ϕ. A partir de agora vamos assumir que $\alpha_j = 1$ para todo j. Se u_k^+ não fosse um ponto crítico de ϕ, existiria $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $\left\langle \phi'(u_k^+), \varphi \right\rangle = -2$.

Vamos fixar esta função φ para os próximos lemas.

Lema C.6 *Existe $\delta > 0$ tal que, se $|s_j - 1| \leq \delta$ e $0 \leq \epsilon \leq \delta$ então a função*

$$v(x) = \sum_{j=1}^{k} s_j u_j + \epsilon\varphi$$

tem exatamente k nós $0 < \rho_1(s,\epsilon) < \rho_2(s,\epsilon) < \cdots < \rho_k(s,\epsilon) < \infty$.

Demonstração: Vamos mostrar que $\rho_1(s,\epsilon)$ é um nó de v. Para os outros nós a demonstração é a mesma. Considere a seguinte vizinhança de ρ_1, onde ρ_1 é um nó de u,

$$V_{\frac{\delta_1}{2}}(\rho_1) = \left(\rho_1 - \frac{\delta_1}{2}, \rho_1 + \frac{\delta_1}{2}\right).$$

Temos que $v(x) = s_1u_1 + s_2u_2 + \epsilon\varphi$, sempre que $x \in V_{\frac{\delta}{2}}(\rho_1)$. Utilizando o Lema C.5 e escolhendo $\delta_1 > 0$ pequeno, temos

$$\begin{aligned} v\Big|_{(\rho_1-\delta_1/2,\ \rho_1)} &= s_1u_1 + \epsilon\varphi > 0, \\ v\Big|_{(\rho_1,\ \rho_1+\delta_1/2)} &= s_2u_2 + \epsilon\varphi < 0, \\ \frac{\partial v(x)}{\partial |x|} &< 0 \text{ sempre que } x \in V_{\frac{\delta_1}{2}}(\rho_1). \end{aligned}$$

Pelo Teorema do Valor Intermediário existe $x_0 \in V_{\frac{\delta_1}{2}}(\rho_1)$ tal que $v(x_0) = 0$. Além disto, não pode existir outro ponto $x_1 \in V_{\frac{\delta_1}{2}}(\rho_1)$ tal que $v(x_1) = 0$. De fato, se existisse tal ponto teríamos $x_2 \in (x_0, x_1)$ tal que $\dfrac{\partial v(x)}{\partial |x|}(x_2) = 0$, o que contradiz o Lema C.5.

Nos intervalos $[0, \rho_1 - \delta_1/2]$ e $[\rho_1 + \delta_1/2, \rho_2 - \delta/2]$ temos $u_1 > 0$ e $u_2 < 0$, respectivamente. Assim, considerando um valor menor para δ_1 se necessário, garantimos que nestes intervalos $v(x)$ não se anula. Segue que x_0 é o nó $\rho_1(s,\epsilon)$. Portanto o Lema C.6 está demonstrado. ∎

Lema C.7 *Os nós $\rho_j(s,\epsilon)$ são contínuos em $(s,\epsilon) \in D \times [0,\delta]$, onde*

$$D = \left\{ s = (s_1, \ldots, s_k) \in \mathbb{R}^k \ ; \ |s_j - 1| \leq \delta,\ j = 1, \ldots, k \right\}.$$

Demonstração: Vamos demonstrar o Lema C.7 para $j = 1$. Os demais casos são análogos. Considere sequências $(s^n) \subset D$ e $(\epsilon^n) \subset [0,\delta]$ tais que $s^n \to s^0$ em D e $\epsilon^n \to \epsilon^0$ em $[0,\delta]$.

Queremos mostrar que $\rho_1(s^n,\epsilon^n) \to \rho_1(s^0,\epsilon^0)$. Suponha que isto não ocorre. Pela construção feita no Lema C.6 temos $\rho_1(s^n, \epsilon^n) \in V_{\frac{\delta}{2}}(\rho_1)$. Então, a menos de subsequência,

$$\rho_1(s^n, \epsilon^n) \to \rho \in \overline{V_{\frac{\delta}{2}}(\rho_1)}.$$

Temos que

$$\left(\sum_{j=0}^{k} s_j^n u_j + \epsilon^n \varphi\right)(\rho_1(s^n, \epsilon^n)) = 0. \tag{3.23}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\left(\sum_{j=0}^{k} s_j^n u_j + \epsilon^n \varphi\right)(\rho_1(s^n, \epsilon^n)) &= \left(\sum_{j=0}^{k} (s_j^n - s_j^0) u_j + (\epsilon^n - \epsilon^0)\varphi\right)(\rho_1(s^n, \epsilon^n)) \\ &\quad + \left(\sum_{j=0}^{k} s_j^0 u_j + \epsilon^0 \varphi\right)(\rho_1(s^n, \epsilon^n)).\end{aligned}$$

Tomando o limite quando $n \to \infty$ na expressão acima e utilizando a equação (3.23) temos

$$\left(\sum_{j=0}^{k} s_j^0 u_j + \epsilon^0 \varphi\right)(\rho) = 0.$$

Pela unicidade dos nós da função v em $V_{\frac{\delta_1}{2}}(\rho_1)$, demonstrada no Lema C.6, concluímos que $\rho = \rho_1(s^0, \epsilon^0)$. Portanto o Lema C.7 está demonstrado. ■

Observe que

$$\left\langle \phi'\left(\sum_{j=0}^{k} s_j u_j + \epsilon\varphi\right), \varphi \right\rangle < 1. \tag{3.24}$$

De fato, se a afirmação acima fosse falsa bastaria tomar uma sequência $\delta_n = 1/n$ no Lema C.7. Ao fazer $n \to \infty$ teríamos $s_j \to 1$, $\epsilon \to 0$ e usando a continuidade da derivada

$$-1 \le \lim_{n\to\infty} \left\langle \phi'\left(\sum_{j=0}^{k} s_j u_j + \epsilon\varphi\right), \varphi \right\rangle = \langle \phi'(u_k^+), \varphi\rangle = -2.$$

Para concluir a demonstração do Teorema C vamos escolher uma função contínua $\eta : D \to [0, 1]$ tal que

$$\eta(t, s) = \begin{cases} 1, \text{ se } |s_j - 1| \le \delta/4, \ \forall\, j. \\ 0, \text{ se } |s_j - 1| \ge \delta/2, \text{ para pelo menos um } j. \end{cases}$$

Para $s \in D$ defina a seguinte função

$$Q(s) = \sum_{j=0}^{k} s_j u_j + \delta\eta(s)\varphi.$$

Então $Q \in C(D, X)$ e, para cada $s \in D$, $Q(s)$ tem exatamente k nós

$$0 < \rho_1(s) := \rho_1(s, \delta\eta(s)) < \cdots < \rho_k(s) < \infty$$

e cada nó $\rho_j(s)$ é uma função contínua. Defina também $H : D \to \mathbb{R}^k$ como

$$H(s) = (H_1(s), \ldots, H_k(s)),$$

onde $H_j(s) = G\left(\left(\sum_{i=0}^{k} s_i u_i + \delta\eta(s)\varphi\right)\Big|_{\Omega_{j(s)}}\right)$ para $j = 1, \ldots, k$ e $G(u) = \langle \phi'(u), u \rangle$. Então $H \in C(D, \mathbb{R}^k)$.

Conclusão do Teorema C

Iremos mostrar que a função u_k^+ definida em (3.20) é uma das soluções do Teorema C. Fixado j, se $|s_j - 1| = \delta$ então $\eta(s) = 0$ e, consequentemente, $\rho_i(s) = \rho_i$ para todo $i = 1, \ldots, k$.

Assim $H_j(s) = G(s_j u_j) = \langle \phi'(s_j u_j), s_j u_j \rangle$. Segue que se $s_j = 1 - \delta < 1$, então $H_j(s) > 0$ e se $s_j = 1 + \delta > 1$, então $H_j(s) < 0$. Logo o grau $\deg(H, int(D), \tilde{0})$ está bem definido, onde $\tilde{0}$ representa a k-upla $(0, \ldots, 0)$.

Assim como fizemos na conclusão do Teorema B, vamos considerar a função $h(r) = 1 - r$. Se $s_j = 1 - \delta < 1$ então $h(s_j) > 0$ e se $s_j = 1 + \delta > 1$ então $h(s_j) < 0$. Portanto $h(s_j)$ e $H_j(s)$ têm o mesmo sinal sobre ∂D.

Considere, para $\lambda \in [0, 1]$ e $s \in D$, a homotopia

$$H_\lambda(s) = (\lambda h(s_1) + (1 - \lambda) H_1(s), \ldots, \lambda h(s_k) + (1 - \lambda) H_k(s)).$$

Fixe $s \in \partial D$. Se $\lambda = 0$, então $H_0(s) = H(s)\Big|_{\partial D} \neq \tilde{0}$. Se $\lambda = 1$, $H_1(s) = (h(s_1), \ldots, h(s_k)) \neq \tilde{0}$. Se $\lambda \in (0, 1)$, então $h(s_i)$ e $H_i(s)$ têm sempre o mesmo sinal e portanto $H_\lambda(s) \neq \tilde{0}$. Concluímos que $H(s)$ e $(h(s_1), \ldots, h(s_k))$ são homotópicos sobre ∂D.

Como o grau topológico é invariante por homotopias segue que

$$\deg(H, int(D), \tilde{0}) = \deg\left((1 - s_1, \ldots, 1 - s_k), int(D), \tilde{0}\right) = (-1)^k \neq 0.$$

Então existe $s \in int(D)$ tal que $H(s) = 0$, ou seja $Q(s) \in \mathcal{N}_k^+$. Fixemos um s para o qual $Q(s) \in \mathcal{N}_k^+$. Pela definição de c_k^+ temos

$$c_k^+ = \inf_{\mathcal{N}_k^+} \phi \leq \phi(Q(s)).$$

Por outro lado, usando a desigualdade em (3.24) e o Teorema Fundamental do Cálculo

$$\phi(Q(s)) = \phi(\sum_{j=0}^{k} s_j u_j) + \int_0^1 \left\langle \phi'(\sum_{j=0}^{k} s_j u_j + \theta\delta\eta(s)\varphi), \delta\eta(s)\varphi \right\rangle d\theta \leq \phi(\sum_{j=0}^{k} s_j u_j) - \delta\eta(s).$$

Se $|s_j - 1| \leq \delta/2$ para todo j então $0 < \eta(s) \leq 1$ e teríamos um absurdo pois

$$c_k^+ \leq \phi(Q(s)) < \phi(\sum_{j=0}^{k} s_j u_j) = \sum_{j=0}^{k} \phi(s_j u_j) \leq \sum_{j=0}^{k} \phi(u_j) = \phi(u_k^+) = c_k^+.$$

Se $|s_j - 1| > \delta/2$ para algum j então $\eta(s) = 0$ e também chegamos a uma contradição pois

$$c_k^+ \leq \phi(Q(s)) \leq \phi(\sum_{j=0}^{k} s_j u_j) = \sum_{j=0}^{k} \phi(s_j u_j) < \sum_{j=0}^{k} \phi(u_j) = \phi(u_k^+) = c_k^+.$$

Portanto u_k^+ é a solução desejada e a prova do Teorema C termina aqui.

Referências Bibliográficas

[1] A. Ambrosetti and A. Malchiodi,*Nonlinear Analysis and Semilinear Elliptic Problems*, Cambridge studies in advanced mathematics, 104, 2007.

[2] A. Ambrosetti and G. Prodi, *A Primer of Nonlinear Analysis*, Cambridge studies in advanced mathematics, **34**, 1993.

[3] A. Ambrosetti and P.H. Rabinowitz, *Dual variational methods in critical point theory*, J. Funct. Anal. **14**(1973), 349-381.

[4] D.G. de Figueiredo, *Positive Solutions of semilinear Elliptic Problems*, Escola Latino Americana de Equações Diferenciais, São Paulo, 1981.

[5] D. Gilbarg and N.S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer-Verlag, 2^{nd} edition, 1983.

[6] H. Brézis, *Analisis Funcional*, Teoria y Aplicaciones, Alianza Editorial, 1984.

[7] L. C. Evans, *Partial Differential Equations*, Graduate Studies in Mathematics, Vol. **19**, American Mathematical Society, 2002.

[8] M. M. de Freitas, *Simetria, Compacidade e Multiplicidade de Soluções para um Problema Elíptico Semilinear em* $\mathbb{R}^N$, UnB, 2008.

[9] M. Struwe, *Variational Methods: Applications to Nonlinear Partial Differential Equations and Hamiltonian Systems*, Springer, 1996.

[10] O. Kavian, *Introduction à La Théorie de Points Critiques*, Springer-Verlag, 1991.

[11] T. Bartsch and M. Willem, *Infinitely Many Radial Solutions of a Semilinear Elliptic problem on* $\mathbb{R}^N$. Arch. Rational Mech. Anal., **124** (1993) 261 - 276.

[12] T. Bartsch and Z.-Q. Wang, *On the existence of sign changing solutions for semilinear Dirichlet problems*, Topol. Methods Nonl. Anal. **7**, 115-131.

[13] P.H. Rabinowitz, *Minimax Methods in Critical Point Theory with Applications to Differential Equations*, CBMS Conf. Ser. in Math. **65**, Amer. Math. Soc., 1986.

[14] Z.-Q. Wang, *On a superlinear elliptic equation*, Analyse Nonlinéaire **8** (1991), 43-58.

[15] Z. Liu and Z.Q. Wang, *On the Ambrosetti-Rabinowitz superlinear condition*. Advanced Nolnlinear Studies **4** (2004), 561-572.

[16] W. Zou and M. Schechter, *Critical Point Theory ans Its Applications*, Springer, 2006.