



Universidade de Brasília
Instituto de Física

**Dinâmica de uma partícula carregada num campo magnético dependente do
tempo com potencial vetor linear arbitrário**

Matheus Barbosa de Alcântara Horovits

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação
em Física da Universidade de Brasília, como parte
dos requisitos necessários à obtenção do título de
Doutor em Física.

Orientador

Prof. Dr. Viktor Dodonov

Brasília
Novembro de 2021

Dinâmica de uma partícula carregada num campo magnético dependente do tempo com potencial vetor linear arbitrário

Matheus Barbosa de Alcântara Horovits

Orientador

Prof. Dr. Viktor Dodonov

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Física.

Aprovada por

Dr. Ademir Eugênio de Santana

Dr. Carlos Farina de Souza

Dr. Salomon Sylvain Mizrahi

Brasília
Novembro de 2021

RESUMO

Consideramos uma partícula quântica carregada se movendo no plano xy sob a ação de um campo magnético dependente do tempo descrito por meio do potencial vetorial linear mais geral da forma $\mathbf{A} = B(t) [-y(1 + \alpha), x(1 - \alpha)]/2$. Esses potenciais com $\alpha \neq 0$ podem ser criados dentro de solenóides infinitos com seções transversais não circulares. As propriedades físicas, como a energia e o momento magnético, não dependem da escolha do calibre no estado de equilíbrio termodinâmico. No entanto, sistemas com diferentes valores de α não são equivalentes para campos magnéticos não estacionários, devido a diferentes estruturas dos campos elétricos induzidos. Usando a aproximação da variação em degrau do campo magnético, obtemos as fórmulas explícitas que descrevem a evolução da *compressão principal* em dois pares de observáveis não comutáveis: as coordenadas do centro de órbita e as coordenadas relativas em relação a esse centro. A análise dessas fórmulas mostra que nenhuma compressão pode ocorrer para o calibre circular ($\alpha = 0$). Por outro lado, para qualquer valor de α diferente de zero pode-se encontrar os regimes de excitação resultando em algum grau de compressão em ambos os pares. O grau máximo de compressão pode ser obtido para o *calibre de Landau* ($|\alpha| = 1$).

Também obtemos as fórmulas explícitas que descrevem a mudança da energia e do momento magnético do estado de equilíbrio inicial, criado com o auxílio de um potencial harmônico anisotrópico fraco. Uma forte amplificação do momento magnético pode acontecer mesmo para campos magnéticos que decrescem rapidamente. Além disso, o momento magnético torna-se uma função do tempo fortemente oscilante após o salto do campo. Fortes flutuações do momento magnético (descritas em termos da variância) são descobertas em todos os regimes, incluindo o estado de equilíbrio inicial. Essas flutuações são sensíveis à forma da armadilha que confina a partícula inicialmente. Além disso, essas flutuações não dependem da constante de Planck no caso de alta temperatura, e a variância do momento magnético é muito maior do que o quadrado do momento magnético médio.

Finalmente, obtemos as fórmulas gerais para uma função arbitrária $B(t)$ com dois valores fixos do parâmetro de calibre α : $\alpha = 0$ (calibre circular) e $\alpha = 1$ (calibre de Landau). Elas são expressas em termos das soluções para a equação clássica de movimento $\ddot{\varepsilon} + \omega_\alpha^2(t)\varepsilon = 0$, com $\omega_1 = 2\omega_0$. Resultados explícitos são encontrados nos casos do salto repentino do campo magnético, da ressonância paramétrica e da evolução adiabática, além de várias funções específicas $B(t)$, quando as soluções podem ser expressas em termos de funções elementares ou hipergeométricas. Esses exemplos mostram que a evolução dos valores médios mencionados pode ser bastante diferente para os dois calibres, se a evolução não for adiabática. Aparentemente, a aproximação adiabática falha quando o campo magnético tende a zero. Além disso, a aproximação do salto repentino também pode falhar nesse caso.

ABSTRACT

We consider a quantum charged particle moving in the xy plane under the action of a time-dependent magnetic field described by means of the most general linear vector potential of the form $\mathbf{A} = B(t)[-y(1 + \alpha), x(1 - \alpha)]/2$. Such potentials with $\alpha \neq 0$ can be created inside infinite solenoids with non-circular cross sections. The physical properties, such as energy and magnetic moment, do not depend on the choice of gauge in the thermodynamic equilibrium state. But systems with different values of α are not equivalent for nonstationary magnetic fields, due to different structures of induced electric fields. Using the approximation of the stepwise variation of the magnetic field, we obtain explicit formulas describing the evolution of the *principal squeezing* in two pairs of non-commuting observables: the coordinates of the center of orbit and relative coordinates with respect to this center. The analysis of these formulas shows that no squeezing can arise for the circular gauge ($\alpha = 0$). On the other hand, for any nonzero value of α one can find the regimes of excitations resulting in some degree of squeezing in the both pairs. The maximal degree of squeezing can be obtained for the *Landau gauge* ($|\alpha| = 1$).

We also obtain explicit formulas describing the change of the energy and magnetic moment from the initial equilibrium state, created with the aid of a weak anisotropic harmonic potential. A strong amplification of the magnetic moment can happen even for rapidly decreasing magnetic fields. In addition, the magnetic moment becomes a strongly oscillating function of time after the jump of the field. Strong fluctuations of the magnetic moment (described in terms of the variance) are discovered in all regimes, including the initial equilibrium state. These fluctuations are sensitive to the shape of the trap confining the particle initially. Moreover, these fluctuations do not depend on the Planck constant in the high temperature case, and the magnetic moment variance is much bigger than the square of mean magnetic moment.

Finally, we derive general formulas for an arbitrary function $B(t)$ with two fixed values of the gauge parameter α : $\alpha = 0$ (the circular gauge) and $\alpha = 1$ (the Landau gauge). They are expressed in terms of solutions to the classical equation of motion $\ddot{\varepsilon} + \omega_\alpha^2(t)\varepsilon = 0$, with $\omega_1 = 2\omega_0$. Explicit results are found in the cases of the sudden jump of magnetic field, the parametric resonance, the adiabatic evolution, and for several specific functions $B(t)$, when solutions can be expressed in terms of elementary or hypergeometric functions. These examples show that the evolution of the mentioned mean values can be rather different for the two gauges, if the evolution is not adiabatic. It appears that the adiabatic approximation fails when the magnetic field goes to zero. Moreover, the sudden jump approximation can fail in this case, as well.

Lista de Figuras

2.1	As funções $\sigma_{x_r y_r}^{(PS)}(\kappa)$ e $\sigma_{x_c y_c}^{(PS)}(\kappa)$ com $\Omega T/2 = 1$ e $\alpha = 1/2$ nas proximidades dos pontos: Esqueda: $\phi = 2\pi$. Direita: $\phi = 4\pi$	16
2.2	As funções $\sigma_{x_r y_r}^{(PS)}(\phi)$ e $\sigma_{x_c y_c}^{(PS)}(\phi)$. Esqueda: $\alpha = 1/2, \kappa = 1/2$. Direita: $\alpha = 2, \kappa = 1$	16
2.3	As funções $\sigma_{x_r y_r}^{(PS)}(\phi)$ e $\sigma_{x_c y_c}^{(PS)}(\phi)$. Esqueda: $\alpha = 1/2, \kappa = -3$. Direita: $\alpha = 3/4, \kappa = -2$	17
2.4	A função $\sigma_{x_r y_r}^{(PS)}\Big _{\phi=\pi/2}(\alpha)$ para diferentes valores fixos do parâmetro Θ	17
2.5	O domínio dos valores dos parâmetros $ \alpha $ e Θ resultando na desigualdade $\sigma^{PS} \leq 1$ para qualquer valor da fase ϕ , tanto para o par $x_r y_r$ quanto para o par $x_c y_c$. A linha em negrito mostra a função $\alpha_{**}(\Theta)$	18
2.6	Direita: As funções $\sigma_{x_r y_r}^{(PS)}(\kappa)$ e $\sigma_{x_c y_c}^{(PS)}(\kappa)$ com $\Omega T/2 = 1$ e $\alpha = 1$. Esqueda: Zoom do primeiro pico do gráfico da esquerda.	19
3.1	A mudança relativa de energia após o salto $\delta\mathcal{E}$ no caso de baixa temperatura com $r = 1$. Esqueda: $\delta\mathcal{E}$ em função de α , para diferentes valores do parâmetro de salto Θ (mostrados próximo às respectivas linhas). Direita: $\delta\mathcal{E}$ em função de Θ , para diferentes valores do parâmetro de calibre α (mostrados próximo às respectivas linhas).	25
3.2	A flutuação da energia relativa após o salto no regime de alta temperatura $D^{(h)}(0+)$ em função do parâmetro de calibre α , para $r = 1, 0.25, 0.1$ (esses valores são mostrados próximos às respectivas linhas).	27
3.3	A flutuação da energia relativa após o salto no regime de baixa temperatura $D^{(l)}(0+)$ em função do parâmetro de calibre α , para diferentes valores do parâmetro de salto Θ (mostrados próximo às respectivas linhas). Esqueda: para $r = 1$. Direita: para $r = 0.1$	28
3.4	A flutuação da energia relativa após o salto no regime de baixa temperatura $D^{(l)}(0+)$ em função do parâmetro $\kappa = \Theta - 1$, para diferentes valores do parâmetro de calibre α (mostrados próximo às respectivas linhas). Esqueda: para $r = 1$. Direita: para $r = 0.1$	28
3.5	A razão $\Gamma(\varphi) \equiv [\mathcal{M}(\varphi)]^2/\sigma_M(\varphi)$ para $\alpha = r = 1$ e diferentes valores do parâmetro Θ (mostrado próximo às respectivas linhas) no caso de baixa temperatura. Esqueda: $\Theta > 0$. Direita: $\Theta < 0$	34
3.6	A razão $\Gamma(\varphi) \equiv [\mathcal{M}(\varphi)]^2/\sigma_M(\varphi)$ para diferentes valores dos parâmetros α e Θ (mostrado próximo às respectivas linhas) no regime de altas temperaturas com $r = 1$. Esqueda: $\alpha = 1$. Direita: $\alpha = 2$	34

3.7	A razão $\Gamma(\varphi) \equiv [\mathcal{M}(\varphi)]^2/\sigma_M(\varphi)$ na armadilha anisotrópica, para diferentes valores do parâmetro Θ (mostrado próximo às respectivas linhas) no regime de baixa temperatura com $\alpha = 0$. Esquerda: $r = 2$. Direita: $r = 10$	35
4.1	A razão $\mathcal{E}(\tau)/\mathcal{E}_i$ para diferentes valores do parâmetro de assimetria s (dado próximo às curvas) para o decaimento linear inverso do campo magnético (4.54) com $u = \omega_0 t_0 = 1/2$. Esquerda: o caso de baixa temperatura, $\rho = 0$, $\Upsilon = 1$. Direita: o caso de alta temperatura, $\rho = 1$, $\Upsilon = 10$. As linhas tracejadas mostram a razão $\omega(\tau)/\omega_i$	49
4.2	A razão $\mathcal{E}(\tau)/\mathcal{E}_i$ para diferentes valores do parâmetro da velocidade de evolução $u = \omega_0 t_0$ (mostrados próximo às curvas) para o decaimento linear inverso do campo magnético (4.54) com o parâmetro de assimetria $s = 1$ (uma armadilha isotrópica). Esquerda: o caso de baixa temperatura, $\rho = 0$, $\Upsilon = 1$. Direita: o caso de alta temperatura, $\rho = 1$, $\Upsilon = 10$. As linhas tracejadas mostram a razão $\omega(\tau)/\omega_i$	50
4.3	O momento magnético médio $\mathcal{M}(\tau)$ para diferentes valores do parâmetro da velocidade de evolução $u = \omega_0 t_0$ (mostrados próximo às curvas) para o decaimento linear inverso do campo magnético (4.54) com o parâmetro de assimetria $s = 1$ (uma armadilha isotrópica). Esquerda: o caso de baixa temperatura, $\rho = 0$, $\Upsilon = 1$. Direita: o caso de alta temperatura, $\rho = 1$, $\Upsilon = 10$	50
4.4	A razão $\mathcal{E}(\tau)/\mathcal{E}_i$ para diferentes valores do parâmetro da velocidade de evolução $u = \omega_0 t_0$ (mostrados próximo às curvas) para o decaimento quadrático inverso do campo magnético (4.65) com o parâmetro de assimetria $s = 1$ (uma armadilha isotrópica). Esquerda: o caso de baixa temperatura, $\rho = 0$, $\Upsilon = 1$. Direita: o caso de alta temperatura, $\rho = 1$, $\Upsilon = 10$. As linhas tracejadas mostram a razão $\omega(\tau)/\omega_i$	52
4.5	O momento magnético médio $\mathcal{M}(\tau)$ para diferentes valores do parâmetro da velocidade de evolução $u = \omega_0 t_0$ (mostrados próximo às curvas) para o decaimento quadrático inverso do campo magnético (4.65) com o parâmetro de assimetria $s = 1$ (uma armadilha isotrópica). Esquerda: o caso de baixa temperatura, $\rho = 0$, $\Upsilon = 1$. Direita: o caso de alta temperatura, $\rho = 1$, $\Upsilon = 10$. As linhas tracejadas mostram a razão $\omega(\tau)/\omega_i$	53
4.6	Esquerda: A razão assintótica $\mathcal{E}(\infty)/\mathcal{E}_i$ em função da razão ω/ω_0 para a variação exponencial do campo magnético (4.76) nos casos de baixa temperatura ($\rho = 0$, $\Upsilon = 1$) e alta temperatura ($\rho = 1$, $\Upsilon = 10$). Direita: a razão dependente do tempo $\mathcal{E}(\tau)/\mathcal{E}_i$ no caso de alta temperatura ($\rho = 1$, $\Upsilon = 10$), para diferentes valores da razão ω/ω_0 (mostrado próximo às curvas relacionadas). O parâmetro de assimetria $s = 1$ (a armadilha isotrópica).	54
4.7	A razão $\mathcal{E}_f/\mathcal{E}_i$ em função da frequência final ω_f para diferentes valores do parâmetro κ (mostrados próximo às respectivas linhas). A frequência inicial considerada é $\omega_i = 1$. Esquerda: $\rho = 0$, $s_0 \Upsilon = 1$. Direita: $\rho = 1$, $s_0 \Upsilon = 10$	57
4.8	A razão $\mathcal{E}_f/\mathcal{E}_i$ em função do parâmetro κ para diferentes valores positivos da frequência final ω_f (mostrados próximo às respectivas linhas). A frequência inicial considerada é $\omega_i = 1$. Esquerda: $\rho = 0$, $s_0 \Upsilon = 1$. Direita: $\rho = 1$, $s_0 \Upsilon = 10$	57

4.9	A razão $\mathcal{E}_f/\mathcal{E}_i$ em função do parâmetro κ para diferentes valores negativos da frequência final ω_f (mostrados próximo às respectivas linhas). A frequência inicial considerada é $\omega_i = 1$. Outros parâmetros são: $\rho = 1, s_0\Upsilon = 10$.	58
4.10	A razão $R = \widetilde{\Delta\mathcal{M}} / \langle\langle\mathcal{M}\rangle\rangle $ no caso da temperatura inicial zero ($\rho = 0$ and $s_0\Upsilon = 1$) em função do parâmetro κ para diferentes valores da frequência final ω_f (mostrados próximo às respectivas linhas). A frequência inicial considerada é $\omega_i = 1$. Esquerda: $\omega_f > 0$. Direita: $\omega_f < 0$.	58
4.11	A razão $R = \widetilde{\Delta\mathcal{M}} / \langle\langle\mathcal{M}\rangle\rangle $ no caso de temperatura inicial zero ($\rho = 0$ and $s_0\Upsilon = 1$) em função da frequência final ω_f , a frequência inicial considerada é $\omega_i = 1$. Esquerda: diferentes valores do parâmetro κ (mostrados próximo às respectivas linhas). Direita: o limite quando $\kappa \rightarrow \infty$.	59
4.12	A razão $\mathcal{E}/\mathcal{E}_i$ em função do tempo adimensional $\tau = \kappa t$ para diferentes valores do parâmetro μ (mostrados próximo às respectivas linhas). A frequência inicial considerada é $\omega_i = 1$. Esquerda: $\rho = 0, s_0\Upsilon = 1$. Direita: $\rho = 1, s_0\Upsilon = 10$.	61
4.13	A razão $\mathcal{E}/\mathcal{E}_i$ em função da variável $\xi = \omega(t)/\omega_i$ para diferentes valores do parâmetro μ (mostrados próximo às respectivas linhas). A frequência inicial considerada é $\omega_i = 1$. Esquerda: $\rho = 0, s_0\Upsilon = 1$. Direita: $\rho = 1, s_0\Upsilon = 10$.	61
4.14	A razão $\mathcal{E}_f/\mathcal{E}_i$ em função do parâmetro κ para $\omega_i = 1$. Curvas inferiores: $\rho = 0, s_0\Upsilon = 1$. Curvas superiores: $\rho = 1, s_0\Upsilon = 5$.	62
4.15	A razão $\mathcal{E}_f/\mathcal{E}_i$ em função da frequência final ω_f para diferentes valores do parâmetro κ (mostrados próximo às respectivas linhas). A frequência inicial considerada é $\omega_i = 1$. Esquerda: $\rho = 0, s_0\Upsilon = 1$. Direita: $\rho = 1, s_0\Upsilon = 10$.	64
4.16	A razão $\mathcal{E}_f/\mathcal{E}_i$ em função do parâmetro κ para diferentes valores positivos da frequência final ω_f (mostrados próximo às respectivas linhas). A frequência inicial considerada é $\omega_i = 1$. Esquerda: $\rho = 0, s_0\Upsilon = 1$. Direita: $\rho = 1, s_0\Upsilon = 10$.	64
4.17	A razão $\mathcal{E}_f/\mathcal{E}_i$ em função do parâmetro κ para diferentes valores negativos da frequência final ω_f (mostrados próximo às respectivas linhas). A frequência inicial considerada é $\omega_i = 1$. Esquerda: $\rho = 0, s_0\Upsilon = 1$. Direita: $\rho = 1, s_0\Upsilon = 10$.	65
4.18	A razão $\mathcal{E}(\tau)/\mathcal{E}_i$ para o decaimento exponencial “suave” da frequência (4.124) com $\mu = 0.1, 1.0, 10, 0$. Esquerda: $\rho = 0, s_0\Upsilon = 1$. Direita: $\rho = 1, s_0\Upsilon = 10$.	67
4.19	Esquerda: As funções $\mu^{-2} D_q ^2(\mu)$ e $-\mu^{-2}\text{Re}(D_q^2)(\mu)$ com $\omega_i = 1$. Direita: As funções $ D_q ^2(\mu)$ e $ D_p ^2(\mu)$.	68
4.20	O momento magnético médio normalizado em função do tempo adimensional $\tau = \kappa t$ para o decaimento exponencial “suave” da frequência (4.124) com $\mu = 0.1, 1.0, 10, 0$. Esquerda: $\rho = 0, s_0\Upsilon = 1$. Direita: $\rho = 1, s_0\Upsilon = 10$.	68
4.21	A razão $\mathcal{E}(\tau)/\mathcal{E}_i$ em função do tempo adimensional $\tau = 1 + t/t_0$ para os calibres circular e de Landau com a mesma frequência de cíclotron inicial Ω_0 e parâmetro de escala de tempo t_0 , no caso do decaimento linear inverso do campo magnético $B(t) = B_0/(1 + t/t_0)$. Esquerda: baixa temperatura, $\rho = 0, \Upsilon = 1$. Direita: alta temperatura, $\rho = 1, \Upsilon = 10$.	75

4.22	O momento magnético médio $\mathcal{M}(\tau)$ em função do tempo adimensional $\tau = 1 + t/t_0$ para os calibres circular e de Landau com a mesma frequência de ciclotron inicial Ω_0 e parâmetro de escala de tempo t_0 , no caso do decaimento linear inverso do campo magnético $B(t) = B_0/(1 + t/t_0)$. Esquerda: baixa temperatura, $\rho = 0$, $\Upsilon = 1$. Direita: alta temperatura, $\rho = 1$, $\Upsilon = 10$	76
4.23	As razões $\mathcal{E}(\tau)/\mathcal{E}_i$ nas armadilhas isotrópicas ($s = 1$) em função do tempo adimensional $\tau = \kappa t$ para os calibres circular e de Landau com $B(t) = B_0/\cosh(\kappa t)$. Linhas sólidas: $\mu_{Land} = \sqrt{2}$ e $\mu_{circ} = \sqrt{2}/2$. Linhas tracejadas: $\mu_{Land} \ll 1$ e $\mu_{circ} \ll 1$. Esquerda: o caso de baixa temperatura, $\rho = 0$, $\Upsilon = 1$. Direita: o caso de alta temperatura, $\rho = 1$, $\Upsilon = 10$	78
4.24	O momento magnético médio $\mathcal{M}(\tau)$ nas armadilhas anisotrópicas com $s = 2$ em função do tempo adimensional $\tau = \kappa t$ para os calibres circular e de Landau com $B(t) = B_0/\cosh(\kappa t)$. Linhas sólidas: $\mu_{Land} = \sqrt{2}$ e $\mu_{circ} = \sqrt{2}/2$. Linhas tracejadas: $\mu_{Land} \ll 1$ e $\mu_{circ} \ll 1$. Esquerda: o caso de baixa temperatura, $\rho = 0$, $\Upsilon = 1$. Direita: o caso de alta temperatura, $\rho = 1$, $\Upsilon = 10$	78
A.1	Esquerda: A seção transversal do solenóide elíptico com a razão entre os eixos $a/b = 2$, produzindo o potencial vetor (1) com $\alpha = 1/3$. Direita: A seção transversal do solenóide hiperbólico com $\alpha \approx -3/2$	86

Sumário

Introdução	1
1 Definições e equações básicas	4
1.1 Evolução temporal dos momentos de segunda ordem	6
1.2 A escolha da matriz de covariâncias inicial	7
2 Criando estados comprimidos com um salto duplo do campo magnético	11
2.1 Evolução da matriz de covariâncias	12
2.2 Variâncias dos pares $x_r y_r$ e $x_c y_c$	13
2.3 “Compressão principal” nos pares $x_r y_r$ e $x_c y_c$	14
2.3.1 Pequenas variações dos parâmetros	15
2.3.2 A dependência do tempo de duração T	16
2.3.3 Os domínios da compressão principal permanente	17
2.3.4 Desligando o campo magnético	18
2.3.5 As características excepcionais do calibre de Landau	19
2.4 Discussão	19
3 Evolução dos valores médios da energia e do momento magnético após um salto único do campo magnético	21
3.1 Equivalência entre as partes quântica e clássica dos valores médios das grandezas	22
3.2 Variação da energia após o salto	23
3.2.1 Variação relativa da energia média	24
3.2.2 Flutuações da energia	25
3.3 Definição do operador momento magnético	28
3.4 Variação do momento magnético médio	30
3.4.1 Imediatamente após o salto	30
3.4.2 A evolução posterior: oscilações	31
3.5 Flutuações do momento magnético	32
3.5.1 Flutuações do momento magnético no estado inicial	32
3.5.2 Flutuações após o salto: armadilha isotrópica	33
3.5.3 Armadilha anisotrópica	34
3.6 Radiação magnética dipolar e tempo de relaxamento	35

3.7	Discussão	36
4	Evolução dos valores médios da energia e do momento magnético para mudanças contínuas do campo magnético	39
4.1	O calibre circular: geral	40
4.1.1	Evolução da energia média	42
4.1.2	Flutuações da energia	43
4.1.3	Evolução do momento magnético médio	44
4.1.4	Flutuações do momento magnético	46
4.2	Soluções explícitas da equação do oscilador em termos de funções elementares	47
4.2.1	Redução linear inversa do campo magnético	47
4.2.2	Redução quadrática inversa do campo magnético	50
4.2.3	Redução de frequência tipo exponencial para um valor final	52
4.3	Soluções exatas em termos de funções hipergeométricas e cilíndricas	54
4.3.1	Energia média	56
4.3.2	Momento magnético médio no regime assintótico	57
4.3.3	Desligamento exponencial do campo: soluções em termos das funções de Hankel	59
4.4	Os perfis de Epstein–Eckart: soluções em termos das funções hipergeométricas de Gauss	62
4.4.1	Evolução em todo o eixo do tempo	62
4.4.2	Transição “suave” para o decaimento exponencial no semi-eixo	65
4.5	Calibre de Landau: fórmulas gerais	69
4.5.1	Energia média	69
4.5.2	Momento magnético médio	71
4.6	Calibre Landau: exemplos explícitos	72
4.6.1	Uma redução linear inversa do campo magnético	72
4.6.2	Redução exponencial do campo magnético	75
4.6.3	Dinâmica do “salto rápido para zero”	77
4.7	Discussão	77
	Considerações finais	81
A	Potencial vetor dentro de um solenóide infinito com uma seção transversal arbitrária	83
B	Os momentos de quarta ordem em termos dos de segunda ordem para os estados gaussianos	87
C	Detalhes das soluções gerais para o calibre circular	88
D	Fórmulas assintóticas para $\kappa \ll \omega_{i,f}$ no caso da frequência dependente do tempo (4.84)	90
E	Correções analíticas para a aproximação de salto repentino para $\kappa \gg \omega_{i,f}$ no caso da frequência dependente do tempo (4.84)	92

F	Solução para o perfil de Epstein–Eckart (4.114) em toda a linha	93
G	Funções assintóticas que descrevem o momento magnético no calibre de Landau	94

Introdução

O comportamento quântico de partículas carregadas se movendo na presença de um campo magnético uniforme estacionário $\mathbf{B} = (0, 0, B) = \text{rot } \mathbf{A}$ tem sido extensivamente estudado desde o início da mecânica quântica. Soluções da equação de Schrödinger estacionária, para esse cenário, foram encontradas pela primeira vez por Fock em [1] ao considerar o então chamado calibre “circular” do potencial vetor $\mathbf{A}_c = [\mathbf{B} \times \mathbf{r}]/2 = B(-y, x)/2$ e ainda um potencial elétrico não nulo, situação também analisada por Darwin em [2]. O caso, com o mesmo calibre, porém com o potencial elétrico nulo (quando a partícula é livre), foi resolvido e analisado por Page em [3]. Landau em [4] obteve soluções, também com um potencial elétrico nulo, em termos dos polinômios de Hermite para o calibre $\mathbf{A}_L = B(-y, 0)$, que recebeu seu nome (calibre de Landau). Além disso, mostrou que a energia das partículas é quantizada em níveis, hoje chamados níveis de Landau, e que as partículas exibem, além do efeito paramagnético de seu spin, um efeito diamagnético devido a seu movimento. As soluções para os casos em que se considerou um potencial elétrico nulo apresentaram níveis de energia fortemente degenerados em relação ao número quântico que corresponde ao centro do círculo no qual as partículas giram em torno.

Esses resultados foram decisivos para a descoberta de vários efeitos físicos importantes, como por exemplo: efeitos de Haas–van Alphen (dHvA) e Shubnikov–de Haas, que consistem no comportamento oscilatório, respectivamente, da magnetização e da resistividade de metais puros a temperaturas muito baixas, devido a variações do campo magnético [5, 6]; efeito Aharonov-Bohm, que corresponde aos efeitos de potenciais sobre partículas carregadas, mesmo numa região onde todos os campos (e, portanto, as forças sobre as partículas) são nulos [7]; efeito Hall quântico, que é caracterizado pela quantização da condutividade Hall em regimes de baixas temperaturas e fortes campos magnéticos [8].

No cenário em que o campo magnético uniforme é não-estacionário $B(t)$, as soluções da equação Schrödinger foram obtidas por Lewis e Riesenfeld em [9] e Malkin, Man’ko e Trifonov em [10, 11] para o calibre “circular” do potencial vetor. O problema dependente do tempo para o calibre de Landau foi resolvido por Dodonov, Malkin e Man’ko em [12]. Em particular, foram encontrados: as generalizações das soluções estacionárias de Fock-Landau; as amplitudes e probabilidades de transições entre os níveis de Landau; os propagadores exatos de um oscilador carregado não-estacionário e de uma partícula livre colocada em campos elétrico e magnético uniformes dependentes do tempo, entre outros resultados, tanto para o calibre “circular” do potencial vetor [9–11, 13] quanto para o calibre de Landau [12].

Sabe-se, então, que a escolha do potencial vetorial não é única. Dois casos especiais foram considerados na literatura disponível: o calibre “circular” $\mathbf{A}_c = [\mathbf{B} \times \mathbf{r}]/2 = B(-y, x)/2$ [10, 11, 14–23] e o calibre

de Landau $\mathbf{A}_L = B(-y, 0)$ [12,24]. Embora as funções de onda correspondentes sejam diferentes (elas foram encontradas para o calibre de Landau em [4] e para o calibre circular em [1–3]), os resultados físicos finais (como a magnetização no estado de equilíbrio térmico) são idênticos, desde que o campo magnético não dependa do tempo.

No entanto, muitas consequências físicas se mostraram profundamente diferentes para os diferentes calibres no caso não-estacionário, como se pode ver, por exemplo, comparando as expressões explícitas para os propagadores e amplitudes de transição para os dois calibres dados em [11] e [12]. Isso pode ser explicado pelas geometrias distintas do campo elétrico induzido $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\partial\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)/\partial(ct)$ (usamos o sistema de unidades gaussiano), ou seja, quando o campo magnético depende do tempo, diferentes valores de α correspondem a problemas físicos diferentes. Outras manifestações da não equivalência entre os calibres circular e de Landau, nesse cenário, foram observadas nos estudos [25,26], dedicados ao problema da geração de estados comprimidos de partículas carregadas em campos magnéticos.

Essa diferença marcante entre os dois calibres nos motivou a considerar o campo magnético homogêneo dependente do tempo $B(t)$, direcionado ao longo do eixo z , descrito por meio de um potencial vetor linear geral

$$\mathbf{A}(t) = B(t) [-y\alpha_+, x\alpha_-, 0] / 2, \quad \alpha_{\pm} = 1 \pm \alpha, \quad (1)$$

com valores arbitrários do parâmetro real α . O calibre circular corresponde a $\alpha = 0$, enquanto o calibre de Landau corresponde a $\alpha = \pm 1$. No apêndice A mostramos que o potencial vetorial dado pela equação (1) descreve o campo magnético na região central interna de solenóides com seções transversais simétricas arbitrárias [27]. Os valores $|\alpha| < 1$ correspondem a seções transversais convexas, enquanto as situações com $|\alpha| > 1$ podem ser observadas em solenóides com seções côncavas.

Nosso principal objetivo é estudar o comportamento das variâncias das coordenadas “geométricas” (x_c, y_c) e (x_r, y_r) (respectivamente, coordenadas do centro do movimento circular e coordenadas relativas em relação ao centro), dos valores médios da energia e do momento magnético, bem como de suas variâncias, no caso em que o campo magnético é dependente do tempo para valores arbitrários do parâmetro α . Em particular, questões interessantes são: como se poderia criar, partindo de um estado coerente (ou seja, com todas as variâncias iguais a $\hbar/2m\Omega$), um “estado comprimido geométrico” (estado que possui variâncias de qualquer elemento dos pares (x_c, y_c) ou (x_r, y_r) menor que $\hbar/2m\Omega$)? É possível “resfriar” a partícula variando o campo magnético ou a forma do solenóide? Quão forte pode ser a mudança do momento magnético devido à mudança do campo magnético?

Este trabalho está disposto da seguinte forma. No capítulo 1, lembramos as definições das principais quantidades que caracterizam o movimento de uma partícula carregada num campo magnético, como a energia e momento angular, enfatizando o papel das coordenadas “geométricas” (x_c, y_c) e (x_r, y_r) . Além disso, analisamos as equações dinâmicas para as variáveis canônicas e “geométricas” e discutimos a escolha das condições iniciais. No capítulo 2, considerando um salto duplo do campo magnético com $B(t) = B_0$ para $t < 0$ e $t > T$ e $B(t) = \text{const} \neq B_0$ para $0 < t < T$, obtemos as fórmulas explícitas que descrevem a evolução da compressão quântica dos dois pares de observáveis não comutáveis (x_c, y_c) e (x_r, y_r) , publicamos os resultados desse capítulo no artigo [26]. No capítulo 3, considerando um salto instantâneo do campo magnético de um valor inicial para um valor final, obtemos as fórmulas explícitas que descrevem a

evolução dos valores médios da energia e do momento magnético e suas variâncias a partir do estado inicial de equilíbrio, criado com a ajuda de um potencial harmônico anisotrópico fraco, publicamos os resultados desse capítulo nos artigos [27, 28]. No capítulo 4, considerando particularmente os calibres circular e de Landau, obtemos as fórmulas gerais para os valores médios dependentes do tempo da energia e do momento magnético para variações contínuas do campo magnético $B(t)$. Mostramos que elas são expressas em termos das soluções para a equação clássica do movimento $\ddot{\varepsilon} + \omega_a^2(t)\varepsilon = 0$, com $\omega_1 = 2\omega_0$. Resultados explícitos são encontrados nos casos do salto repentino do campo magnético, da ressonância paramétrica e da evolução adiabática, além de várias funções específicas $B(t)$, quando as soluções podem ser expressas em termos de funções elementares ou hipergeométricas. Até o momento, os resultados desse capítulo foram publicados na pré-impressão [29].

Capítulo 1

Definições e equações básicas

Consideramos uma partícula quântica não-relativística de massa m e carga e , cujo movimento no plano xy é governado pelo Hamiltoniano padrão

$$\hat{H} = \hat{\boldsymbol{\pi}}^2/(2m), \quad \boldsymbol{\pi} = \mathbf{p} - e\mathbf{A}(t)/c, \quad (1.1)$$

com o potencial vetorial linear dado pela equação (1). Utilizamos o sistema de unidades gaussiano e descartamos o movimento na direção do vetor campo magnético, uma vez que esse movimento é independente do movimento no plano xy na aproximação não relativística.

No cenário em que o campo magnético é estacionário, as equações do movimento podem ser obtidas pela equação de Heisenberg $\hbar\dot{\hat{A}} = i[\hat{H}, \hat{A}]$, lembrando que $[\mathbf{p}, \mathbf{A}] = -i\hbar\nabla \cdot \mathbf{A}$, temos:

$$\dot{\pi}_x = -\Omega\pi_y, \quad \dot{\pi}_y = \Omega\pi_x, \quad \dot{\pi}_z = 0 \quad e \quad m\dot{\mathbf{r}} = \boldsymbol{\pi}, \quad (1.2)$$

onde $\Omega = eB/(mc)$ é a frequência de rotação do cíclotron, $\boldsymbol{\pi}$ o momento cinético e $\mathbf{A}(x, y)$ o potencial vetor. As equações (1.2) implicam

$$d/dt(\pi_x + m\Omega y) = 0 \quad e \quad d/dt(\pi_y - m\Omega x) = 0, \quad (1.3)$$

que fornecem

$$\hat{x}_c = \hat{x} + \hat{\pi}_y/(m\Omega) = \alpha_+\hat{x}/2 + \hat{p}_y/(m\Omega), \quad (1.4)$$

$$\hat{y}_c = \hat{y} - \hat{\pi}_x/(m\Omega) = \alpha_-\hat{y}/2 - \hat{p}_x/(m\Omega), \quad (1.5)$$

onde $\alpha_{\pm} = 1 \pm \alpha$. Os operadores (1.4) e (1.5) descrevem as coordenadas do centro do círculo, no qual a partícula gira com a frequência de rotação do cíclotron Ω , e correspondem às integrais de movimento do sistema, ou seja, são observáveis que permanecem constantes durante a evolução do sistema físico. Essa interpretação foi decisiva para a obtenção da fórmula do diamagnetismo de Landau [4]. Mais tarde, o significado dessas integrais de movimento foi enfatizado nos trabalhos [30–40]. Em particular, elas se mostraram importantes para a construção dos estados coerentes [12, 13, 35, 41–44] (autoestados do operador de aniquilação com mínima incerteza) e dos estados comprimidos [25, 45, 46] (estados de mínima incerteza, porém com

uma variância menor do que um estado coerente em uma das quadraturas) de uma partícula carregada em um campo magnético uniforme.

O segundo par de observáveis físicos consiste em duas coordenadas relativas

$$\hat{x}_r = \hat{x} - \hat{x}_c = -\hat{\pi}_y/(m\Omega) = \alpha_- \hat{x}/2 - \hat{p}_y/(m\Omega), \quad (1.6)$$

$$\hat{y}_r = \hat{y} - \hat{y}_c = \hat{\pi}_x/(m\Omega) = \alpha_+ \hat{y}/2 + \hat{p}_x/(m\Omega), \quad (1.7)$$

que são as coordenadas da partícula em relação ao centro do movimento circular, de modo que as seguintes relações de comutação são satisfeitas

$$[\hat{\pi}_x, \hat{\pi}_y] = -im\Omega\hbar, \quad [\hat{x}_r, \hat{y}_r] = [\hat{y}_c, \hat{x}_c] = i\hbar/(m\Omega), \quad (1.8)$$

$$[\hat{x}_r, \hat{x}_c] = [\hat{x}_r, \hat{y}_c] = [\hat{y}_r, \hat{x}_c] = [\hat{y}_r, \hat{y}_c] = 0. \quad (1.9)$$

Então, o Hamiltoniano (1.1) para um campo magnético B constante pode ser escrito na forma

$$\hat{H} = m\Omega^2 (\hat{x}_r^2 + \hat{y}_r^2) / 2, \quad (1.10)$$

e seus autovalores assumem os valores discretos $\hbar\Omega(n + 1/2)$. Além disso, esses autovalores apresentam grande degenerescência [4], porque eles não dependem dos valores médios dos operadores \hat{x}_c e \hat{y}_c (ou de suas funções). Esse é um resultado esperado, pois a energia não pode depender do centro da órbita, já que o campo magnético é uniforme e está presente em todo o espaço. Como todos os observáveis (x_c, y_c) e (x_r, y_r) são coordenadas no espaço usual “geométrico”, foram chamados de observáveis geométricos em [25].

Além da energia, existe outra integral quadrática do movimento, que pode ser considerada como o momento angular generalizado (as mesmas fórmulas são válidas para as variáveis clássicas e para os operadores quânticos):

$$L = x\pi_y - y\pi_x + m\Omega(x^2 + y^2) / 2 \quad (1.11)$$

$$= xp_y - yp_x + m\Omega\alpha(x^2 - y^2) / 2 \quad (1.12)$$

$$= m\Omega(x_c^2 + y_c^2 - x_r^2 - y_r^2) / 2. \quad (1.13)$$

Somente no caso do calibre “circular” do potencial vetor, o operador \hat{L} coincide com o operador de momento angular canônico $\hat{L}_{can} = \hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x$.

Segue de (1.11) que o momento angular “cinético”, definido como

$$L_{kin} \equiv x\pi_y - y\pi_x = -m\Omega(x_r^2 + y_r^2 + x_c x_r + y_c y_r), \quad (1.14)$$

não é uma quantidade conservada e pode variar com o tempo no caso genérico [30, 47–51], exceto para os casos especiais dos autoestados de energia ou de suas misturas estatísticas. Consequências importantes desse fato são demonstradas na seção 3.3. Por outro lado, o momento angular “intrínseco”

$$J = x_r\pi_y - y_r\pi_x = -m\Omega(x_r^2 + y_r^2) = -2H/\Omega \quad (1.15)$$

é obviamente conservado para o campo magnético constante. Embora os operadores (1.10) e (1.13) comutem, não se pode esperar que o valor médio de L possa ser preservado para funções *dependentes do tempo* $\Omega(t)$, a menos que $\alpha = 0$, porque $d\langle\hat{L}\rangle/dt = \frac{1}{2}m\alpha\langle x^2 - y^2\rangle d\Omega/dt$.

1.1 Evolução temporal dos momentos de segunda ordem

Como estamos interessados na evolução das variâncias, da energia média e do momento magnético médio, temos que calcular os valores médios de vários produtos dos operadores $\hat{x}_{r,c}$ e $\hat{y}_{r,c}$ em função do tempo. À primeira vista, pode-se usar a forma mais simples da equação de Ehrenfest para obter a evolução dos valores médios de algum operador, $d\langle\hat{O}\rangle/dt = (i/\hbar)\langle[\hat{H}, \hat{O}]\rangle$. Caso em que os comutadores (1.8) fornecem $d\langle\hat{\pi}_x\rangle/dt = -\Omega\langle\hat{\pi}_y\rangle$ e $d\langle\hat{\pi}_y\rangle/dt = \Omega\langle\hat{\pi}_x\rangle$, sem qualquer dependência do parâmetro de calibre α . Mas isso é verdade apenas quando a frequência Ω independe do tempo. No caso geral, deve-se usar a equação de Ehrenfest completa,

$$d\langle\hat{O}\rangle/dt = (i/\hbar)\langle[\hat{H}, \hat{O}]\rangle + \langle\partial\hat{O}/\partial t\rangle,$$

levando em consideração que o operador $\hat{\pi}$ em (1.1) contém explicitamente a dependência do tempo por meio do potencial vetorial (1) que contém a função dependente do tempo $B(t)$. No entanto, a equação para $d\langle\hat{\pi}\rangle/dt$ contém a derivada $d\Omega/dt$ além da própria função $\Omega(t)$. Por este motivo, preferimos partir das equações para os valores médios dos *operadores canônicos*, uma vez que esses operadores não contém funções dependentes do tempo em suas definições. Omitindo o símbolo de média da mecânica quântica $\langle\cdots\rangle$, obtemos as seguintes equações (coincidindo formalmente com as equações para variáveis clássicas devido à linearidade):

$$\dot{x} = p_x/m + \omega(t)(1 + \alpha)y, \quad \dot{y} = p_y/m - \omega(t)(1 - \alpha)x, \quad (1.16)$$

$$\dot{p}_x = \omega(t)(1 - \alpha)p_y - m\omega^2(t)(1 - \alpha)^2x, \quad \dot{p}_y = -\omega(t)(1 + \alpha)p_x - m\omega^2(t)(1 + \alpha)^2y, \quad (1.17)$$

onde $\omega(t) = eB(t)/(2mc)$ é a frequência de Larmor. É conveniente introduzir o vetor $\mathbf{Q} = (x, y, p_x, p_y)$ (cujos componentes são os valores médios dos operadores quânticos ou das variáveis clássicas). Então, as soluções para o sistema (1.16)-(1.17) podem ser escritas na forma compacta

$$\mathbf{Q}(t) = \mathbf{\Lambda}_Q(t)\mathbf{Q}(0), \quad (1.18)$$

onde $\mathbf{\Lambda}_Q(t)$ é uma matriz 4×4 . Além disso, é conveniente introduzir a matriz 4×4 simétrica $\boldsymbol{\sigma} = \|\sigma_{ij}\|$, que consiste em todos os momentos simétricos de segunda ordem $\sigma_{ij} = \langle\hat{Q}_i\hat{Q}_j + \hat{Q}_j\hat{Q}_i\rangle/2$. Então, é conhecido (veja, por exemplo, em [52]) que a transformação linear (1.18) resulta na seguinte relação entre as matrizes $\boldsymbol{\sigma}(t)$ e $\boldsymbol{\sigma}(0)$:

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \mathbf{\Lambda}_Q(t)\boldsymbol{\sigma}(0)\tilde{\mathbf{\Lambda}}_Q(t), \quad (1.19)$$

onde $\tilde{\mathbf{\Lambda}}_Q$ significa a matriz transposta. Do ponto de vista físico, é conveniente usar as matrizes correspondentes às coordenadas “geométricas”, combinadas no vetor $\mathbf{q} = (x_r, y_r, x_c, y_c)$, ao invés da matriz $\mathbf{Q}(t)$. Conhecendo a transformação $\mathbf{q} = U\mathbf{Q}$ com

$$U = \frac{1}{2} \left\| \begin{array}{cccc} \alpha_- & 0 & 0 & -r^{-1} \\ 0 & \alpha_+ & r^{-1} & 0 \\ \alpha_+ & 0 & 0 & r^{-1} \\ 0 & \alpha_- & -r^{-1} & 0 \end{array} \right\|, \quad U^{-1} = \left\| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & r\alpha_- & 0 & -r\alpha_+ \\ -r\alpha_+ & 0 & r\alpha_- & 0 \end{array} \right\|,$$

onde $r = m\omega$, chegamos à expressão final

$$\boldsymbol{\sigma}_q(t) = \mathbf{\Lambda}_q(t)\boldsymbol{\sigma}_q(0)\tilde{\mathbf{\Lambda}}_q(t), \quad (1.20)$$

onde

$$\mathbf{\Lambda}_q(t) = U(t)\mathbf{\Lambda}_Q(t)U^{-1}(0). \quad (1.21)$$

Aqui, a matriz $U(t)$ contém a frequência de Larmor atual $\omega(t)$, enquanto $U(0)$ contém a frequência inicial $\omega(0)$.

Nesse ponto fica claro que todas as grandezas podem ser obtidas se conhecermos a matriz $\mathbf{\Lambda}_q(t)$ e a matriz de covariâncias inicial $\sigma_q(0)$. Porém, em geral, $\sigma_q(0)$ pode ser constituída por 10 elementos independentes (obedecendo a algumas restrições devido às relações de incerteza). Consequentemente, é difícil analisar o problema para os estados iniciais mais gerais. Então na próxima seção iremos discutir a escolha de $\sigma_q(0)$.

1.2 A escolha da matriz de covariâncias inicial

É interessante considerar a situação que parece mais natural. Ou seja, vamos assumir que a partícula estava inicialmente no estado de equilíbrio termodinâmico, sendo confinada por meio de uma armadilha de potencial harmônico da forma $V(x, y) = m(\gamma_x^2 x^2 + \gamma_y^2 y^2)/2$. Então, o hamiltoniano inicial total pode ser escrito na forma quadrática $\mathbf{Q}\mathcal{B}\mathbf{Q}/2$, onde $\mathbf{Q} = (p_x, p_y, x, y)$ e \mathcal{B} é a matriz simétrica 4×4 :

$$\mathcal{B} = \begin{vmatrix} m^{-1} & 0 & 0 & \omega\alpha_+ \\ 0 & m^{-1} & -\omega\alpha_- & 0 \\ 0 & -\omega\alpha_- & m(\gamma_x^2 + \omega^2\alpha_-^2) & \\ \omega\alpha_+ & 0 & 0 & m(\gamma_y^2 + \omega^2\alpha_+^2) \end{vmatrix}.$$

Aqui $\omega = eB/(2mc) = \Omega/2$ é a *frequência de Larmor*.

A função de Wigner de equilíbrio para os hamiltonianos quadráticos mais gerais foi calculada em [53]:

$$W_{eq}(\mathbf{Q}) \sim \exp[\hbar^{-1}\mathbf{Q}\Sigma \tan(\xi\Sigma\mathcal{B})\mathbf{Q}], \quad \xi = \hbar\beta/2, \quad (1.22)$$

onde β é o parâmetro de temperatura inversa. O fator pré-exponencial em (1.22) não é importante para o nosso propósito. A matriz 4×4 anti-simétrica $\Sigma = -\Sigma^{-1}$ tem a seguinte decomposição em blocos de matrizes 2×2 :

$$\Sigma = \begin{vmatrix} 0 & I_2 \\ -I_2 & 0 \end{vmatrix}, \quad (1.23)$$

onde I_n é a matriz unitária $n \times n$. Também é conhecido (veja, por exemplo, em [52, 54]) que a função de Wigner de qualquer estado gaussiano com $\langle \hat{\mathbf{Q}} \rangle = 0$ pode ser escrita na forma

$$W_{Gauss}(\mathbf{Q}) \sim \exp\left(-\frac{1}{2}\mathbf{Q}\mathcal{Q}\mathbf{Q}\right), \quad (1.24)$$

onde \mathcal{Q} é a matriz de covariâncias do estado. Comparando (1.22) com (1.24), concluímos que a matriz de covariância no estado de equilíbrio do sistema quântico descrito pelo hamiltoniano positivo $\mathbf{Q}\mathcal{B}\mathbf{Q}/2$ tem a forma

$$\mathcal{Q}_{eq} = (\hbar/2) \cot(\xi\Sigma\mathcal{B})\Sigma. \quad (1.25)$$

A matriz (1.25) é simétrica devido às propriedades $\tilde{\mathcal{B}} = \mathcal{B}$ e $\tilde{\Sigma} = -\Sigma$.

O método usado para calcular qualquer função matricial $f(A)$ é bem conhecido: veja, por exemplo, em [55]. Deve-se calcular o polinômio característico $D(\lambda) \equiv \det(\lambda I_n - A)$ da matriz $n \times n$ A e encontrar suas raízes $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Então,

$$f(A) = \sum_{k=1}^n f(\lambda_k) \prod_{j \neq k} \frac{(A - \lambda_j)}{(\lambda_k - \lambda_j)}. \quad (1.26)$$

No nosso caso, $n = 4$, $A = \Sigma \mathcal{B}$, e $D(\lambda) = \lambda^4 + (\gamma_x^2 + \gamma_y^2 + 4\omega^2) \lambda^2 + \gamma_x^2 \gamma_y^2$. As raízes de $D(\lambda) = 0$ são dois pares de números imaginários puros, $\pm i\Omega_{\pm}$, onde

$$\Omega_{\pm} = \omega_{\pm} \pm \omega_{-}, \quad \omega_{\pm} = \sqrt{\omega^2 + (\gamma_x \pm \gamma_y)^2/4}. \quad (1.27)$$

Observe que essas frequências não dependem do parâmetro de calibre α . No entanto, a matriz de covariância no equilíbrio (1.25), correspondente às variáveis *canônicas*, depende deste parâmetro. Levando em consideração que $\cot(ix) = -i \coth(x)$ e

$$\Omega_{\pm}^2 = 2\omega^2 + (\gamma_x^2 + \gamma_y^2)/2 \pm \omega_{+}\omega_{-},$$

podemos expressar a matriz (1.25), depois de alguma álgebra, na forma

$$\mathcal{Q}_{eq} = \frac{\hbar}{4\omega_{+}\omega_{-}} \left[\frac{\coth(\xi\Omega_{+})}{\Omega_{+}} \mathcal{Q}_{+} + \frac{\coth(\xi\Omega_{-})}{\Omega_{-}} \mathcal{Q}_{-} \right], \quad (1.28)$$

com os seguintes elementos não nulos das matrizes \mathcal{Q}_{\pm} :

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_{\pm}^{11} &= \pm m [(\omega\alpha_{-})^2(\mu_{\pm} - d) + \gamma_x^2(\mu_{\pm} + d - 2\alpha\omega^2)], \\ \mathcal{Q}_{\pm}^{22} &= \pm m [(\omega\alpha_{+})^2(\mu_{\pm} + d) + \gamma_y^2(\mu_{\pm} - d + 2\alpha\omega^2)], \\ \mathcal{Q}_{\pm}^{14} = \mathcal{Q}_{\pm}^{41} &= \pm \omega [\alpha_{-}(\mu_{\pm} - d) + \gamma_x^2], \quad \mathcal{Q}_{\pm}^{23} = \mathcal{Q}_{\pm}^{32} = \mp \omega [\alpha_{+}(\mu_{\pm} + d) + \gamma_y^2], \\ \mathcal{Q}_{\pm}^{33} &= \pm(\mu_{\pm} + d)/m, \quad \mathcal{Q}_{\pm}^{44} = \pm(\mu_{\pm} - d)/m, \end{aligned}$$

onde

$$\mu_{\pm} = \omega^2 \pm \omega_{+}\omega_{-} \quad e \quad d = (\gamma_x^2 - \gamma_y^2)/4.$$

A matriz de covariância \mathcal{R} das variáveis *geométricas*, que consiste nos valores médios de todos os produtos simétricos dos componentes do vetor $\mathbf{q} = (x_r, y_r, x_c, y_c)$, pode ser calculada como $\mathcal{R} = U \mathcal{Q} \tilde{U}$, onde a matriz de transformação U segue das definições (1.5)-(1.7):

$$U = \frac{1}{2} \left\| \begin{array}{cccc} 0 & -\zeta & \alpha_{-} & 0 \\ \zeta & 0 & 0 & \alpha_{+} \\ 0 & \zeta & \alpha_{+} & 0 \\ -\zeta & 0 & 0 & \alpha_{-} \end{array} \right\|, \quad \zeta = (m\omega)^{-1}.$$

A matriz resultante \mathcal{R}_{eq} tem a mesma estrutura que (1.28),

$$\mathcal{R}_{eq} = \frac{\hbar}{16m\omega^2\omega_{+}\omega_{-}} \sum_{s=+,-} \frac{\coth(\xi\Omega_s)}{\Omega_s} \mathcal{R}_s, \quad (1.29)$$

mas a matriz \mathcal{R}_{\pm} não depende de α . Seus elementos diferentes de zero são os seguintes:

$$\mathcal{R}_{\pm}^{11} = \pm [4\omega^2(\mu_{\pm} + d) + \gamma_y^2(\mu_{\pm} - d + 2\omega^2)], \quad \mathcal{R}_{\pm}^{22} = \pm [4\omega^2(\mu_{\pm} - d) + \gamma_x^2(\mu_{\pm} + d + 2\omega^2)],$$

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{\pm}^{13} &= \mathcal{R}_{\pm}^{31} = \mp\gamma_y^2(\mu_{\pm} - d), & \mathcal{R}_{\pm}^{24} &= \mathcal{R}_{\pm}^{42} = \mp\gamma_x^2(\mu_{\pm} + d), \\ \mathcal{R}_{\pm}^{33} &= \pm\gamma_y^2(\mu_{\pm} - d - 2\omega^2), & \mathcal{R}_{\pm}^{44} &= \pm\gamma_x^2(\mu_{\pm} + d - 2\omega^2).\end{aligned}$$

Essas expressões mostram a vantagem de usar as variáveis geométricas ao invés das canônicas para estudar os efeitos do campo magnético, de acordo com [30, 32–37].

No limite de partículas livres, $\gamma_{x,y} \rightarrow 0$, temos $\omega_{\pm} \rightarrow \omega$, de modo que $\mu_{\pm} \rightarrow 2\omega^2$. Portanto, todos os elementos da matriz \mathcal{R}_{+} tendem a zero, exceto dois elementos, \mathcal{R}_{+}^{11} e \mathcal{R}_{+}^{22} , que tendem ao valor $8\omega^4$. A situação com a matriz \mathcal{R}_{-} é mais complicada porque $\Omega_{-} \rightarrow 0$ nesse caso. Para obter os valores limites corretos, deve-se usar as seguintes expansões em relação a pequenos valores de $\gamma_{x,y}$: $\mu_{-} = -(\gamma_x^2 + \gamma_y^2)/4 + \gamma_x^2\gamma_y^2/(8\omega^2)$, $\Omega_{-} = \gamma_x\gamma_y/(2\omega)$. Pode-se verificar que os elementos $\rho^{jk} = \mathcal{R}_{-}^{jk} \coth(\xi\Omega_{-})/\Omega_{-}$ tendem a zero para $j = k = 1$ e $j = k = 2$, enquanto que os elementos ρ^{13} e ρ^{24} tendem a coincidir com valores finitos negativos. Os elementos ρ^{33} e ρ^{44} , relacionados aos valores médios $\langle x_c^2 \rangle$ e $\langle y_c^2 \rangle$, divergem para $\gamma_{x,y} \rightarrow 0$. Isso é fácil de entender, porque as coordenadas do centro de orientação podem assumir quaisquer valores para o movimento ilimitado de uma partícula livre, governado pelo hamiltoniano (1.10).

Vamos supor, então, que inicialmente a partícula foi colocada dentro de algum solenóide e confinada por meio de algum potencial adicional fraco. E em algum momento, o potencial de confinamento é removido instantaneamente, de modo que todos os valores médios não mudam. Nesse caso, a matriz de covariância inicial na equação (1.19) pode ser escolhida na forma

$$\sigma_q(0) = G \begin{vmatrix} 1 & 0 & -\rho & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\rho \\ -\rho & 0 & \chi_x & 0 \\ 0 & -\rho & 0 & \chi_y \end{vmatrix} \quad (1.30)$$

com seus quatro parâmetros positivos [28]. Para o estado de equilíbrio inicial, temos

$$G = \frac{\hbar\mathcal{C}}{4m\omega}, \quad \mathcal{C} = \coth(\hbar\omega\beta), \quad \rho = \frac{\tanh(\hbar\omega\beta)}{\hbar\omega\beta}, \quad (1.31)$$

$$\chi_x = \frac{\gamma_y}{\gamma_x}\Upsilon, \quad \chi_y = \frac{\gamma_x}{\gamma_y}\Upsilon, \quad \Upsilon = \frac{\tanh(\hbar\omega\beta)}{\tanh(\hbar\beta\nu)}, \quad \nu = \gamma_x\gamma_y/(4\omega). \quad (1.32)$$

O limite de partícula (quase)livre implica que $\nu \ll \omega$. Devemos dar atenção especial a dois casos limites. No limite de alta temperatura, $\hbar\beta\omega_i \ll 1$, temos $\rho \approx 1$ e $\Upsilon \gg 1$. Por outro lado, no limite de temperatura extremamente baixa, $\hbar\beta\nu \gg 1$, temos $\Upsilon = 1$, $\rho = 0$, e $G = \hbar/(2m\Omega_i)$.

Em condições reais, a partícula se move dentro de algum recipiente com raio efetivo R . Assim, as aproximações e resultados deste estudo fazem sentido sob as restrições.

$$\text{Tr}(\sigma_q) \ll R^2, \quad 2G(1 + s_0\Upsilon) \ll R^2, \quad 2s_0 = s + s^{-1}. \quad (1.33)$$

Na temperatura zero, temos a restrição do campo magnético $B \gg \hbar c/(|e|R^2)$. Observe que a massa da partícula não entra nesta desigualdade. Para $R \sim 1$ cm, a restrição é muito fraca: $B \gg 10^{-7}$ G. Lembre-se que $\Omega \approx 10^{11} \text{ s}^{-1}$ para elétrons no campo $B \approx 6 \times 10^3$ G. Então, o limite de baixa temperatura significa que $T \ll 1$ K. Por outro lado, o limite de alta temperatura é mais adequado para íons, cuja frequência de cíclotron Ω possui muitas (3 a 5) ordens de magnitude menores do que a frequência do elétron.

O cálculo da matriz de transformação $\Lambda_q(t)$ para qualquer função arbitrária $B(t)$ é um problema complicado, que foi resolvido até agora apenas nos casos especiais em que $\alpha = 0$ [9–11, 15, 17, 18, 20, 23, 56, 57] e $\alpha = \pm 1$ [12, 24]. Contudo, em alguns casos particulares ela pode ser calculada, então nos próximos capítulos iremos estudar alguns desses casos.

Capítulo 2

Criando estados comprimidos com um salto duplo do campo magnético

Neste capítulo, apresentaremos os resultados publicados no artigo [26]. Vamos olhar para o problema dos estados comprimidos de partículas carregadas se movendo sob a ação de um campo magnético homogêneo. Formalmente, tais estados foram considerados por vários autores [57–63], mas eles calcularam os coeficientes de compressão em relação aos pares canônicos das variáveis, como x, p_x e y, p_y , cujo significado físico não é muito claro. Portanto, foi sugerido em [25, 45, 46] analisar as variâncias dos pares (x_c, y_c) e (x_r, y_r) . Os estados que possuem variâncias de qualquer elemento dos pares (x_c, y_c) ou (x_r, y_r) menor que $\hbar/2m\Omega$ foram nomeados de “estados comprimidos geométricos” (ECG) em [25], a fim de enfatizar que todos os observáveis (x_c, y_c, x_r, y_r) têm o significado de coordenadas no usual espaço “geométrico”, e não no espaço de fase.

Um problema interessante levantado em [25] é como se poderia criar um ECG partindo de estados coerentes (tendo todas as variâncias iguais a $\hbar/2m\Omega$). Para os sistemas de um modo, tal problema pode ser resolvido efetivamente usando hamiltonianos quadráticos com coeficientes dependentes do tempo escolhidos adequadamente [52, 64, 65]. Mas isso pode ser feito usando campos magnéticos dependentes do tempo em duas dimensões? Parece que a resposta depende da escolha do calibre inicial. Foi mostrado em [25] que nenhuma compressão pode ser obtida para qualquer observável geométrico (x_c, y_c, x_r, y_r) para um campo magnético dependente do tempo arbitrário descrito por meio do *calibre circular* do potencial vetor. Por outro lado, algum grau de compressão pode ser obtido no caso do *calibre de Landau*. É claro que esses comportamentos distintos se devem às diferentes configurações do campo elétrico induzido.

Para verificar a possibilidade de criar um estado comprimido geométrico, partindo de estados coerentes, devemos analisar a evolução da matriz de covariâncias $\Lambda(t)$ e averiguar se a variância de algum observável geométrico será menor que $\hbar/2m\Omega$.

2.1 Evolução da matriz de covariâncias

Consideramos inicialmente o caso especial da variação do campo magnético tipo degrau:

$$B(t)/B_0 = \begin{cases} 1, & t < 0, \\ \Theta, & 0 \leq t \leq T \\ 1, & t > T \end{cases} . \quad (2.1)$$

Embora tal dependência de tempo seja uma idealização de processos reais, ela foi frequentemente usada para a análise de vários processos físicos. Em particular, tais modelos foram considerados por Janszky [66, 67] e Stenholm [68] com seus co-autores. A modulação em degraus da frequência própria do oscilador foi considerada em conexão com o problema da geração de compressão nos sistemas de um modo em [66, 67, 69, 70]. As variações em degrau do campo magnético foram consideradas em [36, 58, 62].

Com a ajuda das equações (1.4), (1.5), (1.6) e (1.7) pode-se verificar que a relação entre os observáveis geométricos e canônicos é dada por,

$$\hat{x} = \hat{x}_r + \hat{x}_c, \quad \hat{y} = \hat{y}_r + \hat{y}_c, \quad (2.2)$$

$$\hat{p}_x = m\Omega [\hat{y}_r(1 - \alpha) - \hat{y}_c(1 + \alpha)]/2, \quad \hat{p}_y = m\Omega [\hat{x}_c(1 - \alpha) - \hat{x}_r(1 + \alpha)]/2. \quad (2.3)$$

O Hamiltoniano (1.1) em termos dos observáveis geométricos, no intervalo $0 \leq t \leq T$, assume a seguinte forma [26]

$$\hat{H} = m\Omega^2 \left[(L_+ \hat{y}_r + K_+ \hat{y}_c)^2 + (L_- \hat{x}_r + K_- \hat{x}_c)^2 \right] / 8, \quad (2.4)$$

onde os coeficientes dependem da função $\Theta \equiv 1 + \kappa$:

$$L_{\pm} = 2 + K_{\pm}, \quad K_{\pm} = \kappa(1 \pm \alpha). \quad (2.5)$$

Como o hamiltoniano (2.4) é quadrático em relação aos observáveis (x_c, y_c, x_r, y_r) , seus valores médios satisfazem o conjunto de equações diferenciais lineares ordinárias dadas pela equação de Ehrenfest que fornece

$$\begin{aligned} \hat{\dot{x}}_r &= \frac{\Omega}{4} (L_+^2 \hat{y}_r + K_+ L_+ \hat{y}_c), & \hat{\dot{y}}_r &= \frac{-\Omega}{4} (L_-^2 \hat{x}_r + K_- L_- \hat{x}_c) \\ \hat{\dot{x}}_c &= \frac{-\Omega}{4} (K_+ L_+ \hat{y}_r + K_+^2 \hat{y}_c), & \hat{\dot{y}}_c &= \frac{\Omega}{4} (K_- L_- \hat{x}_r + K_-^2 \hat{x}_c). \end{aligned} \quad (2.6)$$

que podem ser escritas na forma matricial como $\dot{\mathbf{q}} = \mathcal{M}\mathbf{q}$, onde $\mathbf{q} = (\hat{x}_r, \hat{y}_r, \hat{x}_c, \hat{y}_c)$ e

$$\mathcal{M} = \frac{\Omega}{4} \begin{vmatrix} 0 & L_+^2 & 0 & K_+ L_+ \\ -L_-^2 & 0 & -K_- L_- & 0 \\ 0 & -K_+ L_+ & 0 & -K_+^2 \\ K_- L_- & 0 & K_-^2 & 0 \end{vmatrix}. \quad (2.7)$$

As soluções têm a forma $\mathbf{q}(t) = \mathbf{\Lambda}_q(t)\mathbf{q}(0)$, onde a matriz $\mathbf{\Lambda}_q(t)$ deve coincidir com a matriz unidade em $t = 0$. Como os coeficientes da matriz \mathcal{M} não dependem do tempo no intervalo $0 < t < T$, todos os elementos da matriz $\mathbf{\Lambda}_q(t)$ são dados por certas combinações de funções trigonométricas. A equação característica para matriz (2.7), $\det(\mathcal{M} - xI_4) = 0$ (onde I_4 é a matriz unitária 4×4), não contém o parâmetro α e é dada

por $x^4 + (\Omega\Theta)^2 x^2 = 0$, de modo que as funções trigonométricas dependem apenas do argumento $\varphi = \Omega\Theta t$. As soluções para o sistema de equações diferenciais (2.6) são obtidas pela relação $\mathbf{q}(t) = \mathbf{c}e^{\boldsymbol{\lambda}t}\mathbf{v}$, onde $\boldsymbol{\lambda}$ são os autovalores da matriz \mathbf{M} , \mathbf{v} os correspondentes autovetores e $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3, c_4)$ são coeficientes obtidos através das condições iniciais e de continuidade das soluções. Dessa forma obtemos a matriz $\boldsymbol{\Lambda}_q(t)$ que, por conveniência, será escrita na forma de bloco

$$\boldsymbol{\Lambda}_q(t) = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & \lambda_4 \end{vmatrix} \quad (2.8)$$

Com os seguintes blocos 2×2 :

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{4\Theta} \begin{vmatrix} L_+L_- \cos(\varphi) - K_+K_- & L_+^2 \sin(\varphi) \\ -L_-^2 \sin(\varphi) & L_+L_- \cos(\varphi) - K_+K_- \end{vmatrix}, \\ \lambda_2 &= \frac{1}{4\Theta} \begin{vmatrix} L_+K_- [\cos(\varphi) - 1] & K_+L_+ \sin(\varphi) \\ -K_-L_- \sin(\varphi) & K_+L_- [\cos(\varphi) - 1] \end{vmatrix}, \\ \lambda_3 &= \frac{1}{4\Theta} \begin{vmatrix} K_+L_- [1 - \cos(\varphi)] & -K_+L_+ \sin(\varphi) \\ K_-L_- \sin(\varphi) & K_-L_+ [1 - \cos(\varphi)] \end{vmatrix}, \\ \lambda_4 &= \frac{1}{4\Theta} \begin{vmatrix} L_+L_- - K_+K_- \cos(\varphi) & -K_+^2 \sin(\varphi) \\ K_-^2 \sin(\varphi) & L_+L_- - K_+K_- \cos(\varphi) \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

A força das flutuações quânticas é caracterizada pelas covariâncias $\sigma(t)$ dada pela equação (1.20), por simplicidade vamos considerar um estado inicial coerente no limite de temperaturas muito baixas com uma armadilha de potencial isotrópica, ou seja, vamos considerar $\Upsilon = 1$, $\rho = 0$, $G = \hbar/(2m\Omega)$ e $\chi_x = \chi_y = 1$, de modo que $\sigma(0) = [\hbar/(2m\Omega)]I_4$. Vamos omitir o fator $\hbar/(2m\Omega)$, dessa forma temos a matriz $\sigma(t) = \boldsymbol{\Lambda}_q(t)\tilde{\boldsymbol{\Lambda}}_q(t)$. Então o estado é comprimido em relação ao observável q_j se $\sigma_{jj}(t) < 1$.

2.2 Variâncias dos pares $x_r y_r$ e $x_c y_c$

É conveniente introduzir a seguinte notação para as variâncias (elementos diagonais da matriz σ) e covariâncias (elementos fora da diagonal) no instante $t = T$ (quando o campo magnético retorna ao seu valor inicial e as variâncias passam a realizar oscilações harmônicas):

$$\begin{aligned} \sigma_{x_r x_r}(T) &= \sigma_-^r, & \sigma_{y_r y_r}(T) &= \sigma_+^r, & \sigma_{x_r y_r}(T) &= \sigma_0^r, \\ \sigma_{x_c x_c}(T) &= \sigma_+^c, & \sigma_{y_c y_c}(T) &= \sigma_-^c, & \sigma_{x_c y_c}(T) &= \sigma_0^c. \end{aligned}$$

Então

$$\sigma_{\pm}^r = 1 + \kappa \sin^2(\phi) L_{\mp} [K_{\pm} L_0 \mp 4\alpha\Theta L_{\mp} \cos^2(\phi)] / (2\Theta^2), \quad (2.9)$$

$$\sigma_{\pm}^c = 1 + \frac{\kappa^2 \sin^2(\phi)}{2\Theta^2} \{2\Theta(1 - \alpha^2) + (1 \pm \alpha)^2 [2 + K_{\pm} L_{\pm} \mp 4\kappa\Theta\alpha \sin^2(\phi)]\}, \quad (2.10)$$

$$\sigma_0^r = \kappa\alpha \sin(2\phi) \{2 + \kappa - \sin^2(\phi) [4\Theta + \kappa^2(1 - \alpha^2)]\} / \Theta, \quad (2.11)$$

$$\sigma_0^c = -\kappa^2\alpha \sin(2\phi) [1 + \kappa(1 - \alpha^2) \sin^2(\phi)] / \Theta, \quad (2.12)$$

onde

$$L_0 = 2 + \kappa(1 - \alpha^2) \quad e \quad \phi = \Omega\Theta T/2. \quad (2.13)$$

Se $\alpha = 0$ (o calibre circular), então

$$\sigma_{\pm} = 1 + \sin^2(\phi) (\Theta^2 - 1)^2 / (2\Theta^2), \quad \sigma_0 = 0, \quad (2.14)$$

tanto para o par $x_r y_r$ quanto para o par $x_c y_c$. Consequentemente, para quaisquer valores de Θ ou de T nenhuma compressão pode ser obtida nesse caso, em concordância com [25], onde uma função arbitrária $\Theta(t)$ foi considerada.

Para o calibre de Landau ($\alpha = 1$) obtemos

$$\sigma_+^r = 1 + 4\kappa \sin^2(\phi) [\kappa - 2\Theta \cos^2(\phi)] / \Theta^2, \quad \sigma_-^r = 1 + 2\kappa\Theta \sin^2(2\phi), \quad (2.15)$$

$$\sigma_0^r = \kappa \sin(2\phi) [2 + \kappa - 4\Theta \sin^2(\phi)] / \Theta. \quad (2.16)$$

A equação (2.15) mostra uma possibilidade de compressão em $\sigma_{y_r y_r}(T)$ para $\Theta > 1$ e em $\sigma_{x_r x_r}(T)$ para $0 < \Theta < 1$, novamente de acordo com [25]. Por outro lado, a fórmula (2.10) com $\alpha = 1$ produz $\sigma_{y_c y_c}(T) = 1$ e

$$\sigma_{x_c x_c}(T) = 1 + 4\kappa^2 \sin^2(\phi) [1 + 2\kappa\Theta \cos^2(\phi)] / \Theta^2. \quad (2.17)$$

Pode-se verificar que o lado direito da equação (2.17) excede o valor unitário para qualquer valor diferente de zero do parâmetro κ . Portanto, não há compressão nas variáveis x_c e y_c em $t = T$ para o calibre de Landau. No caso em que $\Theta \rightarrow 0$ obtemos $\sigma_{\pm}^{x_c y_c} = 1 + v^2(1 \pm \alpha)^2(1 + \alpha^2)/2$, onde $v = \Omega T/2$, novamente sem compressão em $t = T$.

No entanto, a compressão pode existir, por exemplo, para $\sigma_{y_c y_c}(T)$, se $\Theta = -1$ e $0 < \alpha < 1$. Nesse caso,

$$\sigma_-^{x_c y_c} = 1 - 8\alpha(1 - \alpha) \sin^2(\phi) [1 + (1 - \alpha)^2 - 2(1 - \alpha) \sin^2(\phi)],$$

o mínimo desta expressão em função de ϕ é obtido para

$$\sin^2(\phi) = [1 + (1 - \alpha)^2] / [4(1 - \alpha)]. \quad (2.18)$$

A função resultante $\sigma_-^{x_c y_c}(\alpha) = 1 - \alpha [(1 - \alpha)^2 + 1]^2$ é igual a zero para $\alpha = 1$. Mas ela é válida apenas para $\alpha \leq \alpha_* = \sqrt{3} - 1$, quando o lado direito de (2.18) não excede uma unidade. Logo,

$$\sigma_{y_c y_c}^{(min)}(T) = \sigma_-(\alpha_*) = 305 - 176\sqrt{3} \approx 0.16 \quad \text{para } \Theta = -1.$$

Além disso, a compressão pode existir no par $x_c y_c$ para conjuntos mais amplos dos parâmetros, ao se considerar uma definição mais geral de compressão, discutida na seção seguinte.

2.3 “Compressão principal” nos pares $x_r y_r$ e $x_c y_c$

Os valores instantâneos das variâncias não podem servir como verdadeiras medidas de compressão em todos os casos, uma vez que dependem do tempo durante a evolução do sistema físico. A melhor medida do grau de compressão, conhecida sob os nomes “compressão principal” [71] ou “compressão invariante” [72],

pode ser obtida ao se analisar a evolução das variâncias do sistema de um modo com um hamiltoniano constante. No nosso caso, o Hamiltoniano retorna à sua forma inicial $\hat{H} = m\Omega^2 (\hat{x}_r^2 + \hat{y}_r^2)/2$ para $t > T$, dessa forma as variâncias $x_r y_r$ realizam oscilações harmônicas:

$$\sigma_{x_r x_r}(t) = \sigma_+ \cos^2(\chi) + \sigma_- \sin^2(\chi) + \sigma_0 \sin(2\chi), \quad \chi = \Omega(t - T).$$

Minimizando essa expressão em função de χ , pode-se obter o valor mínimo da variância $\sigma_{x_r x_r}(t)$ (e o mesmo para $\sigma_{y_r y_r}$) [25, 71]

$$\sigma^{(PS)} = \tau_+ - \sqrt{\tau_-^2 + \sigma_0^2}, \quad \tau_{\pm} = (\sigma_+ \pm \sigma_-)/2, \quad (2.19)$$

chamada de “compressão principal” em [71]. A soma $\tau_+ + \sqrt{\tau_-^2 + \sigma_0^2}$ produz o valor máximo das variâncias oscilantes. O produto $\sigma^{(min)} \sigma^{(max)} = \sigma_+ \sigma_- - \sigma_0^2 \equiv d$ não depende do tempo, sendo o exemplo mais simples dos invariantes quânticos universais [73]. Devido à conhecida relação de incerteza de Robertson–Schrödinger, a desigualdade $d \geq (\hbar/2m\Omega)^2$ deve se manter para as variâncias dimensionais ou $d \geq 1$ para as variâncias adimensionais.

As expressões explícitas para $\tau_{\pm}^{x_r y_r}$ têm a seguinte forma,

$$\tau_+^{x_r y_r} = 1 + \frac{\kappa^2 \sin^2(\phi)}{2\Theta^2} \left\{ [2 + \kappa(1 - \alpha^2)]^2 + 8\alpha^2 \Theta(2 + \kappa) \cos^2(\phi) \right\}, \quad (2.20)$$

$$\tau_-^{x_r y_r} = \frac{\kappa\alpha \sin^2(\phi)}{\Theta^2} \left\{ \kappa [2 + \kappa(1 - \alpha^2)] - 2\Theta [4\Theta + \kappa^2(1 + \alpha^2)] \cos^2(\phi) \right\}. \quad (2.21)$$

As variâncias das variáveis x_c e y_c não dependem do tempo para $t > T$. No entanto, pode-se considerar as variâncias dos observáveis rotacionados [46] $\tilde{x}_c = x_c \cos(\psi) + y_c \sin(\psi)$ e $\tilde{y}_c = y_c \cos(\psi) - x_c \sin(\psi)$ e procurar o mínimo em relação ao ângulo de rotação ψ . Então chega-se novamente ao conceito de compressão principal, descrito pela equação (2.19) com as funções

$$\tau_+^{x_c y_c} = 1 + \frac{\kappa^2 \sin^2(\phi)}{2\Theta^2} \left\{ \kappa^2 (1 + \alpha^2)^2 + 4\Theta [1 + \kappa\alpha^2 \cos(2\phi)] \right\}, \quad (2.22)$$

$$\tau_-^{x_c y_c} = \frac{\kappa^2 \alpha \sin^2(\phi)}{\Theta^2} \left\{ 2\Theta + \kappa(1 + \alpha^2) [2\Theta \cos^2(\phi) - 1] \right\}. \quad (2.23)$$

2.3.1 Pequenas variações dos parâmetros

Se $|\kappa| \ll 1$, então

$$\sigma_{x_r y_r}^{(PS)} = 1 - 2|\kappa\alpha \sin(2\phi)| + \mathcal{O}(\kappa^2), \quad \sigma_{x_c y_c}^{(PS)} = 1 + 2\kappa^2 [\sin^2(\phi) - |\alpha \sin(\phi)|] + \mathcal{O}(\kappa^3). \quad (2.24)$$

Conseqüentemente, pelo menos uma pequena quantidade da *compressão principal* pode ser obtida para qualquer valor diferente de zero do parâmetro α no caso de pequenas variações do campo magnético. Esse resultado vale para o par $x_r y_r$ e para o par $x_c y_c$ rotacionado.

Não há compressão ($\sigma_{x_r y_r}^{(PS)} = \sigma_{x_c y_c}^{(PS)} = 1$) se $\sin(\phi) = 0$. Mas a compressão principal é observada se $0 < |\sin(\phi)| \ll 1$ e $\alpha \neq 0$ devido às relações

$$\sigma_{x_r y_r}^{(PS)} \approx 1 - 2|\sin(\phi)\alpha(\Theta^2 - 1)/\Theta|, \quad \sigma_{x_c y_c}^{(PS)} \approx 1 - 2|\sin(\phi)\alpha(\Theta - 1)^2/\Theta|. \quad (2.25)$$

Devido à presença do fator não analítico $|\sin(\phi)|$, ambas as funções possuem derivadas descontínuas em relação a κ em todos os pontos onde $\sin(\phi) = 0$. Além disso, $\sigma_{x_c y_c}^{(PS)} > \sigma_{x_r y_r}^{(PS)}$ na vizinhança desses pontos

se $\Theta > 0$ (enquanto a desigualdade oposta se mantém para $\Theta < 0$). No entanto, quando $0 < |\sin(\phi)| \ll 1$, os domínios de valores de κ resultando em compressão são bastante pequenos para grandes valores de $|\kappa|$, como é mostrado na figura 2.1. O caso excepcional é $|\alpha| = 1$, que será considerado na seção 2.3.5.

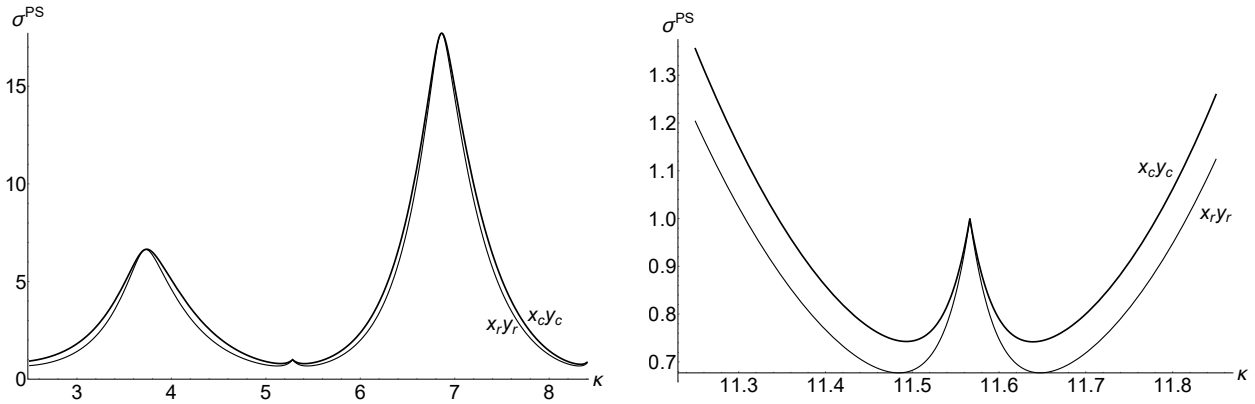


Figura 2.1: As funções $\sigma_{x_r y_r}^{(PS)}(\kappa)$ e $\sigma_{x_c y_c}^{(PS)}(\kappa)$ com $\Omega T/2 = 1$ e $\alpha = 1/2$ nas proximidades dos pontos:

Esquada: $\phi = 2\pi$. **Direita:** $\phi = 4\pi$.

2.3.2 A dependência do tempo de duração T

O tempo de duração T entra nas fórmulas através da fase $\phi = \Omega\Theta T/2$. Gráficos típicos das funções $\sigma_{x_r y_r}^{(PS)}(\phi)$ e $\sigma_{x_c y_c}^{(PS)}(\phi)$ com valores fixos de Θ e α são mostrados nas figuras 2.2 e 2.3 (como as funções são periódicas, consideramos o intervalo $0 \leq \phi \leq \pi$).

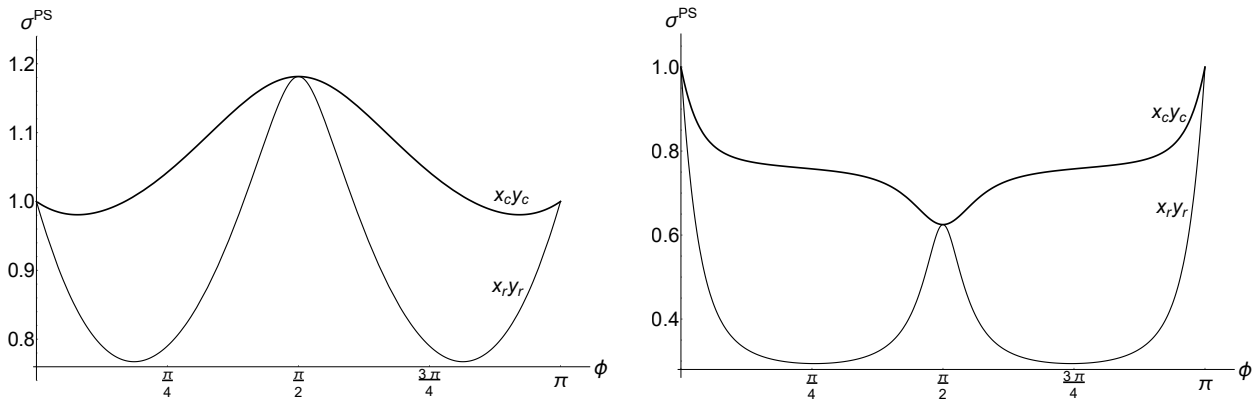


Figura 2.2: As funções $\sigma_{x_r y_r}^{(PS)}(\phi)$ e $\sigma_{x_c y_c}^{(PS)}(\phi)$. **Esquada:** $\alpha = 1/2$, $\kappa = 1/2$. **Direita:** $\alpha = 2$, $\kappa = 1$.

Pode-se ver que o comportamento das funções $\sigma_{x_r y_r}^{(PS)}(\phi)$ e $\sigma_{x_c y_c}^{(PS)}(\phi)$ pode ser bastante diferente, mas elas nunca se cruzam (uma delas está sempre acima da outra, embora a ordem das curvas possa mudar), tendo sempre um ponto comum em $\phi = \pi/2$, onde os extremos locais de cada função são observados. Neste ponto comum, $\sigma_0^{x_r y_r} = \sigma_0^{x_c y_c} = 0$, logo $\sigma^{(PS)} = \tau_+ - |\tau_-|$. Portanto, os valores extremos coincidentes para os pares $x_r y_r$ e $x_c y_c$ são dados pela fórmula

$$\sigma^{(PS)} \Big|_{\phi=\pi/2} = 1 + \frac{\kappa^2}{2\Theta^2} |2 + \kappa(1 - \alpha^2)| (|2 + \kappa(1 - \alpha^2)| - 2|\alpha|). \quad (2.26)$$

O lado direito dos pares de funções (2.26) é igual a uma unidade para $|\alpha| = 1$ e *qualquer* valor de κ . A segunda

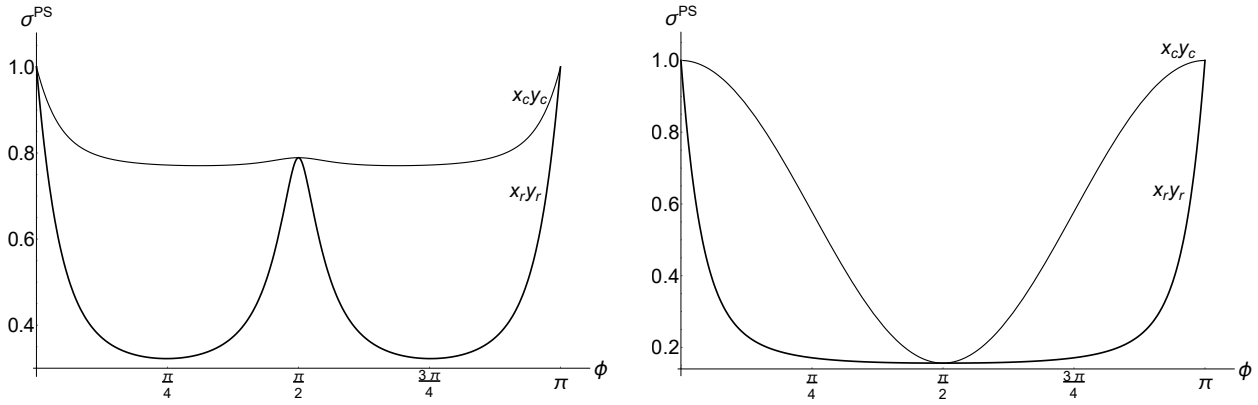


Figura 2.3: As funções $\sigma_{x_r y_r}^{(PS)}(\phi)$ e $\sigma_{x_c y_c}^{(PS)}(\phi)$. **Esquerda:** $\alpha = 1/2$, $\kappa = -3$. **Direita:** $\alpha = 3/4$, $\kappa = -2$.

solução para a equação $\sigma^{(PS)}\big|_{\phi=\pi/2}(|\alpha|) = 1$ coincide com a solução para a equação $|2 + \kappa(1 - \alpha^2)| - 2|\alpha| = 0$. Que é dada pela fórmula $|\alpha|_* = |(\Theta + 1)/(\Theta - 1)|$, que vale para qualquer valor de Θ . Mas para $|\Theta| > 1$, existe uma terceira solução, que segue da equação $2 + \kappa(1 - \alpha^2) = 0$, que leva a $|\alpha|_{**} = \sqrt{(\Theta + 1)/(\Theta - 1)}$. Portanto, o comportamento da função $\sigma^{(PS)}\big|_{\phi=\pi/2}(|\alpha|)$ é diferente para $|\Theta| < 1$ e $|\Theta| > 1$, como é mostrado na figura 2.4. Os picos com derivada descontínua estão localizados exatamente nos pontos $\alpha_{**}(\Theta)$.

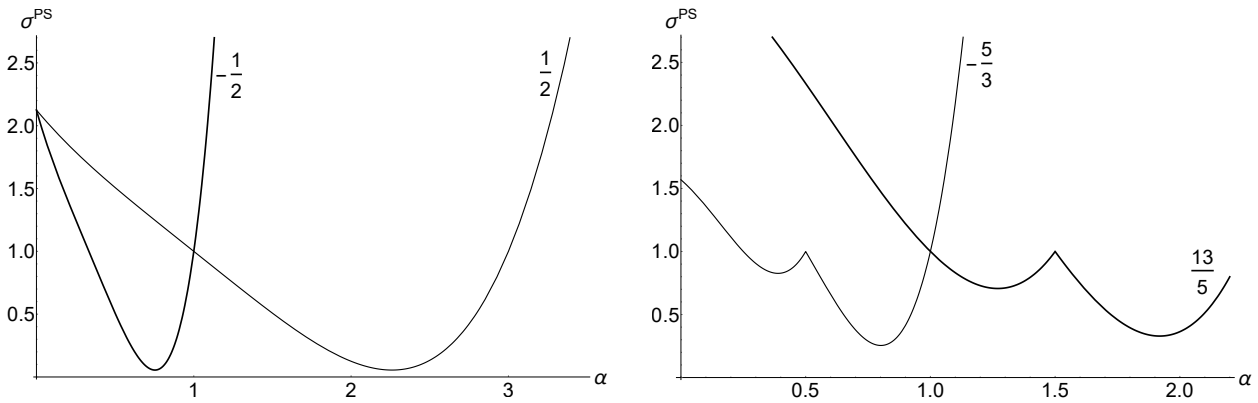


Figura 2.4: A função $\sigma^{(PS)}\big|_{\phi=\pi/2}(\alpha)$ para diferentes valores fixos do parâmetro Θ .

2.3.3 Os domínios da compressão principal permanente

A figura 2.3 e o gráfico da direita da figura 2.2 mostram a existência de uma “compressão permanente” ($\sigma^{PS} < 1$) para todos os valores da fase $\phi \neq n\pi$ (diferentemente do gráfico da esquerda na figura 2.2). A equação (2.26) sugere que tal comportamento pode ser observado para os conjuntos de parâmetros (κ, α) satisfazendo a desigualdade $|2 + \kappa(1 - \alpha^2)| \leq 2|\alpha|$. Os domínios dos correspondentes valores de (Θ, α) são mostrados na figura 2.5, eles são limitados por duas hipérboles:

$$\frac{1 + |\alpha|}{|\alpha| - 1} < \Theta < \frac{|\alpha| - 1}{1 + |\alpha|} \quad \text{se } |\alpha| < 1, \quad \frac{|\alpha| - 1}{|\alpha| + 1} < \Theta < \frac{1 + |\alpha|}{|\alpha| - 1} \quad \text{se } |\alpha| > 1. \quad (2.27)$$

Dentro desses domínios, o ponto $\phi = \pi/2$ corresponde ao *mínimo* de $\sigma^{(PS)}(\phi)$. Isto é claramente visto na fórmula explícita mais simples para o caso de $\Theta = -1$ (uma inversão de direção abrupta do campo magnético

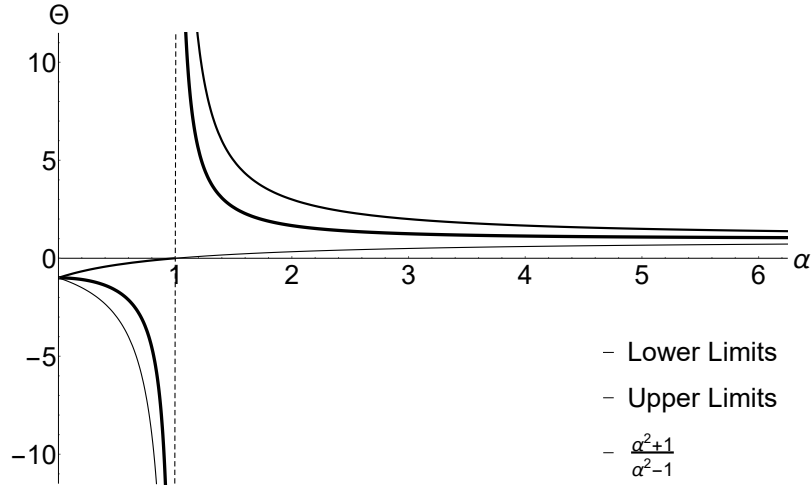


Figura 2.5: O domínio dos valores dos parâmetros $|\alpha|$ e Θ resultando na desigualdade $\sigma^{PS} \leq 1$ para qualquer valor da fase ϕ , tanto para o par $x_r y_r$ quanto para o par $x_c y_c$. A linha em negrito mostra a função $\alpha_{**}(\Theta)$.

em $t = 0$, seguida por um retorno abrupto ao valor inicial e direção em $t = T$):

$$\sigma_{x_r y_r}^{(PS)}(\phi) = 1 + 8|\alpha|^3 \sin^2(\phi)(|\alpha| - 1), \quad (2.28)$$

O mínimo do lado direito desta expressão é igual a $5/32$. Que é encontrado para $|\alpha| = 3/4$ e $\sin^2(\phi) = 1$. O comportamento da função $\sigma_{x_c y_c}^{(PS)}(\phi)$ é diferente, mas seu mínimo coincide com o de $\sigma_{x_r y_r}^{(PS)}(\phi)$, como é mostrado na figura 2.3.

2.3.4 Desligando o campo magnético

Um caso especial interessante ocorre para $\Theta = 0$ (ou $\kappa = -1$), ou seja, o abrupto desligar do campo magnético em $t = 0$ e o retorno abrupto ao valor inicial em $t = T$. Então

$$\sigma^{(PS)} = 1 + v^2(1 + \alpha^2)^2/2 - v|\alpha|\sqrt{4 + v^2(1 + \alpha^2)^2}, \quad (2.29)$$

onde $v = \Omega T/2$. Esta fórmula é a mesma para os pares $x_r y_r$ e $x_c y_c$. O mínimo de (2.29) em relação a v é obtido para

$$v_* = \left[(1 + \alpha^2)\sqrt{|1 - \alpha^2|} \right]^{-1} \times \begin{cases} 2|\alpha| & \text{se } |\alpha| < 1 \\ 2 & \text{se } |\alpha| > 1 \end{cases}.$$

Em ambos os casos, o mínimo em relação a v é $\sigma_*^{(PS)} = |1 - \alpha^2|/(1 + \alpha^2)$. Esta variância mínima pode ser arbitrariamente pequena para $|\alpha| = 1$ (calibre de Landau). Formalmente, isso acontece para $T \rightarrow \infty$. No entanto, a expressão assintótica de (2.29) para $|\alpha| = 1$ e $v \gg 1$ leva a $\sigma^{(PS)} \approx (\Omega T)^{-2}$. Portanto, após alguns períodos em relação à frequência inicial Ω pode-se obter valores muito pequenos de $\sigma^{(PS)}$. Por exemplo, após 10 períodos, obtém-se $\sigma^{(PS)} = (400\pi^2)^{-1} \approx 2.5 \times 10^{-4}$.

2.3.5 As características excepcionais do calibre de Landau

No caso especial de $\alpha = 1$ (a figura 2.5 mostra que este caso é claramente excepcional) temos

$$\tau_+^{x_r y_r} = 1 + \frac{2\kappa^2}{\Theta^2} \sin^2(\phi) [1 + 2\Theta(2 + \kappa) \cos^2(\phi)], \quad \tau_-^{x_r y_r} = \frac{2\kappa}{\Theta^2} \sin^2(\phi) [\kappa - 2\Theta(2\Theta + \kappa^2) \cos^2(\phi)], \quad (2.30)$$

$$\tau_+^{x_c y_c} = 1 + \tau_-^{x_c y_c}, \quad \tau_-^{x_c y_c} = 2\kappa^2 \sin^2(\phi) [1 + 2\kappa\Theta \cos^2(\phi)] / \Theta^2, \quad (2.31)$$

$$\sigma_0^{x_r y_r} = \kappa \sin(2\phi) [2 + \kappa - 4\Theta \sin^2(\phi)] / \Theta, \quad \sigma_0^{x_c y_c} = -\kappa^2 \sin(2\phi) / \Theta. \quad (2.32)$$

Para $\kappa = -1$, obtemos $\sigma^{(PS)} = 1 + 2v^2 - 2v\sqrt{1 + v^2}$, para os dois pares $x_r y_r$ e $x_c y_c$. Esta função diminui monotonamente a zero quando $v \rightarrow \infty$.

Um comportamento interessante das funções $\sigma_{x_r y_r}^{(PS)}(\kappa)$ e $\sigma_{x_c y_c}^{(PS)}(\kappa)$ com um valor fixo de T é observado para $|\kappa| \gg 1$. Ambas as funções assumem o valor unitário cada vez que $\sin(\phi) = 0$ ou $\cos(\phi) = 0$. Mas eles tendem a $1/2$ quando $|\kappa| \rightarrow \infty$ para todos os outros valores de ϕ . Este comportamento peculiar é demonstrado na figura 2.6, que deve ser comparado com os gráficos da figura 2.1, onde $|\alpha| = 1/2$.

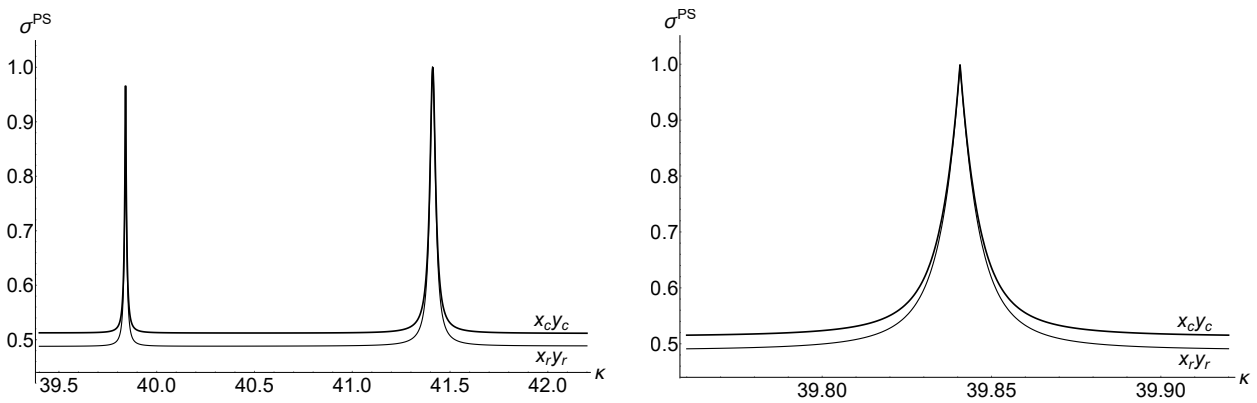


Figura 2.6: Direita: As funções $\sigma_{x_r y_r}^{(PS)}(\kappa)$ e $\sigma_{x_c y_c}^{(PS)}(\kappa)$ com $\Omega T/2 = 1$ e $\alpha = 1$. Esquerda: Zoom do primeiro pico do gráfico da esquerda.

2.4 Discussão

Neste capítulo mostramos uma rica estrutura dos coeficientes de compressão principal dos pares observáveis $x_r y_r$ e $x_c y_c$, dependendo de várias combinações de três parâmetros relevantes: o parâmetro de calibre α , a altura do degrau de variação do campo magnético Θ e a duração dessa variação T (ou a fase ϕ). Verificamos, concordando com [25], que nenhuma compressão pode ser obtida para o calibre circular ($\alpha = 0$), mas para qualquer valor de α , mesmo que pequeno, pode-se encontrar as combinações dos parâmetros Θ e T que resultam em alguma compressão. Em muitos casos (mas não em todos os casos!), o calibre de Landau ($|\alpha| = 1$) produz o grau máximo de compressão (isto é, o valor mínimo do coeficiente de compressão principal $\sigma^{(PS)}$). Entretanto, valores intermediários de α também podem ser preferíveis em alguns casos especiais. Por exemplo, no caso da inversão do campo magnético, o valor $|\alpha| = 3/4$ é o melhor do ponto de vista da compressão, de acordo com a equação (2.28).

Outro resultado interessante é a assimetria em relação ao aumento acentuado ($|\Theta| > 1$) e a redução ($|\Theta| < 1$) do campo magnético, uma situação análoga acontece para o oscilador harmônico de frequência

variável [74]. A compressão máxima pode ser alcançada para $|\Theta| \ll 1$ (o melhor caso é $\Theta = 0$) e $|\alpha| = 1$, considerando que a compressão no caso de $|\Theta| \gg 1$ é moderada (cerca de 50% para $|\alpha| = 1$) ou não existe.

Estudar as variações dos valores médios da energia e do momento magnético produzidas por um salto duplo do campo magnético para qualquer valor de α é uma tarefa possível, mas exaustiva, porque as equações para essas grandezas seriam muito longas e complicadas. Então, parece interessante procurar um tipo de mudança do campo magnético que forneça equações mais simples. Sendo assim, vamos considerar no próximo capítulo um salto único do campo magnético.

Capítulo 3

Evolução dos valores médios da energia e do momento magnético após um salto único do campo magnético

Neste capítulo, apresentaremos os resultados publicados nos artigos [27,28]. Nosso principal objetivo é analisar o comportamento dos valores médios da energia e do momento magnético no cenário em que o campo magnético é dependente do tempo para valores arbitrários do parâmetro α . Em particular, são questões interessantes: é possível “resfriar” a partícula mudando o campo magnético ou a forma do solenóide? Como se comportam as flutuações da energia após essa mudança? Quão forte é a mudança do momento magnético devido à mudança do campo magnético?

A matriz $\Lambda_q(t)$ se torna muito mais simples quando comparada à matriz obtida para o salto duplo do campo magnético (2.8) se considerarmos um salto único do campo magnético na forma

$$B(t)/B_0 = \begin{cases} 1, & t < 0, \\ \Theta, & t \geq 0 \end{cases}, \quad (3.1)$$

ou uma mudança abrupta na forma do solenoide, ou seja, uma rápida variação do parâmetro α na forma

$$\alpha(t) = \begin{cases} \alpha_0, & t < 0, \\ \alpha_f, & t \geq 0 \end{cases}. \quad (3.2)$$

Nesse cenário, as coordenadas canônicas (ou valores médios dos operadores correspondentes no caso quântico) não mudam durante o salto finito instantâneo dos parâmetros (a função de onda não pode mudar instantaneamente na mecânica quântica não relativística; o mesmo resultado pode ser obtido integrando as equações de movimento para as variáveis canônicas durante o tempo infinitesimalmente curto do salto). No entanto, as relações entre as variáveis canônicas e geométricas são diferentes antes e depois do salto. Portanto, olhando para as equações (2.2) e (2.3) verifica-se que os elementos da matriz Λ_q podem ser facilmente encontrados resolvendo as equações

$$\hat{x}_{r0} + \hat{x}_{c0} = \hat{x}_{rf} + \hat{x}_{cf}, \quad \Omega_0 [\hat{x}_{c0}(1 - \alpha_0) - \hat{x}_{r0}(1 + \alpha_0)] = \Omega_f [\hat{x}_{cf}(1 - \alpha_f) - \hat{x}_{rf}(1 + \alpha_f)]$$

e equações semelhantes para o par (y_r, y_c) .

O resultado é a matriz

$$\mathbf{\Lambda}_q = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & \lambda_4 \end{vmatrix} = \frac{1}{2\Theta} \begin{vmatrix} L_- & 0 & K_- & 0 \\ 0 & L_+ & 0 & K_+ \\ K_+ & 0 & L_+ & 0 \\ 0 & K_- & 0 & L_- \end{vmatrix}, \quad (3.3)$$

onde

$$K_{\pm} = \kappa(1 \pm \alpha_f) \pm \Delta\alpha, \quad L_{\pm} = 2 + K_{\pm}, \quad \kappa \equiv \Theta - 1. \quad (3.4)$$

A matriz (3.3) é igual à matriz unitária se $\kappa = \Delta\alpha = 0$, por esse motivo, muitas fórmulas nas seções subsequentes são mais compactas se forem escritas em termos do parâmetro κ , ao invés de Θ .

3.1 Equivalência entre as partes quântica e clássica dos valores médios das grandezas

A energia média quando o campo magnético é estacionário é dada por $\mathcal{E} = m\Omega^2 \langle \hat{x}_r^2 + \hat{y}_r^2 \rangle / 2$, e pode ser escrita como a soma de duas partes independentes:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_q, \quad \mathcal{E}_c = m\Omega^2 \left(\langle x_r \rangle^2 + \langle y_r \rangle^2 \right) / 2, \quad \mathcal{E}_q = m\Omega^2 (\sigma_{x_r x_r} + \sigma_{y_r y_r}) / 2. \quad (3.5)$$

A quantidade \mathcal{E}_c coincide com a energia da partícula clássica movendo-se ao longo da trajetória média $(\langle x_r \rangle, \langle y_r \rangle)$, enquanto a correção quântica \mathcal{E}_q em (3.5) surge devido às flutuações quânticas, descritas por meio das variâncias $\sigma_{x_r x_r}$ e $\sigma_{y_r y_r}$ das coordenadas relativas.

A mudança da parte clássica da energia média pode ser escrita em termos de alguma forma quadrática das médias quânticas das coordenadas, relativas e do centro, iniciais: $\Delta\mathcal{E}_c = (m\Omega_0^2/2) \sum W_{\alpha\beta} \langle \alpha \rangle \langle \beta \rangle_0$, onde os coeficientes $W_{\alpha\beta}$ são certas combinações bilineares dos elementos da matriz $\mathbf{\Lambda}_q$. Portanto, $\Delta\mathcal{E}_c$ depende dos quatro parâmetros iniciais. Em particular, esses parâmetros podem ser quase sempre escolhidos de forma que a parte clássica final da energia seja igual a zero. Por exemplo, é suficiente resolver as equações $\langle x_r \rangle_f = \langle y_r \rangle_f = 0$ em relação aos valores iniciais $\langle x_c \rangle_0$ e $\langle y_c \rangle_0$ com valores fixos de $\langle x_r \rangle_0$ e $\langle y_r \rangle_0$. A resposta em termos dos elementos da matriz $\mathbf{\Lambda}_q$ é a seguinte,

$$\langle x_c \rangle_0 = [(\Lambda_{14}\Lambda_{21} - \Lambda_{24}\Lambda_{11}) \langle x_r \rangle_0 + (\Lambda_{14}\Lambda_{22} - \Lambda_{24}\Lambda_{12}) \langle y_r \rangle_0] / [\Lambda_{13}\Lambda_{24} - \Lambda_{23}\Lambda_{14}], \quad (3.6)$$

$$\langle y_c \rangle_0 = [(\Lambda_{23}\Lambda_{11} - \Lambda_{13}\Lambda_{21}) \langle x_r \rangle_0 + (\Lambda_{23}\Lambda_{12} - \Lambda_{13}\Lambda_{22}) \langle y_r \rangle_0] / [\Lambda_{13}\Lambda_{24} - \Lambda_{23}\Lambda_{14}], \quad (3.7)$$

no entanto, esta é uma situação extremamente peculiar.

Portanto, consideremos um gás rarefeito de partículas carregadas num campo magnético uniforme. Negligenciando a interação entre as partículas (ou seja, assumindo que o campo magnético seja forte o suficiente), podemos escrever a energia total como a soma das energias de cada uma das partícula independentes. Entretanto, as posições dos centros das partículas do gás podem ser bastante arbitrárias, assim como os valores concretos das coordenadas relativas de cada partícula, obedecendo a restrição $\langle x_r \rangle_0^2 + \langle y_r \rangle_0^2 = \rho_0^2 = 2\mathcal{E}_c^{(0)} / (m\Omega_0^2)$. Nesse caso, a quantidade mais interessante é o valor médio da variação $\Delta\mathcal{E}_c$, onde a média é realizada sobre todo o conjunto de partículas cujos valores das médias quânticas iniciais são arbitrários. Designando tal média adicional por meio do traço acima da grandeza (para distinguir

da média quântica primária), parece natural assumir a ausência de correlações iniciais e uma distribuição isotrópica de valores médios diferentes de zero:

$$\overline{\langle \alpha \rangle_0 \langle \beta \rangle_0} = 0 \quad \text{se } \alpha \neq \beta; \quad \overline{\langle x_r \rangle_0^2} = \overline{\langle y_r \rangle_0^2} = \mathcal{E}_c^{(0)} / (m\Omega_0^2) = \rho_0^2 / 2, \quad \overline{\langle x_c \rangle_0^2} = \overline{\langle y_c \rangle_0^2} = \mathcal{R}_0^2 / 2. \quad (3.8)$$

Aqui, \mathcal{R}_0^2 é o quadrado médio da distância entre a posição do centro da órbita clássica e o centro do solenóide, enquanto ρ_0^2 é o quadrado médio do raio da órbita clássica. Sob essas suposições, a variação média da parte clássica da energia pode ser escrita na forma

$$\overline{\Delta \mathcal{E}_c} = m\Omega_0^2 (F_\rho \rho_0^2 + F_R \mathcal{R}_0^2) / 2, \quad (3.9)$$

$$F_\rho = \Theta^2 (\Lambda_{11}^2 + \Lambda_{21}^2 + \Lambda_{12}^2 + \Lambda_{22}^2) / 2 - 1 = \Theta^2 \text{Tr} (\lambda_1 \tilde{\lambda}_1) / 2 - 1, \quad (3.10)$$

$$F_R = \Theta^2 (\Lambda_{13}^2 + \Lambda_{23}^2 + \Lambda_{14}^2 + \Lambda_{24}^2) / 2 = \Theta^2 \text{Tr} (\lambda_2 \tilde{\lambda}_2) / 2, \quad (3.11)$$

onde $\tilde{\lambda}_j$ significa a matriz transposta, consideramos aqui, por simplicidade, que $\Delta\alpha = 0$ (a forma do solenoide não é alterada). O coeficiente F_R é sempre não negativo. Porém, o coeficiente F_ρ pode ser negativo, indicando a possibilidade de resfriar o gás por meio de variações rápidas do campo magnético.

A variação da parte quântica da energia média,

$$\Delta \mathcal{E}_q = (m\Omega_f^2 / 2) (\sigma_{x_r x_r} + \sigma_{y_r y_r})_f - (m\Omega_0^2 / 2) (\sigma_{x_r x_r} + \sigma_{y_r y_r})_0, \quad (3.12)$$

depende da matriz de evolução $\mathbf{\Lambda}_q$ e da matriz de covariância inicial $\boldsymbol{\sigma}_0$. Inicialmente vamos considerar uma situação simples, em que o estado inicial possui alguma simetria de rotação, para isso, consideramos $\rho = 0$ e $\gamma_x = \gamma_y = 1$, ou seja,

$$\boldsymbol{\sigma}(0) = G \left\| \begin{array}{cc} I_2 & 0 \\ 0 & \Upsilon I_2 \end{array} \right\|, \quad (3.13)$$

onde I_2 é a matriz unitária 2×2 . Então,

$$\Delta \mathcal{E}_q = (m\Omega_f^2 G / 2) \text{Tr} (\lambda_1 \tilde{\lambda}_1 + \Upsilon \lambda_2 \tilde{\lambda}_2) - m\Omega_0^2 G. \quad (3.14)$$

Cálculos semelhantes aos anteriores fornecem as seguintes fórmulas para as partes “clássica” e “quântica” da variação do quadrado médio da posição do centro da órbita.

$$\overline{\Delta \mathcal{R}_c^2} \equiv \overline{\langle x_c \rangle_f^2 + \langle y_c \rangle_f^2} - \mathcal{R}_0^2 = \frac{1}{2} \text{Tr} (\lambda_3 \tilde{\lambda}_3 \rho_0^2 + \lambda_4 \tilde{\lambda}_4 \mathcal{R}_0^2) - \mathcal{R}_0^2, \quad (3.15)$$

$$\Delta \mathcal{R}_q^2 \equiv (\sigma_{x_c x_c} + \sigma_{y_c y_c})_f - (\sigma_{x_c x_c} + \sigma_{y_c y_c})_0 = \text{Tr} (G \lambda_3 \tilde{\lambda}_3 + \Upsilon \lambda_4 \tilde{\lambda}_4) - 2\Upsilon. \quad (3.16)$$

Pode-se ver que, sob as condições (3.8) e (3.13), as fórmulas para as partes “clássica” e “quânticas” das quantidades $\Delta \mathcal{E}$ e $\Delta \mathcal{R}^2$ são idênticas, se fizermos as substituições formais $G\Upsilon \rightarrow \mathcal{R}_0^2/2$ e $G \rightarrow \rho_0^2/2$. Portanto, a partir deste ponto, iremos analisar apenas a parte “quântica” das grandezas em estudo.

3.2 Variação da energia após o salto

É interessante, agora, estudar a variação da energia média após a mudança abrupta do campo magnético quando os estados iniciais são os mais gerais. Ou seja, vamos considerar que a matriz de covariância inicial é dada pela equação (1.30).

Dessa forma, usando as equações (1.20), (1.30) e (3.3), podemos escrever matriz $\sigma(0+)$ imediatamente após o salto na forma

$$\sigma(0+) = sG/(2\Theta)^2, \quad (3.17)$$

com os seguintes elementos não nulos da matriz s :

$$s_{11} = L_-^2 - 2\rho L_- K_- + \chi_x K_-^2, \quad s_{22} = L_+^2 - 2\rho L_+ K_+ + \chi_y K_+^2, \quad (3.18)$$

$$s_{33} = K_+^2 - 2\rho L_+ K_+ + \chi_x L_+^2, \quad s_{44} = K_-^2 - 2\rho L_- K_- + \chi_y L_-^2, \quad (3.19)$$

$$s_{13} = s_{31} = L_- K_+ - \rho(K_- K_+ + L_- L_+) + \chi_x K_- L_+, \quad (3.20)$$

$$s_{24} = s_{42} = L_+ K_- - \rho(K_- K_+ + L_- L_+) + \chi_y K_+ L_-. \quad (3.21)$$

3.2.1 Variação relativa da energia média

A energia média não depende do tempo antes e depois do salto repentino do campo magnético, pois ela é invariante quando esse campo é estacionário. Porém, seus valores inicial $\mathcal{E}(0)$ e final $\mathcal{E}(0+)$, são diferentes. A variação $\Delta\mathcal{E} = \mathcal{E}(0+) - \mathcal{E}(0)$ pode assumir valores arbitrários, por esse motivo, parece razoável analisar a relação entre essa variação e a energia inicial, ou seja, iremos estudar o comportamento da *variação relativa da energia* dada por

$$\delta\mathcal{E} = \mathcal{E}(0+)/\mathcal{E}(0) - 1 = \frac{\Theta^2}{2G} \langle x_r^2 + y_r^2 \rangle - 1 = \frac{1}{8} (s_{11} + s_{22}) - 1.$$

A energia sempre aumenta após uma mudança do parâmetro α com um valor fixo do campo magnético ($\kappa = 0$), usando a equação (3.18) temos que, para esse caso,

$$\delta\mathcal{E} = \Delta\alpha^2 (2 + \chi_x + \chi_y - 4\rho), \quad (3.22)$$

logo não é possível “resfriar” a partícula mudando a forma do solenoide. Por outro lado, $\delta\mathcal{E}$ pode ser negativa quando se varia o campo magnético e a forma do solenoide não é alterada ($\Delta\alpha = 0$), nesse caso temos

$$\delta\mathcal{E} = \frac{\kappa^2}{8r} [\Upsilon (\alpha_+^2 + r^2 \alpha_-^2) + 2r (1 + \alpha^2) (1 - 2\rho)] + \kappa(1 - \rho), \quad r \equiv \gamma_y/\gamma_x. \quad (3.23)$$

No limite de alta temperatura, a mudança relativa da energia $\delta\mathcal{E}$ é positiva e muito grande para quase todos os valores de κ , exceto para um minúsculo intervalo negativo de κ próximo de zero, devido às relações $\Upsilon \gg 1$ e $1 - \rho \approx 0$. Isso acontece até para $\kappa = -1$ (ou seja, quando o campo magnético é desligado). Além disso, a mudança relativa de energia é quatro vezes maior para $\kappa = -2$ (a inversão instantânea do campo magnético). Para a armadilha de potencial isotrópica ($r = 1$) temos

$$\delta\mathcal{E} \approx \kappa^2 \Upsilon (1 + \alpha^2) / 4,$$

de tal maneira que o aumento da energia para o calibre de Landau ($\alpha = 1$) é duas vezes maior do que para o calibre circular ($\alpha = 0$). No entanto, o aumento de energia pode ser significativamente suprimido no caso em que as armadilhas de potencial são anisotrópicas. Por exemplo, $\delta\mathcal{E} \approx \kappa^2 \Upsilon / (2r)$ para $\alpha = 1$, e esta quantidade pode diminuir rapidamente com o aumento do parâmetro r . Além disso, ajustando os parâmetros para que $r = |\alpha_+/\alpha_-|$, podemos reduzir $\delta\mathcal{E}$ para o valor mínimo $\delta\mathcal{E}_{min} = \kappa^2 \Upsilon |1 - \alpha^2| / 4$, embora um valor nulo não possa ser formalmente alcançado em condições realistas.

Um comportamento diferente pode ser observado no limite de temperatura extremamente baixa, quando $\Upsilon = 1$ e $\rho = 0$. Então,

$$\delta\mathcal{E} = \frac{1}{2} [(\Theta - 1)^2 \mathcal{A} + \Theta^2 - 1], \quad \mathcal{A} = (\alpha_+ - r\alpha_-)^2 / (4r).$$

Essa quantidade pode ser negativa dentro do intervalo $(\mathcal{A} - 1)/(\mathcal{A} + 1) < \Theta < 1$. O mínimo é alcançado no meio deste intervalo: $\delta\mathcal{E}^{(min)} = -[2(\mathcal{A} + 1)]^{-1}$. O mínimo absoluto $\delta\mathcal{E}_{min}^{(min)} = -1/2$ é alcançado para $\mathcal{A} = 0$, ou seja, $r = \alpha_+/\alpha_-$. Em particular, isso acontece para $\alpha = 0$, $r = 1$ e $\Theta = 0$. Por outro lado, para o calibre de Landau com $\alpha = 1$, a queda máxima de energia na armadilha isotrópica com $r = 1$ é apenas de 25%, isso ocorre para $\Theta = 1/2$.

Se $\alpha = 0$ e $r = 1$, então $\delta\mathcal{E} = (\Theta^2 - 1)/2$. Portanto, não há mudança de energia para $\alpha = 0$, $r = 1$ e $\Theta = -1$. Em outras palavras, a inversão instantânea do campo magnético não altera a energia do estado fundamental inicial para o calibre circular. Entretanto, isso não ocorre para o calibre de Landau com qualquer valor do parâmetro r . Por exemplo, $\delta\mathcal{E} = \kappa\Theta$ para $\alpha = r = 1$. Nesse caso, $\delta\mathcal{E} = 0$ para $\Theta = 0$, enquanto $\delta\mathcal{E} = 2$ para $\Theta = -1$. Gráficos da função (3.23) no caso de baixa temperatura são mostrados na figura 3.1 para $r = 1$.

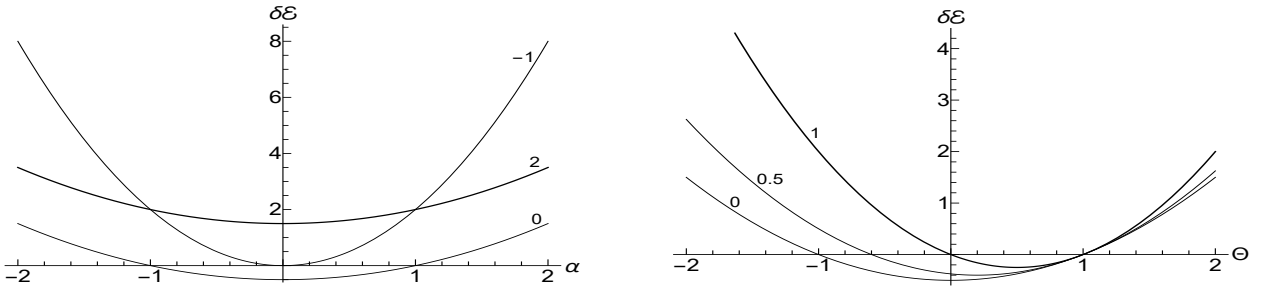


Figura 3.1: A mudança relativa de energia após o salto $\delta\mathcal{E}$ no caso de baixa temperatura com $r = 1$. **Esquerda:** $\delta\mathcal{E}$ em função de α , para diferentes valores do parâmetro de salto Θ (mostrados próximo às respectivas linhas). **Direita:** $\delta\mathcal{E}$ em função de Θ , para diferentes valores do parâmetro de calibre α (mostrados próximo às respectivas linhas).

3.2.2 Flutuações da energia

As flutuações da energia podem ser caracterizadas pela variância $\sigma_E = \langle \hat{H}^2 \rangle - \langle \hat{H} \rangle^2$, onde

$$\langle \hat{H}^2 \rangle = (2m\omega^2)^2 \langle \hat{x}_r^4 + \hat{y}_r^4 + \hat{x}_r^2 \hat{y}_r^2 + \hat{y}_r^2 \hat{x}_r^2 \rangle. \quad (3.24)$$

Os momentos de quarta ordem no lado direito de (3.24) podem ser facilmente calculados para o estado de equilíbrio inicial, porque sua função de Wigner é *Gaussiana*. Além disso, como o hamiltoniano (1.1) é *quadrático* em relação às variáveis canônicas, ele transforma qualquer estado gaussiano em outro estado gaussiano. Portanto, podemos usar as fórmulas bem conhecidas da teoria de probabilidade clássica (com algumas modificações devido à não comutatividade dos operadores das coordenadas e dos momentos) para obter os valores médios das distribuições gaussianas. (veja, por exemplo [75]). A saber, os valores médios

dos produtos *simétricos* (ou produtos de Wigner–Weyl) [76] de quatro operadores, \hat{A} , \hat{B} , \hat{C} e \hat{D} , podem ser expressos como a soma dos produtos dos pares de seus momentos centrais de segunda ordem [75]:

$$\langle ABCD \rangle_W = \overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AC} \cdot \overline{BD} + \overline{AD} \cdot \overline{BC}. \quad (3.25)$$

Aqui A , B , C e D podem ser qualquer uma das variáveis x_r, y_r, x_c, y_c . O símbolo $\langle ABCD \rangle_W$ significa o valor da média quântica da soma de todos os diferentes produtos entre os operadores $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D}$, tomados em todas as ordens possíveis, dividido pelo número de termos na soma. Os momentos centrais de segunda ordem são definidos como $\overline{AB} \equiv \langle \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A} \rangle / 2$. Os valores médios dos produtos concretos dos operadores em ordens predefinidas podem ser expressos em termos dos valores médios simétricos com o auxílio das relações de comutação. As expressões explícitas são fornecidas no apêndice B. O resultado é

$$\sigma_E = (m\omega^2 G)^2 (s_{11}^2 + s_{22}^2) / 2 - (\hbar\omega\Theta)^2. \quad (3.26)$$

É razoável analisar a razão

$$D \equiv \frac{\sigma_E}{\mathcal{E}^2} = \frac{2(s_{11}^2 + s_{22}^2) - [8\Theta \tanh(\hbar\omega\beta)]^2}{(s_{11} + s_{22})^2}. \quad (3.27)$$

Observe que $D \leq 2$ para todos os conjuntos de parâmetros, sempre que $s_{11} > 0$ e $s_{22} > 0$. Uma vez que $\langle \hat{H}^2 \rangle(0) = (2m\omega^2)^2 [8G^2 - \hbar^2/(2m\omega)^2]$, temos $\sigma_E(0) = (4m\omega^2 G)^2 - (\hbar\omega)^2$ e

$$D(0) = 1 - (4m\omega G/\hbar)^{-2} = [\cosh(\hbar\omega\beta)]^{-2} \leq 1.$$

Por isso, $D(0)$ está perto de uma unidade para $\hbar\omega\beta \ll 1$ (temperaturas altas), enquanto $D(0)$ está perto de zero para $\hbar\omega\beta \gg 1$ (baixas temperaturas, quando o estado está próximo do estado fundamental com uma energia bem definida).

Fórmulas simples para as flutuações da energia após o salto podem ser obtidas em dois casos limites. No limite de alta temperatura, podemos negligenciar o termo negativo do numerador de (3.27), bem como todos os coeficientes nas equações (3.18), exceto os que envolvem $\chi_{x,y}$, porque são proporcionais a $\Upsilon \gg 1$ (lembrando também que $1 - \rho \approx 0$ nesse caso). Então, chegamos à fórmula

$$D^{(h)}(0+) \approx \frac{(1 + 2\kappa^2\eta_-)^2 + (1 + 2\kappa^2\eta_+)^2}{2[1 + \kappa^2(\eta_+ + \eta_-)]^2}, \quad \eta_+ = \alpha_+^2 \chi_y / 8, \quad \eta_- = \alpha_-^2 \chi_x / 8.$$

Para valores pequenos o suficiente de κ , ou seja, para $\kappa^2\Upsilon \ll 1$, obtemos $D^{(h)}(0+) \approx 1 + \kappa^4(\eta_+ - \eta_-)^2$. Por outro lado, se o parâmetro de força do salto Θ não está muito próximo de uma unidade, ou seja, para $\kappa^2\Upsilon \gg 1$, temos uma fórmula que não contém este parâmetro:

$$D^{(h)}(0+) = \frac{2(\eta_+^2 + \eta_-^2)}{(\eta_+ + \eta_-)^2} = \frac{2(\alpha_+^4 + r^4\alpha_-^4)}{(\alpha_+^2 + r^2\alpha_-^2)^2}. \quad (3.28)$$

O lado direito de (3.28) atinge o valor mínimo $D = 1$ (típico para estados térmicos de alta energia) quando $|\alpha_+/\alpha_-| = r$, ou seja, para $\alpha = [(r-1)/(r+1)]^{\pm 1}$. Por outro lado, o valor máximo $D = 2$ é alcançado para qualquer r , se $\alpha = \pm 1$. Em particular, $D = 2(1+r^4)/(1+r^2)^2$ para $\alpha = 0$. A figura 3.2 mostra a dependência de $D^{(h)}(0+)$ em relação ao parâmetro α para três valores do parâmetro r . Aqui, vemos claramente o papel distinto do calibre de Landau com $\alpha = \pm 1$.

No limite de temperatura extremamente baixa, assumindo $\Upsilon = 1$, $\rho = 0$ e $\tanh(\hbar\omega\beta) = 1$, obtemos

$$D_{\alpha r}^{(l)} = 2\kappa^2 \frac{32\alpha^2 + \sum_{\sigma=\pm} \alpha_\sigma^2 r_\sigma [8 + 8\kappa\alpha_\sigma + \kappa^2\alpha_\sigma^2 r_\sigma]}{[8\Theta + \kappa^2(\alpha_-^2 r_- + \alpha_+^2 r_+)]^2}. \quad (3.29)$$

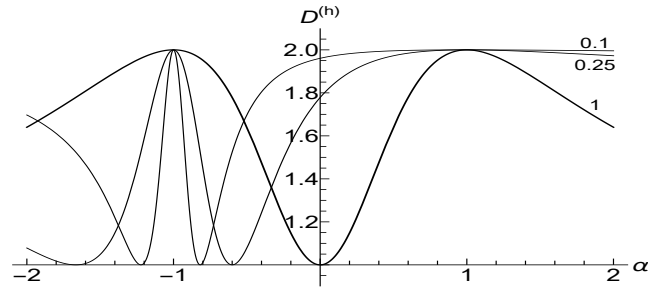


Figura 3.2: A flutuação da energia relativa após o salto no regime de alta temperatura $D^{(h)}(0+)$ em função do parâmetro de calibre α , para $r = 1, 0.25, 0.1$ (esses valores são mostrados próximos às respectivas linhas).

Daqui em diante usaremos a seguinte notação:

$$r_- = 1 + r, \quad r_+ = r_-/r, \quad r_0 = r + 1/r = r_+r_- - 2. \quad (3.30)$$

Observe que todas as fórmulas para $\delta\mathcal{E}$ e D , tais como (3.23), (3.28) e (3.29), são invariantes em relação às mudanças simultâneas dos parâmetros $\alpha \rightarrow -\alpha$ e $r \rightarrow 1/r$. É interessante notar que o lado direito de (3.29) não depende do parâmetro de calibre α quando $\Theta = 0$:

$$D_{\alpha r}^{(l)} \Big|_{\Theta=0} = 2(1+r^2)/(1+r)^2. \quad (3.31)$$

Para $\alpha = 0$ e qualquer valor de r temos

$$D_{0r}^{(l)} = 2\kappa^2(1+r)^2 [8\Theta r + \kappa^2(1+r^2)] [8\Theta r + \kappa^2(1+r)^2]^{-2},$$

enquanto que para $r = 1$ e qualquer valor de α temos

$$D_{\alpha 1}^{(l)} = \kappa^2 [(\Theta + 1)^2 + 2\alpha^2(1 + 3\Theta^2) + \alpha^4\kappa^2] [1 + \Theta^2 + \alpha^2\kappa^2]^{-2}.$$

A fórmula mais simples é obtida para $r = 1$ e $\alpha = 0$:

$$D_{01}^{(l)} = (\Theta^2 - 1)^2/(\Theta^2 + 1)^2. \quad (3.32)$$

Vemos que o estado fundamental permanece inalterado após a inversão do campo para $\alpha = 0$. O valor máximo $D_{01}^{(l)} = 1$ é alcançado quando $\Theta = 0$, enquanto $D_{01}^{(l)} = 0$ se $\Theta = -1$. Para $\alpha = 1$ e um valor arbitrário de r temos

$$D_{1r}^{(l)} = 2\kappa^2 [(2 + \kappa r_+)^2 + 2/r] [2\Theta + \kappa^2 r_+]^{-2}.$$

Em particular, para $r = 1$ obtemos a fórmula

$$D_{11}^{(l)} = \kappa^2(1 + 2\Theta^2)/(1 + \kappa\Theta)^2,$$

que é diferente de (3.32). Agora, $D_{11}^{(l)} = 4/3$ para $\Theta = -1$, embora $D_{11}^{(l)} = 1$ para $\Theta = 0$. Gráficos típicos de $D^{(l)}$ são mostrados nas figuras 3.3 e 3.4. Vemos que as variações de $D^{(l)}$ estão entre 0 e 2 no regime de baixa temperatura. Nenhum valor do parâmetro de calibre α (incluindo $\alpha = 0$ ou $\alpha = \pm 1$) parece ser distinto. Além disso, não vemos diferenças qualitativas entre os casos de $|\alpha| \leq 1$ e $|\alpha| > 1$.

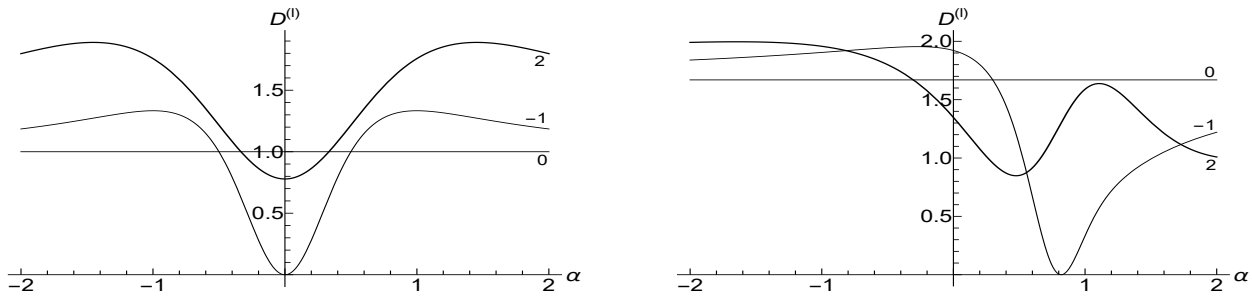


Figura 3.3: A flutuação da energia relativa após o salto no regime de baixa temperatura $D^{(l)}(0+)$ em função do parâmetro de calibre α , para diferentes valores do parâmetro de salto Θ (mostrados próximo às respectivas linhas). **Esquerda:** para $r = 1$. **Direita:** para $r = 0.1$.

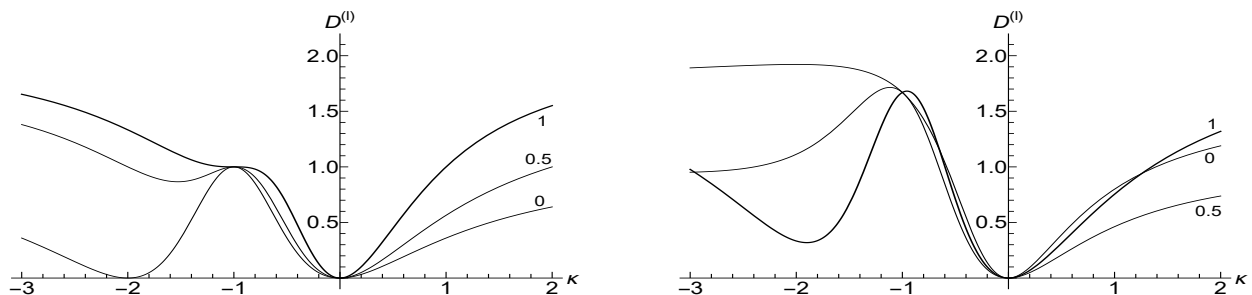


Figura 3.4: A flutuação da energia relativa após o salto no regime de baixa temperatura $D^{(l)}(0+)$ em função do parâmetro $\kappa = \Theta - 1$, para diferentes valores do parâmetro de calibre α (mostrados próximo às respectivas linhas). **Esquerda:** para $r = 1$. **Direita:** para $r = 0.1$.

3.3 Definição do operador momento magnético

Para calcular as propriedades magnéticas dependentes do tempo, precisamos do operador momento magnético. Usando a definição padrão do momento magnético clássico [77, 78],

$$\mathbf{M} = \frac{1}{2c} \int dV [\mathbf{r} \times \mathbf{j}], \quad (3.33)$$

junto com a expressão padrão para a densidade de corrente de probabilidade quântica,

$$\mathbf{j} = \frac{i e \hbar}{2m} (\psi \nabla \psi^* - \psi^* \nabla \psi) - \frac{e^2}{mc} \mathbf{A} \psi^* \psi,$$

pode-se escrever o lado direito de (3.33) como o valor médio do operador

$$\hat{\mathcal{M}} = \frac{e}{2mc} (\hat{x} \hat{\pi}_y - \hat{y} \hat{\pi}_x) \equiv \frac{e}{2mc} \hat{L}_{kin} = -(e\omega/c)(\hat{x}_r^2 + \hat{y}_r^2 + \hat{x}_c \hat{x}_r + \hat{y}_c \hat{y}_r). \quad (3.34)$$

Esta definição vale para qualquer valor do parâmetro α , de modo que é invariante em relação ao calibre. Uma fórmula equivalente a (3.34) foi justificada (para $\alpha = 0$) em [79, 80] usando a abordagem termodinâmica. Outra prova da definição (3.34) para um calibre arbitrário foi dado em [81] (ver também, por exemplo, [49, 50, 82, 83]). Observe que o valor da integral em (3.33) não depende da escolha da origem do sistema de coordenadas (invariante em relação ao deslocamento do vetor \mathbf{r} por qualquer vetor constante \mathbf{a}) se $\int \mathbf{j} dV = 0$, ou seja, para correntes fechadas. Veremos que isso acontece no estado quântico de equilíbrio.

Pode-se encontrar pelo menos duas outras definições para o operador momento magnético na literatura disponível. Johnson e Lippmann [30] definiram $\hat{\mathcal{M}} = -\partial\hat{H}/\partial B$, provavelmente, por uma analogia com a relação termodinâmica $\langle\mathcal{M}\rangle = -\partial\langle\mathcal{E}\rangle/\partial B$ (embora isso não tenha sido escrito em [30] explicitamente). No entanto, para o calibre linear geral, tal definição resulta na fórmula

$$\hat{\mathcal{M}}_1 = \frac{e}{2mc} [\hat{x}\hat{\pi}_y - \hat{y}\hat{\pi}_x - \alpha(\hat{x}\hat{\pi}_y + \hat{y}\hat{\pi}_x)], \quad (3.35)$$

que contém o parâmetro de calibre α explicitamente. Esta perda de invariância em relação ao calibre não foi notada por Johnson e Lippmann, porque eles consideraram apenas o calibre circular ($\alpha = 0$), caso em que as fórmulas (3.35) e (3.34) coincidem (note que este calibre especial foi usado na grande maioria dos trabalhos dedicados ao movimento de partículas quânticas num campo magnético). Além disso, usando $\hat{\mathcal{M}}$ numa forma equivalente a (3.34), Johnson e Lippmann escreveram que, uma vez que os valores esperados de \hat{x}_r e \hat{y}_r são iguais a zero em uma representação de energia, o valor esperado de $\hat{\mathcal{M}}$ é reduzido ao valor esperado do operador de energia (1.10), ou seja, $\langle\hat{\mathcal{M}}\rangle = -(e\omega/c)\langle\hat{x}_r^2 + \hat{y}_r^2\rangle$. O mesmo resultado segue da definição

$$\hat{\mathcal{M}}_2 = (\hat{x}_r\hat{\pi}_y - \hat{y}_r\hat{\pi}_x) e/(2mc) = -\hat{H}e/(mc\Omega), \quad (3.36)$$

sugerida em [84].

Mas olhando para o operador

$$\hat{\mathcal{M}} - \hat{\mathcal{M}}_1 = [e\alpha/(2mc)] (\hat{y}_r^2 - \hat{x}_r^2 + \hat{y}_c\hat{y}_r - \hat{x}_c\hat{x}_r),$$

pode-se ver que seu *valor médio* durante o período $2\pi/\Omega$ é igual a zero, se $\Omega = \text{const}$ (pois \hat{x}_c e \hat{y}_c não dependem do tempo, enquanto $\hat{x}_r(t)$ e $\hat{y}_r(t)$ oscilam com frequência Ω na representação de Heisenberg; além disso, a diferença $\hat{y}_r^2 - \hat{x}_r^2$ oscila com frequência 2Ω). Usando o símbolo $\langle\langle\cdots\rangle\rangle$ para a *média dupla* (sobre o estado quântico e sobre o período de rotação no campo magnético constante), temos $\langle\langle\hat{\mathcal{M}}_1\rangle\rangle = \langle\langle\hat{\mathcal{M}}\rangle\rangle$. E ainda, tendo em vista as equações (1.14) e (1.15), temos $\langle\langle\hat{L}_{kin}\rangle\rangle = \langle\langle\hat{J}\rangle\rangle$. Portanto, $\langle\langle\hat{\mathcal{M}}\rangle\rangle = -\hat{H}e/(mc\Omega)$, para qualquer definição do operador momento magnético. Na verdade, alguns autores usaram essa fórmula como definição do momento magnético de uma partícula carregada em movimento num campo magnético [84]. Essa relação explica por que diferentes escolhas de calibre do potencial vetor não influenciam os resultados finais para a magnetização de um gás de elétrons livres *num campo magnético independente do tempo*. Mas a situação é diferente para *campos magnéticos dependentes do tempo*.

Para ver qual das três definições (3.34), (3.35) ou (3.36), é a mais adequada no caso geral, vejamos suas consequências no estado de equilíbrio. Colocando os elementos da matriz de covariância no equilíbrio inicial (1.30) na fórmula (3.34), obtemos a seguinte expressão para o momento magnético inicial:

$$\mathcal{M}_i = \mu_B \mathcal{C}(\rho - 1) = \mu_B [(\hbar\omega\beta)^{-1} - \coth(\hbar\omega\beta)], \quad (3.37)$$

onde $\mu_B = e\hbar/(2mc)$ é o magneton Bohr. Esta é a fórmula exata de Landau–Darwin para o diamagnetismo de uma partícula livre [2, 4]. Observe que o lado direito de (3.37) não depende da escolha da origem do sistema de coordenadas.

Nós vemos de (3.37), que a contribuição das *correlações estatísticas* $\langle\hat{x}_c\hat{x}_r + \hat{y}_c\hat{y}_r\rangle$ entre as coordenadas relativas e do centro da órbita no estado de equilíbrio termodinâmico, descritas pelo termo proporcional ao parâmetro ρ , é crucial no limite de altas temperaturas. Sem este termo (por exemplo, usando definição

(3.36) para o operador momento magnético ou os argumento de [30]), obter-se-ia uma tremenda magnetização de equilíbrio da ordem de $\mu_B/(\hbar\omega\beta)$ no limite de alta temperatura $\hbar\omega\beta \rightarrow 0$, ao invés da fórmula correta de Landau [4]

$$\mathcal{M}_i^{(h)} = -\mu_B\hbar\omega\beta/3. \quad (3.38)$$

Isso significa que a definição (3.36) pode ser aceita apenas para estados quânticos iniciais *puros* (estados de equilíbrio em temperatura absoluta zero).

É interessante que o valor médio do termo proporcional a α na definição (3.35) é igual a zero para a matriz de equilíbrio (1.30) com qualquer valor da temperatura inversa β . No entanto, acreditamos que a definição correta para o operador momento magnético é dada pela equação (3.34). Na verdade, a média termodinâmica do momento magnético em temperaturas arbitrárias é dado pela fórmula $\langle \mathcal{M} \rangle = -\partial F/\partial B$, onde F é a *energia livre*, que não coincide com o valor médio do hamiltoniano (exceto no caso de temperatura zero). Portanto, não há justificativas para escrever o operador de momento magnético como a derivada do Hamiltoniano em relação ao campo magnético no caso genérico de estados quânticos mistos. Por essas razões, daqui em diante, calcularemos o valor médio $\mathcal{M} \equiv \langle \hat{\mathcal{M}} \rangle$ e a variância $\sigma_M \equiv \langle \hat{\mathcal{M}}^2 \rangle - \langle \hat{\mathcal{M}} \rangle^2$ do operador $\hat{\mathcal{M}}$ definido de acordo com a equação (3.34).

3.4 Variação do momento magnético médio

3.4.1 Imediatamente após o salto

Usando as equações (3.34) e (3.17), obtemos o seguinte valor médio do momento magnético após o salto:

$$\mathcal{M}(0+) = -\mu_B \mathcal{C}(s_{11} + s_{22} + s_{13} + s_{24})/(8\Theta).$$

Parece útil estudar a razão $\mathcal{R} \equiv \mathcal{M}/\mathcal{M}_i$. Imediatamente após o salto, ela tem uma forma bastante simples

$$\mathcal{R}(0+) = 1 + \kappa(1/2 - \rho + \Upsilon a_r)/(1 - \rho), \quad (3.39)$$

onde $a_r = (\alpha_- r + \alpha_+ / r)/4$. Se $r = 1$, então $a_r = 1/2$ para qualquer valor de α . Consequentemente, o momento magnético após o salto não depende da escolha do calibre para uma armadilha inicial isotrópica. Em particular, obtemos um resultado interessante $\mathcal{M}^{(l)}(0+) = -\mu_B\Theta$ no caso de baixa temperatura ($\rho = 0$, $\Upsilon = 1$). No entanto, se $r \neq 1$, a fórmula (3.39) forcene um momento magnético diferente de zero para $\Theta = 0$, ou seja, quando o campo magnético é desligado. Além disso, o sinal deste valor diferente de zero pode ser oposto ao sinal de \mathcal{M}_i .

É interessante comparar dois parâmetros de calibre distintos: $\alpha = 0$ e $\alpha = 1$. No caso de baixa temperatura, temos as seguintes expressões para $\mathcal{R}^{(l)}(0+)$:

$\alpha = 0$	$\alpha = 1$	
$1 + \kappa(r+1)^2/(4r)$	$1 + \kappa(r+1)/(2r)$	para qualquer Θ
$-(r-1)^2/(4r)$	$(r-1)/(2r)$	$\Theta = 0$
$-(r^2+1)/(2r)$	$-1/r$	$\Theta = -1$

No caso de alta temperatura, vemos um tremendo aumento do momento magnético após o salto (a menos que o parâmetro κ seja muito pequeno), uma vez que $\Upsilon \gg 1$ e $1 - \rho \ll 1$:

$$\mathcal{R}^{(h)}(0+) = 3a_r \kappa \Upsilon / (\hbar \beta \omega)^2, \quad \hbar \beta \omega \ll 1, \quad |\kappa| \Upsilon \gg 1.$$

O sinal do momento magnético em $t = 0+$ é oposto ao inicial se $\Theta < 1$, incluindo o valor diferente de zero em $\Theta = 0$.

3.4.2 A evolução posterior: oscilações

Mas o que acontece depois? Para $t > 0$ temos que no hamiltoniano (1.10) e nas relações de comutação (1.8), a frequência inicial Ω deve ser substituída por $\Theta \Omega$. Então, temos as simples equações de movimento

$$\dot{x}_r = \Theta \Omega y_r, \quad \dot{y}_r = -\Theta \Omega x_r, \quad \dot{x}_c = \dot{y}_c = 0,$$

resultando na matriz de evolução

$$\Lambda(t) = \left\| \begin{array}{cc} u(t) & 0 \\ 0 & I_2 \end{array} \right\|, \quad u(t) = \left\| \begin{array}{cc} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{array} \right\|, \quad \varphi = \Theta \Omega t.$$

Então,

$$\sigma(t) = \Lambda(t) \sigma(0+) \tilde{\Lambda}(t) = \frac{G}{(2\Theta)^2} \left\| \begin{array}{cc} s_1(t) & s_2(t) \\ \tilde{s}_2(t) & s_4 \end{array} \right\|, \quad (3.40)$$

com os seguintes blocos 2×2 :

$$s_1 = \left\| \begin{array}{cc} s_{11} \cos^2 \varphi + s_{22} \sin^2 \varphi & \sin \varphi \cos \varphi (s_{22} - s_{11}) \\ \sin \varphi \cos \varphi (s_{22} - s_{11}) & s_{22} \cos^2 \varphi + s_{11} \sin^2 \varphi \end{array} \right\|,$$

$$s_2 = \left\| \begin{array}{cc} s_{13} \cos \varphi & s_{24} \sin \varphi \\ -s_{13} \sin \varphi & s_{24} \cos \varphi \end{array} \right\|, \quad s_4 = \left\| \begin{array}{cc} s_{33} & 0 \\ 0 & s_{44} \end{array} \right\|.$$

Portanto, a soma $\langle x_r^2 + y_r^2 \rangle$ não depende do tempo (assim como a energia), enquanto que

$$\langle x_c x_r + y_c y_r \rangle(t) = \cos(\varphi) \langle x_c x_r + y_c y_r \rangle(0+).$$

Consequentemente, o momento magnético oscila após o salto de acordo com a fórmula

$$\mathcal{M}(t) = -\mu_B \mathcal{C} [s_{11} + s_{22} + (s_{13} + s_{24}) \cos(\varphi)] / (8\Theta), \quad (3.41)$$

que é equivalente a

$$\mathcal{R}(t) = \mathcal{R}(0+) - \mathcal{V} \sin^2(\Theta \omega t), \quad \mathcal{V} = \frac{4\kappa(1+2a_r \Upsilon) + \kappa^2 \alpha_+ \alpha_- (2-4\rho + \Upsilon r_0) - 8\rho \Theta}{4\Theta(1-\rho)}. \quad (3.42)$$

Embora o termo oscilante em (3.42) é igual a zero se $\Theta = 0$, ele pode ser muito grande para pequenos valores de Θ diferentes de zero (exceto para certos valores especiais dos outros parâmetros). Por exemplo, no caso de baixa temperatura ($\rho = 0$, $\Upsilon = 1$) temos

$$\mathcal{V}_{ar}^{(l)} = \kappa [4 + 8a_r + \kappa(1 - \alpha^2)(2 + r_0)] / (4\Theta). \quad (3.43)$$

Se $\alpha = 0$, então

$$\mathcal{M}_{0r}^{(l)}(t) = -\mu_B [4\Theta^2 + \kappa\Theta(r_0 - 2) - (\Theta^2 - 1)(r_0 + 2) \sin^2(\varphi/2)] / (4\Theta).$$

Se $\alpha = 0$ e $r = 1$, então $\mathcal{V}_{01}^{(l)} = (\Theta^2 - 1)/\Theta$, logo

$$\mathcal{M}_{01}^{(l)}(t) = -\mu_B [\Theta^2 + 1 + (\Theta^2 - 1) \cos(\varphi)] / (2\Theta). \quad (3.44)$$

Esta função não muda de sinal durante todo o período de oscilações. Mas se $\alpha = 0$ e $|\kappa|r_0 \gg 1$, então

$$\mathcal{M}_{0r}^{(l)}(t) \approx -\mu_B r_0 \kappa [\Theta - (\Theta + 1) \sin^2(\varphi/2)] / (4\Theta). \quad (3.45)$$

Esta função muda seu sinal se $\Theta > 0$, enquanto mantém o sinal para $\Theta < 0$.

Se $\alpha = 1$, então $\mathcal{M}_{1r}^{(l)}(t) = -\mu_B \{2\Theta + \kappa r_+ [\kappa + \cos(\varphi)]\} / (2\Theta)$. Esta função mantém seu sinal se $r = 1$, mas muda o sinal se $|\kappa| < 1$ e $|\kappa|r_+ \gg 1$.

No caso de alta temperatura ($\kappa\Upsilon \gg 1$) temos

$$\mathcal{M}_{\alpha r}^{(h)}(t) = -\mu_B \Upsilon \kappa [\kappa (8a_r - \alpha_+ \alpha_- r_0) + (8a_r + \kappa \alpha_+ \alpha_- r_0) \cos(\varphi)] / (8\Theta \hbar \omega \beta).$$

Se $|\alpha| = 1$, então a função $\mathcal{M}_{1r}^{(h)}(t)$ muda seu sinal durante a evolução para qualquer valor de r , desde que $|\kappa| < 1$. Para $\alpha = 0$ temos

$$\mathcal{M}_{0r}^{(h)}(t) = -\frac{\mu_B \Upsilon \kappa r_0}{4\Theta \hbar \omega \beta} [\Theta - (\Theta + 1) \sin^2(\varphi/2)]. \quad (3.46)$$

Esta fórmula é muito semelhante a (3.45), com a mesma conclusão sobre a mudança de sinal, mas para qualquer r_0 agora.

3.5 Flutuações do momento magnético

As flutuações do momento magnético podem ser caracterizadas pela variância $\sigma_M \equiv \langle \hat{\mathcal{M}}^2 \rangle - \langle \hat{\mathcal{M}} \rangle^2$.

Usando as equações (1.10), (1.14) e (3.34), podemos escrever

$$\hat{\mathcal{M}}^2 = [e/(mc\Omega)]^2 \hat{H}^2 + \hat{\mathcal{F}}, \quad (3.47)$$

onde

$$\hat{\mathcal{F}} = (e\omega/c)^2 \left[\hat{x}_c^2 \hat{x}_r^2 + \hat{y}_c^2 \hat{y}_r^2 + \hat{x}_c \hat{y}_c \hat{x}_r \hat{y}_r + \hat{y}_c \hat{x}_c \hat{y}_r \hat{x}_r + \hat{x}_c (\hat{y}_r^2 \hat{x}_r + \hat{x}_r \hat{y}_r^2) + \hat{y}_c (\hat{x}_r^2 \hat{y}_r + \hat{y}_r \hat{x}_r^2) + 2 (\hat{x}_r^3 \hat{x}_c + \hat{y}_r^3 \hat{y}_c) \right].$$

O valor médio de \hat{H}^2 foi calculado na seção 3.2.2. Os valores médios dos outros produtos de quarta ordem dos operadores podem ser calculados de acordo com a regra (3.25) usando as fórmulas explícitas fornecidas no apêndice B.

3.5.1 Flutuações do momento magnético no estado inicial

No estado inicial, obtemos

$$\langle \hat{\mathcal{F}} \rangle(0) = \mu_B^2 \{ \mathcal{C}^2 [r_0 \Upsilon + 2\rho(3\rho - 8)] + 2 \} / 4, \quad [e/(mc\Omega)]^2 \langle \hat{H}^2 \rangle(0) = \mu_B^2 (2\mathcal{C}^2 - 1),$$

$$\langle \hat{\mathcal{M}} \rangle^2(0) = \mu_B^2 \mathcal{C}^2 (1 - \rho)^2.$$

Portanto, a variância do momento magnético no estado de equilíbrio inicial (1.30) é igual a

$$\sigma_M(0) = \mu_B^2 \left\{ \mathcal{C}^2 \left[r_0 \Upsilon + 2(2 - \rho)^2 - 4 \right] - 2 \right\} / 4, \quad (3.48)$$

que não depende do parâmetro de calibre α . Em particular, no caso de baixa temperatura ($\mathcal{C} = \Upsilon = 1$ e $\rho = 0$) temos $\sigma_M^{(l)}(0) = \mu_B^2 (r_0 + 2) / 4$. Vemos que as flutuações do momento magnético da partícula quase-livre dependem da forma da armadilha onde a partícula foi confinada inicialmente. O valor mínimo $\sigma_M^{(l)}(0) = \mu_B^2 = [\mathcal{M}(0)]^2$ é alcançado na armadilha isotrópica com $r = 1$, embora possa ser muito maior se a armadilha for anisotrópica.

Além disso, as flutuações do momento magnético não dependem da constante de Planck no caso de alta temperatura $\hbar\omega\beta \ll 1$. Elas são extremamente grandes neste caso:

$$\sigma_M^{(h)}(0) \approx \mu_B^2 \mathcal{C}^2 \Upsilon r_0 / 4 = e^2 r_0 / [(4mc\beta)^2 \omega\nu] = (9/4) r_0 (\beta\hbar\omega)^{-4} (\omega/\nu) \left[\mathcal{M}_i^{(h)} \right]^2. \quad (3.49)$$

3.5.2 Flutuações após o salto: armadilha isotrópica

Usando a matriz de covariâncias (3.40), obtemos para $t > 0$:

$$\frac{\sigma_M}{\mu_B^2} = \frac{\mathcal{C}^2}{(8\Theta)^2} \left[S_2 \cos^2(\varphi) + 4S_1 \cos(\varphi) + S_0 \right] - \frac{1}{2}, \quad (3.50)$$

$$S_2 = (s_{11} - s_{22})(s_{33} - s_{44}) + (s_{13} + s_{24})^2, \quad S_1 = s_{11}s_{13} + s_{22}s_{24},$$

$$S_0 = 2(s_{11}^2 + s_{22}^2 - s_{13}s_{24}) + s_{11}s_{44} + s_{22}s_{33}.$$

Como as expressões explícitas em termos dos parâmetros iniciais são bastante longas, nos limitamos aos casos limites de temperaturas iniciais baixas e altas.

Vamos começar com o caso da armadilha simétrica ($r = 1$). No regime de baixa temperatura, temos

$$S_2^{(l)} = 16\kappa^2 (Z_1^2 - 4\Theta^2\alpha^2), \quad S_1^{(l)} = 8\kappa Z_1 Z_2, \quad S_0^{(l)} = 24Z_2^2 + 8\kappa^2 (12\Theta^2\alpha^2 - Z_1^2),$$

$$Z_1 = \Theta + 1 - \kappa\alpha^2, \quad Z_2 = \Theta^2 + 1 + \kappa^2\alpha^2.$$

Em particular, para o calibre circular $\alpha = 0$ temos

$$\sigma_M^{(l)}(t) = \mu_B^2 \left[\Theta^2 + 1 + (\Theta^2 - 1) \cos(\varphi) \right]^2 / (2\Theta)^2, \quad (3.51)$$

de modo que as oscilações desaparecem quando $\Theta = -1$ (a inversão do campo): $\sigma_M = \mu_B^2$. Por outro lado, oscilações das flutuações do momento magnético sempre existem para o calibre de Landau $\alpha = 1$, já que neste caso nós temos

$$S_2^{(l)} = -64\kappa^3 (1 + \Theta), \quad S_1^{(l)} = 32\kappa (\kappa^2 + \Theta), \quad S_0^{(l)} = 96(\Theta + \kappa^2)^2 + 32\kappa^2(3\Theta^2 - 1).$$

A figura 3.5 mostra a razão $\Gamma(\varphi) \equiv [\mathcal{M}(\varphi)]^2 / \sigma_M(\varphi)$ para $\alpha = 1$ e diferentes valores do parâmetro Θ na baixa temperatura.

No regime de altas temperaturas, obtemos

$$S_2^{(h)} = 4\Upsilon^2 \kappa^2 [Z_1^2 - 4\alpha^2(\Theta^2 - 1)], \quad S_1^{(h)} = 2\Upsilon^2 \kappa^3 [\Theta + 1 + 6\alpha^2 - \kappa\alpha^4],$$

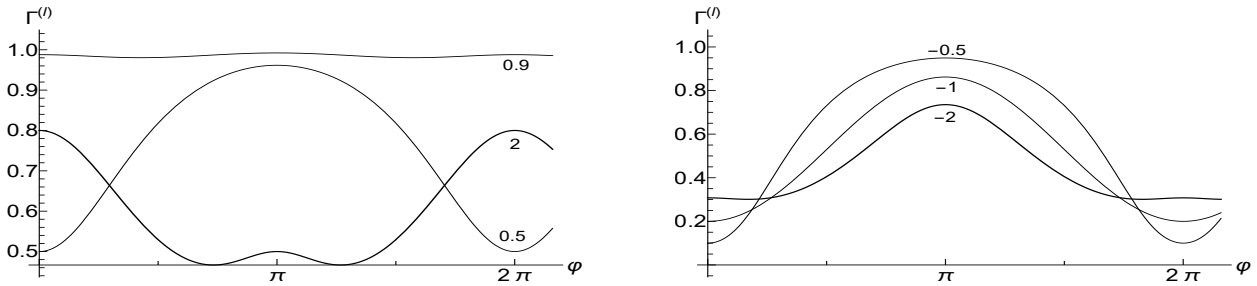


Figura 3.5: A razão $\Gamma(\varphi) \equiv [\mathcal{M}(\varphi)]^2/\sigma_M(\varphi)$ para $\alpha = r = 1$ e diferentes valores do parâmetro Θ (mostrado próximo às respectivas linhas) no caso de baixa temperatura. **Esquoda:** $\Theta > 0$. **Direita:** $\Theta < 0$.

$$S_0^{(h)} = 4\Upsilon^2\kappa^2 [\kappa^2 (1 + \alpha^4) + 2\alpha^2 (5\kappa^2 + 4\kappa + 2)].$$

Para o calibre circular $\alpha = 0$ temos

$$\sigma_M^{(h)}(t) = (\mu_B\kappa\Upsilon)^2 [(\Theta+1)\cos(\varphi) + \Theta-1]^2 / (4\Theta)^2, \quad (3.52)$$

as oscilações desaparecem novamente para $\Theta = -1$, enquanto que elas permanecem para o calibre Landau $\alpha = 1$:

$$S_2^{(h)} = 16\Upsilon^2\kappa^2 (2 - \Theta^2), \quad S_1^{(h)} = 16\Upsilon^2\kappa^3, \quad S_0^{(h)} = 16\Upsilon^2\kappa^2 (2\kappa^2 + \Theta^2).$$

A figura 3.6 mostra a razão $\Gamma(\varphi) \equiv [\mathcal{M}(\varphi)]^2/\sigma_M(\varphi)$ para diferentes valores dos parâmetros α e Θ no regime de altas temperaturas.

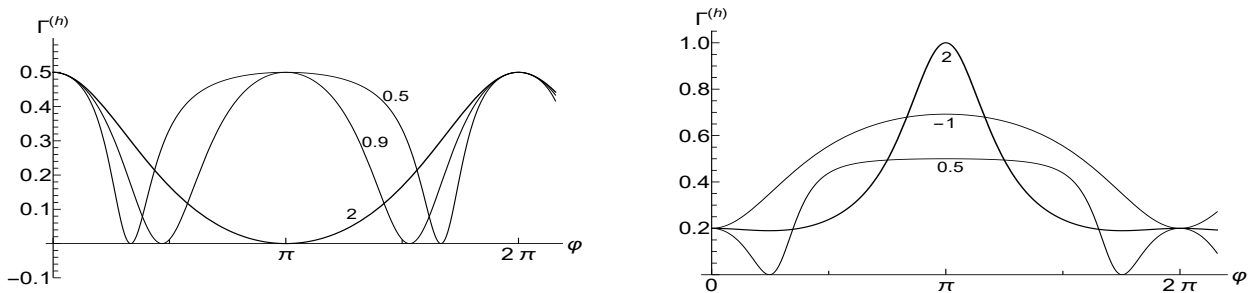


Figura 3.6: A razão $\Gamma(\varphi) \equiv [\mathcal{M}(\varphi)]^2/\sigma_M(\varphi)$ para diferentes valores dos parâmetros α e Θ (mostrado próximo às respectivas linhas) no regime de altas temperaturas com $r = 1$. **Esquoda:** $\alpha = 1$. **Direita:** $\alpha = 2$.

As figuras 3.5 e 3.6 mostram que as flutuações do momento magnético são sempre muito altas e maiores que o quadrado do valor médio do momento magnético.

3.5.3 Armadilha anisotrópica

Aqui, ilustramos o papel da anisotropia da armadilha de potencial inicial no caso especial do calibre circular $\alpha = 0$. Se $r = 1$, então $\Gamma(\varphi) \equiv 1$, em ambos os regimes de baixa e alta temperatura, como se pode ver comparando as equações (3.44) e (3.46) com (3.51) e (3.52). Mas a dependência em relação a φ existe para $r \neq 1$ e $\Theta \neq -1$ no caso de baixa temperatura, como se pode ver na figura 3.7. Neste caso temos

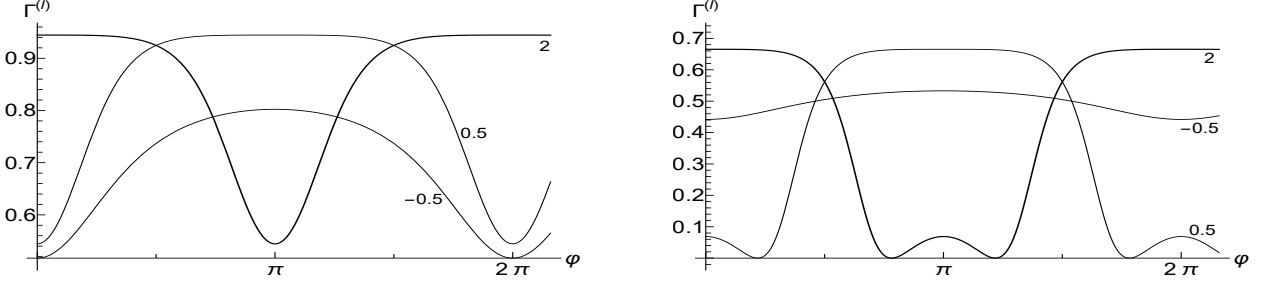


Figura 3.7: A razão $\Gamma(\varphi) \equiv [\mathcal{M}(\varphi)]^2/\sigma_M(\varphi)$ na armadilha anisotrópica, para diferentes valores do parâmetro Θ (mostrado próximo às respectivas linhas) no regime de baixa temperatura com $\alpha = 0$. **Esquerda:** $r = 2$. **Direita:** $r = 10$.

$$S_2^{(l)} = 2\kappa^2 r_+^2 (\Theta + 1)^2 (1 + r^2), \quad S_1^{(l)} = 4\kappa r_+^2 (\Theta + 1) [\kappa^2 (1 + r^2) + 4r\Theta],$$

$$S_0^{(l)} = 2\kappa^4 (r^2 + 1/r^2) + 4r_0 (\Theta^2 + 1)^2 + 4(\Theta + 1)^4.$$

Se $\Theta = -1$, então Γ não depende de φ , sendo igual a $\Gamma_* = r_0^2/[2r_0^2 + r_0 - 6]$. A dependência de Γ em relação a φ também desaparece no regime de alta temperatura: $\Gamma^{(h)} = r_0^2/[2(r_0^2 - 2)]$.

3.6 Radiação magnética dipolar e tempo de relaxamento

Uma vez que o momento magnético médio oscila com uma frequência $\Theta\Omega$, então, após o salto a partícula perderá sua energia devido à radiação dipolar magnética. O cálculo exato dessas perdas em sistemas quânticos não estacionários com parâmetros fortemente flutuantes precisa de um estudo separado (veja alguns esquemas em [85–87]). Aqui, fornecemos apenas estimativas do efeito no caso de alta temperatura. Esta escolha é explicada pelo fato de que a amplitude das oscilações $\mathcal{A}_M = |\mathcal{V}\mathcal{M}_i|/2$ não contém a constante de Planck neste caso. Para $r = 1$ temos $\mathcal{A}_M^{(h)} = |\epsilon\kappa(2 + \kappa\alpha_+\alpha_-)/(2mc\Theta\beta\nu)|$. Consequentemente, o comportamento do momento magnético após o salto pode ser considerado *clássico*. Então, podemos esperar que as perdas médias ao longo do período de oscilações possam ser avaliadas, pelo menos por uma ordem de magnitude, com o auxílio da fórmula clássica para a radiação dipolo magnética [77, 78]

$$\overline{dE/dt} = \frac{\mathcal{A}_M^2(\Theta\Omega)^4}{3c^3} = \frac{e^2\Omega^4\kappa^2\Theta^2(2 + \kappa\alpha_+\alpha_-)^2}{12m^2c^5\beta^2\nu^2}. \quad (3.53)$$

Observe que o lado direito da equação (3.53) se transforma em zero para $\Theta = 1$ e $\Theta = 0$, bem como para $\Theta = -1$ e $\alpha = 0$ (permanecendo diferente de zero se $\alpha \neq 0$). Comparando a equação (3.53) com a energia inicial após o salto no caso de alta temperatura, $\mathcal{E}^{(h)}(0+) = \mathcal{E}(0)(1 + \delta\mathcal{E}) \approx \kappa^2\Omega(1 + \alpha^2)/(\beta\nu)$, podemos estimar o tempo de relaxamento inverso τ^{-1} na forma $\tau^{-1} = \overline{dE/dt}/\mathcal{E}^{(h)}(0+)$, logo

$$\tau \approx \frac{12m^2c^5\beta\nu(1 + \alpha^2)}{e^2\Omega^3\Theta^2(2 + \kappa\alpha_+\alpha_-)^2}, \quad \kappa\Omega/\nu \gg 1.$$

Uma estimativa muito grosseira da ordem de magnitude produz

$$\Omega\tau \sim (mc^2\beta)(\lambda_\Omega/r_c)(\nu/\Omega), \quad (3.54)$$

onde $r_c = e^2/(mc^2)$ and $\lambda_\Omega = c/\Omega$. Embora suponhamos que $\nu/\Omega \ll 1$, os dois outros termos no produto (3.54) são tão grandes que $\Omega\tau \gg 1$ para todas as condições realistas.

3.7 Discussão

Neste capítulo mostramos que, de fato, diferentes escolhas do calibre do potencial vetorial (ou, fisicamente, a forma do solenóide onde o campo magnético é criado) levam a valores muito diferentes da energia média e do momento magnético, bem como de suas variâncias, após mudanças rápidas do campo magnético. Em particular, o aumento de energia do estado inicial de alta temperatura é duas vezes maior para o calibre de Landau do que para o circular. Por outro lado, a queda máxima de energia no caso de baixa temperatura com o calibre Landau é duas vezes menor do que no caso do calibre circular.

Os resultados mais impressionantes estão relacionados ao comportamento do momento magnético. Além disso, parece que eles podem lançar uma nova luz sobre as propriedades dessa intrincada grandeza física. Por exemplo, pode-se perguntar: por que o momento magnético médio é tão pequeno no caso de alta temperatura? A resposta termodinâmica usual é: isso ocorre porque é preciso calcular a derivada em relação ao campo magnético não da energia E , mas da *energia livre* $F = E - S/\beta$, de modo que o grande valor do produto da entropia S pela temperatura absoluta β^{-1} quase cancela a contribuição da energia total E . Mas as fórmulas (3.34) e (1.30) fornecem uma resposta *dinâmica* complementar: isso ocorre porque o momento magnético médio é determinado não apenas pela energia de rotação da partícula, mas também pelas correlações estatísticas entre as coordenadas relativas e do centro. Embora essas coordenadas sejam desacopladas dinamicamente para o campo magnético independente do tempo, elas são *estatisticamente acopladas* no estado de equilíbrio de alta temperatura e esse acoplamento quase cancela a contribuição da energia. No entanto, tal cancelamento não ocorre para a variância do momento magnético. Nesse caso, as duas contribuições entram com o mesmo sinal, resultando em grandes valores da variância total (veja também [88]). Observe que a variância σ_M é sempre maior do que o quadrado do valor médio \mathcal{M}^2 , mesmo no caso de baixa temperatura. E essa variância é tão grande no caso de altas temperaturas que se pode questionar: é razoável falar sobre um *pequeno diamagnetismo* de uma *única* partícula no regime de alta temperatura? Por outro lado, existe realmente um pequeno diamagnetismo para muitos materiais. Essa aparente contradição pode ser explicada, provavelmente, se levarmos em conta que os materiais consistem em um grande número $N \gg 1$ de partículas. Negligenciando suas interações, sabemos que o valor médio total do momento magnético é proporcional ao número de partículas, ou seja, $\mathcal{M}_{tot} = N\mathcal{M}$. Ao mesmo tempo, a *variância* total também é proporcional a N : $\sigma_M^{(tot)} = N\sigma_M$. Portanto, certamente temos pequenas flutuações *relativas* do momento magnético total no caso de baixa temperatura sob a condição $N \gg 1$: $\sigma_M^{(tot)}/[\mathcal{M}_{tot}]^2 \sim N^{-1}$. No caso de alta temperatura, a condição é muito mais difícil: de acordo com a equação (3.49), a desigualdade $N \gg (9/4)r_0(\beta\hbar\omega)^{-4}(\omega/\nu)$ deve ser satisfeita. Considerando $\omega/\nu = 100$ e lembrando que $\hbar\omega = \mu_B B$, obtemos as seguintes avaliações para elétrons numa temperatura absoluta de 300 K num campo magnético $B = 10^3$ G (e uma armadilha isotrópica com $r_0 = 2$): $\beta\mu_B B \sim 4 \times 10^3$, logo $N \gg 10^{17}$. Para objetos macroscópicos contendo elétrons (quase) livres, esse número não é muito grande.

A independência dinâmica entre as coordenadas relativas e do centro é *quebrada* quando o campo magnético depende do tempo. Esse fato tem várias consequências importantes. A primeira delas é a quebra da invariância de calibre nas expressões para as mudanças da energia e do momento magnético após o salto do campo magnético, bem como suas variâncias. Além disso, os resultados dependem fortemente do grau de assimetria r da distribuição inicial das coordenadas do centro. Além disso, o valor médio do momento

magnético e sua variância oscilam na frequência do ciclotron após o salto. E a amplitude dessas oscilações pode ser tão grande que o valor médio pode mudar periodicamente de sinal, se o sinal do campo magnético permanecer o mesmo. Lembre-se, no entanto, de que as flutuações do momento magnético excedem seu valor médio em todos os regimes: veja as figuras (3.5)-(3.7).

Não consideramos o grau de liberdade do spin, pois ele está acoplado diretamente ao vetor campo magnético, sendo, portanto, independente da escolha do calibre do potencial vetorial. Logo, não é essencial para nosso estudo.

Agora, vamos discutir as condições de validade da aproximação do salto repentino do campo magnético. Sabe-se que, nos casos especiais de $\alpha = 0$ e $\alpha = 1$, o problema quântico com uma função arbitrária $B(t)$ pode ser reduzido a resolver a equação clássica da forma [10–12, 14] $\ddot{\varepsilon} + \omega^2(t)\varepsilon = 0$, que é equivalente ao estacionário da equação de Schrödinger $\psi'' + k^2(x)\psi = 0$. Soluções analíticas exatas para essas equações são conhecidas para várias funções $\omega^2(t)$ ou $k^2(x)$, descrevendo uma transição suave da frequência inicial ω_i para a final ω_f , com alguma duração de transição característica τ . Sua análise detalhada será realizada no próximo capítulo. Aqui, apenas mencionamos sem prova que, para muitas funções $\omega^2(t)$, a aproximação do salto repentino surge como o caso limite da solução exata sob a condição $\omega_i\tau \ll 1$. Além disso, as avaliações numéricas mostram que, em muitos casos, a precisão da aproximação do salto repentino é muito boa (com um erro da ordem de alguns por cento) se $\omega_i\tau \sim 0.1$.

Outra questão diz respeito à validade do modelo de campo magnético homogêneo e dependente do tempo, descrito por meio do potencial vetorial linear (1). Na verdade, uma consequência imediata das equações de Maxwell no vácuo é a equação de segunda ordem para o potencial vetorial: $\partial^2 \mathbf{A} / \partial t^2 - c^2 \Delta \mathbf{A} = 4\pi c \mathbf{j}$ (no calibre de Coulomb $\text{div} \mathbf{A} = 0$). Isso nos diz que o campo magnético uniforme dependente do tempo não pode existir sem alguma densidade de corrente espacialmente distribuída \mathbf{j} . Mas experimentos reais são realizados dentro de alguns solenóides vazios, onde o campo magnético é criado por algumas correntes de superfície. Portanto, falando formalmente, o campo magnético dependente do tempo no espaço vazio dentro do solenóide não pode ser estritamente homogêneo, devido à reação reversa do campo elétrico induzido dependente do tempo. No entanto, na realidade, essa falta de homogeneidade pode ser desprezada se o raio de Larmor da partícula carregada $R = v/\Omega$ é muito menor que a escala de variações espaciais do campo eletromagnético dependente do tempo, que é da ordem do comprimento de onda $\lambda \sim c\delta t$, onde δt caracteriza a escala de variações de tempo do campo. Se $\delta t \sim \Omega^{-1}$, a limitação se torna $v \ll c$, significando a ausência do problema para partículas não relativísticas. Um único problema pode surgir para tempos muito curtos $\delta t = f/\Omega$ com $f \ll 1$ no regime quântico, quando a velocidade não pode ser menor que $(\hbar\Omega/m)^{1/2}$. Então, a restrição na frequência do ciclotron torna-se $\Omega \ll f^2 mc^2/\hbar$, que é equivalente à limitação da força do campo magnético $B \ll f^2 m^2 c^3/(e\hbar)$. No caso do elétron, obtém-se $B \ll f^2 \times 10^{13}$ G. Consequentemente, o modelo considerado neste capítulo é bem justificado para campos magnéticos típicos usados em laboratórios, que não excedem 10^6 G (veja também [62]), exceto para valores extremamente pequenos do fator f . Por exemplo, se $B \sim 10^4$ G, então f deve ser maior que 10^{-4} . Portanto, não há problemas se $f \sim 10^{-1}$.

Vamos enfatizar, em conexão com os dois itens discutidos acima, que as variações do campo magnético consideradas neste capítulo são “rápidas” apenas do ponto de vista do movimento da partícula. Ou seja, supomos que essas variações acontecem durante um curto período de tempo, muito menor do que o período de rotação da partícula no campo magnético (na verdade, dez vezes menor é o bastante em

muitos casos). Por outro lado, essas variações são *adiabáticas* do ponto de vista do campo eletromagnético, nas condições formuladas acima. Portanto, a aproximação do campo magnético *homogêneo* dependente do tempo permanece válida.

Mostramos ainda que, se o campo magnético aumentar rapidamente, o momento magnético e suas flutuações podem aumentar significativamente. Esse tipo de comportamento parece bastante esperado. Mas um resultado surpreendente é o grande aumento do momento magnético quando o campo magnético diminui. Provavelmente, a aproximação da partícula livre não funciona bem no limite do campo magnético nulo (quando o raio de Larmor da órbita torna-se muito grande), principalmente quando se está interessado nas flutuações do momento magnético (já que, em qualquer situação real, as partículas se movem em alguma região confinada do espaço). Este item também será discutido em mais detalhes no próximo capítulo.

Para melhor avaliar a validade e a precisão dos modelos considerados até aqui, parece razoável estudar situações em que o campo magnético varia de forma contínua. Não foi possível resolver esse problema analiticamente para valores arbitrários do parâmetro de calibre α , mas é possível para os calibres especiais circular e de Landau. Portanto, no próximo capítulo, iremos avaliar essas situações especiais em que $\alpha = 0$ (calibre circular) e $\alpha = 1$ (calibre de Landau), nas quais estudaremos o comportamento dos valores médios da energia e do momento magnético para algumas mudanças contínuas do campo magnético.

Capítulo 4

Evolução dos valores médios da energia e do momento magnético para mudanças contínuas do campo magnético

Neste capítulo, apresentamos os resultados publicados, até o momento, na pré-impressão [29]. Sabe-se que a equação de Schrödinger com o Hamiltoniano (1.1) e uma função arbitrária $B(t)$ em (1) pode ser resolvida exatamente para dois valores fixos do parâmetro de calibre α : $\alpha = 0$ (calibre circular ou simétrico) [10, 11, 14–23] e $\alpha = 1$ (calibre de Landau) [12, 24]. Foi mostrado em [10, 11] e [12] que, nesses casos, as soluções quânticas são determinadas completamente pela solução da *equação clássica de movimento* do oscilador com uma frequência dependente do tempo,

$$\ddot{\varepsilon} + \omega_\alpha^2(t)\varepsilon = 0. \quad (4.1)$$

No caso do calibre circular, deve-se colocar em (4.1) a *frequência de Larmor* $\omega_0(t) \equiv \omega(t) = eB(t)/(2mc)$, enquanto que a *frequência do cíclotron* $\omega_1(t) \equiv \Omega(t) = eB(t)/(mc)$ deve ser usada no caso do calibre Landau. Chegaremos a esses resultados nas próximas seções.

Neste ponto, vale a pena ressaltar o seguinte fato: para um campo magnético variável, a escolha do parâmetro α deixa de ser uma escolha de calibre e passa a ser uma escolha concreta de diferentes sistemas físicos, pois a configuração do campo elétrico induzido depende dessa escolha.

Aqui, vamos considerar um estado inicial de equilíbrio termodinâmico, ou seja, a matriz $\sigma_q(0)$ será dada pela equação (1.30). Por simplicidade, vamos reescrevê-la na forma

$$\sigma_q(0) = G \left\| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & -\rho & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\rho \\ -\rho & 0 & s\Upsilon & 0 \\ 0 & -\rho & 0 & \Upsilon/s \end{array} \right\|, \quad (4.2)$$

onde o coeficiente real s caracteriza o grau de anisotropia do potencial ($s = 1$ no caso isotrópico). Assim como antes, os valores médios iniciais da energia e do momento magnético são os seguintes

$$\mathcal{E}_i = \hbar\omega_i\mathcal{C}, \quad \mathcal{M}_i = \mu_B\mathcal{C}(\rho - 1) = \mu_B [(\hbar\omega_i\beta)^{-1} - \coth(\hbar\omega_i\beta)], \quad (4.3)$$

onde $\mu_B = e\hbar/(2mc)$ é o magneton Bohr.

E, novamente, é conveniente dividir as matrizes $\sigma_q(t)$ e $\Lambda_q(t)$ em blocos 2×2 :

$$\sigma_q(t) = G \begin{vmatrix} \sigma_r & \sigma_{rc} \\ \tilde{\sigma}_{rc} & \sigma_c \end{vmatrix}, \quad \Lambda_q(t) = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & \lambda_4 \end{vmatrix}. \quad (4.4)$$

As matrizes $G\sigma_r$ e $G\sigma_c$ descrevem as flutuações das coordenadas relativas e do centro, respectivamente. A matriz $G\sigma_{rc}$ descreve as correlações entre esses dois subsistemas. Observe que as flutuações iniciais das coordenadas do centro de orientação são mais fortes do que as das coordenadas relativas, especialmente se $\Upsilon \gg 1$.

Usando as fórmulas (1.20) e (4.2), podemos escrever os blocos de $\sigma_q(t)$ do seguinte modo,

$$\sigma_r = \lambda_1 \tilde{\lambda}_1 + \Upsilon \lambda_2 S \tilde{\lambda}_2 - \rho \left(\lambda_2 \tilde{\lambda}_1 + \lambda_1 \tilde{\lambda}_2 \right), \quad \sigma_c = \lambda_3 \tilde{\lambda}_3 + \Upsilon \lambda_4 S \tilde{\lambda}_4 - \rho \left(\lambda_4 \tilde{\lambda}_3 + \lambda_3 \tilde{\lambda}_4 \right), \quad (4.5)$$

$$\sigma_{rc} = \lambda_1 \tilde{\lambda}_3 + \Upsilon \lambda_2 S \tilde{\lambda}_4 - \rho \left(\lambda_2 \tilde{\lambda}_3 + \lambda_1 \tilde{\lambda}_4 \right), \quad (4.6)$$

onde $S = \text{diag}(s, s^{-1})$ é uma matriz diagonal.

Supomos que o potencial confinante é removido no instante de tempo $t = 0$ e que o sistema começa a evoluir de acordo com o hamiltoniano (1.1). Então, a principal ferramenta para calcular os valores médios da energia e do momento magnético é a matriz de transformação Λ_q , que, por sua vez, é determinada pelas soluções para o conjunto de quatro equações diferenciais lineares com coeficientes dependentes do tempo (1.16)-(1.17). Este conjunto pode ser reduzido a uma única equação diferencial de segunda ordem em dois casos especiais: $\alpha = 0$ e $\alpha = 1$ (ou $\alpha = -1$). Esses casos são estudados separadamente nas seções 4.1–4.4 e 4.5–4.6.

4.1 O calibre circular: geral

Se $\alpha = 0$, então é conveniente (seguindo [10, 11, 14]) introduzir as variáveis complexas $z = x + iy$ e $p = p_x + ip_y$. Dessa forma, o sistema de quatro equações (1.16)-(1.17) se reduz ao par de equações

$$\dot{z} = p/m - i\omega(t)z, \quad \dot{p} = -i\omega(t)p - m\omega^2(t)z.$$

Escrevendo

$$z = \Phi \tilde{z}, \quad p = \Phi \tilde{p}, \quad \Phi = \exp \left[-i \int_0^t \omega(\tau) d\tau \right],$$

chegamos às equações

$$\dot{\tilde{z}} = \tilde{p}/m, \quad \dot{\tilde{p}} = -m\omega^2(t)\tilde{z}, \quad (4.7)$$

cujas consequências é (4.1) com $\alpha = 0$ para $\tilde{z}(t)$. Nós fixamos o par de soluções complexas independentes $\varepsilon(t)$ e $\varepsilon^*(t)$, impondo a condição ao Wronskiano [10, 11]

$$\dot{\varepsilon}\varepsilon^* - \dot{\varepsilon}^*\varepsilon = 2i \quad \text{ou} \quad \text{Im}(\dot{\varepsilon}\varepsilon^*) = 1. \quad (4.8)$$

Assumimos que $\omega(t) = \omega_i = \text{const} > 0$ para $t \leq 0$ e $\varepsilon(t) = \omega_i^{-1/2} \exp(i\omega_i t)$ para $t \leq 0$. Isso significa que escolhemos as condições iniciais

$$\varepsilon(0) = \omega_i^{-1/2}, \quad \dot{\varepsilon}(0) = i\omega_i^{1/2}. \quad (4.9)$$

As soluções para as equações (4.7) são as combinações lineares,

$$\tilde{z}(t) = C_1\varepsilon(t) + C_2\varepsilon^*(t), \quad \tilde{p}(t) = m [C_1\dot{\varepsilon}(t) + C_2\dot{\varepsilon}^*(t)],$$

onde os coeficientes constantes $C_{1,2}$ são determinados pelas condições iniciais. Assim, chegamos às fórmulas

$$z(t) = \omega_i^{1/2}\Phi(t) [z(0)\text{Re}(\varepsilon) + p(0)\text{Im}(\varepsilon)/(m\omega_i)], \quad p(t) = m\omega_i^{1/2}\Phi(t) [z(0)\text{Re}(\dot{\varepsilon}) + p(0)\text{Im}(\dot{\varepsilon})/(m\omega_i)].$$

Mais detalhes dos cálculos e formas explícitas dos blocos (4.5)-(4.6) e da matriz $\Lambda_q(t)$ (4.4) são dados no apêndice C.

Os valores médios da energia e do momento magnético dependem dos traços das matrizes σ_r e σ_{rc} . Esses traços têm as seguintes formas explícitas:

$$\text{Tr}(G\sigma_r) = \frac{G\omega_i}{2\omega^2(t)} [|F_-|^2 + s_0\Upsilon|F_+|^2 - 2\rho\text{Re}(F_-F_+)], \quad (4.10)$$

$$\text{Tr}(G\sigma_{rc}) = \frac{G\omega_i}{2\omega^2(t)} [(1 + s_0\Upsilon)\text{Re}(F_-F_+^*) - \rho\text{Re}(F_-^2 + F_+^2)], \quad (4.11)$$

onde

$$F_{\pm}(t) = \omega(t)\varepsilon(t) \pm i\dot{\varepsilon}(t), \quad 2s_0 = s + s^{-1}. \quad (4.12)$$

Observe que os traços (4.10) e (4.11) são invariantes em relação à transformação $s \rightarrow s^{-1}$.

Existem dois casos especiais importantes, que serão analisados em mais detalhes nas seções subsequentes.

1) O regime adiabático:

$$\varepsilon(t) \approx [\omega(t)]^{-1/2} \exp[i\varphi(t)], \quad \dot{\varepsilon}(t) \approx i[\omega(t)]^{1/2} \exp[i\varphi(t)], \quad F_-(t) \approx 2[\omega(t)]^{1/2} \exp[i\varphi(t)], \quad F_+(t) \approx 0, \quad (4.13)$$

onde $\varphi(t) = \int_0^t \omega(x)dx$. Neste caso, a matriz $\sigma_q(t)$ assume a forma

$$\sigma_q^{(ad)}(t) = \frac{G\omega_i}{\omega(t)} \left\| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & -\rho \cos(2\varphi) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\rho \cos(2\varphi) \\ -\rho \cos(2\varphi) & 0 & \Upsilon & 0 \\ 0 & -\rho \cos(2\varphi) & 0 & \Upsilon \end{array} \right\|. \quad (4.14)$$

2) O regime assintótico, quando a frequência $\omega(t)$ assume um valor constante ω_f depois de algum intervalo de tempo T (ou assintoticamente para $t \rightarrow \infty$). Neste caso, pode-se escrever a solução $\varepsilon(t)$ para $t > T$ na forma

$$\varepsilon(t) = |\omega_f|^{-1/2} [u_+ e^{i|\omega_f|t} + u_- e^{-i|\omega_f|t}], \quad (4.15)$$

onde coeficientes complexos constantes u_{\pm} obedecem à relação

$$|u_+|^2 - |u_-|^2 = 1, \quad (4.16)$$

em consequência da condição (4.8). Então, temos para $t > T$,

$$F_{\pm}(t) = 2|\omega_f|^{1/2} u_{\mp} e^{\mp i|\omega_f|t}. \quad (4.17)$$

4.1.1 Evolução da energia média

As equações (1.10) e (4.10) levam às seguintes expressões para a energia média:

$$\mathcal{E}(t) = m\Omega^2(t)\text{Tr}(G\sigma_r)/2 = \frac{\mathcal{E}_i}{4\omega_i} [|F_-|^2 + s_0\Upsilon|F_+|^2 - 2\rho\text{Re}(F_-F_+)], \quad \mathcal{E}_i = 4m\omega_i^2G. \quad (4.18)$$

No regime assintótico (4.15), a razão da energia final em relação a inicial é igual a

$$\mathcal{E}_f/\mathcal{E}_i = (|\omega_f|/\omega_i) [|u_+|^2 + s_0\Upsilon|u_-|^2 - 2\rho\text{Re}(u_+u_-)]. \quad (4.19)$$

Regime adiabático

Escrevendo a solução para a equação (4.1) na forma

$$\varepsilon(t) = [\omega(t)]^{-1/2} \exp[i\varphi(t)], \quad \varphi(t) = \int_0^t \omega(x)dx, \quad (4.20)$$

temos

$$\dot{\varepsilon} = \left(i\omega^{1/2} - \frac{\dot{\omega}}{2\omega^{3/2}} \right) \exp(i\varphi), \quad \dot{\varepsilon}\varepsilon^* = i - \frac{\dot{\omega}}{2\omega^2},$$

então a condição $\text{Im}(\dot{\varepsilon}\varepsilon^*) = 1$ é automaticamente satisfeita. Nesse caso, $\mathcal{E}(t) \approx 4mG\omega_i\omega(t)$, o que significa que a razão $\mathcal{E}(t)/\omega(t)$ é o invariante adiabático conhecido, que não depende dos parâmetros ρ , Υ e s . No entanto, este invariante existe apenas para $\omega(t) > 0$. Na verdade, calculando a segunda derivada de $\varepsilon(t)$, chega-se à equação

$$\ddot{\varepsilon} + \omega^2\varepsilon = \left(\frac{3\dot{\omega}^2}{4\omega^{5/2}} - \frac{\ddot{\omega}}{2\omega^{3/2}} \right) \exp(i\varphi). \quad (4.21)$$

O lado direito de (4.21) pode ser negligenciado sob as condições

$$|\ddot{\omega}/\omega^3| \ll 1, \quad |\dot{\omega}/\omega^2| \ll 1. \quad (4.22)$$

Se a frequência de Larmor $\omega(t)$ muda de sinal, passando lentamente pelo valor $\omega = 0$, as desigualdades (4.22) não podem ser garantidas, e a situação pode ser bem diferente, essa situação será analisada na seção 4.4.1.

Salto repentino do campo magnético

Um caso especial simples é um salto instantâneo da frequência do valor ω_i quando $t < 0$ para ω_f quando $t > 0$. Então nós temos para $t > 0$ a solução (4.15) com

$$u_{\pm} = \frac{|\omega_f| \pm \omega_i}{2\sqrt{|\omega_f|\omega_i}}, \quad (4.23)$$

então

$$\mathcal{E}_f/\mathcal{E}_i = [(\omega_f^2 + \omega_i^2)(1 + s_0\Upsilon) - 2\omega_i|\omega_f|(s_0\Upsilon - 1) - 2\rho(\omega_f^2 - \omega_i^2)] / (4\omega_i^2), \quad (4.24)$$

esse resultado é equivalente à equação (3.23) com $\alpha = 0$, $r = 1$ e $\Theta = 1 + \kappa = \omega_f/\omega_i$. A equação (4.24) é simétrica em relação à inversão $\omega_f \rightarrow -\omega_f$. Em particular, $\mathcal{E}_f/\mathcal{E}_i = 1$ se $\omega_f = -\omega_i$ (a inversão instantânea do campo magnético). Outra característica interessante da fórmula (4.24) é que a razão $\mathcal{E}_f/\mathcal{E}_i$ para o salto repentino em função da frequência final ω_f não é analítica no ponto $\omega_f = 0$ se $s_0\Upsilon > 1$. Esta descontinuidade da derivada é claramente vista como uma ponta na figura 4.7.

A equação (4.24) prevê que a energia média não vai a zero após o salto instantâneo da frequência para $\omega_f = 0$ (ao contrário da evolução adiabática):

$$\mathcal{E}_f/\mathcal{E}_i = [1 + s_0\Upsilon + 2\rho]/4 \geq 1/2. \quad (4.25)$$

Pode-se questionar esse resultado, porque o limite $\omega_f \rightarrow 0$ não é justificado nas equações iniciais (4.15) e (4.23). No entanto, a solução exata para a equação (4.1) com $\omega(t) = 0$ quando $t > 0$, satisfazendo as condições iniciais (4.9), tem a forma (esta solução foi usada em [89] em conexão com o conceito de “estilingue quântico”)

$$\varepsilon(t) = \omega_i^{-1/2}(1 + i\omega_i t). \quad (4.26)$$

Por isso, $F_{\pm}(t) = \mp\omega_i^{1/2}$, então a equação (4.18) resulta na mesma fórmula (4.25). O valor mínimo 1/2 do lado direito da equação (4.25) é alcançado para temperatura nula ($\Upsilon = 1$ e $\rho = 0$) na armadilha isotrópica ($s_0 = 1$). Nesse limite, $\mathcal{E}_f/\mathcal{E}_i = (\omega_i^2 + \omega_f^2)/(2\omega_i^2)$. Mas a energia final pode ser muito maior do que a inicial após o desligamento instantâneo do campo magnético, se $\Upsilon \gg 1$ ou $s_0 \gg 1$ (o estado inicial de alta temperatura ou uma armadilha fortemente anisotrópica). A fórmula aproximada nesse caso é $\mathcal{E}_f/\mathcal{E}_i = s_0\Upsilon(\omega_i - |\omega_f|)^2/(4\omega_i^2)$.

O modelo de saltos instantâneos dos parâmetros foi usado por muitos autores para a análise de vários processos físicos [36, 58, 62, 66–70, 90–102]. Sua validade é analisada nas próximas seções. Em particular, mostramos explicitamente na seção 4.2.1 que os resultados exatos para $\omega_f = 0$ em alguns casos podem ser bastante diferentes de (4.25).

Ressonância paramétrica

Uma solução aproximada para a equação (4.1) na forma (4.15), com $\omega_f = \omega_i$ e *coeficientes variando lentamente com o tempo*,

$$u_+(t) = \cosh(\omega_i\gamma t), \quad u_-(t) = -i \sinh(\omega_i\gamma t), \quad (4.27)$$

existe no caso da ressonância paramétrica, quando o campo magnético é modulado harmonicamente com *duas vezes a frequência de Larmor* e uma pequena amplitude de modulação (veja, por exemplo, em [37, 93, 103, 104]):

$$\omega(t) = \omega_i [1 + 2\gamma \cos(2\omega_i t)], \quad |\gamma| \ll 1. \quad (4.28)$$

Então,

$$\mathcal{E}(t)/\mathcal{E}(0) = \cosh^2(\omega_i\gamma t) + s_0\Upsilon \sinh^2(\omega_i\gamma t). \quad (4.29)$$

Observe que o coeficiente ρ não aparece em (4.29), porque $\text{Re}(u_+u_-) = 0$ nesse caso.

4.1.2 Flutuações da energia

As flutuações da energia $\sigma_E = \langle \hat{H}^2 \rangle - \langle \hat{H} \rangle^2$, seguindo a equação (3.24) e as expressões explícitas do apêndice B, assume a forma

$$\sigma_E = [2m\omega^2(t)]^2 \left(2\sigma_{11}^2 + 2\sigma_{22}^2 + [x_r, y_r]^2 \right).$$

Comparando esta expressão com (C.5) e (4.18) no caso em que $s = 1$, chegamos ao simples resultado

$$\sigma_E(t) = \mathcal{E}^2(t) - [\hbar\omega(t)]^2, \quad (4.30)$$

que é válido para quaisquer valores dos parâmetros Υ e ρ . Se $s \neq 1$, então a fórmula para σ_E é muito complicada (contendo funções trigonométricas de φ), portanto, não consideramos este caso geral aqui. Tendo em vista a equação (4.3), o nível inicial de flutuações da energia é dado pelas fórmulas

$$\sigma_E(0) = (\hbar\omega_i)^2 (\mathcal{C}^2 - 1), \quad \sigma_E(0)/\mathcal{E}_i^2 = 1 - \tanh^2(\hbar\omega_i\beta). \quad (4.31)$$

4.1.3 Evolução do momento magnético médio

As equações, (3.34), (4.10) e (4.11) resultam na seguinte expressão para o valor médio do momento magnético em função do tempo:

$$\mathcal{M}(t) = -[e\omega(t)G/c]\text{Tr}(\sigma_r + \sigma_{rc}) = -(\mu_B\mathcal{C}/2) \{ \omega(t)|\varepsilon|^2 + 1 + \Upsilon s_0 [\omega(t)|\varepsilon|^2 - 1] - 2\rho\omega(t)\text{Re}(\varepsilon^2) \}. \quad (4.32)$$

Observe que a derivada $\dot{\varepsilon}(t)$ não entra na fórmula para o momento magnético médio, em contraste com a fórmula (4.18) para a energia média. Em particular, no caso da temperatura extremamente baixa ($\mathcal{C} = \Upsilon = 1$, $\rho = 0$) temos

$$\mathcal{M}^{(l)}(t) = -(\mu_B\mathcal{C}/2) [\omega(t)|\varepsilon|^2(1 + s_0) + 1 - s_0]. \quad (4.33)$$

Observe que o parâmetro Υ quase desaparece no caso adiabático, quando $\omega(t)|\varepsilon|^2 - 1 \approx 0$:

$$\mathcal{M}_{ad}(t) = \mu_B\mathcal{C} [\rho \cos(2\varphi) - 1], \quad \varphi(t) = \int_0^t \omega(\tau) d\tau. \quad (4.34)$$

Vemos que o valor médio do momento magnético é um invariante adiabático somente para $\rho = 0$ e $\mathcal{C} = 1$ (estado inicial de temperatura zero). Se $\rho > 0$, $\mathcal{M}_{ad}(t)$ é uma função oscilante do tempo (sendo sempre negativa). Observe que $|\mathcal{M}_{ad}(t)|$ pode atingir valores muito grandes no caso de alta temperatura, quando $\mathcal{C} \gg 1$. Voltaremos a este assunto na seção 4.7.

Em regimes não adiabáticos, quando a diferença $\omega(t)|\varepsilon|^2 - 1$ não se aproxima de zero (incluindo todas as situações com $\omega \leq 0$), a equação (4.32) mostra que a contribuição de termos contendo o parâmetro ρ pode ser negligenciada (porque ρ é próximo de zero para baixas temperaturas e $\rho \ll s_0\Upsilon$ no caso de alta temperatura). Essa observação nos ajudará a simplificar muitas fórmulas.

No regime assintótico (4.15) obtemos

$$|\omega_f||\varepsilon|^2 = |u_-|^2 + |u_+|^2 + 2\text{Re}(u_-u_+^*) \cos(2|\omega_f|t) + 2\text{Im}(u_-u_+^*) \sin(2|\omega_f|t), \quad (4.35)$$

$$|\omega_f|\text{Re}(\varepsilon^2) = \text{Re}(u_-^2 + u_+^2) \cos(2|\omega_f|t) + \text{Im}(u_-^2 - u_+^2) \sin(2|\omega_f|t) + 2\text{Re}(u_-u_+). \quad (4.36)$$

Usando a relação $a \cos(x) + b \sin(x) = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \phi)$ (onde ϕ é alguma fase que não é interessante para nossos propósitos), podemos reescrever o lado direito da equação (4.32) como a soma de uma parte constante (que é a média das oscilações temporais) e uma parte oscilante:

$$\mathcal{M}(t) = \langle\langle \mathcal{M} \rangle\rangle + \widetilde{\Delta\mathcal{M}} \sin(2|\omega_f|t + \phi), \quad (4.37)$$

$$\langle\langle \mathcal{M} \rangle\rangle = -\mu_B\mathcal{C}\sigma [|u_\sigma|^2 + |u_{-\sigma}|^2 s_0\Upsilon - 2\rho\text{Re}(u_-u_+)], \quad \sigma = \omega_f/|\omega_f|, \quad (4.38)$$

$$|\widetilde{\Delta\mathcal{M}}| = |\mu_B\mathcal{C}|\left\{(1+s_0\Upsilon)^2|u_+u_-|^2 - 2\rho(1+s_0\Upsilon)\text{Re}(u_+u_-)(|u_+|^2 + |u_-|^2) + \rho^2[|u_+|^2 + |u_-|^2 + 2\text{Re}(u_+^2u_-^2)]\right\}^{1/2}. \quad (4.39)$$

Observe que uma consequência da identidade (4.16) é a relação

$$|u_+|^2 + |u_-|^2 = \sqrt{1+4|u_+u_-|^2}. \quad (4.40)$$

Portanto, as expressões mais simples podem ser escritas para o caso inicial de temperatura zero com $s_0\Upsilon = 1$ e $\rho = 0$:

$$\langle\langle\mathcal{M}\rangle\rangle = -\mu_B\mathcal{C}\sigma\sqrt{1+4|u_+u_-|^2}, \quad |\widetilde{\Delta\mathcal{M}}| = 2|\mu_B\mathcal{C}u_+u_-|. \quad (4.41)$$

Fórmulas simples também podem ser escritas no caso de alta temperatura $s_0\Upsilon \gg 1$. Se $\omega_f < 0$, então,

$$\langle\langle\mathcal{M}\rangle\rangle \approx \frac{1}{2}\mu_B\mathcal{C}s_0\Upsilon\left(1 + \sqrt{1+4|u_+u_-|^2}\right), \quad |\widetilde{\Delta\mathcal{M}}| \approx |\mu_B\mathcal{C}s_0\Upsilon u_+u_-|. \quad (4.42)$$

Vemos que a amplitude das oscilações está próxima do valor médio se $|u_+u_-| \gg 1$, sendo sempre menor que o valor médio. Consequentemente, $\mathcal{M}(t)$ não muda o sinal no regime assintótico nesses dois casos especiais.

Em regimes não adiabáticos, os termos contendo o parâmetro ρ podem ser negligenciados nas equações (4.38) e (4.40). Nestes casos, temos que calcular o único coeficiente $|u_-|^2$. Em particular, para $\omega_f < 0$ podemos usar as seguintes fórmulas aproximadas:

$$\langle\langle\mathcal{M}\rangle\rangle \approx \mu_B\mathcal{C}\left[|u_-|^2(1+s_0\Upsilon) + s_0\Upsilon\right], \quad |\widetilde{\Delta\mathcal{M}}| = \mu_B\mathcal{C}(1+s_0\Upsilon)|u_-|\sqrt{1+|u_-|^2}. \quad (4.43)$$

O caso de salto repentino

As fórmulas (4.32), (4.35) e (4.36) podem ser simplificadas no caso especial do salto repentino do campo magnético, quando os coeficientes u_{\pm} são reais: veja a equação (4.23). Então, para qualquer sinal da frequência final ω_f , obtemos

$$\mathcal{M}(t) = -\mu_B\mathcal{C}\left\{\frac{\omega_f + \omega_i}{2\omega_i} - \rho\frac{\omega_f}{\omega_i} + \Upsilon s_0\frac{\omega_f - \omega_i}{2\omega_i} + \sin^2(\omega_f t)\left[\rho W_+ - \frac{W_-}{2}(1 + \Upsilon s_0)\right]\right\}, \quad (4.44)$$

onde $W_{\pm} = \frac{\omega_f^2 \pm \omega_i^2}{\omega_i\omega_f}$. Em particular, na temperatura zero, temos a razão

$$R \equiv \frac{|\widetilde{\Delta\mathcal{M}}|}{|\langle\langle\mathcal{M}\rangle\rangle|} = \left|\frac{\omega_f^2 - \omega_i^2}{\omega_f^2 + \omega_i^2}\right|. \quad (4.45)$$

O momento magnético muda de sinal imediatamente após o salto (em $t = 0+$), se

$$\omega_f < \omega_* = \omega_i \frac{\Upsilon s_0 - 1}{\Upsilon s_0 + 1 - 2\rho}.$$

Observe que ω_* é apenas ligeiramente menor que ω_i no caso de alta temperatura ($\Upsilon \gg 1$ e $\rho \approx 1$). Mas mesmo no caso da temperatura zero ($\Upsilon = 1$ e $\rho = 0$), ω_* pode estar perto de ω_i em armadilhas iniciais fortemente anisotrópicas com $s_0 \gg 1$. Se $\omega_f = 0$ exatamente, então

$$\mathcal{M}_f = \mu_B\mathcal{C}(\Upsilon s_0 - 1)/2 = \text{const} \geq 0 \quad (4.46)$$

após desligar o campo. O mesmo resultado segue da equação (4.32) com $\omega(t) = 0$ e $\varepsilon(t) = \omega_i^{-1/2}(1 + i\omega_i t)$ quando $t > 0$. No entanto, se $\omega_f \neq 0$, então o momento magnético oscila com a frequência $2|\omega_f|$, e a amplitude das oscilações pode ser bastante alta. Por exemplo, para $|\omega_f| \ll \omega_i$ temos

$$\mathcal{M}(t) = -\frac{\mu_B \mathcal{C}}{2} \left[1 - \Upsilon s_0 + \frac{\omega_i}{\omega_f} \sin^2(\omega_f t) (1 + \Upsilon s_0 + 2\rho) \right]. \quad (4.47)$$

Devido à fração ω_i/ω_f , o momento magnético pode atingir periodicamente valores negativos muito altos para $\omega_f > 0$ (e valores positivos para $\omega_f < 0$). Além disso, $\mathcal{M}(t)$ muda seu sinal durante a evolução se $\omega_f > 0$, porque $1 - \Upsilon s_0 < 0$.

As equações (4.46) e (4.47) mostram que a divisão do momento magnético médio nas partes constante e oscilante (4.37) é questionável para $\omega_f \rightarrow 0$, quando o período de oscilações torna-se extremamente grande. De fato, a equação (4.47) leva à razão $R = |\widetilde{\Delta\mathcal{M}}|/|\langle\langle\mathcal{M}\rangle\rangle| \approx 1$ se $|1 - \Upsilon s_0| \ll |\omega_i/\omega_f| (1 + \Upsilon s_0 + 2\rho)$, enquanto a equação (4.46) fornece $\widetilde{\Delta\mathcal{M}} = 0$ se $\omega_f = 0$ exatamente.

Após a repentina inversão do campo magnético ($\omega_f = -\omega_i$) temos a função positiva

$$\mathcal{M}(t) = \mu_B \mathcal{C} [\Upsilon s_0 - \rho + 2\rho \sin^2(\omega_i t)], \quad (4.48)$$

vemos que a amplitude das oscilações é muito pequena em comparação com o valor médio $\langle\langle\mathcal{M}\rangle\rangle$ para esta escolha específica da frequência final.

Ressonância paramétrica

No caso da ressonância paramétrica (4.27) temos

$$\mathcal{M}_{res}(t) = -\mu_B \mathcal{C} [\cosh^2(\omega_i \gamma t) + \Upsilon s_0 \sinh^2(\omega_i \gamma t) + (1 + \Upsilon s_0) \sinh(2\omega_i \gamma t) \sin(2\omega_i t)/2 - \rho \cos(2\omega_i t)]. \quad (4.49)$$

Essa quantidade cresce com o tempo em valor absoluto, mas não muda seu sinal negativo, apesar das fortes oscilações.

4.1.4 Flutuações do momento magnético

As expressões explícitas em termos de todos os parâmetros iniciais para as flutuações do momento magnético $\sigma_M \equiv \langle\hat{\mathcal{M}}^2\rangle - \langle\hat{\mathcal{M}}\rangle^2$, dadas pela equação (3.47), são bastante complicadas. Veja as equações (C.5)-(C.6). Por este motivo, limitamo-nos aqui ao caso da armadilha simétrica ($s = 1$), com $\overline{x_r y_r} = \overline{x_c y_c} = 0$. Então, levando em consideração a fórmula (4.32) e as simetrias das matrizes (C.9)-(C.10), encontramos

$$\sigma_M = [e\omega(t)/c]^2 \{2(2\sigma_{11}^2 - \sigma_{14}^2) + 8\sigma_{11}\sigma_{13} + 2\sigma_{13}^2 + 2\sigma_{11}\sigma_{33} + [\hat{x}_r, \hat{y}_r]/2\}. \quad (4.50)$$

No entanto, mesmo esta fórmula ainda é bastante complicada, uma vez que cada termo σ_{ij} é uma combinação linear não homogênea dos parâmetros Υ e ρ com coeficientes diferentes. Portanto, nos limitamos aqui aos casos limites de baixas e altas temperaturas iniciais.

No caso de temperatura zero ($\rho = 0$, $\mathcal{C} = \Upsilon = 1$), usando as equações (C.9) e (C.10) junto com a identidade

$$|\varepsilon|^2 |\dot{\varepsilon}|^2 - \text{Re}^2(\dot{\varepsilon}\varepsilon^*) = \text{Im}^2(\dot{\varepsilon}\varepsilon^*) \equiv 1,$$

obtemos depois de alguma álgebra uma fórmula extremamente simples

$$\sigma_M^{(l)}(t) = \mu_B^2 [\omega(t)|\varepsilon|^2]^2 = [\mathcal{M}^{(l)}(t)]^2, \quad (4.51)$$

ela mostra que as flutuações quânticas do momento magnético são sempre fortes, mesmo para a temperatura zero.

No caso adiabático, a matriz (4.14) leva à fórmula

$$\sigma_M^{(ad)}(t) = (\mu_B \mathcal{C})^2 [2 + \Upsilon + \rho^2 \cos^2(2\varphi) - 4\rho \cos(2\varphi)] / 2 - \mu_B^2 / 2. \quad (4.52)$$

Em oposição à equação (4.34) para o momento magnético médio, a variância do momento magnético contém o termo proporcional a Υ no regime adiabático. Portanto, no caso de alta temperatura, temos $\sigma_M^{(ad)} \approx (\mu_B \mathcal{C})^2 \Upsilon / 2 \gg \mathcal{M}_{ad}^2$. Além disso, $\sigma_M^{(ad)}(t)$ é quase constante para $\Upsilon \gg 1$, uma vez que a amplitude das oscilações é muito menor do que Υ (lembre-se de que $\rho \leq 1$). Por outro lado, no regime não adiabático obtemos, levando em consideração apenas termos proporcionais a Υ nas matrizes (C.9)-(C.10) e comparando o resultado com (4.32), a seguinte fórmula no caso de alta temperatura:

$$\sigma_M^{(h)} = (\mu_B \mathcal{C} \Upsilon)^2 [\omega(t)|\varepsilon|^2 - 1]^2 = 4 [\mathcal{M}^{(h)}]^2, \quad (4.53)$$

que é válida desde que $\Upsilon [\omega(t)|\varepsilon|^2 - 1] \gg 1$.

Foi mostrado em [88] que as flutuações quânticas do momento magnético são muito grandes no estado de equilíbrio de alta temperatura (quando o *valor médio* é pequeno). As fórmulas desta seção mostram que o campo magnético dependente do tempo amplifica essas flutuações. Assim, em cada medição concreta podem-se obter os valores do momento magnético de qualquer sinal, com grandes diferenças nos resultados dos diferentes experimentos. Os desvios quadrados médios podem ser muito maiores do que os valores médios obtidos após a média de muitos testes.

4.2 Soluções explícitas da equação do oscilador em termos de funções elementares

Soluções exatas para a equação (4.1) são conhecidas para cerca de uma dúzia de famílias de funções $\omega(t)$: veja, por exemplo, uma lista em [52] (uma vez que consideramos o calibre circular nesta seção, ω significa a *Frequência de Larmor*). Na maioria dos casos, essas soluções são expressas em termos de várias funções especiais. No entanto, existem pelo menos três exemplos específicos, quando as soluções podem ser expressas em termos de funções elementares. Dois deles descrevem a redução em potência inversa do campo magnético até o valor zero, enquanto o terceiro corresponde à redução do tipo exponencial para um valor final arbitrário.

4.2.1 Redução linear inversa do campo magnético

Pode-se verificar facilmente que a equação (4.1) com a função

$$\omega(t) = \begin{cases} \omega_0, & t \leq 0 \\ \omega_0 t_0 / (t + t_0) = \omega_0 / \tau, & t \geq 0 \end{cases}, \quad \tau = 1 + t/t_0 \quad (4.54)$$

tem soluções $\tau^{1/2 \pm r}$, onde $r = \sqrt{1/4 - u^2}$ e $u = \omega_0 t_0$ (veja, por exemplo, em [105,106]). Portanto, a função $\varepsilon(t)$ satisfazendo as condições iniciais (4.9) tem a seguinte forma para $t > 0$ (ou $\tau \geq 1$):

$$\begin{aligned}\varepsilon(t) &= \frac{\sqrt{\tau}}{4r\sqrt{\omega_0}} [(2r + 2iu - 1)\tau^r + (2r - 2iu + 1)\tau^{-r}], \\ \dot{\varepsilon}(t) &= \frac{i\sqrt{\omega_0}}{4r\sqrt{\tau}} [(2r + 2iu + 1)\tau^r + (2r - 2iu - 1)\tau^{-r}].\end{aligned}\quad (4.55)$$

Observe que os parâmetros de adiabaticidade, introduzidos na equação (4.22), têm formas muito simples e independentes do tempo: $|\dot{\omega}/\omega^2| = (\omega_0 t_0)^{-1} = u^{-1}$, $|\ddot{\omega}/\omega^3| = 2u^{-1}$. Consequentemente, o regime adiabático corresponde a valores em que $u \gg 1$, por outro lado, o caso em que $u \ll 1$ pode ser considerado um análogo do salto repentino. Observe que essa função (4.55) é próxima a (4.26) no limite em que $\tau \gg 1$ e $u \ll 1$. No entanto, essas funções não coincidem exatamente. Consequências importantes dessa diferença serão mostradas a seguir.

Rápida variação do campo

Se $u < 1/2$, a equação (4.18) resulta na fórmula

$$\mathcal{E}(t)/\mathcal{E}_i = [(\tau^r - \tau^{-r})^2 + 16r^2 + s_0\Upsilon(\tau^r - \tau^{-r})^2 + 4\rho r(\tau^{2r} - \tau^{-2r})]/(16\tau r^2). \quad (4.56)$$

Se $u \ll 1$, então $t_0 \ll \omega_0^{-1}$. Consequentemente, para quase todos os valores da variável de tempo t , que não são extremamente pequenos, temos $\tau \gg 1$. Além disso, $2r$ está muito próximo de uma unidade neste caso. Negligenciando os termos τ^{-2r} e colocando $r = 1/2$ nos coeficientes da equação (4.56) (exceto pelo expoente $r = (1 - \delta)/2$), chegamos a uma expressão simplificada

$$\mathcal{E}(t)/\mathcal{E}_i \approx (1 + s_0\Upsilon + 2\rho)/(4\tau^\delta), \quad \delta = 1 - 2r \approx 2u^2 \ll 1. \quad (4.57)$$

Portanto, a energia média cai rapidamente para o valor de salto repentino (4.25), e permanece neste nível por um longo intervalo de tempo, quando $\tau^\delta \approx 1$. Observe que a precisão relativa da aproximação (4.57) é melhor que 0.01 já para $t > 10t_0$. Finalmente, a energia cairá para zero de qualquer maneira, mas isso acontecerá para valores extremamente grandes de τ . Por exemplo, se $s_0\Upsilon \gg 1$, então a desigualdade $\tau \gg \tau_* = (s_0\Upsilon/4)^{1/\delta}$ deve ser satisfeita. Se, por exemplo, $u = 0.1$, $s_0 = 1$ e $\Upsilon = 40$, então $\tau_* \approx 10^{50}$.

A equação (4.32) produz a seguinte expressão para o momento magnético médio:

$$\mathcal{M}(\tau) = -\mu_B \mathcal{C} \left\{ 1 + \frac{1 + s_0\Upsilon}{16r^2} [(1 - 2r)\tau^{2r} + (1 + 2r)\tau^{-2r} - 2] + \frac{\rho}{4r} [(1 - 2r)\tau^{2r} - (1 + 2r)\tau^{-2r}] \right\}. \quad (4.58)$$

Para $u \ll 1$ e $\tau \gg 1$, esta expressão pode ser escrita na simples forma

$$\mathcal{M}(\tau) = -\mu_B \mathcal{C} \left\{ \frac{1 - s_0\Upsilon}{2} + \frac{\delta}{4} \tau^{1-\delta} (1 + s_0\Upsilon + 2\rho) \right\}. \quad (4.59)$$

Negligenciando o termo proporcional a δ em (4.59), chega-se à fórmula de aproximação do salto repentino (4.46). No entanto, isso pode ser feito desde que $\tau \ll 1/\delta$. Quando $\tau \rightarrow \infty$, o momento magnético cresce ilimitadamente (mantendo o sinal inicial).

No caso intermediário em que $u = 1/2$, temos

$$\mathcal{E}(t)/\mathcal{E}_i = \frac{1}{\tau} [1 + \ln^2(\tau)(1 + s_0\Upsilon)/4 + \rho \ln(\tau)], \quad (4.60)$$

$$\mathcal{M} = \mu_B \mathcal{C} \{ \rho - 1 - (1 + s_0\Upsilon)[\ln^2(\tau) - 2 \ln(\tau)]/4 - \rho \ln(\tau) \}. \quad (4.61)$$

Lenta variação do campo

Se $u > 1/2$, então,

$$\varepsilon(t) = [\omega(t)]^{-1/2} [e^{i\nu} + \sin(\nu)(2i\delta_u - 1)/(2\gamma)], \quad \dot{\varepsilon}(t) = i[\omega(t)]^{1/2} [e^{i\nu} + \sin(\nu)(2i\delta_u + 1)/(2\gamma)], \quad (4.62)$$

onde $\gamma = \sqrt{u^2 - 1/4} = |r|$, $\nu = \gamma \ln(\tau)$ e $\delta_u = u - \gamma$. Observe que ν está perto da fase adiabática $\int_0^t \omega(x) dx = u \ln(\tau)$ para $u \gg 1$, embora essas quantidades não coincidam exatamente.

Agora, a equação (4.18) assume a forma

$$\mathcal{E}(t)/\mathcal{E}_i = \frac{1}{\tau} \left[1 + \frac{\sin^2(\nu)(2 + s_0\Upsilon)}{2(4u^2 - 1)} + \frac{\rho \sin(2\nu)}{\sqrt{4u^2 - 1}} \right]. \quad (4.63)$$

Esta fórmula nos dá a precisão do invariante adiabático $\mathcal{E}(t)/\omega(t) = \mathcal{E}_i/\omega_i$ para $u \gg 1$. A peculiaridade da dependência da frequência (4.54) é que o regime adiabático é mantido mesmo quando $\omega(\tau) \rightarrow 0$, considerando que a condição (4.22) falha para uma função genérica $\omega(t)$, se ω está próximo de zero: veja exemplos nas seções a seguir.

Em todos os casos, a energia média tende, finalmente, ao valor zero, embora o tempo efetivo necessário dependa do parâmetro u . Paradoxalmente, este tempo efetivo final é muito maior no caso de uma “evolução inicial rápida” (*quase* um salto repentino, $u \ll 1$) do que no caso de uma “evolução lenta” (quase adiabática, $u \gg 1$). Exemplos dessa evolução são mostrados nas figuras 4.1 e 4.2. É impressionante que a evolução ainda esteja muito longe da situação assintótica estável mesmo quando a frequência é 100 vezes menor que o valor inicial (quando $\tau \approx 4.6$).

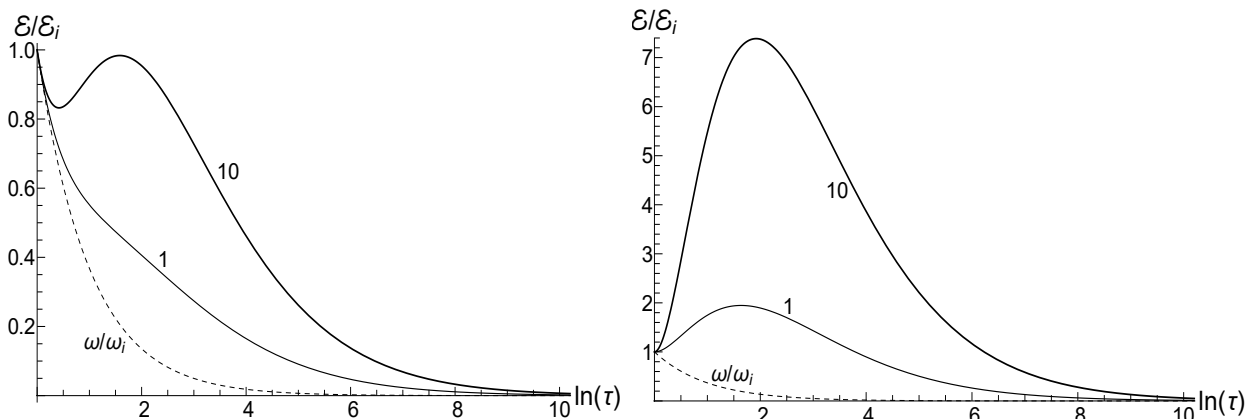


Figura 4.1: A razão $\mathcal{E}(\tau)/\mathcal{E}_i$ para diferentes valores do parâmetro de assimetria s (dado próximo às curvas) para o decaimento linear inverso do campo magnético (4.54) com $u = \omega_0 t_0 = 1/2$. **Esquerda:** o caso de baixa temperatura, $\rho = 0$, $\Upsilon = 1$. **Direita:** o caso de alta temperatura, $\rho = 1$, $\Upsilon = 10$. As linhas tracejadas mostram a razão $\omega(\tau)/\omega_i$.

O momento magnético médio é igual a

$$\mathcal{M} = \mu_B \mathcal{C} [\rho \cos(2\nu) - 1] - \frac{\mu_B \mathcal{C}}{4u^2 - 1} \{ (1 + s_0\Upsilon) [\sin^2(\nu) - |r| \sin(2\nu)] + 2\rho|r| \sin(2\nu) \}. \quad (4.64)$$

Esta fórmula dá correções para a equação adiabática (4.34), demonstrando novamente a ausência da invariância adiabática para o momento magnético, exceto para o caso em que $\rho = 0$.

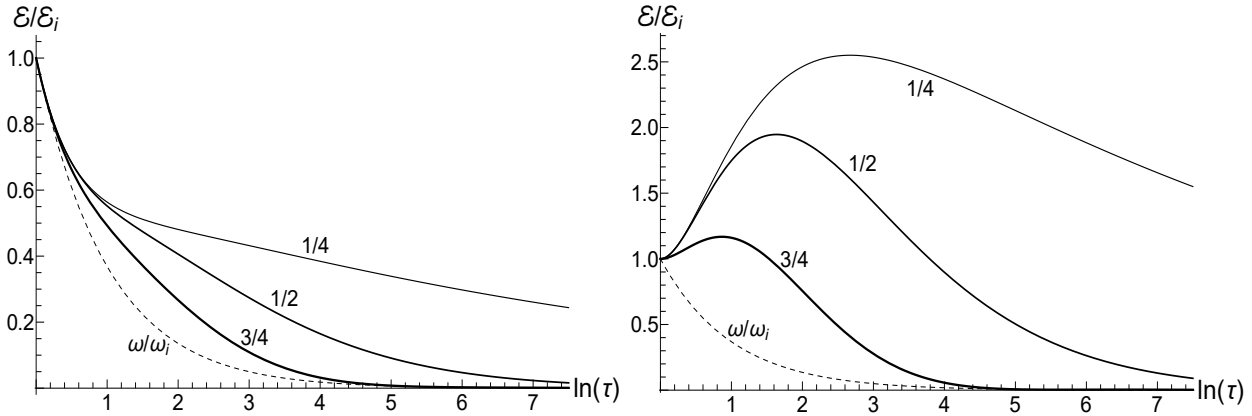


Figura 4.2: A razão $\mathcal{E}(\tau)/\mathcal{E}_i$ para diferentes valores do parâmetro da velocidade de evolução $u = \omega_0 t_0$ (mostrados próximo às curvas) para o decaimento linear inverso do campo magnético (4.54) com o parâmetro de assimetria $s = 1$ (uma armadilha isotrópica). **Esquerda:** o caso de baixa temperatura, $\rho = 0$, $\Upsilon = 1$. **Direita:** o caso de alta temperatura, $\rho = 1$, $\Upsilon = 10$. As linhas tracejadas mostram a razão $\omega(\tau)/\omega_i$.

O momento magnético médio oscila com uma frequência logaritmicamente crescente no caso “adiabático” $u > 1/2$, enquanto aumenta ilimitadamente se $u \leq 1/2$. Este comportamento é mostrado na figura 4.3. Vemos que nem as aproximações adiabáticas nem de salto repentino funcionam em todo o eixo do tempo, embora ambas as aproximações possam ter sentido dentro de alguns intervalos de tempo limitados.

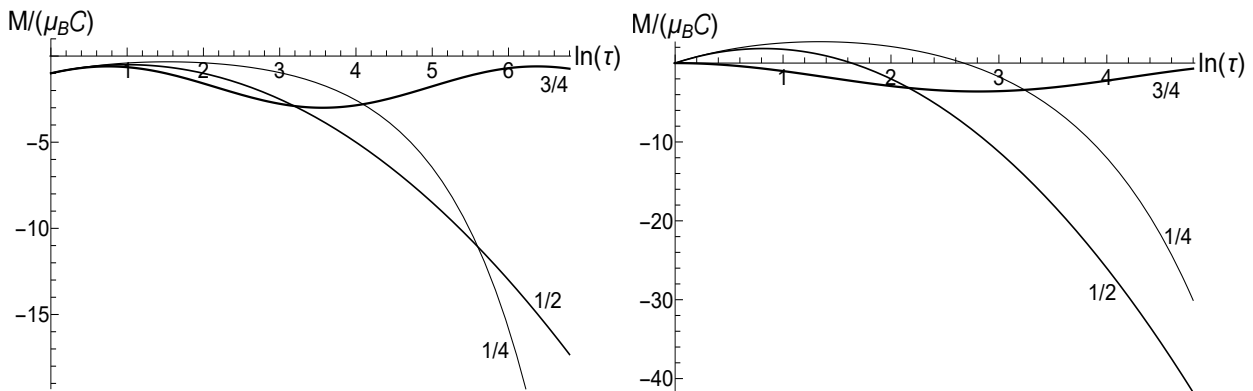


Figura 4.3: O momento magnético médio $\mathcal{M}(\tau)$ para diferentes valores do parâmetro da velocidade de evolução $u = \omega_0 t_0$ (mostrados próximo às curvas) para o decaimento linear inverso do campo magnético (4.54) com o parâmetro de assimetria $s = 1$ (uma armadilha isotrópica). **Esquerda:** o caso de baixa temperatura, $\rho = 0$, $\Upsilon = 1$. **Direita:** o caso de alta temperatura, $\rho = 1$, $\Upsilon = 10$.

4.2.2 Redução quadrática inversa do campo magnético

É interessante verificar se existe uma função $\omega(t)$ para a qual a forma adiabática da solução (4.20) é *exata*. Para encontrá-la, é preciso resolver a equação que segue a partir da fórmula (4.21): $2\omega\dot{\omega} = 3\dot{\omega}^2$.

Usando a técnica padrão, pode-se transformá-la na equação linear $dy/d\omega = 3y/\omega$ em relação à função $y = \dot{\omega}^2$. Finalmente, chegamos à seguinte função (assumindo que $\omega = \omega_0 = \text{const}$ para $t \leq 0$):

$$\omega(t) = \begin{cases} \omega_0, & \tau \leq 1 \\ \omega_0/\tau^2, & \tau \geq 1 \end{cases}, \quad \tau = 1 + t/t_0, \quad u = \omega_0 t_0. \quad (4.65)$$

Soluções analíticas para a equação (4.1) com esta função tem a forma $\tau \exp(\pm iu/\tau)$ (veja também, por exemplo, em [107]).

Agora, os parâmetros adiabáticos dependem do tempo: $|\dot{\omega}|/\omega^2 = 2\tau/u$, $|\ddot{\omega}|/\omega^3 = 6(\tau/u)^2$. Observe que $\tau/u = (t+t_0)/(\omega_0 t_0^2)$. A condição necessária para a aproximação adiabática é $u \gg 1$. No entanto, mesmo sob esta condição, espera-se que a aproximação adiabática falhe assintoticamente, quando $t \gg \omega_0^{-1} u^2$. Por outro lado, pode-se esperar que a aproximação de salto repentino seja muito boa para $u \ll 1$ e qualquer valor de τ . Mas o que acontece na realidade?

Pode-se verificar que essa função $\varepsilon(t)$ satisfazendo as condições iniciais (4.9) é a seguinte superposição das funções $\tau \exp(\pm iu/\tau)$ quando $t \geq 0$:

$$\varepsilon(t) = \frac{\tau}{u\sqrt{\omega_0}} [u \exp(i\varphi) - \sin(\varphi)] = [\omega(t)]^{-1/2} [\exp(i\varphi) - \sin(\varphi)/u], \quad (4.66)$$

$$\varphi = u(1 - 1/\tau) = \frac{u\omega_0 t}{u + \omega_0 t} \equiv \int_0^t \omega(x) dx. \quad (4.67)$$

A derivada em relação ao tempo é

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}(t) &= \frac{\sqrt{\omega_0}}{u^2 \tau} [u(\tau + iu) \exp(i\varphi) - \tau \sin(\varphi) - u \cos(\varphi)] \\ &= [\omega(t)]^{1/2} [i \exp(i\varphi)(1 - i\tau/u) - (\tau \sin \varphi + u \cos \varphi)/u^2]. \end{aligned} \quad (4.68)$$

Esta fórmula mostra claramente que a condição $u \gg 1$ não é suficiente para a validade da aproximação adiabática: uma condição adicional $\tau \ll u$ deve ser satisfeita. Outras relações úteis são

$$F_+(t) \equiv \omega(t)\varepsilon(t) + i\dot{\varepsilon}(t) = [\omega(t)]^{1/2} \{ (i\tau/u) \exp(i\varphi) - [(u + i\tau) \sin \varphi + iu \cos \varphi] / u^2 \}, \quad (4.69)$$

$$F_-(t) \equiv \omega(t)\varepsilon(t) - i\dot{\varepsilon}(t) = [\omega(t)]^{1/2} \{ 2 \exp(i\varphi)[1 - i\tau/(2u)] + [(i\tau - u) \sin \varphi + iu \cos \varphi] / u^2 \}. \quad (4.70)$$

Os valores limite quando $\tau \rightarrow \infty$,

$$F_{\pm}(\infty) = \pm i\sqrt{\omega_0} [u \exp(iu) - \sin(u)] / u^2, \quad (4.71)$$

produzem o seguinte valor assintótico diferente de zero da energia média, de acordo com a equação (4.18):

$$\mathcal{E}(\infty)/\mathcal{E}_i = \{ [u^2 + \sin^2(u) - u \sin(2u)] (1 + s_0^{-1} \Upsilon) - 2\rho [u^2 \cos(2u) + \sin^2(u) - u \sin(2u)] \} / (4u^4). \quad (4.72)$$

Tomando o limite $u \rightarrow 0$ na equação (4.72), chega-se à fórmula de aproximação do salto repentino (4.25), até os termos da ordem de u^2 . Por outro lado, as expansões de Taylor das funções (4.69) e (4.70) para $u \ll 1$,

$$F_+ = -\sqrt{\omega_0} [1 - \tau^{-2} + i(u/3)(1 - \tau^{-1})^3 + \mathcal{O}(u^2)], \quad F_- = \sqrt{\omega_0} [1 + \tau^{-2} + i(u/3)(1 + 3\tau^{-1} - 3\tau^{-2} - \tau^{-3}) + \mathcal{O}(u^2)],$$

mostram que o erro da aproximação do salto repentino é de cerca de 10% já para $t = 2t_0$ (ou $\tau = 3$). Para $t = 9t_0$ (ou $\tau = 10$), a o erro é de cerca de 1%.

A fórmula (4.32) para o momento magnético médio assume a seguinte forma

$$\mathcal{M} = -\mu_B \mathcal{C} \left\{ 1 - \rho \cos(2\varphi) + \frac{1}{2}(1 + s_0 \Upsilon - 2\rho) \left[\frac{\sin^2(\varphi)}{u^2} - \frac{\sin(2\varphi)}{u} \right] \right\}. \quad (4.73)$$

Se $u \ll 1$ (o regime de salto repentino), então,

$$\mathcal{M}(\tau) = \frac{1}{2} \mu_B \mathcal{C} [s_0 \Upsilon - 1 - (1 + s_0 \Upsilon - 2\rho)/\tau^2 + \mathcal{O}(u^2)], \quad (4.74)$$

em acordo com a equação (4.46). Por outro lado, se $u \gg 1$ (o regime adiabático), o valor assintótico (para $\tau \rightarrow \infty$)

$$\mathcal{M}(\infty) = -\mu_B \mathcal{C} [1 - \rho \cos(2u) + \mathcal{O}(u^{-1})], \quad (4.75)$$

parece ser muito sensível em relação ao valor concreto do parâmetro u . Neste caso, o momento magnético médio é preservado para o estado inicial de temperatura zero ($\rho = 0$), embora possa ser muito maior do que o inicial para estados iniciais de alta temperatura ($\rho \approx 1$), para quase todos os valores de u . As figuras 4.4 e 4.5 mostram as funções $\mathcal{E}(\tau)/\mathcal{E}_i$ e $\mathcal{M}(\tau)$ para diferentes valores do parâmetro u nas armadilhas isotrópicas com $s = 1$.

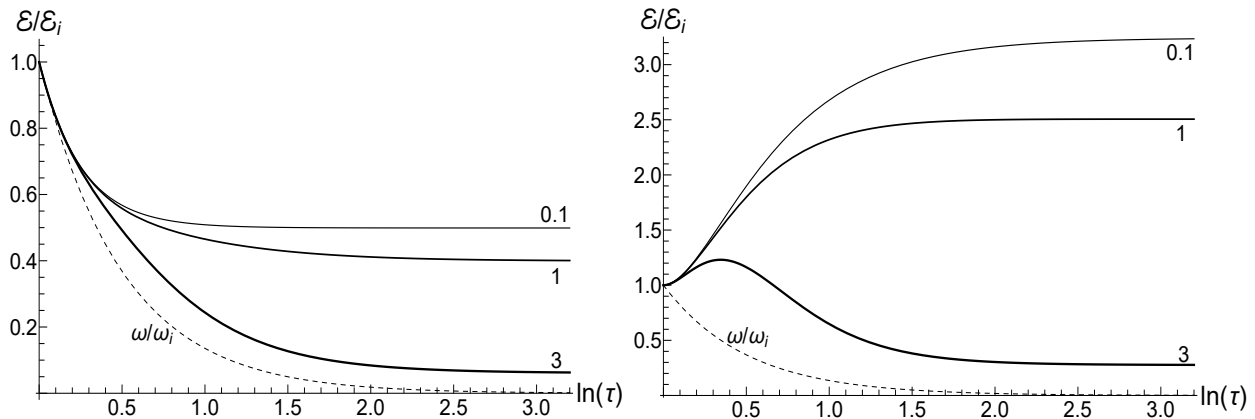


Figura 4.4: A razão $\mathcal{E}(\tau)/\mathcal{E}_i$ para diferentes valores do parâmetro da velocidade de evolução $u = \omega_0 t_0$ (mostrados próximo às curvas) para o decaimento quadrático inverso do campo magnético (4.65) com o parâmetro de assimetria $s = 1$ (uma armadilha isotrópica). **Esquerda:** o caso de baixa temperatura, $\rho = 0$, $\Upsilon = 1$. **Direita:** o caso de alta temperatura, $\rho = 1$, $\Upsilon = 10$. As linhas tracejadas mostram a razão $\omega(\tau)/\omega_i$.

4.2.3 Redução de frequência tipo exponencial para um valor final

A equação (4.1) pode ser resolvida em termos de funções trigonométricas e hiperbólicas para [108]

$$\omega^2(t) = \omega^2 + \frac{2\omega_0^2}{\cosh^2(\omega_0 t)}. \quad (4.76)$$

Este exemplo é interessante porque descreve a evolução que não é adiabática nem rápida.

Neste caso, temos $\omega_i^2 = \omega^2 + 2\omega_0^2$ e $\omega_f = \omega$. É conveniente introduzir a frequência “intermediária” $\omega_1^2 = \omega^2 + \omega_0^2$. Então, a solução satisfazendo as condições iniciais (4.9) em $t = 0$ pode ser escrita da seguinte forma,

$$\varepsilon(t) = D_+ e^{i\omega t} \left[1 + i \frac{\omega_0}{\omega} \tanh(\tau) \right] + D_- e^{-i\omega t} \left[1 - i \frac{\omega_0}{\omega} \tanh(\tau) \right], \quad D_{\pm} = \frac{\omega_1^2 \pm \omega \omega_i}{2\omega_1^2 \sqrt{\omega_i}}, \quad \tau = \omega_0 t. \quad (4.77)$$

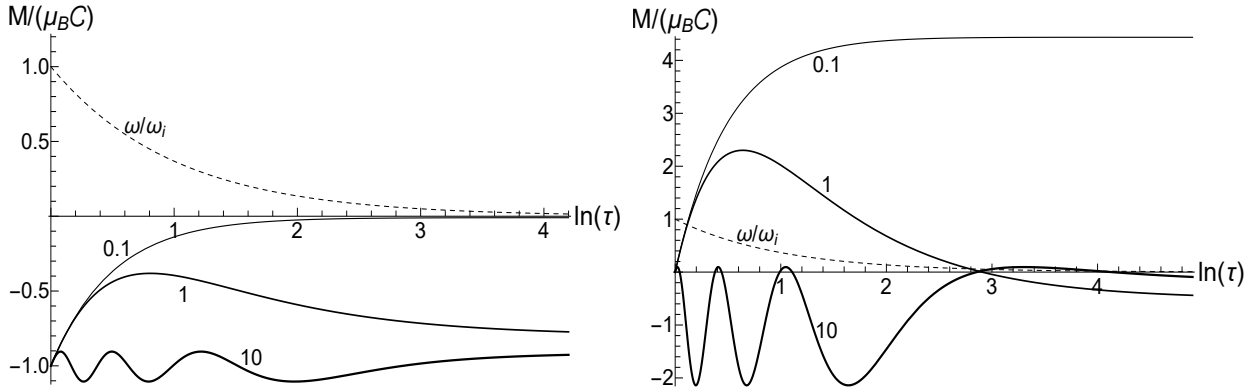


Figura 4.5: O momento magnético médio $\mathcal{M}(\tau)$ para diferentes valores do parâmetro da velocidade de evolução $u = \omega_0 t_0$ (mostrados próximo às curvas) para o decaimento quadrático inverso do campo magnético (4.65) com o parâmetro de assimetria $s = 1$ (uma armadilha isotrópica). **Esquerda:** o caso de baixa temperatura, $\rho = 0$, $\Upsilon = 1$. **Direita:** o caso de alta temperatura, $\rho = 1$, $\Upsilon = 10$. As linhas tracejadas mostram a razão $\omega(\tau)/\omega_i$.

Esta função torna-se muito próxima da forma assintótica (4.15) já para $\tau > 4$ (já que $\tanh(4) \approx 0.9993$), a menos que a razão ω/ω_0 seja extremamente pequena. Os coeficientes u_{\pm} neste caso, são dados pela fórmula $u_{\pm} = \sqrt{\omega} D_{\pm} (1 \pm i\omega_0/\omega)$. Usando a equação (4.19), obtemos a energia média assintótica

$$\mathcal{E}(\infty) = \frac{\mathcal{E}_i}{4\omega_1^2\omega_i^2} \left[(\omega_1^2 + \omega\omega_i)^2 + s_0\Upsilon (\omega_1^2 - \omega\omega_i)^2 - 2\rho\omega_0^4 \right]. \quad (4.78)$$

Se $\omega \gg \omega_0$, então a frequência final é muito próxima da inicial, então $\mathcal{E}(\infty) \approx \mathcal{E}_i$ para quaisquer valores dos parâmetros Υ e ρ . Por outro lado, se $\omega = 0$, então,

$$\mathcal{E}(\infty)/\mathcal{E}_i = (1 + s_0\Upsilon - 2\rho)/8. \quad (4.79)$$

O mínimo 1/4 desta relação é alcançado para a temperatura zero inicial e armadilha isotrópica, embora possa ser bastante alto no caso de alta temperatura. A razão $\mathcal{E}(\infty)/\mathcal{E}_i$ é uma função monotonamente crescente da frequência final ω no caso de baixa temperatura ($\Upsilon = 1$). Porém, apresenta um comportamento mais interessante em função da razão ω/ω_0 no caso de alta temperatura ($\Upsilon \gg 1$): veja a figura 4.6. Não trazemos aqui as fórmulas explícitas para a função dependente do tempo $\mathcal{E}(\tau)$, uma vez que são bastante complicadas.

Uma redução para a frequência final zero

Tomando o limite $\omega \rightarrow 0$ na equação (4.77) e assumindo $\omega_0 = 1$ (ou seja, $\omega_i = \sqrt{2}$), obtemos a solução

$$\varepsilon(t) = 2^{-1/4} \left[1 - \tau \tanh(\tau) + i\sqrt{2} \tanh(\tau) \right], \quad \dot{\varepsilon}(t) = \frac{i\sqrt{2} - \tau - \sinh(\tau) \cosh(\tau)}{2^{1/4} \cosh^2(\tau)}. \quad (4.80)$$

Por isso,

$$|F_{\pm}|^2 = \frac{\sqrt{2} [C_0(\tau) + C_{\mp}(\tau) - 2]}{2 \cosh^4(\tau)}, \quad \text{Re}(F_- F_+) = \frac{\sqrt{2} [C_0(\tau) - 3 \cosh^2(\tau) + 2]}{2 \cosh^4(\tau)},$$

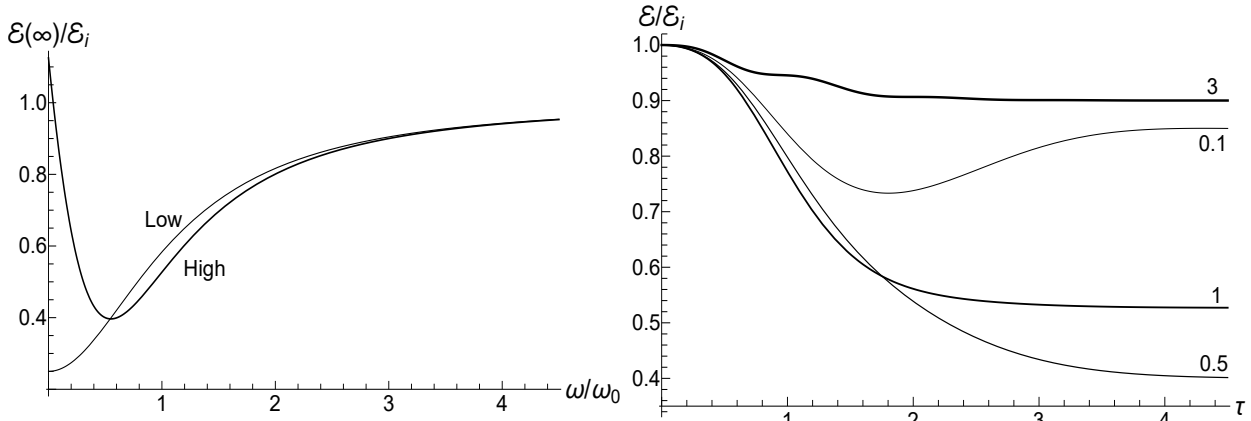


Figura 4.6: **Esquerda:** A razão assintótica $\mathcal{E}(\infty)/\mathcal{E}_i$ em função da razão ω/ω_0 para a variação exponencial do campo magnético (4.76) nos casos de baixa temperatura ($\rho = 0$, $\Upsilon = 1$) e alta temperatura ($\rho = 1$, $\Upsilon = 10$). **Direita:** a razão dependente do tempo $\mathcal{E}(\tau)/\mathcal{E}_i$ no caso de alta temperatura ($\rho = 1$, $\Upsilon = 10$), para diferentes valores da razão ω/ω_0 (mostrado próximo às curvas relacionadas). O parâmetro de assimetria $s = 1$ (a armadilha isotrópica).

$$C_0(\tau) = \cosh^4(\tau) - 2\tau \cosh(\tau) \sinh(\tau) + \tau^2 [2 \cosh^2(\tau) - 1], \quad C_{\pm}(\tau) = \cosh^2(\tau) [5 \pm 4 \cosh(\tau)].$$

A evolução da energia média é dada pela fórmula

$$\mathcal{E}(\tau)/\mathcal{E}_i = \frac{C_+ + C_0 - 2 + s_0 \Upsilon (C_- + C_0 - 2) - 2\rho [2 + C_0 - 3 \cosh^2(\tau)]}{8 \cosh^4(\tau)}. \quad (4.81)$$

O valor assintótico em $\tau \rightarrow \infty$ é dado pela equação (4.79).

Usando a equação (4.32), obtemos a seguinte expressão para o momento magnético médio:

$$\mathcal{M}(\tau) = \frac{-\mu_B \mathcal{C}}{2 \cosh(\tau)} [\mathcal{S} + (1 - s_0 \Upsilon) \cosh(\tau) - 2\mathcal{S}\tau \tanh(\tau) + (\mathcal{S}\tau^2 + 2\mathcal{S} + 8\rho) \tanh^2(\tau)], \quad (4.82)$$

onde $\mathcal{S} = 1 + s_0 \Upsilon - 2\rho$. O valor assintótico em $\tau \rightarrow \infty$ é sempre não negativo:

$$\mathcal{M}(\infty) = \mu_B \mathcal{C} (s_0 \Upsilon - 1)/2. \quad (4.83)$$

É igual a zero apenas para o estado inicial de temperatura zero na armadilha isotrópica.

4.3 Soluções exatas em termos de funções hipergeométricas e cilíndricas

Nos três exemplos da seção anterior, o sinal da frequência (ou do campo magnético) não muda. Parece que um comportamento mais interessante pode ser observado nas situações em que o campo magnético muda de sinal. Nesta seção, consideramos um exemplo de frequência com variação exponencial no semieixo do tempo na seguinte forma:

$$\omega(t) = \begin{cases} \omega_i, & t \leq 0 \\ \omega_f + (\omega_i - \omega_f) \exp(-\kappa t), & t \geq 0 \end{cases} \quad (4.84)$$

Soluções para a equação (4.1) com a função (4.84) foram consideradas em [15]. Elas podem ser expressas em termos da função hipergeométrica confluyente. Isso pode ser obtido por meio da seguinte transformação:

$$\varepsilon = x^{(c-1)/2} \exp(-x/2)y(x), \quad x = x_0 \exp(-\kappa t).$$

Então, a equação (4.1) assume a forma canônica da equação para a função hipergeométrica confluyente,

$$xd^2y/dx^2 + (c-x)dy/dx - ay = 0, \quad (4.85)$$

com o seguinte conjunto de parâmetros:

$$x_0 = 2i\mu, \quad a = 1/2, \quad c = 1 - 2i\gamma, \quad \mu = (\omega_i - \omega_f)/\kappa, \quad \gamma = \omega_f/\kappa. \quad (4.86)$$

Escolhendo a solução para a equação (4.85) que é regular em $x = 0$ [109],

$$\Phi(a; c; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a(a+1)\dots(a+n-1)x^n}{c(c+1)\dots(c+n-1)n!}, \quad (4.87)$$

obtemos a solução dependente do tempo para a equação (4.1) que é regular em $t = \infty$:

$$\varepsilon_1(t) = \omega_i^{-1/2} \exp[i\phi(t)] \frac{\Phi[1/2; 1 - 2i\gamma; 2i\mu\xi(t)]}{\Phi(1/2; 1 - 2i\gamma; 2i\mu)}, \quad \xi(t) = \exp(-\kappa t), \quad \phi(t) = \omega_f t + \mu[1 - \xi(t)]. \quad (4.88)$$

No entanto, embora a função (4.88) satisfaça a primeira condição inicial (4.9), $\varepsilon_1(0) = \omega_i^{-1/2}$, ela não satisfaz a segunda condição, devido à derivada em relação ao tempo diferente de zero da função $\Phi[1/2; 1 - 2i\gamma; 2i\mu\xi(t)]$. Portanto, a solução complexa correta para a equação (4.1), satisfazendo (4.9), deve ser construída como uma combinação linear das funções $\varepsilon_1(t)$ e $\varepsilon_1^*(t)$:

$$\varepsilon(t) = D_+ \varepsilon_1(t) + D_- \varepsilon_1^*(t), \quad (4.89)$$

$$D_+ = \frac{1 - \lambda^*/2}{1 - \text{Re}\lambda}, \quad D_- = -\frac{\lambda/2}{1 - \text{Re}\lambda} = 1 - D_+, \quad \lambda = \frac{2(\omega_i - \omega_f) \Phi'(1/2; 1 - 2i\gamma; 2i\mu)}{\omega_i \Phi(1/2; 1 - 2i\gamma; 2i\mu)}. \quad (4.90)$$

Aqui Φ' é a derivada da função $\Phi(a; c; x)$ em relação ao seu argumento x . Elá é dada pela relação [109]

$$\Phi'(a; c; x) = (a/c)\Phi(a+1; c+1; x).$$

Portanto, o parâmetro λ também pode ser escrito na forma

$$\lambda = \frac{(\omega_i - \omega_f) \Phi(3/2; 2 - 2i\gamma; 2i\mu)}{\omega_i (1 - 2i\gamma) \Phi(1/2; 1 - 2i\gamma; 2i\mu)}. \quad (4.91)$$

Quando $t \rightarrow \infty$, então $\xi \rightarrow 0$ e $\Phi(a; c; 2i\mu\xi) \rightarrow 1$. Portanto, temos assintoticamente

$$\varepsilon_1(t) = \frac{\exp[i(\omega_f t + \mu)]}{\omega_i^{1/2} \Phi(1/2; 1 - 2i\gamma; 2i\mu)}, \quad \dot{\varepsilon}_1(t) = i\omega_f \varepsilon_1(t).$$

Isso significa que

$$u_+ = \sqrt{\frac{|\omega_f|}{\omega_i}} \times \begin{cases} \frac{D_+ \exp(i\mu)}{\Phi(1/2; 1 - 2i\gamma; 2i\mu)}, & \omega_f > 0 \\ \frac{D_- \exp(-i\mu)}{[\Phi(1/2; 1 - 2i\gamma; 2i\mu)]^*}, & \omega_f < 0 \end{cases},$$

$$u_- = \sqrt{\frac{|\omega_f|}{\omega_i}} \times \begin{cases} \frac{D_- \exp(-i\mu)}{[\Phi(1/2; 1 - 2i\gamma; 2i\mu)]^*}, & \omega_f > 0 \\ \frac{D_+ \exp(i\mu)}{\Phi(1/2; 1 - 2i\gamma; 2i\mu)}, & \omega_f < 0 \end{cases}. \quad (4.92)$$

Então, a identidade (4.8) assume a seguinte forma (para valores positivos e negativos de ω_f)

$$(\omega_f/\omega_i) [(1 - \text{Re}\lambda)|\Phi(1/2; 1 - 2i\gamma; 2i\mu)|^2]^{-1} = 1. \quad (4.93)$$

Conseqüentemente, os sinais de ω_f e $1 - \text{Re}\lambda$ coincidem. Outras conseqüências de (4.93) são as seguintes fórmulas úteis:

$$|u_-|^2 = \frac{|\lambda|^2}{4[1 - \text{Re}(\lambda)]}, \quad \omega_f > 0; \quad |u_+|^2 = \frac{|\lambda|^2}{4[\text{Re}(\lambda) - 1]}, \quad \omega_f < 0. \quad (4.94)$$

$$u_+ u_- = \frac{(|\lambda|^2 - 2\lambda)\omega_f}{4[1 - \text{Re}(\lambda)]|\omega_f|}. \quad (4.95)$$

4.3.1 Energia média

As equações (4.19), (4.94) e (4.95) levam à seguinte razão entre as energias médias final e inicial:

$$\frac{\mathcal{E}_f}{\mathcal{E}_i} = \frac{\omega_f [(1 + s_0\Upsilon - 2\rho)|\lambda|^2 + 4\rho\text{Re}(\lambda)]}{4\omega_i[1 - \text{Re}(\lambda)]} + \frac{\omega_f}{\omega_i} \times \begin{cases} 1, & \omega_f > 0 \\ s_0\Upsilon, & \omega_f < 0 \end{cases}. \quad (4.96)$$

No caso de temperatura inicial zero e armadilha isotrópica ($\rho = 0$ e $s_0\Upsilon = 1$), temos

$$\frac{\mathcal{E}_f}{\mathcal{E}_i} = \frac{\omega_f}{\omega_i} \left(1 + \frac{|\lambda|^2/2}{1 - \text{Re}\lambda} \right). \quad (4.97)$$

A figura 4.7 mostra a razão $\mathcal{E}_f/\mathcal{E}_i$ em função da proporção ω_f/ω_i com vários valores fixos do parâmetro κ , para os estados iniciais de temperatura zero e de alta temperatura. A precisão dos cálculos numéricos (realizados com auxílio do Mathematica e do Mapple) foi verificada pelo cumprimento da identidade (4.93). O caso em que $\kappa = 10\omega_i$ corresponde à aproximação de salto repentino discutida na seção 4.1.1. Pode-se ver a simetria em relação à mudança de sinal da frequência final ω_f , bem como a cúspide em $\omega_f = 0$ no regime de alta temperatura. No entanto, a simetria é quebrada para valores moderados de κ , e uma grande assimetria é observada para $\kappa \ll \omega_i$. Por exemplo, a curva $\mathcal{E}_f(\omega_f)$ é praticamente a linha reta $\mathcal{E}_f = \mathcal{E}_i\omega_f/\omega_i$ para $\kappa/\omega_i = 0.1$ e $\omega_f > 0$ no regime de baixa temperatura. Mas se $\omega_f < 0$, nós vemos a linha reta $\mathcal{E}_f = 3\mathcal{E}_i|\omega_f|/\omega_i$ para $|\omega_f| \ll \omega_i$. Esta assimetria (incluindo o “estranho” coeficiente 3) é explicada no apêndice D.

A figura 4.8 mostra a razão $\mathcal{E}_f/\mathcal{E}_i$ em função da razão κ/ω_i para valores positivos da frequência final ω_f . Essa dependência é bastante fraca, exceto para pequenos valores de ω_f , quando a energia final acaba sendo muito maior do que a inicial no regime de salto quase repentino com $\kappa/\omega_i \gg 1$, especialmente no caso de alta temperatura. Para valores negativos de ω_f , esta razão é mostrada na figura 4.9 para o caso de alta temperatura ($\rho = 1$, $s_0\Upsilon = 10$). Os gráficos no caso de baixa temperatura parecem semelhantes, apenas a escala vertical é diminuída.

De acordo com a figura 4.8, a aproximação do salto repentino parece ser bastante razoável já para $\kappa > 5\omega_i$. Em princípio, pode-se esperar que esta aproximação seja válida sob a condição $\kappa \gg \omega_i$. De fato, se $\kappa \gg \omega_{i,f}$, então os coeficientes μ e γ são muito pequenos. Colocando $\gamma = \mu = 0$ nos argumentos das funções hipergeométricas na equação (4.91), obtém-se $\lambda = (\omega_i - \omega_f)/\omega_i$. Então, é fácil verificar que as fórmulas (4.92) coincidem com as expressões para o salto instantâneo (4.23) para os coeficientes u_{\pm} . Melhores estimativas da precisão desta aproximação são fornecidas no apêndice E.

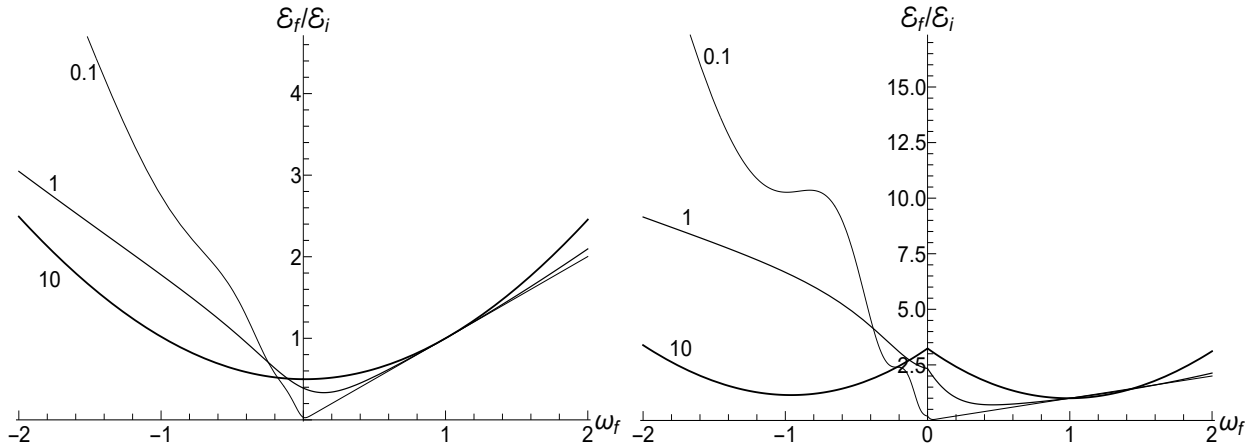


Figura 4.7: A razão $\mathcal{E}_f/\mathcal{E}_i$ em função da frequência final ω_f para diferentes valores do parâmetro κ (mostrados próximo às respectivas linhas). A frequência inicial considerada é $\omega_i = 1$. **Esquerda:** $\rho = 0$, $s_0\Upsilon = 1$. **Direita:** $\rho = 1$, $s_0\Upsilon = 10$.

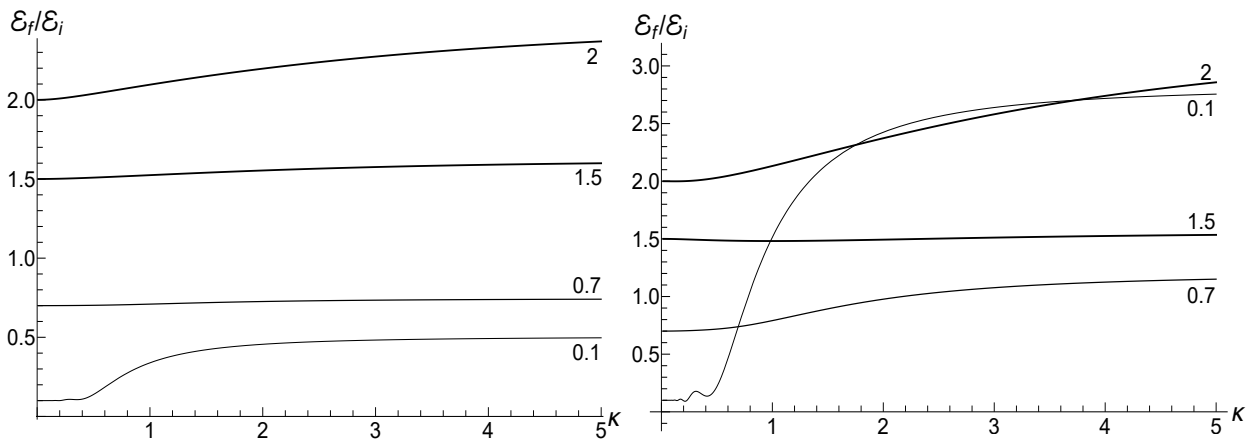


Figura 4.8: A razão $\mathcal{E}_f/\mathcal{E}_i$ em função do parâmetro κ para diferentes valores positivos da frequência final ω_f (mostrados próximo às respectivas linhas). A frequência inicial considerada é $\omega_i = 1$. **Esquerda:** $\rho = 0$, $s_0\Upsilon = 1$. **Direita:** $\rho = 1$, $s_0\Upsilon = 10$.

4.3.2 Momento magnético médio no regime assintótico

Tendo em vista as equações (4.37)-(4.40), se fazem necessários dois coeficientes, $|u_-|^2$ (ou $|u_+|^2$) e u_+u_- , para calcular o momento magnético médio no regime assintótico. Eles são dados pelas fórmulas (4.94) e (4.95). As expressões explícitas são bastante complicadas. Trazemos aqui apenas a fórmula para a razão $R = |\widetilde{\Delta\mathcal{M}}|/|\langle\mathcal{M}\rangle|$ no caso da temperatura inicial zero. Então, as equações (4.41) e (4.95) resultam na fórmula

$$R = \frac{|\lambda|\sqrt{|\lambda|^2 + 4[1 - \text{Re}(\lambda)]}}{|\lambda|^2 + 2[1 - \text{Re}(\lambda)]}. \quad (4.98)$$

As figuras 4.10 e 4.11 mostram a razão (4.98) em função de κ para diferentes valores fixos da frequência final ω_f (assumindo $\omega_i = 1$) e como função de ω_f para diferentes valores de κ . Vemos que a dependência $R(\kappa)$ é bastante diferente para valores positivos e negativos da frequência final ω_f , especialmente se $\kappa \ll \omega_i$ (uma

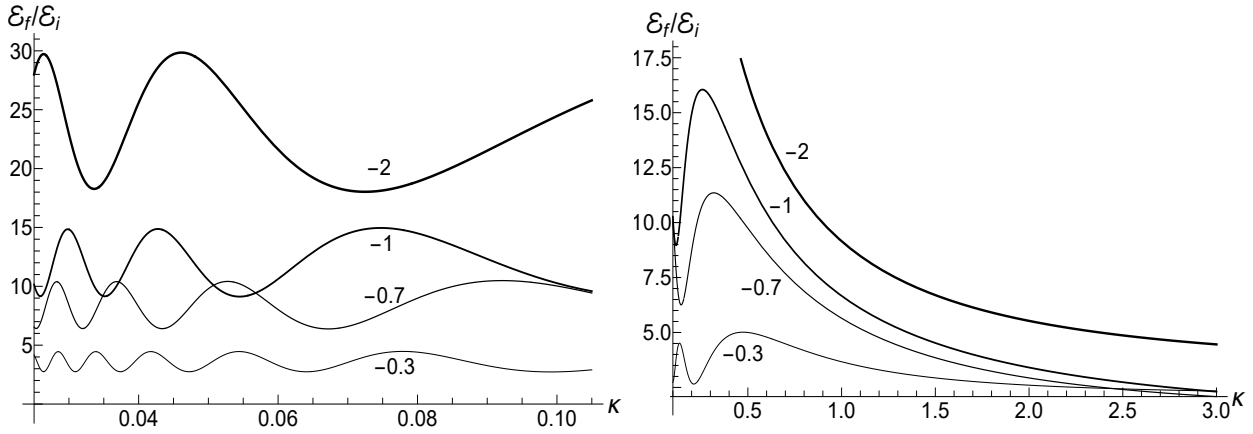


Figura 4.9: A razão $\mathcal{E}_f/\mathcal{E}_i$ em função do parâmetro κ para diferentes valores negativos da frequência final ω_f (mostrados próximo às respectivas linhas). A frequência inicial considerada é $\omega_i = 1$. Outros parâmetros são: $\rho = 1$, $s_0\Upsilon = 10$.

evolução lenta). A função $R(\omega_f; \kappa)$ também mostra uma forte assimetria para valores pequenos e moderados do parâmetro fixo κ . Uma simetria em relação ao sinal da frequência ω_f é restaurada para $\kappa \gg 1$, quando $R(\omega_f; \infty)$ coincide com a fórmula de salto repentino (4.45).

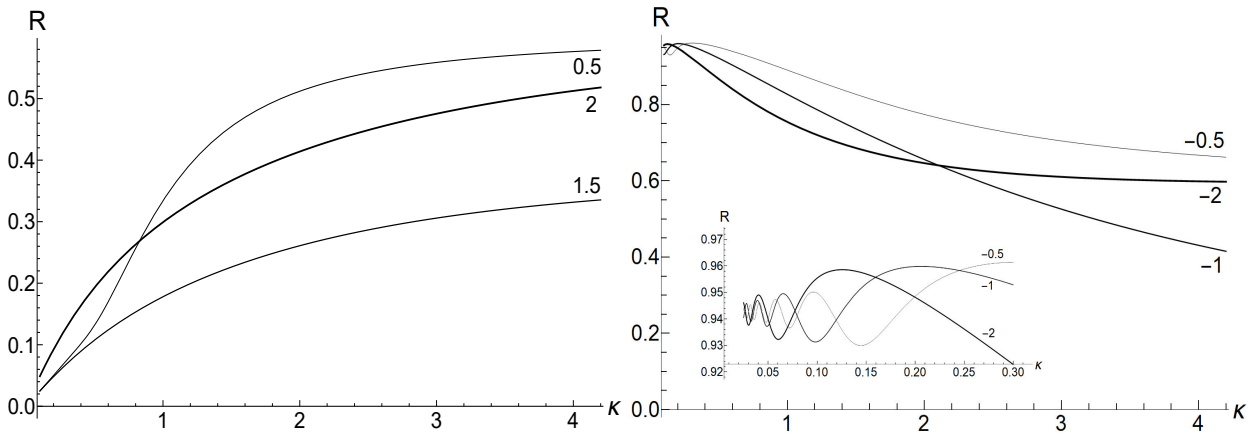


Figura 4.10: A razão $R = |\widetilde{\Delta\mathcal{M}}|/|\langle\langle\mathcal{M}\rangle\rangle|$ no caso da temperatura inicial zero ($\rho = 0$ and $s_0\Upsilon = 1$) em função do parâmetro κ para diferentes valores da frequência final ω_f (mostrados próximo às respectivas linhas). A frequência inicial considerada é $\omega_i = 1$. **Esquerda:** $\omega_f > 0$. **Direita:** $\omega_f < 0$.

De acordo com a figura 4.11, vemos que $R = 1$ para $\omega_f = 0$ e qualquer valor do parâmetro κ . Este resultado pode ser obtido a partir da fórmula (4.98) da seguinte maneira. Se $\omega_f = 0$, então o parâmetro γ definido na equação (4.86) é igual a zero. Neste caso, podemos usar a fórmula que relaciona a função hipergeométrica confluyente com a função de Bessel [109]:

$$\Phi(1/2; 1; 2i\mu) = J_0(\mu)e^{i\mu}, \quad \Phi(1/2; 1; x) = J_0(x/2i)e^{x/2}. \quad (4.99)$$

Então, $d\Phi(1/2; 1; x)/dx = (1/2)e^{x/2}[J_0(x/2i) - iJ_1(x/2i)]$. Usando a fórmula $J_0'(x) = -J_1(x)$ e a fórmula

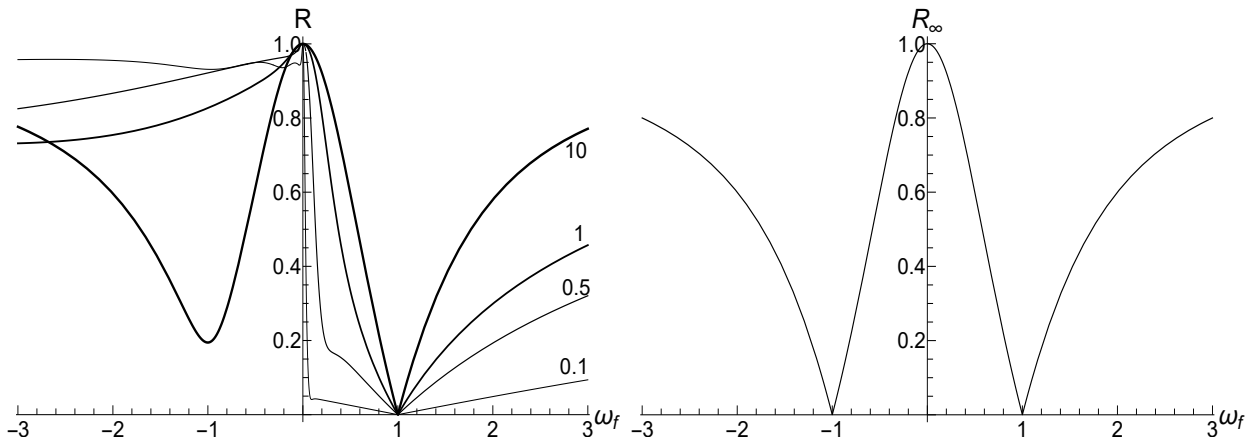


Figura 4.11: A razão $R = |\widetilde{\Delta\mathcal{M}}|/|\langle\langle\mathcal{M}\rangle\rangle|$ no caso de temperatura inicial zero ($\rho = 0$ and $s_0\Upsilon = 1$) em função da frequência final ω_f , a frequência inicial considerada é $\omega_i = 1$. **Esquerda:** diferentes valores do parâmetro κ (mostrados próximo às respectivas linhas). **Direita:** o limite quando $\kappa \rightarrow \infty$.

para λ na equação (4.90), nós obtemos a expressão

$$\lambda = 1 + \frac{iJ_1(\mu)}{2J_0(\mu)}. \quad (4.100)$$

Como $\text{Re}(\lambda) = 1$ nesta aproximação, a equação (4.98) fornece $R = 1$.

A identidade (4.93) mostra que a fração $[(1 - \text{Re}\lambda)]^{-1}$ se comporta como (ω_i/ω_f) quando $\omega_f \rightarrow 0$. Então, a equação (4.94) nos diz que os coeficientes u_{\pm}^2 diverge como $|\omega_i/\omega_f|$ neste limite. Tendo em vista a equação (4.38), concluímos que o momento magnético médio $\langle\langle\mathcal{M}\rangle\rangle$ cresce ilimitadamente com o tempo se $\omega_f = 0$.

4.3.3 Desligamento exponencial do campo: soluções em termos das funções de Hankel

Para entender melhor o comportamento da energia média no caso em que $\omega_f = 0$, notamos que a substituição $x = \mu \exp(-\kappa t)$ com $\mu = \omega_i/\kappa$ transforma a equação (4.1) com a função $\omega(t) = \omega_i \exp(-\kappa t)$ na equação de Bessel

$$x^2 f'' + x f' + x^2 f = 0. \quad (4.101)$$

Soluções complexas para esta equação podem ser escritas como combinações lineares das funções de Hankel de ordem zero, $H_0(x) = J_0(x) + iY_0(x)$ e $H_0^*(x)$, onde $J_0(x)$ é a função de Bessel e $Y_0(x)$ a função Neumann [109]. Então, a função $\varepsilon(t)$ pode ser escrita na forma (4.89) com

$$\varepsilon_1 = \frac{H_0(\mu\xi)}{\sqrt{\omega_i}H_0(\mu)}, \quad \hat{\varepsilon}_1 = \frac{\xi\sqrt{\omega_i}H_1(\mu\xi)}{H_0(\mu)}, \quad \xi = e^{-\kappa t}, \quad (4.102)$$

assim

$$D_+ = \frac{1 + iR^*}{2\text{Im}(R)}, \quad D_- = -\frac{1 + iR}{2\text{Im}(R)}, \quad R = \frac{H_1(\mu)}{H_0(\mu)}, \quad \text{Im}(R) = -2[\pi\mu|H_0(\mu)|^2]^{-1}. \quad (4.103)$$

As seguintes fórmulas conhecidas foram usadas aqui:

$$H_0'(x) = -H_1(x), \quad H_0(x)H_0'^*(x) - H_0'(x)H_0^*(x) = -4i/(\pi x). \quad (4.104)$$

As funções $F_{\pm}(t)$, introduzidas na equação (4.12), podem ser escritas da seguinte forma,

$$F_{\pm}(\xi) = \xi\sqrt{\omega_i} [D_+h_{\pm}(\xi) + D_-h_{\mp}^*(\xi)], \quad h_{\pm}(\xi) = [H_0(\mu\xi) \pm iH_1(\mu\xi)]/H_0(\mu). \quad (4.105)$$

Energia média

A energia média dependente do tempo é dada pela equação (4.18) com os seguintes coeficientes funcionais:

$$|F_{\pm}(\xi)|^2 = \frac{(\pi\mu\xi)^2\omega_i}{8} \left\{ V_+(\xi)V_+(1) - \text{Re} [U_+^*(1)U_+(\xi)] \mp \frac{16}{(\pi\mu)^2\xi} \right\}, \quad (4.106)$$

$$\text{Re}[F_-(\xi)F_+(\xi)] = \frac{(\pi\mu\xi)^2\omega_i}{8} \left\{ \text{Re} [U_-^*(1)U_+(\xi)] - V_+(\xi)V_-(1) \right\}, \quad (4.107)$$

onde

$$V_{\pm}(\xi) = |H_0(\mu\xi)|^2 \pm |H_1(\mu\xi)|^2, \quad U_{\pm}(\xi) = H_0^2(\mu\xi) \pm H_1^2(\mu\xi). \quad (4.108)$$

A expressão mais simples pode ser escrita para o estado inicial de temperatura zero:

$$\mathcal{E}(t)/\mathcal{E}_i = (\pi\mu\xi)^2 \left\{ V_+(1)V_+(\xi) - \text{Re} [U_+^*(1)U_+(\xi)] \right\} / 16, \quad (4.109)$$

Gráficos típicos da razão $\mathcal{E}/\mathcal{E}_i$ em função do parâmetro adimensional $\tau = \kappa t$ são dados na figura 4.12. Gráficos semelhantes para $\mathcal{E}/\mathcal{E}_i$ em função da variável ξ são dados na figura 4.13. Observe que pequenos valores do parâmetro $\mu = \omega_i/\kappa$ correspondem ao “salto” quase instantâneo da frequência para um valor final nulo, enquanto o caso em que $\mu \gg 1$ corresponde a um declínio de frequência lento (quase-adiabático) para zero. O lado esquerdo da figura 4.13 com $\mu = 10$ mostra evolução praticamente adiabática $\mathcal{E}/\mathcal{E}_i = \xi$ até valores muito pequenos de ξ . Porém, a adiabaticidade é sempre quebrada no estágio final da evolução, quando a energia média tende a um valor final diferente de zero, mesmo na temperatura zero. Por outro lado, a evolução adiabática torna-se muito aproximada no caso de alta temperatura, como se pode ver no lado direito da figura 4.13, onde a linha com o mesmo valor $\mu = 10$ mostra claramente as oscilações em torno da linha reta $\mathcal{E}/\mathcal{E}_i = \xi$. A energia final é menor do que a inicial para qualquer valor de μ no regime de temperatura zero. Mas pode ser muito maior do que \mathcal{E}_i no caso de alta temperatura para $\mu < 2$, como se pode ver nas figuras 4.12 e 4.13.

Se $t \rightarrow \infty$, então $\xi \rightarrow 0$, assim [109] $\xi H_0(\mu\xi) \rightarrow 0$, mas $\xi H_1(\mu\xi) \rightarrow -2i/(\pi\mu)$. Usando essas relações, pode-se obter, após alguma álgebra, a seguinte fórmula para a energia média final:

$$\mathcal{E}_f/\mathcal{E}_i = \left\{ (1 + s_0\Upsilon) [J_0^2(\mu) + J_1^2(\mu)] + 2\rho [J_0^2(\mu) - J_1^2(\mu)] \right\} / 4. \quad (4.110)$$

O lado direito desta equação é mostrado na figura 4.14 em função do parâmetro κ .

Se $\mu \ll 1$, a fórmula (4.110) assume a forma

$$\mathcal{E}_f/\mathcal{E}_i \approx \left\{ (1 + s_0\Upsilon) (1 - \mu^2/4) + 2\rho (1 - 3\mu^2/4) \right\} / 4.$$

Colocando $\mu = 0$, retornamos à fórmula de aproximação do salto instantâneo (4.25). Vemos que a precisão relativa desta aproximação é da ordem de $\mu^2/4$.

No limite adiabático, $\kappa \ll \omega_i$, as fórmulas assintóticas conhecidas para $\mu \gg 1$,

$$J_0(\mu) \approx \sqrt{2/(\pi\mu)} \cos(\mu - \pi/4), \quad J_1(\mu) \approx \sqrt{2/(\pi\mu)} \sin(\mu - \pi/4),$$

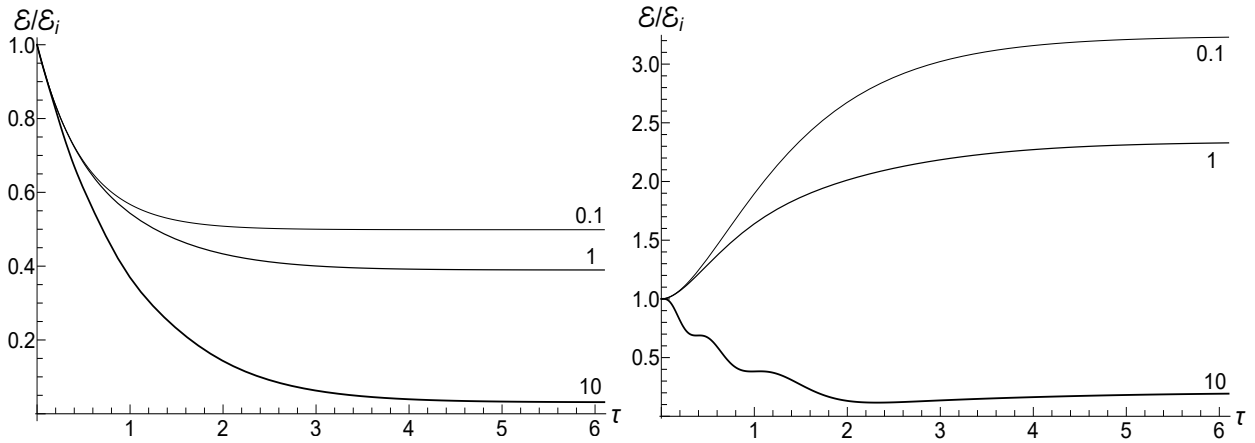


Figura 4.12: A razão $\mathcal{E}/\mathcal{E}_i$ em função do tempo adimensional $\tau = \kappa t$ para diferentes valores do parâmetro μ (mostrados próximo às respectivas linhas). A frequência inicial considerada é $\omega_i = 1$. **Esquerda:** $\rho = 0$, $s_0\Upsilon = 1$. **Direita:** $\rho = 1$, $s_0\Upsilon = 10$.

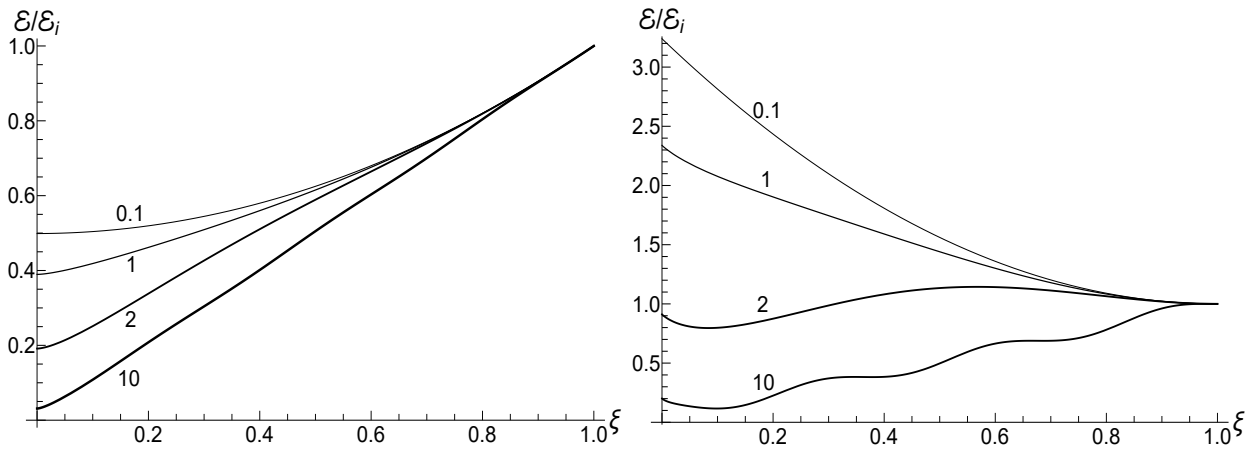


Figura 4.13: A razão $\mathcal{E}/\mathcal{E}_i$ em função da variável $\xi = \omega(t)/\omega_i$ para diferentes valores do parâmetro μ (mostrados próximo às respectivas linhas). A frequência inicial considerada é $\omega_i = 1$. **Esquerda:** $\rho = 0$, $s_0\Upsilon = 1$. **Direita:** $\rho = 1$, $s_0\Upsilon = 10$.

levam à relação

$$\mathcal{E}_f/\mathcal{E}_i \approx \kappa [1 + s_0\Upsilon + 2\rho \sin(2\omega_i/\kappa)] / (2\pi\omega_i). \quad (4.111)$$

Essa proporcionalidade inicial em relação a κ é claramente vista na figura 4.14. Por outro lado, esta relação demonstra fortes oscilações em função de κ no regime de alta temperatura.

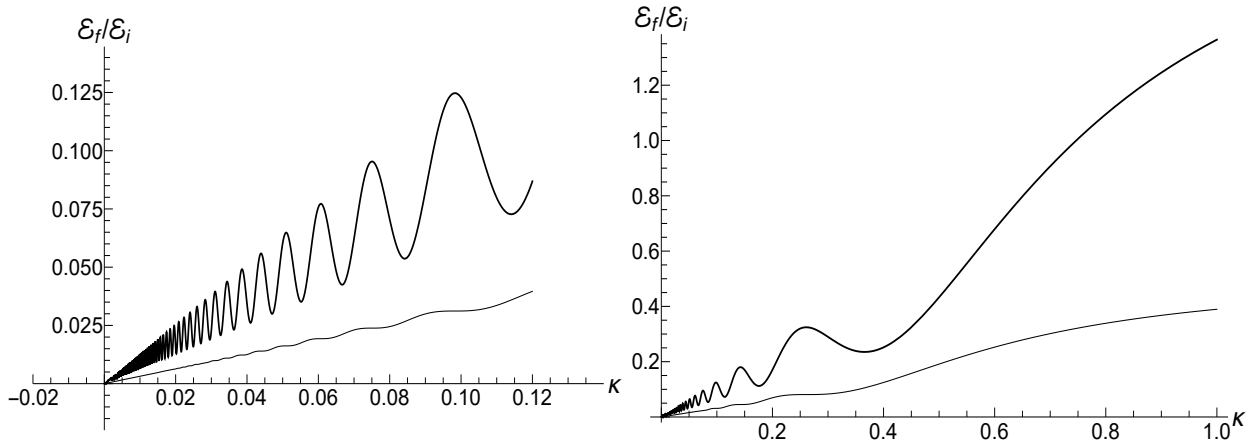


Figura 4.14: A razão $\mathcal{E}_f/\mathcal{E}_i$ em função do parâmetro κ para $\omega_i = 1$. **Curvas inferiores:** $\rho = 0$, $s_0\Upsilon = 1$. **Curvas superiores:** $\rho = 1$, $s_0\Upsilon = 5$.

4.4 Os perfis de Epstein–Eckart: soluções em termos das funções hipergeométricas de Gauss

Soluções exatas em termos da função hipergeométrica de Gauss

$$F(a, b; c; x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n x^n}{(c)_n n!}, \quad (4.112)$$

satisfazendo a equação

$$x(1-x)F'' + (c - (a+b+1)x)F' - abF = 0, \quad (4.113)$$

podem ser encontradas para a família dos perfis de Epstein–Eckart [110,111], que são combinações de algumas frações contendo funções exponenciais do tempo. A família total possui quatro parâmetros constantes. Para simplificar a análise, limitamo-nos aqui a duas subfamílias simples contendo dois ou três parâmetros.

4.4.1 Evolução em todo o eixo do tempo

O primeiro exemplo corresponde à frequência de Larmor da forma

$$\omega(t) = \frac{\omega_f \exp(\kappa t) + \omega_i}{\exp(\kappa t) + 1}, \quad -\infty < t < \infty, \quad \kappa > 0. \quad (4.114)$$

Pode-se verificar (veja o apêndice F) que a equação (4.1) com $\omega(t)$ dada pela equação (4.114) possui a solução

$$\varepsilon(t) = \omega_i^{-1/2} e^{i\omega_i t} (1 + \zeta)^d F(a, b; c; -\zeta), \quad \zeta = e^{\kappa t}, \quad (4.115)$$

com os seguintes parâmetros:

$$d = 1/2 - \sqrt{1/4 - (\tilde{\omega}_i - \tilde{\omega}_f)^2}, \quad \tilde{\omega}_{i,k} \equiv \omega_{i,k}/\kappa, \quad (4.116)$$

$$a = d + i(\tilde{\omega}_i + |\tilde{\omega}_f|), \quad b = d + i(\tilde{\omega}_i - |\tilde{\omega}_f|), \quad c = 1 + 2i\tilde{\omega}_i. \quad (4.117)$$

Existe também a solução com $d = 1/2 + \sqrt{\dots}$, mas é a escolha (4.116) que leva à solução desejada $\omega_i^{-1/2} \exp(i\omega_i t)$ se $\omega_i = \omega_f$. Como $\zeta = d\zeta/dt = 0$ para $t = -\infty$, a função (4.115) se comporta exatamente como $\omega_i^{-1/2} \exp(i\omega_i t)$ quando $t \rightarrow -\infty$.

Observe, no entanto, que a função (4.115) é solução para a equação (4.1) apenas se $t \leq 0$, quando $\zeta \leq 1$. Para $t \geq 0$, deve-se usar a continuação analítica da função hipergeométrica, dada pela formula 2.10(2) de [109]:

$$F(a, b; c; -\zeta) = B_1 \zeta^{-a} F(a, 1 - c + a; 1 - b + a; -\zeta^{-1}) + B_2 \zeta^{-b} F(b, 1 - c + b; 1 - a + b; -\zeta^{-1}), \quad (4.118)$$

onde

$$B_1 = \frac{\Gamma(c)\Gamma(b-a)}{\Gamma(b)\Gamma(c-a)}, \quad B_2 = \frac{\Gamma(c)\Gamma(a-b)}{\Gamma(a)\Gamma(c-b)}. \quad (4.119)$$

Portanto, quando $\zeta \rightarrow \infty$ chegamos a forma (4.15) de $\varepsilon(t)$ para $t \rightarrow \infty$, com os seguintes coeficientes u_{\pm} :

$$u_{\pm} = \frac{(|\omega_f|/\omega_i)^{1/2} \Gamma(1 + 2i\tilde{\omega}_i) \Gamma(\pm 2i|\tilde{\omega}_f|)}{\Gamma[d + i(\tilde{\omega}_i \pm |\tilde{\omega}_f|)] \Gamma[1 + i(\tilde{\omega}_i \pm |\tilde{\omega}_f|) - d]}. \quad (4.120)$$

Se $|\tilde{\omega}_{i,f}| \ll 1$, então $d \approx (\tilde{\omega}_i - \tilde{\omega}_f)^2$, e a fórmula $\Gamma(x) = \Gamma(1+x)/x \approx 1/x$ (válida para $|x| \ll 1$) leva imediatamente às relações do salto repentino (4.23). Analisando o máximo da razão $|\dot{\omega}/\omega^2|$ em função do tempo para o perfil Epstein–Eckart (4.114) com $\omega_f > 0$, obtemos a condição da aproximação adiabática $\kappa|\omega_f - \omega_i|/(\omega_f \omega_i) \ll 1$, que é equivalente a $\kappa \ll \min(\omega_f, \omega_i)$, se as frequências inicial e final forem bem diferentes.

No caso especial de $\omega_f = -\omega_i$, usando a fórmula $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \pi/\sin(\pi z)$, obtemos uma expressão simples

$$u_- = \frac{i \sin(\pi d)}{\sinh(2\pi\tilde{\omega}_i)} = \frac{i \cos\left(\pi\sqrt{1/4 - 4\tilde{\omega}_i^2}\right)}{\sinh(2\pi\tilde{\omega}_i)}. \quad (4.121)$$

No limite de transição rápida, $\tilde{\omega}_i \ll 1$, temos $u_- \approx 2i\tilde{\omega}_i$, assim \mathcal{E}_f está perto de \mathcal{E}_i , de acordo com a aproximação de salto repentino.

No limite adiabático, $\tilde{\omega}_i \gg 1$, temos $u_- \approx i \coth(2\pi\tilde{\omega}_i)$. Observe que o parâmetro ρ não é muito importante para a energia média: $\rho = 0$ na temperatura zero e $\rho \ll s_0 \Upsilon$ no caso de alta temperatura. Levando em consideração esta observação, obtemos a seguinte razão limite para $\tilde{\omega}_i > 1$ (e $\omega_f = -\omega_i$): $\mathcal{E}_f/\mathcal{E}_i \approx 2 + s_0 \Upsilon$ (ou seja, $\mathcal{E}_f/\mathcal{E}_i \approx 3$ na temperatura zero). Usando a equação (4.43), pode-se obter as seguintes expressões para o momento magnético no caso em que $\omega_f = -\omega_i$:

$$\frac{\langle\langle \mathcal{M} \rangle\rangle}{\mu_{BC}} \approx \begin{cases} s_0 \Upsilon & \tilde{\omega}_i \ll 1 \\ 1 + 2s_0 \Upsilon & \tilde{\omega}_i \gg 1 \end{cases}, \quad \frac{|\widetilde{\Delta \mathcal{M}}|}{\mu_{BC}} \approx (1 + s_0 \Upsilon) \times \begin{cases} 2\tilde{\omega}_i & \tilde{\omega}_i \ll 1 \\ \sqrt{2} & \tilde{\omega}_i \gg 1 \end{cases}. \quad (4.122)$$

Negligenciando o termo proporcional a ρ na equação (4.19), precisamos saber a única quantidade $|u_-|^2$. Usando a fórmula [112] $|\Gamma(ix)|^2 = \pi[x \sinh(\pi x)]^{-1}$, podemos escrever

$$|u_-|^2 = \pi^2 |\Gamma[d + i(\tilde{\omega}_i - |\tilde{\omega}_f|)] \Gamma[1 + i(\tilde{\omega}_i - |\tilde{\omega}_f|) - d]|^{-2} [\sinh(2\pi\tilde{\omega}_i) \sinh(2\pi|\tilde{\omega}_f|)]^{-1}. \quad (4.123)$$

O lado direito desta equação diverge quando $\omega_f \rightarrow 0$. Consequentemente, o momento magnético cresce ilimitadamente com o tempo se $\omega_f = 0$.

Para um valor arbitrário negativo de ω_f com $|\tilde{\omega}_f| \gg 1$, temos $d = 1/2 \pm i(\tilde{\omega}_i + |\tilde{\omega}_f|) + \mathcal{O}(|\tilde{\omega}_f|^{-1})$, de modo que o produto das duas funções Gamma em (4.123) assume a forma $\Gamma[1/2 + 2i\tilde{\omega}_i] \Gamma[1/2 - 2i|\tilde{\omega}_f|]$. Portanto, usando a relação [112] $|\Gamma(1/2 + ix)|^2 = \pi/\cosh(\pi x)$, obtemos $|u_-|^2 \approx \coth(2\pi\tilde{\omega}_i) \coth(2\pi|\tilde{\omega}_f|)$, de tal maneira que $\mathcal{E}_f/\mathcal{E}_i \approx (|\omega_f|/\omega_i)(2 + s_0 \Upsilon)$ no limite em que $\kappa \rightarrow 0$.

Por outro lado, se $\omega_f > 0$ e $\tilde{\omega}_f \gg 1$, então $d \approx 1/2 \pm i(\tilde{\omega}_i - \tilde{\omega}_f)$, e o produto das duas funções Gamma em (4.123) assume a forma $\Gamma[1/2 + 2i(\tilde{\omega}_i - \tilde{\omega}_f)] \Gamma(1/2)$. Então, usando a consequência da fórmula de Stirling [112],

$$|\Gamma(x + iy)|^2 \approx 2\pi|y|^{2x-1} e^{-\pi|y|}, \quad |y| \gg 1,$$

obtemos

$$|u_-|^2 \approx \exp(2\pi|\tilde{\omega}_i - \tilde{\omega}_f|) [\sinh(2\pi\tilde{\omega}_i) \sinh(2\pi\tilde{\omega}_f)]^{-1} \approx 2 \exp[-4\pi \min(\tilde{\omega}_i, \tilde{\omega}_f)] \ll 1.$$

Neste caso, temos o invariante adiabático conhecido $\mathcal{E}_f/\mathcal{E}_i \approx \omega_f/\omega_i$. As figuras 4.15–4.17 mostram a razão $\mathcal{E}_f/\mathcal{E}_i$ para os mesmos valores de ω_f e κ usados nas figuras 4.7–4.9, para $\omega_i = 1$, usando as equações (4.19) e (4.123).

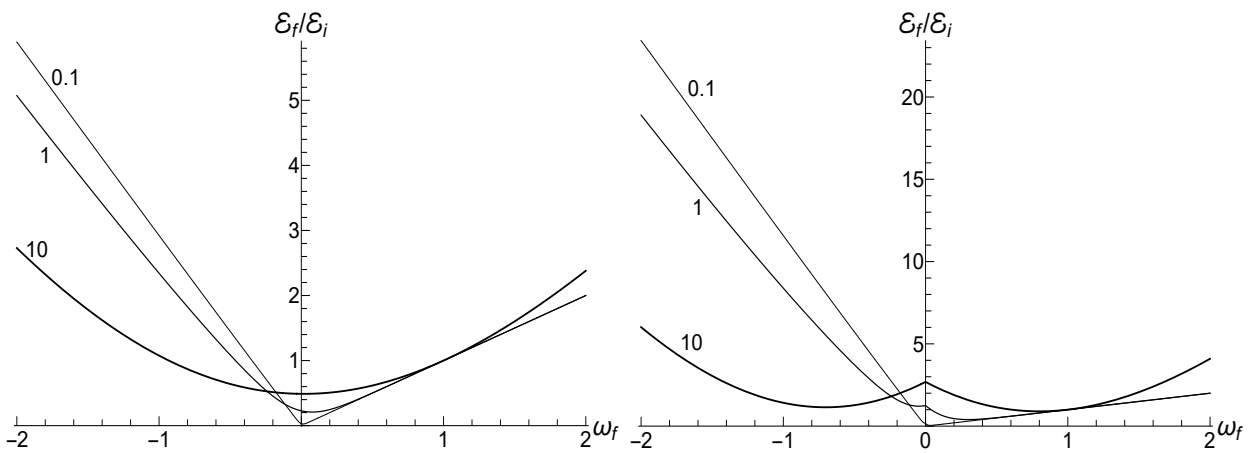


Figura 4.15: A razão $\mathcal{E}_f/\mathcal{E}_i$ em função da frequência final ω_f para diferentes valores do parâmetro κ (mostrados próximo às respectivas linhas). A frequência inicial considerada é $\omega_i = 1$. **Esquerda:** $\rho = 0$, $s_0\Upsilon = 1$. **Direita:** $\rho = 1$, $s_0\Upsilon = 10$.

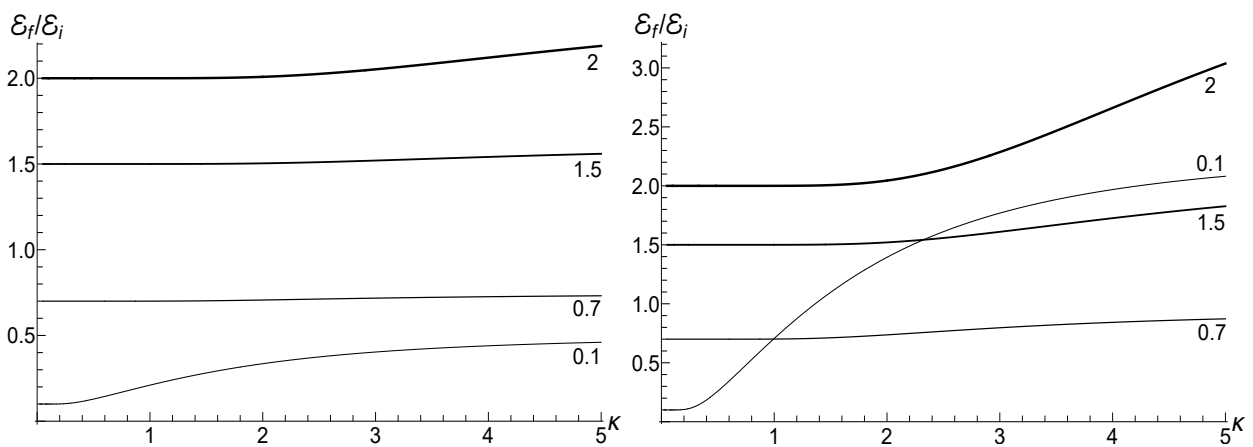


Figura 4.16: A razão $\mathcal{E}_f/\mathcal{E}_i$ em função do parâmetro κ para diferentes valores positivos da frequência final ω_f (mostrados próximo às respectivas linhas). A frequência inicial considerada é $\omega_i = 1$. **Esquerda:** $\rho = 0$, $s_0\Upsilon = 1$. **Direita:** $\rho = 1$, $s_0\Upsilon = 10$.

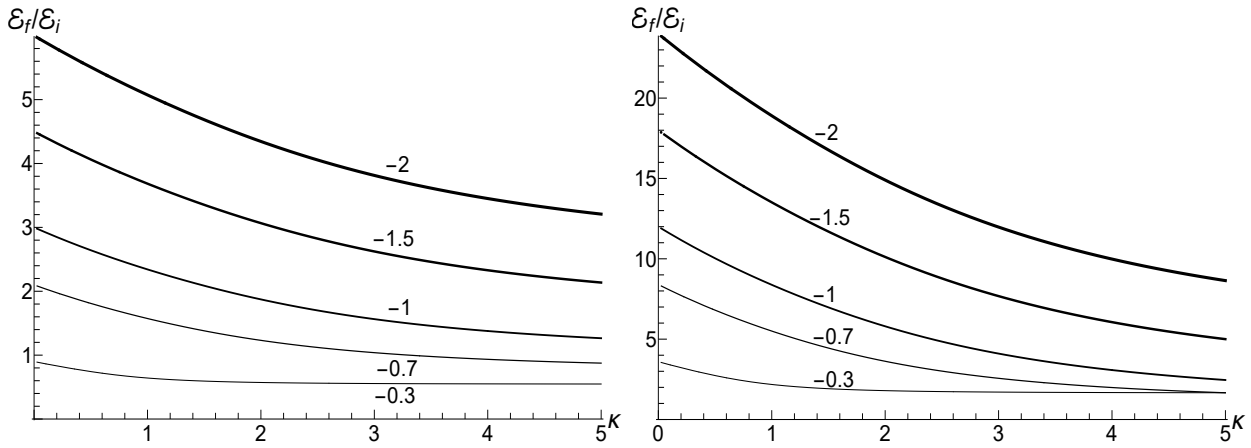


Figura 4.17: A razão $\mathcal{E}_f/\mathcal{E}_i$ em função do parâmetro κ para diferentes valores negativos da frequência final ω_f (mostrados próximo às respectivas linhas). A frequência inicial considerada é $\omega_i = 1$. **Esquerda:** $\rho = 0$, $s_0\Upsilon = 1$. **Direita:** $\rho = 1$, $s_0\Upsilon = 10$.

Vemos que as figuras 4.15 e 4.16 parecem semelhantes as figuras 4.7 e 4.8. Especialmente expressiva é a figura 4.15 com linhas retas no regime adiabático $\kappa = 0.1$, mas com inclinações diferentes para valores positivos e negativos da frequência final ω_f . Por outro lado, as figuras 4.17 e 4.9 para valores negativos da frequência final ω_f são diferentes: não há oscilações para pequenos valores de κ na figura 4.17, enquanto que tais oscilações são bem visíveis na figura 4.9.

4.4.2 Transição “suave” para o decaimento exponencial no semi-eixo

Em todos os exemplos da evolução começando em $t = 0$, considerados nas seções anteriores, a frequência $\omega(t)$ teve uma descontinuidade da derivada no instante inicial. Esta desvantagem pode ser removida para a frequência dependente do tempo

$$\omega_m(t) = \omega_i / \cosh(\kappa t), \quad \omega_m^2(t) = \omega_i^2 [1 - \tanh^2(\kappa t)]. \quad (4.124)$$

Observe que $\omega_m(t) > \omega_i \exp(-\kappa t)$ para $t > 0$ e $\omega_m(t) \approx 2\omega_i \exp(-\kappa t)$ para $\kappa t \gg 1$.

A equação (4.80) mostra, por exemplo, que a solução para a equação (4.1) com a frequência $\omega_m(t)$ pode ser expressa em termos da função $\tanh(\kappa t)$ no caso especial em que $(\omega_i/\kappa)^2 = 2$. Portanto, parece razoável introduzir a nova variável $\xi = \tanh(\kappa t)$. Usando a transformação de derivadas $d\psi/dt = \kappa(1 - \xi^2)d\psi/d\xi$, pode-se transformar a equação (4.1) com a frequência dependente do tempo (4.124) na equação de Legendre

$$(1 - \xi^2) d^2\varepsilon/d\xi^2 - 2\xi d\varepsilon/d\xi + (\omega_i/\kappa)^2 \varepsilon = 0 \quad (4.125)$$

Sua solução geral é uma superposição das *funções de Legendre* do primeiro e segundo tipo, $P_\nu(\xi)$ e $Q_\nu(\xi)$ [113]

$$\varepsilon(t) = D_p P_\nu(\xi) + D_q Q_\nu(\xi), \quad \nu = -1/2 + r, \quad r = \sqrt{1/4 + (\omega_i/\kappa)^2}. \quad (4.126)$$

[Pode-se verificar que a segunda solução da equação $\nu(\nu + 1) = (\omega_i/\kappa)^2$, $\nu = -1/2 - r$, resulta na mesma expressão (4.126) devido às propriedades das funções $P_\nu(\xi)$ e $Q_\nu(\xi)$]. Os coeficientes complexos constantes

D_p e D_q são determinados pelas condições iniciais (4.8). As relações a seguir são úteis para nossos propósitos [113] (lembrando que $0 \leq \xi < 1$):

$$P_\nu(\xi) = F\left(-\nu, \nu + 1; 1; \frac{1 - \xi}{2}\right) = F\left(1/2 - r, 1/2 + r; 1; \frac{\exp(-\kappa t)}{2 \cosh(\kappa t)}\right), \quad (4.127)$$

$$Q_\nu(\xi) = \frac{\pi}{2 \sin(\nu\pi)} [\cos(\nu\pi)P_\nu(\xi) - P_\nu(-\xi)], \quad \nu \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (4.128)$$

$$P_0(\xi) = 1, \quad P_1(\xi) = \xi, \quad Q_0(\xi) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1 + \xi}{1 - \xi}\right), \quad Q_1(\xi) = \frac{\xi}{2} \ln\left(\frac{1 + \xi}{1 - \xi}\right) - 1, \quad (4.129)$$

$$(1 - \xi^2) dP_\nu(\xi)/d\xi = (\nu + 1) [\xi P_\nu(\xi) - P_{\nu+1}(\xi)], \quad (1 - \xi^2) dQ_\nu(\xi)/d\xi = (\nu + 1) [\xi Q_\nu(\xi) - Q_{\nu+1}(\xi)], \quad (4.130)$$

$$P_\nu(0) = -\frac{\sin(\nu\pi)}{2\pi^{3/2}} \Gamma\left(\frac{\nu + 1}{2}\right) \Gamma\left(-\frac{\nu}{2}\right), \quad Q_\nu(0) = \frac{1 - \cos(\nu\pi)}{4\pi^{1/2}} \Gamma\left(\frac{\nu + 1}{2}\right) \Gamma\left(-\frac{\nu}{2}\right). \quad (4.131)$$

Usando as equações (4.8), (4.126) e (4.130), nós encontramos os coeficientes

$$D_p = \frac{(\nu + 1)Q_{\nu+1}(0) + i\mu Q_\nu(0)}{\omega_i^{1/2}(\nu + 1) [P_\nu(0)Q_{\nu+1}(0) - Q_\nu(0)P_{\nu+1}(0)]}, \quad D_q = -\frac{(\nu + 1)P_{\nu+1}(0) + i\mu P_\nu(0)}{\omega_i^{1/2}(\nu + 1) [P_\nu(0)Q_{\nu+1}(0) - Q_\nu(0)P_{\nu+1}(0)]}, \quad (4.132)$$

onde $\mu = \omega_i/\kappa$. As expressões na equação (4.132) podem ser simplificadas com a ajuda da equação (4.131) e das conhecidas fórmulas para os produtos de funções Gamma, a saber $\Gamma(x)\Gamma(1 - x) = \pi/\sin(\pi x)$ e $\Gamma(x)\Gamma(-x) = -\pi/[x \sin(\pi x)]$. Então, a seguinte relação pode ser verificada:

$$(\nu + 1) [P_\nu(0)Q_{\nu+1}(0) - Q_\nu(0)P_{\nu+1}(0)] = -1.$$

Consequentemente,

$$D_p = \sqrt{\pi/\omega_i} \left\{ \cos(\nu\pi/2) \frac{\Gamma[(\nu + 2)/2]}{\Gamma[(\nu + 1)/2]} + i(\mu/\nu) \sin(\nu\pi/2) \frac{\Gamma[(\nu + 1)/2]}{\Gamma[\nu/2]} \right\}, \quad (4.133)$$

$$D_q = \frac{2}{\sqrt{\pi\omega_i}} \left\{ -\sin(\nu\pi/2) \frac{\Gamma[(\nu + 2)/2]}{\Gamma[(\nu + 1)/2]} + i(\mu/\nu) \cos(\nu\pi/2) \frac{\Gamma[(\nu + 1)/2]}{\Gamma[\nu/2]} \right\}. \quad (4.134)$$

No caso especial em que $\mu = \sqrt{2}$, quando $\nu = 1$, as equações (4.126), (4.129), (4.133) e (4.134) fornecem a solução (4.80).

Energia média

As funções $F_\pm(\xi)$ que determinam a energia média de acordo com as equações (4.12) e (4.18), podem ser escritas da seguinte forma,

$$F_\pm(\xi) = \omega_i \sqrt{1 - \xi^2} [D_p P_\nu(\xi) + D_q Q_\nu(\xi)] \pm i\kappa(\nu + 1) \{D_p [\xi P_\nu(\xi) - P_{\nu+1}(\xi)] + D_q [\xi Q_\nu(\xi) - Q_{\nu+1}(\xi)]\}. \quad (4.135)$$

A figura 4.18 mostra a evolução da razão $\mathcal{E}(\tau)/\mathcal{E}_i$ para $\mu = 0.1, 1.0, 10, 0$ nos regimes de baixa e alta temperatura. Preste atenção nas pequenas oscilações para $\mu = 10$ na figura da direita. Elas surgem devido à natureza oscilatória das funções $P_\nu(\xi)$ e $Q_\nu(\xi)$ com grandes valores do índice ν (lembre-se que $P_\nu(\xi)$ é o polinômio de Legendre se ν é um inteiro). Essas oscilações são suprimidas no regime de baixa temperatura, mas o alto valor do parâmetro Υ amplifica as oscilações durante o estágio inicial da evolução. Essas oscilações são nitidamente observadas na figura 4.20 para o momento magnético médio.

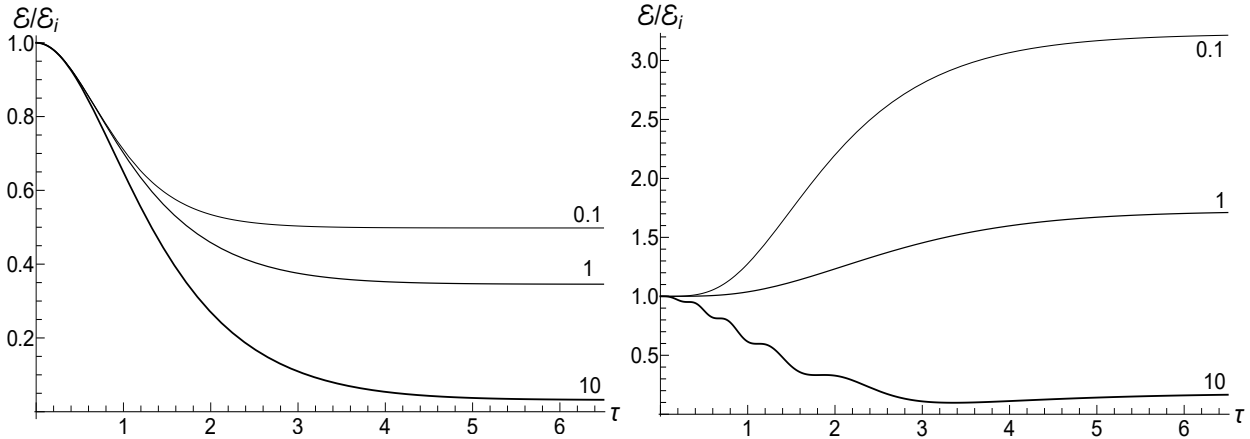


Figura 4.18: A razão $\mathcal{E}(\tau)/\mathcal{E}_i$ para o decaimento exponencial “suave” da frequência (4.124) com $\mu = 0.1, 1.0, 10, 0$. **Esquerda:** $\rho = 0$, $s_0\Upsilon = 1$. **Direita:** $\rho = 1$, $s_0\Upsilon = 10$.

O valor assintótico da energia média quando $t \rightarrow \infty$ é determinado pelos valores limite $F_{\pm}(1)$. Como $P_{\nu}(1) = 1$ para qualquer valor de ν , o coeficiente D_p não contribui para estes valores-limite:

$$F_{\pm}(1) = \omega_i D_q \lim_{\xi \rightarrow 1} \left\{ \sqrt{1 - \xi^2} Q_{\nu}(\xi) \pm i\mu^{-1}(\nu + 1) [\xi Q_{\nu}(\xi) - Q_{\nu+1}(\xi)] \right\}.$$

Neste ponto, a seguinte representação da função $Q_{\nu}(\xi)$ é útil (veja, por exemplo, a seção 3.6.1 de [109]):

$$Q_{\nu}(\xi) = P_{\nu}(\xi) \left[\frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + \xi}{1 - \xi} \right) - \gamma - \psi(\nu + 1) \right] + \sum_{l=1}^{\infty} c_l (1 - \xi)^l,$$

onde γ é a constante de Euler e $\psi(z) = d \ln[\Gamma(z)]/dz$ é a derivada logarítmica da função Gama. A forma explícita dos coeficientes c_l não é importante para o nosso propósito, já que a última série tende a zero para $\xi = 1$. Uma vez que a divergência da função $Q_{\nu}(\xi)$ em $\xi = 1$ é apenas logarítmica, $\lim_{\xi \rightarrow 1} [\sqrt{1 - \xi^2} Q_{\nu}(\xi)] = 0$. Então, usando a relação $\psi(1 + z) - \psi(z) = 1/z$ (veja, por exemplo, a equação 1.7.1(8) de [109]), chegamos à fórmula simples $F_{\pm}(1) = \pm i\kappa D_q$. Portanto, a energia média final é igual a [lembre da equação (4.18)]

$$\mathcal{E}_f = \frac{\omega_i \mathcal{E}_i}{4\mu^2} [|D_q|^2 (1 + s_0\Upsilon) - 2\rho \text{Re}(D_q^2)] \quad (4.136)$$

Gráficos das funções $\mu^{-2}|D_q|^2(\mu)$ e $-\mu^{-2}\text{Re}(D_q^2)(\mu)$ são mostrados na figura 4.19 (assumindo $\omega_i = 1$).

Se $\mu \ll 1$, então, $\nu \approx \mu^2$ e $D_q \approx i\mu/\sqrt{\omega_i}$, dessa forma, a equação (4.136) tende a fórmula do salto repentino (4.25). Para ver a dinâmica do “salto rápido”, podemos aproximar a equação (4.135), pegando $D_p \approx 1/\sqrt{\omega_i}$ e substituindo as funções $P_{\nu}(\xi)$ e $Q_{\nu}(\xi)$ por $P_0(\xi)$ e $Q_0(\xi)$ da equação (4.129). Então, obtemos $F_{\pm}(\xi) \approx \omega_i^{1/2} [1/\cosh(\tau) \mp 1]$ e

$$\mathcal{E}(\tau)/\mathcal{E}_i = \frac{1}{4} \left\{ [1 + 1/\cosh(\tau)]^2 + s_0\Upsilon [1 - 1/\cosh(\tau)]^2 + 2\rho \tanh^2(\tau) \right\}, \quad \tau \equiv \kappa t. \quad (4.137)$$

No limite “adiabático” $\mu \gg 1$ temos $\nu \approx \mu - 1/2$. Então, usando a fórmula de Stirling para as funções Gamma, encontramos $D_q \approx i \exp(i\nu\pi/2) \sqrt{2\nu/(\pi\omega_i)}$ e $D_p \approx \exp(i\nu\pi/2) \sqrt{\pi\nu/(2\omega_i)}$. A energia final é muito próxima daquela fornecida pela equação (4.111), mas a frequência das oscilações é diferente:

$$\mathcal{E}_f/\mathcal{E}_i \approx \kappa [1 + s_0\Upsilon + 2\rho \sin(\pi\omega_i/\kappa)] / (2\pi\omega_i). \quad (4.138)$$

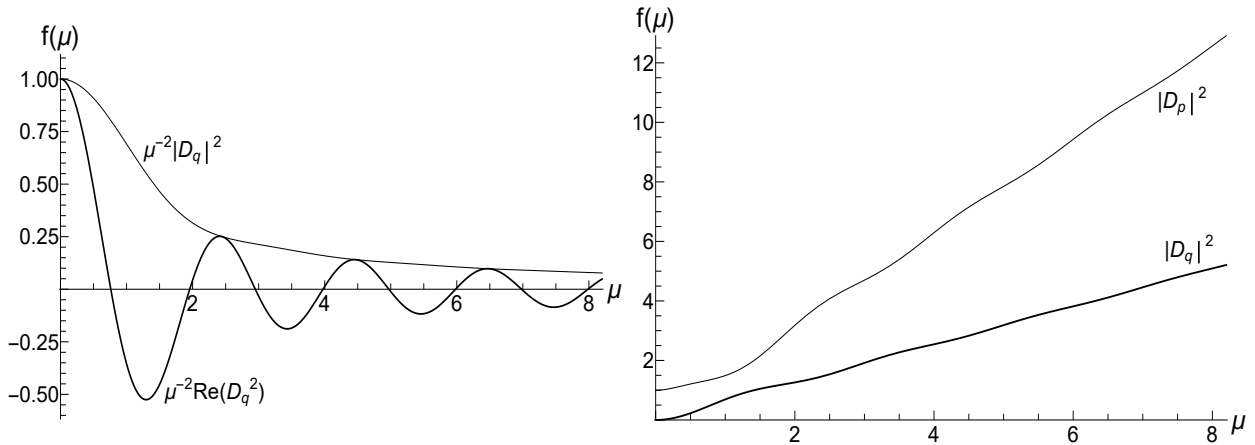


Figura 4.19: Esquerda: As funções $\mu^{-2}|D_q|^2(\mu)$ e $-\mu^{-2}\text{Re}(D_q^2)(\mu)$ com $\omega_i = 1$. Direita: As funções $|D_q|^2(\mu)$ e $|D_p|^2(\mu)$.

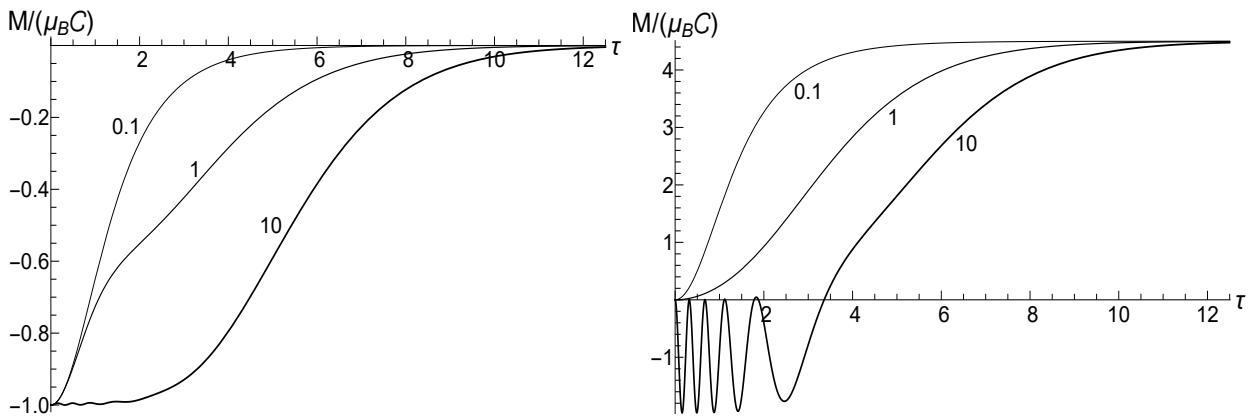


Figura 4.20: O momento magnético médio normalizado em função do tempo adimensional $\tau = \kappa t$ para o decaimento exponencial “suave” da frequência (4.124) com $\mu = 0.1, 1.0, 10, 0$. Esquerda: $\rho = 0, s_0\Upsilon = 1$. Direita: $\rho = 1, s_0\Upsilon = 10$.

Momento magnético médio

A figura 4.20 mostra a evolução do momento magnético médio em função do tempo adimensional $\tau = \kappa t$, calculado de acordo com a equação (4.32). Pode-se verificar que o produto $\sqrt{\omega(t)}\varepsilon(t) = \sqrt{\omega_i} (1 - \xi^2)^{1/4} \varepsilon(\xi)$ tende a zero quando $t \rightarrow \infty$ (ou $\xi \rightarrow 1$) para qualquer valor do parâmetro ν (porque a divergência da função $Q_\nu(\xi)$ em $\xi \rightarrow 1$ é apenas logarítmica). Consequentemente, a equação (4.32) resulta no valor assintótico do momento magnético (4.83) para todos os valores da razão κ/ω_i . A função $\varepsilon(t)$ (4.126) no caso em que $\mu \ll 1$ tem a forma $\varepsilon = \omega_i^{-1/2} (1 + i\mu\tau) = \omega_i^{-1/2} (1 + i\omega_i t)$. No entanto, o termo $(\mu\tau)^2$ pode ser negligenciado na fórmula para $\omega(\tau)|\varepsilon(\tau)|^2$ quando $\mu \ll 1$ (devido à redução exponencial da frequência). Consequentemente, a fórmula (4.32) para o momento magnético médio dependente do tempo assume a forma

$$M(t) = -(\mu_B C/2) \{1/\cosh(\tau) + 1 + \Upsilon s_0 [1/\cosh(\tau) - 1] - 2\rho/\cosh(\tau)\}. \quad (4.139)$$

4.5 Calibre de Landau: fórmulas gerais

Para $\alpha = 1$, o conjunto de equações (1.16)-(1.17) assumem a forma

$$\dot{x} = p_x/m + \Omega(t)y, \quad \dot{y} = p_y/m, \quad \dot{p}_x = 0, \quad \dot{p}_y = -\Omega(t)p_x - m\Omega^2(t)y,$$

onde $\Omega(t)$ é a *frequência do cíclotron*. Dessa forma, $p_x = \text{const}$, e chegamos à equação não homogênea

$$\ddot{y} + \Omega^2(t)y = -\Omega(t)p_x/m. \quad (4.140)$$

Portanto, todas as soluções podem ser expressas em termos das funções complexas $\varepsilon(t)$ e $\varepsilon^*(t)$, satisfazendo a equação (4.1) com $\alpha = 1$ e a condição (4.8). No entanto, devido à presença da função $\Omega(t)$ no lado direito da equação (4.140), as soluções para o conjunto completo de equações contêm três funções adicionais, obtidas através do conhecido método de variação dos parâmetros:

$$\sigma(t) = \int_{t_0}^t \Omega(\tau)\varepsilon(\tau)d\tau = - \int_{t_0}^t \ddot{\varepsilon}(\tau)/[\Omega(\tau)]d\tau = - \frac{\dot{\varepsilon}(t)}{\Omega(t)} + \frac{i}{\sqrt{\Omega_i}} - \int_{t_0}^t \frac{\dot{\varepsilon}(\tau)\dot{\Omega}(\tau)}{\Omega^2(\tau)} d\tau, \quad (4.141)$$

$$S(t) = \text{Im}(\varepsilon\sigma^*), \quad \chi(t) = \int_{t_0}^t [1 - \Omega(\tau)S(\tau)]d\tau, \quad (4.142)$$

onde t_0 é o instante de tempo em que a frequência Ω começa a variar (de modo que $\Omega(t) \equiv \Omega_i$ para $t \leq t_0$). As funções $\varepsilon(t)$ e $\sigma(t)$ são complexas, enquanto as funções $S(t)$ e $\chi(t)$ são reais. Depois de alguma álgebra direta, pode-se obter a seguinte forma da matriz Λ_Q dada na equação (1.18):

$$\Lambda_Q(t) = \begin{vmatrix} 1 & \sqrt{\Omega_i} \text{Re}(\sigma) & \chi/m & \text{Im}(\sigma)/(m\sqrt{\Omega_i}) \\ 0 & \sqrt{\Omega_i} \text{Re}(\varepsilon) & -S/m & \text{Im}(\varepsilon)/(m\sqrt{\Omega_i}) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & m\sqrt{\Omega_i} \text{Re}(\dot{\varepsilon}) & -\dot{S} & \text{Im}(\dot{\varepsilon})/\sqrt{\Omega_i} \end{vmatrix}. \quad (4.143)$$

A transformação (1.21) produz a matriz final $\Lambda_q(t)$. Escrevendo da mesma forma que em (4.4), encontramos as seguintes expressões para os blocos 2×2 :

$$\lambda_1 = \frac{\sqrt{\Omega_i}}{\Omega(t)} \begin{vmatrix} \text{Im}(\dot{\varepsilon}) & -\text{Re}(\dot{\varepsilon}) \\ -\Omega(t)\text{Im}(\varepsilon) & \Omega(t)\text{Re}(\varepsilon) \end{vmatrix}, \quad \lambda_2 = \frac{\sqrt{\Omega_i}}{\Omega(t)} \begin{vmatrix} 0 & -\text{Re}(\dot{\varepsilon} + \sqrt{\Omega_i}\dot{S}) \\ 0 & \text{Re}(\Omega\varepsilon - \sqrt{\Omega_i}\dot{\chi}) \end{vmatrix}, \quad (4.144)$$

$$\lambda_3 = \begin{vmatrix} 1 - \frac{\sqrt{\Omega_i}}{\Omega(t)}\text{Im}(\Omega\sigma + \dot{\varepsilon}) & \frac{\sqrt{\Omega_i}}{\Omega(t)}\text{Re}(\Omega\sigma + \dot{\varepsilon}) \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \lambda_4 = \begin{vmatrix} 1 & \sqrt{\Omega_i} \text{Re}(\sigma + \dot{\varepsilon}/\Omega) - \Omega_i(\chi - \dot{S}/\Omega) \\ 0 & \Omega_i/\Omega \end{vmatrix}. \quad (4.145)$$

4.5.1 Energia média

A energia média pode ser escrita da seguinte maneira

$$\mathcal{E}(t) = (m\Omega_i G/2) [K_\Omega(t) + s^{-1}\Upsilon K_Y(t) - 2\rho K_\rho(t)], \quad \mathcal{E}_i = m\Omega_i^2 G, \quad (4.146)$$

$$K_\Omega(t) = |\dot{\varepsilon}|^2 + \Omega^2(t)|\varepsilon|^2, \quad K_Y(t) = U^2(t) + V^2(t), \quad K_\rho(t) = \text{Re}(\dot{\varepsilon})U(t) + \Omega(t)\text{Re}(\varepsilon)V(t), \quad (4.147)$$

$$V(t) = \Omega\text{Re}(\varepsilon) - \sqrt{\Omega_i}\dot{\chi}, \quad U(t) = \text{Re}(\dot{\varepsilon}) + \sqrt{\Omega_i}\dot{S}. \quad (4.148)$$

Evolução adiabática

Na aproximação adiabática, pode-se usar a solução

$$\varepsilon(t) \approx [\Omega(t)]^{-1/2} \exp[i\phi(t)], \quad \dot{\varepsilon}(t) \approx i\Omega(t)\varepsilon(t), \quad \phi(t) = \int_0^t \Omega(\tau) d\tau \quad (4.149)$$

Então, negligenciando a derivada $\dot{\Omega}(t)$ em (4.141) e nas outras fórmulas, pode-se escrever

$$\sigma(t) \approx -i\varepsilon(t) + \frac{i}{\sqrt{\Omega_i}}, \quad S(t) \approx \frac{1}{\Omega(t)} - \frac{\cos(\phi)}{\sqrt{\Omega(t)\Omega_i}}, \quad \chi(t) \approx \frac{\sin(\phi)}{\sqrt{\Omega(t)\Omega_i}}, \quad \begin{pmatrix} \dot{S} \\ \dot{\chi} \end{pmatrix} \approx \sqrt{\frac{\Omega(t)}{\Omega_i}} \begin{pmatrix} \sin(\phi) \\ \cos(\phi) \end{pmatrix},$$

dessa maneira $U(t) = V(t) = 0$. Portanto, a variação de energia não depende da escolha do calibre na aproximação adiabática, desde que a frequência $\Omega(t)$ não passe pelo valor zero, quando a aproximação (4.149) falha.

Evolução não adiabática

Mas os resultados nos casos em que $\alpha = 0$ e $\alpha = 1$ são diferentes para variações não adiabáticas de $\Omega(t)$. Um dos motivos é a necessidade de saber, no regime assintótico $t > T$, além dos dois coeficientes adimensionais complexos u_{\pm} da equação (4.15) (onde ω_f deve ser substituído por Ω_f), um terceiro coeficiente complexo adimensional u_{σ} , que descreve o comportamento da função $\sigma(t)$ para $t > T$:

$$\sigma(t) = -\frac{\dot{\varepsilon}(t)}{\Omega_f} + \frac{u_{\sigma}}{\sqrt{\Omega_i}}, \quad u_{\sigma} = i - \sqrt{\Omega_i} \int_{t_0}^T \frac{\dot{\varepsilon}(\tau)\dot{\Omega}(\tau)}{\Omega^2(\tau)} d\tau. \quad (4.150)$$

Então,

$$S(t) = \Omega_f^{-1} + \text{Im}[u_{\sigma}^* \varepsilon(t)]/\sqrt{\Omega_i}, \quad \dot{\chi}(t) = -\Omega_f \text{Im}[u_{\sigma}^* \varepsilon(t)]/\sqrt{\Omega_i}, \quad t > T.$$

A razão entre as energias médias final e inicial assume a forma

$$\mathcal{E}_f/\mathcal{E}_i = (|\Omega_f|/\Omega_i) \{1 + 2|u_{-}|^2 + s^{-1}\Upsilon [(|a|^2 + |b|^2)/2 + \text{Im}(ba^*)] - \rho [|a|^2 + \text{Im}(ba^*)] \}, \quad (4.151)$$

onde

$$a = u_{+} + u_{-}^*, \quad b = u_{+}u_{\sigma}^* - u_{-}^*u_{\sigma}. \quad (4.152)$$

Salto repentino

No caso do salto instantâneo, os coeficientes u_{\pm} são reais. Calculando a primeira integral em (4.141) com $\varepsilon(t)$ dado por (4.15), obtemos o coeficiente imaginário puro $u_{\sigma} = i\Omega_i/\Omega_f$ (note que seu sinal depende do sinal do campo magnético). Então, fórmula (4.151) resulta na relação

$$\mathcal{E}_f/\mathcal{E}_i = [\Omega_i^2 + \Omega_f^2 + s^{-1}\Upsilon(\Omega_i - \Omega_f)^2 + 2\rho\Omega_f(\Omega_i - \Omega_f)] / (2\Omega_i^2) \quad (4.153)$$

Que é diferente da equação (4.24). Em particular, $\mathcal{E}_f/\mathcal{E}_i = (1 + s^{-1}\Upsilon)/2$ quando $\Omega_f \rightarrow 0$. O mesmo resultado pode ser obtido diretamente das fórmulas (4.146)-(4.148), se usarmos a solução (4.26) (com Ω ao invés de ω) e suas consequências: $K_{\Omega} = V^2 = \Omega_i$ e $U = 0$. Isso significa que a energia não muda se $s^{-1}\Upsilon = 1$ e $\Omega_f = 0$ (para qualquer valor do parâmetro ρ). A energia final para $\Omega_f = -\Omega_i$ também é diferente do caso de $\alpha = 0$: $\mathcal{E}_f/\Omega_i = 1 + 2s^{-1}\Upsilon - 2\rho$.

Ressonância paramétrica

A ressonância paramétrica ocorre agora para *o dobro da frequência do ciclotron* $2\Omega_i$. Portanto, deve-se substituir $\omega \rightarrow \Omega$ na equação (4.27) e calcular as funções $\dot{\varepsilon}$, σ , S e χ , assumindo u_{\pm} como coeficientes constantes (mas lembrando que u_- é imaginário puro agora). Então, $u_{\sigma} = i(u_+ - u_-)$ e $b = -i$. Nesse caso, a equação (4.151) leva à fórmula

$$\mathcal{E}(t)/\mathcal{E}_i = \cosh(2\Omega_i\gamma t) + s^{-1}\Upsilon [\cosh^2(\Omega_i\gamma t) - \cosh(\Omega_i\gamma t)] - \rho [\cosh(2\Omega_i\gamma t) - \cosh(\Omega_i\gamma t)]. \quad (4.154)$$

Esta fórmula é diferente de (4.29), mesmo no caso de baixa temperatura. Além disso, contém o coeficiente ρ .

4.5.2 Momento magnético médio

Usando as equações, (3.34), (4.5), (4.6), (4.144) e (4.145), podemos escrever o momento magnético médio na forma

$$\mathcal{M}(t) = -\frac{\mu_B\mathcal{C}}{2\sqrt{\Omega_i}} \left[S_{\Omega}(t) + s^{-1}\Upsilon\sqrt{\Omega_i}S_Y(t) - \rho S_{\rho}(t) \right], \quad (4.155)$$

onde

$$S_{\Omega}(t) = \text{Im}(\dot{\varepsilon}) + \sqrt{\Omega_i} [\Omega|\varepsilon|^2 - \text{Re}(\dot{\varepsilon}\sigma^*)], \quad (4.156)$$

$$S_Y(t) = \sqrt{\Omega_i}N(t) + M(t) + \Omega_i (\chi\dot{S} - S\dot{\chi}), \quad S_{\rho}(t) = \text{Im}(\dot{\varepsilon}) + \Omega_i N(t) + 2\sqrt{\Omega_i}M(t), \quad (4.157)$$

$$N(t) = (1 - 2\chi)\text{Re}(\varepsilon) + \chi\text{Re}(\dot{\varepsilon}) - \dot{S}\text{Re}(\sigma), \quad M(t) = \Omega(t)\text{Re}^2(\varepsilon) - \text{Re}(\dot{\varepsilon})\text{Re}(\sigma). \quad (4.158)$$

A solução aproximada (4.149) resulta na seguinte fórmula no caso adiabático [quando $\Omega(t) > 0$]:

$$\mathcal{M}_{ad}(t) = \mu_B\mathcal{C} \left[\frac{\rho[\Omega(t) + \Omega_i] \cos(\varphi)}{2\sqrt{\Omega(t)\Omega_i}} - 1 \right]. \quad (4.159)$$

Que é diferente de (4.34), porque fornece um momento magnético divergente quando $\Omega(t) \rightarrow 0$:

$$\mathcal{M}_{ad}(t) \approx \mu_B\mathcal{C} \left[\frac{\rho\Omega_i \cos(\varphi)}{2\sqrt{\Omega(t)\Omega_i}} - 1 \right]. \quad (4.160)$$

Pode-se duvidar da fórmula (4.160), porque a solução (4.149) não é justificada quando $\Omega(t) \rightarrow 0$. No entanto, a solução exata no caso da redução linear inversa (veja a seção 4.6.1) resulta na fórmula (4.172) coincidindo com (4.160).

A forma explícita dos coeficientes (4.156)-(4.158) é dada no apêndice G. Eles levam à seguinte fórmula simples no caso do salto repentino do campo magnético (note que ela é válida para valores positivos e negativos de Ω_f):

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(t) = & \frac{-\mu_B\mathcal{C}}{2\Omega_f\Omega_i} \left\{ \Omega_f^2 + \Omega_i^2 + s^{-1}\Upsilon (\Omega_f - \Omega_i)^2 - 2\rho\Omega_f (\Omega_f - \Omega_i) \right. \\ & \left. + \Omega_i \cos(\Omega_f t) [(\Omega_f - \Omega_i)(1 + s^{-1}\Upsilon) - 2\rho\Omega_f] \right\} \end{aligned} \quad (4.161)$$

Para $\Omega_f = 0$ e armadilhas iniciais isotrópicas ($s = 1$) o resultado coincide com a fórmula do calibre circular (4.46):

$$\mathcal{M}_f = \mu_B\mathcal{C} (s^{-1}\Upsilon - 1) / 2. \quad (4.162)$$

Aqui, vemos um papel importante do parâmetro de assimetria s . Se $s \leq 1$, então \mathcal{M}_f é sempre positivo. No entanto, \mathcal{M}_f pode ser negativo se $s \gg 1$, mesmo no caso de alta temperatura.

O comportamento do momento magnético médio após a súbita inversão do campo magnético é bastante diferente agora em relação aquele dado pela fórmula (4.48) para o calibre circular:

$$\mathcal{M}(t) = \mu_B \mathcal{C} [s^{-1} \Upsilon + 2(1 + s^{-1} \Upsilon - \rho) \sin^2(\Omega_i t)]. \quad (4.163)$$

Em particular, a razão $R \equiv |\widehat{\Delta \mathcal{M}}|/|\langle \mathcal{M} \rangle|$ varia entre 2/3 na temperatura zero e 1/2 no regime de alta temperatura (se $s = 1$).

No caso da ressonância paramétrica, temos as seguintes expressões explícitas para as funções que determinam a evolução do momento magnético médio:

$$\sqrt{\Omega_i} \sigma = [\cos(\Omega_i t) - 1] \sinh(\Omega_i \gamma t) + \sin(\Omega_i t) \cosh(\Omega_i \gamma t) - i \{ [\cos(\Omega_i t) - 1] \cosh(\Omega_i \gamma t) + \sin(\Omega_i t) \sinh(\Omega_i \gamma t) \},$$

$$S = [1 - \cos(\Omega_i t)]/\Omega_i, \quad \dot{S} = \sin(\omega_i t), \quad \chi = \sin(\Omega_i t)/\Omega_i, \quad \dot{\chi} = \cos(\Omega_i t),$$

$$S_\Omega = -\sqrt{\Omega_i} \{ \sin(\Omega_i t) S_2(t) + \cos(\Omega_i t) C_2(t) - 2 \cosh(2\Omega_i \gamma t) \},$$

$$S_Y = [2 - \cos(\Omega_i t)] C_1(t) - \sin(\Omega_i t) \sinh(2\Omega_i \gamma t)/2,$$

$$S_\rho = -\sqrt{\Omega_i} \{ \sin(\Omega_i t) S_2(t) + 2 \cos(\Omega_i t) [C_1(t) - 1] - 2C_2(t) \},$$

onde

$$S_2(t) = \sinh(2\Omega_i \gamma t) - \sinh(\Omega_i \gamma t), \quad C_2(t) = \cosh(2\Omega_i \gamma t) - \cosh(\Omega_i \gamma t), \quad C_1(t) = \cosh^2(\Omega_i \gamma t) - \cosh(\Omega_i \gamma t).$$

As fórmulas que descrevem as flutuações quânticas da energia e do momento magnético são muito complicadas para o calibre de Landau. Por este motivo, não os consideramos aqui.

4.6 Calibre Landau: exemplos explícitos

4.6.1 Uma redução linear inversa do campo magnético

Expressões explícitas para todas as funções necessárias, $\varepsilon(t)$, $\sigma(t)$, $S(t)$, $\chi(t)$, podem ser obtidas para $\Omega(t) = \Omega_0/\tau$, onde a mesma notação é usada na seção 4.2.1, com a substituição $\omega \rightarrow \Omega$. Com o auxílio da solução (4.55), pode-se obter a seguinte expressão explícita para a função $\sigma(t)$:

$$\sigma(t) = \frac{\sqrt{\tau} [\tau^{-r} (2r+1)^2 - \tau^r (2r-1)^2] - 8r}{8ur\sqrt{\Omega_0}} + i \frac{4r - \sqrt{\tau} [\tau^{-r} (2r+1) + \tau^r (2r-1)]}{4r\sqrt{\Omega_0}}. \quad (4.164)$$

As expressões para as funções $S(t)$ e $\chi(t)$ são diferentes para valores reais e imaginários do coeficiente $r = \sqrt{1/4 - u^2}$.

Variações rápidas

No caso em que $u < 1/2$ temos

$$S(t) = \frac{\sqrt{\tau}}{4r\Omega_0} [4r\sqrt{\tau} - \tau^{-r} (2r-1) - \tau^r (2r+1)], \quad \dot{S}(t) = \frac{8r\sqrt{\tau} + \tau^{-r} (2r-1)^2 - \tau^r (2r+1)^2}{8ur\sqrt{\tau}},$$

$$\chi(t) = \frac{t_0\sqrt{\tau}}{2r} (\tau^r - \tau^{-r}), \quad \dot{\chi}(t) = \frac{\tau^{-r}(2r-1) + \tau^r(2r+1)}{4r\sqrt{\tau}}.$$

Então, as seguintes expressões explícitas para as funções nas equações (4.146)-(4.148) podem ser obtidas:

$$K_\Omega(t) = \frac{\Omega_0}{4r^2\tau} [(\tau^{-r} - \tau^r)^2 + 8r^2], \quad K_\rho = \frac{\Omega_0(\tau^{-r} - \tau^r)}{4r^2\tau} [\tau^{-r} - \tau^r + 2r\sqrt{\tau}],$$

$$U(t) = \frac{\sqrt{\Omega_0}}{u} + \frac{\sqrt{\Omega_0}}{4ur\sqrt{\tau}} [\tau^{-r}(1-2r) - \tau^r(2r+1)], \quad V(t) = \frac{\sqrt{\Omega_0}}{2r\sqrt{\tau}} (\tau^{-r} - \tau^r).$$

Os principais termos dessas expressões para $\tau \gg 1$ resultam nos seguintes coeficientes da equação (4.147):

$$K_\Omega \approx \frac{\Omega_0}{4r^2}\tau^{-\delta}, \quad K_Y \approx \frac{\Omega_0}{4r^2}\tau^{-\delta} + \frac{\Omega_0}{u^2} \left[1 - \frac{2r+1}{4r}\tau^{-\delta/2}\right]^2, \quad K_\rho \approx \frac{\Omega_0}{4r^2} [\tau^{-\delta} - 2r\tau^{-\delta/2}], \quad \delta = 1 - 2r.$$

Se $u \ll 1$, então $r \approx 1/2$ e $\delta \approx 2u^2$. Se a variável do tempo τ não é extremamente grande, de modo que $\tau^{-\delta} \approx 1$, chegamos na fórmula $\mathcal{E}(t)/\mathcal{E}_i = (1 + s^{-1}\Upsilon)/2$, coincidindo com a fórmula de aproximação do salto repentino com $\Omega_f = 0$ da seção 4.5.1. Por outro lado, se $\tau = \infty$, então $K_\Omega(\infty) = K_\rho(\infty) = 0$, enquanto $K_Y(\infty) = \Omega_0/u^2$. Isso resulta em uma razão assintótica diferente de zero

$$\mathcal{E}(\infty)/\mathcal{E}_i = s^{-1}\Upsilon/(2u^2), \quad (4.165)$$

que pode ser muito alta se $u \ll 1$. Esta é uma grande diferença em relação ao caso do calibre circular considerado na seção 4.2.1, onde a energia média decai para o valor nulo. No entanto, a razão assintótica (4.165) pode ser alcançada para valores de tempo extremamente grandes, uma vez que as correções relativas são da ordem de τ^{-u^2} . Consequentemente, um erro de 10% pode ser alcançado para $\tau \sim 10^{1/u^2}$. Por exemplo, tomando $u = 0.1$, precisamos que $\tau \sim 10^{100}$.

As funções dependentes do tempo que determinam a evolução do momento magnético médio de acordo com a equação (4.155) tem a seguinte forma:

$$S_\Omega(t) = \frac{\sqrt{\Omega_0}}{2r\tau} (4r\sqrt{\tau} - T_-), \quad (4.166)$$

$$S_Y(t) = \frac{(4r^2\tau + \tau - 2)T_- - 4r(\tau + 1)T_+ + 16r\sqrt{\tau}}{8ru^2\sqrt{\tau}}, \quad (4.167)$$

$$S_\rho(t) = \frac{\sqrt{\Omega_0}}{16ru^2\sqrt{\tau}} \{ [\tau - 5 + 4r^2(3\tau - 1)]T_- - 2r(4r^2 + 3)(\tau + 1)T_+ + 32r\sqrt{\tau} \}, \quad (4.168)$$

onde

$$T_+ = \tau^r + \tau^{-r}, \quad T_- = \tau^r - \tau^{-r}.$$

Variações lentas

Se $u > 1/2$, então, usando a notação $\gamma = \sqrt{u^2 - 1/4} = ir$ e $\nu = \gamma \ln(\tau)$, podemos escrever

$$\varepsilon(t) = \frac{\sqrt{\tau}}{2\gamma\sqrt{\Omega_0}} [2\gamma \cos(\nu) - \sin(\nu) + 2iu \sin(\nu)], \quad \dot{\varepsilon}(t) = \frac{\sqrt{\Omega_0}}{2\gamma\sqrt{\tau}} [2i\gamma \cos(\nu) + i \sin(\nu) - 2u \sin(\nu)],$$

$$K_\Omega = 2\Omega_0/\tau + \Omega_0 \sin^2(\nu)/(\gamma^2\tau),$$

$$\sigma(t) = \frac{\sqrt{\tau} [(4\gamma^2 - 1) \sin(\nu) + 4\gamma \cos(\nu)] - 4\gamma}{4u\gamma\sqrt{\Omega_0}} + i \frac{\sqrt{\tau} [\sin(\nu) - 2\gamma \cos(\nu)] + 2\gamma}{2\gamma\sqrt{\Omega_0}},$$

$$S(t) = \frac{\sqrt{\tau}}{2\gamma\Omega_0} [2\gamma\sqrt{\tau} - 2\gamma \cos(\nu) - \sin(\nu)], \quad \dot{S}(t) = \frac{(4\gamma^2 - 1) \sin(\nu) + 4\gamma [\sqrt{\tau} - \cos(\nu)]}{4u\gamma\sqrt{\tau}},$$

$$\chi(t) = \frac{t_0 \sqrt{\tau} \sin(\nu)}{\gamma}, \quad \dot{\chi}(t) = \frac{2\gamma \cos(\nu) + \sin(\nu)}{2\gamma \sqrt{\tau}},$$

$$V(t) = -\frac{\sqrt{\Omega_0} \sin(\nu)}{\gamma \sqrt{\tau}}, \quad U(t) = \frac{\sqrt{\Omega_0}}{u} - \frac{\sqrt{\Omega_0}}{2u\gamma \sqrt{\tau}} \{2\gamma \cos(\nu) + \sin(\nu)\}.$$

A presença do termo constante $\sqrt{\Omega_0}/u$ na expressão para $U(t)$ impõe restrições à validade da aproximação adiabática para o calibre de Landau. Se este termo estivesse ausente, teríamos a relação $\mathcal{E}(t)/\mathcal{E}_i \approx \Omega(t)/\Omega_i$ (com correções oscilantes da ordem de u^{-2} se $u \gg 1$) para qualquer valor da variável de tempo t , de forma semelhante à equação (4.63). No entanto, no presente caso, esta relação se mantém apenas sob a condição $\tau \ll u^2$, ou seja, $t \ll t_0(\Omega_0 t_0)^2$. Para valores maiores de t , a verdadeira energia média tende para o valor assintótico finito $\mathcal{E}(\infty) = \mathcal{E}_i s^{-1} \Upsilon / (2u^2)$. Embora este valor seja pequeno para $u \gg 1$, é diferente de zero. Certamente, esta falha da aproximação adiabática para tempos muito grandes se deve à existência da função $\sigma(t)$, além da solução $\varepsilon(t)$, para o calibre de Landau.

As funções dependentes do tempo determinam a evolução do momento magnético médio de acordo com a equação (4.155) tem a seguinte forma:

$$S_\Omega(t) = \frac{\sqrt{\Omega_0}}{4\gamma^2 \sqrt{\tau}} \{ \sqrt{\tau} [8\gamma^2 + \sin^2(\nu)] - 4\gamma \sin(\nu) \}, \quad (4.169)$$

$$S_Y(t) = \frac{\cos(\nu) [\sqrt{\tau} \cos(\nu) - 16\gamma^2 (\tau + 1)] - 4\gamma \sin(\nu) (4\gamma^2 \tau - \tau + 3) + \sqrt{\tau} (32\gamma^2 - 1)}{16u^2 \gamma^2 \sqrt{\tau}}, \quad (4.170)$$

$$S_\rho(t) = \sqrt{\Omega_0} \frac{\cos(\nu) [\sqrt{\tau} \cos(\nu) + 8\gamma^2 (\tau + 1) (2\gamma^2 - 1)] - 8\gamma \sin(\nu) [\gamma^2 (3\tau + 1) + 2] + \sqrt{\tau} (32\gamma^2 - 1)}{16u^2 \gamma^2 \sqrt{\tau}}. \quad (4.171)$$

Se $u \approx \gamma \gg 1$ e $\tau \gg 1$, então, $S_\Omega(t) \approx 2\sqrt{\Omega_0}$, $S_\rho(t) \approx \sqrt{\Omega_0 \tau} \cos(\nu)$ e $S_Y(t) \approx 0$ (sendo da ordem de $\sqrt{\tau}/\gamma$). Portanto,

$$\mathcal{M}(t) \approx -\mu_B \mathcal{C} [1 - \rho \sqrt{\tau} \cos(\nu)/2], \quad (4.172)$$

e esta fórmula coincide com (4.160) para $\Omega(t) = \Omega_0/\tau$.

Caso intermediário

Se $u = 1/2$, então,

$$\varepsilon(t) = \frac{\sqrt{\tau} [2 + (i-1) \ln(\tau)]}{2\sqrt{\Omega_0}}, \quad \dot{\varepsilon}(t) = \frac{\sqrt{\Omega_0} [2i + (i-1) \ln(\tau)]}{2\sqrt{\tau}},$$

$$\sigma(t) = \frac{\sqrt{\tau} [4 - \ln(\tau)] - 4}{2\sqrt{\Omega_0}} + i \frac{\sqrt{\tau} [\ln(\tau) - 2] + 2}{2\sqrt{\Omega_0}},$$

$$S(t) = \frac{\sqrt{\tau} [2\sqrt{\tau} - \ln(\tau) - 2]}{2\Omega_0}, \quad \dot{S}(t) = \frac{4\sqrt{\tau} - \ln(\tau) - 4}{2\sqrt{\tau}},$$

$$\chi(t) = \frac{\sqrt{\tau} \ln(\tau)}{2\Omega_0}, \quad \dot{\chi}(t) = \frac{\ln(\tau) + 2}{2\sqrt{\tau}},$$

dessa maneira, temos

$$\mathcal{E}(\tau)/\mathcal{E}_i = \frac{1}{2\tau} (\ln^2(\tau) + 2 + 2s^{-1} \Upsilon \{2(\tau + 1) + [2 + \ln(\tau)] [\ln(\tau) - 2\sqrt{\tau}]\} - 2\rho \ln(\tau) [\ln(\tau) - \sqrt{\tau}]), \quad (4.173)$$

com a razão assintótica diferente de zero $\mathcal{E}(\infty)/\mathcal{E}_i = 2s^{-1} \Upsilon$.

A comparação entre as funções $\mathcal{E}(t)/\mathcal{E}_i$ para os calibres circular e de Landau no caso da redução linear inversa do campo magnético $B(t) = B_0/(1 + t/t_0)$ é dada na figura 4.21. Os parâmetros B_0 e t_0 são considerados iguais para os dois calibres. O parâmetro $u = \Omega_0 t_0 = 1/2$ é escolhido para o calibre de Landau. Portanto, a razão $\mathcal{E}(t)/\mathcal{E}_i$ vai assintoticamente para o valor diferente de zero $2s^{-1}\Upsilon$. No entanto, como $\Omega = 2\omega$, o valor correspondente do parâmetro $u_c = \omega_0 t_0$ para o calibre circular é duas vezes menor: $u_c = 1/4$. Isso significa que a evolução no calibre circular é dada pela equação (4.56) com $r = \sqrt{3}/4$. Neste caso, a razão $\mathcal{E}(t)/\mathcal{E}_i$ vai assintoticamente a zero aproximadamente quando $\tau^{-0.14}$.

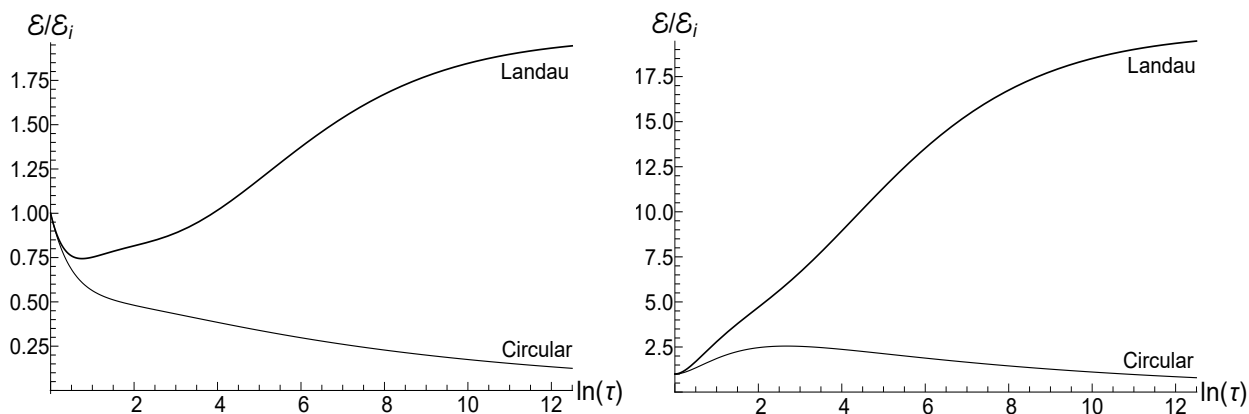


Figura 4.21: A razão $\mathcal{E}(\tau)/\mathcal{E}_i$ em função do tempo adimensional $\tau = 1 + t/t_0$ para os calibres circular e de Landau com a mesma frequência de ciclotron inicial Ω_0 e parâmetro de escala de tempo t_0 , no caso do decaimento linear inverso do campo magnético $B(t) = B_0/(1 + t/t_0)$. **Esquerda:** baixa temperatura, $\rho = 0$, $\Upsilon = 1$. **Direita:** alta temperatura, $\rho = 1$, $\Upsilon = 10$.

A figura 4.22 mostra a evolução do momento magnético médio nas mesmas condições. O momento magnético médio no caso do calibre Landau com $u = 1/2$ se comporta como

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(\tau) = & -\frac{\mu_B \mathcal{C}}{2\sqrt{\tau}} \left\{ 2\sqrt{\tau} - \ln(\tau) + s^{-1}\Upsilon \left[\ln(\tau) (\tau - 2) - 4(\sqrt{\tau} - 1)^2 \right] \right. \\ & \left. - \frac{\rho}{2} \left[\ln(\tau) (\tau - 5) + 16\sqrt{\tau} - 6(1 + \tau) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.174)$$

O principal termo desta expressão para $\tau \gg 1$ é $\mathcal{M}(\tau) \approx -\mu_B \mathcal{C} \sqrt{\tau} \ln(\tau) (2s^{-1}\Upsilon - \rho) / 4$.

4.6.2 Redução exponencial do campo magnético

Outro exemplo de soluções explícitas em termos de funções elementares corresponde à dependência $\Omega(t) = \Omega_0 \sqrt{2} / \cosh(\Omega_0 t)$. Em todos os outros casos, não conseguimos calcular a integral (4.141) analiticamente. Usando a solução (4.80) para $\varepsilon(t)$ (com ω substituído por Ω), pode-se encontrar todas as funções adicionais necessárias. Por uma questão de simplicidade, assumimos aqui que $\Omega_0 = 1$. Então,

$$\varepsilon(\tau) = 2^{-1/4} \left[1 - \tau \tanh(\tau) + i\sqrt{2} \tanh(\tau) \right], \quad \sigma(\tau) = 2^{1/4} \left[\frac{\tau - i\sqrt{2}}{\cosh(\tau)} + i\sqrt{2} \right], \quad (4.175)$$

$$S(\tau) = \sqrt{2} \left[\frac{1}{\cosh(\tau)} - 1 + \tau \tanh(\tau) \right], \quad \chi(\tau) = \frac{2\tau}{\cosh(\tau)} + \tau - 2 \tanh(\tau). \quad (4.176)$$

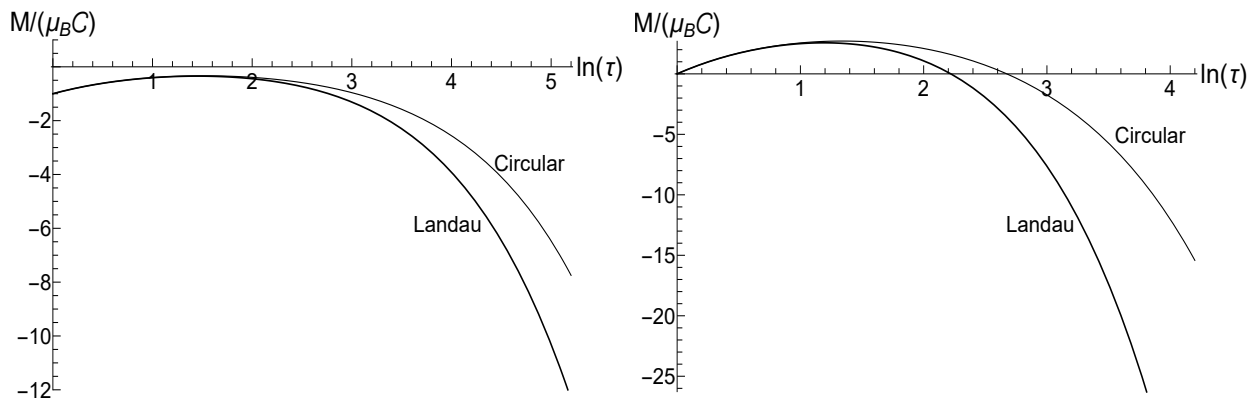


Figura 4.22: O momento magnético médio $\mathcal{M}(\tau)$ em função do tempo adimensional $\tau = 1 + t/t_0$ para os calibres circular e de Landau com a mesma frequência de ciclotron inicial Ω_0 e parâmetro de escala de tempo t_0 , no caso do decaimento linear inverso do campo magnético $B(t) = B_0/(1 + t/t_0)$. **Esquerda:** baixa temperatura, $\rho = 0$, $\Upsilon = 1$. **Direita:** alta temperatura, $\rho = 1$, $\Upsilon = 10$.

Evolução da energia média

A energia média, neste caso, é dada pela equação (4.146) com os seguintes coeficientes dependentes do tempo:

$$K_\Omega = \frac{2 + [\tau + \sinh(\tau) \cosh(\tau)]^2}{\sqrt{2} \cosh^4(\tau)} + \frac{\sqrt{2} \{2 \tanh^2(\tau) + [1 - \tau \tanh(\tau)]^2\}}{\cosh^2(\tau)}, \quad (4.177)$$

$$V(\tau) = \frac{2^{1/4} [2 + \tau \sinh(\tau) - \cosh^2(\tau) - \cosh(\tau)]}{\cosh^2(\tau)}, \quad U(\tau) = \frac{\tau + \sinh(\tau) [\cosh(\tau) - 2]}{2^{1/4} \cosh^2(\tau)}, \quad (4.178)$$

$$K_\rho = \frac{2^{1/4} [1 - \tau \tanh(\tau)] V(\tau)}{\cosh(\tau)} - \frac{[\tau + \sinh(\tau) \cosh(\tau)] U(\tau)}{2^{1/4} \cosh^2(\tau)}. \quad (4.179)$$

Quando $\tau \rightarrow \infty$, então,

$$\mathcal{E}(\infty)/\mathcal{E}_i = (1 + 3s^{-1}\Upsilon + 2\rho)/4. \quad (4.180)$$

O lado direito desta equação é quatro vezes maior do que o calibre circular em armadilhas isotrópicas a temperatura zero *com a mesma razão* ω_i/Ω_0 : veja a equação (4.79). No entanto, a situação pode ser invertida para armadilhas iniciais fortemente anisotrópicas com $s \gg 1$, quando $\mathcal{E}_{circ}(\infty) \gg \mathcal{E}_{Land}(\infty)$.

Evolução do momento magnético médio

Os coeficientes dependentes do tempo do momento magnético médio (4.155) assumem a seguinte forma:

$$S_\Omega = \frac{2^{1/4}}{\cosh^2(\tau)} [(\tau^2 + 3) \cosh(\tau) - \tau \sinh(\tau) - 1], \quad (4.181)$$

$$S_Y = \frac{\sqrt{2}}{\cosh^2(\tau)} [-\cosh^2(\tau) + (\tau^2 + 3) \cosh(\tau) - 3\tau \sinh(\tau) + \tau^2 - 2], \quad (4.182)$$

$$S_\rho = \frac{2^{1/4}}{\cosh^2(\tau)} [\cosh^2(\tau) - 2(\tau^2 + 1) \cosh(\tau) + 2\tau \sinh(\tau) - \tau^2 + 3]. \quad (4.183)$$

O valor assintótico quando $\tau \rightarrow \infty$ é sempre positivo, mesmo no limite de temperatura zero:

$$\mathcal{M}(\infty) = \mu_B \mathcal{C} (\rho + s^{-1} \Upsilon) / 2. \quad (4.184)$$

4.6.3 Dinâmica do “salto rápido para zero”

Mais um exemplo simples é o caso em que $\Omega(t) = \Omega_i / \cosh(\kappa t)$ com $\kappa \gg \Omega_i$. Como foi mostrado na seção 4.4.2, a função $\varepsilon(t)$ neste caso, pode ser escolhida como $\varepsilon(t) = \Omega_i^{-1/2} (1 + i\Omega_i t)$. No entanto, ao calcular a função $\sigma(t)$, pode-se negligenciar o termo $i\Omega_i t$, uma vez que a função $\Omega(t)$ vai para zero exponencialmente em $t \sim \kappa^{-1}$, quando $\Omega_i t \sim \Omega_i / \kappa \ll 1$. Consequentemente, a função $\sigma(t)$ é *real* nesta aproximação. Portanto, $S(t) \equiv 0$ e $\chi(t) = t$. Então, as equações (4.146)-(4.148) resultam na fórmula

$$\mathcal{E}(t)/\mathcal{E}_i = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{1}{\cosh^2(\tau)} + s^{-1} \Upsilon \left[1 - \frac{1}{\cosh(\tau)} \right]^2 + \frac{2\rho}{\cosh(\tau)} \left[1 - \frac{1}{\cosh(\tau)} \right] \right\}. \quad (4.185)$$

As equações (4.155)-(4.158) levam à seguinte expressão para o momento magnético médio dependente do tempo:

$$\mathcal{M}(t) = -\frac{\mu_B \mathcal{C}}{2} \left\{ 1 + \frac{1}{\cosh(\tau)} - s^{-1} \Upsilon \left[1 - \frac{1}{\cosh(\tau)} \right] - \frac{2\rho}{\cosh(\tau)} \right\}, \quad \mathcal{M}(\infty) = -\frac{\mu_B \mathcal{C}}{2} (1 - s^{-1} \Upsilon). \quad (4.186)$$

Esta fórmula coincide com (4.139) para armadilhas isotrópicas ($s = 1$). No entanto, o comportamento é diferente se $s \neq 1$. Em particular, $\mathcal{M}_{Land}(\infty)$ é positivo para $s^{-1} \Upsilon > 1$ e negativo para $s^{-1} \Upsilon < 1$, enquanto que $\mathcal{M}_{circ}(\infty)$ é positivo para qualquer valor de s e Υ (a não ser que $s = \Upsilon = 1$).

A comparação das funções $\mathcal{E}(\tau)$ e $\mathcal{M}(\tau)$ para os calibres circular e de Landau no caso da redução exponencial “suave” do campo magnético $B(t) = B_0 / \cosh(\kappa t)$ é feita nas figuras 4.23 e 4.24. Nós consideramos dois valores da razão $\mu_{Land} = \Omega_i / \kappa$ (normalizada pelo *frequência do ciclotron*): $\mu_{Land} = \sqrt{2}$ e $\mu_{Land} \ll 1$. No primeiro caso, usamos as funções (4.146) e (4.155) com os coeficientes (4.177)-(4.179) e (4.181)-(4.183), respectivamente, para o calibre Landau. No entanto, como $\Omega(t) = 2\omega(t)$ para o mesmo campo magnético, deve-se lembrar que $\mu_{circ} = \mu_{Land}/2$. Por este motivo, os gráficos para o calibre circular são feitos usando as fórmulas da seção 4.4.2 com $\mu_{circ} = \sqrt{2}/2$. Portanto, o valor assintótico (4.180) deve ser comparado com o valor dado pelas equações (4.134) e (4.136) para $\nu = (\sqrt{3} - 1)/2$. Nesse caso, $D_q \approx (-0.43 + 0.48i) / \sqrt{\omega_i}$ e $\mathcal{E}_{circ}(\infty)/\mathcal{E}_i \approx 0.21 (1 + s_0 \Upsilon) + 0.05\rho$.

Quando $\mu_{Land} \ll 1$, este parâmetro não está nas fórmulas para $\mathcal{E}(\tau)$ e $\mathcal{M}(\tau)$. Neste caso, usamos as equações (4.185) e (4.186) para o calibre de Landau. As equações usadas para o calibre circular foram (4.137) e (4.139). A coincidência das razões $\mathcal{E}_{Land}(\infty)/\mathcal{E}_i$ para dois valores do parâmetro μ no caso de baixa temperatura é acidental: essas razões são diferentes se $s^{-1} \Upsilon \neq 1$.

4.7 Discussão

Neste capítulo obtivemos muitos resultados exatos que descrevem a dinâmica governada pelo hamiltoniano (1.1) com dois calibres: o circular e o de Landau. Essa dinâmica parece bastante abrangente, vinculada à dependência concreta do campo magnético em relação ao tempo $B(t)$. Todos os exemplos e figuras analíticas explícitas mostram claramente que a dinâmica pode ser bastante diferente para os dois calibres

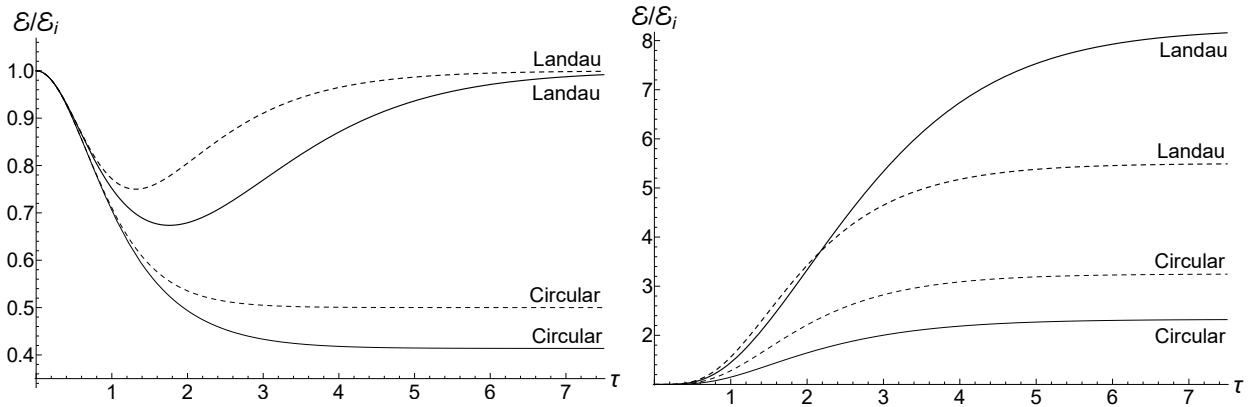


Figura 4.23: As razões $\mathcal{E}(\tau)/\mathcal{E}_i$ nas armadilhas isotrópicas ($s = 1$) em função do tempo adimensional $\tau = \kappa t$ para os calibres circular e de Landau com $B(t) = B_0/\cosh(\kappa t)$. **Linhas sólidas:** $\mu_{Land} = \sqrt{2}$ e $\mu_{circ} = \sqrt{2}/2$. **Linhas tracejadas:** $\mu_{Land} \ll 1$ e $\mu_{circ} \ll 1$. **Esquerda:** o caso de baixa temperatura, $\rho = 0$, $\Upsilon = 1$. **Direita:** o caso de alta temperatura, $\rho = 1$, $\Upsilon = 10$.

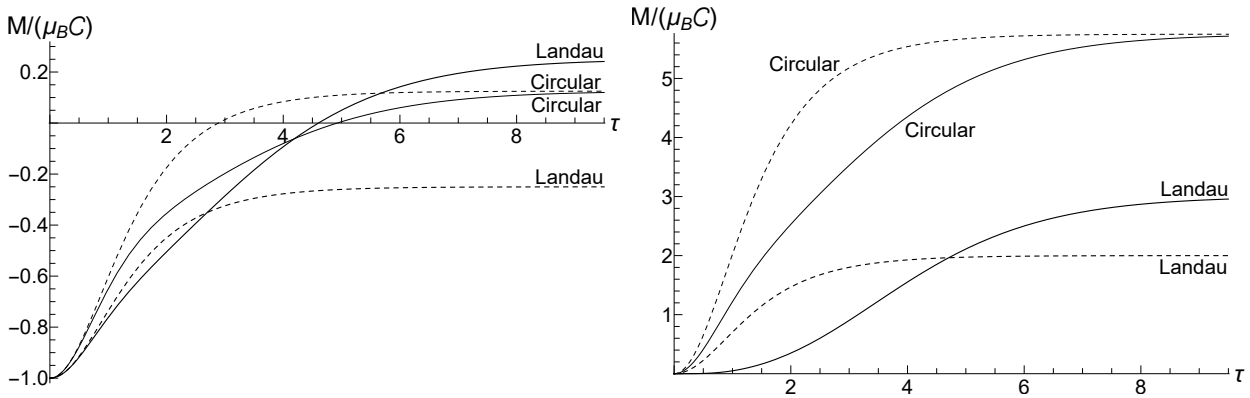


Figura 4.24: O momento magnético médio $\mathcal{M}(\tau)$ nas armadilhas anisótropicas com $s = 2$ em função do tempo adimensional $\tau = \kappa t$ para os calibres circular e de Landau com $B(t) = B_0/\cosh(\kappa t)$. **Linhas sólidas:** $\mu_{Land} = \sqrt{2}$ e $\mu_{circ} = \sqrt{2}/2$. **Linhas tracejadas:** $\mu_{Land} \ll 1$ e $\mu_{circ} \ll 1$. **Esquerda:** o caso de baixa temperatura, $\rho = 0$, $\Upsilon = 1$. **Direita:** o caso de alta temperatura, $\rho = 1$, $\Upsilon = 10$.

com o mesmo campo magnético *dependente do tempo*, pois as geometrias dos campos elétricos induzidos são diferentes. A única exceção é o caso da variação adiabática do campo magnético, desde que a razão entre as frequências final e inicial não seja muito pequena, de tal maneira que a solução adiabática simples (4.149) para a equação (4.1) possa ser justificada. Consequências importantes dos numerosos exemplos considerados neste capítulo são as condições de validade de duas aproximações frequentemente usadas: a de “salto repentino” e a adiabática. Para as variações *monótonas* da frequência do cíclotron $\Omega(t)$, um parâmetro simples que distingue entre os dois casos extremos é a razão $\mu = \Omega_i/\kappa$, onde κ^{-1} é um tempo característico da transição da frequência inicial Ω_i para a final Ω_f . Formalmente, o “salto repentino” corresponde a $\mu \ll 1$, enquanto a aproximação adiabática corresponde a $\mu \gg 1$. No entanto, nossos exemplos mostram que, em muitos casos, uma precisão razoável das aproximações pode ser alcançada quando μ é algumas vezes menor

ou maior do que a unidade. Praticamente, os valores $\mu = 0.1$ e $\mu = 10$ podem ser suficientes. Esse resultado é importante, porque justifica a razoabilidade da abordagem de “salto repentino” em inúmeras aplicações, em particular, em nossos artigos [26–28] e nos capítulos anteriores deste trabalho. No entanto, tais justificativas não são universais: elas funcionam bem somente se o “tempo de transição” for bem definido, como nos casos do decaimento tipo exponencial. Para leis de evolução da frequência mais lenta, a situação pode ser mais complicada: veja as seções 4.2.1, 4.2.2 e 4.6.1.

Um caso excepcional interessante é quando $\Omega_f = 0$. Já é sabido há muito tempo (começando, talvez, na referência [44]) que a descrição do limite de transição de um campo magnético diferente de zero para o movimento livre é um problema não trivial. Nossos resultados mostram que os valores médios da energia e do momento magnético tendem a alguns valores constantes, que são diferentes para os calibres de Landau e circular. Além disso, esses valores constantes são sensíveis às formas concretas da frequência dependente do tempo $\Omega(t)$. Por exemplo, os valores de $\mathcal{E}_{circ}(\infty)$ e $\mathcal{M}_{circ}(\infty)$ não dependem da velocidade do decaimento da frequência para o “decaimento exponencial suave” $\Omega(t) = \Omega_i / \cosh(\kappa t)$. Por outro lado, os valores finais análogos para o calibre de Landau dependem fortemente do parâmetro κ no caso anisotrópico: até os sinais dos momentos magnéticos finais podem ser opostos. Imagens muito diferentes são observadas quando as formas assintóticas da função $\Omega(t)$ são não exponenciais, por exemplo, as leis de potência inversa $\Omega(t) \sim t^{-b}$ com $b > 0$. Se $b = 2$, as figuras 4.4 e 4.5 ainda mostram a existência de valores finitos $\mathcal{E}_{circ}(\infty)$ e $\mathcal{M}_{circ}(\infty)$, que são bem diferentes do caso da redução exponencial. Por outro lado, $\mathcal{M}_{circ}(t)$ e $\mathcal{M}_{Land}(t)$ podem crescer ilimitadamente quando $t \rightarrow \infty$ se $b = 1$ e a escala de tempo característica t_0 for relativamente pequena: veja as figuras 4.3 e 4.22. Outra característica intrigante do caso especial em que $b = 1$ é que nem as aproximações adiabáticas nem as de salto repentino funcionam em todo o eixo do tempo, embora ambas as aproximações possam ter sentido dentro de alguns intervalos de tempo limitados para valores apropriados dos parâmetros. Em particular, sob a condição $\Omega_0 t_0 \ll 1$, a energia média e o momento magnético atingem rapidamente os valores previstos pelas fórmulas de aproximação do salto repentino, como se poderia esperar. Um resultado totalmente inesperado é que após longos intervalos de tempo as funções $\mathcal{E}(t)$ e $\mathcal{M}(t)$ tendem a valores finais que são muito diferentes das previsões do salto repentino (e diferentes para os calibres circular e de Landau). Talvez isso seja consequência da ausência de um valor bem definido do “tempo de transição” para esse tipo de evolução, com uma “extremidade” não exponencial muito longa. Provavelmente, um estudo de uma situação mais geral, com um valor arbitrário do parâmetro b , poderia ser interessante. No entanto, deixamos esse problema para um outro trabalho.

Embora a escolha de $\Omega_f = 0$ nos permita encontrar várias soluções simples e exatas para a equação (4.1), é necessário lembrar que esse limite no hamiltoniano \hat{H}_0 , dado pela equação (1.1), pode ser duvidoso do ponto de vista da descrição de situações físicas reais, em que uma partícula quântica está sempre confinada dentro de algum recipiente ou armadilha. Provavelmente, um hamiltoniano mais adequado, neste caso, pode ser obtido na forma

$$\hat{H}_g = \hat{H}_0 + M (g_1^2 \hat{x}^2 + g_2^2 \hat{y}^2) / 2. \quad (4.187)$$

Uma investigação preliminar nessa direção para o calibre circular e $g_1 = g_2$ foi realizada recentemente no artigo [114]. Parece que vale a pena estudar o caso geral com $g_1 \neq g_2$, especialmente em relação ao calibre de Landau.

Alguns resultados, principalmente relacionados ao comportamento do momento magnético, parecem paradoxais. Na verdade, o valor diferente de zero do parâmetro ρ no estado inicial é necessário para que se obtenha o valor de Landau–Darwin correto (4.3) do momento magnético médio no estado de equilíbrio de uma partícula carregada livre em um campo magnético uniforme. No entanto, a fórmula (4.34) fornece um momento magnético médio oscilante, mesmo no caso em que a frequência é constante ω (quando essa fórmula é *exata*). Por outro lado, todos os valores médios não podem depender do tempo em qualquer estado de equilíbrio descrito pelo operador de densidade $\hat{\rho} = \exp(-\beta\hat{H})$, se \hat{H} é independente do tempo. Uma possível explicação para essa controvérsia é que a matriz de covariâncias (1.30) corresponde, estritamente falando, ao estado de equilíbrio do sistema, descrito não pelo hamiltoniano livre \hat{H}_0 , dado pela equação (1.1), mas pelo hamiltoniano (4.187) com $g_k \ll \omega_i$. Parece que o desligamento abrupto do potencial parabólico confinante em $t = 0$ transforma o estado de equilíbrio do hamiltoniano \hat{H}_g no estado de não equilíbrio do hamiltoniano \hat{H}_0 , assim, a evolução posterior de algumas quantidades torna-se dependente do tempo. O hamiltoniano (1.1) possui muitas características atrativas, relacionadas à existência das constantes de movimento x_c e y_c . Por outro lado, provavelmente, é simplificado demais em alguns aspectos, porque, por exemplo, o operador de densidade de equilíbrio formal $\exp(-\beta\hat{H}_0)$ não pode ser normalizado: seu traço é igual ao infinito. Esse assunto precisa de um estudo mais detalhado.

Mais um problema intrigante está relacionado ao caso da variação muito lenta da frequência do cíclotron $\Omega(t)$. À primeira vista, é suficiente usar uma solução simples (4.149) para se calcular todos os valores médios e probabilidades [11, 115]. Uma consequência imediata é a dependência linear $\mathcal{E}_f/\mathcal{E}_i = \omega_f/\omega_i$ (o conhecido invariante adiabático), claramente visto nas figuras 4.7 e 4.15 para quaisquer valores dos parâmetros $s_0\Upsilon$ e ρ . Contudo, a solução (4.149) não é válida quando a frequência fica próxima de zero, especialmente quando passa pelo valor zero e se torna negativa. Dois exemplos *para o calibre circular* nas seções 4.3.1 e 4.4.1 mostram que a razão $\mathcal{E}_f/\mathcal{E}_i$ como função de $|\omega_f|/\omega_i$ é novamente uma linha reta quando $\omega_f < 0$, mas o coeficiente de proporcionalidade é maior do que a unidade: é igual a 3 no regime de baixa temperatura, enquanto pode ser ainda maior no regime de alta temperatura. Infelizmente, não sabemos o que pode acontecer *para o calibre de Landau*, já que não conseguimos encontrar soluções explícitas quando $\omega(t) < 0$ para esse calibre (exceto para a aproximação de salto repentino). Esse é um desafio para estudos futuros, assim como a obtenção de soluções explícitas para o caso adiabático geral com um parâmetro de calibre arbitrário α e frequência final negativa ω_f .

Vale ressaltar que o potencial vetor linear (1) com qualquer função dependente do tempo $B(t)$ é, de fato, *uma aproximação* na ausência de correntes externas distribuídas. No entanto, essa aproximação é muito boa no caso não relativístico, porque a escala de não homogeneidade espacial do campo eletromagnético é proporcional à velocidade da luz c , enquanto o raio do cíclotron de uma partícula carregada (definindo a escala de inhomogeneidade admissível do campo magnético para o nosso modelo) é proporcional à velocidade da partícula $v \ll c$, como já discutido na seção 3.7. Para mais detalhes pode-se consultar as referências [27, 62].

Considerações finais

Estudamos amplamente o comportamento das variâncias, da energia média e do momento magnético médio de uma partícula carregada se movendo num campo magnético não estacionário descrito por meio do potencial vetor linear geral dado pela equação (1).

No capítulo 2, considerando um salto duplo do campo magnético, mostramos que de fato não é possível criar, a partir de estados coerentes, estados comprimidos para um calibre circular ($\alpha = 0$). Por outro lado, isso pode ser feito para qualquer outro valor do parâmetro de calibre α . Na maioria das situações, o grau máximo de compressão é obtido para o calibre de Landau ($|\alpha| = 1$). Porém, em alguns casos específicos, valores intermediários de α produziram compressões mais intensas, por exemplo, para uma inversão do campo magnético o valor $|\alpha| = 3/4$ fornece a maior compressão.

No capítulo 3, os valores médios da energia e do momento magnético e suas flutuações quânticas foram obtidos para um valor arbitrário de α ao se considerar uma situação mais simples, um salto único do campo magnético. Ficou claro que a dinâmica da partícula depende da escolha do calibre do potencial vetorial quando o campo magnético é variável. Verificamos que em alguns casos é possível reduzir a energia média da partícula (“resfriar” a partícula) mudando o campo magnético. Em particular, no limite de baixas temperaturas, a queda máxima da energia para o calibre de Landau foi duas vezes menor que para o calibre circular. Fornecemos uma nova possibilidade para se justificar o pequeno valor do momento magnético médio num estado de equilíbrio em regime de altas temperaturas, atribuindo esse fato ao acoplamento estatístico entre as coordenadas relativas (x_r, y_r) e as coordenadas do centro (x_c, y_c) , veja a seção 3.7. Tanto o momento magnético médio quanto suas variâncias apresentaram fortes oscilações após o salto do campo magnético. Nesse cenário, se o sinal do campo magnético permanecer o mesmo, o momento magnético médio pode mudar periodicamente de sinal. Os valores dessas flutuações são muito altos e sempre maiores que o quadrado do valor médio do momento magnético, mesmo em regimes de baixas temperaturas. Além disso, os resultados apresentam uma forte dependência em relação à simetria do potencial confinante inicial.

No capítulo 4, considerando os calibres particulares circular e de Landau, obtivemos os valores médios exatos da energia e do momento magnético para muitas formas de variações contínuas do campo magnético. Mostramos que na maioria dos casos as aproximações de variação instantânea (considerada nos capítulos anteriores) e de variação adiabática do campo magnético são razoáveis, exceto na situação em que o campo magnético final é zero, quando essas aproximações podem falhar, principalmente quando $t \rightarrow \infty$.

Alguns problemas interessantes ficam em aberto para estudos futuros. Um deles é a obtenção das

soluções exatas para duas situações em que o campo magnético muda de forma assintótica para um valor final negativo: a primeira é considerando o calibre de Landau e a segunda é considerando o caso adiabático com um valor arbitrário do parâmetro de calibre α . Outro é o estudo mais detalhado do caso em que o campo magnético varia de acordo com as leis de potência inversa $\Omega(t) \sim t^{-b}$ com um valor arbitrário do parâmetro b .

Por fim, seria interessante verificar os resultados deste trabalho em experimentos com elétrons ou íons únicos se movendo no interior de solenoides de diferentes formatos para diferentes armadilhas de potencial iniciais.

Apêndice A

Potencial vetor dentro de um solenóide infinito com uma seção transversal arbitrária

Nosso ponto de partida é a fórmula para o potencial vetor criado por uma distribuição arbitrária da densidade de corrente elétrica \mathbf{j} (no sistema de unidades gaussiano) [77]:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV. \quad (\text{A.1})$$

Vamos considerar um solenóide cilíndrico de comprimento $2Z$ e uma seção transversal arbitrária. Dois exemplos são mostrados na figura A.1.

Suponha que a densidade de corrente seja diferente de zero em uma fina camada de espessura τ , sendo direcionada perpendicularmente ao eixo do cilindro z e tendo o valor absoluto constante j_0 . O elemento volumétrico de integração dV pode ser escolhido na forma $dV = \tau dl dz$, onde dl é o elemento de comprimento infinitesimal ao longo das bordas do cilindro no plano horizontal xy . Estamos interessados no potencial vetor no plano $z = 0$ (assumindo que $-Z < z < Z$ para os pontos da superfície do solenóide), tendo em mente assumir o limite $Z \rightarrow \infty$. Podemos escrever $\mathbf{j}dV = \mathcal{I} \mathbf{dl} dz$, onde $\mathcal{I} = j_0 \tau$ é a densidade da corrente superficial e \mathbf{dl} é o vetor infinitesimal ao longo do contorno da seção transversal. Então, (A.1) assume a forma

$$\mathbf{A}(x, y) = \frac{\mathcal{I}}{c} \oint \mathbf{dl} \int_{-Z}^Z \frac{dz}{(\rho^2 + z^2)^{1/2}}, \quad \rho^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2, \quad (\text{A.2})$$

onde (ξ, η) é um ponto na superfície do cilindro no plano $z = 0$, logo temos $\mathbf{dl} = (d\xi, d\eta)$. A integral em relação a dz pode ser facilmente calculada com o auxílio da substituição $z = \rho \sinh(\chi)$:

$$\int_{-Z}^Z \frac{dz}{(\rho^2 + z^2)^{1/2}} = 2\chi_Z = 2 \ln \left[\left(Z + \sqrt{Z^2 + \rho^2} \right) / \rho \right].$$

Para $Z \gg \rho$, o lado direito pode ser escrito na forma $2 \ln(2Z) + \rho^2/(2Z^2) - 2 \ln \rho$. Como

$$\oint \mathbf{dl} \ln(2Z) = 0,$$

obtemos o seguinte limite de (A.2) para $Z \rightarrow \infty$:

$$\mathbf{A}(x, y) = -\frac{\mathcal{I}}{c} \oint \mathbf{dl} \ln(\rho^2). \quad (\text{A.3})$$

Esta fórmula geral é válida para qualquer solenóide cilíndrico infinito, com uma seção transversal arbitrária (desde que a densidade de corrente superficial não dependa de z). Pode-se ficar infeliz ao ver a quantidade dimensional ρ^2 no argumento da função logarítmica. No entanto, pode-se tornar esse argumento adimensional, acrescentando ao lado direito da equação (A.3) a expressão $\oint \mathbf{dl} \ln(S) = 0$, onde S pode ser uma constante arbitrária com dimensão quadrática de comprimento. De qualquer maneira, nenhum erro com a dimensionalidade aparecerá nos resultados finais.

Para um solenóide elíptico com os eixos iguais a $2a$ e $2b$, pode-se usar a parametrização $\xi = a \cos \varphi$ e $\eta = b \sin \varphi$. Então, as duas componentes do potencial vetor podem ser escritas como

$$\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \end{pmatrix} = -\frac{\mathcal{I}}{c} \int_0^{2\pi} d\varphi \begin{pmatrix} -a \sin \varphi \\ b \cos \varphi \end{pmatrix} \ln [(x - a \cos \varphi)^2 + (y - b \sin \varphi)^2]. \quad (\text{A.4})$$

Pode-se verificar que a mudança da variável de integração $\varphi = \psi - \pi/2$, junto com as substituições $x \rightarrow y$, $y \rightarrow -x$ e $a \leftrightarrow b$, transformam a integral para A_x na integral para A_y . Portanto, é suficiente calcular A_x . No entanto, o cálculo da integral (A.4) para quatro parâmetros arbitrários, a, b, x, y , é bastante complicado. Sendo assim, vamos assumir que $|x| \ll a$ e $|y| \ll b$. Isso significa que consideramos o movimento em uma região relativamente pequena dentro do solenóide cujos tamanhos perpendiculares são suficientemente grandes. Pode-se notar que integral (A.4) é nula para $x = y = 0$, já que, nesse caso, o integrando é uma função ímpar. Levando em consideração apenas termos lineares com relação a x e y , chegamos à fórmula

$$A_x = -\frac{2aby\mathcal{I}}{c} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi \sin^2 \varphi}{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}. \quad (\text{A.5})$$

A integral proporcional a x é igual a zero, pois o integrando relacionado é uma função ímpar de φ . A integral em (A.5) pode ser escrita na forma

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\psi(1 - \cos \psi)}{a^2 + b^2 + (a^2 - b^2) \cos \psi} = -\oint_{|z|=1} \frac{dz}{iz} \frac{(z-1)^2}{(a^2 - b^2)(z^2 + 1) + 2(a^2 + b^2)z},$$

onde $\psi = 2\varphi$ e $z = \exp(i\psi)$. O integrando da integral de linha tem dois pólos dentro do círculo: $|z| = 1$: $z_1 = 0$ e $z_2 = (b-a)/(b+a)$. Usando o método de resíduos, chegamos à fórmula

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi \sin^2 \varphi}{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi} = \frac{2\pi}{b(a+b)}. \quad (\text{A.6})$$

Consequentemente, as componentes do potencial vetor próximas ao centro do solenóide elíptico assumem as formas

$$A_x = -\frac{Bay}{a+b}, \quad A_y = \frac{Bbx}{a+b}, \quad B = 4\pi\mathcal{I}/c, \quad (\text{A.7})$$

onde B é a intensidade do campo magnético uniforme dentro do solenóide. Comparando (1) com (A.7), obtemos a relação entre o parâmetro α e os semi-eixos do solenóide elíptico:

$$\alpha = (a-b)/(a+b). \quad (\text{A.8})$$

Na verdade, o potencial vetor linear (1) existe para uma forma arbitrária da seção transversal do solenóide, possuindo uma simetria em relação às reflexões dos eixos x e y , dentro de uma pequena região (em comparação com os tamanhos transversais do solenóide) perto do centro. Por exemplo, vamos considerar a seção transversal retangular $-a \leq \xi \leq a$ e $-b \leq \eta \leq b$. Então, a fórmula (A.3) leva a

$$A_y = \frac{\mathcal{I}}{c} \int_{-b}^b d\eta \ln \left[\frac{(\eta - y)^2 + (x + a)^2}{(\eta - y)^2 + (x - a)^2} \right]. \quad (\text{A.9})$$

As integrais indefinidas correspondentes podem ser calculadas exatamente:

$$\int dz \ln(z^2 + g^2) = z \ln(z^2 + g^2) - 2z + 2g \tan^{-1}(z/g).$$

No entanto, a fórmula exata resultante para A_y é muito complicada. Por outro lado, expandindo o integrando em (A.9) em relação a x e y , obtemos, em uma aproximação linear:

$$A_y = \frac{\mathcal{I}}{c} \int_{-b}^b \frac{4ax d\eta}{a^2 + \eta^2} = (2/\pi) Bx \tan^{-1}(b/a). \quad (\text{A.10})$$

Nesse caso,

$$\alpha = 1 - (4/\pi) \tan^{-1}(b/a). \quad (\text{A.11})$$

Para mostrar como o potencial vetorial (1) com $|\alpha| > 1$ pode ser criado, vamos considerar o solenóide côncavo com dois limites hiperbólicos, $(\xi/a)^2 - (\eta/b)^2 = 1$, com as parametrizações $\xi = \pm a \cosh(\chi)$ e $\eta = b \sinh(\chi)$. Já que a corrente deve fluir ao longo do circuito fechado, supomos que $-\chi_m < \chi < \chi_m$, para que o circuito seja fechado por duas linhas retas $\eta = \pm b \sinh(\chi_m)$. Nesta geometria, a componente A_y é determinada apenas pela corrente nos limites hiperbólicos. Pode ser escrita na forma (se a corrente fluir no sentido anti-horário)

$$A_y = \frac{\mathcal{I}}{c} \int_{-\chi_m}^{\chi_m} b \cosh \chi d\chi \ln \left[\frac{(b \sinh \chi - y)^2 + (x + a \cosh \chi)^2}{(b \sinh \chi - y)^2 + (x - a \cosh \chi)^2} \right]. \quad (\text{A.12})$$

Na aproximação linear, em relação às variáveis x e y , chegamos à integral

$$A_y = \frac{4abx\mathcal{I}}{c} \int_{-\chi_m}^{\chi_m} \frac{d\chi \cosh^2 \chi}{a^2 \cosh^2 \chi + b^2 \sinh^2 \chi}. \quad (\text{A.13})$$

Essa integral pode ser calculada exatamente [113]. O resultado é

$$A_y = \frac{2Babx}{\pi(a^2 + b^2)} \left[\chi_m + \frac{b}{a} \tan^{-1} \left(\frac{b}{a} \tanh \chi_m \right) \right]. \quad (\text{A.14})$$

Conseqüentemente,

$$\alpha = 1 - \frac{4ab}{\pi(a^2 + b^2)} \left[\chi_m + \frac{b}{a} \tan^{-1} \left(\frac{b}{a} \tanh \chi_m \right) \right]. \quad (\text{A.15})$$

Se $\chi_m \ll 1$, então α é próximo à 1. Mas α pode ser menor que -1 para valores suficientemente altos do parâmetro χ_m . Em particular, se $\chi_m \gg 1$ e $a = b$, então $\alpha \approx 1/2 - 2\chi_m/\pi$.

A aproximação linear para o potencial vetor pode ser justificada se o tamanho transversal do solenóide for muito maior que o raio de Larmor da partícula carregada $R_L = |v/\omega|$. Para uma partícula quântica com a energia mínima $\hbar\omega_0/2$, tem-se $R_{L0} = \sqrt{\hbar/(m\omega_0)} = \sqrt{\hbar c/(eB_0)}$. Para se ter uma idéia das ordens de grandeza dos parâmetros, consideramos um elétron se movendo em um campo magnético da ordem de $B_0 = 10^3$ G. Então, $\omega_0 \sim 2 \times 10^{10} \text{ s}^{-1}$ e $R_{L0} \sim 10^{-5} \text{ cm}$. Portanto, a aproximação linear é muito boa para solenóides cujas dimensões transversais são muito maiores que 1 mm e campos magnéticos mais fortes do que 1 G.

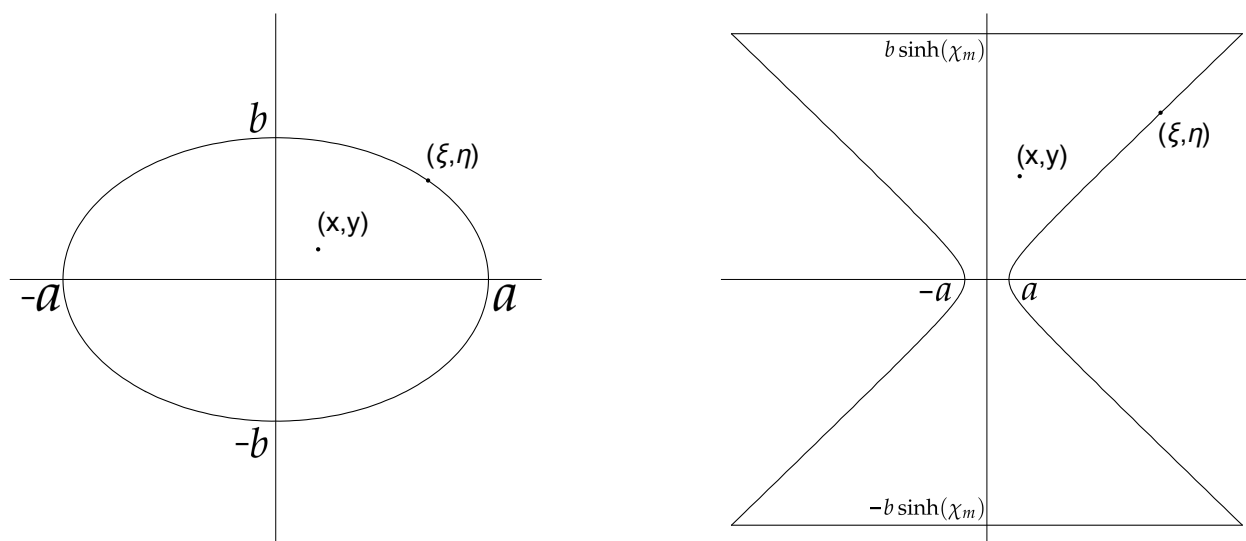


Figura A.1: **Esquerda:** A seção transversal do solenóide elíptico com a razão entre os eixos $a/b = 2$, produzindo o potencial vetor (1) com $\alpha = 1/3$. **Direita:** A seção transversal do solenóide hiperbólico com $\alpha \approx -3/2$.

Apêndice B

Os momentos de quarta ordem em termos dos de segunda ordem para os estados gaussianos

As seguintes relações são mantidas nos estados gaussianos, como casos especiais da fórmula geral (3.25):

$$\overline{x_r^4} = 3 \left(\overline{x_r^2} \right)^2, \quad \overline{y_r^4} = 3 \left(\overline{y_r^2} \right)^2,$$

$$\overline{x_r^2 y_r^2} = \langle \hat{x}_r^2 \hat{y}_r^2 + \hat{y}_r^2 \hat{x}_r^2 + \hat{x}_r \hat{y}_r \hat{x}_r \hat{y}_r + \hat{y}_r \hat{x}_r \hat{y}_r \hat{x}_r + \hat{x}_r \hat{y}_r^2 \hat{x}_r + \hat{y}_r \hat{x}_r^2 \hat{y}_r \rangle / 6 = \langle \hat{x}_r^2 \hat{y}_r^2 + \hat{y}_r^2 \hat{x}_r^2 \rangle / 2 - [\hat{x}_r, \hat{y}_r]^2 / 2 = \overline{x_r^2} \cdot \overline{y_r^2} + 2 (\overline{x_r y_r})^2.$$

Portanto, $\langle \hat{x}_r^2 \hat{y}_r^2 + \hat{y}_r^2 \hat{x}_r^2 \rangle = 2 \overline{x_r^2} \cdot \overline{y_r^2} + 4 (\overline{x_r y_r})^2 + [\hat{x}_r, \hat{y}_r]^2$. Como $[\hat{x}_r, \hat{x}_c] = [\hat{y}_r, \hat{y}_c] = 0$, então

$$\langle \hat{x}_c^2 \hat{x}_r^2 + \hat{y}_c^2 \hat{y}_r^2 \rangle = \overline{x_c^2 x_r^2} + \overline{y_c^2 y_r^2} = \overline{x_c^2} \cdot \overline{x_r^2} + \overline{y_c^2} \cdot \overline{y_r^2} + 2 \left[(\overline{x_c x_r})^2 + (\overline{y_c y_r})^2 \right].$$

No caso de quatro operadoras diferentes, temos

$$\begin{aligned} \overline{x_c y_c x_r y_r} &= \langle \hat{x}_c \hat{y}_c \hat{x}_r \hat{y}_r + \hat{y}_c \hat{x}_c \hat{y}_r \hat{x}_r + \hat{x}_c \hat{y}_c \hat{y}_r \hat{x}_r + \hat{y}_c \hat{x}_c \hat{x}_r \hat{y}_r \rangle / 4 = \langle \hat{x}_c \hat{y}_c \hat{x}_r \hat{y}_r + \hat{y}_c \hat{x}_c \hat{y}_r \hat{x}_r \rangle / 2 + [\hat{x}_r, \hat{y}_r] [\hat{y}_c, \hat{x}_c] / 4 \\ &= \overline{x_c y_c} \cdot \overline{x_r y_r} + \overline{x_c x_r} \cdot \overline{y_c y_r} + \overline{x_c y_r} \cdot \overline{y_c x_r}. \end{aligned}$$

No caso em estudo, $\overline{x_c y_c} = \overline{y_c x_c} = 0$ antes e depois do salto. Além disso, $[\hat{x}_r, \hat{y}_r] = [\hat{y}_c, \hat{x}_c]$. Portanto,

$$\langle \hat{x}_c \hat{y}_c \hat{x}_r \hat{y}_r + \hat{y}_c \hat{x}_c \hat{y}_r \hat{x}_r \rangle = 2 (\overline{x_c x_r} \cdot \overline{y_c y_r} + \overline{x_c y_r} \cdot \overline{y_c x_r}) - [\hat{x}_r, \hat{y}_r]^2 / 2.$$

Outra relação útil é $\overline{x_c y_r^2 x_r} = \langle \hat{x}_c (\hat{y}_r^2 \hat{x}_r + \hat{x}_r \hat{y}_r^2 + \hat{y}_r \hat{x}_r \hat{y}_r) \rangle / 3$. Mas $\langle \hat{y}_r \hat{x}_r \hat{y}_r \rangle = \langle \hat{y}_r^2 \hat{x}_r + \hat{x}_r \hat{y}_r^2 \rangle / 2$.

Portanto, $\overline{x_c y_r^2 x_r} = \langle \hat{x}_c (\hat{y}_r^2 \hat{x}_r + \hat{x}_r \hat{y}_r^2) \rangle / 2 = 2 \overline{x_c y_r} \cdot \overline{y_r x_r} + \overline{x_c x_r} \cdot \overline{y_r^2}$, logo

$$\langle \hat{x}_c (\hat{y}_r^2 \hat{x}_r + \hat{x}_r \hat{y}_r^2) \rangle = 4 \overline{x_c y_r} \cdot \overline{y_r x_r} + 2 \overline{x_c x_r} \cdot \overline{y_r^2}, \quad \langle \hat{y}_c (\hat{x}_r^2 \hat{y}_r + \hat{y}_r \hat{x}_r^2) \rangle = 4 \overline{y_c x_r} \cdot \overline{x_r y_r} + 2 \overline{y_c y_r} \cdot \overline{x_r^2}.$$

Da mesma maneira,

$$\langle \hat{x}_r^3 \hat{x}_c \rangle = 3 \overline{x_r x_c} \cdot \overline{x_r^2}, \quad \langle \hat{y}_r^3 \hat{y}_c \rangle = 3 \overline{y_r y_c} \cdot \overline{y_r^2}.$$

Apêndice C

Detalhes das soluções gerais para o calibre circular

É conveniente introduzir a matriz de rotação 2×2

$$\mathcal{R} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{vmatrix}, \quad \varphi(t) = \int_0^t \omega(\tau) d\tau. \quad (\text{C.1})$$

Então, a matriz Λ_Q da equação (1.18) pode ser escrita na forma

$$\Lambda_Q = \omega_i^{1/2} \begin{vmatrix} \text{Re}(\varepsilon)\mathcal{R} & \text{Im}(\varepsilon)\mathcal{R}/(m\omega_i) \\ m\text{Re}(\dot{\varepsilon})\mathcal{R} & \text{Im}(\dot{\varepsilon})\mathcal{R}/\omega_i \end{vmatrix}. \quad (\text{C.2})$$

Calculando o produto da matriz (1.21), obtemos $\Lambda_q(t)$. Seus blocos 2×2 têm uma estrutura semelhante,

$$\lambda_j(t) = \frac{\sqrt{\omega_i}}{2\omega(t)} \begin{vmatrix} c_j(t) & s_j(t) \\ -s_j(t) & c_j(t) \end{vmatrix}, \quad (\text{C.3})$$

com os seguintes coeficientes:

$$\begin{aligned} c_1 &= a_+ \cos \varphi - b_- \sin \varphi, & s_1 &= a_+ \sin \varphi + b_- \cos \varphi, \\ c_2 &= a_- \cos \varphi + b_+ \sin \varphi, & s_2 &= a_- \sin \varphi - b_+ \cos \varphi, \\ c_3 &= a_- \cos \varphi - b_+ \sin \varphi, & s_3 &= a_- \sin \varphi + b_+ \cos \varphi, \\ c_4 &= a_+ \cos \varphi + b_- \sin \varphi, & s_4 &= a_+ \sin \varphi - b_- \cos \varphi, \end{aligned}$$

onde

$$a_{\pm}(t) = \omega(t)\text{Re}(\varepsilon) \pm \text{Im}(\dot{\varepsilon}), \quad b_{\pm}(t) = \omega(t)\text{Im}(\varepsilon) \pm \text{Re}(\dot{\varepsilon}).$$

Então, as equações (4.5), (4.6) e (C.3) resultam nas seguintes expressões para os blocos da matriz $\sigma_q(t)$:

$$G\sigma_r = \frac{G\omega_i}{4\omega^2(t)} \times \begin{vmatrix} c_1^2 + s_1^2 + \Upsilon(sc_2^2 + s^{-1}s_2^2) - 2\rho(c_1c_2 + s_1s_2) & \Upsilon s_2c_2(s^{-1} - s) \\ \Upsilon s_2c_2(s^{-1} - s) & c_1^2 + s_1^2 + \Upsilon(ss_2^2 + s^{-1}c_2^2) - 2\rho(c_1c_2 + s_1s_2) \end{vmatrix}, \quad (\text{C.4})$$

$$G\sigma_c = \frac{G\omega_i}{4\omega^2(t)} \times \begin{vmatrix} c_3^2 + s_3^2 + \Upsilon(sc_4^2 + s^{-1}s_4^2) - 2\rho(c_3c_4 + s_3s_4) & \Upsilon s_4c_4(s^{-1} - s) \\ \Upsilon s_4c_4(s^{-1} - s) & c_3^2 + s_3^2 + \Upsilon(ss_4^2 + s^{-1}c_4^2) - 2\rho(c_3c_4 + s_3s_4) \end{vmatrix}, \quad (\text{C.5})$$

$$G\sigma_{rc} = \frac{G\omega_i}{4\omega^2(t)} (\Sigma_0 + \Upsilon\Sigma_\Upsilon - \rho\Sigma_\rho), \quad (\text{C.6})$$

$$\Sigma_0 = \begin{vmatrix} c_1c_3 + s_1s_3 & s_1c_3 - c_1s_3 \\ c_1s_3 - s_1c_3 & c_1c_3 + s_1s_3 \end{vmatrix}, \quad \Sigma_\Upsilon = \begin{vmatrix} sc_2c_4 + s^{-1}s_2s_4 & s^{-1}s_2c_4 - sc_2s_4 \\ s^{-1}c_2s_4 - ss_2c_4 & ss_2s_4 + s^{-1}c_2c_4 \end{vmatrix}, \quad (\text{C.7})$$

$$\Sigma_\rho = \begin{vmatrix} c_1c_4 + s_1s_4 + c_2c_3 + s_2s_3 & s_1c_4 + s_2c_3 - c_1s_4 - c_2s_3 \\ c_1s_4 + c_2s_3 - s_1c_4 - s_2c_3 & c_1c_4 + s_1s_4 + c_2c_3 + s_2s_3 \end{vmatrix}. \quad (\text{C.8})$$

Vemos que uma armadilha anisotópica ($s \neq 1$) complica significativamente todas as fórmulas. Portanto, em alguns casos, devemos considerar o caso mais simples em que $s = 1$, quando as matrizes σ_r e σ_c são proporcionais à matriz 2×2 unitária I_2 :

$$G\sigma_r = \frac{G\omega_i}{4\omega^2(t)} [|F_-|^2 + \Upsilon|F_+|^2 - 2\rho\text{Re}(F_-F_+)] I_2, \quad G\sigma_c = \frac{G\omega_i}{4\omega^2(t)} [|F_+|^2 + \Upsilon|F_-|^2 - 2\rho\text{Re}(F_-F_+)] I_2. \quad (\text{C.9})$$

A única matriz não diagonal para $s = 1$ é σ_{rc} :

$$G\sigma_{rc} = \frac{G\omega_i}{4\omega^2(t)} \begin{vmatrix} (1 + \Upsilon)\text{Re}(F_-F_+^*) - \rho\text{Re}(F_-^2 + F_+^2) & -2\omega(1 + \Upsilon)\text{Re}(\dot{\epsilon}\epsilon^*) \\ 2\omega(1 + \Upsilon)\text{Re}(\dot{\epsilon}\epsilon^*) & (1 + \Upsilon)\text{Re}(F_-F_+^*) - \rho\text{Re}(F_-^2 + F_+^2) \end{vmatrix}. \quad (\text{C.10})$$

Apêndice D

Fórmulas assintóticas para $\kappa \ll \omega_{i,f}$ no caso da frequência dependente do tempo (4.84)

Se $\kappa \ll \omega_i$ e $\kappa \ll \omega_f$, então $|\mu| \gg 1$ e $|\gamma| \gg 1$, e precisamos das fórmulas assintóticas para a função hipergeométrica confluyente $\Phi(a; c; x)$ com grandes valores absolutos do argumento x e do segundo parâmetro c . A fórmula mais simples pode ser encontrada, se considerarmos $c(c+1) \dots (c+n-1) \approx c^n$ na equação (4.87). Então $\Phi(a; c; x) \approx (1 - x/c)^{-a}$. Usando esta aproximação, temos

$$\Phi(1/2; 1 - 2i\gamma; 2i\mu) \approx \sqrt{\frac{\omega_f}{\omega_i}}, \quad \lambda \approx \frac{i\kappa}{\omega_i^2} (\omega_i - \omega_f), \quad K \approx 2\omega_f \left[1 + \kappa^2 (\omega_i - \omega_f)^2 / (2\omega_i^4) \right].$$

No entanto, um resultado tão simples pode ser justificado apenas sob a condição $|x/c| < 1$ [109], que é equivalente a a desigualdade $\omega_f > \omega_i/2$. O caso em que a frequência final é negativa ω_f pode ser estudado com o auxílio de uma fórmula assintótica mais complicada [veja em [109], a equação 6.13.1(2)],

$$\Phi(a; c; iz) \approx \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)} \left(\frac{e^{i\pi/2}}{z} \right)^a + \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} e^{iz} (iz)^{a-c}. \quad (\text{D.1})$$

Que vale para $z \rightarrow \infty$, desde que $z > 0$ e $|c| \ll z$. A última condição não exclui a possibilidade de que $|c| \gg 1$, se $\kappa \ll |\omega_f| \ll \omega_i$. Então, podemos usar também a fórmula de Stirling assintótica para a função Gamma

$$\Gamma(z) \approx \sqrt{2\pi} \exp[(z - 1/2) \ln(z) - z], \quad |z| \gg 1. \quad (\text{D.2})$$

Se $c = x_r - 2i\gamma$, então

$$\ln(x_r - 2i\gamma) = \ln(-2i\gamma) + \ln[1 + ix_r/(2\gamma)].$$

E aqui surge uma grande diferença entre os casos de valores positivos e negativos do coeficiente γ . Se $\gamma > 0$, então $\ln(-2i\gamma) = \ln(2\gamma) - i\pi/2$, e aqui o produto $z \ln(z)$ contém a parte real $-\pi\gamma$. Por outro lado, se $\gamma < 0$,

$$\ln(-2i\gamma) = \ln(2i|\gamma|) = \ln(2|\gamma|) + i\pi/2,$$

e o produto $z \ln(z)$ contém a parte real $+\pi\gamma$. Ao mesmo tempo, o termo $i^{a-c} = \exp[i\pi(a-c)/2]$ na equação (D.1) sempre tem a parte real $\exp(-\pi\gamma)$. Dessa forma, o produto $\Gamma(c)(iz)^{a-c}$ é proporcional a $\exp(-2\pi\gamma)$

para $\gamma > 0$, de modo que o segundo termo na equação (D.1) pode ser negligenciado, se $\gamma \gg 1$. Como resultado, temos as seguintes expressões quando $\kappa \ll \omega_f \ll \omega_i$:

$$\Phi(1/2; 1 - 2i\gamma; 2i\mu) \approx (\omega_f/\omega_i)^{1/2}, \quad \lambda \approx i\kappa/\omega_i, \quad K(\infty) \approx 2\omega_f [1 + \kappa^2/(2\omega_i^2)].$$

Consequentemente, $\mathcal{E}_f/\mathcal{E}_i \approx \omega_f/\omega_i$ em ambos os casos de $\omega_f > 0$, em concordância com a figura 4.7.

Por outro lado, o segundo termo na equação (D.1) não pode ser negligenciado, se $\gamma < 0$, já que os dois termos exponenciais, $\exp(\pi\gamma)$ e $\exp(-\pi\gamma)$, eliminam-se mutuamente. Além disso, este termo é muito maior do que o primeiro no caso da função $\Phi(3/2; 2 - 2i\gamma; 2i\mu)$ com $\mu \gg |\gamma|$. Depois de alguma álgebra, pode-se obter as seguintes expressões [aqui $\Phi \equiv \Phi(1/2; 1 - 2i\gamma; 2i\mu)$]:

$$\Phi \approx \sqrt{\frac{|\gamma|}{\mu}} \left(i + \sqrt{2}e^{i\rho} \right), \quad |\Phi|^2 \approx \frac{|\gamma|}{\mu} \left(3 + 2\sqrt{2} \sin \rho \right), \quad \rho = 2(\mu + \gamma) + 2|\gamma| \ln(|\gamma|/\mu),$$

$$\lambda \approx \frac{2\sqrt{2}e^{i\rho}}{i + \sqrt{2}e^{i\rho}}, \quad \text{Re}\lambda \approx \frac{4 + 2\sqrt{2} \sin \rho}{3 + 2\sqrt{2} \sin \rho}, \quad 1 - \text{Re}\lambda \approx - \left(3 + 2\sqrt{2} \sin \rho \right)^{-1}.$$

Então, pode-se verificar que a identidade (4.93) é exatamente satisfeita, assim, a equação (4.97) produz $K(\infty) = 6|\omega_f|$, ou seja, $\mathcal{E}_f/\mathcal{E}_i \approx 3|\omega_f|/\omega_i$ para $G = \chi$, $\omega_f < 0$, $\kappa \ll |\omega_f| \ll \omega_i$, novamente de acordo com a figura 4.7. Na verdade, este simples resultado corresponde aos termos principais das expansões assintóticas da função hipergeométrica confluyente. A razão diferente de zero ω_f/ω_i resulta em algumas oscilações em torno do valor médio, que são claramente vistas na figura 4.7. A frequência dessas oscilações aumenta com a diminuição do parâmetro κ , como pode ser visto na fórmula do coeficiente ρ .

Apêndice E

Correções analíticas para a aproximação de salto

repentino para $\kappa \gg \omega_{i,f}$ no caso da frequência dependente do tempo (4.84)

Para encontrar correções devido à aproximação de salto instantâneo no caso de grandes, mas finitos valores de κ , é necessária a expansão da função hipergeométrica confluyente em relação ao seu argumento, até os termos da ordem da κ^{-2} :

$$\Phi(1/2; 1 - 2i\gamma; 2i\mu) \approx 1 + i\mu - 2\mu\gamma - 3\mu^2/4, \quad \lambda \approx \frac{\omega_i - \omega_f}{\omega_i} (1 + 2i\gamma + i\mu/2 - \mu\gamma/2 - 4\gamma^2).$$

Então, pode-se verificar que o lado direito de (4.93) é igual a unidade até os termos da ordem da κ^{-2} , confirmando a identidade (4.16). Usando (4.97), obtemos a seguinte expressão para a correção da energia final (4.24) devido à duração finita do “salto” para o calibre circular:

$$\delta\mathcal{E} = -\frac{m(G + \chi)}{4\kappa^2} (\omega_f - \omega_i)^2 \left[5(\omega_f + \omega_i)^2 - 4\omega_i^2 \right]. \quad (\text{E.1})$$

Conseqüentemente, a aproximação do salto repentino pode ser bem justificada de fato sob a condição $\kappa \gg |\omega_f - \omega_i|$. A correção (E.1) pode ser positiva para valores negativos de ω_f , pertencendo ao intervalo $|\omega_f + \omega_i| < 2\omega_i/\sqrt{5}$. Caso contrário, essa correção é negativa.

Apêndice F

Solução para o perfil de Epstein–Eckart (4.114) em toda a linha

Introduzindo a nova variável $\zeta = \exp(\kappa t)$, pode-se transformar a equação (4.1) com a função (4.114) para a forma

$$(\kappa\zeta)^2 \varepsilon'' + \kappa^2 \zeta \varepsilon' + \frac{(\omega_f \zeta + \omega_i)^2}{(\zeta + 1)^2} \varepsilon = 0, \quad (\text{F.1})$$

onde a linha significa a derivada em relação a ζ . Escrevendo $\varepsilon(\zeta) = \zeta^\lambda (1 + \zeta)^d f(\zeta)$, chega-se à equação

$$\begin{aligned} & (\kappa\zeta)^2 (\zeta + 1)^2 f'' + \kappa^2 \zeta (\zeta + 1) [1 + 2\lambda + \zeta(1 + 2\lambda + 2d)] f' \\ & + \left\{ \kappa^2 [(1 + \zeta)^2 \lambda^2 + d(d - 1)\zeta^2 + d\zeta(1 + \zeta)(2\lambda + 1)] + (\omega_f \zeta + \omega_i)^2 \right\} f = 0. \end{aligned} \quad (\text{F.2})$$

A próxima etapa é encontrar os valores dos parâmetros λ e d , que transformam a equação (F.2) para a forma

$$\zeta(1 + \zeta)f'' + (A + B\zeta)f' + Cf = 0, \quad (\text{F.3})$$

com alguns coeficientes constantes A, B, C . A condição necessária é a possibilidade de dividir o coeficiente em f por $\zeta(1 + \zeta)$. Isso significa que este coeficiente deve ir a zero para $\zeta = 0$ e $\zeta = -1$. Assumindo $\zeta = 0$, chega-se à equação $\kappa^2 \lambda^2 + \omega_i^2 = 0$. Escolhemos a solução $\lambda = +i\omega_i/\kappa$, porque leva à expressão correta $\varepsilon(t) \sim \exp(+i\omega_i t)$ quando $t \rightarrow -\infty$. Assumindo $\zeta = -1$, chega-se à equação $\kappa^2 d(d - 1) + (\omega_i - \omega_f)^2 = 0$. Então, comparando a equação (F.3) com (4.113), pode-se obter a solução (4.115) com coeficientes (4.116). A escolha do parâmetro d com o sinal negativo antes da raiz quadrada na equação (4.116) garante que $\varepsilon(t) \sim \exp(+i\omega_i t)$ para todos os momentos se $\omega_i = \omega_f$.

Apêndice G

Funções assintóticas que descrevem o momento magnético no calibre de Landau

A dependência do momento magnético médio está contida nas funções $S_\Omega(t)$, $S_Y(t)$ e $S_\rho(t)$. No regime assintótico, essas funções são determinadas pelos coeficientes constantes u_σ , u_\pm e suas combinações

$$a = u_+ + u_-^*, \quad b = u_+ u_\sigma^* - u_-^* u_\sigma, \quad a_- = u_+ - u_-^*, \quad b_- = u_+ u_\sigma^* + u_-^* u_\sigma.$$

Para simplificar as fórmulas, é útil introduzir quatro funções que oscilam conforme $\exp(i|\omega_f|t)$:

$$A = a e^{i|\omega_f|t}, \quad B = b e^{i|\omega_f|t}, \quad A_- = a_- e^{i|\omega_f|t}, \quad B_- = b_- e^{i|\omega_f|t}.$$

Então,

$$S_\Omega = \sqrt{|\Omega_f|} \operatorname{Re}(A_- - iB_-) + 2|\Omega_f| \sqrt{\Omega_i} (|u_+|^2 + |u_-|^2) / \Omega_f,$$

$$S_Y = (|\Omega_f|/\Omega_f) \{ \operatorname{Re}(b) \operatorname{Im}(A - iB) + |a - ib|^2 \} + \sqrt{\Omega_i/|\Omega_f|} \operatorname{Re}(A - iB) - \sqrt{|\Omega_f|/\Omega_i} \operatorname{Re}(u_\sigma) \operatorname{Im}(A + iB),$$

$$S_\rho = \frac{\Omega_i \operatorname{Re}(A)}{\sqrt{|\Omega_f|}} + \sqrt{|\Omega_f|} [\operatorname{Re}(A_-) - \operatorname{Re}(u_\sigma) \operatorname{Re}(B) - 2 \operatorname{Re}(u_\sigma) \operatorname{Im}(A)] + \frac{2|\Omega_f| \sqrt{\Omega_i}}{\Omega_f} [|a|^2 + \operatorname{Im}(ba^*) + \operatorname{Re}(b)/2].$$

Referências Bibliográficas

- [1] Vladimir Fock. Bemerkung zur quantelung des harmonischen oszillators im magnetfeld. *Zeitschrift für Physik A Hadrons and Nuclei*, 47(5):446–448, 1928. 1, 2
- [2] Charles Galton Darwin. The diamagnetism of the free electron. In *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, volume 27, pages 86–90. Cambridge University Press, 1931. 1, 2, 29
- [3] Leigh Page. Deflection of electrons by a magnetic field on the wave mechanics. *Physical Review*, 36(3):444, 1930. 1, 2
- [4] LD Landau. Diamagnetismus der metalle. *Zeitschrift für Physik*, 64(9-10):629–637, 1930. 1, 2, 4, 5, 29, 30
- [5] WJ De Haas and PM Van Alphen. The dependence of the susceptibility of diamagnetic metals upon the field. In *Proc. Netherlands Roy. Acad. Sci*, volume 33, page 170, 1930. 1
- [6] LW Shubnikov and WJ De Haas. Leiden communication. *vol. 207a*, page 3, 1930. 1
- [7] Yakir Aharonov and David Bohm. Significance of electromagnetic potentials in the quantum theory. *Physical Review*, 115(3):485, 1959. 1
- [8] Klaus Von Klitzing. The quantized hall effect. *Reviews of Modern Physics*, 58(3):519, 1986. 1
- [9] H Ralph Lewis Jr and WB Riesenfeld. An exact quantum theory of the time-dependent harmonic oscillator and of a charged particle in a time-dependent electromagnetic field. *Journal of Mathematical Physics*, 10(8):1458–1473, 1969. 1, 10
- [10] IA Malkin, VI Man'Ko, and DA Trifonov. Invariants and the evolution of coherent states for a charged particle in a time-dependent magnetic field. *Physics Letters A*, 30(7):414, 1969. 1, 10, 37, 39, 40
- [11] IA Malkin, VI Man'Ko, and DA Trifonov. Coherent states and transition probabilities in a time-dependent electromagnetic field. *Physical Review D*, 2(8):1371, 1970. 1, 2, 10, 37, 39, 40, 80
- [12] VV Dodonov, IA Malkin, and VI Man'Ko. Coherent states of a charged particle in a time-dependent uniform electromagnetic field of a plane current. *Physica*, 59(2):241–256, 1972. 1, 2, 4, 10, 37, 39
- [13] IA Malkin and VI Man'Ko. Coherent states of a charged particle in a magnetic field. *Zh. Eksp. Teor. Fiz*, 55:1014, 1968. 1, 4
- [14] H Ralph Lewis Jr and WB Riesenfeld. An exact quantum theory of the time-dependent harmonic oscillator and of a charged particle in a time-dependent electromagnetic field. *Journal of mathematical physics*, 10(8):1458–1473, 1969. 1, 37, 39, 40
- [15] RG Agayeva. Non-adiabatic parametric excitation of oscillator-type systems. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 13(5):1685, 1980. 1, 10, 39, 55
- [16] M Sebawe Abdalla. Charged harmonic oscillator in the presence of electric and magnetic fields. *Il Nuovo Cimento B (1971-1996)*, 101(3):267–283, 1988. 1, 39
- [17] M Sebawe Abdalla. Charged particle in the presence of a variable magnetic field. *Physical Review A*, 37(10):4026, 1988. 1, 10, 39
- [18] Alvaro de Souza Dutra, Carlos Farina de Souza, and Luiz Claudio de Albuquerque. The propagator for a charged oscillator with a time-dependent mass in a time-varying electromagnetic field. *Physics Letters A*, 156(7-8):371–376, 1991. 1, 10, 39
- [19] Cem Yüce. Exact solution of the time-dependent harmonic plus an inverse harmonic potential with a time-dependent electromagnetic field. *Annals of Physics*, 308(2):599–604, 2003. 1, 39
- [20] M Sebawe Abdalla and Jeong-Ryeol Choi. Propagator for the time-dependent charged oscillator via linear and quadratic invariants. *Annals of Physics*, 322(12):2795–2810, 2007. 1, 10, 39
- [21] Salah Menouar, Mustapha Maamache, and Jeong Ryeol Choi. An alternative approach to exact wave functions for time-dependent coupled oscillator model of charged particle in variable magnetic field. *Annals of Physics*, 325(8):1708–1719, 2010. 1, 39

- [22] Salah Menouar and Jeong Ryeol Choi. A hybrid approach for quantizing complicated motion of a charged particle in time-varying magnetic field. *Annals of Physics*, 353:307–316, 2015. 1, 39
- [23] V Aguiar and I Guedes. Entropy and information of a spinless charged particle in time-varying magnetic fields. *Journal of Mathematical Physics*, 57(9):092103, 2016. 1, 10, 39
- [24] Jeong-Ryeol Choi. Exact quantum theory of noninteracting electrons with time-dependent effective mass in a time-dependent magnetic field. *Journal of Physics: Condensed Matter*, 15(6):823, 2003. 2, 10, 39
- [25] VV Dodonov, VI Man'ko, and PG Polynkin. Geometrical squeezed states of a charged particle in a time-dependent magnetic field. *Physics Letters A*, 188(3):232–238, 1994. 2, 4, 5, 11, 14, 15, 19
- [26] Viktor V Dodonov and MB Horovits. Squeezing of relative and center-of-orbit coordinates of a charged particle by step-wise variations of a uniform magnetic field with an arbitrary linear vector potential. *Journal of Russian Laser Research*, 39(4):389–400, 2018. 2, 11, 12, 79
- [27] Viktor V Dodonov and Matheus B Horovits. A quantum charged particle under sudden jumps of the magnetic field and shape of non-circular solenoids. *Quantum Reports*, 1(2):193–207, 2019. 2, 3, 21, 79, 80
- [28] VV Dodonov and MB Horovits. Change of energy and magnetic moment of a quantum charged particle after a fast jump of the magnetic field in solenoids of arbitrary cross sections. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 571:125843, 2021. 3, 9, 21, 79
- [29] VV Dodonov and MB Horovits. Energy and magnetic moment of a quantum charged particle in time dependent magnetic fields of circular and plane solenoids. *arXiv preprint arXiv:2110.04811*, 2021. 3, 39
- [30] MH Johnson and BA Lippmann. Motion in a constant magnetic field. *Physical Review*, 76(6):828, 1949. 4, 5, 9, 29, 30
- [31] Victor A Dulock and Harold V McIntosh. Degeneracy of cyclotron motion. *Journal of Mathematical Physics*, 7(8):1401–1412, 1966. 4
- [32] JE Avron, IW Herbst, and B Simon. Separation of center of mass in homogeneous magnetic fields. *Annals of Physics*, 114(1-2):431–451, 1978. 4, 9
- [33] Bruce R Johnson, Joseph O Hirschfelder, and Kuo-Ho Yang. Interaction of atoms, molecules, and ions with constant electric and magnetic fields. *Reviews of Modern Physics*, 55(1):109, 1983. 4, 9
- [34] Ralph Von Baltz. Guiding center motion of two interacting $n=0$ Landau electrons in two dimensions. *Physics Letters A*, 105(7):371–373, 1984. 4, 9
- [35] K Kowalski and J Rembieliński. Coherent states of a charged particle in a uniform magnetic field. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 38(38):8247, 2005. 4, 9
- [36] Bogdan Mielnik and Alejandra Ramírez. Magnetic operations: a little fuzzy mechanics? *Physica Scripta*, 84(4):045008, 2011. 4, 9, 12, 43
- [37] Viktor V Dodonov. Coherent states and their generalizations for a charged particle in a magnetic field. In *Coherent States and Their Applications*, pages 311–338. Springer, 2018. 4, 9, 43
- [38] Masashi Wakamatsu, Yoshio Kitadono, Liping Zou, and Pengming Zhang. The physics of helical electron beam in a uniform magnetic field as a testing ground of gauge principle. *Physics Letters A*, 384(20):126415, 2020. 4
- [39] Masashi Wakamatsu, Yoshio Kitadono, Liping Zou, and Pengming Zhang. Role of guiding center in Landau level system and mechanical and pseudo orbital angular momenta. *International Journal of Modern Physics A*, 35(19):2050096, 2020. 4
- [40] Richard J Fletcher. Geometric squeezing into the lowest Landau level. *Science*, 372(6548):1318–1322, 2021. 4
- [41] Albert Feldman and Arnold H Kahn. Landau diamagnetism from the coherent states of an electron in a uniform magnetic field. *Physical Review B*, 1(12):4584, 1970. 4
- [42] WG Tam. Coherent states and the invariance group of a charged particle in a uniform magnetic field. *Physica*, 54(4):557–572, 1971. 4
- [43] MH Boon. Networks of coherent states for electron in magnetic-field. In *HELVETICA PHYSICA ACTA*, volume 48, pages 551–553. BIRKHAUSER VERLAG AG PO BOX 133 KLOSTERBERG 23, CH-4010 BASEL, SWITZERLAND, 1975. 4
- [44] S Varró. Coherent state of an electron in a homogeneous constant magnetic field and the zero magnetic field limit. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 17(8):1631, 1984. 4, 79
- [45] C Aragone. New squeezed Landau states. *Physics Letters A*, 175(6):377–381, 1993. 4, 11

- [46] Marek Ozana and Andrei L Shelankov. Squeezed states of a particle in magnetic field. *Physics of the Solid State*, 40(8):1276–1282, 1998. 4, 11, 15
- [47] Chun-Fang Li and Qi Wang. The quantum behavior of an electron in a uniform magnetic field. *Physica B: Condensed Matter*, 269(1):22–27, 1999. 5
- [48] Colin R Greenshields, Robert L Stamps, Sonja Franke-Arnold, and Stephen M Barnett. Is the angular momentum of an electron conserved in a uniform magnetic field? *Physical review letters*, 113(24):240404, 2014. 5
- [49] Colin R Greenshields, Sonja Franke-Arnold, and Robert L Stamps. Parallel axis theorem for free-space electron wavefunctions. *New Journal of Physics*, 17(9):093015, 2015. 5, 28
- [50] M Wakamatsu, Y Kitadono, and P-M Zhang. The issue of gauge choice in the landau problem and the physics of canonical and mechanical orbital angular momenta. *Annals of Physics*, 392:287–322, 2018. 5, 28
- [51] Richard J Fletcher. Angular momentum in the fractional quantum hall effect. *American Journal of Physics*, 88(4):286–291, 2020. 5
- [52] VV Dodonov. Parametric excitation and generation of nonclassical states in linear media. *Theory of Nonclassical States of Light*, pages 153–218. 6, 7, 11, 47
- [53] EA Akhundova, VV Dodonov, and VI Man’ko. Wigner functions of quadratic systems. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 115(1-2):215–231, 1982. 7
- [54] F Nicacio. Weyl–wigner representation of canonical equilibrium states. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 54(5):055004, 2021. 7
- [55] FR Gantmacher. *Theory of matrices* ams, chelsea publishing. 1959. 8
- [56] CF Lo. Time evolution of a charged oscillator with a time-dependent mass and frequency in a time-dependent electromagnetic field. *Physical Review A*, 45(7):5262, 1992. 10
- [57] B Baseia, SS Mizrahi, and MHY Moussa. Generation of squeezing for a charged oscillator and for a charged particle in a time-dependent electromagnetic field. *Physical Review A*, 46(9):5885, 1992. 10, 11
- [58] Adam Bechler. Generation of squeezed states in a homogeneous magnetic field. *Physics Letters A*, 130(8-9):481–482, 1988. 11, 12, 43
- [59] A Jannussis, E Vlahos, D Skaltsas, G Kliros, and V Bartzis. Squeezed states in the presence of a time-dependent magnetic field. *Il Nuovo Cimento B (1971-1996)*, 104(1):53–66, 1989. 11
- [60] M Sebawe Abdalla. Statistical properties of a charged oscillator in the presence of a constant magnetic field. *Physical Review A*, 44(3):2040, 1991. 11
- [61] B Baseia. On the generation of squeezing for a charged oscillator in a magnetic field. *Physics Letters A*, 170(4):311–314, 1992. 11
- [62] Francisco Delgado and Bogdan Mielnik. Magnetic control of squeezing effects. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 31(1):309, 1998. 11, 12, 37, 43, 80
- [63] Jaime E Santos, Nuno MR Peres, and João MB Lopes dos Santos. Evolution of squeezed states under the fock-darwin hamiltonian. *Physical Review A*, 80(5):053401, 2009. 11
- [64] H Takahasi. Information theory of quantum-mechanical channels. In *Advances in Communication Systems*, volume 1, pages 227–310. Elsevier, 1965. 11
- [65] VV Dodonov and VI Man’ko. Correlated and squeezed coherent states of time-dependent quantum systems. *Advances in chemical physics*, 85:499–499, 1994. 11
- [66] J Janszky and YY Yushin. Squeezing via frequency jump. *Optics communications*, 59(2):151–154, 1986. 12, 43
- [67] T Kiss, J Janszky, and P Adam. Time evolution of harmonic oscillators with time-dependent parameters: A step-function approximation. *Physical Review A*, 49(6):4935, 1994. 12, 43
- [68] Ilkka Tittonen, Stig Stenholm, and Igor Jex. Effect of a phase step on two-level atoms in a cavity. *Optics communications*, 124(3-4):271–276, 1996. 12, 43
- [69] R Graham. Squeezing and frequency changes in harmonic oscillations. *Journal of Modern Optics*, 34(6-7):873–879, 1987. 12, 43
- [70] Xin Ma and William Rhodes. Squeezing in harmonic oscillators with time-dependent frequencies. *Physical Review A*, 39(4):1941, 1989. 12, 43

- [71] A Luks, V Perinová, and Z Hradil. Principal squeezing. *Acta physica polonica. A*, 74(5):713–721, 1988. 14, 15
- [72] VV Dodonov. Nonclassical states in quantum optics: asqueezed review of the first 75 years. *Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics*, 4(1):R1, 2002. 14
- [73] VV Dodonov. Universal integrals of motion and universal invariants of quantum systems. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 33(43):7721, 2000. 15
- [74] Daniel M Tibaduiza, Luis Barbosa Pires, and Carlos Farina. Time-dependent quantum harmonic oscillator: a continuous route from adiabatic to sudden changes. *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*, 2021. 20
- [75] VV Dodonov and VI Man'ko. Evolution of multidimensional systems. In *Invariants and the evolution of nonstationary quantum system*. 1989. 25, 26
- [76] Mark Hillery, Robert F O'Connell, Marlan O Scully, and Eugene P Wigner. Distribution functions in physics: Fundamentals. *Physics reports*, 106(3):121–167, 1984. 26
- [77] E.M. Landau, L.D.; Lifshitz. *The classical theory of fields*. Pergamon: Oxford, UK, 1971. 28, 35, 83
- [78] John David Jackson. *Classical electrodynamics*. John Wiley & Sons, 2007. 28, 35
- [79] BU Felderhof and SP Raval. Diamagnetism of a confined electron gas. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 82(1):151–162, 1976. 28
- [80] NH March and MP Tosi. Thermally averaged orbital diamagnetism of a localized wigner oscillator. *Il Nuovo Cimento D*, 6(6):521–526, 1985. 28
- [81] AM Stewart. General gauge independence of diamagnetism plus paramagnetism. *Australian Journal of Physics*, 53(4):613–629, 2000. 28
- [82] Yasushi Ishikawa and Hidetoshi Fukuyama. Orbital magnetism and current distribution of two-dimensional electrons under confining potential. *Journal of the Physical Society of Japan*, 68(7):2405–2413, 1999. 28
- [83] Konstantin Y Bliokh, Peter Schattschneider, Jo Verbeeck, and Franco Nori. Electron vortex beams in a magnetic field: A new twist on landau levels and aharonov-bohm states. *Physical Review X*, 2(4):041011, 2012. 28
- [84] L Parker. On the magnetic moment of a charged particle in a changing magnetic field. *Il Nuovo Cimento B (1965-1970)*, 40(1):99–108, 1965. 29
- [85] EV Ivanova, IA Malkin, and VI Man'ko. Invariants and radiation of some nonstationary systems. *International Journal of Theoretical Physics*, 16(7):503–515, 1977. 35
- [86] VV Dodonov, VI Man'ko, and OV Man'ko. Correlated coherent states and emission by quantum systems. *Journal of Soviet Laser Research*, 14(3):223–236, 1993. 35
- [87] Danis N Yangaliev, Vladimir P Krainov, and Oleg I Tolstikhin. Quantum theory of radiation by nonstationary systems with application to high-order harmonic generation. *Physical Review A*, 101(1):013410, 2020. 35
- [88] VV Dodonov and AV Dodonov. Magnetic-moment probability distribution of a quantum charged particle in thermodynamic equilibrium. *Physical Review A*, 102(4):042216, 2020. 36, 47
- [89] Shahan Hacyan. The quantum sling and the schrödinger cat. *Foundations of Physics Letters*, 9(3):225–233, 1996. 43
- [90] Leonard Parker. Quantized fields and particle creation in expanding universes. ii. *Physical Review D*, 3(2):346, 1971. 43
- [91] CF Lo. Squeezing by tuning the oscillator frequency. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 23(7):1155, 1990. 43
- [92] B Baseia, AL De Brito, and VS Bagnato. Squeezing and antisqueezing for a harmonic oscillator having a sudden change of mass. *Physical Review A*, 45(7):5308, 1992. 43
- [93] VV Dodonov, AB Klimov, and DE Nikonov. Quantum phenomena in nonstationary media. *Physical Review A*, 47(5):4422, 1993. 43
- [94] E Sassaroli, YN Srivastava, and A Widom. Photon production by the dynamical casimir effect. *Physical Review A*, 50(2):1027, 1994. 43
- [95] M Kira, I Tittonen, WK Lai, and S Stenholm. Semiclassical computations of time-dependent tunneling. *Physical Review A*, 51(4):2826, 1995. 43

- [96] JT Mendonça, A Guerreiro, and Ana M Martins. Quantum theory of time refraction. *Physical Review A*, 62(3):033805, 2000. 43
- [97] A Minguzzi and DM Gangardt. Exact coherent states of a harmonically confined tonks-girardeau gas. *Physical review letters*, 94(24):240404, 2005. 43
- [98] A Del Campo. Fermionization and bosonization of expanding one-dimensional anyonic fluids. *Physical Review A*, 78(4):045602, 2008. 43
- [99] KH Hoffmann, P Salamon, Y Rezek, and R Kosloff. Time-optimal controls for frictionless cooling in harmonic traps. *EPL (Europhysics Letters)*, 96(6):60015, 2011. 43
- [100] Obinna Abah, Johannes Rosznagel, Georg Jacob, Sebastian Deffner, Ferdinand Schmidt-Kaler, Kilian Singer, and Eric Lutz. Single-ion heat engine at maximum power. *Physical review letters*, 109(20):203006, 2012. 43
- [101] MA Rajabpour and S Sotiriadis. Quantum quench of the trap frequency in the harmonic calogero model. *Physical Review A*, 89(3):033620, 2014. 43
- [102] Ettore Vicari. Particle-number scaling of the quantum work statistics and loschmidt echo in fermi gases with time-dependent traps. *Physical Review A*, 99(4):043603, 2019. 43
- [103] WH Louisell, A Yariv, and AE Siegman. Quantum fluctuations and noise in parametric processes. i. *Physical Review*, 124(6):1646, 1961. 43
- [104] BR Mollow and RJ Glauber. Quantum theory of parametric amplification. i. *Physical Review*, 160(5):1076, 1967. 43
- [105] PW Seymour, RB Leipnik, and AF Nicholson. Charged particle motion in a time? dependent axially symmetric magnetic field. *Australian Journal of Physics*, 18(6):553–566, 1965. 48
- [106] H. Ralph Lewis Jr. Class of exact invariants for classical and quantum time-dependent harmonic oscillators. *Journal of Mathematical Physics*, 9(11):1976–1986, 1968. 48
- [107] A Gray and CJ Eliezer. A note on the time-dependent harmonic oscillator. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 30(3):463–468, 1976. 51
- [108] Vladislav G Bagrov, Dmitri M Gitman, and AS Pereira. Coherent states of systems with quadratic hamiltonians. *Brazilian Journal of Physics*, 45(3):369–375, 2015. 52
- [109] Harry Bateman. *Higher transcendental functions [volumes i-iii]*, volume 1. McGraw-Hill Book Company, 1953. 55, 58, 59, 60, 63, 67, 90
- [110] Carl Eckart. The penetration of a potential barrier by electrons. *Physical Review*, 35(11):1303, 1930. 62
- [111] Paul S Epstein. Reflection of waves in an inhomogeneous absorbing medium. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 16(10):627, 1930. 62
- [112] O.I. Marichev A.P. Prudnikov, Yu. A. Brychkov. *Integrals and Series, V. 03, More Special Functions*. Gordon and Breach science publishers, 1986. 63, 64
- [113] Izrail Solomonovich Gradshteyn and Iosif Moiseevich Ryzhik. *Table of integrals, series, and products*. Academic press, 2014. 65, 66, 85
- [114] Victor V Dodonov. Magnetization dynamics of a harmonically confined quantum charged particle in time dependent magnetic fields inside a circular solenoid. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 2021. 79
- [115] IA Malkin, VI Man'Ko, and DA Trifonov. Linear adiabatic invariants and coherent states. *Journal of Mathematical Physics*, 14(5):576–582, 1973. 80