Universidade de Brasília
Instituto de Física

Representação Simplética para Partículas de Spin 2

Kayo Vaz da Silva Araújo

Universidade de Brasília
Instituto de Física

Representação Simplética para Partículas de Spin 2

Kayo Vaz da Silva Araújo

Orientador: Dr. Prof. Ademir Eugênio Santana

Coorientador: Dr. Prof. Sérgio Ulhoa

Agradecimentos

Agradeço à Isabella por ser fácil de amar, por suportar comigo os meus castigos, por compartilhar as diversas noites não dormidas, o generoso café da madrugada e o labor do dia seguinte. Agradeço por tornar risível o meu cansaço e amáveis as memórias que seriam amargas. Agradeço por ser, dentre todos os adjetivos, admirável.

Agradeço ao Prof. Ademir, meu orientador, por seus inúmeros e valiosos conselhos, por sua detalhada condução e pela inspiração. Também agradeço pelo cuidado e pela confiança dedicados a mim durante esse período delicado.

Agradeço ao Prof. Sérgio, meu coorientador, pelas coisas que me ensinou, pelo papo agradável e por me apresentar um grupo tão sortido de pessoas gentis e solícitas.

Agradeço ao Gustavo, uma afável surpresa da vida, com quem dividi cada ideia, cada equívoco e muito trabalho. Sem sua ajuda, nada teria sido possível e, certamente, não haveria metade da diversão.

Agradeço à Yanny por confiar quando eu desconfiava e por ouvir tediosamente as minhas lamúrias, sem desprezo e nem estima exagerada.

Agradeço ao Renato pelo apoio, pelos artigos indicados e pela revisão. Mas agradeço também pelas conversas e pela atenção que recebi.

Agradeço a todos do Produto Estrela, destacando os professores Ronni, Rendisley e Hara por todo o suporte prestado.

Agradeço à minha turma galhofeira, Renato, Gláucia, Maycon e Washington.

Agradeço aos amigos da época de graduação que foram essenciais para que eu optasse e me encantasse pela carreira acadêmica. Em especial, agradeço à Kamila, ao Richard, à Bárbara, à Belinha, ao André, à Raquel, ao Matias e ao Marlos.

Agradeço ao Faiçal e ao Hugo pelas conversas mais doidas, ao Miguel por tornar saborosa as horas de estudo e ao Davi por me induzir ao ânimo.

Agradeço ao Néio por ser, na minha opinião, o melhor artista na arte de viver.

Agradeço à Melissa pelo maravilhoso coleguismo e pela amizade.

Agradeço aos grandes professores de quem jamais vou me esquecer. Mas gostaria de agradecer em especial ao professor Samir e à professora Karla.

Agradeço à Lúcia por me incentivar, apoiar e por ser uma segunda mãe e grande amiga.

Agradeço também a minha mãe, que despertou em mim a paixão pelo estudo e ao meu pai, de quem repliquei o gosto pela ciência. Agradeço também aos meus avós e a todos os familiares que me apoiaram.

Por fim, agradeço a todos esses "personagens-autores" deste trecho da minha história. Obrigado!

"Pode parecer estranho, mas eu juro que isso faz sentido!"

- Isabella de Melo Silva

Resumo

Com base no formalismo de Wigner, será construída uma representação simplética de um campo de spin 2. Para tanto, será empregado o produto de Moyal para construir uma representação simplética da mecânica quântica. Nessa representação, a função de onda no espaço de fase e a função de Wigner são generalizadas para spins inteiros e aplicadas ao campo de spin 2. E, com base na teoria de Fierz e Pauli, é proposta uma lagrangiana para a interação do campo de spin 2 e o campo eletromagnético.

Palavras Chaves: representação simplética, spin 2, função de Wigner, espaço de fase.

Abstract

Based on Wigner's formalism, a symplectic representation of a spin 2 field will be constructed. Therefore, the Moyal product will be used to build a symplectic representation of quantum mechanics. In this representation, the wave function in phase space and the Wigner function are generalized to integer spins and applied to the spin 2 field. And, based on the theory of Fierz and Pauli, a Lagrangian is proposed for an interaction between spin 2 field and electromagnetic field.

Keywords: symplectic representation, spin 2, Wigner function, phase space.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

A primeira proposta de que se tem registro acerca de ondas gravitacionais foi feita por Heaviside em 1893 [1], ainda como uma analogia eletromagnética. Porém, somente depois do surgimento da Relatividade Geral de Einstein que essa ideia ganhou um grande rigor teórico, com a solução linearizada de suas equações [2, 3]. Depois das evidências diretas de ondas gravitacionais obtidas pela colaboração LIGO-VIRGO [4, 5], o interesse nas pertubações do campo gravitacional cresceu. Visto que a gravidade pode ser relacionada a um campo de spin 2, a proposta desse trabalho é estudar este campo no espaço de fase.

De fato, as equações de Einstein aceitam solução radiativa, que no contexto de uma aproximação de campo fraco, leva a uma equação de onda. Essa equação possui uma solução de onda plana para um campo de spin 2. Assim, isto leva à conjectura de que o campo gravitacional possa ser descrito pelo campo do gráviton, que seria um campo de spin 2 [6].

A distribuição de quase-probabilidade de Wigner foi introduzida por Eugene Wigner em 1932 [7]. Ele entendeu que fenômenos característicos da mecânica quântica deveriam alterar a descrição do equilíbrio termodinâmico. Com a intenção de realizar a correção necessária, ele tentou representar funções de onda no espaço de fase [8] incluindo as variáveis de momento além das de posição. O trabalho também apresentou uma importante correção na energia potencial. O mapeamento invertível entre os operadores Hermitianos e as funções reais do espaço de fase foi introduzido por Hermann Weyl em 1927 [9], em um contexto relacionado à teoria de representações. De fato, a função de Wigner é a transformação de Wigner-Weyl da matriz de densidade; daí a realização desse operador no espaço de fase.

O formalismo proposto por Wigner é aplicável em várias áreas, como física quântica, química, processamento de informação, eletrônica quântica e processamento de sinal[10]. Nesse formalismo, o sistema é descrito pela função de Wigner, $f_w(q,p)$, que originalmente foi criada com o intuito de ser uma função de distribuição no espaço de fase, mas, apesar de ser real e normalizada, pode assumir valores negativos, o que contraria o sentido usual da ideia de distribuição. Por esse motivo, ficou conhecida como função de quasi-distribuição. Outra característica é que as variáveis dinâmicas são representadas por funções no espaço de fase e não por operadores. No formalismo de Wigner, cada operador representado por A e definido em um espaço de Hilbert, $\mathcal{H}$, é associado a uma função real no espaço de fase, Γ, denotada por $a_w(q,p)$[11]. Esta associação consiste na aplicação $\Omega_w : A \to a_w(q,p)$ de tal forma que, a álgebra associativa de operadores em $\mathcal{H}$ corresponde a uma álgebra associativa, porém, não-comutativa, em Γ. Assim, o produto de operadores, em $\mathcal{H}$, fica definido em Γ pelo produto de Moyal, também chamado de produto-estrela. O produto de dois operadores é, então, mapeado da seguinte forma $\Omega_w : AB \to a_w(q,p) \star b_w(q,p)$ [12]. Portanto, o produto-estrela entre duas funções no espaço de fase corresponde ao produto de dois operadores no espaço de Hilbert e é dado por[11, 13]

$$a_w(q,p) \star b_w(q,p) = a_w(q,p) e^{\frac{i\hbar}{2}\left(\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial q}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial p} - \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial p}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial q}\right)} b_w(q,p).$$

Um fato importante a ser notado é que o produto acima pode ser visto como uma aplicação do operador $\widehat{A} = a_w \star$ atuando sobre a função b_w, ou seja $\widehat{A}(b_w) = a_w \star b_w$.

Utilizando o produto de Moyal, a função de Wigner obedece a uma equação análoga à de Liouville-von Neumann, com os parentêses de Moyal substituindo o comutador, isto é,

$$i\hbar \frac{\partial f_w(q,p)}{\partial t} = \{H_w, f_w\}_M = H_w \star f_w - f_w \star H_w.$$

Usando as propriedades do produto de Moyal, é possível construir problemas de autovalores dentro do formalismo de Wigner. Assim, esse formalismo é considerado como uma descrição alternativa para a mecânica quântica em relação àquela de Schrödinger, à de Heisenberg ou à das integrais de caminho. Por outro lado, para se ter uma descrição completa de um sistema quântico no espaço de fase Γ é necessário: resolver a equação de Schrödinger do problema, introduzir o operador densidade e por fim determinar a função de Wigner. Este procedimento é bastante intricado. Principalmente para sistemas não lineares ou sistemas quânticos relativísticos, pois a construção de simetrias de calibre ainda não é bem compreendida no formalismo. E, também, não é possível visualizar efeitos de superposição. Uma solução para essas dificuldades foi proposta por Oliveira *et al.* [14, 15]. Estudando as representações unitárias da álgebra de Lie do grupo de Galilei e utilizando a noção de estrutura simplética associada ao produto de Moyal, a função de Wigner é obtida por um caminho alternativo ao da equação de Liouville-von Neumann. Nesse formalismo, a equação de Schrödinger é deduzida de forma consistente.

À procura de resultados relativísticos, utilizando operadores do tipo $a_w\star$ para estudar representações unitárias do grupo de Poincaré, Amorim *et al.*[16, 17] mostrou como escrever as equações de Klein-Gordon e de Dirac no espaço fase.

A teoria física mais antiga com uma simetria de calibre foi a formulada por Maxwell, a eletrodinâmica [18], que afirmava que qualquer campo vetorial que possa ser escrito como um gradiente de uma função pode ser adicionado ao potencial vetorial sem afetar o campo magnético. A importância dessa simetria permaneceu despercebida nas primeiras formulações. Da mesma forma, Hilbert derivou as equações de campo de Einstein postulando a invariância da ação sob uma transformação geral de coordenadas. Mais tarde, Hermann Weyl, em uma tentativa de unificar a relatividade geral e o eletromagnetismo, conjeturou que a invariância sob uma mudança de calibre também pode ser uma simetria local da relatividade geral. Após o desenvolvimento da mecânica quântica, Weyl, Vladimir Fock e Fritz London modificaram o calibre substituindo o fator de escala por uma quantidade complexa e tornaram a transformação da escala em uma mudança de fase, que é uma simetria de calibre U(1). Isso explicava o efeito do campo eletromagnético na função de onda de uma partícula carregada. Esta foi a primeira teoria de calibre amplamente reconhecida, popularizada por Pauli em 1941 [19]. Em 1954, tentando resolver algumas das grandes confusões na física de partículas elementares, Chen Ning Yang e Robert Mills introduziram teorias de calibre não abelianas como modelos para entender a forte interação que mantém os núcleon unidos nos núcleos atômicos[20]. Generalizando a invariância de calibre do eletromagnetismo, eles tentaram construir uma teoria baseada na ação do grupo SU(2) de simetria no dupleto isospin de prótons e nêutrons. Isso é semelhante à ação do grupo U(1) nos campos de spinor da eletrodinâmica quântica. Na física de partículas, a ênfase está no uso de teorias de calibre quantizado.

Nós procedemos como segue. No capítulo 2, uma revisão do formalismo de Wigner é apresentada, mostrando as principais propriedades da função de Wigner. Em 3, introduzimos o produto estrela e exploramos algumas de suas propriedades. Na Seção 4, a construção do espaço de Hilbert simplético é mostrado. Após a introdução do espaço de Hilbert simplético, é aplicada a teoria de Calibre no espaço de fase para o grupo U(1) (campos de spin 1). Na seção 5, construímos uma representação para campos de spin 1 que é estendida para qualquer campo de spin inteiro e aplicada ao caso do campo de spin 2. Assim, é obtida uma solução para a equação de onda no espaço de fase e da função de Wigner para campos de qualquer spin inteiro. Por fim, é proposta uma lagrangiana relacionando o campo de spin 2 a um campo escalar auxiliar C e, em subsequência, outra lagrangiana para a interação entre o campo eletromagnético e um campo de spin 2.

Capítulo 2

Função de Wigner

Houve muitas tentativas de descrever uma distribuição de probabilidade quântica adequada, positiva, e que forneça as distribuições quânticas individuais corretas em termos de posição e momento, conjuntamente. A impressão geral que prevaleceu é que existe algo na mecânica quântica que impede a escrita de tal distribuição. A razão mais comumente atribuída diz que distribuições adequadas não podem existir devido ao princípio da incerteza, mas isso não é verdade. A fim de satisfazer a desigualdade de Heisenberg, é suficiente que $\rho Q(q,p)$ deve ter uma área efetiva de apoio no espaço de fase da ordem $2\pi\hbar$ (o fator numérico depende da forma da área), de modo que os produtos de $\langle q|\rho|q\rangle$ e $\langle p|\rho|p\rangle$ não seja menor que $1/2\hbar$.

Wigner entendeu que fenômenos característicos da mecânica quântica deveriam alterar a descrição do equilíbrio termodinâmico. Com a intenção de realizar a correção necessária, ele tentou representar a função de onda no espaço de fase [8]. Para tanto, fez uma transformação da função de onda, para incluir as variáveis de momento, o que levou a uma importante correção na energia potencial. É interessante observar que a abordagem de Wigner acabou levando a correções quânticas de potencial semelhantes àquelas obtidas por Bohm. Este capítulo foi baseado nos seguintes trabalhos [16, 17, 21, 22, 23, 24, 25, 26].

2.1 A Matriz Densidade

A mecânica estatística possui versão quântica, a mecânica estatística quântica. Nela, os estados macroscópicos são representados pelo operador densidade. Para estados mistos, a matriz densidade é escrita em termos dos estados $\{|\psi_i\rangle\}$, onde $\{\psi_i\}$ são estados microscópicos e $\omega_i = \dfrac{N_i}{N}$ tal que ω_i pertence ao intervalo [0,1] e representa a probabilidade de encontrarmos o sistema no estado correspondente. Para um estado puro, temos

$$\rho(t) = |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)| \,. \tag{2.1}$$

O valor esperado de um dado operador A pode ser obtido tomando o traço do produto entre o operador densidade ρ e o operador A:

$$\langle A\rangle = Tr(\rho A). \tag{2.2}$$

O operador densidade possui as seguintes propriedades:

- hermeticidade: $\rho = \rho^{\dagger}$;
- traço: $\mathrm{Tr}\rho = 1$.

Para realizar a evolução temporal do operador ρ é empregada a equação de Liouville-von Neumann,

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = \left[H(t), \rho(t)\right], \tag{2.3}$$

onde H é a hamiltoniana do sistema.

A equação de Liouville-von Neumann pode ser obtida a partir da equação de Schrödinger,

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = \hat{H}(t)|\psi(t)\rangle. \tag{2.4}$$

Aqui é conveniente considerar o caso de um estado puro $\rho(t) = |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|$, para simplificar a dedução. Portanto,

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{\partial\rho}{\partial t} &= \left(\frac{\partial\left|\psi(t)\right\rangle}{\partial t}\right)\left\langle\psi(t)\right| + \left|\psi(t)\right\rangle\left(\frac{\partial\left\langle\psi(t)\right|}{\partial t}\right) \\ &= \frac{1}{i\hbar}H(t)\left|\psi(t)\right\rangle\left\langle\psi(t)\right| - \frac{1}{i\hbar}\left|\psi(t)\right\rangle\left\langle\psi(t)\right|H(t). \end{aligned} \tag{2.5}$$

Daí obtemos

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = \left[H(t), \rho(t)\right].$$

Como queríamos demonstrar.

A partir de ρ é possível construir uma representação da mecânica no espaço de fase, o método da função de Wigner.

2.2 Função de Wigner e suas propriedades

Geralmente o operador densidade é representado ou no espaço das posições ou no espaço dos momentos. A representação espaço das posições é dado por $\langle q|\rho|q'\rangle$, enquanto a representação no espaço dos momentos é dado por $\langle p|\rho|p'\rangle$. O formalismo de Wigner é construído para ser representado no espaço de fase e, portanto, o operador densidade deve ser representado simultaneamente em termos da posição e do momento. Assim, a representação de Wigner, que foi definida a partir da transformação de Fourier dos elementos da matriz, foi definida por

$$f_w(q,p) = \Omega(\rho) = (2\pi\hbar)^{-1} \int dz \, \exp\left(\frac{ipz}{\hbar}\right) \left\langle q - \frac{z}{2} \middle| \rho \middle| q + \frac{z}{2} \right\rangle, \tag{2.6}$$

ou ainda

$$f_w(q,p) = \Omega(\rho) = (2\pi\hbar)^{-1} \int dp \, \exp\left(\frac{-iqk}{\hbar}\right) \left\langle p - \frac{k}{2} \middle| \rho \middle| p + \frac{k}{2} \right\rangle. \tag{2.7}$$

Daí, fica definido um mapa $\Omega : \rho \rightarrow f_w(q,p)$, onde $f_w(q,p)$ é a função de Wigner. Dessa maneira, a função de Wigner é uma representação do operador densidade no espaço de fase. Note que Ω é um mapa, e pode ser utilizado para representar outros operadores no espaço de fase. Agora é conveniente definir a função de Wigner para um estado puro $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$:

$$f_w(q,p) = (2\pi\hbar)^{-1} \int dz \, \exp\left(\frac{ipz}{\hbar}\right) \psi^\dagger\left(q + \frac{z}{2}\right) \psi\left(q - \frac{z}{2}\right). \tag{2.8}$$

Ilustraremos algumas propriedades da função de Wigner observando determinados aspectos do oscilador harmônico no espaço de fase, cujo hamiltoniano é dado por,

$$H = \frac{p^2 + q^2}{2}.$$

Consideramos unidades atômicas, de forma que $m = \omega = 1$. O estado fundamental e o primeiro estado excitado são, portanto,

$$\psi_0(q) = \left(\frac{1}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{q^2}{2}}$$

e

$$\psi_1(q) = \left(\frac{4}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} q e^{-\frac{q^2}{2}}.$$

Valendo-se da função de Wigner para estados puros encontramos o estado fundamental

$$\begin{aligned} f_w^0(q,p) &= (2\pi)^{-1} \int e^{ipz} \psi_0^\dagger \left(q + \frac{z}{2}\right) \psi_0(q - \frac{z}{2}) dz, \\ f_w^0(q,p) &= \frac{1}{\pi} e^{-(q^2+p^2)}. \end{aligned} \tag{2.9}$$

E, para o primeiro estado excitado

$$\begin{aligned} f_w^1(q,p) &= (2\pi)^{-1} \int e^{ipz} \psi_1^\dagger (q + \frac{z}{2} \psi_1)(q - \frac{z}{2}) dz, \\ f_w^1(q,p) &= \frac{1}{\pi} e^{-(q^2+p^2)} (2p^2 + 2q^2 - 1). \end{aligned} \tag{2.10}$$

As funções dadas pelas Eqs. (2.9) e (2.10) possuem os seguintes comportamentos no espaço de fase, dadas nas Figuras (2.1) e (2.2) , respectivamente,

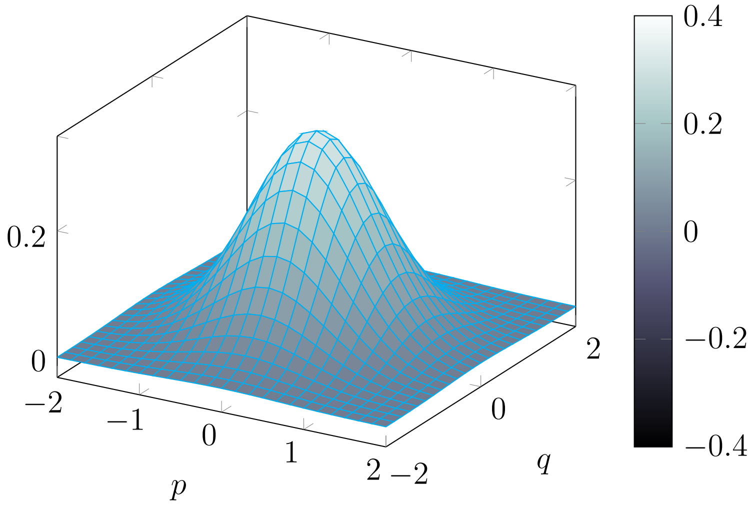

Figura 2.1: *Função de Wigner para o oscilador harmônico, estado fundamental*

Devido à função de Wigner apresentar amplitudes negativas, o que não corresponde ao que se espera de uma distribuição de probabilidades, a função de Wigner não obedece ao primeiro axioma de Kolmogorov e, portanto, não representa uma distribuição de probabilidades. Mas, ao integrar a função de Wigner em todo o espaço de fase, é possível obter uma amplitude de probabilidades genuína. Distribuições com essas características são conheci-

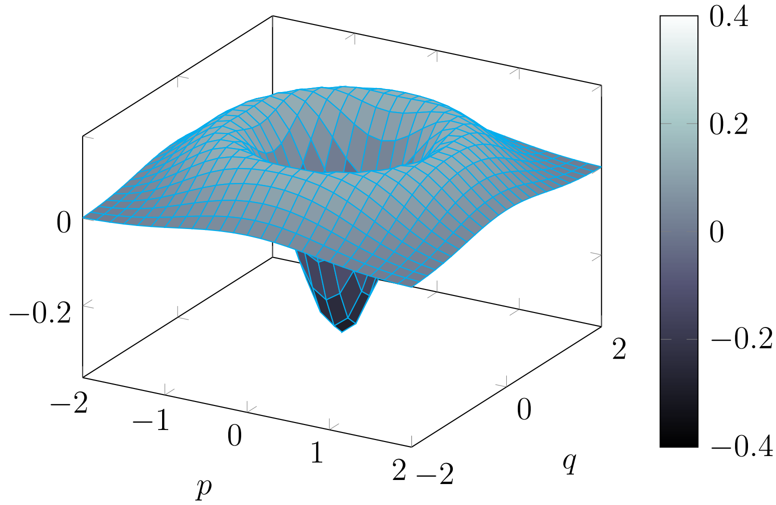

Figura 2.2: *Função de Wigner para o oscilador harmônico, primeiro estado excitado*

das como distribuições de quaseprobabilidade. Para avaliar o que foi mencionado, considere que f_ψ e f_ϕ são duas funções de Wigner associadas aos estados $|\psi\rangle$ e $|\phi\rangle$. Então

$$|\langle\psi|\phi\rangle|^2 = (2\pi\hbar)^{-1}\int f_\psi^\dagger(q,p;t)f_\phi(q,p;t)dqdp. \tag{2.11}$$

O lado esquerdo dessa equação é maior ou igual a zero. Para o caso em que os sistemas $|\psi\rangle$ e $|\phi\rangle$ são ortogonais, o resultado da integral é zero, de forma que $f_\psi^\dagger(q,p;t)f_\phi(q,p;t)$ é nulo. Dessa forma, $f_\psi(q,p;t)$ e $f_\phi(q,p;t)$, que não precisam assumir valores iguais a zero, podem apresentar valor negativo. Assim, é possível notar que a função de Wigner relaxa o primeiro axioma de Kolmogorov, como foi mencionado.

Primeiramente, a função de Wigner é limitada.

Demonstração:

Tomemos como exemplo um estado puro, dado pela Eq. (2.6)

$$f_w(q,p) = \Omega(\rho) = (2\pi\hbar)^{-1}\int dz\ \exp\left(\frac{ipz}{\hbar}\right)\left\langle q-\frac{z}{2}\middle|\rho\middle|q+\frac{z}{2}\right\rangle.$$

Se definirmos as funções de onda normalizadas

$$\varphi_1(z) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{ipz}{\hbar}}\psi^\dagger(q+\frac{z}{2}) \qquad \text{e} \qquad \varphi_2(z) = \frac{1}{\sqrt{2}}\psi(q-\frac{z}{2}),$$

vemos que a função de Wigner pode ser interpretada como o produto escalar

$$f_w(q,p) = \frac{1}{\pi\hbar}\int dz\, \varphi_1^\dagger(z)\varphi_2(z) = \frac{1}{\pi\hbar}\left\langle \varphi_1 | \varphi_2 \right\rangle,$$

e portanto,

$$|f_w(q,p)| = \frac{1}{\pi\hbar}|\langle \varphi_1|\varphi_2\rangle|.$$

Utilizando a desigualdade de Cauchy-Scwartz

$$\left|\langle \phi_1|\varphi_2\rangle\right|^2 \leq \langle \varphi_1|\varphi_1\rangle \langle \varphi_2|\varphi_2\rangle,$$

temos que, já que as funções φ_1 e φ_2 são normalizadas.

$$\left|\langle \varphi_1|\varphi_2\rangle\right|^2 \leq 1.$$

Portanto,

$$|f_w(q,p)| \leq \frac{1}{\pi\hbar}. \tag{2.12}$$

A desigualdade $|f_w(q,p)| \leq \frac{1}{\pi\hbar}$ implica que a função de Wigner é diferente de zero em uma região cuja a área do espaço de fase é menor ou igual a $h/2$ [27]. Assim, a função de Wigner para um estado puro carrega intrinsecamente a informação sobre o princípio de incerteza, isto é, q e p não podem ser infinitamente localizados em um único ponto do espaço de fase.

Segue-se diretamente das Eqs. (2.6) e (2.7) que

$$|\psi(q)|^2 = \int f_w dp \quad = \quad \langle q|\rho|q\rangle, \tag{2.13}$$

$$|\psi(p)|^2 = \int f_w dq \quad = \quad \langle p|\rho|p\rangle. \tag{2.14}$$

Demonstração:

Para demonstrar a Eq.(2.13) basta introduzir a Eq.(2.6) em $\int f_w dp$ o que nos leva a

$$\int dp f_w = (2\pi\hbar)^{-1}\int dpdz \left\langle q - \frac{z}{2}\middle|\rho\middle|q+\frac{z}{2}\right\rangle \exp\left(\frac{ipz}{\hbar}\right). \tag{2.15}$$

Se for feita primeiramente a integração em p, temos que

$$\int dz \left\langle q - \frac{z}{2} \middle| \rho \middle| q + \frac{z}{2} \right\rangle \left(\int dp \, (2\pi\hbar)^{-1} \, \exp\left(\frac{ipz}{\hbar}\right)\right), \tag{2.16}$$

onde o termo entre parêntesis é a "função"delta de Dirac, $\delta(z)$. Com isso temos

$$\int dz \left\langle q - \frac{z}{2} \middle| \rho \middle| q + \frac{z}{2} \right\rangle \delta(z) = \langle q|\rho|q\rangle = |\psi(q)|^2. \tag{2.17}$$

Analogamente, substituindo Eq.(2.14) na Eq.(2.6),

$$\int dq f_w = (2\pi\hbar)^{-1} \int dkdq \, \exp\left(\frac{-iqk}{\hbar}\right) \left\langle p - \frac{k}{2} \middle| \rho \middle| p + \frac{k}{2} \right\rangle. \tag{2.18}$$

E, se for feita primeiramente a integração em q, temos que

$$\int dk \left\langle p - \frac{k}{2} \middle| \rho \middle| p + \frac{k}{2} \right\rangle \left(\int dq \, (2\pi\hbar)^{-1} \, \exp\left(\frac{-iqk}{\hbar}\right)\right), \tag{2.19}$$

onde o termo entre parêntesis é a delta de Dirac, $\delta(k)$. Com isso temos

$$\int dz \left\langle p - \frac{k}{2} \middle| \rho \middle| p + \frac{k}{2} \right\rangle \delta(k) = \langle p|\rho|p\rangle = |\psi(p)|^2. \tag{2.20}$$

Mostraremos agora a normalização da função de Wigner, isto é

$$\int f_w(q,p) dqdp = \mathrm{Tr}\rho = 1. \tag{2.21}$$

Demonstração:

Substituindo a Eq. (2.6) em (2.21), obtemos

$$\int f_w(q,p) dqdp = (2\pi\hbar)^{-1} \int dzdpdq \, \exp\left(\frac{ipz}{\hbar}\right) \left\langle q - \frac{z}{2} \middle| \rho \middle| q + \frac{z}{2} \right\rangle. \tag{2.22}$$

Se calcularmos primeiro em p, temos

$$\int f_w(q,p) dqdp = \int dzdq \left\langle q - \frac{z}{2} \middle| \rho \middle| q + \frac{z}{2} \right\rangle \left((2\pi\hbar)^{-1} \int dp \, e^{i\frac{p}{\hbar}z} \right). \tag{2.23}$$

O termo entre parênteses é a delta de Dirac. Com isso, temos

$$\int f_w(q,p)dqdp = \int dzdq \left\langle q-\frac{z}{2}\middle|\rho\middle|q+\frac{z}{2}\right\rangle \delta(z), \tag{2.24}$$

$$= \int dq \langle q|\rho|q\rangle = \mathrm{Tr}\rho = 1, \tag{2.25}$$

como queríamos demonstrar.

Agora se a integração sobre o espaço de fase for realizada em um produto de duas funções de Wigner a dois estados distintos, caracterizados por ρ_1 e ρ_2, encontraremos uma propriedade que diz respeito ao traço do produto de duas matrizes de densidade.

$$\int dqdpf_{w1}(q,p)f_{w2}(q,p) = \frac{1}{2\pi\hbar}\mathrm{Tr}(\rho_1\rho_2). \tag{2.26}$$

Demonstração:

Usando a equação (2.6), segue que

$$\int dqdpf_{w1}(q,p)f_{w2}(q,p) = \left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)\int dqdpdz_1dz_2\, e^{\frac{ip}{\hbar}(z_1+z_2)}$$
$$\times \left\langle q-\frac{z_1}{2}\middle|\rho_1\middle|q+\frac{z_1}{2}\right\rangle \left\langle q-\frac{z_2}{2}\middle|\rho_2\middle|q+\frac{z_2}{2}\right\rangle,$$

integrando em p, temos uma delta de Dirac $\delta(z_1+z_2)$, de forma que, após integrar em z_2 temos

$$\int dqdpf_{w1}(q,p)f_{w2}(q,p) = \left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)\int dqdz_1 \left\langle q-\frac{z_1}{2}\middle|\rho_1\middle|q+\frac{z_1}{2}\right\rangle \left\langle q-\frac{z_1}{2}\middle|\rho_2\middle|q+\frac{z_1}{2}\right\rangle.$$

Fazendo a mudança de variáveis

$$q' = q-\frac{z_1}{2}, \qquad q'' = q+\frac{z_1}{2},$$

chegamos a

$$\int dqdpf_{w1}(q,p)f_{w2}(q,p) = \left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)\int dq'dq'' \langle q'|\rho_1|q''\rangle \langle q''|\rho_2|q'\rangle. \tag{2.27}$$

Utilizando a relação de completeza, temos

$$\begin{aligned}\int dqdpf_{w1}(q,p)f_{w2}(q,p) &= \left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)\int dq' \langle q'|\rho_1\rho_2|q'\rangle \\ &= \left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)\mathrm{Tr}(\rho_1\rho_2), \quad (2.28)\end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

Agora nos questionamos se é possível encontrar para qualquer operador quântico $A(Q,P)$, onde Q e P são os operadores de posição e momento, uma função correspondente, $A_w(q,p)$, na representação de Wigner. A resposta é positiva. De forma análoga ao que foi feito na definição da função de Wigner, definimos as funções $A_w(q,p)$ associadas ao operador $A(Q,P)$dada por,

$$A_w(q,p) = \int dz \ \exp\left(\frac{ipz}{\hbar}\right) \left\langle q - \frac{z}{2}\middle|A(Q,P)\middle|q + \frac{z}{2}\right\rangle, \quad (2.29)$$

ou

$$A_w(q,p) = \int dk \ \exp\left(\frac{-iqk}{\hbar}\right) \left\langle p - \frac{k}{2}\middle|A(Q,P)\middle|p + \frac{k}{2}\right\rangle. \quad (2.30)$$

Chamaremos estas funções de funções equivalentes de Wigner dos operadores $A(Q,P)$. Podemos, então, dizer que a função de Wigner é a função equivalente de Wigner para o operador ρ

$$f_w = (2\pi\hbar)^{-1}\rho_w. \quad (2.31)$$

Com a definição dos equivalentes de Wigner a quaisquer operadores quânticos na representação de Wigner, temos que o valor esperado de um observável, num estado $|\psi\rangle$ é representado como

$$\langle A\rangle = \langle\psi|A|\psi\rangle = \int dpdqA_w(q,p)f_w(q,p) = Tr(A\rho). \quad (2.32)$$

Demonstração:

Substituindo as equações (2.6) e (2.30) em (2.32), temos

$$\langle A\rangle = \int dpdq\, A_w(q,p) f_w(q,p) = Tr(\rho A) = \left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)\int dqdpdz'dz'' \exp\left(\frac{ipz'}{\hbar}\right)$$
$$\times \left\langle q-\frac{z'}{2}\middle|A(Q,P)\middle|q+\frac{z'}{2}\right\rangle \left\langle q-\frac{z''}{2}\middle|A(Q,P)\middle|q+\frac{z''}{2}\right\rangle. \quad (2.33)$$

A integração em p resulta em uma delta de Dirac $\delta(z'+z'')$. Com isso, integrando em z''

$$\langle A\rangle = \int dqdz' \left\langle q-\frac{z'}{2}\middle|A(Q,P)\middle|q+\frac{z'}{2}\right\rangle \left\langle q-\frac{z'}{2}\middle|A(Q,P)\middle|q+\frac{z'}{2}\right\rangle. \quad (2.34)$$

Introduzindo a mudança de variáveis,

$$q' = q - \frac{z'}{2}, \qquad q'' = q + \frac{z''}{2},$$

temos

$$\langle A\rangle = \int dq'dq'' \,\langle q'|A(Q,P)|q''\rangle\, \langle q''|\rho|q'\rangle = \mathrm{Tr}(\rho A). \quad (2.35)$$

Como queríamos demonstrar.

O problema agora consiste em mostrar a correspondência unívoca entre um operador quântico $A(Q,P)$ e o recíproco na representação de Wigner $A_w(q,p)$. Isso pode ser feito via a regra de quantização de Weyl que é definida da seguinte forma. Dada uma função no espaço de fase, $\alpha(\tau,\sigma)$, então existe um operador quântico no espaço de Hilbert, $A(Q,P)$, associado a $\alpha(\tau,\sigma)$ tal que

$$A(Q,P) = \frac{1}{2\pi\hbar}\int d\tau d\sigma\, e^{\frac{i(\sigma Q+\tau P)}{\hbar}}\alpha(\tau,\sigma), \quad (2.36)$$

onde τ está associado à coordenada de posição e σ à coordenada de momento no espaço de fase. Se escrevermos $A(Q,P)$ em termos de $A_w(q,p)$ tem-se o seguinte resultado

$$\alpha(\tau,\sigma) = \int dqdp\, e^{\frac{i(\sigma Q+\tau P)}{\hbar}} A_w(q,p). \quad (2.37)$$

Para verificar essa equivalência, deve ser mostrado que o operador definido por $W(Q,P) = e^{\frac{i(\sigma Q+\tau P)}{\hbar}}$, satisfaz uma espécie de ortogonalidade e completeza no espaço dos operadores do tipo $A(Q,P)$. Utilizando a formula de Glauber, dada por $e^{A+B} = e^{A}e^{B}e^{-\frac{1}{2}[A,B]}$ rescrevemos então $W(P,Q)$ como

$$W(Q,P) = e^{\frac{i\sigma Q}{\hbar}} e^{\frac{i\tau P}{\hbar}} e^{\frac{i\sigma\tau}{2\hbar}},$$

onde usamos o fato de que $[Q,P] = i\hbar$. Podemos então calcular o valor da expressão

$$\langle q'|e^{\pm\frac{i}{\hbar}(\sigma Q+\tau P)}|q\rangle = \langle q'|e^{\pm\frac{i\sigma Q}{\hbar}} e^{\pm\frac{i\tau P}{\hbar}} e^{\pm\frac{i\sigma\tau}{2\hbar}}|q\rangle \,.$$

Sabe-se que $Q\,|q\rangle = q\,|q\rangle$, então $e^{\pm\frac{i}{\hbar}\sigma Q}\,|q\rangle = e^{\pm\frac{i}{\hbar}\sigma q}\,|q\rangle$ e utilizando a propriedade do operador translação, $e^{\frac{i\tau P}{\hbar}}\,|q\rangle = |q-\tau\rangle$, obtemos

$$\langle q'|e^{\pm\frac{i}{\hbar}(\sigma Q+\tau P)}|q\rangle = e^{\pm\sigma(\frac{i}{\hbar}q'\pm\frac{\tau}{2})}\delta(q'-q\pm\tau),$$

que implica

$$\mathrm{Tr}e^{-\frac{i}{2}(\sigma Q-\tau P)} = (2\pi\hbar)\delta(\sigma)\delta(\tau),$$

pois, por definição $\mathrm{Tr}A = \int dqdp\,\langle q'|A|q\rangle = (2\pi\hbar)^{-1}\int dqdpA_w(q,p)$. Portanto,

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}e^{-\frac{i}{\hbar}(\sigma Q-\tau P)} &= (2\pi\hbar)^{-1}\int dqdp\int dz\;\exp(ipz)\left\langle q-\frac{z}{2}\middle|e^{-\frac{i}{\hbar}(\sigma Q-\tau P)}\middle|q+\frac{z}{2}\right\rangle, \\ &= (2\pi\hbar)^{-1}\int dqdp\int dz\;\exp(ipz)\exp(i\sigma(q-z-\tau))\delta(z+\tau). \end{aligned} \tag{2.38}$$

Utilizando a delta de Dirac e integrando em z, temos

$$\mathrm{Tr}e^{-\frac{i}{\hbar}(\sigma Q-\tau P)} = (2\pi\hbar)^{-1}\int dqdp\, e^{\frac{ip\tau}{\hbar}} e^{\frac{iq\sigma}{\hbar}}. \tag{2.39}$$

Identificamos, assim, duas deltas na forma integral, ou seja,

$$\mathrm{Tr}e^{-i\hbar(\sigma Q+\tau P)} = (2\pi\hbar)\delta(\sigma)\delta(\tau).$$

Isso nos leva às relações de ortogonalidade

$$\mathrm{Tr}e^{-\frac{i}{\hbar}(\sigma' Q-\tau' P)}e^{-\frac{i}{\hbar}(\sigma Q-\tau P)} = (2\pi\hbar)\delta(\sigma'-\sigma)\delta(\tau'-\tau). \tag{2.40}$$

Para provar a equivalência entre as Eqs. (2.30) e (2.31) e as Eqs. (2.36) e (2.37), assumimos que a expansão

$$A(Q,P) = \int d\sigma d\tau \ \alpha(\sigma,\tau) e^{\frac{i}{\hbar}(\sigma Q' + \tau P')}, \tag{2.41}$$

existe. Sendo assim, usando a relação de ortogonalidade mostrada anteriormente, facilmente notamos que

$$\alpha(\sigma,\tau) = \frac{1}{2\pi\hbar} \mathrm{Tr}\left\{ A(Q,P) e^{-\frac{i}{\hbar}(\sigma Q' + \tau P')} \right\}.$$

Para provar a existência da equação (2.41), substituímos a equação

$$\alpha(\sigma,\tau) = \int dq dp e^{-\frac{i}{\hbar}(\sigma Q + \tau P)} A_w(q,p), \tag{2.42}$$

na própria equação (2.41). Calculando os elementos de matriz na representação de posção, chegamos a

$$\begin{aligned} \langle q|A(Q,P)|q'\rangle &= (2\pi\hbar)^{-3} \int d\sigma d\tau dq'' dq''' \langle q''|A(Q,P)|q'''\rangle \\ &\times \langle q'''|e^{\frac{i}{\hbar}(\sigma Q' + \tau P')}|q''\rangle \langle q|e^{\frac{i}{\hbar}(\sigma Q + \tau P)}|q'\rangle . \end{aligned}$$

E ainda com o uso da Eq. (2.40), obtemos a seguinte identidade

$$\langle q|A(Q,P)|q'\rangle = \langle q|A(Q,P)|q'\rangle . \tag{2.43}$$

O que prova a existência da expansão (2.41). Isso prova também que é possível usar as Eqs. (2.41) e (2.42) para trabalhar em ambas direções: dado $A(Q,P)$, podemos determinar $A_w(q,p)$ univocamente e vice-versa.

2.3 Equivalência dos Operadores na Representação de Wigner

O objetivo dessa seção é demonstrar algumas propriedades referentes a equivalência entre os operadores escritos na representação usual da mecânica quântica e seus respectivos equivalentes na representação de Wigner, que podem ser deduzidas a partir de resultados já obtidos.

Se $A = A(P)$ (isto é, independente de Q), então $A_w = A(p)$. Ou seja, eles terão a mesma forma, com a ressalva que os operadores P serão substituídos pelas variáveis p.

Demonstração:

Um operador $A(P)$ pode ser expandido em uma série de P, como

$$A(P) = A(0) + PA'(0) + \frac{P^2}{2}A'''(0) + \cdots . \tag{2.44}$$

Utilizando agora a Eq. (2.29), já substituindo $A(Q,P)$ pela expansão, tem-se

$$A_w(q,p) = \int dk\ \exp\left(-\frac{iqk}{\hbar}\right)\left\langle p - \frac{k}{2}\middle| A(0) + PA'(0) + \frac{P^2}{2!}A''(0) + ... \middle| p + \frac{k}{2}\right\rangle . \tag{2.45}$$

Sabendo que $P\,|p\rangle = p\,|p\rangle$ temos,

$$\begin{aligned} A_w(q,p) &= A(0)\int dk\ \exp\left(-\frac{iqk}{\hbar}\right)\left\langle p - \frac{k}{2}\middle| p + \frac{k}{2}\right\rangle \\ &+ A'(0)\int dk\ \exp\left(-\frac{iqk}{\hbar}\right)\left(p + \frac{k}{2}\right)\left\langle p - \frac{k}{2}\middle| p + \frac{k}{2}\right\rangle \\ &+ A(0)''\int dk\ \exp\left(-\frac{iqk}{\hbar}\right)\frac{(p+\frac{k}{2})^2}{2!}\left\langle p - \frac{k}{2}\middle| p + \frac{k}{2}\right\rangle + ... \end{aligned}$$

Observando também que $\langle p - \frac{k}{2}|p + \frac{k}{2}\rangle = \delta k$ e utilizando a propriedade da delta para calcular a integral em k, chega-se a

$$A_w(p) = A(0) + pA'(0) + \frac{p^2}{2!}A''(0) + ... = A(p). \tag{2.46}$$

Como queríamos demonstrar.
Analogamente, usando a Eq. (2.30), chegamos a, se $A = A(Q)$, então $A_w(q,p) = A(q)$.

Se $A(Q,P) = 1c$, onde c é uma constante (isto é, $A(Q,P)$ é múltiplo do operador identidade 1), então $A_w = c$.
Demonstração:

Esta propriedade é demonstrada de forma imediata. Basta tomar a Eq. (2.29), e no lugar de $A(Q,P)$ colocar uma constante c. Como uma constante não age nos kets, temos

$$\begin{aligned} A_w(q,p) &= \int dz\ \exp\left(\frac{ipz}{\hbar}\right)\left\langle q - \frac{z}{2}\middle| c \middle| q + \frac{z}{2}\right\rangle , \\ A_w(q,p) &= c\int dz\ \exp\left(\frac{ipz}{\hbar}\right)\left\langle q - \frac{z}{2}\middle| q + \frac{z}{2}\right\rangle . \end{aligned} \tag{2.47}$$

Utilizando o fato que $\left\langle p - \frac{k}{2} \middle| p + \frac{k}{2} \right\rangle = \delta k$ e integrando em z, obtemos

$$A_w(q,p) = c. \tag{2.48}$$

Como queríamos demonstrar.

O $\mathrm{Tr}A = (2\pi\hbar)^{-1} \int dqdp\ A_w(q,p)$.

Demonstração:

Utilizando $(2\pi\hbar)^{-1} \int dqdp\ A_w(q,p)$ e substituindo nela a eq (2.29), temos

$$(2\pi\hbar)^{-1} \int dqdp\ A_w(q,p) = \int dqdp \int dz\ \exp\left(\frac{ipz}{\hbar}\right) \left\langle q - \frac{z}{2} \middle| A(Q,P) \middle| q + \frac{z}{2} \right\rangle.$$

Integrando em p, é identificada a função de delta de Dirac na forma integral,

$$(2\pi\hbar)^{-1} \int dqdp\ A_w(q,p) = \int dqdp \left\langle q - \frac{z}{2} \middle| A(Q,P) \middle| q + \frac{z}{2} \right\rangle \int dz\ \exp\left(\frac{ipz}{\hbar}\right).$$

Utilizando a delta para integrar em z, temos

$$(2\pi\hbar)^{-1} \int dqdp\ A_w(q,p) = \int dqdz \left\langle q - \frac{z}{2} \middle| A(Q,P) \middle| q + \frac{z}{2} \right\rangle \delta(z). \tag{2.49}$$

Ficamos com

$$(2\pi\hbar)^{-1} \int dqdp\ A_w(q,p) = \int dq \left\langle q | A(Q,P) | q \right\rangle = \mathrm{Tr}A. \tag{2.50}$$

Como queríamos demonstrar.

Da demonstração acima vê-se que $\int dp\ A_w(q,p) = (2\pi\hbar)^{-1} \langle q|A|q\rangle$ e $\int dq\ A_w(q,p) = (2\pi\hbar)^{-1} \langle p|A|p\rangle$, simplesmente substituímos a Eq. (2.29) na primeira propriedade e a Eq. (2.30) na segunda, utilizando o mesmo processo feito na demonstração acima.

Por fim temos que $\langle q|A(Q,P)|q'\rangle = (2\pi\hbar)^{-1} \int d\sigma\ e^{i\sigma\frac{q+q'}{2\hbar}} \alpha(\sigma, q-q')$, onde $\alpha(\sigma,\tau)$ é a transformada de Fourrier de $A_w(q,p)$.

Demonstração:

Utilizando a expressão $A(Q,P) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int d\sigma d\tau$, temos

$$\langle q|A(Q,P)|q'\rangle = \int d\sigma d\tau\ \alpha(\sigma,\tau) \langle q| e^{i\frac{\sigma Q + \tau P}{\hbar}} |q'\rangle . \tag{2.51}$$

E usando a Eq. (2.40), segue que

$$\langle q|A(Q,P)|q'\rangle = (2\pi\hbar)^{-6N} \int d\sigma \; e^{i\sigma \frac{q+q'}{2\hbar}} \alpha(\sigma, q-q'). \tag{2.52}$$

Como queríamos demonstrar.

Agora que já sabemos como se dá a equivalência de operadores na representação de Wigner, nosso objetivo é descobrir como é que se representa a equivalência de produtos de operadores na representação de Wigner, pois isto é fundamental para o desenvolvimento da dinâmica.

Capítulo 3

O Produto-estrela e propriedades

Em 1949, José Enrique Moyal [12], que independentemente derivou o formalismo de Wigner no espaço de fase, reconheceu-o como o gerador funcional do momento quântico, e como base para uma elegante codificação de todos os valores esperados e, portanto, da mecânica quântica. Mapeando, porém, o espaço de fase da mecânica hamiltoniana clássica em um espaço de fase quântico através da substituição das variáveis q e p, por operadores hermitianos $\widehat{Q}$ e $\widehat{P}$, respectivamente, que satisfazem a relação $[\widehat{Q}, \widehat{P}] = i\hbar\hat{\mathbf{1}}$, percebe-se que a noção de ponto é perdida e a constante de Planck, $\hbar$, limita o valor de uma área mínima no espaço de fase (células de Bohr). Recupera-se a noção de ponto quando se toma o limite clássico, ou seja, $\hbar \to 0$. Apresentaremos nesse capítulo uma revisão sobre o produto estrela (ou de Moyal) e suas propriedades, baseados nos trabalhos [16, 17, 21, 22, 23, 24, 25, 28, 29].

3.1 O Produto de Weyl-Moyal

O produto de dois operadores quânticos AB na representação de Wigner é escrito na forma

$$(AB)_w = \int dz\, e^{i\frac{pz}{\hbar}} \left\langle q - \frac{z}{2} \middle| AB \middle| q + \frac{z}{2} \right\rangle . \tag{3.1}$$

Introduzindo a relação de fechamento $\int dq\, |q\rangle\langle q| = 1$, temos

$$(AB)_w = \int dzdq\, e^{i\frac{pz}{\hbar}} \left\langle q - \frac{z}{2} \middle| A \middle| q \right\rangle \left\langle q \middle| B \middle| q + \frac{z}{2} \right\rangle , \tag{3.2}$$

Usando a Eq. (2.52)

$$
\begin{aligned}
(AB)_w = \quad & (2\pi\hbar) \quad ^{-1}\int dzdq'\, e^{i\frac{pz}{\hbar}} \int d\sigma d\sigma' e^{i\frac{\sigma}{2\hbar}(q+q'(q+q'-\frac{z}{2}))}\alpha(\sigma, q'-q+\frac{z}{2}) \\
\times \quad & e^{i\frac{\sigma}{2\hbar}(q+q'(q+q'-\frac{z}{2}))}\beta(\sigma', q-q'+\frac{z}{2}).
\end{aligned}
$$

Fazendo as mudanças de variáveis; $\tau = q' - q + \frac{z}{2}$ e $\tau' = q - q' + \frac{z}{2}$, chega-se a

$$
(AB)_w = (2\pi\hbar)^{-1}\int d\sigma d\sigma' d\tau d\tau'\, e^{i\frac{\sigma t + \tau q}{\hbar}}\alpha(\sigma,\tau)e^{i\frac{\sigma'\tau+\sigma\tau'}{2\hbar}}\beta(\sigma',\tau')e^{i\frac{\sigma' q+\tau' p}{\hbar}}. \tag{3.3}
$$

O fator $e^{i\frac{\sigma'\tau+\sigma\tau'}{2\hbar}}$ pode ser substituído de modo equivalente por $e^{\frac{i\mathbf{\Lambda}}{2\hbar}}$, onde $\mathbf{\Lambda}$ é o operador bidiferencial

$$
\mathbf{\Lambda} = \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial q}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial p} - \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial p}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial q}.
$$

As setas indicam o sentido onde os operadores devem ser aplicados. Portanto, utilizando de, $A_w = \int dqdpe^{i\frac{\sigma q+\tau p}{\hbar}}\alpha(\sigma,\tau)$ e $B_w = \int dqdpe^{i\frac{\sigma' q+\tau' p}{\hbar}}\beta(\sigma',\tau')$, o produto de operadores na representação de Wigner fica escirto como

$$
(AB)_w = A_w(q,p)e^{\frac{\mathbf{i\Lambda}}{2\hbar}}B_w(q,p),
$$

ou

$$
(AB)_w = B_w(q,p)e^{-\frac{i\mathbf{\Lambda}}{2\hbar}}A_w(q,p).
$$

Dessa forma, a operação denominada de produto-estrela fica definida como

$$
(AB)_w = A_w(q,p)e^{\frac{\mathbf{i\Lambda}}{2\hbar}}B_w(q,p) = A_w(q,p) \star B_w(q,p).
$$

Notemos que o produto-estrela não é comutativo, e relaciona o formalismo proposto por Wigner com o formalismo de quantização proposto por Weyl.

3.2 Evolução Temporal

Podemos determinar a evolução temporal da função de Wigner ou qualquer operador na representação de Wigner partindo da equação de Liouville Von-Neumann dada por

$$i\hbar\partial_t\rho = H\rho - \rho H, \tag{3.4}$$

onde ρ é a matriz densidade e H é o hamiltoniano. Usando a aplicação de Wigner, Ω nesta equação, temos

$$i\hbar\Omega(\partial_t\rho) = \Omega(H\rho) - \Omega(\rho H). \tag{3.5}$$

Como

$$i\hbar\frac{\partial f_w}{\partial t} = \{H_w, f_w\}_M, \tag{3.6}$$

onde $H_w, f_{wM} = H_w \star f_w - f_w \star H_w$ é o parentese de Moyal. O parêntese de Moyal pode ser ainda escrito na seguinte forma,

$$\{a,b\}_M = a\star b - b\star a = 2ia(q,p)\,\mathrm{sen}\left[\frac{\hbar}{2}\left(\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial q}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial p} - \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial p}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial q}\right)\right] b(q,p), \tag{3.7}$$

onde, utilizamos do fato, $e^{i\hbar\mathbf{\Lambda}/2} - e^{-i\hbar\mathbf{\Lambda}/2} = 2i\,\mathrm{sen}\left(\hbar\frac{\mathbf{\Lambda}}{2}\right)$.

Expandindo em série de potências o seno da última expressão que define o parênteses de Moyal, obtemos,

$$\mathrm{sen}\left(\hbar\frac{\mathbf{\Lambda}}{2}\right) = \frac{\hbar\mathbf{\Lambda}}{2} - \frac{1}{3!}\left(\hbar\frac{\mathbf{\Lambda}}{2}\right)^3 + \frac{1}{5!}\left(\hbar\frac{\mathbf{\Lambda}}{2}\right)^5 + ... \tag{3.8}$$

No limite em que $\hbar \to 0$, obtemos como resultado que a função de Wigner obedece a equação de Liouville clássica, com H_w no lugar da função hamiltoniana, isto é

$$\frac{\partial f_w}{\partial t} = \frac{\partial H_w}{\partial q}\frac{\partial f_w}{\partial p} - \frac{\partial H_w}{\partial p}\frac{\partial f_w}{\partial q} = \{H_w, f_w\}, \tag{3.9}$$

e ainda

$$\frac{\partial H_w}{\partial q} = \dot{p} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial H_w}{\partial p} = \dot{q}. \tag{3.10}$$

Então, o formalismo de Wigner recupera as equações canônicas da mecânica clássica, quando tomamos o limite clássico, o que mostra que esse formalismo é compatível com o princípio da correspondência, fortalecendo a importância da descrição de Wigner na mecânica quântica no estudo do limite clássico e no desenvolvimento de métodos semiclássicos. O estudo apresentado sobre o método de Wigner, até o momento, foi baseado na descrição de Schrödinger da mecânica quântica, ou seja, considerando que apenas os estados (e não os operadores) evoluem com o tempo. No entanto, é possível desenvolver um tratamento análogo em termos de operadores expressos na descrição de Heisenberg (onde os operadores evoluem com o tempo, e os estados ficam estáticos), sem maiores problemas.

3.3 Propriedades do Produto Estrela

O produto estrela ou produto de Weyl entre duas funções $f(q,p)$ e $g(q,p)$ é definindo por

$$f(q,p) \star g(q,p) = f(q,p) \exp\left[\frac{i\hbar}{2}\left(\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial q}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial p} - \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial p}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial q}\right)\right] g(q,p). \tag{3.11}$$

Apresentaremos a seguir algumas propriedades do produto estrela.

Seja $c \in C$. Então

$$c \star f(q,p) = f(q,p) \star c = cf(q,p). \tag{3.12}$$

Demonstração:

Expandindo o produto estrela em série de potências, temos

$$c \star f(q,p) = c\left\{1 + \frac{i\hbar}{2}\left(\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial q}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial p} - \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial p}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial q}\right) + \frac{1}{2!}\left(\frac{i\hbar}{2}\right)^2\left(\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial q}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial p} - \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial p}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial q}\right)^2 + \ldots\right\} f(q,p).$$

Os operadores que atuam c pelo lado esquerdo se anularão, pois c é uma constante. O mesmo acontece se c estiver do lado direito, sobrando assim somente o operador identidade 1.

O produto estrela é não-comutativo, isto é

$$f(q,p) \star g(q,p) \neq g(q,p) \star f(q,p). \tag{3.13}$$

Ou seja, $f(q,p)e^{\frac{i\hbar\mathbf{\Lambda}}{2}}g(q,p) \neq g(q,p)e^{\frac{i\hbar\mathbf{\Lambda}}{2}}f(q,p)$. Pois na verdade,

$$f(q,p)e^{\frac{i\hbar\mathbf{\Lambda}}{2}}g(q,p) = g(q,p)e^{-\frac{i\hbar\mathbf{\Lambda}}{2}}f(q,p).$$

Demonstração:

Caso 1:

$$q \star p = \left(q + \frac{i\hbar}{2}\partial_p\right)p = qp + \frac{i\hbar}{2}.$$

Caso 2:

$$p \star q = \left(p - \frac{i\hbar}{2}\partial_q\right)q = pq - \frac{i\hbar}{2}.$$

Como queríamos demonstrar.

O produto estrela realizado entre duas funções no espaço de fase promove uma delas a categoria de operador,

$$\begin{aligned} f(q,p) \star g(q,p) &= f\left(q + \frac{i\hbar}{2}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial p}, p - \frac{i\hbar}{2}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial q}\right)g(q,p) \\ &= f(q,p)g\left(q + \frac{i\hbar}{2}\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial p}, p - \frac{i\hbar}{2}\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial q}\right). \end{aligned}$$

Demonstração:

Fazendo $a \equiv \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial p}$ e $b \equiv \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial q}$, temos

$$f(q,p) \star g(q,p) = f(q,p)e^{\frac{i\hbar}{2}\left(a\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial q} - b\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial p}\right)}g(q,p).$$

Considerando que $e^{a\partial_x}f(x) = f(x+a)$, obtemos

$$f(q,p) \star g(g,p) = f\left(q + \frac{i\hbar}{2}a, p - \frac{i\hbar}{2}b\right)g(p,q).$$

Assim

$$f(q,p)\star g(g,p) = f\left(q + \frac{i\hbar}{2}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial p}, p - \frac{i\hbar}{2}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial q}\right) g(p,q).$$

Portanto definimos o operador-estrela,

$$\hat{f} = f(q,p)\star.$$

A conjugação complexa troca a ordem do produto estrela,

$$(f\star g)^{\dagger} = g^{\dagger}\star f^{\dagger}. \tag{3.14}$$

Demonstração:

A eq. (3.11) pode ser reescrita como

$$f(q,p)\star g(q,p) = \exp\left[\frac{i\hbar}{2}\left(\frac{\partial}{\partial q}\frac{\partial}{\partial p'} - \frac{\partial}{\partial p}\frac{\partial}{\partial q'}\right)\right] f(q,p)g(q',p')\bigg|_{q',p'=q,p} \tag{3.15}$$

Expandindo a exponencial numa série de potências, temos

$$\exp\left[\frac{i\hbar}{2}(\partial_q\partial_{p'} - \partial_p\partial_{q'})\right] = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{i\hbar}{2}\right)^n(\partial_q\partial_{p'} - \partial_p\partial_{q'})^n.$$

E, ainda, escrevendo a expressão $(\partial_q\partial_{p'} - \partial_p\partial_{q'})^n$ usando o binômio de Newton,

$$(\partial_q\partial_{p'} - \partial_p\partial_{q'})^n = \sum_{m=0}^{n}(-1)^m\binom{n}{m}\left[\partial_q\partial_{p'}\right]^{n-m}\left[\partial_p\partial_{q'}\right]^m. \tag{3.16}$$

Portanto, o produto estrela pode ser escrito como

$$f(q,p)\star g(q,p) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{i\hbar}{2}\right)^n\sum_{m=0}^{n}(-1)^m\binom{n}{m}\left[\partial_q^{n-m}\partial_p^m f(q,p)\right]\left[\partial_q^m\partial_p^{n-m}g(q,p)\right]. \tag{3.17}$$

Tomando o complexo conjugado da equação acima, temos

$$\begin{aligned}(f(q,p)\star g(q,p))^{\dagger} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{i\hbar}{2}\right)^{n}\left\{(-1)^{n}\sum_{m=0}^{n}(-1)^{m}\binom{n}{m}\left[\partial_q^{n-m}\partial_p^{m}f^{\dagger}(q,p)\right]\right.\\ &\times \left.\left[\partial_q^{m}\partial_p^{n-m}g^{\dagger}(q,p)\right]\right\},\end{aligned} \tag{3.18}$$

onde o termo $(-1)^n$ surge da conjugação commplexa do termo $(i\hbar/2)^n$. Este termo pode ser associado ao binômio, isto é

$$(-1)^n(\partial_q\partial_{p'}-\partial_p\partial_{q'})=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\binom{n}{m}\left[\partial_p\partial_{q'}\right]^{n-m}\left[\partial_q\partial_{p'}\right]^{m}.$$

Aplicando estes operadores em duas funções no espaço de fase, temos

$$(\partial_q\partial_{p'}-\partial_p\partial_{q'})f(q,p)g(q',p')=\sum_{m=0}^{n}(-1)^m\binom{n}{m}\left[\partial_q^{n-m}\partial_p^{m}f(q,p)\right]\left[\partial_q^{m}\partial_p^{m-n}g(q,p)\right].$$

e

$$(-1)^n(\partial_q\partial_{p'}-\partial_p\partial_{q'})f(q,p)g(q',p')=\sum_{m=0}^{n}(-1)^m\binom{n}{m}\left[\partial_q^{n-m}\partial_p^{m}g(q,p)\right]\left[\partial_q^{m}\partial_p^{m-n}f(q,p)\right].$$

Comparando estas duas últimas equações, obtemos

$$\begin{aligned}(-1)^n &\quad \textstyle\sum_{m=0}^{n}(-1)^m\binom{n}{m}\left[\partial_q^{n-m}\partial_p^{m}f(q,p)\right]\left[\partial_q^{m}\partial_p^{m-n}g(q,p)\right]\\ &= \textstyle\sum_{m=0}^{n}(-1)^m\binom{n}{m}\left[\partial_q^{n-m}\partial_p^{m}g(q,p)\right]\left[\partial_q^{m}\partial_p^{m-n}f(q,p)\right].\end{aligned} \tag{3.19}$$

Substituindo a eq. (3.19) em (3.18)

$$\begin{aligned}\Big(f(q,p)\star g(q,p)\Big)^{\dagger} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{i\hbar}{2}\right)^{n}\left\{(-1)^{n}\sum_{m=0}^{n}(-1)^{m}\binom{n}{m}\left[\partial_q^{n-m}\partial_p^{m}g^{\dagger}(q,p)\right]\right.\\ &\times \left.\left[\partial_q^{m}\partial_p^{n-m}f^{\dagger}(q,p)\right]\right\},\\ &= g^{\dagger}(q,p)\star f^{\dagger}(g,p).\end{aligned}$$

Como queríamos demonstrar.

O produto estrela é associativo.
Considerando f, g e h como funções no espaço de fase, temos

$$\Big(f(q.p) \star g(q,p)\Big) \star h(q,p) = f(q,p) \star \Big(g(q,p) \star h(q,p)\Big). \tag{3.20}$$

Demonstração:

Temos que

$$\begin{aligned}
\Big(f(q.p) \star g(q,p)\Big) \star h(q,p) &= \left\{f\left(q + \frac{i\hbar}{2}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial p}, p - \frac{i\hbar}{2}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial q}\right) g(q,p)\right\} h\left(q - \frac{i\hbar}{2}\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial p}, p + \frac{i\hbar}{2}\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial q}\right), \\
&= f\left(q + \frac{i\hbar}{2}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial p}, p - \frac{i\hbar}{2}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial q}\right) g\left(q + \frac{i\hbar}{2}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial p}, p - \frac{i\hbar}{2}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial q}\right) h(q,p),
\end{aligned}$$

por outro lado,

$$\begin{aligned}
f(q,p) \star \Big(g(q,p) \star h(q,p)\Big) &= f\left(q + \frac{i\hbar}{2}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial p}, p - \frac{i\hbar}{2}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial q}\right) \left\{g(q,p) h\left(q - \frac{i\hbar}{2}\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial p}, p + \frac{i\hbar}{2}\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial q}\right)\right\}, \\
&= f\left(q + \frac{i\hbar}{2}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial p}, p - \frac{i\hbar}{2}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial q}\right) g\left(q + \frac{i\hbar}{2}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial p}, p - \frac{i\hbar}{2}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial q}\right) h(q,p),
\end{aligned}$$

Como queríamos demonstrar.

Aqui, utilizamos o fato de que os operadores diferenciais compreendidos são associativos. Neste caso, podemos concluir que o produto-estrela é associativo.

Capítulo 4

Mecânica Quântica Simplética

Neste capítulo, definiremos um conjunto de operadores estrelas para construir representações unitárias do grupo de Poincaré em um espaço de Hilbert associado a uma variedade simplética, e, como consequência, derivamos uma equação do tipo Klein-Gordon descrita no espaço de fase. Assim, incorporamos na descrição da mecânica quântica no espaço de fase a noção de espaço de Hilbert, $\mathcal{H}(\Gamma)$. Essa variedade, então, é fornecida com uma função de onda, na qual damos a esse objeto uma interpretação física. Também sabemos que, com a construção do espaço de fase a partir de uma teoria de representações, o formalismo se torna autocontido e pode ser generalizado para outros contextos, como a teoria quântica de campos, por exemplo. Para simplificar, consideramos neste capítulo $\hbar = c = 1$. Finalmente fazemos a representação de spin 1 no espaço de fase via teoria de calibre. Este capítulo é baseado nas seguintes referências[17, 21, 30, 22, 31, 32, 33].

4.1 Espaço de Hilbert e a Estrutura Simplética

Seja $\mathcal{G}$ uma variedade diferencial n-dimensional, onde cada ponto é representado por coordenadas $q = (q^1, ...q^n)$. No espaço cotangente, $T^*\mathcal{G}$, as coordenadas de cada ponto são dadas por $(q, p) = (q^1, ...q^n, p^1, ...p^n)$. O espaço cotangente pode então ser equipado com uma estrutura simplética, dada pela 2-forma

$$\omega = dq^\mu \wedge dp_\mu, \qquad \mu = 1, 2, ..., N \tag{4.1}$$

chamada de forma simplética. Essa forma simplética, em conjunto com o operador

$$\mathbf{\Lambda} = \left(\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial q^\mu} \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial p_\mu} - \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial p^\mu} \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial q_\mu} \right) \tag{4.2}$$

tal que para as funções $f(q,p)$ e $g(q,p)$ C^∞, temos,

$$\omega(f\mathbf{\Lambda}, g\mathbf{\Lambda}) = f\mathbf{\Lambda}g = \{f,g\}, \tag{4.3}$$

onde $\{f,g\} = \frac{\partial f}{\partial q^\mu}\frac{\partial g}{\partial p_\mu} - \frac{\partial f}{\partial p^\mu}\frac{\partial g}{\partial q_\mu}$ é o parêntesis de Poisson. O espaço $T^*\mathcal{G}$ dotado dessa estrutura simplética é chamado de espaço de fase e será denotado por Γ, tal que um vetor é especificado por $\omega = (\omega^1, ..., \omega^n) = (q^1, ..., q^n, p^1, ..., p^n)$ e $q = (q^1, ..., q^n)$ e $p = (p^1, ..., p^n)$ os vetores em $\mathcal{G}$. Onde, na equação (4.3), utilizamos o fato de que os operadores,

$$\mathbf{X}_f = f\mathbf{\Lambda} = \frac{\partial f}{\partial q^\mu}\frac{\partial}{\partial p_\mu} - \frac{\partial f}{\partial p^\mu}\frac{\partial}{\partial q_\mu}, \tag{4.4}$$

e

$$\mathbf{X}_g = \mathbf{\Lambda}g = \frac{\partial}{\partial q^\mu}\frac{\partial g}{\partial p_\mu} - \frac{\partial}{\partial p^\mu}\frac{\partial g}{\partial q_\mu}, \tag{4.5}$$

determinam campo vetoriais sobre Γ. Dessas definições gerais, podemos utilizar Γ para introduzir o espaço de Hilbert associado ao espaço de fase Γ.

Cosideremos o conjuto das funções complexas de quadrado integrável, $\varphi(q,p)$ em Γ, tal que

$$\int dpdq\; \varphi(q,p)^\dagger \varphi(q,p) < \infty,$$

é uma forma bilinear real. Nesse caso, podemos escrever $\varphi(q,p) = \langle q,p|\varphi\rangle$, com auxílio de

$$\int dqdp\, |q,p\rangle\langle q,p| = 1,$$

sendo $\langle\varphi|$ o vetor dual de $|\varphi\rangle$. Este espaço de *Hilbert simplético* é denotado por $\mathcal{H}(\Gamma)$

4.2 Operadores no Espaço de Hilbert Simplético

A atuação de um operador linear em $\mathcal{H}(\Gamma)$ é um mapeamento $\Omega : \mathcal{H}(\Gamma) \to \mathcal{H}(\Gamma)$, tal que para dois vetores pertencentes a $\mathcal{H}(\Gamma)$,$|\varphi\rangle$ e $|\psi\rangle$ podemos fazer a seguinte associação

$$\Omega\, |\varphi\rangle = |\psi\rangle\, .$$

O operador é linear se

$$\Omega(c_1 |\psi\rangle + c_2 |\varphi\rangle) = c_1\Omega |\psi\rangle + c_2\Omega |\varphi\rangle .$$

O conjunto de operadores lineares, $\chi = (\Omega, \Theta, ...)$, atuando em $\mathcal{H}(\Gamma)$, é munido com a estrutura de um espaço vetorial a partir das definições das operações de soma vetorial

$$(\Omega + \Theta) |\psi\rangle = \Omega |\psi\rangle + \Theta |\psi\rangle$$

e de mutiplicação de um escalar por um vetor

$$(c\,\Omega) |\psi\rangle = c(\Omega |\psi\rangle).$$

Em geral, o ket $\omega |\psi\rangle$ e o bra $\langle\psi| \Omega$, não são duais entre si, pois

$$\Omega |\psi\rangle \leftrightarrow \langle\psi| \Omega^\dagger.$$

E consequentemente,

$$(\Theta\Omega)^\dagger \leftrightarrow \Theta^\dagger\Omega^\dagger.$$

O operador $\Omega^\dagger$ é chamado de adjunto de Ω. Caso seja um operador hermitiano, valerá a relação

$$\Omega = \Omega^\dagger.$$

Se for o caso, temos que

$$\langle\psi|\Omega|\varphi\rangle = \langle\varphi|\Omega^\dagger|\psi\rangle^\dagger .$$

É possível construir um operador a partir do produto de dois vetores de estado. Esse produto é conhecido como produto externo e é definido como

$$A = |\varphi\rangle\langle\psi|$$

e seu adjunto,

$$A^{\dagger} = |\psi\rangle\langle\varphi| \, .$$

Quando um operador linear Ω atua em um ket $|\omega\rangle$ gerando outro, proporcional a este, dizemos que $|\omega\rangle$ é autovetor ou autoestado de Ω. Ou seja,

$$\Omega \, |\omega\rangle = \omega \, |\omega\rangle \, ,$$

em que ω é um autovalor. Caso Ω seja hermitiano seus autovalores são reais, razão pela qual operadores desse tipo quase sempre se revelam como aqueles que representam algum tipo de observável físico.

4.2.1 Operadores Unitários

Um operador U é dito unitário se obedecer à seguinte condição

$$UU^{\dagger} = U^{\dagger}U = 1$$

ou seja $U^{\dagger} = U^{-1}$, seu adjunto é igual a seu inverso. Assim, dois vetores arbitrários $|\psi_1\rangle$ e $|\psi_2\rangle$ podem ser transformados da seguinte maneira

$$U \, |\psi\rangle = |\psi_1'\rangle \qquad \text{e} \qquad U \, |\psi_2\rangle = |\psi_2'\rangle \, .$$

Porém, temos que

$$\langle\psi_1'|\psi_2'\rangle = \langle\psi_1|U^{\dagger}U|\psi_2\rangle = \langle\psi_1|\psi_2\rangle \, .$$

Assim concluímos que o produto escalar, e consequentemente a norma é deixada inalterada sob uma transformação unitária.

4.2.2 Operador Translação

Agora iremos construir um operador que desloca o estado espacialmente e temporalmente, mantendo as outras características intocadas. Tal operação é chamada de translação infinitesimal. Tal operador deve observar quatro propriedades. Vamos denotá-lo por $T(a^{\mu})$, definido por

$$T(a^\mu)\psi(q^\mu,p^\mu) = e^{i\phi}\psi(q^\mu + \frac{a^\mu}{2}, p^\mu), \tag{4.6}$$

onde $e^{i\phi}$ é uma fase arbitrária.

A primeira propriedade vem da conservação da probabilidade. Isto é, se o estado $|\psi\rangle$ é normalizado, então o estado transladado $T(a^\mu)\,|\psi\rangle$ também o será. Isso implica que a translação infinitesimal deve ser unitária, pois

$$\langle\psi|\psi\rangle = \langle\psi|T^\dagger(a^\mu)T(a^\mu)|\psi\rangle$$

A segunda propriedade é consequência de translações infinitesimais sucessivas não necessariamente na mesma direção. Por exemplo, uma translação infinitesimal a^μ seguida por outra b^μ pode ser interpretada como uma única translação que seja a soma vetorial de $a^\mu + b^\mu$, ou seja

$$T(a^\mu)T(b^\mu) = T(a^\mu + b^\mu).$$

A terceira propriedade vem do fato que uma translação no sentido oposto seja o mesmo que o inverso da translação original, portanto

$$T(-a^\mu) = T^{-1}(a^\mu).$$

E a quarte propriedade se refere ao fato que se $a^\mu \to 0$, a operação de translação se reduz ao operador identidade, isto é

$$\lim_{a^\mu \to 0} T(a^\mu) = 1.$$

Um operador que satisfaz essas propriedades pode ser escrito como

$$T(a^\mu) = e^{i\widehat{k}_\mu a^\mu}.$$

O que, através da relação de de Broglie, $\widehat{P}_\mu = \widehat{k}_\mu$, fica

$$T(a^\mu) = e^{\frac{i}{\hbar}\widehat{P}_\mu a^\mu}.$$

Portanto, nessa representação o operador de momento é o gerador de translações, produzindo, também, uma fase. Resta-nos saber a forma deste operador. Utilizando a Eq. (4.6) e o fato que a expansão em primeira ordem do operador translação é dada por

$$T(a^\mu) = 1 + i\widehat{P}_\mu a^\mu$$

temos

$$\big(1 + i\widehat{P}_\mu a^\mu\big)\psi(q^\mu, p^\mu) = e^{i\phi}\psi(q^i + \frac{a^\mu}{2}, p^\mu).$$

Usando o fato de que $f(x+a) = e^{a\partial_x} f(x)$, chegamos a

$$\widehat{P}\psi(q^\mu, p^\mu) = \frac{\phi}{a}\psi(q^\mu, p^\mu) - \frac{i}{2}\partial_{q^\mu}\psi(q^\mu, p^\mu). \tag{4.7}$$

Como o termo $\frac{\phi}{a}$ é um número, podemos, então, escrever

$$\frac{\phi}{a} = c.$$

Assim,

$$\phi = ac,$$

fazendo-nos concluir que c tem unidade de momento. Fazendo, então, $c = p$, o operador momento fica dado por

$$\widehat{P}^\mu = p^\mu - \frac{i}{2}\partial^\mu.$$

Note que esse operador é hermitiano, pois $\partial^\mu = -\partial^{\mu\dagger}$ sendo portanto um observável. Claramente vemos que

$$\widehat{P}^\mu = p^\mu \star .$$

Nosso próximo passo será a construção do operador posição.

4.2.3 O Operador $\widehat{Q}$

O operador $\widehat{Q}^\mu$, assim como o operador momento, deve ser um observável e, além disso, deve respeitar a transformação

$$T(a)\widehat{Q}T^\dagger(a) = \widehat{Q} + a. \tag{4.8}$$

E, para que $\widehat{Q}^\mu$ possa ser fisicamente interpretado como posição, deve obedecer à relação de Heisenberg $[\widehat{Q}^\mu, \widehat{P}^\mu] = i\delta^{\mu\nu}\mathbf{1}$. Iremos, então, considerar um operador posição arbitrário da forma

$$\widehat{Q}^\mu = Aq^\mu + Bp^\mu + C\frac{\partial}{\partial q_\mu} + D\frac{\partial}{\partial p_\mu},$$

onde A, B, C e D são constantes. Aplicando a relação de Heisenberg, com o operador $\widehat{P}$ dado por

$$\left[Aq^\mu + Bp^\mu + C\frac{\partial}{\partial q_\mu} + D\frac{\partial}{\partial p_\mu}, p - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial q_\mu}\right] = i, \tag{4.9}$$

o que nos leva a

$$\frac{iA}{2} + D = i.$$

Logo, há uma infinidade de formas de escrever o operador posição, todas igualmente válidas. Iremos escolher aqui uma para nossa representação que nos conduza à interpretação física do formalismo. Assim, vamos adotar $A = 1$, que implica em $D = \frac{i}{2}$. Assim o operador posição será

$$\widehat{Q}^\mu = q^\mu + \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial p_\mu}, \tag{4.10}$$

que pode ser escrito como

$$\widehat{Q}^\mu = q^\mu \star. \tag{4.11}$$

É importante ressaltar que fica satisfeita a eq. (4.8), pois

$$e^{i\widehat{P}_\mu a^\mu}\widehat{Q}e^{-i\widehat{P}_\mu a^\mu} = \widehat{Q} + a,$$

em que foi usada a relação de *Baker-Hausdorff*

$$e^A B e^{-A} = \sum_{n=0}^{\infty}[A,B]_n,$$

onde

$$[A,B]_0 = B, [A,B]_1 = [A,B], ..., [A,B]_n = [A,[A,B]_{n-1}], \quad n \geq 2.$$

Observa-se também que tal operador pode gerar translação nos momentos, além, também, de uma fase.

4.3 O Grupo de Poincaré e o espaço de Hilbert Simplético

Nesta seção, estudaremos o grupo Poincaré, considerando $H(\Gamma)$ como o espaço de representações. Para fazer isso, vamos considerar as transformações unitárias $U{:}\mathcal{H}(\Gamma) \to \mathcal{H}(\Gamma)$ tal que $\langle\psi_1|\psi_2\rangle$ seja invariante.

Usando o operador Λ, definimos um mapeamento $e^{i\frac{\Lambda}{2}} = \star{:}\Gamma \times \Gamma \to \Gamma$ chamado de produto de Moyal (ou estrela),

$$\begin{aligned} f \star g &= f(q,p)\exp\left[\frac{i}{2}\left(\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial q^\mu}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial p_\mu} - \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial p^\mu}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial q_\mu}\right)\right]g(q,p) \\ &= \exp\left[\frac{i}{2}\left(\frac{\partial}{\partial q^\mu}\frac{\partial}{\partial p'_\mu} - \frac{\partial}{\partial p^\mu}\frac{\partial}{\partial q'_\mu}\right)\right]f(q,p)g(q',p')\bigg|_{q',p'=q,p}. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Os geradores de U podem ser introduzidos pelos seguintes operadores-estrela:

$$\widehat{F} = f(q,p)\star = f\left(q^\mu + \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial p_\mu}, p^\mu - \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial q_\mu}\right). \tag{4.13}$$

Para construir uma representação da álgebra de Poincaré em $\mathcal{H}$, usaremos os seguintes operadores,

$$\widehat{P}^{\mu} = p^{\mu}\star = p^{\mu} - \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial q_{\mu}}, \tag{4.14a}$$

$$\widehat{Q}^{\mu} = q\star = q^{\mu} + \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial p_{\mu}}. \tag{4.14b}$$

e

$$\widehat{M}_{\nu\sigma} = M_{\nu\sigma}\star = \widehat{Q}_{\nu}\widehat{P}_{\sigma} - \widehat{Q}_{\sigma}\widehat{P}_{\nu}. \tag{4.14c}$$

Onde $\widehat{M}_{\nu\sigma}$ são os geradores de transformações homogêneas e $\widehat{P}_{\mu}$ das não-homogêneas. A partir deste conjunto de operadores unitários obtemos, após alguns cálculos simples, o seguinte conjunto de relações de comutações,

$$\begin{aligned}
\left[\widehat{M}_{\mu\nu}, \widehat{M}_{\rho\sigma}\right] &= -i(\eta_{\mu\rho}\widehat{M}_{\nu\sigma} - \eta_{\mu\sigma}\widehat{M}_{\nu\rho} + \eta_{\nu\rho}\widehat{M}_{\nu\sigma} - \eta_{\nu\sigma}\widehat{M}_{\nu\rho}),\\
\left[\widehat{P}_{\mu}, \widehat{M}_{\rho\sigma}\right] &= -i(\eta_{\mu\rho}\widehat{P}_{\sigma} - \eta_{\mu\sigma}\widehat{P}_{\rho}),\\
\left[\widehat{P}_{\mu}, \widehat{P}_{\sigma}\right] &= 0.
\end{aligned}$$

Os invariantes desta álgebra são

$$I_1 = \widehat{P}_{\mu}\widehat{P}^{\mu}, \tag{4.15}$$
$$I_2 = \widehat{W}_{\mu}\widehat{W}^{\mu}, \tag{4.16}$$

onde $\widehat{W}^{\mu}$ é o pseudo-vetor de Pauli-Lubanski.

4.4 Representação na Mecânica Quântica Relativística

Usando os invariantes de Casimir e fazendo $I_2 = 0$ (Campo Escalar), e aplicando em Ψ, temos

$$\widehat{P}_{\mu}\widehat{P}^{\mu}\Psi = -m^2\Psi. \tag{4.17}$$

Assim, obtemos

$$\left(p^\mu p_\mu - ip^\mu \partial_\mu - \frac{1}{4}\partial^\mu \partial_\mu + m^2\right)\Psi = 0,$$

que é a equação de Klein-Gordon no espaço de fase para a partícula livre com massa m [16], sua equação e seu complexo conjugado também podem ser obtidos pela densidade lagrangiana no espaço de fase (usamos $\partial^\mu = \partial/\partial q_\mu$)

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{4}\partial^\mu \Psi(q,p)\partial\Psi^\dagger(q,p) + \frac{i}{2}p^\mu[\Psi(q,p)\partial^\mu\Psi^\dagger(q,p)\\ &- \Psi^\dagger(q,p)\partial^\mu\Psi(q,p)] + \left[p^\mu p_\mu + m^2\right]\Psi\Psi^\dagger.\end{aligned}$$

A associação dessa representação com o formalismo de Wigner é dada por

$$f_w(q,p) = \Psi(q,p) \star \Psi^\dagger(q,p)$$

onde $f_w(q,p)$ é a função Wigner. Para provar isso, lembramos que a eq. (4.17) pode ser escrita como

$$\widehat{P}_\mu \widehat{P}^\mu \Psi = p^2 \star \Psi(q,p).$$

Multiplicando o lado direito da equação acima por $\Psi^\dagger$, obtemos

$$(p^2 \star \Psi) \star \Psi^\dagger = m^2 \Psi \star \Psi^\dagger, \tag{4.18}$$

mas, $\Psi^\dagger \star p^2 = -m^2\Psi^\dagger$, assim

$$\Psi \star (\Psi^\dagger \star p^2) = -m^2 \Psi \star \Psi^\dagger. \tag{4.19}$$

Subtraindo a Eq. (4.19) da Eq. (4.18), nós temos

$$p^2 \star f_w(q,p) - f_w(q,p) \star p^2 = 0, \tag{4.20}$$

que é o parenteses de Moyal, $\{p^2, f_w\}_M$.

A equação de spin 1/2 é representada de maneira similar à equação de Dirac

$$(\gamma^\mu p_\mu \star -m)\psi = 0.$$

A associação com o formalismo de Wigner é dada por

$$f_w(q,p) = \psi(q,p) \star \bar{\psi}(q,p),$$

onde $\bar{\psi} = \gamma^0\psi^\dagger$.

4.5 Campos de Spin 1 no Espaço de Fase Via Calibre

A equação

$$(\gamma^\mu p_\mu \star - m)\psi = 0$$

não é invariante sob transformação de Calibre. Para contornar essa situação utilizamos o quadrivetor auxiliar A^μ, que se transforma via calibre da forma

$$A'^\mu \to A^\mu + i\{A^\mu, \lambda\} - i\partial^\mu\lambda \star .$$

Tomando $D^\mu \equiv (p^\mu - eA^\mu)$, temos

$$(\gamma^\mu D_\mu \star - m)\psi = 0$$

invariante sob calibre. Podemos construir o **tensor de força do campo** de A^μ no espaço de fase da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} F^{\mu\nu} \equiv & \frac{i}{e}\{D^\mu, D^\nu\}_M \\ = & \frac{i}{e}\Big(\{p^\mu - eA^\mu, p^\nu - eA^\nu\}_M\Big) \\ = & \frac{1}{e}\Big(\{p^\mu, p^\nu\}_M - \{p^\mu, A^\nu\}_M - \{A^\mu, p^\nu\}_M + e^2\{A^\mu, A^\nu\}_M\Big) \end{aligned} \tag{4.21}$$

o que leva a

$$F^{\mu\nu} = \partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu + ie\{A^\mu, A^\nu\}_M. \tag{4.22}$$

Esse é o campo de spin 1 no espaço de fase, de onde é possível derivar as equações de Maxwell no espaço de fase. A Eq. (4.22) pode ser obtida pela lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}. \tag{4.23}$$

Para esse caso, a lagrangiana pode ser dada como

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}(\gamma^\mu D_\mu \star - m)\Psi - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}. \tag{4.24}$$

Portanto, uma vez construída a representação simplética da mecânica quântica, a realização do calibre se torna semelhante à maneira usual. Contudo, devido as condições do espaço de fase, podemos notar diferenças para para a expressão do campo de spin 1 quando descrito no espaço de fase. Nesse caso, o campo apresenta um termo dependente do parêntese de Moyal do campo A^μ.

Capítulo 5

Representação de Spin inteiro

O objetivo principal deste capítulo é estender a representação simplética já empregada em campos escalares para campos de spin 2. Para tanto, utilizamos uma generalização da lagrangiana para campos livres de spin inteiro.

Afim de desenvolver a generalização desejada, primeiro foi construída a representação do campo de spin 1 a partir do tensor de campo e da função de onda. Essa construção ficou diferente daquela apresentada no capítulo anterior, que foi realizada via calibre. Feita a representação, foi possível encontrar de forma simples a solução para a função de onda no espaço de fase, bem como a função de Wigner e a lagrangiana para spin 1. Esta lagrangiana foi generalizada e aplicada a um campo de spin 2. Como resultado, o campo obedeceu às condições de simetria, traço nulo, transversalidade e à equação de segunda ordem. Assim, foi possível apresentar uma solução para a função de onda e encontrar a função de Wigner para um campo de spin 2. A solução para o campo e a função de Wigner são então generalizadas para campos de spin inteiro.

Em relação ao campo livre de spin 2, acredita-se que o campo gravitacional possa ser explicado por meio de um campo de spin 2 e massa nula. De fato, as equações de Einstein aceitam soluções radiativas. As equações são altamente não lineares, e uma forma comum de se resolver esse problema é recorrer a uma aproximação de campo fraco. Nesse caso, a solução para um volume finito leva à solução de onda plana para uma partícula de spin 2. Como a radiação apresenta longo alcance e velocidade idêntica à da luz, a massa do campo deveria ser nula.

Ao analisar a interação com o campo eletromagnético, seguimos a teoria de Fierz e Pauli para propor uma lagrangiana de interação entre os campos de spin 1 e 2. Os autores ressaltam que o desenvolvimento de equações do movimento, considerando as interações eletromagnéticas, leva a inconsistências algébricas. Isso acontece porque ao substituir as derivadas ordinárias por derivadas covariantes, algumas condições (como traço nulo e energia positiva) deixam de ser compatíveis entre si. A sugestão dos autores é partir de uma lagrangiana generalizada composta por campos auxiliares e, depois, derivar as equações de movimento por meio do princípio variacional. Esse processo possibilita definir os coeficientes de cada termo oriundo da lagrangiana de maneira que satisfaçam as condições exigidas, sem a necessidade de derivar diretamente termos que garantam a compatibilidade. Os coeficientes empregados aqui são os mesmo calculados por Fierz e Pauli. Este capítulo foi baseado em [6] [34] [35].

5.1 Representação de Spin 1

Uma partícula com spin 1 é descrita como um quadrivetor ψ^{μ} ou com componentes mistos de um quadritensor anti-simétrico $\psi^{\mu\nu}$.

A equação dinâmica é uma relação entre as quantidades ψ^{μ} e $\psi^{\mu\nu}$, e será escrito como [36]

$$
\begin{aligned}
i\psi_{\mu\nu} &= \widehat{P}_{\mu}\psi_{\nu} - \widehat{P}_{\nu}\psi_{\mu}, && (5.1)\\
\widehat{P}^{\nu}\psi_{\mu\nu} &= im^2\psi_{\mu}, && (5.2)
\end{aligned}
$$

onde $\psi_{\mu\nu}$ é o tensor de campo e $\widehat{P} = p\star$. Daí, é possível obter a equação de Maxwell-Proca no espaço de fase. Aplicando o operador $\widehat{P}^{\mu}$ em ambos os lados da Eq. (5.2), temos

$$\widehat{P}^{\mu}\psi_{\mu} = 0. \tag{5.3}$$

Sendo que $\psi_{\mu\nu}$ é anti-simétrica. Assim, multiplicando $\widehat{P}^{\mu}$ em (5.1) e substituindo $\widehat{P}^{\mu}\psi^{\mu\nu}$ por meio da Eq. (5.2), obtemos

$$(p^2 + m^2) \star \psi^{\nu} = 0, \tag{5.4}$$

ou

$$\left(p^{\mu}p_{\mu} - ip^{\mu}\partial_{\mu} - \frac{1}{4}\partial^{\mu}\partial_{\mu} + m^2\right)\psi^{\nu} = 0, \tag{5.5}$$

onde m é a massa da partícula. Portanto, uma partícula livre de spin 1 pode ser descrita pela Eq. (5.5) com a condição adicional Eq. (5.3).

A solução para a Eq. (5.5) dada pelo tensor de polarização é [37]

$$\psi^{\nu}(p_{\mu}, q_{\mu}) = u^{\nu}\xi(p_{\mu})e^{-i4p^{\mu}q_{\mu}}, \tag{5.6}$$

onde $\xi(p_\mu)$ depende das condições de contorno e u^μ obedece

$$u_\mu^* u^\mu = -1 \tag{5.7}$$

e também

$$u^\mu \widehat{P}_\mu = 0. \tag{5.8}$$

Portanto, a função de Wigner pode ser obtida a partir da função de onda, através de

$$f_w = -\psi^\mu \star \psi_\mu^\dagger. \tag{5.9}$$

Note que

$$\begin{aligned} \psi^\mu \star \psi_\mu^\dagger =&(u^\mu \phi) \star (u_\mu^* \phi^\dagger) \\ =&u^\mu u_\mu^* \phi \star \phi^\dagger \\ =&- f_w, \end{aligned} \tag{5.10}$$

onde $\phi(q,p)$ é o campo escalar no espaço de fase e o sinal é devido à assinatura da métrica.

A Eq. (5.1) e Eq. (5.2) pode ser deduzida a partir da lagrangiana

$$\mathcal{L} = \tfrac{1}{2}\psi_{\mu\nu}\psi^{\mu\nu\dagger} - \tfrac{1}{2}\psi^{\mu\nu\dagger}(\widehat{P}_\mu\psi_\nu - \widehat{P}_\nu\psi_\mu) - \tfrac{1}{2}\psi^{\mu\nu}(\widehat{P}_\mu{\psi_\nu}^\dagger - \widehat{P}_\nu{\psi_\mu}^\dagger) + m^2\psi_\mu\psi^{\mu\dagger}. \tag{5.11}$$

A lagrangiana acima pode ser reescrita como [35]:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\psi_{\mu\nu}\psi^*_{\lambda\rho}g^{\mu\lambda}g^{\nu\rho} + m^2\psi_\mu{\psi_\nu}^* g^{\mu\nu}. \tag{5.12}$$

Substituindo $\psi_{\mu\nu}$ por meio da Eq. (5.1):

$$\begin{aligned} \mathcal{L} =& -(\widehat{P}_\mu\psi_\nu^*)(\widehat{P}^\mu\psi^\nu) + (\widehat{P}_\nu\psi_\mu^*)(\widehat{P}^\mu\psi_\nu) + m^2\psi_\mu\psi^{\mu*} \\ =& -(\widehat{P}_\mu\psi_\nu^*)(\widehat{P}^\mu\psi_\nu) + m^2\psi_\mu^*\psi^\mu + \widehat{P}_\nu(\psi_\mu^*\widehat{P}^\mu\psi^\nu) - \psi_\mu^*\widehat{P}^\mu\widehat{P}_\nu\psi^\nu. \end{aligned} \tag{5.13}$$

Omitindo a derivada total no penúltimo termo e ciente de que o último termo é nulo, temos

$$\mathcal{L} = -(\widehat{P}_\mu\psi_\nu^*)(\widehat{P}^\mu\psi^\nu) + m^2\psi_\mu^*\psi^\mu. \tag{5.14}$$

Note que a lagrangiana acima tem a mesma forma da lagrangiana para partículas de spin nulo. A diferença é devida ao campo ψ_μ, que é um vetor tipo-espaço nesse caso ($\psi_\mu\psi^{\mu*} < 0$).

Vale a pena ressaltar que eq. (4.22) e eq. (5.1) são diferentes teorias de spin 1 mesmo no caso quando $m \to 0$ na eq. (5.2).

5.2 Representação de Spin 2

Aqui, pretendemos propor uma representação para o campo do gráviton, com massa nula e spin 2. Afinal, no limite de campo fraco, as equações de Einstein aceitam uma solução de onda plana [6].

A generalização da lagrangiana apresentada para o caso de spin 1, eq. (5.14), pode ser estendida a campos livres de qualquer spin inteiro. Para tanto, é necessário que a representação do campo apresente rank igual ao spin do campo. Portanto, a lagrangiana para um campo de spin 2 pode ser dada por

$$\mathcal{L} = -\,(\widehat{P}_\rho \psi^*_{\mu\nu})(\widehat{P}^\rho \psi^{\mu\nu}) + m^2 \psi^*_{\rho\sigma}\psi^{\rho\sigma}. \tag{5.15}$$

Explicitando a expressão no espaço de fase,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{4}\partial_\rho \psi^*_{\mu\nu}\partial^\rho \psi^{\mu\nu} + \frac{i}{2}p_\rho[\psi^*_{\mu\nu}(\partial^\rho \psi^{\mu\nu}) \qquad (5.16)\\ &+ (\partial\psi^*_{\mu\nu})\psi^{\mu\nu}] - \left(p_\mu p^\mu - m^2\right)\psi^*_{\mu\nu}\psi^{\mu\nu}, \qquad (5.17) \end{aligned}$$

semelhante àquela para o caso de spin 1.

O campo $\psi_{\mu\nu}$ deve ser simétrico e de traço nulo:

$$\begin{aligned} \psi_{\mu\nu} &= \psi_{\nu\mu}, \\ \psi^\mu{}_\mu &= 0. \end{aligned} \tag{5.18}$$

Devido à transversalidade,

$$\widehat{P}^\mu \psi_{\mu\nu} = 0, \tag{5.19}$$

e cada componente satisfaz

$$(p^2 - m^2) \star \psi_{\mu\nu} = 0. \tag{5.20}$$

Note que o campo $\psi_{\mu\nu}$ obedece às condições para uma radiação gravitacional originada no infinito. Na verdade, a Eq. (5.20) é exatamente a encontrada por meio da aproximação de campo fraco para as equações de Einstein, de acordo com Weinberg [6]. Contudo, aqui a equação já é apresentada em sua versão no espaço de fase.

Seguindo o que foi feito para o caso de spin 1, a solução da Eq. 5.20 em termos do tensor de polarização é tal que

$$\psi^{\mu\nu}(p_\gamma, q_\gamma) = u^{\mu\nu}\xi(p_\gamma)e^{-i4p^\gamma q_\gamma}, \tag{5.21}$$

onde $u^{\mu\nu}$ obedece

$$u^*_{\mu\nu}u^{\mu\nu} = -1 \tag{5.22}$$
$$u^{\mu\nu}\widehat{P}_{\mu\nu} = 0. \tag{5.23}$$

Portanto, semelhante ao caso para o campo de spin 1, a função de Wigner fica:

$$f_w = -\psi^{\mu\nu} \star \psi_{\mu\nu}. \tag{5.24}$$

No caso geral para qualquer ordem de spin inteiro, temos

$$\psi^{\mu\nu\dots}(p_\gamma, q_\gamma) = u^{\mu\nu\dots}\xi(p_\gamma)e^{-i4p^\gamma q_\gamma}, \tag{5.25}$$
$$f_w = -\psi^{\mu\nu\dots} \star \psi^\dagger{}_{\mu\nu\dots}, \tag{5.26}$$

que são as generalizações da função de onda e da função de Wigner para partículas livres de spin inteiro.

5.3 Campo escalar auxiliar C

Para analisar a interação com o campo eletromagnético, seguindo o método de Fierz e Pauli, torna-se necessário o emprego de um campo auxiliar de ordem mais baixa. Ao levar em conta a interação, a mudança do operador $\widehat{P}$ pelo operador $D\star = (p - eA)\star$ torna as Eqs. (5.19) e (5.20) incompatíveis, pois os operadores $\widehat{D}^2$ e $\widehat{D}$ não comutam. Nesse sentido, a adição de um campo escalar auxiliar é uma conveniência, realizada de forma artificial, para que a lagrangiana satisfaça a condição (5.19) [34].

Considerando $A_{\mu\nu}$ e C reais, onde $A_{\mu\nu}$ é o campo de spin 2, a lagrangiana pode ser dada por

$$\begin{aligned}\mathcal{L} =& m^2 A_{\mu\nu}A^{\mu\nu} + \widehat{P}_\lambda A_{\mu\nu}\widehat{P}^\lambda A^{\mu\nu} - 2\widehat{P}^\gamma A_{\gamma\nu}\widehat{P}_\eta A^{\eta\nu}\\ &- \frac{3}{4}m^2C^2 - \frac{3}{8}\widehat{P}_\lambda C\widehat{P}^\lambda C + \widehat{P}^\gamma A_{\gamma\nu}\widehat{P}^\nu C\end{aligned} \tag{5.27}$$

Lagrangiana com campo escalar C no espaço de fase

$$\begin{aligned}\mathcal{L} =& m^2 A_{\mu\nu}A^{\mu\nu} + (p_\lambda \star A_{\mu\nu})(p^\lambda \star A^{\mu\nu}) - 2(p^\gamma \star A_{\gamma\nu})(p_\eta \star A^{\eta\nu}) \\ & - \frac{3}{4}m^2C^2 - \frac{3}{8}(p_\lambda \star C)(p^\lambda \star C) + (p^\gamma \star A_{\gamma\nu})(p^\nu \star C).\end{aligned} \tag{5.28}$$

Como $p_\mu \star = \left(p_\mu - \frac{i}{2}\partial_\mu\right)$,

$$\begin{aligned}\mathcal{L} =& m^2 A_{\mu\nu}A^{\mu\nu} + p^2 A_{\mu\nu}A^{\mu\nu} - \frac{i}{2}[p_\lambda A_{\mu\nu}(\partial^\lambda A^{\mu\nu}) + (\partial_\lambda A_{\mu\nu})p^\lambda A^{\mu\nu}] - \frac{1}{4}(\partial_\lambda A_{\mu\nu})(\partial^\lambda A^{\mu\nu}) \\ & -2\Big\{p^\gamma A_{\gamma\nu}p_\eta A^{\eta\nu} - \frac{i}{2}[p^\gamma A_{\gamma\nu}(\partial_\eta A^{\eta\nu}) + (\partial^\gamma A_{\gamma\nu})p_\eta A^{\eta\nu}] - \frac{1}{4}(\partial^\gamma A_{\gamma\nu})(\partial_\eta A^{\eta\nu})\Big\} \\ & -\frac{3}{4}m^2C^2 - \frac{3}{8}\Big\{p_\lambda p^\lambda C^2 - \frac{i}{2}[p_\lambda C(\partial^\lambda) + (\partial^\gamma A_{\gamma\nu}p_\eta A^{\eta\nu})] - \frac{1}{4}(\partial^\gamma A_{\gamma\nu})(\partial_\eta A^{\eta\nu})\Big\} \\ & +p^\gamma A_{\gamma\nu}p^\nu C - \frac{i}{2}[p^\gamma A_{\gamma\nu}(\partial^\nu C) + (\partial^\gamma A_{\gamma\nu}p^\nu C)] - \frac{1}{4}(\partial^\gamma A_{\gamma\nu})(\partial^\nu C).\end{aligned} \tag{5.29}$$

Rearranjando os termos

$$\begin{aligned}\mathcal{L} =& m^2 A_{\mu\nu}A^{\mu\nu} - \frac{1}{4}(\partial_\lambda A_{\mu\nu})(\partial^\lambda A^{\mu\nu}) + \frac{1}{2}(\partial^\gamma A_{\gamma\nu})(\partial_\eta A^{\eta\nu}) \\ & -\frac{3}{8}m^2C^2 + \frac{3}{32}(\partial_\lambda C)(\partial^\lambda C) - \frac{1}{4}(\partial^\gamma A_{\gamma\nu})(\partial^\nu C) \\ & +p^2 A_{\mu\nu}A^{\mu\nu} - 2p^\gamma p_\eta A_{\gamma\nu}A^{\eta\nu} - \frac{3}{8}p^2C^2 + p^\gamma p^\nu A_{\gamma\nu}C \\ & -\frac{i}{2}p_\lambda A_{\mu\nu}(\partial^\lambda A^{\mu\nu}) + ip^\gamma A_{\gamma\nu}(\partial_\eta A^{\eta\nu}) + \frac{3i}{16}p_\lambda C(\partial^\lambda C) - \frac{i}{2}p^\gamma A_{\gamma\nu}(\partial^\nu C) \\ & -\frac{i}{2}(\partial_\lambda A_{\mu\nu})p^\lambda A^{\mu\nu} + i(\partial^\gamma A_{\gamma\nu})p_\eta A^{\eta\nu} + \frac{3i}{16}(\partial_\lambda C)p_\lambda C - \frac{i}{2}(\partial^\gamma A_{\gamma\nu})p^\nu C.\end{aligned} \tag{5.30}$$

Repare que as duas primeiras linhas da lagrangiana acima são uma lagrangiana do tipo Fierz-Pauli.

5.4 Interação do campo de spin 2 com o campo eletromagnético

Agora, é possível adicionar termos convenientes afim de incluir a interação entre o campo de spin 2 ($A_{\mu\nu}$) com outros campos. A interação do campo eletromagnético com o campo de spin 2 é dada via interação com o campo de spin 1 (A_μ). Porém, é importante que, ao adicionar tais termos, se verifique a validade das condições subsidiárias estabelecidas por Fierz e Pauli [34]. Isso porque ao ligar e desligar a interação, a dimensionalidade da variedade de estados poderia ser alterada, levando a singularidades.

Aqui, ao tomar a derivada covariante, empregamos aquela já apresentada ao desenvolver o calibre de spin 1 no espaço de fase, $D_\mu \star = (p_\mu - eA_\mu)\star$. Lembrando também que é possível expressar o campo eletromagnético no espaço de fase por meio do comutador de Moyal da derivada covariante como na Eq. (4.21).

Desta maneira, a lagrangiana para um campo de spin 2 no espaço de fase, com a interação eletromagnética, pode ser escrita como

$$\begin{aligned}\mathcal{L} =& m^2 A^*_{\mu\nu} A^{\mu\nu} + (D^\lambda \star A^{\mu\nu})(D^*_\lambda \star A^*_{\mu\nu}) - 2(D_\gamma \star A^{\gamma\nu})(D^{\eta *} \star A^*_{\eta\nu}) + F^\mu_\gamma \star A^{\gamma\nu} A^*_{\mu\nu} \\ &+ \frac{1}{2}[(D_\gamma \star A^{\gamma\nu})(D^*_\nu \star C^*) + (D^{\gamma *} \star A^*_{\gamma\nu})(D^\nu \star C)] \\ &- \frac{3}{4} m^2 C^* C - \frac{3}{8}(D^\lambda \star C)(D^*_\lambda \star C^*),\end{aligned} \tag{5.31}$$

onde $D^\mu = p^\mu - eA^\mu$, A^μ é o quadripotencial eletromagnético e $F^{\mu\nu} = g^{\nu\gamma} F^\mu_\gamma$ é o tensor de campo eletromagnético no espaço de fase dado pela Eq.(4.22).

A partir desta lagrangiana, podemos propor uma equação do movimento ou uma expressão para o vetor carga-corrente elétrica, tomando as derivadas da lagrangiana em relação ao quadripotencial.

Também é possível apresentar mais explicitamente a lagrangiana, de forma enfadonha, mas direta. Então, desenvolvendo a derivada covariante de forma direta, temos

$$\begin{aligned}\mathcal{L} =& m^2 A^*_{\mu\nu} A^{\mu\nu} + (p^\lambda \star A^{\mu\nu})(p_\lambda \star A^*_{\mu\nu}) - e(p^\lambda \star A^{\mu\nu})(A^*_\lambda \star A^*_{\mu\nu}) \\ &- e(A^\lambda \star A^{\mu\nu})(p_\lambda \star A^*_{\mu\nu}) + e^2(A^\lambda \star A^{\mu\nu})(A^*_\lambda \star A^*_{\mu\nu}) \\ &- 2[(p_\gamma \star A^{\gamma\nu})(p^\eta \star A^*_{\eta\nu}) - e(p_\gamma \star A^{\gamma\nu})(A^{\eta *} \star A^*_{\eta\nu})] \\ &- 2[-e(A_\gamma \star A^{\gamma\nu})(p^\eta \star A^*_{\eta\nu}) + e^2(A_\gamma \star A^{\gamma\nu})(A^{\eta *} \star A^*_{\eta\nu})] + F^\mu_\gamma \star A^{\gamma\nu} A^*_{\mu\nu} \\ &+ \frac{1}{2}[(p_\gamma \star A^{\gamma\nu})(p_\nu \star C^*) - e(p_\gamma \star A^{\gamma\nu})(A^*_\nu \star C^*)] \\ &+ \frac{1}{2}[-e(A_\gamma \star A^{\gamma\nu})(p_\nu \star C^*) + e^2(A_\gamma \star A^{\gamma\nu})(A^*_\nu \star C^*)] \\ &+ \frac{1}{2}[(p^\gamma \star A^*_{\gamma\nu})(p^\nu \star C) - e(p^\gamma \star A^*_{\gamma\nu})(A^\nu \star C)] \\ &+ \frac{1}{2}[-e(A^{\gamma *} \star A^*_{\gamma\nu})(p^\nu \star C) + e^2(A^{\gamma *} \star A^*_{\gamma\nu})(A^\nu \star C)] - \frac{3}{4} m^2 C^* C \\ &- \frac{3}{8}[(p^\lambda \star C)(p_\lambda \star C^*) - e(p^\lambda \star C)(A^*_\lambda \star C^*) - e(A^\lambda \star C)(p_\lambda \star C^*) + e^2(A^\lambda \star C)(A^*_\lambda \star C^*)].\end{aligned} \tag{5.32}$$

Aplicando o produto estrela nos momentos,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} =& m^2 A^*_{\mu\nu}A^{\mu\nu} + p^2 A^*_{\mu\nu}A^{\mu\nu} - \frac{i}{2}[p^\lambda A^{\mu\nu}(\partial_\lambda A^*_{\mu\nu}) + (\partial^\lambda A^{\mu\nu})p_\lambda A^*_{\mu\nu}] - \frac{1}{4}(\partial^\lambda A^{\mu\nu})(\partial_\lambda A^*_{\mu\nu}) \\
&-e\Big[p^\lambda A^{\mu\nu}(A^*_\lambda \star A^*_{\mu\nu}) - \frac{i}{2}(\partial^\lambda A^{\mu\nu})(A^*_\lambda \star A^*_{\mu\nu}) + (A^\lambda \star A^{\mu\nu})(p_\lambda A^*_{\mu\nu}) - \frac{i}{2}(A^\lambda \star A^{\mu\nu})(\partial_\lambda A^*_{\mu\nu})\Big] \\
&+e^2(A^\lambda \star A^{\mu\nu})(A^*_\lambda \star A^*_{\mu\nu}) \\
&-2\Big\{p_\gamma A^{\gamma\nu}p^\eta A^*_{\eta\nu} - \frac{i}{2}[p_\gamma A^{\gamma\nu}(\partial^\eta A^*_{\eta\nu}) + (\partial_\gamma A^{\gamma\nu})p^\eta A^*_{\eta\nu}] - \frac{1}{4}(\partial_\gamma A^{\gamma\nu})(\partial^\eta A^*_{\eta\nu})\Big\} \\
&+2e\Big[p_\gamma A^{\gamma\nu}(A^{\eta *} \star A_{\eta\nu}) - \frac{i}{2}(\partial_\gamma A^{\gamma\nu})(A^{\eta *} \star A_{\eta\nu}) + (A_\gamma \star A^{\gamma\nu})p^\eta A^*_{\eta\nu} - \frac{i}{2}(A^{\eta^*} \star A_{\eta\nu})(\partial^\eta A^*_{\eta\nu})\Big] \\
&-2e(A_\gamma \star A^{\gamma\nu})(A^{\eta *} \star A_{\eta\nu}) + F^\mu_\gamma \star A^{\gamma\nu}A^*_{\mu\nu} \\
&+\frac{1}{2}\Big\{p_\gamma A^{\gamma\nu}p_\nu C^* - \frac{i}{2}[p_\gamma A^{\gamma\nu}(\partial_\nu C^*) + (\partial_\gamma A^)p_\nu C^*] - \frac{1}{4}(\partial_\gamma A^{\gamma\nu})(\partial_\nu C^*)\Big\} \\
&-\frac{e}{2}\Big[p_\gamma A^{\gamma\nu}(A^*_\nu \star C^*) - \frac{i}{2}(\partial_\gamma A^{\gamma\nu})(A^*_\nu \star C^*) + (A_\gamma \star A^{\gamma\nu})p_\nu C^* - \frac{i}{2}(A_\gamma \star A^{\gamma\nu})(\partial_\nu C^*)\Big] \\
&+\frac{e^2}{2}(A_\gamma \star A^{\gamma\nu})(A^*_\nu \star C^*) \\
&+\frac{1}{2}\Big\{p^\gamma A^*_{\gamma\nu}p^\nu C - \frac{i}{2}[p^\gamma A^*_{\gamma\nu}(\partial^\nu C) + (\partial^\gamma A^*_{\gamma\nu})p^\nu C] - \frac{1}{4}(\partial^\gamma A^*_{\gamma\nu})(\partial^\nu C)\Big\} \\
&-\frac{e}{2}\Big[p^\gamma A^*_{\gamma\nu}(A^\nu \star C) - \frac{i}{2}(\partial^\gamma A^*_{\gamma\nu})(A^\nu \star C) + (A^{\gamma *} \star A^*_{\gamma\nu})p^\nu C - \frac{i}{2}(A^{\gamma *} \star A^*_{\gamma\nu})(\partial^\nu C)\Big] \\
&+e^2(A^{\gamma *} \star A^*_{\gamma\nu})(A^\nu \star C) - \frac{3}{4}m^2 CC^* \\
&-\frac{3}{8}\Big\{p^2 CC^* - \frac{i}{2}[p^\lambda C(\partial_\lambda C^*) + (\partial^\lambda C)p_\lambda C^*] - \frac{1}{4}(\partial^\lambda C)(\partial_\lambda C^*)\Big\} \\
&+\frac{3}{8}e\Big[p^\lambda(A^*_\lambda \star C^*) - \frac{i}{2}\partial^\lambda(A^*_\lambda \star C^*) + (A^\lambda \star C)(p_\lambda C^*) - \frac{i}{2}(A^\lambda \star C)(\partial_\lambda C^*)\Big] \\
&-\frac{3}{8}e^2(A^\lambda \star C)(A^*_\lambda \star C^*).
\end{aligned}
\tag{5.33}
$$

Rearranjando os termos, a lagrangiana fica

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} =& m^2 A^*_{\mu\nu}A^{\mu\nu} - \frac{1}{4}(\partial^\lambda A^{\mu\nu})(\partial_\lambda A^*_{\mu\nu}) + \frac{1}{2}(\partial_\gamma A^{\gamma\nu})(\partial^\eta A^*_{\eta\nu}) + F^\mu_\gamma \star A^{\gamma\nu}A^*_{\mu\nu} \\
&-\frac{1}{8}[(\partial_\gamma A^{\gamma\nu})(\partial_\nu C^*) + (\partial^\gamma A^*_{\gamma\nu})(\partial^\nu C)] - \frac{3}{4}m^2 C^* C + \frac{3}{32}(\partial^\nu C)(\partial_\nu C^*) \\
&+p^2 A^*_{\mu\nu}A^{\mu\nu} - 2p_\gamma A^{\gamma\nu}p^\eta A^*_{\eta\nu} + \frac{1}{2}[p_\gamma A^{\gamma\nu}p_\nu C^* + p^\gamma A^*_{\gamma\nu}p^\nu C] - \frac{3}{8}p^2 C^2 \\
&-ep^\lambda A^{\mu\nu}(A^*_\lambda \star A^*_{\mu\nu}) + 2ep_\gamma A^{\gamma\nu}(A^{\eta *} \star A_{\eta\nu}) - \frac{e}{2}[p_\gamma A^{\gamma\nu}(A^*_\nu \star C^*) + p_\gamma A^*_{\gamma\nu}(A^\nu \star C)] \\
&+\frac{3}{8}ep^\lambda A^*_\lambda(A^*_\lambda \star C^*) \\
&-e(A^\lambda \star A^{\mu\nu})p_\lambda A^*_{\mu\nu} + 2e(A_\gamma \star A^{\gamma\nu})p^\eta A^*_{\eta\nu} - \frac{e}{2}[(A_\gamma \star A^{\gamma\nu})p)\nu C^* + (A^{\gamma *} \star A^*_{\gamma\nu})p^\nu C] \\
&+\frac{3}{8}e(A^\lambda \star C)p_\lambda C^* \\
&-\frac{i}{2}\Big\{p^\lambda A^{\mu\nu}(\partial_\lambda A^*_{\mu\nu}) - 2p_\gamma A^{\gamma\nu}(\partial^\eta A^*_{\eta\nu}) + \frac{1}{2}[p_\gamma A^{\gamma\nu}(\partial_\nu C^*) + p^\gamma A^*_{\gamma\nu}(\partial^\nu C)] - \frac{3}{8}p^\lambda C(\partial_\lambda C^*)\Big\} \\
&-\frac{i}{2}\Big\{(\partial^\lambda A^{\mu\nu})p_\lambda A_{\mu\nu} - 2(\partial_\gamma A^{\gamma\nu})p^\eta A^*_{\eta\nu} + \frac{1}{2}[(\partial_\gamma A^{\gamma\nu})p_\nu C^* + (\partial^\gamma A^*_{\gamma\nu})p^\nu C] - \frac{3}{8}(\partial^\lambda C)(\partial_\lambda C)\Big\} \\
&-\frac{i}{2}e[-(\partial^\lambda A^{\mu\nu})(A^*_\lambda \star A^*_{\mu\nu}) + 2(\partial_\gamma A^{\gamma\nu})(A^{\eta *} \star A_{\eta\nu})] \\
&-\frac{1}{2}\Big\{[(\partial_\gamma A^{\gamma\nu})(A^*_\nu \star C^*) + (\partial^\gamma A^*_{\gamma\nu})(A^\nu \star C)] + \frac{3}{8}(\partial^\lambda A^*_\lambda)(A^*_\lambda \star C^*)\Big\} \\
&-\frac{i}{2}e[-(A^\lambda \star A^{\mu\nu})(\partial_\lambda A^*_{\mu\nu}) + 2(A_{\gamma *} \star A^{\gamma\nu})(\partial^\eta A^*_{\eta\nu})] \\
&-\frac{1}{2}\Big\{[(A_\gamma \star A^{\gamma\nu})(\partial_\nu C^*) + (A^{\gamma *} \star A^*_{\gamma\nu})(\partial^\nu C)] + \frac{3}{8}(A^\lambda \star C)(\partial_\lambda C^*)\Big\} \\
&+e^2[(A^\lambda \star A^{\mu\nu})(A^*_\lambda \star A^*_{\mu\nu}) - 2(A_\gamma \star A^{\gamma\nu})(A^{\eta *} \star A^*_{\eta\nu})] \\
&+\frac{1}{2}e^2[(A_\gamma \star A^{\gamma\nu})(A^*_\nu \star C^*) + (A^{\gamma *} \star A^*_{\gamma\nu})(A^\nu \star C)] - \frac{3}{8}e^2(A^\lambda \star C)(A^*_\lambda \star C^*).
\end{aligned} \tag{5.34}
$$

As duas primeiras linhas da lagrangiana acima formam uma lagrangiana do tipo Fierz-Pauli para a interação de um campo de spin 1 com um campo de spin 2.

Dada a representação simplética para a lagrangiana de um campo de spin 2 interagindo com um campo eletromagnético, é possível desenvolver as equações dinâmicas do sistema direto no espaço de fase. E, embora o cálculo da forma mais explícita da lagrangiana seja demasiado tedioso, obtemos como benefício termos adicionais originados da descrição realizada no espaço de fase. Esses termos podem apresentar novos vínculos a serem considerados no estudo desse tipo de sistema.

Capítulo 6

Conclusões e Perspectivas

Fizemos uma revisão do formalismo de Wigner no espaço de fase detalhando as propriedades do produto estrela. Logo após, revisamos o formalismo da mecânica quântica simplética, onde detalhamos o procedimento de simetrias de Calibre na teoria. A partir daí, generalizamos a representação simplética de campos de spin inteiro e aplicamos, em especial, ao campo de spin 2.

A mecânica quântica no espaço de fase facilita correções de potenciais e ajuda a evidenciá-las nas análises experimentais. Para um campo de spin 2, foi definida a função de onda no espaço de fase, bem como a função de Wigner.

Feita a representação da lagrangiana para o campo livre, foi proposta a relação entre o campo de spin 2 e um campo auxiliar C. Uma vez feito isto, foi possível propor uma lagrangiana para a interação entre um campo eletromagnético e um campo de spin 2.

Em relação às perspectivas para futuros trabalhos, é interessante continuar estudando a representação do campo de spin 2 no espaço de fase e, então, realizar a termalização do campo. Uma outra possibilidade é estudar a relação entre a representação simplética do campo de spin 2 e teorias como a de Cartan-Einstein e o Teleparalelismo Equivalente à Relatividade Geral.

Referências Bibliográficas

1 HEAVISIDE, O. A gravitational and electromagnetic analogy. *The Electrician*, v. 31, n. Part I, p. 281–282, 1893. 1

2 EINSTEIN, A. Näherungsweise integration der feldgleichungen der gravitation. *Albert Einstein: Akademie-Vorträge: Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften 1914–1932*, Wiley Online Library, p. 99–108, 2005. 1

3 EINSTEIN, A. Uber gravitationswellen, sitzungsberichte der königlich preussischen akademie der wissenschaften, berlin,(1918). n. straumann. *General Relativity with Applications to Astrophysics (Springer-Verlag, Berlin 2004)*. 1

4 ABBOTT, B. et al. Ligo scientific collaboration and virgo collaboration (2016) directly comparing gw150914 with numerical solutions of einstein's equations for binary black hole coalescence. physical review d, 94 (6). issn 1550-2368, http://dx. doi. org/10.1103/physrevd. 94.064035. *PHYSICAL REVIEW D Phys Rev D*, American Physical Society, v. 94, p. 064035, 2016. 1

5 ABBOTT, B. P. et al. Gw170817: observation of gravitational waves from a binary neutron star inspiral. *Physical Review Letters*, APS, v. 119, n. 16, p. 161101, 2017. 1

6 WEINBERG, S. Gravitation and cosmology: principles and applications of the general theory of relativity. 1972. 1, 42, 44

7 WIGNER, E. Über das überschreiten von potentialschwellen bei chemischen reaktionen. *Zeitschrift für Physikalische Chemie*, De Gruyter Oldenbourg, v. 19, n. 1, p. 203–216, 1932. 1

8 WIGNER, E. On a quasiprobability distribution in quantum mechanics. *Phys. Rev*, v. 40, p. 749, 1932. 1, 5

9 WEYL, H. Quantenmechanik und gruppentheorie. *Zeitschrift für Physik*, Springer, v. 46, n. 1-2, p. 1–46, 1927. 1

10 WEINBUB, J.; FERRY, D. K. Recent advances in wigner function approaches. *Applied Physics Reviews*, AIP Publishing, v. 5, n. 4, p. 041104, 2018. 1

11 HILLERY, M. O. S. M. et al. Distribution functions in physics: fundamentals. *Physics reports*, Elsevier, v. 106, n. 3, p. 121–167, 1984. 2

12 MOYAL, J. E. Quantum mechanics as a statistical theory. In: CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. [S.l.], 1949. v. 45, n. 1, p. 99–124. 2, 21

13 CURTRIGHT, T.; FAIRLIE, D.; ZACHOS, C. Features of time-independent wigner functions. *Physical Review D*, APS, v. 58, n. 2, p. 025002, 1998. 2

14 OLIVEIRA, M. D. Mecânica quântica no espaço de fase, dissertação de mestrado, dissertação de mestrado. *Annals of Physics*, Elsevier, v. 312, n. 2, p. 492–510, 2002. 2

15 OLIVEIRA, M. et al. Symplectic quantum mechanics. *Annals of Physics*, Elsevier, v. 312, n. 2, p. 492–510, 2004. 2

16 AMORIM, R. G. G. d. Formulação de teorias de campos via estruturas simpléticas and o produto de weyl. 2006. 3, 5, 21, 38

17 AMORIM, R. G. G. d. Geometria nao-comutativa and teoria de campos simplética. 2009. 3, 5, 21, 29

18 MAXWELL, J. C. Viii. a dynamical theory of the electromagnetic field. *Philosophical transactions of the Royal Society of London*, The Royal Society London, n. 155, p. 459–512, 1865. 3

19 PAULI, W. Relativistic field theories of elementary particles. *Reviews of Modern Physics*, APS, v. 13, n. 3, p. 203, 1941. 3

20 YANG, C.-N.; MILLS, R. L. Conservation of isotopic spin and isotopic gauge invariance. *Physical review*, APS, v. 96, n. 1, p. 191, 1954. 3

21 FARIAS, H. D. Função de wigner, quasi-amplitudes de probabilidades and sistemas dissipativos. 2014. 5, 21, 29

22 FILHO, J. S. d. C. Teoria quântica no espaço de fase: modelo de hénon-heiles and simetrias de calibre. 5, 21, 29

23 BALLENTINE, L. E. *Quantum mechanics: a modern development*. [S.l.]: World Scientific Publishing Company, 1998. 5, 21

24 MARCHIOLLI, M. A. Quantum mechanics in phase space: I. the weyl-wigner formalism. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, SciELO Brasil, v. 24, n. 4, p. 421–436, 2002. 5, 21

25 WEZEMAN, R. *Weyl quantization and Wigner distributions on phase space*. Tese (Doutorado), Groningen, 2014. Disponível em: ⟨http://fse.studenttheses.ub.rug.nl/11920/⟩. 5, 21

26 COHEN, L. Positive and negative joint quantum distributions. In: *Frontiers of Nonequilibrium Statistical Physics*. [S.l.]: Springer, 1986. p. 97–117. 5

27 SCHLEICH, W. *Quantum Optics in Phase Space Wiley.* [S.l.]: Berlin, 2001. 10

28 DESSANO, H. et al. Wigner function and non-classicality for oscillator systems. *Brazilian Journal of Physics*, Springer, p. 1–11, 2019. 21

29 PAIVA, R. A. d. S. Mecânica quântica simplética e não-classicalidade. 2019. 21

30 AMORIM, R. et al. Realization of the noncommutative seiberg–witten gauge theory by fields in phase space. *International Journal of Modern Physics A*, World Scientific, v. 30, n. 22, p. 1550135, 2015. 29

31 PETRONILO, G. X. A.; ULHOA, S. C.; SANTANA, A. E. Symplectic field theory of the galilean covariant scalar and spinor representations. *arXiv preprint arXiv:1909.13737*, 2019. 29

32 PRETRONILO, G. X. A. Covariância galileana and representações de spin 1/2. 2019. 29

33 PETRONILO, G. et al. The landau problem and nonclassicality. *International Journal of Modern Physics A*, World Scientific, v. 35, n. 25, p. 2050148, 2020. 29

34 FIERZ, M.; PAULI, W. E. On relativistic wave equations for particles of arbitrary spin in an electromagnetic field. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, The Royal Society London, v. 173, n. 953, p. 211–232, 1939. 42, 45, 46

35 BERESTETSKII, V. B.; LIFSHITZ, E. M.; PITAEVSKII, L. P. *Quantum Electrodynamics: Volume 4*. [S.l.]: Butterworth-Heinemann, 1982. v. 4. 42, 43

36 PROCA, A. Sur la théorie ondulatoire des électrons positifs et négatifs. *Journal de Physique et le Radium*, Société Française de Physique, v. 7, n. 8, p. 347–353, 1936. 42

37 AMORIM, R. G. et al. Non-commutative geometry and symplectic field theory. *Physics Letters A*, Elsevier, v. 361, n. 6, p. 464–471, 2007. 42