Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Teoremas do Gancho e da Faixa para Superálgebras com Superinvolução ou Involução Graduada

por

Renata Alves da Silva

Brasília

2021

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Teoremas do Gancho e da Faixa para Superálgebras com Superinvolução ou Involução Graduada

por

Renata Alves da Silva

sob orientação da

Profa. Dra. Irina Sviridova

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, PPGMat-UnB, como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Doutora em Matemática.

Brasília

2021

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Teoremas do Gancho e da Faixa para Superálgebras com Superinvolução ou Involução Graduada

por

Renata Alves da Silva

Tese apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos para obtenção do grau de

DOUTORA EM MATEMÁTICA

Brasília, 08 de julho de 2021.

Comissão Examinadora:

Irina Sviridova

Prof. Dr. Irina Sviridova - MAT/UnB (Orientadora)

Prof. Dr. Alexei Krassilnikov – MAT/UnB (Membro)

Ana Cristina Vieira

Profa. Dra. Ana Cristina Vieira – UFMG (Membro)

Dimas José Gonçalves

Prof. Dr. Dimas José Gonçalves – UFSCar (Membro)

Ficha catalográfica elaborada automaticamente,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

At Alves da Silva, Renata
Teoremas do Gancho e da Faixa para Superálgebras com Superinvolução ou Involução Graduada / Renata Alves da Silva; orientador Irina Sviridova. -- Brasília, 2021.
126 p.

Tese (Doutorado - Doutorado em Matemática) -- Universidade de Brasília, 2021.

1. superálgebra com superinvolução. 2. involução graduada. 3. identidades polinomiais. 4. álgebra relativamente livre. 5. S_n-representações. I. Sviridova, Irina, orient. II. Título.

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus, pois sem ele nada disso seria possível. Obrigada por todo amor e cuidado comigo na minha vida, principalmente nessa fase do doutorado. Senti o seu cuidado em todos os momentos, desde o início do doutorado com a minha aprovação na seleção à minha chegada e permanência em Brasília, aos amigos que conquistei nessa fase, à reta final com a elaboração do trabalho de tese. O senhor me deu ânimo e força para seguir adiante e cuidou de cada detalhe para que tudo viesse a dar certo. Sou muito grata! Tudo é por ti e para ti!

Aos meus amados pais, seu Nivaldo e dona Natália, que desde cedo me incentivaram a estudar e a correr atrás dos meus objetivos. Mesmo sem estudo e sem condições financeiras, vocês não mediram esforços, na medida do que era possível, para que eu e meus irmãos pudéssemos estudar e nos tornar pessoas bem-sucedidas na vida. Para uma dona de casa e um trabalhador rural, ter um filho estudado era um dos seus maiores sonhos. E o sonho se concretizou. Sou imensamente grata aos meus pais, ao apoio e incentivo dados por eles. Essa conquista também é de vocês e para vocês!

Aos meus queridos irmãos, Rodrigo e Tailinny, à minha cunhada, Thaís, pelo amor, apoio e companheirismo. Em especial, agradeço à minha irmã Tailinny, por ter sido a minha primeira professora. Aos cinco anos de idade, ela me ensinou a ler e a escrever. E foi graças a ela que "pulei de ano" quando iniciei meus estudos no antigo pré-escolar. Tive a aceleração escolar para a antiga primeira série e foi, através disso, que consegui adiantar os meus estudos. Obrigada, maninha!

Aos meus sobrinhos lindos e amados, João Victor, João Pedro, Miguel, Théo e a mais nova sobrinha, que daqui a alguns meses, estará conosco, nossa querida Nathália (a nossa Nati). Obrigada por deixarem a vida da titia mais feliz e divertida. Amo além do infinito essa galerinha!

Ao meu esposo lindo, José Carlos. Obrigada por ser tão presente na minha vida, por não medir esforços em me apoiar, em me ajudar, em me acompanhar em absolutamente tudo, em minhas decisões, em minhas “loucuras”, em não me julgar. Sei que sou intensa em tudo e não ia ser diferente nessa fase do doutorado. Você aguentou firme junto comigo as minhas incertezas, os meus desesperos, as minhas angústias, as minhas alegrias, as minhas tristezas, os meus estresses às vésperas dos exames de qualificação e durante a elaboração da tese. Não me canso de agradecer a Deus por ter colocado você na minha vida. Tinha que ser você. Outro já teria desistido (rsrs). Brincadeiras à parte, meu amor, obrigada de coração por tudo, por ter vivido intensamente comigo essa fase do doutorado, por viver intensamente o nosso relacionamento, o nosso amor. Te amo demais da conta. Essa conquista é sua também! Essa conquista é nossa! Meu *doctored*!

Aos meus padrinhos, Orlando e Cleide, que sempre me apoiaram e acreditaram que eu era capaz. Sou grata por todas as palavras de incentivo durante essa caminhada.

Agradeço aos meus tios e tias, primos e primas, pelo carinho e apoio. Em especial, à minha prima-irmã Janaína, que me acolheu em Brasília com todo amor e carinho. Serei eternamente grata pela sua amizade! Um agradecimento especial também à minha tia Josa, minha tia de coração, que sempre acreditou em mim, que rezou diversas vezes para que Deus abençoasse cada prova, cada exame de qualificação, a elaboração da tese. Obrigada, tia, pelas orações e carinho! Deus ouviu suas preces. Agradeço também às minhas tias Zilca e tia Lourdes pelas orações, pelo carinho e incentivo de sempre. Vocês foram essenciais para essa conquista.

Aos grandes amigos de doutorado, agradeço por tornarem mais leve esse período. Obrigada pelos momentos descontraídos no café, pelos momentos de estudos, pelas discussões produtivas, pelas conversas regadas a muitas risadas. Em especial, aos amigos Sara, Karla, Túlio, Matheus, Nathália, John, Marcos, Alex, Camila, Genildo, Hércules, Wállef, Carlos, Michel, Gustavo, Ricardinho e Fábio.

À minha mana, Sara Raissa, obrigada pela sua amizade, por todo apoio, pelas orações, por todos momentos únicos compartilhados. Você foi a primeira amizade que fiz no doutorado. A partir daí, sabia que não estava sozinha. Construímos uma amizade sólida, cheia de muito carinho e cumplicidade. Sabemos que podemos contar uma com a outra. Serei eternamente grata por tudo!

À minha querida amiga Karla, obrigada por ter sido uma grande parceira nessa trajetória. A sua amizade e o seu apoio fizeram o meu doutorado se tornar mais leve. Obrigada pelas conversas, pelos conselhos, pelos momentos do cafezinho, pelas risadas, pelas saidinhas animadas. Em meio à correria e a tantos compromissos, a gente também soube se divertir. Ter você comigo nessa fase foi muito importante. Sou grata pela sua amizade!

Ao meu querido e parceiro amigo Túlio, obrigada por dividir comigo tantos momentos agradáveis. Obrigada pelas conversas, pelos passeios, pelas viagens, pelo apoio. Foi um privilégio ter tido sua companhia e sua amizade durante esses quatro anos de doutorado. Você é um cara muito especial!

Agradeço à minha orientadora, Irina Sviridova, pelos momentos de aprendizado, amizade e cuidado. Obrigada pela oportunidade em fazer doutorado na UnB sob sua orientação. Era um desejo pessoal, um sonho, que tinha desde o mestrado. Obrigada pela paciência e pela compreensão em responder as minhas inúmeras dúvidas. Saiba que tenho muito carinho e admiração pela senhora. Serei eternamente grata por tudo que aprendi contigo!

Agradeço aos professores Alexei, Ana Cristina, Dimas e Victor, por terem aceitado avaliar este trabalho e pelas preciosas sugestões e correções que tanto o enriqueceram.

Aos professores do departamento de Matemática da UnB. Em especial, aos meus queridos professores Martino, Cátia e Victor Petrogradskiy.

Aos funcionários das secretarias de graduação e de pós-graduação da Matemática. Em especial, às funcionárias Marta Adriana, Marta Araújo, Vivian Claudia e Ingrid Andrade pela presteza e competência em realizar o seu trabalho.

Ao colegiado de Matemática da UFT, campus de Araguaína. Obrigada pelo apoio e incentivo de cada um!

A todos e a todas que contribuíram direta ou indiretamente para a conquista de mais esse sonho, meu muito obrigada!

Dedicatória

Aos meus pais,

Nivaldo e Natália;

Aos meus irmãos,

Tailinny e Rodrigo;

Ao meu amado esposo,

José Carlos.

"Se a educação sozinha não transforma a sociedade,
sem ela tampouco a sociedade muda." Paulo Freire.

Resumo

Seja $A = A_0 \oplus A_1$ uma superálgebra com uma superinvolução ou uma involução graduada sobre um corpo F de característica zero.

Dois importantes resultados da teoria de identidades polinomiais ordinárias são os célebres Teoremas do Gancho e da Faixa, que foram provados por Amitsur e Regev em [48] e por Regev em [49], respectivamente. Existem também versões desses teoremas para o caso de identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas e identidades com involução que foram provadas por Regev e Giambruno em [19]. Esses resultados estão relacionados ao uso da teoria de representações de grupos para compreender o comportamento de identidades e, além disso, eles possuem diversas aplicações na PI-teoria e em outras áreas da Matemática.

Para uma superálgebra com uma superinvolução ou uma involução graduada sobre um corpo F de característica zero, o ideal de superidentidades com superinvolução ou involução graduada é completamente definido por identidades multilineares que têm uma estrutura de $S_{\langle n \rangle}$-módulo, onde $\langle n \rangle = (n_1, n_2, n_3, n_4)$, $n = n_1 + n_2 + n_3 + n_4$, e cada n_i corresponde à quantidade de indeterminadas homogêneas simétricas ou antissimétricas. O comportamento dessas superidentidades com superinvolução ou involução graduada pode ser descrito pelo correspondente cocaracter $\chi_{\langle n \rangle}(A) = \sum_{\langle \lambda \rangle \vdash \langle n \rangle} m_{\langle \lambda \rangle} \chi_{\langle \lambda \rangle}$, onde $\langle \lambda \rangle = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ é uma multipartição de $\langle n \rangle$ e $\lambda_i \vdash n_i$ é uma partição de n_i.

O objetivo principal desta tese é apresentar uma versão dos Teoremas do Gancho e da Faixa para o caso de superidentidades com superinvolução ou involução graduada. Como consequência do Teorema do Gancho, também apresentaremos uma versão do Teorema de Amitsur.

Palavras-chave: Superálgebra com superinvolução, involução graduada, identidades polinomiais, variedades, álgebra relativamente livre, S_n-representações.

Abstract

Let $A = A_0 \oplus A_1$ be a superalgebra with a superinvolution or a graded involution over a field F of characteristic zero.

Two important results of the theory of polynomial identities are the celebrated Hook and Strip Theorems, which were proven by Amitsur and Regev in [48] and by Regev in [49], respectively. There exist also versions of these theorems for the case of $\mathbb{Z}_2$-graded identities and identities with involution that were proved by Regev and Giambruno in [19]. These results are related with the using of theory of group representations for the understanding of a behavior of identities and, moreover, they have various applications in PI-theory and in other areas of Mathematics.

For a superalgebra with a superinvolution or a graded involution over a field F of characteristic zero, the ideal of superidentities with superinvolution or graded involution is completely defined by multilinear identities that have a structure of $S_{\langle n \rangle}$-modulo, where $\langle n \rangle = (n_1, n_2, n_3, n_4)$, $n = n_1 + n_2 + n_3 + n_4$, and each n_i corresponds to the quantity of homogeneous symmetric or antisymmetric variables. The behavior of these superidentities with superinvolution or graded involution may be described by the corresponding cocharacter $\chi_{\langle n \rangle}(A) = \sum_{\langle \lambda \rangle \vdash \langle n \rangle} m_{\langle \lambda \rangle} \chi_{\langle \lambda \rangle}$, where $\langle \lambda \rangle = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ is a multipartition of $\langle n \rangle$ and $\lambda_i \vdash n_i$ is a partition of n_i.

The main goal of this thesis is to present a version of the Hook and Strip Theorems for the case of superidentities with superinvolution or graded involution. As a consequence of the Hook Theorem, we also present a version of the Amitsur Theorem.
Keywords: Superalgebra with superinvolution, graded involution, polynomial identities, varieties, relatively free algebra, S_n-representations.

Sumário

Introduction

In this thesis work, the main objects of study are the associative superalgebras with a superinvolution $\#$ over a field F of characteristic zero and their polynomial identities. We say that A is a superalgebra if A is a $\mathbb{Z}_2$-graded associative algebra. In this case, A may be decomposed into a direct sum of two subspaces $A = A_0 \oplus A_1$ such that $A_iA_j \subseteq A_{i+j}$, with $i, j = 0, 1$, satisfying $A_0A_0+A_1A_1 \subseteq A_0$ and $A_0A_1+A_1A_0 \subseteq A_1$. The subspaces A_0 and A_1 are called homogeneous components of even and odd degree, respectively, and their homogeneous element of elements of degree 0 and 1, or even and odd elements, respectively.

A superinvolution in a superalgebra A is a F-graded linear map $\# : A \to A$, that is, $A_0^{\#} \subseteq A_0$ and $A_1^{\#} \subseteq A_1$, such that $(a^{\#})^{\#} = a$, for all $a \in A$, and $(ab)^{\#} = (-1)^{deg(a)deg(b)}b^{\#}a^{\#}$, for all $a, b \in A_0 \cup A_1$, where $deg(c)$ denotes the homogeneous degree of $c \in A_0 \cup A_1$, that is, $deg(c) = 0$ if $c \in A_0$ and $deg(c) = 1$ if $c \in A_1$. When A is equipped with a superinvolution $\#$, we say that A is a superalgebra with a superinvolution, or simply that A is a $\#$-superalgebra. Since $charF = 0$, we have the following decomposition:

$$A = A_0^+ \oplus A_0^- \oplus A_1^+ \oplus A_1^-, \tag{1}$$

where $A_i^+ = \{a \in A_i \mid a^{\#} = a\}$ and $A_i^- = \{a \in A_i \mid a^{\#} = -a\}$, for $i = 0, 1$, are called sets of homogeneous (even and odd) symmetric and skew elements of A, respectively. As an example of a superalgebra with a superinvolution $\#$, let the non-unitary Grassmann algebra (also called exterior algebra) of infinite dimension, over a field F of characteristic zero, given by $E = \langle e_1, e_2, \cdots \mid e_ie_j = -e_je_i,\ \forall i, j = 1, 2, \cdots \rangle_F$. Consider the canonical $\mathbb{Z}_2$-grading $E = E_0 \oplus E_1$, where $E_0 = \langle e_{i_1} \cdots e_{i_{2k}} \rangle_F$ and $E_1 = \langle e_{i_1} \cdots e_{i_{2k+1}} \rangle_F$. The graded F-linear map $\# : E \to E$ defined by $e_i^{\#} = -e_i$ is a superinvolution on E. Thus, E is a $\#$-superalgebra.

Next, we will provide a historical overview of the PI-theory, highlighting the main results for the elaboration of this work.

Let $F\langle X\rangle$ be the associative, non-commutative and non-unitary free algebra of polynomials generated by an infinite countable set $X = \{x_1, x_2, \cdots\}$. Given an algebra A, we say that a polynomial $f(x_1, \cdots, x_n) \in F\langle X\rangle$ is a polynomial identity of A if $f(a_1, \cdots, a_n) = 0$ for all $a_1, \cdots, a_n \in A$. We call A PI-algebra if A satisfies a non-trivial polynomial identity. Nilpotent algebras, finite dimensional algebras (see Theorem 1.5.8 in [24]) and commutative algebras are some examples of PI-algebras.

The PI-theory reached notoriety in 1948 after Kaplansky's work [34], where the author classifies the primitive PI-algebras. In 1950, the area gained even more strength with the work of Amitsur and Levitsky [2], where the authors showed the Standard polynomial of degree $2k$, given by $St_{2k}(x_1, \cdots, x_{2k}) = \sum_{\sigma \in S_{2k}} (-1)^{\sigma} x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \cdots x_{\sigma(2k)}$, is a polynomial identity, of the smallest possible degree (minimum degree), for the algebra of matrices of order $k \times k$. But it was only in the 1960s and 1970s that most of the framework for this theory was developed. For more details, see literatures [25, 31, 46, 51].

We denote by $Id(A)$ the set of ordinary polynomial identities of A. The set $Id(A)$ is a T-ideal, that is, an ideal of $F\langle X\rangle$ invariant under all endomorphisms of $F\langle X\rangle$. Thus, to describe the identities of A, it is enough to find the generators of $Id(A)$ as T-ideal. In 1950, Specht [53] conjectured that, over fields of characteristic zero, the T-ideal of identities for every associative algebra is finitely generated as T-ideal. But it was only in 1987 that Kemer, in a series of works (see [37, 38]), gave a positive answer to Specht's conjecture. Despite the proven conjecture, Kemer has not shown how to determine this base of identities. Thus, describing generators of the T-ideal of identities for an algebra remains one of the main problems in the PI-theory. There are some algebras whose generators of the T-ideal of identities have already been described (see [13, 39, 40, 47]) and others that have this as an open problem, such as the cases of the algebra $M_k(F)$ for $k \geq 3$ and the algebra $M_2(E)$, where E is the Grassmann algebra or exterior algebra.

The $\mathbb{Z}_2$-graded polynomial identities (also called superidentities) were an essential tool for the proof of the Specht conjecture, which naturally gave rise to interest in the PI-theory of studying other types of identities with additional structures, such as identities graded by a group G ($Id^{gr}(A)$), in particular, $\mathbb{Z}_2$-graded identities, identities with involution $*$ ($Id^*(A)$) and superidentities with superinvolution $\#$ ($Id_2^{\#}(A)$), because they generalize, in a certain sense, the ordinary identities of A. So, as in the ordinary case, we can define associative free algebra with G-grading ($F\langle X|G\rangle$), where G is a finite group, associative free algebra with involution $*$ ($F\langle X|*\rangle$), free superalgebra with superinvolution $\#$ ($F\langle X|\mathbb{Z}_2, \#\rangle$).

Since the description of a base of identities of $Id(A)$ is not always an easy task, in order to overcome this difficulty, in 1972, Regev [48] introduced the sequence of codimensions (ordinary case), which measures the growth of T-ideal of identities for A. The n-th codimension of A, $c_n(A)$, is defined as the dimension of the quotient space $P_n(A) = \dfrac{P_n}{P_n \cap Id(A)}$, where P_n is the space of the multilinear polynomials of degree n. The importance of considering the spaces P_n in the PI-theory lies in the fact that, over a field of characteristic zero, every polynomial identity for A is equivalent to a finite set of multilinear polynomials. Still in [48], Regev showed that the sequence of codimensions of a PI-algebra A, $(c_n(A))_{n\geq 1}$, is exponentially bounded (while $\dim P_n = n!$).

Still in order to describe identities for a given algebra, there is an axis within the PI-algebra that uses the theory of representations of the symmetric group S_n via Young tables. This theory has established itself as a powerful tool for the study of identities. The reader can consult the references [10], [33] and [54] for the general theory of G-representations and, for the specific case $G = S_n$, the book [32].

Since T-ideals are invariant under endomorphisms of $F\langle X\rangle$, the permutation action of variables of a multilinear polynomial gives us the structure of an S_n-module of the symmetric group S_n, $n \geq 1$, in the space of the multilinear polynomials P_n and in the space $P_n \cap Id(A)$ of multilinear identities of a PI-algebra A and therefore the already known theory of S_n-representations, over a field of characteristic zero, may be applied to the study of PI-algebras. Denoting by $\chi_n(A)$ the n-th cocharacter of A associated with the S_n-module $P_n(A) = \dfrac{P_n}{P_n \cap Id(A)}$ ($\chi_n(A)$ is character of $P_n(A)$), it is possible to give restrictions on the form of Young diagrams corresponding to irreducible S_n-characters that appear in the decomposition of $\chi_n(A)$, that is, the ones that have non-zero multiplicity, and show that these irreducible S_n-characters lies in an infinite hook $H(d,l)$, $d,l > 0$, where $H(d,l)$ is the union of all Young diagrams whose lines below the d-th line are less than or equal to l in length. It is interesting to study the irreducible S_n-modules of P_n whose multiplicities are zero (those off the hook $H(d,l)$ satisfy this), for they are formed by identities of A. The famous Hook Theorem (Theorem 2.53), proved in 1982 by Amitsur and Regev in [3] for the case of algebras that satisfy ordinary identities, shows exactly this: it describes sets of identities from irreducible S_n-modules that do not appear in the n-th cocharacter decomposition and whose corresponding Young diagrams are off the hook.

Years earlier, in 1979, Regev showed in [49] that if A is an algebra that satisfies the Capelli polynomial identity of rank k, then the cocharacters sequence of A has height bounded by $k-1$ (see Theorem 2.55). In the theory of PI-algebras, this result is known as the Strip Theorem.

Still in this scenario and in view of the growing interest in studying polynomial identities with additional structures, in 1985, Giambruno and Regev proved in [19] the version of the Hook Theorem, considering A a superalgebra or an algebra with involution $*$. The authors used the theory of representation of the group $\hat{\mathbb{Z}}_2 = \mathbb{Z}_2 \wr S_n$, wreath product of the group $\mathbb{Z}_2$ by the symmetric group S_n, applied to the study of $\hat{\mathbb{Z}}_2$-identities (superidentities) or $*$-identities (identities with involution $*$) of A, that is, identities with $\hat{\mathbb{Z}}_2$ action, and proved that the corresponding n-th cocharacter

$$\chi_n(A|\mathbb{Z}_2) = \sum_{|\lambda|+|\mu|=n} m_{\lambda,\mu}\chi_{\lambda,\mu} \quad \text{(for superidentities)}$$

or

$$\chi_n(A|*) = \sum_{|\lambda|+|\mu|=n} m_{\lambda,\mu}\chi_{\lambda,\mu} \quad \text{(for $*$-identities)}$$

is contained in a double hook $(H(d_1,l_1), H(d_2,l_2))$, with d_1, l_1, d_2, l_2 positive integers.

Given the above, our primary inspiration to develop this thesis work came: is there a version of the Hook Theorem for superalgebras with superinvolution? Furthermore, is it possible to extend the Strip Theorem to this context of ours? In this work, we will give a positive answer to these questions, presenting the two main results of this research, which are: the Hook Theorem (Theorem 4.4) and the Strip Theorem

(Theorem 4.12) for the case of superalgebras with a superinvolution #. Moreover, as a consequence of the Hook Theorem, we were also able to prove a version of Amitsur's Theorem (Theorem 4.14).

This thesis contains four more chapters, arranged as follows.

In Chapter 2, we introduce the theory of S_n-representations via Young tableau, highlighting the action of the symmetric group S_n in the space of the multilinear polynomials P_n. In addition, we recall some results of the PI-theory and highlight the concepts of codimension and cocharacter and their relationship in the description of identities. We also present basic results that we will use throughout the work. As general references of PI-theory, we cite [12, 24].

In Chapter 3, we present the theory of G-graded algebras and their respective G-graded identities, emphasizing the superalgebras A ($\mathbb{Z}_2$-graded algebras).

We also define a superinvolution # in a superalgebra and present the definition of our main object of study which are superidentities with superinvolution, exposing the most important facts about them. In view of the decomposition given in (1), we study superidentities with superinvolution from the theory of representation of the direct product of symmetric groups $S_{\langle n\rangle} := S_{n_1}\times S_{n_2}\times S_{n_3}\times S_{n_4}$, where $n = n_1+n_2+n_3+n_4$, and the action of $S_{\langle n\rangle}$ in the space $P_{\langle n\rangle}$ of the multilinear polynomials, where the first variables n_1 (denoted by $Y_0 = \{y_{0,1}, \cdots, y_{0,n_1}\}$) are even symmetric, the next n_2 (denoted by $Z_0 = \{z_{0,1}, \cdots, z_{0,n_2}\}$) are even skew, the next n_3 (denoted by $Y_1 = \{y_{1,1}, \cdots, y_{1,n_3}\}$) are odd symmetric and the next n_4 (denoted by $Z_1 = \{z_{1,1}, \cdots, z_{1,n_4}\}$) are odd skew. To extend the results from ordinary identities to superidentities with superinvolution, we study the irreducible $S_{\langle n\rangle}$-characters of A, the n-th graded #-codimension $(c_{\langle n\rangle}(A))_{n\geq 1}$ and the n-th graded #-cocharacter of A, $\chi_{\langle n\rangle}(A)$. In 2016, Giambruno, Ioppolo and La Mattina showed in [14] that the sequence of #-codimensions of a PI-algebra A, $(c_{\langle n\rangle}(A))_{n\geq 1}$, is also exponentially bounded.

In Chapter 4, we present one of the main contributions of this thesis, which is a proof of the Hook Theorem for the case of superalgebras with superinvolution. We emphasize that, in all our results, we consider PI-algebras, that is, algebras that satisfy an ordinary non-trivial polynomial identity.

Theorem A: [Theorem 4.4] *(Hook Theorem for #-superalgebras) Let F be a field of* *characteristic zero and A a superalgebra over F with a superinvolution $\#$. If A is a PI-algebra, then there are non-negative integers $d_i, l_i \geq 1$, with $i = 1, 2, 3, 4$, such that the n-th graded $\#$-character, $\chi_{\langle n\rangle}(A)$, is contained in a quadruple hook $H_4(n) = (H(d_1, l_1), H(d_2, l_2), H(d_3, l_3), H(d_4, l_4))$, that is,*

$$\chi_{\langle n\rangle}(A) = \sum_{\substack{\langle\lambda\rangle\vdash\langle n\rangle \\ \langle\lambda\rangle\in H_4(n)}} m_{\langle\lambda\rangle}\chi_{\langle\lambda\rangle}.$$

Next, we prove the Strip Theorem for PI-superalgebras with superinvolution that satisfy a Capelli superidentity of rank $\langle k\rangle$, where $k = k_1 + k_2 + k_3 + k_4$.

Theorem B: [Theorem 4.12] *(Strip Theorem for $\#$-superalgebras) Let F be a field of characteristic zero, A a superalgebra over F with a superinvolution $\#$ and $\chi_{\langle n\rangle}(A) = \sum_{\langle\lambda\rangle\vdash\langle n\rangle} m_{\langle\lambda\rangle}\chi_{\langle\lambda\rangle}$ its n-th $\#$-cocharacter. If A is a PI-algebra, then A satisfies $Cap^{\#}_{\langle k\rangle}$, $k = k_1 + k_2 + k_3 + k_4$, the Capelli $\#$-superidentity of rank $\langle k\rangle$, if, and only if, $m_{\langle\lambda\rangle} = 0$ whenever $h(\langle\lambda\rangle) \geq \langle k\rangle$, that is, for the height $h_i = h(\lambda(i))$ of the components $\lambda(i)$ of the multipartition $\langle\lambda\rangle = (\lambda(1), \lambda(2), \lambda(3), \lambda(4))$, we have that $h_i > k_i$ for some $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.*

We conclude the chapter with a consequence of Theorem A, demonstrating a version of Amitsur's Theorem for $\#$-superalgebras, which guarantees that any PI-superalgebra with superinvolution satisfies an identity that is a product of powers of the Standard polynomial.

Theorem C: [Theorem 4.14] *(Amitsur's Theorem for $\#$-superalgebras) Let F be a field of characteristic zero and A a superalgebra over F with a superinvolution. If A is a PI-algebra, there are integers k_i, m_i, $i = 1, 2, 3, 4$, such that A satisfies the identity*

$$St_{k_1}^{m_1}(y_{0,1}, \cdots, y_{0,k_1})\cdot St_{k_2}^{m_2}(z_{0,1}, \cdots, z_{0,k_2})\cdot St_{k_3}^{m_3}(y_{1,1}, \cdots, y_{1,k_3})\cdot St_{k_4}^{m_4}(z_{1,1}, \cdots, z_{1,k_4}) = 0.$$

The importance of our results lies in several parts within the theory of PI-algebras, and we will highlight some of them now.

One of the main applications of the Hook Theorem is the well-known Kemer's Theorem which guarantees that any PI-algebra, over a field of characteristic zero, has the same identities as the Grassmann envelope $E(A)$ of a superalgebra A of finite dimension. The relevance of this result is given by responding positively to Specht's conjecture, proving that any T-ideal of identities of a PI-algebra is finitely generated. In 2016, Aljadev, Giambruno and Karasik showed in [1] that Kemer's Theorem is valid for algebra with involution $*$ or superalgebra.

Another application of the Hook and Strip Theorems is to study the behavior of the co-length sequence of a non-trivial variety. Berele, in [6], showed that if an algebra A satisfies a Capelli identity, then the co-length sequence of A is polynomially bounded. Then Berele and Regev, in [7], proved that this result is valid not only for algebras that satisfy a Capelli identity, but also for any PI-algebra. Years later, Giambruno and Zaicev, in [24], proved this same result in a different way, using as their main tool the Hook Theorem and Kemer's Theorem, mentioned above, that is, the authors demonstrated that, given a non-trivial variety $\mathcal{V}$, the co-length sequence $(l_n(\mathcal{V}))_{n\geq 1}$ is polynomially bounded, that is, there are constants $C, k > 0$ such that

$$l_n(\mathcal{V}) := \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda \leq Cn^k,$$

Where

$$\chi_n(\mathcal{V}) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda \chi_\lambda$$

is the n-th cocharacter of $\mathcal{V}$. This result is entirely related to the Hook Theorem and, in certain cases, they are equivalent, as shown by Berele in [5] for algebras with Hopf algebra action and for algebras with involution $*$ or superalgebras.

In recent years, many authors have extensively studied the asymptotic behavior of the co-length sequence for different algebras, in order to obtain a characterization of certain varieties. Mishchenko, Regev and Zaicev considered the ordinary case in the work [42], Cirrito and Giambruno studied the case of graded algebras in [9], Vieira characterized finitely generated algebras with involution in the article [56] and, recently, Ioppolo and Martino considered the case of superalgebras with superinvolution in [29]. There are several other works in this direction, among which we cite [26, 41, 45].

We also highlight, as an application of our main results (Hook Theorem and Strip Theorem), the study of the PI-exponent of a PI-algebra A over a field of characteristic zero, which is defined as the number

$$\exp(A) := \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(A)}$$

when the limit exists, where $(c_n(A))_{n\geq 1}$ is the sequence of codimensions of A. This number makes it possible to measure, in a certain sense, the growth of a non-trivial variety and, in addition, to characterize varieties. In the 1980s, Amitsur conjectured that for any PI-algebra A over a field of characteristic zero, the PI-exponent of A exists and is a non-negative integer. Giambruno and Zaicev, in [21, 22], gave a positive answer to this conjecture. However, when the PI-algebra is non-associative, this conjecture is not valid in general. In [20, 57], the authors showed that the PI-exponent exists for finite dimensional Lie and Jordan algebras, while in [23] the authors proved that such a number exists for finite dimensional simple algebras (in particular, for finite dimensional Lie superalgebras). Repovs and Zaicev, in [50], constructed a family of non-associative algebras whose PI-exponent does not exist.

Also in this scenario, Giambruno, Polcino Milies and Valenti, in the work [15], proved that, for any PI-algebra A with involution $*$, the $exp^*(A)$ exists and is an integer. Ioppolo, in turn, in the article [27], studied the exponential growth of finitely generated superalgebras with superinvolution $\#$, showing that $exp^{\#}(A)$ also exists and is an integer.

Although Ioppolo in [27] has made an in-depth study of the exponent of a superalgebra with superinvolution, as well as a characterization of these algebras, he considered only those that are finitely generated. This is probably due to the fact that, for the other structures in algebras mentioned above, the key step to guarantee the existence of their respective exponent is the celebrated Kemer's Theorem. We believe that, in order to generalize Ioppolo's results to any superalgebras with superinvolution, a version of Kemer's Theorem on Grassmann envelopes for superalgebras with superinvolution must be proved.

After these considerations, it is evident the importance of our results to generalize several others open on PI-superalgebras with superinvolution over a field of characteristic zero, which use the Hook and Strip Theorems as their main tool in the proof.

We end the thesis with Chapter 5. It arose shortly after we realized that the arguments employed in the proofs of Theorems A, B and C could be applied equally to the case of superalgebras with a graded involution. The initial idea of demonstrating these results for this class of superalgebras owes to Professor Ana Cristina Vieira (UFMG), who asked us after my lecture at the *XII Summer Workshop in Mathematics*, UnB, Brasilia, if Theorem A was valid for superalgebras with a graded involution. Here, we would like to register our thanks to Professor Ana, not only for the question that generated results, but also for submitting articles that provided support for us to develop some examples contained here.

In short, Chapter 5 brings the following. Let $A = A_0 \oplus A_1$ be a superalgebra over a field F with characteristic zero. A graded involution on A is a F-linear map $* : A \to A$ such that $(c^*)^* = c$ for all $c \in A$, $(ab)^* = b^* a^*$ for all elements $a, b \in A$ and $A_0^* \subseteq A_0$ and $A_1^* \subseteq A_1$. In this case, we call A $*$-superalgebra. We have again that since $charF \neq 2$, then

$$A = A_0^+ \oplus A_0^- \oplus A_1^+ \oplus A_1^-,$$

where $A_i^+ = \{a \in A_i \mid a^* = a\}$ and $A_i^- = \{a \in A_i \mid a^* = -a\}$, for $i = 0, 1$, are the symmetric and skew homogeneous components of A, respectively. Here again, in view of this decomposition of the superalgebra A, we study superidentities with graded involution from the theory of representation of the direct product of symmetric groups $S_{\langle n \rangle} := S_{n_1} \times S_{n_2} \times S_{n_3} \times S_{n_4}$, where $n = n_1 + n_2 + n_3 + n_4$, and the action of $S_{\langle n \rangle}$ in the space $P_{\langle n \rangle}$ of the multilinear polynomials, where the first variables n_1 (denoted by $Y_0 = \{y_{0,1}, \cdots, y_{0,n_1}\}$) are even symmetric, the next n_2 (denoted by $Z_0 = \{z_{0,1}, \cdots, z_{0,n_2}\}$) are even skew, the next n_3 (denoted by $Y_1 = \{y_{1,1}, \cdots, y_{1,n_3}\}$) are odd symmetric and the next n_4 (denoted by $Z_1 = \{z_{1,1}, \cdots, z_{1,n_4}\}$) are odd skew.

The theorems in this chapter follow.

Theorem D: [Theorem 5.9] *(Hook Theorem for $*$-superalgebras) Let F be a field of characteristic zero and A a superalgebra over F with a graded involution $*$. If A is a PI-algebra, then there are integers $d_i, l_i \geq 1$, with $i = 1, 2, 3, 4$, such that the n-th $*$-cocharacter of the $*$-graded identities, $\chi_{\langle n \rangle}(A)$, is contained in a quadruple hook*

$H_4(n) = (H(d_1, l_1), H(d_2, l_2), H(d_3, l_3), H(d_4, l_4))$, *that is,*

$$\chi_{\langle n\rangle}(A) = \sum_{\substack{\langle\lambda\rangle\vdash\langle n\rangle \\ \langle\lambda\rangle\in H_4(n)}} m_{\langle\lambda\rangle}\chi_{\langle\lambda\rangle}.$$

Theorem E: [Theorem 5.10] *(Amitsur's Theorem for $*$-superalgebras) Let F be a field of characteristic zero and A a superalgebra over F with a graded involution. If A is a PI-algebra, there are integers k_i, m_i, $i = 1, 2, 3, 4$, such that A satisfies the identity*

$$St_{k_1}^{m_1}(y_{0,1}, \cdots, y_{0,k_1}) \cdot St_{k_2}^{m_2}(z_{0,1}, \cdots, z_{0,k_2}) \cdot St_{k_3}^{m_3}(y_{1,1}, \cdots, y_{1,k_3}) \cdot St_{k_4}^{m_4}(z_{1,1}, \cdots, z_{1,k_4}) = 0.$$

Theorem F: [Theorem 5.13] *(Strip Theorem for $*$-superalgebras) Let F be a field of characteristic zero, A a superalgebra over F with a graded involution $*$ and $\chi_{\langle n\rangle}(A) = \sum_{\langle\lambda\rangle\vdash\langle n\rangle} m_{\langle\lambda\rangle}\chi_{\langle\lambda\rangle}$ its n-th $*$-cocharacter. If A is a PI-algebra, then A satisfies $Cap^*_{\langle k\rangle}$, $k = k_1 + k_2 + k_3 + k_4$, the Capelli $*$-superidentity of rank $\langle k\rangle$, if, and only if, $m_{\langle\lambda\rangle} = 0$ whenever $h(\langle\lambda\rangle) \geq \langle k\rangle$.*

Capítulo 1

Introdução

Neste trabalho de tese, os objetos principais de estudo são as superálgebras associativas com uma superinvolução # sobre um corpo F de característica zero e suas identidades polinomiais. Dizemos que A é uma superálgebra se A é uma álgebra associativa $\mathbb{Z}_2$-graduada. Nesse caso, A pode ser decomposta em uma soma direta de dois subespaços $A = A_0 \oplus A_1$ tais que $A_iA_j \subseteq A_{i+j}$, com $i, j = 0, 1$, satisfazendo $A_0A_0 + A_1A_1 \subseteq A_0$ e $A_0A_1 + A_1A_0 \subseteq A_1$. Os subespaços A_0 e A_1 são chamados de componentes homogêneas de grau par e ímpar, respectivamente, e seus elementos de elementos homogêneos de grau 0 e 1, ou elementos pares e ímpares, respectivamente.

Uma superinvolução em uma superálgebra A é uma aplicação F-linear graduada $\# : A \to A$, isto é, $A_0^\# \subseteq A_0$ e $A_1^\# \subseteq A_1$, tais que $(a^\#)^\# = a$, para todo $a \in A$, e $(ab)^\# = (-1)^{deg(a)deg(b)} b^\# a^\#$, para todos $a, b \in A_0 \cup A_1$, onde $deg(c)$ denota o grau homogêneo de $c \in A_0 \cup A_1$, isto é, $deg(c) = 0$ se $c \in A_0$ e $deg(c) = 1$ se $c \in A_1$. Quando A está munida com uma superinvolução #, dizemos que A é uma superálgebra com superinvolução ou, simplesmente, que A é uma #-superálgebra. Desde que $charF = 0$, temos a seguinte decomposição:

$$A = A_0^+ \oplus A_0^- \oplus A_1^+ \oplus A_1^-, \tag{1.1}$$

onde $A_i^+ = \{a \in A_i \mid a^\# = a\}$ e $A_i^- = \{a \in A_i \mid a^\# = -a\}$, para $i = 0, 1$, são chamados de conjuntos de elementos homogêneos (pares e ímpares) simétricos e antissimétricos de A, respectivamente. Como exemplo de uma superálgebra com uma superinvolução $\#$, seja a álgebra de Grassmann (também chamada de álgebra exterior) não unitária de dimensão infinita, sobre um corpo F de característica zero, dada por $E = \langle e_1, e_2, \cdots \mid e_i e_j = -e_j e_i,\ \forall i, j = 1, 2, \cdots \rangle_F$. Considere a $\mathbb{Z}_2$-graduação canônica $E = E_0 \oplus E_1$, onde $E_0 = \langle e_{i_1} \cdots e_{i_{2k}} \rangle_F$ e $E_1 = \langle e_{i_1} \cdots e_{i_{2k+1}} \rangle_F$. A aplicação F-linear graduada $\# : E \to E$ definida por $e_i^{\#} = -e_i$ é uma superinvolução em E. Assim, E é uma $\#$-superálgebra.

A seguir, faremos um panorama histórico sobre a PI-teoria, destacando os principais resultados para a elaboração deste trabalho.

Seja $F\langle X \rangle$ a álgebra livre associativa, não comutativa e não unitária, de polinômios gerados por um conjunto $X = \{x_1, x_2, \cdots\}$ infinito enumerável. Dada uma álgebra A, dizemos que um polinômio $f(x_1, \cdots, x_n) \in F\langle X \rangle$ é uma identidade polinomial de A se $f(a_1, \cdots, a_n) = 0$ para todos $a_1, \cdots, a_n \in A$. Chamamos A de PI-álgebra se A satisfaz uma identidade polinomial não nula. As álgebras nilpotentes, álgebras de dimensão finita (veja Teorema 1.5.8 em [24]) e álgebras comutativas são alguns exemplos de PI-álgebras.

A PI-teoria ganhou notoriedade em 1948 após o trabalho de Kaplansky [34], onde o autor classifica as PI-álgebras primitivas. Em 1950, a área ganhou ainda mais força com o trabalho de Amitsur e Levitsky [2], onde os autores mostraram que o polinômio Standard de grau $2k$, dado por $St_{2k}(x_1, \cdots, x_{2k}) = \displaystyle\sum_{\sigma \in S_{2k}} (-1)^{\sigma} x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \cdots x_{\sigma(2k)}$, é uma identidade polinomial, do menor grau possível (grau mínimo), para a álgebra de matrizes de ordem $k \times k$. Mas foi apenas nos anos 60 e 70 que a maior parte da estrutura dessa teoria foi desenvolvida. Para mais detalhes, veja as literaturas [25, 31, 46, 51].

Denotamos por $Id(A)$ o conjunto de identidades polinomiais ordinárias de A. O conjunto $Id(A)$ é um T-ideal, isto é, um ideal de $F\langle X \rangle$ invariante sob todos endomorfismos de $F\langle X \rangle$. Assim, para descrever as identidades de A basta encontrar os geradores de $Id(A)$ como T-ideal. Em 1950, Specht [53] conjecturou que, sobre corpos de característica zero, o T-ideal de identidades para toda álgebra associativa é finitamente gerado como T-ideal. Mas foi somente em 1987 que Kemer, em uma série de trabalhos (veja [37, 38]), deu uma resposta positiva para a conjectura de Specht. Apesar da conjectura provada, Kemer não mostrou como determinar essa base de identidades. Assim, descrever geradores de T-ideais de identidades para uma álgebra continua sendo um dos principais problemas na PI-teoria. Existem algumas álgebras cujos geradores do T-ideal de identidades já foram descritos (veja [13, 39, 40, 47]) e outras que possuem tal problema ainda em aberto, como são os casos da álgebra $M_k(F)$ para $k \geq 3$ e da álgebra $M_2(E)$, onde E é a álgebra de Grassmann ou álgebra exterior.

As identidades polinomiais $\mathbb{Z}_2$-graduadas (também chamadas de superidentidades) foram ferramenta essencial para a prova da conjectura Specht, o que fez surgir naturalmente o interesse na PI-teoria de estudar outros tipos de identidades com estruturas adicionais, como, por exemplo, as identidades graduadas por um grupo G ($Id^{gr}(A)$), em particular, as identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas, identidades com involução $*$ ($Id^*(A)$) e superidentidades com superinvolução $\#$ ($Id_2^{\#}(A)$), pois generalizam, em um certo sentido, as identidades ordinárias de A. Assim, como no caso ordinário, podemos definir álgebra livre associativa com G-graduação ($F\langle X|G\rangle$), onde G é um grupo finito, álgebra livre associativa com involução $*$ ($F\langle X|*\rangle$), superálgebra livre com superinvolução $\#$ ($F\langle X|\mathbb{Z}_2, \#\rangle$).

Como a descrição de uma base de identidades de $Id(A)$ nem sempre é uma tarefa fácil, com o intuito de contornar essa complexidade, em 1972, Regev [48] introduziu a sequência de codimensões (caso ordinário), que mede o crescimento do T-ideal de identidades de A. A n-ésima codimensão de A, $c_n(A)$, é definida como a dimensão do espaço quociente $P_n(A) = \dfrac{P_n}{P_n \cap Id(A)}$, onde P_n é o espaço dos polinômios multilineares de grau n. A importância de se considerar os espaços P_n na PI-teoria recai no fato de que, sobre um corpo de característica zero, toda identidade polinomial para A é equivalente a um conjunto finito de polinômios multilineares. Ainda em [48], Regev mostrou que a sequência de codimensões de uma PI-álgebra A, $(c_n(A))_{n\geq 1}$, é exponencialmente limitada (enquanto que $\dim P_n = n!$).

Ainda no intuito de descrever identidades para uma determinada álgebra, há um eixo dentro da PI-álgebra que utiliza a teoria de representações do grupo simétrico S_n via tabelas de Young. Tal teoria se consolidou como uma ferramenta poderosa para o estudo de identidades. O leitor pode consultar as referências [10], [33] e [54] para a teoria geral de G-representações e, para o caso específico $G = S_n$, o livro [32].

Desde que T-ideais são invariantes sob endomorfismos de $F\langle X\rangle$, a ação de permutação de indeterminadas de um polinômio multilinear nos fornece a estrutura de um

S_n-módulo do grupo simétrico S_n, $n \geq 1$, no espaço dos polinômios multilineares P_n e no espaço $P_n \cap Id(A)$ de identidades multilineares de uma PI-álgebra A e, portanto, a teoria já conhecida de S_n-representações sob um corpo de característica zero pode ser aplicada no estudo de PI-álgebras. Denotando por $\chi_n(A)$ o n-ésimo cocaracter de A associado ao S_n-módulo $P_n(A) = \dfrac{P_n}{P_n \cap Id(A)}$ ($\chi_n(A)$ é caracter de $P_n(A)$), é possível dar restrições na forma dos diagramas de Young correspondentes a S_n-caracteres irredutíveis que aparecem na decomposição de $\chi_n(A)$, ou seja, que possuem multiplicidade não nula, e mostrar que esses S_n-caracteres irredutíveis estão dentro de um gancho infinito $H(d,l)$, $d, l > 0$, onde $H(d,l)$ é a união de todos os diagramas de Young cujas linhas abaixo da d-ésima linha têm comprimento menor ou igual a l. É interessante estudar os S_n-módulos irredutíveis de P_n cujas multiplicidades são nulas (as que estão fora do gancho $H(d,l)$ satisfazem isso), pois eles são formados por identidades de A. O famoso Teorema do gancho (*The Hook Theorem*, Teorema 2.53), provado em 1982 por Amitsur e Regev em [3] para o caso de álgebras que satisfazem identidades ordinárias, evidencia exatamente isso: são descritos conjuntos de identidades a partir de S_n-módulos irredutíveis que não aparecem na decomposição do n-ésimo cocaracter e cujos diagramas de Young correspondentes estão fora do gancho.

Anos antes, em 1979, Regev mostrou em [49] que, se a A é uma álgebra que satisfaz a identidade polinomial de Capelli de posto k, então a sequência de cocaracteres de A tem altura limitada por $k-1$ (veja Teorema 2.55). Na teoria de PI-álgebras, este resultado é conhecido como o Teorema da Faixa (*The Strip Theorem*).

Ainda nesse cenário e diante do crescente interesse em estudar identidades polinomiais com estruturas adicionais, em 1985, Giambruno e Regev provaram em [19] a versão do Teorema do Gancho, considerando A uma superálgebra ou uma álgebra com involução $*$. Os autores utilizaram a teoria de representação do grupo $\hat{\mathbb{Z}}_2 = \mathbb{Z}_2 \wr S_n$, produto entrelaçado do grupo $\mathbb{Z}_2$ pelo grupo simétrico S_n, aplicada ao estudo de $\hat{\mathbb{Z}}_2$-identidades (superidentidades) ou $*$-identidades (identidades com involução $*$) de A, ou seja, identidades com $\hat{\mathbb{Z}}_2$ ação, e provaram que o n-ésimo cocaracter correspondente

$$\chi_n(A|\mathbb{Z}_2) = \sum_{|\lambda|+|\mu|=n} m_{\lambda,\mu}\chi_{\lambda,\mu} \quad \text{(para superidentidades)}$$

ou

$$\chi_n(A|*) = \sum_{|\lambda|+|\mu|=n} m_{\lambda,\mu}\chi_{\lambda,\mu} \quad (\text{para } *\text{-identidades})$$

está contido em um gancho duplo $(H(d_1, l_1), H(d_2, l_2))$, com d_1, l_1, d_2, l_2 inteiros positivos.

Diante do exposto, veio a nossa inspiração primordial para desenvolver este trabalho de tese: existe uma versão do Teorema do Gancho para superálgebras com superinvolução? Além disso, é possível estender o Teorema da Faixa para esse nosso contexto? Neste trabalho, daremos a resposta positiva para essas indagações, apresentando os dois resultados principais desta pesquisa, que são: o Teorema do Gancho (Teorema 4.4) e o Teorema da Faixa (Teorema 4.12) para o caso de superálgebras com uma superinvolução $\#$. Ademais, como consequência do Teorema do Gancho, conseguimos provar também uma versão do Teorema de Amitsur (Teorema 4.14).

Esta tese está composta por mais quatro capítulos, dispostos da seguinte maneira.

No Capítulo 2, introduzimos a teoria de S_n-representações via tabelas de Young, destacando a ação do grupo simétrico S_n no espaço dos polinômios multilineareas P_n. Além disso, relembramos alguns resultados da PI-teoria e destacamos os conceitos de codimensão e de cocaracter e sua relação na descrição de identidades. Apresentamos também resultados básicos que utilizaremos no decorrer do trabalho. Como referências gerais da PI-teoria, citamos [12, 24].

No Capítulo 3, apresentamos a teoria de álgebras G-graduadas e de suas respectivas identidades G-graduadas, dando ênfase nas superálgebras A (álgebras $\mathbb{Z}_2$-graduadas).

Definimos também uma superinvolução $\#$ em uma superálgebra e apresentamos a definição do nosso objeto principal de estudo que são as superidentidades com superinvolução, expondo os fatos mais importantes sobre elas. Em vista da decomposição dada em (1.1), estudamos superidentidades com superinvolução a partir da teoria de representação do produto direto dos grupos simétricos $S_{\langle n\rangle} := S_{n_1} \times S_{n_2} \times S_{n_3} \times S_{n_4}$, onde $n = n_1+n_2+n_3+n_4$, e da ação de $S_{\langle n\rangle}$ no espaço $P_{\langle n\rangle}$ dos polinômios multilineares, em que as n_1 primeiras indeterminadas (denotadas por $Y_0 = \{y_{0,1}, \cdots, y_{0,n_1}\}$) são pares simétricas, as n_2 seguintes (denotadas por $Z_0 = \{z_{0,1}, \cdots, z_{0,n_2}\}$) são pares antissimétricas, as próximas n_3 (denotadas por $Y_1 = \{y_{1,1}, \cdots, y_{1,n_3}\}$) são ímpares simétricas e as

n_4 seguintes (denotadas por $Z_1 = \{z_{1,1}, \cdots, z_{1,n_4}\}$) são ímpares antissimétricas. A fim de estendermos os resultados de identidades ordinárias para superidentidades com superinvolução, estudamos os $S_{\langle n\rangle}$-caracteres irredutíveis de A, a n-ésima #-codimensão graduada $(c_{\langle n\rangle}(A))_{n\geq 1}$ e o n-ésimo #-cocaracter graduado de A, $\chi_{\langle n\rangle}(A)$. Em 2016, Giambruno, Ioppolo e La Mattina mostraram em [14] que a sequência de #-codimensões de uma PI-álgebra A, $(c_{\langle n\rangle}(A))_{n\geq 1}$, é também exponencialmente limitada.

No Capítulo 4, apresentamos uma das principais contribuições desta tese que é uma demonstração do Teorema do Gancho para o caso de superálgebras com superinvolução. Salientamos que, em todos os nossos resultados, consideramos PI-álgebras, isto é, álgebras que satisfazem uma identidade polinomial não trivial ordinária.

Teorema A: [Teorema 4.4] *(Teorema do Gancho para #-superálgebras) Sejam F um corpo de característica zero e A uma superálgebra sobre F com uma superinvolução #. Se A é uma PI-álgebra, então existem inteiros não negativos $d_i, l_i \geq 1$, com $i = 1, 2, 3, 4$, tais que o n-ésimo #-cocaracter graduado, $\chi_{\langle n\rangle}(A)$, está contido em um gancho quádruplo $H_4(n) = (H(d_1, l_1), H(d_2, l_2), H(d_3, l_3), H(d_4, l_4))$, isto é,*

$$\chi_{\langle n\rangle}(A) = \sum_{\substack{\langle\lambda\rangle\vdash\langle n\rangle \\ \langle\lambda\rangle\in H_4(n)}} m_{\langle\lambda\rangle}\chi_{\langle\lambda\rangle}.$$

Em seguida, provamos o Teorema da Faixa para PI-superálgebras com superinvolução que satisfazem uma superidentidade de Capelli de posto $\langle k\rangle$, onde $k = k_1 + k_2 + k_3 + k_4$.

Teorema B: [Teorema 4.12] *(Teorema do Faixa para #-superálgebras) Sejam F um corpo de característica zero, A uma superálgebra sobre F com uma superinvolução # e $\chi_{\langle n\rangle}(A) = \sum_{\langle\lambda\rangle\vdash\langle n\rangle} m_{\langle\lambda\rangle}\chi_{\langle\lambda\rangle}$ o seu n-ésimo #-cocaracter. Se A é uma PI-álgebra, então A satisfaz $Cap^{\#}_{\langle k\rangle}$, $k = k_1 + k_2 + k_3 + k_4$, a #-superidentidade de Capelli de posto $\langle k\rangle$, se, e somente se, $m_{\langle\lambda\rangle} = 0$ sempre que $h(\langle\lambda\rangle) \geq \langle k\rangle$, isto é, para a altura $h_i = h(\lambda(i))$ das componentes $\lambda(i)$ da multipartição $\langle\lambda\rangle = (\lambda(1), \lambda(2), \lambda(3), \lambda(4))$, temos que $h_i > k_i$ para algum $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.*

Concluímos o capítulo com uma consequência do Teorema A, demonstrando uma versão do Teorema de Amitsur para #-superálgebras, o qual garante que qualquer PI-superálgebra com superinvolução satisfaz uma identidade que é produto de potências do polinômio Standard.

Teorema C: [Teorema 4.14] *(Teorema de Amitsur para #-superálgebras) Sejam F um corpo de característica zero e A uma superálgebra sobre F com uma superinvolução. Se A é uma PI-álgebra, existem inteiros k_i, m_i, $i = 1, 2, 3, 4$, tais que A satisfaz a identidade*

$$St_{k_1}^{m_1}(y_{0,1}, \cdots, y_{0,k_1}) \cdot St_{k_2}^{m_2}(z_{0,1}, \cdots, z_{0,k_2}) \cdot St_{k_3}^{m_3}(y_{1,1}, \cdots, y_{1,k_3}) \cdot St_{k_4}^{m_4}(z_{1,1}, \cdots, z_{1,k_4}) = 0.$$

A importância dos nossos resultados recai em várias partes dentro da teoria de PI-álgebras, e vamos destacar algumas delas agora.

Uma das principais aplicações do Teorema do Gancho é o conhecido Teorema de Kemer que garante que qualquer PI-álgebra, sobre um corpo de característica zero, tem as mesmas identidades que a envolvente de Grassmann $E(A)$ de uma superálgebra A de dimensão finita. A relevância desse resultado se dá por responder positivamente a conjectura de Specht, provando que qualquer T-ideal de identidades de uma PI-álgebra é finitamente gerado. Em 2016, Aljadev, Giambruno e Karasik mostraram em [1] que o Teorema de Kemer é válido para álgebra com involução $*$ ou superálgebra.

Uma outra aplicação dos Teoremas do Gancho e da Faixa é estudar o comportamento da sequência de cocomprimentos de uma variedade não trivial. Berele, em [6], mostrou que, se uma álgebra A satisfaz uma identidade de Capelli, então a sequência de cocomprimentos de A é polinomialmente limitada. Em seguida, Berele e Regev, em [7], provaram que esse resultado é válido não apenas para álgebras que satisfazem uma identidade de Capelli, como também vale para qualquer PI-álgebra. Anos depois, Giambruno e Zaicev, em [24], provaram esse mesmo resultado de uma forma diferente, utilizando como ferramenta principal o Teorema do Gancho e o Teorema de Kemer, mencionado acima, ou seja, os autores demonstraram que, dada uma variedade não trivial $\mathcal{V}$, a sequência de cocomprimentos $(l_n(\mathcal{V}))_{n\geq 1}$ é polinomialmente limitada, isto é, existem constantes $C, k > 0$ tais que

$$l_n(\mathcal{V}) := \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda \leq Cn^k,$$

onde

$$\chi_n(\mathcal{V}) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda \chi_\lambda$$

é o n-ésimo cocaracter de $\mathcal{V}$. Esse resultado está inteiramente relacionado ao Teorema do Gancho e, em certos casos, eles são equivalentes, como mostra Berele em [5] para álgebras com ação de álgebra de Hopf e para álgebras com involução $*$ ou superálgebras.

Nos últimos anos, muitos autores têm estudado extensivamente o comportamento assintótico da sequência de cocomprimentos para diferentes álgebras, a fim de obter uma caracterização de certas variedades. Mishchenko, Regev e Zaicev consideraram o caso ordinário no trabalho [42], Cirrito e Giambruno estudaram o caso de álgebras graduadas em [9], Vieira caracterizou álgebras finitamente geradas com involução no artigo [56] e, recentemente, Ioppolo e Martino consideraram o caso de superálgebras com superinvolução em [29]. Existem outros diversos trabalhos nessa direção, dentre os quais citamos [26, 41, 45].

Destacamos, também como aplicação dos nossos principais resultados (Teorema do Gancho e Teorema da Faixa), o estudo do PI-expoente de uma PI-álgebra A sobre um corpo de característica zero, que é definido como sendo o número

$$\exp(A) := \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(A)}$$

quando o limite existe, onde $(c_n(A))_{n\geq 1}$ é a sequência de codimensões de A. Esse número permite medir, em um certo sentido, o crescimento de uma variedade não trivial e, além disso, caracterizar variedades. Na década de 80, Amitsur conjecturou que, para qualquer PI-álgebra A sobre um corpo de característica zero, o PI-expoente de A existe e é um inteiro não negativo. Giambruno e Zaicev, em [21, 22], deram uma resposta positiva a essa conjectura. Todavia, quando a PI-álgebra é não associativa, essa conjectura não é válida em geral. Em [20, 57], os autores mostraram que o PI-expoente existe para álgebras de Lie e Jordan de dimensão finita, enquanto que em [23] os autores provaram que tal número existe para álgebras simples de dimensão finita (em particular, para superálgebras de Lie de dimensão finita). Repovs e Zaicev, em [50], construíram uma família de álgebras não associativas cujo PI-expoente não existe.

Ainda nesse cenário, Giambruno, Polcino Milies e Valenti, no trabalho [15], provaram que, para qualquer PI-álgebra A com involução $*$, o $exp^*(A)$ existe e é um inteiro. Ioppolo, por sua vez, no artigo [27], estudou o crescimento exponencial de superálgebras finitamente geradas com superinvolução $\#$, mostrando que $exp^{\#}(A)$ também existe e é um inteiro.

Embora Ioppolo em [27] tenha feito um estudo aprofundado sobre o expoente de uma superálgebra com superinvolução, além de uma caracterização dessas álgebras, ele considerou apenas aquelas que são finitamente geradas. Isso, provavelmente, é devido ao fato de que, para as outras estruturas nas álgebras mencionadas antes, o passo chave para garantir a existência do seu respectivo expoente é o celebrado Teorema de Kemer. Acreditamos que, para generalizar os resultados de Ioppolo para quaisquer superálgebras com superinvolução, deve-se provar uma versão do Teorema de Kemer sobre envolventes de Grassmann para superálgebras com superinvolução.

Feitas essas considerações, fica evidente a importância dos nossos resultados para generalizar vários outros em aberto sobre PI-superálgebras com superinvolução sobre um corpo de característica zero, que utilizam como ferramenta principal na demonstração os Teoremas do Gancho e da Faixa.

Finalizamos a tese com o Capítulo 5. Ele surgiu logo após percebermos que os argumentos empregados nas demonstrações dos Teoremas A, B e C podiam ser aplicados de igual modo para o caso de superálgebras com uma involução graduada. A ideia inicial de demonstrarmos esses resultados para essa classe de superálgebras devemos à professora Ana Cristina Vieira (UFMG), que nos questionou após minha palestra no *XII Summer Workshop in Mathematics*, UnB, Brasília, se o Teorema A era válido para superálgebras com uma involução graduada. Registramos, aqui, nossos agradecimentos à professora Ana, não apenas pela pergunta que gerou resultados, mas também por encaminhar artigos que deram suporte para desenvolvermos alguns exemplos contidos aqui.

Em suma, o Capítulo 5 traz o seguinte. Seja $A = A_0 \oplus A_1$ uma superálgebra sobre um corpo F de característica zero. Uma involução graduada em A é uma aplicação F-linear $* : A \to A$ tal que $(c^*)^* = c$ para todo $c \in A$, $(ab)^* = b^*a^*$ para todos os elementos $a, b \in A$ e $A_0^* \subseteq A_0$ e $A_1^* \subseteq A_1$. Nesse caso, chamamos A de $*$-superálgebra.

Temos novamente que, como $charF \neq 2$, então

$$A = A_0^+ \oplus A_0^- \oplus A_1^+ \oplus A_1^-,$$

onde $A_i^+ = \{a \in A_i \mid a^* = a\}$ e $A_i^- = \{a \in A_i \mid a^* = -a\}$, para $i = 0, 1$, são as componentes homogêneas simétricas e antissimétricas de A, respectivamente. Aqui, novamente, em vista desta decomposição da superálgebra A, estudamos superidentidades com involução graduada a partir da teoria de representação do produto direto dos grupos simétricos $S_{\langle n\rangle} := S_{n_1} \times S_{n_2} \times S_{n_3} \times S_{n_4}$, onde $n = n_1 + n_2 + n_3 + n_4$, e da ação de $S_{\langle n\rangle}$ no espaço $P_{\langle n\rangle}$ dos polinômios multilineares, em que as n_1 primeiras indeterminadas (denotadas por $Y_0 = \{y_{0,1}, \cdots, y_{0,n_1}\}$) são pares simétricas, as n_2 seguintes (denotadas por $Z_0 = \{z_{0,1}, \cdots, z_{0,n_2}\}$) são pares antissimétricas, as próximas n_3 (denotadas por $Y_1 = \{y_{1,1}, \cdots, y_{1,n_3}\}$) são ímpares simétricas e as n_4 seguintes (denotadas por $Z_1 = \{z_{1,1}, \cdots, z_{1,n_4}\}$) são ímpares antissimétricas.

Seguem os teoremas desse capítulo.

Teorema D: [Teorema 5.9] *(Teorema do Gancho para $*$-superálgebras) Sejam F um corpo de característica zero e A uma superálgebra sobre F com uma involução graduada $*$. Se A é uma PI-álgebra, então existem inteiros $d_i, l_i \geq 1$, com $i = 1, 2, 3, 4$, tais que o n-ésimo $*$-cocaracter das $*$-identidades graduadas, $\chi_{\langle n\rangle}(A)$, está contido em um gancho quádruplo $H_4(n) = (H(d_1, l_1), H(d_2, l_2), H(d_3, l_3), H(d_4, l_4))$, isto é,*

$$\chi_{\langle n\rangle}(A) = \sum_{\substack{\langle\lambda\rangle \vdash \langle n\rangle \\ \langle\lambda\rangle \in H_4(n)}} m_{\langle\lambda\rangle} \chi_{\langle\lambda\rangle}.$$

Teorema E: [Teorema 5.10] *(Teorema de Amitsur para $*$-superálgebras) Sejam F um corpo de característica zero e A uma superálgebra sobre F com uma involução graduada. Se A é uma PI-álgebra, existem inteiros k_i, m_i, $i = 1, 2, 3, 4$, tais que A satisfaz a identidade*

$$St_{k_1}^{m_1}(y_{0,1}, \cdots, y_{0,k_1}) \cdot St_{k_2}^{m_2}(z_{0,1}, \cdots, z_{0,k_2}) \cdot St_{k_3}^{m_3}(y_{1,1}, \cdots, y_{1,k_3}) \cdot St_{k_4}^{m_4}(z_{1,1}, \cdots, z_{1,k_4}) = 0.$$

Teorema F: [Teorema 5.13] *(Teorema da Faixa para $*$-superálgebras) Sejam F um corpo de característica zero, A uma superálgebra sobre F com uma involução graduada*

$*$ *e* $\chi_{\langle n\rangle}(A) = \sum_{\langle\lambda\rangle\vdash\langle n\rangle} m_{\langle\lambda\rangle}\chi_{\langle\lambda\rangle}$ *o seu* n*-ésimo* $*$*-cocaracter. Se* A *é uma* PI*-álgebra, então* A *satisfaz* $Cap^*_{\langle k\rangle}$, $k = k_1 + k_2 + k_3 + k_4$, *a* $*$*-identidade de Capelli de posto* $\langle k\rangle$, *se, e somente se,* $m_{\langle\lambda\rangle} = 0$ *sempre que* $h(\langle\lambda\rangle) \geq \langle k\rangle$.

Capítulo 2

Preliminares e Resultados Básicos

Neste capítulo, iremos relembrar noções e resultados relevantes a respeito de álgebras livres, identidades polinomiais para uma álgebra A sobre um corpo F, e da teoria de representações do grupo simétrico S_n via tabelas de Young. Como deixamos claro na Introdução, o objetivo principal deste trabalho é estender alguns resultados dessa teoria para o caso de superálgebras com superinvolução. Por questões de simplicidade, apresentaremos vários resultados neste capítulo, apenas referenciando sua demonstração ao leitor, para que possamos posteriormente utilizá-los na prova do caso análogo para superálgebras. Vamos nos basear nas referências [33] e [54] para a Teoria de Representações de Grupos Finitos, [32] para a Teoria de Representações do Grupo Simétrico, e [12, 24, 31] para a Teoria de Identidades Polinomiais.

Vale mencionar que, nas Seções 2.1 e 2.4, F denotará um corpo de característica zero; já nas Seções 2.2 e 2.3, não necessariamente.

2.1 S_n-representações via tabelas de Young

Nesta seção, consideramos representações de um grupo simétrico S_n sobre um corpo F de característica zero.

Definição 2.1 *Seja $n \geq 1$ um inteiro. Uma partição λ de n é uma sequência de naturais $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_l)$ tal que $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_l$ e $\sum_{i=1}^{l} \lambda_i = n$. Neste caso, escrevemos $\lambda \vdash n$ ou $|\lambda| = n$.*

Quando $l = 1$, então $\lambda_1 = n$ e escrevemos $\lambda = (n)$ e, quando $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 1$, denotamos por $\lambda = (1^n)$. No caso em que $n = kd$, escrevemos $\lambda = (k^d)$ para indicar a partição $\lambda = (k, \cdots, k)$. Dadas as partições $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_r)$ e $\mu = (\mu_1, \cdots, m_s)$ de n, podemos obter uma relação de ordem no conjunto das partições. Dizemos que $\lambda > \mu$ se $\lambda_k > \mu_k$ para $k = \min\{i \in \mathbb{N} | \ \lambda_i \neq \mu_i\}$ (ordem lexicográfica). Denotamos por $p(n)$ o conjunto de todas as partições de n.

É conhecido que, dados $\varphi : G \to GL(M)$ uma representação do grupo finito G, onde M é um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{C}$, e seu caracter $\chi_\varphi(g) = Tr(\varphi(g))$, traço da representação $\varphi(g)$, os caracteres são funções de classes, isto é, são constantes nas classes de conjugação de G, e assim, $\chi_\varphi(g) = \chi_\varphi(h)$ para g e h pertencentes à mesma classe de conjugação. A partir desse fato, é provado que o número de caracteres irredutíveis não equivalentes de um grupo finito G sobre um corpo algebricamente fechado é igual ao seu número de classes de conjugação (para mais detalhes veja o Teorema 15.3 em [33]).

Dada uma partição $\lambda \vdash n$, é possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre o conjunto de classes de conjugação do grupo simétrico $Cl(S_n)$ e o conjunto das partições de n (veja [30] páginas 74 e 75). Assim, os caracteres irredutíveis de S_n sobre $\mathbb{C}$ estão em correspondência biunívoca com as partições de n. Desse modo, vamos denotar por M_λ o S_n-módulo irredutível e χ_λ o S_n-caracter irredutível associados à partição $\lambda \vdash n$ e por $d_\lambda = \chi_\lambda(1)$ o seu grau.

Teorema 2.2 *Existe uma correspondência biunívoca entre os S_n-caracteres irredutíveis e as partições de n, para $n \geq 1$. Sejam $\{\chi_\lambda | \ \lambda \vdash n\}$ o conjunto de todos os caracteres irredutíveis não equivalentes de S_n e $d_\lambda = \chi_\lambda(1)$ o grau de χ_λ, para $\lambda \vdash n$. Então,*

$$FS_n = \bigoplus_{\lambda \vdash n} I_\lambda \cong \bigoplus_{\lambda \vdash n} M_{d_\lambda}(F),$$

onde $I_\lambda = e_\lambda FS_n$ e $e_\lambda = \sum_{\sigma \in S_n} \chi_\lambda(\sigma)\sigma$ é a unidade de I_λ.

Demonstração. Veja o Teorema 2.2.2, página 47 em [24]. □

Definição 2.3 *Dada uma partição $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_l)$ de n, um diagrama de Young da forma λ é uma matriz ou série de n boxes arranjados em linhas tal que a i-ésima linha* *contém λ_i boxes. Os boxes são justificados à esquerda e, por convenção sobre partições, o comprimento das linhas é não-crescente.*

Podemos representar um diagrama de Young pelo conjunto

$$D_\lambda = \{(i,j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} |\ i = 1, \cdots, l;\ j = 1, \cdots, \lambda_i\}.$$

Por exemplo, o digrama $D_{(5,3,2,1)}$ é representado por

$$D_{(5,3,2,1,)} = \ydiagram{5,3,2,1}$$

Para uma partição $\lambda \vdash n$, definimos a partição conjugada de λ dada por $\lambda' = (\lambda_1', \cdots, \lambda_s')$, onde $\lambda_1', \cdots, \lambda_s'$ são os comprimentos das colunas de D_λ. Por exemplo, sendo $\lambda = (5,3,2,1) \vdash 11$, então $\lambda' = (4,3,2,1,1)$.

Definição 2.4 *Uma tabela de Young da forma λ é uma atribuição dos inteiros $\{1, \cdots, n\}$ nos n boxes do diagrama de Young bijetivamente. Denotamos uma tabela de Young da forma λ por $T_\lambda = D_\lambda(a_{ij})$, onde a_{ij} é uma atribuição para o box que está na i-ésima linha e j-ésima coluna.*

Exemplo 2.5 Sejam a partição $\lambda = (4,3,2,1) \vdash 10$ e o diagrama de Young $D_{(4,3,2,1)}$ associado

$$D_{(4,3,2,1)} = \ydiagram{4,3,2,1}\ .$$

Considere a tabela de Young

$$T_{(4,3,2,1)} = \begin{ytableau} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 \\ 10 \end{ytableau}\ .$$

Definição 2.6 *Uma tabela de Young T_λ da forma λ é dita Standard se os inteiros em cada linha e cada coluna crescem da esquerda para direita e de cima para baixo, respectivamente.*

No exemplo seguinte, exibimos as tabelas Standard T_λ associadas à partição $\lambda = (3,2) \vdash 5$.

Exemplo 2.7

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&3\\ \hline 4&5\\ \cline{1-2}\end{array}\,,\quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&4\\ \hline 3&5\\ \cline{1-2}\end{array}\,,\quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&5\\ \hline 3&4\\ \cline{1-2}\end{array}\,,\quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&3&4\\ \hline 2&5\\ \cline{1-2}\end{array}\,,\quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&3&5\\ \hline 2&4\\ \cline{1-2}\end{array}\,.$$

As tabelas Standard desempenham um papel importante na teoria de representações de S_n, visto que, a partir delas, pode-se determinar o grau das representações irredutíveis. Esse resultado pode ser visto em [24], Teorema 2.2.6. Dessa forma, no Exemplo 2.7, o grau $d_{(3,2)}$ da S_5-representação irredutível associada à partição $\lambda = (3,2)$ é igual a 5. Uma maneira de se determinar o número de tabelas Standard associadas a uma partição de n, e consequentemente, determinar o grau da representação irredutível correspondente é através da famosa Fórmula do Gancho, apresentada no que segue.

Definição 2.8 *Seja $v = (i,j)$ um box no diagrama de Young. Seu gancho é dado pelo conjunto*

$$H_v = H_{i,j} = \{(i,j^{'}) : j^{'} \geq j\} \cup \{(i^{'},j) : i^{'} \geq i\}$$

com correnspodente comprimento $h_{i,j} = |H_{i,j}|$.

O comprimento do gancho $H_{i,j}$ é o número de boxes que ocorrem abaixo do box (i,j) e à sua direita, contando ele mesmo.

Exemplo 2.9 Considere a partição $\lambda = (3,2,1) \vdash 6$ e seu diagrama de Young $D_{(3,2,1)}$. Os números atribuídos nos seus boxes correspondem aos comprimentos dos seus respectivos ganchos:

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 5&3&1\\ \hline 3&1\\ \cline{1-2} 1\\ \cline{1-1}\end{array}\,.$$

Teorema 2.10 *(Fómula do Gancho) Sejam $n \geq 1$ e $\lambda \vdash n$. Então,*

$$d_\lambda = \frac{n!}{\prod_{(i,j)\in\lambda} h_{i,j}}.$$

Demonstração. Veja a página 124 em [52]. $\square$

A fim de compreender melhor as representações irredutíveis do grupo simétrico S_n, vamos descrever uma lista completa de ideais minimais à esquerda de FS_n. Para isso, dada uma tabela de Young T_λ da forma λ, sejam R_{T_λ} o subgrupo de S_n formado por todas as permutações de S_n que preservam as linhas de T_λ, isto é, mantém os elementos de cada linha nela mesma, e C_{T_λ} o subgrupo formado por todas as permutações de S_n que preservam as colunas de T_λ, ou seja, mantém os elementos de cada coluna nela mesma. Mais especificamente,

Definição 2.11 *Sejam $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_r) \vdash n$ e $T_\lambda = D_\lambda(a_{ij})$ uma tabela de Young da forma λ. Definimos o Estabilizador de Linhas de T_λ como sendo*

$$R_{T_\lambda} = S_{\lambda_1}(a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1\lambda_1}) \times \cdots \times S_{\lambda_r}(a_{r1}, a_{r2}, \cdots, a_{r\lambda_r}),$$

onde $S_{\lambda_i}(a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{i\lambda_i})$ denota o grupo simétrico agindo nos inteiros $a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{i\lambda_i}$.

Definição 2.12 *O estabilizador de Colunas de $T_\lambda = D_\lambda(a_{ij})$ é dado por*

$$C_{T_\lambda} = S_{\lambda'_1}(a_{11}, a_{21}, \cdots, a_{\lambda'_1 1}) \times \cdots \times S_{\lambda'_s}(a_{1\lambda_1}, a_{2\lambda_1}, \cdots, a_{\lambda'_s\lambda_1}),$$

onde $\lambda' = (\lambda'_1, \cdots, \lambda'_s)$ é a partição conjugada de λ.

Definição 2.13 *Para uma dada tabela T_λ, definimos*

$$e_{T_\lambda} = \sum_{\substack{\sigma \in R_{T_\lambda} \\ \tau \in C_{T_\lambda}}} (-1)^\tau \sigma\tau.$$

Veremos, a seguir, propriedades e resultados importantes do elemento e_{T_λ}. Propriedades essas que serão fundamentais para determinar as representações irredutíveis do grupo simétrico S_n.

Pode-se mostrar que o elemento e_{T_λ} é um elemento idempotente essencial de FS_n, isto é, existe $a \in F$ satisfazendo $e_{T_\lambda}^2 = a e_{T_\lambda}$. Mostra-se também que $a = \frac{n!}{d_\lambda} = \prod_{i,j} h_{i,j}$ é um inteiro não nulo (veja [10], página 195). Note que, como $a \in F$, os elementos e_{T_λ} e $\frac{e_{T_\lambda}}{a}$ geram o mesmo ideal à esquerda de FS_n, isto é, $FS_n e_{T_\lambda} = FS_n \frac{e_{T_\lambda}}{a}$.

É possível definir uma ação do grupo simétrico S_n no espaço das tabelas de Young da seguinte maneira: S_n age em T_λ agindo em cada entrada, isto é, se $\sigma \in S_n$ e $T_\lambda = D_\lambda(a_{ij})$, então $\sigma T_\lambda = D_\lambda(\sigma a_{ij})$. Esta ação nos fornece as seguintes propriedades: $R_{\sigma T_\lambda} = \sigma R_{T_\lambda}\sigma^{-1}$ e $C_{\sigma T_\lambda} = \sigma C_{T_\lambda}\sigma^{-1}$. E, assim, $e_{\sigma T_\lambda} = \sigma e_{T_\lambda}\sigma^{-1}$.

Proposição 2.14 *Para toda tabela de Young T_λ da forma $\lambda \vdash n$, o elemento e_{T_λ} é um elemento minimal essencial de FS_n e $FS_n e_{T_\lambda}$ é um S_n-módulo irredutível à esquerda de FS_n com caracter χ_λ. Se T_1 e T_2 são tabelas da mesma forma λ, então os elementos e_{T_1} e e_{T_2} são conjugados em FS_n através de alguma $\sigma \in S_n$ e, além disso, $e_{\sigma T_\lambda} = \sigma e_{T_\lambda}\sigma^{-1}$.*

Demonstração. Veja Proposição 2.2.13, página 49 em [24]. □

Esse resultado nos fornece uma lista completa dos S_n-módulos irredutíveis não equivalentes à esquerda de FS_n. Dada uma partição $\lambda \vdash n$, então para quaisquer duas tabelas de Young T_1 e T_2 associadas ao mesmo diagrama D_λ, temos $FS_n e_{T_1} \cong FS_n e_{T_2}$, como S_n-módulos, enquanto que $FS_n e_{T_\lambda} \ncong FS_n e_{T_\mu}$ para $\lambda \neq \mu$.

Fixada uma partição $\lambda \vdash n$, vamos denotar M_{T_λ} o S_n-módulo irredutível à esquerda gerado pelo conjunto de vetores $\{e_{T_\lambda};\ T_\lambda$ é uma tabela de Young de forma $\lambda\}$.

Exemplo 2.15 Considere $n \in \mathbb{N}$, com $n \geq 2$, e as seguintes tabelas de Young

$$T_1 = \boxed{1 \mid 2 \mid \cdots \mid n} \quad \text{e} \quad T_2 = \begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \vdots \\ \hline n \\ \hline \end{array}.$$

Temos que $R_{T_1} = S_n$, $C_{T_1} = \{Id\}$, $R_{T_2} = \{Id\}$ e $C_{T_2} = S_n$, e assim

$$e_{T_1} = \sum_{\sigma \in S_n} \sigma \quad \text{e} \quad e_{T_2} = \sum_{\tau \in S_n} (-1)^\tau \tau.$$

Dessa forma, não é difícil mostrar que os S_n-módulos irredutíveis à esquerda $M_{T_1} = \langle e_{T_1}\rangle_F$ e $M_{T_2} = \langle e_{T_2}\rangle_F$ correspondem às S_n-representações de grau 1 trivial e sinal, respectivamente.

Dadas uma partição $\lambda \vdash n$ e uma tabela de Young T_λ da forma λ, veremos mais adiante que os elementos idempotentes essenciais e_{T_λ} caracterizam os S_n-módulos irredutíveis.

Lema 2.16 *Sejam V um S_n-módulo irredutível com caracter $\chi(V) = \chi$ e $\lambda \vdash n$. Então, V pode ser gerado como um S_n-módulo por um elemento da forma $e_{T_\lambda}v$ para algum $v \in V$ e para T_λ tabela de Young da forma λ. Além disso, para qualquer tabela de Young T^*_λ da forma λ, existe $v' \in V$ tal que $V = FS_n e_{T^*_\lambda} v'$*

Demonstração. Veja o Lema 2.4.1, página 52 em [24]. □

Vale ressaltar que, em algumas demonstrações neste trabalho, vamos nos deparar com situações nas quais o grupo simétrico age em um conjunto P não necessariamente igual a $\{1, 2, \cdots, n\}$. Por exemplo, pode acontecer que o grupo simétrico aja permutando os elementos de algum subconjunto $P = \{p_1, p_2, \cdots, p_u\} \subseteq \{1, 2, \cdots, n\}$. Neste caso, vamos denotar por S_P o grupo de permutações que permutam apenas o elementos desse conjunto P.

2.2 Álgebras livres e identidades polinomiais

Sejam $X = \{x_1, x_2, \cdots\}$ um conjunto enumerável de indeterminadas de posto infinito, F um corpo qualquer (não necessariamente de característica zero) e $F\langle X\rangle$ a álgebra associativa livre gerada por X sobre um corpo F. Os elementos de $F\langle X\rangle$ são chamados de polinômios nas indeterminadas do conjunto X. Se A é uma F-álgebra, dizemos que $f(x_1, \cdots, x_n) \in F\langle X\rangle$ é uma identidade polinomial de A ou que A satisfaz $f \equiv 0$ se $f(a_1, \cdots, a_n) = 0$ para quaisquer $a_1, \cdots, a_n \in A$. Chamamos A de PI-álgebra quando A satisfaz uma identidade polinomial não nula.

Usaremos a notação de $f \equiv 0$ em A para dizer que f é uma identidade polinomial de A. Caso contrário, escreveremos $f \not\equiv 0$ em A.

Exemplo 2.17 Seja A uma álgebra comutativa. O comutador de Lie, $g(x, y) = [x, y] = xy - yx$ é uma identidade polinomial de A.

Exemplo 2.18 Dizemos que A é uma álgebra nilpotente de grau n quando $A^n = 0$ para algum $n \geq 1$. O polinômio $x_1 \cdots x_n$ é uma identidade polinomial em A.

Exemplo 2.19 Seja $A = UT_n(F)$ a álgebra das matrizes triangulares superiores de ordem n sobre F. O polinômio

$$[x_1, x_2] \cdots [x_{2n-1}, x_{2n}]$$

é uma identidade polinomial de A.

Exemplo 2.20 Considere F um corpo de característica diferente de 2. Sejam I o ideal bilateral de $F\langle X\rangle$ gerado pelo conjunto de polinômios $\{x_i x_j + x_j x_i \mid \ i, j \geq 1\}$ e $E = \frac{F\langle X\rangle}{I}$. Se definirmos $e_i = x_i + I$ para $i = 1, 2, \cdots$, então E será representada por

$$E = \langle 1, e_1, e_2, \cdots \mid e_i e_j = -e_j e_i, \ \forall\ i, j \geq 1\rangle_F.$$

A álgebra E é chamada de Álgebra de Grassmann (ou álgebra exterior) unitária de dimensão infinita. É possível mostrar que $\beta = \{1, e_{i_1} \cdots e_{i_k} \mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_k\}$ forma uma base para E (veja Exemplo 1.1.8 em [24]). Definimos os subespaços

$$\begin{aligned} E_0 &= \operatorname{span}_F\{e_{i_1} \cdots e_{i_{2k}} \mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_{2k}, k \geq 0\}, \\ E_1 &= \operatorname{span}_F\{e_{i_1} \cdots e_{i_{2k+1}} \mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_{2k+1}, k \geq 0\} \end{aligned}$$

gerados por monômios pares e ímpares, respectivamente. Dessa maneira, não é difícil mostrar que E pode ser escrita como $E = E_0 \oplus E_1$. Note ainda que, pela relação $e_i e_j = -e_j e_i$, temos

$$(e_{i_1} \cdots e_{i_k})(e_{j_1} \cdots e_{j_l}) = (-1)^{kl}(e_{j_1} \cdots e_{j_l})(e_{i_1} \cdots e_{i_k})$$

para quaisquer $k, l \in \mathbb{N}$, de onde conclui-se que $ax = xa$ para todo $x \in E$ e $a \in E_0$ e, portanto, E_0 está contido no centro de E, $Z(E)$ (de fato, esses dois conjuntos coincidem). Por isso, vale que $[E, E] \subseteq E_0 \subseteq Z(E)$ e, consequentemente, o comutador triplo

$$[x_1, x_2, x_3] := [[x_1, x_2], x_3]$$

é uma identidade polinomial de E.

Definição 2.21 *O conjunto de identidades de A é dado por*

$$Id(A) = \{f \in F\langle X\rangle \mid f \equiv 0 \text{ em } A\}.$$

Tem-se que o conjunto $Id(A)$ é um ideal de $F\langle X\rangle$ invariante sob todos endomorfismos da álgebra livre $F\langle X\rangle$, isto é, $\varphi(Id(A)) \subseteq Id(A)$ para todo $\varphi \in End_F(F\langle X\rangle)$. Na literatura, um ideal com essa característica é chamado de T-ideal. Além do mais, é possível mostrar que todo T-ideal I de $F\langle X\rangle$ é da forma $Id(B)$ para alguma álgebra B (basta considerar a álgebra $B = \frac{F\langle X\rangle}{I}$).

Definição 2.22 *Considere os conjuntos de polinômios $S, S' \subseteq F\langle X\rangle$ e $f \in F\langle X\rangle$.*

(1) O T-ideal de $F\langle X\rangle$ gerado pelo conjunto S, que será denotado por $\langle S\rangle_T$, é definido pelo conjunto

$$\langle S\rangle_T = \left\{ \sum_{i=1}^{n} w_i f_i(u_{i1}, \cdots, u_{in_i}) v_i \mid f_i \in S,\ w_i, u_{ij}, v_i \in F\langle X\rangle \right\}.$$

(2) Se $f \in \langle S\rangle_T$, então dizemos que f é uma consequência dos polinômios de S.

(3) Dizemos que S e S' são equivalentes se eles geram o mesmo T-ideal, isto é, $\langle S\rangle_T = \langle S'\rangle_T$.

Exemplo 2.23 ([24, Teorema 4.15]) Seja F um corpo infinito. O T-ideal de identidades da álgebra $UT_2(F)$ é $Id(UT_2(F)) = \langle [x_1, x_2][x_3, x_4]\rangle_T$. Em geral, para $UT_n(F)$, temos que $Id(UT_n(F)) = \langle [x_1, x_2][x_3, x_4] \cdots [x_{2n-1}, x_{2n}]\rangle_T$.

Exemplo 2.24 Seja F um corpo com $char F \neq 2$. No artigo [40], Krakowski e Regev mostraram que o T-ideal de identidades da álgebra de Grassmann E, definida no Exemplo 2.20, é $Id(E) = \langle [x_1, x_2, x_3]\rangle_F$.

Definição 2.25 *Dado um conjunto não vazio $S \subseteq F\langle X\rangle$, a classe de todas as álgebras A tais que $f \equiv 0$ em A para todo $f \in S$ é chamada de variedade $\mathcal{V} = \mathcal{V}(S)$ determinada por S. Dizemos que a variedade $\mathcal{V}$ é não trivial se $S \neq 0$ e $\mathcal{V}$ é própria se é não trivial e contém uma álgebra não nula.*

Exemplo 2.26 A classe de todas as álgebras comutativas forma uma variedade própria com $S = \{[x, y]\}$.

Exemplo 2.27 Se considerarmos $S = \{x^n\}$, então $\mathcal{V}(S)$ é a classe de todas álgebras nil de expoente limitado por n.

Definição 2.28 *Sejam $\mathcal{V}$ uma variedade, $A \in \mathcal{V}$ uma álgebra e $Y \subseteq A$ um subconjunto de A. Dizemos que A é relativamente livre em Y (com respeito a $\mathcal{V}$) se, para qualquer álgebra $B \in \mathcal{V}$ e para toda função $\alpha : Y \to B$, existe um único homomorfismo $\beta : A \to B$ estendendo α. Quando $\mathcal{V}$ é a variedade de todas as álgebras, esta é exatamente a definição de álgebra livre em Y. A cardinalidade de Y é chamada de posto de A.*

Observe que o quociente $\dfrac{F\langle X\rangle}{Id(A)}$ da álgebra livre $F\langle X\rangle$ pelo T-ideal de identidades ordinárias $Id(A)$ de uma álgebra A é uma álgebra relativamente livre na variedade gerada por esse T-ideal de identidades.

2.3 Polinômios homogêneos e multilineares

Na teoria de PI-álgebras, quando o corpo base F é infinito, há duas classes de polinômios em $F\langle X\rangle$ que desempenham um papel fundamental na descrição do T-ideal de identidades de uma álgebra, a saber, polinômios homogêneos e polinômios multilineares. Em [36], Kemer provou que, sobre um corpo F de característica zero, todo T-ideal I é gerado por um conjunto finito de polinômios multilineares, isto é, existem $f_1, \cdots, f_m \in F\langle X\rangle$ polinômios multilineares tais que $I = \langle f_1, \cdots, f_m\rangle_T$. Veremos com mais detalhes esse resultado adiante.

Definição 2.29 *Um polinômio $f = f(x_1, \cdots, x_n) \in F\langle X\rangle$ é multilinear se cada indeterminada x_i aparece em todo monômio de f exatamente uma vez. Em outras palavras,*

$$f(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{\sigma\in S_n} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)},$$

onde $\alpha_\sigma \in F$ e S_n é o grupo simétrico agindo em $\{1, \cdots, n\}$.

A seguir, apresentaremos dois exemplos de polinômios multilineares que serão úteis no decorrer do trabalho e que, quando necessário, receberão seu devido destaque.

Exemplo 2.30 O polinômio multilinear

$$Cap_m(x_1, \cdots, x_m, y_1, \cdots, y_{m+1}) = \sum_{\sigma \in S_m} (-1)^\sigma y_1 x_{\sigma(1)} y_2 x_{\sigma(2)} \cdots y_m x_{\sigma(m)} y_{m+1}$$

é chamado de polinômio de Capelli de posto $m \in \mathbb{N}$.

Exemplo 2.31 O polinômio multilinear

$$St_m(x_1, \cdots, x_m) = \sum_{\sigma \in S_m} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \cdots x_{\sigma(m)}$$

é chamado de polinômio Standard de grau $m \in \mathbb{N}$.

Definição 2.32 *Um polinômio $f \in F\langle X\rangle$ é homogêneo na indeterminada x_i, se x_i aparece com o mesmo grau em todos os monômios de f. Se f é homogêneo em todas as suas indeterminadas, dizemos que f é um polinômio multi-homogêneo.*

Definição 2.33 *Seja $m(x_1, \cdots, x_n) \in F\langle X\rangle$ um monômio. Definimos o multigrau de m como sendo a n-upla $(d_1, \cdots, d_n)$, onde $d_i = deg_{x_i} m$ para $i = 1, \cdots, n$. A soma de todos os monômios de f que possuem o mesmo multigrau é chamado de componente multi-homogênea de f.*

Exemplo 2.34 Seja $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_2 + 2x_2 x_3 + 3x_3^2 x_1 + 5x_1 x_2 x_1$. A componente multi-homogênea de multigrau $(2, 1, 0)$ é o polinômio $x_1^2 x_2 + 5x_1 x_2 x_1$.

Exemplo 2.35 O polinômio Standard $St_2(x_1, x_2) = x_1 x_2 - x_2 x_1$ de grau 2 tem uma única componente multi-homogênea de multigrau $(1, 1)$.

O estudo de identidades polinomiais de uma dada álgebra sobre um corpo infinito pode ser reduzido ao estudo de polinômios homogêneos, mais especificamente, multi-homogêneos.

Teorema 2.36 *Seja F um corpo infinito. Se $f \equiv 0$ é uma identidade polinomial para a álgebra A, então toda componente multi-homogênea de f é ainda uma identidade polinomial para A.*

Demonstração. Veja o Teorema 1.3.2, página 6 em [24]. □

A partir do Teorema 2.36, juntamente com o processo de multilinearização (que pode ser visto em [24], Teorema 1.3.7), quando $char F = 0$, é suficiente estudar as identidades polinomiais multilineares.

Teorema 2.37 *Seja F um corpo de característica zero. Todo polinômio não nulo $f \in F\langle X\rangle$ é equivalente a um conjunto finito de polinômios multilineares.*

Demonstração. Veja [24], Teorema 1.3.8, página 8. □

Corolário 2.38 *Seja F um corpo de característica zero. Todo T-ideal é gerado, como um T-ideal, pelos seus polinômios multilineares.*

Demonstração. Veja [24], Corolário 1.3.9, página 9. □

Para nosso estudo de identidades polinomiais multilineares, existe uma outra classe importante de polinômios a considerar, a saber, os polinômios alternados.

Definição 2.39 *Dizemos que um polinômio $f(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_t) \in F\langle X\rangle$ linear nas indeterminadas $x_1, \cdots, x_n$ é alternado nessas variáveis se*

$$f(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_j, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_t) = -f(x_1, \cdots, x_j, \cdots, x_i, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_t)$$

para quaisquer $1 \leq i < j \leq n$. Quando f é alternado em todas as suas variáveis, dizemos apenas que f é alternado.

Exemplo 2.40 O polinômio $[x, y]z^2 = xyz^2 - yxz^2$ é alternado nas variáveis x, y.

Exemplo 2.41 O polinômio de Capelli $Cap_m(x_1, \cdots, x_m, y_1, \cdots, y_{m+1})$ é alternado no conjunto de variáveis $x_i's$ e o polinômio Standard $St_m(x_1, \cdots, x_m)$ é um polinômio alternado.

2.4 Codimensão e cocaracter

Assumimos aqui que o corpo base F possui característica zero.

Com o intuito de compreender melhor o comportamento de identidades de uma determinada álgebra, é interessante considerar sua sequência de codimensões. Para tal finalidade, introduzimos essa seção apresentando uma ação à esquerda do grupo simétrico S_n no espaço dos polinômios multilineares em n variáveis fixadas. Denotamos esse espaço por $P_n = \text{span}\{x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)} | \ \sigma \in S_n\}$. O grupo S_n age de maneira natural à esquerda nos elementos de P_n permutando suas variáveis. A ação é dada por

$$\sigma f(x_1, \cdots, x_n) := f(x_{\sigma(1)}, \cdots, x_{\sigma(n)}), \quad \sigma \in S_n, \ f(x_1, \cdots, x_n) \in P_n.$$

Note que essa ação torna P_n um S_n-módulo à esquerda.

Agora, sejam A uma PI-álgebra e $Id(A)$ o seu T-ideal de identidades. Como T-ideais são invariantes sob permutações de variáveis, temos que $P_n \cap Id(A)$ é um S_n-módulo à esquerda de P_n. Assim, o quociente

$$P_n(A) = \frac{P_n}{P_n \cap Id(A)}$$

herda, naturalmente, a estrutura de S_n-módulo à esquerda.

Definição 2.42 *Para $n \geq 1$, o S_n-caracter de $P_n(A)$ é chamado de n-ésimo cocaracter de A e é denotado por $\chi_n(A)$.*

É conhecido que todo caracter é escrito como combinação linear de caracteres irredutíveis. Dessa forma, considere a decomposição n-ésimo cocaracter em

$$\chi_n(A) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda \chi_\lambda,$$

onde χ_λ é o S_n-caracter irredutível associado à partição $\lambda \vdash n$ e m_λ é a sua correspondente multiplicidade. O próximo resultado relaciona identidades polinomiais de uma determinada álgebra A com as multiplicidades dos S_n-caracteres irredutíveis.

Teorema 2.43 *Seja A uma álgebra com n-ésimo cocaracter $\chi_n(A)$. Se A é uma PI-álgebra, então a multiplicidade m_μ é igual a zero, para uma partição $\mu \vdash n$, se, e* *somente se, para qualquer tabela T_μ da forma μ e para qualquer polinômio multilinear $f = f(x_1, \cdots, x_n) \in P_n$, a álgebra A satisfaz a identidade $e_{T_\mu} f \equiv 0$.*

Demonstração. Veja o Teorema 2.4.5, página 55 em [24].

O estudo da sequência de cocaracteres $\{\chi_n(A)\}_{n\geq 1}$ e das respectivas dimensões $\{\dim_F P_n(A)\}_{n\geq 1}$ pode nos fornecer informações sobre o comportamento e descrição de identidades polinomiais de uma dada álgebra.

Definição 2.44 *O inteiro não negativo $c_n(A) = \dim_F P_n(A)$ é chamado de n-ésima codimensão da álgebra A.*

Uma vez que $\dim(P_n \cap Id(A)) = n! - c_n(A)$, A é uma PI-álgebra se, e somente se, $n! - c_n(A) > 0$, ou seja, $c_n(A) < n!$ para algum $n \geq 1$.

Exemplo 2.45 Seja A uma álgebra nilpotente de grau $m \in \mathbb{N}$. Então, todo monômio multilinear $x_1 \cdots x_n$, com $n \geq m$, é uma identidade polinomial de A. Assim, $P_n \cap Id(A) = P_n$, para $n \geq m$ e, portanto, $c_n(A) = 0$.

Exemplo 2.46 ([40, Corolário do Teorema 3.1]) Krakowski e Regev mostraram que a n-ésima codimensão da álgebra de Grassmann E é dada por $c_n(E) = 2^{n-1}$ para todo $n \geq 1$.

Exemplo 2.47 ([24, Teorema 4.15]) Seja $A = UT_2(F)$ a álgebra de matrizes triangulares superiores de ordem 2 sobre um corpo F de característica zero. Temos que $c_n(A) = 2^{n-1}(n-2) + 2$, para todo $n \geq 1$.

A respeito da sequência de codimensões de uma PI-álgebra sobre um corpo F, o seguinte teorema desempenha um papel fundamental na PI-teoria, por ser chave principal em demonstrações de resultados renomados na área. Ele foi provado inicialmente por Regev no Teorema 4.6 do artigo [48]. Mais tarde, Giambruno e Zaicev, em [24], apresentaram uma prova modificada da original além de conseguirem melhorar a cota superior da sequência de codimensões.

Teorema 2.48 *([24, Teorema 4.2.4]) Se a álgebra A satisfaz uma identidade de grau $d \geq 1$, então $c_n(A) \leq (d-1)^{2n}$.*

A seguir, apresentaremos o teorema do Gancho para o caso de álgebras ordinárias, sendo ele um dos resultados chaves deste capítulo e inspiração para o estudo do resultado principal deste trabalho. A essência desse teorema é interessante porque ela descreve, para qualquer PI-álgebra sobre um corpo F de característica zero, a forma dos diagramas de Young cujos correspondentes S_n-caracteres irredutíveis χ_λ aparecem com multiplicidade m_λ eventualmente não nula na decomposição do n-ésimo cocaracter $\chi_n(A)$.

Definição 2.49 *Dados interios $d, l \geq 0$,um gancho infinito $H(d,l)$ é definido como*

$$H(d,l) = \bigcup_{n\geq 1} \{\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots) \vdash n \mid \lambda_{d+1} \leq l\}.$$

Em outras palavras, um gancho infinito $H(d,l)$ pode ser entendido como o conjunto de todas as partições de n cujos diagramas de Young se encontram na região representada pela figura abaixo.

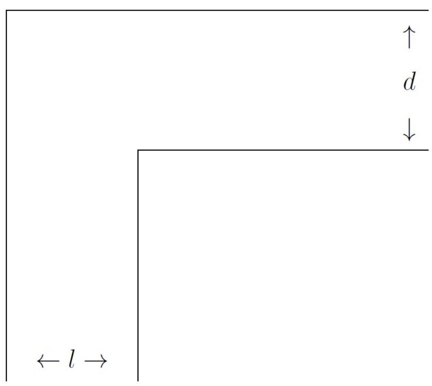

Figura 2.1: Gancho Infinito $H(d,l)$

Dizemos que uma partição $\lambda \vdash n$ encontra-se em $H(d,l)$ se o diagrama de Young correspondente D_λ está contido em $H(d,l)$. Seja M um S_n-módulo com caracter $\chi(M)$ e considere sua decomposição em caracteres irredutíveis $\chi(M) = \sum_{\lambda\vdash n} m_\lambda \chi_\lambda$. Dizemos que $\chi(M) \subseteq H(d,l)$ se $\lambda \in H(d,l)$ para todas as partições satisfazendo $m_\lambda \neq 0$.

Como motivação do Teorema do Gancho, apresentamos o seguinte exemplo.

Exemplo 2.50 ([44]) Seja E a álgebra de Grassmann sobre um corpo F de característica zero. Então, a decomposição do n-cocaracter de E, $\chi_n(E)$, é dada por

$$\chi_n(E) = \sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ \lambda \in H(1,1)}} \chi_\lambda,$$

ou seja, as multiplicidades não nulas são correspondentes a partições no gancho $H(1,1)$.

Os próximos lemas são resultados técnicos a respeito da ação do grupo simétrico S_n no espaço dos polinômios multilineares P_n. São lemas fundamentais para a prova do Teorema do Gancho. O primeiro resultado se refere a uma limitação inferior das dimensões dos espaços correspondentes a partições quadradas, ou seja, partições cujos diagramas de Young são quadrados.

Lema 2.51 *([24, Lema 4.5.2, p. 105]) Sejam q um número real positivo e $n = m^2 > e^4q^2$, onde e é a base do logaritmo natural. Se $\lambda = (m^m) \vdash n$ é uma partição quadrada de n, então $deg\chi_\lambda > q^{m^2}$.*

Lema 2.52 *([24, Lema 4.5.3, p. 105]) Sejam $\lambda \vdash n$ e $\mu \vdash m$, $m \leq n$ e suponha que $\lambda \geq \mu$ ($D_\mu \subseteq D_\lambda$). Considere uma tabela de Young T_λ tal que os inteiros $1, 2, \cdots, m$ são arrajandos nos boxes da subtabela T_μ. Então, o elemento $e_{T_\lambda} \in FS_n$ pode ser escrito na forma*

$$e_{T_\lambda} = a e_{T_\mu} b$$

para alguns elementos $a, b \in FS_n$.

Teorema 2.53 *(Teorema do Gancho) Para qualquer PI-álgebra A, existem inteiros $d, l \geq 0$ tais que o n-ésimo cocaracter $\chi_n(A)$ encontra-se no gancho $H(d,l)$, ou seja,*

$$\chi_n(A) = \sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ \lambda \in H(d,l)}} m_\lambda \chi_\lambda$$

para todo $n \geq 1$.

Demonstração. Veja o Teorema 4.5.1 em [24]. □

Uma aplicação do Teorema do Gancho para o caso de álgebras ordinárias é dada pelo famoso Teorema de Amitsur. A sua prova pode ser encontrada no Teorema 4.5.4 em [24].

Teorema 2.54 *(Teorema de Amitsur) Para qualquer PI-álgebra A, existem inteiros r e m tais que A satisfaz a identidade $St_r^m \equiv 0$.*

Ressaltamos que o Teorema de Amitsur, claramente, é válido para toda álgebra de dimensão finita (veja o Teorema 1.5.8 em [24]). Por outro lado, quando a dimensão da álgebra é infinita, isso nem sempre é verdadeiro. Por exemplo, a álgebra de Grassmann E de dimensão infinita, sobre um corpo F de característica zero, não satisfaz nenhum polinômio Standard. Apesar disso, o Teorema de Amitsur garante que E satisfaz uma potência de um polinômio Standard. Não é difícil ver que essa potência é igual a 2, visto que o quadrado do comutador é consequência do comutador triplo (identidade ordinária de E).

O próximo resultado é uma versão do Teorema do Gancho para o caso de PI-álgebras que satisfazem identidades polinomiais ordinárias de Capelli, conhecido como o Teorema da Faixa (*The Strip Theorem*). Nele, também caracterizamos a sequência de cocaracteres correspondentes cujos caracteres irredutíveis em sua decomposição aparecem com multiplicidade eventualmente não nula. Para mais detalhes, veja o Teorema 4.6.1 em [24].

Teorema 2.55 *(Teorema da Faixa) Sejam A uma PI-álgebra e $\chi_n = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda \chi_\lambda$ seu n-ésimo cocaracter. Então, A satisfaz a identidade de Capelli Cap_k de posto k se, e somente se, $m_\lambda = 0$ sempre que a altura $h(\lambda) \geq k$*

No Capítulo 4, são apresentadas as versões dos Teoremas 2.53, 2.54 e 2.55 para o caso de PI-superálgebras com uma superinvolução e, no Capítulo 5, para PI-superálgebras com uma involução graduada.

Capítulo 3

Superálgebra com Superinvolução # e #-Superidentidades

Neste capítulo, definimos as identidades polinomiais $\mathbb{Z}_2$-graduadas com uma superinvolução # (superidentidades com superinvolução), o objeto principal de nosso estudo, e, sempre que possível, vamos relacioná-las com as identidades ordinárias. Aqui, todas as álgebras serão associativas e consideradas sobre um corpo F de característica zero.

3.1 Álgebra G-graduada

Dados uma álgebra A e G um grupo arbitrário, daremos uma decomposição de A em uma soma direta de subespaços indexados pelos elementos de G satisfazendo certas condições.

Definição 3.1 *Sejam A uma álgebra e G um grupo qualquer. Dizemos que A é uma álgebra G-graduada (ou dotada de uma G-graduação) se, para cada $g \in G$, existe um subespaço $A_g \subseteq A$ tal que A pode ser escrita como a soma direta de subespaços*

$$A = \bigoplus_{g \in G} A_g \quad e \quad A_g A_h \subseteq A_{gh} \quad \forall g, h \in G.$$

Os subespaços A_g são chamados de componentes homogêneas de A e seus elementos de elementos homogêneos de grau g.

Exemplo 3.2 Toda álgebra A admite uma G-graduação trivial, basta definir $A_e = A$ e $A_g = 0$ para todo $g \in G \setminus \{e\}$.

Exemplo 3.3 Seja G um grupo e considere a álgebra de grupo FG. Para cada $g \in G$, tomemos o subespaço $A_g = \text{span}_F\{g\}$ de FG. Claramente a álgebra FG recebe uma G-graduação natural.

Exemplo 3.4 A álgebra livre $A = F\langle X \rangle$ é uma álgebra $\mathbb{Z}$-graduada definida por $A = \oplus_{n \in \mathbb{Z}} A_n$ tal que $A_n = 0$ se $n \leq 0$ e A_n é o espaço gerado por todos os monômios de grau total n se $n > 0$.

Exemplo 3.5 Considere a álgebra de matrizes $A = M_n(F)$ sobre o corpo F. Para cada $t \in \mathbb{Z}_n$, defina o subespaço $A_t = \text{span}_F\{E_{ij};\ j - i \equiv t \pmod{n}\}$, onde E_{ij} denota as matrizes elementares usuais. Não é difícil mostrar que A pode ser decomposta em $A = \bigoplus_{t \in \mathbb{Z}_n} A_t$ e, dessa maneira, esta decomposição define uma $\mathbb{Z}_n$-graduação em A.

Quando $G = \mathbb{Z}_2$, as álgebras $\mathbb{Z}_2$-graduadas, denominadas também de superálgebras, recebem destaque tanto na própria PI-teoria quanto neste trabalho. Nesse caso, a decomposição de A é dada por $A = A_0 \oplus A_1$, em que os subespaços A_0 e A_1 são denominados de componentes par e ímpar, respectivamente. Os elementos de A_0 são chamados de elementos homogêneos de grau 0 ou, simplesmente, elementos pares e os elementos de A_1 de elementos homogêneos de grau 1 ou elementos ímpares.

Exemplo 3.6 Seja E a álgebra de Grassmann de dimensão infinita. A decomposição $E = E_0 \oplus E_1$, onde E_0 é o subespaço gerado pelos monômios de comprimento par e E_1 o subespaço gerado pelos monômios de comprimemto ímpar, é uma $\mathbb{Z}_2$-graduação em E, denominada de graduação canônica.

Exemplo 3.7 Considerando $n = 2$ no Exemplo 3.5, obtemos a $\mathbb{Z}_2$-graduação em $M_2(F)$ dada por $M_2(F) = M_2(F)_0 \oplus M_2(F)_1$, em que

$$M_2(F)_0 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \mid a, b \in F \right\} \text{ e } M_2(F)_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & c \\ d & 0 \end{pmatrix} \mid c, d \in F \right\}.$$

Essa $\mathbb{Z}_2$-graduação na álgebra $M_2(F)$ é conhecida como graduação elementar, e a álgebra $M_2(F)$ com essa $\mathbb{Z}_2$-graduação é denotada por $M_{1,1}(F)$.

Definição 3.8 *Um subespaço $B \subseteq A$ é graduado ou homogêneo se*

$$B = \bigoplus_{g \in G} (A_g \cap B).$$

Em outras palavras, B é graduado se, para qualquer $b \in B$, $b = \sum_{g \in G} b_g$, $b_g \in A_g$, implica que $b_g \in B$ para todo $g \in G$. Definimos de maneira análoga o caso em que B é uma subálgebra graduada ou um ideal à esquerda, à direita ou bilateral graduado de A.

3.2 Superálgebra livre e superidentidades

Sejam F um corpo e G um grupo finito. Consideramos o conjunto X como uma união disjunta $X = \bigcup_{g \in G} X_g$, onde $X_g = \{x_1^{(g)}, x_2^{(g)}, \cdots\}$, e $F\langle X \rangle$ a álgebra livre associativa (não comutativa) sobre F gerada por X (álgebra livre de posto enumerável). As indeterminadas de X_g possuem grau homogêneo g e o grau homogêneo de um monômio $x_{i_1}^{(g_1)} \cdots x_{i_t}^{(g_t)} \in F\langle X \rangle$ é definido por $g_1 \cdots g_t$. Denote por $F\langle X \rangle^{(g)}$ o subespaço de $F\langle X \rangle$ gerado por todos os monômios com grau homogêneo g. Visto que o produto de dois monômios é dado por justaposição, temos que $F\langle X \rangle^{(g)} F\langle X \rangle^{(h)} \subseteq F\langle X \rangle^{(gh)}$ para todos $g, h \in G$. Assim,

$$F\langle X \rangle = \bigoplus_{g \in G} F\langle X \rangle^{(g)}$$

é uma G-graduação definida na álgebra livre $F\langle X \rangle$ e, neste caso, denotamos $F\langle X \rangle$ por $F\langle X \rangle^{gr}$. A álgebra $F\langle X \rangle^{gr}$ é chamada álgebra livre G-graduada de posto enumerável sobre F e seus elementos de polinômios G-graduados ou simplesmente graduados.

Definição 3.9 *Um ideal graduado I de $F\langle X \rangle^{gr}$ é dito ser um T_G-ideal se $\varphi(I) \subseteq I$ para todo endomorfismo G-graduado $\varphi \in End_F^{gr}(F\langle X \rangle^{gr})$, isto é, $\varphi(F\langle X \rangle^{(g)}) \subseteq F\langle X \rangle^{(g)}$ para todo $g \in G$. Em outras palavras, I é um ideal invariante sob todos os endomorfismos φ de $F\langle X \rangle^{gr}$ que preservam a G-graduação.*

Dada uma álgebra G-graduada A, dizemos que um polinômio graduado $f(x_1^{(g_1)}, \cdots, x_n^{(g_n)}) \in F\langle X \rangle^{gr}$ é uma identidade polinomial G-graduada de A, e escrevemos $f \equiv 0$ em A, se $f(a_1^{(g_1)}, \cdots, a_n^{(g_n)}) = 0$ para todos os elementos homogêneos

$a_1^{(g_1)} \in A_{g_1}, \cdots, a_n^{(g_n)} \in A_{g_n}$. O conjunto de todas as identidades G-graduadas de uma álgebra forma um T_G-ideal.

Definição 3.10 *$Id^{gr}(A) = \{f \in F\langle X\rangle^{gr} |\ f \equiv 0$ em $A\}$ é chamado de T_G-ideal de identidades G-graduadas de A.*

Observamos que o conjunto $Id^{gr}(A)$ é um T_G-ideal da álgebra $F\langle X\rangle^{gr}$ e, em geral, estamos interessados em determinar, para uma álgebra A dada, um conjunto $S \subseteq F\langle X\rangle^{gr}$ de polinômios G-graduados que gera $Id^{gr}(A)$ como T_G-ideal.

Definição 3.11 *Fixado um conjunto $S \subseteq F\langle X\rangle^{gr}$, temos:*

1. *O T_G-ideal gerado por S, denotado por $\langle S\rangle_{T_G}$, é o conjunto*

$$\langle S\rangle_{T_G} = \operatorname{span}_F \left\{w_1\phi(f)w_2; f \in S, \phi \in End_F^{gr}(F\langle X\rangle^{gr}), w_1, w_2 \in F\langle X\rangle^{gr}\right\},$$

   se $1 \in F\langle X\rangle^{gr}$ e, caso $1 \notin F\langle X\rangle^{gr}$, definimos

$$\langle S\rangle_{T_G} = \operatorname{span}_F \left\{w_1\psi(f)w_2; f \in S, \psi \in End_F^{gr}(F\langle X\rangle^{gr}), w_1, w_2 \in F\langle X\rangle^{gr} \cup \{1\}\right\}.$$

   Além disso, se $S = \{f_1, \ldots, f_k\}$, então escrevemos $\langle f_1, \ldots, f_k\rangle_{T_G}$ para indicar $\langle S\rangle_{T_G}$;

2. *Um polinômio $f \in F\langle X\rangle^{gr}$ é uma T_G-consequência de S (ou, simplesmente, segue de S) se $f \in \langle S\rangle_{T_G}$;*

3. *Dois conjuntos de polinômios $S_1, S_2 \subseteq F\langle X\rangle^{gr}$ são ditos T_G-equivalentes se $\langle S_1\rangle_{T_G} = \langle S_2\rangle_{T_G}$.*

Apresentadas essas definições e fazendo as devidas alterações para o caso de álgebras G-graduadas, é possível obter resultados semelhantes da teoria de T-ideais e de variedades de álgebras com identidades ordinárias para o caso de identidades polinomiais G-graduadas. O leitor pode consultar, para ver mais detalhes, a Seção 2.2 deste trabalho e o Capítulo 3 em [24].

Agora, escreva $X = Y \cup Z$ como a união disjunta de dois conjuntos enumeráveis de indeterminadas, onde $Y = \{y_1, y_2, \cdots\}$ e $Z = \{z_1, z_2, \cdots\}$. A álgebra $F\langle X\rangle = F\langle Y \cup Z\rangle$

recebe uma $\mathbb{Z}_2$-graduação natural dada por $F\langle Y \cup Z\rangle = \mathcal{F}_0 \oplus \mathcal{F}_1$, onde $\mathcal{F}_0$ (respectivamente, $\mathcal{F}_1$) é o subespaço de $F\langle X\rangle$ gerado por todos os monômios nas indeterminadas em X tendo um número par (respectivamente, ímpar) de indeterminadas de Z. Os elementos de $\mathcal{F}_0$ (respectivamente, de $\mathcal{F}_1$) são ditos de grau homogêneo 0 (respectivamente, 1), ou elementos pares (respectivamente, ímpares).

Como dito antes, dada uma superálgebra A sobre um corpo F, um polinômio $f(y_1, \cdots, y_k, z_1, \cdots, z_m) \in F\langle Y \cup Z\rangle$ é uma identidade $\mathbb{Z}_2$-graduada ou superidentidade de A se

$$f(a_1, \cdots, a_k, b_1, \cdots, b_m) = 0$$

para todos elementos homogêneos $a_1, \cdots, a_k \in A_0$ e $b_1, \cdots, b_m \in A_1$. Temos que o conjunto de superidentidades $Id^{gr}(A)$ é um $T_{\mathbb{Z}_2}$-ideal (ou, simplesmente, T_2-ideal), ou seja, um ideal de $F\langle Y \cup Z\rangle$ invariante sob todos os endomorfismos de $F\langle Y \cup Z\rangle$ que preservam a $\mathbb{Z}_2$-graduação.

Por outro lado, vamos mostrar que todo T_2-ideal de $F\langle Y \cup Z\rangle$ é da forma $Id^{gr}(A)$ para alguma álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada.

Proposição 3.12 *Se I é um T_2-ideal de $F\langle Y, Z\rangle$, então $I = Id^{gr}(A)$ para alguma superálgebra A.*

Demonstração. Primeiro, provaremos que, se I é um T_2-ideal de $F\langle Y, Z\rangle$, então I é homogêneo, ou seja, I contém suas componentes homogêneas. De fato, dado $f = f_0 + f_1 \in I$, com $f_i \in \mathcal{F}_i$, $i = 0, 1$, considere o automorfismo $\mathbb{Z}_2$-graduado $\varphi : F\langle Y, Z\rangle \to F\langle Y, Z\rangle$ definido por $\varphi(y_i) = y_i$ e $\varphi(z_i) = -z_i$. Como I é invariante sob todos os endomorfismos graduados de $F\langle Y, Z\rangle$ e $charF = 0$, segue que $\varphi(f) = f_0 - f_1 \in I$, o que implica que $f_0 = \dfrac{f + \varphi(f)}{2} \in I$ e $f_1 = \dfrac{f - \varphi(f)}{2} \in I$, como queríamos provar. Agora, considere a álgebra quociente $A = \frac{F\langle Y,Z\rangle}{I}$ com a $\mathbb{Z}_2$-graduação induzida de $F\langle Y, Z\rangle$, dada por $A_i = \{f + I;\ f \in \mathcal{F}_i\}, i = 0, 1$. Então, temos $A_iA_j \subseteq A_{i+j}$ e que $A = A_0 + A_1$. Se $f_0 + I = f_1 + I$, com $f_i \in \mathcal{F}_i$, segue que $f_0 - f_1 \in I$ e, como I é homogêneo, obtemos que $f_0, f_1 \in I$ e, portanto, $A_0 \cap A_1 = I$. Assim, $A = A_0 \oplus A_1$ define uma $\mathbb{Z}_2$-graduação em A. Não é difícil mostrar que $I = Id^{gr}(A)$, provando que todo T_2-ideal de $F\langle Y, Z\rangle$ é da forma $Id^{gr}(A)$ para alguma superálgebra A. $\square$

Observamos que o quociente $\dfrac{F\langle Y \cup Z\rangle}{I}$, para um T_2-ideal $I = Id^{gr}(A)$, é uma superálgebra relativamente livre na supervariedade definida pelo T_2-ideal I. A respectiva supervariedade é a classe de todas as superálgebras que satisfazem as superidentidades de $I = Id^{gr}(A)$ (supervariedade gerada pela superálgebra A). Para mais detalhes, veja [24].

Exemplo 3.13 Seja E a álgebra de Grassmann de dimensão infinita e considere $E = E_0 \oplus E_1$ a graduação canônica de E. Os autores, em [17], mostraram que

$$Id^{gr}(E) = \langle [y_1, y_2], [y_1, z_1], z_1 z_2 + z_2 z_1 \rangle_{T_2}.$$

Exemplo 3.14 Seja $UT_2(F)$ a álgebra de matrizes triangulares superiores de ordem 2 sobre F e considere a $\mathbb{Z}_2$-graduação canônica em $UT_2(F)$, isto é, $UT_2(F) = (UT_2(F))_0 \oplus (UT_2(F))_1$, em que $(UT_2(F))_0 = FE_{11} + FE_{22}$, $(UT_2(F))_1 = FE_{12}$ e $E_{ij}'s$ são as matrizes elementares usuais. Valenti, em [55], provou que, a menos de isomorfismo, as únicas $\mathbb{Z}_2$-graduações de $UT_2(F)$ são a trivial e a canônica. Além disso, mostrou que

$$Id^{gr}(UT_2) = \langle [y_1, y_2], z_1 z_2 \rangle_{T_2}.$$

Como no caso de identidades ordinárias, desde que $charF = 0$, o conjunto de identidades polinomiais $\mathbb{Z}_2$-graduadas $Id^{gr}(A)$ é gerado pelos seus polinômios multilineares para qualquer superálgebra A.

Definição 3.15 *Um polinômio $\mathbb{Z}_2$-graduado f é linear na indeterminada $u \in Y \cup Z$ se u aparece com grau 1 em cada monômio de f. Um polinômio $\mathbb{Z}_2$-graduado que é linear em cada uma de suas indeterminadas é dito multilinear $\mathbb{Z}_2$-graduado.*

Teorema 3.16 *Todo polinômio não nulo $f \in F\langle X \rangle^{gr}$ é T_2-equivalente a um conjunto finito de polinômios multilineares $\mathbb{Z}_2$-graduados.*

Demonstração. A demonstração segue de maneira análoga ao Teorema 2.37 com as devidas adequações para o caso de polinômios $\mathbb{Z}_2$-graduados. $\square$

O Teorema 3.16 evidencia a importância de considerar o conjunto

$$P_n^{gr} := \operatorname{span}_F \{ w_{\sigma(1)} \cdots w_{\sigma(n)} \mid \sigma \in S_n, w_i = y_i \text{ ou } w_i = z_i,\ 1 \leq i \leq n \},$$

o espaço vetorial dos polinômios multilineares $\mathbb{Z}_2$-graduados de grau n nas indeterminadas $y_1, \cdots, y_n, z_1, \cdots, z_n$ e o subespaço $P_n^{gr} \cap Id^{gr}(A)$ de identidades polinomiais multilineares $\mathbb{Z}_2$-graduadas de uma superálgebra A do espaço P_n^{gr}. Assim, podemos considerar o espaço quociente $P_n^{gr}(A) = \dfrac{P_n^{gr}}{P_n^{gr} \cap Id^{gr}(A)}$, um espaço de elementos multilineares $\mathbb{Z}_2$-graduados de grau n da superálgebra relativamente livre $\dfrac{F\langle Y \cup Z\rangle}{Id^{gr}(A)}$.

Denotamos por

$$c_n^{gr}(A) := \dim_F \frac{P_n^{gr}}{P_n^{gr} \cap Id^{gr}(A)}$$

a n-ésima codimensão graduada de A (ou a n-ésima $\mathbb{Z}_2$-codimensão graduada de A).

Para cada decomposição $n = n_1 + n_2$, tal que n_1 e n_2 são inteiros não negativos, definindo o espaço P_{n_1,n_2} como

$$\begin{aligned} P_{n_1,n_2} := \operatorname{span}_F\{w_{\sigma(1)} \cdots w_{\sigma(n)} | \ \sigma \in S_n, w_i = y_i \text{ se } i = 1, \cdots, n_1 \\ \text{e } w_i = z_i, \text{ se } i = n_1 + 1, \cdots, n\}, \end{aligned}$$

dos polinômios multilineares de grau n nas indeterminadas pares $y_1, \cdots, y_{n_1}$ e ímpares $z_{n_1+1}, \cdots, z_n$, vemos que $P_{n_1,n_2} \subset P_n^{gr}$ é um subespaço vetorial de P_n^{gr}. Note que o espaço P_{n_1,n_2} é homogêneo em relação à $\mathbb{Z}_2$-graduação de $F\langle Y \cup Z\rangle$. Mais especificamente, se n_2 é par, então $P_{n_1,n_2} \subseteq \mathcal{F}_0$ e, se n_2 é ímpar, então $P_{n_1,n_2} \subseteq \mathcal{F}_1$.

É bem conhecido que

$$P_n^{gr} \cong \bigoplus_{n_1+n_2=n} \binom{n}{n_1, n_2} P_{n_1,n_2}, \tag{3.1}$$

onde $\dbinom{n}{n_1, n_2} = \dfrac{n!}{n_1! n_2!}$ denota o coeficiente multinomial. Com efeito, observe que para cada escolha de $n = n_1 + n_2$, existem exatamente $\dbinom{n}{n_1, n_2}$ subespaços isomorfos a P_{n_1,n_2} (eles se diferem pela escolha dos números exatos para as n_1 indeterminadas $y's$ e n_2 indeterminadas $z's$). Agora, dado $w \in P_n^{gr}$ um monômio qualquer, sejam n_1 e $n_2 = n - n_1$ a quantidade de indeterminadas pares e ímpares de w, respectivamente. Segue que w pertence a um único espaço M, que é isomorfo a P_{n_1,n_2}.

Diante do fato de que um T_2-ideal é invariante em relação a qualquer uma substituição de indeterminadas por indeterminadas do mesmo tipo ($y's$ por $y's$ e $z's$ por

$z's$), que é um endomorfismo graduado da superálgebra livre, o estudo das identidades polinomiais multilineares $\mathbb{Z}_2$-graduadas pode ser simplificado ao considerarmos as identidades multilineares $\mathbb{Z}_2$-graduadas pertencentes ao subespaço $Id^{gr}(A) \cap P_{n_1,n_2} \subset P_{n_1,n_2}$. Com isso, faz sentido definir o quociente $P_{n_1,n_2}(A) = \dfrac{P_{n_1,n_2}}{P_{n_1,n_2} \cap Id^{gr}(A)}$ e $c_{n_1,n_2}(A) = \dim_F P_{n_1,n_2}(A)$. Segue de (3.1) e do fato mencionado acima que

$$c_n^{gr}(A) = \sum_{n_1+n_2=n} \binom{n}{n_1, n_2} c_{n_1,n_2}(A).$$

Observação 3.17 *Com o objetivo de simplificar as notações, a partir de agora, quando escrevermos que um polinômio multilinear $\mathbb{Z}_2$-graduado $f(y_1, \cdots, y_{n_1}, z_1, \cdots, z_{n_2}) \in P_{n_1,n_2}$, fica subentendido que as indeterminadas z_i são iguais a z_{n_1+i}, com $i = 1, 2, \cdots, n_2$.*

Exemplo 3.18 Sejam $E = E_0 \oplus E_1$ a graduação canônica da álgebra de Grassmann e $M_2(E)$ a álgebra das matrizes de ordem 2 com entradas em E. Considere a $\mathbb{Z}_2$-graduação canônica de $M_2(E) = (M_2(E))_0 \oplus (M_2(E))_1$, onde

$$M_2(E)_0 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \mid a, b \in E_0 \right\} \text{ e } M_2(E)_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & c \\ d & 0 \end{pmatrix} \mid c, d \in E_1 \right\}.$$

Di Vincenzo provou em [11] que

$$c_{r,n-r}\left(M_{1,1}(F)\right) = c_{r,n-r}\left(M_{1,1}(E)\right) = \begin{cases} 1, & \text{se } r = n \\ 2^r \begin{pmatrix} n-r \\ \left[\frac{n-r}{2}\right] \end{pmatrix}, & \text{se } 0 \leq r \leq n-1. \end{cases}$$

Agora, considerando o grupo $S_{n_1} \times S_{n_2}$, produto direto dos grupos simétricos S_{n_1} e S_{n_2}, pode-se definir uma ação natural desse grupo no espaço de polinômios P_{n_1,n_2} da seguinte forma: dados $(\sigma_1, \sigma_2) \in S_{n_1} \times S_{n_2}$ e um polinômio $f(y_1, \cdots, y_{n_1}, z_1, \cdots, z_{n_2}) \in P_{n_1,n_2}$, defina

$$(\sigma_1, \sigma_2) f(y_1, \cdots, y_{n_1}, z_1, \cdots, z_{n_2}) := f(y_{\sigma_1(1)}, \cdots, y_{\sigma_1(n_1)}, z_{\sigma_2(1)}, \cdots, z_{\sigma_2(n_2)}).$$

Com essa ação, P_{n_1,n_2} é um $S_{n_1} \times S_{n_2}$-módulo à esquerda. Como T_2-ideais são invariantes por endomorfismos graduados em $F\langle X|\mathbb{Z}_2\rangle$, então $P_{n_1,n_2} \cap Id^{gr}(A)$ é um $S_{n_1} \times S_{n_2}$-

submódulo de P_{n_1,n_2} e, consequentemente, o quociente $P_{n_1,n_2}(A) = \dfrac{P_{n_1,n_2}}{P_{n_1,n_2} \cap Id^{gr}(A)}$ é também um $S_{n_1} \times S_{n_2}$-módulo à esquerda. Denotamos por $\chi_{n_1,n_2}(A)$ o caracter correspondente a $P_{n_1,n_2}(A)$ (ou cocaracter de A) e $c_{n_1,n_2}(A) = \dim_F P_{n_1,n_2}(A)$.

Observação 3.19 *Como a ação de $S_{n_1} \times S_{n_2}$ nos elementos do espaço P_{n_1,n_2} age permutando de forma independente as indeterminadas pares e ímpares e, conforme mostramos na Proposição 3.12 que o T_2-ideal $Id^{gr}(A)$ é homogêneo, segue que o $S_{n_1} \times S_{n_2}$-submódulo à esquerda $P_{n_1,n_2} \cap Id^{gr}(A)$ de P_{n_1,n_2} é homogêneo com respeito à $\mathbb{Z}_2$-graduação de $F\langle Y \cup Z\rangle$.*

3.3 Superálgebra com superinvolução

Seja $A = A_0 \oplus A_1$ uma superálgebra sobre um corpo F de característica zero.

Definição 3.20 *Uma superinvolução em A é uma aplicação F-linear $\mathbb{Z}_2$-homogênea $\# : A \to A$ ($A_0^\# \subseteq A_0$ e $A_1^\# \subseteq A_1$) tal que $(c^\#)^\# = c$ para todo $c \in A$ e $(ab)^\# = (-1)^{deg(a)deg(b)} b^\# a^\#$ para todos elementos homogêneos $a, b \in A_0 \cup A_1$, onde $deg(d)$ é o grau homogêneo de $d \in A_0 \cup A_1$. Dizemos que A é uma #-superálgebra ou ainda que A é uma superálgebra com # superinvolução.*

Dada A uma #-superálgebra, denotamos por $A^+ = \{a \in A \mid a^\# = a\}$ e $A^- = \{a \in A \mid a^\# = -a\}$ os subespaços de elementos simétricos e antissimétricos de A, respectivamente. Como $charF = 0$, pode-se mostrar que $A = A^+ \oplus A^-$. De fato, para todo $a \in A$, temos $a = \dfrac{a + a^\#}{2} + \dfrac{a - a^\#}{2}$, em que $\dfrac{a + a^\#}{2} \in A^+$ e $\dfrac{a - a^\#}{2} \in A^-$, e $a \in A^+ \cap A^-$ implica que $a = a^\# = -a$ e, logo, $a = 0$. Dessa forma, a álgebra A pode ser decomposta como a soma direta de 4 subespaços, da forma

$$A = A_0^+ \oplus A_0^- \oplus A_1^+ \oplus A_1^-,$$

onde $A_i^+ = \{a \in A_i \mid a^\# = a\}$ e $A_i^- = \{a \in A_i \mid a^\# = -a\}$, para $i = 0$ e 1, são os subespaços dos elementos homogêneos simétricos e antissimétricos, respectivamente.

Escrevemos um conjunto enumerável $X = \{x_1, x_2, \cdots\}$ como uma união disjunta de quatro conjuntos enumeráveis $X = Y_0 \cup Z_0 \cup Y_1 \cup Z_1$, onde $Y_0 = \{y_{0,1}, y_{0,2}, \cdots\}$, $Z_0 =$

$\{z_{0,1}, z_{0,2}, \cdots\}$, $Y_1 = \{y_{1,1}, y_{1,2}, \cdots\}$, $Z_1 = \{z_{1,1}, z_{1,2}, \cdots\}$ são conjuntos de variáveis pares simétricas, pares antissimétricas, ímpares simétricas e ímpares antissimétricas, respectivamente. Consideramos $\mathcal{F} = F\langle X|\mathbb{Z}_2, \#\rangle$ a álgebra associativa livre, não comutativa e não unitária, gerada pelo conjunto X sobre o corpo F de característica zero.

Veja que é possível obter uma superestrutura em $\mathcal{F}$. Exigindo que as variáveis de $Y_0 \cup Z_0$ e $Y_1 \cup Z_1$ sejam homogêneas de grau 0 e grau 1, respectivamente, temos que $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \oplus \mathcal{F}_1$, onde $\mathcal{F}_0$ é o subespaço gerado por todos os monômios que têm um número par de variáveis de grau 1 e $\mathcal{F}_1$ é o subespaço gerado por todos os monômios que têm um número ímpar de variáveis de grau 1.

Além dessa superestrutura, podemos definir uma superinvolução na superálgebra livre $\mathcal{F}$. Para isso, seja $\# : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ a aplicação definida por $y_{i,j}^{\#} = y_{i,j}$, $z_{i,j}^{\#} = -z_{i,j}$, para $i = 0, 1$ e $j \geq 1$, e

$$w^{\#} = (x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k})^{\#} = (-1)^{\frac{s(s-1)}{2}} x_{i_k}^{\#} x_{i_{k-1}}^{\#} \cdots x_{i_1}^{\#} = (-1)^{\frac{s(s-1)}{2}} (-1)^t x_{i_k} x_{i_{k-1}} \cdots x_{i_1},$$

onde w é um monômio nas indeterminadas $x_{i_l} \in Y_0 \cup Z_0 \cup Y_1 \cup Z_1$, $s = deg_{Y_1 \cup Z_1}(w)$ (o número de indeterminadas ímpares do monômio w) e $t = deg_{Z_0 \cup Z_1}(w)$ é o número de indeterminadas de $Z_0 \cup Z_1$ no monômio w. Agora, estenda a aplicação $\#$ por linearidade em toda álgebra $\mathcal{F}$. Afirmamos que $\#$ é, de fato, uma superinvolução em $\mathcal{F}$.

Com efeito, por definição, $\#$ é F-linear e pela ação de $\#$ em um monômio w, temos que $w^{\#}$ é um múltiplo de um monômio formado pelas mesmas indeterminadas que formam w. Portanto, fica claro que $\#$ preserva o $\mathbb{Z}_2$-grau de monômios, ou seja, $\#$ é uma aplicação $\mathbb{Z}_2$-graduada. Também é claro que

$$\begin{aligned} (w^{\#})^{\#} &= ((-1)^{\frac{s(s-1)}{2}} (-1)^t \, x_{i_k} x_{i_{k-1}} \cdots x_{i_1})^{\#} = \\ & (-1)^{\frac{s(s-1)}{2}} (-1)^t \, ((-1)^{\frac{s(s-1)}{2}} (-1)^t \, x_{i_1} \cdots x_{i_{k-1}} x_{i_k}) = w, \end{aligned}$$

para todos os monômios $w \in \mathcal{F}$. Logo, vale que $(a^{\#})^{\#} = a$ para todo $a \in \mathcal{F}$ (pela linearidade de $\#$).

Agora, considere dois monômios quaisquer $w_1 = x_{i_1} \cdots x_{i_{k_1}}$ e $w_2 = x_{j_1} \cdots x_{j_{k_2}}$ da álgebra $\mathcal{F}$, onde $x_{i_l}, x_{j_l} \in Y_0 \cup Z_0 \cup Y_1 \cup Z_1$. Temos que

$$\begin{aligned}(w_1 \cdot w_2)^{\#} &= (x_{i_1} \cdots x_{i_{k_1}} \cdot x_{j_1} \cdots x_{j_{k_2}})^{\#} = \\ &(-1)^{\frac{s(s-1)}{2}}(-1)^t x_{j_{k_2}} x_{j_{k_2-1}} \cdots x_{j_1} \cdot x_{i_{k_1}} x_{i_{k_1-1}} \cdots x_{i_1} = (-1)^{\frac{s(s-1)}{2}}(-1)^t\ \tilde{w},\end{aligned}$$

onde $s = deg_{Y_1 \cup Z_1}(w_1 \cdot w_2) = deg_{Y_1 \cup Z_1} w_1 + deg_{Y_1 \cup Z_1} w_2 = s_1 + s_2$ e $t = deg_{Z_0 \cup Z_1}(w_1 \cdot w_2) = deg_{Z_0 \cup Z_1} w_1 + deg_{Z_0 \cup Z_1} w_2 = t_1 + t_2$. Por outro lado,

$$\begin{aligned}&(w_2)^{\#} \cdot (w_1)^{\#} = (x_{j_1} \cdots x_{j_{k_2}})^{\#} \cdot (x_{i_1} \cdots x_{i_{k_1}})^{\#} = \\ &\left((-1)^{\frac{s_2(s_2-1)}{2}}(-1)^{t_2}\ x_{j_{k_2}} x_{j_{k_2-1}} \cdots x_{j_1}\right) \cdot \left((-1)^{\frac{s_1(s_1-1)}{2}}(-1)^{t_1}\ x_{i_{k_1}} x_{i_{k_1-1}} \cdots x_{i_1}\right) = \\ &(-1)^{\frac{s_2(s_2-1)}{2}}(-1)^{t_2}(-1)^{\frac{s_1(s_1-1)}{2}}(-1)^{t_1}\left(x_{j_{k_2}} x_{j_{k_2-1}} \cdots x_{j_1} \cdot x_{i_{k_1}} x_{i_{k_1-1}} \cdots x_{i_1}\right) = \\ &(-1)^{\frac{s_1(s_1-1)}{2} + \frac{s_2(s_2-1)}{2}}(-1)^{(t_1+t_2)}\left(x_{j_{k_2}} x_{j_{k_2-1}} \cdots x_{j_1} \cdot x_{i_{k_1}} x_{i_{k_1-1}} \cdots x_{i_1}\right) = \\ &(-1)^{\frac{s(s-1)}{2}}(-1)^t(-1)^{s_1 s_2}\ \tilde{w},\end{aligned}$$

uma vez que, analisando apenas os coeficientes, obtemos a seguinte igualdade:

$$\begin{aligned}(-1)^{\frac{s(s-1)}{2}}(-1)^t &= (-1)^{\frac{s_1(s_1-1)+s_2(s_2-1)+2s_1s_2}{2}}(-1)^{(t_1+t_2)} = \\ &(-1)^{\frac{s_1(s_1-1)}{2}}(-1)^{\frac{s_2(s_2-1)}{2}}(-1)^{s_1s_2}(-1)^{(t_1+t_2)},\end{aligned}$$

pois

$$\begin{aligned}s(s-1) &= (s_1+s_2)\cdot(s_1+s_2-1) = s_1^2 + s_2^2 - s_1 - s_2 + 2s_1s_2 = \\ &s_1(s_1-1) + s_2(s_2-1) + 2s_1s_2.\end{aligned}$$

Observando que $(-1)^{s_1s_2} = (-1)^{degw_1 \cdot degw_2}$, assim obtemos

$$(w_1w_2)^{\#} = (-1)^{degw_1 \cdot degw_2} w_2^{\#} w_1^{\#}$$

para todos os monômios $w_1, w_2 \in \mathcal{F}$. Por linearidade, podemos estender essa regra para todos os elementos homogêneos de $\mathcal{F}$.

Com essa $\mathbb{Z}_2$-graduação e a superinvolução $\#$, a álgebra $\mathcal{F} = F\langle X|\mathbb{Z}_2, \#\rangle$ é chamada de superálgebra livre com superinvolução ($\#$-superálgebra livre) com posto enumerável. Chamamos os elementos de $\mathcal{F}$ de $\#$-polinômios $\mathbb{Z}_2$-graduados. Para simplificar a escrita, vamos denotá-los apenas por $\#$-superpolinômios.

Definição 3.21 *Dizemos que um ideal bilateral $\mathbb{Z}_2$-graduado I de $\mathcal{F}$ é um $T_2^{\#}$-ideal se I é invariante sob a superinvolução $\#$ ($I^{\#} \subseteq I$) e sob todos os endomorfismos de $F\langle X|\mathbb{Z}_2,\#\rangle$ que preservam a superestrutura e comutam com a superinvolução $\#$.*

Seja

$$f = f(y_{0,1},\cdots,y_{0,m},z_{0,1},\cdots,z_{0,n},y_{1,1},\cdots,y_{1,p},z_{1,1},\cdots,z_{1,q}) \in F\langle X|\mathbb{Z}_2,\#\rangle$$

um $\#$-superpolinômio. Dizemos que f é uma $\#$-superidentidade para A, e escrevemos $f \equiv 0$ em A, se

$$f = f(a_{0,1},\cdots,a_{0,m},b_{0,1},\cdots,b_{0,n},a_{1,1},\cdots,a_{1,p},b_{1,1},\cdots,b_{1,q}) = 0$$

para todos $a_{0,1},\cdots,a_{0,m} \in A_0^+,\ b_{0,1},\cdots,b_{0,n} \in A_0^-,\ a_{1,1},\cdots,a_{1,p} \in A_1^+,\ b_{1,1},\cdots,b_{1,q} \in A_1^-$. Caso contrário, escrevemos $f \not\equiv 0$ em A.

Definimos por

$$Id_2^{\#}(A) := \{f \in F\langle X|\mathbb{Z}_2,\#\rangle \mid f \equiv 0 \text{ em } A\}$$

o $T_2^{\#}$-ideal de $\#$-superidentidades de A. Em alguns momentos, chamaremos tais identidades também de superidentidades com superinvolução. Note que o $T_2^{\#}$-ideal de $\#$-superidentidades de A é homogêneo com respeito à $\mathbb{Z}_2$-graduação da álgebra $\mathcal{F} = F\langle X|\mathbb{Z}_2,\#\rangle$. Para ver isso, basta considerar o automorfismo $\varphi \in End_F(F\langle X|\mathbb{Z}_2,\#\rangle)$ definido por $\varphi(y_{0,i}) = y_{0,i}$, $\varphi(y_{1,i}) = -y_{1,i}$, $\varphi(z_{0,i}) = z_{0,i}$ e $\varphi(z_{1,i}) = -z_{1,i}$ e repetir a primeira parte da prova da Proposição 3.12. Também, estendemos a Definição 3.11 para o caso de $T_2^{\#}$-ideais.

No Capítulo 4, daremos alguns exemplos de superálgebras com uma superinvolução e exibiremos as suas $\#$-superidentidades.

Definição 3.22 *Um $\#$-superpolinômio $f \in F\langle X|\mathbb{Z}_2,\#\rangle$ é homogêneo na indeterminada $u \in Y_0 \cup Z_0 \cup Y_1 \cup Z_1$ se u aparece com o mesmo grau em todos os monômios* *de f. Se f é homogêneo em todas as suas indeterminadas, dizemos que f é um #-superpolinômio multi-homogêneo.*

Definição 3.23 *Seja $m = m(y_{0,1}, \cdots, y_{0,m}, z_{0,1}, \cdots, z_{0,n}, y_{1,1}, \cdots, y_{1,p}, z_{1,1}, \cdots, z_{1,q}) \in F\langle X|\mathbb{Z}_2, \#\rangle$ um monômio. Definimos o #-multigrau de m como sendo*

$$(i_1, \cdots, i_m, j_1, \cdots, j_n, k_1, \cdots, k_p, t_1, \cdots, t_q),$$

onde $i_{r_1} = deg_{y_{0,r_1}} m$, $j_{r_2} = deg_{z_{0,r_2}} m$, $k_{r_3} = deg_{y_{1,r_3}} m$ e $t_{r_4} = deg_{z_{1,r_4}} m$. A soma de todos os monômios de f que possuem o mesmo multigrau é chamada de #-componente multi-homogênea de f. Quando o multigrau de f é $(1, \cdots, 1)$, chamamos f de #-polinômio multilinear.

Teorema 3.24 *Seja A uma #-superálgebra sobre um corpo F infinito, não necessariamente de característica zero. Se $f \equiv 0$ é uma #-superidentidade para a #-superálgebra A, então toda #-componente multi-homogênea de f é também uma #-superidentidade para A.*

Demonstração. Segue de maneira semelhante à prova para o caso em que A é uma álgebra ordinária, fazendo as devidas adequações para #-superidentidades. Veja a demonstração do Teorema 1.3.2 em [24]. □

Desde que $char F = 0$, o conjunto $Id_2^{\#}(A))$ é também determinado pelos seus #-superpolinômios multilineares, o que mostra o seguinte resultado.

Teorema 3.25 *Seja F um corpo de característica zero. Todo #-superpolinômio não nulo $f \in F\langle X|\mathbb{Z}_2, \#\rangle$ é $T_2^{\#}$-equivalente a um conjunto finito de #-superpolinômios multilineares.*

Demonstração. Como $char F = 0$, pelo Teorema 3.24, f é $T_2^{\#}$-equivalente ao conjunto de suas #-componentes multi-homogêneas. Sem perda de generalidade, vamos assumir que $f = f(y_{0,1}, \cdots, y_{0,m}, z_{0,1}, \cdots, z_{0,n}, y_{1,1}, \cdots, y_{1,p}, z_{1,1}, \cdots, z_{1,q})$ é multi-homogêneo e vamos aplicar o processo de multilinearização a f. Se todas as indeterminadas aparecem em todos os monômios de f com grau menor ou igual a 1, especificando algumas indeterminadas iguais a zero, obtemos um #-superpolinômio multilinear. Caso contrário, existe alguma indeterminada, digamos $y_{0,1}$, que aparece com grau $d > 1$. Assim, como estamos considerando f multi-homogêneo, podemos escrever

$$\begin{aligned} h &:= f(y_{0,m+1} + y_{0,m+2}, y_{0,2}, \cdots, y_{0,m}, \cdots, z_{1,q}) \\ &= \sum_{i=0}^{d} g_i(y_{0,m+1}, y_{0,m+2}, y_{0,2}, \cdots, y_{0,m}, \cdots, z_{1,q}), \end{aligned}$$

onde $\deg_{y_{0,m+1}} g_i = i$, $\deg_{y_{0,m+2}} g_i = d - i$ e o grau de g_i é igual ao grau de f nas demais variáveis. Como $g_i = g_i(y_{0,m+1}, y_{0,m+2}, y_{0,2}, \cdots, y_{0,m}, \cdots, z_{1,q})$ é a componente homogênea de h de grau i em $y_{0,m+1}$, com $i = 1, \cdots, d-1$, então todo #-superpolinômio g_i é uma consequência de f. Para vermos que f é uma consequência de cada #-superpolinômio g_i, com $i = 1, \cdots, d - 1$, note que

$$g_i(y_{0,m+1}, y_{0,m+1}, y_{0,2}, \cdots, y_{0,m}, \cdots, z_{1,q}) = \binom{d}{i} f(y_{0,m+1}, y_{0,2}, \cdots, y_{0,m}, \cdots, z_{1,q}).$$

Sendo $charF = 0$, tem-se $\binom{d}{i} \neq 0$ e, assim, f é uma consequência de cada g_i, com $i = 1, \cdots, d - 1$. Diante dessas considerações, tomando $i = 1$, vemos que f é equivalente ao #-superpolinômio $g_1 = g_1(y_{0,m+1}, y_{0,m+2}, y_{0,2}, \cdots, y_{0,m}, \cdots, z_{1,q})$ cujo grau na indeterminada $y_{0,m+1}$ é igual a 1 e, na indeterminada $y_{0,m+2}$, igual a $d - 1$. Se necessário, repetimos esse processo para as indeterminadas $y_{0,m+2}, y_{0,2}, \cdots, y_{0,m}, \cdots, z_{1,q}$ de g_1, concluindo o resultado. □

E, assim, definimos

$$P_n^{grs} := \mathrm{span}_F\{w_{\sigma(1)} \cdots w_{\sigma(n)} |\ \sigma \in S_n, w_i = y_{j,i} \text{ ou } w_i = z_{j,i},\ j = 0, 1\}$$

o espaço dos #-superpolinômios multilineares de grau n nas primeiras n variáveis e denotamos por

$$c_n^{grs}(A) = \dim \frac{P_n^{grs}}{P_n^{grs} \cap Id_2^{\#}(A)}$$

a n-ésima #-codimensão graduada de A.

3.4 $S_{\langle n \rangle}$-representações e $S_{\langle n \rangle}$-ação em $P_{\langle n \rangle}$

Dado um inteiro $n \geq 1$, escrevemos n como a soma de quatro inteiros não negativos, $n = n_1 + n_2 + n_3 + n_4$, onde cada $n_i \geq 0$, e chamamos a 4-upla de $\langle n \rangle = (n_1, n_2, n_3, n_4)$. Uma multipartição $\langle \lambda \rangle = (\lambda(1), \lambda(2), \lambda(3), \lambda(4))$ de $\langle n \rangle$, que será denotada por $\langle \lambda \rangle \vdash \langle n \rangle$, é tal que $\lambda(i) \vdash n_i$ é uma partição de n_i, para $1 \leq i \leq 4$. Considere $T_{\langle \lambda \rangle} = (T_{\lambda(1)}, T_{\lambda(2)}, T_{\lambda(3)}, T_{\lambda(4)})$ uma multitabela de Young associada à multipartição $\langle \lambda \rangle$, onde cada $T_{\lambda(i)}$ é uma tabela de Young correspondente à partição $\lambda(i)$.

Como vimos no Capítulo 2, a teoria de representações do grupo simétrico S_n exerce um papel fundamental no estudo de identidades polinomiais multilineares ordinárias. No caso de superidentidades com superinvolução multilineares, recorreremos à teoria de representações do produto direto de quatro grupos simétricos $S_{\langle n \rangle} := S_{n_1} \times S_{n_2} \times S_{n_3} \times S_{n_4}$, visto que agora estamos lidando com polinômios envolvendo quatro conjuntos de variáveis.

Enfatizamos também que utilizaremos de maneira natural a definição e algumas propriedades básicas de produto tensorial de álgebras. Referenciamos [10] para uma consulta detalhada sobre esse conceito.

Relembramos que os $S_{\langle n \rangle}$-caracteres irredutíveis correspondentes à multipartição $\langle \lambda \rangle$ são obtidos pelo produto tensorial dos caracteres irredutíveis de $S_{n_1}, \cdots, S_{n_4}$ (para mais detalhes veja [12]). Logo, denotamos por $\chi_{\langle \lambda \rangle} = \chi_{\lambda(1)} \otimes \chi_{\lambda(2)} \otimes \chi_{\lambda(3)} \otimes \chi_{\lambda(4)}$ o $S_{\langle \lambda \rangle}$-caracter irredutível associado a uma multipartição $\langle \lambda \rangle$ e $d_{\langle \lambda \rangle} = d_{\lambda(1)} \cdot d_{\lambda(2)} \cdot d_{\lambda(3)} \cdot d_{\lambda(4)}$ o seu grau, onde $d_{\lambda(i)}$ é o grau do caracter irredutível $\chi_{\lambda(i)}$, para $i = 1, 2, 3, 4$. É bem conhecido que todo $S_{\langle n \rangle}$-caracter χ é escrito como combinação linear dos caracteres irredutíveis da seguinte forma:

$$\chi = \sum_{\langle \lambda \rangle \vdash \langle n \rangle} m_{\langle \lambda \rangle} \chi_{\langle \lambda \rangle}, \tag{3.2}$$

onde $m_{\langle \lambda \rangle}$ é a multiplicidade correspondente ao $S_{\langle \lambda \rangle}$-caracter irredutível $\chi_{\langle \lambda \rangle}$.

É um fato bem conhecido (veja [10], Capítulo II, §12C) que a álgebra de grupo $FS_{\langle n \rangle}$ é isomorfa ao produto tensorial de álgebras de grupo $FS_{n_1} \otimes FS_{n_2} \otimes FS_{n_3} \otimes FS_{n_4}$. No que segue, identificaremos naturalmente $FS_{\langle n \rangle}$ com $FS_{n_1} \otimes FS_{n_2} \otimes FS_{n_3} \otimes FS_{n_4}$.

Dados $\lambda \vdash n$ e T_λ uma tabela de Young de forma λ, considere $e_{T_\lambda} = \sum\limits_{\substack{\sigma \in R_{T_\lambda} \\ \tau \in C_{T_\lambda}}} (-1)^\tau \sigma\tau$ o correspondente elemento idempotente minimal essencial de FS_n, onde R_{T_λ} e C_{T_λ} são os subgrupos de S_n estabilizando linhas e colunas de T_λ, respectivamente. Para uma multitabela de Young $T_{\langle\lambda\rangle}$ de forma $\langle\lambda\rangle$, uma multipartição de $\langle n\rangle = (n_1, n_2, n_3, n_4)$, definimos o elemento $e_{T_{\langle\lambda\rangle}} = e_{T_{\lambda(1)}} \otimes e_{T_{\lambda(2)}} \otimes e_{T_{\lambda(3)}} \otimes e_{T_{\lambda(4)}}$ e consideramos o ideal à esquerda $FS_{\langle n\rangle} e_{T_{\langle\lambda\rangle}}$ gerado por ele.

Para qualquer elemento $\langle\sigma\rangle = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4) \in S_{\langle n\rangle}$, denotamos por $\langle\sigma\rangle^{-1} = (\sigma_1^{-1}, \sigma_2^{-1}, \sigma_3^{-1}, \sigma_4^{-1}) \in S_{\langle n\rangle}$ seu inverso e $\langle\sigma\rangle T_{\langle\lambda\rangle} = (\sigma_1 T_{\lambda(1)}, \sigma_2 T_{\lambda(2)}, \sigma_3 T_{\lambda(3)}, \sigma_4 T_{\lambda(4)})$.

Lema 3.26 *Para qualquer multitabela de Young $T_{\langle\mu\rangle}$ de forma $\langle\mu\rangle \vdash \langle n\rangle$, o elemento $e_{T_{\langle\mu\rangle}} = e_{T_{\mu_1}} \otimes e_{T_{\mu_2}} \otimes e_{T_{\mu_3}} \otimes e_{T_{\mu_4}}$ é um idempotente minimal essencial de $FS_{\langle n\rangle}$ e $FS_{\langle n\rangle} e_{T_{\langle\mu\rangle}}$ é um ideal à esquerda minimal de $FS_{\langle n\rangle}$ com caracter $\chi_{\langle\mu\rangle}$. Se $T_{\langle\mu\rangle}$ e $T^*_{\langle\mu\rangle}$ são multitabelas de Young de mesma forma, então $e_{T_{\langle\mu\rangle}}$ e $e_{T^*_{\langle\mu\rangle}}$ são conjugados em $FS_{\langle n\rangle}$ por algum elemento $\langle\sigma\rangle \in FS_{\langle n\rangle}$. Além disso, $\langle\sigma\rangle e_{T_{\langle\mu\rangle}} \langle\sigma\rangle^{-1} = e_{\langle\sigma\rangle T_{\langle\mu\rangle}}$.*

Demonstração. Como $e^2_{T_{\mu_i}} = a_i e_{T_{\mu_i}}$, para algum inteiro não nulo a_i, onde $i = 1, 2, 3, 4$, segue que

$$\begin{aligned}
e^2_{T_{\langle\mu\rangle}} &= (e_{T_{\mu_1}} \otimes e_{T_{\mu_2}} \otimes e_{T_{\mu_3}} \otimes e_{T_{\mu_4}}) \times (e_{T_{\mu_1}} \otimes e_{T_{\mu_2}} \otimes e_{T_{\mu_3}} \otimes e_{T_{\mu_4}}) \\
&= e^2_{T_{\mu_1}} \otimes e^2_{T_{\mu_2}} \otimes e^2_{T_{\mu_3}} \otimes e^2_{T_{\mu_4}} \\
&= (a_1 a_2 a_3 a_4) e_{T_{\mu_1}} \otimes e_{T_{\mu_2}} \otimes e_{T_{\mu_3}} \otimes e_{T_{\mu_4}},
\end{aligned}$$

o que mostra que $e_{T_{\langle\mu\rangle}}$ é um elemento idempotente essencial da álgebra $FS_{\langle n\rangle}$. Para cada $i = 1, 2, 3, 4$, seja $M_i = FS_{n_i} e_{T_{\mu_i}}$ o FS_{n_i}-módulo à esquerda gerado pelo elemento idempotente minimal essencial $e_{T_{\mu_i}}$. Pela Proposição 2.14, M_i é irredutível. Considere $M = FS_{\langle n\rangle} e_{T_{\langle\mu\rangle}} = M_1 \otimes M_2 \otimes M_3 \otimes M_4$ o $FS_{\langle n\rangle}$-módulo à esquerda gerado pelo elemento idempotente essencial $e_{T_{\langle\mu\rangle}}$. Pelo Teorema 1.11.3 em [52], segue que M é irredutível. A segunda parte do lema segue também aplicando a Proposição 2.14 e utilizando novamente as propriedades do produto tensorial de álgebras. □

Sobre os elementos idempotentes minimais, vale também o seguinte resultado, que é uma adaptação do Lema 2.4.1 de [24].

Lema 3.27 *Seja M um $S_{\langle n\rangle}$-módulo irredutível à esquerda com caracter $\chi(M) = \chi_{\langle\mu\rangle}$, $\langle\mu\rangle \vdash \langle n\rangle$. Então, M pode ser gerado como um $S_{\langle n\rangle}$-módulo por um elemento da forma $e_{T_{\langle\mu\rangle}} f$ para algum $f \in M$ e para alguma tabela de Young $T_{\langle\mu\rangle}$ de forma $\langle\mu\rangle$. Além disso, para toda tabela de Young $T^*_{\langle\mu\rangle}$ de forma $\langle\mu\rangle$, existe $f' \in M$ tal que $M = FS_{\langle n\rangle} e_{T^*_{\langle\mu\rangle}} f'$.*

Demonstração. Pelo Teorema de Maschke, podemos escrever

$$FS_{\langle n\rangle} = \bigoplus_{\substack{\langle\mu\rangle\vdash\langle n\rangle \\ T_{\langle\mu\rangle} \text{ standard}}} FS_{\langle n\rangle} e_{T_{\langle\mu\rangle}}.$$

Desde que $M = FS_{\langle n\rangle} M \neq \{0\}$, existem uma multipartição $\langle\mu\rangle$ de $\langle n\rangle$, $T_{\langle\mu\rangle}$ uma multitabela standard e um elemento $f \in M$ tais que $0 \neq FS_{\langle n\rangle} e_{T_{\langle\mu\rangle}} f \subseteq M$. Como M é irredutível, segue que $M = FS_{\langle n\rangle} e_{T_{\langle\mu\rangle}} f$. A segunda parte do lema segue também aplicando o Lema 2.16 e utilizando novamente as propriedades do produto tensorial de álgebras. $\square$

Definimos $P_{\langle n\rangle}$ o espaço dos #-polinômios multilineares nos quais as primeiras n_1 variáveis são pares simétricas de grau 0, as próximas n_2 variáveis são pares antissimétricas de grau 0, as próximas n_3 variáveis são ímpares simétricas de grau 1 e as próximas n_4 variáveis são ímpares antissimétricas de grau 1. Note que o espaço $P_{\langle n\rangle}$ é homogêneo em relação à $\mathbb{Z}_2$-graduação de $\mathcal{F} = F\langle X|\mathbb{Z}_2, \#\rangle$. Mais especificamente, se $n_3 + n_4$ é par, então $P_{\langle n\rangle} \subseteq \mathcal{F}_0$ e, se $n_3 + n_4$ é ímpar, então $P_{\langle n\rangle} \subseteq \mathcal{F}_1$.

Usando argumentos semelhantes dados na prova da Equação 3.1, obtemos o isomorfismo

$$P_n^{grs} \cong \bigoplus_{\langle n\rangle} \binom{n}{\langle n\rangle} P_{\langle n\rangle}, \tag{3.3}$$

onde $\binom{n}{\langle n\rangle} = \binom{n}{n_1,n_2,n_3,n_4}$ é o coeficiente multinomial.

Diante do fato de que um $T_2^{\#}$-ideal é invariante em relação a qualquer uma substituição de indeterminadas por indeterminadas do mesmo tipo ($y_0's$ por $y_0's$, $y_1's$ por $y_1's$, $z_0's$ por $z_0's$ e $z_1's$ por $z_1's$), que é um endomorfismo graduado da superálgebra livre $F\langle X|\mathbb{Z}_2, \#\rangle$, o estudo das #-superidentidades polinomiais multilineares pode ser simplificado ao considerarmos as #-superidentidades multilineares pertencentes ao subespaço $Id_2^{\#}(A)) \cap P_{\langle n\rangle} \subset P_{\langle n\rangle}$. Com isso, definimos o quociente $P_{\langle n\rangle}(A) = \dfrac{P_{\langle n\rangle}}{P_{\langle n\rangle} \cap Id_2^{\#}(A)}$

e $c_{\langle n\rangle}(A) = \dim_F P_{\langle n\rangle}(A)$. Segue de (3.3) e dessas considerações acima que

$$c_n^{grs}(A) = \sum_{n_1+\cdots+n_4=n} \binom{n}{n_1, n_2, n_3, n_4} c_{\langle n\rangle}(A). \tag{3.4}$$

De acordo com o Teorema 2.48, Regev mostrou que, se A é uma PI-álgebra ordinária, então a sequência de codimensões de A $(c_n(A))_{n\geq 1}$ é exponencialmente limitada, ou seja, existe um número real $d \geq 1$ tal que, para todo $n \geq 1$,

$$c_n(A) \leq d^n. \tag{3.5}$$

Lema 3.28 *Seja A uma $\#$-superálgebra. Então, para qualquer $n \geq 1$, temos*

$$c_n^{grs}(A) \leq 4^n c_n(A).$$

Demonstração. Seja $\{f_1(x_1, \cdots, x_n), \cdots, f_k(x_1, \cdots, x_n)\}$ uma base do espaço P_n módulo $P_n \cap Id(A)$, $k = c_n(A)$. Então, para todo $\sigma \in S_n$, podemos escrever os monômios do P_n

$$x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)} \equiv \sum_{i=1}^{k} \alpha_{i,\sigma} f_i(x_1, \cdots, x_n)$$

módulo $P_n \cap Id(A)$. Agora, considere a seguinte notação. Dada uma indeterminada x_i, $i \in \{1, \cdots, n\}$, vamos fazer a substituição $x_i = w_i$ por uma indeterminada no conjunto $Y_0 \cup Z_0 \cup Y_1 \cup Z_1$, onde $w_i \in \{y_{0,i}, z_{0,i}, y_{1,i}, z_{1,i}\}$ para todos $i = 1, \cdots, n$, de todas as formas possíveis. Assim,

$$w_{\sigma(1)} \cdots w_{\sigma(n)} \equiv \sum_{i=1}^{k} \alpha_{i,\sigma} f_i(w_1, \cdots, w_n)$$

módulo $Id_2^{\#}(A)$, uma vez que $Id(A) \subseteq Id_2^{\#}(A)$. Com isso, o conjunto

$$\{f_i(w_1, \cdots, w_n);\ w_j \in \{y_{0,j}, z_{0,j}, y_{1,j}, z_{1,j}\},\ 1 \leq i \leq k\ \ 1 \leq j \leq n\}$$

gera o espaço P_n^{grs} módulo $Id_2^{\#}(A)$ e, portanto,

$$c_n^{grs}(A) \leq 4^n c_n(A),$$

como queríamos. $\square$

Assim, do Lema 3.28 e de (3.5), o próximo corolário é imediato.

Corolário 3.29 *Seja A uma $\#$-superálgebra. Se A é uma PI-álgebra, então sua sequência de $\#$-codimensões graduadas $(c_n^{grs}(A))_{n\geq 1}$ é exponencialmente limitada, isto é, existe um número real $\hat{d}$ satisfazendo para todo $n \geq 1$*

$$c_n^{grs}(A) \leq (\hat{d})^n.$$

Demonstração. Considere $d \geq 1$ dado em (3.5). Disso e do Lema 3.28, segue que

$$c_n^{grs}(A) \leq 4^n c_n(A) \leq 4^n d^n = (4d)^n = (\hat{d})^n,$$

onde $\hat{d} = 4d$. $\square$

Note que $P_{\langle n\rangle}$ possui uma estrutura natural de $S_{\langle n\rangle}$-módulo à esquerda, definindo a seguinte ação de $S_{\langle n\rangle}$ em $P_{\langle n\rangle}$: dados $f \in P_{\langle n\rangle}$ e $\langle\sigma\rangle = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4) \in S_{\langle n\rangle}$, tem-se

$$\langle\sigma\rangle f = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4) f(y_{0,1}, \cdots, y_{0,n_1}, z_{0,1}, \cdots, z_{0,n_2}, y_{1,1}, \cdots, y_{1,n_3}, z_{1,1}, \cdots, z_{1,n_4})$$
$$= f(y_{0,\sigma_1(1)}, \cdots, y_{0,\sigma_1(n_1)}, z_{0,\sigma_2(1)}, \cdots, z_{0,\sigma_2(n_2)}, y_{1,\sigma_3(1)}, \cdots, y_{1,\sigma_3(n_3)}, z_{1,\sigma_4(1)}, \cdots, z_{1,\sigma_4(n_4)}).$$

Como $T_2^{\#}$-ideais de $\#$-superidentidades são invariantes sob a ação dada, temos que $P_{\langle n\rangle} \cap Id_2^{\#}(A)$ é um $S_{\langle n\rangle}$-módulo à esquerda de $P_{\langle n\rangle}$. Podemos, assim, induzir no quociente $P_{\langle n\rangle}(A)$ uma estrutura de $S_{\langle n\rangle}$-módulo à esquerda. Não é difícil ver que $P_{\langle n\rangle}(A)$ também é um espaço homogêneo com respeito a $\mathbb{Z}_2$-graduação da $\#$-superálgebra relativamente livre e que $P_{\langle n\rangle}(A)$ tem o mesmo grau homogêneo que $P_{\langle n\rangle}$. Considere a decomposição do caracter $\chi_{\langle n\rangle}(A)$ de $P_{\langle n\rangle}(A)$ (o n-ésimo $\#$-cocaracter graduado de A ou, simplesmente, $\#$-cocaracter)

$$\chi_{\langle n\rangle}(A) = \sum_{\langle\lambda\rangle \vdash \langle n\rangle} m_{\langle\lambda\rangle} \chi_{\langle\lambda\rangle},$$

onde $m_{\langle\lambda\rangle}$ é a correspondente multiplicidade associada ao $S_{\langle n\rangle}$-caracter irredutível $\chi_{\langle\lambda\rangle}$.

Proposição 3.30 *Sejam F um corpo de característica zero, A uma $\#$-superálgebra e $\chi_{\langle n\rangle}(A)$ o seu n-ésimo $\#$-cocaracter. Se A é uma PI-álgebra, então a multiplicidade $m_{\langle\mu\rangle}$ é igual a zero, para uma multipartição $\langle\mu\rangle \vdash \langle n\rangle$, se, e somente se, para qualquer multitabela $T_{\langle\mu\rangle}$ de forma $\langle\mu\rangle$ e para qualquer $\#$-superpolinômio multilinear $f = f(y_{0,1},\cdots,y_{0,n_1},z_{0,1},\cdots,z_{0,n_2},y_{1,1},\cdots,y_{1,n_3},z_{1,1},\cdots,z_{1,n_4}) \in P_{\langle n\rangle}$, a álgebra A satisfaz a $\#$-superidentidade $e_{T_{\langle\mu\rangle}}f \equiv 0$.*

Demonstração. Pelo Teorema de Maschke, considere J um submódulo de $P_{\langle n\rangle}$ tal que $P_{\langle n\rangle} = (P_{\langle n\rangle} \cap Id_2^{\#}(A)) \oplus J$. Pelo 2° Teorema dos Isomorfismos, J é isomorfo a $P_{\langle n\rangle}(A)$ e, portanto, $\chi_J = \chi_{\langle n\rangle}(A)$. Se $m_{\langle\mu\rangle} = 0$, não existe nenhum submódulo de J isomorfo a $FS_{\langle n\rangle}e_{T_{\langle\mu\rangle}}$, para qualquer multitabela $T_{\langle\mu\rangle}$ de forma $\langle\mu\rangle$, uma vez que, pelo Lema 3.26, o módulo à esquerda $FS_{\langle n\rangle}e_{T_{\langle\mu\rangle}}$ é irredutível. Supondo que $e_{T_{\langle\mu\rangle}} \cdot h \neq 0$ para algum $h \in J$, considere a aplicação $\varphi : FS_{\langle n\rangle}e_{T_{\langle\mu\rangle}} \to FS_{\langle n\rangle}e_{T_{\langle\mu\rangle}} \cdot h$ dada por $\varphi(\alpha) = \alpha \cdot h$. Note que φ é um isomorfismo de $S_{\langle n\rangle}$-módulos, o que é um absurdo, pois $FS_{\langle n\rangle}e_{T_{\langle\mu\rangle}} \cdot h \subset J$. Necessariamente, $e_{T_{\langle\mu\rangle}} \cdot h = 0$ para todo $h \in J$. Lembrando que $P_{\langle n\rangle} = (P_{\langle n\rangle} \cap Id_2^{\#}(A)) \oplus J$, todo elemento $f \in P_{\langle n\rangle}$ pode ser decomposto como $f = g + h$, onde $g \in P_{\langle n\rangle} \cap Id_2^{\#}(A)$ e $h \in J$, de tal modo que

$$e_{T_{\langle\mu\rangle}}f = e_{T_{\langle\mu\rangle}}g + e_{T_{\langle\mu\rangle}}h = e_{T_{\langle\mu\rangle}}g \in P_{\langle n\rangle} \cap Id_2^{\#}(A).$$

Portanto, $e_{T_{\langle\mu\rangle}}f \in Id_2^{\#}(A)$ para todo $f \in P_{\langle n\rangle}$. Reciprocamente, suponha que $m_{\langle\mu\rangle} \neq 0$. Então, J possui um submódulo minimal M satisfazendo $\chi(M) = \chi_{\langle\mu\rangle}$. Pelo Lema 3.27, existe $f \in M$ tal que $M = FS_{\langle n\rangle}e_{T_{\langle\mu\rangle}}f$ para alguma multitabela $T_{\langle\mu\rangle}$ associada à partição $\langle\mu\rangle$. Em vista de $M \neq 0$, segue que $e_{T_{\langle\mu\rangle}}f \neq 0$ e, consequentemente, $e_{T_{\langle\mu\rangle}}f \notin (P_{\langle n\rangle} \cap Id_2^{\#}(A)) \cap J = \{0\}$. Como $e_{T_{\langle\mu\rangle}}f \in J$, segue que $e_{T_{\langle\mu\rangle}}f \notin Id_2^{\#}(A)$, o que conclui a demonstração. □

Finalizamos este capítulo fazendo uma observação importante que será utilizada na demonstração do Teorema do Gancho para $\#$-superálgebras. Seja m um inteiro positivo. Considere uma partição quadrada $\nu = (m^m) \vdash m^2$ com T_ν sua respectiva tabela Standard. Para fins de simplicidade, vamos adotar as seguintes notações para a próxima observação. Denotaremos $\mathcal{S} = FS_1 \otimes \cdots \otimes FS_{m^2} \otimes \cdots \otimes FS_1$, onde S_1 é o grupo trivial, e $\tilde{e}_{T_\nu} = Id_1 \otimes \cdots \otimes e_{T_\nu} \otimes \cdots \otimes Id_4 \in F\mathcal{S}$, onde $Id_i \in FS_1$.

Observação 3.31 *Considere M o $\mathcal{S}$-módulo gerado pelo elemento $\tilde{e}_{T_\nu}$. Então, pelo Teorema 1.11.3 de [52], M é um $\mathcal{S}$-módulo irredutível. Além disso, se $w \in P_{\langle t \rangle}$, onde $\langle t \rangle = (t_1, t_2, t_3, t_4)$ com $t = t_1 + t_2 + t_3 + t_4$, com $t_{i_0} \geq m^2$ para algum $i_0 \in \{1, 2, 3, 4\}$, é um monômio tal que $\tilde{e}_{T_\nu} w \not\equiv 0$ em A, então o $\mathcal{S}$-módulo M_0, contido em $P_{\langle t \rangle}$, gerado pelo elemento $\tilde{e}_{T_\nu} w$ é irredutível. Com efeito, note que $M_0 = Mw$. Seja $0 \neq N_0 \subseteq M_0$ um $\mathcal{S}$-submódulo de M_0. Temos que $N_0 = Nw$, com $0 \neq N \subseteq M$ um $\mathcal{S}$-submódulo de M. Como M é irredutível, temos que $N = M$, mostrando que $N_0 = M_0$.*

Capítulo 4

Principais Resultados

Neste capítulo, demonstraremos os Teoremas do Gancho e da Faixa para superálgebras com superinvolução. Como uma consequência do Teorema do Gancho, provaremos o análogo do Teorema de Amitsur para superálgebras com superinvolução.

Assumimos aqui que todas as álgebras consideradas são álgebras associativas sobre um corpo F de característica zero com uma superinvolução $\#$.

4.1 Teorema do Gancho para #-superálgebra

Destacamos dois pontos cruciais na demonstração do Teorema do Gancho para superálgebras com uma superinvolução quando a comparamos com a prova do teorema clássico, o caso ordinário. Primeiro ponto, talvez o mais importante, seja renomear as indeterminadas de um monômio específico (veja (4.3)) e, quando avaliado na álgebra, saber em que componente cada palavra se encontra (veja (4.1)) para, após isso, controlar o grau em relação ao número de indeterminadas, em um certo sentido, do monômio obtido (veja (4.4)). No caso clássico, não há essas dificuldades, uma vez que todo reagrupamento de indeterminadas, quando avaliado na álgebra, não produz a preocupação de saber em que componente homogênea se encontra. Segundo ponto, determinar um FS_{m^2}-módulo irredutível associado a uma partição quadrada de m^2 e obter, assim, uma relação com o seu grau e com um termo da sequência de codimensões (veja (4.6)).

A seguir, formularemos uma proposição que foi chave principal para contornar essas dificuldades. Antes, vamos fixar algumas notações. Dados os conjuntos $Y_0 = \{y_{0,1}, y_{0,2}, \cdots\}$, $Z_0 = \{z_{0,1}, z_{0,2}, \cdots\}$, $Y_1 = \{y_{1,1}, y_{1,2}, \cdots\}$, $Z_1 = \{z_{1,1}, z_{1,2}, \cdots\}$ de indeterminadas pares simétricas, pares antissimétricas, ímpares simétricas e ímpares antissimétricas, respectivamente, considere os conjuntos finitos: $\mathcal{Y}_{0,t_1} = \{y_{0,1}, y_{0,2}, \cdots, y_{0,t_1}\} \subset Y_0$, $\mathcal{Z}_{0,t_2} = \{z_{0,1}, z_{0,2}, \cdots, z_{0,t_2}\} \subset Z_0$, $\mathcal{Y}_{1,t_3} = \{y_{1,1}, y_{1,2}, \cdots, y_{1,t_3}\} \subset Y_1$, $\mathcal{Z}_{1,t_4} = \{z_{1,1}, z_{1,2}, \cdots, z_{1,t_4}\} \subset Z_1$, para quaisquer inteiros $t_1, t_2, t_3, t_4 > 0$. Denotaremos um polinômio

$$f(y_{0,1}, \cdots, y_{0,t_1}, \cdots, z_{1,1}, \cdots, z_{1,t_4}) \in P_{\langle t \rangle},$$

onde $t = t_1+t_2+t_3+t_4$ e $\langle t \rangle = (t_1, t_2, t_3, t_4)$, simplesmente por $f(\mathcal{Y}_{0,t_1}, \mathcal{Z}_{0,t_2}, \mathcal{Y}_{1,t_3}, \mathcal{Z}_{1,t_4}) \in P_{\langle t \rangle}$. Além disso, escreveremos $P_{\langle t \rangle}(R_{0,t_1}, L_{0,t_2}, R_{1,t_3}, L_{1,t_4})$ para significar o espaço vetorial dos #-polinômios gerado pelos #-monômios multilineares nas indeterminadas $R_{0,t_1} \subseteq Y_0$, $L_{0,t_2} \subseteq Z_0$, $R_{1,t_3} \subseteq Y_1$ e $L_{1,t_4} \subseteq Z_1$, onde R_{0,t_1} possui t_1 indeterminadas pares simétricas, L_{0,t_2} tem t_2 indeterminadas pares antissimétricas, R_{1,t_3} possui t_3 indeterminadas ímpares simétricas e L_{1,t_4} tem t_4 indeterminadas ímpares antissimétricas. Enfatizamos que os elementos desses conjuntos definidos não são necessariamente as primeiras indeterminadas de cada componente homogênea. Por exemplo, o conjunto R_{1,t_3} possui t_3 indeterminadas ímpares simétricas, mas não necessariamente as t_3 primeiras indeterminadas do conjunto Y_1.

Utilizaremos propriedades do produto tensorial de álgebras e de espaços vetoriais nas demonstrações dos resultados que seguem. O leitor pode consultar [10] para relembrá-las.

Proposição 4.1 *Sejam A uma #-superálgebra, n_1, n_2, n_3, n_4, m inteiros positivos e $i_0 \in \{1, 2, 3, 4\}$ com $n_{i_0} \geq m^2$. Considere $Q = \{q_1, q_2, \cdots, q_{m^2}\} \subseteq \{1, 2, \cdots, n_{i_0}\}$, com $|Q| = m^2$. Seja*

$$\rho = \rho_1 \otimes \cdots \otimes \rho_{i_0} \otimes \cdots \otimes \rho_4 \in FS_{n_1} \otimes \cdots \otimes FS_Q \otimes \cdots \otimes FS_{n_4}$$

tal que $\rho(f) \not\equiv 0$ em A, onde $f = f(\mathcal{Y}_{0,n_1}, \mathcal{Z}_{0,n_2}, \mathcal{Y}_{1,n_3}, \mathcal{Z}_{1,n_4}) \in P_{\langle n \rangle}$ é um polinômio multilinear, $\langle n \rangle = (n_1, n_2, n_3, n_4)$, $\rho_{i_0} \in FS_Q$ e $\rho_j \in FS_{n_j}$ para todos $j \neq i_0$. Então, existem inteiros $t_1, t_2, t_3, t_4 \geq 0$ e um monômio $w \in P_{\langle t \rangle}(\mathcal{Y}_{0,t_1}, \cdots, X_{t_{i_0}}, \cdots, \mathcal{Z}_{1,t_4})$, com $t = t_1 + t_2 + t_3 + t_4$ e $X_{t_{i_0}} = \{y_{\gamma,q_1}, \cdots, y_{\gamma,q_{m^2}}, \hat{y}_{\gamma,m^2+1}, \cdots, \hat{y}_{\gamma,t_{i_0}}\} \subset Y_\gamma$ tal que

$\{\hat{y}_{\gamma,m^2+1},\cdots,\hat{y}_{\gamma,t_{i_0}}\}\subseteq\mathcal{Y}_{\gamma,t_{i_0}}\setminus\{y_{\gamma,q_1},\cdots,y_{\gamma,q_{m^2}}\}$ *com* $\gamma=0$ *se* $i_0=1$ *e* $\gamma=1$ *se* $i_0=3$, *ou* $X_{t_{i_0}}=\{z_{\gamma,q_1},\cdots,z_{\gamma,q_{m^2}},\hat{z}_{\gamma,m^2+1},\cdots,\hat{z}_{\gamma,t_{i_0}}\}\subset Z_\gamma$ *tal que* $\{\hat{z}_{\gamma,m^2+1},\cdots,\hat{z}_{\gamma,t_{i_0}}\}\subseteq\mathcal{Z}_{\gamma,t_{i_0}}\setminus\{z_{\gamma,q_1},\cdots,z_{\gamma,q_{m^2}}\}$ *com* $\gamma=0$ *se* $i_0=2$ *e* $\gamma=1$ *se* $i_0=4$, *tais que*

$$(Id_1\otimes\cdots\otimes\rho_{i_0}\otimes\cdots\otimes Id_4)w\not\equiv 0$$

em A *com* $t_{i_0}\geq m^2$ *e* $m^2\leq t\leq 2m^2+1$.

Demonstração: Como

$$(Id_1\otimes\cdots\otimes\rho_{i_0}\otimes\cdots\otimes Id_4)\cdot(\rho_1\otimes\cdots\otimes Id_{i_0}\otimes\cdots\otimes\rho_4)f=\rho(f)\not\equiv 0$$

em A, necessariamente,

$$(Id_1\otimes\cdots\otimes\rho_{i_0}\otimes\cdots\otimes Id_4)\tilde{f}\not\equiv 0$$

em A, onde $\tilde{f}=(\rho_1\otimes\cdots\otimes Id_{i_0}\otimes\cdots\otimes\rho_4)f$ é um polinômio multilinear em $P_{\langle n\rangle}$. Assim, existe um monômio g de $\tilde{f}$ tal que

$$(Id_1\otimes\cdots\otimes\rho_{i_0}\otimes\cdots\otimes Id_4)g\not\equiv 0$$

em A. Vamos renomear as variáveis de g adequadamente. Sem perda de generalidade, podemos assumir $i_0=1$. Por hipótese, $n_1\geq m^2$. Escrevemos g da seguinte forma:

$$g=w_0y_{0,q_1}w_1y_{0,q_2}\cdots w_{k-1}y_{0,q_k}w_k,$$

onde $k=m^2$, $\{q_1,\cdots,q_k\}\subseteq\{1,\cdots,n_1\}$ e $w_0,w_1,\cdots,w_k$ são monômios multilineares nas indeterminadas pertencentes aos conjuntos $\mathcal{Z}_{0,n_2}$ ou $\mathcal{Y}_{1,n_3}$ ou $\mathcal{Z}_{1,n_4}$ ou $\mathcal{Y}_{0,n_1}\setminus\{y_{0,q_1},\cdots,y_{0,q_k}\}$. Como $A=A_0\oplus A_1$ e $A_iA_j\subset A_{i+j}$, para $i,j\in\{0,1\}$, quando avaliamos as indeterminadas de um monômio w_p nos elementos de $A_0^+\cup A_0^-\cup A_1^+\cup A_1^-$ e analisamos o seu grau homogêneo, vamos obter uma avaliação $\hat{w}_p$ de w_p tal que $\hat{w}_p\in A_0$ ou $\hat{w}_p\in A_1$, para todo $p=0,1,\cdots,k$. Logo, definindo $deg\ \hat{w}_p=\gamma_p$, com $\gamma_p=0$ ou 1, podemos decompor $\hat{w}_p$ em $\hat{w}_p=\hat{u}_p^{\gamma_p}+\hat{v}_p^{\gamma_p}$, onde $\hat{u}_p^{\gamma_p}\in A_{\gamma_p}^+$ e $\hat{v}_p^{\gamma_p}\in A_{\gamma_p}^-$ são as partes simétrica e antissimétrica de $\hat{w}_p$, respectivamente. Substituindo em g os monômios não vazios w_p por $y_p^{\gamma_p}+z_p^{\gamma_p}$, onde $y_p^0 \in \mathcal{Y}_{0,n_1} \setminus \{y_{0,q_1}, \cdots, y_{0,q_k}\}$ ou $y_p^1 \in \mathcal{Y}_{1,k+1}$ e $z_p^{\gamma_p} \in \mathcal{Z}_{\gamma_p,k+1}$, com $\gamma_p = 0$ ou 1, obtemos um novo polinômio $\tilde{g}$ da forma

$$\tilde{g} = (y_0^{\gamma_0} + z_0^{\gamma_0})y_{0,q_1} \cdots (y_{k-1}^{\gamma_{k-1}} + z_{k-1}^{\gamma_{k-1}})y_{0,q_k}(y_k^{\gamma_k} + z_k^{\gamma_k}). \tag{4.1}$$

Denotamos $u_p^{\gamma_p} = \dfrac{w_p + w_p^{\#}}{2}$ e $v_p^{\gamma_p} = \dfrac{w_p - w_p^{\#}}{2}$ os polinômios $\mathbb{Z}_2$-homogêneos de grau γ_p que dependem das mesmas indeterminadas que w_p. Temos que $(u_p^{\gamma_p})^{\#} = u_p^{\gamma_p}$, $(v_p^{\gamma_p})^{\#} = -v_p^{\gamma_p}$ e $w_p = u_p^{\gamma_p} + v_p^{\gamma_p}$. Fica claro que o monômio g é obtido de $\tilde{g}$ por substituição $y_p^{\gamma_p} = u_p^{\gamma_p}$ e $z_p^{\gamma_p} = v_p^{\gamma_p}$ em $F\langle Y, Z\rangle$. Destacamos que essa substituição é um endomorfismo graduado e $\#$-invariante. Como g é obtido de $\tilde{g}$ por substituições adequadas das indeterminadas que são diferentes das pertencentes ao conjunto $\{y_{0,q_1} \cdots, y_{0,q_{m^2}}\}$, no qual age ρ_1, então o polinômio $(\rho_1 \otimes Id_2 \otimes Id_3 \otimes Id_4)g$ também é obtido de $(\rho_1 \otimes Id_2 \otimes Id_3 \otimes Id_4)\tilde{g}$ pelas mesmas substituições. Desde que

$$(\rho_1 \otimes Id_2 \otimes Id_3 \otimes Id_4)g \neq 0$$

em A e, como observado, g é obtido de $\tilde{g}$ por substituições adequadas, temos que

$$(\rho_1 \otimes Id_2 \otimes Id_3 \otimes Id_4)\tilde{g} \neq 0$$

em A. Como $\tilde{g}$ é um polinômio multilinear que é soma de monômios de grau no mínimo m^2 e no máximo $2m^2+1$, aplicando a distributividade, necessariamente, existem inteiros $t_1, t_2, t_3, t_4 \geq 0$ e um monômio $w = w(X_{t_1}, \mathcal{Z}_{0,t_2}, \mathcal{Y}_{1,t_3}, \mathcal{Z}_{1,t_4}) \in P_{\langle t\rangle}(X_{t_1}, \mathcal{Z}_{0,t_2}, \mathcal{Y}_{1,t_3}, \mathcal{Z}_{1,t_4})$, com $t = t_1 + t_2 + t_3 + t_4$ e $X_{t_1} = \{y_{0,q_1}, \cdots, y_{0,q_{m^2}}, \hat{y}_{0,m^2+1}, \cdots, \hat{y}_{0,t_1}\} \subset Y_0$ tal que $\{\hat{y}_{0,m^2+1}, \cdots, \hat{y}_{0,t_1}\} \subseteq \mathcal{Y}_{0,t_1} \setminus \{y_{0,q_1}, \cdots, y_{0,q_{m^2}}\}$, tais que $m^2 \leq t \leq 2m^2 + 1$ e

$$(\rho_1 \otimes Id_2 \otimes Id_3 \otimes Id_4)w \neq 0$$

em A, o que prova a proposição para este caso, bastando escolher um dos monômios de $\tilde{g}$ com indeterminadas possivelmente renomeadas. Os casos $i_0 = 2, 3$ e 4 são provados de maneira análoga. $\square$

Observação 4.2 *Na demonstração anterior, o elemento* $\rho \in FS_{n_1} \otimes \cdots \otimes FS_Q \otimes \cdots \otimes FS_{n_4}$, *onde* $Q = \{q_1, q_2, \cdots, q_{m^2}\} \subseteq \{1, 2, \cdots, n_{i_0}\}$, *com* $i_0 \in \{1, 2, 3, 4\}$, *age nas*

$n_1, \cdots, m^2, \cdots, n_4$ *indeterminadas do polinômio* $f \in P_{\langle n \rangle}$ *com índices*

$$\{1, \cdots, n_1; \cdots; q_1, \cdots, q_{m^2}; \cdots; 1, \cdots, n_4\},$$

respectivamente, e fixa as demais.

Exemplo 4.3 Sejam $m^2 = 2^2$, $n = 13$, $n_1 = 3$, $n_2 = 7$, $n_3 = 1$, $n_4 = 2$ e

$$\begin{aligned} f &= y_{0,1}z_{0,1}y_{0,2}z_{0,2}z_{0,3}y_{0,3}z_{0,4}z_{0,5}z_{0,6}z_{0,7}y_{1,1}z_{1,1}z_{1,2} \\ &\quad -z_{0,2}y_{0,2}y_{0,1}z_{0,4}y_{0,3}z_{0,1}z_{0,6}z_{0,3}z_{1,1}z_{0,7}z_{1,2}y_{1,1}z_{0,5} \in P_{\langle n \rangle}. \end{aligned}$$

Vamos determinar quem é o monômio dado na Proposição 4.1. Vamos considerar que estamos no 2º caso, ou seja, quando $i_0 = 2$ e $n_2 = 7 \geq 2^2 = m^2$, $m = 2$ e $Q = \{2, 3, 4, 6\}$. Seja, por exemplo, $\rho \in S_3 \otimes S_Q \otimes S_1 \otimes S_2$ o elemento

$$\rho = (123) \otimes (236) \otimes (1) \otimes (12).$$

Então, $\rho_{i_0} = \rho_2 = (236)$ age nas indeterminadas $\{z_{0,2}, z_{0,3}, z_{0,4}, z_{0,6}\}$. Suponha que $\rho(f) \neq 0$ em A. Logo, (colocamos as indeterminadas $\{z_{0,2}, z_{0,3}, z_{0,4}, z_{0,6}\}$ em negrito apenas para destaque)

$$\begin{aligned} \rho(f) &= [(1) \otimes (236) \otimes (1) \otimes (1)] \cdot \underbrace{[(123) \otimes (1) \otimes (1) \otimes (12)]f}_{\tilde{f}} \\ &= [(1) \otimes (236) \otimes (1) \otimes (1)]\tilde{f} \\ &= [(1) \otimes (236) \otimes (1) \otimes (1)] \left(y_{0,2}z_{0,1}y_{0,3}\mathbf{z}_{0,2}\mathbf{z}_{0,3}y_{0,1}\mathbf{z}_{0,4}z_{0,5}\mathbf{z}_{0,6}z_{0,7}y_{1,1}z_{1,2}z_{1,1}\right. \\ &\quad \left. -\mathbf{z}_{0,2}y_{0,3}y_{0,2}\mathbf{z}_{0,4}y_{0,1}z_{0,1}\mathbf{z}_{0,6}\mathbf{z}_{0,3}z_{1,2}z_{0,7}z_{1,1}y_{1,1}z_{0,5}\right) \neq 0 \end{aligned}$$

em A. Então, para um dos monômios

$$u_1 = y_{0,2}z_{0,1}y_{0,3}\mathbf{z}_{0,2}\mathbf{z}_{0,3}y_{0,1}\mathbf{z}_{0,4}z_{0,5}\mathbf{z}_{0,6}z_{0,7}y_{1,1}z_{1,2}z_{1,1}$$

ou

$$u_2 = \mathbf{z}_{0,2}y_{0,3}y_{0,2}\mathbf{z}_{0,4}y_{0,1}z_{0,1}\mathbf{z}_{0,6}\mathbf{z}_{0,3}z_{1,2}z_{0,7}z_{1,1}y_{1,1}z_{0,5}$$

do polinômio $\tilde{f}$, temos que $[(1) \otimes (236) \otimes (1) \otimes (1)]u_1 \neq 0$ em A ou $[(1) \otimes (236) \otimes (1) \otimes (1)]u_2 \neq 0$ em A. Suponhamos, por exemplo, que $[(1) \otimes (236) \otimes (1) \otimes (1)]u_1 \neq 0$ em A. Logo, considerando a mesma notação da Proposição 4.1, temos que $g = u_1$. Agora, seja a seguinte renomeação de g:

$$g = w_0 \mathbf{z}_{0,2} w_1 \mathbf{z}_{0,3} w_2 \mathbf{z}_{0,4} w_3 \mathbf{z}_{0,6} w_4,$$

onde $w_0 = y_{0,2}z_{0,1}y_{0,3} \in \mathcal{F}_0$, $w_1 = \_\_$(palavra vazia), $w_2 = y_{0,1} \in \mathcal{F}_0$, $w_3 = z_{0,5} \in \mathcal{F}_0$, $w_4 = z_{0,7}y_{1,1}z_{1,2}z_{1,1} \in \mathcal{F}_1$ (os monômios w_p, com $p = 0, 1, 2, 3, 4$, têm os graus respectivos na $\mathbb{Z}_2$-graduação da #-superálgebra livre $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \oplus \mathcal{F}_1$).

Decompondo cada palavra não vazia w_p, para $0 \leq p \leq 2^2$, em sua parte simétrica e antissimétrica e, em seguida, substituindo-as por novas indeterminadas, obtemos um polinômio multilinear $\tilde{g}$ formado por monômios de grau 8 (o grau é no mínimo 2^2 e no máximo $9 = 2(2^2) + 1$). Segue daí que

$$\tilde{g} = (y_0^0 + z_0^0)\mathbf{z}_{0,2}\mathbf{z}_{0,3}(y_2^0 + z_2^0)\mathbf{z}_{0,4}(y_3^0 + z_3^0)\mathbf{z}_{0,6}(y_4^1 + z_4^1),$$

e do fato de

$$h = [(1) \otimes (236) \otimes (1) \otimes (1)]g \neq 0$$

em A, que

$$\tilde{h} = [(1) \otimes (236) \otimes (1) \otimes (1)]\tilde{g} \neq 0$$

em A também. Caso contrário ($\tilde{h} = 0$ em A), vamos obter que $h = 0$ em A, pois h é obtido de $\tilde{h}$ pela seguinte substituição:

$$\begin{aligned}
&y_0^0 = \frac{y_{0,2}z_{0,1}y_{0,3} + y_{0,3}z_{0,1}y_{0,2}}{2}, \quad z_0^0 = \frac{y_{0,2}z_{0,1}y_{0,3} - y_{0,3}z_{0,1}y_{0,2}}{2},\\
&y_4^1 = \frac{z_{0,7}y_{1,1}z_{1,2}z_{1,1} + z_{1,1}z_{1,2}y_{1,1}z_{0,7}}{2}, \quad z_4^1 = \frac{z_{0,7}y_{1,1}z_{1,2}z_{1,1} - z_{1,1}z_{1,2}y_{1,1}z_{0,7}}{2},\\
&y_2^0 = y_{0,1},\ z_2^0 = 0,\ y_3^0 = 0,\ z_3^0 = z_{0,5},
\end{aligned}$$

uma vez que

$$w_0^\# = (y_{0,2}z_{0,1}y_{0,3})^\# = -(y_{0,3})^\#(z_{0,1})^\#(y_{0,2})^\# = -(y_{0,3})(-z_{0,1})(y_{0,2}) = y_{0,3}z_{0,1}y_{0,2},$$
$$w_2^\# = (y_{0,1})^\# = y_{0,1}, \quad w_3^\# = (z_{0,5})^\# = -z_{0,5}$$

e

$$\begin{aligned} w_4^\# &= (z_{0,7}y_{1,1}z_{1,2}z_{1,1})^\# = -(z_{1,1})^\#(z_{1,2})^\#(y_{1,1})^\#(z_{0,7})^\# \\ &= -(-z_{1,1})(-z_{1,2})(y_{1,1})(-z_{0,7}) = z_{1,1}z_{1,2}y_{1,1}z_{0,7}. \end{aligned}$$

Do fato de $\tilde{h} = [(1) \otimes (236) \otimes (1) \otimes (1)]\tilde{g} \neq 0$ em A, segue que para um dos monômios w de $\tilde{g}$ também temos $\tilde{h} = [(1) \otimes (236) \otimes (1) \otimes (1)]w \neq 0$ em A. Vamos assumir, por exemplo, que

$$w = y_0^0\mathbf{z}_{0,2}\mathbf{z}_{0,3}y_2^0\mathbf{z}_{0,4}z_3^0\mathbf{z}_{0,6}y_4^1 = y_{0,1}\mathbf{z}_{0,2}\mathbf{z}_{0,3}y_{0,2}\mathbf{z}_{0,4}z_{0,1}\mathbf{z}_{0,6}y_{1,1} \in P_{(2,5,1,0)}(\mathcal{Y}_{0,2}, X_2, \mathcal{Y}_{1,1}, \mathcal{Z}_{1,0}),$$

assumindo que $y_0^1 = y_{0,1}$, $y_2^0 = y_{0,2}$, $z_3^0 = z_{0,1} \notin \{\mathbf{z}_{0,2}, \mathbf{z}_{0,3}, \mathbf{z}_{0,4}, \mathbf{z}_{0,6}\}$ e $y_4^1 = y_{1,1}$. Aqui, nas notações da Proposição 4.1, temos que $\mathcal{Y}_{0,2} = \{y_{0,1,y_{0,2}}\}$, $\mathcal{Y}_{1,1} = \{y_{1,1}\}$, $X_2 = \{\mathbf{z}_{0,2}, \mathbf{z}_{0,3}, \mathbf{z}_{0,4}, \mathbf{z}_{0,6}, z_{0,1}\}$ ($\rho_2 = (236)$ age nas indeterminadas $\{\mathbf{z}_{0,2}, \mathbf{z}_{0,3}, \mathbf{z}_{0,4}, \mathbf{z}_{0,6}\}$), $\mathcal{Z}_{1,0} = \emptyset$ (conjunto vazio), $t_1 = |\mathcal{Y}_{0,2}| = 2$, $t_2 = |X_2| = 5$, $t_3 = |\mathcal{Y}_{1,1}| = 1$ e $t_4 = |\mathcal{Z}_{1,0}| = 0$, $t = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = 8$ ($2^2 = 4 \leq 8 \leq 2(2)^2 + 1$, $m = 2$, $t = 8$). E, para o monômio w, temos que

$$[(1) \otimes (236) \otimes (1) \otimes (1)]w \neq 0$$

em A, como afirma a Proposição 4.1.

A seguir, apresentamos a prova do Teorema A, mencionado na introdução deste trabalho. Antes, escreveremos $\lambda \in H(d,l)$ para alguns inteiros $d, l \geq 0$ se o diagrama de Young D_λ correspondente está contido em $H(d,l)$, e denotaremos $D_\lambda \subseteq H(d,l)$.

Teorema 4.4 *(Teorema do Gancho para #-superálgebras) Sejam F um corpo de característica zero e A uma superálgebra sobre F com uma superinvolução #. Se A é* *uma PI-álgebra, então existem inteiros $d_i, l_i \geq 1$, com $i = 1, 2, 3, 4$, tais que o n-ésimo #-cocaracter graduado, $\chi_{\langle n\rangle}(A)$, está contido em um gancho quádruplo $H_4(n) = (H(d_1, l_1), H(d_2, l_2), H(d_3, l_3), H(d_4, l_4))$, isto é,*

$$\chi_{\langle n\rangle}(A) = \sum_{\substack{\langle\lambda\rangle\vdash\langle n\rangle \\ \langle\lambda\rangle\in H_4(n)}} m_{\langle\lambda\rangle}\chi_{\langle\lambda\rangle}.$$

Demonstração. Sendo A uma PI-álgebra, pelo Corolário 3.29, existe $\hat{d} \geq 1$ tal que $c_n^{grs}(A) \leq (\hat{d})^n$ para todo $n \geq 1$. Considerando $q = (\hat{d})^3$ e m um inteiro tal que $e^2q + 1 \leq m \leq e^2q + 2$, onde e denota a base do logaritmo natural, vamos provar que, para qualquer $n \geq 1$, o n-ésimo #-cocaracter graduado de A está contido no gancho quádruplo quadrado $(H(m, m), H(m, m), H(m, m), H(m, m))$. Suponha, por absurdo, que existe $n \geq 1$ tal que

$$\chi_{\langle n\rangle}(A) = \sum_{\langle\lambda\rangle\vdash\langle n\rangle} m_{\langle\lambda\rangle}\chi_{\langle\lambda\rangle} \tag{4.2}$$

e $m_{\langle\mu\rangle} \neq 0$ para alguma multipartição $\langle\mu\rangle \notin (H(m, m), H(m, m), H(m, m), H(m, m))$. Pelo fato de $\langle\mu\rangle = (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4) \notin (H(m, m), H(m, m), H(m, m), H(m, m))$, pelo menos um dos $\mu_i's$ não pertence a $H(m, m)$. Digamos $D_{\mu_{i_0}} \nsubseteq H(m, m)$, onde $i_0 \in \{1, 2, 3, 4\}$. Desse modo, $D_{\mu_{i_0}}$ contém o diagrama quadrado $D_{\nu_{i_0}}$, onde $\nu_{i_0} = (m^m) \vdash m^2$. Temos que $\mu_{i_0} \geq \nu_{i_0}$. Sendo $m_{\langle\mu\rangle} \neq 0$ e A uma PI-álgebra, segue da Proposição 3.30 que existe uma multitabela $T_{\langle\mu\rangle}$, com $\langle\mu\rangle \vdash \langle n\rangle$, e um polinômio não nulo $f \in P_{\langle n\rangle}$ tais que $e_{T_{\langle\mu\rangle}} f \notin Id_2^{\#}(A)$. Como

$$e_{T_{\langle\mu\rangle}} f = (e_{T_{\mu_1}} \otimes e_{T_{\mu_2}} \otimes e_{T_{\mu_3}} \otimes e_{T_{\mu_4}}) f \notin Id_2^{\#}(A),$$

existe um monômio multilinear $m_1 = m_1(\mathcal{Y}_{0,n_1}, \mathcal{Z}_{0,n_2}, \mathcal{Y}_{1,n_3}, \mathcal{Z}_{1,n_4}) \in P_{\langle n\rangle}$ tal que $e_{T_{\langle\mu\rangle}} m_1 \notin Id_2^{\#}(A)$.

Agora, considere uma quádrupla de permutações $\langle\sigma\rangle_{i_0} = (Id_1, \cdots, \sigma_{i_0}, \cdots, Id_4) \in S_{n_1} \times \cdots \times S_{n_{i_0}} \times \cdots \times S_{n_4}$ ($\sigma_{i_0} \in S_{n_{i_0}}$) tal que a tabela $\langle\sigma\rangle_{i_0} T_{\langle\mu\rangle}$ tem as entradas de 1 a m^2 nas posições do diagrama quadrado $D_{\nu_{i_0}}$. Então, o elemento $e_{\langle\sigma\rangle_{i_0} T_{\langle\mu\rangle}} = \langle\sigma\rangle_{i_0} e_{T_{\langle\mu\rangle}} \langle\sigma\rangle_{i_0}^{-1}$, onde $\langle\sigma\rangle_{i_0}^{-1} = (Id_1, \cdots, \sigma_{i_0}^{-1}, \cdots, Id_4)$. Logo,

$$\langle\sigma\rangle_{i_0}^{-1} e_{\langle\sigma\rangle_{i_0} T_{\langle\mu\rangle}} \langle\sigma\rangle_{i_0} m_1 = e_{T_{\langle\mu\rangle}} m_1 \notin Id_2^{\#}(A).$$

Chamando $m' = \langle\sigma\rangle_{i_0} m_1$, temos que $\langle\sigma\rangle_{i_0}^{-1} e_{\langle\sigma\rangle_{i_0} T_{\langle\mu\rangle}} m' \notin Id_2^{\#}(A)$ e, portanto, também $e_{\langle\sigma\rangle_{i_0} T_{\langle\mu\rangle}} m' \notin Id_2^{\#}(A)$. Denotamos por $T_{\nu_{i_0}}$ uma tabela standard do diagrama $D_{\nu_{i_0}}$. Usando o fato de que $D_{\mu_{i_0}} \supseteq D_{\nu_{i_0}}$ e que, na multitabela $\tilde{T}_{\langle\mu\rangle} = \langle\sigma\rangle_{i_0} T_{\langle\mu\rangle} = (T_{\mu_1}, \cdots, \sigma_{i_0} T_{\mu_{i_0}}, \cdots, T_{\mu_4})$, a tabela $\sigma_{i_0} T_{\mu_{i_0}}$ contém os números $1, 2, \cdots, m^2$ (as entradas da tabela $T_{\nu_{i_0}}$), pelo Lema 2.52, existem $a, b \in FS_{n_{i_0}}$ tais que

$$e_{\sigma_{i_0} T_{\mu_{i_0}}} = a e_{T_{\nu_{i_0}}} b.$$

Desse modo,

$$e_{\tilde{T}_{\langle\mu\rangle}} m' \;=\; (e_{T_{\mu_1}} \otimes \cdots \otimes e_{\sigma_{i_0} T_{\nu_{i_0}}} \otimes \cdots e_{T_{\mu_4}}) m'$$

$$= (Id_1 \otimes \cdots \otimes a \otimes \cdots \otimes Id_4)(e_{T_{\mu_1}} \otimes \cdots \otimes e_{T_{\nu_{i_0}}} \otimes \cdots \otimes e_{T_{\mu_4}})(Id_1 \otimes \cdots \otimes b \otimes \cdots \otimes Id_4) m'$$

não pertence a $Id_2^{\#}(A)$ e, assim, $(e_{T_{\mu_1}} \otimes \cdots \otimes e_{T_{\nu_{i_0}}} \otimes \cdots \otimes e_{T_{\mu_4}}) f_1 \notin Id_2^{\#}(A)$, onde $f_1 = (Id_1 \otimes \cdots \otimes b \otimes \cdots \otimes Id_4) m' \in P_{\langle n\rangle}$. De fato, $Id_2^{\#}(A)$ é um $FS_{n_1} \otimes FS_{n_2} \otimes FS_{n_3} \otimes FS_{n_4}$-módulo à esquerda e $\tilde{f}_1 = (e_{T_{\mu_1}} \otimes \cdots \otimes e_{T_{\nu_{i_0}}} \otimes \cdots \otimes e_{T_{\mu_4}}) f_1 \in Id_2^{\#}(A)$ implica que

$$e_{\tilde{T}_{\langle\mu\rangle}} m' = (Id_1 \otimes \cdots \otimes a \otimes \cdots \otimes Id_4) \tilde{f}_1 \in Id_2^{\#}(A),$$

o que não ocorre. Segue que

$$(Id_1 \otimes \cdots \otimes e_{T_{\nu_{i_0}}} \otimes \cdots \otimes Id_4) f_2 \notin Id_2^{\#}(A), \tag{4.3}$$

onde $f_2 = (e_{T_{\mu_1}} \otimes \cdots \otimes Id_{i_0} \otimes \cdots \otimes e_{T_{\mu_4}}) f_1 \in P_{\langle n\rangle}$. Pela Proposição 4.1, observando que $n_{i_0} \geq m^2$ e que o elemento $e_{T_{\nu_{i_0}}}$ age nas indeterminadas com índices em $\{1, \cdots, m^2\}$ do tipo correspondente do polinômio f_2 (as entradas da tabela $T_{\nu_{i_0}}$), podemos encontrar inteiros $t_1, t_2, t_3, t_4 > 0$, com $t_{i_0} \geq m^2$, $t = t_1 + t_2 + t_3 + t_4$ e $m^2 \leq t \leq 2m^2 + 1$, e um monômio multilinear $w = w(\mathcal{Y}_{0,t_1}, \mathcal{Z}_{0,t_2}, \mathcal{Y}_{1,t_3}, \mathcal{Z}_{1,t_4}) \in P_{\langle t\rangle}$ tais que

$$(Id_1 \otimes \cdots \otimes e_{T_{\nu_{i_0}}} \otimes \cdots \otimes Id_4) w \not\equiv 0 \tag{4.4}$$

em A. Consideremos $P_{\langle t\rangle}$ como um $FS_1 \otimes \cdots \otimes S_{m^2} \otimes \cdots \otimes FS_1$-módulo à esquerda, em que S_1 é o grupo trivial, exigindo que $FS_1 \otimes \cdots \otimes S_{m^2} \otimes \cdots \otimes FS_1$ aja nas primeiras

$t_1, \cdots, m^2, \cdots, t_4$ indeterminadas correspondentes fixando as demais. Agora, seja M o $FS_1 \otimes \cdots \otimes S_{m^2} \otimes \cdots \otimes FS_1$-submódulo de $P_{\langle t \rangle}$ gerado pelo elemento $(Id_1 \otimes \cdots \otimes e_{T_{\nu_{i_0}}} \otimes \cdots \otimes Id_4)w$. Como $M + (P_{\langle t \rangle} \cap Id_2^{\#}(A)) \subseteq P_{\langle t \rangle}$, segue que

$$\begin{aligned} \dim(P_{\langle t \rangle}) &\geq \dim(M + P_{\langle t \rangle} \cap Id_2^{\#}(A)) \\ &= \dim(M) + \dim(P_{\langle t \rangle} \cap Id_2^{\#}(A)) \\ &\quad - \dim(M \cap (P_{\langle t \rangle} \cap Id_2^{\#}(A)). \end{aligned}$$

Ora, o subespaço $M \cap (P_{\langle t \rangle} \cap Id_2^{\#}(A))$ é um $FS_1 \otimes \cdots \otimes S_{m^2} \otimes \cdots \otimes FS_1$-submódulo de M. Conforme Observação 3.31, o módulo M é irredutível e, por (4.4), temos que $M \not\subseteq (P_{\langle t \rangle} \cap Id_2^{\#}(A))$. Logo, $M \cap (P_{\langle t \rangle} \cap Id_2^{\#}(A)) = \{0\}$. Portanto,

$$\dim(P_{\langle t \rangle}) \geq \dim(M) + \dim(P_{\langle t \rangle} \cap Id_2^{\#}(A)),$$

o que produz

$$c_{\langle t \rangle}(A) \;=\; \dim(P_{\langle t \rangle}) - \dim(P_{\langle t \rangle} \cap Id_2^{\#}(A)) \geq \dim(M). \tag{4.5}$$

Observamos também que M pode ser considerado como um FS_{m^2} à esquerda naturalmente, já que a álgebra $FS_1 \otimes \cdots \otimes FS_{m^2} \otimes \cdots \otimes FS_1$ fixa todas as indeterminadas que são diferentes daquelas com índices $\{1, \cdots, m^2\}$ do tipo correspondente. Assim, como a dimensão de M é o produto dos graus dos caracteres irredutíveis correspondentes (todos iguais a 1 com exceção do associado à partição quadrada $\nu_{i_0} = (m^m) \vdash m^2$) e $m^2 \geq (e^2q+1)^2 \geq e^4q^2$, segue do Lema 2.51 que $\chi_{\nu_{i_0}}(1) > q^{m^2}$, o que torna (4.5) em

$$c_{\langle t \rangle}(A) \geq \dim M = \chi_{\nu_{i_0}}(1) > q^{m^2}. \tag{4.6}$$

Desde que

$$c_t^{grs}(A) = \sum_{\langle \tilde{t} \rangle} \begin{pmatrix} t \\ \langle \tilde{t} \rangle \end{pmatrix} c_{\langle \tilde{t} \rangle}(A) \geq c_{\langle t \rangle}(A) > q^{m^2} = (\hat{d})^{3m^2},$$

e $m^2 \geq \dfrac{t-1}{2}$, tem-se

$$c_t^{grs}(A) > (\hat{d})^{\frac{3}{2}(t-1)}.$$

Em vista de $\frac{3}{2}(t-1) \geq t$, pois $t \geq m^2 \geq e^4 \geq 3$, segue que

$$c_t^{grs}(A) > (\hat{d})^t$$

e, assim, obtemos uma contradição, visto que $c_n^{grs}(A) \leq (\hat{d})^n$ para todo $n \geq 1$. Portanto, todas as multiplicidades $m_{\langle\mu\rangle}$ em (4.2) devem ser iguais a zero se $\langle\mu\rangle \notin (H(m,m), H(m,m), H(m,m), H(m,m))$, e a prova do teorema está concluída. $\square$

Os exemplos apresentados a seguir explicitam tanto a decomposição do $\langle n\rangle$-ésimo cocaracter da álgebra dada quanto a existência do gancho garantida pelo Teorema 4.4.

Exemplo 4.5 Considere $G = \langle e_1, e_2 \mid e_ie_j = -e_ie_j\rangle_F = \text{span}_F\{e_1, e_2, e_1e_2\}$ a álgebra de Grassmann não unitária 2-gerada sobre um corpo F de característica zero ($\dim G = 3$), com a $\mathbb{Z}_2$-graduação canônica $G = G_0 \oplus G_1$, em que $G_0 = \text{span}_F\{e_1e_2\}$ é o espaço gerado pelos monômios de comprimento par e $G_1 = \text{span}_F\{e_1, e_2\}$ é o espaço gerado pelos monômios de comprimento ímpar, e seja $\#$ a superinvolução de G definida por $e_i^{\#} = -e_i$. Observamos que o ideal das relações que definem uma álgebra de Grassmann é invariante em relação à superinvolução $\#$ e, portanto, $\#$ está bem definida. Como $char F = 0$, G pode ser decomposta por

$$G = G_0^+ \oplus G_0^- \oplus G_1^+ \oplus G_1^-.$$

Neste caso, não é difícil ver que $G_0^+ = G_0$, $G_0^- = \{0\}$, $G_1^+ = \{0\}$ e $G_1^- = G_1$, pois, no nosso caso, temos apenas um monômio de comprimento par e_1e_2 e $(e_1e_2)^{\#} = -e_2^{\#}e_1^{\#} = -(-e_2)(-e_1) = -e_2e_1 = e_1e_2$ e dois monômios de comprimento ímpar, e_1 e e_2. Veja ainda que G é uma PI-álgebra, pois é uma álgebra nilpotente de grau 3.

Agora, vamos identificar as superidentidades multilineares com superinvolução da álgebra G. Observe que, em G, temos apenas elementos homogêneos pares simétricos e ímpares antissimétricos. Considere, então, os espaços multilineares $P_{\langle n\rangle}$ com as seguintes decomposições do natural n dadas por $n = n_1 + 0 + 0 + n_4$, onde n_1 representa a quantidade de varáveis pares simétricas e n_4 representa a quantidade de variáveis ímpares antissimétricas. Note que, quando $n \geq 3$, para qualquer decomposição de n, temos

$$P_{\langle n\rangle} \cap Id_2^{\#}(G) = P_{\langle n\rangle}$$

e, assim, a #-codimensão graduada correspondente será $c_{\langle n\rangle}(G) = 0$. Então, resta-nos analisar os casos em que $n = 1$ e $n = 2$.

Para $n = 1$, considere a seguinte decomposição, $n = 1+0+0+0$, ou seja, quando $n_1 = 1$ e as outras variáveis não aparecem em $P_{(1,0,0,0)}$. Nesse caso, nenhum polinômio em $P_{(1,0,0,0)}$ é identidade de G, pois $P_{(1,0,0,0)} = \mathrm{span}_F\{y_{0,1}\}$ e $y_{0,1} \neq 0$ em G, uma vez que $e_1e_2 \in G_0^+$ e $e_1e_2 \neq 0$. Logo, obtemos

$$P_{(1,0,0,0)}(G) \cap Id_2^{\#}(G) = \{0\},$$

e, assim, a #-codimensão graduada correspondente será $c_{(1,0,0,0)} = 1$ e o n-ésimo cocaracter graduado correspondente é

$$\chi_{(1,0,0,0)}(G) = \chi_{(\square,\emptyset,\emptyset,\emptyset)} \in (H(1,0), H(0,0), H(0,0), H(0,0)).$$

O caso em que $n = 0+0+0+1$, ou seja, quando $n_4 = 1$, é feito de forma análoga, observando que $P_{(0,0,0,1)} = \mathrm{span}_F\{z_{1,1}\}$ e $z_{1,1} \neq 0$ em G, já que $e_1 \in G_1^-$ e $e_1 \neq 0$. Então,

$$P_{(1,0,0,0)}(G) \cap Id_2^{\#}(G) = \{0\},$$

e, assim, a $c_{(0,0,0,1)}(G) = 1$ e

$$\chi_{(0,0,0,1)}(G) = \chi_{(\emptyset,\emptyset,\emptyset,\square)} \in (H(0,0), H(0,0), H(0,0), H(1,0)).$$

Agora, vejamos o caso em que $n = 2$. Temos as seguintes decomposições de n: $n = 2+0+0+0$, $n = 1+0+0+1$ e $n = 0+0+0+2$. Não é difícil mostrar que, nos casos $n = 2+0+0+0$ e $n = 1+0+0+1$, as correspondentes #-codimensões graduadas são nulas, porque G satisfaz as #-superidentidades $y_{0,1}y_{0,2} = 0$ (uma vez que $G_0^+ = \mathrm{span}_F\{e_1e_2\}$ e $(e_1e_2)(e_1e_2) = 0$ em G) e $y_{0,1}z_{1,1} = 0$ e $z_{1,1}y_{0,1} = 0$ (pois $G_1^- = \mathrm{span}_F\{e_1, e_2\}$ e $e_1(e_1e_2) = (e_1e_2)e_1 = e_2(e_1e_2) = (e_1e_2)e_2 = 0$ na álgebra G). Vejamos, então, um caso mais interessante nesse exemplo que é quando consideramos a decomposição $n = 0+0+0+2$. Nossa afirmação é $P_{(0,0,0,2)} \cap Id_2^{\#}(G) = \mathrm{span}_F\{z_{1,1}z_{1,2} + z_{1,2}z_{1,1}\}$, onde $z_{1,1}, z_{1,2} \in Z_1 = \{z_{1,1}, z_{1,2}, \cdots\}$, conjunto de variáveis ímpares antissimétricas na superálgebra livre com superinvolução $F\langle Y \cup Z, \#\rangle$. De fato, observe que o #-polinômio

$$z_{1,1}z_{1,2} + z_{1,2}z_{1,1}$$

é uma #-superidentidade multilinear em G, em vista de $G_1^- = \text{span}_F\{e_1, e_2\}$. Seja Q os espaço de dimensão 1 gerado por este polinômio, isto é, $Q = \text{span}_F\{z_{1,1}z_{1,2} + z_{1,2}z_{1,1}\}$. Temos que $Q \subseteq P_{(0,0,0,2)} \cap Id_2^{\#}(G)$ e $P_{(0,0,0,2)} \cap Id_2^{\#}(G) \subseteq P_{(0,0,0,2)}$. Como $dim_F Q = 1$, $dim_F P_{(0,0,0,2)} = 2! = 2$ e, além disso, $P_{(0,0,0,2)} \cap Id_2^{\#}(G) \neq P_{(0,0,0,2)}$, pois $z_{1,1}z_{1,2} \in P_{(0,0,0,2)}$ mas $z_{1,1}z_{1,2} \notin Id_2^{\#}(G)$ ($e_1e_2 \neq 0$ em G), segue que $Q = P_{(0,0,0,2)} \cap Id_2^{\#}(G)$, o que prova nossa afirmação. Assim, $dim_F P_{(0,0,0,2)} \cap Id_2^{\#}(G) = 1$ e $c_{(0,0,0,2)}(G) = 2 - 1 = 1$.

Agora, considere o correspondente n-ésimo cocaracter graduado

$$\chi_{(0,0,0,2)}(G) = \sum_{(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)\vdash(0,0,0,2)} m_{(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)}\chi_{(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)}. \tag{4.7}$$

Veja que em (4.7) aparecem apenas duas parcelas, aquelas correspondentes às seguintes multipartições:

$$\left(\emptyset,\emptyset,\emptyset,\,\begin{array}{|c|c|}\hline & \\ \hline\end{array}\right) \quad \text{e} \quad \left(\emptyset,\emptyset,\emptyset,\,\begin{array}{|c|}\hline \\ \hline \\ \hline\end{array}\right).$$

Vamos mostrar que a multiplicidade correspondente da multipartição $\langle\lambda\rangle = \left(\emptyset,\emptyset,\emptyset,\,\begin{array}{|c|}\hline \\ \hline \\ \hline\end{array}\right)$ é não nula. Para isso, considere a multitabela Standard

$$T_{\langle\lambda\rangle} = \left(\emptyset,\emptyset,\emptyset,\,\begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline\end{array}\right).$$

Temos que $R_{T_{\langle\lambda\rangle}} = \{(\emptyset,\emptyset,\emptyset, Id_2)\}$ e $C_{T_{\langle\lambda\rangle}} = \{(\emptyset,\emptyset,\emptyset, S_2)\}$ e, portanto,

$$e_{T_{\langle\lambda\rangle}} = \emptyset\otimes\emptyset\otimes\emptyset\otimes e_{T_{(1,1)}} = \emptyset\otimes\emptyset\otimes\emptyset\otimes \sum_{\substack{\sigma\in R_{T_{(1,1)}} \\ \tau\in C_{T_{(1,1)}}}} (-1)^\tau \sigma\tau = \emptyset\otimes\emptyset\otimes\emptyset\otimes \sum_{\tau\in S_2}(-1)^\tau\tau.$$

Então,

$$f = f(z_{1,1}, z_{1,2}) := e_{T_{\langle\lambda\rangle}}(z_{1,1}z_{1,2}) = \sum_{\tau\in S_2}(-1)^\tau\tau(z_{1,1}z_{1,2}) = z_{1,1}z_{1,2} - z_{1,2}z_{1,1}.$$

Note que f avaliado em G não é uma #-superidentidade, bastando escolher $z_{1,i} = e_i$ e observar que $f(e_1, e_2) = 2e_1e_2 \neq 0$ em G. Logo, $f \notin Id_2^{\#}(G)$ e, pela Proposição 3.30, temos que a multiplicidade correspondente ao módulo irredutível gerado por f é não nula, ou seja, $m_{(\emptyset,\emptyset,\emptyset,(1,1))} \geq 1$. Como $c_{(0,0,0,2)}(G) = 1$, segue que $m_{(\emptyset,\emptyset,\emptyset,\ydiagram{1,1})} = 1$ e a multiplicidade correspondente da multipartição $m_{(\emptyset,\emptyset,\emptyset,\ydiagram{2})}$ é nula. E, assim, temos que

$$\chi_{(0,0,0,2)}(G) = \chi_{(\emptyset,\emptyset,\emptyset,\ydiagram{1,1})}.$$

Observamos que

$$\chi_{(0,0,0,2)}(G) \subseteq (H(0,0), H(0,0), H(0,0), H(0,1)).$$

Em geral, temos que, para todo $\langle n \rangle = (n_1, n_2, n_3, n_4)$,

$$\chi_{\langle n \rangle}(G) = \sum_{\substack{\langle \lambda \rangle \vdash \langle n \rangle \\ \langle \lambda \rangle \in H_4(n)}} m_{\langle \lambda \rangle} \chi_{\langle \lambda \rangle},$$

onde $H_4(n) = (H(1,0), H(0,0), H(0,0), H(0,1))$. Concluímos esse exemplo observando também que não é difícil mostrar que todas as #-superidentidades da álgebra G são consequências das #-superidentidades $y_{1,1} \equiv 0$, $z_{0,1} \equiv 0$, $y_{0,1}y_{0,2} \equiv 0$, $z_{1,1}y_{0,1} \equiv 0$, $y_{0,1}z_{1,1} \equiv 0$ e $z_{1,1}z_{1,2} + z_{1,2}z_{1,1} \equiv 0$, pois $z_{1,1}z_{1,2} \in \mathcal{F}_0^+$ módulo $z_{1,1}z_{1,2} + z_{1,2}z_{1,1} \equiv 0$ em G.

O exemplo a seguir é um pouco mais interessante que o anterior, pois, na decomposição da superálgebra dada, todas as componentes homogêneas são não triviais.

Exemplo 4.6 Seja $A = M_2(F) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} ; a, b, c, d \in F \right\}$ a álgebra das matrizes 2×2 sobre o corpo F e considere a $\mathbb{Z}_2$-graduação elementar em A, onde a componente par $A_0 = \text{span}_F \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ e a componente ímpar $A_1 = \text{span}_F \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$. Defina a aplicação linear $\# : A \to A$ dada por

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{\#} = \begin{pmatrix} d & -b \\ c & a \end{pmatrix}, \quad a, b, c, d \in F.$$

Em [4], no Exemplo 2, é mostrado que a aplicação # é uma superinvolução, e ela é chamada de superinvolução transposta. Então, A pode ser decomposta da seguinte maneira:

$$A = A_0^+ \oplus A_0^- \oplus A_1^+ \oplus A_1^-,$$

onde as componentes pares são $A_0^+ = \text{span}_F \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, $A_0^- = \text{span}_F \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, e as componentes ímpares são $A_1^+ = \text{span}_F \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ e $A_1^- = \text{span}_F \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$.

O nosso intuito agora é identificar as #-superidentidades multilineares de A. Antes disso, faremos algumas observações sobre os elementos homogêneos de A. Veja que os elementos homogêneos de A_0^+ (matrizes escalares) comutam com todos os elementos homogêneos de A, os elementos homogêneos em A_0^- comutam entre si e anticomutam com os elementos homogêneos de A_1^+ e A_1^- e os elementos em A_1^+ e A_1^- não comutam entre si. Essas informações são importantes para descrever uma base para o quociente $P_{\langle n \rangle}(A) = \dfrac{P_{\langle n \rangle}}{P_{\langle n \rangle} \cap Id_2^{\#}(A)}$. Note que os monômios

$$y_{1,i}y_{1,j} \text{ e } z_{1,i}z_{1,j}, \tag{4.8}$$

quando avaliados em A, são nulos, uma vez que $(\alpha E_{12})(\beta E_{12}) = 0$ e $(\alpha E_{21}(\beta E_{21}) = 0$, para todos $\alpha, \beta \in F$, onde E_{ij} é a matriz elementar 2×2. Assim, qualquer monômio em $P_{\langle n \rangle}$ que contenha em sua composição esses tipos de monômios se anula em A, ou seja, pertence ao conjunto de identidades $P_{\langle n \rangle} \cap Id_2^{\#}(A)$. Com isso, dado qualquer monômio w em $P_{\langle n \rangle}$, uma vez que os elementos de A_0^+ e A_0^- comutam ou anticomutam com os demais elementos homogêneos simétricos ou antissimétricos, podemos escrever

$$w = (-1)^{\theta_w} y_{0,1} \cdots y_{0,n_1} z_{0,1} \cdots z_{0,n_2} \tilde{w} + g, \tag{4.9}$$

onde $\theta_w \in \mathbb{N}$, $\tilde{w}$ é um monômio nas variáveis $z_{1,1}, \cdots, z_{1,n_3}, y_{1,1}, \cdots, y_{1,n_4}$ e $g \in P_{\langle n \rangle} \cap Id_2^{\#}(A)$. Observamos que as únicas possibilidades de $\tilde{w}$ não conter submonômios do tipo (4.8) são quando $\tilde{w}$ apresenta uma das 5 formas a seguir.

$$\begin{aligned}
&1.\ \tilde{w} = y_{1,i_1}z_{1,j_1}y_{1,i_2}z_{1,j_2}\cdots y_{1,i_s}z_{1,j_s}\ \text{(aqui, } n_3 = n_4 = s \geq 1\text{);}\\
&2.\ \tilde{w} = y_{1,i_1}z_{1,j_1}y_{1,i_2}z_{1,j_2}\cdots y_{1,i_s}z_{1,j_s}y_{1,i_s+1}\ \text{(aqui, } n_4 = s \geq 0 \text{ e } n_3 = s+1 = n_4+1\text{);}\\
&3.\ \tilde{w} = z_{1,j_1}y_{1,i_1}z_{1,j_2}y_{1,i_2}\cdots z_{1,j_s}y_{1,i_s}\ \text{(aqui, } n_3 = n_4 = s \geq 1\text{);}\\
&4.\ \tilde{w} = z_{1,j_1}y_{1,i_1}z_{1,j_2}y_{1,i_2}\cdots z_{1,j_s}y_{1,i_s}z_{1,j_s+1}\ \text{(aqui, } n_3 = s \geq 0 \text{ e } n_4 = s+1 = n_3+1\text{);}\\
&5.\ \tilde{w} \text{ é um monômio vazio (aqui, } n_3 = n_4 = 0\text{).}
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Essa observação nos faz concluir que, se $|n_3 - n_4| > 1$, então todo $\tilde{w}$ na decomposição de qualquer monômio w conterá um monômio da forma (4.8) e, por conseguinte, $P_{\langle n\rangle} \cap Id_2^{\#}(A) = P_{\langle n\rangle}$ e, assim, $c_{\langle n\rangle}(A) = \dim_F P_{\langle n\rangle}(A) = 0$. Vamos supor, então, que $|n_3 - n_4| \leq 1$. Considere primeiramente $n_3 = n_4$, ou seja, a quantidade de variáveis ímpares simétricas é igual a quantidade de variáveis ímpares antissimétricas. Assim, a partir de agora, vamos restringir nosso estudo de #-superidentidades polinomiais, codimensão e cocaracter correspondentes, para uma decomposição do natural n desse tipo, a saber, $\langle n\rangle = (n_1, n_2, n_3, n_3)$. Nesse caso, fazemos a seguinte afirmação: uma base para o espaço quociente $P_{\langle n\rangle}(A) = \dfrac{P_{\langle n\rangle}}{P_{\langle n\rangle} \cap Id_2^{\#}(A)}$ é o conjunto

$$\begin{aligned}
\beta_1 = \{h_1 &= y_{0,1}\cdots y_{0,n_1}z_{0,1}\cdots z_{0,n_2}y_{1,1}z_{1,1}y_{1,2}z_{1,2}\cdots y_{1,n_3}z_{1,n_3},\\
h_2 &= y_{0,1}\cdots y_{0,n_1}z_{0,1}\cdots z_{0,n_2}z_{1,1}y_{1,1}z_{1,2}y_{1,2}\cdots z_{1,n_3}y_{1,n_3}\}
\end{aligned}$$

quando $n_3 = n_4 \geq 1$ e

$$\mathcal{B} = \{\hat{w}_{n_1,n_2} = y_{0,1}\cdots y_{0,n_1}z_{0,1}\cdots z_{0,n_2}\}$$

quando $n_3 = n_4 = 0$ módulo $P_{\langle n\rangle} \cap Id_2^{\#}(A)$.

Este último caso segue diretamente da comutatividade e anticomutatividade entre os elementos homogêneos das componentes A_0^+ e A_0^- e do fato de que o monômio em $\mathcal{B}$ não é uma superidentidade de A (a avaliação do monômio $\hat{w}_{n_1,n_2}$ por $y_{0,1} = \cdots = y_{0,n_1} = I_2 = E_{11} + E_{22}$ e $z_{0,1} = \cdots = z_{0,n_2} = E_{22} - E_{11}$ é igual a I_2 − identidade de ordem 2×2 − se n_2 é par ou igual a $E_{22} - E_{11}$ se n_2 é ímpar). Assim, nesse caso ($n_3 = n_4 = 0$ e $\langle n\rangle = (n_1, n_2, 0, 0)$), temos $c_{\langle n\rangle}(A) = 1$. Usando o fato conhecido que

$e_{T_{(n)}}(x_1 \cdots x_n)$ é a linearização completa do polinômio x^n, onde $(n) \vdash n$ é a partição que corresponde ao diagrama de Young $D_{(n)} = \boxed{}\boxed{}\boxed{\cdots}\boxed{}$, mostra-se que

$$\chi_{\langle n \rangle}(A) = \chi_{((n_1),(n_2),\emptyset,\emptyset)}.$$

Agora, vamos estudar o caso $n_3 = n_4 \geq 1$. Veja que as variáveis ímpares aparecem nos monômios do conjunto β_1 intercaladas. Note ainda que, dado qualquer monômio w em $P_{\langle n \rangle}$, após a apresentação (4.9), todo monômio $\tilde{w}$, que possui as variáveis ímpares intercaladas, pode ser escrito como

$$\tilde{w} = y_{1,1}z_{1,1}y_{1,2}z_{1,2}\cdots y_{1,n_3}z_{1,n_3}$$

ou

$$\tilde{w} = z_{1,1}y_{1,1}z_{1,2}y_{1,2}\cdots z_{1,n_3}y_{1,n_3}.$$

Isso pode ser visto pelo seguinte fato:

$$y_{1,i_1}z_{1,j_1}y_{1,i_2} = y_{1,i_2}z_{1,j_1}y_{1,i_1} \tag{4.11}$$

e

$$z_{1,k_1}y_{1,r_1}z_{1,k_2} = z_{1,k_2}y_{1,r_1}z_{1,k_1} \tag{4.12}$$

módulo $P_{\langle n \rangle} \cap Id_2^{\#}(A)$. Com efeito, qualquer avaliação de (4.11) em A é da forma

$$(\alpha E_{21})(\beta E_{12})(\gamma E_{21}) = \alpha\beta\gamma E_{21} = (\gamma E_{21})(\beta E_{12})(\alpha E_{21})$$

e qualquer avaliação de (4.12) em A é da forma

$$(\alpha E_{12})(\beta E_{21})(\gamma E_{12}) = \alpha\beta\gamma E_{12} = (\gamma E_{12})(\beta E_{21})(\alpha E_{12}).$$

Utilizando (4.11) e (4.12), podemos permutar módulo $P_{\langle n \rangle} \cap Id_2^{\#}(A)$ as indeterminadas do conjunto Y_1 entre si em suas respectivas posições sem alterar as indeterminadas $z_{1,j}$ e as indeterminadas do conjunto Z_1 entre si em suas respectivas posições sem alterar as indeterminadas $y_{1,k}$ nos monômios $\tilde{w}$ dos tipos 1. e 3. de (4.10) e, assim, conseguimos ordená-las entre si e obter a forma h_1 ou h_2 do conjunto β_1.

Segue dessa observação e de (4.9) que o conjunto β_1 gera o espaço quociente $P_{\langle n\rangle}(A) = \dfrac{P_{\langle n\rangle}}{P_{\langle n\rangle} \cap Id_2^{\#}(A)}$. Agora, vamos mostrar que o conjunto β_1 é linearmente independente em $P_{\langle n\rangle}$ módulo $P_{\langle n\rangle} \cap Id_2^{\#}(A)$. De fato, sejam $\alpha, \beta \in F$ tais que

$$\alpha h_1 + \beta h_2 = q,$$

com $q \in P_{\langle n\rangle} \cap Id_2^{\#}(A)$. Avaliando $y_{0,i} = E_{11} + E_{22} = I_2$, $z_{0,j} = E_{22} - E_{11}$, $y_{1,t} = E_{21}$ e $z_{1,k} = E_{12}$, obtemos daí

$$\alpha \begin{pmatrix} (-1)^{n_2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} E_{22} + \beta \begin{pmatrix} (-1)^{n_2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} E_{11} = 0,$$

o que produz

$$\begin{pmatrix} \beta(-1)^{n_2} & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} = 0,$$

concluindo que $\alpha = \beta = 0$. Portanto, β_1 é linearmente independente em $P_{\langle n\rangle}$ módulo $P_{\langle n\rangle} \cap Id_2^{\#}(A)$ e, consequentemente, é uma base para o espaço quociente $P_{\langle n\rangle}(A)$. Segue que

$$c_{\langle n\rangle}(A) = \dim_F P_{\langle n\rangle}(A) = \dim_F \frac{P_{\langle n\rangle}}{P_{\langle n\rangle} \cap Id_2^{\#}(A)} = 2.$$

Agora, considerando o n-ésimo #-cocaracter graduado de A dado por

$$\chi_{\langle n\rangle}(A) = \sum_{\langle\lambda\rangle \vdash \langle n\rangle} m_{\langle\lambda\rangle}\chi_{\langle\lambda\rangle},$$

vamos mostrar que a multiplicidade correspondente à multipartição $\langle\lambda\rangle = ((n_1), (n_2), (n_3), (n_3))$ é não nula. Com efeito, considere a seguinte multitabela Standard da forma $\langle\lambda\rangle$ dada por

$$T_{(i,j,k,l)} = (\boxed{1}\boxed{2}\boxed{\cdots}\boxed{i}, \boxed{1}\boxed{2}\boxed{\cdots}\boxed{j}, \boxed{1}\boxed{2}\boxed{\cdots}\boxed{k}, \boxed{1}\boxed{2}\boxed{\cdots}\boxed{l}),$$

em que $i = n_1, j = n_2, k = n_3$ e $l = n_3$ e o elemento idempotente minimal essencial

$$e_{T_{(i,j,k,l)}} = \sum_{\sigma \in S_{n_1}} \sigma \otimes \sum_{\beta \in S_{n_2}} \beta \otimes \sum_{\tau \in S_{n_3}} \tau \otimes \sum_{\gamma \in S_{n_3}} \gamma.$$

Então, definindo

$$f := e_{T_{(i,j,k,l)}}(y_{0,1} \cdots y_{0,n_1} z_{0,1} \cdots z_{0,n_2} y_{1,1} z_{1,1} y_{1,2} z_{1,2} \cdots y_{1,n_3} z_{1,n_3}),$$

e escolhendo $y_{0,p} = Id_2$, $z_{0,q} = E_{22} - E_{11}$, $y_{1,k} = E_{21}$ e $z_{1,r} = E_{12}$, onde os $E'_{ij}s$ são as matrizes elementares, obtemos

$$f = n_1! n_2! n_3! n_4! \begin{pmatrix} (-1)^{n_2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} E_{22} \neq 0,$$

pois F é um corpo de característica zero. Ou seja, o polinômio em questão não é uma #-superidentidade polinomial em A. Assim, pela Proposição 3.30, a multiplicidade correspondente ao $S_{\langle n \rangle}$-módulo M gerado por f é não nula, como queríamos mostrar. Agora, considere N o $S_{\langle n \rangle}$-módulo irredutível gerado pelo polinômio

$$g := e_{T_{(i,j,k,l)}}(y_{0,1} \cdots y_{0,n_1} z_{0,1} \cdots z_{0,n_2} z_{1,1} y_{1,1} z_{1,2} y_{1,2} \cdots z_{1,n_3} y_{1,n_3}).$$

Note que os módulos N e M são isomorfos, pois estão associados à mesma multitabela Standard de Young da forma $\langle \lambda \rangle = ((n_1), (n_2), (n_3), (n_3))$. Ainda, de maneira análoga, é possível mostrar que o polinômio g não é uma superidentidade em A. É fácil ver que $M \cap N = \{0\}$, pois $FS_{\langle n \rangle}$ age nas variáveis de mesmo tipo e não troca posições de variáveis de tipos diferentes. Portanto, $P_{\langle n \rangle}(A) = M \oplus N$. Visto que $c_{\langle n \rangle}(A) = 2$, segue que a decomposição do #-cocaracter graduado associado ao $S_{\langle n \rangle}$-módulo $P_{\langle n \rangle}(A)$ é dado por

$$\chi_{\langle n \rangle}(A) = 2\chi_{((n_1),(n_2),(n_3),(n_3))}.$$

Observamos que, para este caso, o n-ésimo #-cocaracter graduado de A, $\chi_{\langle n \rangle}(A)$, está contido em um gancho quádruplo da forma

$$(H(1,0), H(1,0), H(1,0), H(1,0)). \tag{4.13}$$

Para finalizar o exemplo, utilizaremos o mesmo raciocínio feito até aqui para analisar os casos em que $n_3 = n_4 + 1$ e $n_4 = n_3 + 1$. Quando $n_3 = n_4 + 1$, observa-se que o conjunto unitário

$$\beta_2 = \{h_3 = y_{0,1} \cdots y_{0,n_1} z_{0,1} \cdots z_{0,n_2} y_{1,1} z_{1,1} y_{1,2} z_{1,2} \cdots y_{1,n_4} z_{1,n_4} y_{1,n_4+1}\}$$

é uma base para o $P_{\langle n \rangle}$ módulo $P_{\langle n \rangle} \cap Id_2^{\#}(A)$ e, assim, $c_{\langle n \rangle}(A) = 1$. Portanto, o cocaracter associado a $P_{\langle n \rangle}(A)$ é dado por $\chi_{\langle n \rangle}(A) = \chi_{\langle (n_1),(n_2),(n_4+1),(n_4) \rangle}$. O mesmo ocorre quando $n_4 = n_3 + 1$, ou seja, $c_{\langle n \rangle}(A) = 1$, $\chi_{\langle n \rangle}(A) = \chi_{((n_1),(n_2),(n_3),(n_3+1))}$ e

$$\beta_3 = \{h_4 = y_{0,1} \cdots y_{0,n_1} z_{0,1} \cdots z_{0,n_2} z_{1,1} y_{1,1} z_{1,2} y_{1,2} \cdots z_{1,n_3} y_{1,n_3} z_{1,n_3+1}\}$$

é uma base para o $P_{\langle n \rangle}$ módulo $P_{\langle n \rangle} \cap Id_2^{\#}(A)$.

Concluímos que os #-cocaracteres graduados correspondentes a essas decomposições de n estão contidos no gancho quádruplo da forma (4.13).

Em suma, analisando todos os casos da decomposição de n, com $\langle n \rangle = (n_1, n_2, n_3, n_4)$, para os quais $c_{\langle n \rangle}(A) \neq 0$, vimos que

- $\chi_{(n_1,n_2,0,0)}(A) = \chi_{((n_1),(n_2),\emptyset,\emptyset)}$;
- $\chi_{(n_1,n_2,n_3,n_3)}(A) = 2\chi_{((n_1),(n_2),(n_3),(n_3))}$;
- $\chi_{(n_1,n_2,n_3,n_3+1)}(A) = \chi_{((n_1),(n_2),(n_3),(n_3+1))}$;
- $\chi_{(n_1,n_2,n_4+1,n_4)}(A) = \chi_{((n_1),(n_2),(n_4+1),(n_4))}$.

Em geral, temos que, para todo $\langle n \rangle = (n_1, n_2, n_3, n_4)$,

$$\chi_{\langle n \rangle}(A) = \sum_{\substack{\langle \lambda \rangle \vdash \langle n \rangle \\ \langle \lambda \rangle \in H_4(n)}} m_{\langle \lambda \rangle} \chi_{\langle \lambda \rangle},$$

onde $H_4(n) = (H(1,0), H(1,0), H(1,0), H(1,0))$.

Para finalizar este exemplo, note que mostramos que A satisfaz todas as #-

superidentidades $f=0$, onde $f \in Q$,

$$Q = \{[y_{0,1}, y_{0,2}],\ [y_{0,1}, z_{0,1}], [y_{0,1}, y_{1,1}],\ [y_{0,1}, z_{1,1}], [z_{0,1}, z_{0,2}], y_{1,1}y_{1,2}, z_{1,1}z_{1,2},$$

$$z_{0,1}y_{1,1} + y_{1,1}z_{0,1}, z_{0,1}z_{1,1} + z_{1,1}z_{0,1}, y_{1,1}z_{1,1}y_{1,2} - y_{1,2}z_{1,1}y_{1,1}, z_{1,1}y_{1,1}z_{1,2} - z_{1,2}y_{1,1}z_{1,1}\}.$$

Provamos também que $P_n^{grs} = \text{span}_F\{\hat{w}_{n_1,n_2}, h_1, h_2, h_3, h_4\}$ módulo Q e $\hat{w}_{n_1,n_2}$, h_1, h_2, h_3, h_4 não são #-superidentidades de A. Isso prova que Q é uma base de #-superidentidades de A, ou seja, $Id_2^{\#}(A) = \langle Q \rangle_{T_2^{\#}}$.

Exemplo 4.7 Seja $E = \langle 1, e_1, e_2, \cdots \mid e_ie_j = -e_je_i,\ \forall\ i,j \geq 1\rangle_F$ a álgebra de Grassmann unitária de dimensão infinita sobre um corpo F de característica zero com sua graduação canônica $E = E_0 \oplus E_1$, onde E_0 é o espaço gerado pelos monômios em $e_i's$ de comprimento par e E_1 o espaço gerado pelos monômios em $e_i's$ de comprimento ímpar. Considere $\# : E \to E$ a superinvolução dada por $e_i^{\#} = -e_i$ (veja [1]). Como $char F = 0$, E pode ser decomposta por $E = E_0^+ \oplus E_0^- \oplus E_1^+ \oplus E_1^-$, onde E_i^+ é o espaço formado por todos os elementos $g_i \in E_i$ tais que $g_i^{\#} = g_i$ com $i = 0,1$ e E_j^- formado pelos elementos $g_j \in E_j$ satisfazendo $g_j^{\#} = -g_j$ com $j = 0,1$. Então, $E_0^+ = E_0$, $E_0^- = \{0\}$, $E_1^+ = \{0\}$ e $E_1^- = E_1$. Portanto, E satisfaz as #-superidentidades $z_{0,1} = 0$ e $y_{1,1} = 0$ e, além disso, com essa estrutura, pode-se proceder de maneira análoga à demonstração da Proposição 2 em [17] para determinar o conjunto das demais #-superidentidades de E e descrever a decomposição do #-cocaracter. Especificamente, prova-se que, fixado $n_1 + n_4 = n \geq 1$, tem-se

$$\chi_{\langle n \rangle}(E) = \chi_{((n_1),\emptyset,\emptyset,(1^{n_4}))} = \chi_{(n_1)} \otimes \chi_{(1^{n_4})}$$

que está contido no gancho quádruplo

$$(H(1,0), H(0,0), H(0,0), H(0,1)),$$

$\chi_{\langle n \rangle}(E) = 0$ e $c_{\langle n \rangle}(E) = 0$ para todo $\langle n \rangle = (n_1, n_2, n_3, n_4)$ com $n_2 \geq 1$ ou $n_3 \geq 1$, e

$$Id_2^{\#}(E) = \langle [y_{0,1}, y_{0,2}], [y_{0,1}, z_{1,2}], z_{1,1}z_{1,2} + z_{1,2}z_{1,1}, z_{0,1}, y_{1,1} \rangle_{T_2^{\#}}.$$

Além do mais, $c_{\langle n \rangle}(E) = 1$ pela primeira parte da prova da Proposição 3 em [17].

4.2 Teorema da Faixa para #-superálgebras

Começamos definindo o que seria uma identidade de Capelli dentro do nosso contexto.

Definição 4.8 *Seja A uma superálgebra com uma superinvolução $\#$. Dizemos que A satisfaz a $\#$-identidade de Capelli de posto $\langle k\rangle = (k_1, k_2, k_3, k_4)$, onde $k = k_1 + k_2 + k_3 + k_4$, se A satisfaz a seguinte série de $\#$-superidentidades:*

$$Cap_{k_1}(y_{0,1}, \cdots, y_{0,k_1}; x_1, \cdots, x_{k_1+1}) = \sum_{\sigma\in S_{k_1}} (-1)^\sigma x_1 y_{0,\sigma(1)} x_2 \cdots y_{0,\sigma(k_1)} x_{k_1+1} = 0,$$

$$Cap_{k_2}(z_{0,1}, \cdots, z_{0,k_2}; x_1, \cdots, x_{k_2+1}) = \sum_{\sigma\in S_{k_2}} (-1)^\sigma x_1 z_{0,\sigma(1)} x_2 \cdots z_{0,\sigma(k_2)} x_{k_2+1} = 0,$$

$$Cap_{k_3}(y_{1,1}, \cdots, y_{1,k_3}; x_1, \cdots, x_{k_3+1}) = \sum_{\sigma\in S_{k_3}} (-1)^\sigma x_1 y_{1,\sigma(1)} x_2 \cdots y_{1,\sigma(k_3)} x_{k_3+1} = 0$$

e

$$Cap_{k_4}(z_{1,1}, \cdots, z_{1,k_4}; x_1, \cdots, x_{k_4+1}) = \sum_{\sigma\in S_{k_4}} (-1)^\sigma x_1 z_{1,\sigma(1)} x_2 \cdots z_{1,\sigma(k_4)} x_{k_4+1} = 0,$$

onde as indeterminadas x_i's podem ser quaisquer indeterminadas do conjunto $(Y_0 \cup Z_0 \cup Y_1 \cup Z_1) \setminus (\mathcal{Y}_{0,k_1} \cup \mathcal{Z}_{0,k_2} \cup \mathcal{Y}_{1,k_3} \cup \mathcal{Z}_{1,k_4})$ ou são substituídas por palavras vazias iguais a 1 (com abuso de notação quando a álgebra não é unitária) de todas as formas possíveis. Nesse caso, escrevemos apenas que A satisfaz $Cap^{\#}_{\langle k\rangle}$ ou ainda $Cap^{\#}_{\langle k\rangle} \subseteq Id_2^{\#}(A)$.

Proposição 4.9 *Se $f \in F\langle X|\mathbb{Z}_2, \#\rangle$ é um polinômio alternado nas indeterminadas $t_1, \cdots, t_m$, todas pertencentes a apenas um dos conjuntos Y_0 ou Z_0 ou Y_1 ou Z_1, então*

$$f = \sum_{w_1,\cdots,w_{m+1}} \alpha_{w_1,\cdots,w_{m+1}} Cap_m(t_1, \cdots, t_m; w_1, \cdots, w_{m+1})$$

é uma combinação linear de polinômios de Capelli, onde $w_1, \cdots, w_{m+1}$ são monômios adequados (possivelmente vazios) em $F\langle X|\mathbb{Z}_2, \#\rangle$.

Demonstração. Segue de maneira análoga à prova da Proposição 1.5.5 encontrada em [24]. □

O lema a seguir é uma adaptação do Lema 2.5.1 em [24] para o caso de superálgebras com uma superinvolução $\#$. Segue aqui a demonstração completa. Antes disso, lembramos que $n = n_1 + n_2 + n_3 + n_4$ é a soma de quatro inteiros não negativos e $\langle n\rangle = (n_1, n_2, n_3, n_4)$.

Lema 4.10 *Sejam* $\langle\lambda\rangle = (\lambda(1), \lambda(2), \lambda(3), \lambda(4)) \vdash \langle n\rangle$ *uma multipartição de* n, H_i *um subgrupo de* $C_{T_{\lambda(i)}}$ *para* $i = 1, 2, 3, 4$ *e* M *um* $S_{\langle n\rangle}$*-módulo. Se* $e_{T_{\langle\lambda\rangle}}u \neq 0$ *para algum* $u \in M$*, então*

$$\left(\sum_{\tau_1\in H_1}(-1)^{\tau_1}\tau_1, \sum_{\tau_2\in H_2}(-1)^{\tau_2}\tau_2, \sum_{\tau_3\in H_3}(-1)^{\tau_3}\tau_3, \sum_{\tau_4\in H_4}(-1)^{\tau_4}\tau_4\right) e_{T_{\langle\lambda\rangle}}u \neq 0.$$

Demonstração. Para $i = 1, 2, 3, 4$, escreva $C_{T_{\lambda(i)}} = a_{i,1}H_i \cup a_{i,2}H_i \cup \cdots \cup a_{i,m}H_i$, onde $a_{i,1} = 1$ e os $a'_{i,j}s$ são representantes das classes laterais à esquerda de H_i em $C_{T_{\lambda(i)}}$. Defina

$$\langle r\rangle = (r_1, r_2, r_3, r_4) = \left(\sum_{\tau_1\in H_1}(-1)^{\tau_1}\tau_1, \sum_{\tau_2\in H_2}(-1)^{\tau_2}\tau_2, \sum_{\tau_3\in H_3}(-1)^{\tau_3}\tau_3, \sum_{\tau_4\in H_4}(-1)^{\tau_4}\tau_4\right).$$

Suponha, por contradição, que $\langle r\rangle e_{T\langle\lambda\rangle}u = 0$. Note que, para cada $i = 1, 2, 3, 4$, tem-se

$$\begin{aligned}\sum_{\tau_i\in C_{T_{\lambda(i)}}}(-1)^{\tau_i}\tau_i &= \sum_{\tau_i\in H_i}(-1)^{\tau_i}\tau_i + \sum_{\tau_i\in a_{i,2}H_i}(-1)^{\tau_i}\tau_i + \cdots + \sum_{\tau_i\in a_{i,m}H_i}(-1)^{\tau_i}\tau_i \\ &= r_i \pm a_{i,2}r_i \pm \cdots \pm a_{i,m}r_i \\ &= (1 \pm a_{i,2} \pm \cdots \pm a_{i,m})r_i \qquad (4.14) \\ &:= \beta_i r_i,\end{aligned}$$

onde $\beta_i = (1 \pm a_{i,2} \pm \cdots \pm a_{i,m}) \in FS_{n_i}$. Agora, da definição do elemento $e_{T_{\langle\lambda\rangle}}$, temos que

$$\begin{aligned}e^2_{T_{\langle\lambda\rangle}}u &= (e_{T_{\lambda(1)}} \otimes e_{T_{\lambda(2)}} \otimes e_{T_{\lambda(3)}} \otimes e_{T_{\lambda(4)}})e_{T_{\langle\lambda\rangle}}u \\ &= \left(\left(\sum_{\substack{\sigma_1\in R_{T_{\lambda(1)}}\\ \tau_1\in C_{T_{\lambda(1)}}}}(-1)^{\tau_1}\sigma_1\tau_1\right)\otimes\cdots\otimes\left(\sum_{\substack{\sigma_4\in R_{T_{\lambda(4)}}\\ \tau_4\in C_{T_{\lambda(4)}}}}(-1)^{\tau_4}\sigma_4\tau_4\right)\right)e_{T_{\langle\lambda\rangle}}u \\ &= \sum_{\substack{\langle\sigma\rangle\in R_{T_{\langle\lambda\rangle}}\\ \langle\tau\rangle\in C_{T_{\langle\lambda\rangle}}}}\Big([(-1)^{\tau_1}\sigma_1\tau_1]\otimes[(-1)^{\tau_2}\sigma_2\tau_2]\otimes[(-1)^{\tau_3}\sigma_3\tau_3]\otimes[(-1)^{\tau_4}\sigma_4\tau_4]\Big)e_{T_{\langle\lambda\rangle}}u,\end{aligned}$$

onde $\langle\sigma\rangle = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4) \in R_{T_{\langle\lambda\rangle}} = R_{T_{\lambda(1)}} \times R_{T_{\lambda(2)}} \times R_{T_{\lambda(3)}} \times R_{T_{\lambda(4)}}$ e $\langle\tau\rangle = (\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4) \in C_{T_{\langle\lambda\rangle}} = C_{T_{\lambda(1)}} \times C_{T_{\lambda(2)}} \times C_{T_{\lambda(3)}} \times C_{T_{\lambda(4)}}$. Assim, denotando $\langle\beta\rangle = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$ e lembrando da definição do elemento $\langle r\rangle = (r_1, r_2, r_3, r_4)$ e da igualdade (4.14), segue que

$$\begin{aligned}
e^2_{T_{\langle\lambda\rangle}} u &= \sum_{\substack{\langle\sigma\rangle \in R_{T_{\langle\lambda\rangle}} \\ \langle\tau\rangle \in C_{T_{\langle\lambda\rangle}}}} \Big([(-1)^{\tau_1}\sigma_1\tau_1] \otimes [(-1)^{\tau_2}\sigma_2\tau_2] \otimes [(-1)^{\tau_3}\sigma_3\tau_3] \otimes [(-1)^{\tau_4}\sigma_4\tau_4] \Big) e_{T_{\langle\lambda\rangle}} u \\
&= \sum_{\substack{\langle\sigma\rangle \in R_{T_{\langle\lambda\rangle}} \\ \langle\tau\rangle \in C_{T_{\langle\lambda\rangle}}}} \Big[\Big((\sigma_1 \otimes \cdots \otimes \sigma_4)((-1)^{\tau_1}\tau_1 \otimes \cdots \otimes (-1)^{\tau_4}\tau_4) \Big) e_{T_{\langle\lambda\rangle}} u \Big]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\langle\sigma\rangle \in R_{T_{\langle\lambda\rangle}}} \left[\left((\sigma_1 \otimes \cdots \otimes \sigma_4) \left(\sum_{\langle\tau\rangle \in C_{T_{\langle\lambda\rangle}}} (-1)^{\tau_1}\tau_1 \otimes \cdots \otimes (-1)^{\tau_4}\tau_4 \right) \right) e_{T_{\langle\lambda\rangle}} u \right] \\
&= \sum_{\langle\sigma\rangle \in R_{T_{\langle\lambda\rangle}}} \Big[\Big((\sigma_1 \otimes \cdots \otimes \sigma_4)(\beta_1 r_1 \otimes \cdots \otimes \beta_4 r_4) \Big) e_{T_{\langle\lambda\rangle}} u \Big] \\
&= \sum_{\langle\sigma\rangle \in R_{T_{\langle\lambda\rangle}}} \left((\sigma_1 \otimes \cdots \otimes \sigma_4)\langle\beta\rangle \underbrace{\langle r\rangle e_{T_{\langle\lambda\rangle}} u}_{=0} \right) = 0.
\end{aligned}$$

Mas isso contradiz o fato de $e^2_{T_{\langle\lambda\rangle}} = \gamma e_{T_{\langle\lambda\rangle}}$ para algum inteiro $\gamma \neq 0$ junto com a hipótese $e_{T_{\langle\lambda\rangle}} u \neq 0$. □

Definição 4.11 *Seja $\langle\lambda\rangle = (\lambda(1), \lambda(2), \lambda(3), \lambda(4)) \vdash \langle n\rangle$, $n = n_1 + n_2 + n_3 + n_4$, uma multipartição de n. Dado um inteiro não negativo $k = k_1 + k_2 + k_3 + k_4$, dizemos que a altura $h(\langle\lambda\rangle)$ da multipartição $\langle\lambda\rangle$ é maior ou igual a $\langle k\rangle$, e escrevemos $h(\langle\lambda\rangle) \geq \langle k\rangle$, quando, para algum $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, a altura $h(\lambda(i))$ da partição $\lambda(i) \vdash n_i$ é maior ou igual a k_i. Caso contrário, escrevemos $h(\langle\lambda\rangle) < \langle k\rangle$.*

Agora, estamos aptos a demonstrar o Teorema B.

Teorema 4.12 *(Teorema da Faixa para #-superálgebras) Sejam F um corpo de característica zero, A uma superálgebra sobre F com uma superinvolução # e $\chi_{\langle n\rangle}(A) = \sum_{\langle\lambda\rangle \vdash \langle n\rangle} m_{\langle\lambda\rangle}\chi_{\langle\lambda\rangle}$ seu n-ésimo #-cocaracter. Se A é uma PI-álgebra, então A satisfaz $Cap^{\#}_{\langle k\rangle}$, $k = k_1 + k_2 + k_3 + k_4$, a #-identidade de Capelli de posto $\langle k\rangle$, se, e somente se, $m_{\langle\lambda\rangle} = 0$ sempre que $h(\langle\lambda\rangle) \geq \langle k\rangle$.*

Demonstração. Suponha que $Cap^{\#}_{\langle k\rangle} \subseteq Id_2^{\#}(A)$ e seja $\langle\lambda\rangle = (\lambda(1), \lambda(2), \lambda(3), \lambda(4)) \vdash \langle n\rangle$ uma multipartição de $n = n_1 + n_2 + n_3 + n_4$ satisfazendo $h(\langle\lambda\rangle) \geq \langle k\rangle$. Pela Proposição 3.30, a multiplicidade $m_{\langle\lambda\rangle} = 0$ se, e somente se, para qualquer multitabela $T_{\langle\lambda\rangle}$ de forma $\langle\lambda\rangle$ e para qualquer polinômio multilinear $f \in P_{\langle n\rangle}$, a álgebra A satisfaz a superidentidade $e_{T_{\langle\lambda\rangle}} f \equiv 0$. Considere uma multitabela $T = (T_1, T_2, T_3, T_4)$ de forma $\langle\lambda\rangle$ qualquer. Suponha, por contradição, que $e_T f \not\equiv 0$ em A para algum polinômio multilinear $f \in P_{\langle n\rangle}$. Como o elemento idempotente e_T gera um $FS_{\langle n\rangle}$-módulo à esquerda irredutível, é suficiente mostrar que

$$\langle a\rangle e_T f \in Id_2^{\#}(A) \tag{4.15}$$

para algum $\langle a\rangle \in FS_{\langle n\rangle}$ tal que $\langle a\rangle e_T f \not\equiv 0$. De fato, como $M = FS_{\langle n\rangle} e_T f$ é um módulo irredutível e $N = FS_{\langle n\rangle}\langle a\rangle e_T f$ é um submódulo não trivial de M, concluímos que $M = N$. Portanto, $e_T f = \langle b\rangle\langle a\rangle e_T f$ para algum $\langle b\rangle \in FS_{\langle n\rangle}$ é uma #-superidentidade de A em vista de (4.15), o que contradiz $e_T f \neq 0$ em A. Considere

$$\langle a\rangle = \left(\sum_{\tau_1\in C_{T_1}} (-1)^{\tau_1}\tau_1, \sum_{\tau_2\in C_{T_2}} (-1)^{\tau_2}\tau_2, \sum_{\tau_3\in C_{T_3}} (-1)^{\tau_3}\tau_3, \sum_{\tau_4\in C_{T_4}} (-1)^{\tau_4}\tau_4\right),$$

onde C_{T_i} é o subgrupo de S_{n_i} que estabiliza as colunas de T_i, com $i = 1, 2, 3, 4$. Pelo Lema 4.10, o polinômio $\langle a\rangle e_T f \not\equiv 0$. Por outro lado, se $h_i = h(\lambda(i)) \geq k_i$, para algum $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, e $j_1, \cdots, j_{h_i}$ são as entradas da primeira coluna de T_i, então $\langle a\rangle e_T f$ é um polinômio alternado nas indeterminadas homogêneas $t_{j_1}, \cdots, t_{j_{k_i}}, \cdots, t_{j_{h_i}}$ de um dos conjuntos Y_0, Z_0, Y_1 e Z_1. Portanto, $\langle a\rangle e_T f$ é alternado nas indeterminadas homogêneas $t_{j_1}, \cdots, t_{j_{k_i}}$. Segue da Proposição 4.9 que $\langle a\rangle e_T f$ é uma combinação linear de polinômios Capelli de posto k_i. Como os polinômios Capelli são multilineares, obtemos $\langle a\rangle e_T f \in Id_2^{\#}(A)$, visto que, por hipótese, $Cap^{\#}_{\langle k\rangle} \subseteq Id_2^{\#}(A)$.

Reciprocamente, suponha que $m_{\langle\lambda\rangle} = 0$ sempre que $h(\langle\lambda\rangle) \geq \langle k\rangle$. Para todo $i = 1, 2, 3, 4$, considere

$$f = f(t_1, t_2, \cdots, t_{k_i}, x_1, \cdots, x_{k_i+1}) = \sum_{\sigma\in S_{k_i}} (-1)^{\sigma} x_1 t_{\sigma(1)} \cdots t_{\sigma(k_i)} x_{k_i+1},$$

onde as indeterminadas $t_1, \cdots, t_{k_i}$ pertencem ao mesmo conjunto de indeterminadas homogêneas Y_0 ou Z_0 ou Y_1 ou Z_1, para todo $i = 1, 2, 3, 4$, respectivamente, e as indeterminadas $x_i's$ podem ser quaisquer indeterminadas do conjunto $Y_0 \cup Z_0 \cup Y_1 \cup Z_1$. Aqui, f representa qualquer um dos polinômios dados na Definição 4.8. Seja $\langle\lambda\rangle = (\lambda(1), \cdots, \lambda(i), \cdots, \lambda(4)) \vdash (p_1, \cdots, p_i, \cdots, p_4)$, onde $p_i = k_i + \gamma_i$, com $\gamma_i \geq 0$ e $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, representa o número das indeterminadas homogêneas que aparecem em f e pertencem ao conjunto em que $t_1, \cdots, t_{k_i}$ estão, e, além disso, $p_1 + \cdots + p_i + \cdots + p_4 = 2k_i + 1$. Pela Proposição 3.30, se $h(\langle\lambda\rangle) \geq \langle k\rangle$, isto é, $h(\lambda(i)) = h_i \geq k_i$ para algum $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, então $e_{T_{\langle\lambda\rangle}} f \in Id_2^{\#}(A)$ para toda multipartição $\langle\lambda\rangle = (\lambda(1), \cdots, \lambda(i), \cdots, \lambda(4)) \vdash (p_1, \cdots, p_i, \cdots, p_4)$ e para toda multitabela $T_{\langle\lambda\rangle}$ da forma $\langle\lambda\rangle$. Assim, obtemos que $Cap^{\#}_{\langle k\rangle} \subseteq Id_2^{\#}(A)$.

Agora, suponha que $h(\langle\lambda\rangle) < \langle k\rangle$, ou seja, $h(\lambda(i)) = h_i < k_i$ para todo i. Fixando $i_0 \in \{1, 2, 3, 4\}$, como f é alternado nas indeterminadas $t_1, \cdots, t_{k_{i_0}}$, então, para cada $\langle\tau\rangle = \langle\tau_1, \cdots, \tau_{i_0}, \cdots, \tau_4\rangle \in S_{\langle 2k_{i_0}+1\rangle} = S_{p_1} \times \cdots \times S_{p_{i_0}} \times \cdots \times S_{p_4}$, onde $p_1 + \cdots + p_{i_0} + \cdots + p_4 = 2k_{i_0} + 1$ e $\tau_{i_0} \in S_{p_{i_0}}$ age nas variáveis homogêneas do mesmo tipo que $t_1, \cdots, t_{k_{i0}}$, tem-se que

$$\langle\tau\rangle f(t_1, t_2, \cdots, t_{k_{i_0}}, x_1, \cdots, x_{k_{i_0}+1}) = f(t_{\tau_{i_0}(1)}, t_{\tau_{i_0}(2)}, \cdots, t_{\tau_{i_0}(k_{i_0})}, \cdots)$$

é alternado nas indeterminadas $t_{\tau_{i_0}(1)}, \cdots, t_{\tau_{i_0}(k_{i_0})}$. Como $h(\lambda(i_0)) = h_{i_0} = r < k_{i_0}$, o subgrupo $R_{T_{\lambda(i_0)}}$ de $S_{p_{i_0}}$ que estabiliza as linhas da tabela $T_{\lambda(i_0)}$ é um produto direto de $r < k_{i_0}$ fatores

$$R_{T_{\lambda(i_0)}} = H_{1,i_0} \times \cdots \times H_{r,i_0},$$

em que H_{q,i_0} é o subgrupo de $S_{p_{i_0}}$ que permuta entre si os elementos da q-ésima linha da tabela $T_{\lambda(i_0)}$, fixando os elementos das demais linhas. Assim, podemos escrever o somatório

$$\sum_{\sigma \in R_{T_{\lambda(i_0)}}} \sigma = \left(\sum_{\sigma_1 \in H_{1,i_0}} \sigma_1\right) \cdots \left(\sum_{\sigma_r \in H_{r,i_0}} \sigma_r\right).$$

Como $r < k_{i_0}$, existem pelo menos dois inteiros entre $\tau_{i_0}(1), \cdots, \tau_{i_0}(k_{i_0})$ pertencentes a uma mesma linha da tabela $T_{\lambda(i_0)}$, digamos que seja a l-ésima linha. Afirmamos que

$$\left(\sum_{\sigma_l \in H_{l,i_0}} \sigma_l\right) \tau_{i_0} f = 0 \tag{4.16}$$

é o polinômio nulo em $F\langle X|\mathbb{Z}_2,\#\rangle$, onde estamos olhando essa ação apenas no conjunto das indeterminadas homogêneas de f em que $t_1,\cdots,t_{k_{i_0}}$ pertencem e fixando as demais. Com efeito, sem perda de generalidade, sejam $a'=\tau_{i_0}(1)$ e $b'=\tau_{i_0}(2)$ os elementos na l-ésima linha de $T_{\lambda(i_0)}$. Considere $A_{l,i_0}\subseteq H_{l,i_0}$ o subgrupo das permutações pares contido em H_{l,i_0} e escreva $H_{l,i_0}=A_{l,i_0}\cup\tilde{A}_{l,i_0}$, onde $\tilde{A}_{l,i_0}$ é o conjunto das permutações ímpares contido em H_{l,i_0}. Note que $\tilde{A}_{l,i_0}=A_{l,i_0}(a'\ b')$, ou seja, $\tilde{A}_{l,i_0}$ é classe lateral à esquerda de A_{l,i_0} em H_{l,i_0} cujo representante é a transposição $(a'\ b')$. Com isso, o somatório em (4.16) pode ser escrito como

$$\begin{aligned}\left(\sum_{\sigma_l\in H_{l,i_0}}\sigma_l\right)\tau_{i_0}f &= \left(\sum_{\sigma_l\in A_{l,i_0}}\sigma_l\right)\tau_{i_0}f+\left(\sum_{\tilde{\sigma_l}\in\tilde{A}_{l,i_0}}\tilde{\sigma_l}\right)\tau_{i_0}f\\ &= \left(\sum_{\sigma_l\in A_{l,i_0}}\sigma_l\right)\tau_{i_0}f+\left(\sum_{\rho_l\in A_{l,i_0}}\rho_l(a'\ b')\right)\tau_{i_0}f.\end{aligned}$$

Segue daí e do fato que $\tau_{i_0}f$ é alternado nas indeterminadas $t_{a'}=t_{\tau_{i_0}(1)}$ e $t_{b'}=t_{\tau_{i_0}(2)}$, ou seja, $(a'\ b')\tau_{i_0}f=-\tau_{i_0}f$, que

$$\begin{aligned}\left(\sum_{\sigma_l\in H_{l,i_0}}\sigma_l\right)\tau_{i_0}f &= \left(\sum_{\sigma_l\in A_{l,i_0}}\sigma_l\right)\tau_{i_0}f+\left(\sum_{\rho_l\in A_{l,i_0}}\rho_l(a'\ b')\right)\tau_{i_0}f\\ &= \left(\sum_{\sigma_l\in A_{l,i_0}}\sigma_l\right)\tau_{i_0}f-\left(\sum_{\rho_l\in A_{l,i_0}}\rho_l\right)\tau_{i_0}f\\ &= 0,\end{aligned}$$

o polinômio nulo, o que prova nossa afirmação. Assim,

$$\left(\sum_{\sigma\in R_{T_{\lambda(i_0)}}}\sigma\right)\tau_{i_0}f=0, \tag{4.17}$$

o que implica que

$$
\begin{aligned}
e_{T_{\langle\lambda\rangle}} f &= (e_{T_{\lambda(1)}} \otimes e_{T_{\lambda(2)}} \otimes e_{T_{\lambda(3)}} \otimes e_{T_{\lambda(4)}}) f \\
&= (e_{T_{\lambda(1)}} \otimes \cdots \otimes Id \otimes \cdots \otimes e_{T_{\lambda(4)}})(Id \otimes \cdots \otimes e_{T_{\lambda(i_0)}} \otimes \cdots \otimes Id) f \\
&= (e_{T_{\lambda(1)}} \otimes \cdots \otimes Id \otimes \cdots \otimes e_{T_{\lambda(4)}}) \left(Id \otimes \cdots \otimes \sum_{\substack{\sigma_{i_0} \in R_{T_{\lambda(i_0)}} \\ \tau_{i_0} \in C_{T_{\lambda(i_0)}}}} (-1)^{\tau_{i_0}} \sigma_{i_0} \tau_{i_0} \otimes \cdots \right) f \\
&= (e_{T_{\lambda(1)}} \otimes \cdots \otimes Id \otimes \cdots \otimes e_{T_{\lambda(4)}}) \left(\sum_{\substack{\sigma_{i_0} \in R_{T_{\lambda(i_0)}} \\ \tau_{i_0} \in C_{T_{\lambda(i_0)}}}} (-1)^{\tau_{i_0}} \sigma_{i_0} \tau_{i_0} \right) f \\
&= (e_{T_{\lambda(1)}} \otimes \cdots \otimes Id \otimes \cdots \otimes e_{T_{\lambda(4)}}) \left[\sum_{\tau_{i_0} \in C_{T_{\lambda(i_0)}}} (-1)^{\tau_{i_0}} \underbrace{\left(\sum_{\sigma_{i_0} \in R_{T_{\lambda(i_0)}}} \sigma_{i_0} \right) \tau_{i_0} f}_{=0} \right] \\
&= 0,
\end{aligned}
$$

o polinômio nulo, onde usamos que (4.17). Ou seja, $e_{T_{\langle\lambda\rangle}} f = 0$ na #-superálgebra livre no caso em que $h(\langle\lambda\rangle) < \langle k \rangle$.

Concluímos que, para toda multipartição $\langle\lambda\rangle \vdash \langle 2k_i + 1\rangle$, vale que $e_{T_{\langle\lambda\rangle}} f \in Id_2^{\#}(A)$. Agora, como a característica de F é zero, pelo Teorema de Maschke, podemos escrever

$$
FS_{\langle 2k_i+1\rangle} f = \bigoplus_{\substack{\langle\mu\rangle \vdash \langle 2k_i+1\rangle \\ T_{\langle\mu\rangle} \text{ standard}}} FS_{\langle 2k_i+1\rangle} e_{T_{\langle\mu\rangle}} f \subseteq Id_2^{\#}(A)
$$

e, assim, $f \in Id_2^{\#}(A)$. Para finalizar, basta substituir as indeterminadas $x_q' s$ por quaisquer indeterminadas do conjunto $(Y_0 \cup Z_0 \cup Y_1 \cup Z_1) \setminus (\mathcal{Y}_{0,k_1} \cup \mathcal{Z}_{0,k_1} \cup \mathcal{Y}_{1,k_3} \cup \mathcal{Z}_{1,k_4})$ ou por palavras vazias iguais a 1 (com abuso de notação quando a álgebra não é unitária) de todas as formas possíveis. □

4.3 Uma aplicação do Teorema do Gancho

Como consequência do Teorema do Gancho 4.4, apresentaremos nesta seção um análogo do Teorema de Amitsur para o caso de PI-superálgebras com uma superinvolução $\#$, o qual garante que uma $\#$-superálgebra satisfaz uma $\#$-superidentidade que é o produto de potências de polinômios Standard, definidos no Exemplo 2.31. Antes de demonstrá-lo, expomos a seguir um lema auxiliar que relaciona tabelas de Young retangulares T_λ de forma $\lambda = (m^k)$ e polinômios da forma $e_{T_\lambda} f$, onde f é um polinômio multilinear.

Lema 4.13 *Seja $\lambda = (m^k) \vdash n$ uma partição de $n = km$ e seja T_λ a seguinte tabela de Young Standard associada a λ*

1	$k+1$	$\cdots$	$(m-1)k+1$
2	$k+2$	$\cdots$	$(m-1)k+2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
k	$2k$	$\cdots$	mk

.

Considere $f(x_1, x_2, \cdots, x_{km}) = e_{T_\lambda}(x_1 x_2 \cdots x_{km}) \in P_{km}$. Então,

$$w(x_1, x_2, \cdots, x_k) = f(x_1, \cdots, x_k, x_1, \cdots, x_k, \cdots, x_1, \cdots, x_k) = (m!)^k St_k^m(x_1, \cdots, x_k).$$

Demonstração. Consideramos

$$e_{T_\lambda} = \sum_{\substack{\sigma \in R_{T_\lambda} \\ \mu \in C_{T_\lambda}}} (-1)^\mu \sigma \mu.$$

Da Definição 2.12, temos que

$$C_{T_\lambda} = S_k(1, 2, \cdots, k) \times \cdots \times S_k((m-1)k+1, (m-1)k+2, \cdots, mk).$$

Denotamos por $S_k^{(1)} = S_k(1, 2, \cdots, k), \cdots, S_k^{(m)} = S_k((m-1)k+1, \cdots, mk)$ os grupos de permutações que agem na primeira, segunda, $\cdots$ e m-ésima coluna da tabela T_λ, respectivamente. Obtemos, então,

$$\left(\sum_{\mu\in C_{T_\lambda}}(-1)^{\mu}\mu\right)(x_1x_2\dots x_n)=\sum_{\mu_1\in S_k^{(1)}}\dots\sum_{\mu_m\in S_k^{(m)}}(-1)^{\mu_1}\dots(-1)^{\mu_m}\mu_1\dots\mu_m\,(x_1x_2\dots x_n)$$

$$=\sum_{\mu_1\in S_k^{(1)}}\dots\sum_{\mu_{m-1}\in S_k^{(m-1)}}(-1)^{\mu_1}\dots(-1)^{\mu_{m-1}}\mu_1\dots\mu_{m-1}\left(\sum_{\mu_m\in S_k^{(m)}}(-1)^{\mu_m}\mu_m\,(x_1x_2\dots x_n)\right)$$

$$=\sum_{\mu_1\in S_k^{(1)}}\dots\sum_{\mu_{m-1}\in S_k^{(m-1)}}(-1)^{\mu_1}\dots(-1)^{\mu_{m-1}}\mu_1\dots\mu_{m-1}\left(x_1x_2\dots x_{(m-1)k}St_k\left(x_{(m-1)k+1},\dots,x_n\right)\right)$$

$$=\dots=\sum_{\mu_1\in S_k^{(1)}}(-1)^{\mu_1}\mu_1(x_1\cdots x_k)St_k(x_{k+1},\cdots,x_{2k})\cdots St_k(x_{(m-1)k+1},\cdots,x_{mk})$$

$$=St_k\left(x_1,\dots,x_k\right)\cdot St_k\left(x_{k+1},\dots,x_{2k}\right)\cdot\dots\cdot St_k\left(x_{(m-1)k+1},\dots,x_{mk}\right).$$

Agora, da Definição 2.11,

$$R_{T_\lambda}=S_m(1,k+1,\cdots,(m-1)k+1)\times\cdots\times S_m(k,2k,\cdots,mk).$$

Vamos denotar por $\tilde{S}_m^{(1)}=S_m(1,k+1,\cdots,(m-1)k+1),\cdots,\tilde{S}_m^{(k)}=S_m(k,2k,\cdots,mk)$ os grupos de permutações que agem na primeira, segunda, $\cdots$ e k-ésima linha da tabela T_λ, respectivamente. Segue que

$$f\left(x_1,x_2,\dots,x_n\right)=e_{T_\lambda}\left(x_1x_2\dots x_n\right)=\sum_{\sigma\in R_{T_\lambda}}\sigma\left(\sum_{\mu\in C_{T_\lambda}}(-1)^{\mu}\mu\left(x_1x_2\dots x_n\right)\right)$$

$$=\sum_{\sigma\in R_{T_\lambda}}\sigma\left(St_k\left(x_1,\dots,x_k\right)\cdot St_k\left(x_{k+1},\dots,x_{2k}\right)\cdot\dots\cdot St_k\left(x_{(m-1)k+1},\dots,x_{mk}\right)\right)$$

$$=\sum_{\sigma_1\in\tilde{S}_m^{(1)}}\cdots\sum_{\sigma_k\in\tilde{S}_m^{(k)}}\sigma_1\cdots\sigma_k\left(St_k\left(x_1,\dots,x_k\right)\cdot St_k\left(x_{k+1},\dots,x_{2k}\right)\cdot\right.$$

$$\left.\dots\cdot St_k\left(x_{(m-1)k+1},\dots,x_{mk}\right)\right)$$

$$=\sum_{\sigma_1\in\tilde{S}_m^{(1)}}\cdots\sum_{\sigma_k\in\tilde{S}_m^{(k)}}St_k\left(x_{\sigma_1(1)},\dots,x_{\sigma_k(k)}\right)\cdot St_k\left(x_{\sigma_1(k+1)},\dots,x_{\sigma_k(2k)}\right)\cdot$$

$$\dots\cdot St_k\left(x_{\sigma_1(m-1)k+1},\dots,x_{\sigma_k(mk)}\right).$$

Sendo $|R_{T_\lambda}| = (m!)^k$, concluímos que

$$\begin{aligned} w\left(x_1, x_2, \ldots, x_k\right) &= f\left(x_1, x_2, \ldots, x_k, x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots, x_1, x_2, \ldots, x_k\right) \\ &= \sum_{\sigma \in R_{T_\lambda}} St_k\left(x_1, \ldots, x_k\right)^m \\ &= (m!)^k \cdot St_k^m\left(x_1, x_2, \ldots, x_k\right), \end{aligned}$$

o que finaliza a demonstração do lema. □

Segue a demonstração do Teorema C.

Teorema 4.14 *(Teorema de Amitsur para #-superálgebras) Sejam F um corpo de característica zero e A uma superálgebra sobre F com uma superinvolução #. Se A é uma PI-álgebra, existem inteiros k_i, m_i, $i = 1, 2, 3, 4$, tais que A satisfaz a identidade*

$$St_{k_1}^{m_1}(y_{0,1}, \cdots, y_{0,k_1}) \cdot St_{k_2}^{m_2}(z_{0,1}, \cdots, z_{0,k_2}) \cdot St_{k_3}^{m_3}(y_{1,1}, \cdots, y_{1,k_3}) \cdot St_{k_4}^{m_4}(z_{1,1}, \cdots, z_{1,k_4}) \equiv 0.$$

Demonstração: Seja $\chi_{\langle n \rangle}(A) = \sum_{\langle \lambda \rangle \vdash n} m_{\langle \lambda \rangle} \chi_{\langle \lambda \rangle}$. Pelo Teorema 4.4, existem inteiros positivos $d_i, l_i \geq 1$, $i = 1, 2, 3, 4$, tais que $m_{\langle \mu \rangle} = 0$ se

$$D_{\langle \mu \rangle} \not\subseteq H_4(n) = (H(d_1, l_1), H(d_2, l_2), H(d_3, l_3), H(d_4, l_4)).$$

Tomando $k_i = d_i + 1$, $m_i = l_i + 1$ e $\mu_i = (m_i^{k_i})$ uma partição de $n_i = k_i m_i$, com $i = 1, 2, 3, 4$, temos que $D_{\mu_i} \not\subseteq H(d_i, l_i)$ e, consequentemente, $D_{\langle \mu \rangle} \not\subseteq H_4(n)$, o que implica em $m_{\langle \mu \rangle} = 0$. Fixando os monômios $w_1 = w_1(y_{0,1}, \cdots, y_{0,k_1 m_1}) = y_{0,1} \cdots y_{0,k_1 m_1}$, $w_2 = w_2(z_{0,1}, \cdots, z_{0,k_2 m_2}) = z_{0,1} \cdots z_{0,k_2 m_2}$, $w_3 = w_3(y_{1,1}, \cdots, y_{1,k_3 m_3}) = y_{1,1} \cdots y_{1,k_3 m_3}$ e $w_4 = w_4(z_{1,1}, \cdots, z_{1,k_4 m_4}) = z_{1,1} \cdots z_{1,k_4 m_4}$. Considere T_{μ_i} a tabela de Young Standart dada pelo Lema 4.13 para cada $i = 1, 2, 3, 4$. Como $m_{\langle \mu \rangle} = 0$, segue que

$$\begin{aligned} f(\mathcal{Y}_{0,n_1}, \mathcal{Z}_{0,n_2}, \mathcal{Y}_{1,n_3}, \mathcal{Z}_{1,n_4}) &= e_{T_{\langle \mu \rangle}}(w_1 \cdot w_2 \cdot w_3 \cdot w_4) \\ &= e_{T_{\mu_1}}(w_1) \cdot e_{T_{\mu_2}}(w_2) \cdot e_{T_{\mu_3}}(w_3) \cdot e_{T_{\mu_4}}(w_4) \\ &\in Id_2^{\#}(A)). \end{aligned}$$

Portanto, denotando as $k_i m_i$-uplas, para $i = 1, 2, 3, 4$,

$$\mathcal{Y}_{0,k_1}^{m_1} = (y_{0,1}, \cdots, y_{0,k_1}, \cdots, y_{0,1}, \cdots, y_{0,k_1}),$$

repetindo as indeterminadas do conjunto $\mathcal{Y}_{0,k_1} = \{y_{0,1}, \cdots, y_{0,k_1}\}$ m_1 vezes,

$$\mathcal{Z}_{0,k_2}^{m_2} = (z_{0,1}, \cdots, z_{0,k_2}, \cdots, z_{0,1}, \cdots, z_{0,k_2}),$$

repetindo as indeterminadas do conjunto $\mathcal{Z}_{0,k_2} = \{z_{0,1}, \cdots, z_{0,k_2}\}$ m_2 vezes,

$$\mathcal{Y}_{1,k_3}^{m_3} = (y_{1,1}, \cdots, y_{1,k_3}, \cdots, y_{1,1}, \cdots, y_{1,k_3}),$$

repetindo as indeterminadas do conjunto $\mathcal{Y}_{1,k_3} = \{y_{1,1}, \cdots, y_{1,k_3}\}$ m_3 vezes e

$$\mathcal{Z}_{1,k_4}^{m_4} = (z_{1,1}, \cdots, z_{1,k_4}, \cdots, z_{1,1}, \cdots, z_{1,k_4}),$$

repetindo as indeterminadas do conjunto $\mathcal{Z}_{1,k_4} = \{z_{1,1}, \cdots, z_{1,k_4}\}$ m_4 vezes, pelo Lema 4.13, obtém-se

$$f(\mathcal{Y}_{0,k_1}^{m_1}, \mathcal{Z}_{0,k_2}^{m_2}, \mathcal{Y}_{1,k_3}^{m_3}, \mathcal{Z}_{1,k_4}^{m_4}) =$$
$$\hat{m} St_{k_1}^{m_1}(y_{0,1}, \cdots, y_{0,k_1}) \cdot St_{k_2}^{m_2}(z_{0,1}, \cdots, z_{0,k_2}) \cdot St_{k_3}^{m_3}(y_{1,1}, \cdots, y_{1,k_3}) \cdot St_{k_4}^{m_4}(z_{1,1}, \cdots, z_{1,k_4})),$$

pertence a $Id_2^{\#}(A)$, onde $\hat{m} = (m_1!)^{k_1}(m_2!)^{k_2}(m_3!)^{k_3}(m_4!)^{k_4}$. Como a *char* $F = 0$, segue que

$$St_{k_1}^{m_1}(y_{0,1}, \cdots, y_{0,k_1}) \cdot St_{k_2}^{m_2}(z_{0,1}, \cdots, z_{0,k_2}) \cdot St_{k_3}^{m_3}(y_{1,1}, \cdots, y_{1,k_3}) \cdot St_{k_4}^{m_4}(z_{1,1}, \cdots, z_{1,k_4}) \in Id_2^{\#}(A),$$

e o teorema está provado. $\square$

Capítulo 5

Teoremas do Gancho e da Faixa para Superálgebra com Involução Graduada

Nas demonstrações dos Teoremas do Gancho (Teorema 4.4), de Amitsur (Teorema 4.14) e da Faixa (Teorema 4.12) para o caso de superálgebras com uma superinvolução, percebemos que os argumentos empregados são baseados, essencialmente, na decomposição de A em uma soma direta de quatro subespaços cujo produto de seus elementos possui certas propriedades. É natural, portanto, pensar nesses resultados para o caso em que a superálgebra A possui uma aplicação diferente de superinvolução mas que nos forneça de igual modo tal decomposição. Dessa forma, nosso principal objetivo neste capítulo é estender os Teoremas do Gancho, da Faixa e de Amitsur para o caso no qual a álgebra A é uma superálgebra com uma involução graduada.

5.1 Superálgebra com involução graduada

Seja $A = A_0 \oplus A_1$ uma superálgebra sobre um corpo F de característica zero. Uma involução graduada em A é uma aplicação F-linear $* : A \to A$ tal que $(c^*)^* = c$ para todo $c \in A$, $(ab)^* = b^*a^*$ para todos os elementos $a, b \in A$ e $A_0^* \subseteq A_0$ e $A_1^* \subseteq A_1$. Nesse caso, chamamos A de $*$-superálgebra. Observamos que toda superinvolução $\#$ restrita a componente A_0 é uma involução graduada.

Temos novamente que, como $charF \neq 2$, então

$$A = A_0^+ \oplus A_0^- \oplus A_1^+ \oplus A_1^-,$$

onde $A_i^+ = \{a \in A_i \mid a^* = a\}$ e $A_i^- = \{a \in A_i \mid a^* = -a\}$, para $i = 0, 1$, são as componentes homogêneas simétricas e antissimétricas de A, respectivamente.

Considere $\mathcal{F} = F\langle X|\mathbb{Z}_2, *\rangle$ a álgebra livre associativa, não comutativa e não unitária, gerada pelo conjunto $X = \{x_1, x_2, \cdots\}$ sobre o corpo F de característica zero. Escrevemos o conjunto X como uma união disjunta de quatro conjuntos enumeráveis $X = Y_0 \cup Z_0 \cup Y_1 \cup Z_1$, onde $Y_0 = \{y_{0,1}, y_{0,2}, \cdots\}$, $Z_0 = \{z_{0,1}, z_{0,2}, \cdots\}$, $Y_1 = \{y_{1,1}, y_{1,2}, \cdots\}$, $Z_1 = \{z_{1,1}, z_{1,2}, \cdots\}$ são conjuntos de variáveis pares simétricas, pares antissimétricas, ímpares simétricas e ímpares antissimétricas, respectivamente.

Veja que é possível obter uma superestrutura em $\mathcal{F}$. Exigindo que as variáveis de $Y_0 \cup Z_0$ e $Y_1 \cup Z_1$ sejam homogêneas de grau 0 e grau 1, respectivamente, temos que $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \oplus \mathcal{F}_1$, onde $\mathcal{F}_0$ é o subespaço gerado por todos os monômios que tem um número par de variáveis de grau 1 e $\mathcal{F}_1$ é o subespaço gerado por todos os monômios que tem um número ímpar de variáveis de grau 1.

Além dessa superestrura, podemos definir uma involução graduada na superálgebra livre $\mathcal{F}$. Para isso, seja $* : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ a aplicação definida por $y_{i,j}^* = y_{i,j}$, $z_{i,j}^* = -z_{i,j}$, para $i = 0, 1$ e $j \geq 1$, e

$$w^* = (x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k})^* = x_{i_k}^* x_{i_{k-1}}^* \cdots x_{i_1}^* = (-1)^t x_{i_k} x_{i_{k-1}} \cdots x_{i_1},$$

onde w é um monômio nas indeterminadas $x_{i_l} \in Y_0 \cup Z_0 \cup Y_1 \cup Z_1$, $t = deg_{Z_0 \cup Z_1}(w)$ (o número de indeterminadas de $Z_0 \cup Z_1$ no monômio w). Agora, estenda a aplicação $*$ por linearidade em toda álgebra $\mathcal{F}$. Mostra-se que $*$ é, de fato, uma involução graduada na superálgebra livre $\mathcal{F} = F\langle X|\mathbb{Z}_2, *\rangle$.

Com essa $\mathbb{Z}_2$-graduação e a involução graduada $*$, a álgebra $\mathcal{F} = F\langle X|\mathbb{Z}_2, *\rangle$ é chamada de superálgebra livre com involução graduada ($*$-superálgebra livre) com posto enumerável. Chamamos os elementos de $\mathcal{F}$ de $*$-polinômios $\mathbb{Z}_2$-graduados. Para simplificar a escrita, vamos denotá-los apenas por $*$-superpolinômios.

Definição 5.1 *Dizemos que um ideal bilateral $\mathbb{Z}_2$-graduado I de $\mathcal{F}$ é um T_2^*-ideal se*

I é invariante sob a involução graduada $*$ ($I^* \subseteq I$) e sob todos os endomorfismos de $F\langle X|\mathbb{Z}_2,*\rangle$ que preservam a superestrutura e comutam com a involução graduada $*$.

Seja

$$f = f(y_{0,1},\cdots,y_{0,m},z_{0,1},\cdots,z_{0,n},y_{1,1},\cdots,y_{1,p},z_{1,1},\cdots,z_{1,q}) \in F\langle X|\mathbb{Z}_2,*\rangle$$

um $*$-superpolinômio. Dizemos que f é uma #-superidentidade para A, e escrevemos $f = 0$ em A, se

$$f = f(a_{0,1},\cdots,a_{0,m},b_{0,1},\cdots,b_{0,n},a_{1,1},\cdots,a_{1,p},b_{1,1},\cdots,b_{1,q}) = 0$$

para todos $a_{0,1},\cdots,a_{0,m} \in A_0^+$, $b_{0,1},\cdots,b_{0,n} \in A_0^-$, $a_{1,1},\cdots,a_{1,p} \in A_1^+$, $b_{1,1},\cdots,b_{1,q} \in A_1^-$. Caso contrário, escrevemos $f \neq 0$ em A.

Definimos por

$$Id_2^*(A) := \{f \in F\langle X|\mathbb{Z}_2,*\rangle \mid f \equiv 0 \text{ em } A\}$$

o T_2^*-ideal de $*$-superidentidades de A. Em alguns momentos, chamaremos tais identidades também de superidentidades com involução graduada. Note que o T_2^*-ideal de $*$-superidentidades de A é homogêneo com respeito à $\mathbb{Z}_2$-graduação da álgebra $\mathcal{F} = F\langle X|\mathbb{Z}_2,*\rangle$. Para ver isso, basta considerar o automorfismo $\varphi \in End_F(F\langle X|\mathbb{Z}_2,*\rangle)$ definido por $\varphi(y_{0,i}) = y_{0,i}$, $\varphi(y_{1,i}) = -y_{1,i}$, $\varphi(z_{0,i}) = z_{0,i}$ e $\varphi(z_{1,i}) = -z_{1,i}$ e repetir a primeira parte da prova da Proposição 3.12. Também, estendemos a Definição 3.11 para o caso de T_2^*-ideais.

Uma vez que o corpo F é de característica zero, restringiremos novamente o estudo às superidentidades multilineares com involução graduada e, por isso, consideramos

$$P_n^{gri} := \text{span}_F\{w_{\sigma(1)}\cdots w_{\sigma(n)} |\ \sigma \in S_n, w_i = y_{j,i} \text{ ou } w_i = z_{j,i},\ j = 0,1\}$$

o espaço dos $*$-polinômios multilineares de grau n nas primeiras n variáveis e denotamos por

$$c_n^{gri}(A) = \dim \frac{P_n^{gri}}{P_n^{gri} \cap Id_2^*(A)}$$

a n-ésima $*$-codimensão graduada de A.

Definimos também $P_{\langle n\rangle}$ o espaço dos $*$-polinômios multilineares nos quais as primeiras n_1 variáveis são pares simétricas de grau 0, as próximas n_2 variáveis são pares antissimétricas de grau 0, as próximas n_3 variáveis são ímpares simétricas de grau 1 e as próximas n_4 variáveis são ímpares antissimétricas de grau 1. Note que o espaço $P_{\langle n\rangle}$ é homogêneo em relação à $\mathbb{Z}_2$-graduação de $\mathcal{F} = F\langle X|\mathbb{Z}_2, *\rangle$. Mais especificamente, se $n_3 + n_4$ é par, então $P_{\langle n\rangle} \subseteq \mathcal{F}_0$ e, se $n_3 + n_4$ é ímpar, então $P_{\langle n\rangle} \subseteq \mathcal{F}_1$. Como feito na Seção 3.4, mostra-se que

$$P_n^{gri} \cong \bigoplus_{\langle n\rangle} \binom{n}{\langle n\rangle} P_{\langle n\rangle},$$

onde $\binom{n}{\langle n\rangle} = \binom{n}{n_1,n_2,n_3,n_4}$ é o coeficiente multinomial. Então,

$$c_n^{gri}(A) = \sum_{n_1+\cdots+n_4=n} \binom{n}{n_1, n_2, n_3, n_4} c_{\langle n\rangle}(A), \tag{5.1}$$

onde $c_{\langle n\rangle}(A) := \dim \dfrac{P_{\langle n\rangle}}{P_{\langle n\rangle} \cap Id_2^*(A)}$.

Lema 5.2 *Seja A uma $*$-superálgebra. Então, para qualquer $n \geq 1$, temos*

$$c_n^{gri}(A) \leq 4^n c_n(A).$$

Demonstração. Segue de maneira análoga à prova do Lema 3.28. □

Assim, do Lema 5.2 e de (3.5), o próximo corolário é imediato.

Corolário 5.3 *Seja A uma $*$-superálgebra. Se A é uma PI-álgebra, então sua sequência de $*$-codimensões graduadas $(c_n^{gri}(A))_{n\geq 1}$ é exponencialmente limitada, isto é, existe um número real $\hat{d}$ satisfazendo para todo $n \geq 1$*

$$c_n^{gri}(A) \leq (\hat{d})^n.$$

Seguem abaixo alguns exemplos interessantes de superálgebras com involução graduada $*$. No exemplo a seguir, vamos considerar a superálgebra dada no Exemplo 4.5, agora munindo-a com uma involução graduada e destacando as diferenças entre as componentes homogêneas da álgebra e seu conjunto de superidentidades.

Exemplo 5.4 Considere $G = \langle e_1, e_2 \mid e_ie_j = -e_ie_j\rangle_F = \mathrm{span}_F\{e_1, e_2, e_1e_2\}$ a álgebra de Grassmann não unitária 2-gerada sobre um corpo F de característica zero ($\dim G = 3$), com a $\mathbb{Z}_2$-graduação canônica $G = G_0 \oplus G_1$, em que $G_0 = \mathrm{span}_F\{e_1e_2\}$ é o espaço gerado pelos monômios de comprimento par e $G_1 = \mathrm{span}_F\{e_1, e_2\}$ é o espaço gerado pelos monômios de comprimento ímpar, e seja $*$ a involução graduada de G definida por $e_i^* = -e_i$. Observamos que o ideal das relações que definem uma álgebra de Grassmann é invariante em relação à involução graduada $*$ e, portanto, $*$ está bem definida. Como $char F = 0$, G pode ser decomposta por

$$G = G_0^+ \oplus G_0^- \oplus G_1^+ \oplus G_1^-.$$

Neste caso, não é difícil ver que $G_0^+ = \{0\}$, $G_0^- = G_0$, $G_1^+ = \{0\}$ e $G_1^- = G_1$, pois, no nosso caso, temos apenas um monômio de comprimento par e_1e_2 e $(e_1e_2)^* = e_2^*e_1^* = (-e_2)(-e_1) = e_2e_1 = -e_1e_2$ e dois monômios de comprimento ímpar, e_1 e e_2. Por argumentos análogos aos do Exemplo 4.5, mostra-se que todas as $*$-superidentidades da álgebra G são consequências das $*$-superidentidades $y_{0,1} \equiv 0$, $z_{0,1} \equiv 0$, $y_{1,1}y_{1,2} \equiv 0$, $z_{1,1}y_{1,1} \equiv 0$, $y_{1,1}z_{1,1} \equiv 0$ e $z_{1,1}z_{1,2} + z_{1,2}z_{1,1} \equiv 0$, pois $z_{1,1}z_{1,2} \in \mathcal{F}_0^-$ módulo $z_{1,1}z_{1,2} + z_{1,2}z_{1,1} \equiv 0$ em G.

Exemplo 5.5 ([28]) Seja $A = F \oplus F$ a álgebra comutativa munida com automorismo φ de ordem 2 dado por $\varphi(a, b) = (b, a)$ para todo $(a, b) \in A$. Primeiramente, vamos considerar em A a graduação trivial ($A_0 = A$ e $A_1 = \{0\}$) com a involução graduada $* = \varphi$, que também é uma superinvolução. Nesse caso, temos que $A_0^+ = F(1, 1)$, $A_0^- = F(1, -1)$, $A_1^+ = A_1^- = \{0\}$. Em [16], mostra-se que qualquer $*$-identidade de A é consequência das identidades $[x_1, x_2], y_{1,1}$ e $z_{1,1}$, isto é, $Id_2^*(A) = \langle [x_1, x_2], y_{1,1}, z_{1,1}\rangle_{T_2}$, onde x_1, x_2 são quaisquer indeterminadas homogêneas simétricas ou antissimétricas. Agora, considere A graduada por φ, isto é, $A_0 = F(1, 1)$ e $A_1 = F(1, -1)$, e com a involução graduada trivial $*$, ou seja, $a^* = a$ para todo $a \in A$. Nesse caso, $A_0^+ = F(1, 1)$, $A_1^+ = F(1, -1)$ e $A_0^- = A_1^- = \{0\}$. É possível mostrar que $Id_2^*(A) = \langle [x_1, x_2], z_{0,1}, z_{1,1}\rangle_{T_2}$.

Exemplo 5.6 ([28]) Na álgebra das matrizes triangulares superiores $UT_4(F)$, considere a subálgebra

$$A = F\,(E_{11} + E_{44}) \oplus F\,(E_{22} + E_{33}) \oplus FE_{12} \oplus FE_{34},$$

munida com a involução reflexão $*$, que reflete uma matriz ao longo de sua diagonal secundária, isto é, se $a = \alpha\,(E_{11} + E_{44}) + \beta\,(E_{22} + E_{33}) + \gamma E_{12} + \delta E_{34}$, então

$$a^* = \alpha\,(E_{11} + E_{44}) + \beta\,(E_{22} + E_{33}) + \delta E_{12} + \gamma E_{34},$$

onde os $E'_{ij}s$ denotam as matrizes elementares usuais. Se A é munida com a graduação trivial, então $*$ é involução graduada e também uma superinvolução. Nesse caso,

$$A_0^+ = \{\alpha\,(E_{11} + E_{44}) + \beta\,(E_{22} + E_{33}) + \gamma E_{12} + \gamma E_{34} \mid \alpha, \beta, \gamma \in F\},$$

$$A_0^- = \{\gamma E_{12} - \gamma E_{34} \mid \gamma \in F\}$$

e $A_1^+ = A_1^- = \{0\}$. Em [43], os autores mostraram que $Id_2^*(A) = \langle z_{0,1}z_{0,2}, y_{1,1}, z_{1,1}\rangle_{T_2^*}$. Um caso mais interessante é considerar uma graduação não trivial da seguinte forma. Seja A com a graduação $A_0 = F\,(E_{11} + E_{44}) \oplus F\,(E_{22} + E_{33})$ e $A_1 = FE_{12} \oplus FE_{34}$. Observe que a aplicação $*$ em A é uma involução graduada e uma superinvolução, desde que $A_1^2 = 0$. Nesse caso, $A_0^+ = A_0$, $A_0^- = \{0\}$, $A_1^+ = \{\gamma E_{12} + \gamma E_{34} \mid \gamma \in F\}$ e $A_1^- = \{\gamma E_{12} - \gamma E_{34} \mid \gamma \in F\}$. Em [18], prova-se que $Id_2^*\,(A) = \langle z_{0,1}, w_1 w_2\rangle_{T_2^*}$, onde w_1, w_2 são quaisquer indeterminadas ímpares simétricas ou antissimétricas.

Note que $P_{\langle n\rangle}$ possui uma estrutura natural de $S_{\langle n\rangle}$-módulo à esquerda, definindo a seguinte ação de $S_{\langle n\rangle}$ em $P_{\langle n\rangle}$: dados $f \in P_{\langle n\rangle}$ e $\langle\sigma\rangle = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4) \in S_{\langle n\rangle}$, tem-se

$$\langle\sigma\rangle f = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4) f(y_{0,1}, \cdots, y_{0,n_1}, z_{0,1}, \cdots, z_{0,n_2}, y_{1,1}, \cdots, y_{1,n_3}, z_{1,1}, \cdots, z_{1,n_4})$$
$$= f(y_{0,\sigma_1(1)}, \cdots, y_{0,\sigma_1(n_1)}, z_{0,\sigma_2(1)}, \cdots, z_{0,\sigma_2(n_2)}, y_{1,\sigma_3(1)}, \cdots, y_{1,\sigma_3(n_3)}, z_{1,\sigma_4(1)}, \cdots, z_{1,\sigma_4(n_4)}).$$

Como T_2^*-ideais de $*$-superidentidades são invariantes sob a ação dada, temos que $P_{\langle n\rangle} \cap Id_2^*(A)$ é um $S_{\langle n\rangle}$-módulo à esquerda de $P_{\langle n\rangle}$. Podemos, assim, induzir no quociente $P_{\langle n\rangle}(A)$ uma estrutura de $S_{\langle n\rangle}$-módulo à esquerda. Não é difícil ver que $P_{\langle n\rangle}(A)$ também é um espaço homogêneo com respeito a Z_2-graduação da $*$-superálgebra relativamente livre e que $P_{\langle n\rangle}(A)$ tem o mesmo grau homogêneo que $P_{\langle n\rangle}$. Considere a decomposição do caracter $\chi_{\langle n\rangle}(A)$ de $P_{\langle n\rangle}(A)$ (o n-ésimo $*$-cocaracter graduado de A ou, simplesmente, $*$-cocaracter)

$$\chi_{\langle n\rangle}(A) = \sum_{\langle\lambda\rangle\vdash\langle n\rangle} m_{\langle\lambda\rangle}\chi_{\langle\lambda\rangle},$$

onde $m_{\langle\lambda\rangle}$ é a correspondente multiplicidade associada ao $S_{\langle n\rangle}$-caracter irredutível $\chi_{\langle\lambda\rangle}$.

Proposição 5.7 *Sejam F um corpo de característica zero, A uma $*$-superálgebra e $\chi_{\langle n\rangle}(A)$ o seu n-ésimo $*$-cocaracter. Se A é uma PI-álgebra, então a multiplicidade $m_{\langle\mu\rangle}$ é igual a zero, para uma multipartição $\langle\mu\rangle\vdash\langle n\rangle$, se, e somente se, para qualquer multitabela $T_{\langle\mu\rangle}$ de forma $\langle\mu\rangle$ e para qualquer $*$-superpolinômio multilinear $f = f(y_{0,1},\cdots,y_{0,n_1},z_{0,1},\cdots,z_{0,n_2},y_{1,1},\cdots,y_{1,n_3},z_{1,1},\cdots,z_{1,n_4}) \in P_{\langle n\rangle}$, a álgebra A satisfaz a $*$-superidentidade $e_{T_{\langle\mu\rangle}}f \equiv 0$.*

Demonstração. Segue de maneira análoga à prova da Proposição 3.30. □

5.2 Principais resultados para $*$-superálgebras

Enfatizamos que todas as demonstrações dos resultados contidos nesta seção são semelhantes àquelas apresentadas no Capítulo 4 para os resultados correspondentes. Decidimos apresentar tais demonstrações de forma completa para que fique evidente ao leitor que a mudança na superestrutura da álgebra considerada (da superinvolução $\#$ para a involução graduada $*$) não altera os argumentos empregados nas provas anteriores.

Agora, vamos exibir os resultados chaves para provarmos os teoremas centrais deste capítulo. Antes, dados os conjuntos $Y_0 = \{y_{0,1}, y_{0,2}, \cdots\}$, $Z_0 = \{z_{0,1}, z_{0,2}, \cdots\}$, $Y_1 = \{y_{1,1}, y_{1,2}, \cdots\}$, $Z_1 = \{z_{1,1}, z_{1,2}, \cdots\}$ de variáveis pares simétricas, pares antissimétricas, ímpares simétricas e ímpares antissimétricas, respectivamente, considere os conjuntos finitos: $\mathcal{Y}_{0,t_1} = \{y_{0,1}, y_{0,2}, \cdots, y_{0,t_1}\}$, $\mathcal{Z}_{0,t_2} = \{z_{0,1}, z_{0,2}, \cdots, z_{0,t_2}\}$, $\mathcal{Y}_{1,t_3} = \{y_{1,1}, y_{1,2}, \cdots, y_{1,t_3}\}$, $\mathcal{Z}_{1,t_4} = \{z_{11}, z_{12}, \cdots, z_{1t_4}\}$, para quaisquer inteiros $t_1, t_2, t_3, t_4 > 0$.

Denotaremos um polinômio

$$f(y_{0,1}, \cdots, y_{0,t_1}, \cdots, z_{1,1}, \cdots, z_{1,t_4}) \in P_{\langle t \rangle},$$

onde $t = t_1 + t_2 + t_3 + t_4$, simplesmente por $f(\mathcal{Y}_{0,t_1}, \mathcal{Z}_{0,t_2}, \mathcal{Y}_{1,t_3}, \mathcal{Z}_{1,t_4}) \in P_{\langle t \rangle}$.

Começaremos com a seguinte proposição.

Proposição 5.8 *Sejam A uma $*$-superálgebra, n_1, n_2, n_3, n_4, m inteiros positivos e $i_0 \in \{1, 2, 3, 4\}$ com $n_{i_0} \geq m^2$. Considere $Q = \{q_1, q_2, \cdots, q_{m^2}\} \subseteq \{1, 2, \cdots, n_{i_0}\}$, com $|Q| = m^2$. Seja*

$$\rho = \rho_1 \otimes \cdots \otimes \rho_{i_0} \otimes \cdots \otimes \rho_4 \in FS_{n_1} \otimes \cdots \otimes FS_Q \otimes \cdots \otimes FS_{n_4}$$

tal que $\rho(f) \neq 0$ em A, onde $f = f(\mathcal{Y}_{0,n_1}, \mathcal{Z}_{0,n_2}, \mathcal{Y}_{1,n_3}, \mathcal{Z}_{1,n_4}) \in P_{\langle n \rangle}$ é um polinômio multilinear, $\langle n \rangle = (n_1, n_2, n_3, n_4)$, $\rho_{i_0} \in FS_Q$ e $\rho_j \in FS_{n_j}$ para todos $j \neq i_0$. Então, existem inteiros $t_1, t_2, t_3, t_4 \geq 0$ e um monômio $w \in P_{\langle t \rangle}(\mathcal{Y}_{0,t_1}, \cdots, X_{t_{i_0}}, \cdots, \mathcal{Z}_{1,t_4})$, com $t = t_1 + t_2 + t_3 + t_4$ e $X_{t_{i_0}} = \{y_{\gamma,q_1}, \cdots, y_{\gamma,q_{m^2}}, \hat{y}_{\gamma,m^2+1}, \cdots, \hat{y}_{\gamma,t_{i_0}}\} \subset Y_\gamma$ tal que $\{\hat{y}_{\gamma,m^2+1}, \cdots, \hat{y}_{\gamma,t_{i_0}}\} \subseteq \mathcal{Y}_{\gamma,t_{i_0}} \setminus \{y_{\gamma,q_1}, \cdots, y_{\gamma,q_{m^2}}\}$ com $\gamma = 0$ se $i_0 = 1$ e $\gamma = 1$ se $i_0 = 3$, ou $X_{t_{i_0}} = \{z_{\gamma,q_1}, \cdots, z_{\gamma,q_{m^2}}, \hat{z}_{\gamma,m^2+1}, \cdots, \hat{z}_{\gamma,t_{i_0}}\} \subset Z_\gamma$ tal que $\{\hat{z}_{\gamma,m^2+1}, \cdots, \hat{z}_{\gamma,t_{i_0}}\} \subseteq \mathcal{Z}_{\gamma,t_{i_0}} \setminus \{z_{\gamma,q_1}, \cdots, z_{\gamma,q_{m^2}}\}$ com $\gamma = 0$ se $i_0 = 2$ e $\gamma = 1$ se $i_0 = 4$, tais que

$$(Id_1 \otimes \cdots \otimes \rho_{i_0} \otimes \cdots \otimes Id_4)w \neq 0$$

em A com $t_{i_0} \geq m^2$ e $m^2 \leq t \leq 2m^2 + 1$.

Demonstração: Como

$$(Id_1 \otimes \cdots \otimes \rho_{i_0} \otimes \cdots \otimes Id_4) \cdot (\rho_1 \otimes \cdots \otimes Id_{i_0} \otimes \cdots \otimes \rho_4)f = \rho(f) \neq 0$$

em A, necessariamente,

$$(Id_1 \otimes \cdots \otimes \rho_{i_0} \otimes \cdots \otimes Id_4)\tilde{f} \neq 0$$

em A, onde $\tilde{f} = (\rho_1 \otimes \cdots \otimes Id_{i_0} \otimes \cdots \otimes \rho_4)f$ é um polinômio multilinear em $P_{\langle n \rangle}$. Assim, existe um monômio g de $\tilde{f}$ tal que

$$(Id_1 \otimes \cdots \otimes \rho_{i_0} \otimes \cdots \otimes Id_4)g \neq 0$$

em A. Vamos renomear as variáveis de g adequadamente. Sem perda de generalidade, podemos assumir $i_0 = 1$. Por hipótese, $n_1 \geq m^2$. Escrevemos g da seguinte forma:

$$g = w_0 y_{0,q_1} w_1 y_{0,q_2} \cdots w_{k-1} y_{0,q_k} w_k,$$

onde $k = m^2$, $\{q_1, \cdots, q_k\} = \{1, \cdots, n_1\}$ e $w_0, w_1, \cdots, w_k$ são monômios multilineares nas indeterminadas pertencentes aos conjuntos $\mathcal{Z}_{0,n_2}$ ou $\mathcal{Y}_{1,n_3}$ ou $\mathcal{Z}_{1,n_4}$ ou $\mathcal{Y}_{0,n_1} \setminus \{y_{0,q_1}, \cdots, y_{0,q_k}\}$. Como $A = A_0 \oplus A_1$ e $A_i A_j \subset A_{i+j}$, para $i, j \in \{0, 1\}$, quando avaliamos as indeterminadas de um monômio w_p nos elementos de $A_0^+ \cup A_0^- \cup A_1^+ \cup A_1^-$ e analisamos o seu grau homogêneo, vamos obter uma avaliação $\hat{w}_p$ de w_p tal que $\hat{w}_p \in A_0$ ou $\hat{w}_p \in A_1$, para todo $p = 0, 1, \cdots, k$. Logo, definindo $deg\ \hat{w}_p = \gamma_p$, com $\gamma_p = 0$ ou 1, podemos decompor $\hat{w}_p$ em $\hat{w}_p = \hat{u}_p^{\gamma_p} + \hat{v}_p^{\gamma_p}$, onde $\hat{u}_p^{\gamma_p} \in A_{\gamma_p}^+$ e $\hat{v}_p^{\gamma_p} \in A_{\gamma_p}^-$ são as partes simétrica e antissimétrica de $\hat{w}_p$, respectivamente. Substituindo em g os monômios não vazios w_p por $y_p^{\gamma_p} + z_p^{\gamma_p}$, onde $y_p^0 \in \mathcal{Y}_{0,n_1} \setminus \{y_{0,q_1}, \cdots, y_{0,q_k}\}$ ou $y_p^1 \in \mathcal{Y}_{1,k+1}$ e $z_p^{\gamma_p} \in \mathcal{Z}_{\gamma_p,k+1}$, com $\gamma_p = 0$ ou 1, obtemos um novo polinômio $\tilde{g}$ da forma

$$\tilde{g} = (y_0^{\gamma_0} + z_0^{\gamma_0}) y_{0,q_1} \cdots (y_{k-1}^{\gamma_{k-1}} + z_{k-1}^{\gamma_{k-1}}) y_{0,q_k} (y_k^{\gamma_k} + z_k^{\gamma_k}). \tag{5.2}$$

Denotamos $u_p^{\gamma_p} = \dfrac{w_p + w_p^*}{2}$ e $v_p^{\gamma_p} = \dfrac{w_p - w_p^*}{2}$ os polinômios $\mathbb{Z}_2$-homogêneos de grau γ_p que dependem das mesmas indeterminadas que w_p. Temos que $(u_p^{\gamma_p})^* = u_p^{\gamma_p}$, $(v_p^{\gamma_p})^* = -v_p^{\gamma_p}$ e $w_p = u_p^{\gamma_p} + v_p^{\gamma_p}$. Fica claro que o monômio g é obtido de $\tilde{g}$ por substituição $y_p^{\gamma_p} = u_p^{\gamma_p}$ e $z_p^{\gamma_p} = v_p^{\gamma_p}$ em $F\langle Y, Z\rangle$. Destacamos que essa substituição é um endomorfismo graduado e $*$-invariante. Como g é obtido de $\tilde{g}$ por substituições adequadas das indeterminadas que são diferentes das pertencentes ao conjunto $\{y_{0,q_1} \cdots, y_{0,q_{m^2}}\}$, no qual age ρ_1, então o polinômio $(\rho_1 \otimes Id_2 \otimes Id_3 \otimes Id_4)g$ também é obtido de $(\rho_1 \otimes Id_2 \otimes Id_3 \otimes Id_4)\tilde{g}$ pelas mesmas substituições. Desde que

$$(\rho_1 \otimes Id_2 \otimes Id_3 \otimes Id_4)g \neq 0$$

em A e, como observado, g é obtido de $\tilde{g}$ por substituições adequadas, temos que

$$(\rho_1 \otimes Id_2 \otimes Id_3 \otimes Id_4)\tilde{g} \neq 0$$

em A. Como $\tilde{g}$ é um polinômio multilinear que é soma de monômios de grau no mínimo m^2 e no máximo $2m^2+1$, necessariamente, existem inteiros $t_1, t_2, t_3, t_4 \geq 0$ e um monômio $w = w(X_{t_1}, \mathcal{Z}_{0,t_2}, \mathcal{Y}_{1,t_3}, \mathcal{Z}_{1,t_4}) \in P_{\langle t\rangle}(X_{t_1}, \mathcal{Z}_{0,t_2}, \mathcal{Y}_{1,t_3}, \mathcal{Z}_{1,t_4})$, com $t = t_1+t_2+t_3+t_4$ e $X_{t_1} = \{y_{0,q_1}, \cdots, y_{0,q_{m^2}}, \hat{y}_{0,m^2+1}, \cdots, \hat{y}_{0,t_1}\} \subset Y_0$ tal que $\{\hat{y}_{0,m^2+1}, \cdots, \hat{y}_{0,t_1}\} \subseteq \mathcal{Y}_{0,t_1} \setminus \{y_{0,q_1}, \cdots, y_{0,q_{m^2}}\}$, tais que $m^2 \leq t \leq 2m^2+1$ e

$$(\rho_1 \otimes Id_2 \otimes Id_3 \otimes Id_4)w \neq 0$$

em A, o que prova a proposição para este caso, bastando escolher um dos monômios de $\tilde{g}$ com indeterminadas possivelmente renomeadas. Os casos $i_0 = 2, 3$ e 4 são provados de maneira análoga. $\square$

Tendo feito essas considerações, as provas dos Teoremas 4.4, 4.14 and 4.12 podem ser adaptadas para demonstrar os próximos três resultados.

Teorema 5.9 *(Teorema do Gancho para $*$-superálgebras) Sejam F um corpo de característica zero e A uma superálgebra sobre F com uma involução graduada $*$. Se A é uma PI-álgebra, então existem inteiros $d_i, l_i \geq 1$, com $i = 1, 2, 3, 4$, tais que o n-ésimo -cocaracter das $*$-identidades graduadas, $\chi_{\langle n\rangle}(A)$, está contido em um gancho quádruplo $H_4(n) = (H(d_1, l_1), H(d_2, l_2), H(d_3, l_3), H(d_4, l_4))$, isto é,*

$$\chi_{\langle n\rangle}(A) = \sum_{\substack{\langle\lambda\rangle \vdash \langle n\rangle \\ \langle\lambda\rangle \in H_4(n)}} m_{\langle\lambda\rangle}\chi_{\langle\lambda\rangle}.$$

Demonstração. Sendo A uma PI-álgebra, pelo Corolário 5.3, existe $\hat{d} \geq 1$ tal que $c_n^{gri}(A) \leq (\hat{d})^n$ para todo $n \geq 1$. Considerando $q = (\hat{d})^3$ e m um inteiro tal que $e^2q+1 \leq m \leq e^2q+2$, onde e denota a base do logaritmo natural, vamos provar que, para qualquer $n \geq 1$, o n-ésimo $*$-cocaracter graduado de A está contido no gancho quádruplo quadrado $(H(m,m), H(m,m), H(m,m), H(m,m))$. Suponha, por absurdo, que existe $n \geq 1$ tal que

$$\chi_{\langle n \rangle}(A) = \sum_{\langle \lambda \rangle \vdash \langle n \rangle} m_{\langle \lambda \rangle} \chi_{\langle \lambda \rangle} \tag{5.3}$$

e $m_{\langle \mu \rangle} \neq 0$ para alguma multipartição $\langle \mu \rangle \notin (H(m,m), H(m,m), H(m,m), H(m,m))$. Pelo fato de $\langle \mu \rangle = (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4) \notin (H(m,m), H(m,m), H(m,m), H(m,m))$, pelo menos um dos $\mu_i's$ não pertence a $H(m,m)$. Digamos $D_{\mu_{i_0}} \nsubseteq H(m,m)$, onde $i_0 \in \{1,2,3,4\}$. Desse modo, $D_{\mu_{i_0}}$ contém o diagrama quadrado $D_{\nu_{i_0}}$, onde $\nu_{i_0} = (m^m) \vdash m^2$. Temos que $\mu_{i_0} \geq \nu_{i_0}$. Sendo $m_{\langle \mu \rangle} \neq 0$ e A uma PI-álgebra, segue da Proposição 3.30 que existe uma multitabela $T_{\langle \mu \rangle}$, com $\langle \mu \rangle \vdash \langle n \rangle$, e um polinômio não nulo $f \in P_{\langle n \rangle}$ tais que $e_{T_{\langle \mu \rangle}} f \notin Id_2^*(A)$. Como

$$e_{T_{\langle \mu \rangle}} f = (e_{T_{\mu_1}} \otimes e_{T_{\mu_2}} \otimes e_{T_{\mu_3}} \otimes e_{T_{\mu_4}}) f \notin Id_2^*(A),$$

existe um monômio multilinear $m_1 = m_1(\mathcal{Y}_{0,n_1}, \mathcal{Z}_{0,n_2}, \mathcal{Y}_{1,n_3}, \mathcal{Z}_{1,n_4}) \in P_{\langle n \rangle}$ tal que $e_{T_{\langle \mu \rangle}} m_1 \notin Id_2^*(A)$.

Agora, considere uma quádrupla de permutações $\langle \sigma \rangle_{i_0} = (Id_1, \cdots, \sigma_{i_0}, \cdots, Id_4) \in S_{n_1} \times \cdots \times S_{n_{i_0}} \times \cdots S_{n_4}$ ($\sigma_{i_0} \in S_{n_{i_0}}$) tal que a tabela $\langle \sigma \rangle_{i_0} T_{\langle \mu \rangle}$ tem as entradas de 1 a m^2 nas posições do diagrama quadrado $D_{\nu_{i_0}}$. Então, o elemento $e_{\langle \sigma \rangle_{i_0} T_{\langle \mu \rangle}} = \langle \sigma \rangle_{i_0} e_{T_{\langle \mu \rangle}} \langle \sigma \rangle_{i_0}^{-1}$, onde $\langle \sigma \rangle_{i_0}^{-1} = (Id_1, \cdots, \sigma_{i_0}^{-1}, \cdots, Id_4)$. Logo,

$$\langle \sigma \rangle_{i_0}^{-1} e_{\langle \sigma \rangle_{i_0} T_{\langle \mu \rangle}} \langle \sigma \rangle_{i_0} m_1 = e_{T_{\langle \mu \rangle}} m_1 \notin Id_2^*(A).$$

Chamando $m' = \langle \sigma \rangle_{i_0} m_1$, temos que $\langle \sigma \rangle_{i_0}^{-1} e_{\langle \sigma \rangle_{i_0} T_\mu} m' \notin Id_2^*(A)$ e, portanto, também $e_{\langle \sigma \rangle_{i_0} T_\mu} m' \notin Id_2^*(A)$. Denotamos por $T_{\nu_{i_0}}$ uma tabela standard do diagrama $D_{\nu_{i_0}}$. Usando o fato de que $D_{\mu_{i_0}} \supseteq D_{\nu_{i_0}}$ e que, na multitabela $\tilde{T}_{\langle \mu \rangle} = \langle \sigma \rangle_{i_0} T_{\langle \mu \rangle} = (T_{\mu_1}, \cdots, \sigma_{i_0} T_{\mu_{i_0}}, \cdots, T_{\mu_4})$, a tabela $\sigma_{i_0} T_{\mu_{i_0}}$ contém os números $1, 2, \cdots, m^2$ (as entradas da tabela $T_{\nu_{i_0}}$), pelo Lema 2.52, existem $a, b \in FS_{n_{i_0}}$ tais que

$$e_{\sigma_{i_0} T_{\mu_{i_0}}} = a e_{T_{\nu_{i_0}}} b.$$

Desse modo,

$$e_{\tilde{T}_{\langle \mu \rangle}} m' \quad = \quad (e_{T_{\mu_1}} \otimes \cdots \otimes e_{\sigma_{i_0} T_{\nu_{i_0}}} \otimes \cdots e_{T_{\mu_4}}) m'$$

$= (Id_1 \otimes \cdots \otimes a \otimes \cdots \otimes Id_4)(e_{T_{\mu_1}} \otimes \cdots \otimes e_{T_{\nu_{i_0}}} \otimes \cdots \otimes e_{T_{\mu_4}})(Id_1 \otimes \cdots \otimes b \otimes \cdots \otimes Id_4)m'$

não pertence a $Id_2^*(A)$ e, assim, $(e_{T_{\mu_1}} \otimes \cdots \otimes e_{T_{\nu_{i_0}}} \otimes \cdots \otimes e_{T_{\mu_4}})f_1 \notin Id_2^*(A)$, onde $f_1 = (Id_1 \otimes \cdots \otimes b \otimes \cdots \otimes Id_4)m' \in P_{\langle n \rangle}$. De fato, Id_2^* é um $FS_{n_1} \otimes FS_{n_2} \otimes FS_{n_3} \otimes FS_{n_4}$-módulo à esquerda e $\tilde{f}_1 = (e_{T_{\mu_1}} \otimes \cdots \otimes e_{T_{\nu_{i_0}}} \otimes \cdots \otimes e_{T_{\mu_4}})f_1 \in Id_2^*(A)$ implica que

$$e_{\tilde{T}_{\langle \mu \rangle}} m' = (Id_1 \otimes \cdots \otimes a \otimes \cdots \otimes Id_4)\tilde{f}_1 \in Id_2^*(A),$$

o que não ocorre. Segue que

$$(Id_1 \otimes \cdots \otimes e_{T_{\nu_{i_0}}} \otimes \cdots \otimes Id_4)f_2 \notin Id_2^*(A), \tag{5.4}$$

onde $f_2 = (e_{T_{\mu_1}} \otimes \cdots \otimes Id_{i_0} \otimes \cdots \otimes e_{T_{\mu_4}})f_1 \in P_{\langle n \rangle}$. Pela Proposição 5.8, observando que $n_{i_0} \geq m^2$ e que o elemento $e_{T_{\nu_{i_0}}}$ age nas indeterminadas com índices em $\{1, \cdots, m^2\}$ do tipo correspondente do polinômio f_2 (as entradas da tabela $T_{\nu_{i_0}}$), podemos encontrar inteiros $t_1, t_2, t_3, t_4 > 0$, com $t_{i_0} \geq m^2$, $t = t_1 + t_2 + t_3 + t_4$ e $m^2 \leq t \leq 2m^2 + 1$, e um monômio multilinear $w = w(\mathcal{Y}_{0,t_1}, \mathcal{Z}_{0,t_2}, \mathcal{Y}_{1,t_3}, \mathcal{Z}_{1,t_4}) \in P_{\langle t \rangle}$ tais que

$$(Id_1 \otimes \cdots \otimes e_{T_{\nu_{i_0}}} \otimes \cdots \otimes Id_4)w \neq 0 \tag{5.5}$$

em A. Consideremos $P_{\langle t \rangle}$ como um $FS_1 \otimes \cdots \otimes S_{m^2} \otimes \cdots \otimes FS_1$-módulo à esquerda, em que S_1 é o grupo trivial, exigindo que $FS_1 \otimes \cdots \otimes S_{m^2} \otimes \cdots \otimes FS_1$ aja nas primeiras $t_1, \cdots, m^2, \cdots, t_4$ indeterminadas correspondentes fixando as demais. Agora, seja M o $FS_1 \otimes \cdots \otimes S_{m^2} \otimes \cdots \otimes FS_1$-submódulo de $P_{\langle t \rangle}$ gerado pelo elemento $(Id_1 \otimes \cdots \otimes e_{T_{\nu_{i_0}}} \otimes \cdots \otimes Id_4)w$. Como $M + (P_{\langle t \rangle} \cap Id_2^*(A)) \subseteq P_{\langle t \rangle}$, segue que

$$\begin{aligned} \dim(P_{\langle t \rangle}) &\geq \dim(M + P_{\langle t \rangle} \cap Id_2^*(A)) \\ &= \dim(M) + \dim(P_{\langle t \rangle} \cap Id_2^*(A)) \\ &\quad - \dim(M \cap (P_{\langle t \rangle} \cap Id_2^*(A)). \end{aligned}$$

Ora, o subespaço $M \cap (P_{\langle t \rangle} \cap Id_2^*(A))$ é um $FS_1 \otimes \cdots \otimes S_{m^2} \otimes \cdots \otimes FS_1$-submódulo de M. Conforme Observação 3.31, o módulo M é irredutível e, por (5.5), temos que

$M \not\subseteq (P_{\langle t\rangle} \cap Id_2^*(A))$. Logo, $M \cap (P_{\langle t\rangle} \cap Id_2^*(A)) = \{0\}$. Portanto,

$$\dim(P_{\langle t\rangle}) \geq \dim(M) + \dim(P_{\langle t\rangle} \cap Id_2^*(A)),$$

o que produz

$$c_{\langle t\rangle}(A) = \dim(P_{\langle t\rangle}) - \dim(P_{\langle t\rangle} \cap Id_2^*(A)) \geq \dim(M). \tag{5.6}$$

Observamos também que M pode ser considerado como um FS_{m^2} à esquerda naturalmente, já que a álgebra $FS_1 \otimes \cdots \otimes FS_{m^2} \otimes \cdots \otimes FS_1$ fixa todas as indeterminadas que são diferentes daquelas com índices $\{1, \cdots, m^2\}$ do tipo correspondente. Assim, como a dimensão de M é o produto dos graus dos caracteres irredutíveis correspondentes (todos iguais a 1 com exceção do associado à partição quadrada $\nu_{i_0} = (m^m) \vdash m^2$) e $m^2 \geq (e^2q+1)^2 \geq e^4q^2$, segue do Lema 2.51 que $\chi_{\nu_{i_0}}(1) > q^{m^2}$, o que torna (5.6) em

$$c_{\langle t\rangle}(A) \geq \dim M = \dim(FS_{m^2} e_{T_{\nu_{i_0}}} w) = \chi_{\nu_{i_0}}(1) > q^{m^2}. \tag{5.7}$$

Desde que

$$c_t^{gri}(A) = \sum_{\langle \tilde{t}\rangle} \begin{pmatrix} t \\ \langle \tilde{t}\rangle \end{pmatrix} c_{\langle \tilde{t}\rangle}(A) \geq c_{\langle t\rangle}(A) > q^{m^2} = (\hat{d})^{3m^2},$$

e $m^2 \geq \dfrac{t-1}{2}$, tem-se

$$c_t^{gri}(A) > (\hat{d})^{\frac{3}{2}(t-1)}.$$

Em vista de $\dfrac{3}{2}(t-1) \geq t$, pois $t \geq m^2 \geq e^4 \geq 3$, segue que

$$c_t^{gri}(A) > (\hat{d})^t$$

e, assim, obtemos uma contradição, visto que $c_n^{gri}(A) \leq (\hat{d})^n$ para todo $n \geq 1$. Portanto, todas as multiplicidades $m_{\langle \mu\rangle}$ em (5.3) devem ser iguais a zero se $\langle \mu\rangle \notin (H(m,m), H(m,m), H(m,m), H(m,m))$, e a prova do teorema está concluída. $\square$

Teorema 5.10 *(Teorema de Amitsur para $*$-superálgebras) Sejam F um corpo de característica zero e A uma superálgebra sobre F com uma involução graduada. Se A é* *uma PI-álgebra, existem inteiros k_i, m_i, $i = 1, 2, 3, 4$, tais que A satisfaz a identidade*

$$St_{k_1}^{m_1}(y_{0,1}, \cdots, y_{0,k_1}) \cdot St_{k_2}^{m_2}(z_{0,1}, \cdots, z_{0,k_2}) \cdot St_{k_3}^{m_3}(y_{1,1}, \cdots, y_{1,k_3}) \cdot St_{k_4}^{m_4}(z_{1,1}, \cdots, z_{1,k_4}) = 0.$$

Demonstração. Segue de maneira análoga à prova do Teorema 4.14. □

Antes da demonstração do Teorema da Faixa para $*$-superálgebras, vamos definir o que seria uma $*$-identidade de Capelli de posto $\langle k \rangle$ para uma $*$-superálgebra.

Definição 5.11 *Seja A uma superálgebra com uma involução graduada $*$. Dizemos que A satisfaz a $*$-identidade de Capelli de posto $\langle k \rangle = (k_1, k_2, k_3, k_4)$, onde $k = k_1 + k_2 + k_3 + k_4$, se A satisfaz a seguinte série de $*$-superidentidades:*

$$Cap_{k_1}(y_{0,1}, \cdots, y_{0,k_1}; x_1, \cdots, x_{k_1+1}) = \sum_{\sigma \in S_{k_1}} (-1)^\sigma x_1 y_{0,\sigma(1)} x_2 \cdots y_{0,\sigma(k_1)} x_{k_1+1} = 0,$$

$$Cap_{k_2}(z_{0,1}, \cdots, z_{0,k_2}; x_1, \cdots, x_{k_2+1}) = \sum_{\sigma \in S_{k_2}} (-1)^\sigma x_1 z_{0,\sigma(1)} x_2 \cdots z_{0,\sigma(k_2)} x_{k_2+1} = 0,$$

$$Cap_{k_3}(y_{1,1}, \cdots, y_{1,k_3}; x_1, \cdots, x_{k_3+1}) = \sum_{\sigma \in S_{k_3}} (-1)^\sigma x_1 y_{1,\sigma(1)} x_2 \cdots y_{1,\sigma(k_3)} x_{k_3+1} = 0$$

e

$$Cap_{k_4}(z_{1,1}, \cdots, z_{1,k_4}; x_1, \cdots, x_{k_4+1}) = \sum_{\sigma \in S_{k_4}} (-1)^\sigma x_1 z_{1,\sigma(1)} x_2 \cdots z_{1,\sigma(k_4)} x_{k_4+1} = 0,$$

onde as indeterminadas $x_i's$ podem ser quaisquer indeterminadas do conjunto $(Y_0 \cup Z_0 \cup Y_1 \cup Z_1) \setminus (\mathcal{Y}_{0,k_1} \cup \mathcal{Z}_{0,k_2} \cup \mathcal{Y}_{1,k_3} \cup \mathcal{Z}_{1,k_4})$ ou são substituídas por palavras vazias iguais a 1 (com abuso de notação quando a álgebra não é unitária) de todas as formas possíveis. Nesse caso, escrevemos apenas que A satisfaz $Cap^*_{\langle k \rangle}$ ou ainda $Cap^*_{\langle k \rangle} \subseteq Id_2^*(A)$.

Proposição 5.12 *Se $f \in F\langle X | \mathbb{Z}_2, * \rangle$ é um polinômio alternado nas indeterminadas $t_1, \cdots, t_m$, todas pertencentes a apenas um dos conjuntos Y_0 ou Z_0 ou Y_1 ou Z_1, então*

$$f = \sum_{w_1, \cdots, w_{m+1}} \alpha_{w_1, \cdots, w_{m+1}} Cap_m(t_1, \cdots, t_m; w_1, \cdots, w_{m+1})$$

é uma combinação linear de polinômios de Capelli, onde $w_1, \cdots, w_{m+1}$ são monômios adequados (possivelmente vazios) em $F\langle X | \mathbb{Z}_2, * \rangle$.

Demonstração. Segue de maneira análoga à prova da Proposição 1.5.5 encontrada em [24]. $\square$

Teorema 5.13 *(Teorema da Faixa para $*$-superálgebras) Sejam F um corpo de característica zero, A uma superálgebra sobre F com uma involução graduada $*$ e $\chi_{\langle n\rangle}(A) = \sum_{\langle\lambda\rangle\vdash\langle n\rangle} m_{\langle\lambda\rangle}\chi_{\langle\lambda\rangle}$ o seu n-ésimo $*$-cocaracter. Se A é uma PI-álgebra, então A satisfaz $Cap^*_{\langle k\rangle}$, $k = k_1+k_2+k_3+k_4$, a $*$-identidade de Capelli de posto $\langle k\rangle$, se, e somente se, $m_{\langle\lambda\rangle} = 0$ sempre que $h(\langle\lambda\rangle) \geq \langle k\rangle$.*

Demonstração. Suponha que $Cap^*_{\langle k\rangle} \subseteq Id_2^*(A)$ e seja $\langle\lambda\rangle = (\lambda(1),\lambda(2),\lambda(3),\lambda(4)) \vdash \langle n\rangle$ uma multipartição de $n = n_1+n_2+n_3+n_4$ satisfazendo $h(\langle\lambda\rangle) \geq \langle k\rangle$. Pela Proposição 3.30, a multiplicidade $m_{\langle\lambda\rangle} = 0$ se, e somente se, para qualquer multitabela $T_{\langle\lambda\rangle}$ de forma $\langle\lambda\rangle$ e para qualquer polinômio multilinear $f \in P_{\langle n\rangle}$, a álgebra A satisfaz a superidentidade $e_{T_{\langle\lambda\rangle}}f \equiv 0$. Considere uma multitabela $T = (T_1,T_2,T_3,T_4)$ de forma $\langle\lambda\rangle$ qualquer. Suponha, por contradição, que $e_Tf \neq 0$ em A para algum polinômio multilinear $f \in P_{\langle n\rangle}$. Como o elemento idempotente e_T gera um $FS_{\langle n\rangle}$-módulo à esquerda irredutível, é suficiente mostrar que

$$\langle a\rangle e_Tf \in Id_2^*(A) \tag{5.8}$$

para algum $\langle a\rangle \in FS_{\langle n\rangle}$ tal que $\langle a\rangle e_Tf \neq 0$. De fato, como $M = FS_{\langle n\rangle}e_Tf$ é um módulo irredutível e $N = FS_{\langle n\rangle}\langle a\rangle e_Tf$ é um submódulo não trivial de M, concluímos que $M = N$. Portanto, $e_Tf = \langle b\rangle\langle a\rangle e_Tf$ para algum $\langle b\rangle \in FS_{\langle n\rangle}$ é uma $*$-superidentidade de A em vista de (5.8), o que contradiz $e_Tf \neq 0$ em A. Considere

$$\langle a\rangle = \left(\sum_{\tau_1\in C_{T_1}}(-1)^{\tau_1}\tau_1, \sum_{\tau_2\in C_{T_2}}(-1)^{\tau_2}\tau_2, \sum_{\tau_3\in C_{T_3}}(-1)^{\tau_3}\tau_3, \sum_{\tau_4\in C_{T_4}}(-1)^{\tau_4}\tau_4\right),$$

onde C_{T_i} é o subgrupo de S_{n_i} que estabiliza as colunas de T_i, com $i = 1,2,3,4$. Pelo Lema 4.10, o polinômio $\langle a\rangle e_Tf \neq 0$. Por outro lado, se $h_i = h(\lambda(i)) \geq k_i$, para algum $i \in \{1,2,3,4\}$, e $j_1,\cdots,j_{h_i}$ são as entradas da primeira coluna de T_i, então $\langle a\rangle e_Tf$ é um polinômio alternado nas indeterminadas homogêneas $t_{j_1},\cdots,t_{j_{k_i}},\cdots,t_{j_{h_i}}$ de um dos conjuntos Y_0, Z_0, Y_1 e Z_1. Portanto, $\langle a\rangle e_Tf$ é alternado nas indeterminadas homogêneas $t_{j_1},\cdots,t_{j_{k_i}}$. Segue da Proposição 5.12 que $\langle a\rangle e_Tf$ é uma combinação linear de polinômios Capelli de posto k_i. Como os polinômios Capelli são multilineares, obtemos $\langle a\rangle e_T f \in Id_2^*(A)$, visto que, por hipótese, $Cap^*_{\langle k\rangle} \subseteq Id_2^*(A)$.

Reciprocamente, suponha que $m_{\langle\lambda\rangle} = 0$ sempre que $h(\langle\lambda\rangle) \geq \langle k\rangle$. Para todo $i = 1, 2, 3, 4$, considere

$$f = f(t_1, t_2, \cdots, t_{k_i}, x_1, \cdots, x_{k_i+1}) = \sum_{\sigma\in S_{k_i}} (-1)^\sigma x_1 t_{\sigma(1)} \cdots t_{\sigma(k_i)} x_{k_i+1},$$

onde as indeterminadas $t_1, \cdots, t_{k_i}$ pertencem ao mesmo conjunto de indeterminadas homogêneas Y_0 ou Z_0 ou Y_1 ou Z_1, para todo $i = 1, 2, 3, 4$, respectivamente, e as indeterminadas $x_i' s$ podem ser quaisquer indeterminadas do conjunto $Y_0 \cup Z_0 \cup Y_1 \cup Z_1$. Aqui, f representa qualquer um dos polinômios dados na Definição 5.11. Seja $\langle\lambda\rangle = (\lambda(1), \cdots, \lambda(i), \cdots, \lambda(4)) \vdash (p_1, \cdots, p_i, \cdots, p_4)$, onde $p_i = k_i + \gamma_i$, com $\gamma_i \geq 0$ e $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, representa o número das indeterminadas homogêneas que aparecem em f e pertencem ao conjunto em que $t_1, \cdots, t_{k_i}$ estão, e, além disso, $p_1 + \cdots + p_i + \cdots + p_4 = 2k_i + 1$. Pela Proposição 3.30, se $h(\langle\lambda\rangle) \geq \langle k\rangle$, isto é, $h(\lambda(i)) = h_i \geq k_i$ para algum $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, então $e_{T_{\langle\lambda\rangle}} f \in Id_2^*(A)$ para toda multipartição $\langle\lambda\rangle = (\lambda(1), \cdots, \lambda(i), \cdots, \lambda(4)) \vdash (p_1, \cdots, p_i, \cdots, p_4)$ e para toda multitabela $T_{\langle\lambda\rangle}$ da forma $\langle\lambda\rangle$. Assim, obtemos que $Cap^*_{\langle k\rangle} \subseteq Id_2^*(A)$.

Agora, suponha que $h(\langle\lambda\rangle) < \langle k\rangle$, ou seja, $h(\lambda(i)) = h_i < k_i$ para todo i. Fixando $i_0 \in \{1, 2, 3, 4\}$, como f é alternado nas indeterminadas $t_1, \cdots, t_{k_{i_0}}$, então, para cada $\langle\tau\rangle = \langle\tau_1, \cdots, \tau_{i_0}, \cdots, \tau_4\rangle \in S_{\langle 2k_{i_0}+1\rangle} = S_{p_1} \times \cdots \times S_{p_{i_0}} \times \cdots \times S_{p_4}$, onde $p_1 + \cdots + p_{i_0} + \cdots + p_4 = 2k_{i_0} + 1$ e $\tau_{i_0} \in S_{p_{i_0}}$ age nas variáveis homogêneas do mesmo tipo que $t_1, \cdots, t_{k_{i0}}$, tem-se que

$$\langle\tau\rangle f(t_1, t_2, \cdots, t_{k_{i_0}}, x_1, \cdots, x_{k_{i_0}+1}) = f(t_{\tau_{i_0}(1)}, t_{\tau_{i_0}(2)}, \cdots, t_{\tau_{i_0}(k_{i_0})}, \cdots)$$

é alternado nas indeterminadas $t_{\tau_{i_0}(1)}, \cdots, t_{\tau_{i_0}(k_{i_0})}$. Como $h(\lambda(i_0)) = h_{i_0} = r < k_{i_0}$, o subgrupo $R_{T_{\lambda(i_0)}}$ de $S_{p_{i_0}}$ que estabiliza as linhas da tabela $T_{\lambda(i_0)}$ é um produto direto de $r < k_{i_0}$ fatores

$$R_{T_{\lambda(i_0)}} = H_{1,i_0} \times \cdots \times H_{r,i_0},$$

em que H_{q,i_0} é o subgrupo de $S_{p_{i_0}}$ que permuta entre si os elementos da q-ésima linha da tabela $T_{\lambda(i_0)}$, fixando os elementos das demais linhas. Assim, podemos escrever o somatório

$$\sum_{\sigma \in R_{T_{\lambda(i_0)}}} \sigma = \left(\sum_{\sigma_1 \in H_{1,i_0}} \sigma_1 \right) \cdots \left(\sum_{\sigma_r \in H_{r,i_0}} \sigma_r \right).$$

Como $r < k_{i_0}$, existem pelo menos dois inteiros entre $\tau_{i_0}(1), \cdots, \tau_{i_0}(k_{i_0})$ pertencentes a uma mesma linha da tabela $T_{\lambda(i_0)}$, digamos que seja a l-ésima linha. Afirmamos que

$$\left(\sum_{\sigma_l \in H_{l,i_0}} \sigma_l \right) \tau_{i_0} f = 0 \tag{5.9}$$

é o polinômio nulo em $F\langle X|\mathbb{Z}_2, *\rangle$, onde estamos olhando essa ação apenas no conjunto das indeterminadas homogêneas de f em que $t_1, \cdots, t_{k_{i_0}}$ pertencem e fixando as demais. Com efeito, sem perda de generalidade, sejam $a' = \tau_{i_0}(1)$ e $b' = \tau_{i_0}(2)$ os elementos na l-ésima linha de $T_{\lambda(i_0)}$. Considere $A_{l,i_0} \subseteq H_{l,i_0}$ o subgrupo das permutações pares contido em H_{l,i_0} e escreva $H_{l,i_0} = A_{l,i_0} \cup \tilde{A}_{l,i_0}$, onde $\tilde{A}_{l,i_0}$ é o conjunto das permutações ímpares contido em H_{l,i_0}. Note que $\tilde{A}_{l,i_0} = A_{l,i_0}(a'\ b')$, ou seja, $\tilde{A}_{l,i_0}$ é classe lateral à esquerda de A_{l,i_0} em H_{l,i_0} cujo representante é a transposição $(a'\ b')$. Com isso, o somatório em (5.9) pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \left(\sum_{\sigma_l \in H_{l,i_0}} \sigma_l \right) \tau_{i_0} f &= \left(\sum_{\sigma_l \in A_{l,i_0}} \sigma_l \right) \tau_{i_0} f + \left(\sum_{\tilde{\sigma}_l \in \tilde{A}_{l,i_0}} \tilde{\sigma}_l \right) \tau_{i_0} f \\ &= \left(\sum_{\sigma_l \in A_{l,i_0}} \sigma_l \right) \tau_{i_0} f + \left(\sum_{\rho_l \in A_{l,i_0}} \rho_l (a'\ b') \right) \tau_{i_0} f. \end{aligned}$$

Segue daí e do fato que $\tau_{i_0} f$ ser alternado nas indeterminadas $t_{a'} = t_{\tau_{i_0}(1)}$ e $t_{b'} = t_{\tau_{i_0}(2)}$, ou seja, $(a'\ b')\tau_{i_0} f = -\tau_{i_0} f$, que

$$\begin{aligned} \left(\sum_{\sigma_l \in H_{l,i_0}} \sigma_l \right) \tau_{i_0} f &= \left(\sum_{\sigma_l \in A_{l,i_0}} \sigma_l \right) \tau_{i_0} f + \left(\sum_{\rho_l \in A_{l,i_0}} \rho_l (a'\ b') \right) \tau_{i_0} f \\ &= \left(\sum_{\sigma_l \in A_{l,i_0}} \sigma_l \right) \tau_{i_0} f - \left(\sum_{\rho_l \in A_{l,i_0}} \rho_l \right) \tau_{i_0} f \\ &= 0, \end{aligned}$$

o polinômio nulo, o que prova nossa afirmação. Assim,

$$\left(\sum_{\sigma\in R_{T_{\lambda(i_0)}}}\sigma\right)\tau_{i_0}f=0, \tag{5.10}$$

o que implica que

$$\begin{aligned}
e_{T_{\langle\lambda\rangle}}f &= (e_{T_{\lambda(1)}}\otimes e_{T_{\lambda(2)}}\otimes e_{T_{\lambda(3)}}\otimes e_{T_{\lambda(4)}})f\\
&= (e_{T_{\lambda(1)}}\otimes\cdots\otimes Id\otimes\cdots\otimes e_{T_{\lambda(4)}})(Id\otimes\cdots\otimes e_{T_{\lambda(i_0)}}\otimes\cdots\otimes Id)f\\
&= (e_{T_{\lambda(1)}}\otimes\cdots\otimes Id\otimes\cdots\otimes e_{T_{\lambda(4)}})\left(Id\otimes\cdots\otimes\sum_{\substack{\sigma_{i_0}\in R_{T_{\lambda(i_0)}}\\ \tau_{i_0}\in C_{T_{\lambda(i_0)}}}}(-1)^{\tau_{i_0}}\sigma_{i_0}\tau_{i_0}\otimes\cdots\right)f\\
&= (e_{T_{\lambda(1)}}\otimes\cdots\otimes Id\otimes\cdots\otimes e_{T_{\lambda(4)}})\left(\sum_{\substack{\sigma_{i_0}\in R_{T_{\lambda(i_0)}}\\ \tau_{i_0}\in C_{T_{\lambda(i_0)}}}}(-1)^{\tau_{i_0}}\sigma_{i_0}\tau_{i_0}\right)f\\
&= (e_{T_{\lambda(1)}}\otimes\cdots\otimes Id\otimes\cdots\otimes e_{T_{\lambda(4)}})\left[\sum_{\tau_{i_0}\in C_{T_{\lambda(i_0)}}}(-1)^{\tau_{i_0}}\underbrace{\left(\sum_{\sigma_{i_0}\in R_{T_{\lambda(i_0)}}}\sigma_{i_0}\right)\tau_{i_0}f}_{=0}\right]\\
&= 0,
\end{aligned}$$

o polinômio nulo, onde usamos (5.10). Ou seja, $e_{T_{\langle\lambda\rangle}}f=0$ na $*$-superálgebra livre no caso em que $h(\langle\lambda\rangle)<\langle k\rangle$.

Concluímos que, para toda multipartição $\langle\lambda\rangle\vdash\langle 2k_i+1\rangle$, vale que $e_{T_{\langle\lambda\rangle}}f\in Id_2^*(A)$. Agora, como a característica de F é zero, pelo Teorema de Maschke, podemos escrever

$$FS_{\langle 2k_i+1\rangle}f=\bigoplus_{\substack{\langle\mu\rangle\vdash\langle 2k_i+1\rangle\\ T_{\langle\mu\rangle}\text{ standard}}}FS_{\langle 2k_i+1\rangle}e_{T_{\langle\mu\rangle}}f\subseteq Id_2^*(A)$$

e, assim, $f\in Id_2^*(A)$. Para finalizar, basta substituir as indeterminadas $x_q's$ por quaisquer indeterminadas do conjunto $(Y_0\cup Z_0\cup Y_1\cup Z_1)\setminus(\mathcal{Y}_{0,k_1}\cup\mathcal{Z}_{0,k_1}\cup\mathcal{Y}_{1,k_3}\cup\mathcal{Z}_{1,k_4})$ ou substituir por palavras vazias iguais a 1 (com abuso de notação quando a álgebra não é unitária) de todas as formas possíveis. $\square$

Referências Bibliográficas

[1] Aljadeff E., Giambruno A., Karasik Y., *Polynomial Identities with Involution, Superinvolutions and the Grassmann Envelope*, Proc. Am. Math. Soc., 2017;**145**:1843–1857.

[2] Amitsur S. A., Levitzki J., *Minimal identities for algebras*, Proc. Amer. Math. Soc., 1950; **1**:449–463.

[3] Amitsur S. A, Regev A., *P.I. algebras and their cocharacters*, J. Algebra, 1982;**78**:248–254.

[4] Bahturin Y., Tvalavadze M., Tvalavadze T., *Group gradings on superinvolution simple superalgebras*, Linear Algebra and its Applications, 2009;**431**:1054–1069.

[5] Berele A., *Cocharacter Sequences for Algebras with Hopf Algebra Actions*, Journal of Algebra, 1996;**185**:869–885.

[6] Berele A., *Homogeneous Polynomial Identities*, Israel Journal of Mathematics, 1982;**42**:258–272.

[7] Berele A., Regev A., *Applications of Hook Young Diagrams to P.I. Algebras*, Journal of Algebra, 1983;**82**:559–567.

[8] Boerner H., *Representations of groups*, 2nd ed., North-Holland, Amsterdan, 1967, 1970.

[9] Cirrito A., Giambruno A., *Group graded algebras and multiplicities bounded by a constant*, Journal of Pure and Applied Algebra, 2013;**217**:259–268.

[10] Curtis C. W., Reiner I., *Representation theory of finite groups and associative algebras*, Interscience, John Wiley and Sons, New York-London, 1962.

[11] Di Vincenzo O. M., *On the graded identities of* $M_{1,1}(E)$, Israel Journal of Mathematics, 1992;**80**:323–335.

[12] Drensky V., *Free algebras and PI-algebras*, Graduate course in algebra, Springer-Verlag Singapore, Singapore, 2000.

[13] Drensky V., *A minimal basis for the identities of a second-order matrix algebra over a field of characteristic 0*, Algebra and Logic 20, 1981;**3**:188–194.

[14] Giambruno A., Ioppolo A., La Mattina D., *Varieties of Algebras with Superinvolution of Almost Polynomial Growth*, Algebr. Represent. Theor., 2016;**19**:599–611.

[15] Giambruno A., Milies C. P., Valenti A., *Star-polynomial identities: Computing the exponential growth of the codimensions*, Journal of Algebra, 2017;**469**:302–322.

[16] Giambruno A., Mishchenko S., *Polynomial growth of the* $*$*-codimensions and Young diagrams*, Comm. Algebra 29, 2001;**1**:277–284.

[17] Giambruno A., Mishchenko S., Zaicev M., *Polynomial Identities on Superalgebras and almost Polynomial Growth*, Communications in Algebra, 2001;**29**:3787–3800.

[18] Giambruno A., Santos R. B., Vieira A., *Identities of* $*$*-Superalgebras and Almost Polynomial Growth*, Linear and Multilinear Algebra 64, 2016;**3**:484–581.

[19] Giambruno A., Regev A.,*Wreath Products and PI-Algebras*, Journal Pure and Applied Algebra, 1985;**35**:133–149.

[20] Giambruno A., Shestakov I., Zaicev M., *Finite-dimensional non-associative algebras and codimension growth*, Adv. in Appl. Math., 2011;**47**:125–139.

[21] Giambruno A., Zaicev M., *Exponential codimension growth of PI algebras: An exact estimate*, Adv. Math., 1999;**142**:221–243.

[22] Giambruno A., Zaicev M., *On codimension growth of finitely generated associative algebras*, Adv. Math., 1998;**140**:145–155.

[23] Giambruno A., Zaicev M., *On codimension growth of finite-dimensional Lie superalgebras*, J. Lond. Math. Soc., 2012;**85**:534–548.

[24] Giambruno A., Zaicev M., *Polynomial Identities and Asymptotic Methods*, Math. Survey Monogr., vol. 122, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.

[25] Herstein I. N., *Noncommutative rings*, Carus Math. Monographs 15, Math. Assoc. Amer., New York, 1968.

[26] Ioppolo A., *Superalgebras with superinvolution or graded involution with colengths sequence bounded by 3*, J. Algebra Comput., 2020;**30**:821–838.

[27] Ioppolo A., *The exponent for superalgebras with superinvolution*, Linear Algebra and its Applications, 2018;**555**:1–20.

[28] Ioppolo A., La Mattina D., *Polynomial codimension growth of algebras with involutions and superinvolutions*, Journal of Algebra, 2017;**472**:519–545.

[29] Ioppolo A., Martino F., *On multiplicities of cocharacters for algebras with superinvolution*, Journal of Pure and Applied Algebra, 2021;**225**:106536.

[30] Jacobson N., *Basic Algebra I*, 2ª ed., Dover, New York, 2009.

[31] Jacobson N., *PI-Algebras. An introduction*, Lecture Notes in Mathematics, 441, Springer-Verlag, Berlin, New York, 2012.

[32] James G., Kerber A., *The Representation Theory of the Symmetric Group*. London: Addison-Wesley Publishing Company, 1981.

[33] James G., Lieback M., *Representations and Characters of Groups*. Editora Cambridge, 2001.

[34] Kaplansky I., *Rings with a polynomial identity*, Bull. Amer. Math. Soc., 1948;**54**:496–500.

[35] Kemer A. R., *Ideals of Identities of Associative Algebras*, AMS Translations of Mathematical Monograph, Vol. **87**, 1988.

[36] Kemer A. R., *T-Ideals with Power Growth of the Codimension are Specht*, Siberian Math. Journal, 1978;**19**:37–48.

[37] Kemer A. R., *Varieties and $\mathbb{Z}_2$-graded algebras*, Math. USSR Izv, 1985; **25**:359–374.

[38] Kemer A. R. , *Finite basis property of identities of associative algebras*, Algebra and Logic, 1987; **26**:362–397.

[39] Koshlukov P., *Basis of the identities of the matrix algebra of order two over a field of characteristic* $p \neq 2$, J. Algebra, 2001;**241**:410–434.

[40] Krakowski D., Regev A., *The Polynomial Identities of the Grassmann Algebra*, Transactions of the American Mathematical Society , 1973;**181**:429–438.

[41] La Mattina D., Nascimento T. S., Vieira A. C., *Minimal star-varieties of polynomial growth and bounded colength*, J. Pure Appl. Algebra, 2018;**222**:1765–1785.

[42] Mishchenko S., Regev A., Zaicev M., *A characterization of PI-algebras with bounded multiplicities of the cocharacters*, J. Algebra, 1999;**219**:256–368.

[43] Mishchenko S., Valenti A., *A star-variety with almost polynomial growth*, J. Algebra 223, 2000;**1**:66–84.

[44] Olson J. B., Regev A., *An application of representation theory to PI-algebras*, Proc. Amer. Math. Soc., 1976;**55**:253–257.

[45] Otera C., *Finitely generated PI-superalgebras with bounded multiplicities of the cocharactres*, Comm. Algebra, 2005;**33**:1693–1707.

[46] Procesi C., *Rings with polynomial identities*, Pure and Applied Mathematics 17, Marcel Dekker, Inc., New York, 1973.

[47] Razmyslov Yu. P., *Finite basing of the identities of a matrix algebra of second order over a field of characteristic zero*, Algebra and Logic, 1973;**12**:47–63.

[48] Regev A., *Existence of Identities in* $A \otimes B$, Israel J. Math , 1972;**11**:131–152.

[49] Regev A., *Algebras satisfying a Capelli identity*, Israel J. Math, 1979; **33**:149–154.

[50] Repovs D. D., Zaicev M. V., *On Existence of PI-exponents of unital Algebras*, Electronic Research Archive, 2020;**28**:853–859.

[51] Rowen L. H., *Polynomial Identities in Ring Theory*, Academic Press, New York, 1980.

[52] Sagan B. S. *The Symmetric Group: Representations, Combinatorial Algorithms, and Symmetric Functions.* 2ª ed. USA: Springer. 2000.

[53] Specht W., *Gesetze in ringen*, Math. Zeitschrift, 1950;**52**:557–589.

[54] Steinberg B., *Representation Theory of Finite Groups: an Introductory Approach*, USA: Springer. 2012.

[55] Valenti A., *The graded identities of upper triangular matrices of size two*, Journal of Pure and Applied Algebra, 2002;**172**:325–335.

[56] Vieira A. C., *Finitely generated algebras with involution and multiplicities bounded by a constant*, Journal of Algebra, 2015;**422**:487–503.

[57] Zaicev M. V., *Integrality of exponents of growth of identities of finite dimensional Lie algebras*, Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat., 2002;**66**:23–48, translation in Izv. Math., 2002;**66**:463–487.