



Universidade de Brasília

**Superfícies Mínimas de Translação no
Espaço Euclidiano**

Tarcios Andrey Ferreira

Orientador: Dr. João Paulo dos Santos

Departamento de Matemática
Universidade de Brasília

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de
Mestre em Matemática

Brasília, 30 de Julho de 2021

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Superfícies mínimas de translação no espaço Euclidiano

por

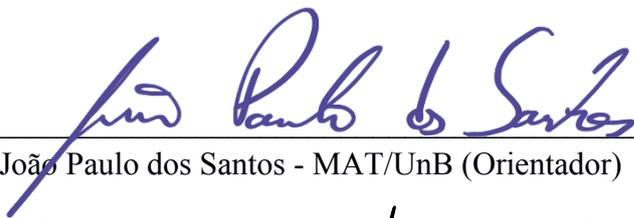
Tarcios Andrey Ferreira*

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos para obtenção do grau de

MESTRE EM MATEMÁTICA

Brasília, 30 de julho de 2021.

Comissão Examinadora:



Prof. Dr. João Paulo dos Santos - MAT/UnB (Orientador)



Prof. Dr. Tarcísio Castro Silva – MAT/UnB (Membro)



Profa. Dr. Fernando Manfio – ICMC/USP (Membro)

* O autor foi bolsista da CAPES e do CNPq durante a elaboração desta dissertação.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a minha família como um todo por terem me dado apoio e suporte para tornar tudo isso possível, destacando a minha mãe Helena que durante toda essa trajetória nunca me deixou desistir, a minha esposa Thainá, que esteve sempre presente nos momentos bons e ruins, e a meu pai Cirineu que sempre acreditou em mim, e que infelizmente veio por falecer antes da conclusão deste mestrado, dedico essa conquista especialmente como uma homenagem a ele.

Gostaria de agradecer ao meu orientador Dr. João Paulo dos Santos por sua paciência, dedicação e disponibilidade, sem as quais não teria sido possível concluir esse trabalho.

Agradeço também aos meus amigos, tanto pessoais, quanto do curso, que me apoiaram e foram pacientes comigo nos momentos de ausência e também de dificuldade, isso foi muito importante pra mim.

Agradeço aos professores Dr. Fernando Manfio e Dr. Tarcísio Castro Silva pelas valiosas e importantes correções e sugestões para este trabalho.

Agradeço também a todos os professores do departamento de matemática da Universidade de Brasília, UnB, e também a todos os profissionais que o compõe.

Agradeço o Cnpq e a Capes pelo financiamento.

Por ultimo, mas não menos importante, gostaria de deixar um agradecimento aos meus cães de estimação Cleonyce e Gilmar que ao longo destes anos me trouxeram felicidade e companhia nos momentos mais difíceis.

Resumo

Uma superfície de translação no espaço Euclidiano de três dimensões é uma superfície gerada pela soma de duas curvas, chamadas curvas geradoras. Nesta dissertação, estudamos superfícies de translação mínimas, baseado nos trabalhos de Rafael López e Óscar Perdomo e de Thomas Hasanis e Rafael López. Primeiramente, baseado no trabalho de Rafael López e Oscar Perdomo, apresentamos uma caracterização das superfícies mínimas de translação no caso em que as curvas geradoras são curvas não planas. Tal caracterização é dada através de uma relação entre curvatura e a torção de ambas curvas, a saber, o produto do quadrado da curvatura pela torção é constante. Além disso, a menos de um movimento rígido, uma dilatação e uma reparametrização das curvas geradoras destas superfícies, todas elas podem ser descritas por curvas geradoras congruentes e determinadas por dois parâmetros reais a e b . Em seguida, baseado no artigo de Thomas Hasanis e Rafael López, apresentamos resultados de classificação para estas superfícies e um método para a construção de exemplos. Além do plano e das superfícies do tipo Scherk, a classificação é dada em termos de soluções de uma classe de equações diferenciais ordinárias autônomas, em que tais soluções fornecem as curvaturas das curvas geradoras das superfícies, enquanto as respectivas torções serão determinadas por uma equação que depende somente da curvatura e de uma constante. Finalmente, através do método de construção apresentado, serão exibidos alguns exemplos.

Palavras-chave: superfícies mínimas, superfícies de translação, curvas regulares, espaço Euclidiano.

Abstract

A translation surface in the three-dimensional Euclidian space is a surface generated by the sum of two curves, called generating curves. In this dissertation, we studied the minimal translation surfaces based on the works of Rafael López and Óscar Perdomo, and of Thomas Hasanis and Rafael López. First, based on the work of Rafael López and Óscar Perdomo, we show a characterization of minimal translation surfaces and in the case that the generating curves are non-plane. Such characterization is given through the relation between the curvature and the torsion of both curves, namely, the product of the square of the curvature by the torsion is constant. Beyond that, up to a rigid motion, a dilatation, and a reparametrization of the generating curves of these surfaces, all of them can be by congruent generating curves and determined by two real parameters a and b . Afterward, based on the article of Thomas Hasanis and Rafael López, we show classification results for these surfaces and a method for the construction of examples. Beyond the plane and the surfaces of Scherk kind, the classification is given in terms of solutions of an autonomous ordinary differential equations class, where such solutions provide the curvatures of the surface's generating curves, while the respective torsions will be determined by an equation that depends only in the curvature and a constant. Finally, through the method of construction, it will be presented some examples.

Keywords: minimal surfaces, translation surfaces, regular curves, Euclidean space.

Conteúdo

Introdução	1
1 Conceitos e resultados preliminares	4
1.1 Resultados gerais	4
1.2 Resultados auxiliares	13
2 Superfícies mínimas de translação: caracterização e descrição	23
2.1 Uma caracterização em termos da curvatura e torção	23
2.2 Descrição das superfícies mínimas de translação	35
3 Superfícies mínimas de translação: classificação e construção	50
3.1 Resultados de classificação	50
3.2 Construção de superfícies mínimas de translação	71
Bibliografia	79

Introdução

Uma superfície de translação no espaço Euclidiano \mathbb{R}^3 é uma superfície gerada pela soma de duas curvas regulares α e β . De acordo com Hasanis e López [8], tais superfícies têm origem nos textos clássicos de Darboux [3], onde as então chamadas "*surfaces définies pour des propriétés cinématiques*" são consideradas, e posteriormente conhecidas como superfícies de Darboux na literatura. Uma *superfície de Darboux* é definida como o movimento de uma curva por uma família a 1-parâmetro de movimentos rígidos em \mathbb{R}^3 . Uma parametrização de tal superfície é dada por $\Psi(s, t) = A(t) \cdot \alpha(s) + \beta(t)$, onde α e β são duas curvas espaciais e $A(t)$ é uma matriz ortogonal. Desta forma, as superfícies de translação são dadas quando $A(t) = Id$ para todo t , ou seja, dadas pela soma $\Psi(s, t) = \alpha(s) + \beta(t)$ de duas curvas $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ e $\beta : J \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$. As curvas α e β são chamadas curvas geradoras de S . No caso particular em que α e β são curvas planas, a superfície é chamada superfície de translação do tipo planar.

Este nome "translação" se deve ao fato de que S pode ser obtida pela translação de α ao longo de β (ou *vice versa* pois os papéis de α e β podem ser trocados). É natural se questionar sobre a classificação das superfícies de translação sob alguma condição em sua curvatura, seja curvatura Gaussiana ou média. Nesta dissertação, baseado nos trabalhos de López e Perdomo [18] e de Hasanis e López [8], a classe de superfícies a ser estudada serão as "**as superfícies mínimas de translação**". Cabe ressaltar que, de acordo com Hasanis e López, na literatura, outros trabalhos foram feitos em relação ao estudo de superfícies de translação com curvatura média constante, e também em outros espaços: nos referimos a [5, 14–16, 19, 20]. Para o caso de curvatura Gaussiana constante, a referência apresentada é [9].

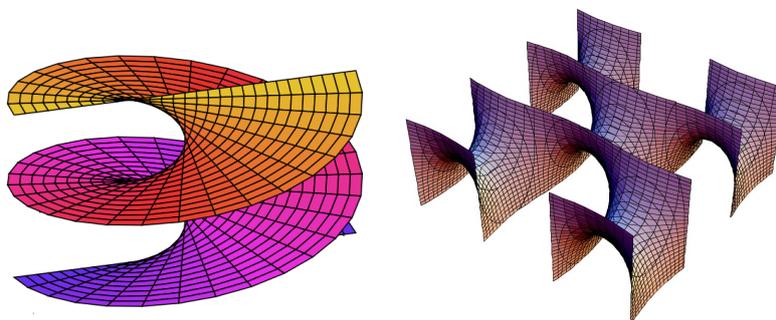
Lembramos que uma superfície mínima no espaço Euclidiano \mathbb{R}^3 é uma superfície com curvatura média H nula em todos os pontos. É bem sabido que, além do plano, a única superfície mínima dada pelo gráfico de uma função $z(x, y)$ da forma $z(x, y) = f(x) + g(y)$ para duas funções reais f e g é a superfície de Scherk [23] (veja também [1, 2]):

$$z(x, y) = \frac{1}{a}(\log(|\cos(ay)|)) - (\log(|\cos(ax)|)), \quad a > 0. \quad (1)$$

A solução acima é obtida resolvendo-se a equação $H = 0$, no caso particular em que $z(x, y) = f(x) + g(y)$, usando separação de variáveis. Observamos também que uma superfície parametrizada por $\Psi(x, y) = (x, y, f(x) + g(y))$ também pode ser expressa como a soma de duas curvas planas, no caso $\alpha = (x, 0, f(x))$ e $\beta = (0, y, g(y))$, isto é, uma superfície de translação. Assim, a superfície de Scherk é uma superfície mínima de translação. Outra superfície mínima que pode ser escrita como a soma de duas curvas, que já era conhecida por Lie, é o helicóide. Tanto o helicóide quanto a superfície de Scherk serão tratados com detalhes no Capítulo 1, sob o ponto de superfícies mínimas de translação.

De acordo com López e Perdomo [18], as superfícies de translação foram inicialmente introduzidas por Sophus Lie e atraíram o interesse de geômetras estudando certos tipos especiais, [4, 7, 21, 24]. De fato, no contexto de curvas complexas, Lie provou que uma superfície analítica é mínima se, e só se, puder ser representada como a soma de curvas isotrópicas complexas e sua conjugada complexa [12], ver também [22, §148].

Tem sido um problema aberto durante muito tempo se o plano, o helicóide, e a superfície de Scherk são as únicas superfícies de translação mínimas em \mathbb{R}^3 . Por exemplo, a superfície descrita em (1) pertence a uma família mais geral de superfícies de translação descoberta por Scherk de superfícies mínimas onde ambas geradoras são curvas planas mas não necessariamente em planos ortogonais. Um resultado parcial para essa questão foi dado em [5], onde os autores mostraram que se uma das curvas geradoras está em um plano, então a superfície é um plano ou uma superfície de Scherk. Além disso e ainda de acordo com [18], seguindo a mesma ideia de separação de variáveis, é possível estender este tipo de problema para achar superfícies de translação em outros espaços prescrevendo outras curvaturas: veja por exemplo, [10, 14, 17, 28, 29]. As demonstrações de tais resultados são normalmente longos e tediosos cálculos envolvendo um número de sub-casos. Então se mostra necessário utilizar novas técnicas para o problema, especialmente para se considerar o caso geral onde as geradoras são curvas espaciais, que nunca foi estudado até hoje.



Helicóide a esquerda e superfície de Scherk a direita.

(fonte: Wikipédia)

Como dito anteriormente, este texto apresenta um estudo de superfícies mínimas de translação destacando resultados de caracterização e descrição (baseado em [18]), bem como resultados de classificação e um método de construção (baseado em [8]). A dissertação é organizada da seguinte forma:

- No Capítulo 1 apresentamos resultados, notações e conceitos básicos necessários para a compreensão do texto. Além disso, são abordadas como superfícies mínimas de translação tanto o helicóide (Exemplo 1.2), quanto a superfície de Scherk (Exemplo 1.3).
- No Capítulo 2 apresentamos uma caracterização para as superfícies mínimas de translação em termos da curvatura k e da torção τ de suas geradoras (Teorema 2.1). Além disso, uma descrição de tais superfícies é dada através de uma família a dois parâmetros de superfícies (Teorema 2.2). Através desta descrição são exibidos alguns exemplos.
- No Capítulo 3 apresentamos resultados de classificação e um método de construção para superfícies mínimas de translação de \mathbb{R}^3 . São abordados dois resultados já conhecidos com provas alternativas, a saber, uma classificação das superfícies mínimas de translação quando uma das geratrizes é plana (Teorema 3.1) e quando uma das geratrizes é uma hélice circular (Teorema 3.2). Em seguida, apresentamos um resultado de classificação em termos de soluções de uma classe de equações diferenciais ordinárias autônomas (Teorema 3.3). Finalizamos o capítulo apresentando um algoritmo que permite construir superfícies mínimas de translação. Tal algoritmo é empregado na apresentação de exemplos.

Capítulo 1

Conceitos e resultados preliminares

Neste capítulo, apresentaremos alguns conceitos e resultados iniciais que serão importantes para o entendimento deste texto. O leitor que já estiver familiarizado com tais resultados deve se atentar apenas a algumas notações que serão introduzidas ao longo do capítulo.

1.1 Resultados gerais

Esta seção será reservada para alguns resultados de geometria diferencial, com foco nas superfícies mínimas de translação. Introduziremos o conceito de superfície mínima de translação e veremos como a superfície de Scherk e o helicóide surgem como os primeiros exemplos desta classe de superfícies. Encerraremos a seção apresentando alguns resultados de álgebra linear, que serão úteis nos capítulos seguintes.

Inicialmente lembramos da definição de superfície mínima, ou seja, aquela superfície cuja curvatura média H se anula em todo ponto. Lembremos também que, utilizando os coeficientes da primeira e segunda formas fundamentais E, G, F e e, g, f respectivamente, a curvatura média pode ser calculada da seguinte maneira

$$H = \frac{1}{2} \frac{(eG - 2fF + Eg)}{(EG - F^2)}.$$

Com esta equação em mente, introduziremos o seguinte exemplo, que é motivador para este trabalho. Como referências em que foram baseados os cálculos a seguir, citamos [1, 2].

Exemplo 1.1. A Superfície de Scherk é conhecida por ser um exemplo de uma superfície mínima dada por um gráfico. Utilizando a mesma parametrização local ϕ para a superfície de Scherk apresentada na introdução, escreveremos $\phi(x, y) = (x, y, z(x, y))$. Para o cálculo da curvatura média H deste tipo de superfície, ou seja, superfícies que são gráficos, podemos

utilizar a seguinte fórmula, que é demonstrada no Exemplo 5 de [2, §3.3]

$$H = \frac{1}{2} \frac{(1 + z_x^2)z_{yy} - 2z_x z_y z_{xy} + (1 + z_y^2)z_{xx}}{(1 + z_x^2 + z_y^2)^{3/2}},$$

onde

$$z_x = \frac{\partial z(x,y)}{\partial x}, \quad z_y = \frac{\partial z(x,y)}{\partial y}.$$

Sendo assim, supondo uma solução do tipo $z(x,y) = f(x) + g(y)$, temos que $z_x = f'(x)$, $z_y = g'(y)$, $z_{xx} = f''(x)$, $z_{yy} = g''(y)$, $z_{xy} = 0$ e então

$$H = \frac{1}{2} \frac{(1 + f'(x)^2)g''(y) - 0 + (1 + g'(y)^2)f''(x)}{(1 + f'(x)^2 + g'(y)^2)^{3/2}}.$$

Assim, $H = 0$ é equivalente a

$$-\frac{g''(y)}{1 + g'(y)^2} = \frac{f''(x)}{1 + f'(x)^2}.$$

Como os dois lados da equação dependem de variáveis diferentes, temos

$$-\frac{g''(y)}{1 + g'(y)^2} = a = \frac{f''(x)}{1 + f'(x)^2},$$

em que $a \in \mathbb{R}$ é uma constante. Se $a = 0$, temos que f e g são funções lineares e nossa superfície é um plano. Sendo assim, iremos considerar $a \neq 0$. Integrando a primeira equação com relação a y , temos

$$\arctan(g'(y)) = -(ay + b_1),$$

então $g'(y) = \tan(-(ay + b_1)) = -\tan(ay + b_1)$. Uma nova integração nos leva a

$$g(y) = \frac{1}{a} \log(|\cos(ay + b_1)|) + c_1,$$

em que b_1 e c_1 são constantes de integração. Analogamente $f(x) = -\frac{1}{a} \log(|\cos(ax + b_2)|) + c_2$, podemos considerar a menos de translações $b_1 = b_2 = c_1 = c_2 = 0$, e portanto

$$z(x,y) = f(x) + g(y) = \frac{1}{a} [\log(|\cos(ay)|) - \log(|\cos(ax)|)],$$

ou seja, a parametrização que apresentamos na introdução.

Como mencionado na introdução, o objetivo central deste trabalho é estudar uma classe de superfícies mínimas, conhecidas como superfícies mínimas de translação. Neste sentido, daremos abaixo a definição formal e as primeiras propriedades deste tipo de superfície, de acordo com [18] e [8].

Definição 1.1. Uma superfície $S \subset \mathbb{R}^3$ é chamada superfície de translação se pode ser localmente escrita como a soma $\phi(s, t) = \alpha(s) + \beta(t)$ de duas curvas diferenciáveis $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ e $\beta : J \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, onde as curvas α e β são chamadas curvas geradoras de S . No caso particular em que α e β são curvas planas, a superfície é chamada superfície de translação do tipo planar.

Observe que que uma superfície de translação é uma superfície parametrizada regular, se e somente se, cada uma das curvas geradoras são regulares e satisfazem $\alpha'(s) \times \beta'(t) \neq 0$, para todo ponto $(s, t) \in I \times J$.

Uma vez definidas tais superfícies, vamos calcular a expressão da sua curvatura média. Como as superfícies estudadas serão regulares, podemos assumir, sem perda de generalidade que s e t são comprimentos de arco, e utilizando a seguinte notação para derivadas parciais

$$\frac{\partial \phi(s, t)}{\partial t} = \phi_t(s, t), \quad \frac{\partial \phi(s, t)}{\partial s} = \phi_s(s, t),$$

calculamos

$$\begin{cases} \phi_s(s, t) = \alpha'(s), \\ \phi_t(s, t) = \beta'(t), \end{cases} \quad \begin{cases} \phi_{ss}(s, t) = \alpha''(s), \\ \phi_{tt}(s, t) = \beta''(t), \\ \phi_{st}(s, t) = 0, \end{cases} \quad N = \frac{\phi_s \times \phi_t}{|\phi_s \times \phi_t|} = \frac{\alpha' \times \beta'}{|\alpha' \times \beta'|}.$$

Portanto, obtemos

$$E = |\alpha'(s)|^2, \quad G = |\beta'(t)|^2, \quad F = \langle \alpha'(s), \beta'(t) \rangle, \\ e = \frac{\langle \alpha''(s) \times \alpha'(s), \beta'(t) \rangle}{|\alpha'(s) \times \beta'(t)|}, \quad g = \frac{\langle \beta'(t) \times \beta''(t), \alpha'(s) \rangle}{|\alpha'(s) \times \beta'(t)|}, \quad f = 0,$$

e assim escrevemos

$$H = \frac{1}{2} \frac{(|\beta'(t)|^2 \langle \alpha''(s) \times \alpha'(s), \beta'(t) \rangle + |\alpha'(s)|^2 \langle \beta'(t) \times \beta''(t), \alpha'(s) \rangle)}{|\alpha'(s) \times \beta'(t)| (|\alpha'(s)|^2 |\beta'(t)|^2 - \langle \alpha'(s), \beta'(t) \rangle)} = \\ = \frac{1}{2 |\alpha'(s) \times \beta'(t)|^{\frac{3}{2}}} [|\beta'(t)|^2 \langle \alpha''(s) \times \alpha'(s), \beta'(t) \rangle + |\alpha'(s)|^2 \langle \beta'(t) \times \beta''(t), \alpha'(s) \rangle] = 0$$

como $|\alpha'(s)| = |\beta'(t)| = 1$, pois são curvas p.c.a, então $H = 0$ é equivalente a

$$\langle \alpha''(s) \times \alpha'(s), \beta'(t) \rangle + \langle \beta'(t) \times \beta''(t), \alpha'(s) \rangle = 0 \quad (1.1)$$

onde \times denota o produto vetorial em \mathbb{R}^3 .

Resumimos então o cálculo acima na seguinte proposição

Proposição 1.1. Uma superfície de translação localmente parametrizada por $\phi(s, t) = \alpha(s) + \beta(t)$, para curvas regulares $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ e $\beta : J \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, é uma superfície mínima se e somente se

$$|\beta'(t)|^2 \langle \alpha''(s) \times \alpha'(s), \beta'(t) \rangle + |\alpha'(s)|^2 \langle \beta'(t) \times \beta''(t), \alpha'(s) \rangle = 0.$$

Em particular se α e β são curvas p.c.a vale a equação (1.1).

Observação 1.1. Considere duas curvas $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$ e $u(s) = \int_0^s |\alpha'|$, $v(t) = \int_0^t |\beta'|$ seus respectivos comprimentos de arco. Assim tendo $\alpha(s) = \tilde{\alpha}(u(s))$ e $\beta(t) = \tilde{\beta}(v(t))$ como curvas p.c.a. e omitindo os parâmetros s e t por simplicidade, calculamos

$$\alpha' = \tilde{\alpha}' \frac{du}{ds} = \tilde{\alpha}' |\alpha'|,$$

e também

$$\alpha'' = \tilde{\alpha}'' |\alpha'|^2 + \tilde{\alpha}' \frac{d}{ds} |\alpha'|.$$

Analogamente temos

$$\beta' = \tilde{\beta}' \frac{dv}{dt} = \tilde{\beta}' |\beta'|,$$

e também

$$\beta'' = \tilde{\beta}'' |\beta'|^2 + \tilde{\beta}' \frac{d}{dt} |\beta'|.$$

Portanto

$$\alpha'' \times \alpha' = \left(\tilde{\alpha}'' |\alpha'|^2 + \tilde{\alpha}' \frac{d}{ds} |\alpha'| \right) \times (\tilde{\alpha}' |\alpha'|) = |\alpha'|^3 (\tilde{\alpha}'' \times \tilde{\alpha}'),$$

analogamente $\beta'' \times \beta' = |\beta'|^3 (\tilde{\beta}'' \times \tilde{\beta}')$. Sendo assim, temos

$$\begin{aligned} & |\beta'|^2 \langle \alpha'' \times \alpha', \beta' \rangle + |\alpha'|^2 \langle \beta' \times \beta'', \alpha' \rangle \\ &= |\beta'|^2 \langle |\alpha'|^3 (\tilde{\alpha}'' \times \tilde{\alpha}'), \tilde{\beta}' |\beta'| \rangle + |\alpha'|^2 \langle |\beta'|^3 (\tilde{\beta}'' \times \tilde{\beta}'), \tilde{\alpha}' |\alpha'| \rangle \\ &= |\beta'|^3 |\alpha'|^3 [\langle \tilde{\alpha}'' \times \tilde{\alpha}', \tilde{\beta}' \rangle + \langle \tilde{\beta}'' \times \tilde{\beta}', \tilde{\alpha}' \rangle]. \end{aligned}$$

Concluimos então que uma superfície $\Phi(s, t) = \alpha(s) + \beta(t)$ é mínima se e só se $\tilde{\Phi}(s, t) = \tilde{\alpha}(s) + \tilde{\beta}(t)$ o é.

Conforme [18], uma superfície importante introduzida por Sophus Lie como uma superfície mínima de translação, é um aberto do helicóide que apresentaremos no exemplo a seguir.

Exemplo 1.2. Considere a parametrização do helicóide dada por

$$\phi(u, v) = (\cos(v) \cos(u), \cos(v) \sin(u), u).$$

Mostraremos que essa parametrização é obtida como a soma de duas hélices circulares. De fato, considere a parametrização da hélice circular dada por

$$\alpha(s) = \frac{1}{2}(\cos(s), \sin(s), s).$$

Assim, dado um segundo parâmetro real t , considere a soma $\alpha(s) + \alpha(t)$:

$$\alpha(s) + \alpha(t) = \left(\frac{1}{2}(\cos(s) + \cos(t)), \frac{1}{2}(\sin(s) + \sin(t)), \frac{1}{2}(s+t) \right).$$

Fazendo a mudança de coordenadas $u = \frac{1}{2}(s+t)$, $v = \frac{1}{2}(s-t)$, equivalentemente $s = u+v$, $t = u-v$, temos

$$\alpha(u+v) + \alpha(u-v) = \left(\frac{1}{2}(\cos(u+v) + \cos(u-v)), \frac{1}{2}(\sin(u+v) + \sin(u-v)), u \right),$$

de forma que

$$\begin{aligned} \cos(u+v) + \cos(u-v) &= \cos(u)\cos(v) - \sin(u)\sin(v) + \cos(u)\cos(v) + \sin(u)\sin(v). \\ &= 2\cos(u)\cos(v). \end{aligned}$$

Analogamente, $\sin(u+v) + \sin(u-v) = 2\cos(v)\sin(u)$. Portanto

$$\alpha(u+v) + \alpha(u-v) = \phi(u, v).$$

Voltemos agora para o exemplo da superfície de Scherk, considerando-a desta vez como a soma de duas curvas, ou seja, uma superfície de translação.

Exemplo 1.3. Seja S uma superfície de Scherk parametrizada localmente como $\phi(x, y) = (x, y, z(x, y))$, sendo $z(x, y) = f(x) + g(y)$ como em (1), e considere as curvas $\alpha(x) = (x, 0, f(x))$

e $\beta(y) = (0, y, g(y))$, naturalmente vemos que $\phi(x, y) = \alpha(x) + \beta(y)$, então temos

$$\begin{cases} \phi_x = (1, 0, f') = \alpha', \\ \phi_y = (0, 1, g') = \beta', \end{cases} \quad \begin{cases} \phi_{xx} = (0, 0, f'') = \alpha'', \\ \phi_{yy} = (0, 0, g'') = \beta'', \\ \phi_{xy} = (0, 0, 0), \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha'' \times \alpha' = (0, f'', 0), \\ \beta' \times \beta'' = (g'', 0, 0). \end{cases}$$

Agora $f''(x) = -\sec(ax)^2$, $g''(y) = \sec(ay)^2$, $|\alpha'(x)| = \sqrt{1 + \tan(ax)^2} = \sec(ax)$, $|\beta'(y)| = \sqrt{1 + \tan(ay)^2} = \sec(ay)$, então pela Proposição 1.1, podemos calcular

$$\begin{aligned} & |\beta'(y)|^2 \langle \alpha''(s) \times \alpha'(s), \beta'(t) \rangle + |\alpha'(x)|^2 \langle \beta'(t) \times \beta''(t), \alpha'(s) \rangle = \\ & \sec(ay)^2 f''(x) + \sec(ax)^2 g''(y) = -\sec(ay)^2 \sec(ax)^2 + \sec(ax)^2 \sec(ay)^2 = 0. \end{aligned}$$

Assim concluímos que a superfície de Scherk é uma superfície mínima de translação.

Na sequência apresentamos alguns resultados de álgebra linear que serão importantes no decorrer do trabalho.

Lema 1.1. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e sejam U_1 e U_2 subespaços de V . Então a dimensão do sub-espaço $U_1 + U_2$ pode ser obtida com a fórmula

$$\dim(U_1 + U_2) = \dim(U_1) + \dim(U_2) - \dim(U_1 \cap U_2).$$

A demonstração deste lema pode ser encontrada com detalhes em [13, §7].

Lembraremos agora da definição do produto misto

Definição 1.2. Sejam $X, Y, Z \in \mathbb{R}^3$, então o produto misto destes vetores se dá por

$$(X, Y, Z) = \langle X \times Y, Z \rangle = \langle X, Y \times Z \rangle.$$

Considerando agora também $\alpha \in \mathbb{R}$, valem as seguintes propriedades

1. $(\alpha X, Y, Z) = (X, \alpha Y, Z) = (X, Y, \alpha Z) = \alpha(X, Y, Z)$
2. $(X, Y, Z) = -(Y, X, Z)$

Utilizando essa definição podemos demonstrar um outro resultado importante que é

Lema 1.2. Seja Q uma matriz 3×3 real invertível e a e b vetores em \mathbb{R}^3 , então

$$Qa \times Qb = \det(Q)Q^{-T}(a \times b).$$

Demonstração. Seja $w = a \times b$, então w é o único vetor que satisfaz

$$\det(a, b, x) = \langle a \times b, x \rangle = \langle w, x \rangle, \quad \forall x \in \mathbb{R}^3$$

então temos

$$\begin{aligned} \det(Q)\langle a \times b, x \rangle &= \det(Q)\det(a, b, x) \\ &= \det(Qa, Qb, Qx) \\ &= \langle Qa \times Qb, Qx \rangle \\ &= \langle Q^T(Qa \times Qb), x \rangle. \end{aligned}$$

Segue que $\det(Q)(a \times b) = Q^T(Qa \times Qb)$, e como Q é invertível

$$\det(Q)Q^{-T}(a \times b) = Qa \times Qb.$$

□

Aqui vale observar que no caso em que Q é uma matriz ortogonal então $\det(Q) = \pm 1$ e $Q^{-1} = Q^T$, então $Q^{-T} = Q^{TT} = Q$, e assim teremos

$$\pm Q(a \times b) = Qa \times Qb.$$

Utilizando este resultado podemos provar o seguinte lema, introduzido em [18], que será importante para o Capítulo 2.

Lema 1.3. Seja S uma superfície regular mínima de \mathbb{R}^3 parametrizada localmente por $\phi(s, t)$, então

1. Se P é uma matriz ortogonal, então a superfície $P \circ \phi(s, t) = \tilde{\phi}(s, t)$ é também uma superfície mínima.
2. Dado um número não nulo λ , a superfície $\lambda \phi(s, t)$ é também uma superfície mínima.

Demonstração. Caso (1) - Primeiramente como P é linear temos:

$$\frac{\partial P \circ \phi(s, t)}{\partial s} = P \frac{\partial \phi(s, t)}{\partial s} = P \phi_s$$

análogo para $P \phi_t$.

Podemos observar que como P é ortogonal, então é um isomorfismo, preservando assim o produto interno, ou seja $\langle P \phi_s, P \phi_t \rangle = \langle \phi_s, \phi_t \rangle$, onde ϕ_s, ϕ_t são as derivadas parciais de ϕ em

relação a s e t respectivamente. Assim teremos: $\tilde{E} = \langle P\phi_s, P\phi_s \rangle = \langle \phi_s, \phi_s \rangle = E$ e analogamente $\tilde{G} = G$ e $\tilde{F} = F$.

Derivando novamente, teremos

$$\frac{\partial^2 P \circ \phi(s, t)}{\partial s \partial s} = P\phi_{ss}, \quad \frac{\partial^2 P \circ \phi(s, t)}{\partial t \partial t} = P\phi_{tt}, \quad \frac{\partial^2 P \circ \phi(s, t)}{\partial s \partial t} = P\phi_{st}.$$

Agora para aplicação normal de Gauss vamos lembrar do Lema (1.2) o fato de que como P é ortogonal então $Pa \times Pb = \pm P(a \times b)$, e assim

$$\tilde{N} = \frac{P\phi_s \times P\phi_t}{|P\phi_s \times P\phi_t|} = \frac{\pm P(\phi_s \times \phi_t)}{|P(\phi_s \times \phi_t)|}.$$

Com isso podemos então calcular

$$\tilde{e} = \langle N, P\phi_{ss} \rangle = \frac{\pm \langle P(\phi_s \times \phi_t), P\phi_{ss} \rangle}{|P(\phi_s \times \phi_t)|} = \frac{\pm \langle (\phi_s \times \phi_t), \phi_{ss} \rangle}{|P(\phi_s \times \phi_t)|} = \frac{\pm |(\phi_s \times \phi_t)|}{|P(\phi_s \times \phi_t)|} e = \pm e,$$

analogamente teremos

$$\tilde{g} = \langle N, P\phi_{tt} \rangle = \pm g, \quad \tilde{f} = \langle N, P\phi_{st} \rangle = \pm f.$$

Por fim concluímos que

$$\tilde{H} = \frac{1}{2} \frac{(\tilde{e}\tilde{G} - 2\tilde{f}\tilde{F} + \tilde{E}\tilde{g})}{(\tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2)} = \frac{1}{2} \frac{[\pm eG - 2(\pm fF) \pm Eg]}{(EG - F^2)} = \pm \frac{1}{2} \frac{(eG - 2fF + Eg)}{(EG - F^2)} = \pm H = 0,$$

ou seja, $P \circ \phi(s, t) = \tilde{\phi}(s, t)$ é mínima.

Caso (2) - Aqui, a partir dos fatos que $\langle \lambda a, b \rangle = \lambda \langle a, b \rangle$ e $\lambda a \times b = \lambda(a \times b)$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ e $\forall a, b \in \mathbb{R}^3$, e que

$$\frac{\partial \lambda \circ \phi(s, t)}{\partial s} = \lambda \frac{\partial \phi(s, t)}{\partial s} = \lambda \phi_s,$$

analogamente

$$\frac{\partial \lambda \circ \phi(s, t)}{\partial t} = \lambda \phi_t.$$

Assim teremos que

$$\tilde{E} = \langle \lambda \phi_s, \lambda \phi_s \rangle = \lambda^2 \langle \phi_s, \phi_s \rangle = \lambda^2 E,$$

analogamente $\tilde{G} = \lambda^2 G$, $\tilde{F} = \lambda^2 F$.

Além disso

$$\tilde{N} = \frac{\lambda^2(\phi_s \times \phi_t)}{|\lambda^2(\phi_s \times \phi_t)|} = \frac{(\phi_s \times \phi_t)}{|(\phi_s \times \phi_t)|} = N,$$

então

$$\tilde{e} = \langle N, \lambda \phi_{ss} \rangle = \lambda e, \quad \tilde{g} = \langle N, \lambda \phi_{tt} \rangle = \lambda g, \quad \tilde{f} = \langle N, \lambda \phi_{st} \rangle = \lambda f.$$

Portanto

$$\tilde{H} = \frac{1}{2} \frac{(\tilde{e}\tilde{G} - 2\tilde{f}\tilde{F} + \tilde{E}\tilde{g})}{(\tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2)} = \frac{\lambda^3}{2\lambda^4} \frac{(eG - 2fF + Eg)}{(EG - F^2)} = \frac{H}{\lambda} = 0.$$

Ou seja, $\lambda \phi(s, t)$ é mínima. □

Por fim, o seguinte lema básico de álgebra linear será importante para o Capítulo 3.

Lema 1.4. Seja A uma matriz real $n \times n$. Se A é uma matriz simétrica então é auto adjunta, isto é

$$\langle Ax, x \rangle = \langle x, Ax \rangle, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Demonstração. Considerando uma base ortonormal $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ e uma matriz $A = (a_{ij})$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, simétrica em relação a esta base teremos

$$Ae_i = \sum_k a_{ik} e_k,$$

então

$$\langle Ae_i, e_j \rangle = a_{ij}.$$

Como A é simétrica, então $a_{ij} = a_{ji}$, $\forall i, j$, isto é $\langle Ae_i, e_j \rangle = \langle e_i, Ae_j \rangle$.

Sejam então $u = \sum u_i e_i$ e $v = \sum v_j e_j$, teremos

$$Au = \sum_i u_i Ae_i,$$

ou seja

$$\langle Au, v \rangle = \sum_{i,j} u_i v_j \langle Ae_i, e_j \rangle = \sum_{i,j} u_i v_j \langle e_i, Ae_j \rangle = \langle u, Av \rangle.$$

□

1.2 Resultados auxiliares

Nesta seção apresentaremos alguns resultados auxiliares e relações envolvendo a curvatura e a torção de uma curva regular, que serão úteis no Capítulo 3. Os resultados desta seção podem ser encontrados em [8].

Dada uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco $s \in I \subset \mathbb{R}$, lembremos do triedro de Frenet $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$, sendo \mathbf{t} , \mathbf{n} , \mathbf{b} os vetores tangente, normal e binormal a curva em cada s respectivamente, e das equações de Frenet

$$\begin{aligned}\mathbf{t}' &= k\mathbf{n}. \\ \mathbf{n}' &= -k\mathbf{t} + \tau\mathbf{b}. \\ \mathbf{b}' &= -\tau\mathbf{n}.\end{aligned}$$

Tendo agora em mente as equações de Frenet, tomando as curvas $\alpha(s)$ e $\beta(t)$ parametrizadas pelo comprimento de arco e utilizando o subíndice α e β para fazer referência a curva em questão, segue das equações de Frenet que

$$\langle \alpha''(s) \times \alpha'(s), \beta'(t) \rangle + \langle \beta'(t) \times \beta''(t), \alpha'(s) \rangle = -k_\alpha \langle \mathbf{b}_\alpha, \mathbf{t}_\beta \rangle + k_\beta \langle \mathbf{b}_\beta, \mathbf{t}_\alpha \rangle.$$

Sendo $\phi(s, t) = \alpha(s) + \beta(t)$ uma parametrização para uma superfície mínima de translação, por (1.1) concluímos que $-k_\alpha \langle \mathbf{b}_\alpha, \mathbf{t}_\beta \rangle + k_\beta \langle \mathbf{b}_\beta, \mathbf{t}_\alpha \rangle = 0$ e portanto

$$k_\alpha \langle \mathbf{b}_\alpha, \mathbf{t}_\beta \rangle = k_\beta \langle \mathbf{b}_\beta, \mathbf{t}_\alpha \rangle. \quad (1.2)$$

No que segue, deduziremos a partir da equação (1.2), equações que serão importantes no Capítulo 3. Começamos tomando a derivada com respeito a s de (1.2):

$$k'_\alpha \langle \mathbf{b}_\alpha, \mathbf{t}_\beta \rangle + k_\alpha \langle \mathbf{b}'_\alpha, \mathbf{t}_\beta \rangle = k_\beta \langle \mathbf{b}_\beta, \mathbf{t}'_\alpha \rangle = k_\alpha \langle \mathbf{n}_\alpha, k_\beta \mathbf{b}_\beta \rangle,$$

como $\mathbf{b}'_\alpha = -\tau_\alpha \mathbf{n}_\alpha$ e colocando \mathbf{t}_β em evidência em relação ao produto interno obtemos

$$\left\langle -\tau_\alpha \mathbf{n}_\alpha + \frac{k'_\alpha}{k_\alpha} \mathbf{b}_\alpha, \mathbf{t}_\beta \right\rangle = \langle \mathbf{n}_\alpha, k_\beta \mathbf{b}_\beta \rangle. \quad (1.3)$$

Derivando novamente com respeito a s obtemos

$$\left\langle -\tau'_\alpha \mathbf{n}_\alpha + \tau_\alpha k'_\alpha \mathbf{t}_\alpha - \tau_\alpha^2 \mathbf{b}_\alpha + \left(\frac{k'_\alpha}{k_\alpha}\right)' \mathbf{b}_\alpha - \frac{k'_\alpha}{k_\alpha} \tau_\alpha \mathbf{n}_\alpha, \mathbf{t}_\beta \right\rangle = \langle -k_\alpha \mathbf{t}_\alpha + \tau_\alpha \mathbf{b}_\alpha, k_\beta \mathbf{b}_\beta \rangle.$$

Reorganizando os termos, obtemos

$$\left\langle \tau_\alpha k_\alpha \mathbf{t}_\alpha + \left(-\tau_\alpha^2 + \left(\frac{k'_\alpha}{k_\alpha} \right)' \right) \mathbf{b}_\alpha - \left(\frac{k'_\alpha}{k_\alpha} \tau_\alpha + \tau'_\alpha \right) \mathbf{n}_\alpha, \mathbf{t}_\beta \right\rangle = -k_\alpha k_\beta \langle \mathbf{t}_\alpha, \mathbf{b}_\beta \rangle + \tau_\alpha \langle \mathbf{b}_\alpha, k_\beta \mathbf{b}_\beta \rangle.$$

Agora, a partir de $k_\beta \langle \mathbf{b}_\beta, \mathbf{t}_\alpha \rangle = k_\alpha \langle \mathbf{b}_\alpha, \mathbf{t}_\beta \rangle$, concluímos então que

$$\left\langle \tau_\alpha k_\alpha \mathbf{t}_\alpha - \left(\frac{k'_\alpha}{k_\alpha} \tau_\alpha + \tau'_\alpha \right) \mathbf{n}_\alpha + \left(\left(\frac{k'_\alpha}{k_\alpha} \right)' + k_\alpha^2 - \tau_\alpha^2 \right) \mathbf{b}_\alpha, \mathbf{t}_\beta \right\rangle = \tau_\alpha \langle \mathbf{b}_\alpha, k_\beta \mathbf{b}_\beta \rangle. \quad (1.4)$$

Da mesma maneira para a curva β temos

$$\left\langle \tau_\beta k_\beta \mathbf{t}_\beta - \left(\frac{k'_\beta}{k_\beta} \tau_\beta + \tau'_\beta \right) \mathbf{n}_\beta + \left(\left(\frac{k'_\beta}{k_\beta} \right)' + k_\beta^2 - \tau_\beta^2 \right) \mathbf{b}_\beta, \mathbf{t}_\alpha \right\rangle = \tau_\beta \langle \mathbf{b}_\beta, k_\alpha \mathbf{b}_\alpha \rangle. \quad (1.5)$$

As equações importantes mencionadas, que utilizaremos no Capítulo 3, são as equações (1.2), (1.3), (1.4) e (1.5).

De agora em diante, vamos assumir que as curvas α e β não são planas. Vamos introduzir a seguinte notação para uma curva não plana, parametrizada pelo comprimento de arco, com curvatura k e torção τ . Escrevemos

$$R = \frac{k'}{k} + \frac{\tau'}{\tau}, \quad \Sigma = \left(\frac{k'}{k} \right)' + k^2 - \tau^2. \quad (1.6)$$

Os subíndices α ou β em R ou Σ indicarão que estamos trabalhando com a curva correspondente α ou β .

Mostraremos agora o seguinte resultado chave

Proposição 1.2. Se $\phi(s, t) = \alpha(s) + \beta(t)$ é uma superfície mínima de translação, então

$$k_\alpha^2 \tau_\alpha = c_1 \neq 0, \quad k_\beta^2 \tau_\beta = \bar{c}_1 \neq 0, \quad \frac{\Sigma_\alpha}{\tau_\alpha} - \tau_\alpha = c_2, \quad \frac{\Sigma_\beta}{\tau_\beta} - \tau_\beta = \bar{c}_2, \quad (1.7)$$

onde c_1 , c_2 , \bar{c}_1 e \bar{c}_2 são constantes.

Demonstração. Dividindo (1.4) por τ_α obtemos

$$\left\langle k_\alpha \mathbf{t}_\alpha - R_\alpha \mathbf{n}_\alpha + \frac{\Sigma_\alpha}{\tau_\alpha} \mathbf{b}_\alpha, \mathbf{t}_\beta \right\rangle = \langle \mathbf{b}_\alpha, k_\beta \mathbf{b}_\beta \rangle.$$

Diferenciando essa equação com respeito a s temos

$$\left\langle k'_\alpha \mathbf{t}_\alpha + k_\alpha^2 \mathbf{n}_\alpha - R'_\alpha \mathbf{n}_\alpha + R_\alpha (k_\alpha \mathbf{t} + \tau_\alpha \mathbf{b}_\alpha) + \left(\frac{\Sigma_\alpha}{\tau_\alpha} \right)' \mathbf{b}_\alpha - \Sigma_\alpha \mathbf{b}_\alpha, \mathbf{t}_\beta \right\rangle = -\tau_\alpha \langle \mathbf{n}_\alpha, k_\beta \mathbf{b}_\beta \rangle.$$

Reorganizando os termos, conseguimos

$$\left\langle (k'_\alpha + R_\alpha k_\alpha) \mathbf{t}_\alpha + (k_\alpha^2 - R'_\alpha - \Sigma_\alpha) \mathbf{n}_\alpha + \left(\left(\frac{\Sigma_\alpha}{\tau_\alpha} \right)' - R_\alpha \tau_\alpha \right) \mathbf{b}_\alpha, \mathbf{t}_\beta \right\rangle = \tau_\alpha \langle \mathbf{n}_\alpha, k_\beta \mathbf{b}_\beta \rangle.$$

Levando agora em conta a equação (1.3) escrevemos

$$-\tau_\alpha \left\langle -\tau_\alpha \mathbf{n}_\alpha + \frac{k'_\alpha}{k_\alpha} \mathbf{b}_\alpha, \mathbf{t}_\beta \right\rangle = -\tau_\alpha \langle \mathbf{n}_\alpha, k_\beta \mathbf{b}_\beta \rangle,$$

e portanto

$$\left\langle (k'_\alpha + R_\alpha k_\alpha) \mathbf{t}_\alpha + (k_\alpha^2 - R'_\alpha - \Sigma_\alpha - \tau_\alpha^2) \mathbf{n}_\alpha + \left(\left(\frac{\Sigma_\alpha}{\tau_\alpha} \right)' - R_\alpha \tau_\alpha + \frac{\tau_\alpha}{k_\alpha} k'_\alpha \right) \mathbf{b}_\alpha, \mathbf{t}_\beta \right\rangle = 0.$$

Definindo a função vetorial u por

$$u := (k'_\alpha + R_\alpha k_\alpha) \mathbf{t}_\alpha + (k_\alpha^2 - R'_\alpha - \Sigma_\alpha - \tau_\alpha^2) \mathbf{n}_\alpha + \left(\left(\frac{\Sigma_\alpha}{\tau_\alpha} \right)' - R_\alpha \tau_\alpha + \frac{\tau_\alpha}{k_\alpha} k'_\alpha \right) \mathbf{b}_\alpha,$$

temos então que

$$\langle u, \mathbf{t}_\beta \rangle = 0. \quad (1.8)$$

Derivando (1.8) com respeito a t e como $k_\beta > 0$, temos $k_\beta \langle u, \mathbf{n}_\beta \rangle = 0$, logo

$$\langle u, \mathbf{n}_\beta \rangle = 0. \quad (1.9)$$

Finalmente, derivando (1.9) com respeito a t e, levando em conta (1.8) e $\tau_\beta \neq 0$, obtemos $-k_\beta \langle u, \mathbf{t}_\beta \rangle + \tau_\beta \langle u, \mathbf{b}_\beta \rangle = 0$, ou seja

$$\langle u, \mathbf{b}_\beta \rangle = 0. \quad (1.10)$$

Usando as equações (1.8), (1.9) e (1.10), concluímos que $u = 0$ e assim,

$$\begin{cases} k'_\alpha + R_\alpha k_\alpha = 0, \\ k_\alpha^2 - R'_\alpha - \Sigma_\alpha - \tau_\alpha^2 = 0, \\ \left(\frac{\Sigma_\alpha}{\tau_\alpha} \right)' - R_\alpha \tau_\alpha + \frac{\tau_\alpha}{k_\alpha} k'_\alpha = 0. \end{cases} \quad (1.11)$$

A primeira igualdade de (1.11) implica em

$$R_\alpha = -\frac{k'_\alpha}{k_\alpha}. \quad (1.12)$$

Pela definição de R_α em (1.6), conseguimos

$$-\frac{k'_\alpha}{k_\alpha} = R_\alpha = \frac{k'_\alpha}{k_\alpha} + \frac{\tau'_\alpha}{\tau_\alpha},$$

e portanto

$$2k'_\alpha \tau_\alpha + k_\alpha \tau'_\alpha = 0.$$

Segue que existe uma constante $c_1 \neq 0$ tal que $k'_\alpha \tau_\alpha = c_1$.

Por definição de Σ_α em (1.6), a segunda equação de (1.11) pode ser escrita como

$$\left(-\left(\frac{k'_\alpha}{k_\alpha} \right)' - k_\alpha^2 + \tau_\alpha^2 \right) - R'_\alpha - \tau_\alpha^2 + k_\alpha^2 = 0,$$

ou seja

$$\left(\frac{k'_\alpha}{k_\alpha} \right)' + R'_\alpha = 0,$$

que é válida por causa de (1.12). A terceira equação de (1.11), junto com a definição de R_α nos dá

$$\left(\frac{\Sigma_\alpha}{\tau_\alpha} \right)' - R_\alpha \tau_\alpha + \frac{\tau_\alpha}{k_\alpha} k'_\alpha = \left(\frac{\Sigma_\alpha}{\tau_\alpha} \right)' - \left(\frac{k'_\alpha}{k_\alpha} + \frac{\tau'_\alpha}{\tau_\alpha} \right) \tau_\alpha + \frac{\tau_\alpha}{k_\alpha} k'_\alpha = \left(\frac{\Sigma_\alpha}{\tau_\alpha} \right)' - \tau'_\alpha = 0,$$

ou seja

$$\frac{\Sigma_\alpha}{\tau_\alpha} - \tau_\alpha = c_2,$$

para alguma constante c_2 .

De uma maneira similar, podemos deduzir resultados correspondentes para a curva β usando (1.5). \square

Observação 1.2. Derivando (1.2) com respeito a s obtemos (1.3), derivando novamente com respeito a s temos (1.4), isto é,

$$\left\langle \tau_\alpha k_\alpha \mathbf{t}_\alpha - \left(\frac{k'_\alpha}{k_\alpha} \tau_\alpha + \tau'_\alpha \right) \mathbf{n}_\alpha + \left(\left(\frac{k'_\alpha}{k_\alpha} \right)' + k_\alpha^2 - \tau_\alpha^2 \right) \mathbf{b}_\alpha, \mathbf{t}_\beta \right\rangle = \tau_\alpha \langle \mathbf{b}_\alpha, k_\beta \mathbf{b}_\beta \rangle.$$

Dividindo ambos os lados por τ_α e utilizando (1.6) obtemos

$$\left\langle k_\alpha \mathbf{t}_\alpha - R_\alpha \mathbf{n}_\alpha + \frac{\Sigma_\alpha}{\tau_\alpha} \mathbf{b}_\alpha, \mathbf{t}_\beta \right\rangle = \langle \mathbf{b}_\alpha, k_\beta \mathbf{b}_\beta \rangle.$$

Derivando agora (1.3), dessa vez com respeito a t encontramos

$$\begin{aligned} \left\langle -\tau_\alpha \mathbf{n}_\alpha + \frac{k'_\alpha}{k'_\alpha} \mathbf{b}_\alpha, \mathbf{t}_\beta \right\rangle &= \left\langle -\tau_\alpha \mathbf{n}_\alpha + \frac{k'_\alpha}{k'_\alpha} \mathbf{b}_\alpha, k_\alpha \mathbf{n}_\beta \right\rangle \\ &= \langle \mathbf{n}_\alpha, k'_\beta \mathbf{b}_\beta + k_\beta \mathbf{b}'_\beta \rangle \\ &= \langle \mathbf{n}_\alpha, k'_\beta \mathbf{b}_\beta - k_\beta \tau_\beta \mathbf{n}_\beta \rangle. \end{aligned}$$

Pela equação (1.12) temos $k'_\alpha = -k_\alpha R_\alpha$ e então

$$k_\beta \langle -\tau_\alpha \mathbf{n}_\alpha - R_\alpha \mathbf{b}_\alpha, \mathbf{n}_\beta \rangle = \langle \mathbf{n}_\alpha, -k_\beta \tau_\beta \mathbf{n}_\beta - k_\beta R_\beta \mathbf{b}_\beta \rangle = k_\beta \langle \mathbf{n}_\alpha, -\tau_\beta \mathbf{n}_\beta - R_\beta \mathbf{b}_\beta \rangle,$$

ou seja

$$\langle -\tau_\alpha \mathbf{n}_\alpha - R_\alpha \mathbf{b}_\alpha, \mathbf{n}_\beta \rangle = \langle \mathbf{n}_\alpha, \tau_\beta \mathbf{n}_\beta - R_\beta \mathbf{b}_\beta \rangle.$$

Procedendo de modo análogo com as demais derivações parciais sucessivas de (1.2), são obtidas relações similares às dadas acima. Resumimos abaixo tais relações, correspondentes às derivadas com respeito a s , ss , t , tt , ts , sst , tts e $ttss$, respectivamente

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle -\tau_\alpha \mathbf{n}_\alpha - R_\alpha \mathbf{b}_\alpha, \mathbf{t}_\beta \rangle = \langle \mathbf{n}_\alpha, k_\beta \mathbf{t}_\beta \rangle, \\ \left\langle k_\alpha \mathbf{t}_\alpha - R_\alpha \mathbf{n}_\alpha + \frac{\Sigma_\alpha}{\tau_\alpha} \mathbf{b}_\alpha, \mathbf{t}_\beta \right\rangle = \langle \mathbf{b}_\alpha, k_\beta \mathbf{b}_\beta \rangle, \\ \langle k_\alpha \mathbf{t}_\alpha, \mathbf{n}_\beta \rangle = \langle \mathbf{t}_\alpha, -\tau_\beta \mathbf{n}_\beta - R_\beta \mathbf{b}_\beta \rangle, \\ \langle k_\beta \mathbf{b}_\alpha, \mathbf{b}_\beta \rangle = \left\langle \mathbf{t}_\alpha, k_\beta \mathbf{t}_\beta - R_\beta \mathbf{n}_\beta + \frac{\Sigma_\beta}{\tau_\beta} \mathbf{b}_\beta \right\rangle, \\ \langle -\tau_\alpha \mathbf{n}_\alpha - R_\alpha \mathbf{b}_\alpha, \mathbf{n}_\beta \rangle = \langle \mathbf{n}_\alpha, -\tau_\beta \mathbf{n}_\beta - R_\beta \mathbf{b}_\beta \rangle, \\ \left\langle k_\alpha \mathbf{t}_\alpha - R_\alpha \mathbf{n}_\alpha + \frac{\Sigma_\alpha}{\tau_\alpha} \mathbf{b}_\alpha, \mathbf{n}_\beta \right\rangle = \langle \mathbf{b}_\alpha, -\tau_\beta \mathbf{n}_\beta - R_\beta \mathbf{b}_\beta \rangle, \\ \langle -\tau_\alpha \mathbf{n}_\alpha - R_\alpha \mathbf{b}_\alpha, \mathbf{b}_\beta \rangle = \left\langle \mathbf{n}_\alpha, k_\beta \mathbf{t}_\beta - R_\beta \mathbf{n}_\beta + \frac{\Sigma_\beta}{\tau_\beta} \mathbf{b}_\beta \right\rangle, \\ \left\langle k_\alpha \mathbf{t}_\alpha - R_\alpha \mathbf{n}_\alpha + \frac{\Sigma_\alpha}{\tau_\alpha} \mathbf{b}_\alpha, \mathbf{b}_\beta \right\rangle = \left\langle \mathbf{b}_\alpha, k_\beta \mathbf{t}_\beta - R_\beta \mathbf{n}_\beta + \frac{\Sigma_\beta}{\tau_\beta} \mathbf{b}_\beta \right\rangle. \end{array} \right. \quad (1.13)$$

Outro resultado útil é o seguinte

Proposição 1.3. Seja α uma curva em \mathbb{R}^3 parametrizada pelo comprimento de arco com curvatura $k_\alpha > 0$ e torção $\tau_\alpha \neq 0$. Se $\sigma_1 \neq 0$ e σ_2 são duas constantes tais que

$$k_\alpha^2 \tau_\alpha = \sigma_1 \neq 0 \text{ e } \frac{\Sigma_\alpha}{\tau_\alpha} - \tau_\alpha = \sigma_2, \quad (1.14)$$

então k_α é uma solução positiva da EDO autônoma

$$(y')^2 + y^4 + \sigma_3 y^2 + \frac{\sigma_1^2}{y^2} + \sigma_1 \sigma_2 = 0, \quad (1.15)$$

para alguma constante σ_3 .

Reciprocamente, sejam $c_1 \neq 0$ e c_2 duas constantes. Então para qualquer solução positiva não constante $k(s)$ de (1.15) e escolhendo $\tau(s) = \sigma_1/k(s)^2$, a curva α parametrizada pelo comprimento de arco s com curvatura k_α e torção τ_α , satisfaz

$$\frac{\Sigma_\alpha}{\tau_\alpha} - \tau_\alpha = \sigma_2, \quad \Sigma_\alpha + R_\alpha^2 + k_\alpha^2 = -\sigma_3, \quad (1.16)$$

para alguma constante σ_3 .

Demonstração. A segunda igualdade de (1.14), nos dá

$$\sigma_2 \tau_\alpha = \Sigma_\alpha - \tau_\alpha^2 = \left(\frac{k'_\alpha}{k_\alpha} \right)' + k_\alpha^2 - 2\tau_\alpha^2.$$

Levando em consideração a primeira igualdade temos $\tau_\alpha = \frac{\sigma_1}{k_\alpha^2}$ e então

$$\left(\frac{k'_\alpha}{k_\alpha} \right)' + k_\alpha^2 - 2\frac{\sigma_1^2}{k_\alpha^4} - \frac{\sigma_1 \sigma_2}{k_\alpha^2} = 0.$$

Fazendo agora $w = \ln(k)$, temos $k = e^w$ e $w' = k'/k$. Reescrevemos a equação acima como

$$w'' + e^{2w} - 2\sigma_1^2 e^{-4w} - \sigma_1 \sigma_2 e^{-2w} = 0.$$

Para resolver essa EDO, façamos $z = w'$ e considere $z = z(w)$. Neste caso, teremos

$$w'' = \frac{dz}{dw} w' = \frac{dz}{dw} z = \frac{1}{2} \frac{d(z^2)}{dw},$$

então

$$\frac{1}{2} \frac{d(z^2)}{dw} + e^{2w} - 2\sigma_1^2 e^{-4w} - \sigma_1 \sigma_2 e^{-2w} = 0.$$

Alternativamente

$$d(z^2) = [-2e^{2w} + 4\sigma_1^2 e^{-4w} + 2\sigma_1 \sigma_2 e^{-2w}] dw.$$

Integrando, obtemos

$$z^2 = \int d(z^2) = \int [-2e^{2w} + 4\sigma_1^2 e^{-4w} + 2\sigma_1 \sigma_2 e^{-2w}] = -e^{2w} - \sigma_1^2 e^{-4w} - \sigma_1 \sigma_2 e^{-2w} - \sigma_3,$$

ou seja

$$(w')^2 = -e^{2w} - \sigma_1^2 e^{-4w} - \sigma_1 \sigma_2 e^{-2w} - \sigma_3,$$

para alguma constante σ_3 . Como $w = \ln(k)$ obtemos

$$\left(\frac{k'_\alpha}{k_\alpha}\right)^2 + k_\alpha^2 + \frac{\sigma_1^2}{k_\alpha^4} + \frac{\sigma_1 \sigma_2}{k_\alpha^2} + \sigma_3 = 0,$$

ou equivalentemente

$$(k'_\alpha)^2 + k_\alpha^4 + \sigma_3 k^2 - 2\frac{\sigma_1^2}{k_\alpha^2} - \sigma_1 \sigma_2 = 0,$$

o que prova (1.15).

Para provar a recíproca desta proposição, seja $k(s)$ uma solução positiva e não constante de (1.15) e escreva $\tau(s) = \sigma_1/k^2(s)$. Considere α uma curva parametrizada pelo comprimento de arco com curvatura k e torção τ . De (1.15) temos

$$\left(\frac{k'_\alpha}{k_\alpha}\right)^2 + k_\alpha^2 + \frac{\sigma_1^2}{k_\alpha^4} + \frac{\sigma_1 \sigma_2}{k_\alpha^2} + \sigma_3 = 0. \quad (1.17)$$

Derivando com respeito a s obtemos

$$2\left(\frac{k'_\alpha}{k_\alpha}\right)\left(\frac{k'_\alpha}{k_\alpha}\right)' + 2k_\alpha k'_\alpha - 4\sigma_1^2 k_\alpha^{-5} k'_\alpha - 2\sigma_1 \sigma_2 k_\alpha^{-3} k'_\alpha = 0.$$

Como $k'_\alpha \neq 0$, simplificando temos

$$\left(\frac{k'_\alpha}{k_\alpha}\right)' + k_\alpha^2 - 2\frac{\sigma_1^2}{k_\alpha^4} - \frac{\sigma_1 \sigma_2}{k_\alpha^2} = 0.$$

A partir da equação acima e de $\tau(s) = \sigma_1/k^2(s)$, concluímos que

$$\left(\frac{k'_\alpha}{k_\alpha}\right)' + k_\alpha^2 - 2\tau_\alpha^2 - \sigma_2 \tau_\alpha = 0.$$

Assim, segue da definição de Σ_α em (1.6) que

$$\Sigma_\alpha = \tau_\alpha^2 + \sigma_2 \tau_\alpha = \tau_\alpha(\tau_\alpha + \sigma_2),$$

de forma que

$$\frac{\Sigma_\alpha}{\tau_\alpha} - \tau_\alpha = \sigma_2.$$

Além disso, segue da equação acima que

$$\Sigma_\alpha = \tau_\alpha^2 + \sigma_2 \tau_\alpha = \sigma_1 \sigma_2 k_\alpha^{-2} + \sigma_1^2 k_\alpha^{-4} = -\left(\frac{k'_\alpha}{k_\alpha}\right)^2 - k_\alpha^2 - \sigma_3,$$

teremos portanto

$$\Sigma_\alpha + \left(\frac{k'_\alpha}{k_\alpha}\right)^2 + k_\alpha^2 = -\sigma_3.$$

Observando agora que

$$\tau'_\alpha = -\frac{2\sigma_1 k'_\alpha}{k_\alpha^3} = -\frac{2k_\alpha^2 \tau_\alpha k'_\alpha}{k_\alpha^3},$$

e então

$$\frac{\tau'_\alpha}{\tau_\alpha} = -\frac{2k'_\alpha}{k_\alpha}.$$

A partir da definição de R_α em (1.6), obtemos

$$R^2 = \left(\frac{k'_\alpha}{k_\alpha} + \frac{\tau'_\alpha}{\tau_\alpha}\right)^2 = \left(-\frac{k'_\alpha}{k_\alpha}\right)^2 = \left(\frac{k'_\alpha}{k_\alpha}\right)^2.$$

E então concluímos que

$$\Sigma_\alpha + R_\alpha^2 + k_\alpha^2 = -\sigma_3.$$

□

Observação 1.3. Com a notação da Proposição 1.2, as curvas geradoras α, β de uma superfície mínima de translação $\Psi(s, t) = \alpha(s) + \beta(t)$ satisfazem as condições da Proposição 1.3 com $\sigma_1 = c_1, \sigma_2 = c_2$ e $\bar{\sigma}_1 = \bar{c}_1, \bar{\sigma}_2 = \bar{c}_2$, respectivamente. Então encontramos

$$R_\alpha^2 + k_\alpha^2 + \tau_\alpha^2 + c_2 \tau_\alpha + c_3 = 0 \text{ e } R_\beta^2 + k_\beta^2 + \tau_\beta^2 + \bar{c}_2 \tau_\beta + \bar{c}_3 = 0,$$

para algumas constantes c_3 e \bar{c}_3 .

Motivados pela equação (1.2) e pelo conjunto de equações em (1.13), definimos as funções $V_i = V_i(s)$, $W_i = W_i(t)$, $1 \leq i \leq 3$ por

$$\begin{cases} V_1 = k_\alpha \mathbf{b}_\alpha \\ V_2 = -\tau_\alpha \mathbf{n}_\alpha - R_\alpha \mathbf{b}_\alpha \\ V_3 = k_\alpha \mathbf{t}_\alpha - R_\alpha \mathbf{n}_\alpha + \frac{\Sigma_\alpha}{\tau_\alpha} \mathbf{b}_\alpha \end{cases}, \begin{cases} W_1 = k_\beta \mathbf{b}_\beta \\ W_2 = -\tau_\beta \mathbf{n}_\beta - R_\beta \mathbf{b}_\beta \\ W_3 = k_\beta \mathbf{t}_\beta - R_\beta \mathbf{n}_\beta + \frac{\Sigma_\beta}{\tau_\beta} \mathbf{b}_\beta. \end{cases} \quad (1.18)$$

Agora podemos calcular

$$V_1' = k_\alpha' \mathbf{b}_\alpha + k_\alpha \mathbf{b}_\alpha' = k_\alpha \left(\frac{k_\alpha'}{k_\alpha} \mathbf{b}_\alpha - \tau_\alpha \mathbf{n}_\alpha \right) = k_\alpha V_2.$$

Utilizando o fato de que $\tau' = \tau[R - (k'/k)]$ e $\Sigma - k^2 = \left(\frac{k'}{k}\right)' - \tau^2$ temos

$$\begin{aligned} V_2' &= -\tau_\alpha' \mathbf{n}_\alpha - \tau_\alpha \mathbf{n}_\alpha' - R_\alpha' \mathbf{b}_\alpha - R_\alpha \mathbf{b}_\alpha' \\ &= -\tau_\alpha' \mathbf{n}_\alpha - \tau_\alpha k_\alpha \mathbf{t}_\alpha - \tau_\alpha^2 \mathbf{b}_\alpha + \left(\frac{k_\alpha'}{k_\alpha}\right)' \mathbf{b}_\alpha + R_\alpha \tau_\alpha \mathbf{b}_\alpha \\ &= -\tau_\alpha R_\alpha \mathbf{n}_\alpha - \tau_\alpha \frac{k_\alpha'}{k_\alpha} \mathbf{n}_\alpha - \tau_\alpha k_\alpha \mathbf{t}_\alpha - \tau_\alpha^2 \mathbf{b}_\alpha + \left(\frac{k_\alpha'}{k_\alpha}\right)' \mathbf{b}_\alpha + R_\alpha \tau_\alpha \mathbf{b}_\alpha \\ &= \tau_\alpha \left(R_\alpha - k_\alpha \mathbf{t}_\alpha - \frac{\Sigma_\alpha}{\tau_\alpha} \mathbf{b}_\alpha - \frac{k_\alpha^2}{\tau_\alpha} \mathbf{b}_\alpha \right) \\ &= \tau_\alpha \left(R_\alpha - k_\alpha \mathbf{t}_\alpha - \frac{\Sigma_\alpha}{\tau_\alpha} \mathbf{b}_\alpha \right) - k_\alpha^2 \mathbf{b}_\alpha \\ &= \tau_\alpha V_3 - k_\alpha V_1. \end{aligned}$$

Lembrando agora que $k^2 + \left(\frac{k'}{k}\right)' - \Sigma = \tau^2$ e que $(\Sigma/\tau + \tau)' = 0$, ou seja $(\Sigma/\tau)' = \tau'$, teremos

$$\begin{aligned} V_3' &= k_\alpha' \mathbf{t}_\alpha + k_\alpha \mathbf{t}_\alpha' - R_\alpha' \mathbf{n}_\alpha - R_\alpha \mathbf{n}_\alpha' + \left(\frac{\Sigma_\alpha}{\tau_\alpha}\right)' \mathbf{b}_\alpha + \frac{\Sigma_\alpha}{\tau_\alpha} \mathbf{b}_\alpha' \\ &= k_\alpha' \mathbf{t}_\alpha + k_\alpha^2 \mathbf{n}_\alpha + \left(\frac{k_\alpha'}{k_\alpha}\right)' \mathbf{n}_\alpha - k_\alpha' \mathbf{t}_\alpha - R_\alpha \tau_\alpha \mathbf{b}_\alpha + \left(\frac{\Sigma_\alpha}{\tau_\alpha}\right)' \mathbf{b}_\alpha - \Sigma_\alpha \mathbf{n}_\alpha \\ &= \mathbf{n}_\alpha \left(k_\alpha^2 + \left(\frac{k_\alpha'}{k_\alpha}\right)' - \Sigma_\alpha \right) + \mathbf{b}_\alpha \left[-R_\alpha \tau_\alpha + \left(R_\alpha \tau_\alpha - \tau_\alpha \frac{k_\alpha'}{k_\alpha} \right) \right] \\ &= -\tau_\alpha (-\tau_\alpha \mathbf{n}_\alpha - \mathbf{b}_\alpha R_\alpha) \\ &= -\tau_\alpha V_2. \end{aligned}$$

Portanto, podemos ver que, procedendo de maneira análoga para os casos de W_i , as equações do tipo Frenet a seguir serão satisfeitas

$$\begin{cases} V_1' = k_\alpha V_2, \\ V_2' = -k_\alpha V_1 + \tau_\alpha V_3, \\ V_3' = -\tau_\alpha V_2, \end{cases} \quad \begin{cases} W_1' = k_\beta W_2, \\ W_2' = -k_\beta W_1 + \tau_\beta W_3, \\ W_3' = -\tau_\beta W_2. \end{cases}$$

Além disso, por (1.18), podemos calcular os produtos mistos

$$\begin{aligned} (V_1, V_2, V_3) &= \langle k_\alpha \mathbf{b}_\alpha \times (-\tau_\alpha \mathbf{n}_\alpha - R_\alpha \mathbf{b}_\alpha), k_\alpha \mathbf{t}_\alpha - R_\alpha \mathbf{n}_\alpha + \frac{\Sigma_\alpha}{\tau_\alpha} \mathbf{b}_\alpha \rangle \\ &= \langle \tau_\alpha k_\alpha \mathbf{t}_\alpha, k_\alpha \mathbf{t}_\alpha - R_\alpha \mathbf{n}_\alpha + \frac{\Sigma_\alpha}{\tau_\alpha} \mathbf{b}_\alpha \rangle \\ &= k_\alpha^2 \tau_\alpha \\ &= c_1. \end{aligned}$$

Analogamente

$$(W_1, W_2, W_3) = k_\beta^2 \tau_\beta = \bar{c}_1.$$

Com a notação acima, a identidade (1.2) e as oito relações de (1.13) podem ser escritas, respectivamente, como

$$\begin{cases} \langle V_1, \mathbf{t}_\beta \rangle = \langle \mathbf{t}_\alpha, W_1 \rangle, \\ \langle V_2, \mathbf{t}_\beta \rangle = \langle \mathbf{n}_\alpha, W_1 \rangle, \\ \langle V_3, \mathbf{t}_\beta \rangle = \langle \mathbf{b}_\alpha, W_1 \rangle, \\ \langle V_1, \mathbf{n}_\beta \rangle = \langle \mathbf{t}_\alpha, W_2 \rangle, \\ \langle V_1, \mathbf{b}_\beta \rangle = \langle \mathbf{t}_\alpha, W_3 \rangle, \\ \langle V_2, \mathbf{n}_\beta \rangle = \langle \mathbf{n}_\alpha, W_2 \rangle, \\ \langle V_3, \mathbf{n}_\beta \rangle = \langle \mathbf{b}_\alpha, W_2 \rangle, \\ \langle V_2, \mathbf{b}_\beta \rangle = \langle \mathbf{n}_\alpha, W_3 \rangle, \\ \langle V_3, \mathbf{b}_\beta \rangle = \langle \mathbf{b}_\alpha, W_3 \rangle. \end{cases} \quad (1.19)$$

Capítulo 2

Superfícies mínimas de translação: caracterização e descrição

Neste capítulo, iremos apresentar uma caracterização e uma descrição das superfícies mínimas de translação no espaço Euclidiano, baseado nos resultados obtidos no artigo [18]. No caso em que α e β são curvas não planas, apresentaremos uma prova de que a curvatura k e a torção τ de ambas as curvas satisfazem a equação $k^2\tau = C$ onde C é contante. Mostraremos também que, a menos de um movimento rígido e uma dilatação no espaço Euclidiano, e a menos de uma reparametrização das curvas geradoras destas superfícies, as superfícies mínimas de translação são descritas por dois parâmetros reais $a, b \in \mathbb{R}$ onde a superfície é então da forma $\phi(s, t) = \beta_{a,b}(s) + \beta_{a,b}(t)$.

2.1 Uma caracterização em termos da curvatura e torção

Lembremos da equação (1.1) que caracteriza as superfícies mínimas de translação

$$\langle \alpha''(s) \times \alpha'(s), \beta'(t) \rangle + \langle \beta'(t) \times \beta''(t), \alpha'(s) \rangle = 0.$$

Munidos deste resultado, e motivados por ele, escrevemos $\mathbb{R}^6 = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ e consideramos os subespaços vetoriais de \mathbb{R}^6 definidos por

$$H_1 = \text{span}\{(\alpha'(s) \times \alpha''(s), \alpha'(s)) : s \in I\},$$

$$H_2 = \text{span}\{(\beta'(t), \beta'(t) \times \beta''(t)) : t \in J\}.$$

Através desta definição podemos apresentar o seguinte lema

Lema 2.1. Os subspaços H_1 e H_2 são perpendiculares e $\dim(H_1) = \dim(H_2) = 3$.

Demonstração. A ideia da prova para a primeira parte é observar que, se escrevemos $v = (v_1, v_2)$, $w = (w_1, w_2)$ em que v_i, w_j , $1 \leq i, j \leq 2$ são vetores de \mathbb{R}^3 , então o produto interno $\langle v, w \rangle$ de \mathbb{R}^6 é dado por

$$\langle v, w \rangle = \langle v_1, w_1 \rangle_{\mathbb{R}^3} + \langle v_2, w_2 \rangle_{\mathbb{R}^3}.$$

No que segue, para não carregar a notação, usaremos $\langle \cdot, \cdot \rangle$ para o produto interno de \mathbb{R}^n , sem indicar o espaço correspondente, sempre que ficar entendido em qual espaço estamos trabalhando. Desta forma, a propriedade de ortogonalidade pode ser obtida de

$$\begin{aligned} \langle (\alpha'(s) \times \alpha''(s), \alpha'(s)), (\beta'(t), \beta'(t) \times \beta''(t)) \rangle &= \\ \langle \alpha'(s) \times \alpha''(s), \beta'(t) \rangle + \langle \beta'(t) \times \beta''(t), \alpha'(s) \rangle &= 0. \end{aligned}$$

Para a segunda parte, assuma inicialmente que $\dim(H_1) \leq 2$. Se a dimensão for igual a 2, então existem $\{(v_1, v_2), (w_1, w_2)\} \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ dois vetores linearmente independentes em \mathbb{R}^6 que geram H_1 . Então $\forall s \in I$, existem $\lambda(s), \mu(s) \in \mathbb{R}$ tais que $(\alpha''(s) \times \alpha'(s), \alpha'(s)) = \lambda(s)(v_1, v_2) + \mu(s)(w_1, w_2)$. Em particular $\alpha'(s) = \lambda(s)v_2 + \mu(s)w_2$, o que prova que α é uma curva plana, uma contradição. Podemos fazer algo similar para $\dim(H_1) = 1$ e análogo para H_2 . Portanto $\dim(H_1), \dim(H_2) \geq 3$. Como $H_1 \perp H_2$, então $H_1 \cap H_2 = 0$, pelo Lema 1.1, isto implica em H_1 e H_2 serem espaços de dimensão 3. \square

Apresentaremos agora o seguinte lema, que é um resultado chave para este trabalho.

Lema 2.2. Seja A uma matriz real 3×3 . Se existe uma curva $X(t)$ na esfera unitária \mathbb{S}^2 tal que:

1. $|AX| > 0$ e $|X'(t)| \neq 0$.
2. O conjunto $B = \{X, Y, Z\}$ com $Z = AX/|AX|$ e $Y = Z \times X$ é uma base ortonormal.
3. A matriz da transformação $W \rightarrow AW$ com respeito a base B é a matriz da forma

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & c \\ a & d & e \end{pmatrix}, \quad a > 0.$$

Então A é uma matriz simétrica.

Demonstração. Fixe um t_0 e seja $B_0 = \{X(t_0), Y(t_0), Z(t_0)\}$. Pela hipótese 3 sabemos que a matriz da transformação $W \rightarrow AW$ com respeito a base B_0 é a matriz

$$\tilde{A}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_0 \\ 0 & b_0 & c_0 \\ a_0 & d_0 & e_0 \end{pmatrix},$$

para alguns a_0, b_0, c_0, d_0, e_0 , com $a_0 > 0$. Se Q_0 é a matriz a qual a primeira, segunda e terceira colunas são os vetores $X(t_0), Y(t_0)$ e $Z(t_0)$ respectivamente, temos

$$A = Q_0 \tilde{A}_0 Q_0^T, \quad (2.1)$$

pois Q_0 é uma matriz de mudança de base ortogonal. Analogamente, se denotarmos $Q(t)$ a matriz a qual a primeira, segunda e terceira colunas são os vetores $X(t), Y(t)$ e $Z(t)$ respectivamente, então $A = Q \tilde{A} Q^T$. Além disso, se $P = Q_0^T Q(t)$ então

$$\begin{cases} P^T &= (Q_0^T Q(t))^T = Q(t)^T Q_0, \\ PQ(t)^T &= Q_0^T, \\ Q(t)P^T &= Q_0, \end{cases}$$

logo

$$\tilde{A}_0 = Q_0^T A Q_0 = PQ(t)^T A Q(t) P^T = P \tilde{A} P^T.$$

Defina agora \tilde{X}, \tilde{Y} e \tilde{Z} como a primeira segunda e terceira colunas da matriz P , ou seja $P = (\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z})$, então temos

$$\tilde{A}_0 \tilde{X} = P \tilde{A} P^T \tilde{X} = P \tilde{A} (\langle \tilde{X}, \tilde{X} \rangle, \langle \tilde{Y}, \tilde{X} \rangle, \langle \tilde{Z}, \tilde{X} \rangle) = P \tilde{A} (1, 0, 0) = P(0, 0, a) = a \tilde{Z}.$$

Analogamente,

$$\begin{cases} \tilde{A}_0 \tilde{Y} = P \tilde{A} P^T \tilde{Y} = P \tilde{A} (0, \langle \tilde{Y}, \tilde{Y} \rangle, 0) = P(0, b, d) = a \tilde{Y} + d \tilde{Z}. \\ \tilde{A}_0 \tilde{Z} = P \tilde{A} P^T \tilde{Z} = P \tilde{A} (0, 0, \langle \tilde{Z}, \tilde{Z} \rangle) = P(a, c, e) = a \tilde{X} + c \tilde{Y} + e \tilde{Z}. \end{cases}$$

Como observação, notemos que Q é ortogonal, então $Q^{-1} = Q^T$ e portanto

$$P(t_0) = Q_0^T Q(t_0) = Q_0^T Q_0 = Id.$$

Por (2.1), mostraremos que a matriz A é simétrica mostrando que a matriz \tilde{A}_0 o é, e isso é possível pois, se $A = Q_0 \tilde{A}_0 Q_0^T$, então

$$A^T = (Q_0 \tilde{A}_0 Q_0^T)^T = Q_0^T \tilde{A}_0^T Q_0^T = Q_0 \tilde{A}_0^T Q_0^T.$$

Se \tilde{A}_0 é simétrica, então $\tilde{A}_0 = \tilde{A}_0^T$ e assim teremos

$$A^T = Q_0 \tilde{A}_0^T Q_0^T = Q_0 \tilde{A}_0 Q_0^T = A.$$

Provaremos então que \tilde{A}_0 é simétrica, utilizando o teorema da função inversa aplicado a uma aplicação que descreveremos a seguir. Para todo $q = (x, y, z, u, v, w, r, s)$ próximo a $q_0 = (1, 0, 0, a_0, b_0, c_0, d_0, e_0)$, definimos as funções:

$$p_1(q) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad p_3(q) = \frac{1}{\sqrt{\langle \tilde{A}_0 p_1, \tilde{A}_0 p_1 \rangle}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad p_2 = p_3 \times p_1$$

$$f_0(q) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = \langle p_1, p_1 \rangle - 1,$$

$$f_1(q) = \langle \tilde{A}_0 p_1, p_1 \rangle,$$

$$(f_2, f_3, f_4)^T = \tilde{A}_0 p_2 - v p_2 - r p_3,$$

$$(f_5, f_6, f_7)^T = \tilde{A}_0 p_3 - v p_1 - w p_2 - s p_3,$$

$$(f_8, f_9, f_{10})^T = \tilde{A}_0 p_1 - u p_3.$$

Note que $p_1(q_0) = e_1$, $\tilde{A}_0 e_1 = a_0 e_3$ e assim $p_3(q_0) = e_3$. Portanto $p_2(q_0) = e_1 \times e_3 = e_2$. Segue das equações acima que

$$f_0(q_0) = f_1(q_0) = 0,$$

$$(f_2, f_3, f_4)^T = (b_0 e_2 + d_0 e_3) - b_0 e_2 - d_0 e_3 = 0,$$

$$(f_5, f_6, f_7)^T = (a_0 e_1 + c_0 e_3 + e_0 e_2) - a_0 e_1 - c_0 e_3 - e_0 e_2 = 0,$$

$$(f_8, f_9, f_{10})^T = (a_0 e_3) - a_0 e_3 = 0.$$

Observe agora que, para pontos da forma $\tilde{q} = (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}, \tilde{r}, \tilde{s})$ com $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})^T = \tilde{X}$ e $(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}, \tilde{r}, \tilde{s}) = (a, b, c, d, e)$, temos também $f_i(\tilde{q}) = 0$, $0 \leq i \leq 10$. De fato, para tais pontos, se

$$\begin{cases} p_1(\tilde{q}) = \tilde{X}, \\ \tilde{A}_0 \tilde{X} = a \tilde{Z}, \end{cases}$$

então

$$\begin{cases} p_3(\tilde{q}) = \tilde{Z}, \\ p_2(\tilde{q}) = \tilde{X} \times \tilde{Z} = \tilde{Y}, \end{cases}$$

e assim

$$\begin{aligned} f_0(q_0) = f_1(q_0) = 0, \\ (f_2, f_3, f_4)^T = \tilde{A}_0\tilde{Y} - a\tilde{Y} - d\tilde{Z} = (a\tilde{Y} + d\tilde{Z}) - a\tilde{Y} - d\tilde{Z} = 0. \end{aligned}$$

Analogamente

$$\begin{aligned} (f_5, f_6, f_7)^T &= \tilde{A}_0\tilde{Z} - a\tilde{X} - c\tilde{Y} - e\tilde{Z} = 0, \\ (f_8, f_9, f_{10})^T &= \tilde{A}_0\tilde{X} - a\tilde{Z} = 0. \end{aligned}$$

Defina agora $F(q) = (f_0, f_1, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_{10})$. Denote $q = (x, y, z, u, v, w, r, s)$ por $q = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8)$. Observe que $F(q_0) = F(\tilde{q}) = 0$. Denote a matriz Jacobiana de F por

$$dF = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_0}{\partial x_1} & \frac{\partial f_0}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_0}{\partial x_8} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_8} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_3}{\partial x_8} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_{10}}{\partial x_1} & \frac{\partial f_{10}}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_{10}}{\partial x_8} \end{pmatrix}.$$

Analisaremos a matriz Jacobiana de F , aplicada no ponto q_0 e mostraremos que $\det(dF(q_0)) = 4a_0(d_0 - c_0)$. Uma vez que $a_0 > 0$, se $c_0 \neq d_0$, teríamos $\det(dF(q_0)) \neq 0$. Sendo assim, pelo Teorema da Função Inversa, existiria V vizinhança aberta de q_0 e $F(V)$ vizinhança aberta de $F(q_0) = 0$ tal que F é um homeomorfismo de V em $F(V)$, de onde F seria injetiva em V , ou seja, $F(q) \neq 0, \forall q \neq q_0, q \in V$.

Por outro lado, sabemos que todo ponto \tilde{q} como definido anteriormente satisfaz $F(\tilde{q}) = (0, \dots, 0)$. Observando que $\tilde{q}(t) = (\tilde{X}(t), a, b, c, d, e)$, em que $\tilde{X}(t)$ é a primeira coluna da matriz P e que $P(t_0) = Id$, então $\tilde{X}(t_0) = (1, 0, 0)$ e portanto $\tilde{q}(t)$ é uma curva que passa pelo ponto q_0 , e por fim, como uma curva é contínua, então para toda vizinhança aberta $W \subset V$ de q_0 , $\exists t_1$ tal que $\tilde{q}(t_1) \in W$, um absurdo. Logo segue que $d_0 = c_0$, e portanto \tilde{A}_0 é simétrica.

Vamos então mostrar que $\det(dF(q_0)) = 4a_0(d_0 - c_0)$. Para mostrar isso, consideraremos cada uma das derivadas parciais:

1. Caso f_0

$$\frac{\partial f_0}{\partial x_i} = \begin{cases} 2\langle \frac{\partial p_1}{\partial x_i}, p_1 \rangle = 2\langle e_i, p_1 \rangle, & i = 1, 2, 3, \\ 0, & i > 3. \end{cases}$$

De forma que $\frac{\partial f_0}{\partial x_i}(q_0) = 2\delta_{1i}$.

2. Caso f_1

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(q_0) = \left\langle \frac{\partial \tilde{A}_0 p_1}{\partial x_i}, p_1 \right\rangle(q_0) + \left\langle \tilde{A}_0 p_1, \frac{\partial p_1}{\partial x_i} \right\rangle(q_0) = \langle \tilde{A}_0 e_i, p_1 \rangle + \langle \tilde{A}_0 p_1, e_i \rangle.$$

Agora

$$\begin{aligned} \tilde{A}_0 e_1 &= (0, 0, a_0), \\ \tilde{A}_0 e_2 &= (0, b_0, d_0), \\ \tilde{A}_0 e_3 &= (a_0, c_0, d_0), \end{aligned}$$

e então

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(q_0) = 0, \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(q_0) = 0, \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_3}(q_0) = 2\langle a_0 e_3, e_3 \rangle = 2a_0.$$

De forma análoga ao caso f_0 teremos $\frac{\partial f_1}{\partial x_i} = 0$ para todo $i > 3$.

Para os próximos casos, calcularemos explicitamente apenas as derivadas parciais em relação a x_i para $i > 3$. A razão ficará clara ao calcular o determinante.

3. Caso f_3

$$\begin{aligned} f_3 = \langle (f_2, f_3, f_4)^T, e_2 \rangle &= \langle \tilde{A}_0 p_2, e_2 \rangle - \langle v p_2, e_2 \rangle - \langle r p_3, e_2 \rangle \\ &= \langle \tilde{A}_0 p_2, e_2 \rangle - x_5 \langle p_2, e_2 \rangle - x_7 \langle p_3, e_2 \rangle, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_i}(q_0) = \begin{cases} 0, & i = 4, 6, 8 \\ -\langle p_2(q_0), e_2 \rangle = -1, & i = 5 \\ -\langle p_3(q_0), e_2 \rangle = 0. & i = 7 \end{cases}.$$

4. O caso para f_4 é análogo ao anterior trocando e_2 por e_3 , assim teremos

$$\frac{\partial f_4}{\partial x_i}(q_0) = \begin{cases} 0, & i = 4, 6, 8 \\ -\langle p_2(q_0), e_3 \rangle = 0, & i = 5 \\ -\langle p_3(q_0), e_3 \rangle = -1. & i = 7 \end{cases}$$

5. Para os casos de f_5, f_6, f_7 , de maneira semelhante, basta observar que:

$$f_{4+j} = \langle (f_5, f_6, f_7)^T, e_j \rangle = \langle \tilde{A}_0 p_2, e_j \rangle - x_4 \langle p_1, e_j \rangle - x_6 \langle p_2, e_j \rangle - x_8 \langle p_3, e_j \rangle, \quad j = 1, 2, 3.$$

Portanto

$$\frac{\partial f_{4+j}}{\partial x_4}(q_0) = -\langle e_1, e_j \rangle, \quad \frac{\partial f_{4+j}}{\partial x_5}(q_0) = 0, \quad \frac{\partial f_{4+j}}{\partial x_6}(q_0) = -\langle e_2, e_j \rangle,$$

$$\frac{\partial f_{4+j}}{\partial x_7}(q_0) = 0, \quad \frac{\partial f_{4+j}}{\partial x_8}(q_0) = -\langle e_3, e_j \rangle.$$

Assim teremos

$$\frac{\partial f_5}{\partial x_4}(q_0) = -1, \quad \frac{\partial f_6}{\partial x_6}(q_0) = -1, \quad \frac{\partial f_7}{\partial x_8}(q_0) = -1.$$

Para os casos restantes, segue que

$$\frac{\partial f_{4+j}}{\partial x_i}(q_0) = 0, \quad i \neq 1, 2, 3.$$

6. Caso f_{10}

$$f_{4+i} = \langle (f_8, f_9, f_{10})^T, e_3 \rangle = \langle \tilde{A}_0 p_1, e_3 \rangle - x_4 \langle p_3, e_3 \rangle,$$

e então

$$\frac{\partial f_{10}}{\partial x_i}(q_0) = 0, \quad i \geq 5$$

$$\frac{\partial f_{10}}{\partial x_4}(q_0) = -\langle p_3(q_0), e_3 \rangle = -1$$

Concluimos dos casos acima que:

$$\det(dF(q_0)) = \det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial f_4}{\partial x_1} & \frac{\partial f_4}{\partial x_2} & \frac{\partial f_4}{\partial x_3} & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ \frac{\partial f_5}{\partial x_1} & \frac{\partial f_5}{\partial x_2} & \frac{\partial f_5}{\partial x_3} & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial f_6}{\partial x_1} & \frac{\partial f_6}{\partial x_2} & \frac{\partial f_6}{\partial x_3} & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ \frac{\partial f_7}{\partial x_1} & \frac{\partial f_7}{\partial x_2} & \frac{\partial f_7}{\partial x_3} & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ \frac{\partial f_{10}}{\partial x_1} & \frac{\partial f_{10}}{\partial x_2} & \frac{\partial f_{10}}{\partial x_3} & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= 2(-2a_0) \det \begin{pmatrix} \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial f_4}{\partial x_2} & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ \frac{\partial f_5}{\partial x_2} & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial f_6}{\partial x_2} & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ \frac{\partial f_7}{\partial x_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ \frac{\partial f_{10}}{\partial x_2} & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -4a_0 \det(D).$$

Uma observação é que as linhas 3 e 6 de D são iguais a menos do primeiro elemento, a saber, $\frac{\partial f_5}{\partial x_2}$ e $\frac{\partial f_{10}}{\partial x_2}$, respectivamente, de onde podemos concluir o seguinte:

$$\det(D) = \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2}\right) 0 - \left(\frac{\partial f_4}{\partial x_2}\right) 0 + \left(\frac{\partial f_5}{\partial x_2}\right) \det(A) - \left(\frac{\partial f_6}{\partial x_2}\right) 0 + \left(\frac{\partial f_7}{\partial x_2}\right) 0 - \left(\frac{\partial f_{10}}{\partial x_2}\right) \det(B)$$

Em que

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1,$$

$$\det(B) = \det \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 1.$$

Logo

$$\det(dF(q_0)) = -4a_0 \left(\frac{\partial f_5}{\partial x_2} - \frac{\partial f_{10}}{\partial x_2} \right) = 4a_0 \left(\frac{\partial f_{10}}{\partial x_2} - \frac{\partial f_5}{\partial x_2} \right).$$

Agora

$$\frac{\partial f_5}{\partial x_2}(q_0) = \left\langle \tilde{A}_0 \frac{\partial p_3}{\partial x_2}(q_0), e_1 \right\rangle - a_0 \left\langle \frac{\partial p_1}{\partial x_2}(q_0), e_1 \right\rangle - c_0 \left\langle \frac{\partial p_2}{\partial x_2}(q_0), e_1 \right\rangle - e_0 \left\langle \frac{\partial p_3}{\partial x_2}(q_0), e_1 \right\rangle,$$

e como $p_3 = \tilde{A}_0 p_1 / |\tilde{A}_0 p_1|$, temos

$$\frac{\partial p_3}{\partial x_2} = \frac{1}{|\tilde{A}_0 p_1|} \left(\tilde{A}_0 \frac{\partial p_1}{\partial x_2} - \frac{\langle \tilde{A}_0 \frac{\partial p_1}{\partial x_2}, \tilde{A}_0 p_1 \rangle}{|\tilde{A}_0 p_1|^2} \tilde{A}_0 p_1 \right).$$

Avaliando em q_0 , segue que

$$\frac{\partial p_3}{\partial x_2}(q_0) = \frac{1}{a_0} (0, b_0, d_0) - \frac{\langle \tilde{A}_0 e_2, \tilde{A}_0 e_1 \rangle}{a_0^3} (0, 0, a_0) = \frac{1}{a_0} (0, b_0, d_0) - \frac{d_0}{a_0^2} (0, 0, a_0) = \frac{b_0}{a_0} e_2,$$

de forma que

$$\left\langle \tilde{A}_0 \frac{\partial p_3}{\partial x_2}(q_0), e_1 \right\rangle = \left\langle \frac{b_0}{a_0} (0, b_0, d_0), e_1 \right\rangle = 0,$$

$$\left\langle \frac{\partial p_3}{\partial x_2}(q_0), e_1 \right\rangle = \frac{b_0}{a_0} \langle e_2, e_1 \rangle = 0.$$

Como $\frac{\partial p_1}{\partial x_2}(q_0) = e_2$, concluímos que

$$\frac{\partial f_5}{\partial x_2}(q_0) = -c_0 \left\langle \frac{\partial p_2}{\partial x_2}(q_0), e_1 \right\rangle.$$

No entanto

$$\frac{\partial p_2}{\partial x_2}(q_0) = \left(\frac{\partial p_3}{\partial x_2} \times p_1 \right)(q_0) + \left(p_3 \times \frac{\partial p_1}{\partial x_2} \right)(q_0) = \frac{b_0}{a_0}(e_2 \times e_1) + e_3 \times e_2,$$

e portanto

$$\frac{\partial f_5}{\partial x_2}(q_0) = -c_0 \langle e_3 \times e_2, e_1 \rangle = c_0.$$

Por fim, calculando a derivada de f_{10} em relação a x_2 temos

$$\frac{\partial f_{10}}{\partial x_2}(q_0) = \left\langle \tilde{A}_0 \frac{\partial p_1}{\partial x_2}(q_0) - b_0 \frac{\partial p_3}{\partial x_2}(q_0), e_3 \right\rangle = \left\langle \tilde{A}_0 e_2 - \frac{b_0^2}{a_0} e_2, e_3 \right\rangle = d_0.$$

Concluimos então que $\det(dF(q_0)) = 4a_0(d_0 - c_0)$.

□

Utilizando os lemas acima poderemos mostrar o seguinte teorema

Teorema 2.1. Seja $\phi(s, t) = \alpha(s) + \beta(t)$ uma superfície mínima de translação com α e β curvas não-planas parametrizadas pelo comprimento de arco. Se k e τ denotam a curvatura e a torção de uma geradora desta superfície, então $k^2 \tau = C$ para alguma constante C . Além disso existe uma matriz simétrica invertível A tal que $\beta'(t) \times \beta''(t) = A\beta'(t)$.

Demonstração. Seja $T(t) = \beta'(t)$ o vetor tangente, $N(t)$ o vetor normal unitário, e $B(t) = T(t) \times N(t)$. As equações de Frenet da curva β são dadas por

$$\begin{aligned} T' &= kN, \\ N' &= -kT + \tau B, \\ B' &= -\tau N, \end{aligned}$$

e seja $H_2 = \text{span}\{(\beta'(t), \beta'(t) \times \beta''(t)) : t \in J\} \subset \mathbb{R}^6$. Pelo Lema 2.1 sabemos que $\dim(H_2) = 3$. Como a curva β não está contida em um plano, seus vetores velocidade $\beta'(t)$ não estão contidos em um plano e isto nos permite tomar uma base para H_2 da forma $\{(v_1, w_1), (v_2, w_2), (v_3, w_3)\}$ onde os vetores $\{v_1, v_2, v_3\}$ são uma base para \mathbb{R}^3 . Após uma mudança de bases do espaço vetorial H_2 , podemos assumir que $\{v_1, v_2, v_3\}$ é a base canônica de \mathbb{R}^3 $\{e_1 = (1, 0, 0), e_2 =$

$(0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$. Sejam $\xi_i = \xi_i(t)$ as funções suaves tais que

$$(\beta'(t), \beta'(t) \times \beta''(t)) = \sum_{n=1}^3 \xi_i(t)(e_i, w_i),$$

então $\beta'(t) = \xi(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t), \xi_3(t))$, e assim

$$\beta'(t) \times \beta''(t) = \sum_{n=1}^3 \xi_i(t)w_i.$$

Então nós escrevemos

$$\beta'(t) \times \beta''(t) = \xi(t) \times \xi'(t) = A\xi(t), \quad (2.2)$$

onde A é uma matriz 3×3 cujas colunas são w_1, w_2 e w_3 . Como a curva β é não plana, vamos considerar uma vizinhança aberta onde $k(t) \neq 0$. Em termos do triedro de Frenet nos temos que $\xi = T$ e então (2.2) se reduz a

$$T \times T' = T \times kN = kB = AT. \quad (2.3)$$

Derivando (2.3) com respeito a t , obtemos $k'B - k\tau N = kAN$ e assim

$$AN = \frac{k'}{k}B - \tau N. \quad (2.4)$$

Derivando agora a equação (2.4) nós temos

$$-kAT + \tau AB = \left(\frac{k'}{k}\right)' B - \tau \frac{k'}{k} N - \tau' N + \tau kT - \tau^2 B,$$

usando a equação (2.3), obtemos

$$-kAT + \tau AB = -k^2 B + \tau AB.$$

Logo

$$AB = \frac{1}{\tau} \left(\left(\left(\frac{k'}{k} \right)' - \tau^2 + k^2 \right) B - \left(\tau \frac{k'}{k} - \tau' \right) N + \tau kT \right),$$

e portanto

$$AB = \left(\frac{1}{\tau} \left(\frac{k'}{k} \right)' - \tau + \frac{k^2}{\tau} \right) B - \left(\frac{k'}{k} + \frac{\tau'}{\tau} \right) N + kT. \quad (2.5)$$

Por causa das equações (2.3), (2.4), (2.5), nós concluímos que a matriz da transformação linear $W \rightarrow AW$ em termos da base T, N e B é dada por

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & k(t) \\ 0 & -\tau(t) & d(t) \\ k(t) & b(t) & c(t) \end{pmatrix},$$

com

$$\begin{aligned} c(t) &= \frac{1}{\tau(t)} \left(\frac{k'(t)}{k(t)} \right)' - \tau(t) + \frac{k^2(t)}{\tau(t)}, \\ d(t) &= -\frac{k'(t)}{k(t)} - \frac{\tau'(t)}{\tau(t)}, \\ b(t) &= \frac{k'(t)}{k(t)}. \end{aligned}$$

Usando o Lema 2.2 com $X(t) = T(t)$ nos concluímos que a matriz \tilde{A} é

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & k(t) \\ 0 & -\tau(t) & d(t) \\ k(t) & b(t) & c(t) \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

Mais ainda, a identidade $b(t) = d(t)$ implica em

$$\frac{k'}{k} + \frac{\tau'}{\tau} = -\frac{k'}{k},$$

ou equivalentemente, $0 = 2\tau k' + k\tau' = \frac{1}{k}(k^2\tau)'$. Concluímos então que $k^2\tau = C$, onde C é uma constante. Com a notação usada no Lema 2.2, note que $A = Q\tilde{A}Q^T$. Então o determinante de A é $\det(A) = -k^2\tau = -C$. Podemos observar que $C \neq 0$ porque a curva β é não plana e portanto A é invertível. Pela simetria dos argumentos o mesmo vale para a curva α . \square

Observação 2.1. A condição $k^2\tau = C$ para uma curva espacial aparece como a segunda equação que satisfaz a elástica, uma curva a qual é um ponto crítico do funcional $\int k^2 ds$. Isto pode ser visto com mais detalhes em [11].

2.2 Descrição das superfícies mínimas de translação

Nesta seção iremos descrever todas as superfícies mínimas de translação as quais as geradoras são curvas não planas. Essencialmente, vamos provar que existem tantas superfícies de translação quanto existem cones quadráticos em \mathbb{R}^3 . Toda forma quadrática $x \rightarrow \langle Ax, x \rangle$ com uma matriz simétrica não singular A , define uma superfície de translação $\phi(s, t) = \beta(t) + \beta(s)$ tal que $\beta'(t)$ está no cone $\{x \in \mathbb{R}^3 : \langle Ax, x \rangle = 0\}$ e tal que a torção vezes a curvatura ao quadrado de β é igual a menos o determinante de A .

O próximo resultado mostra como a matriz A no Teorema 2.1 muda de acordo com movimentos rígidos e homotetias.

Lema 2.3. Seja $\phi(s, t) = \alpha(s) + \beta(t)$ uma superfície mínima de translação e seja A a matriz simétrica invertível que satisfaz $\beta' \times \beta'' = A\beta'$.

1. Se P é uma matriz ortogonal, então a superfície $P \circ \phi(s, t) = \tilde{\phi}(s, t)$ é também uma superfície mínima de translação, cujas geradoras são $\tilde{\alpha}(s) = P \circ \alpha(s)$ e $\tilde{\beta}(t) = P \circ \beta(t)$ e a matriz \tilde{A} do Teorema 2.1 é $\tilde{A} = PAP^T$.
2. Dado um número não nulo λ , a superfície $\lambda \phi(s, t)$ é uma superfície mínima de translação, cujas geradoras são $\tilde{\alpha}(s) = \lambda \alpha(s)$ e $\tilde{\beta}(t) = \lambda \beta(t)$ e a matriz \tilde{A} do Teorema 2.1 é $\tilde{A} = \lambda A$.

Demonstração. Este resultado segue diretamente do Lema 1.3, restando mostrar:

Caso (1) - Lembramos aqui que como P é linear temos

$$\tilde{\phi}(s, t) = P \circ \phi(s, t) = P \circ (\alpha(s) + \beta(s)) = P \circ \alpha(s) + P \circ \beta(s) = \tilde{\alpha}(s) + \tilde{\beta}(t),$$

ou seja, $\tilde{\alpha}$ e $\tilde{\beta}$ serão as geradoras de $\tilde{\phi}(s, t)$. Quanto à matriz \tilde{A} basta observar que do Lema 1.2 concluímos que

$$P\beta' \times P\beta'' = P(\beta' \times \beta'') = PA\beta' = PAP^T(P\beta'),$$

e então

$$\tilde{A} = PAP^T.$$

Caso(2) - Aqui, lembramos que

$$\lambda \phi(s, t) = \lambda(\alpha(s) + \beta(s)) = \lambda \alpha(s) + \lambda \beta(s) = \tilde{\alpha}(s) + \tilde{\beta}(t),$$

ou seja, $\tilde{\alpha}$ e $\tilde{\beta}$ serão as geradoras de $\lambda \phi(s, t)$. Neste caso, para a matriz \tilde{A} teremos

$$\lambda \beta' \times \lambda \beta'' = \lambda^2(\beta' \times \beta'') = \lambda^2 A\beta' = \lambda A(\lambda \beta'),$$

e então $\tilde{A} = \lambda A$. □

Usando o Lema 2.3, sabemos que a menos de um movimento rígido de uma superfície mínima de translação $\phi(s, t) = \alpha(s) + \beta(t)$, podemos assumir que a matriz A que satisfaz $\beta' \times \beta'' = A\beta'$ é diagonal. Isso é possível pois A é simétrica e portanto diagonalizável e além disso basta considerar a matriz P do lema como sendo a matriz da troca de base para a base dos autovetores. Denotaremos por λ_1, λ_2 e λ_3 os autovalores de A . Como $\beta'(t) \in \mathbb{S}^2$ e $\beta'(t)$ satisfaz $\beta' \times \beta'' = A\beta'$, logo $\langle A\beta', \beta' \rangle = 0$ e portanto β' esta em

$$\mathcal{C} = \mathbb{S}^2 \cap \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 = 0\}.$$

Então concluímos que nem todo λ_i pode ter o mesmo sinal. Mais do que isso, o Lema 2.3 nos permite assumir que λ_1 e λ_2 são números reais positivos e que $\lambda_3 = -1$ pois como A é uma matriz invertível temos $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ são diferentes de 0, assim basta considerar o λ do lema como sendo $\lambda = -\frac{1}{\lambda_3}$. Portanto, a menos de um movimento rígido e uma dilatação da superfície, podemos assumir que

$$\begin{aligned} \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 - x_3^2 &= 0, \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 &= 1. \end{aligned}$$

Somando as equações temos

$$(\lambda_1 + 1)x_1^2 + (\lambda_2 + 1)x_2^2 = 1,$$

o que nos possibilita escrever

$$\begin{aligned} \cos(s) &= \sqrt{\lambda_1 + 1}x_1, \\ \sin(s) &= \sqrt{\lambda_2 + 1}x_2. \end{aligned}$$

Sendo assim, para algum $0 < a < 1$ e para algum $0 < b < 1$ nós temos que $x_1 = a \cos(s)$ e $x_2 = b \sin(s)$, em que $\lambda_1 = \frac{1-a^2}{a^2}$ e $\lambda_2 = \frac{1-b^2}{b^2}$. A razão pela qual decidimos escrever λ_1 e λ_2 como $(1-a^2)/a^2$ e $(1-b^2)/b^2$ é devido ao fato que neste caso, uma das componentes conexas de \mathcal{C} pode ser parametrizada como

$$(x_1, x_2, x_3) = (a \cos(\varphi), b \sin(\varphi), \sqrt{1 - a^2 \cos^2(\varphi) - b^2 \sin^2(\varphi)}).$$

Assim, considerando essa mudança de variável, podemos reescrever a matriz A como

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1-a^2}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1-b^2}{b^2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

Munidos deste resultado podemos provar o seguinte Teorema.

Teorema 2.2. Seja $\phi(s, t) = \alpha(s) + \beta(t)$ uma superfície mínima de translação, com α e β parametrizadas pelo comprimento de arco e ambas curvas não planas. Então a menos de uma reparametrização, uma dilatação e um movimento rígido, temos que

$$\beta(t) = \alpha(t) = \int^t (a \cos(f(t)), b \sin(f(t)), \sqrt{1 - a^2 \cos^2(f(t)) - b^2 \sin^2(f(t))}) dt, \quad (2.8)$$

onde a função f satisfaz a equação diferencial

$$f'(t) = \frac{\sqrt{1 - a^2 \cos^2(f(t)) - b^2 \sin^2(f(t))}}{ab}. \quad (2.9)$$

Reciprocamente, se f é solução de (2.9), a superfície $\phi(s, t) = \alpha(s) + \beta(t)$ com β definida como em (2.8) é mínima.

Demonstração. Pelo Lema 2.3 podemos assumir que $\beta'(t)$ satisfaz a equação $\langle \beta'(t), A\beta'(t) \rangle = 0$ onde A é a matriz dada em (2.7), ou seja, podemos escrever o $\beta'(t)$ como sendo

$$\beta'(t) = \left(a \cos(f(t)), b \sin(f(t)), \sqrt{1 - a^2 \cos^2(f(t)) - b^2 \sin^2(f(t))} \right),$$

pois $\beta'(t)$ pertence ao cone \mathcal{C} . Desta forma, podemos então definir $\beta(t)$ como sendo

$$\beta(t) = \int^t \left(a \cos(f(t)), b \sin(f(t)), \sqrt{1 - a^2 \cos^2(f(t)) - b^2 \sin^2(f(t))} \right) dt.$$

Da demonstração do Teorema 2.1, temos que se k e τ denotam a curvatura e a torção de β , respectivamente, então

$$k^2 \tau = -\det(A) = \frac{(1-a^2)(1-b^2)}{a^2 b^2}. \quad (2.10)$$

Agora β é p.c.a., então como no item 3 da demonstração da Proposição 3.1, temos

$$\langle \beta'(t) \times \beta''(t), \beta'''(t) \rangle = k^2 \tau.$$

Com a notação $f(t) = f$, escrevemos

$$\beta''(t) = \left(-af' \sin(f), bf' \cos(f), \frac{f' \cos(f) \sin(f) [a^2 - b^2]}{\sqrt{1 - a^2 \cos^2(f) - b^2 \sin^2(f)}} \right).$$

Derivando novamente e utilizando a notação $\delta = (1 - a^2 \cos^2(f) - b^2 \sin^2(f))$, obtemos

$$\begin{aligned} \beta'''(t) = (\theta_1, \theta_2, \theta_3) &= \left(-a[(f')^2 \cos(f) + f'' \sin(f)], b[f'' \cos(f) - (f')^2 \sin(f)], \right. \\ &\left. \frac{(a^2 - b^2)(f'' \sin(f) \cos(f) + (f')^2 \cos^2(f) - (f')^2 \sin^2(f))(\delta) - (a^2 - b^2)^2 (f')^2 \sin^2(f) \cos^2(f)}{\delta^{3/2}} \right) \\ &= \left(\begin{array}{c} -a[(f')^2 \cos(f) + f'' \sin(f)] \\ b[f'' \cos(f) - (f')^2 \sin(f)] \\ (a^2 - b^2) \frac{(f'' \sin(f) \cos(f) \delta + (f')^2 (\cos^2(f) - a^2 \cos^4(f) - \sin^2(f) + b^2 \sin^4(f)))}{\delta^{3/2}} \end{array} \right), \end{aligned}$$

e então

$$\beta'(t) \times \beta''(t) = \left(\begin{array}{c} \frac{bf' \cos(f)(a^2 - 1)}{\sqrt{\delta}} \\ -\frac{af' \sin(f)(1 - b^2)}{\sqrt{\delta}} \\ abf' \end{array} \right) = \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{pmatrix}.$$

Para calcular $\langle \beta'(t) \times \beta''(t), \beta'''(t) \rangle = \sigma_1 \theta_1 + \sigma_2 \theta_2 + \sigma_3 \theta_3$, e utilizando a notação $\delta = (1 - a^2 \cos^2(f) - b^2 \sin^2(f))$, observemos que

$$\sigma_1 \theta_1 = -a[(f')^2 \cos(f) + f'' \sin(f)] \frac{bf' \cos(f)(a^2 - 1)\delta}{\delta^{3/2}},$$

$$\sigma_2 \theta_2 = -b[f'' \cos(f) - (f')^2 \sin(f)] \frac{af' \sin(f)(1 - b^2)\delta}{\delta^{3/2}},$$

$$\sigma_3 \theta_3 = \frac{abf'(a^2 - b^2)}{\delta^{3/2}} \{ \delta f'' \sin(f) \cos(f) + (f')^2 [\cos^2(f) - a^2 \cos^4 f - \sin^2(f) + b^2 \sin^4 f] \}.$$

Resulta daí que $\sigma_1 \theta_1 + \sigma_2 \theta_2$ é igual a

$$\begin{aligned} & -\frac{abf'\delta}{\delta^{3/2}} \{ (f')^2 [\cos^2(f)(a^2 - 1) - \sin^2(f)(1 - b^2)] + f'' \cos(f) \sin(f) [(a^2 - 1) + (1 - b^2)] \} \\ &= -\frac{abf'\delta}{\delta^{3/2}} \{ (f')^2 [a^2 \cos^2(f) + b^2 \sin^2(f) - 1] + f'' \cos(f) \sin(f) [(a^2 - b^2)] \} \\ &= -\frac{abf'\delta}{\delta^{3/2}} \{ -\delta (f')^2 + f'' \cos(f) \sin(f) [(a^2 - b^2)] \}, \end{aligned}$$

e portanto, somando com $\sigma_3\theta_3$ o termo que multiplica f'' é nulo, de fato

$$\frac{abf'\delta}{\delta^{3/2}} \{f'' \operatorname{sen}(f) \cos(f)(a^2 - b^2) - f'' \cos(f) \operatorname{sen}(f)(a^2 - b^2)\} = 0.$$

Sendo assim, temos que

$$\sigma_1\theta_1 + \sigma_2\theta_2 + \sigma_3\theta_3 = \frac{ab(f')^3}{\delta^{3/2}} [\delta^2 + (a^2 - b^2)(\cos^2(f) - a^2 \cos^4 f - \operatorname{sen}^2(f) + b^2 \operatorname{sen}^4 f)].$$

Uma vez que

$$\delta^2 = 1 - 2a^2 \cos^2(f) - 2b^2 \operatorname{sen}^2(f) + 2a^2 b^2 \cos^2(f) \operatorname{sen}^2(f) + a^4 \cos^4(f) + b^4 \operatorname{sen}^4(f),$$

e ainda, $(a^2 - b^2)(\cos^2(f) - a^2 \cos^4(f) - \operatorname{sen}^2(f) + b^2 \operatorname{sen}^4(f))$ sendo igual a

$$\begin{aligned} a^2 \cos^2(f) - a^4 \cos^4(f) - a^2 \operatorname{sen}^2(f) + a^2 b^2 \operatorname{sen}^4(f) - b^2 \cos^2(f) + \\ + a^2 b^2 \cos^4(f) + b^2 \operatorname{sen}^2(f) - b^4 \operatorname{sen}^4(f), \end{aligned}$$

temos que $\delta^2 + (a^2 - b^2)(\cos^2(f) - a^2 \cos^4 f - \operatorname{sen}^2(f) + b^2 \operatorname{sen}^4 f)$ se resume a

$$\begin{aligned} 1 - a^2 \cos^2(f) - b^2 \operatorname{sen}^2(f) + 2a^2 b^2 \cos^2(f) \operatorname{sen}^2(f) \\ - a^2 \operatorname{sen}^2(f) + a^2 b^2 \operatorname{sen}^4(f) - b^2 \cos^2(f) + a^2 b^2 \cos^4(f) &= 1 - a^2 - b^2 + \\ &+ a^2 b^2 [\operatorname{sen}^2(f) + \cos^2(f)]^2 \\ &= 1 - a^2 - b^2 + a^2 b^2 \\ &= (1 - a^2)(1 - b^2). \end{aligned}$$

Concluimos que

$$\sigma_1\theta_1 + \sigma_2\theta_2 + \sigma_3\theta_3 = \frac{ab(f')^3}{\delta^{3/2}} (1 - a^2)(1 - b^2).$$

De onde enfim escrevemos

$$k^2 \tau = \langle \beta'(t) \times \beta''(t), \beta'''(t) \rangle = \frac{ab(1 - a^2)(1 - b^2)f'(t)^3}{(1 - a^2 \cos^2(f(t)) - b^2 \operatorname{sen}^2(f(t)))^{3/2}}.$$

E assim, utilizando a equação (2.10) conseguimos

$$\frac{ab(1 - a^2)(1 - b^2)f'(t)^3}{(1 - a^2 \cos^2(f(t)) - b^2 \operatorname{sen}^2(f(t)))^{3/2}} = \frac{(1 - a^2)(1 - b^2)}{a^2 b^2},$$

então

$$f'(t) = \left(\frac{(1 - a^2 \cos^2(f(t)) - b^2 \sin^2(f(t)))^{3/2}}{ab^3} \right)^{1/3} = \frac{\sqrt{1 - a^2 \cos^2(f(t)) - b^2 \sin^2(f(t))}}{ab},$$

ou seja, deduzimos a equação diferencial ordinária (2.9) a qual f satisfaz.

Para provar que a menos de uma reparametrização podemos tomar $\alpha(t) = \beta(t)$, vamos relembra as definições dos subespaços vetoriais H_1 e H_2 de \mathbb{R}^6 :

$$H_1 = \text{span}\{(\alpha'(s) \times \alpha''(s), \alpha'(s)) : s \in I\},$$

$$H_2 = \text{span}\{(\beta'(t), \beta'(t) \times \beta''(t)) : t \in J\}.$$

Se lembrarmos a interpretação da matriz A com respeito ao espaço vetorial H_2 dada na prova do Teorema 2.1, temos que os vetores w_1, w_2 e w_3 são as colunas da matriz A , logo

$$w_1 = \left(\frac{1 - a^2}{a^2}, 0, 0 \right), w_2 = \left(0, \frac{1 - b^2}{b^2}, 0 \right), w_3 = (0, 0, -1).$$

Assim os seguinte vetores formam uma base para H_2

$$\left(1, 0, 0, \frac{1 - a^2}{a^2}, 0, 0 \right), \left(0, 1, 0, 0, \frac{1 - b^2}{b^2}, 0 \right), (0, 0, 1, 0, 0, -1).$$

Pelo Lema 2.1 sabemos que H_1 é o complemento ortogonal de H_2 e portanto

$$V_1 = \left(-\frac{1 - a^2}{a^2}, 0, 0, 1, 0, 0 \right), V_2 = \left(0, -\frac{1 - b^2}{b^2}, 0, 0, 1, 0 \right), V_3 = (0, 0, -1, 0, 0, 1)$$

formam uma base para H_1 . Por definição de H_1 obtemos que

$$(\alpha'(s) \times \alpha''(s), \alpha'(s)) = \sum_{n=1}^3 \xi_n(s) V_n,$$

assim, $(\xi_1(s), \xi_2(s), \xi_3(s)) = \alpha'(s)$ e portanto

$$\alpha'(s) \times \alpha''(s) = A\alpha'(s).$$

Uma observação importante que deduzimos aqui é que a mesma matriz A que funciona para a curva β funciona para curva α . De fato, isto pode ser observado da maneira como é definida a base $\{V_1, V_2, V_3\}$ e da demonstração do Teorema 2.1. O mesmo argumento construído acima

mostra que $\alpha'(s)$ pode ser escrito como o vetor $\beta'(t)$. Assim, $\alpha'(s)$ também estará contida em \mathcal{C} . Considerando então a curva $\tilde{\alpha}(s) = \alpha(-s)$ se necessário, teremos $\alpha'(s)$ e $\beta'(t)$ na mesma componente conexa de \mathcal{C} .

Então sendo a mesma matriz para ambas as curvas, podemos concluir que a função $f(s)$ que satisfaz a equação (2.9) para o caso da curva $\alpha(s)$ é a mesma que $f(t)$ a menos de condição inicial. Desta forma, podemos concluir que o intervalo maximal de definição da função $f(t)$ é o mesmo de $f(s)$ a menos de um deslocamento por $m \in \mathbb{R}$, isto é, $f(s+m) = f(t)$. A partir deste raciocínio, considerando a curva $\tilde{\alpha}(s) = \alpha(s+m)$ se necessário, poderemos assumir que $\alpha(s) = \beta(s)$.

Reciprocamente, seja $\phi(s,t) = \beta(s) + \beta(t)$ uma superfície com β como em (2.8) e $f'(t)$ como em (2.9). Então, segue de (1.1) que $H = 0$ é equivalente a

$$\langle \beta'(s) \times \beta''(s), \beta'(t) \rangle + \langle \beta'(t) \times \beta''(t), \beta'(s) \rangle = 0.$$

Utilizando desta vez a notação

$$\begin{cases} \delta_s &= (1 - a^2 \cos^2 f(s) - b^2 \sin^2 f(s)), f'(s) = \sqrt{\delta_s}/ab, \\ \delta_t &= (1 - a^2 \cos^2 f(t) - b^2 \sin^2 f(t)), f'(t) = \sqrt{\delta_t}/ab, \end{cases}$$

escrevemos

$$\begin{aligned} \beta'(t) &= \left(a \cos(f(t)), b \sin(f(t)), \sqrt{\delta_t} \right), \\ \beta'(s) &= \left(a \cos(f(s)), b \sin(f(s)), \sqrt{\delta_s} \right), \\ \beta''(s) &= \left(-\frac{\sqrt{\delta_s} \sin f(s)}{b}, \frac{\sqrt{\delta_s} \cos f(s)}{a}, \frac{\cos(f) \sin(f) [a^2 - b^2]}{ab} \right). \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} \beta''(s) \times \beta'(s) &= \begin{pmatrix} \frac{\sin^2 f(s) \cos f(s) [a^2 - b^2]}{b} - \frac{\delta_s \cos f(s)}{a} \\ -\frac{\sin f(s) \cos^2 f(s) [a^2 - b^2]}{a} - \frac{\delta_s \sin f(s)}{b} \\ \sqrt{\delta_s} (\cos^2 f(s) + \sin^2 f(s)) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\cos f(s)}{b} (\sin^2 f(s) [a^2 - b^2] - \delta_s) \\ \frac{\sin f(s)}{a} (-\cos^2 f(s) [a^2 - b^2] - \delta_s) \\ \sqrt{\delta_s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\cos f(s)}{b} (a^2 - 1) \\ \frac{\sin f(s)}{a} (b^2 - 1) \\ \sqrt{\delta_s} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

em que os vetores foram escritos na forma de coluna para melhor visualização. Portanto

$$\langle \beta'(s) \times \beta''(s), \beta'(t) \rangle = \left((a^2 - 1) \cos(f(t)) \cos(f(s)), (b^2 - 1) \text{sen}(f(t)) \text{sen}(f(s)), \sqrt{\delta_t} \sqrt{\delta_s} \right).$$

Por simetria

$$\langle \beta'(t) \times \beta''(t), \beta'(s) \rangle = \left((a^2 - 1) \cos(f(s)) \cos(f(t)), (b^2 - 1) \text{sen}(f(s)) \text{sen}(f(t)), \sqrt{\delta_s} \sqrt{\delta_t} \right),$$

e então

$$\langle \beta'(s) \times \beta''(s), \beta'(t) \rangle - \langle \beta'(t) \times \beta''(t), \beta'(s) \rangle = 0.$$

Concluimos assim que $\phi(s, t)$ é mínima. □

Observação 2.2. A equação diferencial (2.9) pode ser solucionada da seguinte maneira:

Escrevemos

$$\frac{df}{dt} = \frac{\sqrt{1 - a^2 \cos^2(f) - b^2 \text{sen}^2(f)}}{ab}.$$

Considerando-se a condição inicial $f(0) = 0$, integrando temos

$$\int_0^{f(t)} \frac{ab}{\sqrt{1 - a^2 \cos^2(y) - b^2 \text{sen}^2(y)}} dy = t,$$

A integral acima pode ser resolvida da seguinte forma. Observe inicialmente que

$$\begin{aligned} \sqrt{1 - a^2 \cos^2(y) + b^2 \text{sen}^2(y)} &= \sqrt{1 - a^2(1 - \text{sen}^2(y)) + b^2 \text{sen}^2(y)} \\ &= \sqrt{1 - a^2 - (b^2 - a^2) \text{sen}^2(y)} \\ &= \sqrt{1 - a^2} \sqrt{1 - \frac{b^2 - a^2}{1 - a^2} \text{sen}^2(y)}, \end{aligned}$$

ou seja, podemos escrever a integral como

$$\frac{\sqrt{1 - a^2}}{ab} t = \int_0^{f(t)} \frac{1}{\sqrt{1 - K^2 \text{sen}^2(y)}} dy.$$

Utilizando a notação de [25], reescrevemos a equação acima como

$$\frac{\sqrt{1 - a^2}}{ab} t = \int_0^{f(t)} \frac{1}{\sqrt{1 - K^2 \text{sen}^2(\varphi)}} d\varphi = F(f(t) | K^2),$$

onde $K^2 = \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 - 1} \right)$ e $F(f(t)|m)$ é a integral elíptica de primeira ordem com parâmetro $m = K^2$, sendo resolvida em termos da função amplitude de Jacobi de forma

$$f(t) = \operatorname{am} \left(\frac{\sqrt{1 - a^2}}{ab} t, K^2 \right).$$

Funções deste tipo são suaves e definidas em toda a reta como pode ser observado com mais detalhes em [26].

Observação 2.3. Se $\beta(t)$ é uma curva não plana em \mathbb{R}^3 parametrizada pelo comprimento de arco, e existe uma matriz simétrica invertível A tal que $\beta'(t) \times \beta''(t) = A\beta'(t)$, então $\phi(s, t) = \beta(s) + \beta(t)$ parametriza uma superfície mínima, e podemos ver isso devido ao fato de que $H = 0$ é equivalente a

$$\langle \beta''(s) \times \beta'(s), \beta'(t) \rangle + \langle \beta'(s), \beta'(t) \times \beta''(t) \rangle = 0.$$

Como $\beta'(t) \times \beta''(t) = A\beta'(t)$, então a equação se torna

$$-\langle A\beta'(s), \beta'(t) \rangle + \langle \beta'(s), A\beta'(t) \rangle = 0,$$

o que é trivial porque a matriz A é simétrica e portanto auto-adjunta, como visto no Lema 1.4.

O próximo corolário mostra que podemos ver o Teorema 2.2 como a recíproca do Teorema 2.1.

Corolário 2.1. Se $\beta = \beta(t)$ é uma curva regular não plana tal que $k^2\tau = C$ e $\beta'(t)$ está contido em um cone da forma $\{x \in \mathbb{R}^3 : \langle Ax, x \rangle = 0\}$, então $\phi(s, t) = \beta(s) + \beta(t)$ define uma superfície mínima.

Demonstração. seja $\tilde{\beta}$ uma parametrização de β pelo comprimento de arco. É claro que $\tilde{\beta}'$ também pertence ao cone $\{x \in \mathbb{R}^3 : \langle Ax, x \rangle = 0\}$. Agora, observando que A é simétrica e não singular, teremos que $\det(A) = \sigma \neq 0$, considerando $\lambda = \sqrt[3]{-C/\sigma}$ obteremos que

$$\det(\lambda A) = \lambda^3 \det(A) = \frac{-C}{\sigma} \det(A) = -C,$$

ou seja, trocando A por λA para algum λ diferente de zero se necessário, podemos assumir que $C = -\det(A)$. Como na demonstração do Teorema 2.2, a equação $k^2\tau = -\det(A)$ junto com $\tilde{\beta}'(t)$ estar em

$$C = \mathbb{S}^2 \cap \{x \in \mathbb{R}^3 : \langle Ax, x \rangle = 0\}$$

implica em, a menos de um movimento rígido, uma reparametrização e uma dilatação, $\tilde{\beta}$ tem a forma

$$\int \left(a \cos(f(t)), b \operatorname{sen}(f(t)), \sqrt{1 - a^2 \cos^2(f(t)) - b^2 \operatorname{sen}^2(f(t))} \right) dt,$$

onde $f(t)$ satisfaz a equação diferencial

$$f'(t) = \frac{\sqrt{1 - a^2 \cos^2(f(t)) - b^2 \operatorname{sen}^2(f(t))}}{ab},$$

para números reais a e b . Então $\tilde{\phi}(s, t) = \tilde{\beta}(s) + \tilde{\beta}(t)$ é uma superfície mínima e portanto $\phi(s, t) = \beta(s) + \beta(t)$ também o é, uma vez que a curvatura média não é afetada por movimento rígidos, reparametrizações e/ou homotetias, como foi mostrado na Observação 1.1. \square

Pelo Teorema 2.2, sabemos que as geradoras de uma superfície mínima de translação satisfazem $k^2 \tau = C$ para alguma constante C . Primeiros exemplos de tais curvas são as curvas em que k e τ são constantes, que são chamadas de hélices circulares. Para qualquer hélice circular β parametrizada pelo comprimento de arco, a menos de um movimento rígido, podemos parametrizar β da seguinte maneira $\beta(t) = (a \cos(t), a \operatorname{sen}(t), bt)$ e portanto $\beta'(t) = (-a \operatorname{sen}(t), a \cos(t), b)$ para a e b números reais tais que $a^2 + b^2 = 1$, ou $b^2 = 1 - a^2$. É fácil ver que

$$\beta' \in \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 0 \right\} = \tilde{\mathcal{C}},$$

um cone que pode ser descrito como

$$\tilde{\mathcal{C}} = \{X \in \mathbb{R}^3 : \langle AX, X \rangle = 0\},$$

onde a matriz A pode ser escrita como

$$A = \begin{pmatrix} \frac{b^2}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{b^2}{a^2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1-a^2}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1-a^2}{a^2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

ou seja, a matriz de (2.7) com $a = b$. Assim sendo, pelo Corolário 2.1 e pelo Teorema 2.2 obtemos

Corolário 2.2. Seja $\beta = \beta(s)$ uma hélice circular. Então a superfície $\phi(s, t) = \beta(s) + \beta(t)$ é mínima. Mais ainda, se $\phi(s, t) = \alpha(s) + \beta(t)$ é uma superfície mínima, então a menos de um movimento rígido, uma dilatação e uma reparametrização, temos que $\alpha(s) = \beta(s)$. A superfície neste corolário é um helicóide.

Demonstração. Com as observações feitas anteriormente sobre hélices circulares, o primeiro resultado desse Lema segue direto do Corolário 2.1. O segundo resultado segue direto do Teorema 2.2. Para o último resultado, procedemos como no Exemplo 1.2. Basta observar que, fazendo $u = b(s+t)$, $v = b(s-t)$, teremos

$$\begin{aligned}\beta(s) + \beta(t) &= (a(\cos(s) + \cos(t)), a(\sin(s) + \sin(t)), b(s+t)) \\ &= \left(a \left(\cos\left(\frac{u+v}{2b}\right) + \cos\left(\frac{u-v}{2b}\right) \right), a \left(\sin\left(\frac{u+v}{2b}\right) + \sin\left(\frac{u-v}{2b}\right) \right), u \right) \\ &= (2a(\sin(\theta u) \cos(\theta v)), 2a(\cos(\theta u) \sin(\theta v)), u) = \phi(u, v),\end{aligned}$$

ou seja, um helicóide com $\theta = 1/2b$. □

Vamos agora fazer uma checagem de que as superfícies do Teorema 2.2 com $a = b$ são helicóides observando que a equação (2.9) se reduz a $f'(t) = \pm \sqrt{1 - a^2/a^2}$ e sua solução é $f(t) = \lambda t + \mu$ com $\lambda = \pm \sqrt{1 - a^2/a^2}$ e $\mu \in \mathbb{R}$. Então

$$\beta'(t) = (a \cos(\lambda t + \mu), a \sin(\lambda t + \mu), \lambda).$$

A menos de uma constante de integração temos a curva

$$\beta(t) = \frac{1}{\lambda} (a \sin(\lambda t + \mu), -a \cos(\lambda t + \mu), \lambda^2 t).$$

Esta curva é uma hélice circular com raio $a/(1 - a^2)^{1/4}$ e passo $\sqrt{1 - a^2/a^2}$ e sabemos que pelo Corolário 2.2 que esta superfície é um helicóide.

Antes de apresentarmos os exemplos vamos fazer uma observação importante.

Observação 2.4. A curvatura e a torção de uma curva que atende aos resultados apresentados neste capítulo serão calculadas a seguir:

Primeiramente, levando em consideração a seguinte derivação

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left(\sqrt{1 - a^2 \cos^2(f) - b^2 \sin^2(f)} \right) &= -\frac{2f'[a^2 \cos(f)(-\sin(f)) + b^2 \sin(f) \cos(f)]}{2\sqrt{1 - a^2 \cos^2(f) - b^2 \sin^2(f)}} \\ &= \frac{\sin(2f)(a^2 - b^2)f'}{2\sqrt{1 - a^2 \cos^2(f) - b^2 \sin^2(f)}},\end{aligned}$$

teremos

$$\beta''(t) = f' \left(-a \sin(f), b \cos(f), \frac{\sin(2f)(a^2 - b^2)}{2\sqrt{1 - a^2 \cos^2(f) - b^2 \sin^2(f)}} \right).$$

Então usando (2.9) escrevemos

$$\begin{aligned}
|\beta''(t)|^2 &= (f')^2 \left(a^2 \operatorname{sen}^2(f) + b^2 \cos^2(f) + \frac{\operatorname{sen}^2(2f)(a^2 - b^2)^2}{1 - a^2 \cos^2(f) - b^2 \operatorname{sen}^2(f)} \right) \\
&= \frac{1}{a^2 b^2} [(a^2 \operatorname{sen}^2(f) + b^2 \cos^2(f))(1 - a^2 \cos^2(f) - b^2 \operatorname{sen}^2(f)) \\
&\quad + \operatorname{sen}^2(f) \cos^2(f)(a^2 - b^2)^2] \\
&= \frac{1}{a^2 b^2} [a^2 \operatorname{sen}^2(f) + b^2 \cos^2(f) - a^4 \operatorname{sen}^2(f) \cos^2(f) - a^2 b^2 \operatorname{sen}^4(f) \\
&\quad - b^2 a^2 \cos^4(f) - b^4 \operatorname{sen}^2(f) \cos^2(f) + \operatorname{sen}^2(f) \cos^2(f)(a^4 - 2a^2 b^2 + b^4)] \\
&= \frac{1}{a^2 b^2} [a^2 \operatorname{sen}^2(f) + b^2 \cos^2(f) - a^2 b^2 (\operatorname{sen}^4(f) + \cos^4(f) + 2 \operatorname{sen}^2(f) \cos^2(f))] \\
&= \frac{1}{a^2 b^2} [a^2 \operatorname{sen}^2(f) + b^2 \cos^2(f) - a^2 b^2].
\end{aligned}$$

Desta forma concluímos que

$$k(t) = |\beta''(t)| = \frac{\sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2(f(t)) + b^2 \cos^2(f(t)) - a^2 b^2}}{ab}.$$

Como

$$k^2 \tau = \frac{(1 - a^2)(1 - b^2)}{a^2 b^2},$$

obtemos a torção

$$\tau(t) = \frac{(1 - a^2)(1 - b^2)}{a^2 \operatorname{sen}^2(f(t)) + b^2 \cos^2(f(t)) - a^2 b^2}.$$

Vamos agora dar dois exemplos numéricos de superfícies mínimas de translação.

Exemplo 2.1. Considere $a = 2/3$ e $b = 1/2$ no Teorema 2.2. Teremos

$$k^2 \tau = \frac{(1 - a^2)(1 - b^2)}{a^2 b^2} = \frac{15}{4}.$$

Neste caso k assume o valor

$$k(t) = \frac{\sqrt{16 \operatorname{sen}^2(f(t)) + 9 \cos^2(f(t)) - 4}}{2}.$$

Observamos daí também que a torção é

$$\tau(t) = \frac{15}{16 \operatorname{sen}^2(f(t)) + 9 \cos^2(f(t)) - 4}.$$

Utilizando agora o valor inicial $f(0) = 0$, encontramos uma solução de

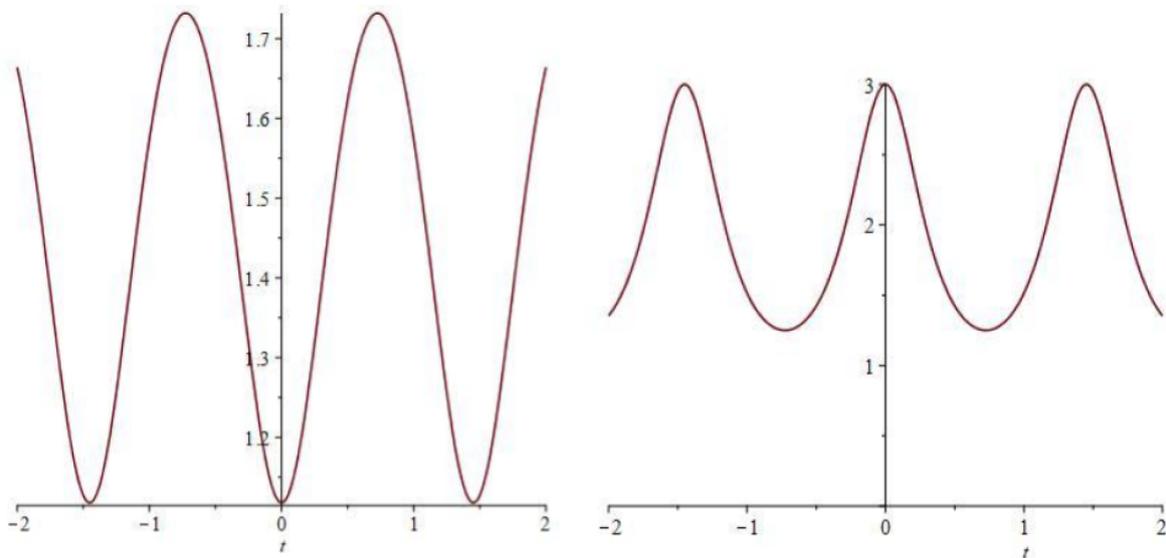
$$\begin{cases} f'(t) = 3\sqrt{1 - \frac{4}{9}\cos^2(f(t)) - \frac{1}{4}\sin^2(f(t))} \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Como sendo

$$f(t) = \operatorname{am}\left(\sqrt{5}t \middle| -\frac{7}{20}\right),$$

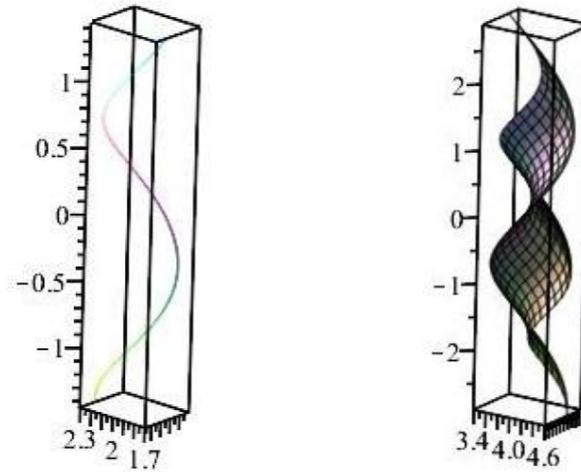
onde $\operatorname{am}(x|m)$ é a função amplitude de Jacobi, e suas propriedades podem ser observadas em [26].

Na figura abaixo, plotamos a curvatura k e a torção τ de β obtidas em (2.8) mostrando que nem k nem τ são constantes.



Curvatura a esquerda e torção a direita.

Na figura a seguir, plotamos a curva geradora β com condição inicial $\beta(0) = (2, 1, 0)$ e a superfície de translação $\phi(s, t) = \beta(s) + \beta(t)$.



Curva geradora a esquerda e a superfície a direita.

O exemplo a seguir é autoral e foi feito para apresentar um exemplo semelhante, porém para valores diferentes

Exemplo 2.2. Considere $a = 1/4$ e $b = 1/3$ no teorema (2.2). Teremos

$$k^2 \tau = \frac{(1 - a^2)(1 - b^2)}{a^2 b^2} = 120.$$

Neste caso k assume o valor

$$k(t) = \sqrt{9 \operatorname{sen}^2(f(t)) + 16 \operatorname{cos}^2(f(t)) - 1}.$$

A torção é

$$\tau(t) = \frac{120}{9 \operatorname{sen}^2(f(t)) + 16 \operatorname{cos}^2(f(t)) - 1}.$$

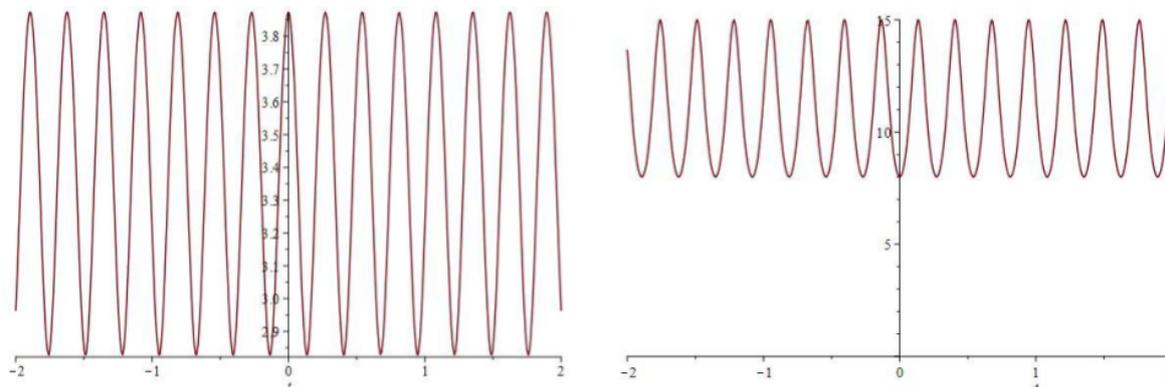
Utilizando agora o valor inicial $f(0) = 0$, encontramos uma solução de

$$\begin{cases} f'(t) = 12 \sqrt{1 - \frac{1}{16} \operatorname{cos}^2(f(t)) - \frac{1}{9} \operatorname{sen}^2(f(t))} \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Como sendo

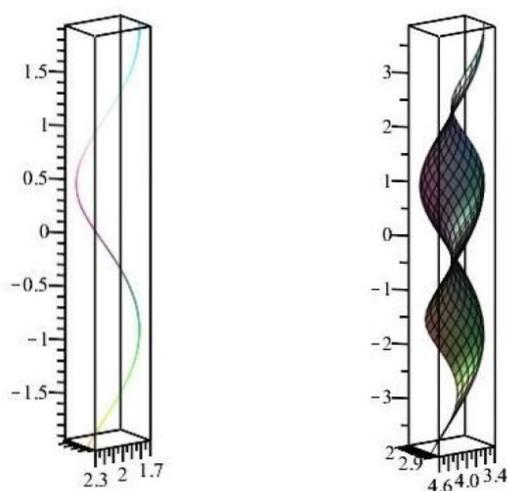
$$f(t) = \operatorname{am} \left(3\sqrt{15}t \left| \frac{7}{135} \right. \right).$$

Na figura abaixo, plotamos a curvatura k e a torção τ de β obtidas em (2.8) mostrando, novamente, que nem k nem τ são constantes.



Curvatura a esquerda e torção a direita.

Na figura a seguir, plotamos a curva geradora β com condição inicial $\beta(0) = (2, 1, 0)$ e a superfície de translação $\phi(s, t) = \beta(s) + \beta(t)$.



Curva geradora a esquerda e a superfície a direita.

Capítulo 3

Superfícies mínimas de translação: classificação e construção

Neste capítulo, apresentaremos resultados de classificação e um método de construção para superfícies mínimas de translação de \mathbb{R}^3 , baseado no artigo [8]. Iniciaremos abordando dois resultados já conhecidos, que foram apresentados em [8] com provas alternativas, a saber, uma classificação das superfícies mínimas de translação quando uma das geratrizes é plana (Teorema 3.1) e quando uma das geratrizes é uma hélice circular (Teorema 3.2). Em seguida, será provado que, além do plano e das superfícies mínimas do tipo Scherk, e a menos de reparametrizações das curvas geradoras, qualquer superfície mínima de translação pode ser descrita como $\Psi(s, t) = \alpha(s) + \alpha(t)$, onde α é uma curva parametrizada pelo comprimento de arco s , sua curvatura k é uma solução da EDO autônoma $(y')^2 + y^4 + c_3 y^2 + c_1^2 y^{-2} + c_1 c_2 = 0$ e sua torção é $\tau(s) = c_1/k(s)^2$. Aqui $c_1 \neq 0$, c_2 e c_3 são constantes tais que a equação cúbica $-\lambda^3 + c_2 \lambda^2 - c_3 \lambda + c_1 = 0$ tem três raízes reais λ_1 , λ_2 e λ_3 . Finalizaremos o capítulo apresentando um algoritmo que permite construir superfícies mínimas de translação no espaço Euclidiano.

3.1 Resultados de classificação

O resultado a seguir, segundo Hasanis e López, oferece uma demonstração alternativa ao resultado provado originalmente em [5], que diz respeito a uma superfície mínima de translação quando uma das curvas geratriz é uma curva plana.

Teorema 3.1. Seja S uma superfície mínima de translação não plana. Assuma que uma, digamos α , das curvas geradoras é uma curva plana. Então

1. A curvatura k_α de α satisfaz a EDO autônoma

$$\left(\frac{y'}{y}\right)' + y^2 = 0. \quad (3.1)$$

2. A curva α é um movimento rígido de

$$\alpha(u) = \left(u, 0, -\frac{1}{c} \log(\cos(cu))\right), \quad u \in \left(\frac{-\pi}{2c}, \frac{\pi}{2c}\right). \quad (3.2)$$

3. a curva geradora β é também uma curva plana e S é uma superfície do tipo Scherk.

Demonstração. Seja $\phi(s, t) = \alpha(s) + \beta(t)$ parametrização local de S .

1. Sendo α curva plana, temos $\tau_\alpha = 0$. Segue de (1.4) que

$$\left(\left(\frac{k'_\alpha}{k_\alpha}\right)' + k_\alpha^2\right) \langle \mathbf{b}_\alpha, \mathbf{t}_\beta \rangle = 0, \quad \forall s \text{ e } t.$$

Como $\psi_s = \alpha'$, $\psi_t = \beta'$, $\psi_{ss} = \alpha''$, $\psi_{tt} = \beta''$ e $\psi_{st} = 0$, teremos $N = \frac{\alpha' \times \beta'}{|\alpha' \times \beta'|}$, e portanto

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{-\langle \alpha', \alpha'', \beta' \rangle \langle \alpha', \beta'', \beta' \rangle}{|\alpha' \times \beta'|^4} = \frac{-\langle k_\alpha \mathbf{b}_\alpha, \mathbf{t}_\beta \rangle \langle \mathbf{t}_\alpha, k_\beta \mathbf{b}_\beta \rangle}{|\alpha' \times \beta'|^4}.$$

Assim concluímos que

$$K = \frac{-k_\alpha k_\beta}{|\mathbf{t}_\alpha \times \mathbf{t}_\beta|^4} \langle \mathbf{b}_\alpha, \mathbf{t}_\beta \rangle \langle \mathbf{t}_\alpha, \mathbf{b}_\beta \rangle. \quad (3.3)$$

Se $\langle \mathbf{b}_\alpha, \mathbf{t}_\beta \rangle = 0$ em um conjunto aberto, teremos por (3.3) que $K = 0$. Agora se $K = 0$ e $H = 0$ então S é um plano, uma contradição. Então neste caso devemos ter

$$\left(\frac{k'_\alpha}{k_\alpha}\right)' + k_\alpha^2 = 0.$$

2. A EDO autônoma (3.1) pode ser reescrita como sendo

$$y'' - \frac{1}{y}(y')^2 + y^3 = 0,$$

Considere a substituição de variável $w(y) = (y')^2$, então $\frac{dw}{dy}y' = 2y''y'$, ou seja $y'' = \frac{1}{2} \frac{dw}{dy}$. Assim podemos reescrever a EDO como sendo

$$\frac{dw}{dy} - 2\frac{w}{y} + 2y^3 = 0. \quad (3.4)$$

Considere portanto para a solução o fator integrante

$$\mu(y) = e^{\int -\frac{2}{y} dy} = e^{-2\ln(y)} = \frac{1}{y^2}.$$

Multiplicando então a (3.4) por $\frac{1}{y^2}$ obtemos

$$\frac{1}{y^2} \frac{dw}{dy} - 2\frac{w}{y^3} = -2y,$$

ou seja

$$\frac{d}{dy} \frac{w(y)}{y^2} = -2y.$$

Integrando com relação a y teremos

$$\frac{w(y)}{y^2} = -y^2 + C,$$

isto é, $w = -y^4 + Cy^2 = y^2(C - y^2)$, em que $C > 0$ é uma constante. Portanto podemos calcular

$$\mp \frac{dy}{dt} = \sqrt{y^2(C - y^2)}$$

como

$$\mp(t + K) = \int \frac{1}{\sqrt{y^2(C - y^2)}} dy = \frac{-1}{\sqrt{C}} \tanh^{-1} \left(\sqrt{\frac{C - y^2}{C}} \right).$$

Multiplicando a equação acima por $-\sqrt{C}$, temos

$$\pm(ct + c_1) = \tanh^{-1} \left(\sqrt{\frac{C - y^2}{C}} \right).$$

Aplicando a tangente hiperbólica em ambos os lados concluímos que

$$\tanh(\pm(ct + c_1)) = \frac{e^{(ct+c_1)} - e^{-(ct+c_1)}}{e^{(ct+c_1)} + e^{-(ct+c_1)}} = \sqrt{\frac{C - y^2}{C}}.$$

Portanto,

$$y^2 = C(1 - \tanh^2(\pm(ct + c_1))) = C \operatorname{sech}^2(\pm(ct + c_1)).$$

Como $c = \sqrt{C}$, temos $y(t) = c \operatorname{sech}(\pm(ct + c_1))$, isto é

$$y(t) = \frac{2ce^{\pm(ct+c_1)}}{1 + e^{\pm 2(ct+c_1)}},$$

de onde fazendo $y = k_\alpha(t)$ concluímos que

$$k_\alpha(t) = \frac{2ce^{\pm(ct+c_1)}}{1 + e^{\pm 2(ct+c_1)}},$$

onde $c > 0$, c_1 são constantes. Fazendo $s = \pm(ct + c_1)$, veremos que a curvatura de α é a mesma da seguinte curva

$$\gamma(u) = \left(u, 0, -\frac{1}{c} \ln(\cos(cu)) \right), \quad u \in \left(\frac{-\pi}{2c}, \frac{\pi}{2c} \right), \quad (3.5)$$

quando parametrizada pelo comprimento de arco s . De fato,

$$\gamma'(u) = (1, 0, \tan(cu))$$

$$\gamma''(u) = (0, 0, c \sec^2(cu)).$$

Calculando o comprimento de arco

$$s = \int_0^u |\gamma'(u)| du = \int_0^u \sqrt{1 + \tan^2(cu)} du = \int_0^u \frac{1}{\cos(cu)} du = \frac{\ln(\tan(cu) + \sec(cu))}{c},$$

assim

$$e^{cs} = \tan(cu) + \sec(cu).$$

Podemos determinar a curvatura de uma curva não p.c.a. pela seguinte equação

$$k_\gamma(u) = \frac{\|\gamma'(u) \times \gamma''(u)\|}{\|\gamma'(u)\|^3} = \frac{c \sec^2(cu)}{(1 + \tan^2(cu))^{3/2}} = \frac{c}{\sec(cu)},$$

agora

$$\frac{c}{\sec(cu)} = \frac{2c(\tan(cu) + \sec(cu))}{2\sec(cu)(\tan(cu) + \sec(cu))} = \frac{2c(\tan(cu) + \sec(cu))}{1 + (\tan(cu) + \sec(cu))^2} = \frac{2ce^{cs}}{1 + e^{2cs}},$$

e portanto

$$k_\gamma(s) = \frac{2ce^{cs}}{1 + e^{2cs}}.$$

Pelo teorema fundamental das curvas planas, a curva α é igual a γ , a menos de um movimento rígido.

3. Após um movimento rígido, podemos supor que α é como em (3.5). Seja $\beta(v) = (\beta_1(v), \beta_2(v), \beta_3(v))$ a outra curva geradora de S parametrizada pelo comprimento de arco v . Usaremos a condição de minimalidade

$$|\beta'(t)|^2 \langle \alpha'(s) \times \alpha''(s), \beta'(t) \rangle = |\alpha'(t)|^2 \langle \alpha'(t), \beta'(s) \times \beta''(s) \rangle, \quad (3.6)$$

proveniente da Proposição 1.1. Temos que

$$\beta' \times \beta'' = \begin{pmatrix} \beta_2' \beta_3'' - \beta_3' \beta_2'' \\ \beta_3' \beta_1'' - \beta_1' \beta_3'' \\ \beta_1' \beta_2'' - \beta_2' \beta_1'' \end{pmatrix}, \quad \alpha' \times \alpha'' = \begin{pmatrix} 0 \\ -c / \cos^2(cu) \\ 0 \end{pmatrix},$$

portanto

$$\begin{aligned} \langle \alpha', \beta' \times \beta'' \rangle &= (\beta_2' \beta_3'' - \beta_3' \beta_2'') + \tan(cu) (\beta_1' \beta_2'' - \beta_2' \beta_1'') \\ \langle \beta', \alpha' \times \alpha'' \rangle &= \frac{-c\beta_2'}{\cos^2(cu)}. \end{aligned}$$

Agora como $|\beta'|^2 = 1$, $|\alpha'|^2 = 1 + \tan^2(cu) = 1 / \cos^2(cu)$, obtemos

$$\frac{-c\beta_2'}{\cos^2(cu)} = \frac{1}{\cos^2(cu)} [(\beta_2' \beta_3'' - \beta_3' \beta_2'') + \tan(cu) (\beta_1' \beta_2'' - \beta_2' \beta_1'')],$$

então

$$c\beta_2' + [(\beta_2' \beta_3'' - \beta_3' \beta_2'') + \frac{\sin(cu)}{\cos(cu)} (\beta_1' \beta_2'' - \beta_2' \beta_1'')] = 0,$$

e concluímos que

$$\cos(cu) [c\beta_2' + \beta_2' \beta_3'' - \beta_3' \beta_2''] + \sin(cu) [\beta_1' \beta_2'' - \beta_2' \beta_1''] = 0.$$

Sabendo que $\sin(cu)$ e $\cos(cu)$ são linearmente independentes, podemos deduzir que

$$c\beta_2' + \beta_2' \beta_3'' - \beta_3' \beta_2'' = 0, \quad \beta_1' \beta_2'' - \beta_2' \beta_1'' = 0. \quad (3.7)$$

Antes de prosseguir, observe que, como β é p.c.a. e considerando o triedro de Frenet, temos

$$\begin{aligned} (\beta'(t), \beta''(t), \beta'''(t)) &= \langle \beta'(t) \times \beta''(t), \beta'''(t) \rangle \\ &= \langle \mathbf{t}_\beta \times k\mathbf{n}_\beta, k'\mathbf{n}_\beta + k\mathbf{n}'_\beta \rangle \\ &= k \langle \mathbf{b}_\beta, k'\mathbf{n}_\beta + k(-k\mathbf{t}_\beta + \tau\mathbf{b}_\beta) \rangle . \\ &= k^2 \langle \mathbf{b}_\beta, \tau\mathbf{b}_\beta \rangle \\ &= k^2 \tau_\beta. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\tau_\beta = \frac{(\beta', \beta'', \beta''')}{k_\beta^2} = \frac{\beta_1''''(\beta_2'\beta_3'' - \beta_3'\beta_2'') + \beta_2''''(\beta_3'\beta_1'' - \beta_1'\beta_3'') + \beta_3''''(\beta_1'\beta_2'' - \beta_2'\beta_1'')}{k_\beta^2}.$$

Se β_i é uma função constante, então β é uma curva plana, para ver isso basta observar que pois $\beta_i' = \beta_i'' = \beta_i''' = 0$. Assim, se β_1 é constante, β é uma curva plana. Caso contrário, observando que $\beta_2'' = \beta_2'\beta_1''/\beta_1'$, podemos combinar as equações para obter

$$\frac{c\beta_1'\beta_2' + \beta_1'\beta_2'\beta_3'' - \beta_3'\beta_2'\beta_1''}{\beta_1'} = 0,$$

ou seja

$$\beta_2'(\beta_3'\beta_1'' - c\beta_1' - \beta_1'\beta_3'') = 0.$$

Se β_2 é uma função constante, temos novamente que β é uma curva plana. Caso contrário, a equação acima implica em

$$\beta_3'\beta_1'' = c\beta_1' + \beta_1'\beta_3''.$$

Levando em consideração a segunda equação em (3.7), temos

$$(\beta_1'\beta_2'')' = \beta_1''\beta_2'' + \beta_1'\beta_2''' = \beta_1''\beta_2'' + \beta_1'''\beta_2' = (\beta_1''\beta_2')',$$

assim $\beta_1'\beta_2''' = \beta_1'''\beta_2'$. Aplicando essa identidade em conjunto com (3.7), temos

$$(\beta', \beta'', \beta''') = -c\beta_1'''\beta_2' - \beta_2''''(\beta_1'\beta_3'' - \beta_3'\beta_1'') = -\beta_2''''(c\beta_1' + \beta_1'\beta_3'' - \beta_3'\beta_1'') = 0.$$

O que como foi observado anteriormente implica em $\tau_\beta = 0$ e portanto β é uma curva plana. Agora de acordo com o item 2 desta proposição, β é, a menos de um movimento rígido, a curva parametrizada em (3.5). Colocando $\beta(v) = A\sigma(v)$, onde A é uma matriz ortogonal e $\sigma(v) = (v, 0, -(1/d)\ln(\cos(dv)))$ com $d > 0$ uma constante. Aplicando a

condição de minimalidade (3.6) novamente e lembrando que A é linear, temos

$$|A\sigma'(v)|^2 \langle \alpha'(u) \times \alpha''(u), A\sigma'(v) \rangle = |\alpha'(u)|^2 \langle \alpha'(u), A\sigma'(v) \times A\sigma''(v) \rangle,$$

como A é ortogonal teremos

$$|A\sigma'(v)|^2 = \langle A\sigma'(v), A\sigma'(v) \rangle = \langle \sigma'(v), \sigma'(v) \rangle = |\sigma'(v)|^2,$$

e também

$$\begin{aligned} |\sigma'(v)|^2 &= 1 + \tan^2(dv) = 1/\cos^2(dv), \\ |\alpha'(u)|^2 &= 1/\cos^2(cu), \\ \alpha' \times \alpha'' &= (0, -c/\cos^2(cu), 0) \end{aligned}$$

Considerando agora $A = (a_{ij})$, $i, j = 1, 2, 3$ obtemos

$$\begin{cases} A\sigma' = (a_{11} + a_{13} \tan(dv), a_{21} + a_{23} \tan(dv), a_{31} + a_{33} \tan(dv)), \\ A\sigma'' = \frac{d}{\cos^2(dv)} (a_{13}, a_{23}, a_{33}), \end{cases}$$

assim

$$A\sigma' \times A\sigma'' = \frac{d}{\cos^2(dv)} \begin{pmatrix} a_{33}(a_{21} + a_{23} \tan(dv)) - a_{23}(a_{31} + a_{33} \tan(dv)) \\ a_{13}(a_{31} + a_{33} \tan(dv)) - a_{33}(a_{11} + a_{13} \tan(dv)) \\ a_{23}(a_{11} + a_{13} \tan(dv)) - a_{13}(a_{21} + a_{23} \tan(dv)) \end{pmatrix},$$

e então

$$\begin{aligned} |\alpha'(u)|^2 \langle A\sigma' \times A\sigma'', \alpha' \rangle &= \frac{1}{\cos^2(cu)} \frac{d}{\cos^2(dv)} \{a_{33}(a_{21} + a_{23} \tan(dv)) - \\ &- a_{23}(a_{31} + a_{33} \tan(dv)) + \tan(cu)[a_{23}(a_{11} + a_{13} \tan(dv)) - a_{13}(a_{21} + a_{23} \tan(dv))]\} = \\ &= \frac{1}{\cos^2(dv)} \frac{-c(a_{21} + a_{23} \tan(dv))}{\cos^2(cu)} = |\sigma'(v)|^2 \langle \alpha' \times \alpha'', A\sigma' \rangle, \end{aligned}$$

portanto podemos calcular

$$\begin{aligned} -c \left(a_{21} + a_{23} \frac{\sin(dv)}{\cos(dv)} \right) &= d \{ a_{33}(a_{21} + a_{23} \tan(dv)) - a_{23}(a_{31} + a_{33} \tan(dv)) + \\ &+ \tan(cu)[a_{23}(a_{11} + a_{13} \tan(dv)) - a_{13}(a_{21} + a_{23} \tan(dv))] \} = d \{ a_{33}a_{21} - a_{23}a_{31} + \\ &+ \tan(dv)(a_{33}a_{23} - a_{23}a_{33}) + \tan(cu)[a_{23}a_{11} - a_{13}a_{21} + \tan(dv)(a_{23}a_{13} - a_{13}a_{23})] \} = \end{aligned}$$

$$= d \left(a_{33}a_{21} - a_{23}a_{31} + \frac{\text{sen}(cu)}{\text{cos}(cu)}(a_{23}a_{11} - a_{13}a_{21}) \right).$$

Como os dois lados da equação acima dependem de variáveis diferentes teremos

$$-c \left(a_{21} + a_{23} \frac{\text{sen}(dv)}{\text{cos}(dv)} \right) = \lambda = d \left(a_{33}a_{21} - a_{23}a_{31} + \frac{\text{sen}(cu)}{\text{cos}(cu)}(a_{23}a_{11} - a_{13}a_{21}) \right),$$

em que λ é uma constante. Segue da primeira igualdade que

$$-c(a_{21} \text{cos}(dv) + a_{23} \text{sen}(dv)) = \lambda \text{cos}(dv),$$

logo

$$(\lambda + ca_{21}) \text{cos}(dv) + ca_{23} \text{sen}(dv) = 0.$$

Como $\text{cos}(dv)$ e $\text{sen}(dv)$ são funções linearmente independentes e $c > 0$ devemos ter $a_{23} = 0$ e $\lambda = -ca_{21}$. Usando este fato na segunda igualdade, teremos

$$-ca_{21} \text{cos}(cu) = da_{33}a_{21} \text{cos}(cu) - da_{13}a_{21} \text{sen}(cu),$$

ou seja

$$(ca_{21} + da_{33}a_{21}) \text{cos}(cu) - da_{13}a_{21} \text{sen}(cu) = 0.$$

Desta vez, da independência linear de $\text{cos}(cu)$ e $\text{sen}(cu)$ concluímos que

$$a_{13}a_{21} = 0, \quad ca_{21} + da_{21}a_{33} = 0.$$

No caso em que $a_{21} = 0$, e usando o fato de que A é ortogonal, ou seja $AA^T = Id$, temos $a_{21}^2 + a_{22}^2 = 1$ e portanto $a_{22} = \pm 1$, assim poderemos ver que

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

então

$$A\sigma = A \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ -(1/d) \log(\text{cos}(dv)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1(v) \\ 0 \\ \lambda_2(v) \end{pmatrix},$$

ou seja, β está contida no plano xz , que é o mesmo plano de α , ou seja, S é um plano, uma contradição. Então $a_{21} \neq 0$, $a_{13} = 0$, $c = -da_{33}$. Usando novamente o fato de que

A é ortogonal teremos $\det(A) = \pm 1$, além disso como $a_{13} = 0$, temos

$$\begin{cases} a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 = 1, \\ a_{31}a_{11} + a_{32}a_{12} = 0, \\ a_{31}a_{21} + a_{32}a_{22} = 0, \end{cases}$$

Como $\det(A) = a_{33}(a_{22}a_{11} - a_{21}a_{12}) \neq 0$, temos que $a_{22}a_{11} - a_{21}a_{12} \neq 0$ e as duas últimas equações do sistema acima implicam que $a_{31} = a_{32} = 0$. Da primeira equação, temos $a_{33} = \pm 1$. Em particular, como c e d são positivos, teremos $a_{33} = -1$.

Definitivamente, a matriz A tem a forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Então

$$\begin{cases} a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \pm 1 \\ a_{11}^2 + a_{12}^2 = 1 \\ a_{21}^2 + a_{22}^2 = 1 \\ a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} = 0 \end{cases}$$

logo $a_{11} = -\frac{a_{12}a_{22}}{a_{21}}$, então $-\frac{a_{12}a_{22}}{a_{21}}a_{22} - a_{12}a_{21} = \pm 1$ e assim

$$-a_{12}(a_{22}^2 + a_{21}^2) = \pm a_{21},$$

portanto $a_{12} = \pm a_{21}$. Assim teremos também $a_{11} = \pm a_{22}$ e então

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \pm a_{12} & 0 \\ a_{12} & \pm a_{11} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Como $a_{11}^2 + a_{12}^2 = 1$, podemos escrever $a_{11} = \cos(\theta)$, $a_{12} = \sin(\theta)$ e por fim temos duas possibilidades para a matriz A

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ e } A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Em ambos casos, a parametrização $\Psi(u, v)$ é

$$\Psi(u, v) = \alpha(u) + A\sigma(v) = \left(u + v \cos(\theta), v \sin(\theta), \frac{1}{c} \ln \left(\frac{\cos(cv)}{\cos(cu)} \right) \right),$$

e S é a superfície \mathcal{S}_θ que pertence a família de superfícies do tipo Scherk.

□

Vamos provar agora que o helicóide é uma superfície mínima de translação obtida como a soma de uma hélice circular com ela mesma. Este resultado fornece uma prova alternativa e independente ao Corolário 2.2.

Teorema 3.2. Seja S uma superfície mínima de translação. Se uma das curvas geradoras é uma hélice circular, então a outra curva é uma hélice circular congruente a ela e S é o helicóide.

Demonstração. Assuma que a curva geradora α de S é uma hélice circular parametrizada pelo comprimento de arco s

$$\alpha(s) = (a \cos(\varphi(s)), a \sin(\varphi(s)), b \varphi(s)),$$

onde $\varphi(s) = s/\sqrt{a^2 + b^2}$, $a > 0$, $b \neq 0$ são duas constantes. Então

$$\begin{cases} \alpha'(s) = (-a(\varphi') \sin(\varphi(s)), a\varphi' \cos(\varphi(s)), b(\varphi')), \\ \alpha''(s) = (-a(\varphi')^2 \cos(\varphi(s)), -a(\varphi')^2 \sin(\varphi(s)), 0), \\ \alpha'''(s) = (a(\varphi')^3 \sin(\varphi(s)), -a(\varphi')^3 \cos(\varphi(s)), 0), \\ \alpha'(s) \times \alpha''(s) = a(\varphi')^3 (b \sin(\varphi(s)), -b \cos(\varphi(s)), a), \end{cases}$$

assim

$$k_\alpha = |\alpha''| = \sqrt{a^2(\varphi')^4} = \frac{a}{a^2 + b^2}, \quad \tau_\alpha = \frac{\langle \alpha', \alpha'', \alpha''' \rangle}{k_\alpha^2} = a(\varphi')^3 \frac{(ab(\varphi')^3)}{a^2(\varphi')^4} = b(\varphi')^2 = \frac{b}{a^2 + b^2}.$$

Além disso

$$\begin{cases} \mathbf{t}_\alpha(s) = \varphi'(-a \sin(\varphi(s)), a \cos(\varphi(s)), b), \\ \mathbf{b}_\alpha(s) = \frac{\alpha'(s) \times \alpha''(s)}{|\alpha''(s)|} = \varphi'(b \sin(\varphi(s)), -b \cos(\varphi(s)), a). \end{cases}$$

Se $\beta(t) = (\beta_1(t), \beta_2(t), \beta_3(t))$ é a outra curva geradora parametrizada pelo comprimento de arco t , então $k_\beta = |\beta''(t)| = |\beta'(t) \times \beta''(t)|$, $\mathbf{t}_\beta = (\beta'_1, \beta'_2, \beta'_3)$ e

$$\mathbf{b}_\beta = \frac{1}{|\beta'(t) \times \beta''(t)|} ((\beta' \times \beta'')_1, (\beta' \times \beta'')_2, (\beta' \times \beta'')_3).$$

Concluimos então que

$$\begin{aligned} k_\alpha \langle \mathbf{b}_\alpha, \mathbf{t}_\beta \rangle &= a(\varphi')^3 (b\beta'_1 \sin(\varphi(s)) - b\beta'_2 \cos(\varphi(s)) + a\beta'_3) \\ k_\beta \langle \mathbf{b}_\beta, \mathbf{t}_\alpha \rangle &= \varphi' (-a(\beta' \times \beta'')_1 \sin(\varphi(s)) + a(\beta' \times \beta'')_2 \cos(\varphi(s)) + b(\beta' \times \beta'')_3) \end{aligned}$$

Aplicando a condição de minimalidade (1.2) e o fato de que as funções $\{1, \cos(\varphi(s)), \sin(\varphi(s))\}$ são linearmente independentes obtemos

$$\begin{cases} b(\varphi')^2 \beta'_1 = -(\beta' \times \beta'')_1 = -\beta'_2 \beta''_3 + \beta''_2 \beta'_3, \\ b(\varphi')^2 \beta'_2 = -(\beta' \times \beta'')_2 = -\beta'_3 \beta''_1 + \beta''_3 \beta'_1, \\ a^2(\varphi')^2 \beta'_3 = b(\beta' \times \beta'')_3 = b(\beta'_1 \beta''_2 - \beta''_1 \beta'_2). \end{cases} \quad (3.8)$$

Multiplicando a primeira e a segunda equações acima por β'_1 e β'_2 respectivamente e somando elas, deduzimos que

$$b(\varphi')^2 [(\beta'_1)^2 + (\beta'_2)^2] = \beta'_3 (\beta'_1 \beta''_2 - \beta''_1 \beta'_2) = \frac{a^2(\varphi')^2 (\beta'_3)^2}{b},$$

ou seja

$$(\beta'_1)^2 + (\beta'_2)^2 = \frac{a^2 (\beta'_3)^2}{b^2},$$

onde na última igualdade usamos a terceira equação de (3.8). Como β é p.c.a, temos $(\beta'_1)^2 + (\beta'_2)^2 = 1 - (\beta'_3)^2$ e então $(\beta'_3)^2 = \frac{b^2}{a^2 + b^2}$, logo

$$(\beta'_1)^2 + (\beta'_2)^2 = \frac{a^2}{a^2 + b^2}.$$

Observando agora que $\beta'_3 = \pm b\varphi'$, vamos assumir que $\beta'_3 = b\varphi'$. Então as imagens dos vetores tangentes de α e β estarão no mesmo hemisfério. Então devemos ter

$$\beta'_1(t) = -a\varphi'(t)\sin(\varphi(t)), \quad \beta'_2(t) = a\varphi'(t)\cos(\varphi(t)).$$

Assim, a menos de uma translação, $\beta(t) = (a \cos(\varphi(t)), a \sin(\varphi(t)), b\varphi(t))$ coincide com α . Observe por fim que se $\beta'_3 = -b\varphi'$ o resultado é análogo, bastando considerar uma reparametrização por $-t$. \square

Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície mínima de translação com parametrização $\Psi(s, t) = \alpha(s) + \beta(t)$, onde supomos que α e β são parametrizadas pelo comprimento de arco. Motivados pelas relações (1.18), para cada ponto $\alpha(s)$ e $\beta(t)$, definimos um conjunto de transformações lineares $L_{\alpha(s)}, L_{\beta(t)} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ com matrizes

$$L_{\alpha(s)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & k_{\alpha}(s) \\ 0 & -\tau_{\alpha}(s) & -R_{\alpha}(s) \\ k_{\alpha}(s) & -R_{\alpha}(s) & \frac{\Sigma_{\alpha}}{\tau_{\alpha}}(s) \end{pmatrix}, \quad L_{\beta(t)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & k_{\beta}(t) \\ 0 & -\tau_{\beta}(t) & -R_{\beta}(t) \\ k_{\beta}(t) & -R_{\beta}(t) & \frac{\Sigma_{\beta}}{\tau_{\beta}}(t) \end{pmatrix},$$

com respeito as bases $\{\mathbf{t}_{\alpha}(s), \mathbf{n}_{\alpha}(s), \mathbf{b}_{\alpha}(s)\}$ e $\{\mathbf{t}_{\beta}(t), \mathbf{n}_{\beta}(t), \mathbf{b}_{\beta}(t)\}$ respectivamente.

Podemos observar agora que pelo Lema 1.4, como A é simétrica, então vale $\langle Ae_i, e_j \rangle = \langle e_i, Ae_j \rangle$, isto é, A é auto adjunta. Sendo assim, como a matriz $L_{\alpha(s)}$ é simétrica com respeito a uma base ortonormal, a transformação linear $L_{\alpha(s)}$ é auto adjunta para todo s . Seu polinômio característico é

$$\det(L_{\alpha(s)} - \lambda Id) = -\lambda^3 + \left(\frac{\Sigma_{\alpha}}{\tau_{\alpha}} - \tau_{\alpha} \right) \lambda^2 + (\Sigma_{\alpha} + R_{\alpha}^2 + k_{\alpha}^2) \lambda + k_{\alpha}^2 \tau_{\alpha} = 0.$$

Agora lembrando de (1.7) e (1.16) podemos rescrever a equação acima como

$$p(\lambda) = -\lambda^3 + c_2 \lambda^2 - c_3 \lambda + c_1 = 0,$$

de onde podemos calcular seus autovalores λ_1, λ_2 e λ_3 , observando que como $L_{\alpha(s)}$ é uma matriz simétrica, e portanto diagonalizável, ou seja, uma matriz simétrica A pode ser decomposta em um produto $A = Q\tilde{A}Q^T$, ou seja, $\tilde{A} = Q^T A Q$ onde \tilde{A} é uma matriz diagonal com os autovalores de A e Q é uma matriz ortogonal. Como Q e A são matrizes reais, seu produto será uma matriz real e portanto $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$. Sabendo então que os autovalores são raízes de $p(\lambda)$, podemos escrever

$$\begin{aligned} p(x) &= (\lambda_1 - x)(\lambda_2 - x)(\lambda_3 - x) \\ &= (\lambda_1 \lambda_2 - \lambda_1 x - \lambda_2 x + x^2)(\lambda_3 - x) \\ &= \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 - \lambda_1 \lambda_2 x - \lambda_1 \lambda_3 x + \lambda_1 x^2 - \lambda_2 \lambda_3 x + \lambda_2 x^2 + \lambda_3 x^2 - x^3 \\ &= -x^3 + x^2(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) - x(\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_3) + \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3, \end{aligned}$$

e portanto λ_1, λ_2 e λ_3 são constantes que não dependem de s satisfazendo

$$\begin{cases} c_2 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \\ c_3 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3, \\ c_1 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3. \end{cases} \quad (3.9)$$

Analogamente os autovalores reais μ_1, μ_2 e μ_3 de $L_{\beta(t)}$ serão também constantes e irão satisfazer

$$\begin{cases} \bar{c}_2 = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3, \\ \bar{c}_3 = \mu_1\mu_2 + \mu_1\mu_3 + \mu_2\mu_3, \\ \bar{c}_1 = \mu_1\mu_2\mu_3. \end{cases} \quad (3.10)$$

Observação 3.1. Quando a equação cúbica

$$-x^3 + c_2x^2 - c_3x + c_1 = 0$$

tem 3 raízes distintas, seu discriminante satisfaz

$$\Delta = 18c_1c_2c_3 - 4c_1c_2^3 + c_2^2c_3^3 - 4c_3^3 - 27c_2^2 \geq 0.$$

Para o caso em que $\Delta = 0$, a equação cúbica tem uma raiz múltipla.

Agora vamos provar a propriedade chave de que todas as transformações $L_{\alpha(s)}$ e $L_{\beta(t)}$ coincidem para todo s e t .

Proposição 3.1. Seja $\Psi(s, t) = \alpha(s) + \beta(t)$ uma superfície mínima de translação. Então $L_{\alpha(s)} = L_{\beta(t)}$ para todo $s \in I, t \in J$.

Demonstração. Iremos provar que $L_{\beta(t)}$ é a matriz adjunta de $L_{\alpha(s)}$ para todo s e t e portanto, como $L_{\alpha(s)}$ é auto-adjunta, então $L_{\alpha(s)} = L_{\beta(t)}$, provando o resultado.

Para isso precisamos mostrar que $\langle L_{\alpha(s)}(v), w \rangle = \langle v, L_{\beta(t)}(w) \rangle$ para todo $v, w \in \mathbb{R}^3$.

Sejam

$$v = a_1\mathbf{t}_\alpha(s) + a_2\mathbf{n}_\alpha(s) + a_3\mathbf{b}_\alpha(s), \quad w = b_1\mathbf{t}_\beta(t) + b_2\mathbf{n}_\beta(t) + b_3\mathbf{b}_\beta(t),$$

onde $a_i = a_i(s), b_i = b_i(t) \in \mathbb{R}$. Então

$$\langle L_{\alpha(s)}(v), w \rangle = \langle a_1L_{\alpha(s)}(\mathbf{t}_\alpha) + a_2L_{\alpha(s)}(\mathbf{n}_\alpha) + a_3L_{\alpha(s)}(\mathbf{b}_\alpha), b_1\mathbf{t}_\beta + b_2\mathbf{n}_\beta + b_3\mathbf{b}_\beta \rangle,$$

onde omitimos por simplicidade a dependência de s e t . Do lado direito dessa identidade aparecem as seguintes relações, onde usando as equações de (1.19) pra simplificá-las. Teremos

$$\begin{aligned}\langle a_1 L_{\alpha(s)}(\mathbf{t}_\alpha), b_1 \mathbf{t}_\beta \rangle &= a_1 b_1 \langle k_\alpha \mathbf{b}_\alpha, \mathbf{t}_\beta \rangle = a_1 b_1 \langle V_1, \mathbf{t}_\beta \rangle \\ &= a_1 b_1 \langle \mathbf{t}_\alpha, W_1 \rangle = a_1 b_1 \langle \mathbf{t}_\alpha, k_\beta \mathbf{b}_\beta \rangle = \langle a_1 \mathbf{t}_\alpha, b_1 L_{\beta(t)}(\mathbf{t}_\beta) \rangle\end{aligned}$$

Analogamente teremos para as outras

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle a_1 L_{\alpha(s)}(\mathbf{t}_\alpha), b_2 \mathbf{n}_\beta \rangle = a_1 b_2 \langle V_1, \mathbf{n}_\beta \rangle = a_1 b_2 \langle \mathbf{t}_\alpha, W_2 \rangle = \langle a_1 \mathbf{t}_\alpha, b_2 L_{\beta(t)}(\mathbf{n}_\beta) \rangle \\ \langle a_1 L_{\alpha(s)}(\mathbf{t}_\alpha), b_3 \mathbf{b}_\beta \rangle = a_1 b_3 \langle V_1, \mathbf{b}_\beta \rangle = a_1 b_3 \langle \mathbf{t}_\alpha, W_3 \rangle = \langle a_1 \mathbf{t}_\alpha, b_3 L_{\beta(t)}(\mathbf{b}_\beta) \rangle \\ \langle a_2 L_{\alpha(s)}(\mathbf{n}_\alpha), b_1 \mathbf{t}_\beta \rangle = a_2 b_1 \langle V_2, \mathbf{t}_\beta \rangle = a_2 b_1 \langle \mathbf{n}_\alpha, W_1 \rangle = \langle a_2 \mathbf{n}_\alpha, b_1 L_{\beta(t)}(\mathbf{t}_\beta) \rangle \\ \langle a_2 L_{\alpha(s)}(\mathbf{n}_\alpha), b_2 \mathbf{n}_\beta \rangle = a_2 b_2 \langle V_2, \mathbf{n}_\beta \rangle = a_2 b_2 \langle \mathbf{n}_\alpha, W_2 \rangle = \langle a_2 \mathbf{n}_\alpha, b_2 L_{\beta(t)}(\mathbf{n}_\beta) \rangle \\ \langle a_2 L_{\alpha(s)}(\mathbf{n}_\alpha), b_3 \mathbf{b}_\beta \rangle = a_2 b_3 \langle V_2, \mathbf{b}_\beta \rangle = a_2 b_3 \langle \mathbf{n}_\alpha, W_3 \rangle = \langle a_2 \mathbf{n}_\alpha, b_3 L_{\beta(t)}(\mathbf{b}_\beta) \rangle \\ \langle a_3 L_{\alpha(s)}(\mathbf{b}_\alpha), b_1 \mathbf{t}_\beta \rangle = a_3 b_1 \langle V_3, \mathbf{t}_\beta \rangle = a_3 b_1 \langle \mathbf{b}_\alpha, W_1 \rangle = \langle a_3 \mathbf{b}_\alpha, b_1 L_{\beta(t)}(\mathbf{t}_\beta) \rangle \\ \langle a_3 L_{\alpha(s)}(\mathbf{b}_\alpha), b_2 \mathbf{n}_\beta \rangle = a_3 b_2 \langle V_3, \mathbf{n}_\beta \rangle = a_3 b_2 \langle \mathbf{b}_\alpha, W_2 \rangle = \langle a_3 \mathbf{b}_\alpha, b_2 L_{\beta(t)}(\mathbf{n}_\beta) \rangle \\ \langle a_3 L_{\alpha(s)}(\mathbf{b}_\alpha), b_3 \mathbf{b}_\beta \rangle = a_3 b_3 \langle V_3, \mathbf{b}_\beta \rangle = a_3 b_3 \langle \mathbf{b}_\alpha, W_3 \rangle = \langle a_3 \mathbf{b}_\alpha, b_3 L_{\beta(t)}(\mathbf{b}_\beta) \rangle \end{array} \right.$$

Com os resultados acima podemos concluir que

$$\langle L_{\alpha(s)}(v), w \rangle = \langle v, b_1 L_{\beta(t)}(\mathbf{t}_\beta) + b_2 L_{\beta(t)}(\mathbf{n}_\beta) + b_3 L_{\beta(t)}(\mathbf{b}_\beta) \rangle = \langle v, L_{\beta(s)}(w) \rangle,$$

como queríamos. \square

Como temos $L_{\alpha(s)} = L_{\beta(t)}$ para todo s e t , então podemos concluir que os autovalores de $L_{\alpha(s)}$ e $L_{\beta(t)}$ coincidem. Façamos então λ_1 , λ_2 e λ_3 denotarem esses autovalores. Segue de (3.9) e (3.10) que $c_i = \bar{c}_i$, $1 \leq i \leq 3$. Além disso, $L_{\alpha(s)}$ e $L_{\beta(t)}$ tem um auto-sistema em comum independente de s e t , para todo $s \in I$, $t \in J$.

Considere agora o auto-sistema em comum de L_α e L_β como um sistema ortonormal de referencia. Com respeito a esse sistema, escrevemos α em coordenadas, digamos, $\alpha(s) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s), \alpha_3(s))$, sendo s o comprimento de arco. Então

$$\begin{cases} \mathbf{t}_\alpha(s) = \alpha'(s) = (\alpha'_1(s), \alpha'_2(s), \alpha'_3(s)), \\ k_\alpha(s) \mathbf{b}_\alpha(s) = L_\alpha(\mathbf{t}_\alpha(s)) = (\lambda_1 \alpha'_1(s), \lambda_2 \alpha'_2(s), \lambda_3 \alpha'_3(s)) \end{cases}.$$

Nos permite escrever as identidades $\langle \mathbf{t}_\alpha, \mathbf{t}_\alpha \rangle = 1$ e $\langle \mathbf{t}_\alpha, k_\alpha \mathbf{b}_\alpha \rangle = 0$ como

$$\alpha'_1(s)^2 + \alpha'_2(s)^2 + \alpha'_3(s)^2 = 1, \quad (3.11)$$

e

$$\lambda_1 \alpha_1'(s)^2 + \lambda_2 \alpha_2'(s)^2 + \lambda_3 \alpha_3'(s)^2 = 0, \quad (3.12)$$

respectivamente. Pela terceira equação de (3.9) e (3.12), concluímos que todos λ_i , $1 \leq i \leq 3$, são não nulos e não podem ter o mesmo sinal. No caso em que $c_1 > 0$, e renumerando os eixos se necessário, podemos escolher $\lambda_1 \leq \lambda_2 < 0 < \lambda_3$. Analogamente, se $c_1 < 0$, podemos escolher $\lambda_1 \geq \lambda_2 > 0 > \lambda_3$. Em ambos casos, subtraindo (3.12) de (3.11) multiplicada por λ_3 , temos

$$(\lambda_3 - \lambda_1) \alpha_1'(s)^2 + (\lambda_3 - \lambda_2) \alpha_2'(s)^2 = \lambda_3,$$

dividindo ambos lados por λ_3

$$\left(\frac{\lambda_3 - \lambda_1}{\lambda_3} \right) \alpha_1'(s)^2 + \left(\frac{\lambda_3 - \lambda_2}{\lambda_3} \right) \alpha_2'(s)^2 = 1.$$

Observe que $\frac{\lambda_3 - \lambda_1}{\lambda_3} > 0$ e $\frac{\lambda_3 - \lambda_2}{\lambda_3} > 0$ e assim, podemos escrever

$$\begin{aligned} \alpha_1'(s) &= A \cos(w(s)), \\ \alpha_2'(s) &= B \sin(w(s)), \end{aligned}$$

em que

$$A = \sqrt{\frac{\lambda_3}{\lambda_3 - \lambda_1}}, \quad B = \sqrt{\frac{\lambda_3}{\lambda_3 - \lambda_2}}.$$

Segue então de (3.11) que

$$\alpha_3'(s) = \sqrt{1 - A^2 \cos^2(w(s)) - B^2 \sin^2(w(s))}.$$

Podemos notar que se $\alpha_3'(s) = 0$, então

$$1 = A^2 \cos^2(s) + B^2 \sin^2(s).$$

Assim

$$(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2) = \lambda_3(\lambda_3 - \lambda_2) \cos^2(s) + \lambda_3(\lambda_3 - \lambda_1) \sin^2(s),$$

logo

$$-\lambda_1 \lambda_3 - \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_1 \lambda_2 = -\lambda_3 \lambda_2 \cos^2(s) - \lambda_3 \lambda_1 \sin^2(s),$$

e portanto

$$\lambda_1 \lambda_2 = \lambda_3 \lambda_2 (1 - \cos^2(s)) + \lambda_3 \lambda_1 (1 - \sin^2(s)) = \lambda_3 \lambda_2 (\sin^2(s)) + \lambda_3 \lambda_1 (\cos^2(s)).$$

A equação acima nos leva a um absurdo, que pode ser observado devido ao fato de que $\lambda_1 \lambda_3 < 0$, $\lambda_2 \lambda_3 < 0$ e $\lambda_1 \lambda_2 > 0$. Segue que $\alpha'_3(s) \neq 0$ para todo s .

No que segue, escreveremos

$$\alpha'(s) = (A \cos(w(s)), B \operatorname{sen}(w(s)), \alpha'_3(s)).$$

Com o objetivo de calcular $k_\alpha(s)$ e $\tau_\alpha(s)$, precisamos calcular $\alpha''(s)$ e $\alpha'''(s)$. Temos

$$\alpha''(s) = w'(s) \left(-A \operatorname{sen}(w(s)), B \cos(w(s)), \frac{(A^2 - B^2) \cos(w(s)) \operatorname{sen}(w(s))}{\alpha'_3(s)} \right),$$

e também

$$\begin{aligned} \alpha'''(s) = & w''(s) \left(\begin{array}{c} -A \operatorname{sen}(w(s)) \\ B \cos(w(s)) \\ \frac{(A^2 - B^2) \cos(w(s)) \operatorname{sen}(w(s))}{\alpha'_3(s)} \end{array} \right) + \\ & + (w'(s))^2 \left(\begin{array}{c} -A \cos(w(s)) \\ -B \operatorname{sen}(w(s)) \\ \frac{(A^2 - B^2)[(1 - A^2 \cos^2(w(s))) \cos^2(w(s)) - (1 - B^2 \operatorname{sen}^2(w(s))) \operatorname{sen}^2(w(s))]}{(\alpha'_3)^3} \end{array} \right), \end{aligned}$$

em que escrevemos os vetores em colunas para melhor visualizá-los. Como

$$(\alpha'_3)^2 = 1 - A^2 \cos^2(w(s)) - B^2 \operatorname{sen}^2(w(s)),$$

temos

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}^2(w(s))(A^2 - B^2) - (\alpha'_3(s))^2 &= A^2 - 1, \\ -\cos^2(w(s))(A^2 - B^2) - (\alpha'_3(s))^2 &= B^2 - 1. \end{aligned}$$

Assim calculamos

$$\begin{aligned} \alpha'(s) \times \alpha''(s) &= \frac{w'(s)}{\alpha'_3(s)} \left(\begin{array}{c} B(A^2 - B^2) \operatorname{sen}^2(w(s)) \cos(w(s)) - \alpha'_3(s) B \cos(w(s)) \\ -A(A^2 - B^2) \operatorname{sen}(w(s)) \cos^2(w(s)) - \alpha'_3(s) A \operatorname{sen}(w(s)) \\ \alpha'_3(s) [A B \operatorname{sen}^2(w(s)) + A B \cos^2(w(s))] \end{array} \right) \\ &= \frac{w'(s)}{\alpha'_3(s)} \left(\begin{array}{c} B \cos(w(s))(A^2 - 1) \\ A \operatorname{sen}(w(s))(B^2 - 1) \\ A B \alpha'_3(s) \end{array} \right), \end{aligned} \quad (3.13)$$

e também o produto misto

$$\begin{aligned}
(\alpha'(s), \alpha''(s), \alpha'''(s)) &= \frac{w'(s)w''(s)AB}{\alpha_3'(s)} [-(A^2 - 1)\cos(w(s))\sin(w(s)) \\
&\quad + (B^2 - 1)\cos(w(s))\sin(w(s)) + (A^2 + B^2)\cos(w(s))\sin(w(s))] \\
&\quad + \frac{w'(s)^3 AB}{\alpha_3'(s)} \{-(A^2 - 1)\cos^2(w(s)) - (B^2 - 1)\sin^2(w(s)) \\
&\quad + \frac{(A^2 - B^2)}{(\alpha_3'(s))^2} [(1 - A^2\cos^2(w(s)))\cos^2(w(s)) - (1 - B^2\sin^2(w(s)))\sin^2(w(s))]\} \\
&= \frac{w'(s)w''(s)AB}{\alpha_3'(s)} \cos(w(s))\sin(w(s)) [B^2 - A^2 + (A^2 - B^2)] \\
&\quad + \frac{w'(s)^3 AB}{\alpha_3'(s)} \left\{ \cos^2(w(s)) \left[-(A^2 - 1) + \frac{(A^2 - B^2)(1 - A^2\cos^2(w(s)))}{(\alpha_3'(s))^2} \right] \right. \\
&\quad \left. + \sin^2(w(s)) \left[-(B^2 - 1) + \frac{(A^2 - B^2)(1 - B^2\sin^2(w(s)))}{(\alpha_3'(s))^2} \right] \right\}.
\end{aligned}$$

Como $\alpha_3'(s)^2 = 1 - A^2\cos^2(w(s)) - B^2\sin^2(w(s))$, obtemos

$$\begin{aligned}
&\{\cos^2(w(s))[1 - A^2\cos^2(w(s)) - B^2\sin^2(w(s)) + A^2B^2 - B^2] \\
&\quad + \sin^2(w(s))[1 - A^2\cos^2(w(s)) - B^2\sin^2(w(s)) + A^2B^2 - A^2]\} \\
&= \{1 + A^2B^2 - A^2\cos^2(w(s)) - B^2\sin^2(w(s)) - \cos^2(w(s))B^2 - \sin^2(w(s))A^2\} \\
&= \{1 + A^2B^2 - (A^2 + B^2)\cos^2(w(s)) - (A^2 + B^2)\sin^2(w(s))\} \\
&= \{1 + A^2B^2 - A^2 - B^2\}.
\end{aligned}$$

Concluimos então que

$$(\alpha'(s), \alpha''(s), \alpha'''(s)) = \frac{w'(s)^3 AB}{\alpha_3'(s)^3} \{1 + A^2B^2 - A^2 - B^2\}. \quad (3.14)$$

Sabemos que $\tau_\alpha = (\alpha'(s), \alpha''(s), \alpha'''(s))/k_\alpha^2$. Assim, utilizando (1.7) e a terceira equação de (3.9), teremos $(\alpha'(s), \alpha''(s), \alpha'''(s)) = c_1 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$.

Além disso, observando que

$$\begin{aligned} AB\{1 + A^2B^2 - A^2 - B^2\} &= \frac{\lambda_3[\lambda_3^2 + (\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2) - \lambda_3(\lambda_3 - \lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_1)]}{[(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)]^{3/2}} \\ &= \frac{\lambda_3[\lambda_3^2 - \lambda_3\lambda_2 - \lambda_1\lambda_3 + \lambda_1\lambda_2 - \lambda_3^2 + \lambda_3\lambda_2 - \lambda_3^2 + \lambda_3\lambda_1 + \lambda_3^2]}{[(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)]^{3/2}} \\ &= \frac{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{[(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)]^{3/2}}, \end{aligned}$$

concluimos que

$$\left(\frac{w'(s)}{\alpha_3'(s)}\right)^3 = (\lambda_1\lambda_2\lambda_3) \frac{[(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)]^{3/2}}{\lambda_1\lambda_2\lambda_3} = [(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)]^{3/2}.$$

Portanto

$$\frac{w'(s)}{\alpha_3'(s)} = \sqrt{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)}. \quad (3.15)$$

Lembrando que $k_\alpha^2 = |\alpha' \times \alpha''|^2 / |\alpha'|^6 = |\alpha' \times \alpha''|^2$, pois α é p.c.a e omitindo s por simplicidade, podemos calcular k_α^2 a partir de (3.13) como segue

$$\begin{aligned} k_\alpha^2 &= \frac{(w')^2}{(\alpha_3')^2} [B^2 \cos^2(w)(A^2 - 1)^2 + A^2 \sin^2(w)(B^2 - 1)^2 + A^2 B^2 (\alpha_3')^2] \\ &= \frac{(w')^2}{(\alpha_3')^2} [B^2 \cos^2(w)(A^4 - 2A^2 + 1) + A^2 \sin^2(w)(B^4 - 2B^2 + 1) + A^2 B^2 (\alpha_3')^2] \\ &= \frac{(w')^2}{(\alpha_3')^2} [-2A^2 B^2 + \cos^2(w)(A^4 B^2 + B^2) + \sin^2(w)(B^4 A^2 + A^2) + A^2 B^2 (\alpha_3')^2] \\ &= \frac{(w')^2}{(\alpha_3')^2} [A^2 B^2 (-2 + \cos^2(w)A^2 + \sin^2(w)B^2 + (\alpha_3')^2) + \cos^2(w)B^2 + \sin^2(w)A^2] \\ &= \frac{(w')^2}{(\alpha_3')^2} [A^2 B^2 (-1 - (\alpha_3')^2 + (\alpha_3')^2) + \cos^2(w)B^2 + \sin^2(w)A^2] \\ &= \frac{(w')^2}{(\alpha_3')^2} [\cos^2(w)B^2 + \sin^2(w)A^2 - A^2 B^2] \\ &= \frac{(w')^2}{(\alpha_3')^2} [B^2 - \sin^2(w)B^2 + A^2 - \cos^2(w)A^2 - A^2 B^2] \\ &= \frac{(w')^2}{(\alpha_3')^2} [B^2 + A^2 - A^2 B^2 - 1 + (\alpha_3')^2] \\ &= \frac{(w')^2}{(\alpha_3')^2} [B^2 + A^2 - A^2 B^2 - 1] + (w')^2. \end{aligned}$$

De forma que podemos escrever

$$k_{\alpha}^2(s) - (w')^2(s) = \frac{(w')^2(s)}{(\alpha_3')^2(s)} [A^2 + B^2 - A^2 B^2 - 1].$$

Utilizando os valores de A e B calculamos

$$\begin{aligned} A^2 + B^2 - A^2 B^2 - 1 &= \frac{\lambda_3(\lambda_3 - \lambda_1) + \lambda_3(\lambda_3 - \lambda_2) - \lambda_3^2 - (\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)}{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)} \\ &= \frac{-\lambda_1 \lambda_2}{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)}. \end{aligned}$$

Junto com este resultado e (3.15) podemos reescrever a equação $k_{\alpha}^2(s) - (w')^2(s) = -\lambda_1 \lambda_2$ e concluir que

$$w'(s) = \sqrt{k_{\alpha}^2(s) + \lambda_1 \lambda_2}.$$

Para o caso da curva β basta fazer um argumento similar para termos um resultado análogo.

Em adição ao que foi feito acima, precisamos calcular então $k_{\alpha}(s)$ que será solução da EDO (1.15), como foi provado na Proposição 1.3. Vamos nos atentar ao fato de que por (3.9) podemos escrever a EDO autônoma

$$(y')^2 + y^4 + c_3 y^2 + \frac{c_1^2}{y^2} + c_1 c_2 = 0,$$

como

$$\begin{aligned} (y')^2 + y^4 + \lambda_1 \lambda_2 y^2 + \lambda_1 \lambda_3 y^2 + \lambda_2 \lambda_3 y^2 + \frac{\lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2}{y^2} + \lambda_1^2 \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_2^2 \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_3^2 \lambda_1 \lambda_2 \\ = (y')^2 + \frac{1}{y^2} (y^6 + y^4 (\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_3) + y^2 (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)) = 0. \end{aligned}$$

Agora observando que

$$(y^2 + \lambda_1 \lambda_2)(y^2 + \lambda_1 \lambda_3) = y^4 + y^2 (\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3) + (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3) \lambda_1,$$

então

$$(y^2 + \lambda_1 \lambda_2)(y^2 + \lambda_1 \lambda_3)(y^2 + \lambda_2 \lambda_3) = y^6 + y^4 (\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_3) + y^2 (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3) (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3),$$

ou seja, a EDO toma a forma

$$(y')^2 + \frac{1}{y^2}(y^2 + \lambda_1\lambda_2)(y^2 + \lambda_1\lambda_3)(y^2 + \lambda_2\lambda_3) = 0. \quad (3.16)$$

As curvaturas $k_\alpha(s)$, $k_\beta(t)$ são soluções positivas de (3.16). As soluções de equilíbrio, isto é, soluções em que $y'(s) \equiv 0$, são $y_1 = \sqrt{-\lambda_1\lambda_3}$ e $y_2 = \sqrt{-\lambda_2\lambda_3}$, pois λ_1 e λ_2 tem o mesmo sinal, e dão soluções estacionárias para (3.16).

No que segue provaremos que soluções não constantes estão contidas entre y_1 e y_2 . Sabendo que $(y')^2 > 0$ e $y^2 + \lambda_1\lambda_2 > 0$, pois λ_1 e λ_2 tem o mesmo sinal, então para que (3.16) tenha solução precisamos que $y^2 + \lambda_1\lambda_3$ e $y^2 + \lambda_2\lambda_3$ tenham sinais distintos. Suponha então que $y_1 > y_2$ (o caso para $y_2 > y_1$ é análogo), se $k_\alpha(s) > y_1$ então

$$(k_\alpha(s)^2 + \lambda_1\lambda_3) > 0, (k_\alpha(s)^2 + \lambda_2\lambda_3) > 0,$$

logo não será solução de (3.16), se $0 < k_\alpha(s) < y_2$ então

$$(k_\alpha(s)^2 + \lambda_1\lambda_3) < 0, (k_\alpha(s)^2 + \lambda_2\lambda_3) < 0,$$

portanto também não será solução de (3.16), o caso para $k_\beta(t)$ é análogo. Então as soluções positivas $k_\alpha(s)$ e $k_\beta(t)$ estão incluídas na faixa limitada por y_1 e y_2 . Usaremos este fato para mostra que $k_\beta(t)$ é uma translação horizontal de $k_\alpha(s)$. Para simplificar o argumento, usaremos desta vez que $y_1 < y_2$.

De fato, isto pode ser observado a partir do seguinte argumento. Considere uma EDO $x' = F(x)$, em que $F : U \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe C^1 . Então, se existem duas soluções x_1 e x_2 tais que

$$x_1(0) = x_0, x_2(t_0) = x_0.$$

Definimos $x_3(t) := x_2(t + t_0)$ e teremos

$$x_3'(t) = x_2'(t + t_0) = F(x_2(t + t_0)) = F(x_3(t)),$$

segue que x_3 é solução. Como $x_3(0) = x_2(0 + t_0) = x_2(t_0) = x_0$, logo, $x_1(0) = x_3(0)$. Como x_1 e x_3 são soluções, pelo Teorema de Existência e Unicidade, temos que

$$x_1(t) = x_3(t) = x_2(t + t_0).$$

Além disso, podemos observar que neste caso $x' \neq 0$, $\forall x \in (y_1, y_2)$ e portanto x é monótona crescente ou decrescente de acordo com o sinal de x' . Podemos fazer uma observação sobre o

intervalo maximal destas soluções que será toda a reta real uma vez que são contínuas e são monótonas decrescentes ou crescentes contidas na faixa y_1 e y_2 , um resultado semelhante pode ser observado dos gráficos das curvaturas dos exemplos no final do capítulo.

Em seguida, segue do fato provado anteriormente de que soluções não constantes de (3.16) estão contidas na faixa delimitada por y_1 e y_2 e da teoria de continuação de equações diferenciais ordinárias (veja Teorema 10.12 em [6]), que as soluções não constantes k_α e k_β estão definidas em \mathbb{R} . Como o sinal de y' é constante para $y_1 < y < y_2$, segue que y é monótona, com $\lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = y_1$ e $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = y_2$, se y é crescente e $\lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = y_2$ e $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = y_1$, se y é decrescente (este fato pode ser observado dos gráficos das curvaturas dos exemplos no final do capítulo). Em todo caso, para qualquer valor $y_0 \in (y_1, y_2)$, existe t_0 tal que $y(t_0) = y_0$. Assim, dado $y_0 \in (y_1, y_2)$, existem t_α e t_β tais que $k_\alpha(t_\alpha) = k_\beta(t_\beta) = y_0$. Segue do argumento acima que $k_\beta(t) = k_\alpha(\pm t + t_0)$, $t_0 \in \mathbb{R}$, em que o sinal positivo ou negativo depende dos sinais das derivadas das funções.

Por uma reparametrização de β , concluímos que $k_\beta(t) = k_\alpha(t)$ e que por (1.7) temos $\tau_\beta(t) = \tau_\alpha(t)$. Portanto as curvas α e β são congruentes.

Considerando todos os argumentos acima, provamos o seguinte resultado de classificação

Teorema 3.3. Seja $\Psi(s, t) = \alpha(s) + \beta(t)$ uma superfície mínima de translação com α e β parametrizadas por comprimento de arco. Suponha que $k_\alpha, k_\beta > 0$ e $\tau_\alpha \neq 0$, $\tau_\beta \neq 0$ em todo ponto. Então:

1. Existem duas constantes $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, $c_1 \neq 0$, tais que

$$k_\alpha^2 \tau_\alpha = k_\beta^2 \tau_\beta = c_1, \quad \frac{\Sigma_\alpha}{\tau_\alpha} - \tau_\alpha = \frac{\Sigma_\beta}{\tau_\beta} - \tau_\beta = c_2.$$

2. A curvatura k_α, k_β são soluções positivas da EDO autonoma

$$(y')^2 + y^4 + c_3 y^2 + \frac{c_1^2}{y^2} + c_1 c_2 = 0,$$

para alguma constante c_3 , e as curvas α e β tem a mesma órbita.

3. A menos de um movimento rígido, temos

$$\alpha(s) = \left(A \int^s \cos(w(s)), B \int^s \sin(w(s)), \int^s \sqrt{1 - A^2 \cos^2(w(s)) - B^2 \sin^2(w(s))} \right),$$

$$\beta(t) = \left(A \int^t \cos(w(t)), B \int^t \sin(w(t)), \int^t \sqrt{1 - A^2 \cos^2(w(t)) - B^2 \sin^2(w(t))} \right),$$

onde

$$A = \sqrt{\frac{\lambda_3}{\lambda_3 - \lambda_1}}, \quad B = \sqrt{\frac{\lambda_3}{\lambda_3 - \lambda_2}},$$

e $\lambda_1 \leq \lambda_2 < 0 < \lambda_3$ ou respectivamente $\lambda_1 \geq \lambda_2 > 0 > \lambda_3$ são as raízes da equação cúbica $-\lambda^3 + c_2\lambda^2 - c_3\lambda + c_1 = 0$ e

$$w(s) = \int^s \sqrt{k_\alpha(s)^2 + \lambda_1\lambda_2}. \quad (3.17)$$

3.2 Construção de superfícies mínimas de translação

Nesta seção, provaremos mais um resultado que é a recíproca do Teorema 3.3. Além disso, este resultado nos dá uma útil ferramenta para construir superfícies mínimas de translação.

Teorema 3.4. Suponha que $c_1 \neq 0$, c_2, c_3 são constantes tais que a equação cúbica

$$-\lambda^3 + c_2\lambda^2 - c_3\lambda + c_1 = 0 \quad (3.18)$$

tem 3 raízes reais $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Considere a EDO autônoma

$$(y')^2 + y^4 + c_3y^2 + \frac{c_1^2}{y^2} + c_1c_2 = 0, \quad (3.19)$$

e seja $k_\alpha(s) = k_\alpha(s; c_1, c_2, c_3)$ uma solução não constante positiva de (3.19). Denote por $\alpha(s)$ a curva parametrizada pelo comprimento de arco s com curvatura $k_\alpha(s)$ e torção $\tau_\alpha(s) = c_1/k_\alpha(s)^2$. Então a superfície de translação $\Psi(s, t) = \alpha(s) + \alpha(t)$ é mínima.

Demonstração. Como calculado anteriormente, a EDO (3.19) toma a forma (3.16). Então teremos $\lambda_i \neq 0$, não todos com o mesmo sinal. No caso em que $c_1 > 0$, podemos escolher $\lambda_1 \leq \lambda_2 < 0 < \lambda_3$ (analogamente, se $c_1 < 0$, escolhemos $\lambda_1 \geq \lambda_2 > 0 > \lambda_3$). Pela recíproca da Proposição 1.3, deduzimos para a curva α que

$$k_\alpha^2 \tau_\alpha = c_1, \quad \frac{\Sigma_\alpha}{\tau_\alpha} - \tau_\alpha = c_2, \quad \Sigma_\alpha + R_\alpha^2 + k_\alpha^2 = -c_3.$$

No ponto $\alpha(s)$, definimos uma transformação linear $L_{\alpha(s)}$ pelas relações

$$\begin{cases} L_{\alpha(s)}(\mathbf{t}_\alpha(s)) = k_\alpha(s)\mathbf{b}_\alpha(s), \\ L_{\alpha(s)}(\mathbf{n}_\alpha(s)) = -\tau_\alpha(s)\mathbf{n}_\alpha(s) - R_\alpha(s)\mathbf{b}_\alpha(s), \\ L_{\alpha(s)}(\mathbf{b}_\alpha(s)) = k_\alpha(s)\mathbf{t}_\alpha(s) - R_\alpha(s)\mathbf{n}_\alpha(s) + \frac{\Sigma_\alpha}{\tau_\alpha}(s)\mathbf{b}_\alpha(s). \end{cases} \quad (3.20)$$

A matriz desta transformação com respeito a base $\{\mathbf{t}_\alpha(s), \mathbf{n}_\alpha(s), \mathbf{b}_\alpha(s)\}$ é

$$L_{\alpha(s)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & k_\alpha(s) \\ 0 & -\tau_\alpha(s) & -R_\alpha(s) \\ k_\alpha(s) & -R_\alpha(s) & \frac{\Sigma_\alpha}{\tau_\alpha}(s) \end{pmatrix},$$

que é claramente simétrica e, como mostrado no início desta seção, é auto-adjunta. A equação característica de $L_{\alpha(s)}$ é dada pela equação (3.18) para todo s . Mais ainda, derivando (3.20) com respeito a s , e levando em consideração as equações de Frenet e as relações (1.18), encontramos

$$[L_{\alpha(s)}(\mathbf{t}_\alpha(s))]' = L'_{\alpha(s)}(\mathbf{t}_\alpha(s)) + L_{\alpha(s)}(\mathbf{t}_\alpha(s)') = [k_\alpha(s)\mathbf{b}_\alpha(s)]'.$$

Agora

$$[k_\alpha(s)\mathbf{b}_\alpha(s)]' = (V_1)' = k_\alpha(s)V_2 = k_\alpha(s)[- \tau_\alpha(s)\mathbf{n}_\alpha(s) - R_\alpha(s)\mathbf{b}_\alpha(s)] = k_\alpha(s)L_{\alpha(s)}(\mathbf{n}_\alpha(s))$$

e então

$$L_{\alpha(s)}(\mathbf{t}_\alpha(s)') = k_\alpha(s)L_{\alpha(s)}(\mathbf{n}_\alpha(s)),$$

de onde concluímos que

$$L'_{\alpha(s)}(\mathbf{t}_\alpha(s)) = 0.$$

De maneira inteiramente análoga teremos

$$L'_{\alpha(s)}(\mathbf{n}_\alpha(s)) = 0, \quad L'_{\alpha(s)}(\mathbf{b}_\alpha(s)) = 0.$$

Portanto, $L_{\alpha(s)}$ é uma transformação constante e por isso tem um auto-sistema constante para todo s . Tomando o auto-sistema como o referencial do Teorema 3.3 obtemos $\alpha'(s) = (A \cos(w(s)), B \sin(w(s)), \alpha'_3(s))$, onde

$$\alpha'_3(s) = \sqrt{1 - A^2 \cos^2(w(s)) - B^2 \sin^2(w(s))},$$

e $A = \sqrt{\lambda_3/(\lambda_3 - \lambda_1)}$ e $B = \sqrt{\lambda_3/(\lambda_3 - \lambda_2)}$. Mais ainda

$$(\alpha'_3(s), \alpha''_3(s), \alpha'''_3(s)) = k_\alpha^2 \tau_\alpha = c_1 = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = \frac{w'(s)^3}{(\alpha'_3(s))^3} AB \{1 + A^2 B^2 - A^2 - B^2\},$$

então

$$k_\alpha(s) - w'(s)^2 = -\lambda_1 \lambda_2.$$

Provaremos agora que a superfícies $\Psi(s, t) = \alpha(s) + \alpha(t)$ é mínima. Lembremos mais uma vez que, sendo α é p.c.a., $H = 0$ é equivalente a

$$\langle \alpha'(s) \times \alpha''(s), \alpha'(t) \rangle = \langle \alpha'(s), \alpha'(t) \times \alpha''(t) \rangle.$$

Além disso, segue de (3.13) que

$$\alpha'(s) \times \alpha''(s) = \left(\frac{w'(s)}{\alpha'_3(s)} (B \cos(w(s))(A^2 - 1), A \operatorname{sen}(w(s))(B^2 - 1), AB\alpha'_3(s)) \right),$$

então

$$\begin{aligned} \langle \alpha'(s) \times \alpha''(s), \alpha'(t) \rangle &= \frac{w'(s)}{\alpha'_3(s)} AB[(A^2 - 1) \cos(w(s)) \cos(w(t)) \\ &\quad + (B^2 - 1) \operatorname{sen}(w(s)) \operatorname{sen}(w(t)) + \alpha'_3(s) \alpha'_3(t)]. \end{aligned}$$

De maneira análoga

$$\begin{aligned} \langle \alpha'(s), \alpha'(t) \times \alpha''(t) \rangle &= \frac{w'(t)}{\alpha'_3(t)} AB[(A^2 - 1) \cos(w(s)) \cos(w(t)) \\ &\quad + (B^2 - 1) \operatorname{sen}(w(s)) \operatorname{sen}(w(t)) + \alpha'_3(s) \alpha'_3(t)]. \end{aligned}$$

Logo a superfície será mínima se provarmos que

$$\frac{w'(s)}{\alpha'_3(s)} = \frac{w'(t)}{\alpha'_3(t)}, \quad \forall s, t,$$

e isso é possível, pois de (3.15) obtemos

$$\frac{w'(s)}{\alpha'_3(s)} = \sqrt{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)} = \frac{w'(t)}{\alpha'_3(t)}.$$

□

Observação 3.2. Se a equação característica (3.18) tiver raiz dupla, isto é, $\lambda_1 = \lambda_2$, então $A = B = \sqrt{\lambda_3 / (\lambda_3 - \lambda_1)}$, e assim

$$\begin{cases} \alpha'(s) = (A \cos(w(s)), A \operatorname{sen}(w(s)), \sqrt{1 - A^2}), \\ \alpha''(s) = w'(s) (-A \operatorname{sen}(w(s)), A \cos(w(s)), 0), \end{cases}$$

então $k_\alpha^2 = A^2(w')^2$. Como $(w')^2 = k_\alpha^2 + \lambda_1\lambda_2$, vemos que

$$k_\alpha^2 = (w')^2 - \lambda_1\lambda_2 = \frac{k_\alpha^2}{A^2} - \lambda_1\lambda_2,$$

e portanto

$$k_\alpha^2 = \frac{A^2}{A^2 - 1}\lambda_1^2 = -\frac{\lambda_3}{\lambda_1}\lambda_1^2 = -\lambda_3\lambda_1.$$

Assim $\tau_\alpha = c_1/k_\alpha^2 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3/(-\lambda_3\lambda_1) = -\lambda_1$. Como a curvatura e a torção são constantes, a curva α é uma hélice circular. Por outro lado, a EDO autônoma (3.19) se torna

$$(y')^2 + \frac{1}{y^2}(y^2 + \lambda_1^2)(y^2 + \lambda_1\lambda_3)^2 = 0.$$

Observando agora que $(y')^2 \geq 0$ e também que $B = (y^2 + \lambda_1^2)(y^2 + \lambda_1\lambda_3)^2/y^2 \geq 0$, então $(y')^2 + B = 0$ se, e só se $y = K \neq 0$, onde $K \in \mathbb{R}$ é uma constante. Assim, como $\lambda_1\lambda_3 < 0$, teremos

$$\frac{1}{y^2}(y^2 + \lambda_1^2)(y^2 + \lambda_1\lambda_3)^2 = 0,$$

logo $K^2 + \lambda_1\lambda_3 = 0$ e portanto

$$K = \pm\sqrt{-\lambda_1\lambda_3},$$

ou seja, não existem soluções não constantes para a EDO (3.19).

Observação 3.3. A equação (3.19) nos dá a curvatura k da curva geradora α da superfície mínima de translação $\Psi(s, t) = \alpha(s) + \beta(t)$. Considerando a mudança de variável $u = -(k^2 + \frac{c_3}{3})$, e assim $k^2 = -\frac{(3u + c_3)}{3}$, teremos

$$u' = -2kk',$$

e portanto

$$(k')^2 = -\frac{3(u')^2}{4(3u + c_3)},$$

logo podemos escrever a equação (3.19) como

$$\begin{aligned} -\frac{3(u')^2}{4(3u + c_3)} + \frac{(3u + c_3)^2}{9} - \frac{c_3(3u + c_3)}{3} - \frac{3c_1^2}{(3u + c_3)} + c_1c_2 &= \\ = \frac{-27(u')^2 + 4(3u + c_3)^3 - 12c_3(3u + c_3)^2 - 108c_1 + 36(3u + c_3)c_1c_2}{36(3u + c_3)} &= 0. \end{aligned}$$

Reescrevendo de maneira mais simples temos

$$\begin{aligned} & -(u')^2 + 4u^3 + 4c_3u^2 + \frac{4}{3}c_3^2u + \frac{4}{27}c_3^3 - 4c_3u^2 - \frac{8}{3}c_3^2u - \frac{4}{9}c_3^3 - 4c_1^2 - 4c_1c_2u + \frac{4}{3}c_1c_2c_3 = \\ & = -(u')^2 + 4u^3 - u \left(\frac{4}{3}c_3^2 - 4c_1c_2 \right) - \left(\frac{8}{27}c_3^3 + 4c_1^2 - \frac{4}{3}c_1c_2c_3 \right) = 0. \end{aligned}$$

Considerando

$$g_2 = \frac{4}{3}c_3^2 - 4c_1c_2, \quad g_3 = \frac{8}{27}c_3^3 + 4c_1^2 - \frac{4}{3}c_1c_2c_3,$$

obtemos por fim

$$(u')^2 - 4u^3 + g_2u + g_3 = 0.$$

Então, como pode ser observado em [27], u é a forma real da \mathcal{P} -função de Weierstrass com invariantes g_2 e g_3 . Portanto k pode ser explicitamente escrita em termos das formas reais de equações elípticas.

Finalizamos mostrando exemplos do procedimento de construção de superfícies mínimas de translação com curvas geradoras não planas de acordo com o Teorema 3.4. Lembrando que do item 1 do Teorema 3.3, se a curva geradora α tem curvatura constante (respectivamente torção constante), então sua torção (respectivamente curvatura) é constante também, assim a curva é uma hélice circular e a superfície resultante é um helicóide como o Teorema 3.2.

Observação 3.4. A família de superfícies mínimas de translação é construída em termos das raízes do polinômio cúbico $-\lambda^3 + c_2\lambda^2 - c_3\lambda + c_1 = 0$. Aplicando uma homotetia do espaço ambiente \mathbb{R}^3 , que preserva a minimalidade da superfície e a propriedade de ser uma superfície de translação, podemos fixar uma das raízes dessa equação. Como consequência, as superfícies mínimas de translação podem ser parametrizadas por 2 parâmetros.

Utilizando os Teoremas 3.3 e 3.4, apresentamos aqui um esquema através de passos para construir exemplos de superfícies mínimas de translação no espaço Euclidiano. Lembramos aqui que fixar as constantes c_i é equivalente a fixar as raízes λ_i do polinômio cúbico (3.18).

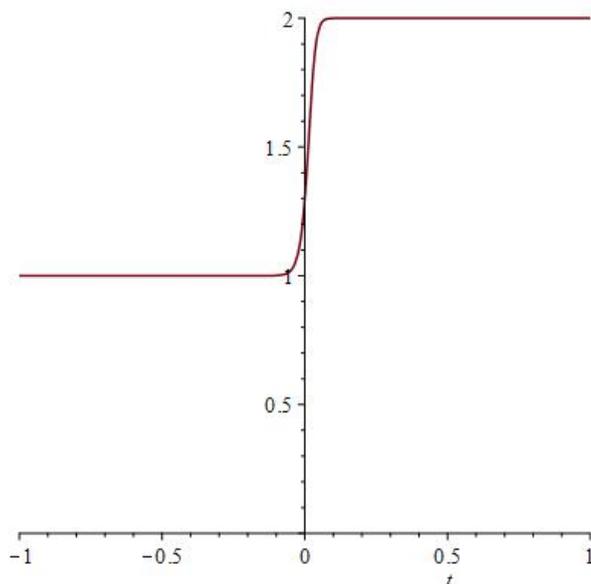
1. Fixe as raízes λ_i de (3.18). Por simplicidade podemos considerar $\lambda_1 \leq \lambda_2 < 0 < \lambda_3$. A raiz λ_3 será fixada pra ser $\lambda_3 = 1$. Calcule A e B .
2. Calcule c_i e o polinômio Eq. (3.18) através das relações (3.9) e (3.10).
3. Calcule os pontos de equilíbrio $y_1 = \sqrt{-\lambda_2\lambda_3}$ e $y_2 = \sqrt{-\lambda_1\lambda_3}$ de (3.19).
4. Fixe o valor inicial y_0 de (3.19), onde $y_1 < y_0 < y_2$.
5. Resolva numericamente a equação (3.19). Fixe um valor inicial w_0 para resolver numericamente a equação (3.17) e a função w .

6. Calcule a curva α .

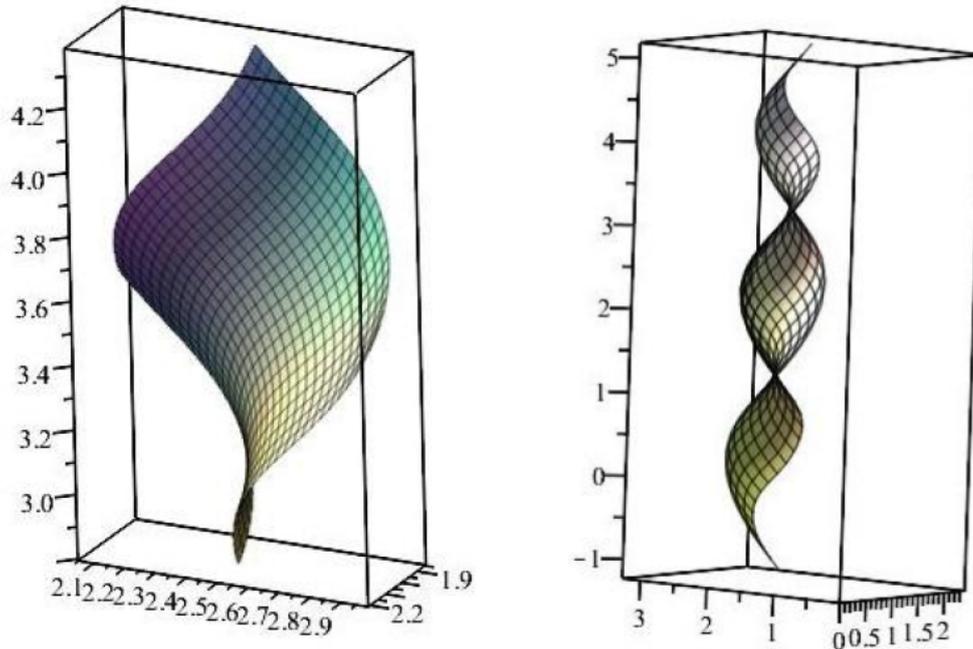
A seguir apresentaremos 3 exemplos da aplicação deste método. Os dois primeiros exemplos estão contidos em [8], enquanto o terceiro é autoral.

Exemplo 3.1. Caso do helicóide. Escolha a raiz dupla $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$. Então (3.18) se torna $-\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda + 1 = 0$ e $A = B = 1/\sqrt{2}$. Os pontos de equilíbrio serão $y_1 = y_2 = 1$. Assim tome $y_0 = 1$ como a condição inicial em (3.19). Então a solução é $k(s) = 1$ e portanto $\tau = 1$. Segue que α é uma hélice e então, concluímos a partir do Teorema 3.2 que a superfície é um helicóide.

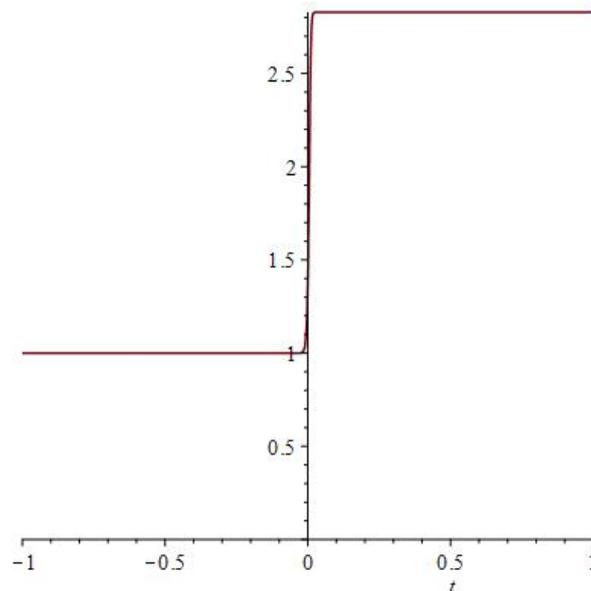
Exemplo 3.2. Tome $\lambda_1 = -4$ e $\lambda_2 = -1$. Então (3.18) se torna $-\lambda^3 - 4\lambda^2 + \lambda + 4 = 0$, então $A = 0.447$ e $B = 0.707$. Os pontos de equilíbrio serão $y_1 = 1$ e $y_2 = 2$. Escolha $y_0 = 1.3$ como condição inicial em (3.19). A curvatura $k(t)$ da curva α pode ser observada no gráfico a seguir com $t \in [-1, 1] \subset \mathbb{R}$



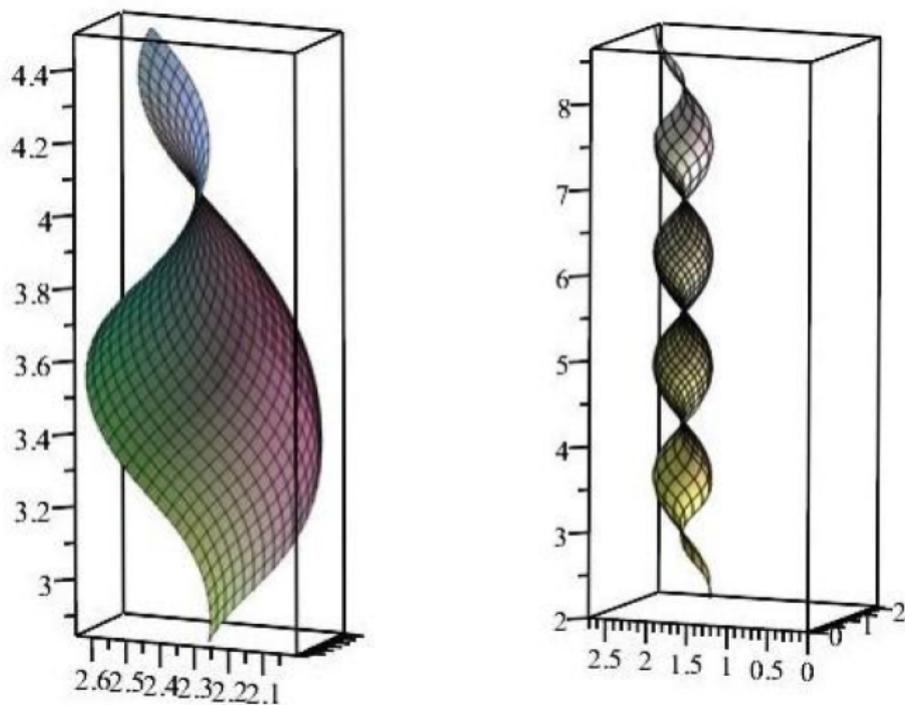
A superfície pode ser observada na figura abaixo, onde a imagem da esquerda foi plotada considerando a variação $(t, s) \in [0, 1] \times [0, 2] \subset \mathbb{R}^2$ enquanto a da direita varia em $(t, s) \in [0, 4] \times [0, 4] \subset \mathbb{R}^2$



Exemplo 3.3. . Tome $\lambda_1 = -2$ e $\lambda_2 = -1$. Então (3.18) se torna $-\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda + 2 = 0$, então $A = 0.577$ e $B = 0.707$. Os pontos de equilíbrio serão $y_1 = 1.412$ e $y_2 = 1$. Escolha $y_0 = 1.1$ como condição inicial em (3.19). A curvatura $k(t)$ da curva α pode ser observada no gráfico a seguir com $t \in [-1, 1] \subset \mathbb{R}$.



A superfície pode ser observada na figura abaixo, onde a imagem da esquerda foi plotada considerando a variação $(t, s) \in [0, 1] \times [0, 2] \subset \mathbb{R}^2$ enquanto a da direita varia em $(t, s) \in [0, 4] \times [0, 4] \subset \mathbb{R}^2$.



Bibliografia

- [1] Barbosa, J. L. M., Colares, A. G.: Minimal surfaces in \mathbb{R}^3 . Lecture Notes in Mathematics, 1195. Springer-Verlag, Berlin, (1986).
- [2] do Carmo, M.P.: Differential Geometry of Curves and Surfaces. Prentice Hall, Englewood Cliffs (1976)
- [3] Darboux, G.: Leçons sur la Théorie Générale des Surfaces et ses Applications Géométriques du Calcul Infinitésimal, vol. 1–4. Chelsea Publ. Co, reprint (1972)
- [4] Darboux, J.G.: Théorie Générale des Surfaces. Livre I. Gauthier-Villars, Paris (1914)
- [5] Dillen, F., Van de Woestyne, I., Verstraelen, L., Walrave, J.T.: The surface of Scherk in E^3 : a special case in the class of minimal surfaces defined as the sum of two curves. Bull. Inst. Math. Acad. Sin. 26, 257–267 (1998)
- [6] Doering, C. I., Lopes, A. O.: Equações Diferenciais Ordinárias. Coleção Matemática Universitária. IMPA (2005).
- [7] Eisland, J.: On a certain class of algebraic translation surfaces. Am. J. Math. 29, 363–386 (1907)
- [8] Hasanis, Thomas; López, Rafael. Classification and construction of minimal translation surfaces in Euclidean space. Results Math. 75 (2020), no. 1, Paper No. 2, 22 pp
- [9] Hasanis, T., López, R.: Translation surfaces in Euclidean space with constant Gaussian curvature. A ser publicado em Commun. Anal. Geom.
- [10] Inoguchi, J.-I., López, R., Munteanu, M.I.: Minimal translation surfaces in the Heisenberg group Nil^3 . Geom. Dedicata 161, 221–231 (2012)
- [11] Langer, J., Singer, D.: The total squared curvature of closed curves. J. Differ. Geom. 20, 1–22 (1984)

- [12] Lie, S.: Beiträge zur Theorie des Minimalflächen I. Math. Ann. 14, 331–416 (1879)
- [13] Lima, Elon L. "Algebra Linear" 1.ed. Rio de Janeiro : IMPA, 2014.
- [14] Liu, H.: Translation surfaces with constant mean curvature in 3-dimensional spaces. J. Geom. 64, 141–149 (1999)
- [15] López, R.: Minimal translation surfaces in hyperbolic space. Beitr. Algebra Geom. 52, 105–112 (2011)
- [16] López, R., Munteanu, M.I.: Surfaces with constant mean curvature in Sol geometry. Differ. Geom. Appl. 29(suppl. 1), S238–S245 (2011)
- [17] López, R., Munteanu, M.I.: Minimal translation surfaces in Sol³. J. Math. Soc. Jpn. 64, 985–1003 (2012)
- [18] López, Rafael; Perdomo, Óscar. Minimal translation surfaces in Euclidean space. J. Geom. Anal. 27 (2017), no. 4, 2926–2937.
- [19] Moruz, M., Munteanu, M.I.: Minimal translation hypersurfaces in E⁴. J. Math. Anal. Appl. 439, 798–812 (2016)
- [20] Munteanu, M.I., Palmas, O., Ruiz-Hernandez, G.: Minimal translation hypersurfaces in Euclidean space. Mediterr. J. Math. 13, 2659–2676 (2016)
- [21] Moore, C.L.E.: Translation surfaces in hyperspace. Bull. Am. Math. Soc. 25, 75–85 (1918)
- [22] Nitsche, J.C.C.: Lectures on Minimal Surfaces. Cambridge University Press, Cambridge (1989)
- [23] Scherk, H.F.: Bemerkungen über die kleinste Fläche innerhalb gegebener Grenzen. J. Reine Angew. Math. 13, 185–208 (1835)
- [24] Stackel, P.: Die Kinematische Erzeugung von Minimalflächen Erste Abhandlung. Trans. Am. Math. Soc. 72, 293–313 (1906)
- [25] Weisstein, Eric W. "Elliptic Integral of the First Kind." From MathWorld—A Wolfram Web Resource. <https://mathworld.wolfram.com/EllipticIntegraloftheFirstKind.html> Acesso em: 09/06/21
- [26] Weisstein, Eric W. "Jacobi Amplitude." From MathWorld—A Wolfram Web Resource. <https://mathworld.wolfram.com/JacobiAmplitude.html> Acesso em: 09/06/21

-
- [27] Weisstein, Eric W. "Weierstrass Elliptic Function." From MathWorld—A Wolfram Web Resource. <https://mathworld.wolfram.com/WeierstrassEllipticFunction.html> Acesso em: 09/06/21
- [28] Yang, Y., Yu, Y., Liu, H.: Linear Weingarten centroaffine translation surfaces in \mathbb{R}^3 . J. Math. Anal. Appl. 375, 458–466 (2011)
- [29] Yoon, D.W.: Minimal translation surfaces in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Taiwan. J. Math. 17, 1545–1556 (2013)