

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM CIÊNCIAS
MECÂNICAS**

**IMPLEMENTAÇÃO IMPLÍCITA DO MODELO DE
ROUSSELIER E AVALIAÇÃO DA FRATURA
DÚCTIL EM MATERIAIS METÁLICOS**

Vinícius Aquino Machado Rodrigues

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
Faculdade de Tecnologia
Departamento de Engenharia Mecânica

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO IMPLEMENTAÇÃO IMPLÍCITA DO MODELO DE ROUSSELIER E AVALIAÇÃO DA FRATURA DÚCTIL EM MATERIAIS METÁLICOS

Vinicius Aquino Machado Rodrigues

Dissertação de Mestrado submetida ao Departamento de Engenharia Mecânica da Faculdade de Tecnologia da Universidade de Brasília como requisito para obtenção do grau de Mestre em Ciências Mecânicas.

APROVADA POR:

Prof. Lucival Malcher, Dr. UnB/ ENM

(Orientador)

Prof. Leonel Leonardo Delgado Morales, Dr. UACH-Chile

(Coorientador)

Prof. Hermes Carvalho, Dr. UFMG

(Examinador externo)

Prof. Maksym Ziberov, Dr. UnB/ ENM

(Examinador externo)

Prof. Thiago de Carvalho Rodrigues Doca, Dr. UnB/ ENM

(Examinador interno)

Prof. José Alexander Araújo, Dr. UnB/ ENM

(Suplente)

Brasília, 30 de julho de 2021

FICHA CATALOGRÁFICA

RODRIGUES, VINÍCIUS AQUINO MACHADO

IMPLEMENTAÇÃO IMPLÍCITA DO MODELO DE ROUSSELIER E AVALIAÇÃO DA FRATURA DÚCTIL EM MATERIAIS METÁLICOS

106 p., 210 x 297 mm (ENM/FT/UnB, Mestre, Ciências Mecânicas, 2021)

Dissertação de Mestrado – Universidade de Brasília,
Faculdade de Tecnologia - Departamento de Engenharia Mecânica.

Palavras chaves:

- | | |
|------------------------------|-------------------------|
| 1. Modelo de Rousselier | 2. Modelo de Gurson |
| 3. Fratura dúctil | 4. Integração Implícita |
| 5. Micromecânica de Defeitos | |

I. ENM/FT/UnB

II. Título (série)

REFERÊNCIA

RODRIGUES, V. A. M., (2021), Implementação Implícita do Modelo de Rousselier e Avaliação da Fratura Dúctil em Materiais Metálicos. Dissertação de mestrado, Publicação ENM.DM-2021, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Brasília, DF, 106 p.

CESSÃO DE DIREITOS

AUTOR: Vinícius Aquino Machado Rodrigues.

TÍTULO: Implementação Implícita do Modelo de Rousselier e Avaliação da Fratura Dúctil em Materiais Metálicos.

GRAU: Mestre.

ANO: 2021.

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta dissertação de mestrado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte dessa dissertação de mestrado pode ser reproduzida sem autorização por escrito do autor.

Vinícius Aquino Machado Rodrigues

e-mail: vinciusaquino06@gmail.com

O segredo da vida não são as respostas e sim a capacidade de se fazer as perguntas corretas.

Vinicius Aquino Machado Rodrigues

Agradecimentos

Agradeço em primeiro lugar ao meu maior exemplo de ser humano, minha amada mãe, Tereza Cristina, que sempre esteve ao meu lado, contribuindo para minha evolução como pessoa, ajudando, ensinando e torcendo por mim ao longo de toda esta jornada.

Agradeço ao Prof. Dr. Lucival Malcher pela orientação, disposição e amizade me encorajando a sair da zona de conforto e procurar novos desafios, acreditando sempre no meu potencial.

Agradeço a Deus por tudo o que fez e faz em minha vida, em especial por todas as pessoas maravilhosas que ele tem colocado em meu caminho, essenciais em momentos de descontração para um repouso mental, cada risada ajudou a continuar.

Esta dissertação tem como objetivo principal implementar, através de uma estratégia implícita de integração das equações de fluxo o modelo constitutivo de Rousselier, em uma proposição onde leva-se em consideração a porosidade como variável interna de dano e endurecimento isotrópico, no intuito de descrever o comportamento mecânico até a fratura dúctil das ligas de alumínio AA6101-T4 e de aço AISI 4340-Recozida, considerando os regimes elástico e plástico. Os ensaios experimentais foram obtidos segundo os trabalhos de Rodrigues (2018) e Malcher *et al.* (2020), onde foram usinados corpos de prova a partir da liga de alumínio AA6101-T4, com as seguintes geometrias: cilíndrico liso, entalhado com 10mm e entalhado com 6mm. Para o caso da liga de aço AISI 4340-Recozida os procedimentos experimentais foram retirados do trabalho de Morales (2020), onde foram usinados corpos de prova com as seguintes geometrias: cilíndrico liso, entalhado com 10mm, entalhado com 6mm e entalhado com 4mm. Os ensaios experimentais, para ambos os trabalhos citados anteriormente foram conduzidos mediante a aplicação de cargas monotônicas de tração, selecionados de maneira a observar diferentes níveis de razão de triaxialidade, na definição do estado de tensão. As ligas AA6101-T4 e AISI 4340-Recozida foram selecionadas de modo a permitir a análise da influência do nível de ductilidade no desempenho do modelo. O modelo de Rousselier foi calibrado partir dos resultados experimentais citados anteriormente, sendo possível a análise da deformação plástica equivalente na fratura e a porosidade crítica. Para efeitos comparativos, o modelo de Rousselier foi contraposto com o modelo de Gurson, bem como com os resultados experimentais, com o objetivo de se avaliar a capacidade preditiva do local e instante esperado para a falha dúctil, para o modelo de Rousselier. Inicialmente foram abordados os detalhes matemáticos de cada modelo assim como seus respectivos algoritmos de integração implícita, por meio da resolução de sistemas não-lineares de equações residuais pelo método de Newton-Raphson. Observou-se que a deformação plástica equivalente na fratura diminui com o aumento do nível da razão de triaxialidade para ambas as ligas estudadas para o modelo de Gurson, conforme observa-se na literatura. No entanto, as simulações realizadas segundo o modelo de Rousselier apresenta a mesma variável como independente do nível de triaxialidade, apresentando o mesmo nível de deformação plástica crítica. Foi possível observar que o modelo de Rousselier apresenta uma descrição indicando que o material poderia resistir mais a fratura, diferente do observado na prática onde o corpo de prova já havia fraturado. Quanto a determinação do local para início da falha no corpo de prova, o modelo de Rousselier indicou a parte externa do corpo de prova como ponto crítico, diferentemente do observado experimentalmente. Para ambas as ligas o modelo de Rousselier apresentou erros relativos ao deslocamento na fratura maiores do que o modelo de Gurson, especialmente no caso da liga AISI 4340-Recozida, indicando seu uso preferencialmente, em materiais com maiores níveis de ductilidade, como o caso da liga de alumínio AA 6101-T4.

Palavras Chave: Modelo de Rousselier, Modelo de Gurson, Fratura Dúctil, Integração Implícita, Micromecânica de Defeitos.

ABSTRACT

This dissertation has as main objective to implement, through an implicit strategy of integration of the flow equations, the constitutive model of Rousselier in a proposition where porosity is considered as an internal variable of damage and isotropic hardening, in order to describe the mechanical behavior until the ductile fracture of the aluminum alloy AA6101-T4 and steel alloy AISI 4340-Annealed, considering the elastic and plastic regimes. The experimental tests were obtained according to the works of Rodrigues (2018) and Malcher *et al.* (2020), where specimens were machined from the aluminum alloy AA6101-T4, with the following geometries: smooth cylindrical, notched with 10mm and notched with 6mm. For the case of steel alloy AISI 4340-Annealed, the experimental procedures were taken from the work of Morales (2020), where specimens were machined with the following geometries: smooth cylindrical, notched with 10mm, notched with 6mm and notched with 4mm. The experimental tests for both works mentioned previously were conducted by applying monotonic tensile loads, selected in order to observe different levels of stress triaxiality, in the definition of the stress state. The alloys AA6101-T4 and AISI 4340-Annealed were selected in order to analyze the influence of the level of ductility at the model's performance. Rousselier's model was calibrated from the experimental results mentioned previously, making it possible to analyze the equivalent plastic strain in the fracture and the critical porosity. For comparative purposes, Rousselier's model was contrasted with Gurson's model as well as with the experimental results, with the objective of evaluating the predictive capacity of the expected location and instant for the ductile fracture, for the Rousselier's model. Initially, the mathematical details of each model were addressed, as well as their respective implicit integration algorithms, through the resolution of nonlinear systems of residual equations by the Newton-Raphson method. It was observed that the equivalent plastic strain at the fracture decreases with the increase of the stress triaxiality for both alloys studied, AA6101-T4 and AISI 4340-Annealed, for the Gurson's model, as observed in the literature. However, the simulations performed according to the Rousselier's model present the same variable as independent of the stress triaxiality, presenting the same level of critical plastic strain. It was possible to observe that Rousselier's model presents a description that the material could resist more to fracture, different from what was observed in practice where the specimen had already fractured. Regarding the determination of the local for the beginning of the failure in the specimen, the Rousselier's model indicated the external part of the specimen as a critical point, differently from what was observed experimentally. For both alloys, the Rousselier's model showed greater relative errors to fracture displacement than the Gurson's model, especially in the case of the AISI 4340-Annealed alloy, indicating its preferential use in materials with higher levels of ductility, such as the case of the aluminum alloy AA 6101-T4.

Keywords: Rousselier's model, Gurson's model, Ductile Fracture, Implicit Integration, Micromechanics.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	1
1.1. MOTIVAÇÃO E SELEÇÃO DO MATERIAL ESTUDADO	1
1.2. OBJETIVOS DO TRABALHO	5
1.3. METODOLOGIA	5
1.4. ESTRUTURA DO TRABALHO	8
2. MODELAGEM CONSTITUTIVA	10
2.1 ASPECTOS GERAIS	10
2.2 TERMODINÂMICA COM VARIÁVEIS INTERNAS	15
2.3 MODELO DE GURSON	16
2.4 MODELO DE ROUSSELIER	21
2.2.1 Formulação	22
2.2.2 Equações constitutivas	24
3. INTEGRAÇÃO IMPLÍCITA	29
3.1 ALGORITMO DE ATUALIZAÇÃO DAS TENSÕES E VARIÁVEIS INTERNAS	29
3.2 MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON	33
3.3 ALGORITMO DE RETORNO PARA O MODELO DE GURSON	37
3.4 OPERADOR TANGENTE CONSISTENTE	40
4. RESULTADOS NUMÉRICOS E EXPERIMENTAIS	43
4.1 GEOMETRIA DOS CORPOS DE PROVA	43
4.2 DADOS EXPERIMENTAIS	46
4.2.1 Liga de alumínio AA6101-T4	46
4.2.2 Liga de aço AISI 4340	47
4.3 PROCEDIMENTO DE CALIBRAÇÃO	48
4.4 CARACTERÍSTICAS DO MATERIAL	55
4.5 DEFINIÇÃO DAS MALHAS E CONDIÇÕES DE CONTORNO	56
4.6 CURVAS DE FORÇA DE REAÇÃO NUMÉRICAS E EVOLUÇÃO DO DANO	58
4.3.1 Liga de alumínio AA6101-T4	58
4.3.2 Liga de aço AISI 4340-Recozido	63
4.7 EVOLUÇÃO DA DEFORMAÇÃO PLÁSTICA EQUIVALENTE	67
3.4.1 Liga de alumínio AA6101-T4	67
3.4.2 Liga de aço AISI 4340-Recozido	72
4.8 AVALIAÇÃO DA CONSISTÊNCIA TERMODINÂMICA DO MODELO DE ROUSSELIER	77
4.9 ANÁLISES GERAIS	81
5. CONCLUSÕES GERAIS E TRABALHOS FUTUROS	83
5.1 CONCLUSÕES	83
5.1.1 Quanto aos objetivos propostos no trabalho:	83
5.1.2 Quanto ao material:	83
5.1.3 Quanto a geometria dos CPs:	84
5.1.4 Quanto a porosidade:	85
5.1.5 Quanto deformação plástica equivalente:	85
5.1.6 Quanto a avaliação da pressão hidrostática:	85
5.2 TRABALHOS FUTUROS	86
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	87

LISTA DE FIGURAS

Figura 1-1.(a), (b) Simulação de conformação eletro-hidráulica em chapas de metal DP600 (Fonte: Sarraf e Green, 2018) e (c) Estudo de caso (Fonte: Hosseini Tehrani e Ferestadeh, 2014).	3
Figura 1-2. Aplicações industriais AA 6101-T4.	4
Figura 1-3. Aplicações industriais AISI 4340-Recozido.	4
Figura 2-1. Modelagem da fratura dúctil. Adaptado de Rousselier, 1987.	14
Figura 2-2. Matriz de vazios, formas aleatórias dos vazios e orientações, componentes tensoriais macroscópico e microscópico. Adaptado de Gurson, 1975.	17
Figura 2-3. Geometria dos vazios para o modelo de Gurson. (a) vazio cilíndrico em matriz perfeitamente plástica; (b) vazio esférico e principais eixos do sistema de coordenadas. Adaptado de Gurson, 1975.	19
Figura 3-1. Fluxograma da Estratégia Numérica para solução do problema uniaxial.	29
Figura 4-1. Representação esquemática dos pontos de calibração e as geometrias dos CPs.	44
Figura 4-2. Desenhos técnicos para os corpos de prova cilíndrico liso. (a) CP cilíndrico liso (b) CP cilíndrico com raio de entalhe de 10 mm (c) CP cilíndrico com raio de entalhe de 6 mm (d) CP cilíndrico com raio de entalhe de 4 mm. Obs: todas as dimensões estão em milímetro.	44
Figura 4-3. Relação geométrica do corpo de prova na região crítica.	45
Figura 4-4. Curvas de reação para os CPs cilíndricos – AA 6101-T4.	47
Figura 4-5. Curvas de reação para os CPs cilíndricos - AISI 4340-Recozido.	48
Figura 4-6. Descrição da função objetiva.	49
Figura 4-7. Curva da força de reação <i>versus</i> deslocamento das ligas AA-6101-T4 e AISI 4340 recozida, após a convergência da função objetiva.	51
Figura 4-8. Curva da porosidade crítica <i>versus</i> deslocamento, resultados após a convergência da função objetiva.	52
Figura 4-9 Curva de endurecimento isotrópico para os modelos de Rousselier e Gurson.	54
Figura 4-10. Malhas de elementos finitos para os CPs cilíndricos. (a) cilíndrico liso, (b) cilíndrico entalhado R = 10 mm, (c) cilíndrico entalhado com R = 6 mm (d) cilíndrico entalhado com R = 4 mm.	57
Figura 4-11. Condições de contorno do problema em MEF, para o CP cilíndrico liso.	58
Figura 4-12. Distribuição do dano para CP cilíndrico liso - AA6101-T4.	59
Figura 4-13. Curvas de força de reação, distribuição do dano e nó crítico para o CP entalhado – R=10 mm - AA6101-T4.	60
Figura 4-14. Curvas de força de reação, distribuição do dano e nó crítico para o CP entalhado – R=6 mm - AA6101-T4.	62
Figura 4-15. Distribuição do dano para CP cilíndrico liso AISI 4340-Recozido.	63
Figura 4-16. Curvas de força de reação, distribuição do dano e nó crítico para o CP entalhado – R=10 mm AISI 4340-Recozido.	64
Figura 4-17. Curvas de força de reação, distribuição do dano e nó crítico para o CP entalhado – R=6 mm AISI 4340-Recozido.	65
Figura 4-18. Curvas de força de reação, distribuição do dano e nó crítico para o CP entalhado – R=4 mm AISI 4340-Recozido.	66
Figura 4-19. Evolução e distribuição da deformação plástica equivalente para o CP cilíndrico liso. Liga AA6101-T4.	68
Figura 4-20. Evolução e distribuição da deformação plástica equivalente para o CP entalhado – R=10 mm. Liga AA6101-T4.	69
Figura 4-21. Evolução e distribuição da deformação plástica equivalente para o CP entalhado – R=6 mm. Liga AA6101-T4.	70
Figura 4-22. Deformação plástica equivalente na fratura em função da razão de triaxialidade inicial.	72
Figura 4-23. Evolução e distribuição da deformação plástica equivalente para o CP liso.	73
Figura 4-24. Evolução e contorno da deformação plástica equivalente para o CP entalhado – R=10 mm.	74
Figura 4-25. Evolução e distribuição da deformação plástica equivalente para o CP entalhado – R=6 mm.	75

Figura 4-26. Evolução e distribuição da deformação plástica equivalente para o CP entalhado – $R=4$ <i>mm</i>	76
Figura 4-27. Deformação plástica equivalente na fratura em função da razão de triaxialidade inicial. AISI 4340-Recozido.....	77
Figura 4-28. Níveis de pressão hidrostática na fratura – Liga de alumínio AA 6101-T4. Observação: Medidas em MPa.....	79
Figura 4-29. Níveis de pressão hidrostática na fratura – Liga de aço AISI 4340 - Recozido. Observação: Medidas em MPa.....	80

LISTA DE TABELAS

Tabela 2-1. Variáveis de estado para a teoria de Rousselier.	24
Tabela 4-1. Dados iniciais dos corpos de prova utilizados.....	46
Tabela 4-2. Parâmetros da curva de endurecimento e de dano para as ligas AA6101-T4 e AISI 4340 recozida	53
Tabela 4-3. Propriedades mecânicas das ligas AA 6101-T4 e AISI 4340-Recozida.	56
Tabela 4-4. Composição química das ligas AA 6101-T4 e AISI 4340-Recozida. Elementos em massa%.....	56
Tabela 4-5. Deslocamento na fratura e erros obtidos em cada simulação – AA 6101-T4.....	63
Tabela 4-6. Deslocamento na fratura e erros obtidos – AISI 4340-Recozido.	67
Tabela 4-7. Comparativo entre as deformações plásticas equivalente na fratura para cada modelo – AA 6101-T4.....	71
Tabela 4-8. Comparativo entre as deformações plásticas equivalente na fratura para cada modelo AISI 4340-Recozido.	77

LISTA DE QUADROS

Quadro 2-1. Modelo matemático de Gurson com endurecimento isotrópico.....	21
Quadro 2-2. Modelo matemático de Rousselier com endurecimento isotrópico.....	27
Quadro 3-1. Atualização das tensões e variáveis internas – modelo de Rousselier.....	33
Quadro 3-2. Algoritmo de retorno (Newton-Raphson) - Rousselier	34
Quadro 3-3. Modelo numérico de Gurson.....	38
Quadro 3-4. Algoritmo de retorno (Newton-Raphson) - Gurson	39

LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolos Gregos

ν	Coefficiente de Poisson
ω_0	Conjunto inicial de estimativas para ajuste da curva de encruamento
σ_1	Constante de calibração para o modelo de Rousselier
$\boldsymbol{\varepsilon}_n^e$	Deformação elástica
$\boldsymbol{\varepsilon}_n^p$	Deformação plástica
$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$	Deformação plástica equivalente
$\hat{\boldsymbol{\sigma}}$	Função algorítmica constitutiva implícita para a atualização das tensões
ϕ	Função de escoamento
$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}$	Incremento de deformação
$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p$	Incremento da deformação plástica
σ_y	Limite de escoamento
$\dot{\gamma}$	Multiplicador plástico
$\boldsymbol{\omega}$	Parâmetros de entrada da calibração da curva de força de reação
$\boldsymbol{\varepsilon}_d^p$	Parte desviadora do tensor das deformações plásticas
$\boldsymbol{\varepsilon}_v^p$	Parte volumétrica do tensor das deformações plásticas
η	Razão de triaxilidade
σ_R	Tensão de ruptura
$\boldsymbol{\varepsilon}^p$	Tensor das deformações elásticas
$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{eT}$	Tensor das deformações elásticas tentativas
$\boldsymbol{\varepsilon}^p$	Tensor das deformações plásticas
$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{pT}$	Tensor das deformações plásticas equivalente tentativa
$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^T$	Tensor das tensões tentativa
$\boldsymbol{\varepsilon}$	Tensor deformação
$\boldsymbol{\varepsilon}_{d,n+1}^{eT}$	Tensor deformação elástica tentativa desviador
$\boldsymbol{\varepsilon}_{v,n+1}^{eT}$	Tensor deformação elástica tentativa volumétrico
σ_{eq}	Tensão equivalente de um estado multiaxial de tensões
$\boldsymbol{\sigma}$	Tensor tensão de Cauchy

Símbolos Latinos

\boldsymbol{S}_{n+1}^T	Componente desviadora tentativa do tensor das tensões
p_{n+1}^T	Componente hidrostática tentativa do tensor das tensões
D	Constante de calibração para o modelo de Rousselier
\bar{d}	Deslocamento vertical prescrito
HB	Dureza Brinell
F^{EXP}	Força experimental
$f(\boldsymbol{\omega})$	Função objetiva
N	Funções de forma
F^{NUM}	Força numérica no método de elementos finitos
G	Módulo de cisalhamento
H^I	Módulo de endurecimento isotrópico
E	Módulo de elasticidade do material
K	Módulo de elasticidade volumétrico
N	Número de pontos de dados experimentais
\mathbb{D}^e	Operador tangente elástico
\mathbb{D}^{ep}	Operador tangente elastoplástico

f	Parâmetro de dano (Fração volumétrica de vazios)
N_d	Parte desviadora do vetor de fluxo plástico
N_v	Parte volumétrica do vetor de fluxo plástico
I_1, I_2, I_3	Primeiro, segundo e terceiro invariantes do tensor das tensões
J_2, J_3	Segundo e terceiro invariantes do tensor desviador
\dot{f}	Taxa de evolução do dano
p	Tensão hidrostática
\mathbb{D}^e	Tensor constitutivo de elasticidade
S	Tensor desviador
\mathbb{I}^d	Tensor desviador identidade de quarta ordem
\mathbb{I}	Tensor identidade de quarta ordem
I	Tensor identidade de segunda ordem
$tr(\sigma)$	Traço do tensor
N	Vetor de fluxo plástico

Lista de abreviações e siglas

AA	Aluminum Alloy
AISI	American Iron and Steel Institute
ASTM	American Society for Testing and Materials
BOP	Blowout Preventer
CP	Corpo de Prova
MCD	Mecânica do Dano Contínuo
MEF	Método de Elementos Finitos
MID	Micromecânica de Defeitos
TPI	Termodinâmica de Processos Irreversíveis

1. INTRODUÇÃO

O estudo do comportamento mecânico do material tem sido objeto de interesse de setores industriais e acadêmicos da engenharia. Neste presente capítulo serão apresentadas as motivações para o estudo do modelo de Rousselier e a seleção do material, com suas principais aplicações práticas em cenários acadêmicos e industriais, os objetivos principais da dissertação e a metodologia utilizada para alcançá-los, além da estrutura textual utilizada.

1.1. MOTIVAÇÃO E SELEÇÃO DO MATERIAL ESTUDADO

A maneira como o material se comporta pode levar a diferentes aplicações industriais. Um material dúctil, por exemplo, pode ser aplicado em atividades que envolvam deformações, como os materiais metálicos, enquanto que um material frágil pode ser aplicado como isolante térmico, vide o caso das cerâmicas. Pode-se observar que o comportamento do material é um objeto de interesse, sobretudo de setores industriais da engenharia, em especial a parte do comportamento não linear, onde ocorre a deformação permanente, a fim de descrever o momento da falha, um dos campos teóricos mais abordados, pela sua aplicabilidade em desenvolvimento de projetos. Um modelo teórico que descreva o comportamento do material matematicamente é chamado de modelo constitutivo.

Nas últimas duas décadas, observou-se um aumento substancial na conscientização do meio industrial, do grande potencial existente na aplicação de métodos científicos, durante a concepção destes novos produtos (Malcher, 2011). Quando são cometidos erros em projetos de grande magnitude, as consequências podem ser severas, como o caso da explosão da plataforma Deepwater Horizon, em abril de 2010, que causou um grave vazamento de petróleo no Golfo do México, considerado o maior desastre ambiental da história dos Estados Unidos. Decorridos anos de investigações foi possível observar que um dos motivos agravantes para o acidente foi o inadequado funcionamento da BOP (uma válvula de segurança Blowout Preventer), dispositivo que poderia contribuir significativamente para minimizar o impacto e os danos. Este dispositivo de segurança é acionado em situações emergenciais, quando ocorre um aumento repentino na vazão de petróleo que flui do poço para o tubo coletor principal, denominado *riser*, de forma descontrolada, realizando a selagem do poço de petróleo, por meio do cisalhamento e corte *riser* rígido. As simulações realizadas posteriormente mostraram que devido a um problema de alinhamento do riser, as forças laterais por conta da flambagem empurraram o tubo para fora do centro e fizeram com que os mecanismos de fechamento da BOP deformassem o tubo em vez de cortá-lo. O funcionamento inadequado da BOP foi provocado pelo fato de o conjunto válvula/*riser* ter sido projetado com base em modelos constitutivos que assumem von Mises como critério de

falha. De acordo com a literatura, o critério de von Mises é preciso para condições trativas, contudo, pode ser considerado bastante impreciso para condições cisalhantes, podendo prever o momento da falha em desacordo com as observações experimentais (Morales, 2020). Acidente deste tipo pode ser evitado com o correto dimensionamento do material, o que esclarece a importância deste tipo de teoria.

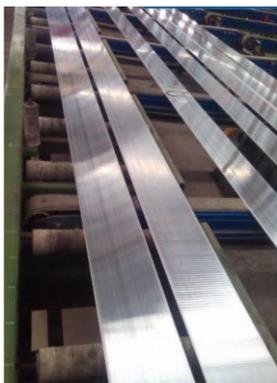
No estudo do comportamento mecânico de materiais na fratura, pode-se dividir os modelos constitutivos em duas grandes abordagens, a primeira descrevendo o comportamento de maneira elastoplástica e a segunda com uma variável de dano acoplado. Os modelos acoplados são aqueles que apresentam uma variável interna associada, os modelos desacoplados, por outro lado, não apresentam tal variável, existe também a possibilidade de fazer a associação destas abordagens. Entre os modelos acoplados para materiais dúcteis, as formulações mais importantes foram propostas por Gurson (1977) e Lemaitre (1985) dentro da micromecânica dos defeitos (MID) e da mecânica do dano contínuo (MDC), respectivamente (Chaboche *et al.*, 2006). Já a teoria elastoplástica mais comumente utilizada é aquele baseado no critério de escoamento de von Mises, apoiando-se na teoria do segundo invariante do tensor das tensões desviadoras, que propõe que o escoamento plástico de um material se inicia quando o segundo invariante do tensor desviador, J_2 , atinge um valor crítico (Hill, 1950, p.20; De Souza Neto *et al.*, 2008, p. 162). O modelo de Rousselier, estudado neste presente trabalho, pertence a um modelo acoplado, com uma variável interna associada a MID, tal qual o modelo de Gurson, no entanto, apresenta uma consistência para com a termodinâmica dos sólidos, o que motiva o estudo de tal formulação, visto que ainda existe pouco trabalho para o modelo publicado, em especial, na Universidade de Brasília, esta dissertação é a pioneira neste estudo. Portanto, a motivação principal é avaliar a capacidade preditiva do modelo, verificando-o quanto a sua descrição do comportamento mecânico para altas razões de triaxialidade em materiais com ductilidades diferentes. A Figura 1-1 apresenta dois exemplos de aplicação do modelo de Rousselier, o primeiro a nível acadêmico e o segundo em uma escala industrial.



Figura 1-1.(a), (b) Simulação de conformação eletro-hidráulica em chapas de metal DP600 (Fonte: Sarraf e Green, 2018) e (c) Estudo de caso (Fonte: Hosseini Tehrani e Ferestadeh, 2014).

Conforme destacado anteriormente, cada modelo constitutivo expressa uma particularidade. O uso de um modelo no dimensionamento de um projeto pode promover previsões tardias ou conservadoras sobre o comportamento do material observado, o modelo de von Mises, por exemplo, é plausível de ser aplicado em situações onde há predominância de carregamento trativo, no entanto, para o dimensionamento da válvula BOP, onde o cisalhamento se mostra mais pronunciado, não é recomendado. Desta maneira, outros modelos foram desenvolvidos no intuito de se completar as lacunas observadas nos estudos anteriores. Recentemente, Malcher *et al.* (2020) publicaram um trabalho contendo uma descrição experimental e numérica para a determinação dos efeitos da razão de triaxialidade do terceiro invariante do tensor tensão desviador, apresentando os resultados da aplicação a uma liga de alumínio AA6101-T4, em diferentes estados de tensão. Trabalhos recentes, como Souza (2020) desenvolvidos também na Universidade de Brasília apontam para uma boa previsibilidade do modelo de Gurson para o comportamento das ligas de alumínio AA 6101-T4 e aço AISI 4340-Recozida, o que motiva a entender se o modelo de Rousselier, por sua consistência termodinâmica, apresenta uma aproximação do resultado experimental igual, superior ou inferior ao modelo de Gurson.

Para o presente trabalho serão estudadas duas ligas de material metálico, a primeira uma liga de alumínio AA6101-T4, e a segunda, uma liga de aço, AISI 4340-Recozida. A utilização em larga escala das ligas de alumínio é consequência da melhoria em suas propriedades mecânicas quando submetidas a tratamentos térmicos. Sua aplicação é voltada majoritariamente para a indústria elétrica, com destaque para produtos condutores de barramento elétrico (barra, vigas, tubos e formatos personalizados), transmissão de energia, estações de energia e cabos elétricos, no entanto, se estende a aplicações também no ramo automotivo, como na produção de braços flexíveis de chicote elétrico. No Brasil, a principal aplicação da liga está na fabricação de tubos estruturais para fins elétricos. Alguns exemplos de aplicação dessa liga podem ser vistos na Figura 1-1.



(a) Barramento elétrico.



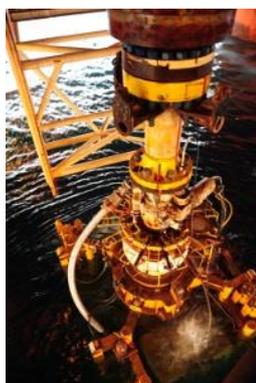
(b) Cabos elétricos.



(c) Chicote Elétrico Fusca 67/96.

Figura 1-2. Aplicações industriais AA 6101-T4.

Já o aço AISI 4340 é catalogado como um aço para construção mecânica, sua aplicação mais comum é para o setor da mecânica automotiva, especialmente na fabricação de eixos, bielas, virabrequins e peças com exigência de alta solicitação mecânica, sendo aplicado também na indústria aeroespacial, automobilística, de máquinas, equipamentos e um destaque particular está relacionado a sua aplicação na indústria offshore, em especial componentes para a extração de petróleo e de gás em águas profundas, onde a liga AISI 4340 é amplamente utilizada na fabricação de *risers*, sendo o seu comportamento mecânico foi recentemente objeto de estudo por Morales (2020). Pode-se observar alguns exemplos de aplicação dessa liga na Figura 1-3.



(a) *Riser* rígido.



(b) Virabrequim do Ford Maverick.



(c) Biela do Volkswagen Golf MK.

Figura 1-3. Aplicações industriais AISI 4340-Recozido.

1.2. OBJETIVOS DO TRABALHO

O objetivo principal deste trabalho consiste em implementar através de uma estratégia implícita de integração das equações de fluxo o modelo constitutivo de Rousselier. Para isso, adota-se uma proposição onde é levado em consideração a porosidade como indicador de defeitos e endurecimento isotrópico, no intuito de descrever o comportamento mecânico até a fratura dúctil da liga de alumínio AA6101-T4 e a liga de aço AISI 4340-Recozida, considerando os regimes elástico e plástico. A natureza da pesquisa numérico-experimental demanda de resultados experimentais para o processo de calibração dos modelos. Nesta dissertação, não foram realizados experimentos, sendo os dados necessários para o processo de simulação tomados segundo disponível em literatura dos trabalhos desenvolvidos por Rodrigues (2018), Malcher *et al.* (2020) e Morales (2020). Visto que pesquisas recentes, tal qual a desenvolvida por Souza (2020), apontam uma previsibilidade satisfatória do modelo de Gurson para descrição do processo de fratura dúctil dos materiais supracitados, para efeitos comparativos, o modelo de Rousselier foi contraposto com o modelo de Gurson, além de se apresentar também as comparações com os resultados experimentais, com o objetivo de se avaliar a capacidade preditiva do local e instante esperado para a falha dúctil, para o modelo de Rousselier. O modelo de Rousselier é baseado na MID, tal como o modelo de Gurson, no entanto, com consistência termodinâmica, portanto, a comparação é importante no sentido de indicar quais as diferenças que as consistências termodinâmicas implementadas por Rousselier promovem na descrição do comportamento mecânico do material.

1.3. METODOLOGIA

A metodologia desta dissertação encontra-se dividida em quatro partes, a primeira correspondente a revisão bibliográfica, a segunda se refere a formulação da estratégia numérica, a terceira que corresponde a parte prática experimental, tomados os resultados de trabalhos disponíveis na literatura, e a quarta parte consiste na realização das simulações numéricas. É importante destacar que nesta dissertação não foi realizado nenhum procedimento experimental, conforme dito anteriormente, os resultados foram tomados de trabalhos disponíveis na literatura, apresentados detalhadamente a seguir.

Quanto a primeira parte, inicialmente foi realizada uma revisão bibliográfica acerca do comportamento elastoplástico do material, apresentando-se os aspectos teóricos preliminares, os aspectos fenomenológicos, para que assim seja possível a descrição da teoria matemática do modelo de Rousselier. O que corresponde a parte dos aspectos gerais, foi revisado o conceito de critério de fratura dúctil e como descrever o processo de degradação do material, segundo um modelo acoplado, dentro do grupo da MID. Foi apresentada uma breve história quanto a utilização

de indicadores para previsão da falha dúctil, passando superficialmente por trabalhos como Freudenthal, Datsko, Cochcroft e Latham, McClintock, Gurson e Rousselier.

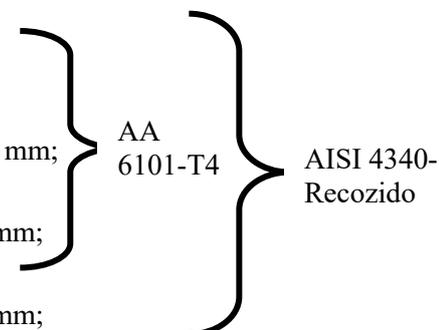
Para se descrever o comportamento constitutivo dissipativo são apresentados os principais conceitos da termodinâmica com variáveis internas. É apresentado o modelo constitutivo de Gurson, visto que este modelo é a base para a formulação de Rousselier. Em continuidade, é apresentado o modelo constitutivo de Rousselier.

A escrita matemática é apresentada conforme a abordagem de pequenas deformações. Inicia-se pela apresentação da lei de fluxo plástico, que para o caso de Rousselier depende da curva de encruamento do material, teoricamente limitado a endurecimento isotrópico de deformação bem como o dano. Em segundo passo é apresentado o vetor de fluxo plástico, onde leva-se em consideração a plasticidade associativa. No terceiro passo é apresentado a lei de evolução do fluxo plástico, sendo considerada a equação de Prandtl–Reuss. O dano é considerado como uma consequência do processo de nucleação e crescimento de vazios, sendo definida sua evolução através da lei de dano. O modelo descreve não apenas a plasticidade de metais porosos, como também a coalescência de vazios e fratura dúctil. O crescimento de vazio do modelo resulta na suavização da deformação, que promove a localização de deformação e danos em um plano. A força termodinâmica e a superfície de escoamento são tais que a lei de evolução do dano seja correspondente a conservação de massa. Para avaliar a evolução das variáveis internas é considerado a regra de normalização. Com relação a mecânica dos meios contínuos a formulação apresentada é descrita por meio da formulação variacional, ou também chamada de equilíbrio na forma fraca e a configuração do corpo contínuo é considerado conforme a configuração espacial.

Uma vez realizada a revisão bibliográfica, dar-se-á início a formulação de uma estratégia numérica que incorpore os conceitos da teoria matemática da plasticidade em uma ferramenta acadêmica baseada no método dos elementos finitos (MEF), correspondente a segunda parte da metodologia. Para a modelagem em MEF levou-se em consideração grandes deformações e a integração implícita do modelo constitutivo de Rousselier, sendo comparado com o modelo de Gurson e também com os resultados experimentais. É feita a transformação do tensor deformação na entrada do algoritmo e a transformação do tensor tensão de Cauchy na saída do algoritmo, para adequação da matemática de pequenas deformações, apresentada na revisão bibliográfica com a abordagem de grandes deformações, necessária para descrição e modelagem em MEF dos materiais em questão.

Quanto a terceira parte da metodologia utilizada no trabalho, que corresponde a parte experimental, todos os procedimentos de usinagem dos corpos de prova (CPs), seleção das diferentes geometrias e ensaios de tração monotônica foram realizados nos trabalhos de Rodrigues

(2018) e Malcher *et al.* (2020), para o caso da liga de alumínio AA 6101-T4 e no trabalho de Morales (2020), para o caso da liga de aço AISI 4340-Recozido. Nos trabalhos citados foram construídas quatro diferentes geometrias, que definem o estado de tensão e variam a razão de triaxialidade. As geometrias são as seguintes:

- Cilíndrico liso;
 - Cilíndrico com raio de entalhe de $10 \text{ mm} \pm 0,1 \text{ mm}$;
 - Cilíndrico com raio de entalhe de $6 \text{ mm} \pm 0,1 \text{ mm}$;
 - Cilíndrico com raio de entalhe de $4 \text{ mm} \pm 0,1 \text{ mm}$;
- 

Os ensaios experimentais dos trabalhos de Rodrigues (2018), Malcher *et al.* (2020) e Morales (2020) foram conduzidos sob controle de deformação, utilizando um extensômetro (*clip gage*) uniaxial MTS com comprimento útil de 25 mm. Foram realizados no laboratório de ensaio mecânicos da Universidade de Brasília, utilizando a máquina de ensaio uniaxial MTS-810, com capacidade máxima de 100 kN. Todos os ensaios foram conduzidos à temperatura ambiente. Para o caso da liga de alumínio AA 6101-T4, a taxa de deformação com o qual a máquina traciona a peça é controlada como sendo de 0,5 mm/min até o escoamento e 1 mm/min após o escoamento. A pressão das garras utilizada foi de 2,5 MPa. Quando foi atingida a deformação de 15%, o ensaio foi interrompido para a retirada do extensômetro, para fins de preservação do equipamento. Para o caso da liga de aço AISI 4340-Recozido a velocidade do atuador da máquina foi de 2 mm/min, sendo a carga aplicada axialmente ao corpo de prova até a ruptura. A norma utilizada para condução dos ensaios foi a ASTM E-8M-08. Para o trabalho de Morales (2020) foram usinados dois CPs para cada geometria e foram realizados dois ensaios, utilizando-se todos os CPs usinados. Para o caso dos trabalhos de Rodrigues (2018), Malcher *et al.* (2020) foi realizado apenas um ensaio para cada CP. O processo de tratamento térmico será detalhadamente explicado no Capítulo 4 – Características do material.

Para fins desta dissertação foram tomadas as curvas de força de reação *versus* deslocamento, bem como os parâmetros dos materiais para a calibração dos modelos que foram usados nas simulações, mediante os resultados experimentais obtidos nos trabalhos citados anteriormente.

A quarta etapa consiste nas simulações numéricas, sendo feitas inicialmente as comparações das curvas de forças de reação *versus* deslocamento, do modelo em elementos finitos com o observado experimentalmente para cada caso. Na segunda parte é possível avaliar a evolução da variável de dano, a porosidade, evolução da deformação plástica equivalente e a capacidade preditiva do modelo de Rousselier, observada através da comparação com os resultados experimentais. Na terceira parte foi feita uma tentativa de avaliação da consistência

termodinâmica do modelo de Rousselier. Seguindo-se a linha do caráter comparativo, o modelo de Rousselier foi contraposto com um modelo amplamente utilizado na MID, o modelo de Gurson.

1.4. ESTRUTURA DO TRABALHO

Esta dissertação encontra-se dividida em 5 capítulos. O primeiro capítulo incorpora uma contextualização do trabalho, apresentando sobretudo o motivo do estudo do modelo de Rousselier, bem como a seleção do material, com as principais aplicações industriais das ligas de alumínio AA 6101 e liga de aço AISI 4340. A motivação principal do estudo consiste em avaliar a capacidade preditiva do modelo, contrapondo-o com o modelo de Gurson, dado que, conforme apresentado no trabalho de Souza (2020), o modelo de Gurson retoma o comportamento dos materiais estudados de maneira satisfatória.

No segundo capítulo é apresentada a teoria da MID e do comportamento elastoplástico, por meio de uma modelagem constitutiva, sendo mostrados os principais conceitos, uma breve apresentação da mecânica tensorial e da termodinâmica dos sólidos, os aspectos fenomenológicos e as peculiaridades do modelo de Rousselier e Gurson. Ainda neste capítulo apresenta-se sobre a mecânica do dano e o processo de fratura dúctil do material, bem como as propriedades dos materiais estudados no presente trabalho.

O terceiro capítulo apresenta o processo de integração implícita que resulta em um algoritmo de implementação numérica dos modelos constitutivos, o modelo de Rousselier e o modelo de Gurson, de modo que estes possam ser implementados em ferramentas computacionais. Faz-se o uso da abordagem matemática da decomposição do operador, o trabalho tensorial exigido pela formulação matemática e as estratégias de integração numéricas adotadas para sancionar os problemas dados pelos sistemas lineares.

O capítulo quatro inicia-se apresentando as geometrias dos CPs e os procedimentos de calibração do modelo a partir dos resultados obtidos experimentalmente, sendo subsequentemente apresentadas as definições iniciais do processo de simulação numérica, como malhas e critérios de parada. São apresentados também os principais resultados experimentais, inicialmente sendo feita uma avaliação das curvas de força de reação *versus* deslocamento, as curvas de evolução do dano, bem como o contorno desta variável no corpo de prova, a curva de evolução da deformação plástica equivalente e seu contorno no CP, as curvas de encruamento do material e a avaliação da consistência termodinâmica por meio da pressão hidrostática. Ao final do capítulo, são apresentadas as análises mais relevantes observadas segundo cada simulação.

No quinto e último capítulo são apresentadas as conclusões relevantes para o presente trabalho, levando-se em consideração um dos pontos principais propostos nesta dissertação, a assertividade preditiva do modelo de Rousselier, sendo mostrado as diferenças MID de Gurson em contrapartida as incorporações da termodinâmica dos sólidos do modelo de Rousselier. Também são apresentados o que se espera de trabalhos futuros, quais pontos podem e devem ser estudados neste vasto campo do comportamento do material, sobretudo quando trata-se do modelo de Rousselier.

2. MODELAGEM CONSTITUTIVA

Ao longo dos últimos anos, a comunidade científica voltada para o estudo da plasticidade computacional vem tentando introduzir diferentes parâmetros elastoplásticos na chamada lei de fluxo plástico do material, com o intuito de se descrever o comportamento mecânico de materiais dúcteis (Bao e Wierzbicki, 2004; Bai e Wierzbicki 2007; Brünig *et al.*, 2008; Gao *et al.*, 2011; Khan e Liu, 2012; Malcher *et al.*, 2014a; Malcher *et al.*, 2014b). No presente capítulo, serão apresentadas as definições matemáticas dos principais parâmetros elastoplásticos bem como a formulação matemática do modelo constitutivo propostos por Rousselier, expostos juntamente com os indicadores de fratura dúctil que serão implementados na etapa de pós-processamento do modelo de elementos finitos.

2.1 ASPECTOS GERAIS

A fratura dúctil do material pode ser estudada através de modelos constitutivos, sendo que, para este caso, existem dois tipos de abordagens. A primeira é a proposição de modelos puramente elastoplásticos, ou modelos não-acoplados, assim chamados por não apresentam uma variável de degradação do material, e a segunda é a proposição de modelos com uma variável interna de dano, os chamados modelos acoplados. A introdução de variáveis internas delimita no problema uma dependência temporal, visto que o objeto de estudo desses modelos é a evolução dessas variáveis de dano, definida através das relações termodinâmicas constitutivas, normalmente representadas por um sistema de equações diferenciais no tempo, até o momento da ruptura do material (Malcher, 2011). Considerando os modelos elastoplásticos, para ser avaliado o processo de fratura dúctil é acoplado um indicador de dano na etapa de pós processamento.

Em linhas gerais a fratura dúctil é o fenômeno físico que ocorre em corpos quando submetidos a algum tipo de carregamento, podendo, portanto, ser estudada e interpretada segundo os modelos constitutivos, por sua vez escritos em aspectos matemáticos de grandes ou pequenas deformações. Para determinar corretamente o instante e local da fratura, é necessário um critério de fratura dúctil. Os critérios de fratura dúctil são de caráter aproximado, de modo a correlacionar os fenômenos microscópicos de maneira macroscópica, ou através da análise de resultados experimentais, ou através de modelos físicos/matemáticos (Andrade Pires, 2001). No primeiro caso, é feita uma aproximação empírica dos resultados experimentais da qual resulta em um parâmetro crítico de fratura (Brozzo *et al.*, 1972, Norris *et al.*, 1978, Atkins, 1981), enquanto que no segundo caso é assumido restrições na geometria dos defeitos, tais como esferas (Rice e Tracey, 1969, Gosh, 1976) e cilindros (McClintock, 1968) ou no comportamento do material, como rígido-plástico (Rice e Tracey, 1969, Oyane *et al.*, 1978) e rígido perfeitamente-plástico (Tai e

Yang, 1987). Segundo Andrade Pires (2001), o critério de fratura dúctil, deve refletir o estado de degradação do material, o que significa que para que seja um bom indicador de fratura dúctil, o critério deve contemplar a evolução do processo de deformação que provoca o aumento do dano no material até o seu respectivo colapso. Desta forma, muitos autores concordam que o critério de fratura dúctil deverá possuir como características gerais:

1. Dependência do histórico de escoamento (trajetória de tensão-deformação): uma vez que a deformação atual pode não conter informações suficientes para a descrição do início da trinca e a sua respectiva propagação no material (Cockcroft e Latham, 1968, Norris *et al.*, 1978, Atkins, 1981, Atkins e Mai, 1985);
2. Dependência da tensão hidrostática: dado que este parâmetro desempenha um papel fundamental na fratura dúctil além de que possui grande impacto na ductilidade, visto que essa aumenta rapidamente com a diminuição da tensão hidrostática (Hancock e Mackenzie, 1976, Norris *et al.*, 1978, Oyane *et al.*, 1978, Lemaitre, 1985, Mudry, 1985, Tai e Yang, 1987);
3. Um quociente de tensão: como a triaxialidade que representa uma medida paramétrica do estado de tensão. Mudry (1985) observou que o valor absoluto da tensão pode não descrever o estado geral de plasticidade encontrado nos problemas. Este princípio foi explorado também por Hancock e Mackenzie (1976), que postularam, baseados em observações dos experimentos, que a ductilidade depende de uma forma clara do estado de tensão, sendo caracterizado pela razão de triaxialidade (Andrade Pires, 2001).
4. Dependência do terceiro invariante do tensor desviador: pesquisas mais recentes demonstra o efeito do estado de tensão na fratura dúctil apontando o terceiro invariante do tensor desviado, J_3 como um parâmetro que também pode ser usado para caracterizar este efeito (Gao e Roe, 2010), sendo relacionado ao formato da superfície de escoamento. (Bai, 2008; Brünig *et al.*, 2013; De Sá *et al.*, 2015). Trabalhos como os desenvolvidos por Cavalheiro e Malcher (2017) e Malcher *et al.* (2020) demonstram a importância da dependência do J_3 na construção de um modelo constitutivo.

Outros fatores podem ser acoplados a um critério de fratura dúctil para sua otimização, como a implementação de um indicador de dano na etapa de pós processamento do modelo, parâmetros de calibração e ponto de calibração, conforme descrito em detalhes nos trabalhos de Malcher (2011), Malcher *et al.* (2020) e Morales (2020).

Muito embora existam vários indicadores de fratura que não dependem do histórico de escoamento (vide McClintock *et al.*, 1966, Gosh, 1976, Hancock e Machenzie, 1976) nesta dissertação, dar-se-á atenção aos modelos acoplados como critério de fratura dúctil, que podem ser classificados em dois grandes grupos (Andrade Pires, 2001), a micromecânica dos defeitos e a mecânica do dano contínuo (Chaboche *et al.*, 2006), dos quais destaca-se respectivamente as formulações propostas por Gurson (1977) e Lemaitre (1985), sendo explorado nesta dissertação apenas a MID, visto que o modelo de Rousselier encontra-se nesta divisão.

A utilização de indicadores para a previsão da falha dúctil em problemas inelásticos foi inicialmente sugerida no final dos anos 1940 por Freudenthal através do seu critério baseado no trabalho plástico total (Freudenthal, 1950), assumindo que a iniciação e propagação da fratura é ditada pela quantidade de energia absorvida, marcando também a chamada micromecânica dos defeitos. No entanto, o critério não recebeu grande aceitação, gerando controvérsia sob suas hipóteses de bases e os resultados obtidos (Andrade Pires, 2001). Datsko (1966) sugeriu um critério de fratura dúctil baseado na deformação plástica equivalente, afirmando que o processo de fratura dúctil é dependente de um limite de deformação plástica para um dado material, sendo este limite representado pela deformação plástica equivalente (Andrade Pires, 2001), o que foi fortemente criticado por Cockcroft e Latham (1968), pelo fato da deformação plástica que provoca a fratura ser dependente do histórico de escoamento, e portanto, não poder ser considerado como uma propriedade do material (Andrade Pires, 2001). McClintock (1968) propôs um primeiro critério de acordo com o qual ocorre a fratura quando vazios entram em contato. Este critério não está em conformidade com o observado microscópico e macroscopicamente em muitos metais que mostram que a separação ocorre por meio de vários mecanismos que levam à fratura dos ligamentos entre os vazios bem antes deles entrarem em contato (Hancock e Machenzie, 1976, Shockey *et al.*, Rousselier, 1987). McClintock (1971) também observa que o critério de contato de vazios superestima muito o valor medido de deformações na fratura (Edelson e Baldwin, 1962) para uma determinada fração volumétrica de vazios, mesmo quando estricção (*necking*) em corpos de prova para tração sem entalhe são levadas em consideração na análise (Rousselier, 1987).

As observações subsequentes do estudo da fratura dúctil em metais demonstraram que pode-se envolver a geração de uma porosidade considerável, via nucleação e crescimento de vazios (Gurson, 1975). Desta forma, teorias constitutivas que levam em conta a porosidade são, portanto, um desejável componente de um modelo matemático do processo de fratura dúctil, em face a estas descobertas, em 1975 ocorreu uma contribuição significativa para este campo de estudos, o modelo desenvolvido por Gurson, com sua teoria constitutiva que leva em conta nucleação e crescimento de vazios, sendo incorporada a um modelo do processo de fratura dúctil. O modelo

de Gurson é a base para o que se foi desenvolvido posteriormente por Rousselier, estudado neste trabalho.

Os modelos constitutivos acoplados com os indicadores de dano para a descrição do processo de fratura dúctil surgiram como alternativa a descrição incompleta dos modelos puramente elastoplástico como aquele baseado no critério de escoamento de von Mises (1913), que propõe que o escoamento plástico do material se inicia quando o segundo invariante, J_2 , atinge um valor crítico. Muito embora seja amplamente utilizado, constatações experimentais indicaram que esta formulação clássica apresenta limitações quanto a descrição correta do comportamento mecânico de materiais dúcteis, o que implica que sua utilização não pode ser generalizada, uma vez que este modelo não apresenta a mesma precisão para uma grande variedade de materiais, especialmente ligas modernas (Bai, 2008; Driemeier, 2015), por não conter em sua formulação a dependência de parâmetros importantes dentro do estudo do comportamento elastoplástico, como a chamada pressão hidrostática p e razão de triaxialidade η .

Os efeitos da pressão hidrostática são relacionados a ductilidade, neste sentido Bridgman (1952) em seu trabalho com diferentes ligas de aço apresentou como conclusão o impacto da pressão hidrostática na deformação para fratura destes materiais, verificando que em níveis mais elevados da tensão hidrostática são observados maiores alongamentos até a falha no material. Rice e Tracey (1969), indicam a pressão hidrostática como sendo o parâmetro que atua como fator regulatório das taxas de nucleação de vazios, onde em solicitações trativas o seu efeito colabora com a nucleação e crescimento desses. Hancock e Mackenzie (1976), discorrem que a fratura dúctil se inicia nos locais de máximas pressões hidrostáticas.

Por outro lado, a razão de triaxialidade é um escalar que caracteriza o estado geral de tensão, introduzido na formulação matemática dos modelos constitutivos como um quociente entre a pressão hidrostática e a tensão equivalente. Como efeito no modelo constitutivo, este parâmetro é responsável pelo tamanho do domínio elástico/superfície de escoamento do material.

Independentemente do modelo e como uma primeira aproximação, a deformação na fratura em tração é independente do tamanho e da distância entre os vazios, e depende apenas de f , sua fração volumétrica de vazios, chamada de porosidade (Rousselier, 1987). Esta proposição está de acordo com as observações de Edelson e Baldwin (1962).

A derivação de equações constitutivas para determinados fenômenos materiais pode ser feita no quadro da termodinâmica de processos irreversíveis (TPI) (Prigogine, 1961; Lemaitre e Chaboche, 1985). No modelo de Rousselier, postula-se que qualquer ponto material pode ser considerado como um subsistema termodinâmico em equilíbrio, caracterizado por um conjunto de variáveis internas (Rousselier, 2001a). O dano material é um dos fenômenos incluído nas

equações constitutivas, considerado como o efeito da nucleação, crescimento e coalescência de vazios em metais e servindo como indicador do processo de fratura dúctil (Rousselier, 2001a), conforme pode-se observar na Figura 2-1, tal qual no modelo proposto por Gurson (1977) e fenomenologicamente estendido por Tvergaard e Needleman (1984). Rousselier procura derivar o modelo mais simples possível de plasticidade de metal poroso na estrutura da TPI, com um número limitado de suposições, considerando uma única variável escalar de dano, a fração de volume de vazios usada no modelo de Gurson (Rousselier, 1981, Rousselier, 2001a).

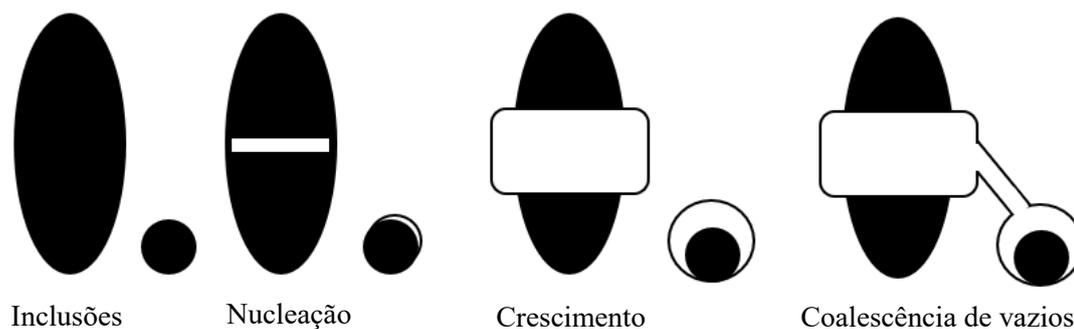


Figura 2-1. Modelagem da fratura dúctil. Adaptado de Rousselier, 1987.

A plasticidade de metal poroso é desenvolvida principalmente para modelar e prever fratura dúctil. Tvergaard e Needleman (1984) introduziram no modelo de Gurson um valor crítico para a fração volumétrica de vazios, correspondendo ao início da coalescência do vazios. Na verdade, resultados de crescimento de vazios na suavização de deformações, que promove a localização de deformações e danos em um plano. O início e a propagação da trinca ocorrem naturalmente em um cálculo de elemento finitos, resultando apenas das relações constitutivas, sem que seja necessário definir uma fração volumétrica de vazios crítica (Rousselier, 1981). Em outros aspectos, uma grande quantidade de trabalho foi dedicada à descrição do efeito do crescimento de vazios, por exemplo Fressengeas e Molinari (1985), Lemonds e Needleman (1986), Anand *et al.* (1987), Zavaliangos e Anand (1992), Molinari *et al.* (1993).

Existem inúmeras formas possíveis de se definir a localização e a iniciação de uma trinca na escala mesoscópica (Malcher, 2011). Para o caso da presente dissertação, a iniciação e propagação da trinca ocorrem naturalmente de uma forma teórica ou por meio de cálculo em elementos finitos, resultante apenas das relações constitutivas, sem necessariamente ser definido uma fração volumétrica de vazios crítica (Rousselier, 1981). Para critério de fratura dúctil em um ambiente de simulação em elementos finitos, no presente trabalho foi usado uma porosidade crítica, detalhada no capítulo 4. Este critério é chamado de critério de dano crítico, visto que a porosidade é a variável de dano para o modelo de Rousselier. Portanto, os corpos de prova foram ensaiados até o rompimento e conseqüentemente separação, segundo os trabalhos de Rodrigues (2018), Malcher *et al.* (2020) e Morales (2020), sendo feito isso, é possível observar por meio do modelo constitutivo de Rousselier e Gurson parâmetros importantes, tais como o acúmulo da deformação

plástica, o aumento do limite de encruamento com relação a deformação plástica acumulada, e a porosidade crítica adotada neste documento.

2.2 TERMODINÂMICA COM VARIÁVEIS INTERNAS

A matemática por trás da teoria elastoplástica em campos mais complexos é desenvolvida por meio da álgebra tensorial. Para a presente dissertação, as variáveis destacadas em negrito dentro de uma equação representam um tensor, variáveis com escrita normal representam escalares.

Uma forma eficiente para se descrever o comportamento constitutivo dissipativo é a adoção da chamada termodinâmica com *variáveis internas* (Malcher, 2011). Para tanto, é atribuído um conceito fundamental de *variável de estado*, que são variáveis capazes de definir completamente o estado termodinâmico para um dado ponto. Desta maneira, todo processo é considerado como sendo uma sucessão de estados de equilíbrio, assim sendo, o estado termodinâmico depende somente dos valores instantâneos das variáveis de estado e não dos valores históricos passados (Kestin e Bataille, 1977, Malcher, 2011). A teoria baseada na termodinâmica com variáveis internas, apesar de aplicável, é limitada a problemas pontuais, para descrição de fenômenos cujo ações internas sejam consideravelmente rápidas.

A estrutura da teoria consiste inicialmente na definição de variáveis de estado, significativas para o problema, que, portanto, em algum instante do tempo o estado termodinâmico possa ser assim definido por este conjunto de variáveis. De posse das variáveis de estado do problema (note que para cada teoria constitutiva tais variáveis podem ou não ser diferentes), o próximo passo é a construção de um *potencial termodinâmico*, dependente de cada variável de estado anteriormente definidas, com isso, é possível fazer a construção da chamada *equação constitutiva*, que representa a relação entre as variáveis termodinâmicas do sistema físico estudado. O próximo passo, portanto, consiste no estudo da taxa evolução da equação constitutiva, feita através da definição das chamadas *forças termodinâmicas* (também chamada de conjugada força termodinâmica), que representam a derivada do potencial termodinâmico em relação a variáveis interna associada. Há de se saber que uma função potencial é conservativa, sendo um campo conservativo significa que é um campo vetorial gradiente de um campo escalar e tem como propriedade que sua integral é independente do caminho, por isso é possível a construção de um potencial termodinâmico (ver Khan e Huang, 1995, Spencer, 2004; Bonet e Wood, 2008, p. 2, De Souza Neto *et al.*, 2008, p. 72).

Por fim, para se caracterizar completamente um modelo constitutivo, é necessário avaliar a evolução das demais variáveis internas, de modo que seja necessário leis complementares associadas com os mecanismos de dissipação. Para isto, em um caso geral, assume-se que as

variáveis de fluxo são funções dadas das variáveis de estado (Malcher, 2011). Deste modo, é construído um potencial de dissipação, de posse do potencial de dissipação é feita a sua derivada em função das forças termodinâmicas sendo assim determinada a evolução das variáveis de estado.

2.3 MODELO DE GURSON

Os primeiros desenvolvimentos dos modelos constitutivos, como o de von Mises, previam um regime de incompressibilidade plástica e, portanto, não poderia mostrar a dilatação evidente em materiais dúcteis porosos. Em 1975 ocorreu uma contribuição significativa para o campo de estudos da MID, o modelo desenvolvido por Gurson, com sua teoria constitutiva que leva em conta nucleação e crescimento de vazios, sendo incorporada a um modelo do processo de fratura dúctil.

Uma teoria constitutiva pode ser construída a partir dos seguintes passos: primeiro, definição de uma função de escoamento, que relaciona as combinações de tensão para a qual ocorre o escoamento plástico. O próximo passo é uma lei de fluxo plástico, que define a proporção do campo de deformação em função do estado de tensão no decorrer do escoamento. Isso geralmente pode ser colocado em termos da normal do potencial plástico. Em muitos casos, a função de escoamento pode ser usada como um potencial plástico. Para relacionar o incremento do fluxo plástico ao incremento da tensão, uma relação de consistência e algumas suposições de endurecimento são necessárias.

O critério de escoamento proposto por Gurson em 1975 são derivados usando modelos de material plástico-rígido e o teorema do limite superior da plasticidade, dado que o crescimento de vazios e a fratura dúctil envolvem grandes quantidades de fluxo plástico. Uma regra de escoamento normal é estabelecida, com as funções de escoamento servindo como potenciais plásticos (Gurson, 1975).

Junto com as observações citadas acima, alguns estudos teóricos como os desenvolvidos no final da década de 60 por McClintock (1968) e Rice e Tracey (1969) indicam que quando os vazios estão presentes em materiais dúcteis, o componente hidrostático da tensão pode causar dilatação macroscópica e afetar o escoamento plástico. Como o material que envolve o vazio é idealizado como incompressível, a dilatação é devida completamente ao crescimento do vazio (Gurson, 1975). As funções de escoamento (utilizáveis como potenciais plásticos) desenvolvidas por Gurson incorpora termos que são funções da tensão hidrostática, e assim permitir a dilatação plástica através da regra de normalização.

O modelo físico geral definido por Gurson é um *cubo unitário* de um material poroso, definido como *agregado de vazios*, caracterizado por uma matriz dúctil. O cubo é por definição grande o suficiente para ser estatisticamente representativo das propriedades do agregado policristalino. Foi utilizada uma abordagem que permite a prova de um princípio macroscópico do trabalho plástico máximo para o agregado, se o mesmo princípio se aplicar localmente para a matriz do material (Gurson, 1975). Vale ressaltar que, o adjetivo “macroscópico” refere-se a valores médios de quantidades físicas (tensão, dissipação, velocidade, etc.) que representam o comportamento do cubo unitário. Microscópico refere-se a quantidades pontuais, como campos de tensão na matriz dúctil. A representação geométrica do cubo unitário pode ser observada na Figura 2-2.

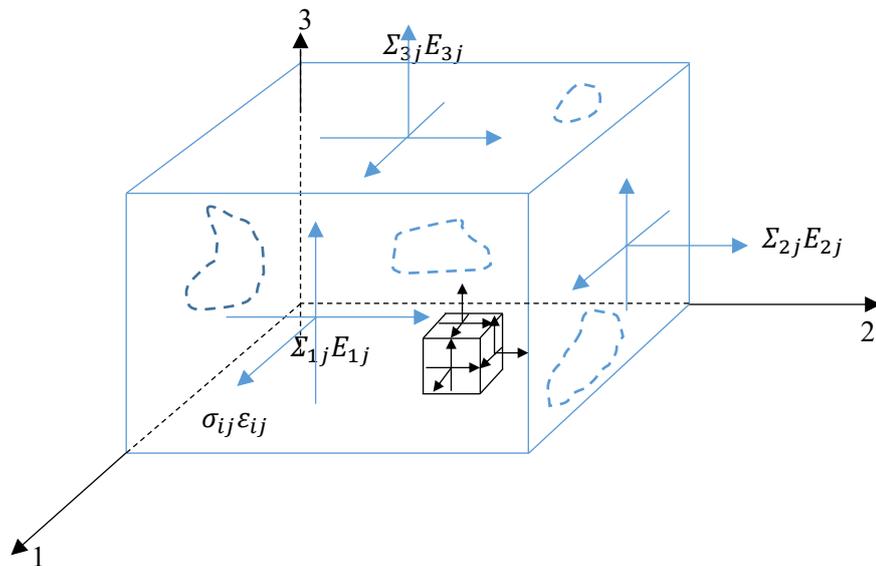


Figura 2-2. Matriz de vazios, formas aleatórias dos vazios e orientações, componentes tensoriais macroscópico e microscópico. Adaptado de Gurson, 1975.

Em linhas gerais, segundo Gurson (1975) o método usado para calcular uma função de escoamento de limite superior para um agregado de matriz de vazios é o seguinte:

1. As equações de von Mises são usadas para caracterizar o comportamento do escoamento e o fluxo plástico da matriz, que por sua vez é incompressível.
2. Uma forma aproximada é então assumida para o campo de velocidade microscópica na matriz, o que permite que os vazios mudem de volume, mantendo incompressibilidade da matriz. Este campo de velocidade deve obedecer à compatibilidade e atender condições de contorno cinemáticas na superfície do cubo unitário que correspondem às taxas macroscópicas de deformação prescritas.
3. Uma desigualdade de limite superior é então usada para calcular os limites superiores para as tensões macroscópicas necessárias para sustentar fluxo de plástico.

4. O local das tensões macroscópicas do limite superior para uma determinada geometria do vazio (tamanho, forma, distribuição, etc.) e uma faixa de taxa macroscópica de campos de deformação formam um limite superior local de escoamento para esse cubo unitário.
5. Estabelecer o princípio de trabalho plástico para o limite superior do escoamento local, dado certas restrições no campo de velocidade microscópico.
6. Uma forma funcional que dá um bom ajuste ao limite superior local de escoamento pode ser chamada de função de escoamento, no limite superior (Gurson, 1975).

Para fins de análise, o agregado de matriz de vazios é idealizado como um único vazio em uma célula. Desta forma, a fração do volumétrica de vazios (porosidade) da célula é igualado ao do agregado. Pode ser levada em consideração a interação de vazios vizinhos. É assumido também que a célula se comporte, quando solicitada por algum carregamento, como o agregado, exibindo crescimento de vazios quando submetido a escoamento com um componente hidrostático da tensão macroscópica positiva. Para os vazios, duas geometrias são consideradas: a primeira sendo um cilindro longo e a segunda uma esfera. Essas geometrias foram escolhidas por Gurson pois se assemelham em muitas formas aos vazios observados experimentalmente, além de fornecerem a isotropia esperada (direções transversais para o cilindro, total para a esfera), e porque suas propriedades de simetria ajudam significativamente a análise. A geometria dos vazios é apresentada na Figura 2-3.

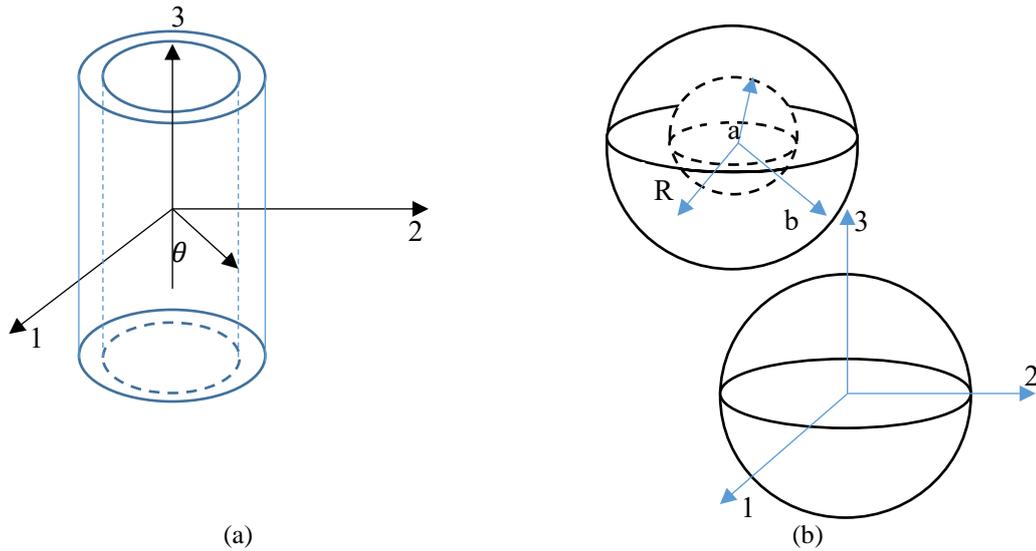


Figura 2-3. Geometria dos vazios para o modelo de Gurson. (a) vazio cilíndrico em matriz perfeitamente plástica; (b) vazio esférico e principais eixos do sistema de coordenadas. Adaptado de Gurson, 1975.

Esses modelos simplificados baseado como descrito anteriormente nas células unitárias não se comportarão exatamente como agregados com distribuições aleatórias de vazios. Portanto, o limite superior de escoamento local obtido para os modelos de células são, em sentido estrito, apenas estimativas do escoamento local para mais agregados aleatórios (Gurson, 1975).

Os campos de velocidade aproximada usados nos cálculos do limite superior podem ser simples ou complexos, dependendo do grau de aproximação desejado. Os campos mais simples precisam apenas atender às condições descritas anteriormente. Campos complexos, no entanto, podem conter fatores extras que podem ser ajustados para alcançar melhores limites superiores. Os campos de velocidade mais simples permitem a determinação rigorosa de formas funcionais para as funções de escoamento do limite superior, dando assim uma imagem clara, se aproximada, do papel da pressão hidrostática no escoamento e no fluxo plástico de materiais dúcteis porosos (Gurson, 1975).

O modelo de Gurson será aqui apresentado apenas de caráter comparativo ao modelo de Rousselier. Para tanto, a Lei de Hooke generalizada é descrita como na equação (2.1):

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{D}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^e \quad (2.1)$$

sendo $\boldsymbol{\sigma}$ o chamado tensor tensão de Cauchy, definido como $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{S} + p\boldsymbol{I}$, onde \boldsymbol{S} é a componente desviadora, ou tensor desviador, cujo possui a peculiaridade da tensão hidrostática ser igual à zero e p é chamado de pressão hidrostática, \mathbb{D}^e é a matriz de elasticidade e $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ é o tensor das deformações elásticas.

A função de escoamento é descrita conforme segue na equação (2.2):

$$\phi = J_2 - \frac{1}{3} \left[1 + f^2 - 2f \cosh \left(\frac{3p}{2\sigma_y} \right) \right] \sigma_y (\bar{\epsilon}^p)^2 \quad (2.2)$$

onde J_2 é o chamado segundo invariante do tensor desviador, definido como $J_2 = \frac{1}{2} \mathbf{S} : \mathbf{S}$, $\sigma_y(\bar{\epsilon}^p)$ representa a regra de escoamento do material e f é a porosidade ou fração volumétrica de vazios.

O vetor de fluxo plástico, descrito conforme a plasticidade associativa tem como equação (2.3):

$$\mathbf{N} = \mathbf{N}_d + \frac{1}{3} N_v \mathbf{I} = \mathbf{S} + \frac{1}{3} f \sigma_y \sinh \left(\frac{3p}{2\sigma_y} \right) \mathbf{I} \quad (2.3)$$

sendo \mathbf{N} o vetor de fluxo, \mathbf{N}_d e N_v são as contribuições desviadoras e volumétricas e \mathbf{I} é o tensor identidade de segunda ordem. Portanto, é possível determinar-se a Lei de fluxo plástico como sendo descrito na equação (2.4):

$$\dot{\epsilon}^p = \dot{\epsilon}_d^p + \frac{1}{3} \dot{\epsilon}_v^p \mathbf{I} = \dot{\gamma} \mathbf{S} + \frac{1}{3} \dot{\gamma} f \sigma_y \sinh \left(\frac{3p}{2\sigma_y} \right) \mathbf{I} \quad (2.4)$$

onde $\dot{\epsilon}_d^p$ representa a contribuição desviadora do tensor das deformações plásticas e $\dot{\epsilon}_v^p$ é a contribuição volumétrica. A taxa de evolução da deformação plástica equivalente, adotada agora como uma variável interna de endurecimento isotrópico é calculada, de acordo com a Equação de Prandt-Reuss (2.5).

$$\dot{\epsilon}^p = \dot{\gamma} \sqrt{\frac{2}{3} \left\{ \mathbf{S} : \mathbf{S} + \frac{1}{3} \left[f \sigma_y \sinh \left(\frac{3p}{2\sigma_y} \right) \right]^2 \right\}} \quad (2.5)$$

onde $\dot{\epsilon}^p$ é a taxa de evolução da deformação plástica equivalente. Neste momento, fica, portanto, apenas necessário se definir a evolução da variável de dano, a porosidade, descrita conforme a lei de evolução da porosidade ou fração volumétrica de vazios, equação (2.6):

$$\dot{f} = (1 - f) \dot{\epsilon}_v^p = \dot{\gamma} (1 - f) f \sigma_y \sinh \left(\frac{3p}{2\sigma_y} \right) \quad (2.6)$$

onde \dot{f} é a taxa de evolução da porosidade. De maneira resumida, o equacionamento matemático que define o modelo de Gurson com endurecimento isotrópico é apresentado no Quadro 2-1.

Quadro 2-1. Modelo matemático de Gurson com endurecimento isotrópico.

i)	Decomposição aditiva da deformação:		
		$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p$	
ii)	Lei de Hooke:		
		$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{D}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^e$	
iii)	Função de Escoamento:		
		$\phi = J_2 - \frac{1}{3} \left[1 + f^2 - 2f \cosh \left(\frac{3p}{2\sigma_y} \right) \right] \sigma_y (\bar{\varepsilon}^p)^2$	
iv)	Lei de fluxo plástico:		
		$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\gamma} \mathbf{S} + \frac{1}{3} \dot{\gamma} f \sigma_y \sinh \left(\frac{3p}{2\sigma_y} \right) \mathbf{I}$	
	e lei de evolução para $\bar{\varepsilon}^p$ e f :		
		$\dot{\bar{\varepsilon}}^p = \dot{\gamma} \sqrt{\frac{2}{3} \left\{ \mathbf{S} : \mathbf{S} + \frac{1}{3} \left[f \sigma_y \sinh \left(\frac{3p}{2\sigma_y} \right) \right]^2 \right\}}$	
		$\dot{f} = \dot{\gamma} (1 - f) f \sigma_y \sinh \left(\frac{3p}{2\sigma_y} \right)$	
v)	Regra de complementaridade		
	$\dot{\gamma} \geq 0$,	$\phi \leq 0$,	$\dot{\gamma} \phi = 0$

2.4 MODELO DE ROUSSELIER

O modelo de Rousselier é baseado na proposição feita pelo modelo de Gurson, descrevendo a plasticidade em um metal poroso. Este modelo constitutivo produz instabilidade do material (localização de deformação e dano em um plano) e é válido para prever fratura dúctil de estruturas planas e rachadas no quadro de uma abordagem local para fratura (Rousselier, 2001b).

Na teoria de dano contínuo, uma variável de estado para o dano f é introduzida além da variável de estado de endurecimento-deformação p e o tensor das deformações plásticas, $\boldsymbol{\varepsilon}^p$. As variáveis p e f são escalares, e o modelo é teoricamente limitado a endurecimento isotrópico de deformação bem como o dano, no entanto, na prática o modelo pode ser usado para dano dúctil anisotrópico sob carregamento proporcional (Rousselier, 2001b). A variável f é definida como a fração volumétrica de vazios, e a matriz material é postulada como incompressível, *i.e.* a deformação elástica volumétrica é negligenciada. No modelo proposto por Rousselier é usado

também uma abordagem da termodinâmica de processos irreversíveis, que por sua vez define as forças termodinâmica.

O modelo descreve não apenas a plasticidade de metais porosos, como também a coalescência de vazios e fratura dúctil. O crescimento de vazio do modelo resulta na suavização da deformação, que promove a localização de deformação e danos em um plano (Rousselier, 2001b).

O modelo proposto por Rousselier é fundamentado no quadro termodinâmico proposto por Lemaitre e Chaboche, introduzindo o dano como uma variável de estado, identificada como porosidade. Cabe ressaltar que a força termodinâmica associada e a superfície de escoamento devem ser tais que a lei de evolução do dano seja correspondente a conservação de massa. Este modelo é desenvolvido na área de termodinâmica dos sólidos considerando deformações finitas, endurecimento isotrópico e crescimento de vazios, ou cavidades (Rousselier, 1980). No modelo de Rousselier existe algum dano acoplado com elasticidade através da mudança de densidade e , apesar de não haver nenhum argumento baseado em microdinâmica é interessante notar que o potencial de escoamento plástico é similar ao modelo de Gurson (Karihaloo e Knauss, 2003).

2.2.1 Formulação

Para o modelo de Rousselier de dano contínuo, são definidas: uma variável de estado de dano f , uma variável de estado de endurecimento por deformação $\bar{\epsilon}^p$ e o tensor das deformações plásticas $\boldsymbol{\epsilon}^p$. A termodinâmica de processos irreversíveis define as forças termodinâmica ($\boldsymbol{\sigma}/\rho$, P e F) de modo que a força de dissipação intrínseca é (Rousselier, 2001b) conforme mostra-se na equação (2.7):

$$\frac{\boldsymbol{\sigma}}{\rho} : \boldsymbol{\epsilon}^p - P \dot{\bar{\epsilon}}^p - F \dot{f} \geq 0 \quad (2.7)$$

onde ρ é a densidade, $\rho = \rho_0$ é o estado de referência inicial, sem carregamento, $\rho_0 = 1$ pode ser assumido caso os efeitos inerciais sejam negligenciados. As variáveis $\boldsymbol{\sigma}/\rho$, P e F associadas as variáveis internas $\boldsymbol{\epsilon}^p$, $\bar{\epsilon}^p$ e f derivam da energia específica livre, também conhecida como energia específica de Helmholtz, que por sua vez define o potencial termodinâmico e a equação constitutiva. Dessa forma, o potencial termodinâmico para o modelo de Rousselier é definido como mostrado na equação (2.8):

$$\psi(\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}^p, \bar{\epsilon}^p, f) = \psi(\boldsymbol{\epsilon}^e, \bar{\epsilon}^p, f) \quad (2.8)$$

¹ Originalmente nos textos de Rousselier o autor utiliza a variável p para a variável interna associada ao endurecimento, no entanto, para não causar confusão com a pressão hidrostática, neste trabalho será utilizada a variável conforme descrito no texto.

onde $\boldsymbol{\varepsilon}$ é o tensor deformação e $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ é o tensor das deformações elásticas. Dessa forma as variáveis $\boldsymbol{\sigma}/\rho$, P e F (Forças termodinâmicas) são definidas conforme equação (2.9):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\boldsymbol{\sigma}}{\rho} = -\frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}^p} = \frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}^p} \\ P = \frac{\partial\psi}{\partial\bar{\varepsilon}^p} \\ F = \frac{\partial\psi}{\partial f} \end{array} \right. \quad (2.9)$$

A equação constitutiva é feita a partir da associação aditiva do potencial termodinâmico como se segue na equação (2.10):

$$\psi = \frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}^e : \mathbb{D}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^e + \psi_{\bar{\varepsilon}^p}(\bar{\varepsilon}^p) + \psi_f(f) \quad (2.10)$$

onde \mathbb{D}^e o clássico tensor constitutivo de elasticidade. Como consequência da equação (2.10), $P = H^I(\bar{\varepsilon}^p)$ e $F = h^{-1}(f)$ ou, inversamente, $f = h(F)$. Postula-se a existência de um potencial plástico que depende do primeiro e segundo invariantes do tensor tensão: p (pressão hidrostática) associado a F e σ_{eq} (tensão equivalente de von Mises) acoplado com P , conforme equação (2.11):

$$\phi\left(\frac{\boldsymbol{\sigma}}{\rho}, P, F\right) = \phi_{vM}\left(\frac{\sigma_{eq}}{\rho}, P\right) + \phi_v\left(\frac{p}{\rho}, F\right) \quad (2.11)$$

onde $\phi_{vM} = q/\rho - P$ é o potencial plástico de von Mises, sendo o critério de escoamento $\phi_{vM} = 0$, ϕ_v corresponde à parte volumétrica do potencial plástico e $P = H^I(\bar{\varepsilon}^p)$ é a curva de encruamento do material. Note que H^I é o comumente chamado de módulo de endurecimento isotrópico, embora em seus textos, Rousselier não faz essa definição. Uma forma mais simples é assumida para o segundo termo: $\phi_h = g(p/\rho)h(F)$. Pela regra de normalização é possível avaliar a evolução das demais variáveis internas, (*potencial de dissipação normal*) conforme descrito nas equações (2.12) e (2.13):

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_d^p = \lambda \frac{\partial\phi_{vM}}{\partial(\boldsymbol{\sigma}/\rho)} \quad \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_v^p = \frac{1}{3}\lambda \frac{\partial\phi_v}{\partial(\boldsymbol{\sigma}/\rho)} = \frac{1}{3}\dot{\bar{\varepsilon}}^p g'(p/\rho)h(F) \quad (2.12)$$

$$\dot{\bar{\varepsilon}}^p = -\lambda \frac{\partial\phi}{\partial P} = \lambda \quad \dot{f} = -\lambda \frac{\partial\phi}{\partial F} = -\dot{\bar{\varepsilon}}^p g'(p/\rho)h'(F) \quad (2.13)$$

A variável de estado f recebe um nome especial, sendo definida como a *fração volumétrica de vazios* (Rousselier, 2001b), já a variável de estado $\bar{\varepsilon}^p$ é definida como *deformação plástica equivalente* (Rousselier, 2001a). As duas variáveis são correlacionadas: $\rho = 1 - f$ e $\rho_0 = 1 - f_0$.

Para simplificar a notação, ρ é definida como a densidade relativa obtida dividindo a densidade do material danificado pela do material em seu estado inicial (Rousselier *et al.*, 1989). Em outras palavras, $\rho_0 = 1$, como consequência $f_0 \ll 1$ e, portanto, são negligenciados os efeitos inerciais. Conforme demonstrado por Rousselier (Rousselier, 1987 e Rousselier, 1989), existem algumas simplificações que podem ser adotadas nas equações (2.12) e (2.13), de modo que possa ser reescrito na equação (2.14):

$$g\left(\frac{p}{\rho}\right) = D\sigma_1 \exp\left(\frac{p}{\rho\sigma_1}\right) \quad F = \lambda - \sigma_1 \ln\left(\frac{f}{1-f}\right) \quad (2.14)$$

onde p , conforme descrito anteriormente é a pressão hidrostática, definida pelo traço do tensor tensão de Cauchy $p \equiv \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{3} \sigma_{ii}$. D e σ_1 são constantes paramétricas que devem ser obtidas mediante calibração, já λ representa uma constante (Rousselier, 2001a). O terceiro parâmetro do modelo é a fração volumétrica de vazio inicial f_0 . De maneira resumida, as variáveis de estado para o modelo de Rousselier são apresentadas na Tabela 2-1.

Tabela 2-1. Variáveis de estado para a teoria de Rousselier.

Mecanismo	Tipo	Variável de estado		Variável associada
		Observável	Interna	
Elasticidade	Tensorial	$\boldsymbol{\varepsilon}^e$		$\boldsymbol{\sigma}$
Plasticidade	Tensorial		$\boldsymbol{\varepsilon}^p$	$-\boldsymbol{\sigma}$
Endurecimento isotrópico	Escalar		$\bar{\varepsilon}^p$	P
Dano	Escalar		f	F

2.2.2 Equações constitutivas

A estrutura de formação de um modelo constitutivo segue uma lógica construtiva, onde, a definição do equacionamento matemático para o modelo de Rousselier, com endurecimento isotrópico pode ser definido como:

- i. Definir uma função de escoamento;
- ii. Determinar o vetor de fluxo (plasticidade associativa), que determina a direção do fluxo de escoamento plástico;
- iii. Representação da lei de fluxo plástico, determinando o tensor de deformação de fluxo plástico;
- iv. Determinar a evolução das demais variáveis de estado;
- v. Regras de complementaridade.

Como descrito no anteriormente a montagem do modelo matemático se inicia pela escolha da chamada função *de escoamento*, definida como nas equações (2.15) e (2.16):

$$\phi = \frac{\sigma_{eq}}{(1-f)} + D\sigma_1 f \exp\left(\frac{p}{(1-f)\sigma_1}\right) - \sigma_y(\bar{\varepsilon}^p) \quad (2.15)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{D}^e : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) \quad (2.16)$$

onde σ_{eq} representa a tensão equivalente de von Mises, definida como $\sigma_{eq} = \sqrt{3J_2}$, p representa a tensão hidrostática, f o parâmetro de dano e $\sigma_y(\bar{\varepsilon}^p)$ é a curva de encruamento do material.

Uma vez determinada a função de escoamento, em seguida é determinada então a *direção do fluxo plástico* do material por meio da plasticidade associativa, dado pelo vetor de fluxo plástico, representado matematicamente pela derivada da função de escoamento em função da tensão de carregamento, como apresentado na equação (2.17):

$$\mathbf{N} \equiv \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{3}{2\sigma_{eq}(1-f)} \mathbf{S} + \frac{1}{3} \frac{Df \exp\left(\frac{p}{(1-f)\sigma_1}\right)}{(1-f)\sigma_1} \mathbf{I} \quad (2.17)$$

onde \mathbf{N} representa o vetor de fluxo.

Note que, da equação acima é possível fazer uma associação aditiva do vetor de fluxo plástico, dividindo-o, assim, em uma parte desviadora e outra parte volumétrica, conforme descrito na equação (2.18):

$$\mathbf{N} = \mathbf{N}_d + \frac{1}{3} N_v \mathbf{I} \quad (2.18)$$

sendo \mathbf{N}_d (tensor) e N_v (escalar) respectivamente a parte desviadora e volumétrica do vetor de fluxo plástico, matematicamente expressos como na equação (2.19):

$$\mathbf{N}_d = \frac{3}{2\sigma_{eq}(1-f)} \mathbf{S},$$

e

$$N_v = \frac{Df \exp\left(\frac{p}{(1-f)\sigma_1}\right)}{(1-f)\sigma_1} \quad (2.19)$$

note que \mathbf{S} é a componente desviadora do tensor tensão de Cauchy é definida como: $\mathbf{S} \equiv \boldsymbol{\sigma} - p\mathbf{I} = \left[\mathbb{I} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right] : \boldsymbol{\sigma}$ sendo \mathbb{I} o tensor identidade de quarta ordem.

Uma vez determinada a direção do fluxo plástico, o próximo passo consiste na determinação da taxa de evolução da deformação plástica, por meio da plasticidade associativa, que incorpora a *lei de fluxo plástico* do modelo de Rousselier, determinado matematicamente pela equação (2.20):

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p \equiv \dot{\gamma} \mathbf{N} = \frac{\dot{\gamma}}{(1-f)} \left[\frac{3}{2\sigma_{eq}} \mathbf{S} + \frac{1}{3} Df \exp\left(\frac{p}{(1-f)\sigma_1}\right) \mathbf{I} \right],$$

e

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = \dot{\gamma} \left(\mathbf{N}_d + \frac{1}{3} N_v \mathbf{I} \right) \quad (2.20)$$

onde $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p$ representa o tensor das deformações plásticas e $\dot{\gamma}$ é o chamado multiplicador plástico. Da mesma maneira que o vetor de fluxo plástico, também o tensor das deformações plásticas pode ser dividido em uma parte de contribuição desviadora e outra de contribuição volumétrica, conforme segue na equação (2.21):

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_d^p + \frac{1}{3} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_v^p \mathbf{I} \quad (2.21)$$

sendo que $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_d^p$ corresponde a parte desviadora do tensor das deformações plásticas, e $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_v^p$ a parte volumétrica na equação (2.22):

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_d^p = \frac{\dot{\gamma}}{(1-f)} \frac{3}{2\sigma_{eq}} \mathbf{S},$$

e

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_v^p = \frac{\dot{\gamma}}{(1-f)} Df \exp\left(\frac{p}{(1-f)\sigma_1}\right) \quad (2.22)$$

A próxima etapa consiste na lei de evolução para as demais variáveis internas:

- i. Deformação plástica equivalente, dado através da equação de Prandt-Reuss, (A lei de evolução do fluxo plástico) equação (2.23):

$$\dot{\bar{\boldsymbol{\epsilon}}}^p = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p} = \frac{\dot{\gamma}}{(1-f)} \sqrt{1 + \frac{2}{9} \left[Df \exp\left(\frac{p}{(1-f)\sigma_1}\right) \right]^2} \quad (2.23)$$

- ii. Evolução do parâmetro de dano, equação (2.24):

$$\begin{aligned}\dot{f} &\equiv (1-f)\dot{\varepsilon}_v^p \\ &\vdots \\ \dot{f} &= (1-f)\dot{\gamma}N_v\end{aligned}\tag{2.24}$$

De maneira resumida, o Quadro 2-2 apresenta o modelo matemático de Rousselier.

Quadro 2-2. Modelo matemático de Rousselier com endurecimento isotrópico.

i)	Decomposição aditiva da deformação:		
		$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p$	
ii)	Lei de Hooke:		
		$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{D}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^e$	
iii)	Função de Escoamento:		
		$\phi = \frac{\sigma_{eq}}{(1-f)} + D\sigma_1 \exp\left(\frac{p}{(1-f)\sigma_1}\right) - \sigma_y(\bar{\varepsilon}^p)$	
iv)	Lei de fluxo plástico:		
		$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_d^p + \frac{1}{3}\dot{\varepsilon}_v^p \mathbf{I}$	
	Em que		
		$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_d^p = \frac{\dot{\gamma}}{(1-f)} \frac{3}{2\sigma_{eq}} \mathbf{S} \quad \dot{\varepsilon}_v^p = \frac{\dot{\gamma}}{(1-f)} D \exp\left(\frac{p}{(1-f)\sigma_1}\right)$	
	e lei de evolução para $\bar{\varepsilon}^p$ e f :		
		$\dot{\bar{\varepsilon}}^p = \frac{\dot{\gamma}}{(1-f)} \sqrt{1 + \frac{2}{9} \left[D \exp\left(\frac{p}{(1-f)\sigma_1}\right) \right]^2}$	
		$\dot{f} = \dot{\gamma} D \exp\left(\frac{p}{(1-f)\sigma_1}\right)$	
v)	Regra de complementaridade		
	$\dot{\gamma} \geq 0$,	$\phi \leq 0$,	$\dot{\gamma}\phi = 0$

Rousselier propôs potenciais termodinâmicos e potenciais de dissipação que derivados com relação as forças termodinâmicas e as variáveis internas são possíveis retomar todas as leis de evolução (evolução da deformação plástica equivalente e evolução do dano). Esta natureza é o ponto de diferença entre o modelo de Gurson, que propôs uma lei de evolução baseado na geometria do vazio, sem propor um potencial termodinâmico que justifique esta lei. A

consistência termodinâmica do modelo pode ser verificada conforme descrito na equação (2.13), fazendo-se a derivada do termo $\phi_v\left(\frac{p}{\rho}, F\right)$ em relação ao F é possível retomar a equação (2.24), ou pelo caminho inverso, integrando a lei de evolução do dano da equação (2.24) em função do F é possível retomar o potencial.

3. INTEGRAÇÃO IMPLÍCITA

Para a solução do conjunto de equações adota-se a chamada metodologia da *decomposição do operador* (Simo e Hughes, 1998, p.114; De Souza Neto *et al.*, 2008, p. 193), especialmente adequado para a integração numérica do problema de evolução e têm sido amplamente utilizados na plasticidade computacional, onde o problema é subdividido em duas partes: a primeira consiste em um preditor elástico, o qual o comportamento mecânico do material é assumido como completamente elástico, e que são conhecidos no início do intervalo do pseudo-tempo $[t_n, t_{n+1}]$, os valores da deformação elástica, ϵ_n^e , da deformação plástica, ϵ_n^p , além do conjunto de variáveis internas de propriedade mecânica do material. A segunda parte consiste em um corretor plástico onde um sistema de equações residuais formado pela lei elástica, a função de escoamento e as equações de evolução das variáveis internas é resolvido, tomando os valores obtidos na construção do preditor elástico como valores iniciais do problema. Este sistema de equações não lineares é solucionado, por meio do método de Newton- Raphson. O modelo é então agregado a uma ferramenta acadêmica de MEF, para o caso em questão, o Hyplas. Esta etapa descrita anteriormente corresponde a parte local da solução numérica. A Figura 3-1 apresenta um fluxograma das etapas de solução do problema numérico adotando-se a estratégia apresentada previamente.

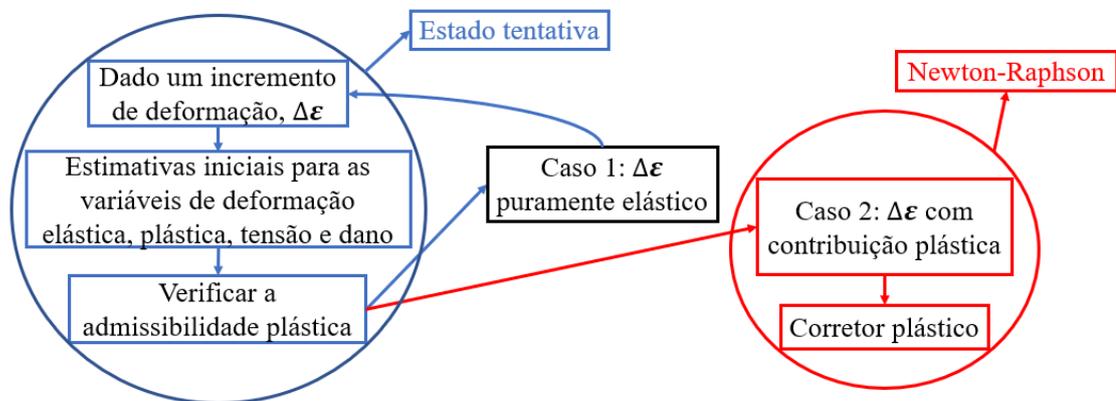


Figura 3-1. Fluxograma da Estratégia Numérica para solução do problema uniaxial.

3.1 ALGORITMO DE ATUALIZAÇÃO DAS TENSÕES E VARIÁVEIS INTERNAS

Na chamada plasticidade computacional, o algoritmo de atualização das variáveis, comumente chamado algoritmo de mapeamento de retorno e seu modelo construtivo funciona de tal modo que, conhecidos os valores da deformação elástica, ϵ_n^e e do conjunto das variáveis internas no início do intervalo do pseudo-tempo $[t_n, t_{n+1}]$, bem como o incremento de deformação prescrito, $\Delta\epsilon$, para este intervalo, é possível a construção do chamado estado tentativa

elástico. O modelo constitutivo de Rousselier é dito como não-conservativo, isto é, é um modelo constitutivo que depende da trajetória, de modo que seja imprescindível a necessidade de formular algoritmos para integração numérica das equações de evolução das variáveis de estado. A estratégia numérica para o modelo visa formular procedimentos de integração numérica capazes de atualizar as variáveis internas conhecidas no instante de tempo “ t_n ” para que sejam obtidas as variáveis internas no instante de tempo “ t_{n+1} ”, onde o incremento de deformação é uma constante assumida como conhecida.

Segundo Simo e Hughes (1998) a discretização das equações constitutivas dentro do chamado pseudo-tempo $[t_n, t_{n+1}]$ é aplicada a todos esses modelos, baseado no esquema de Euler implícito. Portanto, com o modelo de Euler implícito aplicado a uma ferramenta acadêmica de MEF, deve-se também se derivar a matriz tangente consistente com o algoritmo de integração.

Também é realizada uma conferência da região de escoamento por meio da função de escoamento, que caso seja violada, (numericamente falando maior do que zero) o chamado corretor plástico é então inicializado e o método de Newton-Raphson é utilizado para se resolver o conjunto de equações não lineares discretizado. O método é escolhido para solucionar o problema por atingir uma taxa quadrática de convergência para a solução, o que resulta em um algoritmo de atualização computacionalmente eficiente (Simo & Hughes, 1998, p. 322; De Souza Neto *et al.*, 2008, p. 121).

A estratégia inicia-se pela montagem do estado tentativa no pseudo-tempo t_{n+1} , dado um incremento de deformação tensorial, $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$, assumido como completamente elástico, sendo feita a atualização do tensor deformação e tensor tensão: Euler implícito, dado que é conhecido o valor de todas as variáveis internas do problema no pseudo-tempo t_n . A equação de atualização do tensor das deformações elásticas, no pseudo-tempo t_{n+1} , é definida como apresentado na equação (3.1):

$$\boldsymbol{\varepsilon}_n^e = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{eT} - \frac{\Delta\gamma}{(1-f_{n+1})} \left[\frac{3}{2\sigma_{eq_{n+1}}} \mathbf{S}_{n+1} + \frac{1}{3} Df_{n+1} \exp\left(\frac{p_{n+1}}{(1-f_{n+1})\sigma_1}\right) \mathbf{I} \right] \quad (3.1)$$

onde $\boldsymbol{\varepsilon}_n^e$ representa o tensor das deformações elásticas no pseudo-tempo tempo t_n , $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{eT}$ representa o tensor das deformações elásticas tentativas, f_{n+1} representa a fração volumétrica de vazios, $\sigma_{eq_{n+1}}$ é a tensão equivalente e \mathbf{S}_{n+1} é o tensor das tensões desviadoras, todas as variáveis no pseudo-tempo tempo t_{n+1} . É possível substitui a equação (3.1) na Lei de Hooke generalizada, como segue na equação (3.2):

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathbb{D}^e : \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^T - \frac{\Delta\gamma \mathbb{D}^e}{(1-f_{n+1})} : \left[\frac{3}{2\sigma_{eq_{n+1}}} \mathbf{S}_{n+1} + \frac{1}{3} Df_{n+1} \exp\left(\frac{p_{n+1}}{(1-f_{n+1})\sigma_1}\right) \mathbf{I} \right] \quad (3.2)$$

ou ainda, conforme equação (3.3):

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^T - \frac{\Delta\gamma}{(1-f_{n+1})} \left[3G \frac{\mathbf{S}_{n+1}}{\sigma_{eq_{n+1}}} + \frac{K}{3} Df_{n+1} \exp\left(\frac{p_{n+1}}{(1-f_{n+1})\sigma_1}\right) \mathbf{I} \right] \quad (3.3)$$

sendo que G é chamado de módulo de cisalhamento e K é o chamado módulo volumétrico.

Em continuidade do modelo constitutivo, o próximo passo consiste na atualização das demais variáveis internas como deformação plástica equivalente, o parâmetro de dano e a admissibilidade plástica, que verifica matematicamente o domínio do regime em questão, se ele se encontra dentro do limite elástico, ou dentro de um regime plástico, pela função de escoamento.

Para a atualização da deformação plástica equivalente, através do modelo numérico da equação de Prandt-Reuss (3.4):

$$\bar{\varepsilon}_{n+1}^p = \bar{\varepsilon}_n^p + \frac{\Delta\gamma}{(1-f_{n+1})} \sqrt{1 + \frac{2}{9} \left[Df_{n+1} \exp\left(\frac{p_{n+1}}{(1-f_{n+1})\sigma_1}\right) \right]^2} \quad (3.4)$$

onde $\bar{\varepsilon}_{n+1}^p$ é a deformação plástica equivalente no pseudo-tempo t_{n+1} .

Para o parâmetro de dano, equação (3.5):

$$f_{n+1} = f_n + \Delta\gamma Df_{n+1} \exp\left(\frac{p_{n+1}}{(1-f_{n+1})\sigma_1}\right) \quad (3.5)$$

Por fim, para a admissibilidade plástica é necessário a atualização da função de escoamento, que pode ser escrita como na equação (3.6):

$$\phi_{n+1} = \frac{\sigma_{eq_{n+1}}}{(1-f_{n+1})} + Df_{n+1} \sigma_1 \exp\left(\frac{p_{n+1}}{(1-f_{n+1})\sigma_1}\right) - \sigma_{y0} - H^I \bar{\varepsilon}_{n+1}^p \quad (3.6)$$

onde p_{n+1} é a tensão hidrostática no tempo t_{n+1} , e H^I é o módulo de endurecimento isotrópico

De posse da função de escoamento é possível verificar se o estado tentativa descrito anteriormente pertence ao domínio elástico de fato. Caso $\phi^T \leq 0$ corresponde em um regime elástico, sendo a hipótese inicial é falsa ($\phi^T > 0$) o incremento de deformação aplicado possui

também uma parcela plástica. Nesse caso, o corretor plástico deve ser utilizado para correção do estado de tensão tentativa. A correção do estado tentativa consiste em retirar a parcela de contribuição plástica do tensor das deformações elásticas tentativa da equação (3.1).

Assim, para a completa resolução do corretor plástico, há a necessidade de se resolver um sistema de equações não lineares composto pela equação de atualização de todas as variáveis internas e mais a função de escoamento. O algoritmo de retorno consiste na resolução de sistemas não lineares escritas na forma de equação residual, por meio do método de solução iterativa de Newton-Raphson, tendo como variáveis globais: σ_{n+1} , $\bar{\varepsilon}_{n+1}^p$, f_{n+1} e $\Delta\gamma$. Pode-se observar conforme descrito na equação (3.7):

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{R}_{\sigma_{n+1}} = \sigma_{n+1} - \sigma_{n+1}^T + \left\{ \frac{\Delta\gamma}{(1-f_{n+1})} \left[3G \frac{\mathbf{S}_{n+1}}{\sigma_{eq_{n+1}}} + \frac{K}{3} Df_{n+1} \exp\left(\frac{p_{n+1}}{(1-f_{n+1})\sigma_1}\right) \mathbf{I} \right] \right\} \\ R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p} = \bar{\varepsilon}_{n+1}^p - \bar{\varepsilon}_n^p - \frac{\Delta\gamma}{(1-f_{n+1})} \sqrt{1 + \frac{2}{9} \left[Df_{n+1} \exp\left(\frac{p_{n+1}}{(1-f_{n+1})\sigma_1}\right) \right]^2} \\ R_{f_{n+1}} = f_{n+1} - f_n - \Delta\gamma Df_{n+1} \exp\left(\frac{p_{n+1}}{(1-f_{n+1})\sigma_1}\right) \\ R_{\Delta\gamma} = \frac{\sigma_{eq_{n+1}}}{(1-f_{n+1})} + Df_{n+1} \sigma_1 \exp\left(\frac{p_{n+1}}{(1-f_{n+1})\sigma_1}\right) - \sigma_{y0} - H^I \bar{\varepsilon}_{n+1}^p \end{array} \right. \quad (3.7)$$

Note ainda que, é possível fazer uma simplificação na equação (3.7), de modo que possa ser reescrita como na equação (3.8):

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{R}_{\sigma_{n+1}} = \sigma_{n+1} - \sigma_{n+1}^T + \Delta\gamma \left[2GN_d + \frac{K}{3} N_v \mathbf{I} \right] \\ R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p} = \bar{\varepsilon}_{n+1}^p - \bar{\varepsilon}_n^p - \frac{\Delta\gamma}{(1-f_{n+1})} \sqrt{1 + \frac{2}{9} \left[Df_{n+1} \exp\left(\frac{p_{n+1}}{(1-f_{n+1})\sigma_1}\right) \right]^2} \\ R_{f_{n+1}} = f_{n+1} - f_n - \Delta\gamma Df_{n+1} \exp\left(\frac{p_{n+1}}{(1-f_{n+1})\sigma_1}\right) \\ R_{\Delta\gamma} = \frac{\sigma_{eq_{n+1}}}{(1-f_{n+1})} + Df_{n+1} \sigma_1 \exp\left(\frac{p_{n+1}}{(1-f_{n+1})\sigma_1}\right) - \sigma_{y0} - H^I \bar{\varepsilon}_{n+1}^p \end{array} \right. \quad (3.8)$$

onde N_d e N_v são respectivamente a parte desviadora e volumétrica do vetor de fluxo plástico, matematicamente expressos como na equação (3.9):

$$\left\{ \begin{array}{l} N_d = \frac{3}{2\sigma_{eq_{n+1}}} \frac{\mathbf{S}_{n+1}}{(1-f_{n+1})} \\ N_v = \frac{Df_{n+1}}{(1-f_{n+1})} \exp\left(\frac{p_{n+1}}{(1-f_{n+1})\sigma_1}\right) \end{array} \right. \quad (3.9)$$

Feito isso, o modelo matemático de Rousselier está completamente definido. O Quadro 3-1 apresenta um resumo da descrição matemática do modelo.

Quadro 3-1. Atualização das tensões e variáveis internas – modelo de Rousselier.

i)	Determinar o estado tentativa: Dado um incremento de deformação, $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}$.
	$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{eT} = \boldsymbol{\varepsilon}_n^e + \Delta \boldsymbol{\varepsilon}$ $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^T = \mathbb{D}^e : \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{eT}$ $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^p$ $f_{n+1}^T = f_n$
ii)	Verificar a admissibilidade Plástica:
	$\phi_{n+1}^T = \frac{\sigma_{eqn+1}^T}{(1 - f_{n+1}^T)} + D f_{n+1}^T \sigma_1 \exp\left(\frac{p_{n+1}^T}{(1 - f_{n+1}^T)\sigma_1}\right) - \sigma_{y0} - H^I \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p$ <p>Se $\phi_{n+1}^T \leq 0$, então (passo elástico): $(*)_{n+1} = (*)_{n+1}^T$; Caso contrário, então (passo plástico): Algoritmo de retorno:</p>
iii)	Algoritmo de retorno: resolver o sistema de equações não-lineares (Newton-Raphson), tendo como variáveis: $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$, $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p$, f_{n+1} , e $\Delta \gamma$.
	$\left\{ \begin{array}{l} R_{\boldsymbol{\sigma}_{n+1}} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1} - \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^T + \Delta \gamma \left[2GN_d + \frac{K}{3} N_v I \right] \\ R_{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p} = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p - \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^p - \frac{\Delta \gamma}{(1 - f_{n+1})} \sqrt{1 + \frac{2}{9} \left[D f_{n+1} \exp\left(\frac{p_{n+1}}{(1 - f_{n+1})\sigma_1}\right) \right]^2} \\ R_{f_{n+1}} = f_{n+1} - f_n - \Delta \gamma D f_{n+1} \exp\left(\frac{p_{n+1}}{(1 - f_{n+1})\sigma_1}\right) \\ R_{\Delta \gamma} = \frac{\sigma_{eqn+1}}{(1 - f_{n+1})} + D f_{n+1} \sigma_1 \exp\left(\frac{p_{n+1}}{(1 - f_{n+1})\sigma_1}\right) - \sigma_{y0} - H^I \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p \end{array} \right.$
iv)	Atualizar outras variáveis internas.
v)	Fim.

3.2 MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON

A montagem do corretor plástico é iniciada através do processo de linearização do sistema, conforme pode ser observado na equação (3.10):

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{R}_{\sigma_{n+1}}}{\partial \sigma_{n+1}} & \frac{\partial \mathbf{R}_{\sigma_{n+1}}}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} & \frac{\partial \mathbf{R}_{\sigma_{n+1}}}{\partial f_{n+1}} & \frac{\partial \mathbf{R}_{\sigma_{n+1}}}{\partial \Delta\gamma} \\ \frac{\partial R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p}}{\partial \sigma_{n+1}} & \frac{\partial R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p}}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} & \frac{\partial R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p}}{\partial f_{n+1}} & \frac{\partial R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p}}{\partial \Delta\gamma} \\ \frac{\partial R_{f_{n+1}}}{\partial \sigma_{n+1}} & \frac{\partial R_{f_{n+1}}}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} & \frac{\partial R_{f_{n+1}}}{\partial f_{n+1}} & \frac{\partial R_{f_{n+1}}}{\partial \Delta\gamma} \\ \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \sigma_{n+1}} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial f_{n+1}} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \Delta\gamma} \end{bmatrix}^k \cdot \begin{bmatrix} \delta \sigma_{n+1} \\ \delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^p \\ \delta f_{n+1} \\ \delta \Delta\gamma \end{bmatrix}^{k+1} = - \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{\sigma_{n+1}} \\ R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p} \\ R_{f_{n+1}} \\ R_{\Delta\gamma} \end{bmatrix}^k \quad (3.10)$$

De maneira resumida, o algoritmo para a atualização das tensões e variáveis internas é mostrado no Quadro 3-2.

Quadro 3-2. Algoritmo de retorno (Newton-Raphson) - Rousselier

Dado o estado tentativa como parâmetros iniciais:

$$\sigma_{n+1}^{(0)} = \sigma_{n+1}^T \quad \Delta\gamma^{(0)} = \Delta\gamma \quad \bar{\varepsilon}_{n+1}^{p(0)} = \bar{\varepsilon}_n^p \quad f_{n+1}^{(0)} = f_n$$

i) Resolver o sistema de equações para: σ_{n+1} , f_{n+1} , $\bar{\varepsilon}_{n+1}^p$ e $\Delta\gamma$.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{R}_{\sigma_{n+1}}}{\partial \sigma_{n+1}} & \frac{\partial \mathbf{R}_{\sigma_{n+1}}}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} & \frac{\partial \mathbf{R}_{\sigma_{n+1}}}{\partial f_{n+1}} & \frac{\partial \mathbf{R}_{\sigma_{n+1}}}{\partial \Delta\gamma} \\ \frac{\partial R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p}}{\partial \sigma_{n+1}} & \frac{\partial R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p}}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} & \frac{\partial R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p}}{\partial f_{n+1}} & \frac{\partial R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p}}{\partial \Delta\gamma} \\ \frac{\partial R_{f_{n+1}}}{\partial \sigma_{n+1}} & \frac{\partial R_{f_{n+1}}}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} & \frac{\partial R_{f_{n+1}}}{\partial f_{n+1}} & \frac{\partial R_{f_{n+1}}}{\partial \Delta\gamma} \\ \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \sigma_{n+1}} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial f_{n+1}} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \Delta\gamma} \end{bmatrix}^k \cdot \begin{bmatrix} \delta \sigma_{n+1} \\ \delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^p \\ \delta f_{n+1} \\ \delta \Delta\gamma \end{bmatrix}^{k+1} = - \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{\sigma_{n+1}} \\ R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p} \\ R_{f_{n+1}} \\ R_{\Delta\gamma} \end{bmatrix}^k$$

ii) Calcular:

$$\sigma_{n+1}^{(k+1)} = \sigma_{n+1}^{(k)} + \delta \sigma_{n+1}^{(k+1)} \quad \Delta\gamma^{(k+1)} = \Delta\gamma^{(k)} + \delta \Delta\gamma^{(k+1)}$$

$$\bar{\varepsilon}_{n+1}^{p(k+1)} = \bar{\varepsilon}_{n+1}^{p(k)} + \delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^{p(k+1)} \quad f_{n+1}^{(k+1)} = f_{n+1}^{(k)} + \delta f_{n+1}^{(k+1)}$$

iii) Verificar convergência:

$$\phi^{(k+1)} = \frac{\sigma_{eq_{n+1}}^{(k+1)}}{(1 - f_{n+1}^{(k+1)})} + D f_{n+1}^{(k+1)} \sigma_1 \exp\left(\frac{p_{n+1}}{(1 - f_{n+1}^{(k+1)}) \sigma_1}\right) - \sigma_y$$

$$|\phi^{(k+1)}| \leq \text{tolerância} \rightarrow \text{finaliza o processo}$$

iv) Fim.

Onde, para a primeira equação residual vide (3.11):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{R}_{\sigma_{n+1}}}{\partial \sigma_{n+1}} = \mathbb{I} + \Delta\gamma \left[2G \frac{\partial N_d}{\partial \sigma_{n+1}} + \frac{K}{3} \frac{\partial N_v}{\partial \sigma_{n+1}} \otimes \mathbf{I} \right] \\ \frac{\partial \mathbf{R}_{\sigma_{n+1}}}{\partial \varepsilon_{n+1}^p} = \mathbf{0} \\ \frac{\partial \mathbf{R}_{\sigma_{n+1}}}{\partial f_{n+1}} = \Delta\gamma \left[2G \frac{\partial N_d}{\partial f_{n+1}} + \frac{K}{3} \frac{\partial N_v}{\partial f_{n+1}} \mathbf{I} \right] \\ \frac{\partial \mathbf{R}_{\sigma_{n+1}}}{\partial \Delta\gamma} = \left[2GN_d + \frac{K}{3} N_v \mathbf{I} \right] \end{array} \right. \quad (3.11)$$

Para a segunda equação residual vide (3.12):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial R_{\varepsilon_{n+1}^p}}{\partial \sigma_{n+1}} = \frac{-\Delta\gamma}{(1-f_{n+1})} \frac{\partial \alpha}{\partial \sigma_{n+1}} \\ \frac{\partial R_{\varepsilon_{n+1}^p}}{\partial \varepsilon_{n+1}^p} = 1 \\ \frac{\partial R_{\varepsilon_{n+1}^p}}{\partial f_{n+1}} = \frac{-\Delta\gamma(-1)}{(1-f_{n+1})^2} \frac{\partial(1-f_{n+1})}{\partial f_{n+1}} \alpha - \frac{\Delta\gamma}{(1-f_{n+1})} \frac{\partial \alpha}{\partial f_{n+1}} = \frac{-\Delta\gamma}{(1-f_{n+1})^2} \alpha - \frac{\Delta\gamma}{(1-f_{n+1})} \\ \frac{\partial R_{\varepsilon_{n+1}^p}}{\partial \Delta\gamma} = -\frac{1}{(1-f_{n+1})} \alpha \end{array} \right. \quad (3.12)$$

sendo $\alpha = \sqrt{1 + \frac{2}{9} \left[Df_{n+1} \exp\left(\frac{p_{n+1}}{(1-f_{n+1})\sigma_1}\right) \right]^2}$

Para a terceira equação residual vide (3.13):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial R_{f_{n+1}}}{\partial \sigma_{n+1}} = -\Delta\gamma \frac{\partial N_v}{\partial \sigma_{n+1}} (1-f_{n+1}) \\ \frac{\partial R_{f_{n+1}}}{\partial \varepsilon_{n+1}^p} = 0 \\ \frac{\partial R_{f_{n+1}}}{\partial f_{n+1}} = 1 - \Delta\gamma \frac{\partial N_v}{\partial f_{n+1}} (1-f_{n+1}) - \Delta\gamma N_v (-1) = 1 - \Delta\gamma \frac{\partial N_v}{\partial f_{n+1}} (1-f_{n+1}) + \Delta\gamma N_v \\ \frac{\partial R_{f_{n+1}}}{\partial \Delta\gamma} = -N_v (1-f_{n+1}) \end{array} \right. \quad (3.13)$$

Para a quarta equação residual vide (3.14):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} = \mathbf{N}_{n+1} \\ \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \varepsilon_{n+1}^p} = -H^I \\ \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial f_{n+1}} = \frac{\sigma_{eq_{n+1}}}{(1-f_{n+1})^2} + D\sigma_1 \exp\left(\frac{p_{n+1}}{(1-f_{n+1})\sigma_1}\right) + D\sigma_1 f_{n+1} \frac{\partial}{\partial f_{n+1}} \left[\exp\left(\frac{p_{n+1}}{(1-f_{n+1})\sigma_1}\right) \right] \\ \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \Delta\gamma} = 0 \end{array} \right. \quad (3.14)$$

As demais derivadas necessárias para a solução do problema são apresentadas na equação (3.15):

$$\frac{\partial \mathbf{N}_d}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} = \frac{3}{2(1-f_{n+1})} \left[\mathbb{I}^d - \frac{\mathbf{S}_{n+1}}{\sigma_{eq}^2} \otimes \frac{3\mathbf{S}_{n+1}}{2\sigma_{eq}} \right] = \frac{3}{2(1-f_{n+1})} \left[\mathbb{I}^d - \frac{3}{2\sigma_{eq}^3} \mathbf{S}_{n+1} \otimes \mathbf{S}_{n+1} \right] \quad (3.15)$$

onde \mathbb{I}^d é o chamado tensor desviador identidade de quarta ordem, definido como $\mathbb{I}^d = \mathbb{I} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I}$. Para as demais derivadas vide equações (3.16), (3.17), (3.18), (3.19), (3.20) e (3.21)

$$\frac{\partial N_v}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} = \frac{Df_{n+1}}{(1-f_{n+1})} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} \left[\exp\left(\frac{p_{n+1}}{(1-f_{n+1})\sigma_1}\right) \right] \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial \mathbf{N}_d}{\partial f_{n+1}} = \frac{3}{2(1-f_{n+1})^2} \frac{\mathbf{S}_{n+1}}{\sigma_{eq}} \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_v}{\partial f_{n+1}} &= \frac{Df_{n+1}}{(1-f_{n+1})^2} \exp\left(\frac{p_{n+1}}{(1-f_{n+1})\sigma_1}\right) + \frac{D}{(1-f_{n+1})} \exp\left(\frac{p_{n+1}}{(1-f_{n+1})\sigma_1}\right) \\ &+ \frac{Df_{n+1}}{(1-f_{n+1})} \frac{\partial}{\partial f_{n+1}} \left[\exp\left(\frac{p_{n+1}}{(1-f_{n+1})\sigma_1}\right) \right] \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} &= \frac{1}{2} \frac{1}{\alpha} \left\{ \frac{2}{9} [Df_{n+1}]^2 2 \exp\left(\frac{p_{n+1}}{(1-f_{n+1})\sigma_1}\right) \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} \left[\exp\left(\frac{p_{n+1}}{(1-f_{n+1})\sigma_1}\right) \right] \right\} \\ &\frac{\partial \alpha}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2\alpha} \left\{ \frac{4}{9} \left[Df_{n+1} \exp\left(\frac{p_{n+1}}{(1-f_{n+1})\sigma_1}\right) \right]^2 \right. \\ &+ \left. \frac{2}{9} \left[D^2 f_{n+1}^2 2 \exp\left(\frac{p_{n+1}}{(1-f_{n+1})\sigma_1}\right) \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} \left[\exp\left(\frac{p_{n+1}}{(1-f_{n+1})\sigma_1}\right) \right] \right] \right\} \\ &\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} \left[\exp\left(\frac{p_{n+1}}{(1-f_{n+1})\sigma_1}\right) \right] = \exp\left(\frac{p_{n+1}}{(1-f_{n+1})\sigma_1}\right) \frac{1}{(1-f_{n+1})\sigma_1} \frac{1}{3} \mathbf{I} \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\frac{\partial}{\partial f_{n+1}} \left[\exp \left(\frac{p_{n+1}}{(1-f_{n+1})\sigma_1} \right) \right] = \exp \left(\frac{p_{n+1}}{(1-f_{n+1})\sigma_1} \right) \frac{p_{n+1}}{(1-f_{n+1})^2\sigma_1} \quad (3.21)$$

3.3 ALGORITMO DE RETORNO PARA O MODELO DE GURSON

A equação de atualização do tensor das deformações elásticas, no pseudo-tempo t_{n+1} , é definida conforme equação (3.22):

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{eT} - \Delta\gamma \mathbf{N}_{n+1} \quad (3.22)$$

onde $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e$ é o tensor das deformações elásticas, $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{eT}$ representa o tensor das deformações elásticas tentativa, $\Delta\gamma$ o incremento do multiplicador plástico e \mathbf{N}_{n+1} o vetor de fluxo. A lei de Hooke generalizada fica sendo conforme apresentado na equação (3.23):

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^T - \Delta\gamma \mathbb{D}^e : \mathbf{N}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^T - 2G\Delta\gamma \mathbf{N}_{n+1} - \Delta\gamma K \frac{1}{3} N_{v_{n+1}} \mathbf{I} \quad (3.23)$$

sendo que $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$, $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^T$, G e K representam tal como no modelo de Rousselier, o tensor tensão de Cauchy, tensor tensão tentativa, módulo cisalhante e volumétrico respectivamente. Pode-se, portanto, escrever a equação de atualização da deformação plástica equivalente como descrito na equação (3.24):

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^p + \Delta\gamma \sqrt{\frac{2}{3} \left\{ \mathbf{S}_{n+1} : \mathbf{S}_{n+1} + \frac{1}{3} \left[f_{n+1} \sigma_y \sinh \left(\frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y} \right) \right]^2 \right\}} \quad (3.24)$$

onde $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p$ representa a deformação plástica acumulada e $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^p$ a deformação plástica equivalente. A evolução da variável de dano é dada conforme a equação (3.25):

$$f_{n+1} = f_n + \Delta\gamma (1 - f_{n+1}) f_{n+1} \sigma_y \sinh \left(\frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y} \right) \quad (3.25)$$

Assim sendo, na construção do algoritmo de retorno, é necessária a solução do sistema de equações não lineares (3.26), tendo como variáveis: $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$, $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p$, f_{n+1} e $\Delta\gamma$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^T - 2G\Delta\gamma N_{d_{n+1}} - \Delta\gamma K \frac{1}{3} N_{v_{n+1}} \mathbf{I} \\ \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^p + \Delta\gamma \sqrt{\frac{2}{3} \left\{ \mathbf{S}_{n+1} : \mathbf{S}_{n+1} + \frac{1}{3} \left[f_{n+1} \sigma_y \sinh \left(\frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y} \right) \right]^2 \right\}} \\ f_{n+1} = f_n + \Delta\gamma (1 - f_{n+1}) f_{n+1} \sigma_y \sinh \left(\frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y} \right) \\ \phi_{n+1} = J_{2_{n+1}} - \frac{1}{3} \left[1 + f_{n+1}^2 - 2f_{n+1} \cosh \left(\frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y} \right) \right] \sigma_y^2 \end{array} \right. \quad (3.26)$$

De maneira resumida, o Quadro 3-3, apresenta o algoritmo de integração para o modelo de Gurson com endurecimento isotrópico.

Quadro 3-3. Modelo numérico de Gurson.

i)	Determinar o estado tentativa, dado um incremento de deformação $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$.
	$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{eT} = \boldsymbol{\varepsilon}_n^e + \Delta\boldsymbol{\varepsilon} \qquad \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^T = \mathbb{D}^e : \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{eT}$ $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^{pT} = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^p \qquad J_{2_{n+1}}^T = \frac{1}{2} \mathbf{S}_{n+1}^T : \mathbf{S}_{n+1}^T$ $f_{n+1}^T = f_n$
ii)	Verificar a admissibilidade plástica:
	$\phi^T = J_{2_{n+1}}^T - \frac{1}{3} \left[1 + f_n^2 - 2f_n \cosh \left(\frac{3p_{n+1}^T}{2\sigma_y} \right) \right] \sigma_y^2$ <p>Se $\phi^T \leq 0$, então (passo elástico): $(*)_{n+1} = (*)_{n+1}^T$; Caso contrário, então (passo plástico): Algoritmo de retorno:</p>
iii)	Algoritmo de retorno: resolver o sistema de equações não-lineares (Newton-Raphson), tendo como variáveis: $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$, $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p$, f_{n+1} , e $\Delta\gamma$.
	$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{R}_{\boldsymbol{\sigma}_{n+1}} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1} - \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^T + 2G\Delta\gamma N_{d_{n+1}} + \Delta\gamma K \frac{1}{3} N_{v_{n+1}} \mathbf{I} \\ R_{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p} = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p - \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^p - \Delta\gamma \sqrt{\frac{2}{3} \left\{ \mathbf{S}_{n+1} : \mathbf{S}_{n+1} + \frac{1}{3} \left[f_{n+1} \sigma_y \sinh \left(\frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y} \right) \right]^2 \right\}} \\ R_{f_{n+1}} = f_{n+1} - f_n - \Delta\gamma (1 - f_{n+1}) f_{n+1} \sigma_y \sinh \left(\frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y} \right) \\ R_{\Delta\gamma} = J_{2_{n+1}} - \frac{1}{3} \left[1 + f_{n+1}^2 - 2f_{n+1} \cosh \left(\frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y} \right) \right] \sigma_y^2 \end{array} \right.$
iv)	Atualizar outras variáveis internas
v)	Fim.

Na resolução do sistema não linear de equações é aplicado o método de Newton-Raphson, sendo que o Quadro 3-4 apresenta a estratégia de resolução do sistema.

Quadro 3-4. Algoritmo de retorno (Newton-Raphson) - Gurson

Dado o estado tentativa como parâmetros iniciais:

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(0)} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^T \quad \Delta\gamma^{(0)} = \Delta\gamma \quad \bar{\varepsilon}_{n+1}^{p(0)} = \bar{\varepsilon}_n^p \quad f_{n+1}^{(0)} = f_n$$

i) Resolver o sistema de equações para: $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$, f_{n+1} , $\bar{\varepsilon}_{n+1}^p$ e $\Delta\gamma$.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial R_{\boldsymbol{\sigma}_{n+1}}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} & \frac{\partial R_{\boldsymbol{\sigma}_{n+1}}}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} & \frac{\partial R_{\boldsymbol{\sigma}_{n+1}}}{\partial f_{n+1}} & \frac{\partial R_{\boldsymbol{\sigma}_{n+1}}}{\partial \Delta\gamma} \\ \frac{\partial R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} & \frac{\partial R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p}}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} & \frac{\partial R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p}}{\partial f_{n+1}} & \frac{\partial R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p}}{\partial \Delta\gamma} \\ \frac{\partial R_{f_{n+1}}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} & \frac{\partial R_{f_{n+1}}}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} & \frac{\partial R_{f_{n+1}}}{\partial f_{n+1}} & \frac{\partial R_{f_{n+1}}}{\partial \Delta\gamma} \\ \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial f_{n+1}} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \Delta\gamma} \end{bmatrix}^k \cdot \begin{bmatrix} \delta \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \\ \delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^p \\ \delta f_{n+1} \\ \delta \Delta\gamma \end{bmatrix}^{k+1} = - \begin{bmatrix} R_{\boldsymbol{\sigma}_{n+1}} \\ R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p} \\ R_{f_{n+1}} \\ R_{\Delta\gamma} \end{bmatrix}^k$$

ii) Calcular:

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(k+1)} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(k)} + \delta \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(k+1)} \quad \Delta\gamma^{(k+1)} = \Delta\gamma^{(k)} + \delta \Delta\gamma^{(k+1)}$$

$$\bar{\varepsilon}_{n+1}^{p(k+1)} = \bar{\varepsilon}_{n+1}^{p(k)} + \delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^{p(k+1)} \quad f_{n+1}^{(k+1)} = f_{n+1}^{(k)} + \delta f_{n+1}^{(k+1)}$$

iii) Verificar convergência:

$$\phi^{(k+1)} = J_{2n+1}^{(k+1)} - \frac{1}{3} \left[1 + f_{n+1}^{(k+1)2} - 2f_{n+1}^{(k+1)} \cosh \left(\frac{3p_{n+1}^{(k+1)}}{2\sigma_y} \right) \right] \sigma_y^2$$

$$erro = \frac{\phi^{(k+1)}}{\left[\sigma_{y0} + H^I \bar{\varepsilon}_{n+1}^{p(k+1)} \right]} \leq \text{tolerância}$$

iv) Fim.

As derivadas da primeira equação residual são conforme equação (3.27):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial R_{\boldsymbol{\sigma}_{n+1}}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} = \mathbb{I} + 2G\Delta\gamma \frac{\partial N_{d_{n+1}}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} + \Delta\gamma K \frac{1}{3} \frac{\partial N_{v_{n+1}}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} \otimes \mathbf{I} \\ \frac{\partial R_{\boldsymbol{\sigma}_{n+1}}}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} = \frac{\Delta\gamma K}{3} \frac{\partial N_{v_{n+1}}}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} \mathbf{I} \\ \frac{\partial R_{\boldsymbol{\sigma}_{n+1}}}{\partial f_{n+1}} = \frac{\Delta\gamma K}{3} \frac{\partial N_{v_{n+1}}}{\partial f_{n+1}} \mathbf{I} \\ \frac{\partial R_{\boldsymbol{\sigma}_{n+1}}}{\partial \Delta\gamma} = 2GN_{d_{n+1}} + \frac{K}{3} N_{v_{n+1}} \mathbf{I} \end{array} \right. \quad (3.27)$$

Para a segunda equação residual vide (3.28):

$$\left\{ \begin{array}{l}
\frac{\partial R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p}}{\partial \sigma_{n+1}} = -\Delta\gamma \frac{\partial}{\partial \sigma_{n+1}} \left[\sqrt{\frac{2}{3} \left\{ \mathbf{S}_{n+1} : \mathbf{S}_{n+1} + \frac{1}{3} \left[f_{n+1} \sigma_y \sinh \left(\frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y} \right) \right]^2 \right\}} \right] \\
\frac{\partial R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p}}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} = 1 - \Delta\gamma \frac{\partial}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} \left[\sqrt{\frac{2}{3} \left\{ \mathbf{S}_{n+1} : \mathbf{S}_{n+1} + \frac{1}{3} \left[f_{n+1} \sigma_y \sinh \left(\frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y} \right) \right]^2 \right\}} \right] \\
\frac{\partial R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p}}{\partial f_{n+1}} = -\Delta\gamma \frac{\partial}{\partial f_{n+1}} \left[\sqrt{\frac{2}{3} \left\{ \mathbf{S}_{n+1} : \mathbf{S}_{n+1} + \frac{1}{3} \left[f_{n+1} \sigma_y \sinh \left(\frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y} \right) \right]^2 \right\}} \right] \\
\frac{\partial R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p}}{\partial \Delta\gamma} = - \sqrt{\frac{2}{3} \left\{ \mathbf{S}_{n+1} : \mathbf{S}_{n+1} + \frac{1}{3} \left[f_{n+1} \sigma_y \sinh \left(\frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y} \right) \right]^2 \right\}}
\end{array} \right. \quad (3.28)$$

Para a terceira equação residual vide (3.29):

$$\left\{ \begin{array}{l}
\frac{\partial R_{f_{n+1}}}{\partial \sigma_{n+1}} = -\Delta\gamma \sigma_y f_{n+1} (1 - f_{n+1}) \frac{\partial}{\partial \sigma_{n+1}} \left[\sinh \left(\frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y} \right) \right] \\
\frac{\partial R_{f_{n+1}}}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} = -\Delta\gamma \sigma_y f_{n+1} (1 - f_{n+1}) \frac{\partial}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} \left[\sinh \left(\frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y} \right) \right] \\
\frac{\partial R_{f_{n+1}}}{\partial f_{n+1}} = 1 + \Delta\gamma \sigma_y f_{n+1} \sinh \left(\frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y} \right) - \Delta\gamma \sigma_y (1 - f_{n+1}) \sinh \left(\frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y} \right) \\
\frac{\partial R_{f_{n+1}}}{\partial \Delta\gamma} = -\sigma_y f_{n+1} (1 - f_{n+1}) \sinh \left(\frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y} \right)
\end{array} \right. \quad (3.29)$$

Para a quarta equação residual vide (3.30):

$$\left\{ \begin{array}{l}
\frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \sigma_{n+1}} = N_{n+1} \\
\frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} = -\frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} \left[1 + f_{n+1}^2 - 2f_{n+1} \cosh \left(\frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y} \right) \right] \sigma_y^2 - \\
\quad - \frac{1}{3} \left[1 + f_{n+1}^2 - 2f_{n+1} \cosh \left(\frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y} \right) \right] 2\sigma_y H^I \\
\frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial f_{n+1}} = -\frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial f_{n+1}} \left[1 + f_{n+1}^2 - 2f_{n+1} \cosh \left(\frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y} \right) \right] \\
\frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \Delta\gamma} = 0
\end{array} \right. \quad (3.30)$$

3.4 OPERADOR TANGENTE CONSISTENTE

Em abordagem de elementos finitos se faz necessária a determinação da matriz de rigidez, implementada de forma implícita usando como base o modelo constitutivo, para fins deste trabalho o modelo de Rousselier e o modelo de Gurson. Neste sentido, o operador tangente

consistente com o algoritmo de integração é requerido para a determinação da matriz de rigidez (De Souza Neto *et al.*, 2008, p. 229; Malcher, 2011). Esta fase corresponde a parte global da solução numérica. Em um caso de problema elástico, isto é, quando o fluxo plástico é nulo dentro de um passo específico, o operador tangente no tempo t_{n+1} é representado simplesmente pelo operador elástico ou a matriz de elasticidade do material (Lemaitre & Chaboche, 1990), conforme descrito na equação (3.31):

$$\widehat{\mathbb{D}}^e = \mathbb{D} \quad (3.31)$$

Em contrapartida, sendo assumido a existência de fluxo plástico, isto é, em um caso de um passo elastoplástico, o operador tangente, escrito por $\widehat{\mathbb{D}}^{ep}$ é definido como na equação (3.32):

$$\widehat{\mathbb{D}}^{ep} = \frac{d\widehat{\sigma}}{\partial \varepsilon_{n+1}} \quad (3.32)$$

sendo $\widehat{\sigma}$ a função algorítmica constitutiva implícita para a atualização das tensões, definida pelo algoritmo de retorno descrito nas seções anteriores (vide Quadro 3-2 e Quadro 3-4).

Para determinar o operador tangente consistente com o algoritmo de atualização de tensões é necessário escrever a forma inversa do sistema de equações linearizadas apresentados para cada caso, Rousselier e Gurson. Note que, as expressões são as mesmas para ambos os modelos, portanto, expressão resultante é apresentada conforme descrito na equação (3.33):

$$\begin{bmatrix} d\sigma_{n+1} \\ d\bar{\varepsilon}_{n+1}^p \\ df_{n+1} \\ d\Delta\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{11} & \mathbf{C}_{12} & \mathbf{C}_{13} & \mathbf{C}_{14} \\ \mathbf{C}_{21} & \mathbf{C}_{22} & \mathbf{C}_{23} & \mathbf{C}_{24} \\ \mathbf{C}_{31} & \mathbf{C}_{32} & \mathbf{C}_{33} & \mathbf{C}_{34} \\ \mathbf{C}_{41} & \mathbf{C}_{42} & \mathbf{C}_{43} & \mathbf{C}_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{D}^e: d\varepsilon_{n+1}^e \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

sendo que a equação (3.34):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C}_{11} & \mathbf{C}_{12} & \mathbf{C}_{13} & \mathbf{C}_{14} \\ \mathbf{C}_{21} & \mathbf{C}_{22} & \mathbf{C}_{23} & \mathbf{C}_{24} \\ \mathbf{C}_{31} & \mathbf{C}_{32} & \mathbf{C}_{33} & \mathbf{C}_{34} \\ \mathbf{C}_{41} & \mathbf{C}_{42} & \mathbf{C}_{43} & \mathbf{C}_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{R}_{\sigma_{n+1}}}{\partial \sigma_{n+1}} & \frac{\partial \mathbf{R}_{\sigma_{n+1}}}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} & \frac{\partial \mathbf{R}_{\sigma_{n+1}}}{\partial f_{n+1}} & \frac{\partial \mathbf{R}_{\sigma_{n+1}}}{\partial \Delta\gamma} \\ \frac{\partial R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p}}{\partial \sigma_{n+1}} & \frac{\partial R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p}}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} & \frac{\partial R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p}}{\partial f_{n+1}} & \frac{\partial R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p}}{\partial \Delta\gamma} \\ \frac{\partial R_{f_{n+1}}}{\partial \sigma_{n+1}} & \frac{\partial R_{f_{n+1}}}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} & \frac{\partial R_{f_{n+1}}}{\partial f_{n+1}} & \frac{\partial R_{f_{n+1}}}{\partial \Delta\gamma} \\ \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \sigma_{n+1}} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial f_{n+1}} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \Delta\gamma} \end{bmatrix}^{-1} \quad (3.34)$$

Cabe ressaltar que os termos \mathbf{C}_{22} , \mathbf{C}_{23} , \mathbf{C}_{24} , \mathbf{C}_{32} , \mathbf{C}_{33} , \mathbf{C}_{34} , \mathbf{C}_{42} , \mathbf{C}_{43} e \mathbf{C}_{44} são grandezas escalares; já os termos destacados em negrito são tensores de segunda ordem; e \mathbf{C}_{11} corresponde

a um tensor de quarta ordem. A expressão do operador tangente, considerando o regime elastoplástico é representada conforme na equação (3.35):

$$\widehat{\mathbb{D}}^{ep} = \frac{d\widehat{\boldsymbol{\sigma}}}{d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^T} = \mathbb{C}_{11} : \widehat{\mathbb{D}}^e \quad (3.35)$$

em que a dupla contração $\mathbb{C}_{11} : \widehat{\mathbb{D}}^e$ e representa uma composição de dois tensores de quarta ordem.

4. RESULTADOS NUMÉRICOS E EXPERIMENTAIS

Os procedimentos experimentais e confecção dos corpos de prova foram feitos segundo o trabalho Rodrigues (2018) e resultados publicados recentemente no artigo de Malcher *et al.* (2020), no que se refere ao material AA 6101-T4, enquanto que para a liga de aço AISI 4340, os dados foram obtidos segundo o trabalho de Morales (2020). No trabalho de Morales (2020) a liga de aço é estudada mediante dois tipos de tratamentos térmicos diferentes. Para efeitos dessa dissertação apenas será considerada a liga AISI 4340-Recozida.

4.1 GEOMETRIA DOS CORPOS DE PROVA

No trabalho de Rodrigues (2018) e Malcher *et al.* (2020) foram confeccionados CPs cilíndricos liso e com 10 mm e 6 mm de entalhe para ensaios sujeitos a carregamentos trativos, projetados de maneira a gerar uma razão de triaxialidade inicial, na região crítica de 0,33; 0,50 e 0,60, respectivamente. No trabalho de Morales (2020) foram confeccionados, além dos CPs mencionados anteriormente, o CP com 4 mm de entalhe, que representa uma razão de triaxialidade de 0,70. Todos os CPs citados encontram-se em uma região de alto nível de razão de triaxialidade, conforme pode-se observar na Figura 4-1. Do ponto de vista prático, região de altas razões de triaxialidade representam um estado de tensão de carregamento trativo. O material usado nos trabalhos de Rodrigues (2018) e Malcher *et al.* (2020) foi a liga de alumínio 6101-T4 e o material para o trabalho de Morales (2020) foi a liga de aço AISI 4340-Recozida. As geometrias estão apresentadas na forma de desenho técnico na Figura 4-2. Para as tolerâncias dimensionais é considerada como referência a norma ABNT NBR 6158. Foram utilizados corpos de prova cilíndricos de seção transversal cheia.

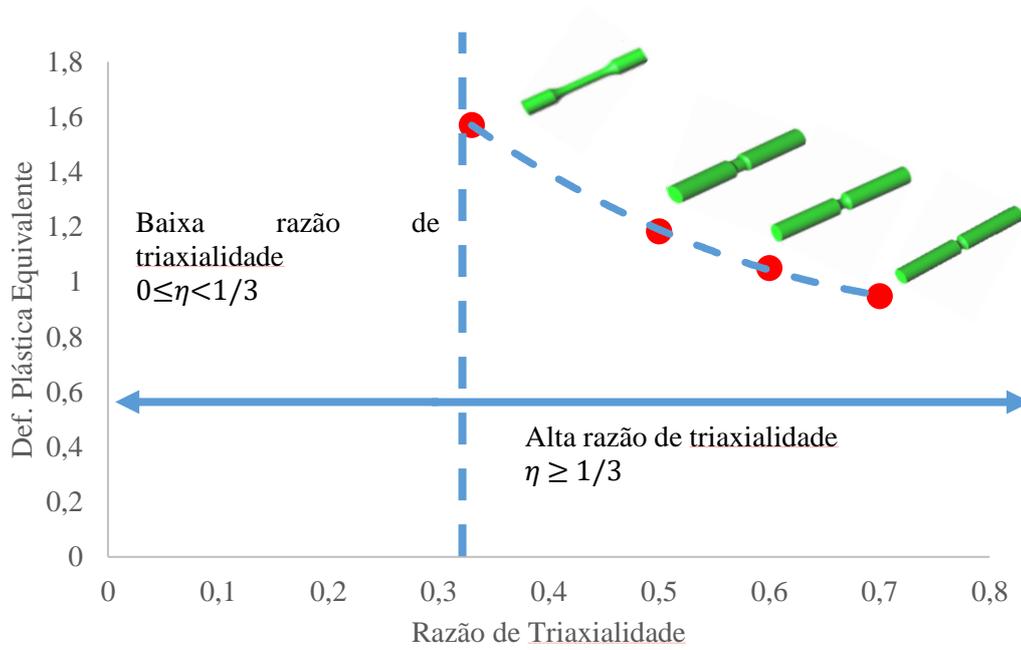


Figura 4-1. Representação esquemática dos pontos de calibração e as geometrias dos CPs.

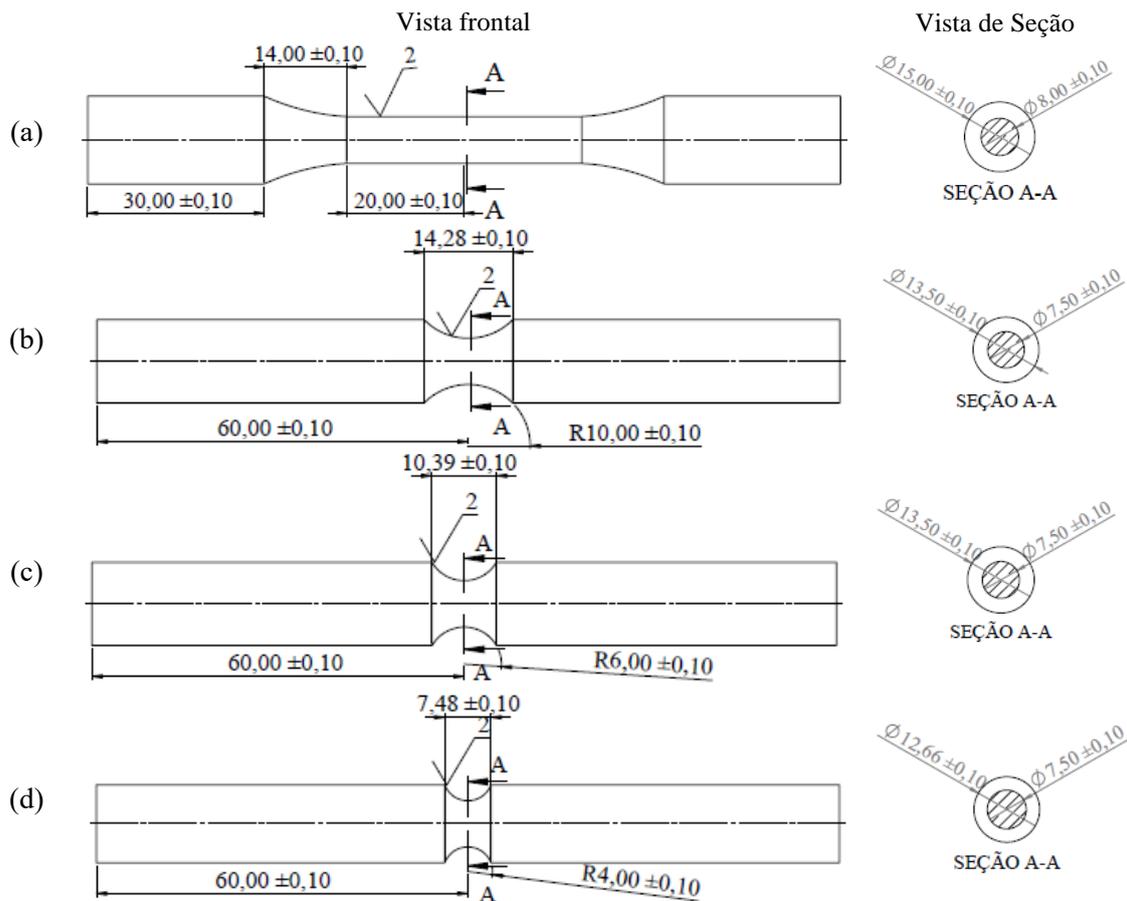


Figura 4-2. Desenhos técnicos para os corpos de prova cilíndrico liso. (a) CP cilíndrico liso (b) CP cilíndrico com raio de entalhe de 10 mm (c) CP cilíndrico com raio de entalhe de 6 mm (d) CP cilíndrico com raio de entalhe de 4 mm. Obs: todas as dimensões estão em milímetro.

A relação entre o raio do entalhe e a razão de triaxialidade inicial foi obtida, de acordo com a equação de Bridgman (Bridgman, 1952). A Figura 4-3(a) apresenta de forma esquemática as dimensões dos CPs, na região crítica e também uma ilustração esquemática da distribuição de tensão no pescoço de um CP em estado de tensão de tração.

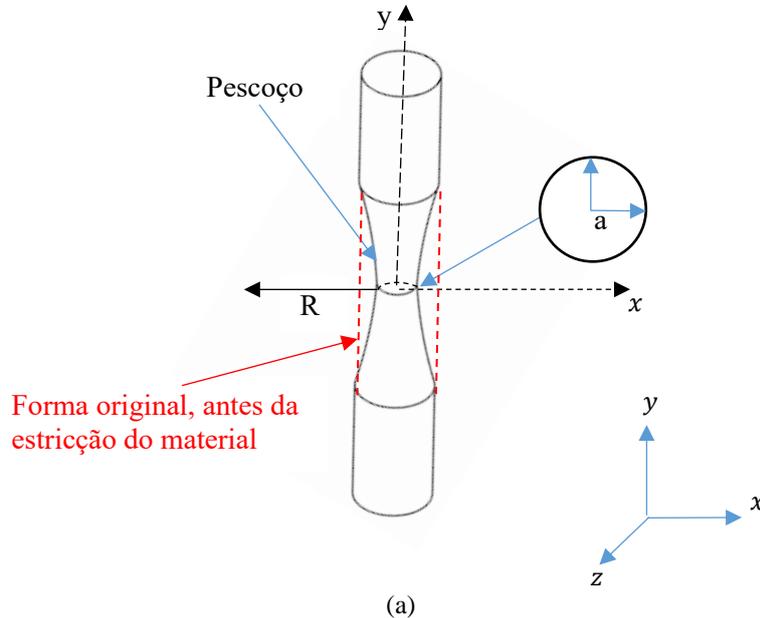


Figura 4-3. Relação geométrica do corpo de prova na região crítica.

Note que, da Figura 4-3, o raio de entalhe serve como um concentrador de tensão na borda do CP, sendo que, quanto mais severo o raio, mais tensão é concentrada, aumentando a razão de triaxialidade, bem como a pressão hidrostática. A razão de triaxialidade, definida pela letra grega η é um parâmetro do estado de tensão no estudo elastoplástico que representa o quociente entre a pressão hidrostática e a tensão equivalente. Bridgman (1952) propõe uma equação que demonstra a relação matemática entre raio do entalhe, R , razão de triaxialidade, η e raio do corpo de prova, a descrita como na equação (4.1):

$$\eta = \frac{1}{3} + \ln\left(1 + \frac{a}{2R}\right) \quad (4.1)$$

Desta forma, é possível determinar o estado de tensão, segundo a equação (4.1), apenas por meio das características construtivas do corpo de prova, sendo, por consequente, a razão de triaxialidade definida por meio de parâmetros geométricos. Note, portanto, que cada entalhe irá mudar o estado de tensão, aumentando a pressão hidrostática, que implica na mudança da razão de triaxialidade.

De maneira resumida a Tabela 4-1 apresenta os dados de raio de entalhe nominal e razão de triaxialidade inicial para todos os CPs utilizados. Cabe ressaltar que, para efeitos de simplificação o raio de entalhe apresentado no texto corresponde ao raio nominal, sem levar em consideração

as tolerâncias relacionadas. As tolerâncias podem ser consultadas conforme descrito na Figura 4-2.

Tabela 4-1. Dados iniciais dos corpos de prova utilizados

<i>Material</i>	<i>Raio do entalhe [mm]</i>	<i>Razão de triaxialidade [η]</i>	<i>Deslocamento na fratura [mm]</i>
AA6101-T4	Liso	0,33	8,90
	10,00	0,50	3,50
	6,00	0,60	2,90
AISI 4340	Liso	0,33	7,30
	10,00	0,50	2,54
	6,00	0,60	2,00
	4,00	0,70	1,62

4.2 DADOS EXPERIMENTAIS

Conforme mencionado na metodologia, nesta dissertação não foram feitos ensaios experimentais, os resultados obtidos foram tomados dos trabalhos de Rodrigues (2018) e Malcher *et al.* (2020), para o caso da liga AA 6101-T4, e de Morales (2020) para o caso da liga AISI 4340-Recozido. Dito isso, para fins deste trabalho, foram tomadas as curvas de força de reação *versus* deslocamento, bem como os parâmetros dos materiais para a calibração dos modelos que foram usados nas simulações.

4.2.1 Liga de alumínio AA6101-T4

Como resultados experimentais, foram obtidas as curvas de força de reação *versus* deslocamento para os três corpos de prova ensaiados para a liga de alumínio estudada, conforme descrito na Figura 4-4. Cabe ressaltar que a curva obtida é para o caso de deslocamentos e forças axiais, adotados como eixo Y (eixo vertical), para o presente trabalho. O termo força de reação é utilizado, visto que os ensaios foram conduzidos mediante a aplicação de deslocamentos, sendo, portanto, a força uma consequência dessa aplicação, mas é apenas uma definição adotada. Caso fosse feito o ensaio por meio de controle de força, o termo poderia ser força aplicada.

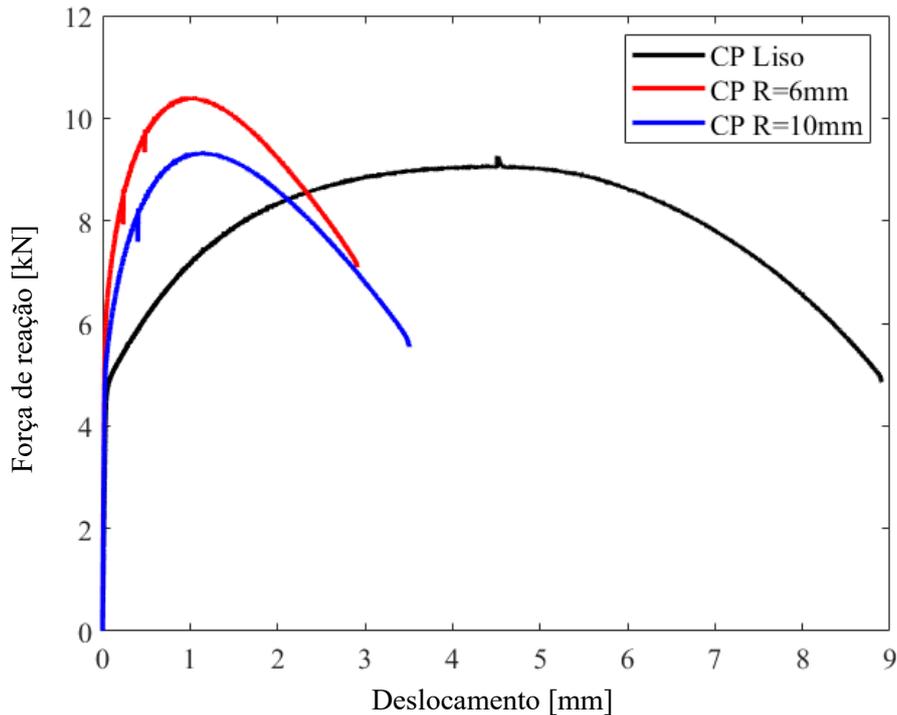


Figura 4-4. Curvas de reação para os CPs cilíndricos – AA 6101-T4.

É possível observar pela Figura 4-4 que o corpo de prova cilíndrico liso apresentou a menor força de ruptura dos três ensaiados, bem como o maior deslocamento na fratura. Em contrapartida, o aumento da severidade do raio de entalhe corroborou para o aumento da força de reação, bem como a diminuição do deslocamento na fratura, de modo que o corpo de prova com um entalhe de 6 mm apresentou a maior força de reação e menor deslocamento na fratura. Este resultado era esperado, visto o estado de tensão de cada corpo de prova, conforme se pode observar as razões de triaxialidade na Tabela 4-1. Conforme comentado anteriormente, este parâmetro é responsável pelo tamanho do domínio elástico/superfície de escoamento do material. Nos resultados numéricos é possível justificar de maneira mais completa quando comparado os efeitos do aumento da razão de triaxialidade na deformação plástica equivalente na fratura.

O principal dado obtido mediante a interpretação dos gráficos de força de reação *versus* deslocamento para os corpos de prova ensaiados é o deslocamento na fratura, portanto, a Tabela 4-1 apresenta de forma resumida os deslocamentos na fratura de cada uma das configurações geométricas ensaiadas. Foi possível obter também as propriedades mecânicas das ligas estudadas nesta dissertação.

4.2.2 Liga de aço AISI 4340

Os resultados obtidos para a liga de aço são apresentados na Figura 4-5. Conforme pode-se observar, o corpo de prova liso apresentou o maior deslocamento na fratura, assim como a capacidade de resistência. Outro detalhe, conforme também observado para o caso da liga de

alumínio, o aumento da severidade do entalhe implica no aumento das forças de reação e diminuição do deslocamento na fratura.

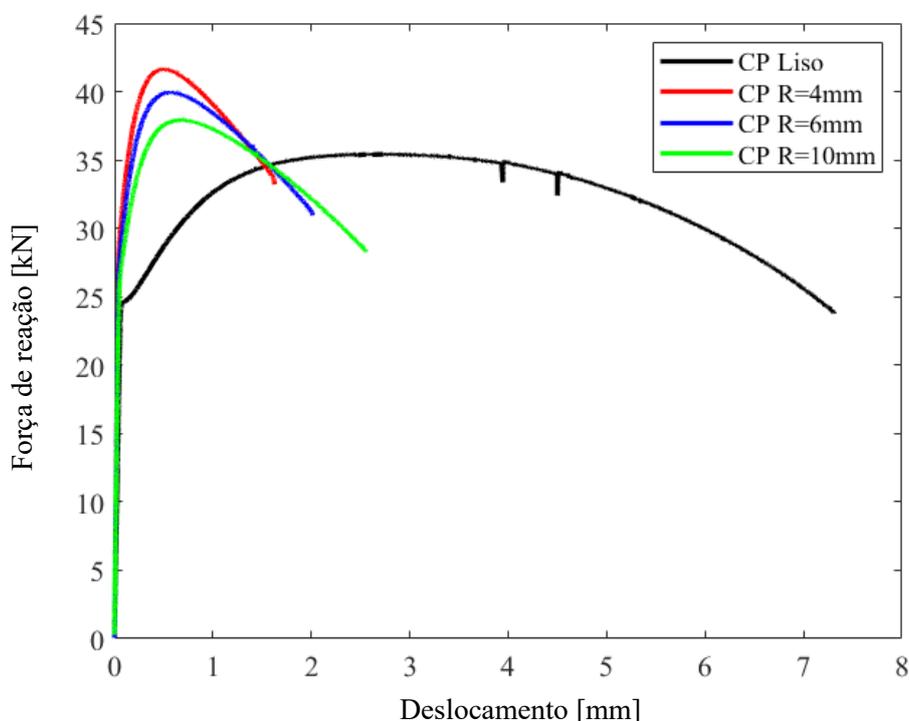


Figura 4-5. Curvas de reação para os CPs cilíndricos - AISI 4340-Recozido.

4.3 PROCEDIMENTO DE CALIBRAÇÃO

A calibração de um modelo constitutivo é considerada um processo complexo, em especial quando envolve-se fratura dúctil, visto que a previsão do comportamento em regime elastoplástico se baseia na identificação de parâmetros da lei de endurecimento. Estes parâmetros são difíceis de serem tomados, sobretudo na região que envolva estrição do material, o que pode ser explicado pelo fato que na região do pescoço, a resposta do material se desvia consideravelmente da média comportamento transversal (Bai, 2008; Malcher *et al.*, 2012; Machado e Malcher, 2019; Malcher *et al.*, 2020). Para efeitos deste trabalho, para obter os parâmetros de calibração é adotada uma abordagem de otimização inversa, sendo as não linearidades e estrições consideradas no procedimento de otimização. A ideia chave da técnica executada é apresentada na Figura 4-6.

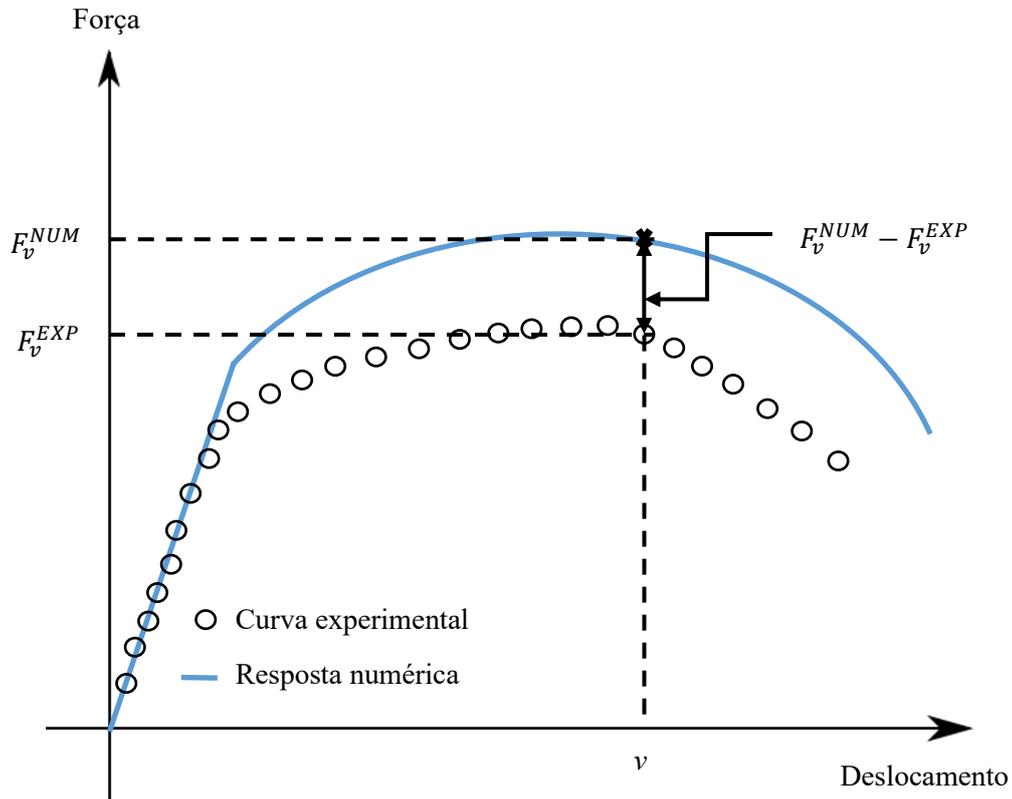


Figura 4-6. Descrição da função objetiva.

O MEF prevê a curva de força numérica F^{NUM} versus de deslocamento com base em um conjunto de parâmetros de entrada ω , que em geral não descrevem com precisão a curva experimentalmente obtida. Para corrigir essa discrepância, é necessário minimizar a seguinte função objetiva $f(\omega)$, utilizando-se o método de mínimos quadrados, conforme descrito na equação (4.2):

$$f(\omega) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{v=1}^N \left(\frac{F_v^{NUM}(\mathbf{p}) - F_v^{EXP}}{F_v^{EXP}} \right)^2} \quad (4.2)$$

onde F^{EXP} e N representam as forças experimentais e o número de pontos de dados experimentais, respectivamente.

O problema de otimização consiste em encontrar o conjunto ótimo de parâmetros do vetor ω que minimiza a função $f(\omega)$. Para isso, nesta presente dissertação, a solução foi realizada por meio do método inverso de identificação paramétrica, sendo utilizado um código de otimização em MATLAB, vinculado ao HYPLAS, que consiste em um método de busca multivariável baseado no gradiente proposto por Machado e Malcher (2019) e Machado (2019). Este método

² Note que vetor é uma terminologia usualmente aplicada para se referir a um tensor de ordem um, por esse motivo a variável está em negrito, mantendo a coerência adotada no trabalho.

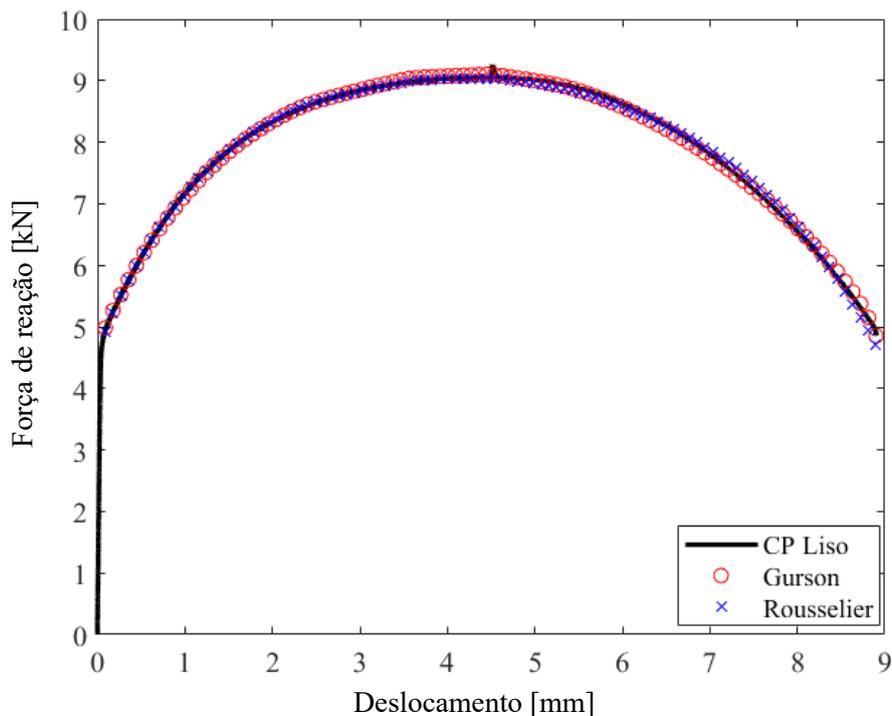
leva em consideração a curva de reação experimentalmente obtida para o corpo de prova cilíndrico liso, a modelagem do problema via método dos elementos finitos e a equação que descreva a curva de encruamento do material. Para a curva de encruamento, nesta dissertação é utilizada a equação de Kleinermann e Ponthot (2003), que considera sua descrição através de quatro parâmetros, descrita matematicamente como na equação (4.3):

$$\sigma_y = \sigma_{y0} + \xi \bar{\epsilon}^p + (\sigma_\infty - \sigma_{y0})(1 - \exp(-\delta \bar{\epsilon}^p)) \quad (4.3)$$

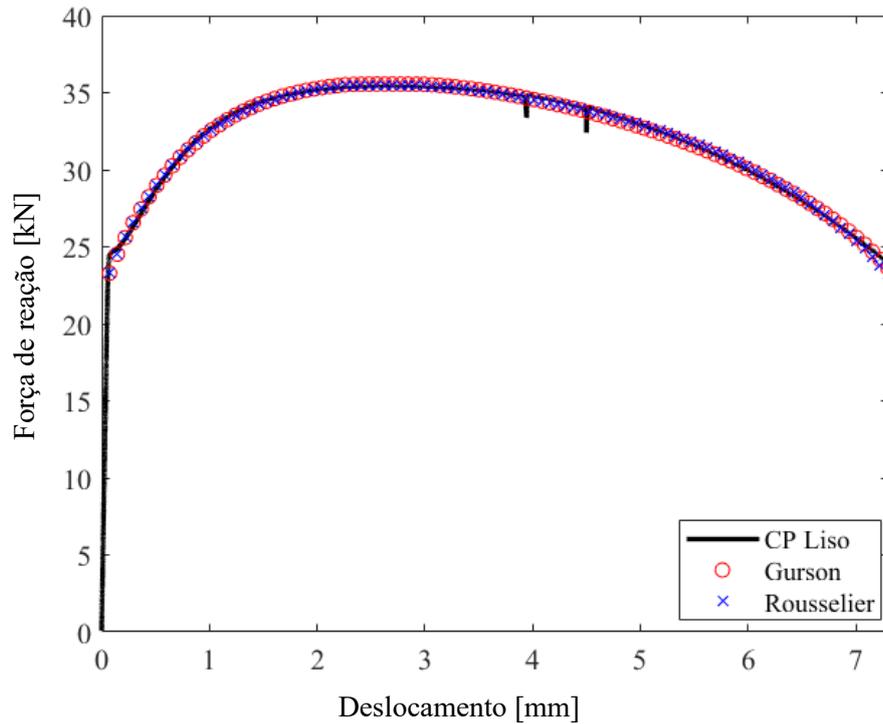
Na (4.3) pode-se notar a os quatro parâmetros da equação de Kleinermann e Ponthot (2003), sendo, portanto, o vetor ω função desses parâmetros, conforme apresentado na equação (4.4). Para iniciar as iterações de otimização, um conjunto inicial ω_0 é necessário, e uma possível estimativa inicial é definida obtida pela abordagem de ajuste.

$$\omega = [\sigma_{y0} \ \xi \ \sigma_\infty \ \delta] \quad (4.4)$$

Neste sentido, a Figura 4-7 e Figura 4-8 apresentam o resultado do processo de identificação paramétrica, onde é possível notar que a curva força *versus* deslocamento numericamente calculada se aproxima da curva experimentalmente determinada.



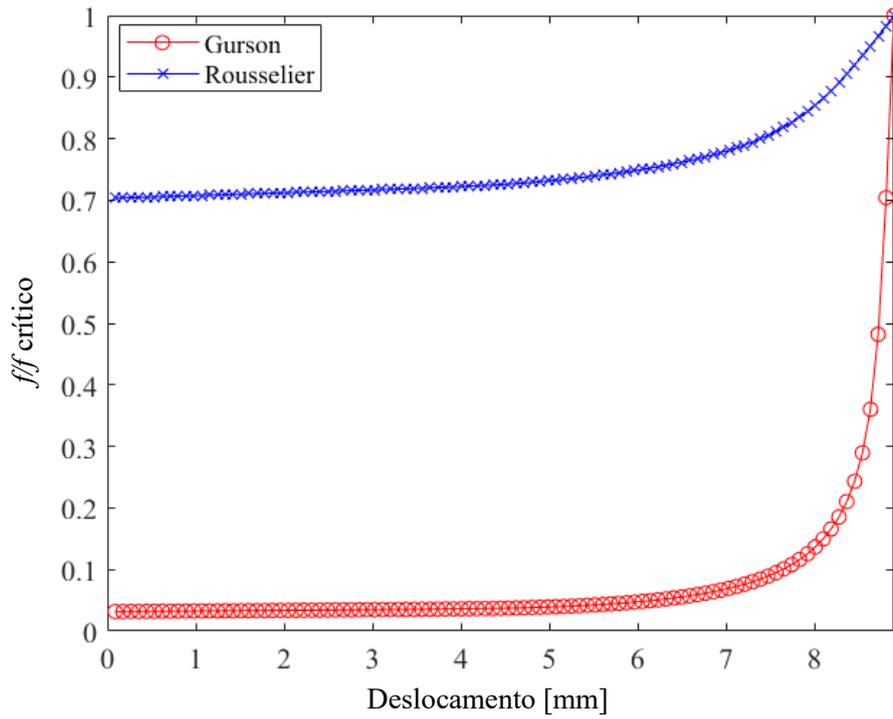
a) Curva de força de reação *versus* deslocamento, liga AA6101-T4



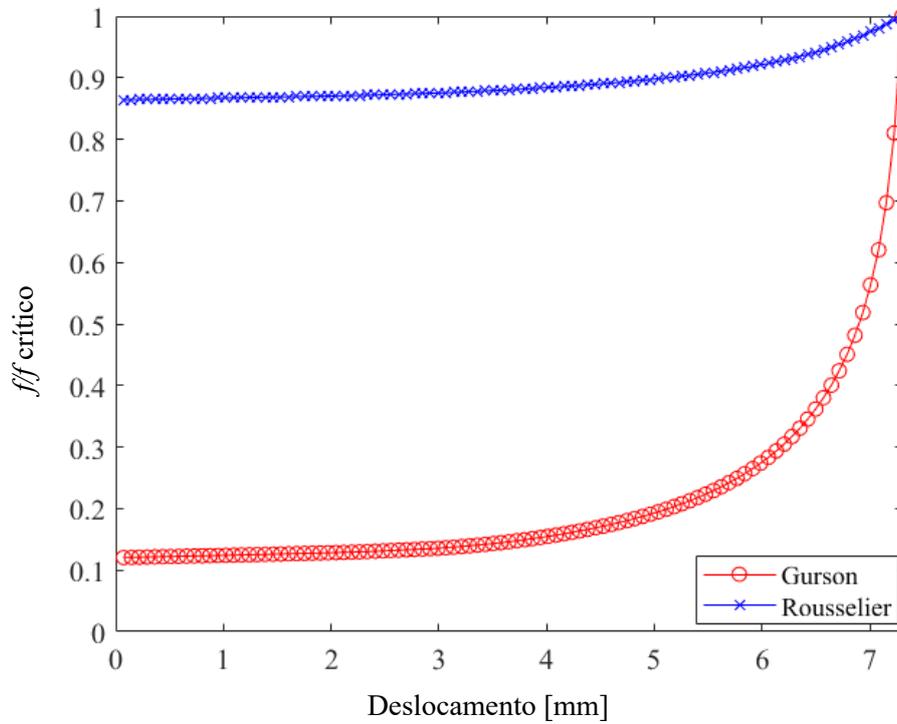
b) Curva de força de reação *versus* deslocamento, liga AISI 4340-Recozida

Figura 4-7. Curva da força de reação *versus* deslocamento das ligas AA-6101-T4 e AISI 4340 recozida, após a convergência da função objetiva.

Note que as curvas de reação são próximas entre si e representam com grande precisão o observado experimentalmente, o que representa uma convergência do método de identificação paramétrica descrito anteriormente. Calibrados os modelos, é possível fazer a simulação para identificar o critério de dano crítico, adotando-se a porosidade do corpo de prova cilíndrico liso para tal, conforme pode-se observar na Figura 4-8.



a) Porosidade normalizada *versus* deslocamento, liga AA6101-T4



b) Porosidade normalizada *versus* deslocamento, liga AISI 4340-Recozida

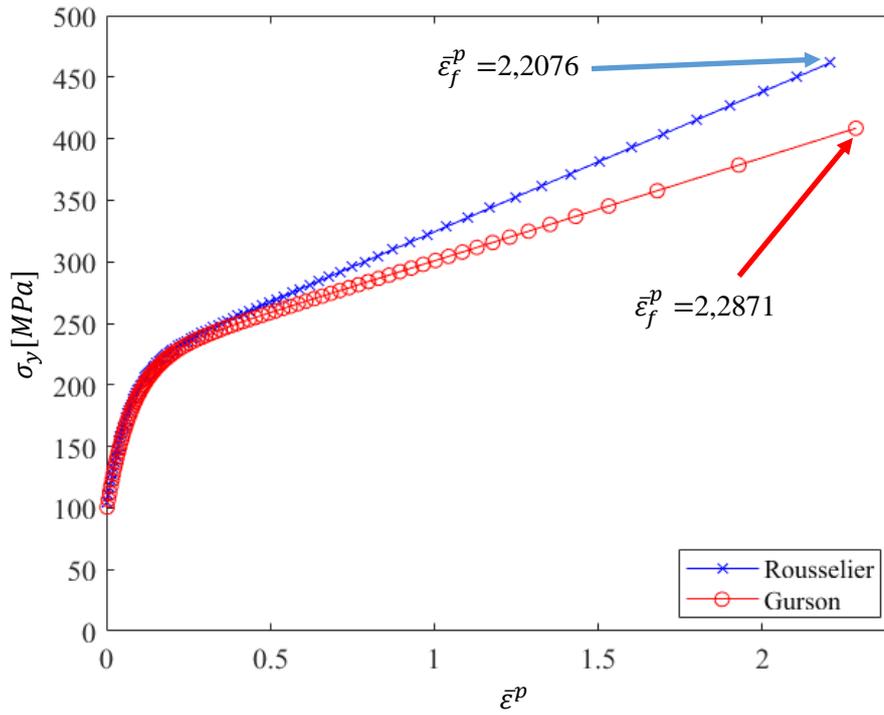
Figura 4-8. Curva da porosidade crítica *versus* deslocamento, resultados após a convergência da função objetiva.

A Tabela 4-2 apresenta de forma detalhada os resultados obtidos, nela é possível observar que a porosidade crítica, segundo a previsão do modelo de Rousselier é de 0,02009, enquanto o modelo de Gurson apresenta um valor de porosidade crítica de 0,34094, para a liga AA 6101-T4. Para a liga AISI 4340-Recozida o valor de porosidade crítica para os modelos de Rousselier e Gurson é de 0,03155 e 0,22480, respectivamente.

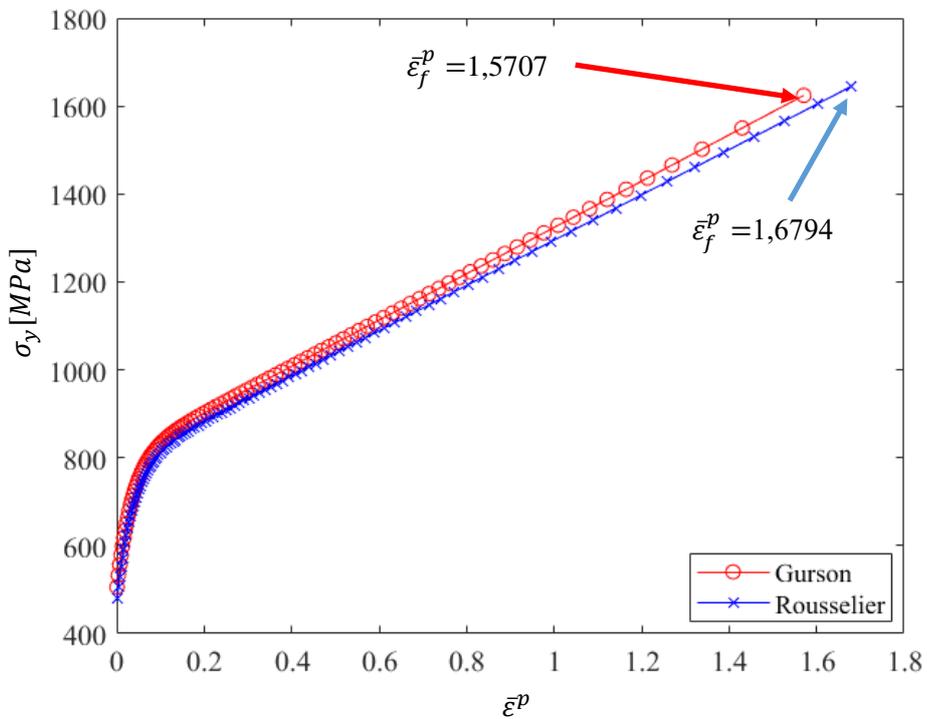
Tabela 4-2. Parâmetros da curva de endurecimento e de dano para as ligas AA6101-T4 e AISI 4340 recozida

Descrição	Símbolo	AA6101-T4		AISI 4340		Unid.
		Rousselier	Gurson	Rousselier	Gurson	
Parâmetros da curva de endurecimento	ξ	113,70	83,75	526,37	514,74	MPa
istrópico - Kleinermann e Ponthot	σ_{∞}	210,50	216,93	797,42	780,22	MPa
Def. plástica equivalente na fratura	δ	15,19	13,14	28,21	27,14	
	$\bar{\epsilon}_f^p$	2,2076	2,2871	1,67944	1,57073	
Porosidade inicial	f_0	0,01413	0,01078	0,02726	0,02706	
Porosidade crítica	f_c	0,02009	0,34094	0,03155	0,22480	
Constantes paramétricas para Rousselier	D	0,15057		0,08597		
	σ_1	1945,17		11641,59		MPa

A Figura 4-9 apresenta as curvas de encruamento determinadas a partir dos modelos de Rousselier e Gurson para o corpo de prova de calibração, o cilíndrico liso. Neste ponto, é possível observar uma diferença entre as curvas, justificada pela natureza das equações que descrevem a evolução do dano proposta por ambos os modelos, no qual para Gurson, o dano é interpretado pela razão entre a quantidade de vazios e o volume total representativo, deduzido a partir da micromecânica de um defeito esférico. Para Rousselier, além da MID de Gurson, é incorporado a termodinâmica dos sólidos. Para o caso da liga AISI 4340-Recozida, as curvas de encruamento são bem próximas.



a) Curva de endurecimento isotrópico – AA6101-T4



b) Curva de endurecimento isotrópico – AISI 4340-Recozida

Figura 4-9 Curva de endurecimento isotrópico para os modelos de Rousselier e Gurson

4.4 CARACTERÍSTICAS DO MATERIAL

Como características gerais, a liga de alumínio AA6101-T4 possui boa resistência mecânica e alta condutividade elétrica e térmica oferecendo boa soldabilidade, resistência à corrosão, maleabilidade, de modo a promover uma boa estrutura para conformação mecânica. O tratamento térmico T-4 é especialmente aplicado a produtos que não são trabalhados mecanicamente após solubilização, ou nos quais o efeito do trabalho a frio no endireitamento ou a planificação pode não ser reconhecido nos limites de propriedades mecânicas. Consiste em solubilização e envelhecimento natural. O tratamento térmico foi realizado pelo fornecedor. Segundo os dados disponíveis em literatura, a temperatura de solubilização é de $525\text{ °C} \pm 5\text{ °C}$ (Brandes e Brook, 1992, p. 29-19), a temperatura de envelhecimento é a temperatura ambiente, aproximadamente $22\text{ °C} \pm 5\text{ °C}$, para o caso de Brasília³ e o tempo de exposição a temperatura é de 120 horas (Brandes e Brook, 1992, p. 29-19).

A outra liga utilizada neste trabalho é a AISI 4340-Recozida. O material foi adquirido em barras, de diâmetro $1\frac{1}{8}$ polegada (28,57 mm), em um total de 6 barras de 1000 mm. Quanto ao tratamento térmico de recozimento, este foi realizado pelo próprio fornecedor. O material é um aço liga com cromo e molibdênio, cujas características principais, apresenta boa resistência mecânica, usinabilidade média, baixa soldabilidade e alta temperabilidade, além de alta tenacidade, alta resistência quando tratado termicamente e alta resistência à fadiga, segundo a descrição realizada por Saeidi e Ekrami (2009). O material é classificado como um aço de baixa liga (aqueles cujo o objetivo de fabricação não seja para atender propriedades químicas específicas e sim propriedades mecânicas específicas) e médio carbono. O tratamento térmico foi realizado pelo fornecedor. Segundo dados disponíveis em literatura, para o recozimento: aquecido a 810 °C , resfriamento controlado a 11 °C/h até 355 °C depois resfriado a ar.⁴

A Tabela 4-3 apresenta as propriedades mecânicas das ligas AA 6101-T4 e AISI 4340-Recozida e a Tabela 4-4 apresenta suas composições químicas.

³ Média climática para o ano de 2019. Disponível no endereço eletrônico: <https://pt.climate-data.org/america-do-sul/brasil/distrito-federal/brasil-852/>. Acesso em: 09/08/2021.

⁴ Disponível no endereço eletrônico: <http://www.matweb.com/search/DataSheet.aspx?MatGUID=fd1b43a97a8a44129b32b9de0d7d6c1a&ckck=1>. Acesso em: 09/08/2021.

Tabela 4-3. Propriedades mecânicas das ligas AA 6101-T4 e AISI 4340-Recozida.

Descrição	Símbolo	AA6101-T4		AISI 4340		Unid.
		Rousselier	Gurson	Rousselier	Gurson	
Módulo de elasticidade	E	65.554		206.000		MPa
Coefficiente de Poisson*	ν	0,3		0,3		
Dureza Brinell* ⁵	HB	63		243		
Limite de escoamento inicial	σ_{y0}	99,41	96,51	498,18	471,33	MPa
Tensão de ruptura	σ_R	461,52	408,50	1624,22	1644,70	MPa
Alongamento			35,6		29,2	%

Tabela 4-4. Composição química das ligas AA 6101-T4 e AISI 4340-Recozida. Elementos em massa%.

Liga AA 6101-T4								
Cu	Si	Mn	Cr	Fe	Zn	Mg	Ti	Al
0,10	0,30-0,70	0,03	0,03	0,50	0,10	0,35-0,80	0,15	Restante
Liga AISI 4340								
Cu	Si	Mn	Cr	C	P	Mo	Ni	
0,06	0,20	0,67	0,76	0,42	0,01	0,23	1,71	

4.5 DEFINIÇÃO DAS MALHAS E CONDIÇÕES DE CONTORNO

As simulações numéricas foram realizadas por meio de uma ferramenta acadêmica de elementos finitos, chamada Hyplas, levando-se em consideração grandes deformações e a integração implícita do modelo constitutivo, que inclui o critério de escoamento de Rousselier com endurecimento isotrópico não linear e plasticidade associativa. Cabe ressaltar que a modelagem proposta foi escrita com base na teoria de pequenas deformações, contudo, utilizou-se o algoritmo de transformação para grandes deformações, proposto por De Souza Neto *et al.* (2008). O programa principal do HYPLAS é escrito inteiramente na linguagem FORTRAN 77 e pode ser dividido em três partes básicas:

1. Entrada e inicialização de dados. É a etapa realizada logo no início da execução do programa. Nesta fase, todos os dados que definem o problema a ser analisado são lidos dos arquivos relevantes e todas as matrizes necessárias são inicializadas (De Souza Neto *et al.*, 2008, p. 117). O arquivo de dados de entrada é um arquivo no formato ASCII onde as únicas informações relevantes, são os dados relacionados à definição do programa de incremento de carga proporcional.
2. O procedimento incremental dos elementos finitos. Este é o corpo principal do programa, onde os procedimentos numéricos discutidos no Capítulo 3 são implementados.

*⁵ Dados retirados da literatura (Budynas e Nisbett, 2016 p. 1042, *apud* ASM Metals Reference Book, 1983, p. 217)

Essencialmente, consiste em um ciclo (*loop*) principal sobre incrementos de tensão acoplado a um ciclo referente ao equilíbrio iterações (De Souza Neto *et al.*, 2008, p. 117).

3. Saída de resultados convergentes. Inclui todas as operações de saída necessárias para imprimir soluções de elementos finitos convergentes no arquivo de resultados e/ou despejar uma imagem do banco de dados em um arquivo de saída de reinicialização. (De Souza Neto *et al.*, 2008, p. 117).

O corpo de prova cilíndrico é uma geometria axisimétrica, de modo que seja possível simplificações na construção da malha da geometria, portanto, foi utilizado um elemento finito quadrilateral de oito nós (QUAD8) e integração reduzida. Note que, para tanto, foi feita a modelagem do equivalente a $1/8$ do corpo de prova. A Figura 4-10 apresenta a malha em elementos finitos para os corpos de prova cilíndricos. Cabe ressaltar também que na região do entalhe e região central, para o caso do CP cilíndrico liso, foi feito um refinamento da malha, de modo a ter um resultado com maior exatidão da plasticidade naquele local. Desta forma, foram usados 2146 nós e 675 elementos para todas as simulações.

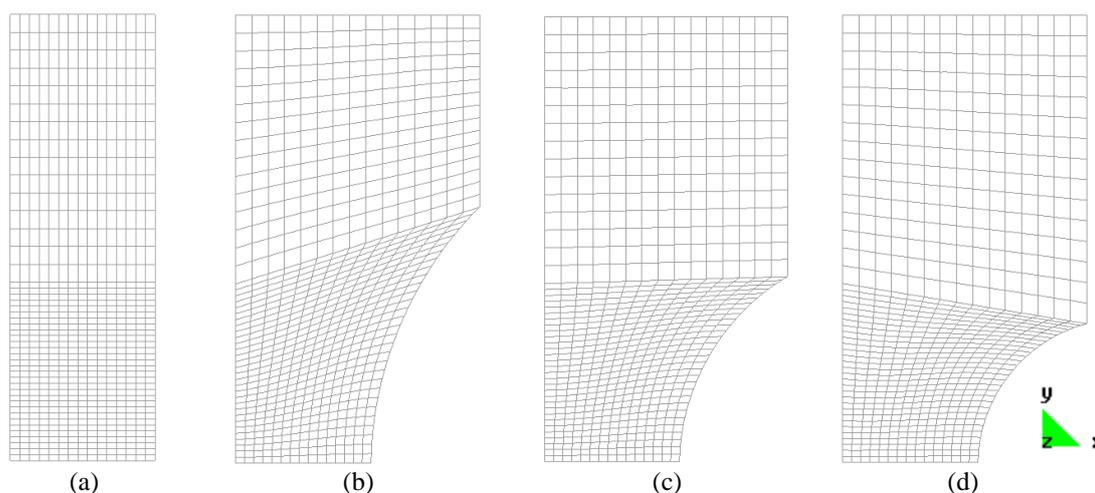


Figura 4-10. Malhas de elementos finitos para os CPs cilíndricos. (a) cilíndrico liso, (b) cilíndrico entalhado R = 10 mm, (c) cilíndrico entalhado com R = 6 mm (d) cilíndrico entalhado com R = 4 mm.

Na configuração do arquivo de entrada do Hyplas, são definidas algumas características importantes, como as propriedades mecânicas do material em estudo (vide Tabela 4-3), o tipo de elemento finito, o número de nós por cada elemento, o número de nós e o tipo de solução do algoritmo de retorno, definido como o método de Newton-Raphson. As condições de contorno estão descritas na Figura 4-11.

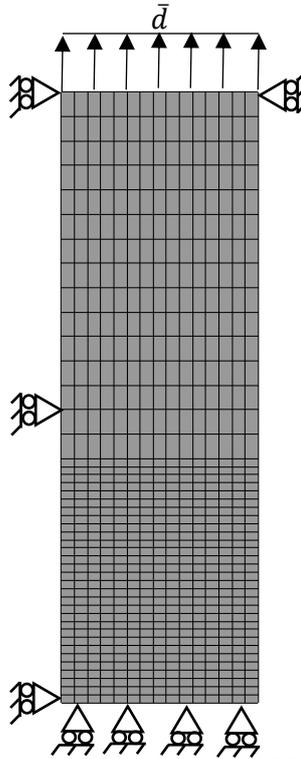


Figura 4-11. Condições de contorno do problema em MEF, para o CP cilíndrico liso.

Um deslocamento vertical prescrito \bar{d} é aplicado nos nós superiores, enquanto os nós da parte inferior são livres apenas para se mover na direção horizontal, de modo a se simular o efeito de Poisson. O deslocamento vertical prescrito é aquele obtido mediante os ensaios realizados (8,90 mm e 7,30 mm, para os casos do AA 6101-T4 e AISI 4340-Recozido, respectivamente). Os nós do lado esquerdo do limite do CP possuem restrição de movimento horizontal. Note que, para os demais CPs as condições de contorno são semelhantes, com exceção de que, inicialmente são adotados os deslocamentos experimentais como o deslocamento vertical prescrito, no entanto, são dados incrementos nesses deslocamentos até se atingir o valor de porosidade crítica (0,02009 e 0,34094, para Rousselier e Gurson, respectivamente, para o caso do AA 6101-T4 e para o caso do AISI 4340-Recozido, 0,03155 e 0,22480, para Rousselier e Gurson, respectivamente).

4.6 CURVAS DE FORÇA DE REAÇÃO NUMÉRICAS E EVOLUÇÃO DO DANO

Nesta etapa do trabalho são apresentados os resultados obtidos por meio das simulações numéricas para os CPs liso e entalhados com $R=10\text{ mm}$ e $R=6\text{ mm}$ fabricados com a liga AA6101-T4 e os resultados dos corpos de prova entalhados com $R=10\text{ mm}$, $R=6\text{ mm}$ e $R=4\text{ mm}$ fabricados com a liga AISI 4340-Recozida. De modo a organizar a estrutura textual de uma maneira agradável, os resultados serão subdivididos conforme o material de cada corpo de prova.

4.3.1 Liga de alumínio AA6101-T4

Conforme os parâmetros de calibração obtidos e apresentados na Tabela 4-2, para a liga AA6101-T4, foram simulados os corpos de prova entalhados, sujeitos a carga trativa, em três

diferentes níveis de razão de triaxialidade, sendo aplicadas as leis de evolução do dano propostas por Rousselier e Gurson, para avaliar a capacidade preditiva do modelo de Rousselier. Inicialmente, foi avaliado o comportamento do modelo segundo o ponto de calibração, o corpo de prova cilíndrico liso. Os resultados obtidos para o corpo de prova cilíndrico liso são observados na Figura 4-12. Cabe lembrar que o dano para ambos os modelos é dado pela porosidade.

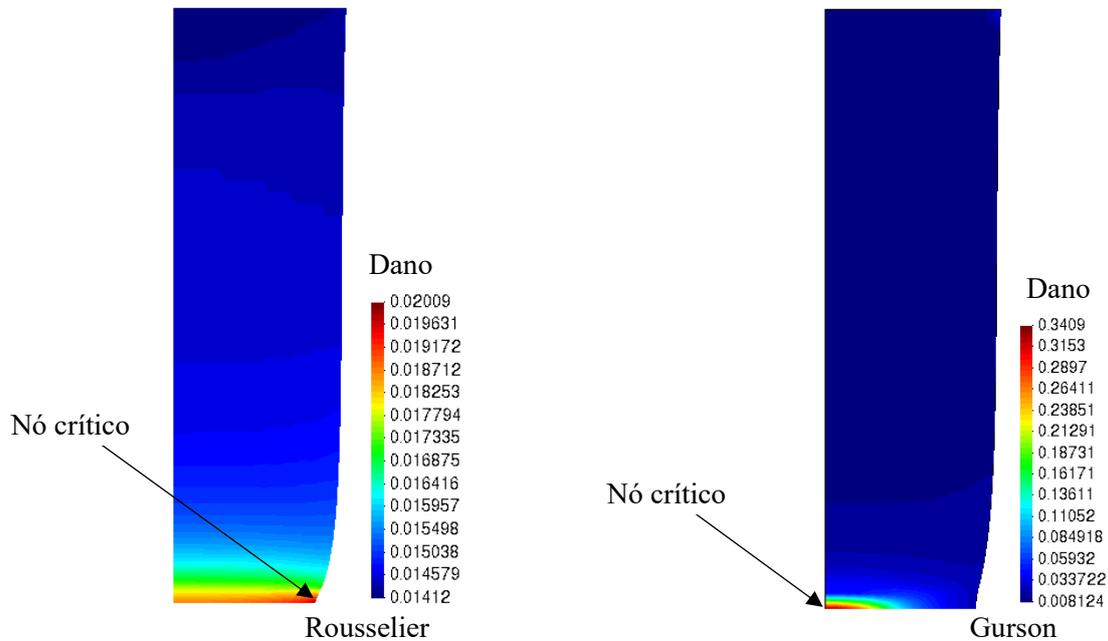


Figura 4-12. Distribuição do dano para CP cilíndrico liso - AA6101-T4.

Note que, segundo o apresentado na Figura 4-12, o modelo de Rousselier apresenta uma previsão para o início da fratura na borda do CP e não no centro como comumente é observado e, como previsto pelo modelo de Gurson. É importante destacar também que o intitulado “nó crítico” representa na realidade o nó cujo o valor da porosidade foi o máximo.

A Figura 4-13 apresenta a curva de reação, evolução do dano no nó crítico, bem como o a distribuição do dano, para o corpo de prova cilíndrico com raio de entalhe $R = 10 \text{ mm}$. As simulações foram realizadas até o instante onde os modelos atingissem os valores de dano crítico, sendo adotados como o dano crítico o valor obtido para o caso do CP cilíndrico liso. É possível, portanto, comparar os deslocamentos experimentalmente observados com aqueles obtidos numericamente, assim como a localização do valor máximo de dano (nó crítico) ao longo do contorno da malha de elementos finitos.

As análises serão conduzidas em relação a dois aspectos.

1. Referente a curva de força de reação *versus* deslocamento, onde serão analisados:
 - a. Força de ruptura de maneira qualitativa;

- b. Deslocamento na fratura de maneira quantitativa.
2. Evolução da variável de dano, onde serão analisados:
- a. Taxa de evolução do dano;
 - b. Nó crítico.

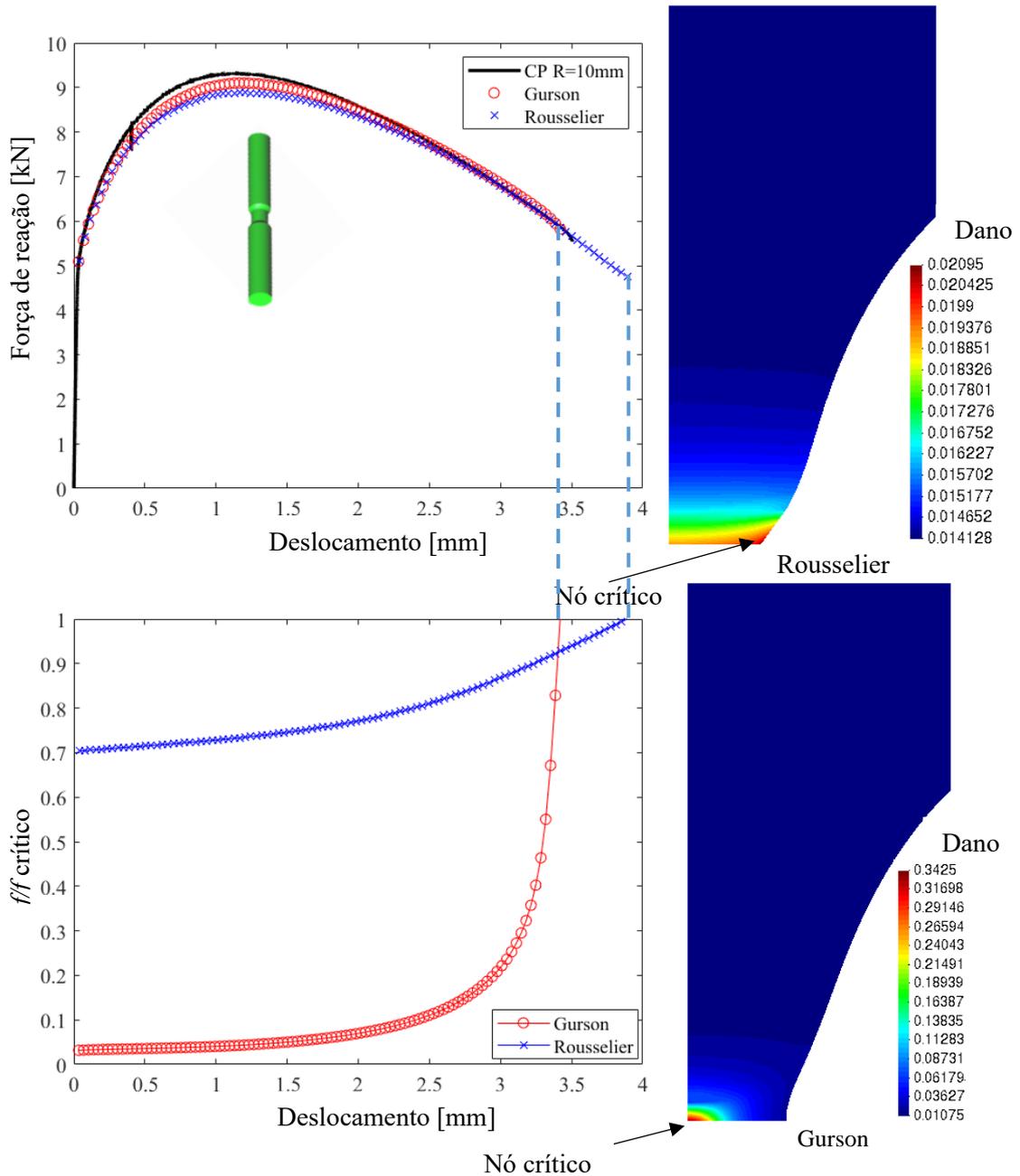


Figura 4-13. Curvas de força de reação, distribuição do dano e nó crítico para o CP entalhado – R=10 mm - AA6101-T4.

É possível observar pela Figura 4-13 que o modelo Rousselier apresentou uma força de ruptura menor do observado experimentalmente, enquanto o modelo de Gurson apresentou a força de reação na fratura acima do que foi observado experimentalmente. Um reflexo deste fenômeno

pode ser observado no que se refere ao deslocamento. Note que, o modelo de Rousselier apresenta um nível de deslocamento na fratura maior do que o que o observado experimentalmente, o deslocamento até o momento da falha do material foi de 3,89 mm para o modelo, 11,14% maior do que o observado no experimento, enquanto Gurson apresenta um deslocamento na fratura de 3,42 mm, 2,29% menor do que os 3,50 mm observados experimentalmente. Nota-se que o modelo de Rousselier não descreve tão precisamente o comportamento experimental. Já o modelo de Gurson apresenta uma capacidade preditiva melhor. Os resultados estão dispostos na Tabela 4-5.

Quanto à taxa de evolução da porosidade, pode-se observar que este fenômeno é mais pronunciado para o modelo de Gurson que para o modelo de Rousselier. Note ainda que o modelo de Rousselier apresenta o nó crítico na borda do CP, diferentemente do observado experimentalmente. O modelo de Gurson faz uma previsão de nó crítico que condiz com o observado experimentalmente, apontando a região central do CP.

A Figura 4-14 apresenta o comportamento para o corpo de prova entalhado com $R=6 \text{ mm}$. Novamente, o modelo de Gurson apresentou um comportamento mais próximo do experimental. Observa-se que desta vez, nenhum modelo representou com a precisão anterior a curva de força de reação *versus* deslocamento.

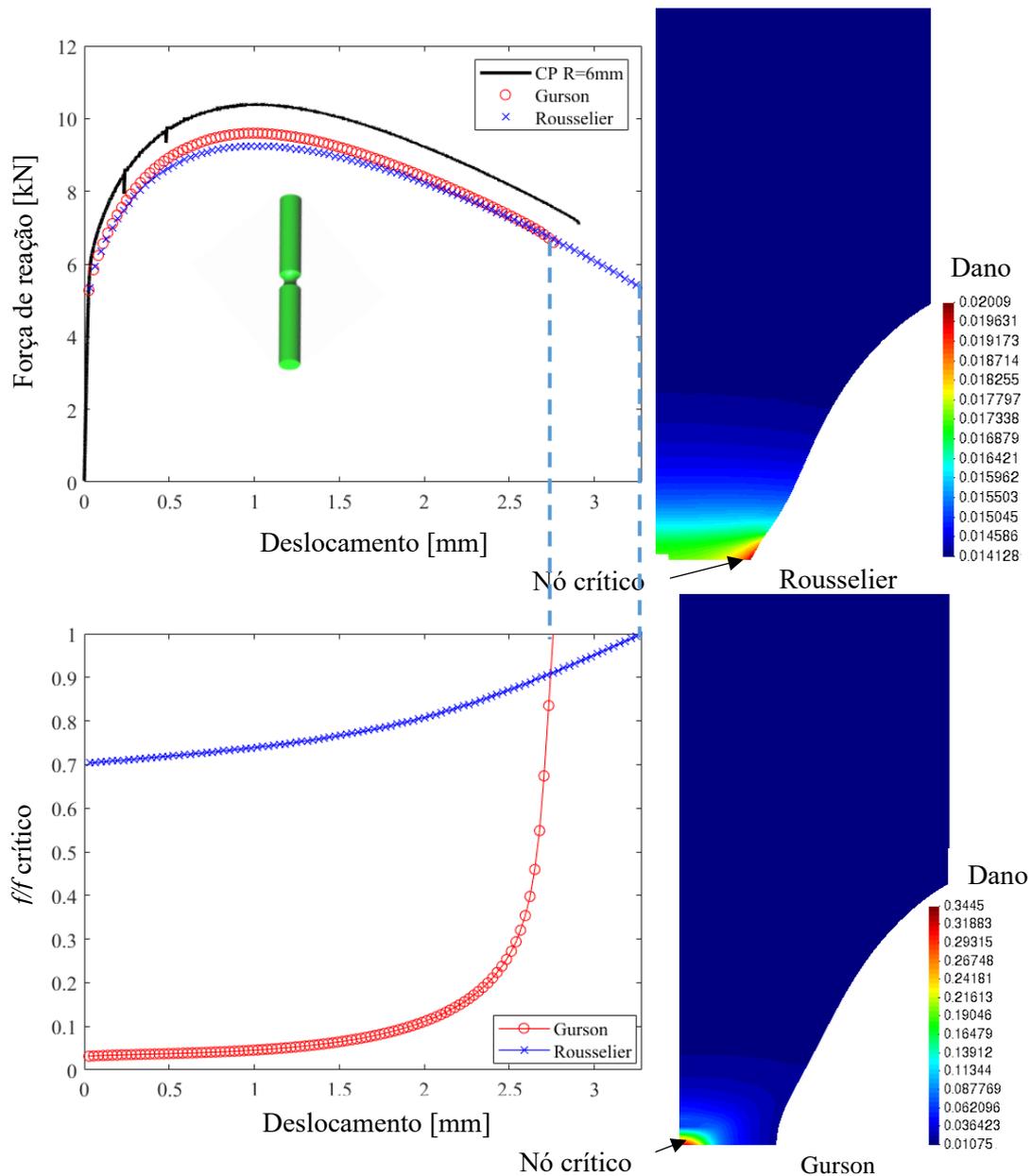


Figura 4-14. Curvas de força de reação, distribuição do dano e nó crítico para o CP entalhado – R=6 mm - AA6101-T4.

Dada a Figura 4-14, novamente é possível observar que o modelo de Rousselier apresenta um deslocamento até a fratura maior do que o observado experimentalmente, e, conseqüentemente, uma força de ruptura menor, sendo o deslocamento na fratura de 3,28 mm, que representa um erro de 13,10%. Já o modelo de Gurson apresentou um deslocamento na fratura de 2,76 mm e, tendo erro relativo de -7,05%. O modelo de Rousselier apresentou uma capacidade preditiva inferior ao modelo de Gurson para a descrição da curva de força de reação *versus* deslocamento.

A taxa de evolução da porosidade segue a mesma lógica descrita para o caso anterior, sendo que para o modelo de Gurson foi maior do que para o modelo de Rousselier. Quanto ao nó crítico, também foi possível observar a aproximação do observado experimentalmente para o modelo de

Gurson, dado que esse apresentou o nó crítico no centro do CP, enquanto o modelo de Rousselier apresentou um nó crítico na borda do corpo de prova.

De maneira resumida, os principais dados, bem como os erros relativos são apresentados na Tabela 4-5. Cabe ressaltar que o dano crítico obtido para o modelo de Rousselier foi de 0,02009, enquanto que o modelo de Gurson apresentou um dano crítico de 0,34094. Esses valores foram usados como critério de parada para as demais simulações.

Tabela 4-5. Deslocamento na fratura e erros obtidos em cada simulação – AA 6101-T4.

CP	Resultado	Exp.	Rousselier	Erro (%)	Gurson	Erro (%)
Liso		9,00	9,00	-	9,00	-
R=10 mm	Deslocamento na fratura (mm)	3,50	3,89	11,14	3,42	-2,29
R=6 mm		2,90	3,28	13,10	2,76	-7,05

4.3.2 Liga de aço AISI 4340-Recozido

Semelhante ao desenvolvido para o caso da liga de alumínio, conforme os parâmetros de calibração obtidos e apresentados na Tabela 4-2, desta vez para a liga AISI 4340-Recozida, foram simulados os corpos de prova entalhados, sujeitos a carga trativa, em quatro diferentes níveis de tensão de triaxialidade, sendo aplicadas as leis de evolução do dano propostas por Rousselier e Gurson, para avaliar a capacidade preditiva do modelo de Rousselier. Os resultados obtidos para o corpo de prova cilíndrico liso são observados na Figura 4-15.

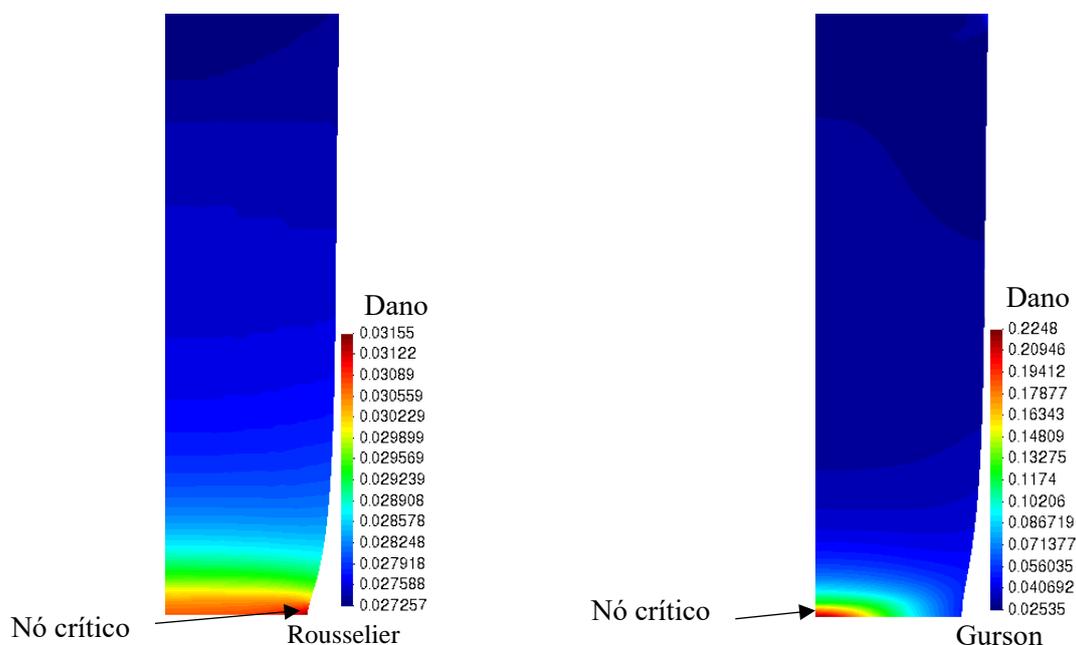


Figura 4-15. Distribuição do dano para CP cilíndrico liso AISI 4340-Recozido.

A Figura 4-16 apresenta os resultados das simulações segundo o modelo de Rousselier e Gurson, mostrando a curva de força de reação *versus* deslocamento, evolução do dano no nó

crítico, bem como o contorno do dano, para o corpo de prova cilíndrico com raio de entalhe $R = 10 \text{ mm}$. O CP liso foi usado como ponto de calibração, deste modo, o dano crítico considerado é aquele obtido na simulação referente a este CP. É possível, portanto, comparar os deslocamentos experimentalmente observados com aqueles obtidos numericamente, assim como a localização do valor máximo de dano (nó crítico) ao longo do contorno da malha de elementos finitos.

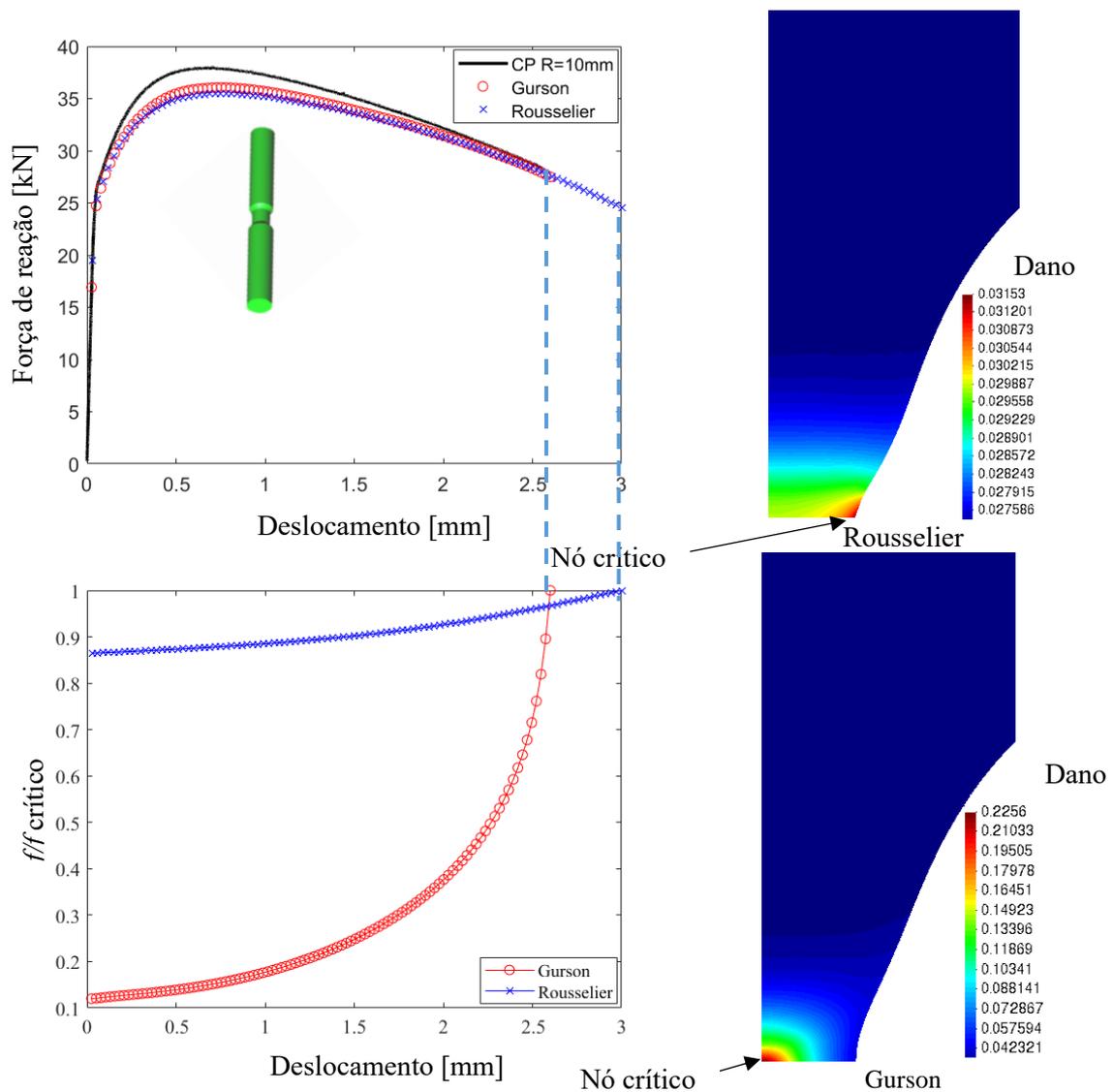


Figura 4-16. Curvas de força de reação, distribuição do dano e nó crítico para o CP entalhado – $R=10 \text{ mm}$ AISI 4340-Recozido.

Pela Figura 4-16 é possível observar o deslocamento na fratura foi de 3 mm, enquanto que o resultado experimental foi de 2,55 mm, representando, portanto, um erro de 17,65%, como consequência, a força de reação no momento de ruptura foi menor que o observado experimentalmente, para o caso do modelo de Rousselier. O modelo de Gurson apresentou como resultados, o deslocamento na fratura de 2,6 mm, 1,96% menor que o observado experimentalmente.

Quanto a porosidade, o padrão observado no caso da liga de alumínio se mostra semelhante ao caso da liga do aço 4340, a taxa de evolução para o modelo de Gurson é sempre maior que para o modelo de Rousselier. Em último estágio, foi avaliado também o nó crítico, novamente é possível notar que para o caso do modelo de Rousselier, o nó crítico encontra-se na borda do corpo de prova, enquanto que o modelo de Gurson tenha uma previsão mais realista, indicando o centro do CP como ponto de início da fratura dúctil (vide Figura 4-16).

A Figura 4-17 apresenta os resultados obtidos na simulação do corpo de prova com raio de entalhe de 6 mm.

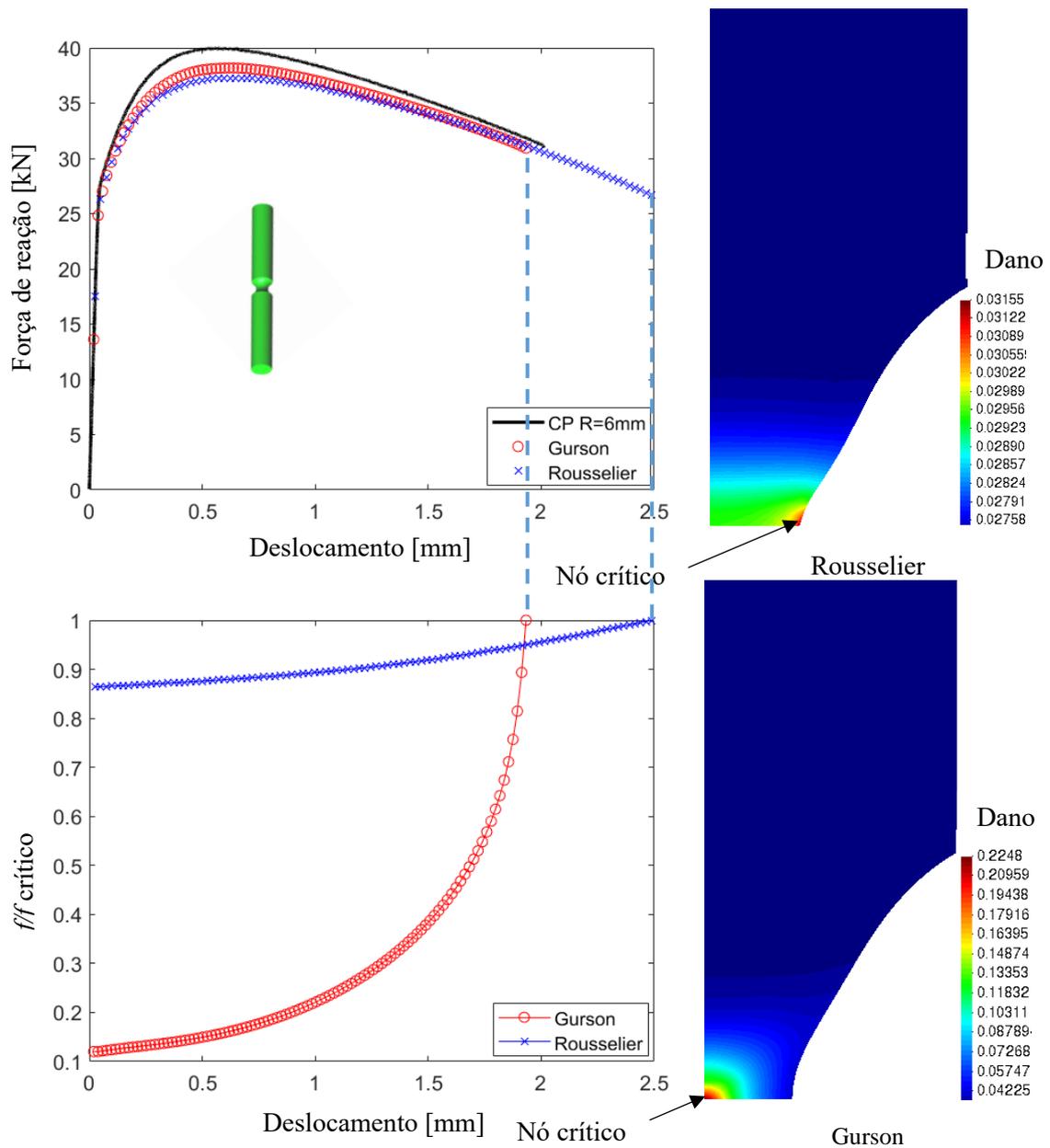


Figura 4-17. Curvas de força de reação, distribuição do dano e nó crítico para o CP entalhado – R=6 mm AISI 4340-Recozido.

Pode-se observar um comportamento semelhante aos casos anteriores. Todas as diferenças percentuais e principais resultados são apresentados na Tabela 4-6.

A Figura 4-18 apresenta os resultados obtidos para a simulação do corpo de prova com raio de entalhe de 4 mm. É possível observar que o modelo de Rousselier se distancia do resultado experimental, sobretudo quanto ao deslocamento na fratura. O modelo de Gurson apresenta uma maior proximidade com a curva experimental.

Todas as considerações anteriores se aplicam para o caso do CP com raio de entalhe de 4 mm. Para os principais resultados e comparações da eficiência de cada modelo, vide a Tabela 4-6.

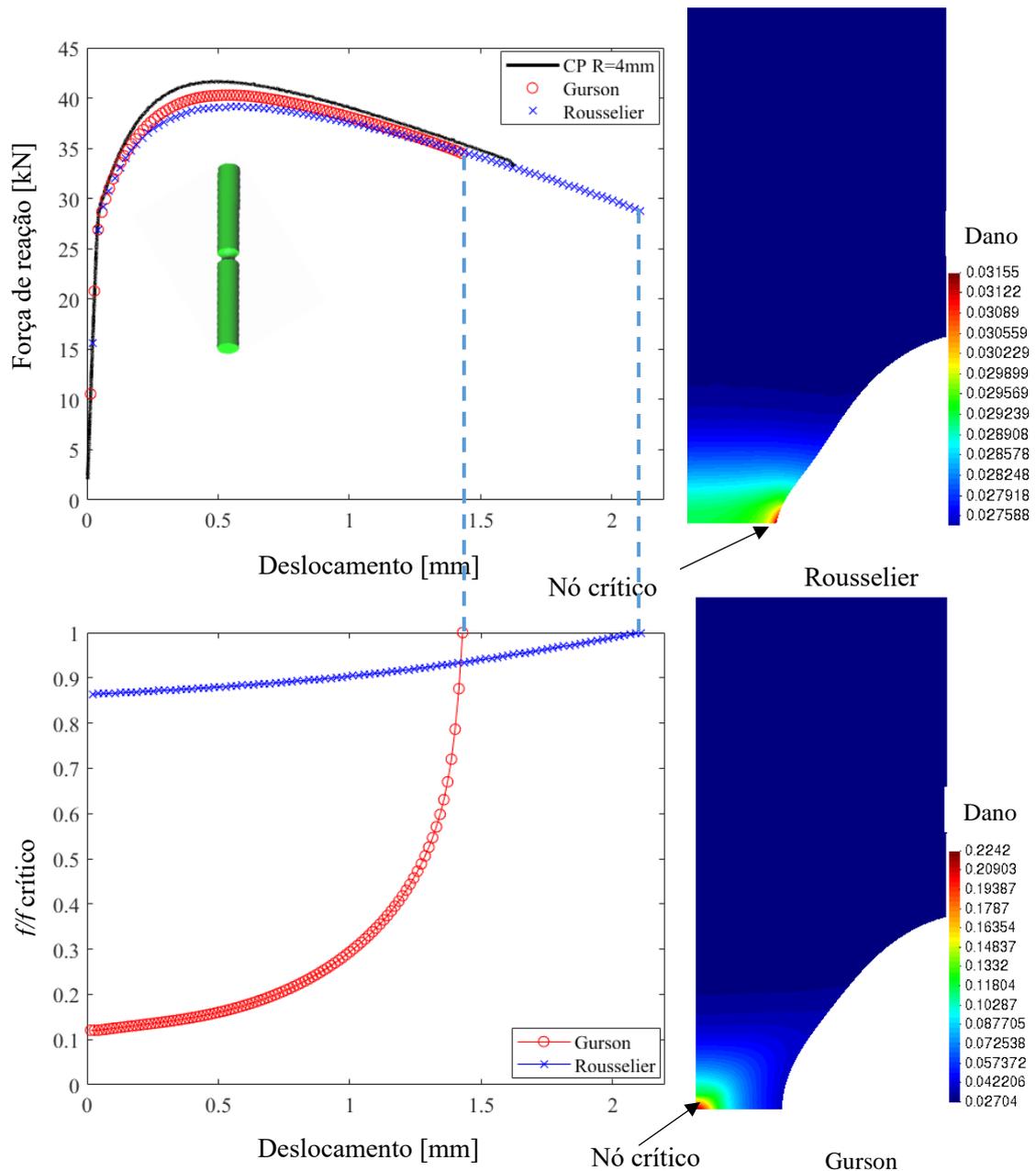


Figura 4-18. Curvas de força de reação, distribuição do dano e nó crítico para o CP entalhado – R=4 mm AISI 4340-Recozido.

Tabela 4-6. Deslocamento na fratura e erros obtidos – AISI 4340-Recozido.

CP	Resultado	Exp.	Rousselier	Erro (%)	Gurson	Erro (%)
Liso		7,31	7,31	-	7,31	-
R=10 mm	Deslocamento na fratura (mm)	2,55	3,00	17,65	2,60	1,96
R=6 mm		2,01	2,49	23,75	1,93	-3,93
R=4 mm		1,63	2,11	29,72	1,43	-12,10

Note da Tabela 4-6 que o único caso que o modelo de Gurson fez uma previsão de falha posterior ao observado experimentalmente foi para o CP R = 10 mm, para os demais a previsão de falha foi anterior ao observado. O modelo de Rousselier sempre apresentou a fratura dúctil do material em um momento posterior ao observado experimentalmente.

4.7 EVOLUÇÃO DA DEFORMAÇÃO PLÁSTICA EQUIVALENTE

Quando se trata de fratura dúctil, um parâmetro de relevância é a deformação plástica equivalente, neste sentido, são avaliados aqui os níveis dessa variável na fratura, calculados por meio das simulações numéricas utilizando-se dos modelos de Gurson e Rousselier. Desta forma, é possível montar um gráfico de deformação plástica na fratura *versus* a razão de triaxialidade inicial, dado que este último parâmetro dependa das características geométricas do corpo de prova, como mostrado anteriormente. O critério de dano crítico continua sendo adotado para a parada da simulação, portanto, é simulado o CP até o momento onde seja atingido a porosidade crítica para o caso do CP liso e é avaliado a deformação plástica equivalente até este ponto.

3.4.1 Liga de alumínio AA6101-T4

Inicialmente será apresentado o CP cilíndrico liso, justamente por ser, como mencionado anteriormente, o ponto de calibração. A Figura 4-19 apresenta os resultados observados. As análises serão conduzidas mediante aos seguintes aspectos:

1. Proximidade dos níveis de deformação plástica equivalente dos modelos;
2. Posição do nó crítico;
3. Natureza de evolução da variável;
4. Implicações devido ao aumento da severidade do raio de entalhe;
5. Relação entre a deformação plástica equivalente na fratura e a razão de triaxialidade inicial.

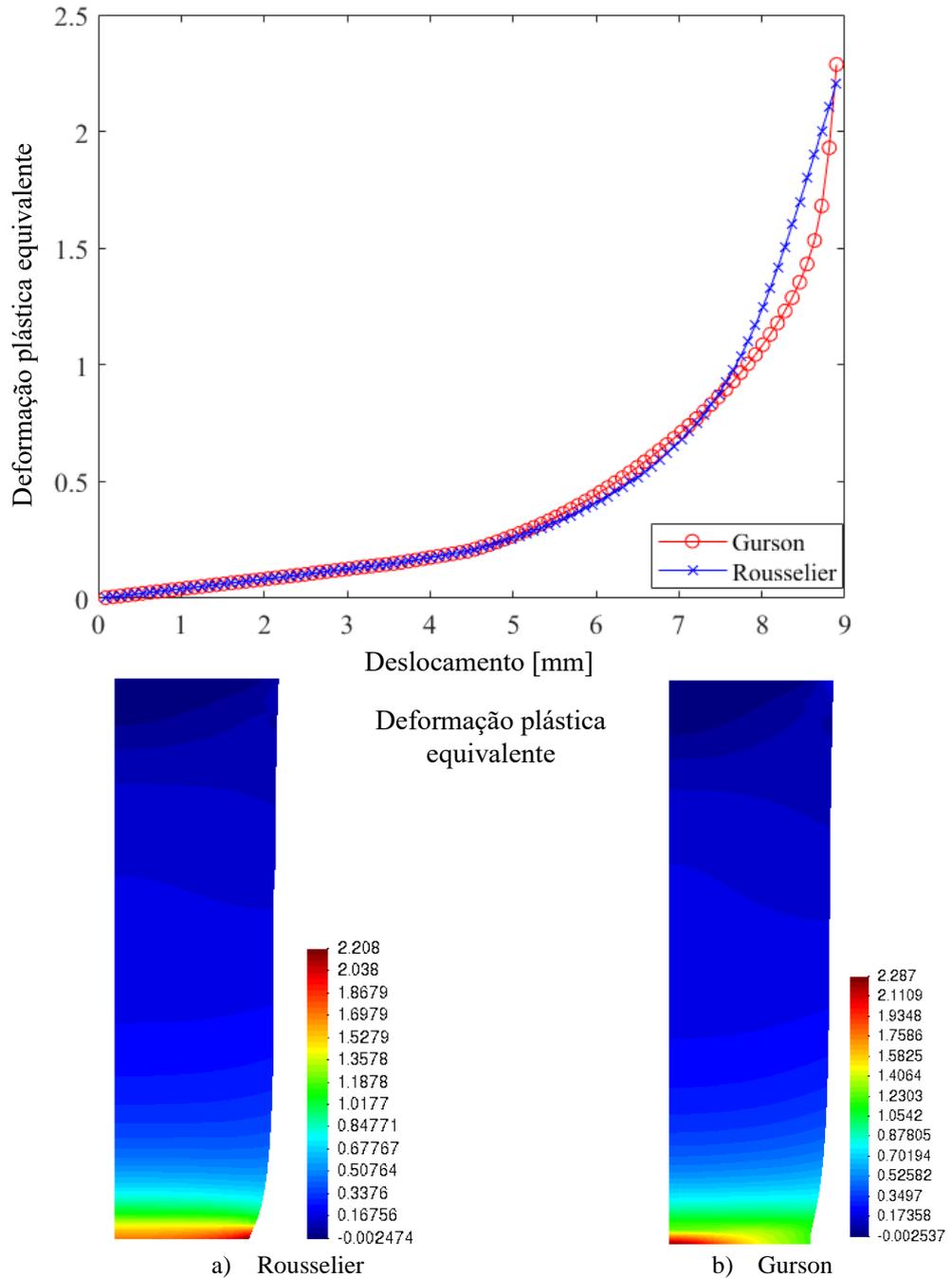


Figura 4-19. Evolução e distribuição da deformação plástica equivalente para o CP cilíndrico liso. Liga AA6101-T4.

É possível observar pela Figura 4-19 que os níveis de deformação plástica equivalente para ambas simulações são muito próximos, embora o modelo de Rousselier apresente uma previsão do nó crítico diferente do observado experimentalmente, tal como acontece para o dano, o modelo prevê o início da fratura no contorno do corpo de prova.

Em continuidade ao desenvolvido anteriormente, foi também analisado o contorno da deformação plástica equivalente na fratura para os corpos de prova entalhados, sendo apresentado nas Figura 4-20 e Figura 4-21 este comportamento, segundo o modelo de Rousselier e Gurson.

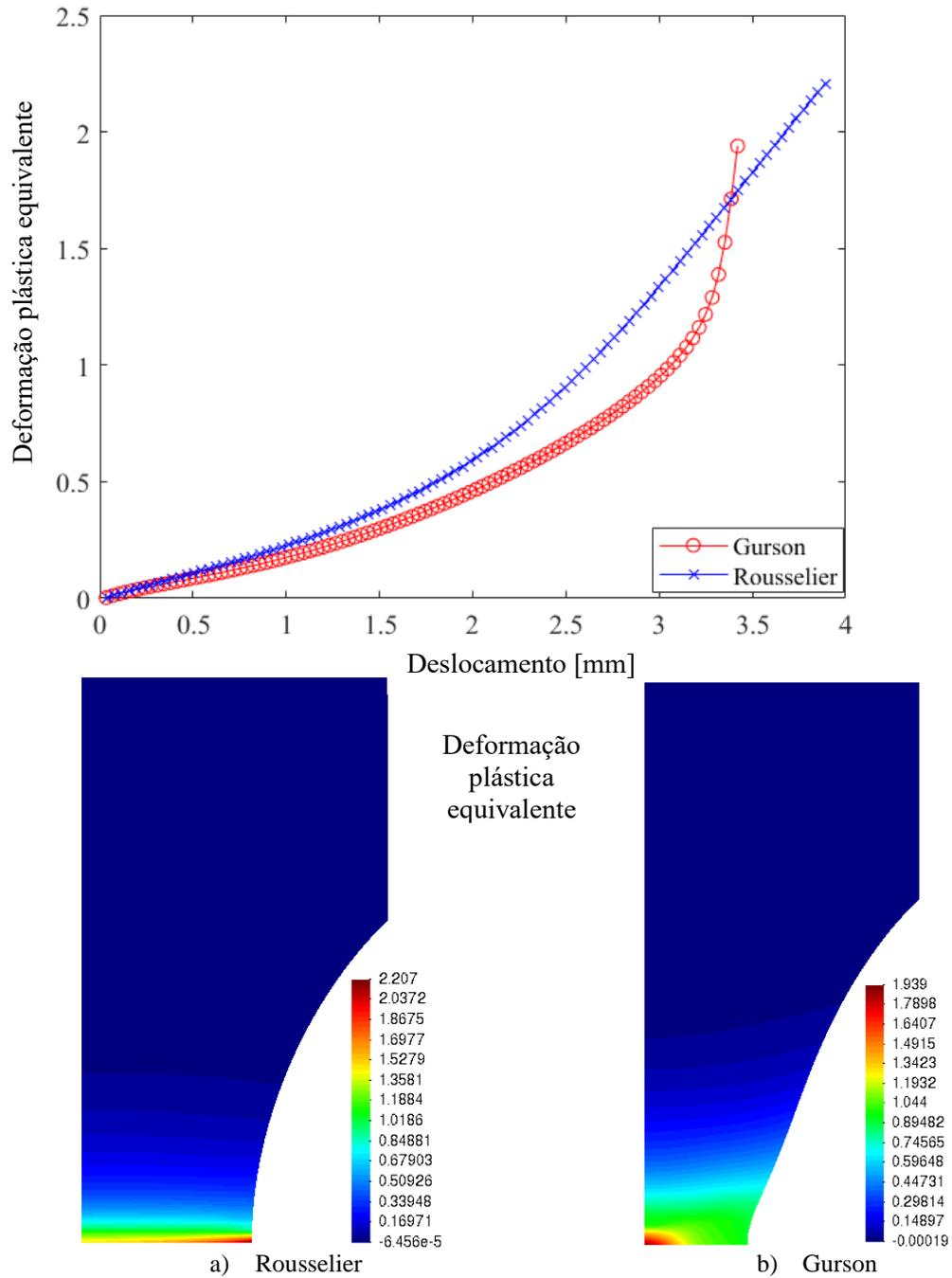


Figura 4-20. Evolução e distribuição da deformação plástica equivalente para o CP entalhado – $R=10$ mm. Liga AA6101-T4.

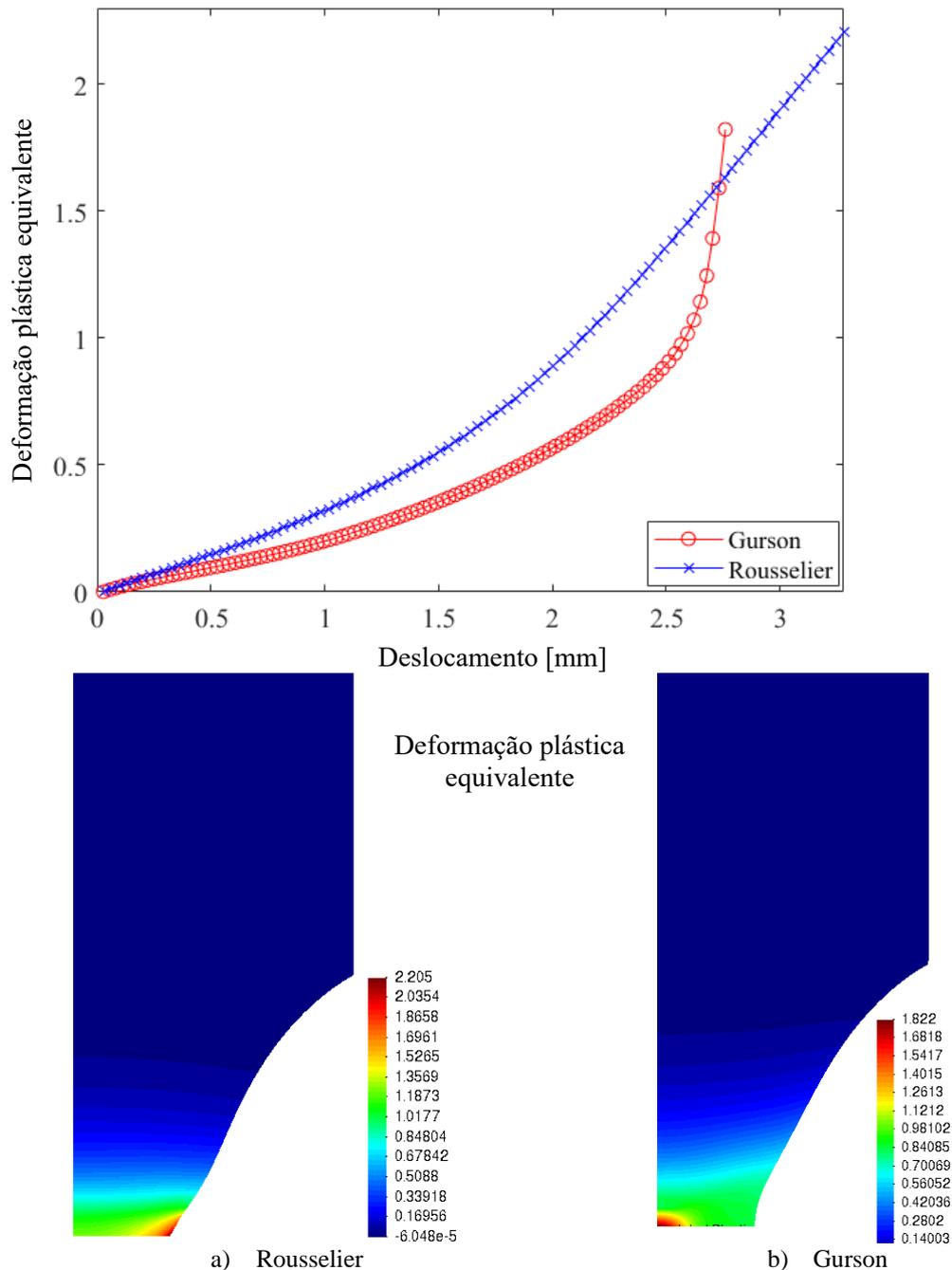


Figura 4-21. Evolução e distribuição da deformação plástica equivalente para o CP entalhado – $R=6\text{ mm}$. Liga AA6101-T4.

É possível notar pelas Figura 4-20 e Figura 4-21 que os modelos possuem naturezas bem distintas quanto a evolução da deformação plástica equivalente, sendo evidenciado que a taxa de evolução da deformação plástica para Gurson é sempre maior que para Rousselier, visto que o modelo de Gurson necessita de menores deslocamentos para atingir o dano crítico.

A diferenciação entre cada curva fica mais evidente à medida que se tem um aumento na severidade do raio de entalhe. Nota-se avaliando a Figura 4-19 que o comportamento para o CP liso é muito semelhante em ambos modelos, sendo notado uma deformação plástica equivalente

crítica, muito semelhante (vide Tabela 4-7). Para o segundo experimento, com raio de entalhe de 10 mm esta diferença já se torna perceptível, e se intensifica para o caso do raio de entalhe de 6 mm. É possível observar também que à medida que se progride a severidade do raio de entalhe, a deformação plástica equivalente concentra-se mais na região onde se encontra o nó crítico, sendo o contorno do CP para o caso do modelo de Rousselier e o centro do CP para o caso de Gurson.

A Tabela 4-7 apresenta os valores de deformação plástica equivalente na fratura para cada geometria de CP segundo cada modelo, bem como a diferença relativa dos valores observados.

Tabela 4-7. Comparativo entre as deformações plásticas equivalente na fratura para cada modelo – AA 6101-T4.

CP	Rousselier	Gurson	Diferença relativa (%)
Liso	2,208	2,287	3,58
R=10 mm	2,207	1,939	13,82
R=6 mm	2,205	1,822	21,02

Como último resultado é possível observar a evolução da deformação plástica equivalente na fratura em função da razão de triaxialidade inicial. Note que a severidade do raio de entalhe afeta de maneira muito mais significativa o modelo de Gurson, resultando em uma diminuição mais abrupta da deformação plástica equivalente na fratura. Já o modelo de Rousselier se mostra insensível a esta alteração. Por ser uma relação de causa e efeito, dado que o modelo de Rousselier apresenta uma deformação plástica equivalente maior, a consequência direta é que o deslocamento na fratura também é maior para esse modelo (vide Tabela 4-6).

Conforme apresentado na Figura 4-22 fica evidente a relação entre a razão de triaxialidade e o nível de deformação plástica equivalente esperado na fratura. Nota-se que para $\eta \geq 1/3$ a deformação plástica na fratura sempre diminui com o aumento da razão de triaxialidade, para o modelo de Gurson, enquanto que o modelo de Rousselier apresenta insensibilidade, no que se refere a deformação plástica na fratura, ao acréscimo da razão de triaxialidade inicial.

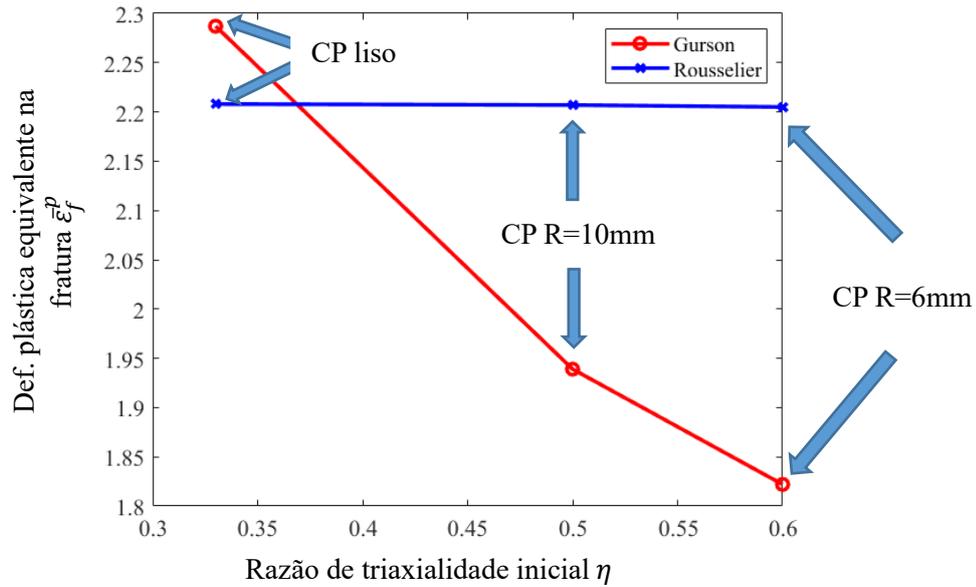


Figura 4-22. Deformação plástica equivalente na fratura em função da razão de triaxialidade inicial.

3.4.2 Liga de aço AISI 4340-Recozido

Nesta etapa do trabalho, será verificado a deformação plástica equivalente para cada corpo de prova usinado a partir da liga AISI 4340-Recozido. Tal qual para o caso da liga de alumínio, o ponto de calibração adotado é o corpo de prova cilíndrico liso, onde as evoluções das variáveis internas do problema são consideradas até o momento onde a simulação atinge a porosidade máxima, 0,03155 para o modelo de Rousselier e 0,22480 para o modelo de Gurson (vide Tabela 4-2 para mais informações). Portanto, a Figura 4-23 mostra a evolução da deformação plástica equivalente em função do deslocamento e o contorno do dano.

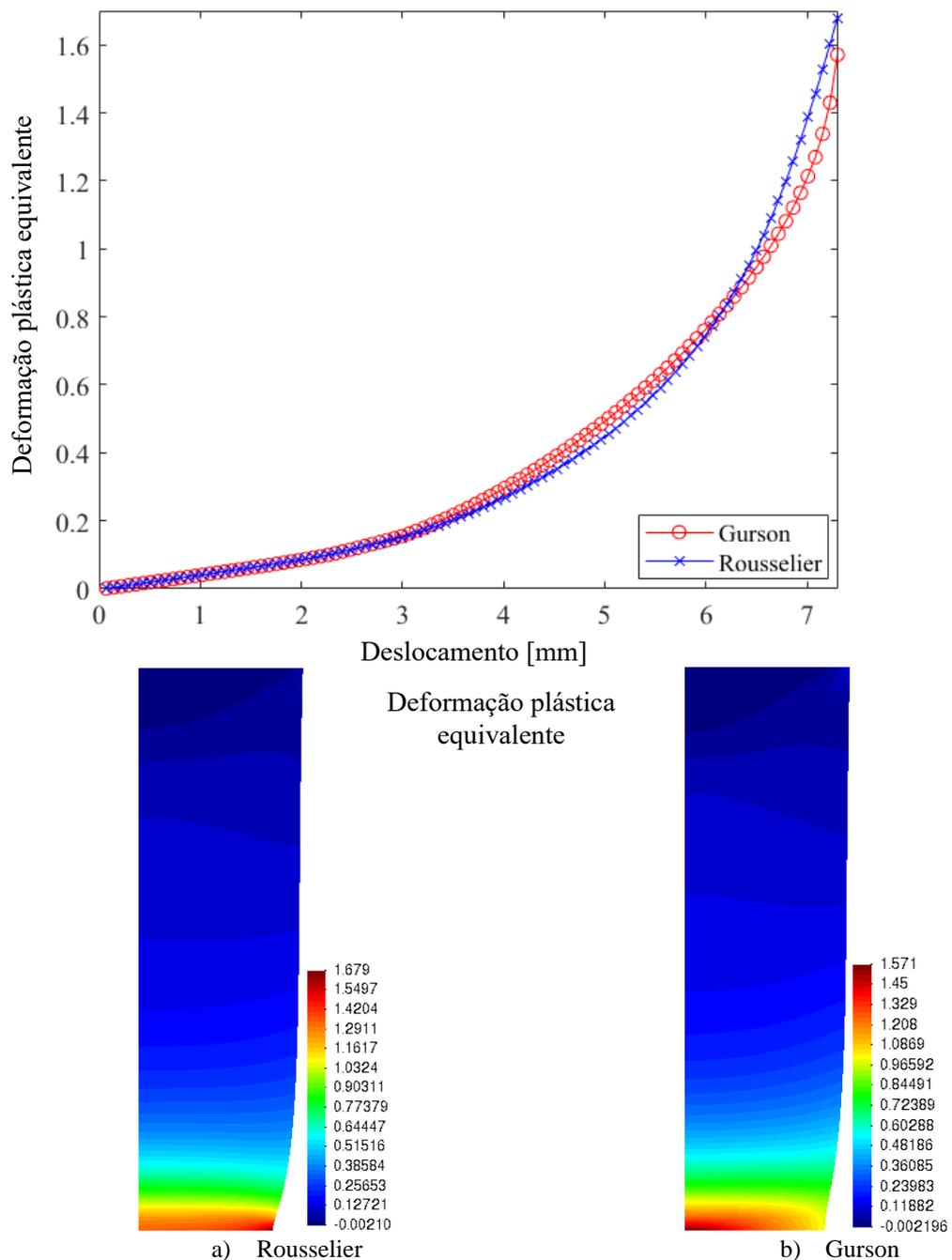


Figura 4-23. Evolução e distribuição da deformação plástica equivalente para o CP liso.

Conforme apresentado na Figura 4-23, os níveis de deformação plástica equivalente para ambas simulações são próximos, embora já haja uma diferença maior do que para o corpo de prova usinado a partir do alumínio. Outra observação é quanto a localização do nó crítico, Rousselier mantém como a extremidade do CP a região crítica e Gurson aponta para o centro do corpo de prova. Ampliando a imagem é possível também observar que a região onde com os maiores níveis de deformação plástica equivalente, representada na Figura 4-23 pela região do vermelho mais escuro, é mais espalhada para o caso de Gurson.

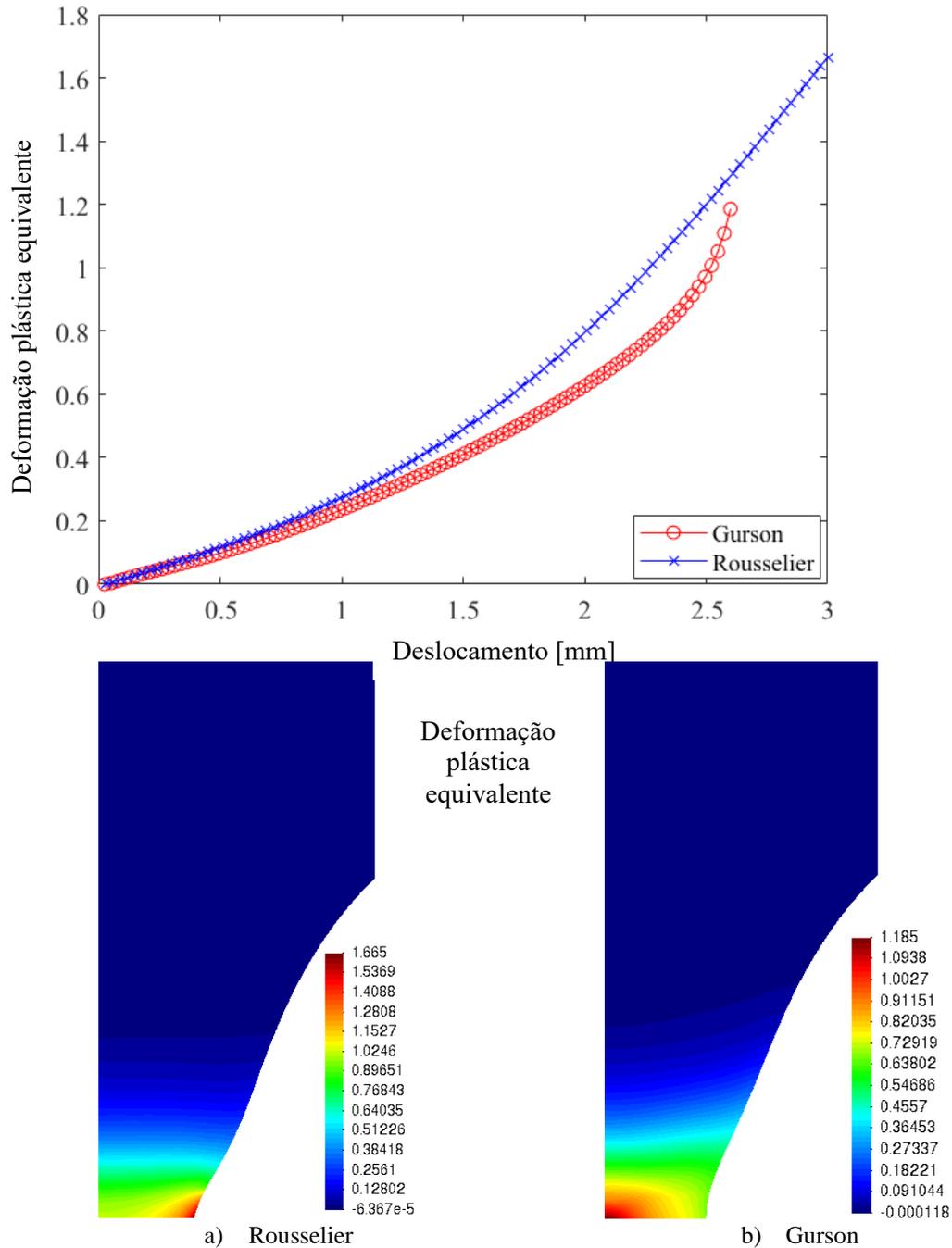


Figura 4-24. Evolução e contorno da deformação plástica equivalente para o CP entalhado – $R=10\text{ mm}$.

A partir desse ponto já fica mais evidente a diferença entre os modelos. Conforme mostrado na Figura 4-24, embora exista uma proximidade na deformação plástica equivalente crítica, o mesmo não acontece para o comportamento matemático de cada uma das curvas que descrevem a evolução desta variável. O deslocamento na fratura para o modelo de Rousselier é consideravelmente maior, dado que o modelo demora mais para atingir a porosidade crítica, o que promove um aumento da deformação plástica equivalente. O distanciamento entre as curvas é reflexo da natureza das equações de evolução da deformação plástica para cada modelo.

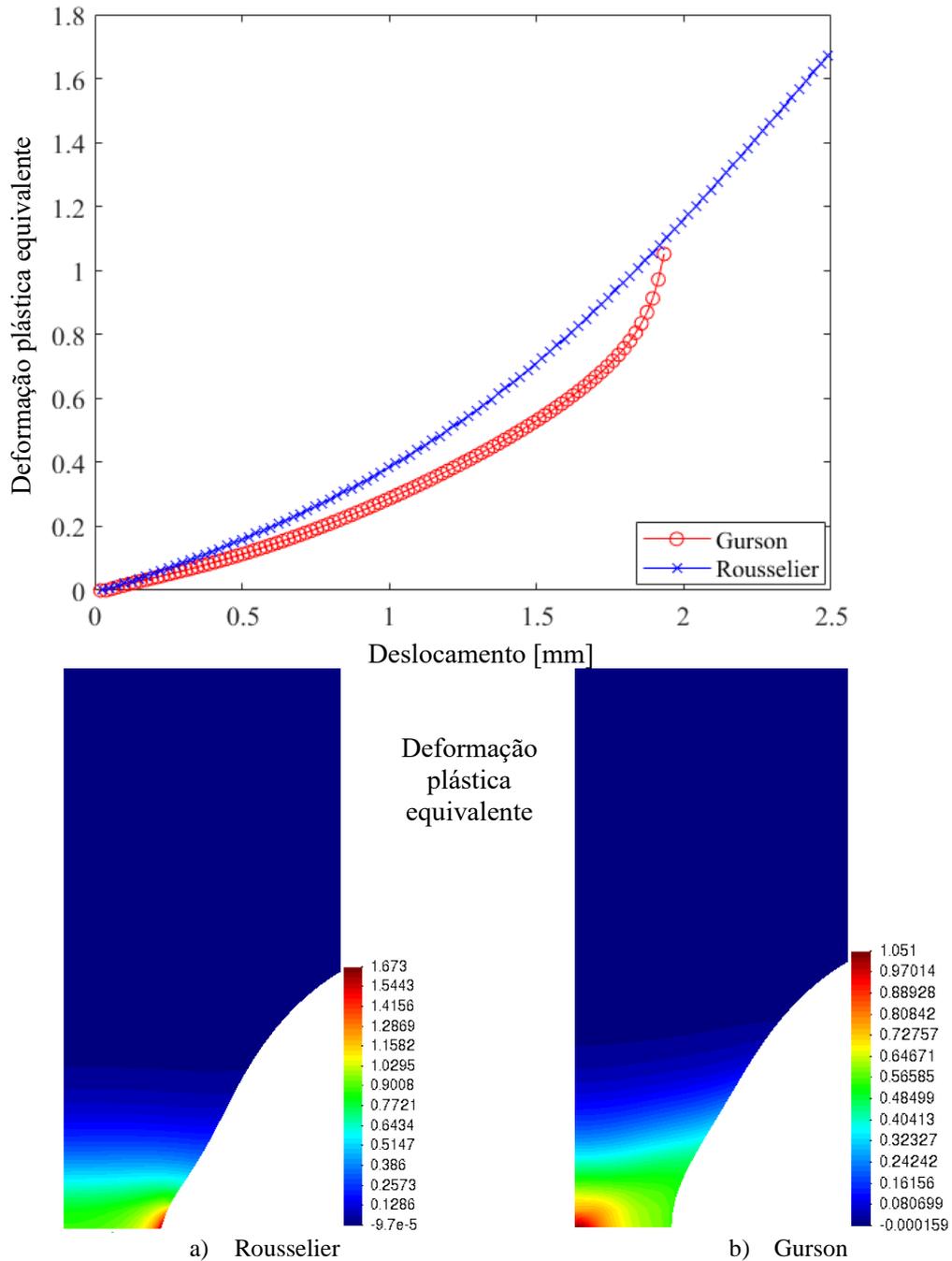


Figura 4-25. Evolução e distribuição da deformação plástica equivalente para o CP entalhado – $R=6\text{ mm}$.

O aumento da severidade do entalhe promove um distanciamento entre os resultados, conforme pode-se observar na Figura 4-25. Este fato corrobora também para o distanciamento preditivo do modelo de Rousselier, que torna-se mais impreciso em descrever o comportamento observado experimentalmente.

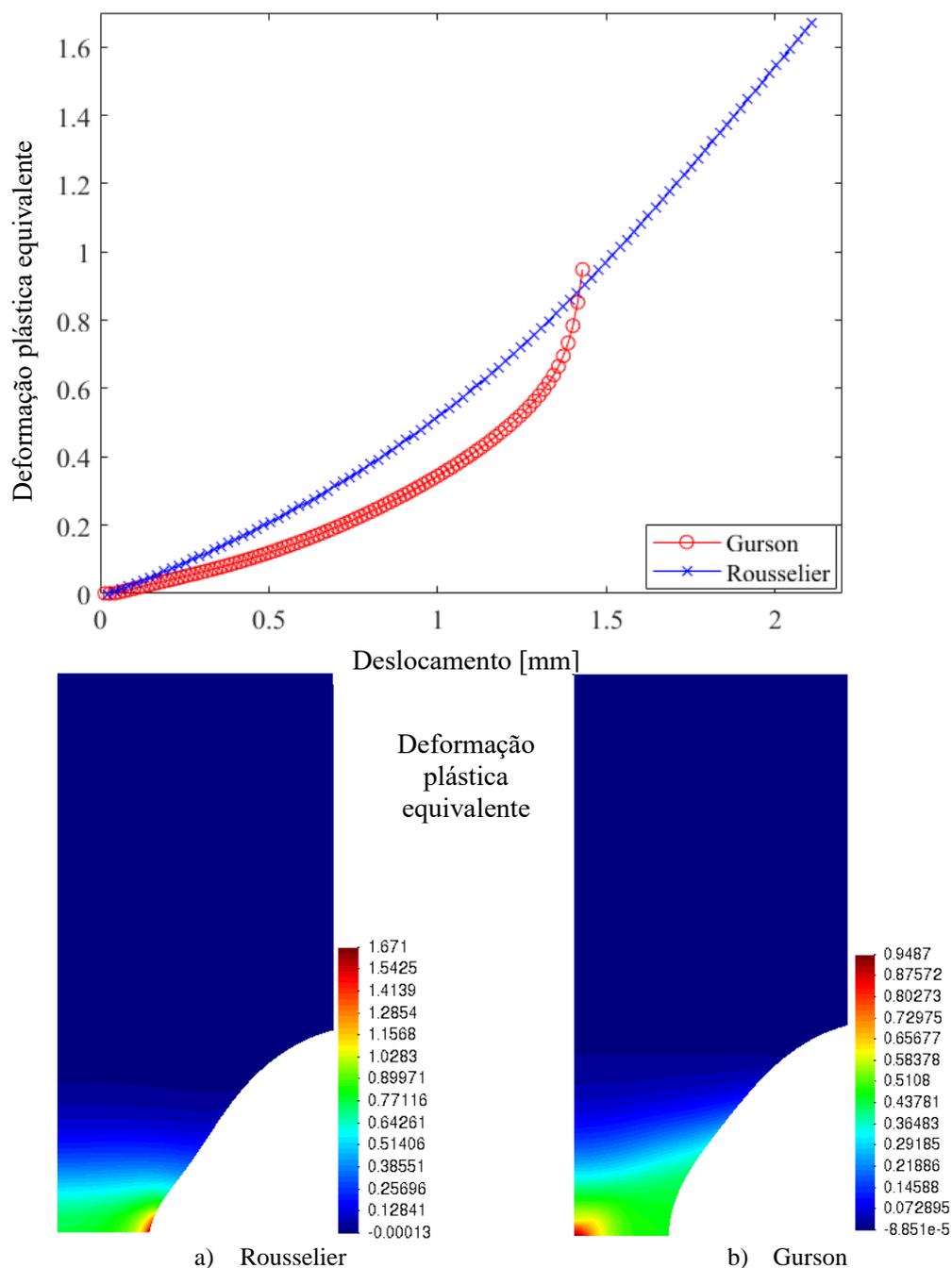


Figura 4-26. Evolução e distribuição da deformação plástica equivalente para o CP entalhado – $R=4\text{ mm}$.

O distanciamento fica ainda mais evidente para o corpo de prova com raio de entalhe de 4 mm, conforme apresentado na Figura 4-26. Os resultados obtidos mostram que os níveis de deslocamento são diferentes para cada modelo, o podendo-se inferir que, mesmo para o material de menor ductilidade, AISI 4340-Recozido, a taxa de evolução da deformação plástica, segundo Gurson, é sempre maior que para Rousselier. Conforme apresentado para o caso do alumínio, a Tabela 4-8 apresenta um comparativo entre cada modelo simulado.

Tabela 4-8. Comparativo entre as deformações plásticas equivalente na fratura para cada modelo AISI 4340-Recozido.

CP	Rousselier	Gurson	Diferença relativa (%)
Liso	1,679	1,571	6,87
R=10 mm	1,665	1,185	40,51
R=6 mm	1,673	1,051	59,18
R=4 mm	1,671	0,9487	76,14

Pela Figura 4-27 é possível notar a relação entre a razão de triaxialidade e o nível de deformação plástica equivalente esperado na fratura. Nota-se que para $\eta \geq 1/3$, que significa do ponto de vista prático um estado de tensão de carregamento trativo, a deformação plástica requerida na fratura sempre diminui com o aumento da razão de triaxialidade, para o modelo, de Gurson, tal qual observado no caso da liga de alumínio. Assim como para a liga de alumínio, o modelo de Rousselier se apresenta insensível a este acréscimo na razão de triaxialidade. Pode-se notar uma flutuação da deformação plástica, em especial para o corpo de prova com raio de entalhe de 10 mm, no entanto, de maneira geral, pode-se considerar esta variável como insensível ao aumento da razão de triaxialidade.

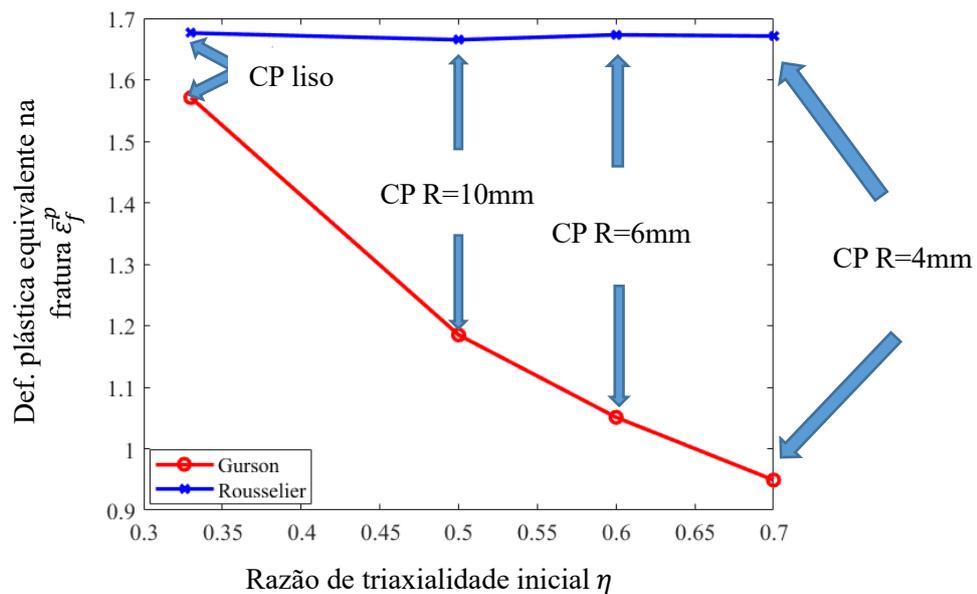


Figura 4-27. Deformação plástica equivalente na fratura em função da razão de triaxialidade inicial. AISI 4340-Recozido.

4.8 AVALIAÇÃO DA CONSISTÊNCIA TERMODINÂMICA DO MODELO DE ROUSSELIER

Como última proposição para o presente trabalho é feita uma tentativa de avaliação da consistência termodinâmica incorporada no modelo de Rousselier. Note que pelas equações (2.5) e (2.23) a lei de fluxo plástico tem naturezas de dependências distintas para cada modelo, para o modelo de Rousselier, a deformação plástica equivalente depende tão somente da pressão

hidrostática, porosidade e dos parâmetros de calibração, além do multiplicador plástico. Para o modelo de Gurson a variável é dependente da curva de encruamento do material. Esta dependência da curva de encruamento do material pode ser apontada como um possível fator responsável pela indicação correta do local da fratura, no caso, o centro do CP, visto que para o modelo de Rousselier esta indicação encontra-se em desacordo com o experimental e que para o modelo a variável não depende da curva de encruamento de maneira explícita.

Note ainda pela Figura 4-19, Figura 4-20, Figura 4-21, Figura 4-23, Figura 4-24, Figura 4-25 e Figura 4-26 que o modelo de Rousselier demora mais a atingir a porosidade crítica, e, portanto, são observados maiores níveis de pressão hidrostática, conforme pode observar na Figura 4-28 e Figura 4-29 o que encontra-se em acordo com a literatura (vide Bridgman, 1952), por se tratar de um fator que atua como regulatório das taxas de nucleação de vazios, onde, sendo observado em sollicitações trativas o como contribuinte para a nucleação e crescimento desses (Rice e Tracey, 1969), pode-se inferir que a nucleação e crescimento de vazios ocorre de maneira mais pronunciada para o caso do modelo de Gurson. Neste sentido, a tentativa de se avaliar o contorno pressão hidrostática é para entender-se o comportamento da porosidade, visto que ela atua diretamente no controle da porosidade, segundo a literatura.

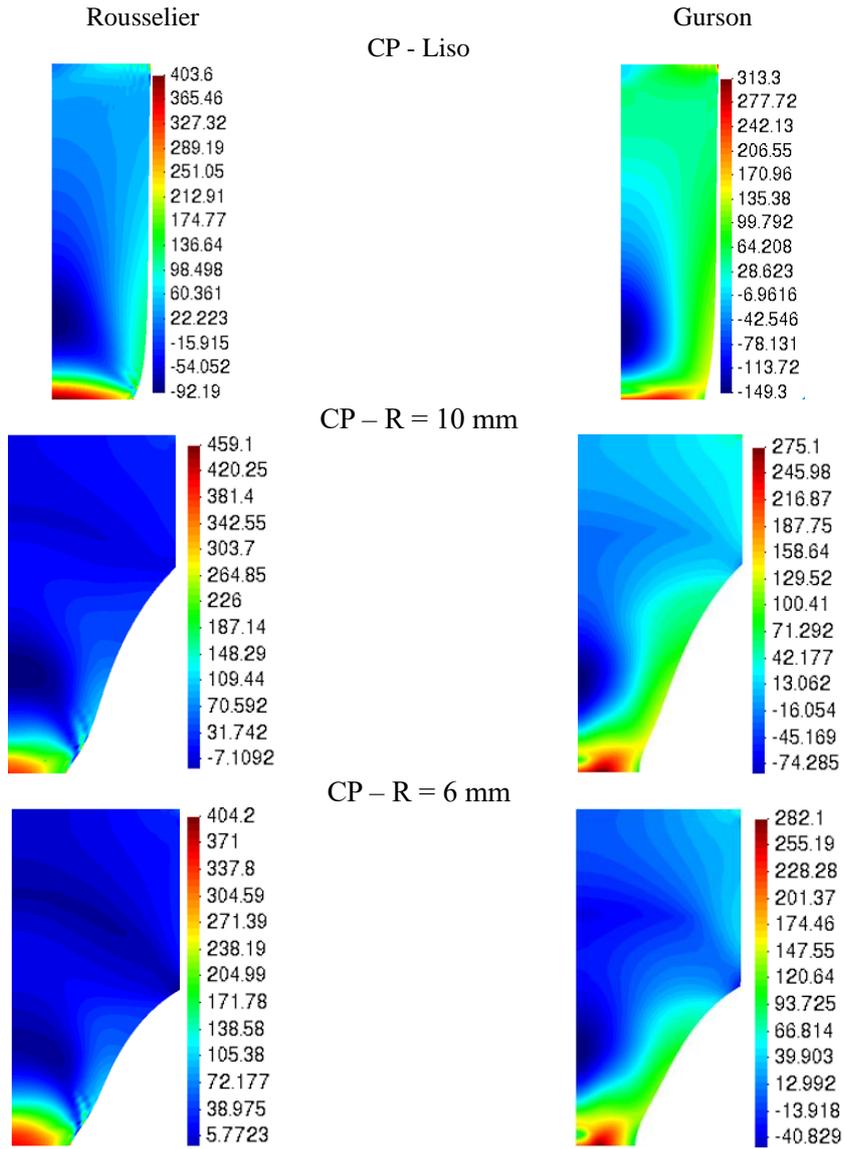


Figura 4-28. Níveis de pressão hidrostática na fratura – Liga de alumínio AA 6101-T4. Observação: Medidas em MPa.

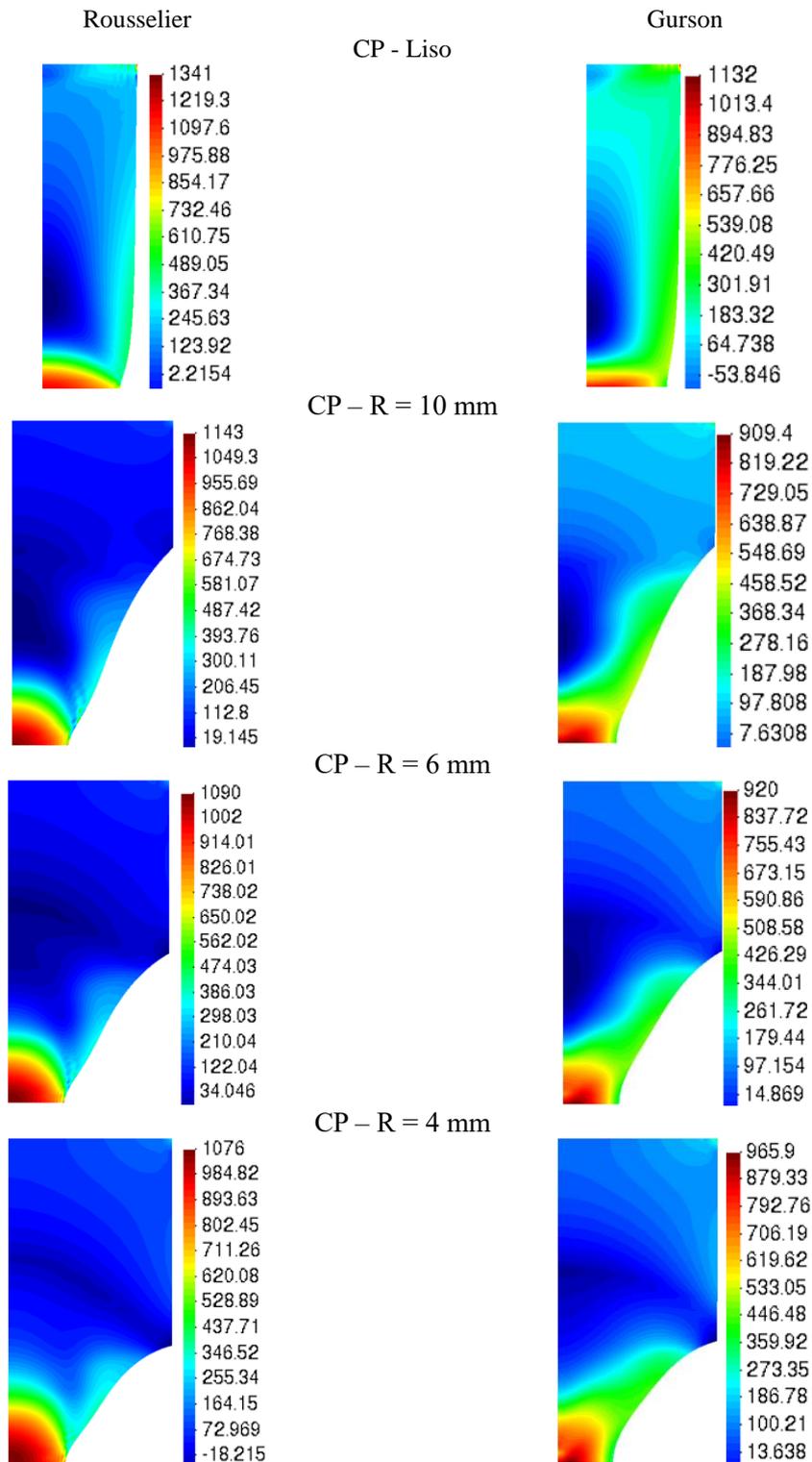


Figura 4-29. Níveis de pressão hidrostática na fratura – Liga de aço AISI 4340 - Recozido. Observação: Medidas em MPa.

O que pode-se notar analisando a Figura 4-28 e Figura 4-29 é que o contorno da pressão hidrostática se espalha do centro do CP para a parte mais externa, isso é melhor observado no caso dos CPs entalhados, onde essa variável tende a concentrar-se mais no centro. Note ainda que o modelo de Gurson faz uma previsão onde essa variável se espalha mais, não fica tão concentrada

no centro, de forma que a pressão hidrostática não represente efetivamente um parâmetro que consiga descrever com suficiente precisão a fratura dúctil do material.

Neste ponto, outra análise relevante é para o caso das geometrias entalhadas. Note que, para o caso do modelo de Gurson, o acréscimo da severidade do raio de entalhe corrobora para um aumento da pressão hidrostática na fratura, o que está consistente com as análises da equação (4.1). No entanto, para o modelo de Rousselier, este acréscimo na severidade do raio de entalhe implica em uma diminuição da pressão hidrostática na fratura, um resultado não esperado.

4.9 ANÁLISES GERAIS

Apoiado pelos resultados detalhados neste capítulo, pode-se apontar as seguintes observações:

1. Curva de força de reação *versus* deslocamento:
 - a. O modelo Rousselier apresentou uma força de ruptura menor do observado experimentalmente, enquanto o modelo de Gurson apresentou a força de ruptura acima do que foi observado experimentalmente.
 - b. O modelo de Rousselier apresenta um nível de deslocamento na fratura maior do que o que o observado experimentalmente, enquanto Gurson apresenta um deslocamento na fratura menor do que observado experimentalmente.
 - c. Os erros apresentados pelo modelo de Rousselier são maiores que aqueles apresentados pelo modelo de Gurson, quando comparados com os resultados experimentais.
2. Evolução da variável de dano:
 - a. A taxa de evolução da porosidade é mais pronunciada para o modelo de Gurson que para o modelo de Rousselier.
 - b. A indicação do nó crítico para o modelo de Rousselier encontra-se na borda do CP, diferentemente do observado experimentalmente. O modelo de Gurson faz uma previsão de nó crítico que condiz com o observado experimentalmente, apontando a região central do CP.
3. Evolução da deformação plástica equivalente:
 - a. Os modelos possuem naturezas distintas quanto a evolução da deformação plástica equivalente (vide equações (2.5)(2.6) e (2.23)), sendo evidenciado

que a taxa de evolução da deformação plástica para Gurson é sempre maior que para Rousselier, visto que o modelo de Gurson necessita de menores deslocamentos para atingir a deformação plástica equivalente crítica.

- b. A indicação do nó crítico é a mesma para o caso da variável de dano.
- c. A relação entre a deformação plástica equivalente na fratura e a razão de triaxialidade inicial é um dos principais resultados obtidos nesta dissertação. O modelo de Gurson se mantém conforme observado em literatura, onde ocorre a diminuição desta variável com o incremento da razão de triaxialidade inicial. O modelo de Rousselier apresenta a variável como independente do nível de razão de triaxialidade.

4. Implicações devido a severidade do raio de entalhe:

- a. O incremento da severidade do raio de entalhe acarreta em um afastamento preditivo do modelo de Rousselier, apresentando erros maiores quando comparado com o resultado experimental, para o caso do deslocamento na fratura.
- b. A diferenciação entre cada curva para a deformação plástica equivalente fica mais evidente à medida que se tem um aumento na severidade do raio de entalhe.
- c. É possível observar também que à medida que se progride a severidade do raio de entalhe, a deformação plástica equivalente concentra-se mais na região onde se encontra o nó crítico, sendo o contorno do CP para o caso do modelo de Rousselier, e o centro do CP para o caso de Gurson.
- d. Conforme mencionado anteriormente a severidade do raio de entalhe afeta de maneira muito mais significativa o modelo de Gurson, resultando em uma diminuição da deformação plástica equivalente na fratura. Já o modelo de Rousselier se mostra insensível a esta alteração.
- e. Pode-se notar que o contorno da pressão hidrostática se espalha do centro do CP para a parte mais externa, isso é melhor observado no caso dos CPs entalhados, onde essa variável tende a concentrar-se mais no centro.

5. CONCLUSÕES GERAIS E TRABALHOS FUTUROS

5.1 CONCLUSÕES

Os resultados apresentados no capítulo quatro apontam que os modelos descrevem de maneira diferente o comportamento do material. Visto que as análises são referentes a diversos aspectos, a conclusão será apresentada por tópicos, deste modo:

5.1.1 Quanto aos objetivos propostos no trabalho:

1. O modelo de Rousselier não tem uma boa capacidade preditiva do local e instante esperado para a falha dúctil para os materiais estudados.

Os resultados demonstram erros maiores do que o modelo de Gurson, por exemplo, quando comparados com os ensaios experimentais. Desta forma, o modelo de Rousselier se mostrou impreciso para prever o local e instante esperado da fratura dúctil, segundo os materiais estudados.

2. Quanto aos efeitos comparativos o modelo de Gurson se mostrou mais assertivo que o modelo de Rousselier, que se mostrou impreciso para a descrição da falha dúctil do material.

Além de apresentar erros maiores o modelo de Rousselier prevê o nó crítico na parte externa do CP, o que não representa um resultado coerente com o observado experimentalmente.

5.1.2 Quanto ao material:

1. O modelo de Rousselier é impreciso tanto para o AA 6101-T4 quanto para o AISI 4340-Recozido, chegando em erros relativos quando comparado com o observado experimentalmente de 13,10% para o CP de raio de entalhe de 6 mm para o alumínio e de 29,72% para o raio de entalhe de 4 mm para o aço, no que se refere ao deslocamento na fratura.

Neste caso, por ter erros menores para o caso da liga de alumínio, o modelo de Rousselier, embora impreciso, mostra-se mais aplicável a materiais com maiores níveis de ductilidade. É possível notar ainda que a descrição do comportamento do material é diferente para cada modelo. O modelo de Rousselier apresenta erros menores para o material mais dúctil quando comparado CP à CP. Por exemplo, o CP R=10 mm tem um erro de 11,14% para o alumínio enquanto que para o aço o erro é de 17,65%. Já o modelo de Gurson ocorre o contrário, o CP R=10 mm apresenta um erro de -2,29% para o material AA 6101-T4 enquanto que para o AISI 4340-Recozido de mesma geometria o erro é de -1,96%, ou seja, mais próximo do resultado experimental.

O que se pode tirar de conclusão desta análise é que, para os materiais abordados neste trabalho, o modelo de Rousselier tem uma capacidade descritiva melhor para o material mais dúctil, enquanto que o modelo de Gurson tem essa capacidade preditiva melhor para o material menos dúctil. E quando comparados os modelos um em relação ao outro, o modelo de Rousselier é mais impreciso do que o modelo de Gurson, para ambos os materiais.

2. Para o material menos dúctil a diferença relativa entre os modelos é maior.

A descrição do comportamento mecânico para o aço AISI 4340-Recozido mostra-se mais imprecisa, tanto para o modelo de Rousselier, que apresenta um erro máximo de 29,72% para o raio de entalhe de 4 mm, quanto para o modelo de Gurson, que apresenta um erro máximo de -12,10%, para o mesmo CP, quando comparados com o deslocamento na fratura obtido experimentalmente. Este fenômeno corrobora para o distanciamento entre os modelos.

5.1.3 Quanto a geometria dos CPs:

1. Nota-se que o aumento da severidade do raio de entalhe acarreta no acréscimo de imprecisão para o modelo de Rousselier, distanciando-se ainda mais dos resultados experimentais;

Aumentar a severidade do raio do entalhe significa alterar a geometria do CP, distanciando-se do estado de tensão do ponto de calibração. Uma das tentativas do estudo de descrição do comportamento mecânico do material é calibrar em uma condição e conseguir prever este comportamento em condições diferentes. Neste sentido, o modelo de Rousselier se mostra impreciso para os materiais e condições estudados neste trabalho. O modelo descreve com precisão o comportamento do material segundo o ponto de calibração, no entanto, à medida que se distancia deste ponto, o comportamento preditivo fica comprometido. Quanto a localização do nó crítico, o modelo de Rousselier é impreciso para qualquer situação.

2. O acréscimo da severidade do entalhe serve para distanciar os resultados dos modelos de Rousselier e Gurson quando comparados um com o outro.

Conforme comentado anteriormente, o aumento da severidade do raio de entalhe impacta diretamente na capacidade preditiva de cada modelo, um resultado esperado, por se distanciar do ponto de calibração. Isto contribui para o afastamento entre os modelos.

3. O incremento da severidade do raio de entalhe corrobora para um aumento da pressão hidrostática na fratura, o que está consistente com as análises das equações, para o modelo de Gurson.

4. Para o modelo de Rousselier, este acréscimo na severidade do raio de entalhe implica em uma diminuição da pressão hidrostática na fratura, um resultado não esperado.

5.1.4 Quanto a porosidade:

1. A taxa de evolução da porosidade de Rousselier é sempre menor que para o caso do Gurson;

Conforme demonstrado de maneira quantitativa, a porosidade tem uma evolução mais abrupta para o modelo de Gurson. Um reflexo direto a este fenômeno está relacionado ao deslocamento na fratura. O modelo de Gurson demanda de menores deslocamentos para atingir o dano crítico do material quando comparado com o modelo de Rousselier.

2. A lei de dano de Rousselier não depende diretamente da curva de encruamento do material.

Este fato representa um possível responsável pela indicação incorreta do nó crítico, visto que o modelo de Gurson faz a indicação correta e depende explicitamente da curva de encruamento do material.

5.1.5 Quanto deformação plástica equivalente:

1. Os modelos possuem naturezas bem distintas quanto a sua evolução,

Nota-se que para o modelo de Gurson a taxa de evolução da deformação plástica é sempre maior que para Rousselier. Novamente o modelo de Gurson necessita de deslocamento menores para atingir a deformação plástica equivalente crítica quando comparado com o modelo Rousselier.

2. O modelo de Rousselier se mostra insensível ao aumento da razão de triaxialidade

Este é um resultado bastante curioso que diverge do esperado. O que acontece, na literatura, o comportamento da deformação plástica equivalente na fratura é semelhante ao que acontece para a previsão de Gurson, diminuindo com o incremento da razão de triaxialidade inicial. Quanto ao modelo de Rousselier é possível observar a indicação da fratura, seja pra qualquer estado de tensão, no mesmo nível. Portanto, para qualquer geometria, dentro daquelas estudadas, o modelo descreve a mesma deformação plástica equivalente na fratura.

5.1.6 Quanto a avaliação da pressão hidrostática:

1. O modelo de Rousselier demora mais a atingir a deformação plástica equivalente crítica, e, portanto, são observados maiores níveis de pressão hidrostática. Este é um resultado esperado e encontra-se em acordo com a literatura.

2. O contorno da pressão hidrostática se espalha do centro do CP para a parte mais externa, isso é melhor observado no caso dos CPs entalhados, onde essa variável tende a concentrar-se mais no centro.

A pressão hidrostática foi avaliada no sentido de se buscar entender o comportamento da porosidade e uma possível indicação para a indicação incorreta do local da fratura para o modelo de Rousselier. O que se pôde concluir é que este parâmetro não serve como um bom indicador de fratura dúctil para o modelo de Gurson, visto que o contorno é bem espalhado ao longo da geometria do CP.

Para o modelo de Rousselier, os níveis de pressão hidrostática máxima encontram-se no centro do CP, não corroborando para servir como indicador do posicionamento incorreto do nó crítico previsto pelo modelo. O esperado era que esta variável, que atua diretamente na taxa de nucleação e crescimento de vazios, fosse prevista pelo modelo de Rousselier na parte externa do CP, tal qual a porosidade.

5.2 TRABALHOS FUTUROS

Os resultados demonstrados nesta dissertação apontam para um prospecto promissor no que se refere a significativas melhorias na detecção do local da falha para materiais com diferentes ductilidades, porém, ainda existe um vasto campo de exploração e pesquisa na tratativa de melhorar a capacidade preditiva de um material. Para tanto, são recomendados como estudos futuros relacionados ao tema abordado neste trabalho:

- a) Corrigir os problemas preditivos do modelo de Rousselier;
- b) Calibrar os modelos em outros estados de tensão;
- c) Avaliar os modelos de Rousselier e de Gurson, em outras condições de carregamento.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Andrade Pires, F. M., (2001).** “Modelação por Elementos Finitos da Iniciação da Fratura Dúctil nos Processos de Enformação Plástica em Massa. Dissertação de Mestrado.” Universidade do Porto. Portugal.
- Anand, L., Kim, K., Shawki, T. (1987).** “Onset of shear localization in viscoplastic solids.” *J. Mech. Phys. Solids* 35, 407–429.
- Atkins, A. G., (1981).** “Possible explanation for unexpected departures in hydrostatic tension-fracture strain relations.” *Metal Sci.* v.15, p.81-83.
- Atkins, A. G., Mai, Y.W., (1985).** “Elastic and Plastic Fracture”, Ellis Horwood Ltd. Chichester.
- Bai, Y. (2008).** “Effect of Loading History on Necking and Fracture.” Ph.D Thesis, Massachusetts Institute of Technology
- Bao, Y., Wierzbicki, T. (2004).** “On fracture locus in the equivalent strain and stress triaxiality space.” *International Journal of Mechanical Sciences* 46, 81 – 98
- Bai, Y., Wierzbicki, T. (2007).** “A new model of metal plasticity and fracture with pressure and Lode dependence.” *International Journal of Plasticity*, 24:1071-1096.
- Bonet, J., Wood, R.D. (2008).** “Nonlinear Continuum Mechanics for Finite Element Analysis.” Ed.: Cambridge.
- Brandes, E., A., e Brook, G., B. (1992).** “Smithells Metals Reference Book”. E.: Butterworth-Heinemann, Oxford. 7ª Edição.
- Bridgman, P., W. (1952).** “Studies in Large Plastic Flow and Fracture: With Special Emphasis on the Effects of Hydrostatic Pressure.” New York-London: McGraw-Hill.
- Brozzo, P., Deluca, B., Redina, R. A., (1972).** “A new method for the prediction of the formability limits of metals sheets.” *Proc. 7th Biennial Conf. Int. Deep Drawing Research Group.*
- Brüning, M., Chyra, O., Albrecht, D., Driemeier, L., Alves, M. (2008).** “A ductile damage criterion at various stress triaxialities.” *International Journal of Plasticity*, 24: 1731–1755.
- Brüning, M., Gerke, S., Hagenbrock, V. (2013)** “Micro-mechanical studies on the effect of the stress triaxiality and the Lode angle parameter on ductile damage.” *International Journal of Plasticity*, 49-65.
- Budynas, R., G., e Nisbett, J., K. (2016).** “Elementos de Máquinas de Shigley”. Ed: AMGH. 10ª Edição.
- Cavalheiro, J.V.S., Malcher, L. (2017).** “Assessment of third invariant elasto-plastic models: Mathematical aspects, numerical strategies and comparative results.” *Finite Elements in Analysis and Design.* 51-69.
- Chaboche, J.L., Boudifa, M., Saanouni, K., 2006.** “A CDM approach of ductile damage with plastic compressibility.” *International Journal of Fracture* v.137, p.51–75.

- Cockcroft, M. G., Latham, D. J., (1968).** “Ductility and workability of metals.” *J. Inst. Metals*, v.96, p.33-39.
- Datsko, J., (1966).** “Material Properties and Manufacturing Process.” John Wiley & Sons. New York.
- Driemeier, L., Moura, R. T., Machado, I. F., Alves, M., (2015).** “A bifailure specimen for accessing failure criteria performance.” *International Journal of Plasticity*, vol.71, 62-86.
- De Sa J.M.A.C., Pires F.M.A., Andrade F.X.C., Malcher L., Seabra M.R.R. (2015).** Ductile Failure Modeling: Stress Dependence, Non-locality and Damage to Fracture Transition. *Handbook of Damage Mechanics*, por Voyiadjis G, https://doi.org/10.1007/978-1-4614-5589-9_39. New York, NY: Springer.
- De Souza Neto, E.A., Peric, Owen, D.R.J. (2008).** “Computational methods for plasticity: theory and applications.” *John Wiley & Sons Ltd*.
- Edelson, D.I., Baldwin, W.M. (1962)** “The effect of second phases on the mechanical properties of alloys.” *Trans. ASME* 55 230 250.
- Fressengeas, C., Molinari, A. (1985).** “Inertia and thermal effects on the localization of plastic flow.” *Acta Metall.* 33, 387–396.
- Freudenthal, A. M. (1950).** “The inelastic Behaviour of Engineering Materials and Structures.” John Wiley & Sons, New York.
- Gao, X., e Roe, C. (2010)** “A Study on the Effect of the Stress State on Ductile Fracture.” *International Journal of Damage Mechanics*. DOI: 10.1177/1056789509101917.
- Gao, X., Zhang, T., Zhou, J., Graham, S.M., Hayden, M., Roe, C. (2011).** “On stress-state dependent plasticity modeling: Significance of the hydrostatic stress, the third invariant of stress deviator and the non-associated flow rule.” *International Journal of Plasticity*, vol. 27, 2:217-231.
- Gosh, A.K., (1976).** “A criterion for ductile fracture in sheets under biaxial loading.”, *Metall. Trans. A*, 7A, pp.523-533.
- Gurson, A. L. (1975).** “Continuum Theory of Ductile Rupture by Void Nucleation and Growth: Part I—Yield Criteria and Flow Rules for Porous Ductile Media.” *ASME. J. Eng. Mater. Technol.* January 1975.
- Hancock, J.W., Machenzie, A.C. (1976),** “On the mechanisms of ductile fracture in high-strength steels subjected to multi-axial stress-states.”, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol.24, pp. 147-169.
- Hill, R., (1950).** “The Mathematical Theory of Plasticity.” Oxford Classic Texts.
- Hosseini Tehrani, P. e Ferestadeh, I. (2014).** “Studying energy absorption in tapered thick walled tubes.” *Latin American Journal of Solids and Structures*, 173-204.
- Karihaloo, B., Knauss, W., G. (2003).** “Comprehensive Structural Integrity. Vol. 2: Fundamental Theories and Mechanisms of Failure.” Cap: 2.04 - Damage Mechanics. Elsevier Science Ltd. All rights reserved.

- Kestin, J. e Bataille J. (1977).** “Irreversible thermodynamics of continua and internal variables.” Proceedings of the International Symposium on Continuum Models of Discrete Systems, University of Waterloo Press: 39-67.
- Khan, A. S., Huang, S. (1995).** “Continuum Theory of Plasticity.” Ed.: Jhon Wiley.
- Khan, A.S., Liu, H., (2012).** “A new approach for ductile fracture prediction on Al 2024- T351 alloy.” International Journal of Plasticity, vol. 35, 1–12.
- Kleinermann, J. -P., Ponthot, J. -P. (2003).** “Parameter Identification and Shape/Process optimization in Metal Forming Simulation.” Journal of Materials Processing Technology. Vol. 139. Pp. 521-526.
- Lemaitre, J., (1985).** “A Continuous Damage Mechanics Model for Ductile Fracture.” ASME. J. Eng. Mater. Technol. January 1985; 107(1): 83–89.
- Lemaitre, J., Chaboche, J.-L. (1985).** Mécanique des matériaux solides. Dunod, Paris.
- Lemonds, J., Needleman, A. (1986).** “Finite element analyses of shear localisation in rate and temperature dependent solids.” Mech. Mater. 5, 339–361.
- Machado, L. Q. (2019).** “Extraction of plasticity parameters of metallic materials from spherical indentation tests and fem modelling.” Master thesis/Mechanical Engineering, Universidade de Brasília, DF, 102p.
- Machado, L. Q., Malcher, L. (2019)** “Isotropic hardening curve characterization by the resultant profile of ball indentation tests.” Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering, 41:1-14.
- Malcher, L. (2011).** “Da Mecânica do Dano Contínuo: Uma Evolução do Modelo de Lemaitre para Redução da Dependência do Ponto de Calibração.” Tese de Doutorado. Universidade de Brasília. Brasil.
- Malcher, L.; Andrade Pires, F.M.; César de Sá, J.M.A., (2014a).** “Evaluation of shear mechanisms and influence of the calibration point on the numerical results of the GTN model.” International Journal of Plasticity.
- Malcher, L.; Andrade Pires, F.M.; César de Sá, J.M.A., (2014b).** “An extended GTN model for ductile fracture under high and low stress triaxiality.” International Journal of Plasticity.
- Malcher, L., F. A. Pires, and J. C. De Sá (2012).** “An assessment of isotropic constitutive models for ductile fracture under high and low stress triaxiality.” International Journal of Plasticity, 30:81–115.
- Malcher, L., Morales, L. L. D., Rodrigues, V. A. M., Silva, V. R. M., Araújo, L.M., Ferreira, G.V. (2020)** “Experimental program and numerical assessment for determination of stress triaxiality and J3 effects on AA6101-T4. Theoretical and Applied Fracture Mechanics.” 2020: <https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2020.102476>
- McClintock, F. A., (1968).** “A criterion for ductile fracture by growth of holes.” Journal of Applied Mechanics. v.35, p.363-371.
- McClintock, F. A., (1971).** “Plasticity aspects of fracture, in: Fracture.”, Vol. III, ed. H. Liebowitz (Academic Press, new-York, 1971), pp. 47-225.

- McClintock, F. A., Kaplan, S.M., Berg, C.A., (1966).** “Ductile fracture by hole growth in shear bands.”, *Int. J. Fracture Mech.*, Vol2, pp. 614-627.
- Molinari, A., Estrin, Y., Dudzinski, D. (1993).** “Thermomechanical instability associated with heat release during plastic flow.” *Int. J. Plasticity* 9, 317–343.
- Morales, L. L. D. (2020).** “Estudo experimental e numérico do comportamento mecânico na fratura da liga AISI 4340.” Tese de doutorado. Universidade de Brasília. Brasil.
- Murdry, F., (1985).** “Methodology and application of local criteria for prediction of ductile tearing.” *Elasto-Plastic Fracture Mechanics*, L.H. Larsson (eds.), D. Reidel Publishing Co., Brussels, pp. 1-11.
- Norris, D. M., Reaugh, J. E., Moran, B., Quiñones, D. F., (1978).** “A plastic-strain, mean-stress criterion for ductile fracture.” *J. Engng. Mat.Tech., Trans. ASME*, v.100, p.279-286.
- Oyane, M. Shima, S., Tabata, T., (1978)** “Considerations of basic equations, and their application in the forming of metal powders and porous metals.”, *J. Mech. Tech.*, Vol. 1, pp.325-342.
- Prigogine, I., (1961).** *Introduction to Thermodynamics of Irreversible Processes.* Intersciences, New York.
- Rice, J. R., Tracey, D. M., (1969).** “On the ductile enlargement of voids in triaxial stress fields.” *Journal of the Mechanics and Physics of Solids.* v.17, p.201-217.
- Rodrigues, V. A. M. (2018).** “Estudo do comportamento elastoplástico de materiais dúcteis: experimentação e modelagem.” Trabalho de Conclusão de Curso. (Graduação em Engenharia Mecânica) - Universidade de Brasília.
- Rousselier, G. (1980),** “Three-Dimensional Constitutive Relations and Ductile Fracture.” ed. Nemat-Nasser, pp. 331–355. Dourdan, North-Holland.
- Rousselier, G. (1981).** “Finite deformation constitutive relations including ductile fracture damage, in Three-Dimensional Constitutive Relations and Ductile Fracture.” pp. 331–355, North- Holland.
- Rousselier, G. (1987).** “Ductile fracture models and their potential in local approach of fracture.” *Nucl. Eng. Des.* 105: 97–111.
- Rousselier, G., Devaux, J.-C., Mottet, G., Devesa, G. (1989).** “A methodology for ductile fracture analysis based on damage mechanics: An illustration of a local approach of fracture.” *ASTM STP 995*, pp. 332–354.
- Rousselier, G. (2001a).** “Dissipation in porous metal plasticity and ductile fracture.” *Journal of the Mechanics and Physics of Solids.* Volume 49, Issue 8, Pages 1727-1746.
- Rousselier, G. (2001b).** “The Rousselier Model for Porous Metal Plasticity and Ductile Fracture.” *Handbook of Materials Behavior Models.* Vol 2.
- Saeidi, N., Ekrami, A. (2009).** “Comparison of mechanical properties of martensite/ferrite and bainite/ferrite. *Materials Science and Engineering.*” 2009: 125-129.

- Sarraf, I. S. e Green, D., E. (2018).** “Simulation of electrohydraulic free forming of DP600 sheets using a modified Rousselier damage model.” *Journal of Physics. Conf. Series* 1063 (2018) 012111. doi :10.1088/1742-6596/1063/1/012111.
- Simo, J.C., & Hughes, T.J.R. (1998).** “Computational Inelasticity.” New York: Springer-Verlag.
- Souza, T. R. A., (2020).** “Análise numérica dos modelos de Lemaitre e Gurson em corpos de prova entalhados.” Dissertação de mestrado, Publicação ENM.DM/2020, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Brasília, DF, 61p.
- Spencer, A. J. M. (2004).** “Continuum Mechanics.” Dover Publications; Dover Ed edition.
- Tai, W., Yang, B. X., (1987).** “A new damage mechanics criterion for ductile fracture..” *Frac. Mech.*, v.27, p.371-378.
- Tvergaard, V., Needleman, A. (1984).** “Analysis of cup–cone fracture in a round tensile bar.” *Acta Metall.* 32, 157–169.
- Zavaliangos, A., Anand, L. (1992).** “Thermal aspects of shear localization in microporous viscoplastic solids.” *Int. J. Numer. Methods Eng.* 33, 595–634.

