Universidade de Brasília

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Sobre o Método de Mahler para Transcendência

por

Pedro Gabriel Ferreira Jordão

Brasília
2021

Pedro Gabriel Ferreira Jordão

Sobre o Método de Mahler para Transcendência

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade de Brasília, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.
Orientador: Prof. Dr. Diego Marques Ferreira.

Brasília
2021

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Sobre o Método de Mahler para transcendência

por

Pedro Gabriel Ferreira Jordão*

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos para obtenção do grau de

MESTRE EM MATEMÁTICA

Brasília, 18 de maio de 2021.

Comissão Examinadora:

____
Prof. Dr. Diego Marques Ferreira - MAT/UnB (Orientador)

____
Prof. Dr. Hemar Teixeira Godinho – MAT/UnB (Membro)

Ana Paula de A. Chaves
____
Profa. Dra. Ana Paula de Araújo Chaves – UFG (Membro)

* O autor foi bolsista da CAPES e do CNPq durante a elaboração desta dissertação.

Ficha catalográfica elaborada automaticamente,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

JJ82s

Jordão, Pedro Gabriel Ferreira
Sobre o Método de Mahler para Transcendência / Pedro Gabriel Ferreira Jordão; orientador Diego Marques Ferreira. -- Brasília, 2021.
72 p.

Dissertação (Mestrado - Mestrado em Matemática) -- Universidade de Brasília, 2021.

1. Método de Mahler. 2. Números Transcendentes. 3. Funções Transcendentes. 4. Equações Funcionais. I. Ferreira, Diego Marques , orient. II. Título.

.

Dedico este trabalho aos meus familiares, minha esposa, meus amigos e professores que incessantemente me apoiaram e incentivaram em minha jornada como estudante, me auxiliando sempre a ser uma pessoa a cada dia melhor.

“Na vida, podemos enxergar três verdades máximas: Deus, a morte e a matemática.”
Luciano Pontes

Agradecimentos

Gostaria de agradecer primeiramente a Deus, pela vida, saúde e provisão em tudo o que precisei para que eu pudesse aproveitar a oportunidade de estudar durante todos esses anos no meio acadêmico.

Aos meus pais, Ándrea e Marcio, por toda a coragem e o esforço que já fizeram e ainda fazem para que eu possa realizar meus sonhos. Aos meus irmãos Bruna e Matheus, pela parceria e os incentivos durante toda a minha jornada de estudos.

Um agradecimento especial para minha esposa, Nathália, que cuida, escuta e me incentiva em tudo o que eu faço. Muito obrigado por tudo que fez e faz por mim, e por tudo que você está disposta a aprender comigo e junto comigo sobre a vida.

Mais um agradecimento especial para meu orientador, o professor Diego Marques que me orientou e pacientemente me ajudou muito neste trabalho com toda a sua experiência e habilidade no uso de técnicas da teoria. Também quero agradecê-lo pela disposição de continuar trabalhando comigo nas minhas próximas fases da carreira.

Ao professor Fábio Menezes de Souza Lima, pelos anos em que foi meu orientador. Obrigado por me auxiliar nas minhas dificuldades mais básicas e me incentivar a seguir na área.

Aos amigos e colegas de curso que nesses anos de universidade, me ajudaram a desbravar a matemática e os inúmeros "é fácil ver" apresentados nas literaturas. Eu não sou capaz de citar todos os nomes sem cometer a injustiça de deixar de mencionar algum, eles sabem da minha capacidade de memória reduzida.

Quero também agradecer a professora Luciana Ávila Rodrigues por todos os conselhos, advertências e atividades propostas enquanto tutora do Programa de Educação Tutorial - PETMAT. Agradeço imensamente a oportunidade de participar desse programa, sem dúvidas ele faz parte do despertar do meu interesse em matemática pura, pois foi no programa que tive minha primeira oportunidade de pesquisar. As atividades realizadas no programa me fizeram ser um professor muito melhor do que eu seria, assim como faz parte da minha formação em matemática e como pessoa.

Ao professor Emerson Ferreira de Melo, por me orientar mesmo que por pouco tempo, mas ainda assim me mostrar a existência dos números transcendentes e me fazer se interessar por essa área da matemática.

Também agradecer imensamente aos professores Ana Paula de Araújo Chaves e Hemar Teixeira Godinho, que participaram da banca, pelas inúmeras sugestões para a melhoria deste trabalho.

Ao CNPq, pelo apoio financeiro concedido durante o primeiro ano de estudos no mestrado, e a CAPES pelo apoio financeiro concedido durante o segundo ano e o término deste trabalho.

Resumo

Seja $\mathfrak{a} = (a_n)_{n\geq 0}$ uma sequência de inteiros positivos. Neste trabalho, estudamos o comportamento aritmético de valores da função $f_{\mathfrak{a}}(z) = \sum_{n\geq 0} z^{a_n}$. Primeiro, no caso de uma sequência superexponencial $\mathfrak{a}$, mostramos (em particular) que $f_{\mathfrak{a}}(\alpha)$ é um número transcendente, para todo número algébrico não nulo $\alpha \in B(0,1)$. Depois disso, o objetivo principal é estudar o caso em que $\mathfrak{a}$ é uma sequência exponencial. Para isso, apresentamos e usamos o chamado Método de Mahler (que é particularmente útil para funções que satisfazem alguma equação funcional) para obter resultados de transcendência sobre valores de funções em argumentos algébricos.

Palavras-chave: Método de Mahler. Números Transcendentes. Funções Transcendentes. Equações Funcionais.

Abstract

Let $\mathfrak{a} = (a_n)_{n\geq 0}$ be a sequence of positive integers. In this work, we study the arithmetic behavior of values of the function $f_{\mathfrak{a}}(z) = \sum_{n\geq 0} z^{a_n}$. First, in the case of a super-exponential sequence $\mathfrak{a}$, we show (in particular) that $f_{\mathfrak{a}}(\alpha)$ is a transcendental number, for all nonzero algebraic number $\alpha \in B(0,1)$. After that, the main focus is to study the case in which $\mathfrak{a}$ is an exponencial sequence. For that, we present and use the called Mahler's method (which is particularly useful for functions satisfying some functional equation) to derive transcendental results about values of functions at algebraic arguments.
Keywords: Mahler's Method. Transcendental numbers. Transcendental Functions. Functional Equations.

Conteúdo

Introdução

Esta dissertação é um estudo sobre números transcendentes. Estes números sâo assim denominados, pois segundo L. Euler (1707-1783), tais números "transcendem" as operações algébricas envolvendo números racionais. Mas o próprio Euler não conseguiu mostrar que tais números existiam. Os primeiros exemplos de números transcendentes foram dados somente em 1844 por J. Liouville (1809-1882), estes receberam o nome de *números de Liouville.*

Em especial, neste trabalho apresentaremos uma ferramenta que nos fornece a transcendência de números dados por valores de funções aplicadas em pontos algébricos, onde estas funções pertencem a uma certa classe. Tal ferramenta é conhecida como *Método de Mahler*. Este método surgiu quando K. Mahler (1903-1988) investigava a irracionalidade de valores de tais funções aplicadas em pontos racionais.

No Capítulo 1 são apresentadas as definições de números algébricos e transcendentes. Na sequência, mostramos a existência de números transcendentes. Tal prova foi primeiro feita por Liouville, mas apresentaremos uma demonstração feita por G. Cantor (1845-1918), que utilizou argumentos de enumerabilidade. Após estabelecer a existência, introduzimos os primeiros exemplos de números transcendentes. Este capítulo foi em grande parte escrito com base em [8].

Já mirando na apresentação do tipo de problema que será abordado neste trabalho, na última seção do Capítulo 1, definimos *Séries Formais* e também tratamos os conceitos da *Teoria Básica de Alturas*, que utilizaremos no Método de Mahler para achar um limitante inferior para uma função auxiliar que será criada. Ainda nesse capítulo, apresentamos a *Desigualdade de Liouville* também com o objetivo de trabalhar nesse mesmo limitante inferior.

No Capítulo 2, apresentamos nosso objetivo principal, que será estudar o comportamento aritmético de valores de funções em pontos algébricos. Estamos interessados em saber se tais valores são números racionais, algébricos, de Liouville ou transcendentes. Tais funções são séries que têm uma sequência de números inteiros como expoentes.

Ainda no Capítulo 2, apresentamos o Método de Mahler que será aplicado na resolução dos problemas mencionados, para um tipo de sequências. Explicamos seu processo e também apresentamos o primeiro uso do método, denominado *Teorema de Mahler*. Também apresentamos o uso do Método de Mahler para alguns outros tipos de equações, generalizamos o Teorema de Mahler para funções que satisfazem um tipo destas. Apresentamos outras consequências do uso do método, a *série de Thue-Morse* e a *série dos recíprocos dos números de Fibonacci*.

Nosso capítulo final busca apresentar alguns problemas envolvendo outros tipos de sequências, que não abordaremos neste trabalho, assim como citar outras aplicações do Método de Mahler. Uma destas implicações é a transcendência de valores de *funções multivaloradas*. Outra implicação é a independência algébrica entre funções que satisfazem uma determinada equação linear, e também estabelece independência algébrica entre certas funções e suas derivadas.

Seja K um corpo arbitrário de característica zero. Seja também z uma incógnita. Consideramos as seguintes notações:

- $K[z]$ é o anel de todos os polinômios em z com coeficientes em K.
- $K(z)$ é o corpo quociente de $K[z]$, seus elementos são as funções racionais de z com coeficientes em K.
- $K[[z-c]]$, onde $c \in K$, é o conjunto de todas as séries formais
$$f = \sum_{h=n}^{\infty} f_h (z-c)^h$$
com coeficientes f_h em K, onde n é algum inteiro que depende de f.
- $K((z-c))$ é o conjunto das séries convergentes para $0 < |z-c| < \rho$ em K, com $\rho \in \mathbb{R}_+^*$.

Por fim, para melhor aproveitamento do texto, recomenda-se que o leitor tenha domínio de fundamentos de aritmética, estruturas algébricas, teoria dos conjuntos, álgebra linear, análise real e complexa.

Capítulo 1

Números Algébricos e Transcendentes

1.1 Uma breve história dos números transcendentes

Um número complexo é dito *transcendente* se ele não é raiz de nenhum polinômio não nulo, com coeficientes inteiros. O termo transcendente, segundo Euler, significa que tais números "transcendem" o poder das operações algébricas.

A existência de números transcendentes foi demonstrada em 1844, por Liouville, que também conseguiu exibir o primeiro exemplo de número transcendente, após estabelecer uma simples propriedade que todo *número algébrico* (número que é raiz de algum polinômio não nulo com coeficientes inteiros) satisfaz.

J. Lambert (1728-1777), em 1768, conjecturou que os números π e e são transcendentes, a comprovaçâo desses fatos só ocorreram em 1873, quando C. Hermite (1822-1901) demonstrou a transcendência de e, e em 1882, quando F. Lindemann (1852-1939) provou a transcendência de π. Com este último, um problema geométrico que estava em aberto desde os tempos da matemática dos antigos gregos, foi resolvido: *é impossível construir um quadrado com a mesma área de um círculo dado, utilizando somente régua e compasso*[1]. Em 1884, Lindemann conseguiu generalizar o resultado de Hermite mostrando que e^{α} *é transcendente para todo* α *algébrico não nulo.* Como consequência desta generalização, os números $\cos 1$, $e^{\sqrt{3}}$, e $\log 2$ são números transcendentes. K. Weierstrass (1815-1897), um ano depois, conseguiu melhorar os resultados de Lindemann e Hermite, ele mostrou que *se* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ *são números linearmente independentes sobre* $\mathbb{Q}$*, então os*

[1]Este é o famoso problema da Quadratura do Círculo.

números $e^{\alpha_1}, \ldots, e^{\alpha_n}$ *são algebricamente independentes.* Como consequência, temos que os números $e + e^{\sqrt{2}}$ e $e + e^{\sqrt{3}}$ são transcendentes .

Em 1874, Georg Cantor não só mostrou a existência de números transcendentes, mas mostrou que o conjunto dos números transcendentes é um conjunto não enumerável, enquanto que o conjunto dos números algébricos é enumerável. Com isso, foi possível concluir que, essencialmente, todo número é transcendente. Entretanto, estes números são caracterizados somente pelo que eles não são, existindo assim uma grande dificuldade em estabelecer a transcendência de um número em particular.

No Congresso Internacional de Matemática, realizado em Paris no ano de 1900, D. Hilbert (1862-1943) propôs uma lista com 23 problemas que ele considerava interessantes para serem resolvidos no século XX. Usualmente, referido como 7º problema desta lista perguntava se a^b é transcendente, para a um número algébrico diferente de 0 e 1 e b um número algébrico irracional. Em 1934, dois matemáticos de forma independente resolveram esse problema, A. Gelfond (1906-1968) e T. Schneider (1911-1988). Este resultado ficou conhecido como o Teorema de Gelfond-Schneider, que estabelece *se* α *é algébrico, diferente de 0 e 1, e* β *um outro número algébrico não racional, então o número* α^β *é transcendente.* Como consequência deste resultado, os números $\sqrt{3}^{\sqrt{3}}$ e $2^{\sqrt{5}}$ são transcendentes. Como $(-1)^i = e^\pi$ no ramo principal do logaritmo, temos também que o número e^π é transcendente. Este teorema também nos diz a respeito da natureza aritmética de potências de números algébricos por números algébricos. Entretanto, mesmo sem a existência de um resultado geral para potências de números transcendentes por números transcendentes, estas podem ser tanto algébrica quanto transcendente, por exemplo, . E isso não deve ser possível, pois os números $\log 2$ e e são transcendentes, mas o número $e^{\log 2} = 2$ é algébrico.

Numa formulação equivalente, o Teorema de Gelfond-Schneider mostra que se α_1, α_2, β_1 e β_2 são números algébricos, com $\log \alpha_1$, $\log \alpha_2$ linearmente independentes sobre $\mathbb{Q}$, então $\beta_1 \log \alpha_1 + \beta_2 \log \alpha_2 \neq 0$. Em 1966, A. Baker (1939-2018) mostrou que *se* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ *são números algébricos não nulos tais que* $\log \alpha_1, \ldots, \log \alpha_n$ *são linearmente independentes sobre* $\mathbb{Q}$*, então* $1, \log \alpha_1, \ldots, \log \alpha_n$ *são linearmente independentes sobre o corpo de todos os números algébricos.* Generalizando assim o Teorema de Gelfond-Schneider para um número arbitrário de logaritmos. Como consequência, obtemos a transcendência dos números $\log 2 + \log 3$, $\log 5 + \sqrt{5} \log 7$ e $\pi + \log 2$.

Até os dias de hoje, mesmo quase 140 anos depois de estabelecidas as transcendências de e e π, é desconhecido se os números $\pi \cdot e$ e $\pi + e$ são números transcendentes. Sabe-se que pelo menos um deles é transcendente, e imagina-se que os dois são, pois estes números são raízes do polinômio $x^2 - (\pi + e)x + \pi \cdot e$ e o corpo dos números algébricos é algebricamente fechado.

O principal problema em aberto hoje na Teoria dos Números Transcendentes, é conhecido como a *Conjectura de Schanuel.* Seu enunciado diz que *se $x_1, \ldots, x_n$ são números complexos linearmente independentes sobre $\mathbb{Q}$, então existem pelo menos n números algebricamente independentes, dentre $x_1, \ldots, x_n, e^{x_1}, \ldots, e^{x_n}$.* Esta conjectura implica na independência algébrica dos números e e π, e assim na transcendência dos números $\pi + e$, $\pi \cdot e$, e^e, π^π, π^e e $\log \pi$ e implica também em generenalizações para os Teoremas de Lindemann, Weierstrass, Gelfond-Schneider e Baker. Ou seja, esta conjectura, se correta, promete dar solução para todos os principais problemas na Teoria dos Números Transcendentes hoje em aberto.

Para um aparato histórico mais completo, recomendamos a leitura de [8, 9].

1.2 Definições iniciais

Nesta seção serão definidos números algébricos e números transcendentes. Na sequência, vamos apresentar algumas propriedades envolvendo os números algébricos, assim como nos familiarizar com a álgebra destes números. Nosso problema inicial será investigar quando um determinado número complexo é algébrico ou transcendente.

Definição 1.1. *Um número $\xi \in \mathbb{C}$ é dito* algébrico *se existe um polinômio $P(x)$, não nulo, com coeficientes inteiros tal que $P(\xi) = 0$. Um número que não é algébrico é dito* transcendente. *Denotamos por $\overline{\mathbb{Q}}$ o conjunto de todos os números algébricos.*

Exemplo 1.1. *Todo número racional é algébrico ($\mathbb{Q} \subseteq \overline{\mathbb{Q}}$). De fato, para $p, q \neq 0$ números inteiros, temos que o número racional $\alpha = p/q$ satisfaz a equação algébrica $qx - p = 0$.*

Exemplo 1.2. *Todo número $\beta \in \mathbb{Q}(i) = \{a + bi : a, b \in \mathbb{Q}\} \subseteq \overline{\mathbb{Q}}$ é algébrico. Observe que o número complexo $\beta = (p + qi)/r$ satisfaz a equação algébrica $r^2x^2 - 2prx + p^2 + q^2 = 0$.*

Proposição 1.1. *O conjunto* $\overline{\mathbb{Q}}$ *é denso em* $\mathbb{R}$ *e em* $\mathbb{C}$.

Demonstração. Como $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{Q}(i)$ são densos em $\mathbb{R}$ e em $\mathbb{C}$, respectivamente, o resultado segue dos exemplos anteriores. $\square$

Observação 1. $\overline{\mathbb{Q}}$ é um corpo. Em particular se $\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{Q}}$, então $\alpha + \beta \in \overline{\mathbb{Q}}$ e $\alpha\beta \in \overline{\mathbb{Q}}$.

Também podemos notar que, se ξ é transcendente e $\alpha \neq 0$ é algébrico, então $\alpha\xi$ também é transcendente. Assim, se existir pelo menos um número transcendente, então o conjunto de todos os números transcendentes deve ser denso em $\mathbb{R}$ e em $\mathbb{C}$.

Definição 1.2. *Considere* $K = \mathbb{Q}(\alpha)$. *O* polinômio minimal *de* α *sobre* K, *é definido como o polinômio mônico (isto é, com coeficiente líder igual a 1)* $P_\alpha(x)$ *de menor grau, tal que* $P_\alpha(\alpha) = 0$. *Se o grau de* P_α *é igual a* n, *denotado por* $\partial(P_\alpha) = n$, *dizemos que* α *é um algébrico de grau* n.

Definição 1.3. *Uma* equação funcional *é toda equação em que as variáveis relacionadas são funções.*

Observação 2. Dada uma equação funcional, em geral queremos determinar todas as funções que satisfazem essa equação, caso existam.

Exemplo 1.3. *A equação funcional a seguir, que é comumente chamada de Equação Funcional Aditiva de Cauchy, é dada por*

$$f(x + y) = f(x) + f(y),$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

Definição 1.4. *Uma função* $y = f(x)$ *é dita* algébrica *se satisfaz uma equação do tipo*

$$P_0(x)y^n + P_1(x)y^{n-1} + \ldots + P_n(x) = 0,$$

onde $P_0(x), \ldots, P_n(x) \in \mathbb{Z}[x]$ *são polinômios não todos nulos. Uma função que não é algébrica é chamada de* transcendente.

Existência de números transcendentes

A prova da existência de números transcendentes foi apresentada por volta de 100 anos após a apresentação do problema, por Euler. Aqui apresentaremos uma demonstração da existência de números transcendentes devida a Cantor feita em 1874, para mais detalhes ver [8].

Cantor mostrou que existem números transcendentes provando que $\overline{\mathbb{Q}}$ é um conjunto enumerável, e como $\overline{\mathbb{Q}} \cup \overline{\mathbb{Q}}^c = \mathbb{C}$, então $\overline{\mathbb{Q}}^c$ é não enumerável, pois $\mathbb{C}$ é não enumerável.

Teorema 1.1. *(Cantor) O conjunto $\overline{\mathbb{Q}}$ é enumerável.*

Demonstração. Inicialmente, dado um polinômio $P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$, denotamos por $\mathcal{R}_P$ o conjunto das raízes de P, lembramos que esse conjunto tem no máximo n elementos distintos. Afirmamos que para todo $n \in \mathbb{N}$, existe apenas uma quantidade enumerável de polinômios de grau n em $\mathbb{Q}[x]$. De fato, considerando $\mathbb{X}_n = \{Q \in \mathbb{Q}[x] : \partial(Q) = n\}$ e denotando $\mathbb{Q}_*^{n+1} = \mathbb{Q} \times \cdots \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}^*$ possuindo n cópias de $\mathbb{Q}$ e uma cópia de $\mathbb{Q}^*$, tome $\psi : \mathbb{Q}_*^{n+1} \longrightarrow \mathbb{X}_n$ dada por

$$\psi(a_0, a_1, \ldots, a_n) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n.$$

Note que ψ é uma bijeção. Assim, como cada $\mathbb{Q}$ é enumerável, temos que $\mathbb{Q}_*^{n+1}$ é enumerável, e portanto, $\mathbb{X}_n$ é enumerável.

Agora, definimos $\mathcal{A}_n = \cup_{\partial(P)=n} \mathcal{R}_P$. Pelos comentários anteriores e pelo fato de a união enumerável de conjuntos finitos ser enumerável, temos $\mathcal{A}_n$ enumerável. Agora note que

$$\overline{\mathbb{Q}} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_n.$$

Portanto, como a união enumerável de conjuntos enumeráveis é enumerável, $\overline{\mathbb{Q}}$ é enumerável.

□

Observação 3. Não somente $\overline{\mathbb{Q}}$ é enumerável, mas todos os seus subconjuntos também são enumeráveis. Em particular, o conjunto de todos os números algébricos reais (ou complexos), no intervalo $(0, 1)$ (ou com $|z| < 1$), é enumerável.

1.3 Primeiros exemplos de números transcendentes

Liouville primeiro mostrou em 1844 o seguinte teorema, que de certa forma, caracteriza como "ruim" a aproximação de números irracionais algébricos por números racionais. Assim ele observou uma característica importante dos números algébricos: "números algébricos não são "bem aproximados" por números racionais".

Teorema 1.2. *Seja ξ um número irracional raiz real de um polinômio irredutível $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$, de grau n. Então existe uma constante positiva $c(\xi)$ tal que*

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{c(\xi)}{q^n}, \tag{1.1}$$

para todo $p/q \in \mathbb{Q}$. Uma escolha conveniente para essa constante é

$$c(\xi) := \frac{1}{1 + \max\limits_{|t-\xi|\leq 1} |P'(t)|}. \tag{1.2}$$

Demonstração. Inicialmente, suponhamos $|\xi - p/q| \leq 1$. Observe que $P(p/q) \neq 0$, pois se $P(p/q) = 0$, então teríamos $P(x) = (x - p/q)Q(x)$, mas $P(x)$ é irredutível sobre $\mathbb{Q}$, pois é irredutível sobre $\mathbb{Z}$ (*Lema de Gauss*). Como $\partial(P) = n$, então $q^n P(p/q) \in \mathbb{Z}^*$, e assim $|q^n P(p/q)| \geq 1$. Pelo Teorema do Valor Médio, como $P(x)$ é contínuo por ser um polinômio, existe $t \in \mathbb{R}$, entre ξ e p/q, tal que

$$\left|P(\xi) - P\left(\frac{p}{q}\right)\right| = \left|\xi - \frac{p}{q}\right| \cdot |P'(t)|,$$

mas como $P(\xi) = 0$, obtemos

$$\left|P\left(\frac{p}{q}\right)\right| = \left|\xi - \frac{p}{q}\right| \cdot |P'(t)|.$$

Multiplicando ambos os lados por q^n,

$$1 \leq q^n \left|P\left(\frac{p}{q}\right)\right| = q^n |P'(t)| \left|\xi - \frac{p}{q}\right|,$$

e então

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{1}{q^n |P'(t)|}. \tag{1.3}$$

Agora, observe que como t está entre ξ e p/q, então $|t - \xi| \leq |\xi - p/q| \leq 1$, e também que $|P'(t)| \leq 1 + |P'(t)| \leq 1 + \max\limits_{|t-\xi|\leq 1} |P'(t)|$. Assim em (1.3), obtemos

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{1}{q^n(1 + \max_{|t-\xi|\leq 1} |P'(t)|)} = \frac{c(\xi)}{q^n},$$

onde escrevemos $c(\xi) := 1/(1 + \max\limits_{|t-\xi|\leq 1} |P'(t)|)$.

Observe que se $|\xi - p/q| > 1$, então $|\xi - p/q| > 1 \geq c(\xi)/q^n$. Concluindo a prova do teorema. $\square$

Assim, Liouville construiu uma classe de números que são "muito bem" aproximados por racionais, chamados *números de Liouville*, definidos como:

Definição 1.5. *Um número real α é dito* número de Liouville *se existir uma sequência de infinitos racionais $(p_k/q_k)_{k\geq 1}$, com $q_k > 1$, tal que*

$$\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| < \frac{1}{q_k^k}, \tag{1.4}$$

para todo $k \geq 1$.

Proposição 1.2. *A sequência $(q_k)_{k\geq 1}$ é ilimitada.*

Demonstração. Suponha, por contradição, que $(q_k)_{k\geq 1}$ é limitada, assim existe $C > 0$, tal que $q_k \leq C$, para todo $k \geq 1$. Pela definição, como $|p_k/q_k - \alpha| < 1$, multiplicando por q_k obtemos

$$q_k \left|\frac{p_k}{q_k} - \alpha\right| < q_k,$$

ou seja,

$$|p_k - q_k\alpha| < q_k.$$

Pela desigualdade triangular,

$$|p_k| - |q_k\alpha| < |p_k - q_k\alpha| < q_k.$$

Assim,

$$|p_k| < (|\alpha| + 1)q_k < (|\alpha| + 1)C,$$

limitando assim a sequência $(p_k)_{k\geq 1}$. Mas isso implica que a sequência $(p_k/q_k)_{k\geq 1}$ é limitada, uma contradição. Portanto, $(q_k)_{k\geq 1}$ é ilimitada. $\square$

Proposição 1.3. *Todo número de Liouville é irracional.*

Demonstração. Suponha, por contradição, que $p/q \in \mathbb{Q}$ é um número de Liouville. Pela definição, existem infinitos p_k/q_k, diferentes de p/q, tais que

$$\frac{1}{q_k^k} > \left|\frac{p}{q} - \frac{p_k}{q_k}\right| = \left|\frac{pq_k - qp_k}{qq_k}\right| \geq \frac{1}{|q|q_k},$$

pois $q_k - qp_k \in \mathbb{Z}^*$.

Assim, $q_k^{k-1} < |q|$, o que limita a sequência $(q_k)_{k\geq 1}$, uma contradição. Portanto, não existe um número racional que é número de Liouville. $\square$

Teorema 1.3. *Todo número de Liouville é transcendente.*

Demonstração. Suponha, por contradição, que $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$, de grau n, seja um número de Liouville. Vimos que $\alpha \notin \mathbb{Q}$, assim devemos ter $n > 1$. A desigualdade do Teorema 1.2 é válida para todo número racional, em particular, para os p_k/q_k's da definição de número de Liouville. Combinando as desigualdades (1.1) e (1.4), obtemos

$$\frac{c(\alpha)}{q_k^n} < \left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| < \frac{1}{q_k^k},$$

ou seja, $q_k^{k-n} < c(\alpha)^{-1}$, para todo $k \geq 1$, limitando a sequência $(q_k)_{k\geq 1}$, uma contradição. Portanto, α não é algébrico. $\square$

Daí Liouville construiu o primeiro exemplo de número transcendente: o número real

$$\sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n!} = 0,110001000000000000000001000 0\ldots$$

conhecido como *constante de Liouville.*

Uma outra caracterização dos números de Liouville, é dada na proposição a seguir:

Proposição 1.4. *Seja ξ um número real. Se existir uma sequência $(\omega_k)_{k\geq 1}$ de números reais, com $\lim_{k\to\infty} \omega_k = +\infty$, e uma sequência $(p_k/q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ com $q_k \geq 2$ de números racionais satisfazendo,*

$$0 < \left|\xi - \frac{p_k}{q_k}\right| \leq \frac{1}{q_k^{\omega_k}}, \tag{1.5}$$

então ξ é número de Liouville.

Demonstração. Como $\lim_{k\to\infty} \omega_k = +\infty$, dado $n \in \mathbb{N}$, existe $\omega_{k_n} > n$. Escreva $a_n = p_{k_n}$ e $b_n = q_{k_n}$. Assim, por (1.5), temos

$$\left|\xi - \frac{p_{k_n}}{q_{k_n}}\right| \leq \frac{1}{q_{k_n}^{\omega_{k_n}}},$$

para $n = 1, 2, \ldots$, então

$$\left|\xi - \frac{a_n}{b_n}\right| \leq \frac{1}{b_n^n}.$$

O que mostra que ξ é número de Liouville. $\square$

Exemplo 1.4. *Considere*

$$\xi = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n!}.$$

Para mostrar que esse é um número de Liouville, considere

$$p_k = 2^{k!} \sum_{n=1}^{k} 2^{-n!} \quad e \quad q_k = 2^{k!},$$

para $k = 1, 2, 3, \ldots$. *Então*

$$\begin{aligned} 0 < \left| \xi - \frac{p_k}{q_k} \right| &= \sum_{n=k+1}^{\infty} 2^{-n!} \\ &\leq 2^{-(k+1)!}(1 + 2^{-1} + 2^{-2} + \cdots) \\ &\leq 2 \cdot 2^{-(k+1)!} \\ &= 2 \cdot 2^{-(k+1)k!} \end{aligned}$$

e portanto,

$$0 < \left| \xi - \frac{p_k}{q_k} \right| < \frac{2}{q_k^{(k+1)}}.$$

Assim ξ *é um número de Liouville, e é transcendente.*

Generalizando a construção do exemplo anterior, podemos obter um conjunto não enumerável de números de Liouville. Também podemos mostrar que o conjunto desses números tem medida nula em $\mathbb{R}$, veja [9, p. 85].

Utilizando o conceito de Frações Contínuas, em 1929 O. Perron (1880-1975) mostrou que a constante de Euler, o número e, não é um número de Liouville, entretanto é um número transcendente [17]. Usando considerações mais técnicas, Mahler em 1932 mostrou que π não é um número de Liouville.

Teorema de Roth

Desde a época de Liouville, o Teorema 1.2 foi melhorado sucessivamente por A. Thue (1863-1922) em 1908, C. Siegel (1896-1981) em 1921, F. Dyson (1923-2020) em 1947 e K. Roth (1925-2015) em 1955. Roth exibiu a melhor estimativa possível:

Teorema 1.4. *Se* ξ *é um número irracional algébrico, então dado* $\epsilon > 0$, *existe* $c = c(\xi, \epsilon) > 0$ *tal que*

$$\left| \xi - \frac{p}{q} \right| > \frac{c}{q^{2+\epsilon}},$$

para todo $p/q \in \mathbb{Q}$.

Desse Teorema segue novamente uma condição suficiente, mas não necessária, para a transcendência.

Teorema 1.5. *Sejam $\xi, \tau \in \mathbb{R}$, com $\tau > 2$. Se existir uma sequência $(p_k/q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de números racionais distintos satisfazendo*

$$0 < \left|\xi - \frac{p_k}{q_k}\right| \leq \frac{1}{q_k^{\tau}},$$

para $k = 1, 2, \ldots$. Então, ξ é transcendente.

As demonstrações dos Teoremas 1.4 e 1.5 podem ser encontradas em [12].

Como uma consequência deste último teorema, a constante de Champernowne

$$\mathcal{M} := 0,123456789101112\ldots$$

é transcendente e não é um número de Liouville, veja [18].

O conjunto dos números que satisfazem o Teorema 1.5 é não enumerável, pois contém um subconjunto não enumerável do conjunto dos números de Liouville.

Tais aproximações são parte da área denominada *Aproximações Diofantinas* que estuda a aproximação de números reais por racionais. A gênese das Aproximações Diofantinas se deu com Teorema de Dirichlet, em 1842, devido a J. Dirichlet (1805-1859).

Nas próximas duas seções desejamos apresentar algumas definições e alguns resultados, que serão de extrema importância para realizar estimativas em todas as demonstrações presentes no Capítulo 2 deste trabalho.

1.4 Séries

Nesta seção, lembramos definições básicas sobre expansão em séries de potências de funções.

Definição 1.6. *Uma* série formal *ou* expansão em série de Laurent, *para uma função complexa $f(z)$ em torno de um ponto $c \in \mathbb{C}$, é dada por*

$$f(z) = \sum_{h=n}^{\infty} f_h(z-c)^h,$$

onde os coeficientes $f_h \neq 0$, e esta série converge no domínio

$$U_\rho(c) : 0 < |z - c| < \rho,$$

onde $\rho \in \mathbb{R}_+$ e $n \in \mathbb{Z}$.

Observação 4. Se $n < 0$, diz-se que $f(z)$ tem um pólo em $z = c$, e se $n \geq 0$, então $f(z)$ é regular também no centro de $U_\rho(c)$. Nesse último caso, a série de Laurent será a *série de Taylor* usual para $f(z)$ no disco $|z - c| < \rho$. Quando $\rho = \infty$, a Série de Laurent converge em todo o plano complexo, exceto possivelmente em $z = c$. Por outro lado, se ρ é finito, então $f(z)$ pode ser contínua fora do domínio $U_\rho(c)$.

Seguindo as notações acima, considere $c = 0$ e $K \subseteq \mathbb{C}$ um corpo, e seja

$$f = \sum_{h=n}^{\infty} f_h z^h$$

um elemento de $K[[z]]$. Essa série formal converge para uma função analítica $f(z)$ em um domínio

$$U_\rho : 0 < |z| < \rho,$$

onde $\rho > 0$. A função $f(z)$ tem no máximo um pólo em $z = 0$ e é regular em U_ρ.

Lema 1.1. *O conjunto $K[[z - c]]$ com as operações*

$$(f + g)(z) := \sum_{h=-\infty}^{\infty} (f_h + g_h)(z - c)^h \quad e$$

$$(f \cdot g)(z) := \sum_{h=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k g_{h-k} \right) (z - c)^h,$$

onde $f, g \in K[[z - c]]$, é um corpo.

No Lema anterior, se considerarmos a função $H = f \cdot g$, os coeficientes $H_h = \sum f_k g_{h-k}$ recebem o nome de *produto de Cauchy* dos coeficientes das funções f e g.

Agora apresentaremos um teorema, devido a Weierstrass, que fornece um critério de convergência para séries.

Teorema 1.6 (Teste M de Weierstrass)**.** *Sejam $\sum_{n \geq 1} f_n$ uma série de funções definidas em um conjunto $A \subseteq \mathbb{C}$, e uma sequência numérica de majorantes $(M_n)_{n \geq 1}$, tais que*

$|f_n(x)| \leq M_n$*, para todo* $n \geq 1$ *e para todo* $x \in A$*, e com*

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty.$$

Então, a série

$$\sum_{n \geq 1} f_n$$

converge uniformemente em A*.*

A demonstração deste resultado pode ser encontrado em [16, p. 301].

1.5 Teoria de alturas e a Desigualdade de Liouville

Inicialmente, lembramos que os *conjugados algébricos* de α, que serão denotados por $\alpha^{(0)} = \alpha, \alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(n-1)}$, também são raízes de $P_\alpha(x)$ e portanto também são números algébricos.

A ideia de altura de um número algébrico, foi desenvolvida por A. Weil (1906-1998) na década de 1920. A medida de altura de um número algébrico, em geral, é o valor da altura do polinômio minimal de α. Entretanto, Weil desenvolveu uma técnica para estimar esse valor utilizando apenas o grau de α, logaritmos e os módulos dos conjugados de α.

Definição 1.7. *A* altura logarítmica de Weil *(ou simplesmente,* altura de Weil*) de um número algébrico* α *de grau* n*, é definida por*

$$h(\alpha) = \frac{1}{n}\left(\log|a| + \sum_{i=0}^{n-1} \log \max\{1, |\alpha^{(i)}|\}\right),$$

onde a *é o coeficiente líder de* P_α*, e os* $\alpha^{(i)}$*'s são os conjugados algébricos de* α*.*

Lema 1.2. *Sejam* $\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{Q}}$*, a altura de Weil satisfaz:*

$$\begin{aligned} h(\alpha+\beta) &\leq h(\alpha) + h(\beta) + \log 2 \\ h(\alpha\beta) &\leq h(\alpha) + h(\beta) \\ h(\alpha^n) &= nh(\alpha),\ n \in \mathbb{N} \\ h(1/\alpha) &= h(\alpha),\ \alpha \neq 0. \end{aligned}$$

A demonstração do último lema pode ser encontrada em [14, p. 18].

Em geral, se $P(X_1,\dots,X_n) \in \mathbb{Z}[X_1,\dots,X_n]$ e $\alpha_1,\dots,\alpha_n \in \overline{\mathbb{Q}}$, temos

$$h(P(\alpha_1,\dots,\alpha_n)) \leq \log L(P) + \sum_{i=1}^{n} (\partial_{X_i} P) h(\alpha_i), \tag{1.6}$$

onde $\partial_{X_i} P$ denota o grau de P na variável X_i. Aqui, $L(P)$ denota o *comprimento de* P, que é a soma dos valores absolutos dos coeficientes do polinômio P. A demonstração de tal fato, pode ser encontrada em [14, Seção 1.6].

Uma consequência da teoria de alturas, é a seguinte desigualdade fundamental:

Teorema 1.7 (Desigualdade de Liouville)**.** *Seja α um número algébrico não nulo e considere $K = \mathbb{Q}(\alpha)$, então*

$$\log|\alpha| \geq -[K:\mathbb{Q}] \cdot h(\alpha). \tag{1.7}$$

A demonstração dessa desigualdade pode ser encontrada em [14, p. 21].

Capítulo 2

O Método de Mahler

Seja $\mathfrak{a} = (a_n)_{n\geq 1}$ uma sequência (estritamente) crescente de inteiros positivos. Definimos a função $f_{\mathfrak{a}}(z)$ por

$$f_{\mathfrak{a}}(z) = \sum_{n\geq 1} z^{a_n}. \tag{2.1}$$

Nosso objetivo é estudar o comportamento aritmético de $f_{\mathfrak{a}}(z)$ em argumentos algébricos, não nulos (claramente, dentro do seu disco de convergência) para algumas sequências $\mathfrak{a}$. No que segue, para simplificar a notação, poderemos escrever $f_{\mathfrak{a}}$ apenas como f.

O primeiro resultado implica que $f_{\mathfrak{a}}(z)$ é uma função analítica na *bola unitária* $B(0,1) := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Além disso, como os coeficientes dessa série são inteiros, essa bola é exatamente o disco de convergência de $f_{\mathfrak{a}}$.

Proposição 2.1. *Seja $\mathfrak{a} = (a_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathbb{Z}_{>0}$ uma sequência estritamente crescente. Então a função $f_{\mathfrak{a}}(z)$ é analítica em $B(0,1)$.*

Demonstração. Para provar esse resultado, considere $f_n(z) := z^{a_n}$. Como $f(z) = \sum_{n\geq 1} f_n(z)$, basta-nos mostrar que essa última série converge uniformemente em $B(0,1)$. Nesse caso, é suficiente mostrar que, para todo $R \in (0,1)$, a série $\sum_{n\geq 1} f_n(z)$ converge uniformemente em $B(0,R)$ (já que, todo subconjunto compacto de $B(0,1)$ está contido em uma bola $B(0,R)$, para algum $R \in (0,1)$ e convergência uniforme em todo compacto de $B(0,1)$, implica em convergência uniforme em toda a bola unitária).

Para provar esse último fato, usaremos o teste M de Weierstrass. Seja $R \in (0,1)$, então para todo $z \in B(0, R)$, temos

$$|f_n(z)| = |z|^{a_n} \leq R^{a_n} \leq R^n =: M_n,$$

onde usamos que $a_n \geq n$, para todo $n \geq 1$ (já que $\mathfrak{a}$ é uma sequência estritamente crescente). Observe ainda que

$$\sum_{n\geq 1} M_n = \sum_{n\geq 1} R^n = \frac{R}{1-R} < \infty,$$

pois $R < 1$ e logo o Teste M de Weierstrass garante que $\sum_{n\geq 1} f_n(z)$ converge uniformemente (para $f(z)$) em $B(0, 1)$. Além disso, um fato conhecido da análise complexa é que o limite uniforme de função analíticas, também é uma função analítica (isso é consequência do *Teorema de Morera* e da *Fórmula Integral de Cauchy*). Assim, a função $f(z) = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} z^{a_n}$ é analítica em $B(0, 1)$ (limite uniforme de polinômios), como queríamos. □

2.1 Resultados iniciais

Nesta seção, abordaremos os primeiros resultados sobre o comportamento aritmético dos valores de $f_{\mathfrak{a}}$ quando a sequência $\mathfrak{a} = (a_n)_n$ é *superexponencial*, isto é, $a_{n+1}/a_n \to \infty$ quando $n \to \infty$.

O primeiro resultado é relacionado à natureza aritmética de $f_{\mathfrak{a}}(r)$, quando r é um número racional em $(-1, 1)$.

Teorema 2.1. *Seja $\mathfrak{a} = (a_n)_{n\geq 1}$ uma sequência superexponencial de inteiros positivos. Então $f_{\mathfrak{a}}(r)$ é um número de Liouville, para todo $r \in \mathbb{Q} \cap (-1, 1)$, não nulo.*

Demonstração. Para provar este resultado, sem perda de generalidade, considere $r = p/q$ um racional positivo, com $mdc(p, q) = 1$. Vamos mostrar que existe uma sequência infinita de racionais $(A_k/B_k)_{k\geq 1}$, tais que $A_k \in \mathbb{Z}$ e $B_k \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ para todo $k \geq 1$, e uma sequência de reais positivos $(\omega_k)_{k\geq 1}$, com $\lim_{k\to\infty} \omega_k = \infty$, tais que

$$\left| f\left(\frac{p}{q}\right) - \frac{A_k}{B_k} \right| < \frac{c}{B_k^{\omega_k}}, \quad \text{para todo } k \geq 1,$$

onde c é uma constante qualquer.

Para provar tal fato, considere

$$A_k = q^{a_k} \sum_{n=1}^{k} \left(\frac{p}{q}\right)^{a_n} \quad \text{e} \quad B_k = q^{a_k}.$$

Observe que A_k é inteiro, pois $p, q \in \mathbb{Z}$ e $\mathfrak{a}$ é uma sequência crescente.

Então,

$$\begin{aligned}
\left| f\left(\frac{p}{q}\right) - \frac{A_k}{B_k} \right| &= \left| \sum_{n \geq k+1} \left(\frac{p}{q}\right)^{a_n} \right| \\
&= \sum_{n \geq k+1} \left(\frac{p}{q}\right)^{a_n} \\
&= \left(\frac{p}{q}\right)^{a_{k+1}} \left[1 + \left(\frac{p}{q}\right)^{a_{k+2} - a_{k+1}} + \cdots \right] \\
&= \left(\frac{p}{q}\right)^{a_{k+1}} \sum_{t \geq 2} \left(\frac{p}{q}\right)^{a_{k+t-1} - a_{k+1}}. \qquad (2.2)
\end{aligned}$$

Vamos mostrar que essa última série é limitada por uma série geométrica. Para isso, definimos $c_n := a_{n+1}/a_n$ (observe que $c_n \to \infty$, quando $n \to \infty$). Assim $a_n = c_{n-1}a_{n-1}$, e subtraindo a_{n-1} em ambos os lados desta igualdade, obtemos $a_n - a_{n-1} = (c_{n-1} - 1)a_{n-1}$. Fazendo $n = k + t - 1$ na igualdade anterior, e usando que a sequência $\mathfrak{a}$ é crescente, temos

$$a_{k+t-1} - a_{k+1} \geq a_{k+t-1} - a_{k+t-2} = (c_{k+t-2} - 1)a_{k+t-2}, \qquad (2.3)$$

para todo $t \geq 3$. Por (2.3), como $p/q < 1$, obtemos

$$\left(\frac{p}{q}\right)^{a_{k+t-1} - a_{k+1}} \leq \left[\left(\frac{p}{q}\right)^{(c_{k+t-2} - 1)} \right]^{a_{k+t-2}}.$$

Observe que para todo ℓ suficientemente grande,

$$\left(\frac{p}{q}\right)^{c_\ell - 1} < \frac{1}{2}. \qquad (2.4)$$

Por (2.4), tomamos $k + t - 2$ suficientemente grande para obter,

$$\left[\left(\frac{p}{q}\right)^{(c_{k+t-2} - 1)} \right]^{a_{k+t-2}} < \left(\frac{1}{2}\right)^{a_{k+t-2}} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{a_{k+1}} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1},$$

onde usamos que $a_k \geq k$ para todo k. Portanto,

$$\sum_{t \geq 3} \left(\frac{p}{q}\right)^{a_{k+t-2} - a_{k+1}} < \sum_{k \geq -1} \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} < 2.$$

Voltando em (2.2), obtemos

$$\left| f\left(\frac{p}{q}\right) - \frac{A_k}{B_k} \right| < 2\left(\frac{p}{q}\right)^{a_{k+1}}.$$

Agora, vamos majorar $(p/q)^{a_{k+1}}$. Para tal, como $p/q < 1$, então existe um número real $\epsilon > 0$ tal que $p/q < 1/q^{\epsilon}$. Assim elevando a a_{k+1} concluímos que

$$\left(\frac{p}{q}\right)^{a_{k+1}} < \frac{1}{q^{\epsilon a_{k+1}}} = \frac{1}{(q^{a_k})^{\epsilon a_{k+1}/a_k}}.$$

Portanto, para k suficientemente grande

$$\begin{aligned} \left| f\left(\frac{p}{q}\right) - \frac{A_k}{B_k} \right| &< 2\left(\frac{p}{q}\right)^{a_{k+1}} \\ &< \frac{2}{(q^{a_k})^{\epsilon a_{k+1}/a_k}} \\ &< \frac{2}{B_k^{\epsilon a_{k+1}/a_k}} \\ &= \frac{2}{B_k^{\omega_k}}, \end{aligned}$$

onde $\omega_k := \epsilon a_{k+1}/a_k$ (note que $\omega_k \to \infty$, pois $a_{n+1}/a_n \to \infty$), e aqui $c = 2$. Observe que a sequência $(A_k/B_k)_{k\geq 1}$ é infinita, pois $mdc(A_k, B_k) = mdc(p^k, q) = 1$ (também podemos provar que todos os A_k/B_k's são distintos). Portanto pela Proposição 1.4, $f(r)$ é um número de Liouville para todo $r \in \mathbb{Q} \cap (0, 1)$.

O caso $r < 0$ é feito de maneira análoga, apenas trocaremos p/q por $|p/q|$ nos cálculos em (2.2). □

Antes de demonstrarmos o segundo resultado, vejamos mais algumas definições que darão suporte para tal prova.

Definição 2.1. *Se $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$ e seu polinômio minimal tem coeficientes inteiros, então α é chamado de* inteiro algébrico*. Denotamos por $\mathbb{I}$ o conjunto dos inteiros algébricos.*

Observação 5. O conjunto $\mathbb{I}$ é um anel e $\mathbb{I} \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Z}$.

Notação 1. Considere α um número algébrico e $\alpha^{(0)} = \alpha, \ldots, \alpha^{(n-1)}$ seus conjugados algébricos, denotamos

1. $\overline{|\alpha|} = \max\{|\alpha^{(i)}| : 0 \leq i \leq n-1\}$, a *casa algébrica* de α.

2. $den(\alpha) = \min\{d \in \mathbb{Z} : d > 0, d\alpha \in \mathbb{I}\}$, o *denominador* de α.

Observação 6. Para cada $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$, existe $n \in \mathbb{N}$, tal que $n\alpha \in \mathbb{I}$, geralmente tal n pode ser tomado como o *mmc* dos denominadores dos coeficientes do polinômio minimal de α.

Observação 7. Pelas notações acima e utilizando propriedades de módulo, podemos provar que

$$\overline{|\alpha + \beta|} \leq \overline{|\alpha|} + \overline{|\beta|} \quad \text{e} \quad \overline{|\alpha\beta|} \leq \overline{|\alpha|}\,\overline{|\beta|}.$$

Também, observamos que se $d\alpha$ e $d\beta \in \mathbb{I}$, então $d(\alpha+\beta) \in \mathbb{I}$ e $d^2\alpha\beta \in \mathbb{I}$, pois $\mathbb{I}$ é um anel.

Assim, se $d_1 = den(\alpha)$ e $d_2 = den(\beta)$, temos $d_1 d_2(\alpha + \beta) \in \mathbb{I}$, e concluímos que

$$den(\alpha + \beta) \leq d_1 d_2 = den(\alpha)den(\beta)$$

e também

$$den(\alpha\beta) \leq den(\alpha)den(\beta).$$

Agora apresentamos uma segunda versão da Desigualdade Liouville, que relaciona os valores $\overline{|\alpha|}$ e $den(\alpha)$. Esta segunda versão é uma consequência da primeira versão, isto pode ser encontrado em [21, p. 80].

Teorema 2.2 (Segunda Desigualdade Liouville). *Se $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$, é não nulo e de grau n, então*

$$\log|\alpha| \geq -2n \cdot \max\{\log \overline{|\alpha|}, \log den(\alpha)\}. \tag{2.5}$$

A prova deste resultado pode ser encontrada em [1, p. 2].

Definição 2.2 (Símbolos de Landau). *Seja $\phi(x)$ uma função positiva e $f(x)$ outra função qualquer, tais que $Dom_f \subseteq Dom_\phi$. Então os* símbolos de Landau *$O(x)$ e $o(x)$, geralmente chamados, respectivamente de* "big-O" *e* "little-o"*, são definidos como segue:*

(a) Dizemos que f é da ordem grande *de ϕ, escreve-se $f(x) = O(\phi(x))$, sempre que $|f(x)| < A\phi(x)$, para todos os valores de x, onde A é uma constante positiva.*

(b) Dizemos que f é da ordem pequena *de ϕ, escreve-se $f(x) = o(\phi(x))$, sempre que $f(x)/\phi(x) \to 0$, quando $x \to \infty$.*

Proposição 2.2. *Temos que valem as seguintes regras para o uso de "big-O"* *(i) (Constante) Se C é uma constante positiva, então a estimativa $f(x) = O(C\phi(x))$ é equivalente a $f(x) = O(\phi(x))$. Em particular, $f(x) = O(C)$ é equivalente a $f(x) = O(1)$.*

(ii) (Transitividade) Se $f(x) = O(\phi_1(x))$ e $\phi_1(x) = O(\phi_2(x))$, então $f(x) = O(\phi_2(x))$.

(iii) (Multiplicação) Se $f_i(x) = O(\phi_i(x)$, para $i = 1, 2$, então $f_1(x)f_2(x) = O(\phi_1(x)\phi_2(x))$.

(iv) (Extração de fatores) Se $f(x) = O(\phi_1(x)\phi_2(x))$, então $f(x) = \phi_1(x)O(\phi_2(x))$.

(v) (Somatório) Se $f_i(x) = O(\phi_i(x))$, para $i = 1, \ldots, n$, então

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x) = O\left(\sum_{i=1}^{n} |g_i(x)|\right).$$

(vi) (Integração) Se $f(x)$ e $\phi(x)$ são integráveis em um intervalo finito, e satisfazem $f(x) = O(\phi(x))$, para $x \geq x_0$, então

$$\int_{x_0}^{x} f(y)dy = O\left(\int_{x_0}^{x} |\phi(y)|dy\right), \quad x \geq x_0.$$

Observação 8. As quatro primeiras regras também valem para o uso de "little-O", mas as duas últimas não. As demonstrações da última proposição e da última observação, podem ser encontrada em [20, Capítulo 2].

Agora somos capazes de demonstrar o segundo resultado, que mostra a transcendência dos valores de $f(\alpha)$, para $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}} \cap B(0,1)$, não nulo. Por simplicidade, a menos que seja explicitado o centro da bola, diremos apenas que $B(0,1)$ é a bola unitária.

Teorema 2.3. *Seja $\mathfrak{a} = (a_n)_{n\geq 1}$ uma sequência superexponencial de inteiros positivos. Então $f_{\mathfrak{a}}(\alpha)$ é transcendente para todo $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}} \cap B(0,1)$, não nulo.*

Demonstração. Para demonstrar tal resultado, suponhamos, por contradição, que $f(\alpha)$ é algébrico e consideremos

$$\gamma_m := f(\alpha) - \sum_{n=1}^{m-1} \alpha^{a_n}.$$

Assim, como γ_m é uma combinação linear de $f(\alpha)$ e potências de α, então $\gamma_m \in L := \mathbb{Q}(\alpha, f(\alpha))$, com $[L : \mathbb{Q}] = \ell$. Queremos usar a desigualdade (2.5), para isso, vamos majorar os valores de $\log |\gamma_m|$, $\overline{|\gamma_m|}$ e $den(\gamma_m)$.

Vamos inicialmente encontrar um limitante superior para $\log|\gamma_m|$. Para isso, observe que como $\alpha \in B(0,1)$, então a sequência $(|\alpha|^{a_n})_{n\geq 1}$ é decrescente, e assim podemos escrever

$$\begin{aligned}
\gamma_m &= \sum_{n\geq m} \alpha^{a_n} \\
&= \alpha^{a_m} + \alpha^{a_{m+1}} + \cdots \\
&= \alpha^{a_m} + o\left(|\alpha|^{a_m}\right).
\end{aligned}$$

Para m suficentemente grande temos,

$$\begin{aligned}
|\gamma_m| &= |\alpha^{a_m} + o\left(|\alpha|^{a_m}\right)| \\
&\geq |\alpha|^{a_m} - o\left(|\alpha|^{a_m}\right) \\
&= |\alpha|^{a_m}(1 - o(1)),
\end{aligned}$$

mas existe m_0 tal que, se $m \geq m_0$, então $o(1) < 1/2$, assim

$$|\gamma_m| > \frac{|\alpha|^{a_m}}{2}.$$

Portanto, $\gamma_m \neq 0$, para $m \geq m_0$. E também

$$\begin{aligned}
|\gamma_m| &\leq |\alpha|^{a_m} + o\left(|\alpha|^{a_m}\right) \\
&= |\alpha|^{a_m}(1 + o(1)) \\
&< \left(1 + \frac{1}{2}\right)|\alpha|^{a_m} \\
&< 2|\alpha|^{a_m}.
\end{aligned}$$

Assim, temos $|\gamma_m| < 2|\alpha|^{a_m}$. Portanto, aplicando logaritmo

$$\log|\gamma_m| < \log(2|\alpha|^{a_m}) = \log 2 + a_m \log|\alpha|. \tag{2.6}$$

Afim de majorar $\overline{|\gamma_m|}$, observe que da definição de γ_m e pelas propriedades de casa algébrica, temos

$$\begin{aligned}
\overline{|\gamma_m|} &= \overline{\left|f(\alpha) + \sum_{k=1}^{m-1} \alpha^{a_k}\right|} \\
&\leq \overline{|f(\alpha)|} + \sum_{k=1}^{m-1} \overline{|\alpha|}^{a_k} \\
&\leq \overline{|f(\alpha)|} + (m-1)\max\{1, \overline{|\alpha|}\}^{a_{m-1}}.
\end{aligned}$$

Assim temos

$$\lceil \gamma_m \rceil \leq \lceil f(\alpha) \rceil + (m-1)\max\{1, \lceil \alpha \rceil\}^{a_{m-1}}. \tag{2.7}$$

Agora, como $\lceil f(\alpha) \rceil$ é uma constante e $\mathfrak{a}$ é uma sequência crescente, então existe $m_1 \geq m_0$ tal que, se $m \geq m_1$, então

$$\lceil f(\alpha) \rceil \leq 2^{m-1} \leq 2^{a_{m-1}} \quad \text{e} \quad m-1 \leq 2^{m-1} \leq 2^{a_{m-1}}.$$

Assim por (2.7) e as duas últimas desigualdades,

$$\begin{aligned} \lceil \gamma_m \rceil &\leq \lceil f(\alpha) \rceil + (m-1)\max\{1, \lceil \alpha \rceil\}^{a_{m-1}} \\ &\leq 2^{a_{m-1}} + (2\max\{1, \lceil \alpha \rceil\})^{a_{m-1}} \\ &\leq (4\max\{1, \lceil \alpha \rceil\})^{a_{m-1}}, \end{aligned}$$

onde usamos o fato que se $x, y \in \mathbb{R}_{\geq 2}$, então $x + y \leq xy$. Portanto

$$\lceil \gamma_m \rceil < c_1^{a_{m-1}}, \tag{2.8}$$

onde $c_1 := 4\max\{1, \lceil \alpha \rceil\}$.

Por último, vamos encontrar um limitante superior para $den(\gamma_m)$, assim observamos que se $d = den(\alpha)$, então $d\alpha \in \mathbb{I}$. Logo,

$$d^{a_{m-1}} \sum_{n=1}^{m-1} \alpha^{a_n} = \sum_{n=1}^{m-1} d^{a_{m-1}-a_n} (d\alpha)^{a_n}$$

é inteiro algébrico, pois $\mathbb{I}$ é anel (note que $d^{a_{m-1}-a_n} \in \mathbb{Z}$, para $1 \leq n \leq m-1$). Portanto, temos

$$d^{a_{m-1}} = den(\alpha)^{a_{m-1}} \geq den\left(\sum_{n=1}^{m-1} \alpha^{a_n}\right). \tag{2.9}$$

Então, por (2.9)

$$\begin{aligned} den(\gamma_m) &= den\left(f(\alpha) - \sum_{n=1}^{m-1} \alpha^{a_n}\right) \\ &\leq den(f(\alpha)) \cdot den\left(\sum_{n=1}^{m-1} \alpha^{a_n}\right) \\ &\leq den(f(\alpha)) \cdot (den(\alpha))^{a_{m-1}}. \end{aligned}$$

Para m suficientemente grande, temos

$$den(f(\alpha)) < 2^{a_{m-1}}.$$

Concluímos que

$$den(\gamma_m) \leq c_2^{a_{m-1}}, \tag{2.10}$$

onde $c_2 := 2den(\alpha)$.

Pela desigualdade (2.5) aplicada a γ_m e combinando (2.6), (2.8) e (2.10), obtemos

$$\begin{aligned}
\log 2 + a_m \log|\alpha| &= \log(2|\alpha|^{a_m}) \\
&> \log|\gamma_m| \\
&\geq -2\ell \cdot \max\{\log \overline{|\gamma_m|}, \log den(\gamma_m)\} \\
&\geq -2\ell \cdot \max\{\log c_1^{a_{m-1}}, \log c_2^{a_{m-1}}\} \\
&\geq -2\ell \cdot \max\{a_{m-1}\log c_1, a_{m-1}\log c_2\} \\
&\geq -2\ell \cdot a_{m-1}\max\{\log c_1, \log c_2\}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\log 2 + a_m \log|\alpha| \geq -2\ell \cdot a_{m-1}c_3,$$

onde $c_3 := \max\{\log c_1, \log c_2\}$. Logo, dividindo a última desigualdade por a_m, obtemos

$$\frac{\log 2}{a_m} + \log|\alpha| \geq -2\ell\frac{a_{m-1}}{a_m}c_3.$$

E tomando $m \to \infty$ (lembrando que $a_m \to \infty$), concluímos que

$$\log|\alpha| \geq 0,$$

e isso é uma contradição, pois para $\alpha \in B(0,1)$, não nulo, devemos ter $\log|\alpha| < 0$. Portanto $f(\alpha)$ é transcendente. $\square$

Nos Teoremas 2.1 e 2.3 usamos apenas as propriedades algébricas de α para demonstrar a transcendência de $f(\alpha)$. Entretanto, nem sempre conseguiremos estimar limitantes somente usando essas propriedades. Em geral, necessitaremos também investigar o comportamento da função utilizada, assim precisamos de uma ferramenta ou um método que nos auxilie na obtenção desses limitantes, em busca de contradições na hipótese de $f(\alpha)$ ser um número algébrico.

A próxima seção aborda o uso de uma ferramenta que nos ajuda a demonstrar a transcendência, nos casos em que as propriedades algébricas do ponto algébrico não são suficientes. Tal ferramenta é conhecida como o *Método de Mahler para Transcendência*, ou simplesmente, *Método de Mahler*.

2.2 Introdução ao Método de Mahler

O Método de Mahler, termo batizado por J. Loxton e A. Poorten (1942-2010), é um método de demonstração com origem em três artigos de Mahler [5–7]. Tal ferramenta é, em geral, utilizada para demonstrar a transcendência e independência algébrica para valores tomados em uma classe de funções.

Dada uma dessas funções, primeiro precisamos verificar a transcendência dessa função, e supor que o valor dessa função aplicada no ponto algébrico determinado é um número algébrico, a partir daí o esquema de demonstração utilizando o método será dividido nos passos a seguir:

$(FA)-$ Construir uma *função auxiliar.*

$(LS)-$ Obter um *limitante superior*, através de *estimativas analíticas.*

$(NA)-$ Provar a *não anulação*, por meio de *estimativas de zeros.*

$(LI)-$ Obter um *limitante inferior*, através de *estimativas aritméticas.*

A partir desses passos, obteremos uma contradição quando compararmos os limitantes inferior e superior, e asssim obteremos que o valor de tal função aplicada nesse ponto algébrico, antes suposto algébrico, é transcendente.

Por exemplo, utilizando o Método de Mahler, a Desigualdade de Liouville e com a ajuda da teoria básica sobre alturas, podemos provar o seguinte resultado conhecido como *Teorema de Mahler*:

Teorema 2.4. *Seja* $\mathfrak{a} = (a_n)_{n\geq 0}$ *uma sequência de inteiros positivos tal que* $a_n = d^n$*, onde* $d \in \mathbb{Z}_{>1}$ *é uma constante. Então* $f_{\mathfrak{a}}(\alpha)$ *é transcendente para todo* $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}} \cap B(0,1)$*, não nulo.*

Mahler provou este teorema por volta de 1926-27. Ele tentava investigar a irracionalidade para os valores de $f(p/q)$, onde $p/q \in \mathbb{Q} \cap (0,1)$. Evidentemente, Mahler acabou provando em seu teorema algo muito mais forte do que ele procurava inicialmente.

Mahler verificou que o método garantia a transcendência de vários números, tais como

$$\sum_{n\geq 0}\alpha^{2^n},\quad \prod_{n\geq 0}(1-\alpha^{2^n}),\quad \sum_{n\geq 0}\lfloor n\sqrt{5}\rfloor\alpha^n,\quad \cfrac{1}{\alpha^{-2}+\cfrac{1}{\alpha^{-4}+\cfrac{1}{\alpha^{-8}+\cdots}}},$$

e também a independência algébrica dos números $f(\alpha), f'(\alpha), f''(\alpha), \ldots$, onde $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}} \cap B(0,1)$, não nulo, e $f', f'', \ldots$ denotam as derivadas da função f.

Observamos que, no Teorema de Mahler, a sequência $\mathfrak{a}$ é exponencial, ou seja, a razão entre dois termos consecutivos é igual a uma constante. Esta razão é $a_{n+1}/a_n = d > 1$ para todo n.

2.3 Teorema de Mahler

Para demonstrar o Teorema de Mahler, antes consideremos a sequência $\mathfrak{a} = (d^n)_{n\geq 0}$, com $d > 1$, e apresentamos alguns resultados preliminares que serão importantes para tal prova.

Preliminares

Lema 2.1. *A função $f_{\mathfrak{a}}(z)$ satisfaz a equação funcional*

$$f(z^d) = f(z) - z. \tag{2.11}$$

Demonstração. Para mostrar tal fato, observe que

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} z^{d^n} = z + z^d + z^{d^2} + z^{d^3} + z^{d^4} + \cdots,$$

e que

$$f(z^d) = \sum_{n\geq 0}(z^d)^{d^n} = \sum_{n\geq 0} z^{d^{n+1}} = z^d + z^{d^2} + z^{d^3} + z^{d^4} + \cdots.$$

Portanto $f(z^d) = f(z) - z$. □

Corolário 2.1. *Seja $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}} \cap B(0,1)$ e suponha que $f(\alpha)$ é algébrico, então $f(\alpha^{d^n})$ é também algébrico para todo $n \geq 0$.*

Demonstração. A prova deste fato segue por indução sobre $n \geq 0$. Inicialmente, para $n = 0$, obtemos $f(\alpha) = f(\alpha^{d^0})$, que é por hipótese algébrico. Agora, suponha que $f(\alpha^{d^{n-1}})$ é algébrico. Como $\alpha^{d^n} = (\alpha^{d^{n-1}})^d$, o lema anterior nos fornece que

$$f(\alpha^{d^n}) = f((\alpha^{d^{n-1}})^d) = f(\alpha^{d^{n-1}}) - \alpha^{d^{n-1}},$$

ou seja, $f(\alpha^{d^n})$ é uma subtração de algébricos, e portanto, também é algébrico. □

Definição 2.3. *Uma função* $f(z) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m z^m$ *é dita* lacunária *se existem duas sequências de inteiros* $(s_i)_{i\geq 1}$ *e* $(t_j)_{j\geq 0}$ *tais que:*

(i) $0 = t_0 \leq s_1 < t_1 \leq s_2 < t_2 \leq \cdots$*;*

(ii) Para todo $r \geq 1$*, temos* $c_{s_r} \neq 0$*,* $c_{t_r} \neq 0$*, mas* $c_m = 0$ *para* $s_r < m < t_r$*;*

(iii) temos $\lim_{r\to\infty} (t_r - s_r) = \infty$*.*

Proposição 2.3. *A função* $f_{\mathfrak{a}}(z)$ *é uma série lacunária.*

Demonstração. Inicialmente escremos

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{d^n} = \sum_{m=0}^{\infty} c_m z^m,$$

onde $c_m = 1$ para todo m uma potência de d e $c_m = 0$ caso contrário. Assim considere as sequências $(s_i)_{i\geq 1}$ e $(t_j)_{j\geq 0}$, definidas por $s_i = d^{i-1}$, para todo $i \geq 1$, e $t_0 = 0$, $t_j = d^j$, para todo $j \geq 1$. Observe que estas sequências satisfazem:

(i) $0 = t_0 < 1(= s_1) < d(= t_1) \leq d(= s_2) < d^2(= t_2) \leq d^2(= s_3) < d^3(= t_3) \leq \cdots$;

(ii) $c_{s_r} = 1$ e $c_{t_r} = 1$ para todo $r \geq 1$, e se $s_r < m < t_r$ temos $c_m = 0$;

(iii) $\lim_{r\to\infty} (t_r - s_r) = \lim_{r\to\infty} (d^r - d^{r-1} = \lim_{r\to\infty} d^{r-1}(d-1) = \infty$, pois $d > 1$.

Portanto, $f(z)$ é uma série lacunária. □

Teorema 2.5. *Toda série lacunária é uma função transcendente.*

A prova do último teorema pode ser encontrada em [8, p.44].

Vamos agora enunciar um teorema, conhecido como *Teorema da Identidade para funções analíticas*, por simplicidade o chamaremos apenas de *Teorema da Identidade.* Funções analíticas são funções complexas de uma ou mais variáveis complexas, que são diferenciáveis nas vizinhanças de cada um dos pontos de seu domínio.

Teorema 2.6 (Teorema da Identidade)**.** *Sejam $f, g : D \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ funções holomorfas, e seja $S \subseteq D$ um conjunto que tem um ponto de acumulação $c \in D$. Se $f(x) = g(x)$ para todo $x \in S$, então $f(x) = g(x)$ para todo $x \in D$.*

A demonstração do último resultado pode ser encontrado em [15].

Agora podemos provar o teorema.

Prova do Teorema de Mahler

Demonstração. Para mostrar esse resultado, suponhamos, por contradição, que $f(\alpha)$ é algébrico, para $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}} \cap B(0,1)$, não nulo. Considere $K := \mathbb{Q}(\alpha, f(\alpha))$, com $[K : \mathbb{Q}] = \ell$. Observe que a Proposição 2.3 e o Teorema 2.5 nos fornece a transcendência da função $f(z)$.

Passo(FA): Sejam N um número inteiro positivo e $P_0(z), \ldots, P_N(z) \in \mathbb{Z}[z]$, polinômios não todos nulos, com grau no máximo N, tais que a função auxiliar $E_N : B(0,1) \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$E_N(z) = \sum_{j=0}^{N} P_j(z) f(z)^j = \sum_{h \geq 0} b_h z^h$$

é não identicamente nula e $b_h = 0$, para todo $h \leq N^2$. Para mostrar que esta escolha é possível, podemos tomar

$$P_j(z) = \sum_{l=0}^{N} x_{jl} z^l.$$

Assim, b_h é uma forma linear de x_{jl} $(0 \leq j, l \leq N)$ sobre $\mathbb{Q}$. Como o número de incógnitas $(N+1)^2$ é maior que o número de equações N^2+1, então o sistema homogêneo de equações $b_0 = b_1 = \cdots = b_{N^2} = 0$ tem uma solução não trivial $x = (\overline{x}_{00}, \ldots, \overline{x}_{N^2 N^2})$ em $\mathbb{Z}$.

Passo(NA): Inicialmente como $|\alpha| < 1$, então o conjunto $S := \{\alpha^{d^k}\}_{k \geq 0} \subseteq D =: B(0,1)$, possui um ponto de acumulação $z = 0 \in D$. Pelo Teorema da Identidade, se $E_N(z) = 0$, para todo $z \in S$, então $E_N(z) \equiv 0$ para todo $z \in D$, o que é uma contradição, pois a função $f(z)$ é transcendente, e assim ela não satisfaz a equação $E_N(z) = 0$. Portanto, para k suficientemente grande, $E_N(\alpha^{d^k}) \neq 0$.

Passo(LS): Afim de obtermos um limitante superior para $\log |E_N(\alpha^{d^k})|$, escreva H como o menor inteiro tal que $b_H \neq 0$ (observe que $H > N^2$). Assim, para k suficientemente grande, temos

$$\begin{aligned}
0 < \left|E_N(\alpha^{d^k})\right| &= \left|\sum_{h\geq H} b_h(\alpha^{d^k})^h\right| \\
&\leq \sum_{h\geq H} |b_h||\alpha|^{d^k h} \\
&\leq c_1(N)\sum_{h\geq H} |\alpha|^{d^k h} \\
&= c_1(N)|\alpha|^{d^k H}(1+|\alpha|^{d^k}+|\alpha|^{2d^k}+\cdots),
\end{aligned}$$

onde $c_1(N) > |b_h|$ para todo $h \geq H$, isso é possível pois b_h é sempre uma soma finita que depende dos coeficientes dos P_j's, já fixados.

Agora, como $|\alpha| < 1$, para k suficientemente grande temos $|\alpha|^{d^k} < 1/2$, então

$$1+|\alpha|^{d^k}+|\alpha|^{2d^k}+\cdots < 1+\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots = 2.$$

Portanto

$$\left|E_N(\alpha^{d^k})\right| < 2c_1(N)|\alpha|^{d^k H} < c_2(N)|\alpha|^{d^k N^2}, \tag{2.12}$$

onde $c_2(N) = 2c_1(N)$, e na última passagem, usamos que $H > N^2$. Agora aplicando o logaritmo na desigualdade (2.12),

$$\log\left|E_N(\alpha^{d^k})\right| \leq c_3(N) + d^k N^2 \log|\alpha|, \tag{2.13}$$

onde $c_3(N) := \log c_2(N)$.

Passo(LI): Por outro lado, para limitar inferiormente $\log|E_N(\alpha^{d^k})|$, definimos

$$A_N(x,y) := \sum_{j=0}^{N} P_j(x)y^j. \tag{2.14}$$

Logo, por (2.14)

$$A_N(z, f(z)) = E_N(z).$$

Observe que $A_N(x,y) \in K[x,y]$, $\partial_x(A_N) \leq N$ e $\partial_y(A_N) \leq N$. E assim, usando a desigualdade (1.6), obtemos

$$\begin{aligned}
h(E_N(\alpha^{d^k})) &= h(A_N(\alpha^{d^k}, f(\alpha^{d^k}))) \\
&\leq \log L(A_N) + (\partial_x A_N) h(\alpha^{d^k}) + (\partial_y A_N) h(f(\alpha^{d^k})), \\
&\leq \log L(A_N) + N d^k h(\alpha) + N h(f(\alpha) - \alpha - \cdots - \alpha^{d^{k-1}}) \\
&\leq \log L(A_N) + N d^k h(\alpha) + N(k \log 2 + h(f(\alpha)) + h(\alpha) + \cdots + h(\alpha^{d^{k-1}})) \\
&\leq \log L(A_N) + N d^k h(\alpha) + N k \log 2 + N h(f(\alpha)) + N(h(\alpha) + d h(\alpha) \cdots + d^{k-1} h(\alpha)) \\
&\leq \log L(A_N) + N d^k h(\alpha) + N k \log 2 + N h(f(\alpha)) + N h(\alpha)(1 + d + \cdots + d^{k-1}) \\
&= \log L(A_N) + N d^k h(\alpha) + N k \log 2 + N h(f(\alpha)) + N h(\alpha) \left(\frac{d^k - 1}{d - 1} \right) \\
&\leq \log L(A_N) + N d^k h(\alpha) + N k \log 2 + N h(f(\alpha)) + N h(\alpha) d^k \\
&= \log L(A_N) + 2 N d^k h(\alpha) + N k \log 2 + N h(f(\alpha)),
\end{aligned}$$

onde usamos recursivamente (2.11), para obter $f(\alpha^{d^k}) = f(\alpha) - \alpha - \cdots - \alpha^{d^{k-1}}$, e também usamos recursivamente que $h(\alpha + \beta) \leq \log 2 + h(\alpha) + h(\beta)$ e $h(\alpha^n) = n h(\alpha)$. Portanto,

$$h(E_N(\alpha^{d^k})) \leq c_4(N) + 2 N d^k h(\alpha) + N k \log 2 + N h(f(\alpha)), \tag{2.15}$$

onde $c_4(N) := \log L(A_N)$.

A Desigualdade de Liouville estabelece

$$\log |E_N(\alpha^{d^k})| \geq -[K : \mathbb{Q}] h(E_N(\alpha^{d^k})),$$

e por (2.15)

$$\log \left| E_N(\alpha^{d^k}) \right| \geq -\ell (c_4(N) + 2 N d^k h(\alpha) + N k \log 2 + N h(f(\alpha))). \tag{2.16}$$

Portanto, combinando as desigualdades (2.13) e (2.16),

$$-\ell (c_4(N) + 2 N d^k h(\alpha) + N k \log 2 + N h(f(\alpha))) \leq c_3(N) + d^k N^2 \log |\alpha|,$$

dividindo esta desigualdade por d^k, obtemos

$$-\ell \left(\frac{c_4(N)}{d^k} + 2 N h(\alpha) + \frac{N k \log 2}{d^k} + \frac{N h(f(\alpha))}{d^k} \right) \leq \frac{c_3(N)}{d^k} + N^2 \log |\alpha|.$$

Fazendo $k \to \infty$, obtemos

$$-2\ell \, N h(\alpha) \leq N^2 \log |\alpha|,$$

então

$$-2\ell h(\alpha) \leq N \log |\alpha|.$$

Portanto,

$$N \leq -\frac{2\ell h(\alpha)}{\log |\alpha|}.$$

Mas N pode ser escolhido arbitrariamente, portanto temos uma contradição. Concluímos assim que $f(\alpha)$ não é algébrico, para $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}} \cap B(0,1)$, não nulo. $\square$

Observação 9. Na prova do Teorema 2.4 acima usamos o Corolário 2.1, para nos garantir o uso de α^{d^k} ao invés de apenas α, já que pelo mesmo, se $f(\alpha^{d^k}) \notin \overline{\mathbb{Q}}$, a contrapositiva do corolário garante $f(\alpha) \notin \overline{\mathbb{Q}}$.

Sequência de Thue-Morse

Nesta seção abordaremos um exemplo de aplicação do Método de Mahler, com o auxílio da teoria básica de alturas e a Desigualdade de Liouville, para provar a transcendência de valores de uma função em pontos algébricos. Embora a função de Thue-Morse não seja da mesma natureza da função $f_{\mathfrak{a}}$ e o comportamento da sequência em questão não ser semelhante as sequências $\mathfrak{a}$'s abordadas anteriormente, o Método de Mahler também é eficaz para provar a transcendência dos valores dessa função.

A *sequência de Thue-Morse* foi primeiro estudada por E. Prouhet(1817-1867) em 1851. No entanto, a primeira referência explícita a essa sequência foi feita por Thue em 1906, que a usou no estudo combinatório de palavras. A sequência só se tornou mundialmente conhecida em 1921, quando M. Morse (1892-1977) a relacionou com a geometria diferencial.

Preliminares

Inicialmente vamos definir a sequência de Thue-Morse e a série de Thue-Morse, mostraremos que essa série satisfaz uma equação funcional, e por fim provaremos um resultado que nos fornece a transcendência de valores dessa série em argumentos algébricos da bola unitária.

Definição 2.4. *A* sequência de Thue-Morse $(a_n)_{n\geq 0}$, *é definida tal que* a_n *é o resto módulo* 2 *da soma dos dígitos da expansão binária de* n.

Base Decimal	Base Binária	Soma dos Dígitos na Base Binária	a_n
0	0	0	0
1	1	1	1
2	10	1	1
3	11	2	0
4	100	1	1
5	101	2	0
10	1010	2	0
50	110010	3	1
100	1100100	3	1

Tabela 2.1: Alguns exemplos de termos da sequência de Thue-Morse

Definição 2.5. *A* série de potências de Thue-Morse *é definida por*

$$f_{TM}(x) = \prod_{n=0}^{\infty}(1 - x^{2^n}) = \sum_{n\geq 0}(-1)^{a_n}x^n \quad \in \mathbb{Z}(x).$$

Observação 10. A função f_{TM} é analítica na bola unitária.

Lema 2.2. *A função f_{TM} satisfaz a equação funcional*

$$f_{TM}(x^2) = \frac{f_{TM}(x)}{1-x}. \tag{2.17}$$

Demonstração. Para mostrar este resultado, basta notar que

$$\begin{aligned} f_{TM}(x) &= \prod_{n=0}^{\infty}(1 - x^{2^n}) \\ &= (1-x)(1-x^2)(1-x^4)\cdots, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} f_{TM}(x^2) &= \prod_{n=0}^{\infty}(1 - x^{2^{n+1}}) \\ &= (1-x^2)(1-x^4)\cdots. \end{aligned}$$

Portanto,

$$f_{TM}(x^2) = \frac{f_{TM}(x)}{1-x}.$$

□

Observação 11. Este exemplo foi motivado pelo trabalho de Federico Pellarin [3].

Transcendência da série de potências Thue-Morse

Teorema 2.7. *Para todo $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}} \cap B(0,1)$, não nulo, temos que $f_{TM}(\alpha)$ é transcendente.*

Demonstração. Inicialmente, indicamos que a verificação de que $f_{TM}(z)$ é função transcendente, é feita em [4].

Passo (FA): Para todo $N \geq 0$, escolhemos $P_N(x,y) \in \mathbb{Q}[x,y]$ polinômios não nulos de grau no máximo N em x e y, tal que as funções auxiliares

$$F_N(x) := P_N(x, f_{TM}(x)) = c_{\nu(N)} x^{\nu(N)} + \cdots ,$$

são não identicamente nulas, e a ordem de anulação $\nu(N)$ em $x = 0$ é tal que $\nu(N) \geq N^2$. Isto segue da existência de uma solução não trivial de um sistema homogêneo com $N^2 + 1$ equações lineares e $(N+1)^2$ incógnitas.

Seja $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}} \cap B(0,1)$ não nulo. Suponhamos por contradição que $f_{TM}(\alpha)$ é também algébrico, considere $L = \mathbb{Q}(\alpha, f(\alpha))$, com $[L : \mathbb{Q}] = \ell$. Segue do Lema 2.2, para todo $n \geq 0$, que

$$F_N(\alpha^{2^{n+1}}) = P_N(\alpha^{2^{n+1}}, f_{TM}(\alpha^{2^{n+1}})) = P_N\left(\alpha^{2^{n+1}}, \frac{f_{TM}(\alpha)}{(1-\alpha)\cdots(1-\alpha^{2^n})}\right) \in L.$$

Passo (NA): Como o conjunto $S := \{\alpha^{d^k}\}_{k\geq 0} \subseteq D =: B(0,1)$, possui um ponto de acumulação $z = 0 \in D$. Novamente, pelo Teorema da Identidade, temos $F_N(\alpha^{2^{n+1}}) \neq 0$ para todo n suficientemente grande.

Passo(LS): Vamos limitar superiormente $\log |F_N(\alpha^{2^{n+1}})|$. Para isso, observamos que pela definição de F_N, podemos escrever

$$F_N(x) = \sum_{m \geq \nu(N)} c_m x^m = x^{\nu(N)} \left(c_{\nu(N)} + \sum_{i \geq 1} c_{\nu(N)+i} x^i \right).$$

E assim,

$$\begin{aligned}
\left|F_N(\alpha^{2^{n+1}})\right| &= \left|\alpha^{2^{n+1}\nu(N)}\left(c_{\nu(N)} + \sum_{i\geq 1} c_{\nu(N)+i}\alpha^{2^{n+1}i}\right)\right| \\
&= |\alpha|^{2^{n+1}\nu(N)}\left|c_{\nu(N)} + \sum_{i\geq 1} c_{\nu(N)+i}\alpha^{2^{n+1}i}\right| \\
&\leq |\alpha|^{2^{n+1}N^2}\left|c_{\nu(N)} + \sum_{i\geq 1} c_{\nu(N)+i}\alpha^{2^{n+1}i}\right|,
\end{aligned}$$

onde na última passagem usamos que $\nu(N) \geq N^2$ e $|\alpha| < 1$. Para n suficientemente grande, temos $|\alpha|^{2^{n+1}} < 1/2$, e portanto

$$\begin{aligned}
\frac{|F_N(\alpha^{2^{n+1}})|}{|\alpha|^{2^{n+1}N^2}} &\leq \left|c_{\nu(N)} + \sum_{i\geq 1} c_{\nu(N)+i}\alpha^{2^{n+1}i}\right| \\
&\leq |c_{\nu(N)}| + \sum_{i\geq 1} |c_{\nu(N)+i}||\alpha|^{2^{n+1}i} \\
&\leq |c_{\nu(N)}| + c_1(N)\sum_{i\geq 1} |\alpha|^{2^{n+1}i} \\
&\leq |c_{\nu(N)}| + c_1(N)|\alpha|^{2^{n+1}}(1 + |\alpha|^{2^{n+1}} + |\alpha|^{2^{n+1}2} + \cdots) \\
&\leq |c_{\nu(N)}| + c_1(N)|\alpha|^{2^{n+1}}\left(1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots\right) \\
&\leq |c_{\nu(N)}| + 2c_1(N)|\alpha|^{2^{n+1}},
\end{aligned}$$

onde $c_1(N) \geq |c_{\nu(N)+i}|$, pois estes coeficientes são sempre uma soma finita, que depende de coeficientes já fixados. Na última passagem, usamos que $1 + 1/2 + (1/2)^2 + \cdots = 2$. Portanto, aplicando logaritmo obtemos

$$\begin{aligned}
\log\left(\frac{|F_N(\alpha^{2^{n+1}})|}{|\alpha|^{2^{n+1}N^2}}\right) &\leq \log(|c_{\nu(N)}| + 2c_1(N)|\alpha|^{2^{n+1}}) \\
&\leq \log(|c_{\nu(N)}| + 2c_1(N)),
\end{aligned}$$

pois $|\alpha| < 1$. Concluímos assim que,

$$\log\left|F_N(\alpha^{2^{n+1}})\right| \leq c_2(N) + 2^{n+1}N^2\log|\alpha|, \tag{2.18}$$

onde $c_2(N) := \log(c_{\nu(N)} + 2c_1(N))$.

Passo (LI): Afim de obter um limite inferior para $\log|F_N(\alpha^{2^{n+1}})|$, usaremos a Desigualdade de Liouville junto com a desigualdade (1.6), para obter

$$\begin{aligned}
\frac{\log|F_N(\alpha^{2^{n+1}})|}{\ell} &= \frac{\log|P_N(\alpha^{2^{n+1}}, f_{TM}(\alpha^{2^{n+1}}))|}{\ell} \\
&\geq -\log L(P_N) - (\partial_x P_N)h(\alpha^{2^{n+1}}) \\
&\quad -(\partial_y P_N)h(f(\alpha^{2^{n+1}})) \\
&\geq -\log L(P_N) - (\partial_x P_N)h(\alpha^{2^{n+1}}) \\
&\quad -(\partial_y P_N)h\left(\frac{f_{TM}(\alpha)}{(1-\alpha)\cdots(1-\alpha^{2^n})}\right),
\end{aligned}$$

onde na última passagem usamos recursivamente a equação funcional (2.17), para obter $f_{TM}(\alpha^{2^{n+1}}) = f_{TM}(\alpha)/((1-\alpha)\cdots(1-\alpha^{2^n}))$. Observe que,

$$\begin{aligned}
h\left(\frac{f_{TM}(\alpha)}{(1-\alpha)\cdots(1-\alpha^{2^n})}\right) &\leq h(f_{TM}(\alpha)) + h\left(\frac{1}{(1-\alpha)\cdots(1-\alpha^{2^n})}\right) \\
&= h(f_{TM}(\alpha)) + h((1-\alpha)\cdots(1-\alpha^{2^n})) \\
&\leq h(f_{TM}(\alpha)) + \sum_{i=0}^{n} h(1-\alpha^{2^i}) \\
&\leq h(f_{TM}(\alpha)) + \sum_{i=0}^{n} (h(1) + h(\alpha^{2^i}) + \log 2) \\
&\leq h(f_{TM}(\alpha)) + (n+1)\log 2 + \sum_{i=0}^{n} 2^i h(\alpha) \\
&\leq h(f_{TM}(\alpha)) + (n+1)\log 2 + h(\alpha)(1+2+\cdots+2^n) \\
&\leq h(f_{TM}(\alpha)) + (n+1)\log 2 + 2^{n+1}h(\alpha),
\end{aligned}$$

onde usamos que $h(\alpha^n) = nh(\alpha)$, $h(\alpha\beta) \leq h(\alpha)h(\beta)$, $h(1/\alpha) = h(\alpha)$, e recursivamente que $h(\alpha+\beta) \leq \log 2 + h(\alpha) + h(\beta)$. Também, usamos que $h(1) = 0$. Portanto,

$$\begin{aligned}
\log|F_N(\alpha^{2^{n+1}})| &\geq -\ell(\log L(P_N) + Nh(\alpha^{2^{n+1}}) + N(h(f_{TM}(\alpha)) + (n+1)\log 2 + 2^{n+1}h(\alpha))) \\
&\geq -\ell(\log L(P_N) + N2^{n+1}h(\alpha) + Nh(f_{TM}(\alpha)) + N(n+1)\log 2 + N2^{n+1}h(\alpha)) \\
&\geq -\ell(\log L(P_N) + 2N2^{n+1}h(\alpha) + Nh(f_{TM}(\alpha)) + N(n+1)\log 2) \\
&= -\ell(\log L(P_N) + N2^{n+2}h(\alpha) + Nh(f_{TM}(\alpha)) + N(n+1)\log 2).
\end{aligned}$$

Concluímos assim que,

$$\log|F_N(\alpha^{2^{n+1}})| \geq -\ell(\log L(P_N) + N2^{n+2}h(\alpha) + Nh(f_{TM}(\alpha)) + N(n+1)\log 2). \quad (2.19)$$

Para n suficientemente grande, e combinando as desigualdades (2.18) e (2.19), obtemos

$$\begin{aligned}\log|c_2(N)| + 2^{n+1}N^2\log|\alpha| &\geq -\ell L(F_N) - \ell N 2^{n+2}h(\alpha)\\ &- \ell N h(f_{TM}(\alpha)) - \ell(n+1)\log 2\end{aligned}$$

Assim, dividindo por 2^{n+1}

$$\begin{aligned}2^{-n-1}\log|c_2(N)| + N^2\log|\alpha| &\geq -\ell L(P_N)2^{-n-1} - \ell 2Nh(\alpha)\\ &- \ell N 2^{-n-1}h(f_{TM}(\alpha)) - \ell(n+1)2^{-n-1}\log 2.\end{aligned}$$

Tomando $n \to \infty$, encontramos a desigualdade

$$N^2\log|\alpha| \geq -2N\ell h(\alpha),$$

dividindo ambos os lados por N, obtemos

$$N\log|\alpha| \geq -2\ell h(\alpha).$$

Portanto,

$$N \leq -\frac{2\ell h(\alpha)}{\log|\alpha|},$$

mas N é escolhido arbitrariamente, e assim temos uma contradição. Portanto, $f_{TM}(\alpha)$ é transcendente para todo $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}} \cap B(0,1)$, não nulo. $\square$

2.4 Outras aplicações do Método de Mahler

Como Mahler mesmo observou, um importante aspecto do seu método é que ele pode ser aplicado em funções analíticas de mais de uma variável, e não somente para o operador $z \mapsto z^d$, mas para soluções analíticas de diferentes tipos de equações funcionais relacionando transformações mais gerais. Seja $\Omega = (t_{i,j})$ com $1 \leq i, j \leq d$, uma matriz $d \times d$ com entradas inteiras não-nulas. Então, Ω age sobre $\mathbb{C}^d$ por

$$\Omega\alpha = (\alpha_1^{t_{1,1}} \dots \alpha_d^{t_{1,d}}, \dots, \alpha_1^{t_{d,1}} \dots \alpha_d^{t_{d,d}}),$$

onde $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{C}^d$. Tal ação se estende naturalmente para elementos de $\overline{\mathbb{Q}}[[z]]$ colocando $\Omega f(z) = f(\Omega z)$, onde se $\Omega = (d)_{1\times 1}$, então $\Omega f(z) = f(z^d)$.

O Método de Mahler, visa transferir resultados sobre a ausência de relações algébricas ou lineares sobre $\overline{\mathbb{Q}}(z)$, de soluções analíticas de algumas equações funcionais relacionadas a operadores Ω para seus valores em pontos algébricos.

O Método de Mahler é geralmente aplicado nas seguintes três famílias de equações:

- **A Equação Racional de Mahler**: definida por

$$f(\Omega z) = R\left(z, f(z)\right), \tag{2.20}$$

onde $R(X,Y) = A(X,Y)/B(X,Y) \in \overline{\mathbb{Q}}(X,Y)$ é uma função racional com duas variáveis e coeficientes algébricos.

- **A Equação Algébrica de Mahler**: definida por

$$P\left(z, f(z), f(\Omega z)\right) = 0, \tag{2.21}$$

onde $P(z,X,Y) \in \overline{\mathbb{Q}}[z,X,Y]$.

- **A Equação Linear de Mahler**: definifa por

$$\begin{pmatrix} f_1(\Omega z) \\ \vdots \\ f_n(\Omega z) \end{pmatrix} = A(z) \begin{pmatrix} f_1(z) \\ \vdots \\ f_n(z) \end{pmatrix}, \tag{2.22}$$

onde $A(z)$ pertence a $GL_n\left(\overline{\mathbb{Q}}(z)\right)$.

Observação 12. A equação racional de Mahler é um caso especial da equação algébrica, onde o grau em Y de P é igual a 1.

Observação 13. Somente as soluções analíticas das equações anteriores são consideradas. Em particular, não podemos aplicar o Método de Mahler em algumas funções interessantes como $\log z$ ou $\log\log z/\log 2$, apesar de ambas serem soluções para a equação linear de Mahler.

Neste trabalho não faremos nenhuma discussão sobre as equações algébricas e lineares, para observar tais abordagens veja [2, 5].

Generalização do Teorema de Mahler para equações racionais

Este tópico foi primeiro introduzido por Mahler em [5]. O resultado a seguir é uma generalização do Teorema 2.4, pois considera uma função que satisfaz uma equação racional, sem que essa seja explicitamente mencionada. Observe que no Teorema 2.4 temos a equação racional bem estabelecida pelo Lema 2.1.

Para $K \subseteq \mathbb{C}$ um corpo, escrevemos $\mathbb{I}_K$ o conjunto dos inteiros algébricos de K. Suponhamos que $f(z) \in K[[z]]$ tem raio de convergência $r > 0$ e satisfaz a equação funcional,

$$f(z^d) = \frac{\sum_{i=0}^{m} a_i(z) f(z)^i}{\sum_{i=0}^{m} b_i(z) f(z)^i}, \tag{2.23}$$

onde $m < d \in \mathbb{Z}_{>1}$ e $a_i(z), b_i(z) \in \mathbb{I}_K[z]$. Ou seja, $f(z^d) = R(z, f(z))$, uma equação racional de Mahler, para $R(X,Y) \in \mathbb{I}_K[X,Y]$.

Denotamos a *resultante* de $\displaystyle\sum_{i=0}^{m} a_i(z)u^i$ e $\displaystyle\sum_{i=0}^{m} b_i(z)u^i$, polinômios em u, por $\Delta(z)$ (em geral, dados dois polinômios mônicos $P, Q \in K[z]$ a resultante é o produto da diferença de suas raízes). Observe que se $\Delta(z) \neq 0$, então os polinômios não tem raízes iguais.

Teorema 2.8. *Suponha que $f(z)$ é uma função transcendente sobre $K(z)$. Se $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}} \cap B(0, \overline{r})$, não nulo, onde $\overline{r} = \min\{1, r\}$, e $\Delta(\alpha^{d^k}) \neq 0$ para todo $k \geq 0$, então $f(\alpha)$ é transcendente.*

Demonstração. Suponhamos, por contradição, que $f(\alpha)$ é algébrico. Sem perda de generalidade, considere $K := \mathbb{Q}(\alpha, f(\alpha))$, com $[K : \mathbb{Q}] = \ell$.

<u>Passo(FA)</u>: Sejam N um inteiro positivo e $P_0, \ldots, P_N \in \mathbb{I}_K[z]$ polinômios de grau no máximo N, tais que a função auxiliar $E_N : B(0, \overline{r}) \longrightarrow \mathbb{C}$, definida por

$$E_N(z) = \sum_{j=0}^{N} P_j(z) f(z)^j = \sum_{h=0}^{\infty} b_h z^h.$$

é não identicamente nula, e $b_h = 0$ para todo $h \leq N^2$. Esta escolha pode ser justificada pela existência de uma solução não trivial de um sistema homogêneo com N^2+1 equações lineares e $(N+1)^2$ incógnitas.

Agora, vamos mostrar que $E_N(\alpha^{d^k}) \in K$, para todo $k \geq 0$. Para isso, afirmamos que existem polinômios $S(z, f(z)), T(z, f(z)) \in \mathbb{I}_K[z, f(z)]$, veja [19, p.32], tais que

$$\Delta(z) = S(z, f(z)) \sum_{i=0}^{m} a_i(z) f(z)^i + T(z, f(z)) \sum_{i=0}^{m} b_i(z) f(z)^i,$$

assim

$$\Delta(\alpha) = S(\alpha, f(\alpha)) \sum_{i=0}^{m} a_i(\alpha) f(\alpha)^i + T(\alpha, f(\alpha)) \sum_{i=0}^{m} b_i(\alpha) f(\alpha)^i. \tag{2.24}$$

Suponhamos que $\sum_{i=0}^{m} b_i(\alpha) f(\alpha)^i = 0$. Por (2.23),

$$\left(\sum_{i=0}^{m} b_i(\alpha) f(\alpha)^i \right) f(\alpha^d) = \sum_{i=0}^{m} a_i(\alpha) f(\alpha)^i,$$

assim obtemos $\sum_{i=0}^{m} a_i(\alpha) f(\alpha)^i = 0$, ou seja, α é raiz desse polinômio e isso não ocorre pois por hipótese $\Delta(\alpha) = 0$. Portanto $\sum_{i=0}^{m} b_i(\alpha) f(\alpha)^i \neq 0$ e assim $f(\alpha^d), E_N(\alpha^d) \in K$. Repetindo este processo nas potências de d, obteremos $f(\alpha^{d^k}) \in K$ e portanto $E_N(\alpha^{d^k}) \in K$, para todo $k \geq 0$.

Passo(NA): Como $f(z)$ é transcendente sobre $K(z)$, assim $E_N(z)$ é não identicamente nulo. Novamente pelo Teorema da Identidade, observe que $|\alpha| < 1$, obtemos $E_N(\alpha^{d^k}) \neq 0$, para k suficientemente grande.

Passo(LS): Para obtermos um limitante superior para $\log |E_N(\alpha^{d^k})|$, escrevemos H como o menor inteiro tal que $b_H \neq 0$. Observe que $H > N^2$. Assim

$$\begin{aligned} 0 < \left| E_N(\alpha^{d^k}) \right| &= \left| \sum_{h \geq H} b_h (\alpha^{d^k})^h \right| \\ &\leq \sum_{h \geq H} |b_h| |\alpha|^{d^k h} \\ &\leq c_1(N) \sum_{h \geq H} |\alpha|^{d^k h} \\ &= c_1(N) |\alpha|^{d^k H} (1 + |\alpha|^{d^k} + |\alpha|^{2d^k} + \cdots), \end{aligned}$$

onde $c_1(N) > |b_h|$ para todo $h \geq H$, isso é possível pois b_h é sempre uma soma finita, dependendo dos coeficientes dos P_J's, fixados.

Agora como $|\alpha| < 1$, para k suficientemente grande, temos $|\alpha|^{d^k} < 1/2$, e então

$$1 + |\alpha|^{d^k} + |\alpha|^{2d^k} + \cdots < 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} \right)^2 + \cdots = 2.$$

Portanto

$$|E_N(\alpha^{d^k})| < 2c_1(N) |\alpha|^{d^k H} < c_2(N) |\alpha|^{d^k N^2}, \tag{2.25}$$

onde $c_2(N) = 2c_1(N)$, e usamos que $H > N^2$.

Passo(LI): Vamos definir uma sequência $(Y_k)_{k\geq 1}$ recursivamente da seguinte forma,

$$Y_1 \quad = \quad \sum_{i=0}^{m} b_i(\alpha) f(\alpha)^i$$

e

$$Y_{k+1} \quad = \quad Y_k^m \sum_{i=0}^{m} b_i(\alpha^{d^k}) f(\alpha^{d^k})^i, \quad \text{para } k \geq 1.$$

Observe que, $Y_k \in K$ e pelo Passo(FA), temos $Y_k \neq 0$ para $k \geq 1$. Queremos obter um limitante inferior para $\log |Y_k^N E_N(\alpha^{d^k})|$, para isso vamos obter limitantes superiores para $\overline{|Y_k^N E_N(\alpha^{d^k})|}$ e $den(Y_k^N E_N(\alpha^{d^k}))$, e usaremos a desigualdade (2.5). Antes, sejam $\eta \in \mathbb{N}$, tal que $\max\{1, \partial(a_i), \partial(b_i)\} \leq \eta$, uma constante c_3 tal que $\max\{1, \overline{|\alpha|}, \overline{|f(\alpha)|}\} \leq c_3$ e $D \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ tal que $D\alpha, Df(\alpha) \in \mathbb{I}$. Então, podemos calcular

$$\begin{aligned}
\overline{|Y_1|} \quad &= \quad \overline{\left|\sum_{i=0}^{m} b_i(\alpha) f(\alpha)^i\right|} \leq \sum_{i=0}^{m} \overline{|b_i(\alpha) f(\alpha)^i|} \\
&\leq \quad \sum_{i=0}^{m} \overline{|b_i(\alpha)|}\,\overline{|f(\alpha)|}^i \leq \sum_{i=0}^{m} \overline{\left|\sum_{j=0}^{\eta} b_{ij}\alpha^j\right|}\,\overline{|f(\alpha)|}^i \\
&\leq \quad \sum_{i=0}^{m} \left(\sum_{j=0}^{\eta} |b_{ij}| \overline{|\alpha|}^j\right) c_3^i \leq c_3^m \sum_{i=0}^{m} c_3^\eta \left(\sum_{j=0}^{\eta} |b_{ij}|\right) \\
&\leq \quad c_3^m c_3^\eta \left(\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{\eta} |b_{ij}|\right).
\end{aligned}$$

Agora, por (2.23), $Y_1 f(\alpha^d) = \sum_{i=0}^{m} a_i(\alpha) f(\alpha)^i$, assim

$$\begin{aligned}
\overline{|Y_1 f(\alpha^d)|} \quad &= \quad \overline{\left|\sum_{i=0}^{m} a_i(\alpha) f(\alpha)^i\right|} \leq \sum_{i=0}^{m} \overline{|a_i(\alpha) f(\alpha)^i|} \\
&\leq \quad \sum_{i=0}^{m} \overline{|a_i(\alpha)|}\,\overline{|f(\alpha)^i|} \leq \sum_{i=0}^{m} \overline{\left|\sum_{j=0}^{\eta} a_{ij}\alpha^j\right|}\,\overline{|f(\alpha)|}^i \\
&\leq \quad \sum_{i=0}^{m} \left(\sum_{j=0}^{\eta} |a_{ij}| \overline{|\alpha|}^j\right) c_3^i \leq c_3^m \sum_{i=0}^{m} c_3^\eta \left(\sum_{j=0}^{\eta} |a_{ij}|\right) \\
&\leq \quad c_3^m c_3^\eta \left(\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{\eta} |a_{ij}|\right),
\end{aligned}$$

onde usamos que se $a_i(\alpha) = \sum_{j=0}^{\eta} a_{ij}\alpha^j$ e $b_i(\alpha) = \sum_{j=0}^{\eta} b_{ij}\alpha^j$.

Portanto,

$$\max\{\overline{|Y_1|}, \overline{|Y_1 f(\alpha^d)|}\} \leq c_4 c_3^{\eta} c_3^{m}, \tag{2.26}$$

onde consideramos a constante c_4, tal que

$$\max\left\{\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{\eta} |a_{ij}|, \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{\eta} |b_{ij}|\right\} \leq c_4.$$

Observe que

$$Y_1 = \sum_{i=0}^{m}\left(\sum_{j=0}^{\eta} b_{ij}\alpha^j\right) f(\alpha)^i,$$

assim obtemos,

$$\begin{aligned} D^{\eta+m} Y_1 &= \sum_{i=0}^{m}\left(\sum_{j=0}^{\eta} b_{ij} D^{\eta}\alpha^j\right) D^m f(\alpha)^i \\ &= \sum_{i=0}^{m}\left(\sum_{j=0}^{\eta} b_{ij} D^{\eta-j}(D\alpha)^j\right) D^{m-i}(Df(\alpha))^i \quad \in \mathbb{I}, \end{aligned} \tag{2.27}$$

pois $b_{ij}, D^{\eta-j}, D^{m-i} \in \mathbb{Z}$ para todo $0 \leq j \leq \eta$ e $0 \leq i \leq m$. Da mesma maneira, concluímos que $D^{\eta+m} Y_1 f(\alpha^d) \in \mathbb{I}$. Assim,

$$\max\{den(Y_1), den(Y_1 f(\alpha^d))\} \leq D^{\eta+m}.$$

Agora para

$$\begin{aligned} Y_2 &= Y_1^m \sum_{i=0}^{m} b_i(\alpha^d) f(\alpha^d)^i \\ Y_2 f(\alpha^{d^2}) &= Y_1^m \sum_{i=0}^{m} a_i(\alpha^d) f(\alpha^d)^i, \end{aligned}$$

temos,

$$\begin{aligned} \overline{|Y_2|} &= \overline{\left|Y_1^m \sum_{i=0}^{m} b_i(\alpha^d) f(\alpha^d)^i\right|} \leq \overline{|Y_1^m|}\,\overline{\left|\sum_{i=0}^{m} b_i(\alpha^d) f(\alpha^d)^i\right|} \\ &\leq \overline{|Y_1|}^m \sum_{i=0}^{m} \overline{|b_i(\alpha^d)|}\,\overline{|f(\alpha^d)|}^i \leq (c_4 c_3^{\eta+m})^m \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{\eta} |b_{ij}|\,\overline{|\alpha|}^{dj}\,\overline{|f(\alpha^d)|}^i \\ &\leq (c_4 c_3^{\eta+m})^m c_4 c_3^{d\eta+m} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\overline{|Y_2 f(\alpha^{d^2})|} &= \overline{\left|Y_1^m \sum_{i=0}^{m} a_i(\alpha^d) f(\alpha^d)^i\right|} \leq \overline{|Y_1^m|}\,\overline{\left|\sum_{i=0}^{m} a_i(\alpha^d) f(\alpha^d)^i\right|} \\
&\leq \overline{|Y_1|}^m \sum_{i=0}^{m} \overline{|a_i(\alpha^d)|}\,\overline{|f(\alpha^d)|}^i \leq (c_4 c_3^{\eta+m})^m \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{\eta} |a_{ij}| \overline{|\alpha|}^{dj}\,\overline{|f(\alpha^d)|}^i \\
&\leq (c_4 c_3^{\eta+m})^m c_4 c_3^{d\eta+m}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\max\{\overline{|Y_2|}, \overline{|Y_2 f(\alpha^{d^2})|}\} \leq (c_4 c_3^{d\eta+m})(c_4 c_3^{\eta+m})^m,$$

e também,

$$D^{d\eta+m}(D^{\eta+m})^m Y_2 = (D^{\eta+m})^m Y_1^m \sum_{i=0}^{m} \left(\sum_{j=0}^{\eta} b_{ij} D^{d\eta} \alpha^{dj} \right) D^m f(\alpha^d)^i \quad \in \mathbb{I},$$

pois $(D^{\eta+m})^m Y_1^m \in \mathbb{I}$, por (2.27), e $b_{ij}, D^{\eta-j}, D^{m-i} \in \mathbb{Z}$. E assim, $D^{d\eta+m}(D^{\eta+m})^m Y_2 \in \mathbb{I}$ e da mesma maneira, obtemos $D^{d\eta+m}(D^{\eta+m})^m Y_2 f(\alpha^{d^2}) \in \mathbb{I}$.

Repetindo este processo, encontraremos

$$\max\{\overline{|Y_k|}, \overline{|Y_k f(\alpha^{d^k})|}\} \leq c_4^{1+m+\cdots+m^{k-1}} (c_3^{\eta})^{d^{k-1}+d^{k-2}m+\cdots+m^{k-1}} c_3^{m^k},$$

$(D^{\eta})^{d^{k-1}+d^{k-2}m+\cdots+m^{k-1}} D^{m^k} Y_k \in \mathbb{I}$ e $(D^{\eta})^{d^{k-1}+d^{k-2}m+\cdots+m^{k-1}} D^{m^k} Y_k f(\alpha^{d^k}) \in \mathbb{I}$. Agora, como $m < d$, temos

$$\begin{aligned}
1 + m + \cdots + m^{k-1} &\leq d^{k-1} + d^{k-2}m + \cdots + m^{k-1} \\
&= d^{k-1}\left(1 + \frac{m}{d} + \cdots + \left(\frac{m}{d}\right)^{k-1}\right) \\
&\leq d^{k-1}\left(1 + \frac{m}{d} + \left(\frac{m}{d}\right)^{2} + \cdots\right) \\
&\leq c_5 d^{k-1},
\end{aligned}$$

onde $c_5 = 1 + m/d + (m/d)^2 + \cdots := 1/(1 - m/d)$, onde usamos que $0 < m < d$. Assim,

$$\max\{\overline{|Y_k|}, \overline{|Y_k f(\alpha^{d^k})|}\} \leq c_4^{c_5 d^{k-1}} (c_3^{\eta})^{c_5 d^{k-1}} c_3^{d^k} \leq c_6^{d^k}. \tag{2.28}$$

Também obtemos que $D_0^{d^k} Y_k \in \mathbb{I}$ e $D_0^{d^k} Y_k f(\alpha^{d^k}) \in \mathbb{I}$, onde $D_0 = D^{\eta c_5 + 1}$. E assim,

$$\max\{den(Y_k), den(Y_k f(\alpha^{d^k}))\} \leq D_0^{d^k}.$$

Por definição,

$$
\begin{aligned}
Y_k^N E_N(\alpha^{d^k}) &= Y_k^N \sum_{j=0}^{N} P_J(\alpha^{d^k}) f(\alpha^{d^k})^j \\
&= \sum_{j=0}^{N} P_J(\alpha^{d^k}) Y_k^{N-j} Y_k^j f(\alpha^{d^k})^j \\
&= \sum_{j=0}^{N} P_J(\alpha^{d^k}) Y_k^{N-j} (Y_k f(\alpha^{d^k}))^j,
\end{aligned}
$$

assim por (2.28),

$$
\begin{aligned}
\left\lceil Y_k^N E_N(\alpha^{d^k}) \right\rceil &\leq \left\lceil \sum_{j=0}^{N} P_J(\alpha^{d^k}) Y_k^{N-j} (Y_k f(\alpha^{d^k}))^j \right\rceil \leq \sum_{j=0}^{N} \left\lceil P_J(\alpha^{d^k}) \right\rceil \left\lceil Y_k^{N-j} \right\rceil^{N-j} \left\lceil Y_k f(\alpha^{d^k}) \right\rceil^j \\
&\leq \sum_{j=0}^{N} \left\lceil P_J(\alpha^{d^k}) \right\rceil c_6^{d^k(N-j)} c_6^{d^k j} \leq \sum_{j=0}^{N} \left\lceil P_J(\alpha^{d^k}) \right\rceil c_6^{d^k N} \\
&\leq c_6^{d^k N} \sum_{j=0}^{N} \left\lceil \sum_{i=0}^{N} P_{ij} (\alpha^{d^k})^i \right\rceil \leq c_6^{d^k N} \sum_{j=0}^{N} \sum_{i=0}^{N} |P_{ij}| \left\lceil \alpha^{d^k} \right\rceil^i \\
&\leq c_6^{d^k N} \left\lceil \alpha^{d^k} \right\rceil^N \left(\sum_{j=0}^{N} \sum_{i=0}^{N} |P_{ij}| \right).
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\left\lceil Y_k^N E_N(\alpha^{d^k}) \right\rceil \leq c_7(N) c_3^{d^k N} c_6^{d^k N}, \tag{2.29}
$$

onde usamos que se $P_j(\alpha) = \sum_{i=0}^{N} P_{ij}\alpha^i$, então consideramos a constante $c_7(N)$, tal que

$$
c_7(N) \geq \sum_{j=0}^{N} \sum_{i=0}^{N} |P_{ij}|.
$$

Observe que

$$
\begin{aligned}
den(Y_k^N E_N(\alpha^{d^k})) &\leq den(Y_k^N) den(E_N(\alpha^{d^k})) \\
&\leq D_0^{d^k N} D_0^{d^k N} \\
&= D_0^{2d^k N}.
\end{aligned}
$$

E assim,

$$
den(Y_k^N E_N(\alpha^{d^k})) \leq D_0^{2d^k N}. \tag{2.30}
$$

Pela desigualdade (2.5), e combinando (2.29) e (2.30), obtemos

$$\begin{aligned}
\log|Y_k^N E_N(\alpha^{d^k})| &\geq -2\ell\max\{\log\overline{|Y_k^N E_N(\alpha^{d^k})|}, \log(den(Y_k^N E_N(\alpha^{d^k}))\} \\
&\geq -2\ell\max\{\log(c_7(N)c_3^{d^kN}c_6^{d^kN}), \log(D_0^{2d^kN})\} \\
&\geq -2\ell\max\{\log c_7(N) + d^kN\log c_3c_6, 2d^kN\log D_0\}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\log|Y_k^N E_N(\alpha^{d^k})| \geq -2\ell\max\{\log c_7(N) + d^kN\log c_3c_6, 2d^kN\log D_0\}. \tag{2.31}$$

Agora, em (2.25) temos

$$\begin{aligned}
|Y_k^N E_N(\alpha^{d^k})| &\leq |Y_k^N||E_N(\alpha^{d^k})| \\
&\leq |Y_k|^N|E_N(\alpha^{d^k})| \\
&\leq c_6^{d^kN}c_2(N)|\alpha|^{d^kN^2},
\end{aligned}$$

aplicando o logaritmo, obtemos

$$\begin{aligned}
\log|Y_k^N E_N(\alpha^{d^k})| &\leq \log(c_6^{d^kN}c_2(N)|\alpha|^{d^kN^2}) \\
&= d^kN\log c_6 + \log c_2(N) + d^kN^2\log|\alpha|. \qquad (2.32)
\end{aligned}$$

Combinando (2.31) e (2.32), para k suficientemente grande, obtemos

$$d^kN\log c_6 + \log c_2(N) + d^kN^2\log|\alpha| \geq -2\ell\max\{\log c_7(N) + d^kN\log c_3c_6, 2d^kN\log D_0\}.$$

Dividindo ambos os lados por d^k,

$$N\log c_6 + \frac{\log c_2(N)}{d^k} + N^2\log|\alpha| \geq -2\ell\max\left\{\frac{\log c_7(N)}{d^k} + N\log c_3c_6, 2N\log D_0\right\},$$

e fazendo k tender ao infinito, temos

$$N\log c_6 + N^2\log|\alpha| \geq -2\ell\max\{N\log c_3c_6, 2N\log D_0\}.$$

Agora, dividindo ambos os lados por N^2,

$$\frac{\log c_6}{N} + \log|\alpha| \geq -2\ell\max\left\{\frac{\log c_3c_6}{N}, \frac{2\log D_0}{N}\right\},$$

e fazendo N tender ao infinito, obtemos

$$\log|\alpha| \geq 0,$$

o que é um absurdo, pois $|\alpha| < 1$. Portanto, $f(\alpha)$ é transcendente. $\square$

Série dos recíprocos dos números de Fibonacci

Um importante aspecto para à aplicação do Método de Mahler é que a função seja transcendente, ou seja, a transcedência do valor $f(\alpha)$, onde α é um algébrico, está diretamente ligada com a transcendência da função $f(z)$.

Em 1975, Mahler [11], como aplicação do seu teorema considerou a função

$$h(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{z^{2^n}}{1 - z^{2^{n+1}}},$$

que satisfaz a equação racional $h(z^2) = h(z) - z/(1 - z^2)$, de onde ele deduziu a transcendência do número

$$2 - h\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{F_{2^n}},$$

onde F_n é o n-ésimo *número de Fibonacci.* Entretanto, em 1974, I. Good (1916-2009) em [10], havia mostrado que

$$\sum_{n\geq 0} \frac{1}{F_{2^n}} = \frac{7-\sqrt{5}}{2} \quad \in \overline{\mathbb{Q}},$$

ou seja, Mahler errou no seu resultado. Isto aconteceu, pois em seu resultado Mahler não verificou se a função $h(z)$ é transcendente.

A transcendência para funções que são soluções analíticas de equações racionais de Mahler, pode ser geralmente deduzida de um resultado devido a Keiji Nishioka:

Teorema 2.9. *Suponha que a série formal $f(z) \in \mathbb{C}[[z]]$ satisfaz uma das seguintes equações, para algum inteiro $d > 1$:*

(a) $f(z^d) = \psi(z, f(z))$;

(b) $f(z) = \psi(z, f(z^d))$,

onde $\psi(z,u) \in \mathbb{C}(z,u)$. Então se $f(z)$ é uma função algébrica sobre $\mathbb{C}$, então $f(z) \in \mathbb{C}(z)$.

O último resultado foi demonstrado em [4].

Observação 14. Em resumo, o teorema acima nos garante que uma série formal $f(z) \in \mathbb{C}[[z]]$ que satisfaz a equação (2.20) ou é uma função racional ou é uma função transcendente sobre $\mathbb{C}(z)$.

Como consequência do Teorema 2.9, vamos provar que

Proposição 2.4. *O número*

$$\theta = \sum_{k\geq 0} \frac{1}{F_{2^k+1}}$$

é transcendente.

Demonstração. Para mostrar tal resultado, inicialmente, usamos a conhecida *Fórmula de Binet* que nos fornece

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}},$$

onde

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{e} \quad \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\theta &= \sum_{k\geq 0} \frac{1}{F_{2^k+1}} = \sum_{k\geq 0} \frac{\sqrt{5}}{\left(\alpha^{2^k+1} - \beta^{2^k+1}\right)} \\
&= \sqrt{5}\sum_{k\geq 0} \frac{1}{\alpha^{2^k+1} - (-\alpha^{-1})^{2^k+1}} = \sqrt{5}\sum_{k\geq 0} \frac{1}{\alpha^{2^k+1} - (-\alpha^{1-2})^{2^k+1}} \\
&= \sqrt{5}\sum_{k\geq 0} \frac{1}{\alpha^{2^k+1} - (\alpha(-\alpha^{-2}))^{2^k+1}} = \sqrt{5}\sum_{k\geq 0} \frac{1}{\alpha^{2^k+1} - \alpha^{2^k+1}(-\alpha^{-2})^{2^k+1}} \\
&= \sqrt{5}\sum_{k\geq 0} \frac{1}{\alpha^{2^k+1}\left(1 - (-\alpha^{-2})^{2^k+1}\right)} = \sqrt{5}\sum_{k\geq 0} \frac{(\alpha^{-1})^{2^k+1}}{1 - (-\alpha^{-2})^{2^k+1}} \\
&= \sqrt{5}\left(\frac{\alpha^{-2}}{1+\alpha^{-4}} + \frac{\alpha^{-3}}{1+\alpha^{-6}} + \sum_{k\geq 0} \frac{\alpha^{-1}(\alpha^{-1})^{2^k}}{1+\alpha^{-2}(\alpha^{-1})^{2\cdot 2^k}}\right),
\end{aligned}$$

onde usamos que $-1/\alpha = \beta$.

Definamos

$$f(z) = \sum_{k\geq 0} \frac{\alpha^{-1} z^{2^k}}{1+\alpha^{-2} z^{2\cdot 2^k}},$$

e assim,

$$\begin{aligned}
\theta &= \sqrt{5}\left(\frac{\alpha^{-2}}{1+\alpha^{-4}} + \frac{\alpha^{-3}}{1+\alpha^{-6}} + f(\alpha^{-1})\right) \\
&= \sqrt{5}\left(\frac{\alpha^{-2}(1+\alpha^{-6}) + \alpha^{-3}(1+\alpha^{-4})}{(1+\alpha^{-4})(1+\alpha^{-6})} + f(\alpha^{-1})\right) \\
&= \sqrt{5}\left(\frac{\alpha^{-2}+\alpha^{-8}+\alpha^{-3}+\alpha^{-7}}{(1+\alpha^{-4})(1+\alpha^{-6})} + f(\alpha^{-1})\right).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\theta = \sqrt{5}(\gamma + f(\alpha^{-1})), \tag{2.33}$$

onde

$$\gamma = \frac{\alpha^{-2} + \alpha^{-3} + \alpha^{-7} + \alpha^{-8}}{(1+\alpha^{-4})(1+\alpha^{-6})} \quad \in \overline{\mathbb{Q}},$$

pois $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$ (note que $\alpha^2 - \alpha - 1 = 0$).

Observe que $f(z)$ satisfaz a equação funcional

$$f(z) = f(z^2) + \frac{\alpha^{-1}z}{1+\alpha^{-2}z^2}. \tag{2.34}$$

De fato, observe que

$$f(z) = \sum_{k\geq 0} \frac{\alpha^{-1}z^{2^k}}{1+\alpha^{-2}z^{2\cdot 2^k}} = \frac{\alpha^{-1}z}{1+\alpha^{-2}z^2} + \frac{\alpha^{-1}z^2}{1+\alpha^{-2}z^4} + \frac{\alpha^{-1}z^3}{1+\alpha^{-2}z^8} + \cdots$$

e

$$f(z) = \sum_{k\geq 0} \frac{\alpha^{-1}(z^2)^{2^k}}{1+\alpha^{-2}(z^2)^{2\cdot 2^k}} = \sum_{k\geq 0} \frac{\alpha^{-1}z^{2^k+1}}{1+\alpha^{-2}z^{2\cdot 2^k+1}} = \frac{\alpha^{-1}z^2}{1+\alpha^{-2}z^4} + \frac{\alpha^{-1}z^3}{1+\alpha^{-2}z^8} + \cdots .$$

Portanto,

$$f(z^2) = f(z) - \frac{\alpha^{-1}z}{1+\alpha^{-2}z^2},$$

o que demonstra a afirmação.

Assim $f(z)$ satisfaz o item (a) do Teorema 2.9. Portanto, supondo que $f(z)$ é algébrica sobre $\mathbb{C}(z)$, pelo Teorema 2.9, temos que $f(z)$ é uma função racional. E então, podemos escrever $f(z) = a(z)/b(z)$, onde $a(z), b(z) \in \mathbb{C}[z]$ são polinômios não nulos e coprimos. Pela equação funcional (2.34), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{a(z)}{b(z)} &= \frac{a(z^2)}{b(z^2)} + \frac{\alpha^{-1}z}{1+\alpha^{-2}z^2} \\ &= \frac{a(z^2)(1+\alpha^{-2}z^2) + b(z^2)\alpha^{-1}z}{b(z^2)(1+\alpha^{-2}z^2)}. \end{aligned}$$

Temos então,

$$a(z)b(z^2)(1+\alpha^{-2}z^2) = b(z)\left(a(z^2)(1+\alpha^{-2}z^2) + b(z^2)\alpha^{-1}z\right)$$

e assim,

$$a(z)b(z^2) + a(z)b(z^2)\alpha^{-2}z^2 = b(z)a(z^2) + b(z)a(z^2)\alpha^{-2}z^2 + b(z)b(z^2)\alpha^{-1}z,$$

agora multiplicando tudo por α^2, obtemos

$$a(z)b(z^2)\alpha^2 + a(z)b(z^2)z^2 = b(z)a(z^2)\alpha^2 + b(z)a(z^2)z^2 + b(z)b(z^2)\alpha z$$

e então,

$$a(z)b(z^2)(\alpha^2 + z^2) = a(z^2)b(z)(\alpha^2 + z^2) + \alpha z b(z)b(z^2).$$

Como $a(z)$ e $b(z)$ são coprimos, temos $a(z^2)$ e $b(z^2)$ também coprimos, portanto devemos ter que $b(z^2)$ divide $b(z)(\alpha^2 + z^2)$, e também que $b(z)$ divide $b(z^2)(\alpha^2 + z^2)$, e assim $\partial(b(z)) \leq 2$. Por hipótese, temos $\partial(b(z)) \neq 0$, pois $f(z) = a(z)/b(z)$, então $\partial(b(z)) = 1$ ou 2. Agora, observe que se $\partial(b(z)) = 1$, sem perda de generalidade, obtemos $b(z) = z$ ou $b(z) = z - 1$, e assim temos $b(z^2) = z^2$ ou $b(z^2) = z^2 - 1$. Observe que se $b(z) = z$, obtemos $b(z)(\alpha^2 + z^2) = z\alpha^2 + z^3$ que não pode ser dividido por $b(z^2) = z^2$, e também que se $b(z) = z - 1$, então $b(z)(\alpha^2 + z^2) = z\alpha^2 + z^3 - \alpha^2 - z^2$, que também não pode ser dividido por $b(z^2) = z^2 - 1$. Portanto, devemos ter $\partial(b(z)) \neq 1$. Assim devemos ter $\partial(b(z)) = 2$, e podemos escrever $b(z) = z^2 + cz + d$.

Entretanto, como $b(z^2)$ divide $b(z)(\alpha^2 + z^2)$, devemos ter que $z^4 + cz^2 + d$ deve dividir o polinômio $z^4 + cz^3 + dz^2 + \alpha^2 z^2 + \alpha^2 cz + d\alpha^2$, mas como esses dois polinômios tem o mesmo grau e são mônicos, devemos ter

$$z^4 + cz^2 + d = z^4 + cz^3 + dz^2 + \alpha^2 z^2 + \alpha^2 cz + d\alpha^2,$$

mas isto não deve acontecer, pois teríamos $\alpha \in \{-1, 0, 1\}$, o que não é verdade.

Portanto chegamos a uma contradição ao supor que $f(z)$ é uma função algébrica sobre $\mathbb{C}(z)$. Assim $f(z)$ é uma função transcendente, e assim, como $|\alpha^{-1}| < 1$, o Teorema 2.8 nos garante que $f(\alpha^{-1})$ é um número transcendente. Portanto o número $\theta = \sum_{k\geq 0} 1/F_{2^k+1}$ é transcendente, pois pela relação (2.33), θ é uma soma de um número algébrico com um número transcendente. □

Observação 15. Vamos apresentar uma demonstração mais simples (mas um pouco mais engenhosa) de que $f(z)$ não é uma função racional.

Demonstração. Semelhantemente ao que foi feito na demonstração da proposição, defina

$$f(z) = \sum_{k\geq 0} \frac{\alpha^{-1} z^{2^k}}{1 + \alpha^{-2} z^{2\cdot 2^k}}$$

e suponha que $f(z)$ é uma função racional. Seja $f(z) = a(z)/b(z)$, com $a(z), b(z) \in \mathbb{C}[z]$ polinômios coprimos. Como $f(z) \to \infty$ quando $z \to 1^-$, então $b(1) = 0$. Podemos escrever então $b(z) = (z-1)^m g(z)$, onde $g(1) \neq 0$ ($m \geq 1$ é a multiplicidade de 1 como raiz de $b(z)$).

Agora, partindo da equação funcional (2.34), obtemos

$$\frac{a(z)}{b(z)} = \frac{a(z^2)}{b(z^2)} + \frac{\alpha^{-1}z}{1+\alpha^{-2}z^2},$$

ou seja,

$$a(z)b(z^2) - a(z^2)b(z) = \frac{\alpha^{-1}zb(z)b(z^2)}{1+\alpha^{-2}z^2}.$$

Daí

$$a(z)(z^2-1)^m g(z^2) - a(z^2)(z-1)^m g(z) = \frac{\alpha^{-1}z(z-1)^m(z^2-1)^m g(z)g(z^2)}{1+\alpha^{-2}z^2}.$$

Como $(z^2-1) = (z-1)(z+1)$, então

$$a(z)(z-1)^m(z+1)^m g(z^2) - a(z^2)(z-1)^m g(z) = \frac{\alpha^{-1}z(z-1)^{2m}(z+1)^m g(z)g(z^2)}{1+\alpha^{-2}z^2}.$$

Assim,

$$(z-1)^m[a(z)(z+1)^m g(z^2) - a(z^2)g(z)] = \frac{\alpha^{-1}z(z-1)^{2m}(z+1)^m g(z)g(z^2)}{1+\alpha^{-2}z^2}. \tag{2.35}$$

Observe que 1 é zero do termo da direita (da identidade anterior) com multiplicidade $2m$, o que força, em particular, que $a(1)(1+1)^m g(1) - a(1)g(1) = 0$. Logo, chegamos que $(2^m-1)a(1)g(1) = 0$. Mas isso contradiz os fatos de que $m \geq 1$, $g(1) \neq 0$ e $a(1) \neq 0$ (pois $a(z)$ e $b(z)$ são coprimos). $\square$

Capítulo 3

Considerações Finais

Neste capítulo, desejamos levantar outras discussões, que possivelmente abordaremos no futuro, envolvendo sequências $\mathfrak{a}$ com outros comportamentos, e analisar assim o comportamento aritmético de funções relacionadas ao nosso problema central.

Ainda consideramos interessante estudar nosso problema quando a sequência $\mathfrak{a}$ é tal que a razão entre dois termos consectivos dessa sequência tende a um número real d maior que 1, quando n tende ao infinito. Neste trabalho consideramos um caso especial quando a sequência tem essa razão igual a d, conforme foi abordado no Método de Mahler. Acreditamos que a função $f_{\mathfrak{a}}$ com tal sequência forneça valores $f_{\mathfrak{a}}(\alpha)$ que são números transcendentes, para todo α algébrico pertencente a bola unitária. Entretanto não conseguimos encontrar este resultado na literatura hoje existente e em uma tentativa rápida, não conseguimos realizar tal demonstração.

Outro caso que também consideramos interessante, é quando a sequência $\mathfrak{a}$ é tal que a razão entre dois termos consecutivos dessa sequência tende a 1, quando n tende ao infinito. Para este resultado não conseguimos ter nenhum palpite para o corportamento aritmético dos valores de $f_{\mathfrak{a}}(\alpha)$, quando α é um número algébrico pertencente a bola unitária. Também pretendemos avaliar este caso em nossos estudos futuros.

Ainda neste capítulo queremos mencionar outras aplicações do Método de Mahler, que não foram abordadas com ênfase neste trabalho, mas que podem ser de nosso interesse futuro. O método é aplicado também no estudo de independência algébrica de funções univariadas e multivariadas.

O método aplicado no estudo de independência algébrica, envolve funções que estão diretamente relacionadas com a equação linear apresentada na Seção 2.4. Se tais funcões satisfazem a equação (2.22), então o Método de Mahler nos fornece uma relação entre os graus de transcendência entre os valores dessas funções, aplicadas em um α pertencente a bola unitária, e o grau de transcendência entre essas funções sobre $\overline{\mathbb{Q}}$. Para mais detalhes, recomendamos [2, Seção 5.1] e a [3, Seção 4], neste último encontramos um estudo profundo e cheio de aplicações desta independência algébrica. A aplicação do método no caso de funções multivariadas é abordado em [2, Seção 5.2].

Ainda em [2, Seção 7], podemos encontrar uma aplicação do Método de Mahler para implicar a transcendência de números pertencentes a corpos de característica maior que 0. Um conhecimento mais profundo de álgebra abstrata será necessário para entendimento de tal seção.

Esta dissertação possibilitou um estudo mais aprofundado sobre um assunto que, por vezes, não é nem apresentado durante os cursos de graduação em matemática no Brasil, e também não é considerado como área básica fundamental em cursos de mestrado em quase todos os locais do país. A teoria dos números, ainda é um ramo de pesquisa muito pequeno no Brasil, porém ela está sob grande expansão. Até mesmo a literatura da área em português é muito pequena ainda. Pretendo continuar meus estudos a título de doutorado nessa área incrível.

Bibliografia

[1] NISHIOKA, K., *Mahler Functions and Transcendence*, 1 ed., Berlin: Springer-Verlag, Lecture Notes in Math., 1997.

[2] ADAMCZEWSKI, B., Mahler's Method, *Doc. Math. Extra Vol. Mahler Selecta* (2019), 95–122.

[3] PELLARIN, F., An introduction to Mahler's method for transcendence and algebraic independence, available at arXiv:1005.1216v2[math.NT] preprint (2010).

[4] NISHIOKA, K., Algebraic function solutions of a certain class of functional equations, *Archiv der Mathematik* **44** (1985), 330–335.

[5] MAHLER, K., Arithmetische eigenschaften der lösungen einer klasse von funktionalgleichungen, *Math. Ann.* **101** (1929), 342–366.

[6] MAHLER, K., Uber das verschwinden von potenzreihen mehrerer veränderlichen in speziellen punktfolgen, *Math. Ann.* **103** (1930), 573–587.

[7] MAHLER, K., Arithmetische Eigenschaften einer Klasse transzendental- transzendente Funktionen, *Math. Z.* **32** (1930), 545–585.

[8] MAHLER, K., *Lectures on Transcendental Numbers*, 1 ed., Berlin· Heidelberg· NewYork: Springer-Verlag, 1976.

[9] MARQUES, D., *Teoria dos Números Transcendentes*, 1 ed., Rio de Janeiro: SBM, 2013.

[10] GOOD, I., A reciprocal series of Fibonacci numbers, *Fibonacci Quart*, **12** (1974), No 346.

[11] MAHLER, K., On the transcendency of the solutions of special class of functional equations, *Bull. Austral. Math. Soc.*, **13** (1975), 389–410.

[12] ROTH, K., Rational approximations to algebraic numbers, *Mathematika*, **2** (1955), No 3, 1–20.

[13] LIOUVILLE, J., Sur les classes très étendues de quantités dont la valeur n'est ni algébrique, ni même réductible à des irrationelles algébriques, *C.R. Acad. Sci. Paris*, **18** (1944), 883–885.

[14] BOMBIERI, E. and Gubler, W., *Heights in Diophantine Geometry*, 1 ed., Cambridge: New Mathematical Monographs, 2006.

[15] KOVALEV, A., Isolated zeros and the identity theorem, Teaching materials, available at https://www.dpmms.cam.ac.uk/∼agk22/id-thm.pdf (2019).

[16] ARFKEN, G., *Mathematical Methods for Physicists*, 3 ed., Orlando: Academic Press, 1985.

[17] PERRON, O., *Die Lehre von den Kettenbruchen*, 1 ed., New York : Chelsea, 1929.

[18] POORTEN, A., Obituary: Kurt Mahler 1903–1988, *J. Austral. Math. Soc.*, **51** (1991), 343–380.

[19] TURA, F., *Equações Polinomiais, Resultantes, e o Teorema de Bezout.* Dissertação de Mestrado - PPG Matemática Aplicada - UFRGS - available at http: www.biblioteca.ufrgs.br/bibliotecadigital/ (2006).

[20] HILDEBRAND, A., Asymptotic Analysis, 1 ed., *Lecture Notes, Math* **595**, 2009.

[21] WALDSCHMIDT, M., *Diophantine Approximation on Linear Algebraic Groups: transcendence properties of the exponential function in several variables*, 1 ed., Verlag Berlin Heidelberg New York: Springer, 2000.