Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Distância de Mallows para Estimação da Probabilidade de Ruína em Processos de Risco Clássico

por

Débora Borges Ferreira

Brasília,
2009

Dedico esse trabalho ao quarteto fantástico:

papai, mamãe, Miminha e Dora. Vocês são demais!!

Agradecimentos

Ao meu poderoso Deus que tem me sustentado até aqui, tem sido meu auxílio, meu protetor! A Ele toda honra e louvor!!

À Professora Chang por me orientar e me ensinar tanta probabilidade!! Foram muitos os momentos tensos que me fizeram crescer. Meu muito obrigada por ter acreditado em mim, pela paciência, pelos puxões de orelha e pelo exemplo de profissional que ela é.

À querida Cátia que além de bonita é inteligente!! Sob os cuidados dela, no mestrado comecei a descobrir a beleza da Probabilidade, e me apaixonei tão profundamente que aqui estou. Sou grata pelas excelentes aulas que assisti, e pelo muito que aprendi.

Aos professores da banca: Silvia Lopes, Vladimir Belitsky e Viviane Medeiros. Muito obrigada por terem saído do conforto de seus lares para participarem da defesa, e pelo tempo gasto com a leitura. As sugestões e críticas foram muito bem vindas!

À minha família que sempre me apoiou: papai, mamãe (me livrou da louça), Mima, Dorinha (carinha de anjo), vovó Joana, vovô Sebastião, tia Nazaré, primos Susie, Sérgio, Eliane, Fábio, Patrícia, Sara, Cris... tio Batista, tia Celmi, meus lindos priminhhos: Gabriel, Matheus, Eduarda, Milena, João, Karoline, Bia, Juliana e Arthur... Não dá pra escrever o nome de todos... é muita gente!! Agradeço a toda minha família que de perto ou de longe torceu por mim!!

Aos professores da Universidade de Brasília que me acompanharam desde a graduação: Célius, Ana Maria Gandulfo, Liliane, Shokraniam, Jairo, Helmar, Hemar, Rudolf, João Carlos, Antônio Luís, Elves, José Valdo, José Alfredo, Nigel, Tânia Schmidt, Alexei, Lucero, Mauro Rabelo, Mauro Patrão, Aline e Marcelo.

Aos funcionários que sempre me trataram com carinho: Manoel, Gari, Tânia, Eveline, Valdir, Isabel, Rejane, Célia.

Aos meus eternos amigos da Universidade de Brasília: Adail, Juliana, Adriana, Euro, Jhames, Cira, Ary, Daniele, André, Luís, Luvercy, Walter, Magno, Miguel, Fabiano, Luciene, Fernando, Jhone, Aline, Manuela, Evander, Thiago, Eunice, Daniel, Claudiney, Jefferson, Ricardo, Anyele, Raquel, Isabel, Janete, Andréa, Kélen, Simone, Lineu e Nilton. Lhes agredeço pelas risadas, conversas compridas, cafezinhos, companhia para o almoço no RU, cineminhas... Por tudo!! Nunca vou esquecer vocês!!!

Ao reitor da Universidade Federal do Rio Grande do Norte José Ivonildo do Rego por ter acreditado em mim e me ajudado na liberação.

Aos professores do Departamento de Matemática da UFRN que me apoiaram e torceram por mim: Roosevelt, Querginaldo, Cláudio, Jaziel,

Aos meus amigos e professores por todo o carinho, consideração, apoio, amizade, companheirismo: André, Viviane, Jacques, Gabriela, Fagner, Fabiana, Odenise, Pledson e Dione.

À princesa mais linda de Natal que trouxe tanta felicidade ao meu coração aflito: Ana Clara (Clarinha).

Aos amigos que fiz em Natal, que me descontraíram e ajudaram tanto: Cícera, Estela, Eliana, Jackélia (companheira).

Às minhas eternas amigas de Brasília: Katharina, Gabriela, Eveline, Sue, Raene, Paula, Bianca, Juscelia, Luciene, Suélen, Milena, Ana Raquel, Júlia, Amanda, Laís, Susana e Pastora Itajamy.

Aos amigos do DNOCS.

Ao CNPq e CAPES pelo auxílio financeiro.

Resumo

Neste trabalho, com o objetivo de estimar a probabilidade de ruína de processos de risco, estabelecemos várias propriedades da distância de Mallows. Provamos a representação da distância de Mallows relativa à cota superior de Fréchet de distribuições conjuntas e também condições suficientes para a equivalência entre convergência em Mallows e convergência em distribuição para estáveis. Como sub-produto, os resultados são utilizados na estimação paramétrica e não-paramétrica da probabilidade da ruína no modelo clássico de reserva de risco com indenizações de cauda pesada independentes, não necessariamente identicamente distribuídas.

Palavras-Chave: distância de Mallows, leis estáveis, probabilidade de ruína, processos de reserva de risco.

Abstract

For Mallows distance, we establish a representation result and present sufficient conditions for its equivalence to convergence in distribution to stable laws. Applications include parametric and non-parametric estimation for the ruin probability associated to the classical reserve risk processes.

key-words: Mallows distance; stable laws; ruin probabilities; risk reserve processes.

Sumário

Introdução

Um dos problemas centrais da Teoria de Risco é a estimação da probabilidade da ruína $\Psi(u)$ associada ao processo de reserva de risco

$$R_t = u + ct - \sum_{i=1}^{N_t} X_i, \quad \Psi(u) = P\left(\inf_{t \geq 0} R_t < 0\right) \tag{1}$$

onde R_t representa a reserva da seguradora, $c > 0$ é a taxa de prêmios, u é o capital inicial da seguradora e $\{N_t\}$ representa o processo de chegada das indenizações $X_1, X_2, ...$

Neste trabalho, com o objetivo de estimar a probabilidade da ruína $\Psi(u)$, quando as indenizações possuem distribuição de cauda pesada, faremos uso da distância de Mallows (1972) que constitui uma métrica no espaço das distribuições de probabilidade. Para $\alpha > 0$, definimos a distância Mallows entre duas distribuições F e G, $d_\alpha(F, G)$, por

$$d_\alpha(F, G) = \left(\inf_{(X,Y)} E\{|X - Y|^\alpha\}\right)^{1/\alpha} \tag{2}$$

onde o ínfimo é sobre todos os vetores aleatórios (X, Y) com distribuições marginais F e G, isto é, $X \stackrel{\mathrm{d}}{=} F$, $Y \stackrel{\mathrm{d}}{=} G$. Para $\alpha = 1$, a distância de Mallows d_α também é conhecida como métrica de Wasserstein (1969) e, em vários campos de aplicação de natureza empírica, como EMD ("Earth Mover's Distance"). Dentre estas aplicações, podemos citar o seu uso em problemas de transporte associados a alocação de terra, medição de similaridade de textura e cor, identificação de assinaturas e imagens, partição de aglomerados, "clustering"e outros.

A distância $d_\alpha(\cdot, \cdot)$ é particularmente interessante quando as distribuições em questão F e G são de cauda pesada, isto é, não possuem variança finita. Neste caso, a similaridade entre as mesmas pode ser avaliada por $d_\alpha(F, G)$ com $0 < \alpha < 2$. O seu uso também tem sido explorado, em trabalhos recentes, para obtenção do Teorema do Limite Central para distribuições $\alpha-$estáveis (Johnson e Samworth (2005); Barbosa e Dorea (2009)).

De grande importância para a estimação de $\Psi(u)$ é o estudo do comportamento assintótico do processo de perda agregada

$$S_t = u - R_t = \sum_{i=1}^{N_t} X_i - ct.$$

Ou ainda,

$$S_{T_n} = \sum_{i=1}^{N_{T_n}} X_i - cT_n = \sum_{i=1}^{N_{T_n}} (X_i - cV_i) \tag{3}$$

onde $T_n = V_1 + V_2 + ... + V_n$ é o tempo de chegada do $n-$ésimo sinistro e $V_1, V_2, ...$ representam os tempos entre chegadas das indenizações.

Numa formulação mais geral, o problema consiste em se analisar o comportamento assintótico de somas parciais aleatoriamente indexadas do tipo $\sum_{i=1}^{\tau_n} X_i$ onde X_i's possuem distribuição de cauda pesada e $\{\tau_n\}$ é uma sequência de índices aleatórios. Este comportamento pode ser obtido via distância Mallows.

Bickel e Freedman (1981) mostram que: se $\alpha \geq 1$ e $\{F_n\}$ e F são distribuições satisfazendo

$$\int |x|^\alpha dF(x) < \infty \;\text{ e }\; \int |x|^\alpha dF_n(x) < \infty \;\; n = 1, 2, ...$$

então

$$d_\alpha(F_n, F) \underset{n}{\rightarrow} 0 \iff F_n \xrightarrow{\text{d}} F \text{ e } \int |x|^\alpha dF_n(x) \underset{n}{\rightarrow} \int |x|^\alpha dF(x) \tag{4}$$

($\xrightarrow{\text{d}}$: convergência em distribuição). O uso direto do resultado (4) apresenta sérias restrições pois requer a existência do $\alpha-$momento finito, o que não ocorre com distribuições pertencentes ao domínio de atração de distribuições G_α ($\alpha-$estáveis). Os resultados que descrevemos a seguir nos permitem contornar essas restrições.

No Capítulo 1, sumarizamos os resultados conhecidos das distribuições $\alpha-$estáveis e correspondentes domínios de atração. Introduzimos a terminologia e a notação dos processos de risco e apresentamos algumas propriedades da distância de Mallows incluindo o Teorema do Limite Central para distribuições $\alpha-$estáveis.

No Capítulo 2 apresentamos os resultados relativos à distância de Mallows. No Teorema da Representação (Teorema 2.4) mostramos que se $\alpha \geq 1$ então

$$(d_\alpha(F,G))^\alpha = d_\alpha^\alpha(F,G) = E\left\{\mid F^{-1}(U) - G^{-1}(U) \mid^\alpha\right\} \tag{5}$$

onde U tem distribuição uniforme no intervalo $(0,1)$ e F^{-1} e G^{-1} são funções inversas generalizadas. Esta representação estende os resultados anteriores de Major (1978), de Bickel e Freedman (1981) e de Johnson e Samworth (2005). Os Corolários 2.5 e 2.6 exibem representações alternativas fazendo uso da cota superior de Fréchet

$$d_\alpha^\alpha(F,G) = E\{\mid X^* - Y^* \mid^\alpha\}$$

onde $X^* \stackrel{\mathrm{d}}{=} F$, $Y^* \stackrel{\mathrm{d}}{=} G$ e $P(X^* \leq x, Y^* \leq y) = \min\{F(x), G(y)\}$.

Na seção 2.3, para o caso de interesse $F_n \stackrel{\mathrm{d}}{=} \frac{S_n - b_n}{a_n}$ onde $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, $a_n > 0$ e b_n sequências de constantes, estabelecemos a correspondência

$$d_\alpha(F_n, G_\alpha) \underset{n}{\rightarrow} 0 \iff F_n \stackrel{\mathrm{d}}{\rightarrow} G_\alpha$$

onde G_α é uma distribuição $\alpha-$estável e quando $X_1, X_2, ...$ são independentes com distribuição comum $F \in \mathcal{D}_{NF}(G_\alpha)$ (domínio normal forte de atração). Variantes dessa correspondência também são apresentadas (Lemas 2.11 e 2.17 e Teorema 2.15). Um estudo refinado relativo às várias caracterizações do domínio de atração de distribuições estáveis é feito no Lema 2.16.

A convergência em distância Mallows para sequências aleatoriamente indexadas é discutida na seção 2.4. O Teorema 2.22 mostra que podemos tomar os índices aleatórios $\{\tau_n\}$ e a sequência $\{X_n\}$ com uma estrutura do tipo $m-$dependência.

Na seção 2.5, analisamos a situação em que temos somas parcialmente indexadas

$$\sum_{i=1}^{\tau_n} X_i$$

onde $X_1, X_2, ...$ são independentes e com distribuição comum $F \in \mathcal{D}_{NF}(G_\alpha)$, Y_α variável aleatória com $Y_\alpha \stackrel{\mathrm{d}}{=} G_\alpha$. Estabelecemos condições que garantam a existência de sequências de constantes $\{c_n\}$ para as quais

$$Z_{\tau_n} = \frac{\sum_{i=1}^{\tau_n} X_i - c_{\tau_n}}{\tau_n^{1/\alpha}} \stackrel{d_\alpha}{\rightarrow} Y_\alpha.$$

O Corolário 2.30 mostra que se $\{\tau_n\}$ é u.ϵ.i. (uniformemente ϵ independente, ver em Dorea et al. (1984)) de $\{Z_n\}$ temos a convergência desejada. Para o caso $F \in \mathcal{D}_N(G_\alpha)$, provamos no Corolário 2.31 que vale a convergência em distribuição

$$Z_{\tau_n} = \frac{\sum_{i=1}^{\tau_n} X_i - c_{\tau_n}}{\tau_n^{1/\alpha}} \xrightarrow{\mathrm{d}} Y_\alpha.$$

No Capítulo 3, exploramos o fato de que

$$P\left(\max_{1\le k\le n}\sum_{i=1}^{k} X_i > x\right) \sim P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i > x\right), \tag{6}$$

para $X_i \stackrel{\mathrm{d}}{=} F_i$ independentes e F_i do tipo cauda longa para todo i, engloba as distribuições estáveis, isto é, relaciona-se as caudas dos máximos das somas parcias com a própria soma (ver Ng et al. (2002)). Usamos este resultado e os obtidos anteriormente para estimar a probabilidade da ruína.

A estimação da probabilidade da ruína tem sido objeto de estudo na literatura. Lundberg, supondo que as indenizações possuíam todos os momentos, apresentou uma estimativa exponencial para a probabilidade da ruína para seu modelo (1). Sparre Andersen (1957) propôs o mesmo resultado de Lundberg, para o modelo clássico (1), no caso mais geral em que o tempo entre chegadas das indenizações eram variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas.

Um modo alternativo de estimar a ruína é estudar o comportamento de $\Psi(u)$ quando u cresce indefinidamente. Resultados de von Bahr (1975), Asmussen et al. (1999) e Samorodnitsky e Taqqu (2000) mostram casos em que há uma relação assintótica entre as caudas da ruína e das indenizações. Cotas do tipo

$$\Psi(u) \sim \frac{\rho}{1-\rho}\bar{F}_s(u) \tag{7}$$

onde $\rho = \frac{EX}{EV} < 1$, $F_s(x) = 1 - \frac{1}{EX}\int_0^x \bar{F}(y)dy$ é a cauda integrada, $\bar{F}(x)$ é a cauda das indenizações e V_i's são os tempos entre chegadas das indenizações que são variáveis independentes e identicamente distribuídas; foram demonstradas para casos onde as indenizações possuíam distribuição Pareto ou lognormal, ou F_s subexponencial, entre outros.

No caso dos estimadores exponenciais apresentados acima, assume-se que as indenizações possuem todos os momentos finitos, que é uma hipótese muito restritiva. Na estimativa (7), uma das hipóteses é que F_s seja subexponencial, contudo não está provada a relação entre as caudas de F e F_s, isto é, se a cauda de F é subexponencial então não necessariamente F_s será. Um exemplo é a distribuição Cauchy, cuja cauda integrada não é subexponencial, ficando clara as inúmeras restrições dos resultados mencionados.

Na seção 3.2, usando resultados de convergência em Mallows e propriedades obtidas anteriormente, úteis em casos em que distribuições de cauda pesada estão envolvidas, estudaremos alguns casos em que temos garantida a convergência do processo de perda agregada clássico estabilizado para uma distribuição $\alpha-$estável. Primeiramente, estudaremos na Proposição 3.1 a equivalência dos processos S_t e seu associado $S_{T_{N_t}}$. Provaremos que

$$\Psi(u) = P\left(\sup_{t\geq 0} S_t > u\right) = P\left(\sup_{n\geq 0} S_{T_n} > u\right),$$

e portanto, estudaremos casos em que

$$\frac{S_{T_n} - c_n}{n^{1/\alpha}} \xrightarrow[n\to+\infty]{d_\alpha} Y_\alpha,$$

ou ainda

$$\frac{S_{T_n} - c_n}{n^{1/\alpha}} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathrm{d}} Y_\alpha. \tag{8}$$

Para a convergência

$$\frac{S_t - c_{N_t}}{N_t^{1/\alpha}} \xrightarrow{d_\alpha} Y_\alpha,$$

provamos nos Teoremas 3.3 e 3.4 que podemos garanti-lá para os casos em que $\{N_t\}$ e X_n são independentes ou $m-$dependentes respectivamente.

Na seção 3.3, obtemos cotas para a probabilidade da ruína usando (6) e os resultados da seção anterior (8). Concluímos, nas Proposições 3.16 e 3.18 que, para alguma sequência real $\{c_n^{'}\}$, temos para M suficientemente grande

$$\Psi_M(u) \sim P\left(Y_\alpha > \frac{u - c_M^{'}}{M^{1/\alpha}}\right), \tag{9}$$

onde

$$\Psi_M(u) = P\left(\sup_{0\leq t\leq M} S_t < u\right)$$

é a probabilidade da ruína ocorrer até o instante de tempo M. Assim

$$\Psi(u) = \lim_{M\to\infty} \Psi_M(u).$$

Concluindo, no Capítulo 4, usamos as técnicas de estimação via núcleos de densidade (não paramétrica) e paramétrica para obtenção de estimativas para a probabilidade da ruína.

Usamos resultados importantes sobre as consistências dos estimadores de densidade tipo núcleo, $f_n(x)$,

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} W(h, x, X_i), \quad h = h_n \downarrow 0 \text{ quando } n \to +\infty, \tag{10}$$

de Campos e Dorea (2001) e Campos (2001), para na seção 4.2, estimarmos a probabilidade da ruína. Pois, por (9) e para M grande

$$\Psi_M(u) \sim P\left(Y_\alpha > \frac{u - c'_M}{M^{1/\alpha}}\right) = \int_{\frac{u-c'_M}{M^{1/\alpha}}}^{\infty} g_\alpha(x)dx,$$

onde g_α é a densidade de Y_α.

Supomos que as indenizações X_i's são variáveis independentes e identicamente distribuídas, os tempos entre chegadas V_i's também são independentes com mesma distribuição e independem das indenizações, e que $X - V$ está no domínio normal de atração de Y_α v.a. $\alpha-$estável, então, usamos os estimadores do tipo núcleo para estimar a densidade de $X - V$, f_{X-V}. Nas Proposições 4.12, 4.13, 4.14 e 4.15 obtivemos estimativas para a probabilidade da ruína, pois, sob algumas condições de regularidade,

$$\int_{\frac{u-c'_M}{M^{1/\alpha}}}^{\infty} f_n(x)dx \underset{n}{\to} \int_{\frac{u-c'_M}{M^{1/\alpha}}}^{\infty} f_{X-V}(x)dx,$$

e para M suficientemente grande

$$\int_{\frac{u-c'_M}{M^{1/\alpha}}}^{\infty} f_{X-V}(x)dx \sim \int_{\frac{u-c'_M}{M^{1/\alpha}}}^{\infty} g_\alpha(x)dx.$$

Para o caso em que as X_i's são variáveis independentes mas não identicamente distribuídas, na Observação 4.16 usamos os estimadores tipo peso assintoticamente não viciados.

Usando os resultados de estimação paramétrica de Dorea et al. (2006) e Otiniano (2006), na seção 4.3, estimamos os parâmetros de Y_α por meio de $X - V$. Na Proposição

4.18, temos que para c_n apropriado e M grande

$$\Psi_M(u) \sim P\left(Y_\alpha > \frac{u - c'_M}{M^{1/\alpha}}\right) \sim C_{\hat{\alpha}_n} \hat{\sigma}_n^{\hat{\alpha}_n} \left(\frac{u - c'_M}{M^{1/\hat{\alpha}}}\right)^{-\hat{\alpha}_n},$$

para estimadores de estabilidade $\hat{\alpha}_n$ e viés $\hat{\sigma}_n$. Nela, assumimos que X_i's são independentes com distribuição comum, V_i's também independentes com distribuição comum e independentes das X_i's e, novamente, $X - V$ está no domínio normal de atração de Y_α $\alpha-$estável. Assim, obtemos os parâmetros da cauda de $X - V$, que coincidem com os da cauda de Y_α. Para terminar, na Proposição 4.19, fizemos também uma estimativa para a ruína usando os estimadores de máxima verossimilhança condicional apresentados por Hill (1975), obtendo

$$\Psi_M(u) \sim P\left(Y_\alpha > \frac{u - C'_M}{M^{1/\alpha}}\right) \sim \hat{a}_{+_n} \left(\frac{u - C'_M}{M_n^{1/\hat{\alpha}}}\right)^{-\hat{\alpha}_n}$$

para $\hat{a}_{+_n}$ e $\hat{\alpha}_n$ estimadores da constante caudal e do índice de estabilidade de Y_α, respectivamente.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Abreviações e Notações

v.a.	:	variável aleatória
f.d.	:	função de distribuição
i.i.d.	:	independentes e identicamente distribuídas
q.c.	:	quase certamente
$\stackrel{\mathrm{d}}{=}$	:	identidade em distribuição
$\sharp$	:	cardinalidade de um conjunto
$a \wedge b$	$=$	$\min\{a, b\}$
$a \vee b$	$=$	$\max\{a, b\}$
$\bar{F}(x)$	$=$	$1 - F(x)$, $\bar{F}$ é chamada cauda de F
$\mathbb{F}_\alpha$	$=$	$\{F \text{ f.d.} : \int \|x\|^\alpha dF(x) < \infty\}$, para $\alpha > 0$
H^*	$=$	$F \wedge G$, cota superior de Fréchet onde F e G são funções de distribuição
$F^{-1}(u)$	$=$	$\inf\{x : F(x) \geq u\}$, $0 < u < 1$ inversa generalizada
$\mathcal{B}$	$=$	$\sigma-$álgebra de Borel
$\xrightarrow{p}$	:	convergência em probabilidade
$\xrightarrow{\mathrm{d}}$	:	convergência em distribuição
$\xrightarrow{\alpha}$	:	convergência em média
$\xrightarrow{d_\alpha}$	:	convergência em distância Mallows

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}(G_\alpha) &: \text{ domínio de atração da distribuição } G_\alpha \\
\mathcal{D}_N(G_\alpha) &: \text{ domínio normal de atração da distribuição } G_\alpha \\
\mathcal{D}_{NF}(G_\alpha) &: \text{ domínio normal forte de atração da distribuição } G_\alpha
\end{aligned}$$

Sejam f e g funções reais, escrevemos $C(f)$ para o subconjunto real formado pelos pontos de continuidade de f, e a expressão $f(x) \sim g(x)$ significa que $f(x)/g(x)$ converge para 1 quando x diverge para $+\infty$.

Uma função $L(x)$ é chamada de *lentamente variante no infinito,* ou *de variação lenta* se $L(x) \neq 0$, para x suficientemente grande, e $L(cx) \sim L(x)$ para qualquer $c > 0$.

1.2 Distribuições Subexponenciais e Estáveis

Definição 1.1. Uma função de distribuição F é dita de *cauda pesada,* ou *grossa* pela direita se $\int e^{rx} dF(x) = \infty$, para todo $r > 0$.

Caso contrário, se existir algum $r_0 > 0$ tal que $\int e^{r_0 x} dF(x) < \infty$ então $F \in \mathbb{F}_p \ \forall \ p > 0$, e é chamada de *cauda leve.*

Há vários exemplos de distribuições de cauda pesada:

Exemplo 1.2. Distribuições com cauda de variação regular, isto é, $\bar{F}(x) = L(x)/x^\alpha$ onde $\alpha > 0$ e L é uma função de variação lenta.

Exemplo 1.3. Distribuição lognormal com densidade

$$\frac{1}{x\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(\log x - \mu)^2/2\sigma^2}.$$

Exemplo 1.4. Distribuição de Weibull com taxa de falha decrescente $\bar{F}(x) = e^{-x^\beta}$ com $0 < \beta < 1$.

Uma subclasse importante das distribuições de cauda pesada são as de cauda longa.

Definição 1.5. F é chamada distribuição de *cauda longa,* escrevemos $F \in \mathcal{L}$, se

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\bar{F}(x+y)}{\bar{F}(x)} = 1 \text{ para algum } y > 0.$$

Outra subclasse importante, que está contida nas de cauda longa, são as subexponenciais.

Definição 1.6. F é chamada distribuição *subexponencial* se

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\bar{F}^{(2)}(x)}{\bar{F}(x)} = 2$$

onde $F^{(2)} = F * F$, escrevemos $F \in \mathcal{S}$.

Propriedade 1.7. Sejam F e G funções de distribuição

i) se $G \in \mathcal{S}$ então $\lim_{x\to\infty} \frac{\bar{G}(x+y)}{\bar{G}(x)} = 1$ uniformemente para $y \in [0, y_0]$ e $\forall\ y_0 < \infty$;

ii) se $\lim_{x\to\infty} \frac{\bar{F}(x)}{\bar{G}(x)} = c$, onde $0 < c < \infty$, então

$$F \in \mathcal{S} \Longleftrightarrow \mathrm{G} \in \mathcal{S};$$

iii) se $G \in \mathcal{S}$ tal que $\lim_{x\to\infty} \frac{\bar{F}(x)}{\bar{G}(x)} = c$ para algum $c > 0$ então

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\overline{F * G}(x)}{\bar{G}(x)} = 1 + c;$$

iv) se $G \in \mathcal{S}$ então para todo $\epsilon > 0$ existe $c = c(\epsilon)$ tal que $\bar{G}^{(n)}(x) \leq c(1+\epsilon)^n \bar{G}(x)$ $\forall\ n$ e $x \geq 0$.

(Ver, por exemplo, Klüppelberg (1988) ou Ng et al. (2002))

A seguinte classe de distribuições será objeto de nosso estudo.

Definição 1.8. Uma variável aleatória X_α possui *distribuição ou lei estável* se, para $X_1, X_2, ...$ cópias independentes de X_α, existirem $c_n \in \mathbb{R}_+^*$ e $d_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$X_1 + X_2 + ... + X_n \stackrel{\mathrm{d}}{=} c_n X_\alpha + d_n. \tag{1.1}$$

Se $d_n = 0$ dizemos que X_α possui *distribuição estritamente estável.*

Para X_α não-degenerada prova-se que existe único α, $0 < \alpha \leq 2$, tal que $c_n = n^{1/\alpha}$.

Denominamos α de *expoente* ou *índice de estabilidade de* X_α. Se $\alpha \neq 1$ então, para alguma constante $d \in \mathbb{R}$, temos $d_n = -d(n^{1/\alpha} - n)$ e $X - d$ tem distribuição estritamente estável. Para o caso $0 < \alpha < 2$, temos que $E|X_\alpha|^\alpha = \infty$. Assim, quando $0 < \alpha < 2$, prova-se que as distribuições estáveis são um subconjunto importante das distribuições subexponenciais.

As distribuições estáveis possuem quatro parâmetros que as caracterizam. Escrevemos

$$X_\alpha \stackrel{\mathrm{d}}{=} S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$$

para indicar uma variável com distribuição $\alpha-$estável, onde $\sigma > 0$ é o parâmetro de escala, $|\beta| \leq 1$ assimetria ou viés e μ locação. Esses parâmetros aparecem em (1.1), pois prova-se que a constante d citada coincide com μ, e para o caso em que $\alpha = 1$, temos que $d_n = \frac{2}{\pi}\sigma\beta n \ln n$. Os exemplos mais conhecidos de distribuições estáveis são

Exemplo 1.9. Distribuição Normal $N(\mu, 2\sigma^2) = S_2(\sigma, 0, \mu)$ cuja densidade é

$$(2\sigma\sqrt{\pi})^{-1} e^{-(x-\mu)^2/4\sigma^2}.$$

Exemplo 1.10. Distribuição Cauchy $S_1(\sigma, 0, \mu)$ com densidade

$$\frac{\sigma}{\pi((x-\mu)^2 + \sigma^2)}.$$

Exemplo 1.11. Distribuição de Lévy $S_{1/2}(\sigma, 1, \mu)$ com densidade

$$\left(\frac{\sigma}{2\pi}^{1/2}\right) \frac{1}{(x-\mu)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{\sigma}{2(x-\mu)}\right\}.$$

Segue na observação abaixo algumas propriedades das distribuições estáveis.

Observação 1.12. Seja X_α v.a. $X_\alpha \stackrel{\mathrm{d}}{=} S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ e a uma constante real não nula. Então

i) $-X_\alpha \stackrel{\mathrm{d}}{=} S_\alpha(\sigma, -\beta, \mu)$;

ii) $X_\alpha + a \stackrel{\mathrm{d}}{=} S_\alpha(\sigma, \beta, \mu + a)$;

iii) $aX_\alpha \stackrel{\mathrm{d}}{=} S_\alpha(|a|\sigma, \mathrm{sinal}(a)\beta, a\mu), \quad \alpha \neq 1$;

iv) $aX_\alpha \stackrel{\mathrm{d}}{=} S_1(|a|\sigma, \mathrm{sinal(a)}\beta, a\mu - \frac{2}{\pi}a(\ln|a|)\sigma\beta), \quad \alpha = 1$;

v) X_α é simétrica se, e somente se, $\beta = 0$ e $\mu = 0$;

vi) X_α é simétrica sobre μ se, e somente se, $\beta = 0$;

vii) para $\alpha \neq 1, X_\alpha$ é estritamente estável se, e somente se, $\mu = 0$;

viii) para $\alpha \neq 1, X_\alpha - \mu$ é estritamente estável;

ix) para $\alpha = 1, X_\alpha$ é estritamente estável se, e somente se, $\beta = 0$.

Definição 1.13. Dada uma variável aleatória X_α com função de distribuição G_α, definimos seu *domínio de atração*, $\mathcal{D}(G_\alpha)$, como o conjunto das funções de distribuição F tais que para $X_1, X_2, ...$ v.a.'s i.i.d. com distribuição F existem $a_n \in \mathbb{R}_+^*$ e $b_n \in \mathbb{R}$, tais que

$$\frac{X_1 + ... + X_n - b_n}{a_n} \xrightarrow{\text{d}} X_\alpha.$$

Podemos escolher $a_n = n^{1/\alpha}L(n)$, onde L é uma função lentamente variante no infinito e $b_n = n\int_{|y|\leq a_n} ydF(y)$. É fácil ver que uma variável é $\alpha-$estável se, e somente se, $\mathcal{D}(G_\alpha) \neq \phi$.

As propriedades abaixo caracterizam as caudas das distribuições mencionadas acima.

Propriedade 1.14. Seja $G_\alpha \stackrel{\text{d}}{=} S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ com $0 < \alpha < 2$. Então

$$\lim_{x\to\infty} x^\alpha(1 - G_\alpha(x)) = C_\alpha \frac{1+\beta}{2}\sigma^\alpha$$

$$\text{e} \quad \lim_{x\to\infty} x^\alpha G_\alpha(-x) = C_\alpha \frac{1-\beta}{2}\sigma^\alpha$$

onde

$$C_\alpha = \left(\int_0^\infty x^{-\alpha}\sin x dx\right)^{-1} = \begin{cases} \frac{1-\alpha}{\Gamma(2-\alpha)\cos(\pi\alpha/2)} & \alpha \neq 1, \\ 2/\pi & \alpha = 1. \end{cases}$$

Em Mijnheer (1987) temos a

Caracterização Alternativa: Para $G_\alpha \stackrel{\text{d}}{=} S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ então

$$\begin{aligned} 1 - G_\alpha(x) &= a_+ x^{-\alpha}(1 + x^{-\gamma} o(1)) \quad x > 0 \\ \text{e } G_\alpha(-x) &= a_- x^{-\alpha}(1 + x^{-\gamma} o(1)) \quad x > 0 \end{aligned} \tag{1.2}$$

onde $\gamma < \alpha$ e as constantes $a_+, a_- \geq 0$.

Um equivalente da Propriedade 1.14, para domínios de atração, é a propriedade abaixo

Propriedade 1.15. Para $0 < \alpha < 2$, $F \in \mathcal{D}(S_\alpha(\sigma, \beta, \mu))$ se, e somente se,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1 - F(x)}{1 - F(x) + F(-x)} = \frac{a_+}{a_+ + a_-}$$

$$\text{e } \ 1 - F(x) + F(-x) \sim \frac{2-\alpha}{\alpha} x^{-\alpha} L(x)$$

onde a_+ e a_- são as constantes da propriedade anterior referentes à cauda da estável e L lentamente variante.

Abaixo, temos um exemplo de uma distribuição que está no domínio de atração de uma $\alpha-$estável.

Exemplo 1.16. Considere a distribuição Pareto com parâmetro α, cuja densidade é

$$f(x) = \frac{\mu}{\alpha}\left(\frac{\mu}{x+\mu}\right)^{\alpha+1} \quad x > 0.$$

Assim, sua calda é $\bar{F}(x) = \frac{\mu^{\alpha+2}}{\alpha^2(x-\mu)^\alpha}$ para $x > 0$, e $F(x) = 0$ para $x < 0$. Logo, $F \in D(S_\alpha(\sigma, 1, \mu))$, pois satisfaz a Propriedade 1.15.

Na Definição 1.13, nos casos em que $a_n = an^{1/\alpha}$, dizemos que F pertence ao *domínio normal de atração de* G, $G \stackrel{\text{d}}{=} S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$, escrevemos $F \in \mathcal{D}_N(G)$. Em Gnedenko e Kolmogorov (1954) temos uma caracterização das distribuições do domínio normal de atração de uma $\alpha-$estável, que induz a definição abaixo de Johnson e Samworth (2005).

Definição 1.17. Se X tem função de distribuição F na forma

$$\begin{aligned} F(x) &= \tfrac{a_- + b(x)}{|x|^\alpha} \quad \text{para } \ x < 0 \\ 1 - F(x) &= \tfrac{a_+ + b(x)}{x^\alpha} \quad \text{para } \ x \geq 0 \end{aligned}$$

onde $b(x) \to 0$ quando $x \to \pm\infty$, então dizemos que X está no domínio normal de atração de alguma S_α com parâmetros de cauda a_+ e a_-.

Observação 1.18. Quando para algum $\gamma > 0$ e C constante

$$b(x) \leq \frac{C}{|x|^\gamma},$$

dizemos que X está no *domínio normal forte de atração de* S_α, escrevemos $X \in \mathcal{D}_{NF}(S_\alpha)$.

No Exemplo 1.16 temos que $F \in \mathcal{D}_{NF}(S_\alpha)$, para $a_+ = \frac{\mu^{\alpha+2}}{\alpha^2}$ e

$$b(x) = \frac{\mu^{\alpha+2}x^\alpha}{\alpha^2(x-\mu)^\alpha} - \frac{\mu^{\alpha+2}}{\alpha^2} \leq \frac{\mu^{\alpha+2}}{\alpha^2 x^\gamma} \quad \text{onde} \quad \gamma < \alpha.$$

1.3 Processos de Risco

A Ciência Atuarial é aquela que estuda o movimento financeiro de empresas seguradoras. A Teoria de Risco é uma de suas áreas, e está destinada ao estudo de modelos relacionados a seguros de não vida, ou seja, seguros de automóveis, saúde, previdência, responsabilidade civil, entre outros.

Uma subárea da Teoria de Risco é a Teoria da Ruína, que utilizando modelos estocásticos que representem a evolução da reserva de capital de uma atividade seguradora ao longo do tempo, denominados *processos de risco*, estima-se a *probabilidade da ruína,* ou seja, a probabilidade de que o capital da empresa torne-se negativo em algum instante de tempo.

Considerando que as atividades de uma seguradora se baseiam, em geral, no recebimento de prêmios e no pagamento de indenizações, a probabilidade da ruína serve como indicação da eficiência do segurador em, a partir de um dado capital inicial, combinar os processos de recebimento de prêmios e pagamento de indenizações, a fim de garantir a estabilidade da sua reserva de capital.

Em 1905, Lundberg propôs um modelo de processos de risco a tempo contínuo $\{R_t\}_{t\geq 0}$, onde os prêmios chegavam linearmente no tempo e as indenizações são pagas de acordo com um modelo de Poisson Composto. Desse modo, podemos escrever

$$R_t = u + ct - \sum_{i=1}^{N_t} X_i,$$

onde u é o capital inicial da seguradora, os prêmios ocorrem com taxa constante c, X_i representa o valor do i-ésimo sinistro, N_t o número de sinistros ocorridos no intervalo $[0, t]$, e os tempos entre chegadas dos mesmos são variáveis aleatórias independentes com distribuição exponencial taxa λ e independem dos $X_i's$. Considera-se também que as indenizações X_i's são v.a.'s i.i.d..

Por conveniência, trabalharemos com a definição de *processos de perda agregada* $\{S_t\}_{t\geq 0}$

$$S_t = u - R_t = \sum_{i=1}^{N_t} X_i - ct. \tag{1.3}$$

Podemos escrever $N_t = max\{n : T_n \leq t\}$, onde T_n é o tempo de chegada do n-ésimo sinistro. Considere V_i o tempo entre as chegadas da $i-1$ e $i-$ésima indenização, então $T_n = \sum_{i=1}^{n} V_i$. E denominaremos

$$S_{T_{N_t}} = \sum_{i=1}^{N_t} X_i - T_{N_t} = \sum_{i=1}^{N_t} (X_i - V_i)$$

de processo associado a $\{S_t\}$.

Para modelos mais realísticos, podemos imaginar que os tempos de chegada das indenizações dependem das mesmas. Por exemplo, Albrecher e Boxma (2003) propuseram uma variante do modelo clássico onde a distribuição do tempo de chegada do $n-$ésimo sinistro depende do sinistro anterior. Neste trabalho, estamos interessados nos processos de reserva de risco a tempo contínuo (1.3), onde consideraremos casos mais gerais. As X_i's são independentes, mas não necessariamente têm a mesma distribuição, possuem distribuição com cauda grossa, o processo de chegada $\{N_t\}$ é tal que as V_i's são i.i.d. com $E(V^\alpha) < \infty$, para algum $0 < \alpha < 2$, e podem depender de $\{X_n\}$.

Uma medida útil do risco financeiro da seguradora pode ser obtida através do cálculo da probabilidade da ruína $\Psi(u)$, que é definida como sendo a probabilidade da reserva atingir valor negativo em algum período de tempo, ou seja,

$$\Psi(u) = P\left(\inf_{t\geq 0} R_t < 0\right) = P\left(\sup_{t\geq 0} S_t > u\right).$$

O primeiro instante de tempo em que ocorre a ruína é chamado *tempo de ruína:*

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}(u) = \inf\{t : R_t < 0\} = \inf\{t : S_t > u\}.$$

Logo, $\Psi(u) = P(\mathcal{T}(u) < \infty)$. Podemos também calculá-la em tempo finito que é a probabilidade do capital se tornar negativo até o tempo M, escreve-se

$$\Psi_M(u) = P\left(\sup_{0\leq t\leq M} S_t > u\right).$$

Logo, podemos ver que

$$\Psi(u) = \lim_{M\to\infty} \Psi_M(u).$$

Uma medida de segurança que deve ser adotada, para evitarmos as situações em que a ruína é certa, é supormos que o valor médio de indenizações por unidade de tempo seja menor que os prêmios por unidade de tempo, isto é, $E(X) < cE(V)$. No nosso caso, pediremos que $E(X)/E(V) < 1$, assim, tomaremos $c = 1$.

1.4 Distância de Mallows

A Distância de Mallows (1972) constitui uma métrica no espaço das distribuições de probabilidade.

Definição 1.19. Sejam F e G funções de distribuição, e $\alpha > 0$. Definimos a distância $\alpha-$Mallows, ou simplesmente distância Mallows entre F e G por

$$d_\alpha(F, G) = \left(\inf_{(X,Y)} E\{|X - Y|^\alpha\}\right)^{1/\alpha} \tag{1.4}$$

onde o ínfimo é tomado sobre todos os vetores (X, Y) cujas marginais são F e G, isto é, $X \stackrel{\mathrm{d}}{=} F$, $Y \stackrel{\mathrm{d}}{=} G$.

Major (1978) propôs uma possível representação para essa distância para o caso $\alpha \geq 1$.

Sejam F e G funções de distribuição reais tais que

$$\int |x|^\alpha dF(x) < \infty \ \text{ e } \ \int |x|^\alpha dG(x) < \infty,$$

então, para U variável aleatória qualquer uniformemente distribuída no intervalo $(0,1)$ e F^{-1} é a inversa generalizada temos

$$d_\alpha^\alpha(F,G) = E\left\{\mid F^{-1}(U) - G^{-1}(U) \mid^\alpha\right\}. \tag{1.5}$$

Mais tarde, Johnson e Samworth (2005) foram além mostrando que para $\alpha \geq 1$, F e G distribuições como as anteriores, então

$$E\{\mid X - Y \mid^\alpha\} \geq E\{\mid X^* - Y^* \mid^\alpha\},$$

onde $X^* = F^{-1}(U)$, $Y^* = G^{-1}(U)$, X e Y variáveis com distribuições F e G respectivamente. E, se $\alpha > 1$, a igualdade é assumida se, e somente se, $(X,Y) \stackrel{\mathrm{d}}{=} (F^{-1}(U), G^{-1}(U))$.

Um resultado importante que associa convergência em distância Mallows com distribuições de cauda grossa foi proposto por Barbosa e Dorea (2009). Esse resultado constitui uma uma versão do Teorema do Limite Central para leis estáveis.

Teorema 1.20. *(Barbosa e Dorea (2009)) Sejam $1 \leq \alpha < 2$ e X_1, X_2,... variáveis aleatórias independentes. Suponha que existe uma variável aleatória α-estável Y tal que para cópias independentes Y_1, Y_2,... de Y temos satisfeito para todo $b > 0$*

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} E\left\{|X_j - Y_j|^\alpha 1_{\left(|X_j - Y_j| > bn^{\frac{2-\alpha}{2\alpha}}\right)}\right\} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{1.6}$$

Então, para alguma sequência de constantes $\{c_n\}$, e $Z_n \stackrel{\mathrm{d}}{=} \frac{\sum_{i=1}^n X_i - c_n}{n^{1/\alpha}}$, temos

$$d_\alpha\left(F_{Z_n}, F_Y\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

e

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i - c_n}{n^{1/\alpha}} \xrightarrow{\mathrm{d}} Y.$$

Podemos tomar

$$c_n = \sum_{j=1}^{n} E\{(X_j - Y_j)\, 1\left(|X_j - Y_j| \leq bn^{\frac{2-\alpha}{2\alpha}}\right)\} - \mu(n - n^{1/\alpha}),$$

para o caso $1 < \alpha < 2$ *e para* $\alpha = 1$

$$c_n = \sum_{j=1}^{n} E\{(X_j - Y_j)\, 1\left(|X_j - Y_j| \le bn^{1/2}\right)\} - \frac{2}{\pi}\sigma\beta \log n.$$

As constantes $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma \ge 0$ e $|\beta| \le 1$ *são, respectivamente, os parâmetros de locação, escala e assimetria da distribuição estável de* Y.

Capítulo 2

Distância Mallows e Convergência em Distribuição

2.1 Introdução

Neste capítulo, estudamos as propriedades da distância de Mallows e sua conexão com a distribuição assintótica das somas parciais de variáveis aleatórias com distribuições que apresentam cauda pesada. Para

$$F_n \stackrel{\mathrm{d}}{=} \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - c_n}{n^{1/\alpha}}$$

analisamos condições que garantam

$$d_\alpha(F_n, G_\alpha) \underset{n}{\rightarrow} 0 \quad \Longleftrightarrow \quad F_n \stackrel{\mathrm{d}}{\rightarrow} G_\alpha \tag{2.1}$$

onde G_α é uma distribuição $\alpha-$estável e a distribuição comum F de $X_1, X_2, ...$ possui cauda pesada.

Para tal, na seção 2.2, apresentamos um teorema de representação, Teorema 2.4. Neste teorema mostramos que a distância Mallows entre duas distribuições F e G sempre pode ser representada por

$$d_\alpha^\alpha(F, G) = E\left\{\mid F^{-1}(U) - G^{-1}(U) \mid^\alpha\right\}$$

para $\alpha \geq 1$, U é qualquer variável aleatória com distribuição uniforme no intervalo $(0, 1)$ e

F^{-1} é a inversa generalizada. Este resultado, por não assumir a finitude do $\alpha-$momento de F e G, estende os resultados anteriores obtidos por Major (1972) e Bickel e Freedman (1981). Variantes dessa representação estão contidas nos Corolários 2.5 e 2.6.

Na seção 2.3, analisamos a correspondência (2.1). O Lema 2.11 mostra que, para $\alpha \geq 1$, se $d_\alpha(F, G_\alpha) < \infty$, e G_α distribuição estável, temos a convergência

$$d_\alpha(F_n, G_\alpha) \to 0.$$

Para obtenção da recíproca, fazemos um estudo mais refinado dos domínios de atração da distribuição estável G_α, $\mathcal{D}(G_\alpha)$. O Teorema 2.15 caracteriza o domínio normal forte de G_α, $\mathcal{D}_{NF}(G_\alpha)$. O Lema 2.16 estabelece a relação entre os vários domínios de atração.

Tratamos na seção 2.4, de convergências de sequências aleatoriamente indexadas. Sejam $\{Z_n\}_{n\geq 0}$ e Z v.a. tais que $Z_n \xrightarrow{d_\alpha} Z$ e $\{\tau_n\}_{n\geq 0}$ uma sequência de v.a.'s com valores nos inteiros positivos tal que $\tau_n \xrightarrow{p} \infty$. Estudamos casos em que temos garantida a convergência em distância Mallows do processo indexado

$$Z_{\tau_n} \xrightarrow{d_\alpha} Z.$$

Por exemplo, a Proposição 2.18 nos mostra que se as sequências $\{Z_n\}$ e $\{\tau_n\}$ são independentes então temos a convergência anterior. Com uma estrutura de dependência do tipo $m-$dependência, mostramos no Teorema 2.22 que também temos a convergência da sequência indexada.

Na seção 2.5, estudamos a convergência de somas parciais aleatoriamente indexadas. Usamos o Teorema 2.14 para obter a convergência em distância Mallows de sequências do tipo

$$\frac{\sum_{i=1}^{\tau_n} X_i - c_{\tau_n}}{{\tau_n}^{1/\alpha}}. \tag{2.2}$$

Usando a noção da estrutura de dependência u.$\epsilon-$i. (uniformemente ϵ independente) de Dorea et al (1984), mostramos, no Corolário 2.28, que temos a convergência de sequências tipo (2.2). Também, no caso $m-$dependente, segue do nosso Teorema 2.21, que temos a convergência da sequência (2.2) para uma distribuição estável.

2.2 Representação da Distância de Mallows

Para $\alpha \geq 1$ a distância de Mallows, $d_\alpha(F,G)$, pode ser mais facilmente calculada fazendo-se o uso da transformada inversa da probabilidade. Veremos em que condições podemos utilizar a representação

$$d_\alpha^\alpha(F,G) = E\left\{\mid F^{-1}(U) - G^{-1}(U) \mid^\alpha\right\} \quad \alpha \geq 1, \tag{2.3}$$

onde U é uma variável aleatória com distribuição uniforme no intervalo $(0,1)$. Naturalmente, temos que as variáveis $F^{-1}(U) \overset{\mathrm{d}}{=} F$ e $G^{-1}(U) \overset{\mathrm{d}}{=} G$ e o cálculo de (2.3) se reduz à integral $\int_0^1 \mid F^{-1}(u) - G^{-1}(u) \mid^\alpha du$.

Nosso principal resultado dessa seção é a obtenção da representação (2.3) para todo par de distribuições F e G, estendendo assim os resultados anteriores que enunciamos abaixo. A igualdade (2.3) deve ser interpretada no sentido de que se um deles for ∞ o outro também será. Parte desses resultados encontram-se em Dorea e Ferreira (2009).

Lema 2.1. *(Major (1978)). Seja $\alpha \geq 1$ e assuma que $F \in \mathbb{F}_\alpha$ e $G \in \mathbb{F}_\alpha$. Então vale a representação (2.3).*

Lema 2.2. *(Johnson and Samworth (2005)). Sob as hipóteses do Lema 2.1, se $X \overset{d}{=} F$ e $Y \overset{d}{=} G$ então*

$$E\left(\mid X - Y \mid^\alpha\right) \geq E\left(\mid F^{-1}(U) - G^{-1}(U) \mid^\alpha\right). \tag{2.4}$$

E, se $\alpha > 1$, a igualdade em (2.4) é assumida se, e somente se, $(X,Y) \overset{\mathrm{d}}{=} (F^{-1}(U), G^{-1}(U))$.

Os resultados acima permitem a representação (2.3) quando assumimos a hipótese $F \in \mathbb{F}_\alpha$ e $G \in \mathbb{F}_\alpha$. Por outro lado, ainda que $F \notin \mathbb{F}_\alpha$ e $G \notin \mathbb{F}_\alpha$ podemos ter $d_\alpha(F,G) < \infty$. Basta tomar, por exemplo, $F = G$ e temos $d_\alpha(F,G) = 0$. Mostraremos no Teorema 2.4 que se $d_\alpha(F,G) < \infty$ podemos garantir a representação (2.3). Antes, enunciaremos uma versão bi-dimensional para integração por partes que será utilizada na nossa prova.

Lema 2.3. *(Tchen (1980)) Seja ϕ uma função em $\mathbb{R}^2$ limitada, contínua pela direita e que satisfaz para todo $x < x'$ e $y < y'$*

$$\phi(x', y') + \phi(x, y) \geq \phi(x, y') + \phi(x', y).$$

Sejam também H_1 e H_2 duas funções de distribuição em $\mathbb{R}^2$ com as mesmas marginais. Então

$$\int \phi(x,y)dH_2(x,y) - \int \phi(x,y)dH_1(x,y) = \int [H_2(x^-,y^-) - H_1(x^-,y^-)]d\mu_\phi(x,y)$$

onde $H_j(x^-,y^-) = \lim_{\hat{x}\uparrow x, \hat{y}\uparrow y} H_j(\hat{x},\hat{y})$ *e* $\mu_\phi\{(x,x')\times(y,y')\} = \phi(x',y')+\phi(x,y)-\phi(x',y)-\phi(x,y')$.

Teorema 2.4 (Representação). *Seja $\alpha \geq 1$, F e G distribuições quaisquer em $\mathbb{R}$. Então temos*

$$d_\alpha^\alpha(F,G) = E\left\{\mid F^{-1}(U) - G^{-1}(U) \mid^\alpha\right\}$$

onde $U \stackrel{d}{=} U(0,1)$.

Demonstração: Faremos uso do Lema 2.3. Se $d_\alpha(F,G) < \infty$, então existe H_1 com marginais F e G tal que

$$\int |x-y|^\alpha dH_1(x,y) < \infty.$$

Defina para $B > 0$ e $\alpha \geq 1$

$$\phi_B(x,y) = \begin{cases} -|x-y|^\alpha, & -B < x < B \text{ e } -B < y < B \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

É claro que ϕ é limitada e contínua pela direita. Vamos mostrar que

$$\phi_B(x',y') + \phi_B(x,y) \geq \phi_B(x,y') + \phi_B(x',y) \tag{2.5}$$

para $x < x'$ e $y < y'$. Usaremos uma propriedade de funções convexas, uma vez que $-\phi_B(x,y)$ é convexa.

Para $t \in [0,1]$ temos para qualquer função f convexa

$$f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y).$$

Veja que como $x < x'$ e $y < y'$ então temos

$$y - x' \leq y - x \leq y' - x \;\text{ e }\; y - x' \leq y' - x' \leq y' - x,$$

logo,

$$y - x = (1 - t_1)(y - x') + t_1(y' - x) \text{ e}$$

$$y' - x' = (1 - t_2)(y - x') + t_2(y' - x)$$

para $t_1, t_2 \in [0, 1]$. Assim,

$$f(y - x) + f(y' - x') \leq (1 - t_1)f(y - x') + t_1 f(y' - x) + (1 - t_2)f(y - x') + t_2 f(y' - x)$$

$$= f(y - x')(1 - t_1 + 1 - t_2) + f(y' - x)(t_1 + t_2).$$

É fácil ver que $t_1 + t_2 = 1$, e portanto para $f(x) = |x|^\alpha$ temos

$$|y - x|^\alpha + |y' - x'|^\alpha \leq |y - x'|^\alpha + |y' - x|^\alpha,$$

e (2.5) é verdadeiro.

Selecione H_1 do início da demonstração e $H_2 = H^*$, então temos que ambas possuem as mesmas marginais e $H_2(x^-, y^-) - H_1(x^-, y^-) \geq 0$. Pelo Lema 2.3 temos,

$$\int \phi_B(x, y) dH^*(x, y) - \int \phi_B(x, y) dH_1(x, y) = \int [H^*(x^-, y^-) - H_1(x^-, y^-)] d\mu_{\phi_B}(x, y) \geq 0.$$

Logo,

$$\int \phi_B(x, y) dH^*(x, y) - \int \phi_B(x, y) dH_1(x, y) \geq 0,$$

e para todo $B > 0$

$$-\int \phi_B(x, y) dH^*(x, y) \leq -\int \phi_B(x, y) dH_1(x, y).$$

Observe que $-\phi_B(x, y) \uparrow |x - y|^\alpha$ quando $B \to \infty$. Logo, pelo Teorema da Convergência Dominada

$$-\int \phi_B(x, y) dH^*(x, y) \leq -\int \phi_B(x, y) dH_1(x, y) \leq \int |x - y|^\alpha dH_1(x, y) < +\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{B \to \infty} -\int \phi_B(x, y) dH_1(x, y) = \int |x - y|^\alpha dH_1(x, y).$$

Então, pelo Lema de Fatou temos

$$\int |x-y|^{\alpha} dH^*(x,y) = \int \liminf_{B\to\infty} -\phi_B(x,y)dH^*(x,y) \leq \liminf_{B\to\infty} \int -\phi_B(x,y)dH^*(x,y)$$

$$\leq \liminf_{B\to\infty} \int -\phi_B(x,y)dH_1(x,y) = \int |x-y|^{\alpha} dH_1(x,y).$$

$$\Rightarrow \int |x-y|^{\alpha} dH^*(x,y) \leq \int |x-y|^{\alpha} dH_1(x,y).$$

Para finalizar essa prova, suponha que $d_{\alpha}(F,G) = \infty$, naturalmente não podemos ter $E\left\{|F^{-1}(U) - G^{-1}(U)|^{\alpha}\right\} < \infty$, pois $F^{-1}(U) \stackrel{\mathrm{d}}{=} F$ e $G^{-1}(U) \stackrel{\mathrm{d}}{=} G$ e, neste caso, por definição $d_{\alpha}(F,G) < \infty$. Assim a representação é sempre válida.

□

Corolário 2.5. *Para $\alpha \geq 1$ temos as seguintes representações alternativas para a distância de Mallows*

$$\begin{aligned} d_{\alpha}^{\alpha}(F,G) &= \int_0^1 |F^{-1}(u) - G^{-1}(u)|^{\alpha} du \\ &= E\left\{|X^* - Y^*|^{\alpha}\right\} \end{aligned} \tag{2.6}$$

onde $(X^*, Y^*) \stackrel{d}{=} F \wedge G = H^*$.

Como sub-produto temos também uma alternativa ao Teorema 2.4.

Corolário 2.6. *Se $\alpha \geq 1$, $X \stackrel{d}{=} F$ e $Y \stackrel{d}{=} G$ então vale*

$$E\left(|\ X - Y\ |^{\alpha}\right) \geq E\left(|\ F^{-1}(U) - G^{-1}(U)\ |^{\alpha}\right).$$

Uma pergunta natural é a validade da representação (2.3) quando $0 < \alpha < 1$. O exemplo abaixo mostra que essa suposição é falsa.

Exemplo 2.7. Considere X e Y variáveis aleatórias discretas satisfazendo para $x_0 < x_1$,

$y_0 < y_1$, $0 < p_X < p_Y < 1$ e $p_X + p_Y < 1$.

$$P(X = x_0) = 1 - p_X, \;\; P(X = x_1) = p_X, \;\; P(Y = y_0) = 1 - p_Y, \;\; P(Y = y_1) = p_Y.$$

Neste caso, as probabilidades de (X^*, Y^*) são dadas por

$$\begin{array}{rcl} P(X^* = x_0, Y^* = y_0) & = & 1 - p_Y \\ P(X^* = x_0, Y^* = y_1) & = & p_Y - p_X \\ P(X^* = x_1, Y^* = y_0) & = & 0 \\ P(X^* = x_1, Y^* = y_1) & = & p_X. \end{array}$$

E temos

$$E|X^* - Y^*|^\alpha = |x_0 - y_0|^\alpha (1 - p_Y) + |x_0 - y_1|^\alpha (p_Y - p_X) + |x_1 - y_1|^\alpha p_X.$$

Considere a distribuição conjunta $\hat{H} = 0 \vee [F + G - 1]$ e seja $(\hat{X}, \hat{Y}) \stackrel{\mathrm{d}}{=} \hat{H}$. Temos

$$\begin{array}{rcl} P(\hat{X} = x_0, \hat{Y} = y_0) & = & 1 - p_X - p_Y \\ P(\hat{X} = x_0, \hat{Y} = y_1) & = & p_Y \\ P(\hat{X} = x_1, \hat{Y} = y_0) & = & p_X \\ P(\hat{X} = x_1, \hat{Y} = y_1) & = & 0. \end{array}$$

Segue que

$$E|\hat{X} - \hat{Y}|^\alpha = |x_0 - y_0|^\alpha (1 - p_X - p_Y) + |x_1 - y_0|^\alpha p_X + |x_0 - y_1|^\alpha p_Y.$$

Por outro lado, para $0 < \alpha < 1$ e a escolha das constantes $x_1 = y_0$ ou $x_0 = y_1$ nos leva a

$$E|\hat{X} - \hat{Y}|^\alpha - E|X^* - Y^*|^\alpha = p_X[-|x_0 - y_0|^\alpha + |x_1 - y_0|^\alpha + |x_0 - y_1|^\alpha - |x_1 - y_1|^\alpha]$$

$$= p_X[-|x_0 - y_0|^\alpha + |x_0 - y_1|^\alpha - |x_1 - y_1|^\alpha] \leq 0$$

para o primeiro caso, e analogamente para o segundo. E portanto,

$$E|\hat{X} - \hat{Y}|^\alpha \leq E|X^* - Y^*|^\alpha.$$

Observação 2.8. Vimos que, para $\alpha \geq 1$, a distância de Mallows pode ser calculada usando a cota superior de Fréchet, H^*. Analisando-se a estrutura de dependência entre duas marginais F e G através da cópula associada temos

$$C_H(u,v) = H(F^{-1}(u), G^{-1}(v)) \quad 0 < u < 1, \ 0 < v < 1,$$

temos as correspondentes cotas de Fréchet

$$0 \vee [u + v - 1] = C_{\hat{H}}(u,v) \le C_H(u,v) \le C_{H^*}(u,v) = u \wedge v$$

onde $H^* = F \wedge G$ e $\hat{H} = 0 \vee [F + G - 1]$. O caso da independência, u.v, é um ponto interior. O Teorema 2.4 indica que para $\alpha \ge 1$ a distância de Mallows é calculada na situação de forte dependência. A conjectura de que para $0 < \alpha < 1$ a distância Mallows possa ser calculada através da distribuição conjunta $\hat{H}$ correspondente ao outro extremo de forte dependência é falsa, conforme mostra o exemplo abaixo.

Exemplo 2.9. No Exemplo 2.7, tome $x_0 = y_0 = 0$, $x_1 = y_1 = 1$, $p_X = 1/3$ e $p_Y = 1/2$ vamos ter $E|X^* - Y^*|^\alpha = 1/6 < E|\hat{X} - \hat{Y}|^\alpha = 2/3$, para todo α.

2.3 Convergência em Distribuição

A conexão entre a distância Mallows e a convergência em distribuição foi estabelecida por Mallows (1972) e Bickel e Freedman (1981): se $\alpha \ge 1$, $F \in \mathbb{F}_\alpha$ e $F_n \in \mathbb{F}_\alpha$ $n = 1, 2, ...$ então

$$d_\alpha(F_n, F) \underset{n}{\rightarrow} 0 \quad \Longleftrightarrow \quad F_n \xrightarrow{\mathrm{d}} F \text{ e } \int |x|^\alpha dF_n(x) \underset{n}{\rightarrow} \int |x|^\alpha dF(x). \tag{2.7}$$

No entanto, para aplicações do nosso interesse, as hipóteses F_n, $F \in \mathbb{F}_\alpha$ são restritivas. Nesta seção serão analisadas as condições que nos permitam remover essas hipóteses. Note que se $\alpha \ge 1$ e $d_\alpha(F_n, F) \rightarrow 0$ então pelo Corolário 2.5 temos para $(X_n^*, X^*) \overset{\mathrm{d}}{=} F_n \wedge F$

$$d_\alpha^\alpha(F_n, F) = E(|X_n^* - X^*|^\alpha) \underset{n}{\rightarrow} 0.$$

Assim, da convergência em média, $X_n^* \xrightarrow{\alpha} X^*$, temos $X_n^* \xrightarrow{\mathrm{d}} X^*$.

Lema 2.10. *Se $\alpha \geq 1$ então*

$$d_\alpha(F_n, F) \underset{n}{\to} 0 \Longrightarrow F_n \xrightarrow{\mathrm{d}} F.$$

A implicação inversa nem sempre é verdadeira, caso contrário a convergência em distribuição nos garantiria convergência em média α.

No caso das distribuições estáveis temos uma situação peculiar, donde procede a importância da distância de Mallows no estudo da convergência em distribuição de somas parciais de variáveis aleatórias que possuem cauda pesada. Mais precisamente, sejam X_1, $X_2, \ldots$ v.a.'s i.i.d. com distribuição F e seja $F_n \overset{\mathrm{d}}{=} \frac{S_n - c_n}{a_n}$ onde $S_n = X_1 + \ldots + X_n$, $a_n > 0$ e $c_n \in \mathbb{R}$ são sequências de constantes. Queremos analisar a equivalência de $d_\alpha(F_n, G_\alpha) \underset{n}{\to} 0$ e $F_n \xrightarrow{\mathrm{d}} G_\alpha$ onde $G_\alpha \overset{\mathrm{d}}{=} S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ com $1 \leq \alpha \leq 2$.

Lema 2.11. *Se $d_\alpha(F, G_\alpha) < \infty$ então $d_\alpha(F_n, G_\alpha) \underset{n}{\to} 0$, para sequências $\{b_n\}$ e $\{a_n\}$, $a_n > 0$.*

Demonstração: Sejam $(X_1^*, Y_1^*), (X_2^*, Y_2^*), \ldots$ cópias independentes de $(X^*, Y^*) \overset{\mathrm{d}}{=} F \wedge G_\alpha$. Seja $a_n = n^{1/\alpha}$. Pela Definição 1.8 de distribuições estáveis e pela definição de F_n temos

$$\frac{X_1^* + \cdots + X_n^* - c_n}{n^{1/\alpha}} \overset{\mathrm{d}}{=} F_n \quad \text{e} \quad \frac{Y_1^* + \cdots + Y_n^* - d_n}{n^{1/\alpha}} \overset{\mathrm{d}}{=} G_\alpha.$$

Como $d_\alpha(F, G_\alpha) < \infty$, pelo Corolário 2.5 temos $E\{|X^* - Y^*|\} < \infty$. E mais, $\{|(X_n^* - Y_n^*) - E(X_n^* - Y_n^*)|^\alpha\}_{n \geq 1}$ é uniformemente integrável

$$\sup_n E\{|(X_n^* - Y_n^*) - E(X_n^* - Y_n^*)|^\alpha\} \leq 2E\{|X^* - Y^*|^\alpha\} = 2d_\alpha^\alpha(F, G_\alpha) < \infty.$$

Seja $c_n = nE(X^* - Y^*) - d_n$. Agora, faremos uso do seguinte resultado para martingales (ver em Hall and Heyde [21]) : sejam $1 \leq \alpha < 2$ e $\{\sum_{j=1}^n \xi_j, \sigma(\xi_1, .., \xi_n)\}$ uma martingale. Então se $\{|\xi_n|^\alpha\}_{n \geq 1}$ é uniformemente integrável, temos que

$$\frac{E\left\{\left|\sum_{j=1}^n \xi_j\right|^\alpha\right\}}{n} \underset{n}{\to} 0.$$

Segue que

$$\begin{aligned} d_\alpha^\alpha(F_n, G_\alpha) &\leq E\left\{\frac{1}{n}\left|\sum_{j=1}^{n}(X_j^* - Y_j^*) - c_n + d_n\right|^\alpha\right\} \\ &= E\left\{\frac{1}{n}\left|\sum_{j=1}^{n}[(X_j^* - Y_j^*) - E(X^* - Y^*)]\right|^\alpha\right\} \underset{n}{\rightarrow} 0. \end{aligned}$$

E o resultado segue. □

Corolário 2.12. *Se $d_\alpha(F, G_\alpha) < \infty$ então $F \in \mathcal{D}_N(G_\alpha)$, G_α distribuição $\alpha-$estável.*

Observação 2.13. Lema 2.11 é uma aplicação simples e direta do Teorema 2.4. Ele pode ser visto também como um corolário do Teorema 1.20 de Barbosa e Dorea (2009) : sejam $X_1, X_2, ...$ é uma sequência de variáveis independentes satisfazendo

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} E\left\{|X_j - Y_j|^\alpha 1_{(|X_j - Y_j| > bn^{\frac{2-\alpha}{2\alpha}})}\right\} \underset{n}{\rightarrow} 0 \quad \forall\, b > 0$$

onde $Y_1, Y_2, ...$ são cópias independentes de alguma variável aleatória α-estável $Y_\alpha \overset{\mathrm{d}}{=} G_\alpha$. Então existem constantes $a_n > 0$ e c_n tais que $d_\alpha(F_n, G_\alpha) \underset{n}{\rightarrow} 0$.

Abaixo, temos um exemplo de que a recíproca do Corolário 2.12 nem sempre é verdadeira.

Exemplo 2.14. Seja $F(-x) = 1 - F(x) = \frac{1}{2\pi}\left(1 + \frac{1}{1+\log 2}\right)$, se $0 \leq x < 2$ e

$$F(-x) = 1 - F(x) = \frac{1}{\pi}x^{-1}\left(1 + \frac{1}{1 + \log x}\right), \quad \text{se } x \geq 2.$$

Temos que $F \in \mathcal{D}_N(G_1)$ onde $G_1 = S_1(1, 0, 0)$, a distribuição Cauchy padrão

$$G_1(-y) = 1 - G_1(y) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\arctan(y) = \frac{1}{\pi}y^{-1}(1 + b_{G_1}(y)), \quad y > 0.$$

Que tem a forma

$$\begin{aligned} 1 - G_1(y) &= a_+ y^{-1}(1 + y^{-\gamma}o(1)), \quad y > 0 \\ G_1(-y) &= a_- y^{-1}(1 + y^{-\gamma}o(1)), \quad y > 0 \end{aligned}$$

com $a_+ = a_- = 1/\pi$ e

$$b_{G_1}(y) = \frac{\pi y}{2} - 1 - y\arctan(y) = y^{-1}o(1).$$

Seja $u_+ > (1 - F(2))$ tal que $G_1^{-1}(u_+) \wedge F^{-1}(u_+) > 2$. Note que para $u \geq u_+$

$$G_1^{-1}(u) = \left(\frac{a_+}{1-u}\right)\left(1 + b_{G_1}(G_1^{-1}(u)\right) = \left(\frac{a_+}{1-u}\right)\left(1 + (G_1^{-1}(u))^{-1}o(1)\right).$$

Disto segue que para $Y_1 \stackrel{\mathrm{d}}{=} G_1$ temos $G_1(Y_1) \stackrel{\mathrm{d}}{=} U(0,1)$, defina

$$\begin{aligned}
L_+^{G_1} &= E\left\{\left|\frac{a_+}{1-U} - G_1^{-1}(U)\right| 1_{(U \geq u_+)}\right\} \\
&= E\left\{\left(\frac{a_+}{1-U}\right)(G_1^{-1}(U))^{-1}|o(1)|1_{(U\geq u_+)}\right\} \\
&= E\left\{\left(1 + b_{G_1}(G_1^{-1}(U)\right)^{-1}|o(1)|1_{(U\geq u_+)}\right\} \\
&= E\left\{\frac{|o(1)|}{1+b_{G_1}(Y_1)}1_{(Y\geq G_1^{-1}(u_+))}\right\} < \infty.
\end{aligned}$$

Por outro lado, também temos que $u \geq u_+$

$$F^{-1}(u) = \left(\frac{a_+}{1-u}\right)\left(1 + b_F(F^{-1}(u))\right), \quad b_F(x) = \left(\frac{1}{1+\log x}\right).$$

E para $X \stackrel{\mathrm{d}}{=} F$

$$\begin{aligned}
L_+^{F} &= E\left\{\left|\frac{a_+}{1-U} - F^{-1}(U)\right| 1_{(U \geq u_+)}\right\} \\
&= E\left\{\left|\left(\frac{a_+}{1-U}\right)b_F(F^{-1}(U))\right| 1_{(U\geq u_+)}\right\} \\
&= E\left\{\left|\left(\frac{a_+}{1-F(X)}\right)b_F(X)\right| 1_{(X\geq F^{-1}(u_+))}\right\} \\
&= E\left\{\left|\left(\frac{X}{1+b_F(X)}\right)b_F(X)\right| 1_{(X\geq F^{-1}(u_+))}\right\} \\
&= E\left\{\left|\frac{X}{2+\log X}\right| 1_{(X\geq F^{-1}(u_+))}\right\}.
\end{aligned}$$

Temos que para $x > 2$, $F(x) = 1 - \frac{1}{\pi}x^{-1}\left(1 + \frac{1}{1+\log x}\right)$, então sua densidade

$$F^{'}(x) = f(x) = \frac{x^{-2}}{\pi}\left(1 + \frac{1}{1+\log x} + \frac{1}{(1+\log x)^2}\right).$$

Agora, para $u > u_+$

$$E\left[\left(\frac{X}{2+\log X}\right)1_{(X>F^{-1}(u))}\right] = \int_{F^{-1}(u)}^{\infty}\frac{x}{2+\log x}f(x)dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{F^{-1}(u)}^{\infty}\frac{x^{-1}}{2+\log x}\left(1 + \frac{1}{1+\log x} + \frac{1}{(1+\log x)^2}\right)dx.$$

Note que

$$\int_{F^{-1}(u)}^{\infty}\frac{x^{-1}}{2+\log x}dx = \lim_{x\to\infty}\log\left(2+\log x\right) - \log\left(2 + \log F^{-1}(u)\right) = +\infty.$$

Logo,

$$E\left[\left(\frac{X}{2+\log X}\right)1_{(X>F^{-1}(u_+))}\right] = \infty.$$

Então

$$d_1(F,G_1) = E\{|F^{-1}(U) - G_1^{-1}(U)|\} = E\left\{\left|\frac{a_+}{1-U} - F^{-1}(U) - \frac{a_+}{1-U} + G_1^{-1}(U)\right|\right\}$$

$$\geq E\left\{\left|\left|\frac{a_+}{1-U} - F^{-1}(U)\right| - \left|\frac{a_+}{1-U} + G_1^{-1}(U)\right|\right|\right\}$$

$$\geq \left|E\left|\frac{a_+}{1-U} - F^{-1}(U)\right| - E\left|\frac{a_+}{1-U} + G_1^{-1}(U)\right|\right| \geq |L_+^F - L_+^{G_1}| = +\infty.$$

Logo, temos um exemplo de $F \in \mathcal{D}_N(G_1)$, mas que $d_1(F,G_1) = \infty$. Na demonstração do teorema abaixo temos que se F está no domínio normal forte de G_α, então $d_\alpha(F,G_\alpha) < \infty$.

Teorema 2.15 (Equivalência). *Para $F \in \mathcal{D}_{NF}(G_\alpha)$ temos a equivalência abaixo*

$$d_\alpha(F_n, G_\alpha) \underset{n}{\rightarrow} 0 \iff F_n \overset{d}{\rightarrow} G_\alpha \tag{2.8}$$

onde $F_n \overset{d}{=} \frac{S_n - b_n}{n^{1/\alpha}}$, *onde $\{b_n\}$ é uma sequência de real e* $S_n = X_1 + ... + X_n$ *com $X_1, X_2, ...$ v.a.'s i.i.d. F.*

Demonstração: (a) Seja $F \in \mathcal{D}_{NF}(G_\alpha)$ então para $X_i's$ i.i.d. com distribuição F existe uma sequência $\{b_n\}$ tal que

$$F_n \stackrel{\mathrm{d}}{=} \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - b_n}{n^{1/\alpha}} \xrightarrow{\mathrm{d}} Y.$$

(b) Assuma que $F_n \stackrel{\mathrm{d}}{\to} G_\alpha$. Podemos usar o resultado de Johnson e Samworth (2005): se F está no domínio normal forte de atração de G_α então $d_{\alpha'}(F, G_\alpha) < \infty$ para algum $\alpha' > \alpha$. Ver o Lema 5.3 de [23]. Concluindo, pelo Lema 2.11 temos o resultado.

$\square$

Para remover a hipótese $F \in \mathcal{D}_{NF}(G_\alpha)$ do lema anterior, precisamos considerar um domínio de atração intermediário, isto é, um subconjunto das distribuições do domínio de atração de G_α tal que a distância Mallows entre elas e G_α é finita. Como feito na demonstração do Lema 5.3 de Johnson e Samworth (2005), seja H f.d. tal que

$$\begin{cases} \bar{H}(x) &= a_+ x^{-\alpha}, & x > (2a_+)^{1/\alpha}, \\ H(x) &= a_-|x|^{-\alpha}, & x < -(2a_-)^{1/\alpha}, \\ H((2a_+)^{1/\alpha}) &= H(-(2a_-)^{1/\alpha}), & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

As constantes a_+ e a_- são as que aparecem na Caracterização Alternativa de Mijnheer. Assim, pelo Teorema 2.4 para qualquer variável $U \stackrel{\mathrm{d}}{=} U(0,1)$, $X \stackrel{\mathrm{d}}{=} F$ e $Y \stackrel{\mathrm{d}}{=} G_\alpha$ temos

$$d_\alpha^\alpha(F, G_\alpha) = E\{|F^{-1}(U) - G_\alpha^{-1}(U)|\}^\alpha$$

$$\leq E\{|F^{-1}(U) - H^{-1}(U)|\}^\alpha + E\{|G_\alpha^{-1}(U) - H^{-1}(U)|\}^\alpha.$$

Observe que

$$E\left\{|F^{-1}(U) - H^{-1}(U)|^\alpha 1_{(U > (2a_+)^{1/\alpha})}\right\}$$
$$= E\left\{|X - H^{-1}(F(X))|^\alpha 1_{(F(X) > (2a_+)^{1/\alpha})}\right\}$$
$$= E\left\{\left|X - \left(\frac{a_+}{1 - F(X)}\right)^{1/\alpha}\right|^\alpha 1_{(F(X) > (2a_+)^{1/\alpha})}\right\}.$$

Analogamente

$$E\left\{|F^{-1}(U) - H^{-1}(U)|^\alpha 1_{(F(X) < -(2a_-)^{1/\alpha})}\right\}$$
$$= E\left\{\left|X + \left(\frac{a_-}{F(X)}\right)^{1/\alpha}\right|^\alpha 1_{(F(X) < -(2a_-)^{1/\alpha})}\right\}.$$

Assim, uma forma de obter que $d_\alpha(F, G_\alpha) < \infty$ é exigir que as integrais anteriores sejam finitas, pois na demonstração do Lema 2.16, veremos que $E\{|G_\alpha^{-1}(U) - H^{-1}(U)|^\alpha\} < \infty$. Então, seja o conjunto

$$\mathcal{C}_\alpha(G_\alpha) = \{F : \ \ L_+^F < \infty \ \text{ e } \ L_-^F < \infty\}. \tag{2.9}$$

onde para $X \stackrel{\mathrm{d}}{=} F$

$$L_+^F = E\left\{\left|\left(\frac{a_+}{1 - F(X)}\right)^{1/\alpha} - X\right|^\alpha 1_{(X>0)}\right\}$$

e

$$L_-^F = E\left\{\left|\left(\frac{a_-}{F(X)}\right)^{1/\alpha} + X\right|^\alpha 1_{(X<0)}\right\}.$$

Vamos mostrar abaixo que toda F no domínio normal forte de G_α $\alpha-$estável está nesse conjunto $\mathcal{C}_\alpha(G_\alpha)$, e que se $d_\alpha(F, G_\alpha) < \infty$ então $F \in \mathcal{C}_\alpha(G_\alpha)$.

Lema 2.16. $\mathcal{D}_{NF}(G_\alpha) \subset \mathcal{C}_\alpha(G_\alpha) \subset \mathcal{D}(G_\alpha)$.

Demonstração: (a) Assuma que $F \in \mathcal{D}_{NF}(G_\alpha)$. Note que, com uma mudança de variáveis, podemos escrever

$$L_+^F = E\left\{\left|\left(\frac{a_+}{1 - U}\right)^{1/\alpha} - F^{-1}(U)\right|^\alpha 1_{(F^{-1}(U)>0)}\right\}$$

e

$$L_-^F = E\left\{\left|\left(\frac{a_-}{U}\right)^{1/\alpha} + F^{-1}(U)\right|^\alpha 1_{(F^{-1}(U)<0)}\right\}.$$

Como $F \in \mathcal{D}_{NF}(G_\alpha)$, pela prova de (b) do Teorema 2.15 temos que $d_\alpha(F, G_\alpha) < \infty$. Usando o Teorema 2.4, para provar que $F \in \mathcal{C}_\alpha(G_\alpha)$ é suficiente mostrar que

$$L_+^{G_\alpha} = E\left\{\left|\left(\frac{a_+}{1 - U}\right)^{1/\alpha} - G_\alpha^{-1}(U)\right|^\alpha 1_{(G_\alpha^{-1}(U)>0)}\right\} < \infty \tag{2.10}$$

e

$$L_-^{G_\alpha} = E\left\{\left|\left(\frac{a_-}{U}\right)^{1/\alpha} + G_\alpha^{-1}(U)\right|^\alpha 1_{(G_\alpha^{-1}(U)<0)}\right\} < \infty. \tag{2.11}$$

Como no Exemplo 2.14, seja $u_+^{G_\alpha}$ tal que $G_\alpha^{-1}(u_+^{G_\alpha}) > 0$ e $u_-^{G_\alpha}$ tal que $G_\alpha^{-1}(u_-^{G_\alpha}) < 0$

$$G_\alpha^{-1}(u) = \left(\frac{a_+}{1-u}\right)^{1/\alpha} [1 + (G_\alpha^{-1}(u))^{-\gamma} o(1)]^{1/\alpha}, \ \ u \geq u_+^{G_\alpha}$$

e

$$G_\alpha^{-1}(u) = -\left(\frac{a_-}{u}\right)^{1/\alpha} [1 + |G_\alpha^{-1}(u)|^{-\gamma} o(1)]^{1/\alpha}, \ \ u \leq u_-^{G_\alpha}.$$

Para provar (2.10) e (2.11) faremos uso da inequação

$$|1 - (1+z)^\beta| \leq |z|^\beta, \ \text{ para } \ |z| \leq \frac{1}{2} \ \text{ e } \ 0 < \beta \leq 1.$$

Segue que para $Y_\alpha \overset{\mathrm{d}}{=} G_\alpha$

$$\begin{aligned} L_+^{G_\alpha} &\leq E\left\{\left(\frac{a_+}{1-U}\right) (G_\alpha^{-1}(U))^{-\gamma} |o(1)| 1_{(U \geq u_+^{G_\alpha})}\right\} \\ &= E\left\{\frac{Y_\alpha^{\alpha-\gamma}}{1 + Y_\alpha^{-\gamma} o(1)} 1_{(Y_\alpha \geq G_\alpha^{-1}(u_+^{G_\alpha}))}\right\} < \infty. \end{aligned}$$

Para a última inequação usaremos o fato que $E(|Y_\alpha|^{\alpha'}) < \infty$ para $0 < \alpha' < \alpha$. Similarmente, mostra-se (2.11).

(b) Assuma que $F \in \mathcal{C}_\alpha(G_\alpha)$ e seja u_+^F tal que $F^{-1}(u_+^F) > 0$ e defina $u_+ = u_+^F \vee u_+^{G_\alpha}$. Como $L_+^F < \infty$ por (2.10) nos garante que

$$E\{|F^{-1}(U) - G_\alpha^{-1}(U)|^\alpha 1_{(U \geq u_+)}\} < \infty.$$

Similarmente, seja u_-^F tal que $F^{-1}(u_-^F) < 0$. Então para $u_- = u_-^F \wedge u_-^{G_\alpha}$ temos por (2.11)

$$E\{|F^{-1}(U) - G_\alpha^{-1}(U)|^\alpha 1_{(U \leq u_-)}\} < \infty.$$

Pelo Teorema 2.4 concluímos que $d_\alpha(F, G_\alpha) < \infty$ e pelo Corolário 2.12 temos $F_n \xrightarrow{d_\alpha} G_\alpha$, então $F \in \mathcal{D}(G_\alpha)$. Mais precisamente, $F \in \mathcal{D}_N(G_\alpha)$. □

Usando os mesmos argumentos anteriores temos o resultado abaixo.

Teorema 2.17. *Se $d_\alpha(F, G_\alpha) < \infty$ então $F_n \xrightarrow{d_\alpha} G_\alpha$ e $F \in \mathcal{C}_\alpha(G_\alpha)$.*

Demonstração: A primeira implicação é resultado do Lema 2.11. Para mostrar que $F \in \mathcal{C}_\alpha(G_\alpha)$, veja que

$$L_+^F = E\left\{\left|\left(\frac{a_+}{1-U}\right)^{1/\alpha} - F^{-1}(U)\right|^\alpha 1_{(F^{-1}(U)>0)}\right\}$$

$$= E\left\{\left|\left(\frac{a_+}{1-U}\right)^{1/\alpha} - F^{-1}(U) + G_\alpha^{-1}(U) - G_\alpha^{-1}(U)\right|^\alpha 1_{(F^{-1}(U)>0)}\right\}$$

$$\leq E\left\{\left|\left(\frac{a_+}{1-U}\right)^{1/\alpha} - G_\alpha^{-1}(U)\right|^\alpha 1_{(F^{-1}(U)>0)}\right\} + E\left\{|F^{-1}(U) - G_\alpha^{-1}(U)|^\alpha 1_{(F^{-1}(U)>0)}\right\}.$$

A primeira esperança é finita pois vimos na demonstração do lema anterior que $L_+^{G_\alpha} < \infty$. E, por hipótese $E|F^{-1}(U) - G_\alpha^{-1}(U)|^\alpha < \infty$. Assim, $L_+^F < \infty$. Idem para mostrar que $L_-^F < \infty$.

□

2.4 Convergência de Sequências Aleatoriamente Indexadas

Sejam $\{Z_n\}_{n\geq 0}$ e Z variáveis aleatórias, $Z_n \stackrel{\text{d}}{=} F_n$ e $Z \stackrel{\text{d}}{=} G$, e

$$d_\alpha(F_n, G) \underset{n}{\to} 0.$$

Seja $\{\tau_n\}_{n\geq 0}$ uma sequência aleatória de inteiros positivos com $0 = \tau_0 \leq \tau_1 \leq \tau_2 \leq ...$ e $\tau_n \stackrel{p}{\to} +\infty$. Nesta seção, analisamos as condições suficientes para

$$d_\alpha(F_{Z_{\tau_n}}, G) \underset{n}{\to} 0,$$

onde $Z_{\tau_n} \stackrel{\text{d}}{=} F_{Z_{\tau_n}}$.

Primeiro, note que se $\{Z_n\}$ e $\{\tau_n\}$ são independentes então

$$F_{Z_{\tau_n}}(z) = P(Z_{\tau_n} \leq z) = \sum_{k=0}^{\infty} P(Z_k \leq z, \tau_n = k)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} P(Z_k \leq z) P(\tau_n = k)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} F_k(z) P(\tau_n = k) = E(F_{\tau_n}(z)).$$

Neste caso, a proposição abaixo mostra que $d_\alpha(F_{Z_{\tau_n}}, G) \underset{n}{\to} 0$ pois $d_\alpha(F_{Z_{\tau_n}}, G) = d_\alpha(E(F_{\tau_n}), G)$.

Proposição 2.18. *Se $\{Z_n\}$ e $\{\tau_n\}$ são independentes, então para $\alpha \geq 1$*

$$d_\alpha(F_n, G) \underset{n}{\to} 0 \quad \Rightarrow \quad d_\alpha(E(F_{\tau_n}), G) \underset{n}{\to} 0 \;\text{ e }\; d_\alpha(F_{Z_{\tau_n}}, G) \underset{n}{\to} 0.$$

Demonstração: Pelo Teorema 2.4 temos que

$$d_\alpha(E(F_{\tau_n}), G) = E\{|(EF_{\tau_n})^{-1}(U) - G^{-1}(U)|^\alpha\}$$

$$= E\left\{\sum_{k=0}^{\infty} |F_k^{-1}(U) - G^{-1}(U)|^\alpha 1_{(\tau_n = k)}\right\}.$$

Como $d_\alpha(F_n, G) \underset{n}{\to} 0$,

$$E|F_n^{-1}(U) - G^{-1}(U)|^\alpha \leq K,$$

e dado $\epsilon > 0$ existe $N(\epsilon)$ tal que para $n \geq N(\epsilon)$ temos

$$E|F_n^{-1}(U) - G^{-1}(U)|^\alpha \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Como $\tau_n \uparrow \infty$ em probabilidade, podemos tomar $N'(\epsilon)$ tal que

$$P(\tau_n \leq N(\epsilon)) \leq \frac{\epsilon}{2K}, \quad n \geq N^{'}(\epsilon).$$

Tomando-se $n \geq N'(\epsilon)$ temos

$$d_\alpha^\alpha(EF_{\tau_n}, G) = \sum_{k \leq N(\epsilon)} E\left\{|F_k^{-1}(U) - G^{-1}(U)|^\alpha 1_{(\tau_n = k)}\right\} + \sum_{k > N(\epsilon)} E\left\{|F_k^{-1}(U) - G^{-1}(U)|^\alpha 1_{(\tau_n = k)}\right\}$$

$$\leq \sum_{k \leq N(\epsilon)} E\left\{|F_k^{-1}(U) - G^{-1}(U)|^\alpha\right\} P(\tau_n \leq N(\epsilon)) + \frac{\epsilon}{2} P(\tau_n > N(\epsilon))$$

$$\leq \epsilon.$$

□

O Exemplo 2.19 ilustra a situação em que $E(F_{\tau_n}) \neq F_{Z_{\tau_n}}$, e o Exemplo 2.20 mostra que nem sempre $d_\alpha(F_n, G) \underset{n}{\rightarrow} 0$ temos $d_\alpha(F_{Z_{\tau_n}}, G) \underset{n}{\rightarrow} 0$.

Exemplo 2.19. Sejam $Z_1 \stackrel{\text{d}}{=} F_1 = U(0,1)$ e $Z_2 \stackrel{\text{d}}{=} F_2 = U(-1,0)$. Assuma que Z_1 e Z_2 são independentes e defina

$$\tau = \begin{cases} 1, & Z_1 < 1/2 \\ 2, & Z_1 \geq 1/2. \end{cases}$$

Temos

$$P(Z_\tau \leq z) = P(Z_1 \leq z, Z_1 < 1/2) + P(Z_2 \leq z, Z_1 \geq 1/2)$$

$$= F_1(z) 1_{(z<1/2)} + 1/2 1_{(1/2<z<1)} + 1/2 F_2(z)$$

e

$$F_\tau(z) = F_1(z) 1_{(Z_1<1/2)} + F_2(z) 1_{(Z_1 \geq 1/2)}$$

com

$$E(F_\tau(z)) = 1/2 F_1(z) + 1/2 F_2(z).$$

Assim, $E(F_\tau) \neq F_{Z_\tau}$.

Exemplo 2.20. Considere $\Omega = (0,1)$, P a medida de probabilidade uniforme e δ_0 a função de distribuição degenerada, isto é

$$\delta_0(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, escreva-o na forma única $n = 2^m + j$ onde $0 \leq j \leq 2^m - 1$, $m \in \mathbb{N}$.

Defina a variável aleatória

$$Z_n(w) = \begin{cases} m, & j2^{-m} \leq w \leq (j+1)2^{-m} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Vamos mostrar que $Z_n \xrightarrow{d_\alpha} 0$, isto é, $F_{Z_n} \xrightarrow{d_\alpha} \delta_0$. Para tanto, basta ver que

$$E|Z_n|^\alpha = \frac{m^\alpha}{2^m} \longrightarrow 0 \quad \text{quando } n \to \infty$$

e portanto para $Y \stackrel{\mathrm{d}}{=} \delta_0$ temos

$$d_\alpha^\alpha(F_{Z_n}, \delta_0) = \inf_{(Z_n, Y)} E|Z_n - Y|^\alpha \longrightarrow 0.$$

Agora, vamos definir $\{\tau_n\}_{n \geq 0}$ e mostrar que *não* temos $d_\alpha(F_{Z_{\tau_n}}, \delta_0) \longrightarrow 0$.

Para $j < 2^m - 1$ defina

$$\tau_n(\omega) = \begin{cases} n, & (Z_{2^m} = m) \cup \ldots \cup \left(Z_{2^m + (2^m - 2)} = m\right) = \left[0, 1 - \frac{1}{2^m}\right) \\ 2^{2^m} + \left(\frac{2^m - 1}{2^m}\right) 2^{2^m}, & \left(Z_{2^{2^m} + \left(\frac{2^m-1}{2^m}\right) 2^{2^m}} = 2^m\right) \\ \vdots & \\ 2^{2^m} + (2^{2^m} - 1), & \left(Z_{2^{2^m} + (2^{2^m} - 1)} = 2^m\right) = \left[\frac{2^{2^m} - 1}{2^{2^m}}, 1\right). \end{cases}$$

Então,

$$E(Z_{\tau_n}) = E\left(Z_n 1_{(\tau_n = n)}\right) + \sum_{j = \frac{2^m - 1}{2^m} 2^{2^m}}^{2^{2^m} - 1} E\left(Z_{2^{2^m} + j} 1_{(\tau_n = 2^{2^m} + j)}\right)$$

$$= \frac{m}{2^m} + \sum_{j = \frac{2^m - 1}{2^m} 2^{2^m}}^{2^{2^m} - 1} 2^m \frac{1}{2^{2^m}} = \frac{m}{2^m} + 1 \longrightarrow 1.$$

Logo, para $\alpha > 1$, $E(|Z_{\tau_n}|^\alpha) = \frac{m^\alpha}{2^m} + 2^{(m\alpha - m)} \longrightarrow \infty$, quando $n \to \infty$. Por definição

$$d_\alpha^\alpha(F_{Z_{\tau_n}}, \delta_0) = \inf_{(Z_{\tau_n}, Y)} E(|Z_{\tau_n} - Y|^\alpha)$$

$Y \stackrel{\mathrm{d}}{=} \delta_0$. Contudo

$$E|Z_{\tau_n} - Y|^\alpha = \int_{\mathbb{R}^2} |x - y|^\alpha dP_{Z_{\tau_n}, Y}(x, y)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} |x-y|^\alpha dP_{Z_{\tau_n}}(x) dP_Y(y) = E|Z_{\tau_n}|^\alpha \longrightarrow \infty.$$

Assim, $d_\alpha^\alpha(F_{Z_{\tau_n}}, \delta_0) \longrightarrow \infty$ quando $\alpha > 1$, e $d_1(F_{Z_{\tau_n}}, \delta_0) \longrightarrow 1$. Em ambos os casos não temos a convergência em d_α do processo indexado.

Agora, definiremos uma estrutura de dependência entre $\{Z_n\}$ e $\{\tau_n\}$ na qual podemos garantir $d_\alpha(F_{Z_{\tau_n}}, G) \underset{n}{\rightarrow} 0$.

Definição 2.21. (a) Dado um inteiro $m \geq 0$, dizemos que $\{\tau_n\}$ é $m-$dependente de $\{Z_n\}$ se τ_n é independente da coleção das v.a.'s $\{Z_1, Z_2, ..., Z_{n-m}, Z_{n+1}, ...\}$;

(b) E $\{\tau_n\}$ é assintoticamente $m-$dependente de $\{Z_n\}$ se a propriedade acima ocorre para n suficientemente grande.

No Capítulo 3, seção 3.2, daremos um exemplo de um processo de perda agregada $\{S_t\}$ em que vale esta estrutura de m-dependência.

Teorema 2.22. *Sejam $1 < \alpha < 2$, $\{Z_n\}_{n \geq 1}$ e Z v.a.'s, $Z_n \stackrel{\mathrm{d}}{=} F_n$, $Z \stackrel{\mathrm{d}}{=} G$ tais que*

$$d_\alpha(F_n, G) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Seja também $\{\tau_n\}_{n \geq 0}$ tal que $\tau_n \uparrow \infty$ em probabilidade. Assuma que $\{\tau_n\}$ é assintoticamente $m-$dependente de $\{Z_n\}_{n \geq 1}$. Então,

$$d_\alpha\left(F_{Z_{\tau_n}}, G\right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Demonstração: Por hipótese

$$d_\alpha(F_n, G) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Novamente, pelo Teorema 2.4, segue que para a sequência $\{(Z_n^*, Z^*)\}$ com $(Z_n^*, Z^*) \stackrel{\mathrm{d}}{=} F_n \wedge G$, temos

$$E\{|Z_n^* - Z^*|^\alpha\} \leq K < \infty,$$

e dado $\epsilon > 0$ existe $N(\epsilon)$ tal que para $n \geq N(\epsilon)$ temos

$$E\{|Z_n^* - Z^*|^\alpha\} \leq \frac{\epsilon}{4m}.$$

Sem perda de generalidade, tome a sequência $\{Z_n^*\}$ tal que $\{\tau_n\}$ é assintoticamente $m-$dependente de $\{Z_n^*\}$ e Z^* independente de $\{\tau_n\}$. Temos também que

$$d_\alpha^\alpha(F_{Z_{\tau_n}}, G) \leq \sum_{k\geq 0} E\left\{|Z_k^* - Z^*|^\alpha 1_{(\tau_n=k)}\right\}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-m} E\left\{|Z_k^* - Z^*|^\alpha 1_{(\tau_n=k)}\right\} + \sum_{k=n-m+1}^{n} E\left\{|Z_k^* - Z^*|^\alpha 1_{(\tau_n=k)}\right\} + \sum_{k\geq n+1} E\left\{|Z_k^* - Z^*|^\alpha 1_{(\tau_n=k)}\right\}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-m} E\left\{|Z_k^* - Z^*|^\alpha\right\} P(\tau_n = k) + \sum_{k=n-m+1}^{n} E\left\{|Z_k^* - Z^*|^\alpha 1_{(\tau_n=k)}\right\}$$

$$+ \sum_{k\geq n+1} E\left\{|Z_k^* - Z^*|^\alpha\right\} P(\tau_n = k).$$

Como $\tau_n \uparrow \infty$ em probabilidade, podemos tomar, para os mesmos ϵ e $N(\epsilon)$ anteriores, $N'(\epsilon)$ tal que

$$P(\tau_n \leq N(\epsilon)) \leq \frac{\epsilon}{4K}, \;\; n \geq N^{'}(\epsilon).$$

Desse modo, para $n \geq \max\{N(\epsilon), N^{'}(\epsilon)\} + m$ temos

$$d_\alpha^\alpha(F_{Z_{\tau_n}}, G) \leq \sum_{k=0}^{N(\epsilon)} E\left\{|Z_k^* - Z^*|^\alpha\right\} P(\tau_n = k) + \sum_{k=N(\epsilon)+1}^{n-m} E\left\{|Z_k^* - Z^*|^\alpha\right\} P(\tau_n = k)$$

$$+ \sum_{k=n-m+1}^{n} E\left\{|Z_k^* - Z^*|^\alpha 1_{(\tau_n=k)}\right\} + \sum_{k\geq n+1} E\left\{|Z_k^* - Z^*|^\alpha\right\} P(\tau_n = k)$$

$$\leq KP(\tau_n \leq N(\epsilon)) + \frac{\epsilon}{4} P(N(\epsilon) + 1 \leq \tau_n \leq n - m)$$

$$+ m \max_{n-m+1\leq k\leq n} E\{|Z_k^* - Z^*|^\alpha 1_{(\tau_n=k)}\} + \frac{\epsilon}{4} P(\tau_n \geq n+1)$$

$$< \epsilon.$$

□

Dado que a convergência em distância Mallows está relacionada com a convergência em distribuição, analisamos também a possibilidade de se aplicar os resultados sobre a preservação da convergência em distribuição para sequências aleatoriamente indexadas.

Abaixo, citamos um desses resultados.

Teorema 2.23. *(Anscombe (1952)) Sejam $\{Z_n\}$ uma sequência de variáveis aleatórias convergindo em distribuição para G*

$$Z_n \xrightarrow{d} Y,$$

e Y variável aleatória com distribuição G. Sejam $\{\tau_n\}$ variáveis aleatórias que assumem valores nos inteiros não-negativos

$$\frac{\tau_n}{n} \xrightarrow{p} b > 0$$

e mais, a sequência $\{Z_n\}$ é continuamente uniforme, isto é,

$$P\left(\max_{|i-n|\leq \delta n} |Z_i - Z_n| \geq \epsilon\right) \leq \eta$$

para $n \geq N_0$, onde δ e N_0 dependem somente de ϵ e η. Então temos que

$$Z_{\tau_n} \xrightarrow{d} Y.$$

Observação 2.24. As condições de Anscombe não são suficientes para garantir a convergência em distância Mallows, conforme ilustra o exemplo abaixo.

Exemplo 2.25. Vimos que para $\Omega = (0,1)$, P a medida de probabilidade uniforme, δ_0 a função de distribuição degenerada, a variável aleatória

$$Z_n(w) = \begin{cases} m, & j2^{-m} \leq w \leq (j+1)2^{-m} \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

onde cada $n = 2^m + j$ para $0 \leq j \leq 2^m - 1$, $m \in \mathbb{N}$. Mostramos que $Z_n \xrightarrow{d_\alpha} 0$.

Vamos mostrar agora que $\{Z_n\}$ é continuamente uniforme, ou seja, dados ϵ, $\eta > 0$, existem N_0 e δ tais que $P\left(\max_{|i-n|\leq\delta n} |Z_i - Z_n| \geq \epsilon\right) \leq \eta$, para todo $n \geq N_0$. Escolhamos

$$N_0 = 2^{m_0} \geq \frac{4}{\eta} \quad \text{ e } \quad \delta = \frac{1}{2^{m_0}}.$$

Seja $n = 2^m + j \geq 2^{m_0} = N_0$, para simplificar use $j = 0$, então $n = 2^m \geq 2^{m_0}$. Assim, $|i - n| \leq \delta n$ equivale a $i = 2^{m-1} + (2^{m-1} - 2^{m-m_0}), ..., 2^m, ..., 2^m + 2^{m-m_0}$. Logo,

$$|Z_i - Z_n| = \begin{cases} \left|(m-1)1_{[j/2^{m-1},(j+1)/2^{m-1})} - m1_{[0,1/2^m)}\right|, & 2^{m-1} - 2^{m-m_0} \leq j \leq 2^{m-1} - 1 \\ \left|m1_{[j/2^m,(j+1)/2^m)} - m1_{[0,1/2^m)}\right|, & 0 \leq j \leq 2^{m-m_0}. \end{cases}$$

Assim,

$$P\left(\max_{|i-n|\leq \delta n} |Z_i - Z_n| \geq \epsilon\right) = 1 - P\left(\max_{|i-n|\leq \delta n} |Z_i - Z_n| < \epsilon\right)$$

$$= 1 - P\left(\bigcap_{|i-n|\leq \delta n} |Z_i - Z_n| = 0\right) = 1 - P\left(\left[\frac{2^{m-m_0}+1}{2^m}, \frac{2^{m-1} - 2^{m-m_0}}{2^{m-1}}\right)\right) \leq \eta,$$

concluímos que $\{Z_n\}$ é continuamente uniforme.

Definimos para $j < 2^m - 1$

$$\tau_n(\omega) = \begin{cases} n, & (Z_{2^m} = m) \cup ... \cup \left(Z_{2^m+(2^m-2)} = m\right) = \left[0, 1 - \frac{1}{2^m}\right) \\ 2^{2^m} + \left(\frac{2^m-1}{2^m}\right) 2^{2^m}, & \left(Z_{2^{2^m}+\left(\frac{2^m-1}{2^m}\right)2^{2^m}} = 2^m\right) \\ \vdots \\ 2^{2^m} + (2^{2^m} - 1), & \left(Z_{2^{2^m}+(2^{2^m}-1)} = 2^m\right) = \left[\frac{2^{2^m}-1}{2^{2^m}}, 1\right). \end{cases}$$

Note que

$$\frac{\tau_n}{n} \xrightarrow{p} 1,$$

pois $P(\tau_n = n) = 1 - \frac{1}{2^m} \longrightarrow 1$, quando $n \longrightarrow \infty$. E mostramos que $d_1(F_{Z_{\tau_n}}, \delta_0) \longrightarrow 1$, e $d_\alpha^\alpha(F_{Z_{\tau_n}}, \delta_0) \longrightarrow \infty$, para $\alpha > 1$. Logo, $F_{Z_{\tau_n}} \overset{d_\alpha}{\nrightarrow} \delta_0$, para $\alpha \geq 1$. Contudo, pelo Teorema 2.23, sabemos que $F_{Z_{\tau_n}} \xrightarrow{\text{d}} \delta_0$.

2.5 Somas Parciais Aleatoriamente Indexadas

Nesta seção, estamos interessados em estudar convergências de somas parciais do tipo

$$\sum_{k=1}^{\tau_n} X_k,$$

onde as $X_k's$ são v.a.'s i.i.d. cuja distribuição está no $\mathcal{D}_{NF}(G_\alpha)$, G_α a f.d. de alguma v.a. $\alpha-$estável com $1 < \alpha < 2$, e que existam constantes $\{c_n\}$ tais que

$$Z_{\tau_n} \stackrel{d}{=} \frac{\sum_{i=1}^{\tau_n} X_i - c_{\tau_n}}{\tau_n^{1/\alpha}} \xrightarrow{d_\alpha} Y_\alpha. \tag{2.12}$$

Vimos que (ver o Teorema 2.23) se $\frac{\tau_n}{n} \xrightarrow{p} b > 0$, e Z_n continuamente uniforme, então $Z_{\tau_n} \xrightarrow{d} Y_\alpha$. Mais ainda, esse resultado pode ser estendido para $\{\tau_n\}$ e $\{Z_n\}$ com uma estrutura de dependência do tipo uniformemente $\epsilon-$independente (u.ϵ.i.) de Dorea et al (1984), que é mais fraca que as hipóteses de Anscombe.

Observação 2.26. Considere $Z_n \xrightarrow{d} Z$. Dizemos que τ é $\epsilon-$independente de $\{Z_n\}$ em $x \in C(F_Z)$ se, dado $\epsilon > 0$, existe $N(\epsilon, x)$ tal que, quando $n_i \geq N(\epsilon, x)$ $i = 1, 2, ...$

$$\left| \sum_i \left(P(Z_{n_i} \leq x, A_i) - P(Z_{n_i} \leq x) P(A_i) \right) \right| \leq \epsilon \tag{2.13}$$

para toda partição contável $\{A_i\}_{i\geq 1}$ e $\sigma(\tau)-$mensurável.

Quando τ é $\epsilon-$independente de $\{Z_n\}$ em todo $x \in C(F_Z)$, dizemos que τ é $\epsilon-$independente (ϵ.i.) de $\{Z_n\}$. Mais ainda, se $\{\tau_k\}$ é uma sequência de v.a.'s, dizemos que será uniformemente $\epsilon-$independente (u.ϵ.i.) de $\{Z_n\}$ se, dado $\epsilon > 0$ e $x \in C(F_Z)$, existe $L(\epsilon, x)$ e $M(\epsilon, x)$ tais que, quando $n_i \geq L(\epsilon, x)$, $i = 1, 2, ...$, (2.13) ocorre para todos os membros de $\bigcup_{k \geq M(\epsilon,x)} \mathcal{A}_k$, $\mathcal{A}_k$ o conjunto de todas as partições contáveis $\{A_i\}_{i\geq 1}$ $\sigma(\tau_k)-$mensuráveis.

Abaixo seguem dois exemplos de sequências u.ϵ.i..

Exemplo 2.27. Seja $\Omega = (0, 1]$, $\mathcal{B}$ os borelianos de $(0, 1]$ e m a medida de Lebesgue. Para $n \geq 1$, seja $Z_{2n} = 1$ em $(0, 1/2]$ e $Z_{2n} = 0$ em $(1/2, 1]$, com $Z_{2n-1} = |1 - Z_{2n}|$. Defina $\tau_k = k + 1$ em $(1/2, 1/2 + 1/k]$ e $\tau_k = k$ caso contrário.

Exemplo 2.28. Sejam (U_i, V_i) v.a.'s i.i.d. com $EU_i = EV_i = EU_iV_i = 0$ e $EU_i^2 = EV_i^2 = 1$. Defina $X_n = n^{-1/2} \sum_{i=1}^n U_i$, $Y_m = m^{-1/2} \sum_{j=1}^m V_j$ com $\tau_k = k$ se $Y_k \geq 0$ e $\tau_k = k^2$ caso contrário.

Teorema 2.29. *Se $Z_n \xrightarrow{d} Z$ e $\{\tau_n\}$ é u.ϵ.i. de $\{Z_n\}$ com $\tau_n \xrightarrow{p} \infty$, então $Z_{\tau_n} \xrightarrow{d} Z$.*

Ver a demonstração em Dorea et al (1984).

Abaixo, temos um caso onde vale a convergência em distância Mallows de sequências aleatoriamente indexadas.

Corolário 2.30. *Sejam $\{X_i\}_{i\geq 1}$ v.a.'s independentes com distribuição comum $F \in \mathcal{D}_{NF}(G_\alpha)$, G_α f.d. de Y_α v.a. $\alpha-$estável. E $\{\tau_n\}$ u.ϵ.i. de $\{Z_n\}$, onde $Z_n = \frac{\sum_{k=1}^n X_k - c_n}{n^{1/\alpha}}$ para alguma sequência real $\{c_n\}$. Suponha também que para algum $r < 1$ e n suficientemente grande, temos*

$$\sum_{i=0}^{\infty}\{P(\tau_n = i)\}^r < \infty.$$

Então $Z_{\tau_n} \stackrel{d_\alpha}{\to} Y_\alpha$.

Demonstração: Como $F \in \mathcal{D}_{NF}(G_\alpha)$, pelo Lema 5.3 de Johnson e Samworth (2005) temos que

$$d_{\alpha'}(F, G_\alpha) < \infty, \ \text{ para algum } \ \alpha' > \alpha,$$

e pelo Lema 2.11, para alguma sequência c_n

$$Z_n = \frac{\sum_{k=1}^n X_k - c_n}{n^{1/\alpha}} \stackrel{d_{\alpha'}}{\to} Y_\alpha.$$

Então dado $\epsilon > 0$ existe $N(\epsilon)$ tal que para $n \geq N(\epsilon)$ temos

$$d_{\alpha'}(F_{Z_n}, G_\alpha) < \epsilon.$$

Por hipótese $\tau_n \to \infty$ em probabilidade, para os mesmos ϵ e $N(\epsilon)$ anteriores

$$P(\tau_n = i) < \left\{\frac{\epsilon}{N(\epsilon)+1}\right\}^{1/r}, \ \text{ para } \ i \leq N'(\epsilon),$$

assim,

$$\sum_{i=0}^{N'(\epsilon)}\{P(\tau_n = i)\}^r < \sum_{i=0}^{N'(\epsilon)} \frac{\epsilon}{N(\epsilon)+1} < \epsilon,$$

e também

$$d_{\alpha'}(F_{Z_n}, G_\alpha) < K \ \text{ para todo } \ n \in \mathbb{N}.$$

Logo,

$$d_\alpha(F_{Z_{\tau_n}}, G_\alpha) \leq E\left\{\left|\frac{\sum_{i=1}^{\tau_n} X_i^* - c_{\tau_n}}{\tau_n^{1/\alpha}} - Y^*\right|^\alpha\right\}$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} E\left\{ \left| \frac{\sum_{i=1}^{j} X_i^* - c_j}{j^{1/\alpha}} - Y^* \right|^{\alpha} 1_{(\tau_n = j)} \right\}$$

pela desigualdade de Hölder

$$\leq \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ E \left| \frac{\sum_{i=1}^{j} X_i^* - c_j}{j^{1/\alpha}} - Y^* \right|^{\alpha p} \right\}^{1/p} \{P(\tau_n = j)\}^{1/q}.$$

Para $n \geq N(\epsilon)$

$$d_\alpha(F_{Z_{\tau_n}}, G_\alpha) \leq \sum_{j=0}^{N'(\epsilon)} \left\{ E \left| \frac{\sum_{i=1}^{j} X_i^* - c_j}{j^{1/\alpha}} - Y^* \right|^{\alpha p} \right\}^{1/p} \{P(\tau_n = j)\}^{1/q}$$

$$+ \sum_{j=N'(\epsilon)+1}^{\infty} \left\{ E \left| \frac{\sum_{i=1}^{j} X_i^* - c_j}{j^{1/\alpha}} - Y^* \right|^{\alpha p} \right\}^{1/p} \{P(\tau_n = j)\}^{1/q}.$$

Escolha q tal que $q < 1/r$ e $p < \frac{\alpha''}{\alpha}$ para $\alpha'' \leq \alpha'$. Assim,

$$d_\alpha(F_{Z_{\tau_n}}, G_\alpha) \leq K \sum_{j=0}^{N'(\epsilon)} \{P(\tau_n = j)\}^r + \epsilon \sum_{j=N'(\epsilon)+1}^{\infty} \{P(\tau_n = j)\}^r \to 0 \text{ quando } n \to \infty.$$

□

Corolário 2.31. *Suponha agora que* $\{X_i\}_{i\geq 1}$ *v.a.'s i.i.d. com distribuição* $F \in \mathcal{D}_N(G_\alpha)$, $Y_\alpha \stackrel{d}{=} G_\alpha$ $\alpha-$*estável. Suponha também que* $\{\tau_n\}$ *é u.ϵ.i. de* $\{Z_n\}$, *onde* $Z_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - c_n}{n^{1/\alpha}}$ *para alguma sequência real* $\{c_n\}$. *Então, temos*

$$\frac{\sum_{i=1}^{\tau_n} X_i - c_{\tau_n}}{\tau_n^{1/\alpha}} \xrightarrow[n\to+\infty]{d} Y_\alpha.$$

Para o caso em que as $X_i's$ são independentes, mas não possuem a mesma distribuição, podemos obter a convergência em distribuição como corolário do Teorema 2.29.

Corolário 2.32. *Suponha* $\{X_i\}_{i\geq 1}$ *v.a.'s independentes e satisfazem a condição (1.6) para alguma* $Y_\alpha \stackrel{d}{=} G_\alpha$ $\alpha-$*estável. Suponha também que* $\{\tau_n\}$ *é u.ϵ.i. de* $\{Z_n\}$, *onde*

$Z_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - c_n}{n^{1/\alpha}}$ *para alguma sequência real* $\{c_n\}$. *Então, temos*

$$\frac{\sum_{i=1}^{\tau_n} X_i - c_{\tau_n}}{\tau_n^{1/\alpha}} \xrightarrow[n\to+\infty]{d} Y_\alpha.$$

Um outro resultado, para convergência de somas parcias com estrutura de $m-$dependência entre $\{X_n\}$ e $\{\tau_n\}$, segue como corolário do Teorema 2.22.

Corolário 2.33. *Sejam* $\{X_i\}_{i\geq 1}$ *v.a.'s i.i.d. com distribuição* $F \in \mathcal{D}_N(G_\alpha)$, $Y_\alpha \stackrel{d}{=} G_\alpha$ $\alpha-$*estável. Suponha também que* $\{\tau_n\}$ *é* m*-dependente de* $\{X_n\}$. *Então, temos*

$$\frac{\sum_{i=1}^{\tau_n} X_i - c_{\tau_n}}{\tau_n^{1/\alpha}} \xrightarrow[n\to+\infty]{d} Y_\alpha.$$

Corolário 2.34. *Sejam* $\{X_i\}_{i\geq 1}$ *v.a.'s independentes e satisfazem a condição (1.6) para alguma* $Y_\alpha \stackrel{d}{=} G_\alpha$ $\alpha-$*estável. Suponha também que* $\{\tau_n\}$ *é* $m-$*dependente de* $\{X_n\}$. *Então, temos*

$$\frac{\sum_{i=1}^{\tau_n} X_i - c_{\tau_n}}{\tau_n^{1/\alpha}} \xrightarrow[n\to+\infty]{d} Y_\alpha.$$

Capítulo 3

Estimação da Probabilidade de Ruína via Distância Mallows

3.1 Introdução

Neste capítulo, faremos uso dos resultados anteriores para se obter estimativas para a probabilidade da ruína $\Psi(u)$ associada ao processo de risco

$$\Psi(u) = P\left(\inf_{t\geq 0} R_t < 0\right), \quad R_t = u + ct - \sum_{k=1}^{N_t} X_k.$$

Na literatura existem vários resultados que descrevem o comportamento assintótico da cauda da ruína, isto é, o comportamento da probabilidade $\Psi(u)$ quando a reserva inicial u cresce indefinidamente. Podemos citar von Bahr (1975), Asmussen et al (1999), Mikosch e Samorodnitsky (2000) e Embrechts e Veraverbeke (1982).

Para o modelo clássico (1.3), com indenizaçẽs do tipo Pareto ou lognormal, von Bahr (1975) obteve

$$\Psi(u) \sim \frac{\rho}{1-\rho}\bar{F}_s(u) \tag{3.1}$$

onde $\rho = \frac{EX}{EV} < 1$, $F_s(x) = 1 - \frac{1}{EX}\int_0^x \bar{F}(y)dy$ é a cauda integrada e $\bar{F}(x)$ é a cauda das indenizações. Mais tarde, Embrechts e Veraverbeke (1982) obtiveram resultado idêntico para o caso mais geral onde os tempos entre chegadas têm média $1/\lambda$, não necessariamente exponenciais, e F_s subexponencial.

Sob certas condições de regularidade, Asmussen et al (1999) obtiveram o mesmo resultado (3.1) para a sequência $S_n = \sum_{i=1}^n X_i - T_n$, onde X_i's são variáveis aleatórias independentes com distribuição F e $EX < 1/\lambda$. O tempo entre chegadas escrito como $V_1, V_2, ...$ uma sequência ergódica estacionária de variáveis positivas, independentes das $X_i's$, com $EV_n = 1/\lambda < +\infty$ para todo n. Como Embrechts e Veraverbeke (1982), assumindo que F_s é subexponencial e mais uma suposição sobre a cauda dos tempos de chegada obtiveram (3.1).

Para o modelo de perdas agregadas proposto por Mikosch e Samorodnitsky (2000), onde

$$S_n = -n\mu + \sum_{j=-\infty}^{\infty} \epsilon_j \sum_{k=1-j}^{n-j} \varphi_k$$

com $X_n = -\mu + \sum_{j=-\infty}^{\infty} \varphi_{n-j}\epsilon_j$, $\mu > 0$, $\{\epsilon_n\}$ são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com $E\epsilon = 0$ que satisfazem

$$\begin{cases} P(|\epsilon| > x) = L(x)x^{-\alpha} \\ \lim\limits_{x\to\infty} \frac{P(\epsilon > x)}{P(|\epsilon| > x)} = p, \quad \lim\limits_{x\to\infty} \frac{P(\epsilon < -x)}{P(|\epsilon| > x)} = q \end{cases}$$

para algum $\alpha > 1$ e $0 < p \leq 1$. A sequência de coeficientes $\{\varphi_n\}$ satisfaz

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} |j\varphi_j| < +\infty$$

$\varphi_j \neq 0$ para algum j, então temos o comportamento para a cauda

$$\Psi(u) \sim cte \frac{1}{\mu(\alpha - 1)} uP(X > u).$$

Alternativamente, $\Psi(u)$ pode ser estimada analisando-se o comportamento assintótico do processo de perda agregada

$$S_t = \sum_{k=1}^{N_t} X_k - ct,$$

pois,

$$P(R_t > 0) = P(S_t > u).$$

Como a taxa c satisfaz $c > \frac{EX}{EV}$, sem perda de generalidade, sempre podemos assumir que $c = 1$. Para indenizações X com o segundo momento finito e, assumindo-se $\{N_t\}$ um processo de Poisson independente de $\{X_k\}$, Asmussen (2000) mostra que a distribuição assintótica da normalização de $\{S_t\}$ é Gaussiana.

Analisaremos o processo da perda agregada $\left\{\sum_{k=1}^{N_t} X_k - t\right\}$ quando as indenizações $X_k's$ não possuem o segundo momento finito e não possuem necessariamente a mesma distribuição. Além disso, o processo de chegada $\{N_t\}$ nem sempre será um processo de Poisson ou independente do processo das indenizações $\{X_k\}$.

Na seção 3.2, usando resultados de convergência em Mallows e propriedades obtidas anteriormente, úteis em casos em que distribuições de cauda pesada estão envolvidas, estudaremos alguns casos em que temos garantida a convergência do processo de perda agregada clássico estabilizado para uma distribuição $\alpha-$estável, $1 < \alpha < 2$. Primeiramente, estudaremos na Proposição 3.1 a equivalência dos processos S_t e seu associado $S_{T_{N_t}}$. Provaremos que

$$\Psi(u) = P\left(\sup_{t \geq 0} S_t > u\right) = P\left(\sup_{n \geq 0} S_{T_n} > u\right),$$

e portanto, estudaremos casos em que

$$\frac{S_{T_n} - c_n}{n^{1/\alpha}} \xrightarrow[n \to +\infty]{d_\alpha} Y_\alpha,$$

ou ainda em distribuição

$$\frac{S_{T_n} - c_n}{n^{1/\alpha}} \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathrm{d}} Y_\alpha.$$

Para obtermos a convergência do processo $\{S_t\}$ estudamos sua convergência estabilizada nos Teoremas 3.3, 3.4 e 3.6, onde provamos que

$$\frac{S_t - c_{N_t}}{N_t^{1/\alpha}} \xrightarrow{d_\alpha} Y_\alpha,$$

para os casos em que $\{N_t\}$ e X_n são independentes, $m-$dependentes e u.ϵ.i. respectivamente. As $\{X_i\}$ são v.a.'s i.i.d. com distribuição $F \in \mathcal{D}_{NF}(G_\alpha)$, $Y_\alpha \stackrel{\mathrm{d}}{=} G_\alpha$, e $V_i's$ i.i.d. com $E(V^\alpha) < \infty$. Para obter a convergência em distribuição, no Corolário 3.4, assumiremos hipóteses mais fracas como $F \in \mathcal{D}_N(G_\alpha)$.

Na seção 3.3, obtemos cotas para a probabilidade da ruína usando os resultados da seção anterior. Concluímos, nas Proposições 3.16 e 3.18 que, para alguma sequência real

$\{c_n^{'}\}$ temos, para M suficientemente grande,

$$\Psi_M(u) \sim P\left(Y_\alpha > \frac{u - c_M^{'}}{M^{1/\alpha}}\right). \tag{3.2}$$

3.2 Convergência do Processo de Perda Agregada

Considere o processo de perda agregada

$$S_t = u - R_t = \sum_{i=1}^{N_t} X_i - t$$

onde a distribuição das indenizações não possuem o segundo momento finito, isto é, $EX^2 = \infty$.

Para $V_1, V_2, ...$ os tempos de chegadas das indenizações e para $T_n = V_1 + ... + V_n$ considere o processo associado

$$S_{T_{N_t}} = \sum_{k=1}^{N_t} X_k - T_{N_t} = \sum_{k=1}^{N_t} (X_k - V_k). \tag{3.3}$$

Quando $N_t = n$ temos que

$$S_{T_n} = \sum_{k=1}^{n} X_k - T_n = \sum_{k=1}^{n} (X_k - V_k).$$

A proposição abaixo mostra que as propriedades de $\{S_{T_{N_t}}\}_{t\geq 0}$ são preservadas pelo processo $\{S_t\}_{t\geq 0}$, de modo que, basta analisarmos o comportamento assintótico de $\{S_{T_{N_t}}\}_{t\geq 0}$.

Proposição 3.1. *(a) Para $T_0 = 0$ temos*

$$\Psi(u) = P\left(\sup_{t\geq 0} S_t > u\right) = P\left(\sup_{n\geq 0} S_{T_n} > u\right),$$

(b) Seja $1 < \alpha < 2$. Assuma que $E(V^\alpha) < \infty$, e que existam constantes c_n tais que

$$\frac{S_{T_{N_t}} - c_{N_t}}{N_t^{1/\alpha}} \xrightarrow[t\to+\infty]{d_\alpha} Y_\alpha \;\Rightarrow\; \frac{S_t - c_{N_t}}{N_t^{1/\alpha}} \xrightarrow[t\to+\infty]{d_\alpha} Y_\alpha. \tag{3.4}$$

Demonstração: (a) Note que $S_{T_n} = \sum_{k=1}^n X_k - T_n = \sum_{k=1}^n (X_k - V_k)$ e

$$(S_t > u, N_t = n) = \left(\sum_{k=1}^{n} (X_k - V_k) - (t - T_n) > u, N_t = n \right) \subseteq (S_{T_n} > u, N_t = n).$$

Segue que

$$\left(\sup_{t \geq 0} S_t > u \right) = \bigcup_{n \geq 0} (S_{T_n} > u).$$

(b) Pelo Teorema da Representação (Teorema 2.4), podemos tomar Y_α tal que a distribuição conjunta $(Z_{N_t}, Y_\alpha) \stackrel{\mathrm{d}}{=} F_{Z_{N_t}} \wedge F_{Y_\alpha}$, para $Z_{N_t} = \frac{S_{T_{N_t}} - c_{N_t}}{N_t^{1/\alpha}}$. Segue que

$$E\{|Z_{N_t} - Y_\alpha|^\alpha\} \to 0.$$

Observe que

$$\frac{S_t - C_{N_t}}{N_t^{1/\alpha}} = \frac{S_{T_{N_t}} - C_{N_t}}{N_t^{1/\alpha}} + \frac{T_{N_t} - t}{N_t^{1/\alpha}}$$

e $0 \leq t - T_{N_t} < V_{N_t} + 1$. Por hipótese, temos $E(V_{N_t+1}^\alpha) < \infty$ e pela desigualdade de Minkowski

$$E\left\{ \left| \frac{S_t - C_{N_t}}{N_t^{1/\alpha}} - Y_\alpha \right|^\alpha \right\} \leq 2^{\alpha-1} \left[E\left\{ |Z_{N_t} - Y_\alpha|^\alpha \right\} + E\left\{ \frac{(V_{N_t+1})^\alpha}{N_t} \right\} \right] \to 0$$

o que conclui a prova.

$\square$

Para obtenção dos resultados assintóticos de $S_{T_n} = \sum_{k=1}^n (X_k - V_k)$ faremos uso do Teorema do Limite Central para distribuições estáveis de Barbosa e Dorea (Teorema 1.20), Proposição 2.18, Teoremas 2.22 e 2.29.

Condição 3.2. Seja $1 < \alpha < 2$ e assuma que:

i) o processo de chegada $\{N_t\}_{t \geq 0}$ possui tempos entre chegadas $V_i's$ v.a.'s i.i.d. e $E(V^\alpha) < \infty$;

ii) as indenizações $X_1, X_2, ...$ são v.a.'s i.i.d. com distribuição comum $F \in \mathcal{D}_{NF}(G_\alpha)$ com G_α uma distribuição $\alpha-$estável;

ou

iii) as indenizações $X_1, X_2, ...$ são v.a.'s independentes e existe uma v.a. $\alpha-$estável $Y_\alpha \stackrel{d}{=} G_\alpha$ tal que para cópias independentes $Y_1, Y_2, ...$ temos satisfeito para todo $b > 0$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E\left\{|X_i - Y_i|^\alpha 1_{\left(|X_i - Y_i| > bn^{\frac{2-\alpha}{2\alpha}}\right)}\right\} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{3.5}$$

Teorema 3.3. *Sob a Condição 3.2 se* $\{N_t\}_{t\geq 0}$ *e* $\{X_n\}_{n\geq 0}$ *são independentes então*

$$\frac{S_t - c_{N_t}}{N_t^{1/\alpha}} \underset{t\to+\infty}{\overset{d_\alpha}{\longrightarrow}} Y_\alpha \tag{3.6}$$

para alguma sequência $\{c_n\}$.

Demonstração: (a) Primeiro mostraremos que se a Condição 3.2 (ii) está satisfeita então temos

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - T_n - c_n}{n^{1/\alpha}} \underset{n\to+\infty}{\overset{d_\alpha}{\longrightarrow}} Y_\alpha \tag{3.7}$$

para $Y_\alpha \stackrel{d}{=} G_\alpha$. Como $F \in \mathcal{D}_{NF}(G_\alpha)$ então $d_\alpha(F, G_\alpha) < +\infty$, e $d_\alpha(F_{X-V}, G_\alpha) < +\infty$ pois

$$d_\alpha(F_{X-V}, G_\alpha) \leq d_\alpha(F_{X-V}, F) + d_\alpha(F, G_\alpha)$$

pela desigualdade de Minkowski e $d_\alpha^\alpha(F_{X-V}, F) \leq E(V^\alpha)$.

Pelo Lema 2.11 existe uma sequência $\{c_n\}$ tal que

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - V_i) - c_n}{n^{1/\alpha}} \underset{n\to+\infty}{\overset{d_\alpha}{\longrightarrow}} Y_\alpha.$$

Sejam $Y_1, Y_2, ...$ cópias independentes de Y_α, sem perda de generalidade usaremos $EY_\alpha = 0$, então como no Teorema 1.20, tomaremos $c_n = \sum_{i=1}^{n} E\left\{|X_i - V_i - Y_i|^\alpha 1_{\{|X_i - V_i - Y_i| \leq bn^{\frac{2-\alpha}{2\alpha}}\}}\right\}$ para algum $b > 0$.

(b) Agora, mostraremos que se (iii) é satisfeita então também temos (3.7). No caso em que as indenizações são independentes e não possuem necessariamente as mesmas distribuições, por hipótese as X_i's satisfazem (3.5). Pelo Teorema 1.20 temos que existe uma sequência $\{c_n^{'}\}$ tal que

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - c_n^{'}}{n^{1/\alpha}} \xrightarrow[n\to+\infty]{d_\alpha} Y_\alpha.$$

Considere os tempos entre chegadas das indenizações satisfazendo (i). Observe que $\{\sum_{i=1}^{n}(V_i - EV)\}$ é uma martingale e $\{|V_i - EV|^\alpha\}$ é uniformemente integrável, uma vez que $V_i's$ são i.i.d. com $E(V^\alpha) < \infty$, então pelo resultado de Hall e Heyde (1980), usado na demonstração do Lema 2.11, temos que

$$E\left\{\left|\frac{\sum_{i=1}^{n} V_i - nEV}{n^{1/\alpha}}\right|^\alpha\right\} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

logo,

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} V_i - nEV}{n^{1/\alpha}} \xrightarrow{d_\alpha} 0.$$

Desse modo,

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - V_i) - c_n^{'} + nEV}{n^{1/\alpha}} \xrightarrow{d_\alpha} Y_\alpha.$$

(c) Considere os tempos de parada $\tau_0 = 0$ e para $n \geq 1$

$$\begin{cases} \tau_n &= n \quad T_n = V_1 + ... + V_n \leq t, \\ \tau_n &= \tau_{n-1} \quad \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Como $N_t \xrightarrow{p} \infty$ temos $\tau_n \xrightarrow{p} \infty$. A independência de $\{N_t\}$ e $\{X_n\}$ aliada à Proposição 2.18 e (3.7) garantem para ambos os casos (ii) e (iii)

$$\frac{\sum_{i=1}^{\tau_n}(X_i - V_i) - c_{\tau_n}}{{\tau_n}^{1/\alpha}} \xrightarrow{d_\alpha} Y_\alpha.$$

(d) Note que $\tau_{N_t} = N_t$ e temos

$$\frac{\sum_{i=1}^{N_t}(X_i - V_i) - c_{N_t}}{{N_t}^{1/\alpha}} \xrightarrow{d_\alpha} Y_\alpha.$$

E (3.6) segue da Proposição 3.1.

$\square$

Corolário 3.4. *Sob a Condição 3.2 (i), X_i's v.a.'s i.i.d. com distribuição $F \in \mathcal{D}_N(G_\alpha)$, $\{N_t\}$ e $\{X_n\}$ independentes. Então, para $Y_\alpha \stackrel{d}{=} G_\alpha$*

$$\frac{S_t - c_{N_t}}{N_t^{1/\alpha}} \xrightarrow[t\to+\infty]{d} Y_\alpha$$

Demonstração: Por hipótese, existe $\{c_n\}$ tal que

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i - c_n}{n^{1/\alpha}} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathrm{d}} Y_\alpha.$$

Na demonstração do teorema anterior temos

$$\frac{\sum_{i=1}^n V_i - nEV}{n^{1/\alpha}} \xrightarrow{d_\alpha} 0$$

$$\Rightarrow \frac{\sum_{i=1}^n V_i - nEV}{n^{1/\alpha}} \xrightarrow{\mathrm{d}} 0$$

$$\Rightarrow \frac{\sum_{i=1}^n X_i - V_i - c_n + nEV}{n^{1/\alpha}} \xrightarrow{\mathrm{d}} Y_\alpha.$$

O resultado segue como no Teorema 3.3.

□

Corolário 3.5. *Sob a Condição 3.2 (i), X_i's v.a.'s independentes, satisfazendo (3.5). $\{N_t\}$ e $\{X_n\}$ independentes. Então*

$$\frac{S_t - c_{N_t}}{N_t^{1/\alpha}} \xrightarrow[t\to+\infty]{d} Y_\alpha$$

De forma análoga à demonstração do Teorema 3.3, prova-se o resultado abaixo.

Teorema 3.6. *Sob a Condição 3.2, se $\{N_t\}_{t\geq 0}$ e $\{X_n\}_{n\geq 0}$ são $m-$dependentes então*

$$\frac{S_t - c_{N_t}}{N_t^{1/\alpha}} \xrightarrow[t\to+\infty]{d_\alpha} Y_\alpha$$

para alguma sequência $\{c_n\}$.

Boxma e Albrecher (2003) consideraram o modelo clássico de reserva de risco a tempo contínuo $S_t = \sum_{i=1}^{N_t} X_i - t$, onde X_i's são v.a.'s independentes com distribuição F. No trabalho, supuseram que existe uma sequência $\{W_n\}$ de v.a.'s i.i.d. tal que se X_i for maior ou igual a W_i, então o tempo até a ocorrência do próximo sinistro é exponencialmente distribuído com taxa λ_1, caso contrário será exponencialmente distribuído com taxa λ_2. É claro que nesse modelo temos uma estrutura de $1-$dependência, pois a distribuição do tempo de chegada do $n-$ésimo sinistro só depende do sinistro anterior.

Corolário 3.7. *Para o modelo clássico de reserva de risco considerado por Boxma e Albrecher (ver acima), suponha que $F \in \mathcal{D}_{NF}(G_\alpha)$, G_α distribuição $\alpha-$estável e $Y_\alpha \stackrel{d}{=} G_\alpha$. Então*

$$\frac{S_t - c_{N_t}}{N_t^{1/\alpha}} \xrightarrow[t\to+\infty]{d_\alpha} Y_\alpha.$$

A demonstração deste resultado segue como a demonstração do Corolário 3.4.

Corolário 3.8. *Sob a Condição 3.2 (i), X_i's v.a.'s i.i.d. com distribuição $F \in \mathcal{D}_N(G_\alpha)$, $\{N_t\}$ e $\{X_n\}$ $m-$dependentes e $Y_\alpha \stackrel{d}{=} G_\alpha$. Então*

$$\frac{S_t - c_{N_t}}{N_t^{1/\alpha}} \xrightarrow[t\to+\infty]{d} Y_\alpha$$

Corolário 3.9. *Sob a Condição 3.2 (i), X_i's v.a.'s independentes, satisfazendo (3.5). $\{N_t\}$ e $\{X_n\}$ $m-$dependentes. Então*

$$\frac{S_t - c_{N_t}}{N_t^{1/\alpha}} \xrightarrow[t\to+\infty]{d} Y_\alpha$$

Seja $Z_n \stackrel{\mathrm{d}}{=} \frac{\sum_{i=1}^n X_i - c_n}{n^{/\alpha}}$.

Teorema 3.10. *Sob a Condição 3.2 se $\{N_t\}_{t\geq 0}$ é u.ϵ.i. $\{Z_n\}_{n\geq 0}$ e existe $r < 1$ tal que $\sum_{k=1}^{\infty}\{P(N_t = k)\}^r < +\infty$ para t suficientemente grande, então*

$$\frac{S_t - c_{N_t}}{N_t^{1/\alpha}} \xrightarrow[t\to+\infty]{d_\alpha} Y_\alpha \tag{3.8}$$

para alguma sequência $\{c_n\}$ e $Y_\alpha \stackrel{d}{=} G_\alpha$.

Corolário 3.11. *Sob a Condição 3.2 (i), X_i's v.a.'s i.i.d. com distribuição $F \in \mathcal{D}_N(G_\alpha)$, $\{N_t\}$ é u.ϵ.i. $\{Z_n\}$, e $Y_\alpha \stackrel{d}{=} G_\alpha$. Então*

$$\frac{S_t - c_{N_t}}{N_t^{1/\alpha}} \xrightarrow[t\to+\infty]{d} Y_\alpha$$

Corolário 3.12. *Sob a Condição 3.2 (i), X_i's v.a.'s independentes, satisfazendo (3.5). $\{N_t\}$ é u.ϵ.i. $\{Z_n\}$. Então*

$$\frac{S_t - c_{N_t}}{N_t^{1/\alpha}} \xrightarrow[t\to+\infty]{d} Y_\alpha$$

3.3 Cotas para a Probabilidade da Ruína

Na seção seguinte, obteremos cotas para a probabilidade da ruína. As estimativas serão feitas baseadas no resultado de Ng et al (2002) que nos garante, sob algumas condições, que

$$P\left(\max_{1\le k\le n}\sum_{i=1}^{k} X_i > x\right) \sim P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i > x\right).$$

Então se soubermos que o comportamento estabilizado das perdas agregadas tende em distribuição para uma variável $\alpha-$estável Y_α, $1 < \alpha < 2$, teremos

$$\Psi_M(u) \sim P\left(Y_\alpha > \frac{u - c_M^{'}}{M^{1/\alpha}}\right),$$

onde

$$\Psi(u) = \lim_{M\to\infty} \Psi_M(u).$$

Assim, relacionaremos a probabilidade da ruína com a cauda de uma distribuição $\alpha-$estável.

Pretendemos nessa seção usar os resultados da seção anterior sobre o comportamento estabilizado, com o passar do tempo, de certos processos de perda agregada para encontrar estimativas para a cauda da ruína, isto é, $\underset{u\to+\infty}{lim} \Psi(u)$.

As classes de distribuições do tipo cauda longa ($\mathcal{L}$) e subexponenciais ($\mathcal{S}$), apresentadas no Capítulo 1, são importantes para essa seção. Vejam a seguir algumas considerações relevantes para nosso estudo.

Observação 3.13. (i) Sejam F e G_α distribuições tais que $d_\alpha(F, G_\alpha) < \infty$ e G_α $\alpha-$estável, logo $G_\alpha \in \mathcal{S}$. Mostraremos que $F \in \mathcal{S}$ também. Pela Propriedade 1.7 item (ii) basta mostrar que

$$\frac{\bar{F}(x)}{\bar{G}_\alpha(x)} \to c$$

quando $x \to \infty$, onde $0 < c < \infty$. Como $d_\alpha(F, G_\alpha) < \infty$ então pelo Corolário 2.12, $F \in \mathcal{D}_N(G_\alpha)$. Então pela Caracterização Alternativa de Mijnheer e Propriedade 1.15 escreve-se

$$1 - F(x) = \frac{a_+ + b(x)}{x^\alpha},$$

$$1 - G_\alpha(x) \sim a_+ x^{-\alpha}(1 + x^{-\gamma} o(1))$$

para $\gamma > 0$, $x > 0$, $b(x) \to 0$ quando $x \to \infty$. Então

$$\frac{\bar{F}(x)}{\bar{G}_\alpha(x)} \to 1,$$

concluímos que $F \in \mathcal{S}$.

(ii) Observe também que se $X_j's$ são v.a.'s independentes e satisfazem a condição (3.5) abaixo reescrita

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} E\left\{ |X_j - Y_j|^\alpha 1_{\left(|X_j - Y_j| > bn^{\frac{2-\alpha}{2\alpha}}\right)} \right\} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0,$$

então temos claramente que $E(|X_j - Y_j|^\alpha) < \infty$ para todo $j = 1, 2, ...$ então $d_\alpha(F_{X_j}, F_{Y_j}) < \infty$ e assim por (i) cada $X_j \in \mathcal{S}$.

Os seguintes resultados, de Ng et al (2002), são fundamentais para o cálculo da cauda da probabilidade da ruína, pois são propriedades assintóticas das caudas do máximo de somas parciais.

Teorema 3.14. *Suponha que a f.d. $F_k \in \mathcal{L}$ para $k \geq 1$. Então temos que, para cada $n \in \mathbb{N}$*

$$P\left(\max_{1 \leq k \leq n} \sum_{i=1}^{k} X_i > x \right) \sim P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i > x \right),$$

onde $X_i \overset{d}{=} F_i$ e são independentes.

Teorema 3.15. *Suponha que a f.d. $\bar{F}_k(x) \sim b_k \bar{F}(x)$ para $k \geq 1$, onde $\bar{F}$ é a cauda de alguma distribuição subexponencial F, e b_k, $k \geq 1$, são constantes não-negativas tais que*

$B(n) = \sum_{k=1}^{n} b_k > 0$. *Então temos que, para cada* $n \in \mathbb{N}$

$$P\left(\max_{1\leq k\leq n} \sum_{i=1}^{k} X_i > x\right) \sim P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i > x\right) \sim P\left(\max_{1\leq k\leq n} X_k > x\right) \sim B(n)\bar{F}(x),$$

onde $X_i \stackrel{d}{=} F_i$ *e são independentes.*

Vamos aplicar as observações e os resultados anteriores ao nosso problema para o cálculo da probabilidade da ruína para o processo de perda agregada $S_{T_n} = \sum_{i=1}^{n}(X_i - V_i)$.

Proposição 3.16. *Sejam* X_i*'s v.a.'s i.i.d. com distribuição* F*, onde* $F \in \mathcal{D}_N(G_\alpha)$ *para alguma* G_α *distribuição* $\alpha-$*estável. Suponha que as* V_i*'s são v.a.'s i.i.d. com* $E(V^\alpha) < \infty$*, e independentes das* $X_i^{\prime}s$*. Então, para* M *suficientemente grande*

$$\Psi_M(u) \sim P\left(Y_\alpha > \frac{u - c_M^{'}}{M^{1/\alpha}}\right).$$

Demonstração: Vimos, na demonstração do Teorema 3.3 que $d_\alpha(F_{X-V}, G_\alpha) < \infty$ e que existe uma sequência $\{c_n^{'}\}$ tal que

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - V_i - c_n^{'}}{n^{1/\alpha}} \xrightarrow[n\to+\infty]{d_\alpha} Y_\alpha.$$

Então, pela Observação 3.13 (i), $F_{X-V} \in \mathcal{S}$, logo $F_{X-V} \in \mathcal{L}$. Assim, temos pelo Teorema 3.14 que

$$\Psi_M(u) \sim P\left(\sum_{i=1}^{M}(X_i - V_i) > u\right)$$

quando u diverge para $+\infty$. E, para M suficientemente grande

$$P\left(\sum_{i=1}^{M}(X_i - V_i) > u\right) = P\left(\frac{\sum_{i=1}^{M}(X_i - V_i) - c_M^{'}}{M^{1/\alpha}} > \frac{u - c_M^{'}}{M^{1/\alpha}}\right) \sim P\left(Y_\alpha > \frac{u - c_M^{'}}{M^{1/\alpha}}\right).$$

Então

$$\Psi_M(u) \sim P\left(Y_\alpha > \frac{u - c_M^{'}}{M^{1/\alpha}}\right). \tag{3.9}$$

□

Exemplo 3.17. Para o modelo clássico de reserva de risco de Lundberg

$$R_t = u + t - \sum_{i=1}^{N_t} X_i,$$

suponha que as indenizações X_i's são v.a.'s i.i.d. F, onde F é a distribuição Pareto com parâmetro 1 e $\mu = 1$, como no Exemplo 1.16. Assim, $\bar{F}(x) = \frac{1}{x-1} \in \mathcal{D}_{NF}(S_1)$, S_1 a distribuição Cauchy Padrão. O processo $\{N_t\}$ tem distribuição Poisson e independe das indenizações. Logo, $E(V^\alpha) < \infty$ e temos a cota para a probabilidade da ruína

$$\Psi_M(u) \sim P\left(Y_1 > \frac{u - c_M^{'}}{M^{1/\alpha}}\right) = \int_{\frac{u-c_M^{'}}{M^{1/\alpha}}}^{\infty} \frac{1}{\pi((x-1)^2+1)} dx$$

para M grande e $Y_1 \stackrel{\mathrm{d}}{=} S_1$.

De maneira análoga, temos o resultado para X_i's independentes, mas não necessariamente com mesma distribuição.

Proposição 3.18. *Sejam X_i's v.a.'s independentes satisfazendo (3.5). Suponha que as V_i's são v.a.'s i.i.d. com $E(V^\alpha) < \infty$, independentes das $X_i^{'}s$. Então, para M suficientemente grande*

$$\Psi_M(u) \sim P\left(Y_\alpha > \frac{u - c_M^{'}}{M^{1/\alpha}}\right).$$

Um outro resultado provém do Teorema 3.15, onde podemos aproximar a probabilidade da ruína sem envolver a sequência $\{c_n^{'}\}$. Suponha que $X_j^{'}s$ e $V_j^{'}s$ são v.a.'s que satisfazem a condição (3.5), para Y_α variável $\alpha-$estável com distribuição G_α

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} E\left\{|X_j - Y_j|^\alpha 1_{\left(|X_j - Y_j| > bn^{\frac{2-\alpha}{2\alpha}}\right)}\right\} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Assim para cada j, $d_\alpha(F_{X_j - V_j}, G_\alpha) < \infty$, então $F_{X_j - V_j} \in \mathcal{D}_N(G_\alpha)$, implicando em $\bar{F}_{X_j - V_j}(x) \sim \bar{G}_\alpha(x)$. Pelo Teorema 3.15 temos, para M grande

$$\Psi_M(u) \sim MP(Y_\alpha > u). \tag{3.10}$$

Na realidade, para obtermos o resultado (3.10) basta supormos que $\bar{F}_{X_i - V_i}(x) \sim \bar{G}_\alpha(x)$, para todo i, onde G_α é distribuição subexponencial.

Capítulo 4

Estimação da Probabilidade de Ruína

4.1 Introdução

Suponha que uma atividade seguradora tenha movimento financeiro descrito pelo modelo de reserva de risco a tempo contínuo

$$R_t = u + t - \sum_{i=1}^{N_t} X_i$$

onde u é o capital inicial, os prêmios chegam com taxa constante 1 no tempo, X_i é o valor da i-ésima indenização e N_t é o número de indenizações que são pagas no intervalo de tempo $(0, t]$. O processo de perdas agregadas possui a forma

$$S_t = u - R_t = \sum_{i=1}^{N_t} X_i - t.$$

Queremos calcular a probabilidade do capital dessa atividade atingir valor negativo que chamamos de *probabilidade da ruína.* Como a seguradora sofre perdas somente quando um sinistro ocorre, podemos concluir que a ruína ocorrerá em um dos tempos de ocorrência de sinistros, isto é, durante o pagamento de indenizações. Portanto, para o cálculo da ruína, consideraremos esse processo somente nos tempos de chegadas das mesmas. Note que podemos escrever $N_t = \max\{n : T_n \leq t\}$, onde $T_n = \sum_{i=1}^{n} V_i$ é o tempo de chegada do n-ésimo sinistro e V_i o tempo entre as chegadas do $(i-1)$-ésimo e i-ésimo sinistro. Seja

$$S_{T_{N_t}} = \sum_{k=1}^{N_t} X_k - T_{N_t} = \sum_{k=1}^{N_t} (X_k - V_k)$$

o processo associado, estudado na seção 3.2. Como $S_{T_{N_t}} = S_{T_n}$ se $N_t = n$, para o cálculo da ruína seja

$$S_{T_n} = \sum_{k=1}^{n} X_k - T_n = \sum_{k=1}^{n} (X_k - V_k).$$

Aqui, estamos interessados em modelos de reserva de risco clássicos tais que as indenizações possuem distribuição do tipo cauda grossa. Desse modo, é natural pensar que distribuições estáveis estão envolvidas. Como a distância de Mallows possui propriedades interessantes para convergências de distribuições relacionadas com distribuições estáveis, visto nos Capítulos 2 e 3 deste trabalho, a usaremos como meio de obter a convergência em distribuição, e assim, encontrar estimativas para a ruína.

No Capítulo 2, vimos que, para $X_i's$ v.a.'s independentes, V_i's v.a.'s com distribuição comum tal que $E(V^\alpha) < \infty$, sob algumas condições existem $\{c_n^{'}\}$ e $1 < \alpha < 2$ tais que temos a convergência em distância Mallows abaixo

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - V_i) - c_n^{'}}{n^{1/\alpha}} \xrightarrow{d_\alpha} Y_\alpha,$$

que implica na convergência em distribuição

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - V_i) - c_n^{'}}{n^{1/\alpha}} \xrightarrow{\mathrm{d}} Y_\alpha, \tag{4.1}$$

onde Y_α é v.a. α-estável. Mostramos, para esses casos, que $X_i - V_i \in \mathcal{L}$ e temos uma aproximação para a probabilidade da ruína em (3.10) transcrita abaixo

$$\Psi_M(u) \sim P\left(Y_\alpha > \frac{u - c_M^{'}}{M^{1/\alpha}}\right).$$

E se $\bar{F}_{X_i - V_i}(x) \sim \bar{G}_\alpha(x)$, $\forall\, i$, então

$$\Psi_M(u) \sim MP\left(Y_\alpha > u\right).$$

Assim, nos casos onde convergências do tipo (4.1) ocorrem a probabilidade da ruína está relacionada com a cauda de Y_α. O objetivo da seção 4.2 é estimar a densidade de Y_α, g_α, para obter a probabilidade da ruína. Para tal, usaremos estimadores do tipo peso de Campos e Dorea (2001) e Campos (2001), derivados dos estimadores tipo núcleo, pois são bons estimadores

$$f_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} W(h, x, X_i) \quad h = h_n \downarrow 0, \ \text{quando} \ n \to +\infty. \tag{4.2}$$

Iniciamos a seção, apresentando resultados importantes de Campos e Dorea (2001) sobre as consistências destes estimadores de densidade. Aplicamos esses resultados nas Proposições 4.13, 4.14, 4.15 e 4.16, onde supomos que as indenizações são v.a.'s i.i.d., os tempos entre chegadas i.i.d. e independentes das mesmas, e que $X - V$ está no domínio normal de atração de Y_α v.a. $\alpha-$estável, então usamos os estimadores do tipo núcleo para estimar a densidade de $X - V$, f_{X-V}, e dessa forma, obtermos estimativas para a probabilidade da ruína. Pois, sob algumas condições de regularidade,

$$\int_{\frac{u-c'_M}{M^{1/\alpha}}}^{\infty} f_n(x)dx \underset{n}{\rightarrow} \int_{\frac{u-c'_M}{M^{1/\alpha}}}^{\infty} f_{X-V}(x)dx \sim \int_{\frac{u-c'_M}{M^{1/\alpha}}}^{\infty} g_\alpha(x)dx.$$

E, para M suficientemente grande

$$\Psi_M(u) \sim P\left(Y_\alpha > \frac{u - c'_M}{M^{1/\alpha}}\right) = \int_{\frac{u-c'_M}{M^{1/\alpha}}}^{\infty} g_\alpha(x)dx$$

onde g_α é a densidade de Y_α.

Para terminar, usamos novamente os estimadores tipo peso para obter o não vício assintótico dos estimadores, no caso em que as $X_i's$ são v.a.'s independentes mas não identicamente distribuídas, Observação 4.17.

Usando os resultados de estimação paramétrica de Dorea et al (2006) e Otiniano (2006), na seção 4.3, estimamos os parâmetros de Y_α por meio de $X - V$, isto é, assumindo que $X_i's$ são v.a.'s i.i.d., V_i's i.i.d. independentes das $X_i's$ e, novamente, $X - V$ está no domínio normal de atração de Y_α $\alpha-$estável, obtemos, na Proposição 4.19, que para c_n apropriado e M suficientemente grande

$$\Psi_M(u) \sim P\left(Y_\alpha > \frac{u - c'_M}{M^{1/\alpha}}\right) \sim C_{\hat{\alpha}_n}\hat{\sigma}_n^{\hat{\alpha}_n}\left(\frac{u - c'_M}{M^{1/\hat{\alpha}}}\right)^{-\hat{\alpha}_n},$$

para estimadores de estabilidade $\hat{\alpha}_n$ e viés $\hat{\sigma}_n$.

Para concluir o trabalho, fizemos também uma estimativa para a ruína usando os estimadores de máxima verossimilhança condicional apresentados por Hill (1975). Usando estes estimadores, obtemos na Proposição 4.20, casos onde

$$\Psi_M(u) \sim P\left(Y_\alpha > \frac{u - C'_M}{M^{1/\alpha}}\right) \sim \hat{a}_{+_n}\left(\frac{u - C'_M}{M_n^{1/\hat{\alpha}}}\right)^{-\hat{\alpha}_n}$$

para $\hat{a}_{+_n}$ e $\hat{\alpha}_n$ estimadores da constante caudal e do índice de estabilidade de Y_α e M grande.

4.2 Estimadores de Densidade Tipo Núcleo

Sejam $X_1, X_2, ..., X_n$ variáveis aleatórias independentes com densidade comum f em $\mathbb{R}$. Desejamos estimar $f(x)$ onde x é ponto de continuidade. Para tal, dispomos da amostra $\{X_1, X_2, ..., X_n\}$. Sabemos que

$$f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{2h} P\left(x - h < X \leq x + h\right).$$

Então, um estimador intuitivo para $f(x)$ é

$$f_n(x) = \frac{1}{2nh} \sharp\{X_i : X_i \in [x - h, x + h]\}$$

onde $h = h_n \downarrow 0$ quando $n \longrightarrow \infty$. Podemos reescrevê-lo como

$$f_n(x) = \frac{1}{2nh} 1_{[-1,1]}\left(\frac{x - X_k}{h}\right),$$

isto implica que $\frac{x - X_k}{h} \stackrel{\mathrm{d}}{=} U[-1, 1]$.

Parzen (1962) incrementou essas idéias considerando uma classe de estimadores do tipo núcleo

$$f_n(x) = \frac{1}{nh} \sum_{k=1}^{n} K\left(\frac{x - X_k}{h}\right),$$

onde $h = h_n \downarrow 0$ quando $n \longrightarrow \infty$ e K, denominada *função do tipo núcleo*, ou ainda *função peso*, deve satisfazer algumas propriedades

i) $\sup_{y\in\mathbb{R}} |K(y)| < +\infty$;

ii) $\int_{\mathbb{R}} |K(y)|dy < +\infty$;

iii) $\lim_{y\to\infty} |yK(y)| = 0$;

iv) $\int_{\mathbb{R}} K^2(y)dy < +\infty$ e $nh \to +\infty$

para que f_n seja não-viciado

$$E[f_n(x)] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x),$$

e consistente em média-quadrática

$$E[f_n(x) - f(x)]^2 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

E mais, se $nh^2 \longrightarrow \infty$ e $f(x)$ é *uniformemente contínua*, então para todo $\epsilon > 0$

$$P\left(\sup_{-\infty<x<\infty} |f_n(x) - f(x)| < \epsilon\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Em Campos e Dorea (2001) temos estimadores do tipo peso, derivados dos estimadores do tipo núcleo, com vários graus de consistência para os casos em que a amostra $\{X_n\}_{n\geq 0}$ é composta por variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas definidas no espaço de medida $(E, \mathcal{E}, \nu)$, onde $E \subset \mathbb{R}^d$, $\mathcal{E}$ $\sigma-$álgebra de E e ν é uma medida $\sigma-$finita.

Complementando esses resultados, em Campos (2001) há estimadores para os casos em que $\{X_n\}$ é uma Cadeia de Markov com espaço de estados geral $(E, \mathcal{E})$. Em suma, estima-se $f(\cdot)$ sua densidade estacionária em dois casos: supõe-se que a densidade inicial da cadeia coincide com a estacionária e o caso onde a cadeia possui densidade limite, mas a densidade inicial é qualquer. Para esses casos são necessárias hipóteses adicionais nas estruturas de dependências das cadeias e ergodicidade. Para nosso interesse $E = \mathbb{R}$, $\mathcal{E} = \mathcal{B}$ a $\sigma-$álgebra de Borel e ν é a medida de Lebesgue.

Considere os estimadores usados em Campos (2001) e Campos e Dorea (2001)

$$f_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} W(h, x, X_i) \quad h = h_n \downarrow 0 \text{ quando } n \to +\infty,$$

onde $h = h_n \downarrow 0$, quando $n \to \infty$, $W(h, x, X_i)$ é conhecida como função peso e x o ponto em que desejamos estimar a densidade. A seguir, listamos alguns resultados que usaremos para derivar as nossas estimativas, e sob os quais temos que esses estimadores são assintoticamente não-viciados ($Ef_n(x) \to f(x)$), consistentes em média-quadrática ($(E(f_n(x) - f(x))^2 \to 0$), fracamente consistentes ($f_n(x) \xrightarrow{p} f(x)$), fortemente consistentes ($f_n(x) \xrightarrow{q.c.} f(x)$) e assintoticamente normal distribuídos ($(f_n(x) - Ef_n(x))d_n \xrightarrow{\mathrm{d}} N(0, \sigma^2(x))$), $\{d_n\}$ sequência de constantes.

Condição 4.1. A função $W(h, x, \cdot)$ satisfaz as condições: existe $h_0 > 0$ tal que

$$\int |W(h, x, y)|dy \leq K_0(x) < \infty \quad 0 < h \leq h_0$$

e dado $\delta > 0$ para $W_\delta(h, x, y) = W(h, x, y)1_{(z:|z-x|>\delta)}(y)$, temos

$$|W_\delta(h, x, y)| \leq K_\delta(x) < \infty \quad 0 < h \leq h_0$$

e

$$\lim_{h \to 0} W_\delta(h, x, y) = 0.$$

As funções $K_0(\cdot)$ não dependem de h e a função $K_\delta(\cdot)$ é independente de h e y.

Condição 4.2. Assuma que para $x \in C(f)$ temos a Condição 4.1 e que $W(h, x, y) \geq 0$ com $h = h_n$ satisfaz

$$\lim_{n \to \infty} h_n = 0 \quad \text{e} \quad \int W(h, x, y)dy = 1 \quad 0 < h \leq h_0.$$

Condição 4.3. Assuma que para $x \in C(f)$ temos a Condição 4.3 e que

$$\lim_{n \to \infty} nh = \infty$$

e

$$|hW(h, x, y)| \leq K_1(x) < \infty, \quad 0 < h \leq h_0.$$

Teorema 4.4. *Seja g uma função integrável em $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ e $x \in C(g)$. Assuma que $W(h, x, \cdot)$ satisfaz a Condição 4.1. Então*

$$\lim_{h \to 0} \left| \int_E W(h, x, y)g(y)dy - g(x) \int_E W(h, x, y)dy \right| = 0.$$

Corolário 4.5. *Sob a Condição 4.2, temos o não vício assintótico*

$$\lim_{n\to\infty} E(f_n(x)) = f(x) \quad \forall x \in C(f).$$

Teorema 4.6. *Sob a Condição 4.3, temos a consistência em média quadrática e consequentemente a consistência fraca*

$$\lim_{n\to\infty} \{E(f_n(x) - f(x))^2\} = 0 \quad \forall x \in C(f).$$

Para obter a consistência forte, veja o resultado abaixo

Teorema 4.7. *Seja $x \in C(f)$ e assuma que a Condição 4.3 é satisfeita. Se para todo $\beta > 0$*

$$\sum_{n=1}^{\infty} exp\{-2nh\beta\} < \infty,$$

então

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad \textit{quase certamente.}$$

Teorema 4.8. *Seja $x \in C(f)$ com $f(x) > 0$ e assuma que a Condição 4.3 ocorre. Se*

$$\liminf_{n\to\infty} \int_E hW^2(h, x, y)dy = K_2(x) > 0,$$

então temos a normalidade assintótica

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{f_n(x) - E(f_n(x))}{\sigma(f_n(x))} \leq z\right) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\} dt.$$

O caso em que $\{X_1, X_2, ..., X_n\}$ é uma Cadeia de Markov com $f(\cdot)$ sua densidade limite, para garantirmos as consistências do estimador $f_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} W(h, x, X_i)$ foi preciso assumir que a cadeia é geometricamente ergódica, ou seja, existe π uma medida de probabilidade, que é a distribuição de equilíbrio da cadeia, tal que

$$|P(X_n \in A|X_0 = x) - \pi(A)| \leq \beta\rho^n \;\; \forall\, x \in \mathbb{R}, \;\forall\, A \subset \mathcal{B},$$

onde ρ e β são constantes com $\beta \geq 0$ e $0 < \rho < 1$.

Teorema 4.9. *Seja $\{X_n\}$ uma cadeia de Markov geometricamente ergódica com $f(\cdot)$ sua densidade limite. Sob as Condições 4.1 e 4.2, temos que o estimador $f_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} W(h, x, X_i)$ é assintoticamente não viciado*

$$\lim_{n\to\infty} E(f_n(x)) = f(x) \ \ \forall\, x \in C(f).$$

Observação 4.10. A demonstração desse resultado não utiliza a homogeneidade da cadeia. Contudo, para obter as demais consistências são necessárias hipóteses adicionais além da homogeneidade.

Para o nosso caso, uma forma intuitiva de estimar a densidade das somas estabilizadas, seria o uso dos estimadores tipo núcleo apresentados. Contudo, como observado acima, os resultados conhecidos se aplicam a cadeias de Markov homogêneas, o que não acontece com as somas estabilizadas em questão.

Veremos nas Proposições 4.12, 4.13, 4.14 e 4.15 que para obtermos a cauda da ruína, podemos usar os estimadores de densidade Tipo Núcleo

$$f_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} W(h, x, X_i - V_i) \quad h = h_n \downarrow 0 \text{ quando } n \to +\infty$$

e estimar a densidade de F_{X-V}, chamaremos de f_{X-V}. É natural pensarmos sobre o erro do uso desses estimadores para o cálculo da distribuição F_{X-V}.

Sob algumas condições de regularidade, por exemplo ver em Watson e Leadbetter (1963), temos garantia que o erro médio quadrático integrado converge para zero

$$E\left[\int (f_n(x) - f(x))^2 dx\right] \underset{n}{\to} 0,$$

então

$$\int (Ef_n(x) - f(x))^2 dx \leq \int E(f_n(x) - f(x))^2 dx \underset{n}{\to} 0,$$

e mais, podemos ver que

$$\left| \int_u^\infty Ef_n(x)dx - P(X - V > u) \right| = \left| \int_u^\infty (Ef_n(x) - f(x))dx \right| \leq \int_u^\infty |Ef_n(x) - f(x)|dx$$

$$\leq \int |Ef_n(x) - f(x)|dx \underset{n}{\rightarrow} 0.$$

Assim, temos para qualquer $u \in \mathbb{R}$ a convergência em média

$$\int_u^\infty f_n(x)dx \xrightarrow{L_1} \int_u^\infty f(x)dx.$$

Logo, para escolhas apropriadas de f_n temos a aproximação

$$P(X - V > u) = \int_u^\infty f_{X-V}(x)dx \approx \int_u^\infty f_n(x)dx,$$

e sabemos que $\bar{F}_{X-V}(x) \sim \bar{G}_\alpha(x)$ pois $X - V \in \mathcal{D}_N(Y_\alpha)$, então quando u é grande

$$P(Y_\alpha > u) = \int_u^\infty g_\alpha(x)dx \sim \int_u^\infty f_{X-V}(x)dx.$$

Logo, por (3.10)

$$\Psi_M(u) \sim P\left(Y_\alpha > \frac{u - c_M^{'}}{M^{1/\alpha}}\right) \sim \int_{\frac{u-c_M^{'}}{M^{1/\alpha}}}^\infty f_{X-V}(x)dx. \tag{4.3}$$

A seguir, segue um exemplo onde valem as condições de regularidade de Watson e Leadbetter (1963). E mais, usaremos a densidade da distibuição $N(0,1)$ para estimar a cauda de uma distribuição 1-estável.

Exemplo 4.11. Sejam $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$ para $x \in \mathbb{R}$ a densidade da distribuição Cauchy $S_1(1,0,0)$, e $W(h,x,y) = \frac{1}{h\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-y)^2}{2h^2}}$. É fácil ver que W satisfaz as Condições 4.1, 4.2 e 4.3. Vamos mostrar que para qualquer $u \in \mathbb{R}$

$$\left| \int_u^\infty (Ef_n(x) - f(x))dx \right| \rightarrow 0.$$

Veja que

$$\int_u^\infty |Ef_n(x) - f(x)|dx$$

$$= \int_u^\infty \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}h} \int \frac{e^{-\frac{1}{2h^2}(x-y)^2}}{\pi(1+y^2)} dy - \frac{1}{\pi(1+x^2)} \right| dx,$$

com uma mudança de variáveis temos

$$\leq \frac{1}{\pi\sqrt{\pi}} \int_u^\infty \int \left| \frac{e^{-z^2}}{(1+(x-\sqrt{2}hz)^2)} - \frac{e^{-z^2}}{(1+x^2)} \right| dzdx$$

$$= \frac{1}{\pi\sqrt{\pi}} \int e^{-z^2} \int_u^\infty \left| \frac{1}{(1+(x-\sqrt{2}hz)^2)} - \frac{1}{(1+x^2)} \right| dxdz,$$

$$= \frac{1}{\pi\sqrt{\pi}} \int e^{-z^2} |tg^{-1}(u) - tg^{-1}(u-\sqrt{2}hz)| dz.$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada temos

$$\lim_{n\to\infty} E \left| \int_u^\infty f_n(x)dx - \int_u^\infty f(x)dx \right| \leq \frac{1}{\pi\sqrt{\pi}} \int e^{-z^2} \lim_{n\to\infty} |tg^{-1}(u) - tg^{-1}(u-\sqrt{2}hz)| dz = 0.$$

A partir de agora, suponha que as escolhas de W e h são tais que (4.3) é satisfeita. Temos então as proposições abaixo, que seguem das Proposições 3.16 e 3.17 do capítulo anterior.

Proposição 4.12. *Para o processo de risco*

$$R_t = u + t - \sum_{i=1}^{N_t} X_i,$$

com respectivo processo de perdas agregadas $S_t = u - R_t = \sum_{i=1}^{N_t} X_i - t$. Suponha que as indenizações $X_i's$ são i.i.d., seus tempos entre chegadas V_i's i.i.d.. Assuma que $X - V$ tenha densidade f_{X-V}, e $F_{X-V} \in \mathcal{D}_N(Y_\alpha)$, Y_α v.a. $\alpha-$estável com densidade g_α. Sob as hipóteses da Condição 4.2, para o estimador f_n dado por (4.2), é assintoticamente não viciado , isto é,

$$\lim_{n\to\infty} E(f_n(x)) = f_{X-V}(x) \quad \forall x \in C(f_{X-V}),$$

e assim, para $c_n^{'}$ apropriados e M e n grandes

$$\Psi_M(u) \sim \int_{\frac{u-c_M^{'}}{M^{1/\alpha}}}^\infty f_n(x)dx.$$

Proposição 4.13. *Agora, sejam W e h tais que a Condição 4.3 é satisfeita. Então temos* *a consistência em média quadrática do estimador tipo peso, isto é,*

$$\lim_{n\to\infty}\{E(f_n(x)-f(x))^2\}=0 \quad \forall x\in C(f),$$

e assim, para $c_n^{'}$ apropriados e n e M grandes

$$\Psi_M(u)\sim\int_{\frac{u-c_M^{'}}{M^{1/\alpha}}}^{\infty} f_n(x)dx.$$

Proposição 4.14. *Para W e h satisfazendo a Condição 4.3 e para todo $\beta>0$ tal que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} exp\{-2nh\beta\}<\infty,$$

então

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x) \quad \textit{quase certamente.}$$

Para $c_n^{'}$ apropriados e n,M grandes

$$\Psi_M(u)\sim\int_{\frac{u-c_M^{'}}{M^{1/\alpha}}}^{\infty} f_n(x)dx.$$

Proposição 4.15. *Para W e h satisfazendo a Condição 4.3 e se*

$$\liminf_{n\to\infty}\int_E hW^2(h,x,y)dy=K_2(x)>0,$$

então temos a normalidade assintótica

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{f_n(x)-E(f_n(x))}{\sigma(f_n(x))}\le z\right)=\int_{-\infty}^{z}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\}dt.$$

Para $c_n^{'}$ apropriados e n,M grandes

$$\Psi_M(u)\sim\int_{\frac{u-c_M^{'}}{M^{1/\alpha}}}^{\infty} f_n(x)dx.$$

Observação 4.16. Para o caso em que as indenizações X_i's são independentes, mas não identicamente distribuídas, estimamos diretamente a densidade limite de

$$Z_n = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - V_i) - c_n^{'}}{n^{1/\alpha}}.$$

Como já dissemos anteriormente, $\{Z_n\}$ não é uma Cadeia de Markov homogênea, portanto não podemos usar todos os resultados de Campos (2001). Contudo, na demonstração do não vício assintótico dos estimadores propostos para Cadeias de Markov com distribuição limite, (Teorema 3.1, ver em Campos (2001)), não é necessária a homogeneidade da cadeia, mas a condição de *ergodicidade geométrica* deve ser satisfeita, isto é, existem constantes $\beta > 0$, e $0 < \rho < 1$ tais que

$$|P(Z_n \in A) - P(Y \in A)| \leq \beta\rho^n \text{ para todo } A \in \mathcal{B} \text{ e } n \in \mathbb{N}.$$

Sejam os estimadores (4.1)

$$f_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} W(h, x, Z_i) \quad h = h_n \downarrow 0 \text{ quando } n \to +\infty.$$

Sejam X_i's v.a.'s independentes, mas não identicamente distribuídas, e as V_i's v.a.'s i.i.d. de cauda fina, independentes das $X_i's$. Suponha que existem uma sequência $\{c_n^{'}\}$ e $1 \leq \alpha < 2$ tais que

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - V_i) - c_n^{'}}{n^{1/\alpha}} \xrightarrow{\text{d}} Y_\alpha,$$

para Y_α $\alpha-$estável com densidade g, a Condição 4.2 é satisfeita e que $\{Z_n\} = \left\{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - V_i) - c_n^{'}}{n^{1/\alpha}}\right\}$ é geometricamente ergódica. Então pelo Teorema 4.9 temos o não vício assintótico nos pontos de continuidade de g_α:

$$Ef_n(x) \to g_\alpha(x).$$

Desse modo, estimamos a densidade g_α de Y_α, e obtemos $P(Y_\alpha > x)$ para estimar a ruína. Observe que o erro dessa estimação pode ser grande pois temos garantido apenas o não vício assintótico do estimador.

4.3 Estimadores de Parâmetros da Distribuição Estável

Um segundo método de se estimar a probabilidade de ruína é fazer uso dos resultados de Dorea et al (2006) e Otiniano (2006), onde estimadores consistentes dos parâmetros de estabilidade α e viés σ são apresentados. Veja o resultado principal (Teorema 4.17) que citamos a seguir.

Teorema 4.17. *Sejam $X_1, X_2, ...$ v.a.'s independentes com distribuição comum F simétrica tal que*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1-F(tx)}{1-F(t)} = x^{-\alpha} \text{ para } 0 < \alpha \leq 2,\ x > 0,$$

isto é, $F \in \mathcal{D}(G_\alpha)$, onde $G_\alpha \stackrel{d}{=} S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$. Assuma que F possua densidade contínua em uma vizinhança da origem. Então para $k = k_n \uparrow \infty$ com $\frac{k_n}{n} \to 0$, $m = m_n \uparrow \infty$ com $r_n = [\frac{n}{m}] \to \infty$ e $\epsilon_n \downarrow 0$ com $\epsilon_n r_n \to \infty$, temos

$$\hat{\alpha}_n = \frac{1}{\hat{\gamma}_n} \xrightarrow{p} \alpha \text{ e } \hat{\sigma}_n \xrightarrow{p} \sigma. \tag{4.4}$$

Onde $\hat{\gamma}_n$ é o estimador clássico de Hill:

$$\hat{\gamma}_n = \frac{1}{k} \sum_{j=n-k+1}^{n} \log \frac{X_{(j)}}{X_{(n-k)}} \xrightarrow{p} \gamma = \frac{1}{\alpha}$$

$X_{(j)}$ corresponde à $j-$ésima posição da estatística de ordem $X^{(1)} \leq X^{(2)} \leq ... \leq X^{(n)}$ de $(X_1, X_2, ..., X_n)$. E conhecido o valor de α

$$\hat{\sigma}_n = \frac{\Gamma(1/\alpha)}{\pi\alpha}(\hat{l}_n(0))^{-1}$$

Γ é a função Gama,

$$\hat{l}_n(0) = \frac{1}{2\epsilon}\frac{1}{r_n}\sum_{j=1}^{r_n} 1_{\left(|Y_j^{(n)}| \leq \epsilon\right)}$$

e

$$Y_j^{(n)} = \frac{X_{(j-1)m+1} + ... + X_{jm}}{m^{1/\alpha}}.$$

Para fazer uso desses resultados, vamos assumir que as indenizações X_i's são v.a.'s i.i.d., mais ainda, vamos supor que a distribuição comum das $X_i's$, $F \in \mathcal{D}_N(G_\alpha)$, onde

$$G_\alpha \overset{\mathrm{d}}{=} S_\alpha(\sigma, \beta, \mu),$$

é $\alpha-$estável, os tempos entre chegadas das mesmas V_i's também são i.i.d. e independentes das $X_i's$, com $E(V^\alpha) < \infty$. Como já mostramos $F_{X-V} \overset{\mathrm{d}}{=} X - V$ e $F_{X-V} \in \mathcal{D}_N(G_\alpha)$. No nosso caso, as indenizações assumem valores estritamente positivos e pela Definição 1.17, para $x > 0$

$$F_X(-x) = \frac{a_- + b(-x)}{x^\alpha} = 0,$$

assim $a_- = 0$, implicando em $\beta = 1$, isto é, G_α é assimétrica. Para a probabilidade da ruína, o nosso interesse é conhecer propriedades assintóticas da cauda de G_α. Pela Propriedade 1.14

$$\lim_{x \to \infty} x^\alpha (1 - G_\alpha(x)) = C_\alpha \frac{1+\beta}{2} \sigma^\alpha.$$

Como $\beta = 1$, resta estimar α e σ. Uma vez que os resultados do Teorema 4.17 se aplicam a distribuições simétricas, abaixo, apresentamos uma forma de contornar essa não simetria.

Suponha que $F_{X-V}(0) = \frac{1}{2}$ e considere a distribuição derivada de F_{X-V} a seguir:

$$F^P_{X-V}(x) = \begin{cases} 1 - F_{X-V}(-x), & x < 0 \\ F_{X-V}(x), & x \geq 0. \end{cases}$$

É fácil ver que $F^P_{X-V} \in \mathcal{D}_N(G^s)$, onde $G^s \overset{\mathrm{d}}{=} S_\alpha(\sigma, 0, \mu)$ e que F^P_{X-V} é distribuição simétrica. Na amostra $\{X_1, ..., X_n, V_1, ..., V_n\}$ tome as diferenças $\{X_1 - V_1, ..., X_n - V_n\}$. Escolha aquelas que assumem somente valores não negativos e reindexe-as, obtendo

$$\left\{(X_{\tau_1^P} - V_{\tau_1^P}), ..., (X_{\tau_n^P} - V_{\tau_{n^P}^P})\right\}.$$

Sejam ξ_1, $\xi_2, ...$ variáveis aleatórias i.i.d. com $P(\xi_j = \pm 1) = \frac{1}{2}$ e independentes de $\{X_j - V_j\}$. Defina

$$X^P_j - V^P_j = (X_{\tau_j^P} - V_{\tau_j^P})\xi_j, \;\; j = 1, ..., n^P.$$

Seja a sequência

$$\left\{X^P_1 - V^P_1, ..., X^P_{n^P} - V^P_{n^P}\right\}. \tag{4.5}$$

A Proposição 3 de Dorea et al. (2006) mostra que (4.5) são v.a.'s i.i.d. com distribuição

F^P_{X-V}. Assumindo que a distribuição F_{X-V} possui densidade contínua em uma vizinhança da origem e para sequências escolhidas apropriadamente k, m, r e ϵ, usando o Teorema 4.17 obtemos os parâmetros α e σ.

Então por (3.10)

$$\Psi_M(u) \sim P\left(Y_\alpha > \frac{u - c_M}{M^{1/\alpha}}\right) \sim C_\alpha \sigma^\alpha \left(\frac{u - c_M}{M^{1/\alpha}}\right)^{-\alpha},$$

a constante C_α aparece na Propriedade 1.14. Por (3.11)

$$\Psi_M(u) \sim MP\left(Y_\alpha > u\right) \sim MC_\alpha \sigma^\alpha \left(u\right)^{-\alpha}.$$

Assim, provamos a proposição abaixo.

Proposição 4.18. *Considere, novamente, o processo de perdas agregadas*

$$S_t = u - R_t = \sum_{i=1}^{N_t} X_i - t.$$

Suponha que as indenizações X_i's são i.i.d., seus tempos entre chegadas V_i's i.i.d. e independentes das indenizações. Vamos supor que $E(V^\alpha) < \infty$, $X - V \in \mathcal{D}_N(Y_\alpha)$, Y_α v.a. $\alpha-$estável. Sejam $\hat{\alpha}_n$ e $\hat{\sigma}_n$ como no Teorema 4.17. Temos para c_n apropriado e M suficientemente grande que

$$\Psi_M(u) \sim P\left(Y_\alpha > \frac{u - c_M^{'}}{M^{1/\alpha}}\right) \sim C_{\hat{\alpha}_n} \hat{\sigma}^{\hat{\alpha}_n} \left(\frac{u - c_M^{'}}{M^{1/\hat{\alpha}}}\right)^{-\hat{\alpha}_n}.$$

Para finalizar o Capítulo 4 e concluir esse trabalho, propomos o uso dos estimadores de máxima verossimilhança condicional, apresentados por Hill (1975), para obter os parâmetros caudais de uma Y_α v.a. $\alpha-$estável.

Considere $X_1, X_2, ..., X_n$ uma amostra de v.a.'s positivas com distribuição do tipo Zipf, isto é, $F_X(x) = 1 - a_+ x^{-\alpha}$ para x grande, $a_+ > 0$ e $\alpha > 0$. Mais ainda, suponha que para certo D conhecido temos $F_X(x) = 1 - a_+ x^{-\alpha}$, para $x \geq D$. Seja $(X^{(1)}, X^{(2)}, ..., X^{(n)})$ a estatística de ordem da amostra, logo $X^{(1)} \leq X^{(2)} \leq ... \leq X^{(n)}$. Como conhecemos a forma da cauda de X apenas para valores grandes de x, é intuitivo fazer inferências sobre os parâmetros nas estatísticas de ordem que excedem o valor D, então estamos estimando os parâmetros de F_X condicionado às amostras que são maiores ou iguais a D. Seja então $r < n$ tal que $X^{(r+1)} \geq D$. Na realidade, tome $r = k_n$ tal que $\frac{k_n}{n} \to 0$. Os estimadores de máxima verossimilhança de α e a_+ são

$$\hat{\alpha}_n = \frac{(r+1)}{[\sum_{i=1}^{r} \ln X^{(i)} - r \ln X^{(r+1)}]}$$

$$\hat{a}_{+_n} = [X^{(r+1)}]^{\hat{\alpha}_n} \frac{r+1}{n}.$$

Vamos aplicar o uso desses estimadores ao nosso problema.

Proposição 4.19. *Suponha que as indenizações $X_1, X_2, ...$ são v.a.'s positivas e i.i.d. tais que $F_X \in \mathcal{D}_N(Y_\alpha)$, Y_α v.a. $\alpha-$estável, $1 < \alpha < 2$. Usando os estimadores de Hill, temos para M grande que*

$$\Psi_M(u) \sim P\left(Y_\alpha > \frac{u - C'_M}{M^{1/\alpha}}\right) \sim \hat{a}_{+_n} \left(\frac{u - C'_M}{M_n^{1/\hat{\alpha}}}\right)^{-\hat{\alpha}_n}.$$

Para o caso em que as indenizações $X_1, X_2, ...$ são v.a.'s independentes, mas não necessariamente identicamente distribuídas e satisfazem a hipótese do Teorema 1.20 reescrita abaixo

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} E\left\{|X_j - Y_j|^\alpha 1\left(|X_j - Y_j| > bn^{\frac{2-\alpha}{2\alpha}}\right)\right\} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

para $1 \leq \alpha < 2$, para todo $b > 0$, e Y_α variável aleatória α-estável tal que Y_1, Y_2,... são cópias independentes de Y_α. É claro que por essa hipótese $E(|X_i - Y_i|^\alpha) < \infty$, $\forall\, i$. Assim, $X_i \in \mathcal{D}_N(Y_\alpha)$ e então $F_{X_i}(x) = 1 - a_+ x^{-\alpha}$, para $x \geq D_i$. Isto significa que apesar de $X_1, X_2, ...$ não possuírem a mesma distribuição, elas possuem a mesma cauda para x grande. Logo, um trabalho posterior será mostrar que podemos usar os estimadores de parâmetros para os casos acima.

Referências Bibliográficas

[1] Albrecher, H. e Boxma, O.J.- *A Ruin Model with Dependence Between Claim Sizes and Claim Intervals,* Insurance: Mathematics and Economics, vol. 35, n. 2, 245-254, 2003.

[2] Anscombe, F.J.*Large-sample Theory of Sequencial Estimation,* Proc. Cambridge Philos. Soc., n. 48, 600-607, 1952.

[3] Asmussen, S. *Ruin Probabilities,* World Scientific, Singapura, 2000.

[4] Asmussen, S., Schmidli, H. e Schmidt, V. *Tails Probabilities for Non-Standard Risk and Queueing Processes with Subexponential Jumps,* Advances in Applied Probability, vol. 31, n. 2, 422-447, 1999.

[5] von Bahr, B. *Ruin Probabilities Expressed in Terms of Ladder Height Distributions,* Scandinavian Actuarial Journal, 190-204, 1974.

[6] Barbosa, E.G. e Dorea, C.C.Y. *A note on the Lindemberg condition for Convergence to Stable Laws in Mallows Distance,* Bernoulli, 2009, a aparecer.

[7] Barbosa, E.G. *Convergência, na Distância Mallows, de Cadeias de Markov para Distribuições Estáveis,* Tese de Doutorado, 2007.

[8] Barlow, R. e Proschan F. *Statistical Theory of Realiability and Life Testing: Probability Models, Holt, Rinehart and Winston,* New York, 1975.

[9] Bickel, P.J. e Freedman, D.A. *Some Asymptotic Theory for the Bootstrap,* The Annals of Statistics, vol. 9, 1196-1217, 1981.

[10] Bose, A., Dasgupta, A. e Rubin, H. *A Contemporary Review and Bibliography of Infinitely Divisible Distributions and Processes,* Sankhya: The Indian Journal of Statistics, vol.64, series A, Pt. 3, 763-819, 2002.

[11] Cambanis, S., Simons, G. e Stout, W. *Inequalities for* $Ek(X,Y)$ *when the Marginals are Fixed,* Springer-Verlag, vol. 36, 285-294, 1976

[12] Campos, V.S.M. e Dorea, C.C.Y. *Kernel Density Estimation: the General case.* Statistics and Probability Letters, vol. 55, 173-180, 2001.

[13] Campos, V.S.M.*Análise Assintótica de Estimadores Tipo Núcleo para Densidades Associadas a Cadeias de Markov Gerais,* Tese de Doutorado, 2001.

[14] Chung, K.L. *A Course in Probability Theory,* Academic Press, 1974.

[15] Dorea, C.C.Y., David, H.T., Werner, N.M.*Uniform* $\epsilon-$*independence and the Convergence in Distribution of Randomly Indexed Sequences,* Math. Proc. Camb. Phil. Soc., n. 96, 533-542, 1984.

[16] Dorea, C.C.Y., Ferreira, D.B., *Conditions for Equivalence Between Mallows Distance and Convergence to Stable Laws,* 2009, a aparecer.

[17] Dorea, C.C.Y., Otiniano, C.G., Matsushita, R., Rathie, P.N. *Levy Flight Approximations for scaled Transformations of Random Walks,* Computational Statistics Data Analysis, 2007.

[18] Embrechts, P., Veraverbeke, N. *Estimates for the Probability of Ruin with Special Emphasis on the possibility of Large Claims,* Insurance Math. Econom., vol. 1, 55-72, 1982.

[19] Feller, W. *An Introduction to Probability Theory and its Applications,* vol. 2, segunda edição, John Wiley and Sons, 1971.

[20] Gnedenko, B.V. e Kolmogorov, A.N. *Limit Distributions for Sums of Independent Random Variables,* Addison-Wesley, Cambridge, Mass, 1954.

[21] Hall, P. e Heyde, C.C. *Martingale Limit Theory and Its Application,* Academic Press, New York, USA.

[22] Hill, B.*A Simple General Approach to Inference About the Tail of a Distribution,* The Annals of Statistics, vol. 3, n. 5, 1975.

[23] Johnson, O. e Samworth, R.*Central Limit Theorem and Convergence to Stable Laws in Mallows Distance,* Bernoulli, vol. 11(5), 829-845, 2005.

[24] Klüppelberg, C.*Subexponential Distributions and Integrated Tails,* Journal of Applied Probability, vol. 25, n. 1, 132-141, 1988.

[25] Major, P. *On the Invariance Principle for Sums of Independent and Identically Distributed Random Variables,* Jour. of Multivariate Anal. vol. 8, 487-517, 1978.

[26] Mallows, C.L. *A Note on Asymptotic joint Normality,* The Annals of Math. Statistics, vol. 43, 508-515, 1972.

[27] Mijnheer, J.*On the Rate of Convergence to a Stable Limit Law,* Plenum Publishing Corporation, 1987.

[28] Mikosch, T. e Samorodnitsky, G.*Ruin Probability with Claims Modeled by a Stationary Ergodic Processes,* The Annals of Probability, vol. 28, n. 4, 1814-1851, 2000.

[29] Ng, K.W., Tang, Q.H. e Yang, H. *Maxima of Sums of Heavy-Tailed Random Variables,* Austin Bulletin, vol. 32, n. 1, 43-55, 2002.

[30] Otiniano, C.G. *Resultados sobre Independência Assintótica e Cópulas Associadas a Distribuições Lévy Estáveis,* Tese de Doutorado, 2006.

[31] Parzen, E.*On Estimation of a Probability Function and its Mode,* Annals of Mathematical Statistics, vol. 33, 1065-1076, 1962.

[32] Prakasa Rao, B.L.S. *Nonparametric Functional Estimation,* Academic Press, New York, 1983.

[33] Roussas, G.G. e Ioannides, D. *Moment Inequalities for Mixing Sequences of Random Variables,* Stochastic Analysis and Applications, vol. 5, 61-120, 1987.

[34] Samorodnitski, G. e Taqqu, M. S. *Stable non-Gaussian Random Processes, Stochastic Models with Infinite Variance,* Chapman and Hall, London, UK. 1994.

[35] Sparre Andersen, E. *On the Collective Theory of Risk in the Case of Contagion Between Claims,* Transactiores XVth International Congress of Actuaries, New York, II, 219-229, 1957.

[36] Tchen, A.H. *Inequalities for Distributions with given Marginals,* The Annals of Probability, vol. 8, 814-827, 1980.

[37] Wang, M.C. e Ryzin J.V. *A Class of Estimators for Discrete Distributions,* Biometrika, vol. 68, 301-309, 1981.

[38] Wasserstein, L. N., *Markov Processes over Denumerable Products of Spaces Descibing Large Systems of Automata,* Prob. Inf. Transmission, vol. 5, 45-52, 1969.

[39] Watson, G.S. e Leadbetter M.R. *On the Estimation of the Probability Densitity, I,* The Annals of Mathematical Statistics, vol. 34, n. 2, 480-491, 1963.