



UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA – UNB
FACULDADE UNB GAMA - FACULDADE DE TECNOLOGIA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM INTEGRIDADE DE MATERIAIS DA ENGENHARIA

**APLICAÇÃO DE ALGORITMOS DE MORFOGÊNESE ADAPTATIVA MODIFICADO E DE
OTIMIZAÇÃO ROBUSTA EM PROBLEMAS DE PLACAS FINAS ENRIJECIDAS**

BEATRIZ FERREIRA SOUZA

ORIENTADORA: DRA. CARLA TATIANA MOTA ANFLOR

COORIENTADOR: DR. ARIOSTO BRETANHA JORGE

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM INTEGRIDADE DE MATERIAIS DA ENGENHARIA

PUBLICAÇÃO: FGA.DM – 094A/2021
BRASÍLIA/DF: ABRIL/2021

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA – UNB
FACULDADE UNB GAMA - FACULDADE DE TECNOLOGIA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM INTEGRIDADE DE MATERIAIS DA
ENGENHARIA

**APLICAÇÃO DE ALGORITMOS DE MORFOGÊNESE ADAPTATIVA MODIFICADO E
DE OTIMIZAÇÃO ROBUSTA EM PROBLEMAS DE PLACAS FINAS ENRIJECIDAS**

BEATRIZ FERREIRA SOUZA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO SUBMETIDA AO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM INTEGRIDADE DE MATERIAIS DA ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA, COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE.

APROVADA POR:



DRA. CARLA TATIANA MOTA ANFLOR (FGA/UNB)
(ORIENTADORA)



DR. ARIOSTO BRETANHA JORGE (FGA/UNB)
(COORIENTADOR)



DR. MARCUS VINICIUS GIRÃO DE MORAIS (FT/UNB)
(EXAMINADOR INTERNO)



DR. GUILHERME FERREIRA GOMES (IEM/UNIFEI)
(EXAMINADOR EXTERNO)

BRASÍLIA/DF, 27 DE ABRIL DE 2021

FICHA CATALOGRÁFICA

BEATRIZ FERREIRA SOUZA

Aplicação de Algoritmos de Morfogênese Adaptativa Modificado e de Otimização Robusta em Problemas de Placas Finas Enrijecidas [Distrito Federal], 2021.

145p., 210 x 297 mm (FGA/FT/UnB, Mestre, Integridade de Materiais da Engenharia, 2021).

Dissertação de Mestrado em Integridade de Materiais da Engenharia, Faculdade UnB Gama, Programa de Pós-Graduação em Integridade de Materiais da Engenharia.

1. Algoritmo de Morfogênese Adaptativa 2. Otimização Robusta

3. Algoritmo Genético Híbrido 4. Placas Finas Enrijecidas

I. FGA/FT/UnB

II. Título (série)

REFERÊNCIA

Souza, B. F (2021). Aplicação de Algoritmos de Morfogênese Adaptativa Modificado e de Otimização Robusta em Problemas de Placas Finas Enrijecidas. Dissertação de Mestrado em Integridade de Materiais da Engenharia, Publicação 094A/2021, Programa de Pós-Graduação, Faculdade UnB Gama/FT, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 145p.

CESSÃO DE DIREITOS

Autor: Beatriz Ferreira Souza

Título: Aplicação de Algoritmos de Morfogênese Adaptativa Modificado e de Otimização Robusta em Problemas de Placas Finas Enrijecidas

Grau: Mestre

Ano: 2021

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta dissertação de mestrado e para emprestar ou vender essas cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desta dissertação de mestrado pode ser reproduzida sem a autorização por escrito do autor.

Beatriz Ferreira Souza
bfesouza@gmail.com

Brasília, DF – Brasil

*Aos meus pais, Cícero e Maria, com todo
meu amor.*

AGRADECIMENTOS

A Deus, por seu amor e misericórdia em permanecer comigo cuidando de cada detalhe.

À Santíssima Virgem Maria, por seus cuidados e consolos de Mãe.

Aos meus pais, Cícero e Maria, pelo amor e dedicação em me apoiar incondicionalmente.

Aos meus irmãos, Cristiano e Júnior, por todo carinho e apoio.

Aos meus familiares e amigos que torceram e me acompanharam com suas orações.

Ao meu namorado, Alancoc, por tornar os meus dias mais leves com sua paciência, carinho e generosidade.

À minha orientadora, prof.^a Dr.^a Carla Anflor, que tanto incentivou e acreditou no meu trabalho, me auxiliando com tanta paciência e dedicação.

Ao meu coorientador, prof. Dr. Ariosto Bretanha Jorge, por sua relevante contribuição e pela confiança depositada em meu trabalho.

Ao prof. Dr. Marcus Vinícius Girão, por sua empolgação e paciência ao difundir seu conhecimento.

Ao prof. Dr. Julio Edgardo Samaniego, pela carta de recomendação e pela formação durante a graduação.

Aos professores do PPG Integridade, pela dedicação e competência em formar mestres.

Aos professores da graduação que contribuíram muito na minha formação e que foram minha inspiração para seguir uma carreira acadêmica.

À banca examinadora, pela disposição em avaliar este trabalho e que certamente contribuirá muito para sua melhoria.

Ao Grupo de Mecânica Experimental e Computacional (GMEC), pelas risadas e por terem me ensinado que é muito melhor trabalhar em equipe.

Aos amigos que o Mestrado me presenteou, especialmente, ao Daniel pela amizade e pela parceria nas disciplinas e nas publicações.

À CAPES, à FAP-DF e ao DPG, pelo apoio financeiro que foram fundamentais no desenvolvimento deste trabalho.

À UnB e seus funcionários, especialmente, ao DAC-DDS por toda assistência estudantil e por possibilitar que este trabalho se concretizasse.

Por fim, a todos que de alguma forma contribuíram para mais esta conquista.

Não nos atreveríamos a pensar que essa obra é devida a algum mérito nosso; pelo contrário, é de Deus que vem a nossa capacidade

(2Cor 3,5).

RESUMO

Placas enrijecidas são amplamente utilizadas em estruturas com alto desempenho, principalmente, quando o fator resistência/peso é relevante. Nessas estruturas, as variáveis geométricas podem influenciar consideravelmente em sua capacidade de carga. Desse modo, o principal objetivo foi determinar a geometria ótima de placa fina enrijecida simplesmente apoiada que minimize o deslocamento máximo fora do plano, seguindo restrições de tensão máxima de von Mises. A estrutura é sujeita a um carregamento uniformemente distribuído e possui uma restrição de volume total de material constante. O trabalho contemplou a influência do volume, número, ângulo, posição e área da seção transversal dos enrijecedores no deslocamento máximo e na tensão máxima de von Mises. Os três algoritmos utilizados foram desenvolvidos especialmente para resolução do problema proposto, sendo possível operá-los em paralelo ou isoladamente. O Algoritmo Genético Híbrido foi aplicado para definir o caminho de carga da estrutura e as variáveis geométricas iniciais, possuindo um módulo integrado de busca local que aumenta a capacidade de exploração e adaptação do problema. O Algoritmo de Morfogênese Adaptativa Modificado foi inspirado no padrão de formação de nervuras de folhas para definir a topologia dos enrijecedores nas placas, sendo empregado na avaliação dos ângulos e na relação de áreas entre enrijecedores. O Algoritmo de Otimização Robusta utilizou múltiplos objetivos na determinação da posição dos enrijecedores para o melhoramento do campo de deslocamentos. Os resultados comprovaram que próximo à Frente de Pareto, o deslocamento máximo é pouco sensível às mudanças de variáveis de decisão do projeto, sendo um ponto de ótimo robusto. Além disso, os resultados obtidos foram confrontados com dados disponíveis na literatura, o que mostrou a relevância do estudo e a validação da metodologia proposta. Em condições equivalentes de quantidade de enrijecedores, o Algoritmo de Morfogênese apresentou resultados melhores do que aqueles obtidos com enrijecedores perpendiculares, sendo considerado bastante competente e eficaz na otimização de placas finas enrijecidas. Por fim, as placas otimizadas por Morfogênese tiveram o deslocamento máximo fora do plano reduzido em até 98% e a tensão de von Mises em até 78%, se comparados à placa de referência de mesmo volume.

Palavras-chave: Algoritmo de Morfogênese Adaptativa, Otimização Robusta, Algoritmo Genético Híbrido, Placas finas enrijecidas.

ABSTRACT

Stiffened plates are widely used in structures with high performance, especially when the resistance/weight factor is relevant. In these structures, geometric variables can significantly influence their carrying capacity. In this way, the main objective was to determine the optimum geometry of stiffened thin plate simply supported that minimizes the maximum displacement outside the plane, following maximum von Mises stress restrictions. The structure is subjected to a uniformly distributed load and has a constant total volume restriction of material. The work considered the influence of the volume, number, angle, position and cross-sectional area of the stiffeners in the maximum displacement and in the maximum von Mises stress. The three algorithms used were developed especially for solving the proposed problem, being possible to operate them in parallel or in isolation. The Hybrid Genetic Algorithm was applied to define the load path of the structure and the initial geometric variables, having an integrated local search module that increases the ability to explore and adapt the problem. The Modified Adaptive Morphogenesis Algorithm was inspired by the pattern of leaf vein formation to define the topology of the stiffeners in the plates, being used in the assessment of angles and in the relationship of areas between stiffeners. The Robust Optimization Algorithm used multiple objectives in determining the position of the stiffeners to improve the displacement field. The results showed that near to the Pareto Front, the maximum displacement is not very sensitive to changes in project decision variables, being an optimum robust point. Moreover, the results obtained were compared with data available in the literature, which showed the relevance of the study and the validation of the proposed methodology. Under equivalent conditions of quantity of stiffeners, the Morphogenesis Algorithm showed better results than those obtained with perpendicular stiffeners, being considered quite competent and effective in the optimization of stiffened thin plates. Finally, the plates optimized by Morphogenesis had the maximum displacement outside the plane reduced by up to 98% and the von Mises stress by up to 78%, when compared to the reference plate of the same volume.

Keywords: Adaptive Morphogenesis Algorithm, Robust Optimization, Hybrid Genetic Algorithm, Stiffened Thin Plates.

SUMÁRIO

1	Introdução	20
1.1	Justificativa	20
1.2	Contextualização do Tema	22
1.3	Objetivos	25
1.3.1	Objetivo Geral.....	25
1.3.2	Objetivos Específicos	25
1.4	Metodologia	26
1.5	Organização da Dissertação	27
2	Teoria Clássica de Placas Finas	29
2.1	Placas isotrópicas em sistema de coordenadas cartesianas.....	29
2.1.1	Relações: tensão, deformação e deslocamento de acordo com a Teoria da Elasticidade	33
2.1.2	Solução por Séries Trigonômicas Duplas (Método de Navier)	41
2.2	Placas Ortotrópicas em Sistema de Coordenadas Cartesianas.....	44
2.2.1	Solução por Séries Trigonômicas Duplas (Método de Navier)	47
3	Formulação Do Método Dos Elementos Finitos.....	48
3.1	Sistema Global.....	48
3.2	Análise de Convergência da Solução Numérica.....	52
4	Introdução aos Algoritmos Genéticos.....	55
4.1	Operadores Genéticos	57
4.2	Inviabilidade e Ilegalidade.....	58
4.3	Escolha dos parâmetros	60
4.4	Algoritmo Genético Híbrido.....	61
5	Morfogênese de Venação	63
5.1	Padrão de venação foliar.....	63
5.2	Algoritmo de Morfogênese Adaptativa.....	67
5.3	Otimização Multiobjetivo e Ótimo de Pareto	69
6	Procedimentos Metodológicos.....	73
6.1	Descrição do Problema	73
6.2	Algoritmo Genético Híbrido.....	76
6.3	Algoritmo de Morfogênese Adaptativa Modificado.....	79
6.4	Algoritmo de Otimização Robusta	85
7	Resultados e Discussões	88
7.1	Análise da Convergência	89

7.2	Otimização por Algoritmo Genético Híbrido (restrição $hs \leq 300 \text{ mm}$).....	94
7.3	Otimização por Algoritmo de Morfogênese Adaptativa Modificado (nível 1 com restrição $hs \leq 300 \text{ mm}$)	98
7.4	Otimização das Geometrias A e B (restrição $hs \leq 150 \text{ mm}$).....	104
7.5	Otimização Robusta das Geometrias A e B	120
8	Conclusão.....	124
8.1	Sugestões para Trabalhos Futuros.....	126
8.2	Publicações Associadas a este Trabalho	127
	Lista de Referências	128
A.	Apêndice	134
A.1	Formulação do Elemento Retangular Não Conforme MCZ/ACM.....	134
A.2	Formulação do Elemento Retangular Conforme BFS	138
B.	Apêndice	141
B.1	Elemento Shell63 (ANSYS [®] , Inc)	141
C.	Apêndice	142
C.1	Malha com elemento Shell63 quadriláteros.....	142
D.	Apêndice	143
D.1	Rodadas sucessivas do Algoritmo Genético Híbrido.....	143
E.	Apêndice	144
E.1	Algoritmo Genético Híbrido com taxa de mutação de 5%.....	144

LISTA DE TABELAS

Tabela 5.1. Características da formação das folhas	65
Tabela 6.1. Parâmetros do Algoritmo Genético Híbrido.....	78
Tabela 7.1. Resultados da geometria de referência.....	94
Tabela 7.2. Geometrias ótimas das gerações sucessivas (AGH) para ($hs \leq 300 \text{ mm}$)...96	
Tabela 7.3. Comparativo de geometrias ótimas	97
Tabela 7.4. Geometria ótima por AMAM (NÍVEL 1A) para $hs \leq 300 \text{ mm}$	99
Tabela 7.5. Geometria ótima por AMAM (NÍVEL 1B) para $hs \leq 300 \text{ mm}$	101
Tabela 7.6. Geometria ótima por AGH para $hs \leq 150 \text{ mm}$	105
Tabela 7.7. Geometria ótima por AMAM (NÍVEL 1A) para $hs \leq 150 \text{ mm}$	106
Tabela 7.8. Geometria ótima por AMAM (NÍVEL 1B) para $hs \leq 150 \text{ mm}$	108
Tabela 7.9. Geometria ótima por AMAM (NÍVEIS 1A/2A) para $hs \leq 150 \text{ mm}$	110
Tabela 7.10. Geometria ótima por AMAM (NÍVEIS 1B/2B) para $hs \leq 150 \text{ mm}$	112
Tabela 7.11. Geometria ótima por AMAM (NÍVEIS 1A/2A/3A) para $hs \leq 150 \text{ mm}$..	115
Tabela 7.12. Geometria ótima por AMAM (NÍVEIS 1B/2B/3B) para $hs \leq 150 \text{ mm}$..	116
Tabela 7.13. Comparativo de geometrias ótimas com alturas máximas diferentes	119

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1. Aplicações de placas enrijecidas. a) Construção de aeronaves, b) Construção de navios (SZILARD, 2004).....	21
Figura 2.1. Placa sujeita a carregamento transversal uniformemente distribuído [adaptado de (SZILARD, 2004)].....	30
Figura 2.2. Equilíbrio de esforços em relação à superfície neutra de placa sujeito a carga transversal [adaptado de (SZILARD, 2004)].....	31
Figura 2.3. Tensões em um elemento de placa [adaptado de (SZILARD, 2004)].....	34
Figura 2.4. Geometria plana e defletida para y constante [adaptado de (SZILARD, 2004)].....	35
Figura 2.5. Distorção Angular para z constante [adaptado de (SZILARD, 2004)].....	37
Figura 2.6. Efeito do momento torcional na reação de borda [adaptado de (SZILARD, 2004)].....	40
Figura 2.7. Placa simplesmente apoiada.....	40
Figura 2.8. Placa isotrópica simplesmente apoiada com carregamento distribuído.....	41
Figura 2.9. Placa ortotrópica simplesmente apoiada com carregamento uniformemente distribuído.....	44
Figura 2.10. Teorema dos eixos paralelos na determinação da rigidez à flexão.....	47
Figura 3.1. Discretização de uma placa contínua.....	49
Figura 4.1. Esquema do Algoritmo Genético [adaptado de (GEN; CHENG; LIN, 2008)].....	56
Figura 4.2. Operador genético de cruzamento com um ponto de corte.....	57
Figura 4.3. Operador genético de mutação em gene único.....	58
Figura 4.4. Inviabilidade e Ilegalidade [adaptado de (GEN; CHENG; LIN, 2008)].....	59
Figura 4.5. Algoritmo Híbrido com busca local [adaptado de (GEN; CHENG; LIN, 2008)].....	62
Figura 5.1. Padrão de ramificação das folhas: nome científico/nome popular (família)..	64
Figura 5.2. Detalhe das nervuras na folha de <i>Cybistax antysiphilitica</i> / Ypê Verde (Bignoniaceae) a) veia principal e secundárias. b) ângulo entre veias.....	65
Figura 5.3. Esquema do AMA [adaptado de LIU <i>et al.</i> (2017)].....	68
Figura 5.4. Detalhe da formação das veias. a) Veias principais, b) Veias secundárias.....	69
Figura 5.5. Representação do espaço de decisão e seu respectivo espaço objetivo [adaptado de (DEB, 2001)].....	70
Figura 5.6. Soluções dominadas e não dominadas no espaço objetivo.....	72
Figura 5.7. Ótimo de Pareto para dois objetivos de minimização [adaptado de (DEB, 2001)].....	72
Figura 6.1. Placas para análise de convergência. a) placa de referência, b) placa enrijecida.....	74
Figura 6.2. Condição de apoio e carregamento. A) placa de referência, b) placa enrijecida.....	75
Figura 6.3. Algoritmo Genético Híbrido [adaptado de DAO; ABHARY; MARIAN, 2017].....	77
Figura 6.4. Representação genética do cromossomo de 4 genes.....	78
Figura 6.5. Esquema do Algoritmo de Morfogênese Adaptativa Modificado (AMAM).....	80
Figura 6.6. Detalhe da otimização em níveis topológicos do AMAM. a) Nível 1, b) Nível 2, c) Nível 3.....	81

Figura 6.7. Sub-regiões para cálculo do desvio padrão (1/4 de simetria): NÍVEL 2 AMAM	83
Figura 6.8. Esquema do Algoritmo de Otimização Robusta	85
Figura 6.9. Determinação da Frente de Pareto	86
Figura 6.10. Determinação do ótimo robusto	87
Figura 7.1. Convergência da série de Navier para placas isotrópicas: eq. (2.55).....	89
Figura 7.2. Convergência da série de Navier para placas enrijecidas: eq. (2.72).....	90
Figura 7.3. Convergência da solução numérica da placa base por ANSYS®	92
Figura 7.4. Convergência da solução numérica da placa enrijecida por ANSYS®	93
Figura 7.5. Campo de deslocamentos (mm) da geometria de referência.....	94
Figura 7.6. Busca da geometria ótima através de Algoritmo Genético Híbrido ($hs \leq 300 \text{ mm}$).....	95
Figura 7.7. Campo de deslocamentos (mm) da geometria ótima através do Algoritmo Genético Híbrido para ($hs \leq 300 \text{ mm}$).....	96
Figura 7.8. Morfogênese adaptativa (NÍVEL 1A) para $hs \leq 300 \text{ mm}$	99
Figura 7.9. Campo de deslocamentos (mm) da geometria ótima através da Morfogênese Adaptativa (NÍVEL 1A) para ($hs \leq 300 \text{ mm}$).....	100
Figura 7.10. Morfogênese Adaptativa (NÍVEL 1B) para ($hs \leq 300 \text{ mm}$).....	101
Figura 7.11. Campo de deslocamentos (mm) da geometria ótima através da Morfogênese Adaptativa (NÍVEL 1B) para ($hs \leq 300 \text{ mm}$)	102
Figura 7.12. Campo de deslocamentos ($hs \leq 300 \text{ mm}$). a) placa de referência, b) AGH, c) AMAM NÍVEL 1A, d) AMAM NÍVEL 1B.	103
Figura 7.13. Busca da geometria ótima através de Algoritmo Genético Híbrido ($hs \leq 150 \text{ mm}$).....	104
Figura 7.14. Campo de deslocamento (mm) da geometria ótima através do Algoritmo Genético Híbrido para $hs \leq 150 \text{ mm}$	105
Figura 7.15. Morfogênese Adaptativa (NÍVEL 1A) para $hs \leq 150 \text{ mm}$	106
Figura 7.16. Campo de deslocamentos (mm) da geometria ótima através da Morfogênese Adaptativa (NÍVEL 1A) para $hs \leq 150 \text{ mm}$	107
Figura 7.17. Morfogênese Adaptativa (NÍVEL 1B) para $hs \leq 150 \text{ mm}$	108
Figura 7.18. Campo de deslocamentos (mm) da geometria ótima através da Morfogênese Adaptativa (NÍVEL 1B) para $hs \leq 150 \text{ mm}$	109
Figura 7.19. Campo de deslocamentos ($hs \leq 150 \text{ mm}$). a) placa de referência, b) AGH, c) AMAM NÍVEL 1A, d) AMAM NÍVEL 1B.	110
Figura 7.20. Campo de deslocamentos da geometria ótima através da Morfogênese Adaptativa para $hs \leq 150 \text{ mm}$. a) NÍVEL 1A, b) NÍVEL 2A	111
Figura 7.21. Campo de deslocamentos da geometria ótima através da Morfogênese Adaptativa para $hs \leq 150 \text{ mm}$. a) NÍVEL 1B, b) NÍVEL 2B.....	113
Figura 7.22. Morfogênese adaptativa (NÍVEL 3A) para $hs \leq 150 \text{ mm}$	114
Figura 7.23. Morfogênese adaptativa (NÍVEL 3B) para $hs \leq 150 \text{ mm}$	116
Figura 7.24. Campo de deslocamentos ($hs \leq 150 \text{ mm}$). a) Placa de referência, b) AGH (enrijecedores perpendiculares), c) NÍVEL 3A, d) NÍVEL 3B	117
Figura 7.25. Comparativo entre geometrias otimizadas por AGH e AMAM (A e B)	118
Figura 7.26. Região dominada e frente de Pareto: Geometria A.....	120
Figura 7.27. Região dominada e frente de Pareto: Geometria B.....	121
Figura 7.28. Região dominada e frente de Pareto (coeficiente de variação): Geometria A	122

Figura 7.29. Região dominada e frente de Pareto (coeficiente de variação): Geometria B	123
Figura A.1. Elemento retangular (MCZ/ ACM)	134
Figura A.2. Triângulo de Pascal [adaptado de (DIAS <i>et al.</i> , 2007)].....	135
Figura A.3. Elemento retangular (BFS).....	139
Figura B.4. Elemento Shell63 (ANSYS [®] , Inc).....	141
Figura C.5. Malha do elemento SHELL63 (10 mm). a) AGH, b) AMAM	142
Figura E.6. Busca da geometria ótima através de Algoritmo Genético Híbrido ($h_s \leq 150\text{ mm}$), taxa de mutação 5%	144

LISTA DE SIGLAS E ABREVIações

ACM	Aldini, Clough e Melosh (elemento finito não conforme)
AG	Algoritmo Genético
AGH	Algoritmo Genético Híbrido
AMA	Algoritmo de Morfogênese Adaptativa
AMAM	Algoritmo de Morfogênese Adaptativa Modificado
AOR	Algoritmo de Otimização Robusta
BFS	Bogner, Fox e Schmidt (elemento finito conforme)
C.C.	Condição de Contorno
C.G.	Centro de Gravidade
MCZ	Melosh, Cheung e Zienkiewicz (elemento finito não conforme)
MEF	Método dos Elementos Finitos
S.N.	Superfície Neutra
SCG	Sistema de Coordenadas Globais
SCL	Sistema de Coordenadas Locais
RN	Redes Neurais

LISTA DE SÍMBOLOS LATINOS

a	Largura da placa
A_e	Área da seção transversal dos enrijecedores
b	Comprimento da placa
B	Rigidez torcional efetiva
D	Rigidez à flexão
D_T	Rigidez à torção
D_x	Rigidez à torção na direção x
D_y	Rigidez à torção na direção y
e	Erro verdadeiro de discretização
E	Módulo de elasticidade
E_x	Módulo de elasticidade na direção x
E_y	Módulo de elasticidade na direção y
F_{mn}	Coefficiente de expansão da série dupla de Fourier
G	Módulo de cisalhamento
h	Espessura da placa
H_p	Espessura da placa de referência
h_s	Altura dos enrijecedores
I_{t_x}	Momento de inércia à torção na direção x
I_{t_y}	Momento de inércia à torção na direção y
I_x	Momento de inércia à flexão na direção x
I_y	Momento de inércia à flexão na direção y
L_p	Comprimento da placa de referência
m	Coefficiente da série de Navier
M_x	Momento fletor em x

m_x	Momento fletor por unidade de comprimento em x
M_{xy}	Momento torçor
m_{xy}	Momento torçor por unidade de comprimento
M_y	Momento fletor em y
m_y	Momento fletor por unidade de comprimento em y
n	Coefficiente da série de Navier
N_{ls}	Número de enrijecedores na direção longitudinal da placa
N_{ts}	Número de enrijecedores na direção transversal da placa
P	Conjunto de todas soluções num espaço viável
P'	Conjunto Pareto-ótimo
p_0	Carga de pressão uniformemente distribuída
P_{BL}	Probabilidade de busca local
P_c	Probabilidade de cruzamento
P_e	Probabilidade de elitismo
PL	Ordem assintótica do erro de discretização
P_m	Probabilidade de mutação
P_{mn}	Coefficiente de expansão da série dupla de Fourier
Pop_{inic}	Tamanho da população inicial
PU	Ordem aparente do erro de discretização
P_z	Carga uniformemente distribuída na direção z
q'_x	Força de cisalhamento efetiva por unidade de comprimento em x
q'_y	Força de cisalhamento efetiva por unidade de comprimento em y
Q_x	Força de cisalhamento em x
q_x	Força de cisalhamento por unidade de comprimento em x
Q_y	Força de cisalhamento em y
q_y	Força de cisalhamento por unidade de comprimento em y

r	Razão de refinamento da malha
R_b	Reações de apoio nas bordas da placa simplesmente apoiada
rt	Razão entre espessura da veia principal e secundária
t_{princ}	Espessura da veia principal
t_{sec}	Espessura da veia secundária
t_s	Espessura do enrijecedor
u	Componente de deslocamento na direção x
$U_{Ri}(\phi)$	Estimador de Erro da solução numérica
U_{Ri}	Estimador de Erro de Richardson
v	Componente de deslocamento na direção y
w	Componente de deslocamento na direção z
w_{max}	Deslocamento máximo na direção z
W_{mn}	Coefficiente de expansão da série dupla de Fourier
W_p	Largura da placa de referência
x	Direção x do eixo cartesiano
\bar{X}	Direção x do eixo cartesiano em coordenadas globais
y	Direção y do eixo cartesiano
\bar{Y}	Direção y do eixo cartesiano em coordenadas globais
z	Direção z do eixo cartesiano
\bar{Z}	Direção Z do eixo cartesiano em coordenadas globais

LISTA DE SÍMBOLOS GREGOS

β	Ângulo entre veia principal e secundária
Δh	Comprimento do elemento finito
$\Delta \Pi_{int}$	Decremento de energia de deformação interna
$\Delta \tau$	Decremento da tensão de cisalhamento
ε_x	Deformação específica na direção x
ε_y	Deformação específica na direção y
γ_{xy}	Ângulo de distorção
ν	Coefficiente de Poisson do material
ν_x	Razão de Poisson na direção x
ν_y	Razão de Poisson na direção y
Φ	Solução analítica da variável de interesse
ϕ	Solução numérica da variável de interesse
ϕ_∞	Estimativa da solução analítica por Extrapolação de Richardson
φ	Fração volumétrica dos enrijecedores
$\bar{\Pi}$	Energia potencial total
$\bar{\Pi}_{ext}$	Energia potencial das forças externas
$\bar{\Pi}_{int}$	Energia potencial das forças internas
σ_{max}	Tensão máxima de von Mises
σ_x	Tensão normal na direção x
σ_y	Tensão normal na direção y
σ_z	Tensão normal na direção z
τ_{xy}	Tensão de cisalhamento

LISTA DE MATRIZES

\bar{a}	Matriz de coeficientes
B_e	Matriz das derivadas das funções de forma
\bar{d}	Vetor de deslocamento nodal global
d_e	Vetor de deslocamento nodal do elemento
E	Matriz de elasticidade do elemento
ε_e	Vetor de deformação do elemento
\bar{f}	Matriz das funções interpoladoras
K_e	Matriz de rigidez do elemento
\bar{K}	Matriz de rigidez global
N_e	Matriz das funções de forma do elemento
\bar{p}	Vetor de cargas nodais global
σ	Matriz de tensões
T_e	Matriz de transformação do elemento

1 INTRODUÇÃO

Placas são componentes estruturais planos e bidimensionais com espessura muito menor do que as outras dimensões. No caso de placas finas, a espessura é pelo menos dez vezes menor do que a largura. As cargas estáticas e dinâmicas resistidas por essas estruturas são predominantemente perpendiculares à superfície e são suportadas por momentos de flexão e torção internos e também por forças de cisalhamento transversais (SZILARD, 2004).

No intuito de melhorar as propriedades mecânicas dos elementos estruturais tipo placa, a utilização de enrijecedores é algo amplamente difundido. A técnica consiste em inserir reforços, geralmente, nas direções longitudinal e transversal da placa. Isso possibilita aumentar consideravelmente a rigidez da estrutura e diminuir os deslocamentos fora do plano.

As placas enrijecidas têm muitas aplicações nas estruturas de engenharia, principalmente se o peso próprio for um fator importante. A técnica é capaz de melhorar as características mecânicas sem o aumento do peso da estrutura.

A maioria das estruturas de placas são analisadas através das equações governantes da Teoria da Elasticidade. Por outro lado, as soluções para essas equações só podem ser definidas para algumas condições de contorno e carga pré-definidas. Apesar dessas dificuldades, a superação pode ser encontrada na utilização de técnicas numéricas de discretização, como o método dos elementos finitos ou método das diferenças finitas (SZILARD, 2004).

1.1 JUSTIFICATIVA

Placas enrijecidas são amplamente utilizadas em estruturas com alta capacidade de carga, como aeronaves, navios, mísseis e submarinos. Geralmente, a redução de peso e a conservação da rigidez são fatores essenciais em tais estruturas (CHAKRABORTY; MUKHOPADHYAY; SHA, 2002).

Na indústria aeroespacial, as placas enrijecidas são muito utilizadas na construção da fuselagem e das asas das aeronaves (**Figura 1.1a**), enquanto na indústria naval são

empregadas na construção dos cascos de navios (**Figura 1.1b**). Além disso, podem ser vistas em pontes, estruturas offshore, tanques de armazenamento e instalações petroquímicas (BEDAIR, 2009).

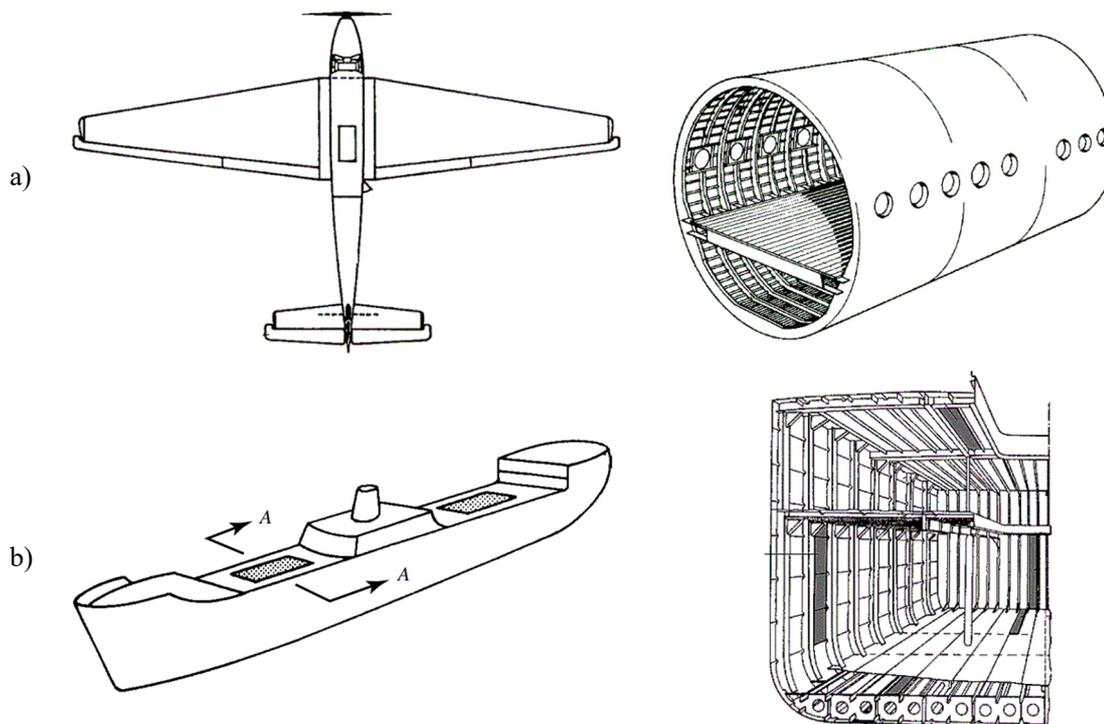


Figura 1.1. Aplicações de placas enrijecidas. a) Construção de aeronaves, b) Construção de navios (SZILARD, 2004)

O que mais atrai a utilização desse tipo de placa é a possibilidade de aumentar a rigidez da estrutura sem o aumento do peso, pois sem os enrijecedores isso só poderia ser possível aumentando a espessura da placa.

Devido à complexidade do problema e aos muitos parâmetros envolvidos, a pesquisa em placas enrijecidas tem sido alvo de interesse dos estudiosos por muitos anos. Inserir reforços (enrijecedores) em placas ou cascas dificulta relativamente a análise, por isso, várias suposições devem ser consideradas na simplificação da solução. Além disso, a utilização de reforços diferenciados, inclinações ou espaçamento desigual pode aumentar ainda mais a complexidade do problema. Por outro lado, essa situação pode ser benéfica para melhorar a capacidade de carga das estruturas (BEDAIR, 2009).

Dito isso, é evidente a necessidade de novas contribuições nessa área de pesquisa tão vasta. Essa pesquisa, portanto, busca analisar a influência de alguns parâmetros geométricos na diminuição do deslocamento máximo fora do plano seguindo restrições

de tensão máxima de von Mises. Os principais parâmetros analisados são: quantidade, área transversal (altura e espessura), posição e ângulo entre enrijecedores, além da fração volumétrica (em relação ao volume de referência) transformada em enrijecedores. O estudo também propôs um método de otimização robusta para minimizar a variabilidade do campo de deslocamentos máximos.

Outro fator importante, e pouco abordado na literatura, é uma análise detalhada da convergência da série de Navier e da solução numérica das placas enrijecidas. Obviamente, a escassez dos estudos é justificada pela dificuldade da obtenção de resultados analíticos com precisão suficiente para placas enrijecidas, pois a rigidez à flexão e à torção são parâmetros bastante difíceis de definir e claramente aproximados. Desse modo, a presente pesquisa também propõe uma análise de convergência confiável e útil na validação dos resultados.

1.2 CONTEXTUALIZAÇÃO DO TEMA

Nas últimas décadas, os engenheiros e projetistas, cada vez mais, buscam inspiração na natureza para desenvolver estruturas mais eficientes. É perceptível que a natureza possui funcionalidades e estruturas incontestáveis. Desde a seleção natural, que garante a permanência de uma espécie, até a mais simples folha que possui um sistema de veias (nervuras) completamente organizado para manter sua irrigação e seu suporte mecânico.

O projeto do *layout* de estruturas de placas/cascas enrijecidas tem sido um problema de interesse particular de muitos pesquisadores. Como essas placas são muito utilizadas em estruturas de grande desempenho, torna-se essencial avaliar sua capacidade mecânica que depende muito do *layout* dos enrijecedores. A busca por um projeto ideal e melhor utilização dos materiais é o que mais vem sendo discutido, e vários autores já fizeram suas próprias contribuições.

Kallassy e Marcelin (1997) introduziram os estudos de otimização em placas enrijecidas utilizando o Algoritmo Genético (AG). O estudo propôs otimizar a posição dos enrijecedores tendo como função objetivo a deformação fora do plano. As placas enrijecidas possuíam carga e condições de apoio conhecidas, e a análise foi realizada pelo Método dos Elementos Finitos (MEF). Nesse estudo, fica evidente que os resultados são

promissores, mas apesar disso, não foi possível afirmar que a solução encontrada foi um ótimo global.

Marcelin (2001) continuou o mesmo estudo e propôs uma nova abordagem utilizando Redes Neurais (RN) para remediar a dificuldade de convergência do AG. No seu trabalho ele substituiu o cálculo do MEF por RN para aproximar a função objetivo. Para isso, ele iniciou o algoritmo com MEF e treinou a RN com os valores das funções objetivo. Desse modo, nas gerações posteriores a RN assume o lugar do MEF. Por fim, o método possibilitou diminuir consideravelmente o tempo computacional.

Chakraborty, Mukhopadhyay e Sha (2002) também investigaram parâmetros geométricos em placas isotrópicas e enrijecidas utilizando AG. Os autores desenvolveram a análise modal de alguns exemplos simulados de placas enrijecidas para investigar a unicidade e a convergência dos resultados obtidos. A metodologia, embora lenta na execução, foi considerada robusta. Como a principal desvantagem foi o tempo de convergência, os autores aconselharam que isso não deve ser um impedimento para a utilização do AG, pois o algoritmo possui inúmeras vantagens em relação aos convencionais. Deve-se, portanto, utilizá-lo combinado com algum outro método de maior convergência.

Kang e Kim (2005) propuseram um Algoritmo Genético Híbrido (AGH) para um projeto de peso mínimo de placas enrijecidas e compostas. O estudo desenvolveu uma análise da flambagem da estrutura e utilizou o AGH para superar as dificuldades de convergência do AG convencional. O AGH foi desenvolvido com o intuito de evitar perda significativa de tempo no cálculo de variáveis de projeto iguais às gerações anteriores. Entretanto, apesar do algoritmo proposto ter reduzido as avaliações de função de aptidão, o processo de análise de pontos iguais às gerações anteriores também foi considerado demorado.

Bedair (2009) realizou uma revisão abrangente dos mais diversos trabalhos sobre a análise e o projeto de placas enrijecidas. A revisão englobou vários procedimentos analíticos e numéricos desenvolvidos ao longo de várias décadas. Além disso, a revisão apresentou alguns aspectos interessantes sobre diversas formas de otimização e a influência dos parâmetros, como a imperfeição geométrica e dos materiais, no desempenho estrutural.

Xing *et al.* (2012) propuseram um projeto biônico de uma mesa de usinagem inspirado em nervuras de folhas. Os autores estudaram as regras de distribuição das nervuras de mais de 100 espécies de folhas e aplicaram algumas dessas regras no projeto estrutural desenvolvido em MEF. O objetivo principal era reduzir o deslocamento médio da mesa e seus resultados foram satisfatórios tendo uma redução de aproximadamente 34%.

Até o momento, a maioria das pesquisas buscavam melhorar a capacidade mecânica da estrutura, bem como reduzir seu peso próprio. Pouco tempo depois, Li *et al.* (2013a, 2013b) explicaram que na natureza, os genes das estruturas biológicas (folhas) permitem que as células dos tecidos se ramifiquem e também se degenerem de forma adaptativa e estável. Dessa forma, as soluções estruturais derivadas da natureza seria um processo de aumento de material e não de redução como se vinha desenvolvendo anteriormente. Nesse trabalho se introduziu a relação entre padrão de ramificação e energia de deformação total mínima, os autores sugeriram pela primeira vez a existência de um ‘ponto de equilíbrio ideal’ entre as veias em crescimento.

Liu *et al.* (2017) aprimoraram seus estudos e apresentaram um Algoritmo de Morfogênese Adaptativa (AMA) para projetar estruturas de placas/cascas enrijecidas. A pesquisa foi inspirada na venação (disposição das nervuras ou veias) de folhas que proporcionam um crescimento adaptativo. O trabalho apresentou um modelo matemático que busca uma orientação ótima dos reforçadores e crescem progressivamente com o objetivo de reduzir a energia de deformação e o cisalhamento, além de mostrar uma hierarquia entre veias principais e secundárias. Nesse trabalho, os autores já utilizaram a ‘operação de transformação da rigidez’ que permitiu o crescimento em direções arbitrárias dos enrijecedores no modelo de elementos finitos (LI; GE; HONG, 2017).

Putra, Kitamura e Takezawa (2019) retomaram os estudos com Algoritmo Genético Híbrido (AGH) integrado com o MEF na otimização de placas enrijecidas. Nesse estudo, o objetivo de massa mínima também foi retomado e o algoritmo buscou definir variáveis geométricas como: número, espaçamento, tipo de enrijecedores e espessura da placa. Apesar dos resultados terem reduzido o peso próprio em 36%, os valores de deslocamento e tensão foram muito próximos aos limites estabelecidos nas restrições. Ou seja, o projeto final gerou uma estrutura leve, mas não obteve grande capacidade mecânica.

Os estudos mais atuais de otimização em placas enrijecidas com inspiração na venação de folhas é uma continuação dos estudos de Li, Ge e Hong (2017). Atualmente Li *et al.* (2019a, 2019b) mostraram a abordagem de um projeto evolucionário simples e viável na determinação da orientação dos reforços em estruturas de placas/cascas no intuito de aumentar a rigidez enquanto satisfaz requisitos de volume. Nos estudos atuais, os autores já desenvolveram um novo modelo de ‘transformação de rigidez aprimorada’ aplicado ao MEF.

Algo que também vem sendo muito difundido na área de otimização das estruturas são os projetos robustos (BACARREZA; ALIABADI; APICELLA, 2015; HADIDI, 2015; MESSAC; ISMAIL-YAHAYA, 2002; NAKAZAWA *et al.*, 2016). A metodologia consiste em determinar um projeto pouco sensível às variações do sistema. Ou seja, a solução ótima é também a solução mais estável.

Reduzir a dispersão dos parâmetros de entrada pode ser inviável ou tornar a estrutura excessivamente dispendiosa. Dessa forma, uma estrutura robusta acaba se tornando mais vantajosa, pois atua de forma consistente na presença de variações incontroláveis durante sua vida útil. Isso reduz consideravelmente os custos com reparos, inspeção e manutenção (BACARREZA; ALIABADI; APICELLA, 2015).

1.3 OBJETIVOS

1.3.1 Objetivo Geral

Determinar a geometria ótima de placa fina enrijecida simplesmente apoiada que minimize o deslocamento máximo fora do plano e seguindo restrições de tensão máxima de von Mises quando sujeita a um carregamento de pressão transversal e uniforme, mantendo o volume total de material constante.

1.3.2 Objetivos Específicos

- Verificar a convergência da série de Navier e da modelagem numérica de elementos finitos em placas finas isotrópicas e em placas finas enrijecidas;
- Aplicar regras de ramificação das folhas na otimização de estruturas de placa fina enrijecida seguindo restrição de volume total de material constante;

- Analisar a influência dos parâmetros geométricos na diminuição do deslocamento máximo e na tensão máxima de von Mises das placas finas enrijecidas;
- Determinar solução robusta em estruturas de placas finas enrijecidas reduzindo a variabilidade do campo de deslocamentos.

1.4 METODOLOGIA

O Algoritmo de Morfogênese Adaptativa Modificado (AMAM) utilizou o Algoritmo Genético Híbrido (AGH) na fase inicial da otimização para determinar o caminho de carga da estrutura. Ambos foram implementados em MATLAB[®] em paralelo com *software* ANSYS APDL[®] para análise estática da estrutura através do MEF.

O AGH utilizado foi apresentado por Dao, Abhary e Marian (2017) e testado em 20 estudos de caso em grande escala. O AGH é capaz de reiniciar seu processo de busca, caso fique preso em um mínimo local, aumentando a capacidade de exploração e evolução do algoritmo. Além disso, o algoritmo possui um módulo de geração de soluções locais, integrado ao *loop* do AGH, que contribui para a melhoria da adaptação.

A forma convencional do Algoritmo de Morfogênese Adaptativa (AMA) foi mostrada na literatura por Liu *et al.* (2017) e foi inspirada em pesquisas de venação foliar (disposição das veias e nervuras das folhas) na otimização de estruturas de placas enrijecidas. Os autores mostraram que o crescimento adaptativo da nervura das folhas fornece à estrutura um reforço eficaz.

Para aplicar o mecanismo de crescimento de venação foliar no projeto de estruturas de placas finas, o presente trabalho propôs o AMAM que utiliza as principais características do AMA proposto por Liu *et al.* (2017). Diferentemente do AMA convencional, o AMAM é mostrado em níveis de hierarquia topológica.

Além disso, o Algoritmo de Otimização Robusta (AOR), que utilizou múltiplos objetivos, foi proposto para minimizar a variabilidade do campo de deslocamentos máximos da placa. O AOR foi aplicado de forma exemplificativa em um dos níveis de otimização topológica (podendo também ser utilizado isoladamente). A principal função do AOR é fornecer um ótimo robusto, em que a solução é pouco sensível à mudança das variáveis de decisão do projeto.

As estruturas analisadas foram do tipo placa fina isotrópica (modelo de referência) e placas finas enrijecidas (geometrias otimizadas) simplesmente apoiadas e sujeitas a um carregamento de pressão uniforme de 10 kPa (parâmetros sugeridos anteriormente na literatura). A otimização tem como critério de restrição principal, manter o volume de referência da placa lisa (isotrópica) constante em todas as geometrias geradas. Além disso, os procedimentos visam à determinação dos parâmetros geométricos que minimizam o deslocamento máximo fora do plano.

Para a análise estática, as geometrias foram analisadas (em modo *batch*) no *software* ANSYS APDL[®] e utilizaram (para modelagem de elementos finitos) o elemento SHELL63 que possui 6 graus de liberdade em cada nó: 3 translações nas direções nodais x , y e z e 3 rotações em torno dos eixos x , y e z (ANSYS INC, 2007). Esse elemento foi escolhido por ser adequado para uso da Teoria Clássica de Placas Finas.

Para facilitar o entendimento e a influência de cada parâmetro na definição de uma geometria ótima, optou-se por apresentar os resultados em cada nível de otimização. Neste trabalho, trata-se de geometria ótima, aquela em que melhor se adequa às restrições e à função objetivo proposta. Por fim, a influência dos parâmetros geométricos no decréscimo do deslocamento e da tensão foi analisada e discutida em cada etapa da otimização.

1.5 ORGANIZAÇÃO DA DISSERTAÇÃO

Este trabalho foi dividido em oito capítulos. O primeiro capítulo apresenta uma introdução aos conceitos iniciais, descreve a justificativa (motivação) do trabalho, as principais contribuições de outros autores na área da pesquisa e define seus principais objetivos. Além disso, apresenta brevemente a metodologia utilizada.

O capítulo dois introduz os conceitos principais da Teoria Clássica de Placas Finas para placas isotrópicas e ortotrópicas. A solução por séries trigonométricas duplas proposta por Navier também é mostrada nesse capítulo.

No capítulo três, o Método dos Elementos Finitos é apresentado. Além disso, é mostrada uma breve introdução à análise de convergência através do Estimador de Erro de Richardson.

O capítulo quatro aborda os principais conceitos de Algoritmo Genético, bem como seus operadores genéticos, critérios de inviabilidade/legalidade e escolha de parâmetros.

O capítulo cinco introduz o assunto sobre Morfogênese de Venação e explica sobre o padrão das nervuras/veias em folhas, também apresenta o Algoritmo de Morfogênese Adaptativa proposto na literatura e uma breve explicação sobre otimização de múltiplos objetivos e Frente de Pareto para aplicação em otimização robusta.

O capítulo seis apresenta os procedimentos metodológicos utilizados no desenvolvimento do trabalho.

No capítulo sete, os resultados são apresentados e discutidos.

Por fim, no capítulo oito, a conclusão e algumas considerações para trabalhos futuros são apresentadas.

2 TEORIA CLÁSSICA DE PLACAS FINAS

2.1 PLACAS ISOTRÓPICAS EM SISTEMA DE COORDENADAS CARTESIANAS

De acordo com Szilard (2004), a análise exata de tensões em placas finas sujeitas a carregamentos normais à superfície exigem equações diferenciais tridimensionais, entretanto, tal abordagem possui dificuldades matemáticas consideráveis. Como alternativa, utiliza-se, então, a Teoria Clássica de Placas Finas de Kirchhoff-Love que produz resultados suficientemente precisos sem realizar uma análise tridimensional completa. Para se utilizar a Teoria Clássica, deve-se estabelecer algumas hipóteses:

1. O material é homogêneo, isotrópico e linear elástico;
2. A placa é inicialmente plana;
3. A Superfície Neutra ($S. N.$) permanece plana durante a flexão;
4. A espessura constante da placa é pequena em comparação com as outras dimensões, ou seja, a largura é pelo menos 10 vezes maior que a espessura;
5. As deflexões são pequenas em comparação com a espessura da placa, sendo estabelecido um limite de deflexão igual a 10% da espessura;
6. As rotações da superfície neutra são pequenas em comparação com a unidade;
7. Seções normais à superfície neutra antes da deformação permanecem planas e normais à superfície neutra defletida. Dessa forma, as deformações de cisalhamento são negligenciadas;
8. A tensão normal na direção transversal à superfície da placa pode ser negligenciada, ou seja, $\sigma_z = 0$.

Com as suposições apresentadas, o problema das placas é simplificado para bidimensional. Conforme **Figura 2.1** para placas retangulares, o sistema de coordenadas cartesianas é o mais conveniente. Para essa abordagem, a convenção de sinais considera que as componentes de forças externas e internas, tensões e deflexões (u, v e w) são positivas quando apontam para a direção positiva dos eixos x, y e z .

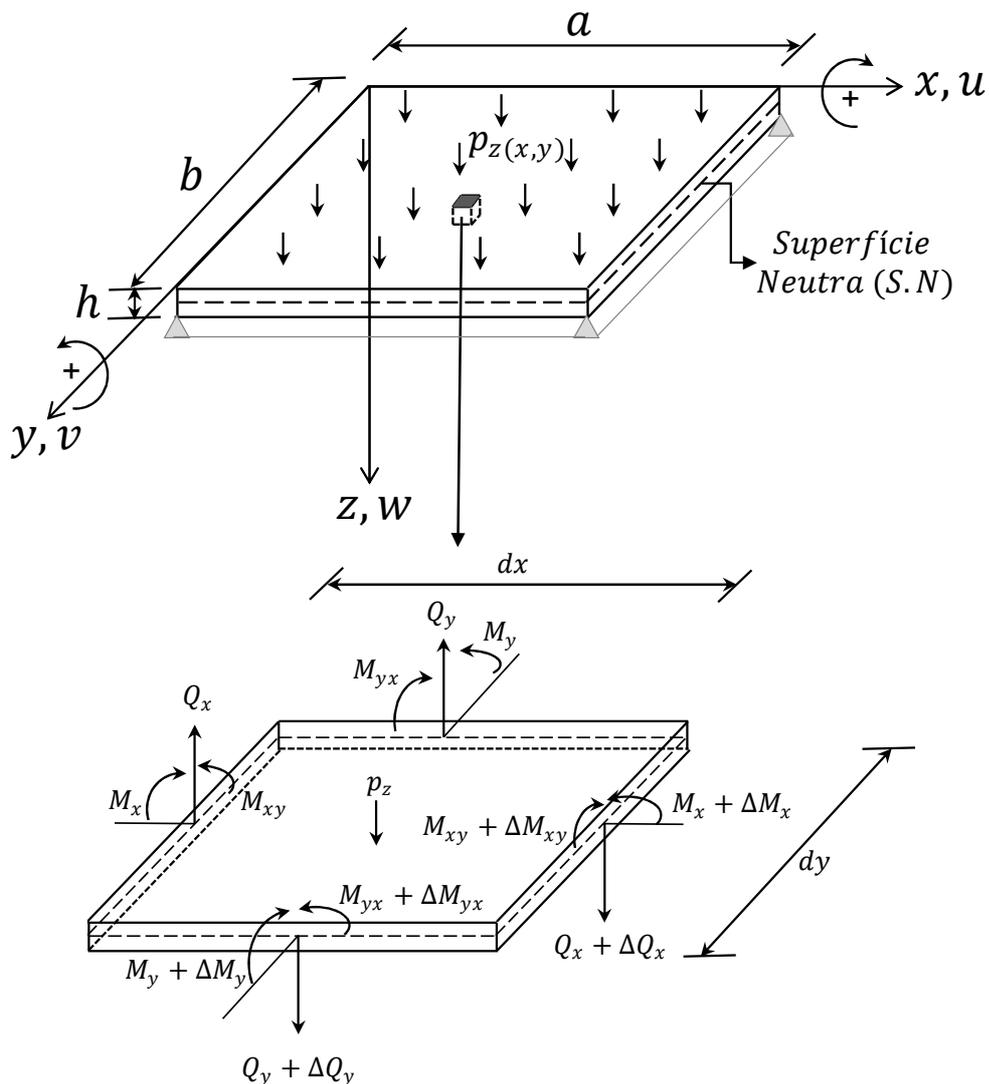


Figura 2.1. Placa sujeita a carregamento transversal uniformemente distribuído [adaptado de (SZILARD, 2004)]

Na dedução da equação diferencial governante para placas finas, aqui apresentada, emprega-se um método semelhante ao de teoria elementar de vigas e proposto por Szilard (2004).

Inicialmente, deve-se expressar todas as forças internas e externas atuantes no elemento. Observe no elemento infinitesimal da **Figura 2.1** que as forças internas devem ser atribuídas negativas quanto mais próximas aos eixos e positivas com incrementos (ex.: $Q_x + \Delta Q_x$) nos lados mais distantes aos eixos. As forças de cisalhamento são expressas por Q_x e Q_y , e os momentos fletores por M_x e M_y . Além disso, diferentemente da Teoria de Vigas, na Teoria de Placas existe a presença dos momentos torçores, M_{xy} e M_{yx} , no

equilíbrio do elemento infinitesimal. O primeiro subscrito das forças internas refere-se à direção da superfície normal da seção em que o esforço atua. Por outro lado, o subscrito dos momentos refere-se à tensão pelo qual foi gerado.

Na Teoria de Placas, é comum representar forças internas e momentos por unidade de comprimento da superfície neutra. Dessa forma, são introduzidas as nomenclaturas: q_x , q_y , m_x , m_y , m_{xy} e m_{yx} , conforme **Figura 2.2**.

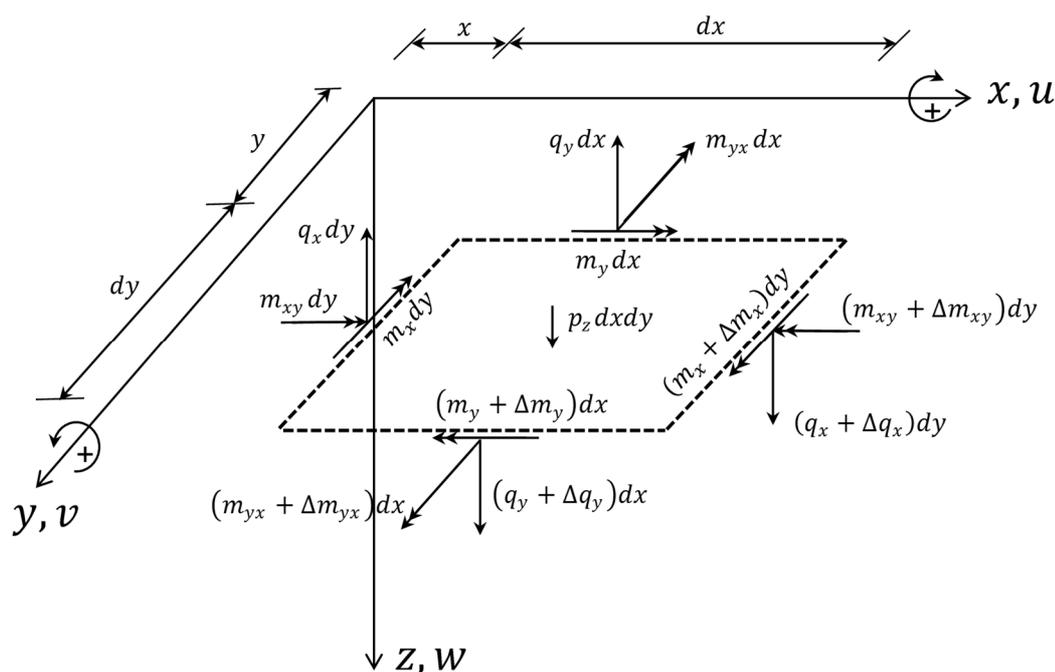


Figura 2.2. Equilíbrio de esforços em relação à superfície neutra de placa sujeito a carga transversal [adaptado de (SZILARD, 2004)]

Assumindo que a placa é sujeita apenas a carregamento transversal, o equilíbrio do elemento infinitesimal pode, então, ser definido por

$$\sum M_x = 0, \quad \sum M_y = 0, \quad \sum P_z = 0. \quad (2.1)$$

Note em (2.1) que as seis equações fundamentais de equilíbrio foram reduzidas a três devido à presença apenas de carga transversal. Além disso, pode-se expressar os incrementos por uma Série de Taylor truncada da seguinte forma:

$$f(a + h) = f(a) + \frac{h}{1!} f'(a). \quad (2.2)$$

Para exemplificar, considere a força q_x . Escrevendo-a como a Série de Taylor em (2.2), obtém-se

$$q(x + dx) = q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx. \quad (2.3)$$

Esse procedimento deve ser repetido para todos os incrementos de forças e momentos.

Expressando o equilíbrio das forças internas e externas atuantes no elemento através das equações em (2.1), o equilíbrio dos momentos em torno do eixo x é dado por

$$\begin{aligned} m_y dx - m_y dx - \frac{\partial m_y}{\partial y} dy dx + m_{xy} dy - m_{xy} dy - \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} dx dy \\ + q_y \left(\frac{dy}{2} \right) dx + \frac{\partial q_y}{\partial y} \left(\frac{dy^2}{2} \right) dx + q_y \left(\frac{dy}{2} \right) dx = 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Simplificando e considerando que o termo $(\partial q_y / \partial y (dy^2/2)) dx$ de ordem superior pode ser negligenciado, obtém-se

$$-\frac{\partial m_y}{\partial y} dy dx - \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} dx dy + q_y dx dy = 0. \quad (2.5)$$

Dividindo (2.5) por $dx dy$, tem-se

$$\frac{\partial m_y}{\partial y} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} = q_y. \quad (2.6)$$

Da mesma forma, o equilíbrio dos momentos em torno do eixo y é dado por

$$\begin{aligned} m_x dy + \frac{\partial m_x}{\partial x} dx dy - m_x dy + m_{yx} dx + \frac{\partial m_{yx}}{\partial y} dy dx - m_{yx} dx - q_x \left(\frac{dx}{2} \right) dy \\ - \frac{\partial q_x}{\partial x} \left(\frac{dx^2}{2} \right) dy - q_x \left(\frac{dx}{2} \right) dy = 0. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Após simplificação, desprezando o termo $(\partial q_x / \partial x (dx^2/2)) dy$ e dividindo (2.7) por $dx dy$, tem-se

$$\frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{yx}}{\partial y} = q_x. \quad (2.8)$$

Por fim, o equilíbrio das forças na direção z é definido por

$$q_x dy + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx dy - q_x dy + q_y dx + \frac{\partial q_y}{\partial y} dy dx - q_y dx + P_z dx dy = 0. \quad (2.9)$$

Simplificando (2.9) e dividindo por $dx dy$ obtém-se

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} = -P_z. \quad (2.10)$$

Substituindo (2.6) e (2.8) em (2.10) e sabendo que m_{xy} é igual a m_{yx} , então,

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} = -P_z(x, y). \quad (2.11)$$

Problemas de placas, como todos os problemas de elasticidade bidimensional e tridimensional são internamente indeterminados estaticamente, ou seja, as três equações de equilíbrio (2.1) possuem cinco incógnitas. Deste modo, para obter uma solução deve-se recorrer às equações adicionais da Teoria da Elasticidade. Fazendo isso, a equação governante (2.11) poderá ser expressa apenas por funções das deflexões.

2.1.1 Relações: tensão, deformação e deslocamento de acordo com a Teoria da Elasticidade

Considerando um material linearmente elástico, a lei de Hooke bidimensional pode ser aplicada e as relações entre tensão e deformação são definidas por

$$\sigma_x = E\varepsilon_x + \nu\sigma_y, \quad (2.12)$$

$$\sigma_y = E\varepsilon_y + \nu\sigma_x, \quad (2.13)$$

em que, σ_x e σ_y são as tensões normais, ε_x e ε_y são as deformações normais nas direções x e y , respectivamente. E é o módulo de elasticidade do material e ν é o coeficiente de Poisson. Substituindo (2.13) em (2.12) e substituindo (2.12) em (2.13), tem-se, respectivamente,

$$\sigma_x = \frac{E(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y)}{(1 - \nu^2)}, \quad (2.14)$$

$$\sigma_y = \frac{E(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x)}{(1 - \nu^2)}. \quad (2.15)$$

Os momentos torçores m_{xy} e m_{yx} produzem as tensões de cisalhamento τ_{xy} e τ_{yx} , em que

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = G\gamma_{xy} , \quad (2.16)$$

onde γ_{xy} é a deformação por cisalhamento e G é o módulo de cisalhamento do material determinado por

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} . \quad (2.17)$$

A **Figura 2.3** ilustra a atuação das tensões normais e cisalhantes em um elemento de placa. Para expressar as deformações em termos de deslocamento, deve-se considerar a geometria da placa defletida mostrada em **Figura 2.4**.

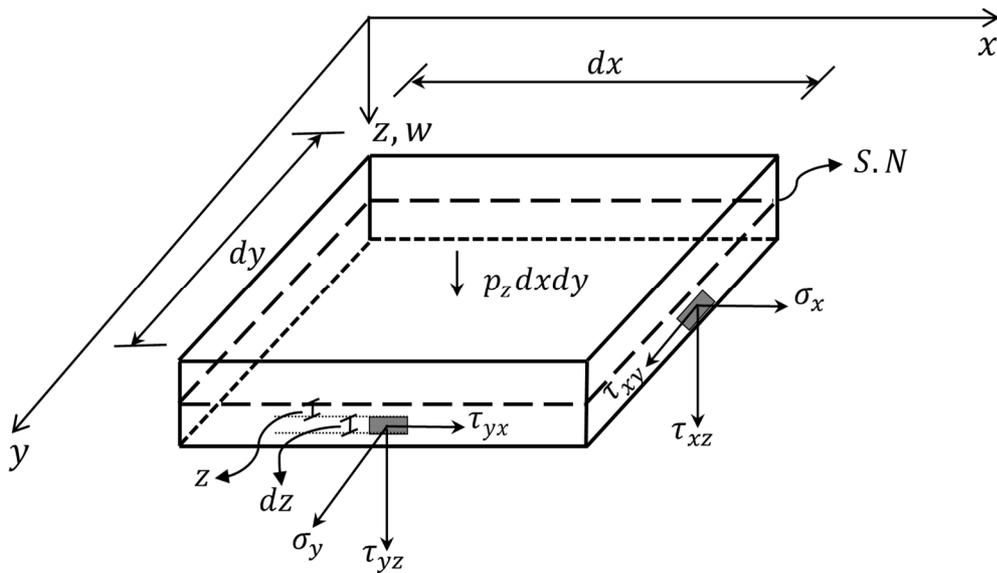


Figura 2.3. Tensões em um elemento de placa [adaptado de (SZILARD, 2004)]

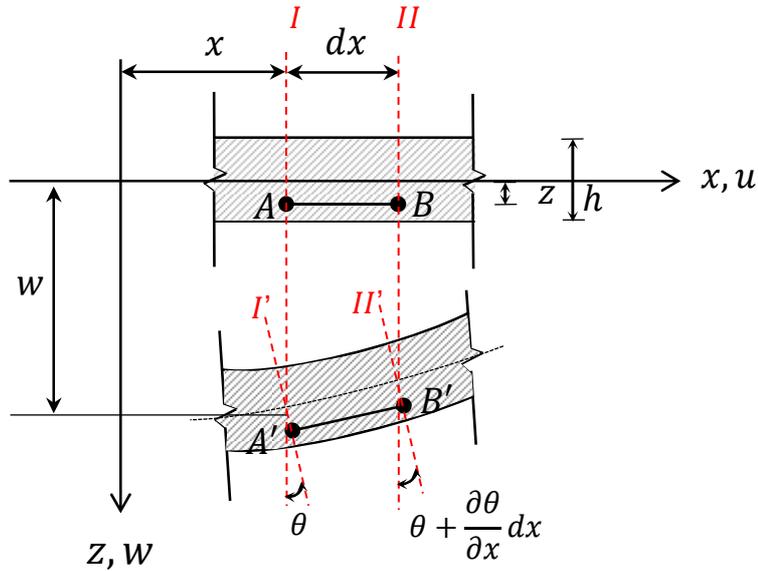


Figura 2.4. Geometria plana e defletida para y constante [adaptado de (SZILARD, 2004)]

Considerando y constante, e assumindo as hipóteses 6 e 7 citadas no início do capítulo, pode-se expressar o ângulo de rotação das linhas I-I e II-II (**Figura 2.4**) como

$$\theta = -\frac{\partial w}{\partial x}, \quad \theta + \frac{\partial \theta}{\partial x} dx = -\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx. \quad (2.18)$$

Observando a seção plana, percebe-se que o comprimento \overline{AB} localizado a uma distância z da superfície neutra torna $\overline{A'B'}$ após a deflexão. Utilizando a definição de deformação específica pode-se definir que

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta dx}{dx} = \frac{\overline{A'B'} - \overline{AB}}{\overline{AB}}. \quad (2.19)$$

Através dos conceitos de trigonometria, os comprimentos dos segmentos podem ser calculados por

$$\overline{AB} = dx, \quad \overline{A'B'} = dx + z \frac{\partial \theta}{\partial x} dx. \quad (2.20)$$

Substituindo (2.20) em (2.19), a deformação específica na direção x é

$$\varepsilon_x = z \frac{\partial \theta}{\partial x}. \quad (2.21)$$

Substituindo agora (2.18) em (2.19), a deformação pode ser expressa em termos de deflexões como

$$\varepsilon_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \quad (2.22)$$

Ao realizar o mesmo procedimento para y obtém-se

$$\varepsilon_y = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}. \quad (2.23)$$

Através de um paralelogramo $ABCD$ localizado a uma distância z da superfície neutra e de sua forma distorcida $A'B'C'D'$ (**Figura 2.5**), o ângulo de distorção angular pode ser definido como

$$\gamma_{xy} = \gamma_x + \gamma_y, \quad (2.24)$$

em que,

$$\gamma_x = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \gamma_y = \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (2.25)$$

Da **Figura 2.4**, pode-se definir também que

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x}, \quad v = -z \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (2.26)$$

Substituindo (2.26) em (2.25), (2.24) pode ser escrita como

$$\gamma_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (2.27)$$

Dessa forma, o ângulo de distorção também é definido em função das deflexões. Agora, é possível escrever todas as tensões normais e cisalhantes também em termos de deflexões.

Substituindo (2.22) e (2.23) em (2.14), a tensão na direção x é definida em termos de deflexão como

$$\sigma_x = \frac{-Ez}{(1 - \nu^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right). \quad (2.28)$$

Da mesma forma, substituindo (2.22) e (2.23) em (2.15) tem-se

$$\sigma_y = \frac{-Ez}{(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right). \quad (2.29)$$

Substituindo (2.27) em (2.16) obtém-se a tensão de cisalhamento em termos de deflexão:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = -2Gz \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (2.30)$$

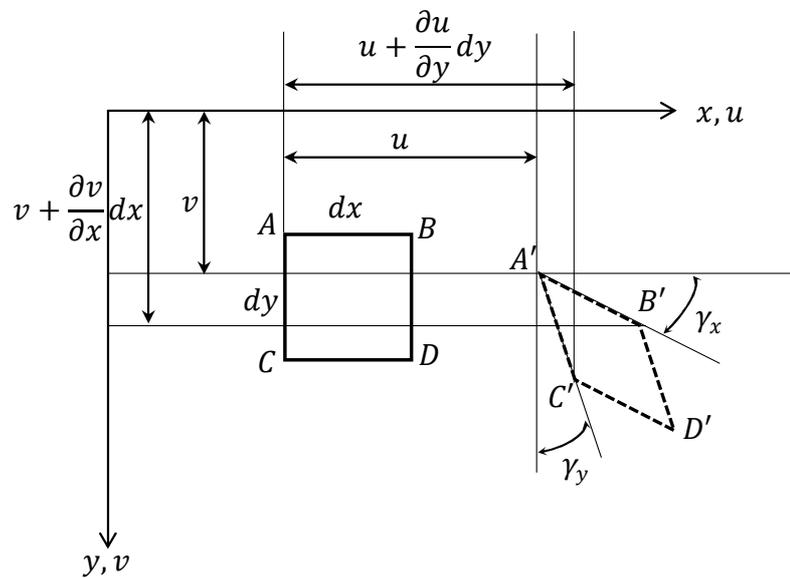


Figura 2.5. Distorção Angular para z constante [adaptado de (SZILARD, 2004)]

Sabe-se que os momentos fletores produzidos pelas tensões normais atuantes na placa podem ser expressos por

$$m_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_x z dz, \quad m_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_y z dz, \quad (2.31)$$

sendo h a espessura da placa e z a distância até a superfície neutra.

Do mesmo modo, os momentos torçores produzidos pelas tensões cisalhantes podem ser calculados como

$$m_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{xy} z dz, \quad m_{yx} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{yx} z dz, \quad (2.32)$$

em que $m_{xy} = m_{yx}$, pois $\tau_{xy} = \tau_{yx}$.

Substituindo (2.28) e (2.29) em (2.31) e resolvendo as integrais tem-se

$$m_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad m_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \quad (2.33)$$

em que, a rigidez à flexão da placa é

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}. \quad (2.34)$$

Fazendo similarmente para os momentos torçores, substitui-se (2.30) e (2.17) em (2.32), resolvendo a integral e expressando em termos de rigidez à flexão:

$$m_{xy} = m_{yx} = -D(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right). \quad (2.35)$$

Substituindo (2.33) e (2.35) na equação governante (2.11) tem-se

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{P_z(x, y)}{D}. \quad (2.36)$$

Deste modo, (2.36) é a equação diferencial governante expressa em termos de deflexão e também pode ser expressa de forma resumida através do Operador Laplaciano:

$$\nabla^2 \nabla^2 w(x, y) = \frac{P_z(x, y)}{D}. \quad (2.37)$$

A equação governante (2.36)/(2.37) é uma equação diferencial parcial de quarta ordem não homogênea do tipo elíptica com coeficientes constantes. Geralmente chamada de equação biarmônica não homogênea (SZILARD, 2004).

As forças cisalhantes também podem ser expressas em termos de deflexão lateral substituindo (2.33) e (2.35) em (2.8):

$$q_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right). \quad (2.38)$$

Substituindo (2.33) e (2.35) em (2.6) tem-se

$$q_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right). \quad (2.39)$$

Como a equação governante é de 4ª ordem, então, são necessárias 2 condições de contorno em cada extremidade. Essas condições podem ser geométricas, impondo deslocamentos e/ou rotações ou podem ser estáticas atribuindo forças e/ou momentos. Nesse último caso, pode-se substituir os momentos torçores por forças de cisalhamento equivalentes, reduzindo o número de forças internas para dois.

As forças de cisalhamento nas bordas da placa são compostas pela soma do cisalhamento transversal com as forças suplementares provenientes do momento de torção e podem ser definidas por

$$q'_x = q_x + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y}, \quad q'_y = q_y + \frac{\partial m_{yx}}{\partial x}. \quad (2.40)$$

Substituindo (2.35) e (2.38) em (2.40) tem-se

$$q'_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad \text{para } x = 0, a. \quad (2.41)$$

Substituindo (2.35) e (2.39) em (2.40) tem-se

$$q'_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + (2 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \quad \text{para } y = 0, b. \quad (2.42)$$

Note que após substituir o momento torçor pela força de cisalhamento, o número de forças internas é reduzido para dois (q_x e q_y).

Além disso, nos cantos das placas retangulares simplesmente apoiadas, a ação das forças suplementares ($\partial m_{xy}/\partial y$ e $\partial m_{yx}/\partial x$) se somam ao invés de se cancelarem (**Figura 2.6**), então, a reação nas bordas pode ser expressa por

$$R_b = (m_{xy} + m_{yx}) = -2D(1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (2.43)$$

Observe em (2.43) que $m_{xy} = m_{yx}$, sendo, portanto, o dobro de (2.35).

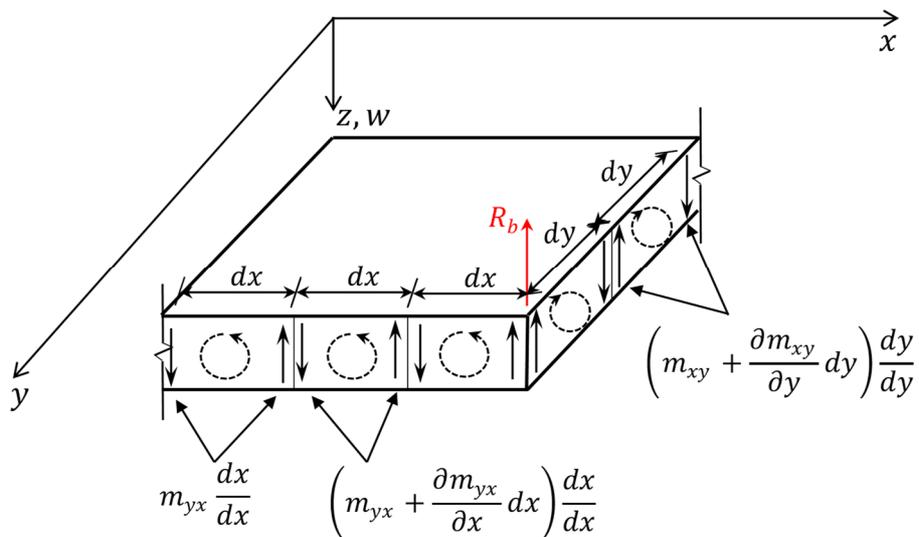


Figura 2.6. Efeito do momento torcional na reação de borda [adaptado de (SZILARD, 2004)]

Em placas com Condição de Contorno (*C. C.*) simplesmente apoiada (**Figura 2.7**) se utiliza condições geométricas (deslocamentos) juntamente com condições estáticas (momentos), geralmente chamada de condição de contorno mista. Nesse caso, pode-se determinar que para $x = 0$ e $x = a$ tem-se

$$w_x = 0, \quad m_x = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0. \quad (2.44)$$

E que para $y = 0$ e $y = b$ tem-se

$$w_y = 0, \quad m_y = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 0. \quad (2.45)$$

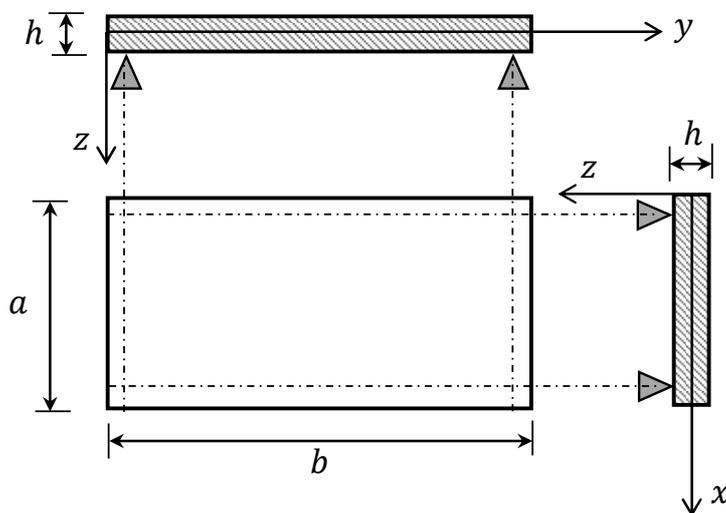


Figura 2.7. Placa simplesmente apoiada

2.1.2 Solução por Séries Trigonômicas Duplas (Método de Navier)

A primeira solução do problema de flexão em placas retangulares simplesmente apoiadas (**Figura 2.8**) usando séries trigonométricas duplas foi proposta por Navier através de um artigo apresentado à academia Francesa em 1820 (TIMOSHENKO; WOINOWSKY-KRIEGER, 1959).

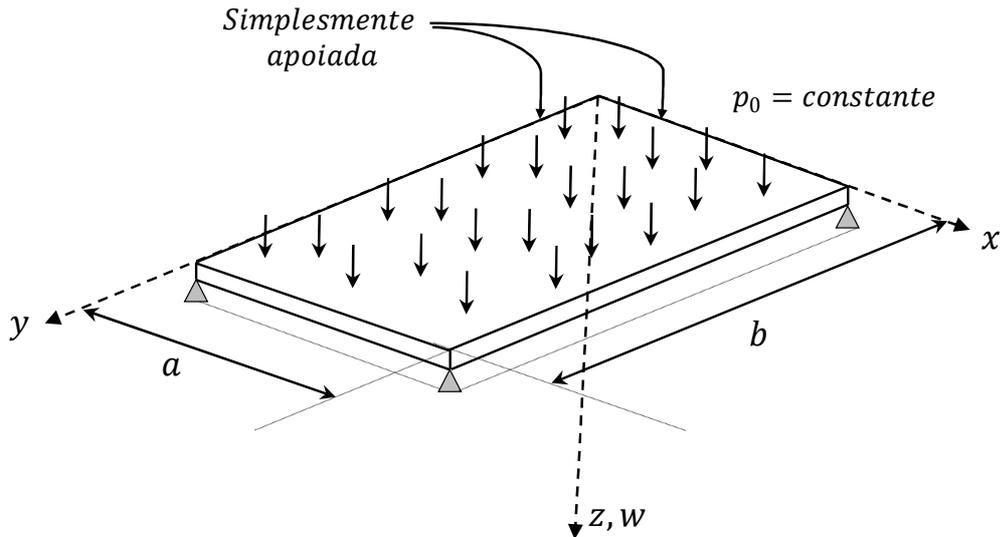


Figura 2.8. Placa isotrópica simplesmente apoiada com carregamento distribuído

Para placas simplesmente apoiadas, a solução de Navier oferece vantagens matemáticas consideráveis, desde que a solução da equação governante seja reduzida em uma equação algébrica. Os procedimentos descritos nessa seção para determinação da solução são semelhantes àqueles expostos em Szilard (2004).

O carregamento distribuído mostrado na (**Figura 2.8**) pode ser escrito como uma expansão da série dupla de Fourier:

$$f(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} F_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right), \quad (2.46)$$

em que, a e b são as dimensões da placa e o coeficiente F_{mn} da expansão é obtido multiplicando a equação por $\sin(k\pi y/b)$ e integrando entre os limites zero e b , para $n = k$ tem-se

$$\int_0^b \sin^2\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dy = \frac{b}{2}. \quad (2.47)$$

Similarmente para variável x , obtém-se

$$\int_0^a \sin^2\left(\frac{m\pi x}{a}\right) dx = \frac{a}{2}. \quad (2.48)$$

Substituindo (2.47) e (2.48) em (2.46) obtém-se

$$F_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b f(x, y) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dx dy. \quad (2.49)$$

Desse modo, a carga distribuída uniforme pode ser escrita como

$$P_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b p(x, y) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dx dy. \quad (2.50)$$

Resolvendo a integral para m e n inteiros ímpares positivos, chega-se em

$$P_{mn} = \frac{16}{mn\pi^2} p(x, y). \quad (2.51)$$

Considerando $p(x, y) = p_0$ e substituindo (2.51) em (2.46) tem-se

$$P_z(x, y) = \frac{16}{\pi^2} p_0 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)}{mn}. \quad (2.52)$$

$m, n = 1, 3, 5 \dots$

Escrevendo também a deflexão pela série dupla de Fourier mostrada em (2.46), obtém-se

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right). \quad (2.53)$$

$m, n = 1, 3, 5 \dots$

Substituindo (2.52) e (2.53) na equação governante (2.36), pode-se definir

$$W_{mn} = \frac{16p_0}{D\pi^6 mn \left[\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 \right]^2}. \quad (2.54)$$

Substituindo (2.54) em (2.53), a deflexão pode ser expressa como

$$w(x, y) = \frac{16p_0}{D\pi^6} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)}{mn \left[\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2\right]^2}. \quad (2.55)$$

$$m, n = 1, 3, 5 \dots$$

Dessa forma, a equação (2.55) é a solução da equação diferencial governante para placas finas isotrópicas.

Substituindo (2.55) em (2.33) pode-se determinar os momentos fletores:

$$m_x = D\pi^2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \nu \left(\frac{n}{b}\right)^2 \right] W_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right), \quad (2.56)$$

$$m_y = D\pi^2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{n}{b}\right)^2 + \nu \left(\frac{m}{a}\right)^2 \right] W_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right). \quad (2.57)$$

Do mesmo modo, os momentos torçores podem ser obtidos substituindo (2.55) em (2.35):

$$m_{xy} = m_{yx} = -D\pi^2(1 - \nu) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{mn}{ab}\right) W_{mn} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right). \quad (2.58)$$

Similarmente, os esforços transversais são definidos substituindo (2.55) em (2.38) e (2.39), e são, respectivamente:

$$q_x = \frac{D\pi^3}{a} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} m \left[\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \nu \left(\frac{n}{b}\right)^2 + (1 - \nu) \left(\frac{n}{b}\right)^2 \right] W_{mn} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right), \quad (2.59)$$

$$q_y = \frac{D\pi^3}{b} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} n \left[\left(\frac{n}{b}\right)^2 + \nu \left(\frac{m}{a}\right)^2 + (1 - \nu) \left(\frac{m}{a}\right)^2 \right] W_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right). \quad (2.60)$$

Os procedimentos anteriormente descritos são válidos apenas para placas finas isotrópicas e simplesmente apoiadas. Para outras condições de contorno pode ser útil utilizar o Teorema da superposição (SZILARD, 2004).

2.2 PLACAS ORTOTRÓPICAS EM SISTEMA DE COORDENADAS CARTESIANAS

Placas anisotrópicas têm aplicações muito importantes devido a sua excepcional rigidez. O material anisotrópico possui propriedades que dependem da direção. Entre esses, o mais simples é chamado ortotrópico, que difere suas propriedades em duas direções mutuamente perpendiculares (UGURAL, 2010).

Um tipo de placa ortotrópica muito utilizada em estruturas de engenharia são placas de aço enrijecidas (**Figura 2.9**). Essas placas são bastante utilizadas em estruturas com alta capacidade de carga como aeronaves, navios, mísseis e submarinos (CHAKRABORTY; MUKHOPADHYAY; SHA, 2002). Os enrijecedores são fixados ao longo da direção longitudinal e transversal da placa para aumentar a rigidez e diminuir a deflexão fora do plano.

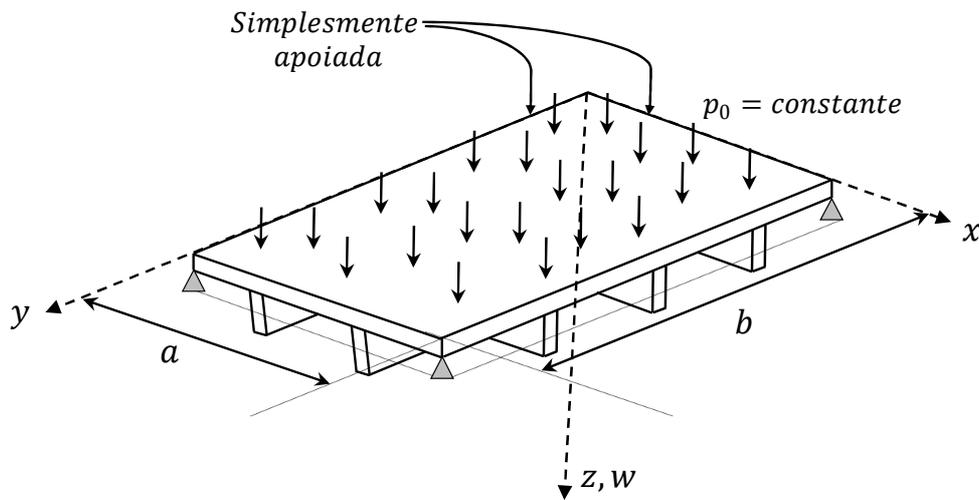


Figura 2.9. Placa ortotrópica simplesmente apoiada com carregamento uniformemente distribuído

Na Teoria Clássica, o número de constantes elásticas independentes são duas (E e ν). Agora, assumindo que as direções principais de ortotropia coincidem com os eixos x e y , fica evidente que são necessárias quatro constantes elásticas (E_x, E_y, ν_x, ν_y) para descrever as relações $\sigma \times \varepsilon$ (SZILARD, 2004).

Dessa forma, as tensões normais são dadas por

$$\sigma_x = \frac{E_x}{1 - \nu_x \nu_y} (\varepsilon_x + \nu_y \varepsilon_y), \quad \sigma_y = \frac{E_y}{1 - \nu_x \nu_y} (\varepsilon_y + \nu_x \varepsilon_x). \quad (2.61)$$

E a tensão cisalhante é definida como

$$\tau_{xy} = G_{xy} \gamma, \quad (2.62)$$

sendo que γ é o ângulo de distorção e G_{xy} é o módulo de cisalhamento que pode ser calculado por

$$G_{xy} \cong \frac{\sqrt{E_x E_y}}{2(1 + \sqrt{\nu_x \nu_y})}. \quad (2.63)$$

Escrevendo as relações anteriores em termos de deslocamentos, e substituindo em (2.31) e (2.32), em seguida, resolvendo as integrais, obtêm-se os momentos fletores e torçores:

$$m_x = -D_x \left(\frac{\partial^2 w}{dx^2} + \nu_y \frac{\partial^2 w}{dy^2} \right), \quad m_y = -D_y \left(\frac{\partial^2 w}{dy^2} + \nu_x \frac{\partial^2 w}{dx^2} \right), \quad (2.64)$$

$$m_{xy} = m_{yx} = -2D_T \left(\frac{\partial^2 w}{dx \partial y} \right), \quad (2.65)$$

em que D_x e D_y são as rigidezes à flexão nas direções x e y , respectivamente, e D_T é a rigidez à torção.

Substituindo (2.64) e (2.65) em (2.11) tem-se:

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2B \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = P_z(x, y), \quad (2.66)$$

em que B é a rigidez efetiva à torção. A equação (2.66) é a equação governante para placas ortotrópicas. Também conhecida como Equação de Huber.

Substituindo (2.64) e (2.65) em (2.8) e (2.6) têm-se as forças de cisalhamento em cada direção da placa:

$$q_x = -\frac{\partial}{\partial x} \left(D_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad q_y = -\frac{\partial}{\partial y} \left(D_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + B \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right). \quad (2.67)$$

É válido ressaltar que a precisão da análise de placas ortotrópicas depende das expressões utilizadas para propriedades das seções, desse modo, testes experimentais são sempre recomendados para determinação dos valores reais de rigidezes à flexão e à torção. Desses, o valor da rigidez torcional é o mais difícil de se obter. Sobretudo, com algumas considerações analíticas, aproximações razoáveis podem ser introduzidas (SZILARD, 2004).

De acordo com Szilard (2004), para placas ortotrópicas de aço pode-se utilizar uma aproximação da rigidez efetiva à torção como

$$B \approx \frac{Eh^3}{12(1 - \nu_x\nu_y)} + \frac{G_{xy}}{2} \left(\frac{\sum I_{t_x}}{b} + \frac{\sum I_{t_y}}{a} \right), \quad (2.68)$$

sendo que, I_{t_x} e I_{t_y} são os momentos de inércia à torção dos enrijecedores em cada direção, a e b são as dimensões da placa.

Utilizando o Teorema dos eixos paralelos (**Figura 2.10**) pode-se calcular a rigidez aproximada à flexão da placa. Na direção x , a rigidez à flexão pode ser expressa como

$$D_x = \frac{E}{(1 - \nu_x\nu_y)} \left(\frac{h^3}{12} + hz^2 \right) + E \left(\frac{\sum (I_x + A_e z'^2)}{b} \right) \quad (2.69)$$

e a rigidez à flexão na direção y é

$$D_y = \frac{E}{(1 - \nu_x\nu_y)} \left(\frac{h^3}{12} + hz^2 \right) + E \left(\frac{\sum (I_y + A_e z'^2)}{a} \right), \quad (2.70)$$

em que, I_x e I_y são os momentos de inércia à flexão dos enrijecedores em relação aos seus eixos neutros nas direções x e y , respectivamente. A_e é a área da seção transversal dos enrijecedores, z é a distância do centro de gravidade ($C. G.$) da seção até a $S. N.$ da placa. z' é a distância do $C. G.$ da seção até o $C. G.$ de A_e .

Vale ressaltar que os subíndices x e y nas rigidezes são referentes à direção dos enrijecedores geradores da rigidez. Por exemplo, D_x é gerada pelos enrijecedores na direção x . Dessa forma, a seção transversal utilizada no cálculo do momento de inércia aparece no plano perpendicular aos enrijecedores (ex.: I_x é calculado no plano yz).

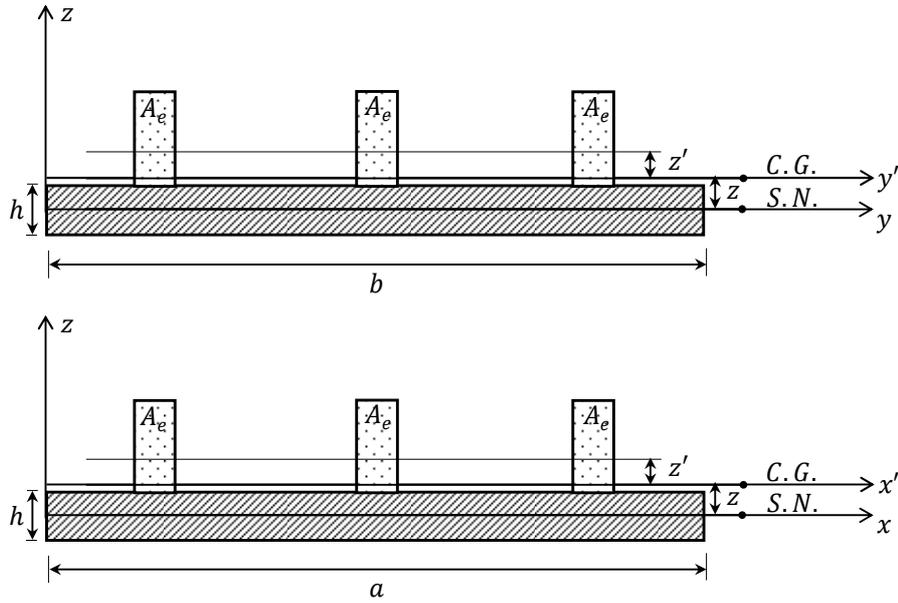


Figura 2.10. Teorema dos eixos paralelos na determinação da rigidez à flexão

Deve-se alertar aqui, que as fórmulas para aproximação das rigidezes devem ser utilizadas com cautela. A falta da simetria na estrutura, por exemplo, pode acarretar em aproximações muito grosseiras. Desse modo, é extremamente aconselhável uma avaliação detalhada dos parâmetros definidos.

2.2.1 Solução por Séries Trigonômicas Duplas (Método de Navier)

Utilizando os mesmos procedimentos descritos na seção 2.1.2, pode-se determinar a solução através de séries trigonométricas duplas para placas ortotrópicas. Substituindo (2.52) e (2.53) na equação governante (2.66) obtém-se:

$$W_{mn} = \frac{16p_0}{\pi^6 mn \left[\left(\frac{m^4}{a^4} \right) D_x + 2B \left(\frac{m^2 n^2}{a^2 b^2} \right) + \left(\frac{n^4}{b^4} \right) D_y \right]} \quad (2.71)$$

Substituindo (2.71) em (2.53) é definida a solução de Navier para placas ortotrópicas:

$$w(x, y) = \frac{16p_0}{\pi^6} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)}{mn \left[\left(\frac{m^4}{a^4} \right) D_x + 2B \left(\frac{m^2 n^2}{a^2 b^2} \right) + \left(\frac{n^4}{b^4} \right) D_y \right]} \quad (2.72)$$

$$m, n = 1, 3, 5, \dots$$

Dessa forma, pode-se definir o deslocamento $w(x, y)$ para placas ortotrópicas através da solução de (2.72).

3 FORMULAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

A obtenção de uma solução ‘exata’ das equações diferenciais é possível apenas para algumas Condições de Contorno (*C.C.*) e cargas pré-definidas devido à complexidade do problema de placas. Diante disso, é cada vez mais necessário a utilização de métodos numéricos de discretização, como o Método dos Elementos Finitos (MEF). Os procedimentos matemáticos aqui discutidos são propostos em conformidade com o mostrado por Szilard (2004).

De acordo com Szilard (2004), a utilização do MEF para análise de qualquer problema físico contínuo requer usualmente as seguintes etapas:

1. Discretização do contínuo;
2. Seleção das funções de forma adequadas;
3. Formulação do elemento;
4. Tratamento das condições de contorno e cargas;
5. Montagem do sistema discretizado;
6. Solução do sistema de equações resultante e
7. Cálculo das resultantes de tensões.

3.1 SISTEMA GLOBAL

Considerando uma placa linear-elástica (**Figura 3.1**) no Sistema de Coordenadas Globais (*SCG*) \bar{X} , \bar{Y} , \bar{Z} e sujeita a forças externas \bar{p} , busca-se uma solução em que a energia potencial total do sistema seja mínima.

Escrevendo a energia potencial total como a soma da energia potencial das forças internas ($\bar{\Pi}_{int}$) e das forças externas ($\bar{\Pi}_{ext}$) tem-se:

$$\bar{\Pi} = \bar{\Pi}_{int} + \bar{\Pi}_{ext}. \quad (3.1)$$

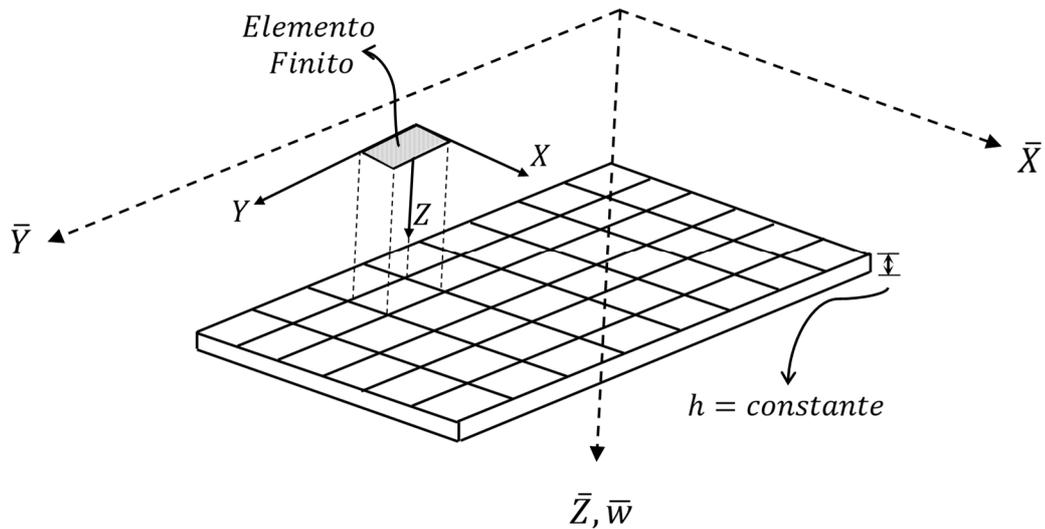


Figura 3.1. Discretização de uma placa contínua

De acordo com o Método de Ritz, a superfície média da placa defletida pode ser escrita na forma

$$w(x, y) = a_1 f_1(x, y) + a_2 f_2(x, y) + \dots + a_N f_N(x, y) = \sum_{i=1}^N a_i f_i(x, y), \quad (3.2)$$

em que a_1, a_2, \dots, a_N são coeficientes desconhecidos da função de deslocamento global e $f_i(x, y)$ com $i = 1, 2, 3, \dots, N$ são funções contínuas que satisfazem individualmente pelo menos as *C. C.* geométricas e são capazes de representar a superfície defletida.

Como o MEF é um caso específico do Método de Ritz, (3.2) pode ser escrita matricialmente no *SCG* como

$$\bar{\omega} = \bar{f} \bar{a}, \quad (3.3)$$

onde \bar{f} é a matriz de funções e \bar{a} é a matriz de coeficientes.

Ainda seguindo o Método de Ritz, o processo de minimização da energia potencial em (3.1) pode ser calculado como

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial \bar{a}_1} \\ \frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial \bar{a}_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial \bar{a}_N} \end{array} \right\} = \{0\}. \quad (3.4)$$

Esse procedimento de minimização gera N equações algébricas com coeficientes indeterminados. Note que a diferenciação parcial faz com que todos os coeficientes sejam constantes, exceto o a_i específico.

Embora o procedimento pareça simples, as funções são disponíveis apenas para geometrias, carregamentos e $C.C.$ simples (SZILARD, 2004). Para diminuir essas limitações, a placa pode, então, ser discretizada em um número finito de elementos.

As funções de deslocamento de um elemento específico com n pontos nodais podem ser expressas como

$$\mathbf{f}_e = \mathbf{N}_e \mathbf{d}_e, \quad (3.5)$$

em que \mathbf{d}_e é o vetor de deslocamentos nodais do elemento:

$$\mathbf{d}_e = \left\{ \begin{array}{c} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{array} \right\} \quad (3.6)$$

e \mathbf{N}_e é a matriz de funções de forma do elemento:

$$\mathbf{N}_e = [\mathbf{N}_1 \quad \mathbf{N}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{N}_n]. \quad (3.7)$$

Após a discretização da placa, a energia potencial da placa contínua pode ser aproximada como a soma das energias dos elementos individuais:

$$\bar{\Pi} \approx \sum_{i=1}^M (\Pi_{int} + \Pi_{ext})_e. \quad (3.8)$$

A energia de deformação interna do $i(th)$ elemento avaliado no Sistema de Coordenadas Locais (SCL): X, Y, Z pode ser calculado como

$$\Pi_{\text{int}} = \frac{1}{2} \left(\int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV \right)_e = \frac{1}{2} \left(\int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon} dV \right)_e, \quad (3.9)$$

em que $\boldsymbol{\varepsilon}$ é o vetor de deformações do elemento, $\boldsymbol{\sigma}$ é a matriz de tensões e \mathbf{E} é a matriz de elasticidade do elemento.

Escrevendo o vetor de deformações do elemento como

$$\boldsymbol{\varepsilon}_e = \mathbf{B}_e \mathbf{d}_e, \quad (3.10)$$

em que \mathbf{B}_e é a matriz das derivadas das funções de forma do elemento e \mathbf{d}_e é o vetor de deslocamentos nodais do elemento.

Substituindo (3.10) em (3.9) tem-se

$$\Pi_{\text{int}} = \frac{1}{2} \left(\int_V \mathbf{d}^T \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} \mathbf{d} dV \right)_e. \quad (3.11)$$

Considerando que a matriz de rigidez do $i(th)$ elemento é

$$\mathbf{K}_e = \left(\int_V \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} dV \right)_e, \quad (3.12)$$

então, (3.11) pode ser definida como

$$\Pi_{\text{int}} = \frac{1}{2} \mathbf{d}_e^T \mathbf{K}_e \mathbf{d}_e. \quad (3.13)$$

Como a \mathbf{K}_e foi escrita no *SCL* (X, Y, Z), pode ser transferido para o *SCG* ($\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$) da seguinte forma

$$\bar{\mathbf{K}}_e = \mathbf{T}_e \mathbf{K}_e \mathbf{T}_e^T, \quad (3.14)$$

em que \mathbf{T}_e é a matriz de transformação do elemento e depende do número de nós do elemento e dos graus de liberdade em cada nó, tendo a forma genérica

$$\mathbf{T}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 & & & \\ & \mathbf{T}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{T}_n \end{bmatrix}, \quad (3.15)$$

em que a matriz de rotação do nó i em (3.15) é dada por

$$\mathbf{T}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\Theta) & \sin(\Theta) \\ 0 & -\sin(\Theta) & \cos(\Theta) \end{bmatrix}, \quad (3.16)$$

em que Θ é o ângulo entre o *SCL* e o *SCG*. Assim, pode-se determinar a energia potencial total das forças internas e externas no *SCG* como

$$\bar{\Pi} = \bar{\Pi}_{int} + \bar{\Pi}_{ext} = \frac{1}{2} \bar{\mathbf{d}}^T \bar{\mathbf{K}} \bar{\mathbf{d}} - \bar{\mathbf{d}}^T \bar{\mathbf{p}}, \quad (3.17)$$

em que \mathbf{d} é o vetor de deslocamentos nodais global e a matriz de rigidez global é

$$\bar{\mathbf{K}} = \sum_{i=1}^M \bar{\mathbf{K}}_e. \quad (3.18)$$

Similarmente o vetor de cargas nodais global é dado por

$$\bar{\mathbf{p}} = \sum_{i=1}^M \bar{\mathbf{p}}_e. \quad (3.19)$$

Pelo princípio da mínima energia potencial pode-se escrever

$$\frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial \bar{\mathbf{d}}} = \frac{\partial}{\partial \bar{\mathbf{d}}} \left(\frac{1}{2} \bar{\mathbf{d}}^T \bar{\mathbf{K}} \bar{\mathbf{d}} - \bar{\mathbf{d}}^T \bar{\mathbf{p}} \right) = \{0\}. \quad (3.20)$$

A matriz da equação governante pode ser, então, definida como

$$\bar{\mathbf{K}} \bar{\mathbf{d}} - \bar{\mathbf{p}} = \{0\}. \quad (3.21)$$

Isolando o vetor deslocamentos, (3.21) pode ser escrita como

$$\bar{\mathbf{d}} = \bar{\mathbf{K}}^{-1} \bar{\mathbf{p}}. \quad (3.22)$$

Para mais informações e para compreensão da formulação matemática dos elementos quadriláteros (conformes e não conformes) deve-se consultar o apêndice A, que foi elaborado de acordo com o proposto por Szilard (2004).

3.2 ANÁLISE DE CONVERGÊNCIA DA SOLUÇÃO NUMÉRICA

Para que uma solução numérica seja considerada confiável, é necessário que o erro verdadeiro seja nulo ou muito próximo de zero. Para verificar essa confiabilidade da

solução, pode-se utilizar o Estimador de Erro de Richardson $U_{Ri}(\phi)$ para estimar o erro verdadeiro da solução numérica (ϕ).

Conforme proposto por Richardson (1911) e mostrado em Marchi e Silva (2005), para a análise, são necessárias 3 malhas: grossa (ϕ_3), média (ϕ_2) e fina (ϕ_1), ou seja, o comprimento do elemento (Δh) deve ser $\Delta h_3 > \Delta h_2 > \Delta h_1$.

Deve-se, inicialmente, determinar o erro verdadeiro da solução numérica definido por

$$e(\phi) = \Phi - \phi, \quad (3.23)$$

em que Φ é a solução analítica e ϕ é a solução numérica por elementos finitos.

A estimativa da solução analítica $\phi_\infty(PL)$ pode também ser calculada por

$$\phi_\infty(PL) = \phi_1 + \left(\frac{\phi_1 - \phi_2}{r^{PL} - 1} \right), \quad (3.24)$$

onde r é a razão de refinamento da malha:

$$r = \frac{\Delta h_2}{\Delta h_1} = \frac{\Delta h_3}{\Delta h_2}, \quad (3.25)$$

e PL é a ordem assintótica do erro de discretização.

Além disso, pode-se definir, pelo princípio da incerteza, uma ordem aparente do erro (PU):

$$PU = \frac{\log \left(\frac{\phi_2 - \phi_3}{\phi_1 - \phi_2} \right)}{\log(r)}. \quad (3.26)$$

Da mesma forma, a estimativa da solução numérica para a ordem aparente do erro pode ser calculada por

$$\phi_\infty(PU) = \phi_1 + \left(\frac{\phi_1 - \phi_2}{r^{PU} - 1} \right). \quad (3.27)$$

Observe que (3.24) e (3.27) são Extrapolações Generalizadas de Richardson. Desse modo, o erro estimado da solução numérica ϕ_1 pode ser calculada através do Estimador de Erro de Richardson como

$$U_{Ri}(\phi_1) = sg(\phi_1 - \phi_2) \max\{|U_{Ri}(\phi_1, PL)|; |U_{Ri}(\phi_1, PU)|\}, \quad (3.28)$$

em que

$$U_{Ri}(\phi_1, PL) = \left| \frac{\phi_1 - \phi_2}{r^{PL} - 1} \right| \quad (3.29)$$

e

$$U_{Ri}(\phi_1, PU) = \left| \frac{\phi_1 - \phi_2}{r^{PU} - 1} \right|. \quad (3.30)$$

Diz-se que o Estimador de Erro (U) é confiável se o critério

$$\left| \frac{U_{Ri}(\phi_1)}{e(\phi_1)} \right| \geq 1 \quad (3.31)$$

for atendido.

É válido lembrar que é recomendável utilizar o Estimador de Erro de Richardson apenas se $PU \approx PL$. Além disso, se a ordem aparente do erro (PU) for monotônica convergente, então, a solução analítica (Φ) está contida no intervalo entre $\phi_\infty(PL)$ e $\phi_\infty(PU)$ (MARCHI; SILVA, 2005).

4 INTRODUÇÃO AOS ALGORITMOS GENÉTICOS

Os Algoritmos Genéticos (AG's) são algoritmos de busca estocástica baseados nos mecanismos de seleção natural e genética. Geralmente, o AG começa com soluções aleatórias (população) que satisfazem os limites e as restrições do problema (GEN; CHENG; LIN, 2008).

Antes de introduzir uma breve revisão sobre os AG's, é necessário iniciar a definição dos termos geralmente utilizados nesse método de otimização. O vocabulário torna-se uma mistura da genética natural e da ciência da computação.

No AG, cada indivíduo da população é chamado de cromossomo e representa uma possível solução para a problema proposto. Cada cromossomo é formado por uma cadeia de símbolos (genes) e evoluem em iterações sucessivas (gerações). Cada um desses genes possui um valor (alelo) que codifica uma característica particular da solução e sua posição (locus) dentro do cromossomo determina qual característica é representada. A representação codificada da solução é chamada genótipo e à solução decodificada dá-se o nome de fenótipo.

Conforme explicado por Gen, Cheng e Lin (2008), em geral, o AG (**Figura 4.1**) possui 5 componentes básicos:

1. Representação genética de possíveis soluções para o problema;
2. Uma forma de gerar uma população, ou seja, um conjunto inicial de possíveis soluções;
3. Uma função de avaliação da aptidão das soluções;
4. Operadores genéticos que alteram a composição genética da prole: cruzamento, mutação e seleção (outros operadores podem ser considerados) e
5. Parâmetros, como: tamanho da população e probabilidade de aplicação dos operadores.

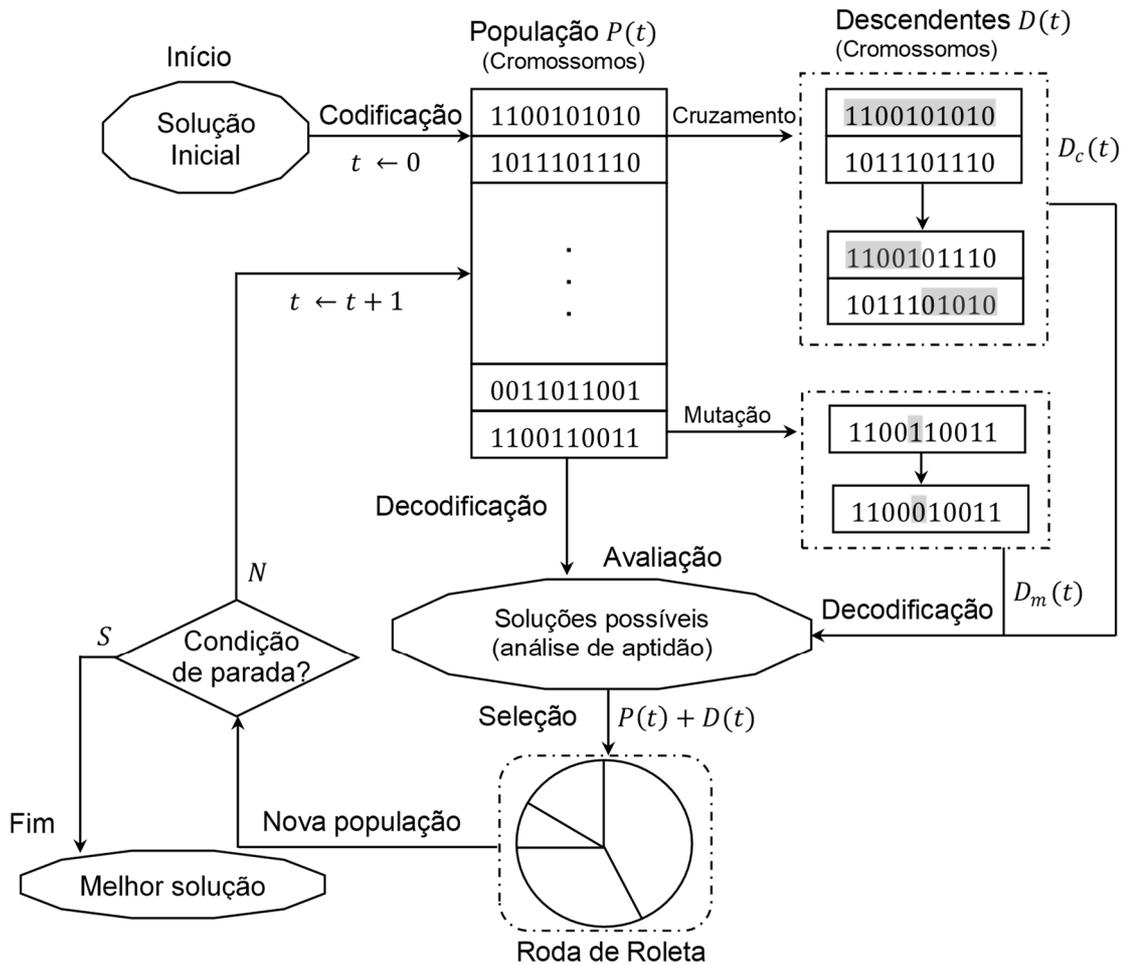


Figura 4.1. Esquema do Algoritmo Genético [adaptado de (GEN; CHENG; LIN, 2008)]

Ao se comparar o AG com os algoritmos de otimiza o convencionais, pode-se verificar inúmeras vantagens em utilizá-lo. Algumas das mais notáveis, é a capacidade do AG lidar com problemas complexos e sua capacidade de paralelismo, ou seja, as soluções são independentes e pode-se explorar o espaço de busca em várias direções simultaneamente (YANG, 2014). Além disso, o AG possui grande adaptabilidade, robustez e flexibilidade (GEN; CHENG; LIN, 2008).

  válido explicitar também algumas dificuldades na utilização dos AG's como forma de apresentar as principais características desse método de otimização tão promissor. O AG necessita da formulação de uma função de aptidão e em alguns tipos de problemas isso pode ser bastante difícil de se realizar. Além disso, o tamanho da população e os parâmetros de utilização dos operadores genéticos podem ser difíceis de

definir e devem ser atribuídos com cautela (ver seção 4.3). Escolhas inadequadas podem gerar resultados indevidos e dificultar a convergência do algoritmo (YANG, 2014).

4.1 OPERADORES GENÉTICOS

Os operadores genéticos imitam o processo natural de hereditariedade dos genes para criar novos descendentes (soluções) a cada geração. Usualmente, existem três operadores genéticos comuns: cruzamento, mutação e seleção.

O cruzamento é o principal operador genético e opera em dois cromossomos ao mesmo tempo. Esse operador gera descendentes ao combinar as características de ambos os cromossomos (ver **Figura 4.2**).

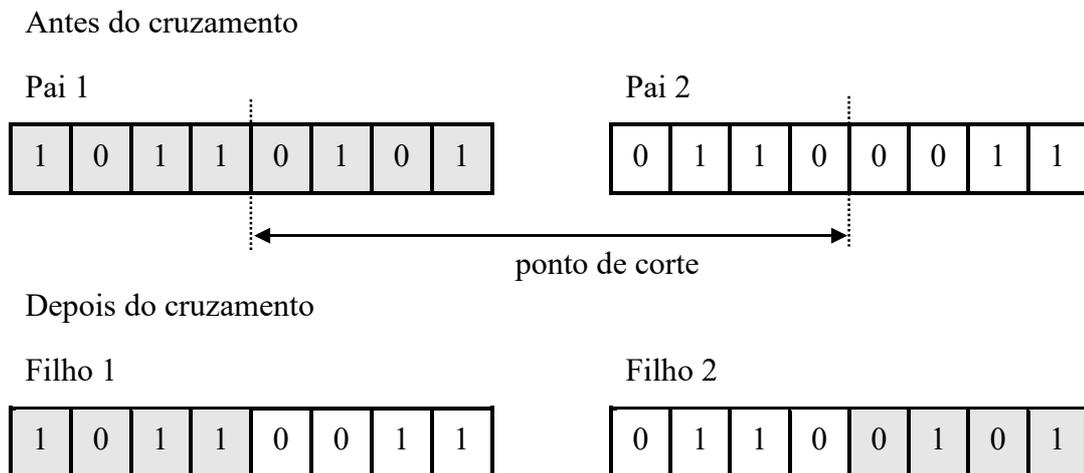


Figura 4.2. Operador genético de cruzamento com um ponto de corte

A probabilidade de cruzamento (P_c) é definida como a chance de descendentes em relação ao tamanho da população inicial (Pop_{inic}) em cada geração. Uma taxa alta de cruzamento permite explorar melhor o espaço da solução e conseqüentemente reduzir as chances de se estabelecer um ótimo local. Por outro lado, taxas muito altas resultam em elevado tempo computacional explorando regiões pouco promissoras do espaço de busca (GEN; CHENG; LIN, 2008).

A mutação é um operador genético que produz mudanças aleatórias nos genes dos cromossomos. Uma forma simples de realizar essa operação é alterando um ou mais genes do cromossomo (ver **Figura 4.3**). O principal papel da mutação é a mudança de parte(s)

de uma solução aleatoriamente, a fim de fornecer um mecanismo para escapar de um ótimo local.

A probabilidade de mutação (P_m) é definida como a porcentagem do número total de genes da população que serão modificados para teste. Se essa probabilidade (P_m) for muito baixa, muitos genes úteis nunca serão testados; apesar disso, se for muito alta haverá muita perturbação aleatória e a prole começará a perder a semelhança com os pais, ou seja, o algoritmo perderá a habilidade de evolução e aprendizagem (GEN; CHENG; LIN, 2008).

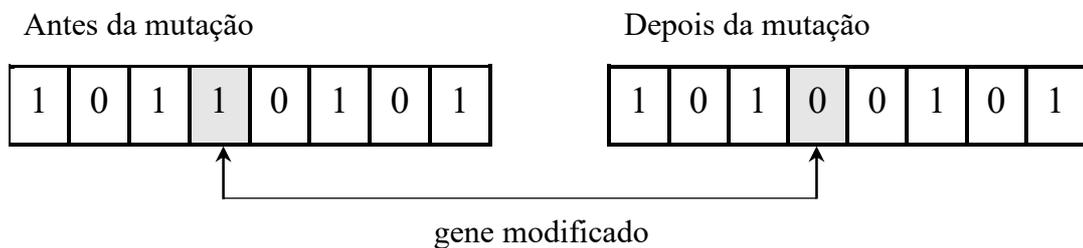


Figura 4.3. Operador genético de mutação em gene único

A avaliação da aptidão, que precede a seleção, verifica o valor da função objetivo que fornece o mecanismo de avaliação de cada cromossomo. Desse modo, à medida que o AG prossegue, a população evolui em aptidão e forma descendentes relativamente melhores.

O mecanismo de seleção tenta aplicar pressão sobre a população de maneira semelhante à seleção natural de sistemas biológicos. Indivíduos com baixa aptidão são eliminados ou penalizados, enquanto indivíduos com alta aptidão têm maiores chances de repassar suas características aos descendentes (COLEY, 1999). Dessa forma, o principal objetivo da seleção é direcionar a pesquisa genética para regiões promissoras no espaço da busca.

4.2 INVIABILIDADE E ILEGALIDADE

O AG trabalha em dois espaços alternadamente, o espaço de codificação (genótipo) e o espaço de solução (fenótipo). Os operadores genéticos de mutação e cruzamento trabalham no espaço do genótipo, enquanto a seleção e a avaliação atuam no fenótipo.

De acordo com Gen, Cheng e Lin (2008), o problema mais recorrente no mapeamento dos espaços é que alguns indivíduos correspondem a soluções inviáveis para determinado problema. Além disso, os autores alertam que se deve diferenciar corretamente os termos inviabilidade e ilegalidade (ver **Figura 4.4**), pois são muitas vezes tratados erroneamente na literatura.

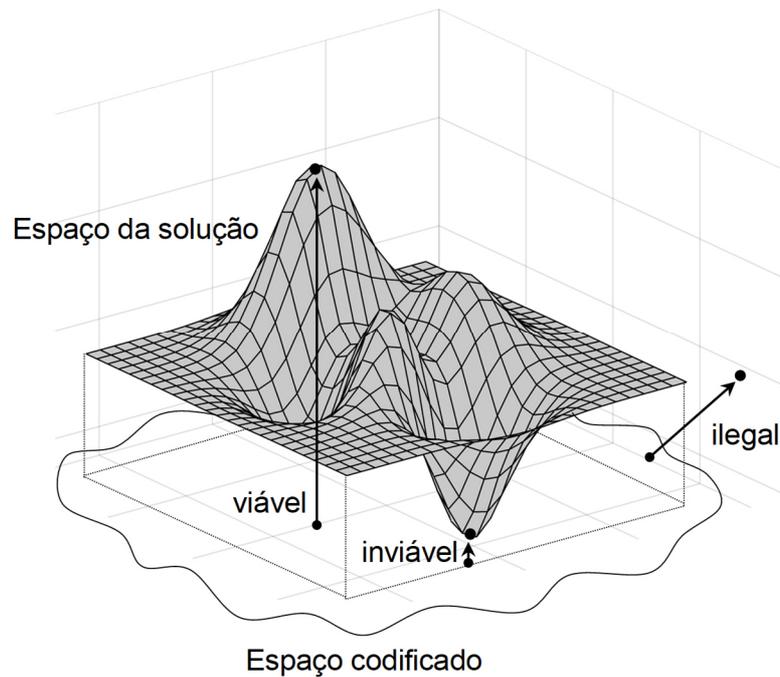


Figura 4.4. Inviabilidade e Ilegalidade [adaptado de (GEN; CHENG; LIN, 2008)]

Inviabilidade é o fenômeno em que a solução decodificada do cromossomo está fora da região de domínio do problema, sendo originado pela natureza do problema de otimização restrita. Por outro lado, ilegalidade é o fenômeno em que um cromossomo não representa uma solução para o problema, sendo gerado pelas técnicas de codificação empregadas (GEN; CHENG; LIN, 2008).

Para resolver problemas de inviabilidade pode-se utilizar técnicas de penalidade (GEN; CHENG, 1996) para lidar com cromossomos inviáveis. Entretanto, essas técnicas não podem ser empregadas nos problemas de ilegalidade, pois o cromossomo não pode ser decodificado para uma solução; deste modo, é recomendável a utilização de técnicas de reparação (ORVOSH; DAVIS, 1994) que convertem um cromossomo ilegal em legal.

4.3 ESCOLHA DOS PARÂMETROS

A escolha dos parâmetros no AG é um fator essencialmente importante e, por vezes, difícil. Inicialmente, deve-se definir uma função de aptidão, além disso, essa formulação precisa ser adequada e capaz de determinar a aptidão de cada indivíduo na população.

De acordo com Yang (2014), quando se deseja minimizar uma função usando o AG, uma maneira simples é construir uma função de aptidão na forma

$$F = A - y, \quad (4.1)$$

em que A é uma constante de valor relativamente alto e $y = f(x)$. Assim o objetivo é maximizar a função de aptidão (4.1) e, conseqüentemente, minimizar a função objetivo $f(x)$. Outra alternativa é definir uma função de aptidão como

$$F = \frac{1}{f(x)}, \quad (4.2)$$

mas, **deve-se atentar para a singularidade quando $f(x) \rightarrow 0$** . Da mesma forma, a maximização da função de aptidão (4.2) ocasiona a minimização da função objetivo $f(x)$.

Uma função de aptidão adequada garante a seleção das melhores (mais aptas) soluções, enquanto uma função de aptidão deficiente pode resultar em soluções incorretas e inconsistentes (YANG, 2014).

A escolha dos parâmetros utilizados nos operadores genéticos também pode ser uma tarefa árdua. Na literatura, Yang (2014) recomenda uma probabilidade de cruzamento (P_c), geralmente alta, em torno de $0.60 \leq P_c \leq 0.95$. Por outro lado, a probabilidade de mutação (P_m) deve ser relativamente pequena, cerca de $0.001 \leq P_m \leq 0.05$. Paula (2019) avaliou parâmetros utilizados em algoritmos evolutivos de 92 artigos e comprovou que os valores mais frequentes na literatura são de P_c igual a 0.9 e P_m igual a 0.1.

Outro fator essencial, é a escolha do tamanho correto da população inicial (Pop_{inic}). Se o tamanho da população for muito pequeno, não há evolução suficiente e toda a população poderá ser conduzida a um ótimo local (não global). Por outro lado, uma população extremamente grande exigirá elevado gasto computacional, pois mais

avaliações da função objetivo serão necessárias. Estudos e observações empíricas sugerem que um tamanho de população com valores entre $40 \leq Pop_{inic} \leq 200$ funcionam bem para a maioria dos problemas (YANG, 2014). O valor mais frequente na literatura é de Pop_{inic} igual a 100, mas esse valor pode não ser explícito e depender do número de variáveis consideradas (PAULA, 2019).

Sobretudo, é interessante salientar, que todos os parâmetros devem ser sistematicamente testados e verificados para cada problema específico. Alguns problemas complexos, por exemplo, podem requerer parâmetros diferentes dos mencionados anteriormente.

4.4 ALGORITMO GENÉTICO HÍBRIDO

O AG é bastante eficaz e versátil na resolução de inúmeros problemas de otimização. Contudo, existem situações em que o AG convencional não possui um desempenho satisfatório ou particularmente bom. Para superar essa dificuldade, muitas técnicas de hibridização são propostas.

De acordo com Gen e Cheng (2000), o Algoritmo Genético Híbrido (AGH) pode superar alguns métodos que operam sozinhos. Além disso, a hibridização pode ser realizada de diversas formas: a) Incorporando técnicas heurísticas na inicialização para gerar uma população com maior aptidão; b) Inserindo heurísticas na função de aptidão para decodificar cromossomos mais aptos; c) Aplicando heurísticas de busca local nas iterações do AG e trabalhando em conjunto com os operadores genéticos para desenvolver uma otimização rápida e o melhoramento da prole antes da avaliação.

Uma das técnicas mais comuns do AGH é a incorporação da busca local como complemento da otimização. A otimização local (ver **Figura 4.5**) é aplicada ao cromossomo recém gerado com o objetivo de movê-lo para um ótimo local antes de inseri-lo na população (GEN; CHENG; LIN, 2008).

O mais interessante desse processo de hibridização é que os AG's são bons na busca global, mas lentos na convergência; por outro lado, a pesquisa local realiza um bom refinamento, mas cai frequentemente em ótimos locais. O AGH, portanto, complementa as propriedades do AG e da busca local (GEN; CHENG, 2000).

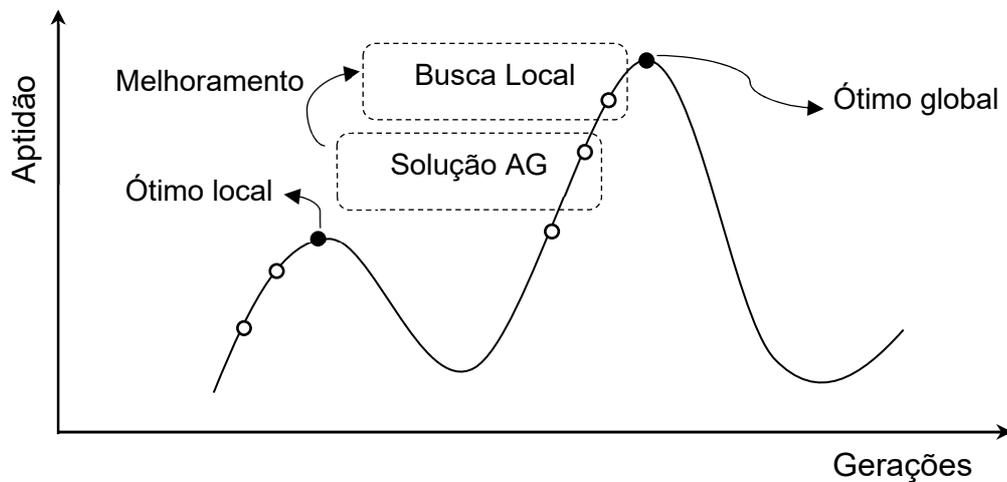


Figura 4.5. Algoritmo Híbrido com busca local [adaptado de (GEN; CHENG; LIN, 2008)]

No geral, os AGH's com busca local possuem duas abordagens: a) **Evolução Lamarckiana** e b) **Efeito Baldwin**. Para distinguir entre essas duas vertentes deve-se, inicialmente, verificar se as mudanças feitas no cromossomo devem ser mantidas no genótipo, ou se a melhoria da aptidão deve ser atribuída ao indivíduo original da população (EIBEN; SMITH, 2004).

A **Evolução Lamarckiana** define que as características adquiridas podem ser herdadas pela prole; por outro lado, o **Efeito Baldwin** sugere um mecanismo de progresso evolutivo guiado para uma adaptação favorável, mas em que as mudanças na aptidão decorrentes da evolução não interferem na genética do cromossomo (EIBEN; SMITH, 2004).

Usualmente, os AGH's são definidos como Lamarckianos se a solução local encontrada substituir o indivíduo original da população. Em contrapartida, se a solução original for mantida, mas sua aptidão evolui de acordo com a busca local, diz-se que são AGH's Baldwinianos (GEN; CHENG; LIN, 2008).

5 MORFOGÊNESE DE VENAÇÃO

Diante das mais diversas estruturas naturais e suas funcionalidades incontestáveis, os *designers*, cada vez mais, buscam inspiração na natureza para otimização das estruturas de engenharia. De acordo com Liu *et al.* (2017), muitas estruturas naturais típicas chamaram a atenção dos estudiosos como: sistemas de vasos sanguíneos, células ósseas, veias foliares e até mesmo a topologia das montanhas e rios.

Dentre todas essas estruturas, a folha é um modelo bastante representativo de uma estrutura de placa enrijecida por venação (disposição das veias e nervuras) natural e agrada muito os pesquisadores (BOHN *et al.*, 2002; JI; DING; XIONG, 2014; LI *et al.*, 2013a, 2013b, 2019b; LI; GE; HONG, 2017; ZHANG *et al.*, 2018). Algo interessante, é que as folhas possuem um sistema de venação foliar inteligente que cresce ao longo do caminho de carga (LIU *et al.*, 2017).

Conforme explicado por Liu *et al.* (2017), muitos pesquisadores fizeram suas próprias contribuições. Apesar disso, a maioria das pesquisas constituem apenas em uma imitação das características morfológicas da folha no *design* de alguma estrutura. Dessa forma, o resultado é um projeto que se assemelha a uma folha, mas não se descobre o motivo pelo qual a estrutura é melhorada.

Com o intuito de melhorar as contribuições no campo da análise das estruturas seguindo um padrão de venação foliar, Liu *et al.* (2017) propôs o Algoritmo de Morfogênese Adaptativa (AMA). Esse algoritmo é baseado no mecanismo de crescimento de venação foliar para gerar um *layout* do enrijecedor de forma crescente. O método não apenas imita o padrão visto nas folhas, mas confere reforços com capacidade de auto adaptação para crescer em uma estrutura completamente enrijecida (LIU *et al.*, 2017).

5.1 PADRÃO DE VENAÇÃO FOLIAR

Para compreender melhor como o processo utilizado pelo AMA funciona, deve-se introduzir alguns conceitos gerais. A **Figura 5.1** mostra algumas folhas comuns na natureza, observe que as folhas possuem certo padrão de crescimento das veias/nervuras.

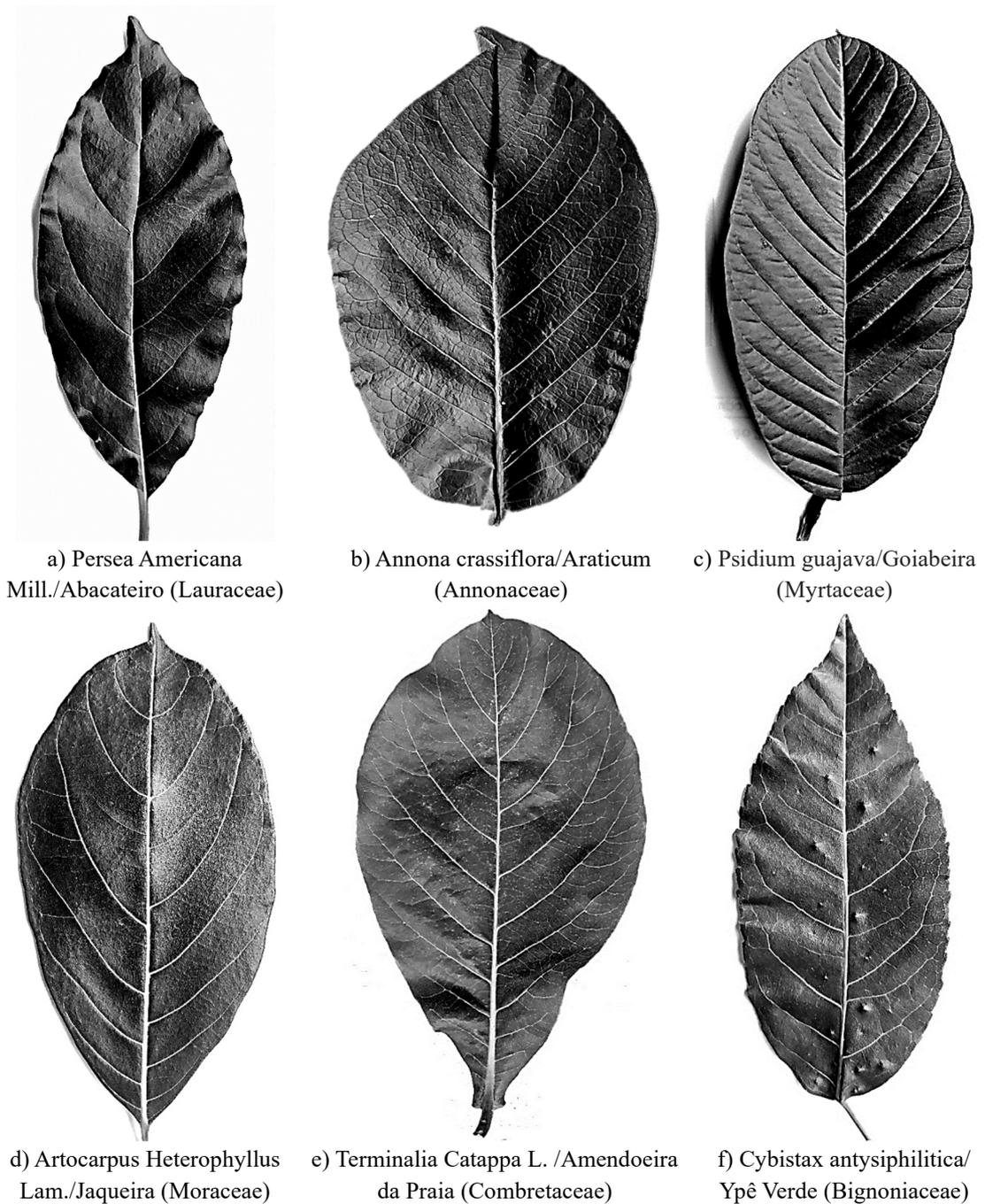


Figura 5.1. Padrão de ramificação das folhas: nome científico/nome popular (família)

A **Figura 5.2** mostra o detalhe das nervuras em uma folha de Ypê Verde. É possível observar que a folha apresenta apenas uma nervura principal e várias nervuras secundárias (ver **Figura 5.2a**). Percebe-se também que as nervuras secundárias são quase paralelas entre si. Outra informação importante, é que existe um ângulo ' β ' formado entre veia principal e secundárias (ver **Figura 5.2b**).

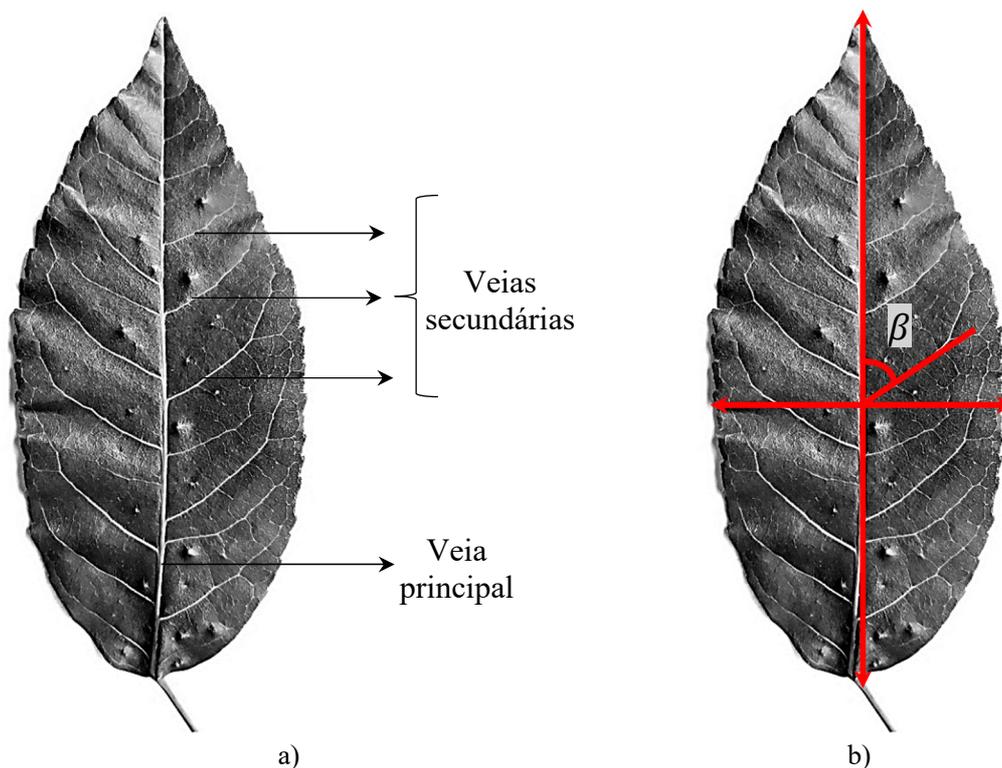


Figura 5.2. Detalhe das nervuras na folha de *Cybistax antysiphilitica*/ Ypê Verde (Bignoniaceae) a) veia principal e secundárias. b) ângulo entre veias

A **Tabela 5.1** mostra o valor do ângulo β para as folhas mostradas na **Figura 5.1**. Observe que para essa pequena amostra de folhas, o ângulo varia de 47.2° a 58° e a relação entre comprimento e largura das folhas varia de 1.47 a 2.40.

Tabela 5.1. Características da formação das folhas

Identificação	Folhas	Ângulo entre veia principal e secundária (β)	Comprimento/largura
a)	<i>Persea Americana</i> Mill	47.2°	2.32
b)	<i>Annona crassiflora</i>	49.1°	1.47
c)	<i>Psidium guajava</i>	50.8°	1.93
d)	<i>Artocarpus Heterophyllus</i> Lam.	57.2°	1.97
e)	<i>Terminalia Catappa</i> L.	56.2°	1.73
f)	<i>Cybistax antysiphilitica</i>	58.0°	2.40

Após essa breve motivação sobre as características das folhas, deve-se entender que alguns parâmetros das folhas seguem um padrão bem definido, outros não. Xing *et*

al. (2012) analisaram mais de 100 espécies de plantas e fizeram um estudo sobre as regras de distribuição das nervuras das folhas. De acordo com o número de nervuras principais, a venação das folhas pode ser classificada em duas categorias: venação pinada e venação palmada. A venação das folhas que possuem apenas uma veia principal é denominada venação pinada, enquanto a venação palmada possui mais de uma veia principal (XING *et al.*, 2012).

Ainda de acordo com Xing *et al.* (2012), pode-se definir os seguintes critérios para o padrão da venação:

- a) Se a proporção entre comprimento e largura for maior que 1.2, apenas uma veia principal deve ser formada, caso contrário, formar mais de uma veia principal é a melhor escolha;
- b) A veia principal é muito maior em diâmetro do que a veia secundária;
- c) O ângulo entre veias principais das folhas palmadas varia de 30° a 70°;
- d) As características de distribuição das veias secundárias podem ser descritas como paralelas e uniformes;
- e) O ângulo entre veia principal e secundárias varia de 25° a 75°;
- f) O número de veias secundárias varia de 8 a 26;
- g) O ângulo varia com a espessura e deve ser definido para cada caso;
- h) O número de nervuras secundárias não tem relação com a proporção entre o comprimento e a largura;
- i) A estrutura não é melhor quando não há veias secundárias. Portanto, a existência de veias secundárias é necessária.

Esses são os principais critérios e padrões observados nas folhas. Dito isso, os conceitos básicos já foram introduzidos.

Algo interessante no sistema de venação das folhas é que a ramificação cresce na direção mais favorável (maximizando nutrientes, umidade e absorção de luz) e principalmente para garantir o suporte mecânico (resistir ao peso próprio, vento, chuva e neve) ideal de toda a estrutura. Ou seja, essas estruturas buscam se estabilizar de modo que se adaptem ao ambiente de crescimento específico (ZHANG *et al.*, 2018).

5.2 ALGORITMO DE MORFOGÊNESE ADAPTATIVA

A **Figura 5.3** mostra o esquema do AMA proposto por Liu *et al.* (2017). O algoritmo começa com os parâmetros de inicialização, que inclui a definição do comprimento de crescimento do reforço em cada etapa, área da seção transversal em cada etapa, limite superior para o volume do reforço e parâmetros para o modelo de elementos finitos. Observe que o projeto para a veia principal é desenvolvido previamente e que os parâmetros para veias secundárias são diferentes.

O projeto da veia principal é mostrado na parte esquerda do esquema e é detalhado na **Figura 5.4a**. A parte direita do esquema mostra os critérios de formação das veias secundárias e é demonstrado mais detalhadamente na **Figura 5.4b**.

Para o projeto das veias principais (ver **Figura 5.4a**), o próximo passo é definir o ponto de “germinação”, que é o local onde a veia começará a crescer. Assim como nas folhas da natureza, esses pontos de germinação devem ser localizados em alguma região de restrição (apoio), pois isso reduz a energia de deformação de forma eficaz (LIU *et al.*, 2017).

Em seguida, o algoritmo busca um ângulo ótimo para o crescimento da veia a partir do ponto inicial de germinação. Nessa etapa, todos os reforços (veias) são temporariamente mantidos, então, inicia-se a competição de crescimento: se o decremento da energia de deformação ($\Delta\Pi_{\text{int}}$) do reforçador candidato for maior do que 10% do decremento máximo da energia de deformação ($\Delta\Pi_{\text{int}}$), o reforço é mantido, caso contrário, o reforço é descartado.

Dessa forma, os reforçadores irão crescer até atingir o limite estabelecido ou até consumir o limite do volume de material para os reforçadores. Após a formação das veias principais, o AMA vai para o projeto das veias secundárias (ver **Figura 5.4b**).

Os procedimentos descritos para o projeto das veias principais são muito semelhantes aos das veias secundárias. A diferença é que o objetivo nessa etapa é reduzir a tensão cisalhante. Os pontos de germinação começam no ponto da veia principal em que a tensão cisalhante é notável e passa também por uma competição de crescimento. Caso o decremento da tensão cisalhante ($\Delta\tau$) exceda 10% do decremento máximo

($\Delta\tau_{max}$), então, o reforço é mantido e cresce até atingir algum critério de parada. Por fim, o AMA realiza um equilíbrio vetorial e ajusta as áreas das veias principais e secundárias.

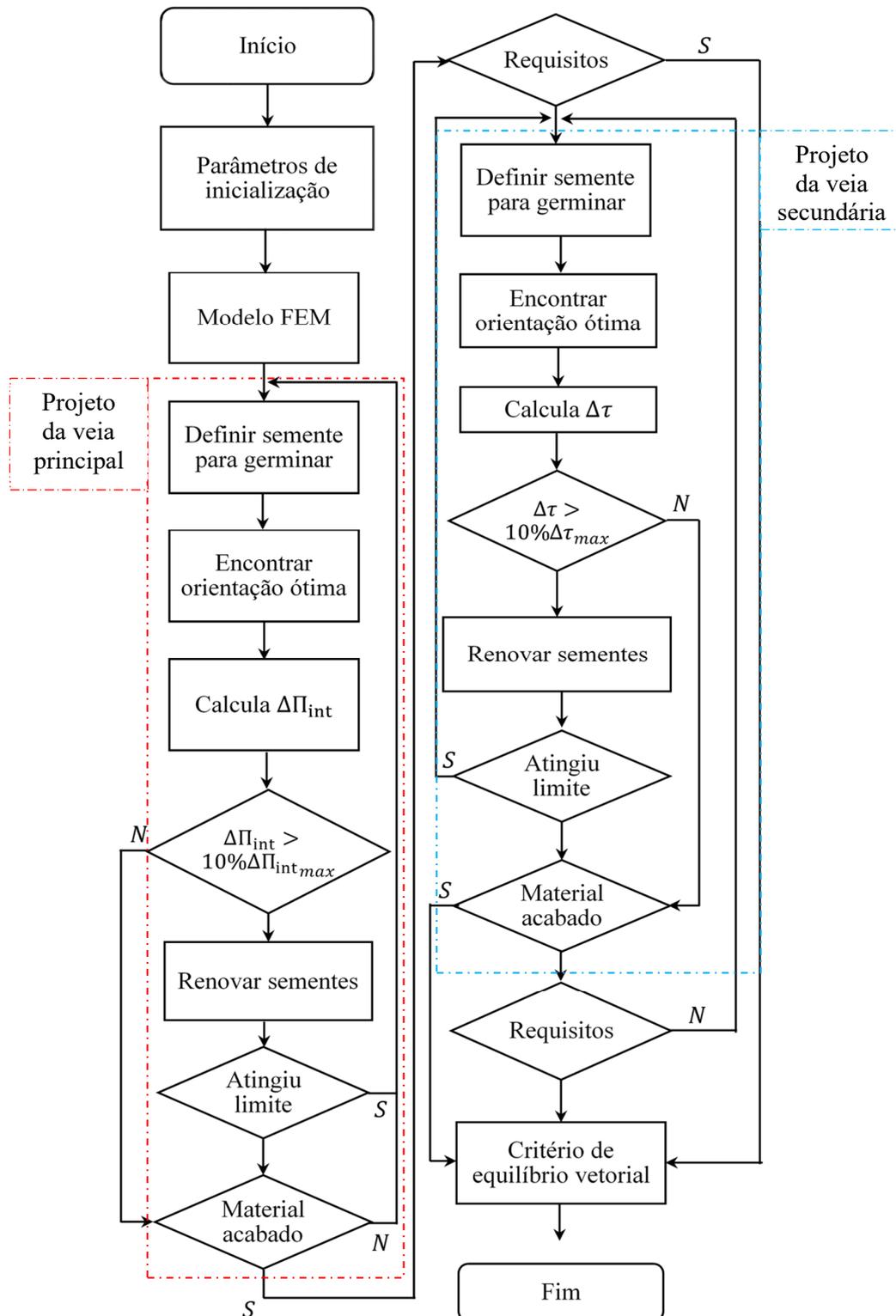


Figura 5.3. Esquema do AMA [adaptado de LIU *et al.* (2017)]

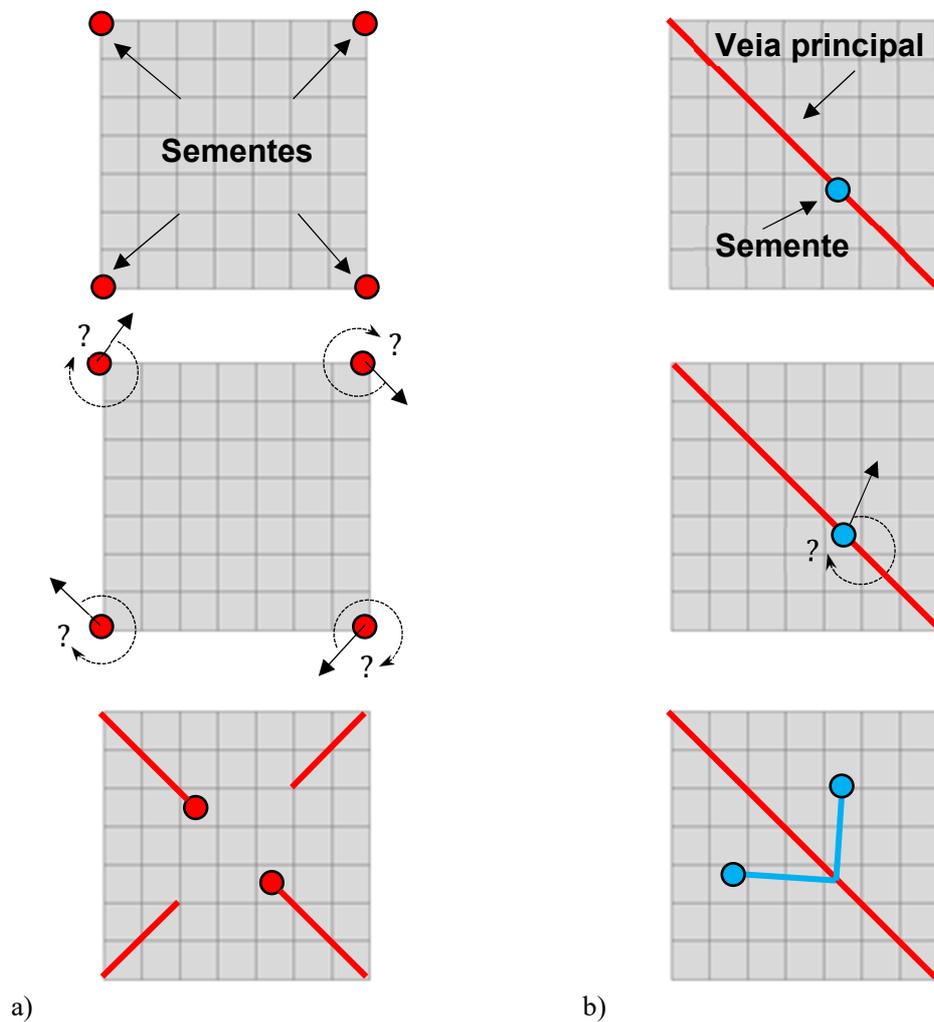


Figura 5.4. Detalhe da formação das veias. a) Veias principais, b) Veias secundárias

Percebe-se, então, que a função da veia principal é reduzir a energia de deformação, enquanto o papel das veias secundárias é resistir às tensões de cisalhamento locais. Apesar de Liu *et al.*, (2017) comentarem que o papel das veias secundárias é relativamente insignificante se comparado às veias principais, deve-se atentar que a necessidade das veias secundárias existe e já foi explicado por Xing *et al.* (2012), conforme mostrado na seção 5.1 (item i).

5.3 OTIMIZAÇÃO MULTIOBJETIVO E ÓTIMO DE PARETO

Uma quantidade bastante considerável de problemas reais de otimização é do tipo multiobjetivo, ou seja, possuem mais de um objetivo. Esse tipo de problema possui uma

série de funções objetivas que devem ser maximizadas ou minimizadas. Além disso, o problema geralmente possui uma série de restrições.

De acordo com Deb (2001), pode-se escrever um problema de otimização multiobjetivo na sua forma geral como

$$\begin{aligned}
 \text{minimize/maximize:} \quad & f_m(x), \quad m = 1, 2, 3, \dots, M \\
 \text{sujeito a:} \quad & g_j(x) \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, \dots, J \\
 & h_k(x) = 0, \quad k = 1, 2, 3, \dots, K \\
 & x_i^L \leq x_i \leq x_i^U, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n.
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

em que x é um vetor de n variáveis de decisão: $x = [x_1, x_2, x_3, \dots, x_n]^T$, $g_j(x)$ e $h_k(x)$ são funções de restrições e o último conjunto de restrições define o intervalo da variável x_i entre um limite inferior (x_i^L) e um limite superior x_i^U .

Diferentemente da otimização mono-objetivo, as funções objetivo na otimização multiobjetivo possuem um espaço multidimensional, além do espaço usual da variável de decisão (DEB, 2001). Esse espaço adicional chama-se espaço objetivo e pode ser visto na **Figura 5.5**.

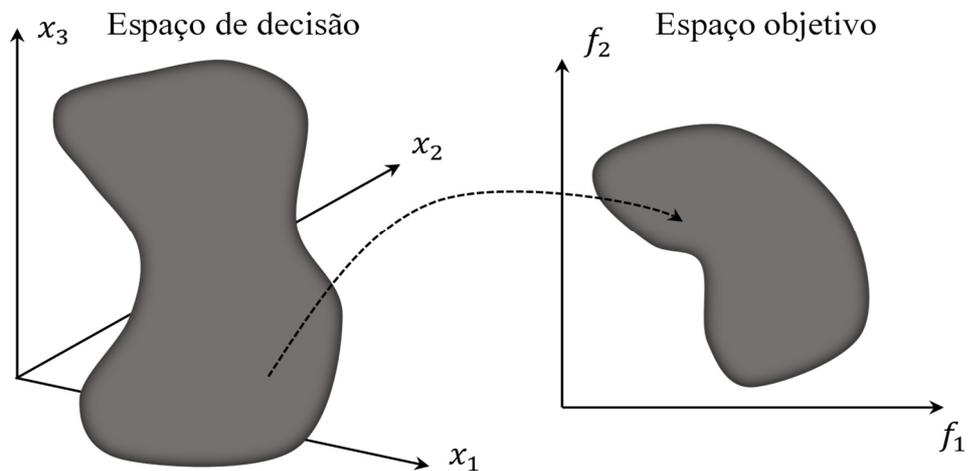


Figura 5.5. Representação do espaço de decisão e seu respectivo espaço objetivo [adaptado de (DEB, 2001)]

Devido à dificuldade em determinar a(s) melhor(es) solução(es) em otimizações multiobjetivos, o conceito de dominação é bastante utilizado nesse tipo de problema. Dessa forma, duas soluções são comparadas entre si, então, determina-se se uma solução domina a outra ou não.

De acordo com Deb (2001), pode-se dizer que uma solução x_1 domina uma solução x_2 se as duas condições a seguir forem satisfeitas:

1. A solução x_1 não é pior do que x_2 em todos os objetivos, ou $f_j(x_1) \not\geq f_j(x_2)$ para todo $j = 1, 2, \dots, M$.
2. A solução x_1 é estritamente melhor do que x_2 em pelo menos um objetivo, ou $f_{\bar{j}}(x_1) < f_{\bar{j}}(x_2)$ em pelo menos um $\bar{j} \in \{1, 2, \dots, M\}$.

Se uma das condições ditas é violada a solução x_1 não domina a solução x_2 . Por outro lado, se x_1 domina a solução x_2 , pode-se escrever matematicamente

$$x_1 \preceq x_2. \quad (5.2)$$

É comum que (5.2) também seja dita como:

- x_2 é dominada por x_1 ;
- x_1 não é dominada por x_2 ;
- x_1 não é inferior a x_2 .

Como exemplo, a **Figura 5.6** ilustra as soluções dominadas e não dominadas em uma otimização com dois objetivos que precisam ser minimizados. Diz-se que uma solução é considerada não dominada quando tal solução não é superada por nenhuma outra.

Pode-se também afirmar que as soluções não dominadas, não podem ser comparadas entre si se todos os objetivos são importantes. Ou seja, uma é tão eficiente quanto a outra. O conjunto de soluções não dominadas é chamado de conjunto não dominado (DEB, 2001).

Considerando um conjunto P de soluções e um conjunto não dominado P', caso o conjunto P seja todo o espaço de busca, o conjunto não dominado P' resultante é chamado conjunto Pareto-ótimo.

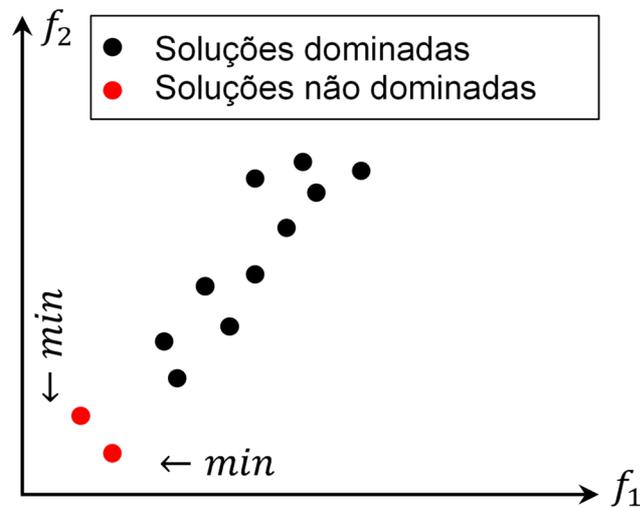


Figura 5.6. Soluções dominadas e não dominadas no espaço objetivo

A **Figura 5.7** ilustra como o conjunto Pareto-ótimo (ou frente de Pareto) pode ser definido em um problema com dois objetivos de minimização. Neste caso, o conjunto Pareto-ótimo é definido por uma curva contínua.

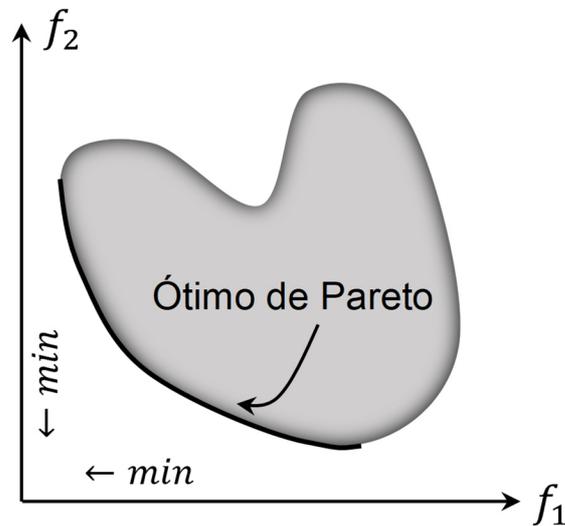


Figura 5.7. Ótimo de Pareto para dois objetivos de minimização [adaptado de (DEB, 2001)]

Assim como existem ótimos globais e locais na otimização mono-objetivo, também pode haver conjuntos de Pareto-ótimos globais e locais na otimização multiobjetivo. O conjunto não dominado de todo o espaço de busca viável é o chamado conjunto Pareto-ótimo global. Mais detalhes podem ser consultados em (DEB, 2001).

6 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Neste capítulo, os procedimentos metodológicos utilizados no desenvolvimento deste trabalho são expostos. Primeiro, a descrição do problema é desenvolvida na seção **6.1**, então, a metodologia utilizada na otimização pelo Algoritmo Genético Híbrido (AGH), pelo Algoritmo de Morfogênese Adaptativa Modificado (AMAM) e pelo Algoritmo de Otimização Robusta (AOR) são explicados nas seções **6.2**, **6.3** e **6.4**, respectivamente.

6.1 DESCRIÇÃO DO PROBLEMA

Para realizar o estudo da convergência, a placa de referência (**Figura 6.1a**) e uma placa enrijecida (**Figura 6.1b**) foram utilizadas para verificar o erro de discretização obtido pela solução numérica calculada através do Método dos Elementos Finitos (MEF) no *software* comercial ANSYS APDL[®].

De acordo com a **Figura 6.1**, pode-se perceber que a placa de referência possui dimensões $(2000 \times 1000 \times 20) \text{ mm}$ o que resulta em um volume de $4 \cdot 10^7 \text{ mm}^3$. A placa enrijecida mostrada na **Figura 6.1b**, possui espessura na base (H_p') igual a 18 mm , número de enrijecedores na longitudinal (N_{ls}) igual a 4, número de enrijecedores na transversal (N_{ts}) igual a 8, altura dos enrijecedores (h_s) igual a 50 mm e espessura dos enrijecedores (t_s) igual a 5 mm .

O material utilizado nas simulações foi o aço ASTM A-36, com módulo de elasticidade igual a 200 GPa , tensão de escoamento de 250 MPa e coeficiente de Poisson igual a 0.3. As estruturas possuem condição de contorno simplesmente apoiada em todas as bordas e estão sujeitas a um carregamento de pressão igual a 10 kPa (ver **Figura 6.2**).

As simulações foram realizadas no *software* ANSYS APDL[®], que utiliza o MEF na análise da estrutura. O elemento utilizado na modelagem da placa (base e enrijecedores) foi o SHELL63 (ver apêndice B), que utiliza os conceitos da Teoria de Placas Finas como fundamento. O elemento SHELL63 possui 6 graus de liberdade em

cada nó: 3 translações nas direções nodais x , y e z e 3 rotações em torno dos eixos x , y e z (ANSYS INC, 2007).

Vários autores (JUNIOR, 2019; PINTO, 2019; TROINA, 2017) já fizeram suas contribuições sobre o estudo de placas finas e enrijecidas e mostraram bons resultados utilizando elementos tipo casca (SHELL). Além disso, (TROINA, 2017) mostrou que elementos tipo SHELL93 ou SOLID95 apresentam resultados muito semelhantes em aplicação de placas finas enrijecidas. O estudo comprovou que o elemento SHELL poderia ser utilizado para modelagem tanto da base quanto dos enrijecedores, facilitando o processo de otimização por ser um elemento de área.

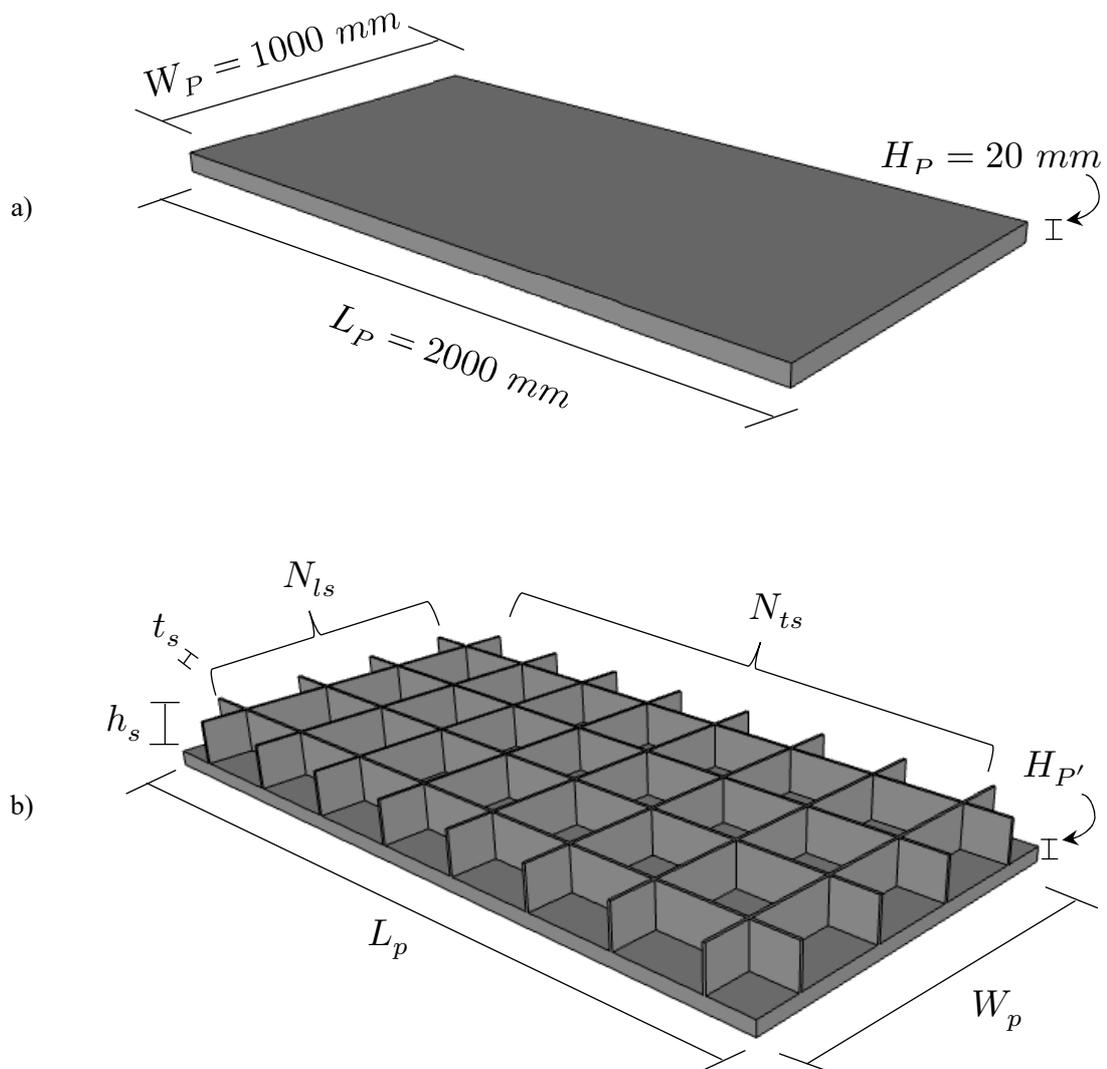


Figura 6.1. Placas para análise de convergência. a) placa de referência, b) placa enrijecida

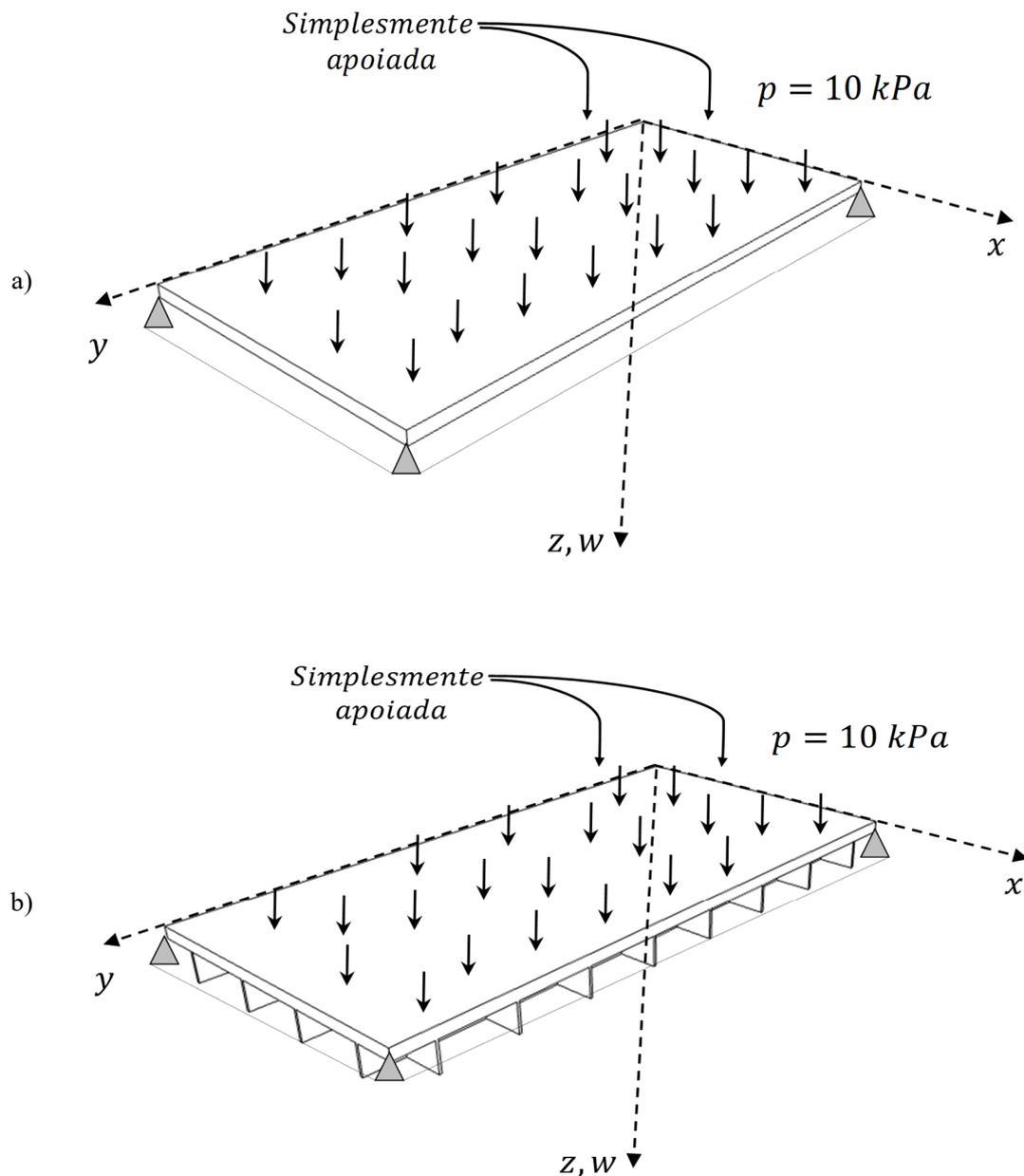


Figura 6.2. Condição de apoio e carregamento. A) placa de referência, b) placa enrijecida

Os parâmetros estudados na análise estática foram deslocamento máximo (w_{max}) na direção z (deflexão fora do plano) e a tensão máxima equivalente de von Mises (σ_{max}). Por fim, o deslocamento máximo foi escolhido como variável de interesse na análise da convergência através do Estimador de Erro de Richardson.

6.2 ALGORITMO GENÉTICO HÍBRIDO

O esquema do Algoritmo Genético Híbrido (AGH) utilizado nas simulações foi desenvolvido como proposto por Dao, Abhary e Marian (2017) e implementado em MATLAB[®] (ver **Figura 6.3**). O AGH utilizou codificação real e o cruzamento foi do tipo convencional com um ponto de corte. A mutação foi de troca simples e a seleção do tipo roleta.

O AGH começa com uma população inicial aleatória, na sequência os operadores genéticos de cruzamento e mutação são utilizados. Paralelamente, o algoritmo busca soluções locais ótimas fazendo pequenas modificações nos genes dos cromossomos. Posteriormente, a avaliação de cada indivíduo (solução) é realizada. Nessa etapa, cada possível configuração de placa é rodada em *batch* no ANSYS APDL[®] e retorna os valores de deslocamento máximo e tensão de von Mises máxima de cada indivíduo.

Após essa etapa, os valores de aptidão de cada indivíduo são definidos para determinar a probabilidade de sobrevivência do cromossomo. Além disso, foi utilizado também um critério de elitismo para que as melhores soluções sejam sempre aproveitadas.

No esquema mostrado na **Figura 6.3**, o algoritmo possui alguns critérios de parada e adaptação ou hibridização: gc é o número máximo de gerações consecutivas sem melhoria da função objetivo, n é o número máximo de gerações até a parada do algoritmo, i é o contador do número de gerações consecutivas sem melhoria da função objetivo e j é o contador da geração.

Como parâmetro de parada do algoritmo, utilizou-se $n = 50$, ou seja, após 50 gerações o algoritmo é parado. E como critério de adaptação foi utilizado $gc = 10$, dessa forma, a cada 10 gerações sem melhoria da função objetivo, o algoritmo insere novos indivíduos na população com o intuito de testar novos genes e fugir de um ponto de mínimo local.

O AGH começou com uma população inicial (Pop_{inic}) de 100 indivíduos e os parâmetros utilizados são mostrados na **Tabela 6.1**. A probabilidade de cruzamento foi 80% e a probabilidade de mutação foi 1%. Em cada geração, o algoritmo realiza uma busca local de 5% e tem uma probabilidade de 10% de elitismo das soluções mais aptas.

A taxa um pouco mais alta (do que o usual) de elitismo, neste tipo de problema, ajuda na capacidade de adaptação quando o AGH insere novos indivíduos na população. Taxas muito baixas podem deixar a população muito aleatória e dificultar a capacidade de evolução do algoritmo.

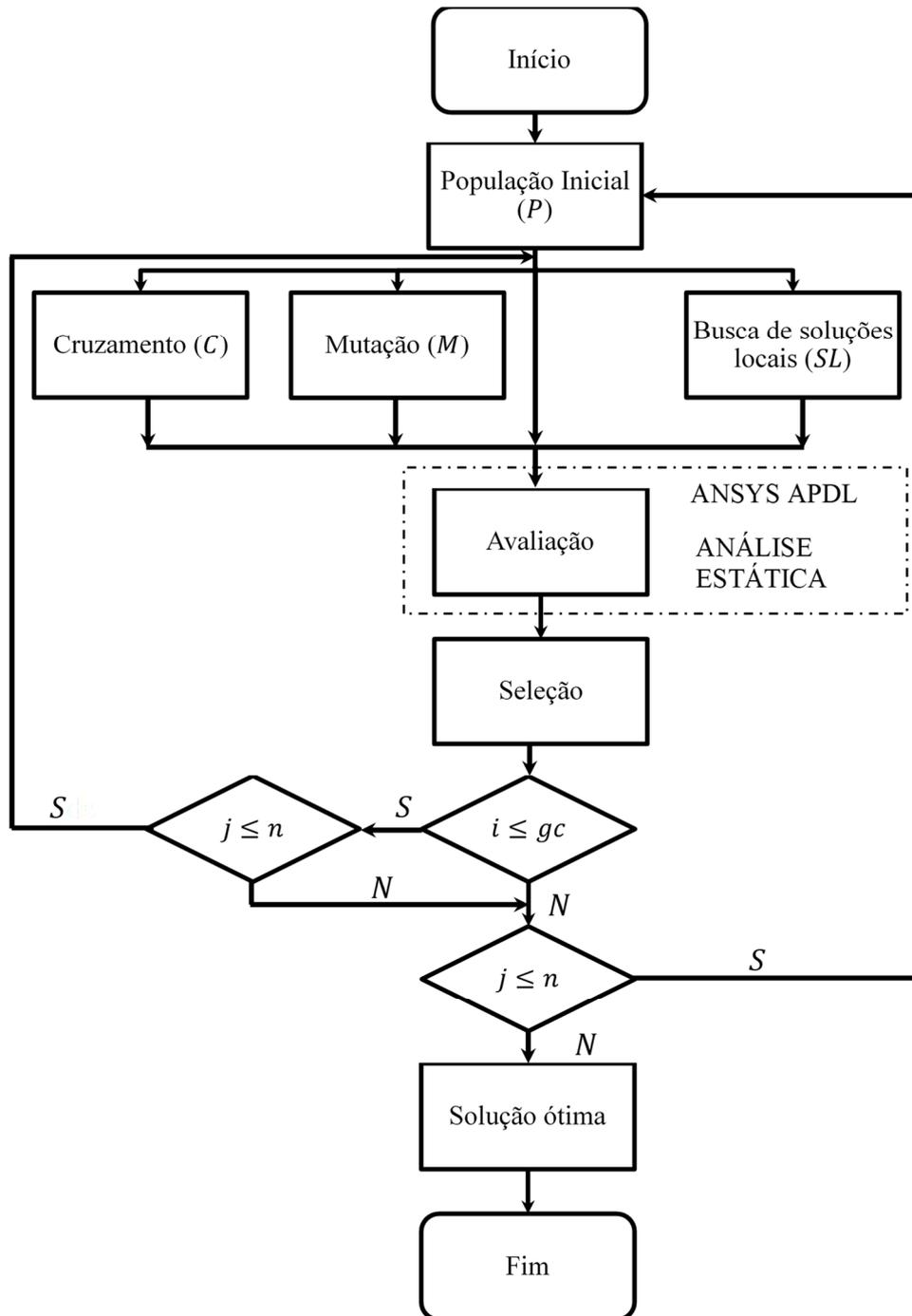


Figura 6.3. Algoritmo Genético Híbrido [adaptado de DAO; ABHARY; MARIAN, 2017]

Tabela 6.1. Parâmetros do Algoritmo Genético Híbrido

Parâmetros	Probabilidade (%)
Cruzamento (P_c)	80
Mutação (P_m)	1
Busca Local (P_{BL})	5
Elitismo (P_e)	10

A representação genética do cromossomo é mostrada na **Figura 6.4**. O cromossomo possui 4 genes, representados pelos graus de liberdade do problema. φ é a porcentagem do volume total da placa de referência que será transformado em enrijecedores, N_{ls} é o número de enrijecedores na longitudinal, N_{ts} é o número de enrijecedores na transversal e t_s é a espessura do enrijecedor (ver **Figura 6.1**).



Figura 6.4. Representação genética do cromossomo de 4 genes

O problema é constituído considerando que todas as geometrias geradas possuem o mesmo volume, ou seja, parte do volume é transformado em enrijecedor. Além disso, os enrijecedores são igualmente espaçados deixando a estrutura simétrica em relação a seus dois eixos (x e y). A função objetivo é dada por

$$\begin{aligned}
 & \text{encontre: } \mathbf{C} = [\varphi, N_{ls}, N_{ts}, t_s, h_s], \\
 & \text{minimize: } f(\mathbf{C}) = w_{max}, \\
 & \text{sujeito a: } g(\mathbf{C}) = \frac{N_{ls}(L_p h_s t_s) + N_{ts}[(W_p - N_{ls} t_s) h_s t_s]}{L_p W_p H_p} = \varphi, \\
 & 0.1 \leq \varphi \leq 0.5, \\
 & 1 \leq N_{ls} \leq 10, \\
 & 1 \leq N_{ts} \leq 10, \\
 & h_s \leq h_{s,max} \\
 & 3 \leq t_s \leq 40, \\
 & \frac{h_s}{t_s} > 1, \\
 & \sigma_{max} \leq 13.2264 \text{ MPa}.
 \end{aligned} \tag{6.1}$$

A função objetivo para esse problema, foi minimizar o deslocamento máximo (w_{max}) e está sujeita a restrições geométricas e de projeto. A função $g(\mathbf{C})$ garante que o volume total do problema seja mantido constante, calculando a altura do enrijecedor (h_s) que satisfaz a equação.

Além disso, a porcentagem (φ) do volume que pode ser transformado em enrijecedores varia de 10% a 50%. O número de enrijecedores em cada direção pode variar de 1 a 10. A altura dos enrijecedores, inicialmente, tem um limite de projeto ($h_{s,max}$) de 300 *mm*, esse limite já foi proposto na literatura (PINTO, 2019; TROINA, 2017) por outros autores. O valor limite ($h_{s,max}$) de 150 *mm* também foi testado com o intuito de fornecer resultados para alturas menores e garantindo melhores condições de projeto, como espaço útil e melhor estabilidade lateral dos enrijecedores.

A espessura dos enrijecedores (t_s) pode variar entre 3 e 40 *mm* e a razão h_s/t_s deve ser maior que 1, garantindo que a altura dos enrijecedores seja maior que a espessura. Além disso, existe uma restrição que limita a tensão máxima de von Mises a 13.2264 *MPa*, que é o valor encontrado na placa de referência.

Ao término da resolução do problema, o AGH é capaz de definir a quantidade apropriada de enrijecedores em cada direção, sugerindo o caminho de carga da estrutura. Além disso, os principais parâmetros geométricos, mostrados pelo vetor \mathbf{C} na equação (6.1), podem ser determinados para uma análise inicial de placa enrijecida com enrijecedores perpendiculares.

6.3 ALGORITMO DE MORFOGÊNESE ADAPTATIVA MODIFICADO

Neste trabalho, o Algoritmo de Morfogênese Adaptativa Modificado (AMAM) foi proposto. O AMAM é uma forma modificada do AMA convencional proposto por Liu *et al.*, (2017). O AMAM é estruturado em 3 níveis de otimização topológica (ver **Figura 6.5**) e trabalha após o AGH definir as variáveis geométricas iniciais. A **Figura 6.6** apresenta os detalhes da otimização em cada nível topológico.

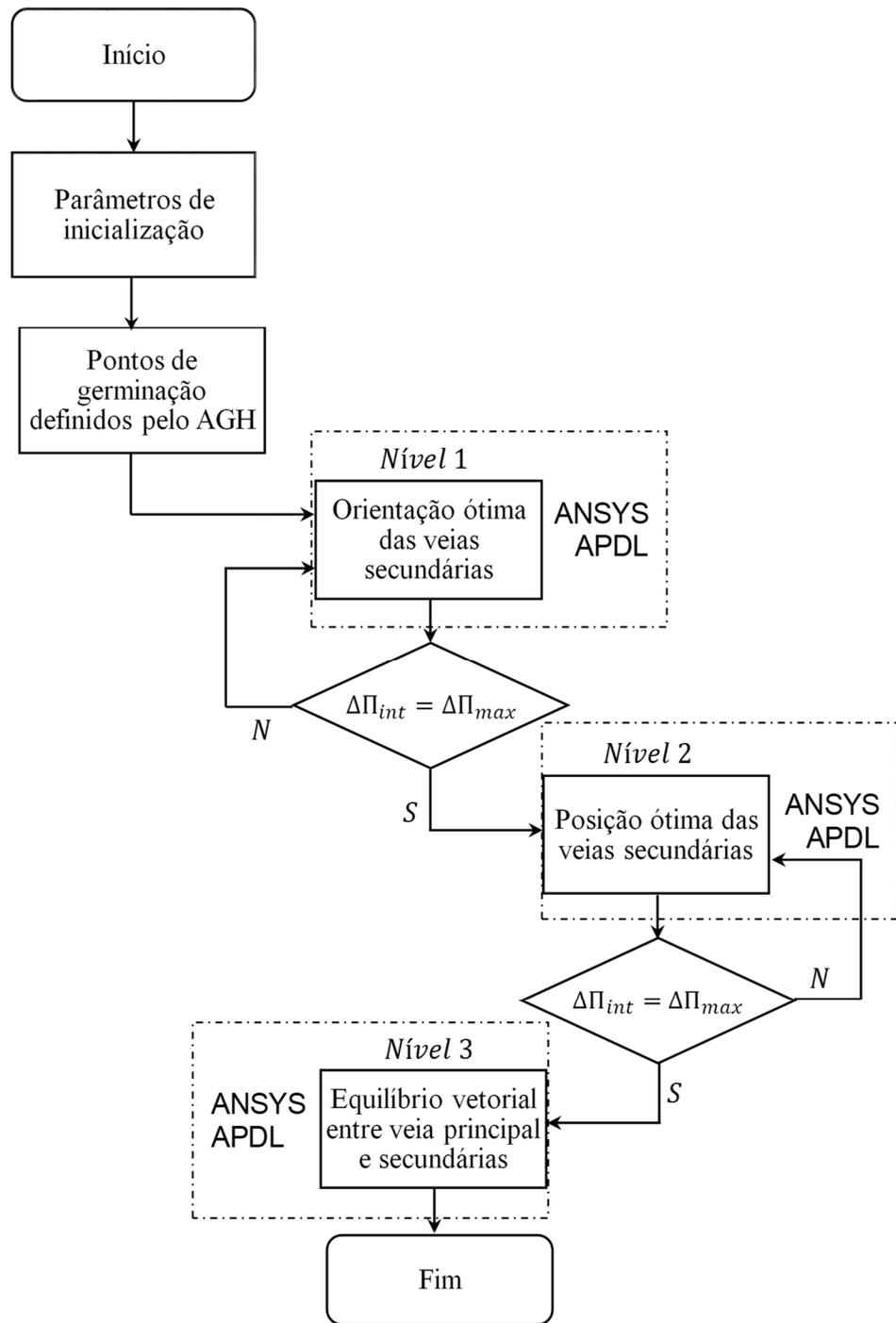


Figura 6.5. Esquema do Algoritmo de Morfogênese Adaptativa Modificado (AMAM)

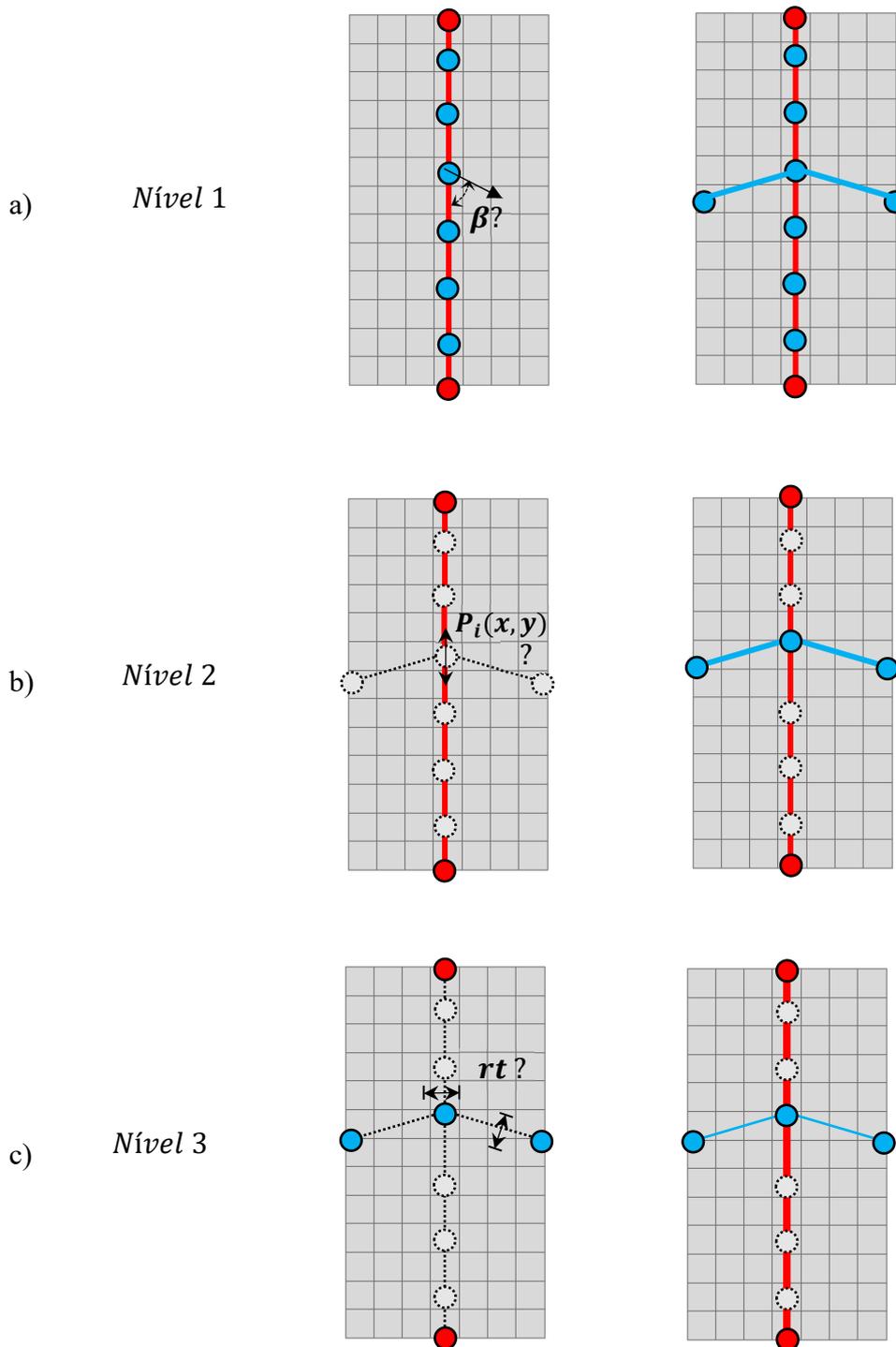


Figura 6.6. Detalhe da otimização em níveis topológicos do AMAM. a) Nível 1, b) Nível 2, c) Nível 3.

O AMAM utiliza os mesmos princípios do AMA convencional e foi implementado em MATLAB[®] em paralelo com o *software* ANSYS APDL[®]. O algoritmo inicia com os

parâmetros geométricos como dimensões e propriedades do material. Em seguida, utilizou-se das informações obtidas pelo AGH para determinar a posição (sementes) da veia principal e secundária.

Conforme explicado na seção 5.1, na natureza, as folhas formam apenas uma veia principal se a relação entre comprimento e largura for maior que 1.2. Portanto, espera-se uma estrutura de placa enrijecida com apenas uma veia principal.

A similaridade das funções entre a estrutura biológica e a estrutura de engenharia é fundamental na determinação do método de otimização topológica. Então, o AMAM assume que a energia de deformação elástica pode ser vista como fluxo de energia, que também pode ser tida como máxima rigidez (LI; HONG; LIU, 2014).

Assim como na natureza, os pontos (sementes) que delimitam a posição das veias contribuem para interconectar sempre um ponto de apoio (caule) a um ponto de maior deslocamento (extremidade). Isso garante que a estrutura aumente o decréscimo da energia de deformação.

No nível 1 da topologia de otimização, o objetivo é aumentar o decréscimo da energia de deformação ($\Delta\Pi_{int}$). Para isso, o algoritmo tenta encontrar a orientação ótima das veias (enrijecedores) secundárias. A formulação matemática pode, então, ser expressa por

$$\begin{aligned}
 & \text{encontre: } \mathbf{V} = [\beta, t_{sec}], \\
 & \text{minimize: } f(\mathbf{V}) = w_{max}, \\
 & \text{sujeito a: } g(\mathbf{V}) = \sum_{i=1}^n \|\vec{u}_i\| h_s t_i = \varphi L_p W_p H_p, \\
 & 25 \leq \beta \leq 75,
 \end{aligned} \tag{6.2}$$

em que β é o ângulo formado entre veias principais e secundárias, t_{sec} é a espessura dos enrijecedores secundários, w_{max} é o deslocamento máximo, $\|\vec{u}_i\|$ é a norma do vetor formado por cada enrijecedor i , h_s é a altura dos enrijecedores, t_i é a espessura do enrijecedor i , φ é a porcentagem do volume transformado em enrijecedor, L_p , W_p e H_p são as dimensões da placa de referência. Observe que a função de restrição garante que o volume total continue constante e igual ao volume da placa de referência.

Quando o algoritmo encontra a geometria que minimiza w_{max} , ou seja, obtém o maior decremento de deformação ($\Delta\Pi_{int}$), então segue para o próximo nível. No nível 2 da otimização, o algoritmo de otimização robusta (ver seção 6.4) busca um conjunto de coordenadas $\mathbf{P} = [x_1, y_1; x_2, y_2; \dots; x_n, y_n]$ que minimize o deslocamento máximo (w_{max}) e o desvio padrão (dp) de w_{max} de cada sub-região (marcada em vermelho na **Figura 6.7**) entre enrijecedores.

As coordenadas obtidas devem definir a nova posição em que os enrijecedores secundários encontram a veia principal. Isso pode ser expresso por

$$\begin{aligned}
 \text{encontre: } \mathbf{P} &= [x_1, y_1; x_2, y_2; \dots; x_n, y_n], \\
 \text{minimize: } f_1(\mathbf{P}) &= w_{max}, \\
 \text{minimize: } f_2(\mathbf{P}) &= dp(w_{max}) = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^m (w_{max,j} - \bar{w})^2}{m}}, \\
 \text{sujeito a: } g(\mathbf{P}) &= \sum_{i=1}^n \|\bar{u}_i\| h_s t_i = \varphi L_p W_p H_p,
 \end{aligned} \tag{6.3}$$

em que m é o número de sub-regiões, \bar{w} é a média dos deslocamentos nas sub-regiões e $w_{max,j}$ é o deslocamento máximo na sub-região j .

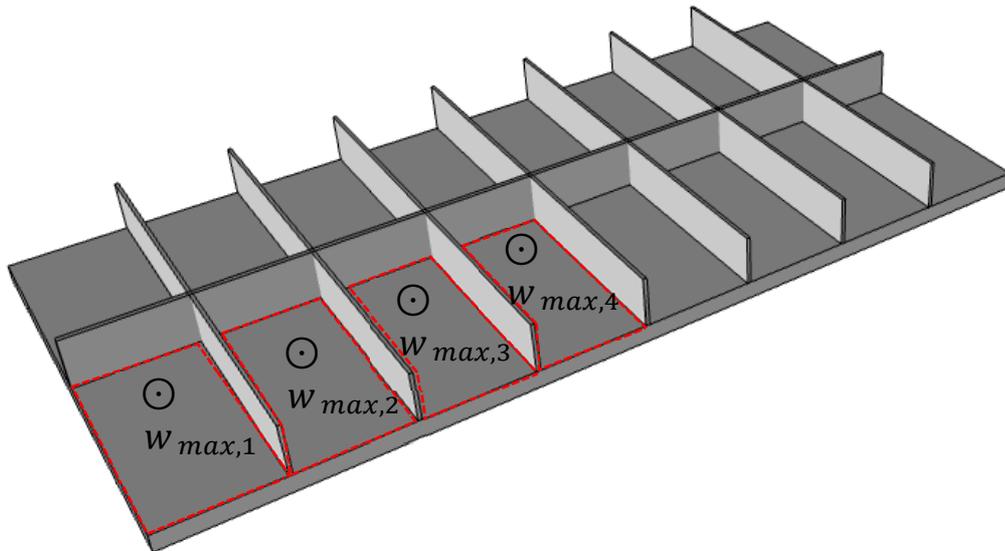


Figura 6.7. Sub-regiões para cálculo do desvio padrão (1/4 de simetria): NÍVEL 2 AMAM

Após isso, no terceiro nível da topologia de otimização, o algoritmo realiza um equilíbrio vetorial, buscando uma relação ótima entre as áreas da veia principal e secundária. Para isso, a altura dos enrijecedores é preservada (mantendo a inércia nessa direção), então, a relação (rt) entre a espessura da veia principal e secundária é definida. Esse nível pode, então, ser descrito por

$$\begin{aligned} & \text{encontre: } rt, \\ & \text{minimize: } f(rt) = \sigma_{max}, \\ & \text{sujeito a: } g(rt) = \sum_{i=1}^n \|\bar{u}_i\| h_s t_i = \varphi L_p W_p H_p, \end{aligned} \quad (6.4)$$

em que, rt é a razão entre a espessura da veia principal (t_{princ}) e secundária (t_{sec}).

De acordo com (LIU *et al.*, 2017) existe uma configuração em que essa estrutura interconectada fornece caminhos de carga contínuos em que a força ‘flui’ melhor. Além disso, Li *et al.* (2013b) afirmaram que existe um ponto de equilíbrio ideal em que a distribuição de peso dos reforçadores minimizam a energia de deformação. Portanto, nessa etapa, o código busca reduzir a tensão máxima de von Mises (σ_{max}). Por fim, o algoritmo finaliza o procedimento de otimização e retorna a geometria finalizada com a melhor configuração possível.

Algo interessante de se observar é que o AMAM possui algumas vantagens em relação ao AMA convencional. Sua forma topológica (em níveis) permite utilizá-lo em paralelo com outros algoritmos de otimização, como aqui mostrados o AGH e o AOR, por exemplo. Além disso, o problema é definido através de restrições que garantem o volume total constante, ou seja, o projeto já possui um peso definido. Como já foi comentado na contextualização do tema, a literatura mostra que a redução do peso pode não ser a melhor alternativa nesse tipo de problema.

Outro fator interessante, é que o AMAM claramente não utiliza um incremento no crescimento das nervuras, mas as adapta em sua forma pré-definida. Isso diminui consideravelmente o número de vezes que a modelagem em elementos finitos precisa ser utilizada. Outra contribuição do AMAM é que sua utilização em níveis permite analisar a influência que cada etapa da otimização topológica tem na diminuição da energia de deformação. O AMAM também comprovou que a influência das veias secundárias na diminuição da energia de deformação é relevante para estruturas com apenas uma veia

principal. Desse modo, o algoritmo considerou que todos os níveis contribuem na diminuição da energia de deformação.

6.4 ALGORITMO DE OTIMIZAÇÃO ROBUSTA

Pode-se observar que o nível 2 de otimização por AMAM possui dois objetivos, ou seja, é uma otimização multiobjetivo. Além disso, a primeira função objetivo é o deslocamento máximo (w_{max}) e a segunda função objetivo é o desvio padrão (dp) dos deslocamentos máximos. Dessa forma, é possível observar o comportamento do primeiro objetivo e conseqüentemente sua variação em relação à média.

O Algoritmo de Otimização Robusta (AOR) proposto buscou a minimização dos dois parâmetros ao mesmo tempo. Para isso, o algoritmo seguiu o esquema ilustrado na **Figura 6.8**, em que n é o número máximo de iterações.

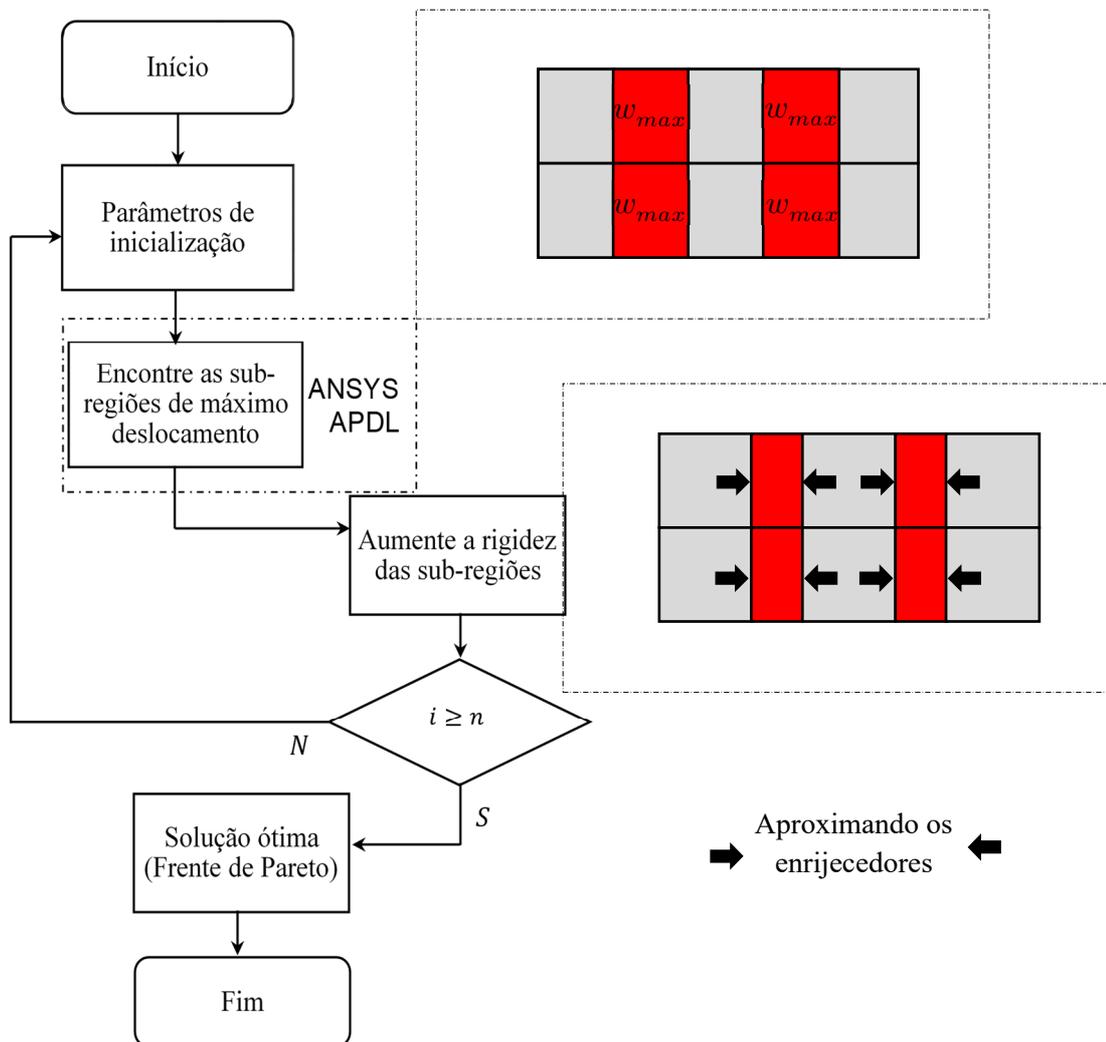


Figura 6.8. Esquema do Algoritmo de Otimização Robusta

O AOR inicia-se com os parâmetros de inicialização, como: geometria e propriedades do material. Nessa etapa, as informações como ângulo entre nervuras e a posição das veias são inseridas para modelagem da estrutura. Conforme explicado na seção 6.3, o algoritmo busca encontrar um conjunto de coordenadas $\mathbf{P} = [x_1, y_1; x_2, y_2; \dots; x_n, y_n]$, que minimize o deslocamento máximo e o desvio padrão do deslocamento máximo nas sub-regiões.

Para isso, inicialmente, a análise estática da estrutura é realizada em *batch* pelo ANSYS APDL[®], dessa forma é possível definir as sub-regiões (em vermelho na **Figura 6.8**) em que o deslocamento máximo acontece. Foram avaliadas 22 sub-regiões em cada geometria; contudo, é válido ressaltar que a estrutura é simétrica, podendo utilizar $\frac{1}{4}$ de simetria.

Após essa etapa, a rigidez das sub-regiões é aumentada. O algoritmo aproxima os enrijecedores secundários que delimitam a sub-região que contém o ponto de máximo deslocamento, consequentemente, distancia esses enrijecedores das sub-regiões menos solicitadas. Esse simples artifício busca gerar geometrias melhoradas à medida que o algoritmo converge ou atinge o número máximo de iterações.

Por fim, os resultados são plotados e utiliza-se a frente de Pareto para determinar a melhor geometria obtida. A metodologia consiste em plotar os valores das funções objetivo de cada configuração gerada conforme mostrado na **Figura 6.9**.

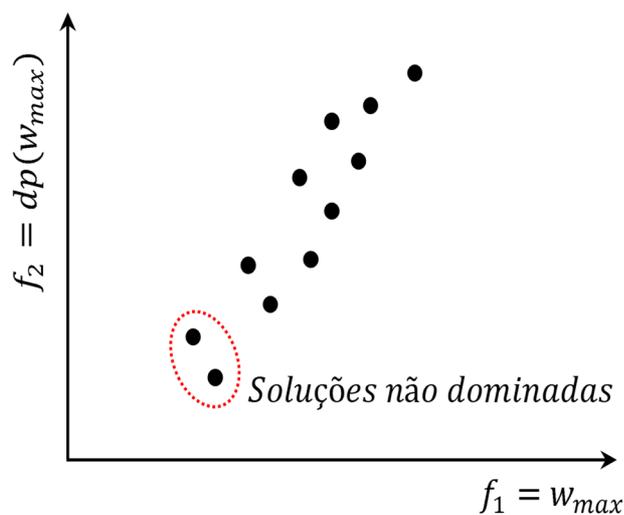


Figura 6.9. Determinação da Frente de Pareto

De acordo com a **Figura 6.9**, pode-se perceber que as duas funções objetivo são plotadas em um sistema de coordenadas bidimensionais. Observe que é possível identificar a frente de Pareto através das soluções não dominadas.

Por fim, a verificação do ótimo robusto pode ser determinada através da análise dos valores das funções objetivo próximo ao ponto de ótimo (ver **Figura 6.10**).

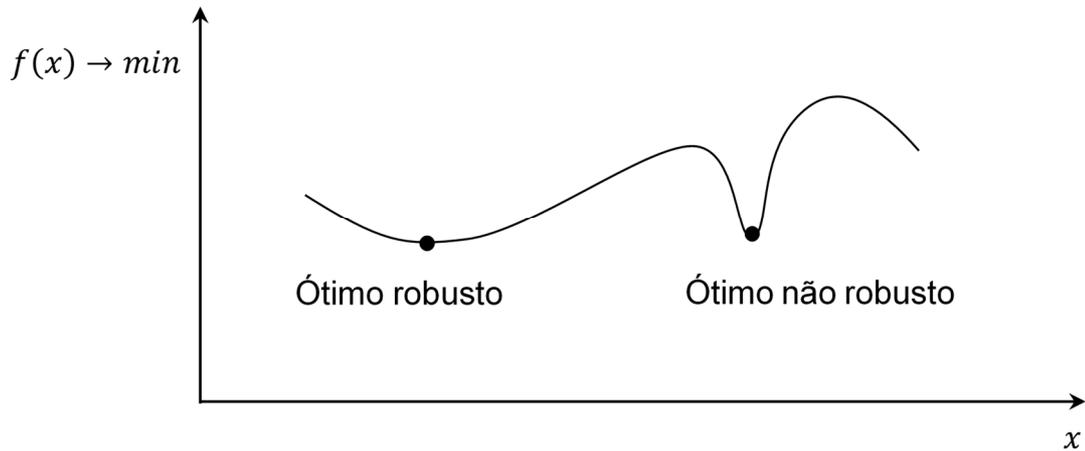


Figura 6.10. Determinação do ótimo robusto

O ótimo é considerado robusto se a solução é pouco sensível a perturbações nas variáveis que definem a função objetivo (DEB; GUPTA, 2006). Por outro lado, se existe grande sensibilidade nas proximidades da solução, o ponto de ótimo é considerado não robusto.

Para avaliação do ponto de ótimo, o desvio padrão e o coeficiente de variabilidade em relação a w_{max} foi definido para todas as soluções. Por fim, o comportamento das soluções próximas à frente de Pareto possibilitou definir se o ponto de ótimo é robusto ou não robusto.

Essa seção utilizou o nível 2 do AMAM para demonstrar a metodologia para utilização do AOR. Contudo, é válido ressaltar que esse algoritmo pode ser utilizado isoladamente na resolução de outros problemas multiobjetivos de placas enrijecidas.

7 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Este capítulo foi organizado de acordo com a sequência de desenvolvimento da pesquisa. Durante a apresentação dos resultados, o estudo contemplou muitos comparativos entre os obtidos e os disponíveis na literatura.

A seção 7.1 começa apresentando a análise de convergência e mostrando a confiabilidade dos resultados numéricos. Depois, a análise estática da geometria de referência é apresentada de modo que os resultados posteriores possam ser comparados e a melhoria (redução de deslocamento máximo e tensão máxima de von Mises) da estrutura possa ser verificada.

Em seguida, na seção 7.2, placas com enrijecedores perpendiculares são avaliadas através do Algoritmo Genético Híbrido (AGH), sendo possível identificar se o enrijecimento melhora a capacidade de carga da estrutura. Posteriormente, na seção 7.3, o Algoritmo de Morfogênese Adaptativa Modificado (AMAM) foi utilizado para determinar se a mudança de ângulos é uma alternativa melhor que a utilização de enrijecedores perpendiculares.

A otimização contemplou duas geometrias (A e B) para validação da metodologia proposta, ou seja, o estudo não é limitado a uma configuração única e específica. Nessa primeira fase, optou-se por utilizar a restrição de altura máxima (300 *mm*) proposta na literatura. Dessa forma, as geometrias encontradas foram comparadas de maneira mais equalitária aos resultados disponíveis.

Para desenvolver a próxima seção (7.4) de resultados, optou-se por ajustar a restrição de altura máxima pela metade (150 *mm*), pois o valor atribuído anteriormente foi considerado excessivo para as dimensões da placa.

Na seção 7.4, os procedimentos realizados anteriormente, nas seções 7.2 e 7.3, foram feitos novamente para as geometrias com a nova restrição de altura. Além disso, os níveis subsequentes do AMAM avaliaram a influência da posição e da relação entre áreas dos enrijecedores na melhoria da estrutura.

Por fim, na seção 7.5, o conjunto Pareto-ótimo foi determinado para verificar a sensibilidade da otimização multiobjetivo. Nessa etapa, o comportamento do deslocamento e sua variabilidade próximo ao ponto de ótimo robusto foram investigados.

7.1 ANÁLISE DA CONVERGÊNCIA

A **Figura 7.1** mostra a convergência da série de Navier para placas isotrópicas (discutida na seção 2.1), ver equação (2.55). Na figura, a quantidade de coeficientes da série (1, 3, 5, ...) é plotada *versus* o erro absoluto entre a solução analítica obtida na iteração ' $i + 1$ ' e a iteração ' i '.

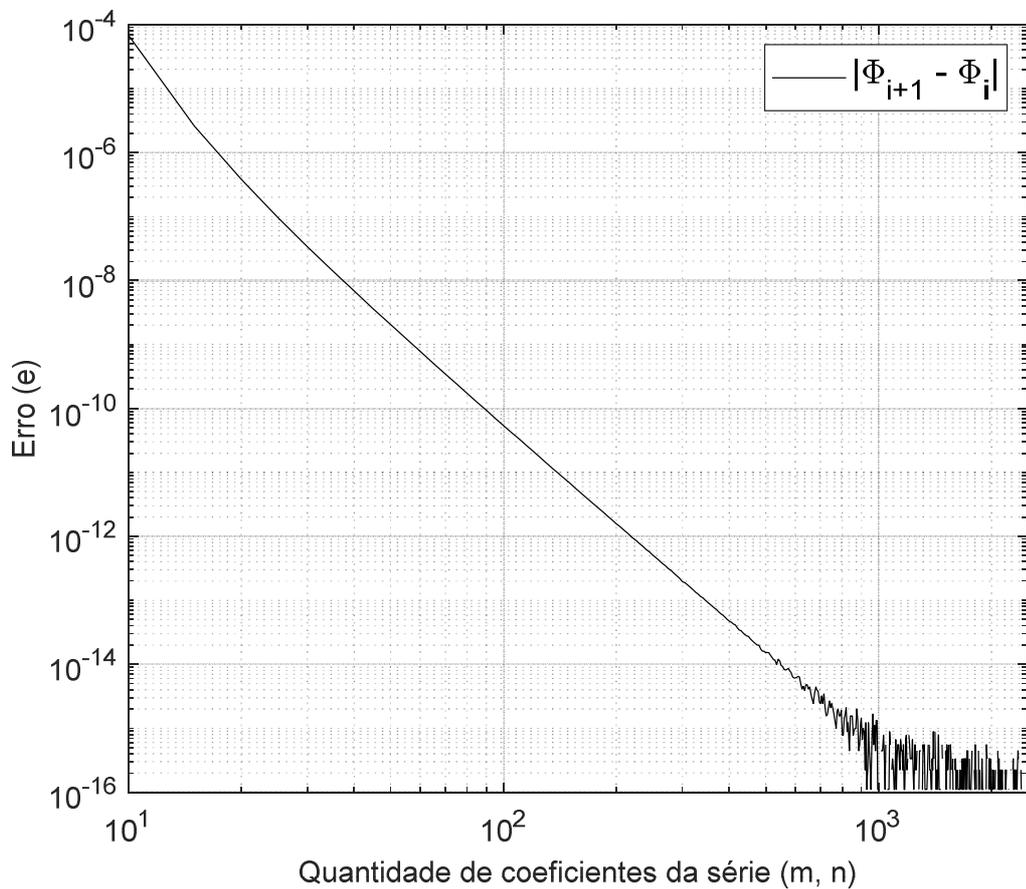


Figura 7.1. Convergência da série de Navier para placas isotrópicas: eq. (2.55)

Analisando o resultado, pode-se verificar que o erro diminuiu com comportamento praticamente linear até atingir valores na ordem de 10^{-14} e a partir disso começa a instabilidade numérica. Essa instabilidade ocorre devido ao limite computacional do comprimento da mantissa gerando erros de truncamento.

Apesar de ser sabido que a Série de Navier possui boa aproximação para poucos coeficientes, não é encontrado (ou é muito escasso) na literatura a relação entre o erro obtido e a quantidade de coeficientes. Dessa forma, a **Figura 7.1** possibilita determinar o erro admitido na solução ‘analítica’. É válido ressaltar que aqui trata-se de solução analítica como sendo a melhor aproximação da solução para o problema estipulado. Utilizando a **Figura 7.1** para determinar a solução analítica, optou-se por utilizar o resultado para 470 coeficientes (antes da instabilidade), com erro de $2.01e^{-14}$. Portanto, a solução analítica obtida para deflexão máxima da placa de referência com dimensões (2000x1000x20 mm) foi 0.691281253517776 mm.

A mesma análise de convergência da Série de Navier foi realizada para a solução de placas ortotrópicas - ver eq. (2.72) - e é mostrada na **Figura 7.2**.

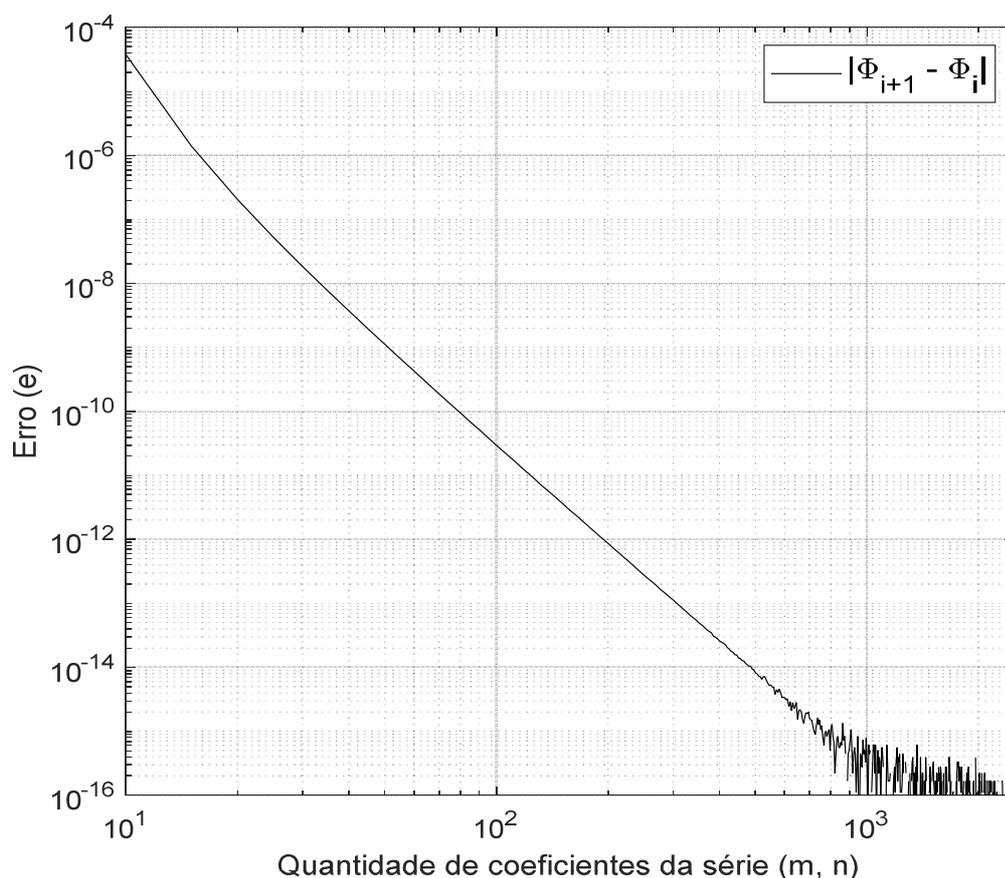


Figura 7.2. Convergência da série de Navier para placas enrijecidas: eq. (2.72)

A solução também foi considerada adequada para 470 coeficientes com erro de $1.16e^{-14}$. O resultado da deflexão máxima foi de 0.466536400223064 mm para a placa

enrijecida (ver **Figura 6.1b**) considerada na análise da convergência. É válido ressaltar que o erro de $1.16e^{-14}$ é o erro na aproximação da série; apesar disso, a precisão da solução para placas enrijecidas depende principalmente da aproximação das rigidezes (D_x, D_y e B). O mesmo não acontece para a placa isotrópica, pois a rigidez (D) é conhecida e exata.

Conclui-se, portanto, que o erro da solução para a placa de referência é conhecida e vale $1.16e^{-14}$; por outro lado, a solução para placa enrijecida possui erro da série de aproximadamente $2.01e^{-14}$, mas esse erro não é o erro verdadeiro, pois as rigidezes foram aproximadas pelas equações: (2.68), (2.69) e (2.70), mostradas e discutidas na seção 2.2. Dito isso, a convergência da solução numérica para placas enrijecidas deve ser analisada com bastante cautela.

A **Figura 7.3** mostra o comprimento do elemento (Δh) em relação ao erro verdadeiro $e(\phi)$ e o Estimador de Erro de Richardson $U(\phi)$ para a solução numérica da placa de referência. O erro verdadeiro mostra a convergência da solução numérica (ϕ) obtida através do ANSYS APDL[®] em comparativo com a solução analítica (Φ) pela Série de Navier para 470 coeficientes. O Estimador de Erro de Richardson estima o erro entre a solução numérica (ϕ) e a estimativa da solução analítica da ordem assintótica do erro, $\phi_\infty(PL)$. A convergência utilizou elementos quadriláteros e 7 malhas com razão de refinamento igual a 2.

Pode-se verificar na **Figura 7.3**, que a ordem aparente do erro verdadeiro é 2. Além disso, o Estimador de Erro de Richardson $U(\phi)$ estima muito bem o erro verdadeiro para comprimentos de elementos maiores que 8 mm. Considerando isso, e dito que o gasto computacional para $\Delta h < 5$ mm começa a ser elevado, optou-se por utilizar nas simulações elementos de comprimento $\Delta h = 10$ mm, o qual apresenta erros menores que 10^{-4} (ver detalhe das malhas no apêndice C).

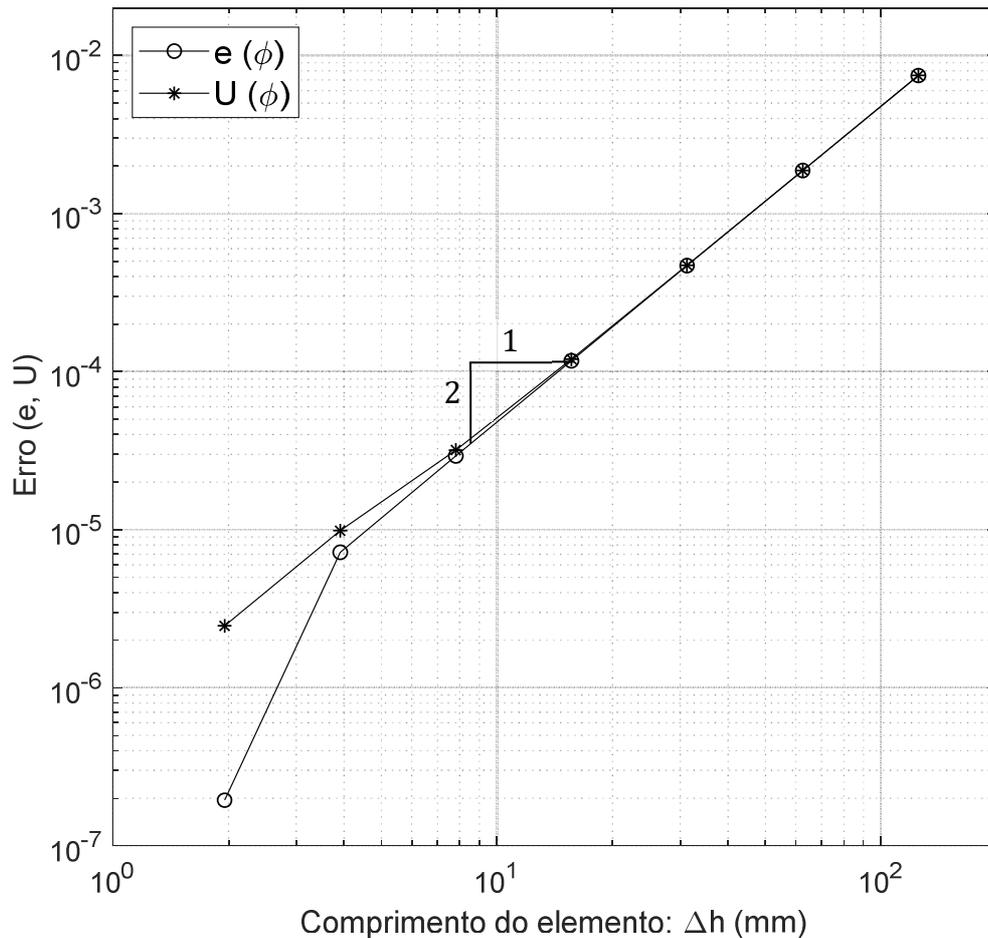


Figura 7.3. Convergência da solução numérica da placa base por ANSYS®

Conforme fora discutido, a solução analítica da placa enrijecida possui um erro que não pode ser exatamente estimado devido às aproximações dos parâmetros de rigidez. Dessa forma, o resultado da solução analítica para o caso proposto não possui precisão suficiente para realizar a análise de convergência. Em casos nos quais a solução analítica não pode ser determinada (porque não existe, ou porque é imprecisa), pode-se utilizar o conceito de incerteza utilizando o Estimador de Erro de Richardson (MARCHI; SILVA, 2002, 2005).

A **Figura 7.4** mostra a Estimativa do Erro da solução numérica através do estimador de Erro de Richardson $U(\phi)$ para o caso da placa enrijecida. O resultado da **Figura 7.4** mostra que a ordem aparente da estimativa do erro é aproximadamente 2. Além disso, para o comprimento do elemento: $\Delta h = 10 \text{ mm}$, a estimativa do erro é de aproximadamente 10^{-4} .

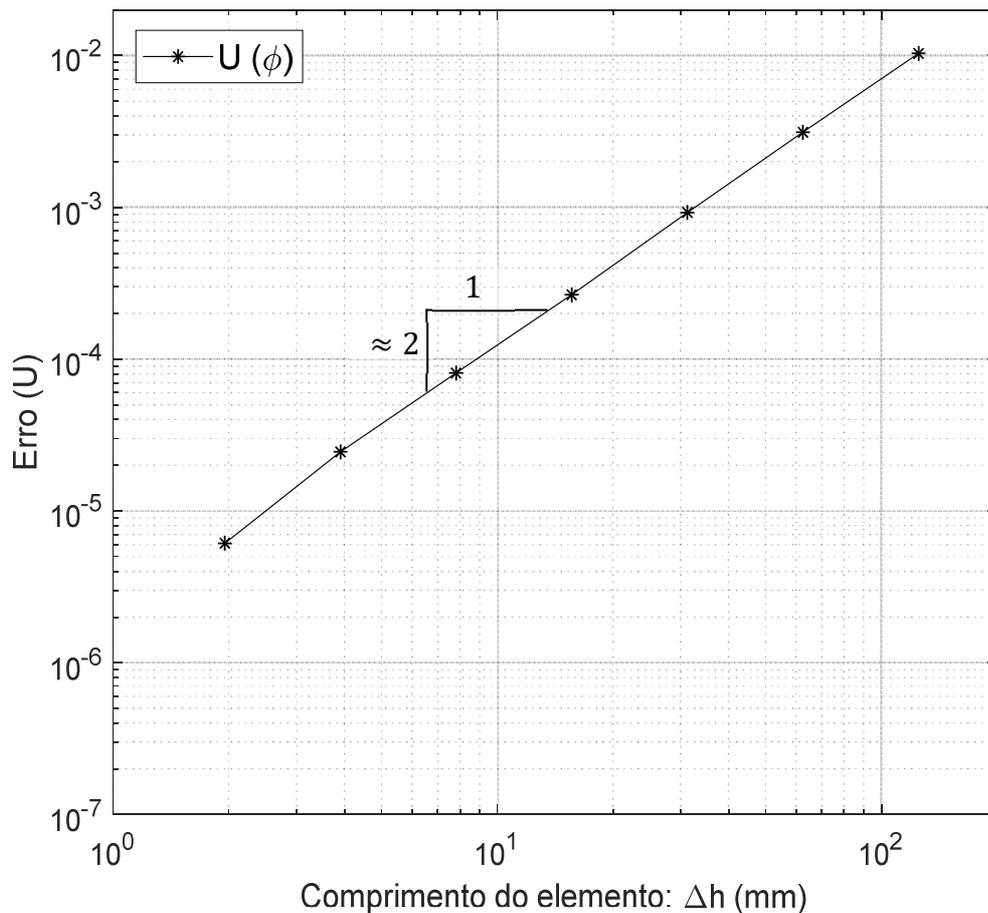


Figura 7.4. Convergência da solução numérica da placa enrijecida por ANSYS®

Por fim, outro fator fundamental para verificar a confiabilidade dos resultados de convergência é que a ordem aparente do erro é aproximadamente 2, o que já era esperado pois as funções de forma do elemento SHELL63 utilizadas pelo ANSYS APDL® na aproximação da deflexão possuem ordem 2. A literatura (MARCHI; SILVA, 2002, 2005) recomenda que o Estimador de Erro de Richardson deve ser utilizado apenas se a ordem aparente do erro for aproximadamente a ordem assintótica do erro ($PU \approx PL$).

A **Tabela 7.1** mostra os valores de deslocamento máximo e tensão máxima equivalente da placa de referência. A **Figura 7.5** mostra o campo de deslocamentos da placa isotrópica de referência, sendo obtido pelo ANSYS APDL®. Conforme ilustrado, o campo de deslocamentos é nulo próximo às bordas, pois a placa é simplesmente apoiada, e à medida que o campo de deslocamentos se aproxima do centro da placa os valores de deslocamento aumentam até atingir o máximo, quando $x = 500 \text{ mm}$ e $y = 1000 \text{ mm}$.

Tabela 7.1. Resultados da geometria de referência

Geometria	L_p (<i>mm</i>)	W_p (<i>mm</i>)	H_p (<i>mm</i>)	w_{max} (<i>mm</i>)	σ_{max} (<i>MPa</i>)
Referência	2000	1000	20	0.6912	13.2264

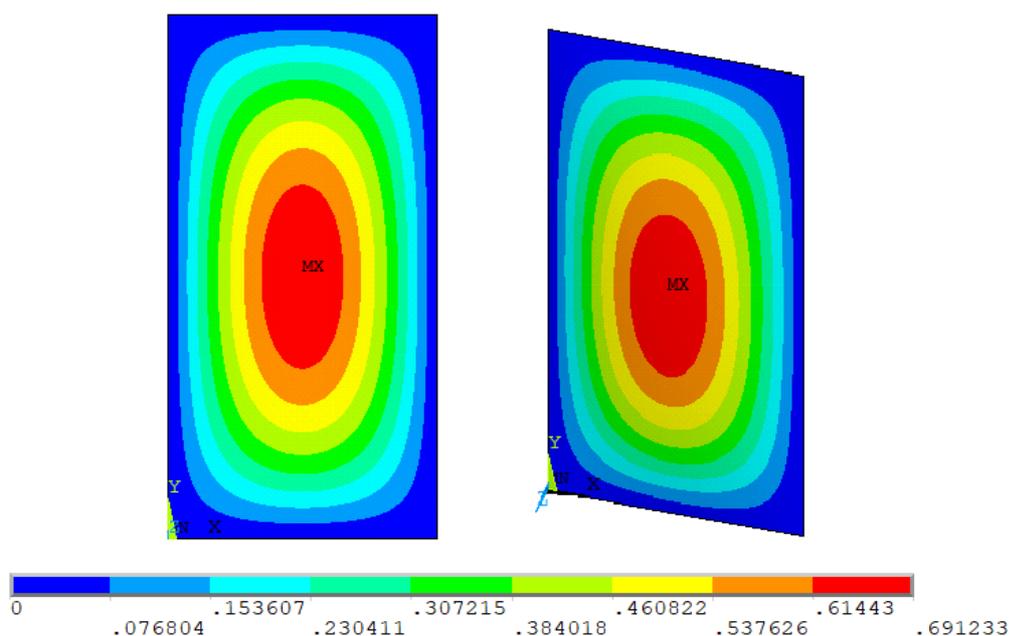


Figura 7.5. Campo de deslocamentos (mm) da geometria de referência

Considerando que o volume total ($4 \cdot 10^7 \text{ mm}^3$) da placa de referência é mantido constante e que a porcentagem (φ) do volume será transformada em enrijecedores, o Algoritmo Genético Híbrido (AGH) foi utilizado para iniciar o processo de otimização.

7.2 OTIMIZAÇÃO POR ALGORITMO GENÉTICO HÍBRIDO (RESTRIÇÃO $h_s \leq 300 \text{ mm}$)

A **Figura 7.6** ilustra o resultado do AGH na otimização da estrutura. Pode-se analisar o comportamento do deslocamento máximo (w_{max}) e da tensão equivalente máxima de von Mises (σ_{max}) da melhor geometria em cada geração, ou seja, da função objetivo mínima. Também é possível verificar o comportamento dos valores médios da função objetivo da população.

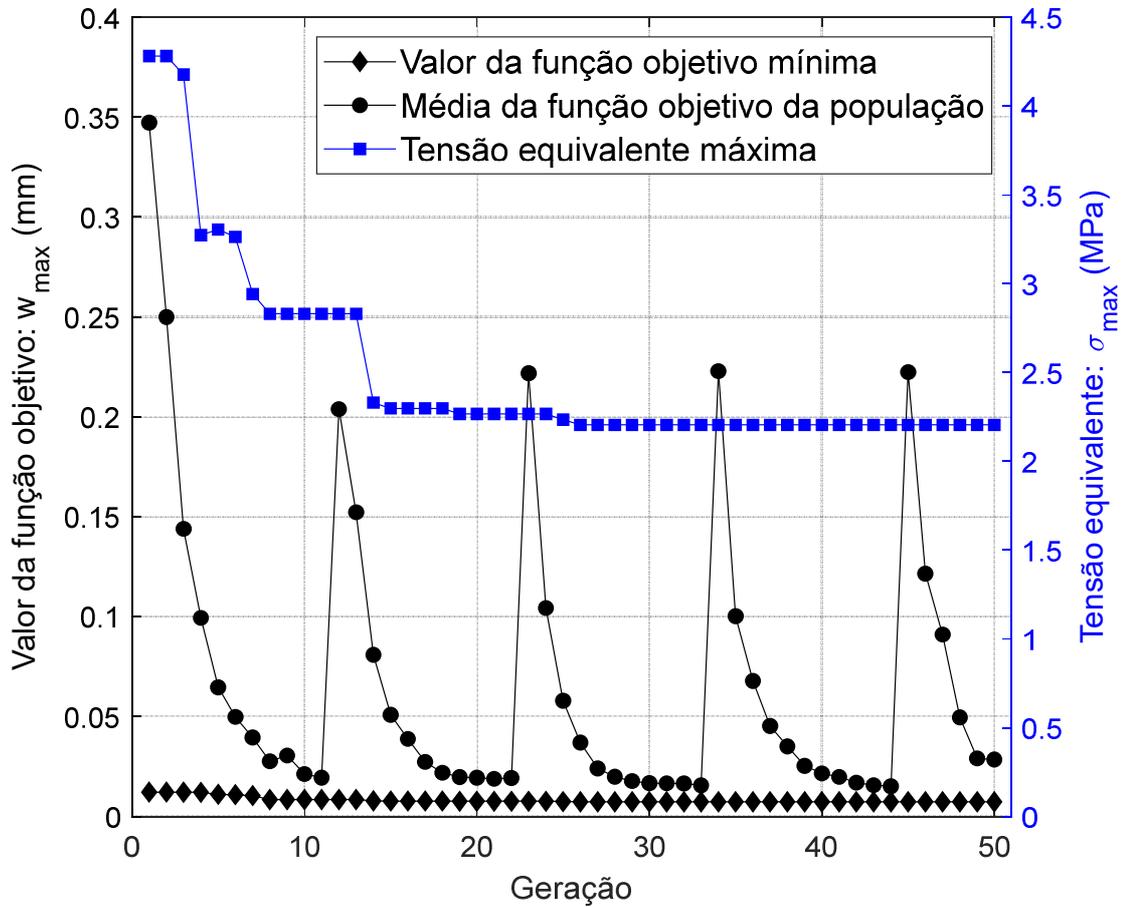


Figura 7.6. Busca da geometria ótima através de Algoritmo Genético Híbrido ($h_s \leq 300 \text{ mm}$)

A Figura 7.6 mostra que o AGH convergiu após 26 gerações. Além disso, os picos que acontecem na média da função objetivo da população mostra a hibridização do algoritmo tentando inserir novos genes na população quando ficou preso em algum mínimo. O AGH foi rodado sucessivamente para verificação do ponto de ótimo global (consultar Apêndice D).

A Tabela 7.2 mostra as geometrias encontradas a cada 10 gerações pelo AGH. A proporção ótima de transformação de volume em enrijecedores encontrada foi de 50% ($\varphi = 0.5$). Além disso, observe que o algoritmo tende a um número mínimo de enrijecedores na longitudinal (N_{ls}) e a um número máximo de enrijecedores na transversal (N_{ts}). Outro fator relevante, é que a altura (h_s) dos enrijecedores aproxima-se da equação de restrição imposta inicialmente ($h_s \leq 300 \text{ mm}$).

Pode-se concluir, então, que o algoritmo está obtendo seu ponto de ótimo na fronteira das equações de restrições impostas para N_{ls} , N_{ts} e h_s . Ou seja, essas equações de restrições estão ativas no ponto de ótimo.

Tabela 7.2. Geometrias ótimas das gerações sucessivas (AGH) para ($h_s \leq 300 \text{ mm}$)

Geração	φ	N_{ls}	N_{ts}	t_s (mm)	h_s (mm)	h_s/t_s (mm)	w_{max} (mm)	σ_{max} (MPa)
1	0.5	7	9	3	292.2567	97.4189	0.0122	4.2807
10	0.4	1	9	4.9141	297.1876	60.4762	0.0084	2.8299
20	0.5	1	10	5.7953	288.9854	49.8656	0.0076	2.2660
30	0.5	1	10	5.5824	299.9505	53.7311	0.0073	2.2042
40	0.5	1	10	5.5824	299.9505	53.7311	0.0073	2.2042
50	0.5	1	10	5.5824	299.9505	53.7311	0.0073	2.2042

A melhor geometria (ver **Figura 7.7**) encontrada pelo AGH possui deslocamento máximo de 0.0073 mm e tensão máxima equivalente de 2.2042 MPa .

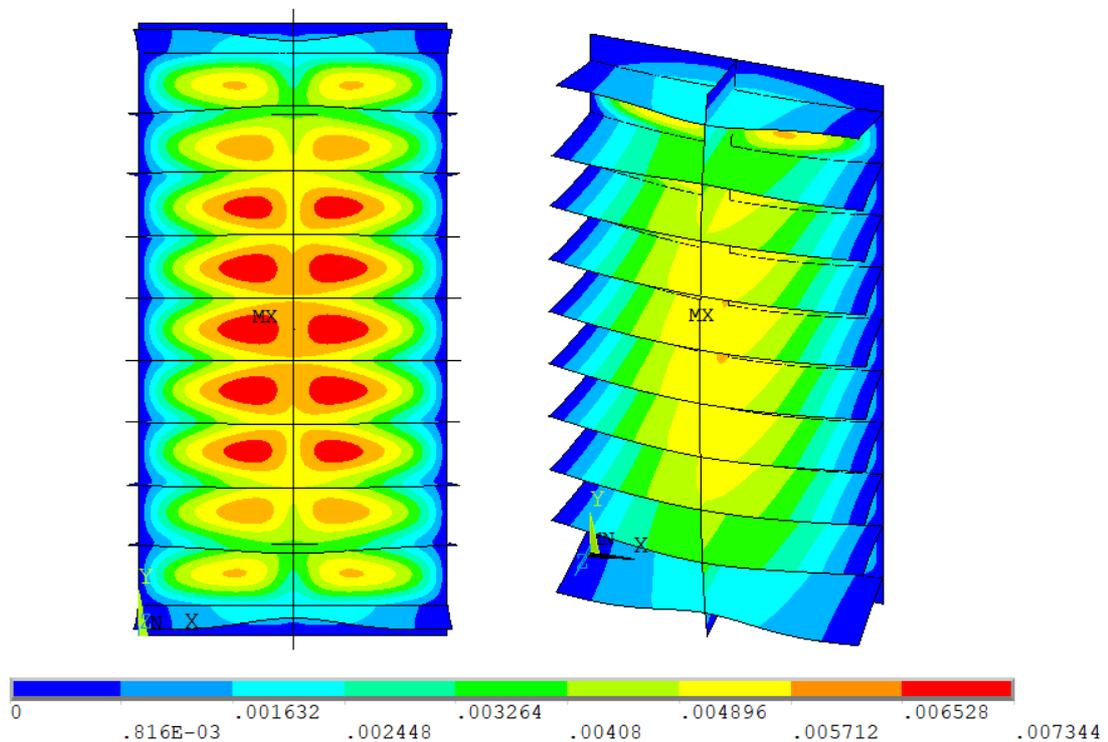


Figura 7.7. Campo de deslocamentos (mm) da geometria ótima através do Algoritmo Genético Híbrido para ($h_s \leq 300 \text{ mm}$)

A relação entre altura e espessura (h_s/t_s) dos enrijecedores dessa geometria foi de 53.7311. Vários autores (JUNIOR, 2019; PINTO, 2019; TROINA, 2017) já mostraram a relação direta que a razão h_s/t_s possui com a diminuição do deslocamento, pois o aumento dessa razão eleva o momento de inércia da seção e conseqüentemente diminui o deslocamento fora do plano.

A **Tabela 7.3** mostra um comparativo entre o resultado obtido pelo AGH e os resultados de outros autores. Os autores pesquisaram placas enrijecidas e os resultados mostram os valores de deslocamento máximo e tensão (quando estudados) para a melhor configuração obtida em cada estudo.

Tabela 7.3. Comparativo de geometrias ótimas

Ref.	Elemento	φ	N_{l_s}	N_{t_s}	h_s/t_s (mm)	w_{max} (mm)	σ_{max} (MPa)
Presente estudo (AGH)	SHELL63	0.5	1	10	53.7311	0.0073	2.2042
(TROINA, 2017)	SHELL93	0.5	2	5	35.03	0.0170	3.8900
(PINTO, 2019)	SHELL281	0.4	2	5	59.409	0.0156	—
(NOGUEIRA, 2019)	SHELL281	0.3	2	3	59.747	0.0145	—

Observando os valores de w_{max} na **Tabela 7.3**, pode-se perceber que o presente estudo conseguiu atingir um valor menor quando comparados aos resultados disponíveis na literatura, provavelmente pelo espaço de busca ter sido maior. Troina (2017) e Pinto (2019) analisaram um número de enrijecedores variando de 2 a 6 e uma fração volumétrica num intervalo de 0.1 a 0.5, ambos limitaram a altura máxima a 300 mm. Nogueira (2019) avaliou o número de enrijecedores variando de 2 a 4 com alturas diferentes (sem restrição máxima) para a fração volumétrica de 0.3.

Todos os autores possuem a mesma placa de referência do presente estudo, com mesmas condições de carga e apoio. Os problemas envolvidos também propõem como condição de restrição manter o volume de referência constante. Por fim, os resultados do AGH sugerem que o algoritmo pode ser utilizado isoladamente na otimização de estruturas de placas com enrijecedores perpendiculares.

7.3 OTIMIZAÇÃO POR ALGORITMO DE MORFOGÊNESE ADAPTATIVA MODIFICADO (NÍVEL 1 COM RESTRIÇÃO $hs \leq 300 \text{ mm}$)

A posição definida pelos enrijecedores na **Figura 7.7** sugere o caminho de carga para a estrutura analisada. Além disso, o algoritmo definiu uma proporção ótima entre volume da base e enrijecedores.

Dessa forma, a posição dos enrijecedores determinada pelo AGH foi utilizada como ponto inicial (posição das sementes) no Algoritmo de Morfogênese Adaptativa Modificado (AMAM). A relação ótima de volumes (base/enrijecedores) foi mantida durante todo o processo de otimização.

Os resultados de otimização por AMAM são divididos e mostrados por NÍVEIS (1, 2, 3) de topologia e por geometrias (A, B). Dessa forma, a nomenclatura ‘NÍVEL 1A’ significa resultado do NÍVEL 1 para a geometria A. O primeiro nível (NÍVEL 1) da otimização por AMAM é a busca pelo ângulo ótimo entre enrijecedores (principal e secundários).

A **Figura 7.8** mostra o deslocamento máximo (mm) e a tensão equivalente máxima (MPa) em relação ao ângulo formado entre veia principal e secundárias da geometria A.

Conforme fora discutido na seção **5.1**, as folhas que possuem uma razão entre comprimento e largura maiores que 1.2 formam apenas uma veia principal. O resultado mostra que esse conceito é válido para o caso analisado apesar da diferença na Condição de Contorno ($C.C.$). Além disso, as veias secundárias podem ser consideradas paralelas e uniformes formando ângulos num intervalo de 25° a 75° entre veia principal e secundárias.

De acordo com a **Figura 7.8**, pode-se identificar que para ângulos menores que 34° , o deslocamento é crescente; a partir de 35° , w_{max} diminui até atingir um valor mínimo para o ângulo de 71° . Outro dado importante, é que o deslocamento permanece quase estável na faixa de 70° a 75° . Por outro lado, a tensão máxima sempre diminui quase linearmente à medida que o ângulo aumenta de 25° para 75° .

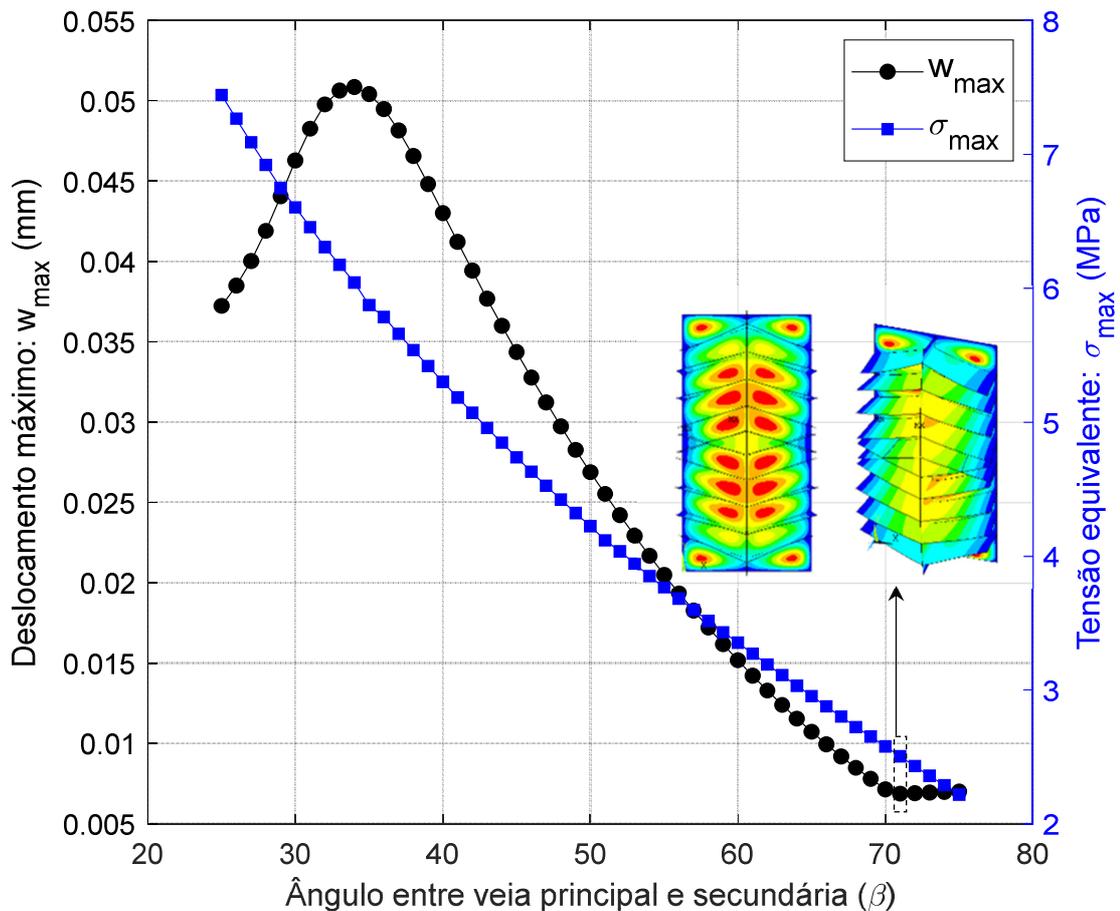


Figura 7.8. Morfogênese adaptativa (NÍVEL 1A) para $h_s \leq 300$ mm

A Tabela 7.4 mostra a configuração da geometria obtida para o menor valor de w_{max} , ou seja, para $\beta = 71^\circ$. A geometria é ilustrada na Figura 7.9 e seu campo de deslocamentos pode ser observado.

Tabela 7.4. Geometria ótima por AMAM (NÍVEL 1A) para $h_s \leq 300$ mm

Geometria	β	N_{princ}	t_{princ} (mm)	N_{sec}	t_{sec} (mm)	h_s (mm)	w_{max} (mm)	σ_{max} (MPa)
NÍVEL 1A	71°	1	5.5824	20	5.2488	299.9505	0.0069	2.5072

Nota: O subíndice 'princ' indica parâmetros geométricos das nervuras principais e o subíndice 'sec' indica parâmetros geométricos das nervuras secundárias. N é número de nervuras, t é espessura e h_s é altura.

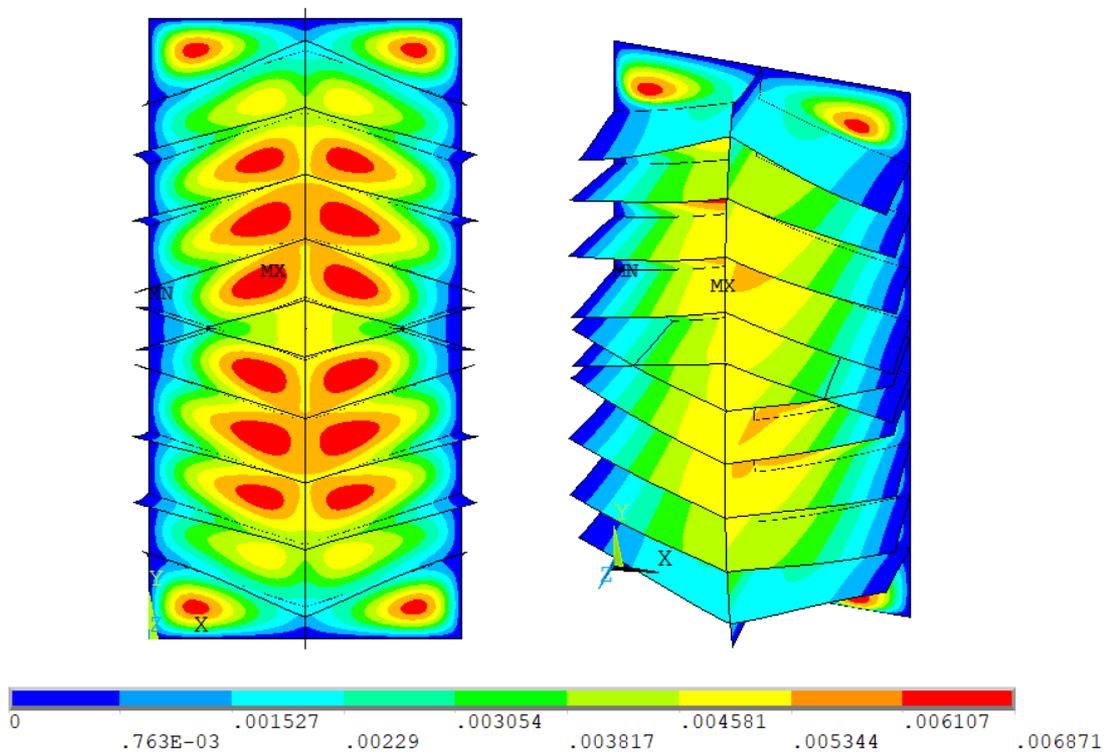


Figura 7.9. Campo de deslocamentos (mm) da geometria ótima através da Morfogênese Adaptativa (NÍVEL 1A) para ($h_s \leq 300 \text{ mm}$)

Analisando a **Figura 7.9**, é possível observar que o AMAM utilizou de simetria para a distribuição das nervuras secundárias. Na natureza, as nervuras crescem sempre na mesma direção, pois as folhas são semelhantes a uma estrutura em balanço, ou seja, só possuem um ponto de apoio. No caso da placa em estudo, a estrutura é apoiada em todas as direções e seu ponto de maior deslocamento antes do enrijecimento por nervuras era o ponto central. Dessa forma, a nervura principal conecta um ponto restrito (apoio) a um ponto fraco (maior deslocamento) e as nervuras secundárias crescem do ponto de apoio em direção ao ponto de maior deslocamento.

Observando o campo de deslocamento, pode-se analisar que o deslocamento máximo não ocorre mais na área central, e que nessa área as nervuras formam um losango que diminui muito o deslocamento nessa região. Utilizando desse princípio, optou-se pela busca de uma nova configuração (geometria B) em que as nervuras se fecham em pares formando losangos, isso permite também validar a metodologia para outra geometria. O

resultado da busca pelo ângulo ótimo utilizando AMAM na geometria B é mostrado na **Figura 7.10**.

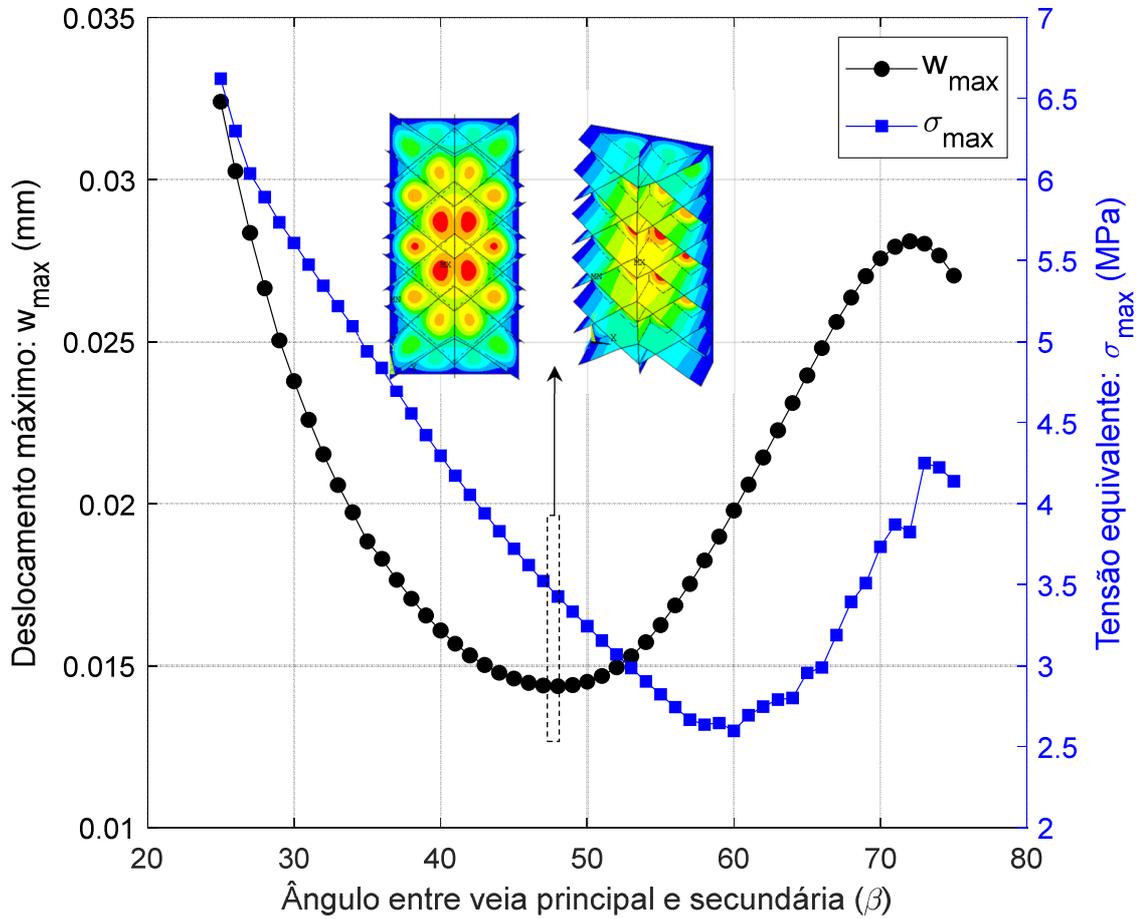


Figura 7.10. Morfogênese Adaptativa (NÍVEL 1B) para ($h_s \leq 300 \text{ mm}$)

A **Tabela 7.5** mostra a configuração da geometria de menor deslocamento máximo (w_{max}). O ângulo entre nervuras é $\beta = 48^\circ$ e o campo de deslocamentos é mostrado na **Figura 7.11**.

Tabela 7.5. Geometria ótima por AMAM (NÍVEL 1B) para $h_s \leq 300 \text{ mm}$

Geometria	β	N_{princ}	t_{princ} (mm)	N_{sec}	t_{sec} (mm)	h_s (mm)	w_{max} (mm)	σ_{max} (MPa)
NÍVEL 1B	48°	1	5.5824	20	4.1254	299.9505	0.0144	3.4272

Observando a **Tabela 7.5** e a **Figura 7.11**, percebe-se que a geometria apresentou $w_{max} = 0.0144 \text{ mm}$ e $\sigma_{max} = 3.4272$. Além disso, é possível observar que a região em torno do losango central apresenta maiores deslocamentos, pois a solicitação é dividida

de forma não uniforme, sendo fácil observar que a maior concentração dos deslocamentos ocorre nas quatro regiões de maior área vermelha na **Figura 7.11**.

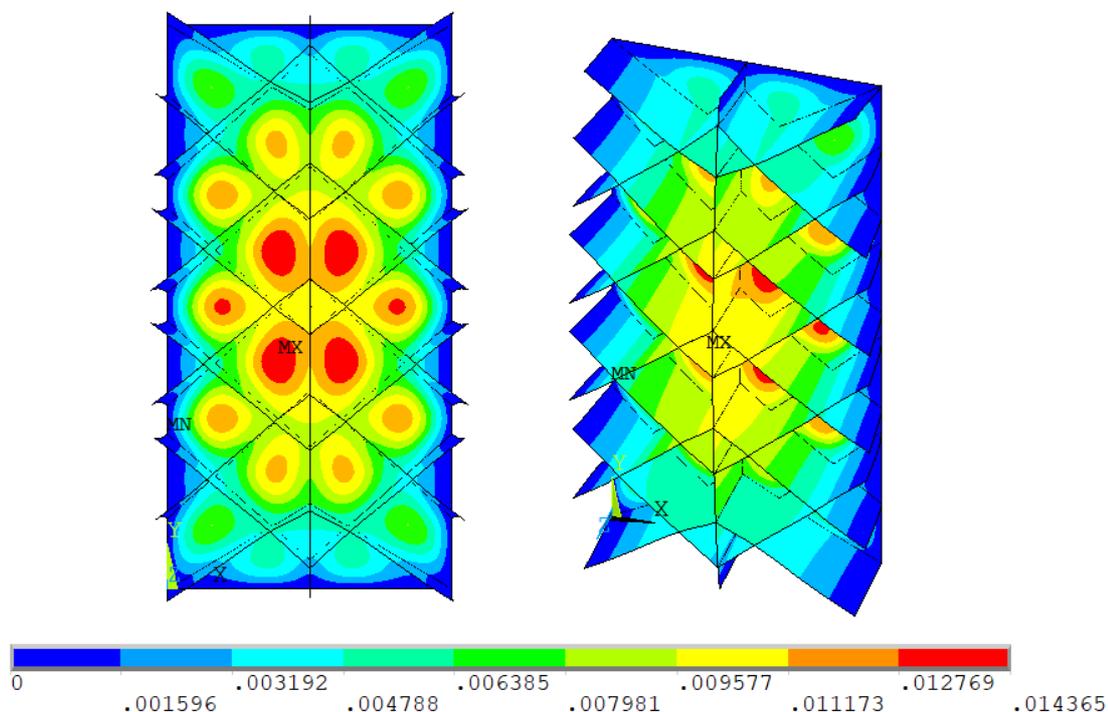


Figura 7.11. Campo de deslocamentos (mm) da geometria ótima através da Morfogênese Adaptativa (NÍVEL 1B) para ($h_s \leq 300 \text{ mm}$)

A **Figura 7.12** faz um comparativo das geometrias obtidas através do AGH e do AMAM (NÍVEL 1A e NÍVEL 1B) em relação a geometria de referência.

A geometria com enrijecedores perpendiculares (**Figura 7.12b**) conseguiu uma redução de 98.94% no deslocamento máximo em relação a geometria de referência (**Figura 7.12a**). A geometria do NÍVEL 1A (**Figura 7.12c**) da Morfogênese Adaptativa reduziu 99% de w_{max} em relação a geometria de referência. E a geometria do NÍVEL 1B (**Figura 7.12d**) da Morfogênese reduziu 97.92% do deslocamento máximo se comparado a geometria de referência.

Para facilitar a visualização, as geometrias otimizadas utilizam um contorno de cores igual (com limite superior do deslocamento de 1/20 da geometria de referência). Dessa forma, fica ainda mais evidente o quanto o campo de deslocamentos reduziu consideravelmente.

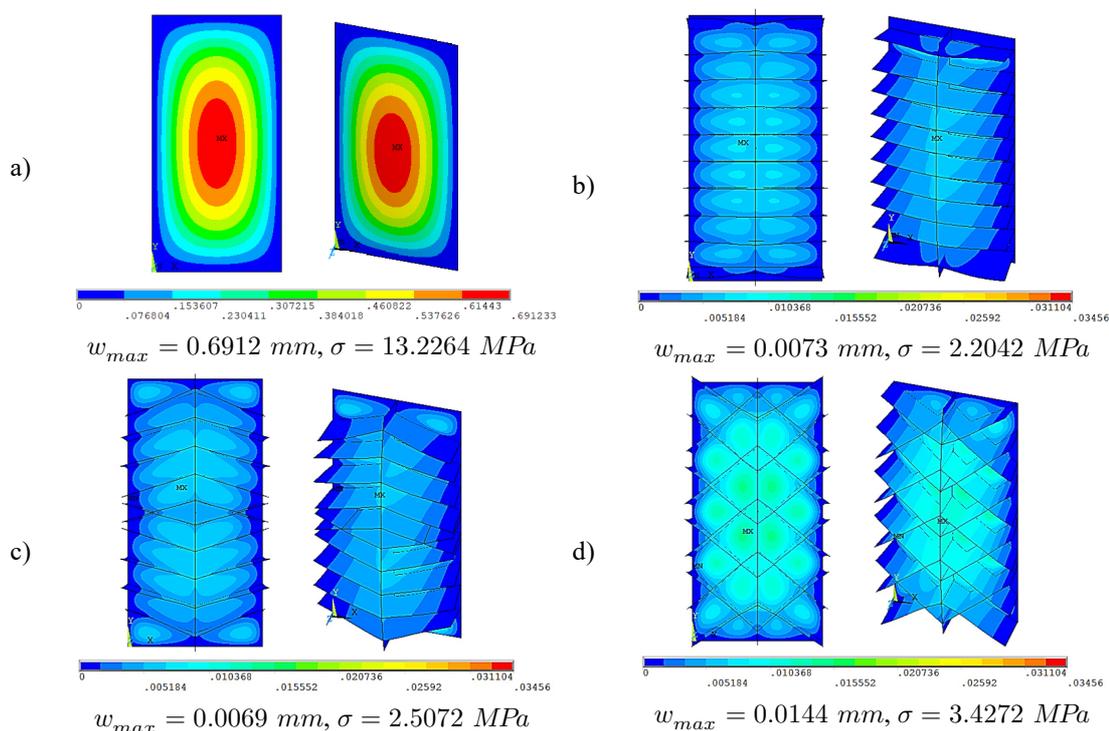


Figura 7.12. Campo de deslocamentos ($h_s \leq 300 \text{ mm}$). a) placa de referência, b) AGH, c) AMAM NÍVEL 1A, d) AMAM NÍVEL 1B.

Como pode-se verificar, os resultados apresentados (AGH e AMAM) mostraram redução significativa no deslocamento máximo (w_{max}) quando comparados à geometria de referência. A tensão de von Mises máxima também conseguiu ser reduzida consideravelmente em todas as geometrias.

Um detalhe importante, é que todos os enrijecedores possuem a mesma altura $h_s = 299.9505 \text{ mm}$. Esse valor se aproxima da restrição imposta ($h_s \leq 300 \text{ mm}$) devido à relação direta do aumento da altura com a redução do deslocamento. Essa restrição também foi proposta por outros autores na literatura (PINTO, 2019; TROINA, 2017).

Apesar do resultado satisfatório já no início do processo de otimização, algo que é aconselhável de ser considerado é que a altura de 300 mm pode interferir em um projeto de um compartimento interno utilizável formado por placas enrijecidas (um compartimento de um navio ou de uma aeronave, por exemplo). Além disso, altas relações de h_s/t_s podem gerar perda de estabilidade lateral da estrutura. Portanto, optou-se por alterar a restrição $h_s \leq 300 \text{ mm}$ para $h_s \leq 150 \text{ mm}$.

7.4 OTIMIZAÇÃO DAS GEOMETRIAS A E B (RESTRIÇÃO $h_s \leq 150 \text{ mm}$)

A **Figura 7.13** mostra o resultado do AGH após definir a nova restrição de altura máxima, pode-se observar que o algoritmo converge após 17 gerações. Na **Tabela 7.6** é possível verificar a melhor geometria encontrada e a **Figura 7.14** ilustra o campo de deslocamentos dessa mesma geometria.

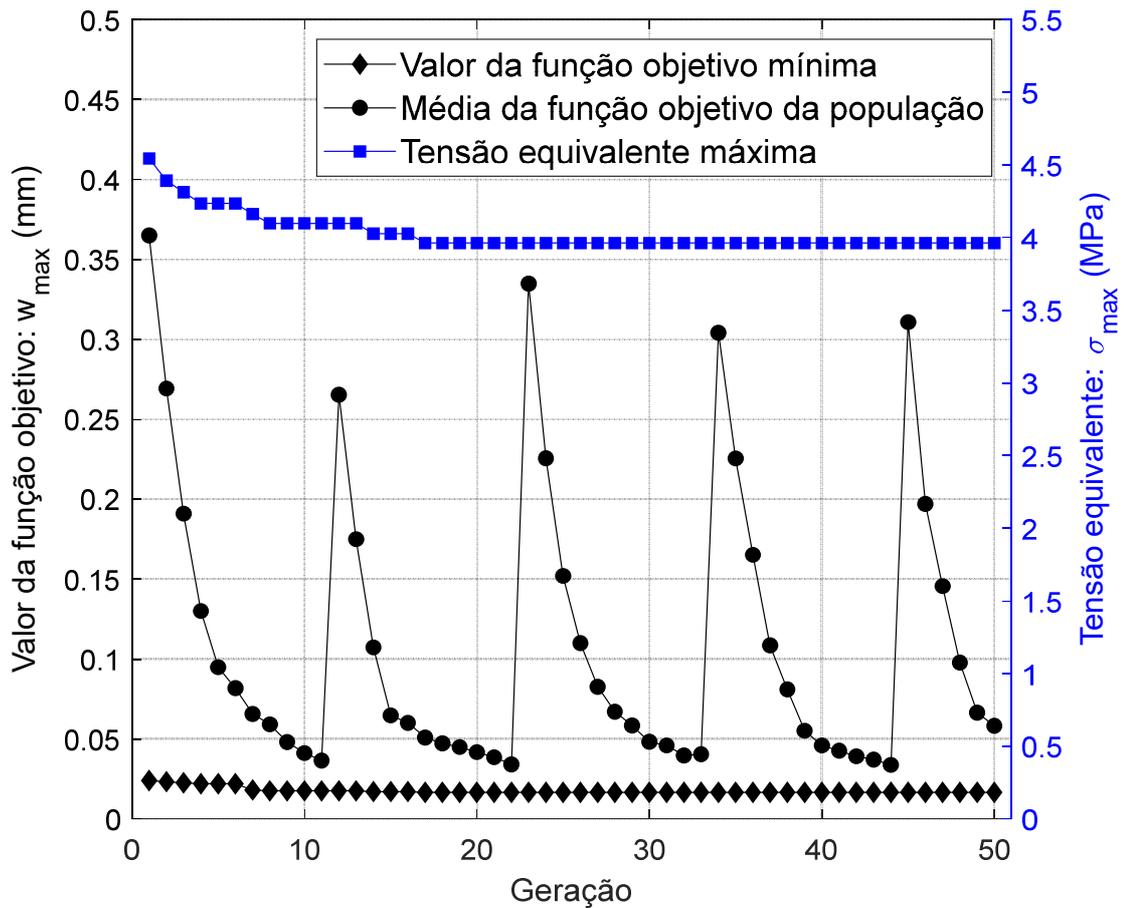


Figura 7.13. Busca da geometria ótima através de Algoritmo Genético Híbrido ($h_s \leq 150 \text{ mm}$)

A melhor geometria encontrada possui $h_s = 148.1665 \text{ mm}$, o que já era esperado, pois conforme discutido anteriormente, a altura dos enrijecedores é um parâmetro que influencia significativamente na diminuição do deslocamento. O deslocamento máximo da melhor geometria foi $w_{max} = 0.0166 \text{ mm}$ e a tensão máxima de von Mises foi $\sigma_{max} = 3.9630$.

Tabela 7.6. Geometria ótima por AGH para $h_s \leq 150 \text{ mm}$

Geração	φ	N_{ts}	N_{ts}	t_s (mm)	h_s (mm)	h_s/t_s (mm)	w_{max} (mm)	σ_{max} (MPa)
50	0.5	1	10	11.3561	148.1665	13.0473	0.0166	3.9630

Analisando o campo de deslocamentos (**Figura 7.14**), pode-se verificar que a região próxima às bordas possui deslocamentos muito pequenos, mas à medida que se aproxima da região central esses valores aumentam até atingir o máximo.

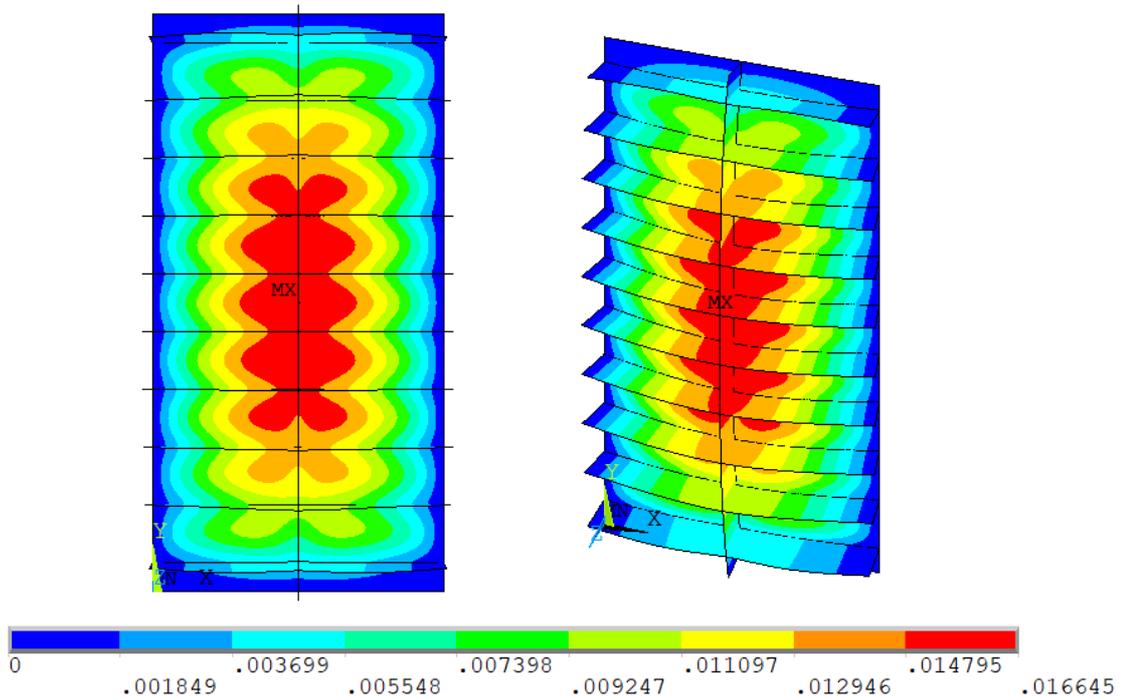


Figura 7.14. Campo de deslocamento (mm) da geometria ótima através do Algoritmo Genético Híbrido para $h_s \leq 150 \text{ mm}$

Taxas maiores de mutação (5%) podem ser utilizadas no AGH e também forneceram bons resultados (consultar apêndice E). Após essa primeira parte, a otimização pelo AMAM foi iniciada, utilizando os pontos de germinação definidos pelo AGH.

A **Figura 7.15** mostra o resultado do NÍVEL 1A da Morfogênese Adaptativa. Observe no gráfico que para ângulos menores que 33° , o comportamento do deslocamento não é intuitivo. A melhor geometria foi definida para o ângulo entre veias principais e secundárias igual a $\beta = 75^\circ$.

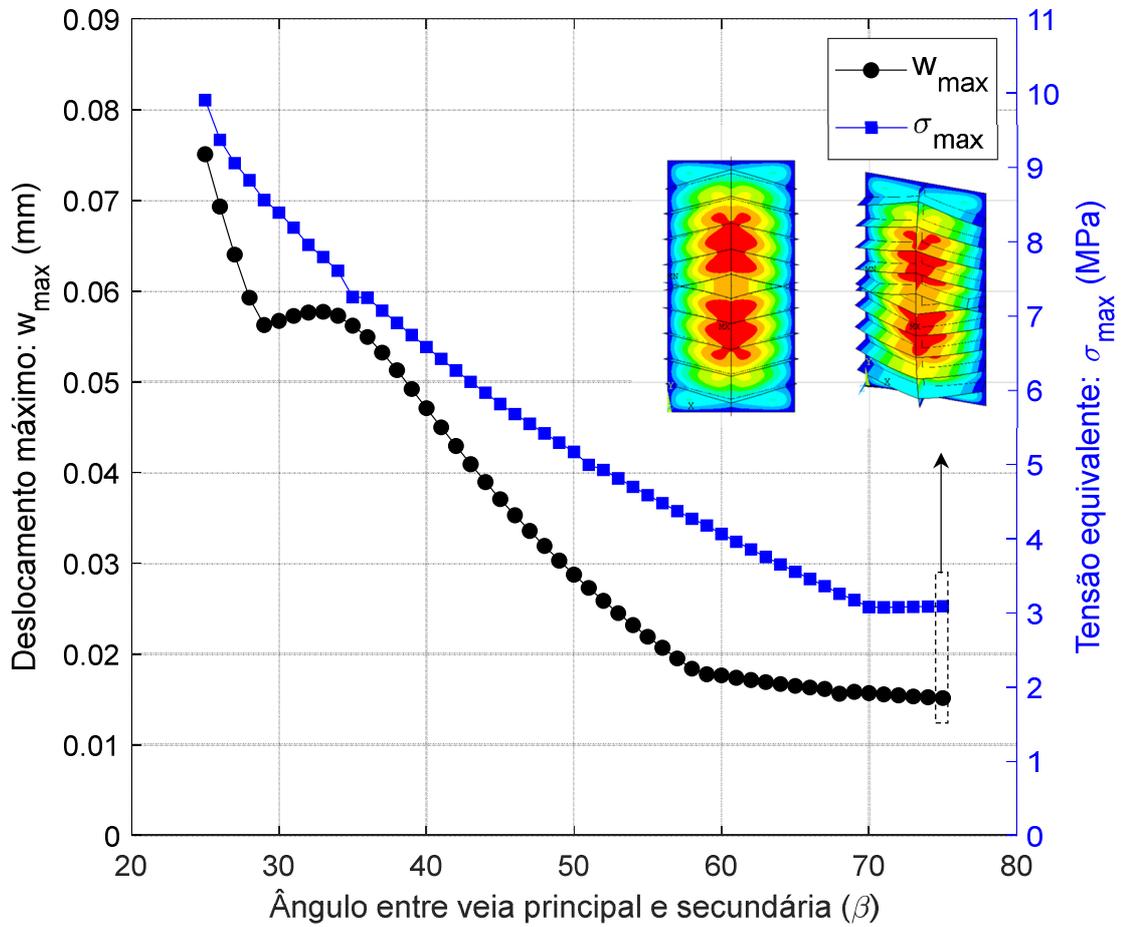


Figura 7.15. Morfogenese Adaptativa (NÍVEL 1A) para $h_s \leq 150 \text{ mm}$

A **Tabela 7.7** mostra os valores dos parâmetros geométricos como espessura da veia principal (t_{princ}) e secundária (t_{sec}) e altura dos enrijecedores (h_s) da geometria definida. A **Figura 7.16** mostra o campo de deslocamentos da placa enrijecida. É possível verificar que a geometria encontrada obteve $w_{max} = 0.0151 \text{ mm}$ e $\sigma_{max} = 3.0860 \text{ MPa}$.

Tabela 7.7. Geometria ótima por AMAM (NÍVEL 1A) para $h_s \leq 150 \text{ mm}$

Geometria	β	N_{princ}	t_{princ} (mm)	N_{sec}	t_{sec} (mm)	h_s (mm)	w_{max} (mm)	σ_{max} (MPa)
NÍVEL 1A	75°	1	11.3561	20	10.8446	148.1665	0.0151	3.0860

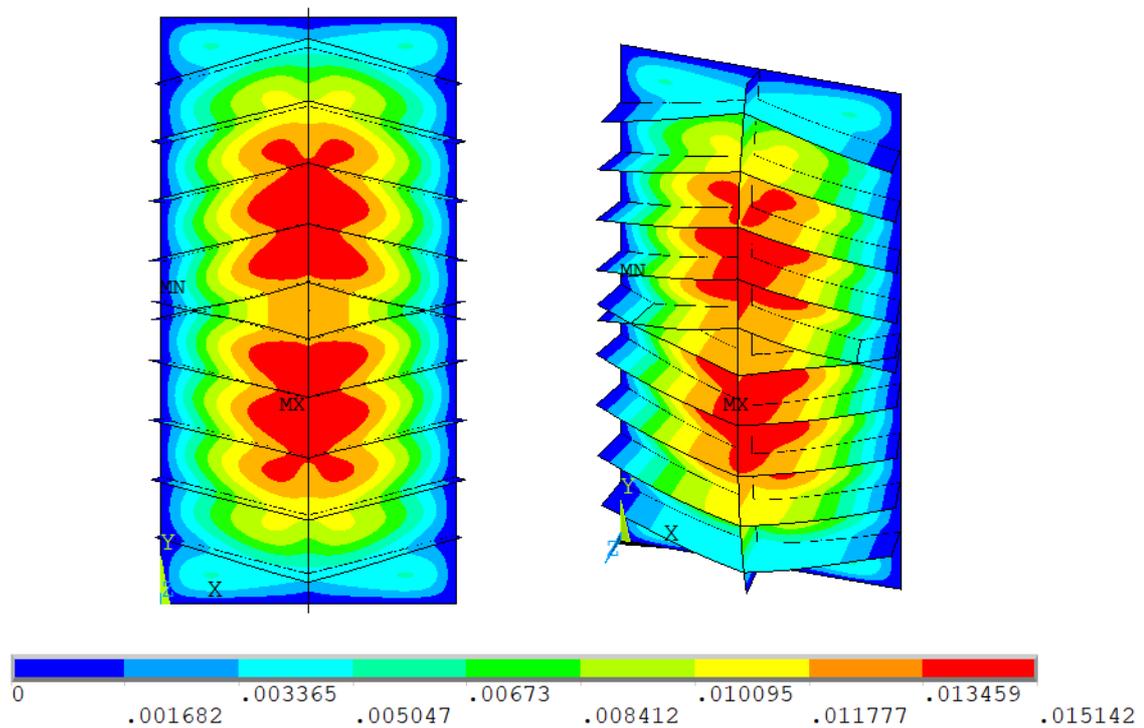


Figura 7.16. Campo de deslocamentos (mm) da geometria ótima através da Morfogênese Adaptativa (NÍVEL 1A) para $h_s \leq 150 \text{ mm}$

Os mesmos procedimentos foram feitos para o NÍVEL 1B. Dessa forma, a **Figura 7.17** mostra o resultado do deslocamento máximo e tensão máxima equivalente em relação ao ângulo (β) entre veias principal e secundárias.

As curvas formadas pelos valores de deslocamento e tensão são do tipo decrescente, todavia para ângulos maiores do que 56° começam a apresentar comportamentos distintos.

Desse modo, para a geometria B não é recomendável utilizar ângulos pequenos entre veia principal e secundária. Por outro lado, ângulos maiores geram resultados de tensão e deslocamento mais estáveis, apesar de não serem intuitivos.

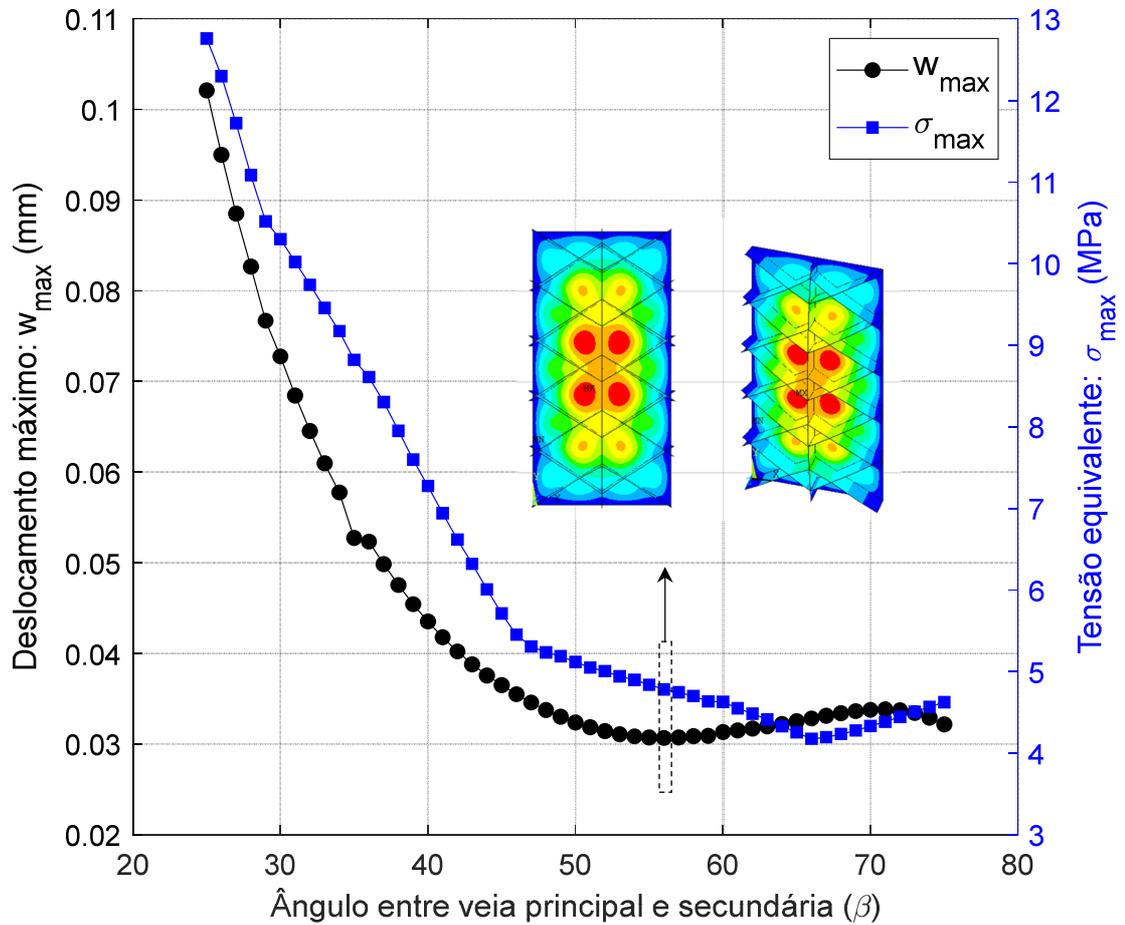


Figura 7.17. Morfogenese Adaptativa (NÍVEL 1B) para $h_s \leq 150 \text{ mm}$

A melhor geometria foi definida para $\beta = 56^\circ$ e suas informações de geometria e análise estática são mostrados na **Tabela 7.8**. O campo de deslocamentos da geometria também é ilustrado na **Figura 7.18**. A geometria possui $w_{max} = 0.0307 \text{ mm}$ e $\sigma_{max} = 4.7819 \text{ MPa}$.

Tabela 7.8. Geometria ótima por AMAM (NÍVEL 1B) para $h_s \leq 150 \text{ mm}$

Geometria	β	N_{princ}	t_{princ} (mm)	N_{sec}	t_{sec} (mm)	h_s (mm)	w_{max} (mm)	σ_{max} (MPa)
NÍVEL 1B	56°	1	11.3561	20	9.3077	148.1665	0.0307	4.7819

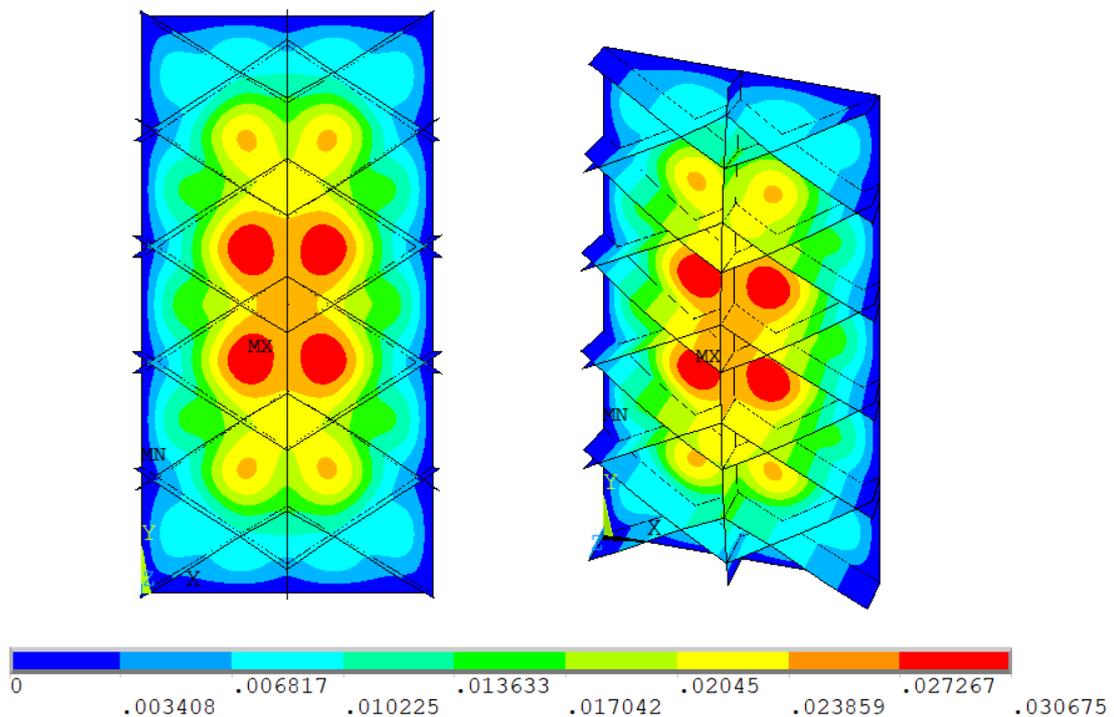


Figura 7.18. Campo de deslocamentos (mm) da geometria ótima através da Morfogênese Adaptativa (NÍVEL 1B) para $h_s \leq 150 \text{ mm}$

A **Figura 7.19** mostra novamente um comparativo entre as geometrias obtidas, agora para $h_s \leq 150 \text{ mm}$. É possível observar que mesmo com a diminuição da altura máxima, os resultados obtidos possibilitaram uma redução no deslocamento em relação à geometria de referência (**Figura 7.19a**) de 97.6% (**Figura 7.19b**), de 97.82% (**Figura 7.19c**) e de 95.56% (**Figura 7.19d**), respectivamente.

Todos os casos apresentam uma tensão de von Mises máxima menor que a tensão máxima obtida na placa de referência. As reduções também são satisfatórias e consideráveis, sendo de 70%, 76.7% e 63.8% para as geometrias mostradas na (**Figura 7.19b**), (**Figura 7.19c**) e (**Figura 7.19d**), respectivamente.

Comparando a **Figura 7.19b** com a **Figura 7.19c**, pode-se notar que, utilizando uma quantidade equivalente de reforçadores secundários, os resultados obtidos com AMAM foram melhores do que os resultados obtidos com o AGH, tanto em termos de menor w_{max} quanto em termos de menor σ_{max} .

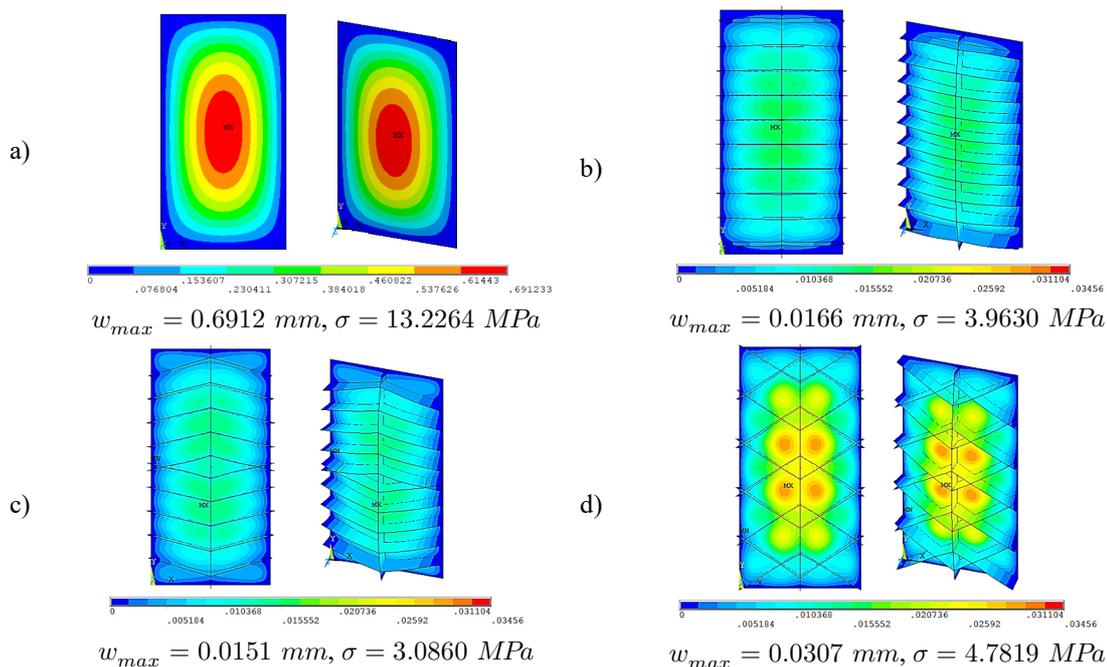


Figura 7.19. Campo de deslocamentos ($h_s \leq 150 \text{ mm}$). a) placa de referência, b) AGH, c) AMAM NÍVEL 1A, d) AMAM NÍVEL 1B.

Os próximos resultados são referentes ao NÍVEL 2 do AMAM, que é a fase em que se utiliza a otimização robusta para a modificação do espaçamento entre enrijecedores e para obtenção de um campo de deslocamentos com menor variabilidade. Essa etapa é realizada para as geometrias mostradas em (Figura 7.19c e Figura 7.19d).

A Tabela 7.9 mostra a mudança no deslocamento máximo e na tensão equivalente máxima após o NÍVEL 2A.

Tabela 7.9. Geometria ótima por AMAM (NÍVEIS 1A/2A) para $h_s \leq 150 \text{ mm}$

Geometri a	β	N_{princ}	t_{princ} (mm)	N_{sec}	t_{sec} (mm)	h_s (mm)	w_{max} (mm)	σ_{max} (MPa)
NÍVEL 1A	75°	1	11.3561	20	10.8446	148.1665	0.0151	3.0860
NÍVEL 2A	75°	1	11.3561	20	10.8446	148.1665	0.0131	2.9118

Pode-se verificar que o deslocamento máximo diminuiu 13.2% e a tensão máxima reduziu aproximadamente 5.6% em relação ao nível anterior. Além disso, o campo de deslocamentos aparece de forma mais homogênea e uniforme (ver Figura 7.20).

A **Figura 7.20** mostra a mudança no campo de deslocamentos quando as veias secundárias são mudadas de posição na coordenada de encontro com a veia principal.

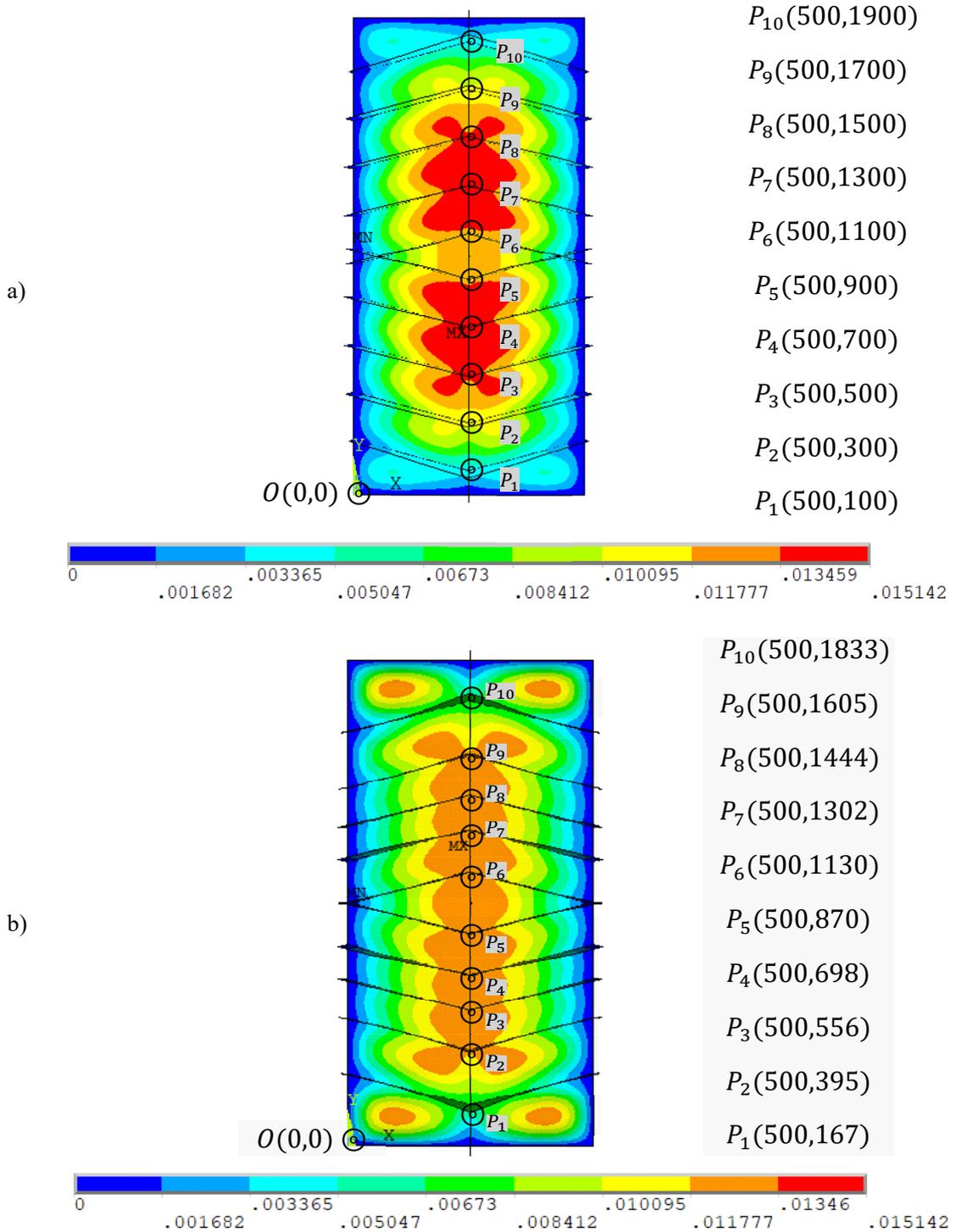


Figura 7.20. Campo de deslocamentos da geometria ótima através da Morfogênese Adaptativa para $h_s \leq 150$ mm. a) NÍVEL 1A, b) NÍVEL 2A

Para a geometria B, a **Tabela 7.10** mostra os resultados após o NÍVEL 2B e a **Figura 7.21** mostra a mudança no campo de deslocamentos da geometria B.

Tabela 7.10. Geometria ótima por AMAM (NÍVEIS 1B/2B) para $h_s \leq 150 \text{ mm}$

Geometria	β	N_{princ}	t_{princ} (<i>mm</i>)	N_{sec}	t_{sec} (<i>mm</i>)	h_s (<i>mm</i>)	w_{max} (<i>mm</i>)	σ_{max} (<i>MPa</i>)
NÍVEL 1B	56°	1	11.3561	20	9.3077	148.1665	0.0307	4.7819
NÍVEL 2B	56°	1	11.3561	20	9.3077	148.1665	0.0204	3.9865

Após o processo de otimização robusta, é possível observar uma redução de 33.55% no deslocamento máximo e uma diminuição de 16.6% na tensão máxima de von Mises em relação ao nível 1.

Pode-se também observar que após essa etapa de otimização, o campo de deslocamentos nas duas geometrias possui menor variabilidade (ver **Figura 7.20** e **Figura 7.21**) devido à redução do desvio padrão. Ademais, o processo de distribuição do fluxo de energia de deformação evita concentrações de tensão na estrutura e conseqüentemente melhora a capacidade de carga.

O NÍVEL 2 de otimização utilizou o Algoritmo de Otimização Robusta, conforme mostrado na seção 6.4. Os resultados da otimização robusta serão discutidos separadamente (na seção 7.5), visto que o procedimento pode ser desenvolvido de forma isolada como método de otimização.

Após o NÍVEL 2, deve-se ir para o último nível de otimização. O NÍVEL 3 é a etapa em que a relação entre a espessura da veia principal e secundárias é analisada. Esse nível tem o objetivo de diminuir a tensão máxima de von Mises na placa. Como a geometria já se encontra no último nível e a altura dos enrijecedores (148.1665 *mm*) é muito próxima do limite estabelecido, optou-se por ajustá-la para $h_s = 150 \text{ mm}$.

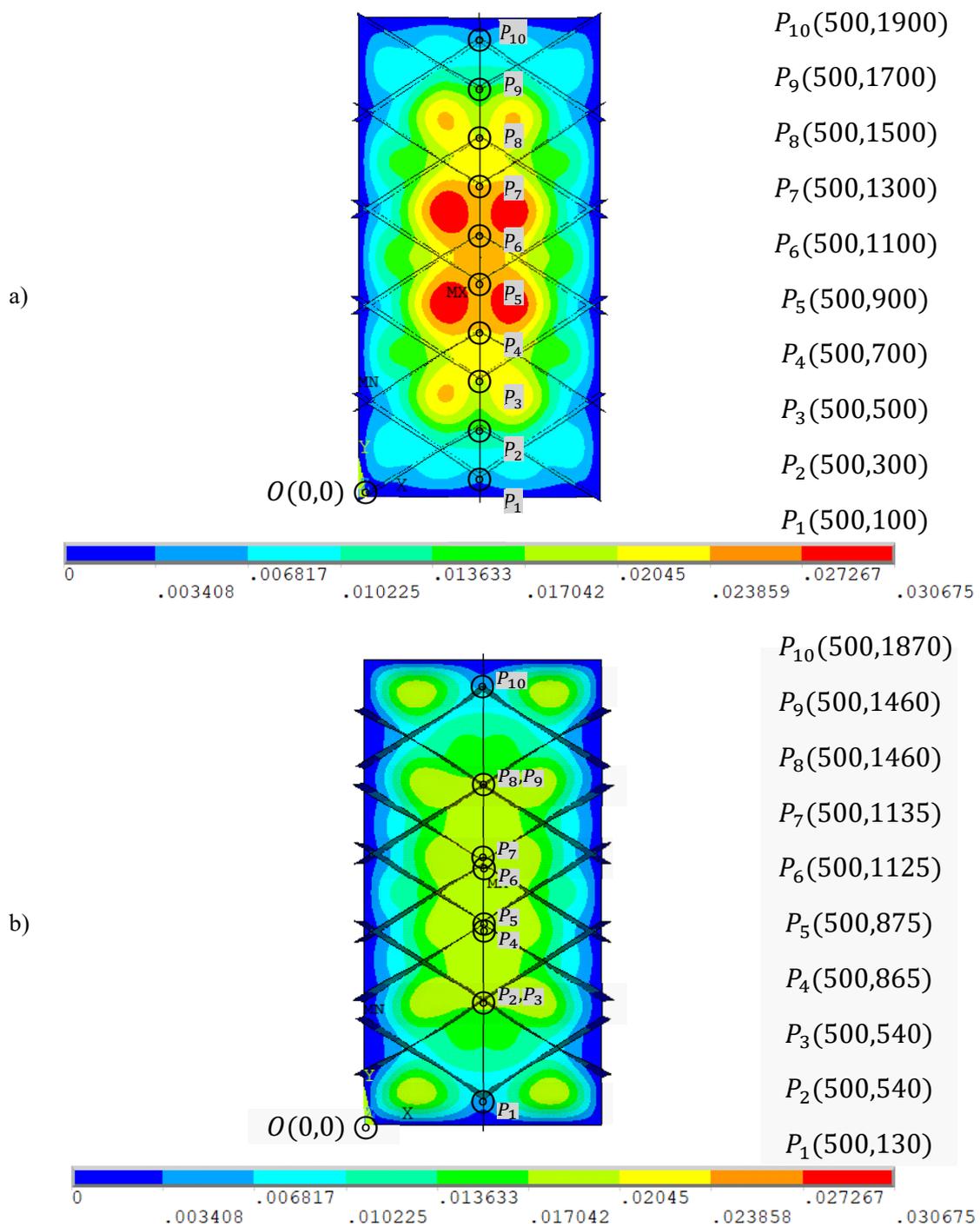


Figura 7.21. Campo de deslocamentos da geometria ótima através da Morfogênese Adaptativa para $h_s \leq 150 \text{ mm}$. a) NÍVEL 1B, b) NÍVEL 2B

A **Figura 7.22** mostra o resultado do NÍVEL 3A, a razão (rt) entre a espessura da veia principal (t_{princ}) e a espessura da veia secundária (t_{sec}) é relacionada com o deslocamento máximo (w_{max}) e a tensão máxima de von Mises (σ_{max}). É possível observar que à medida que a razão rt aumenta, os valores de deslocamento e tensão aumentam quase que linearmente para valores de rt maiores que 1. Deste modo, a razão (rt) que mais reduz a tensão (σ_{max}) para a geometria A vale 1, ou seja, todas as veias possuem a mesma espessura.

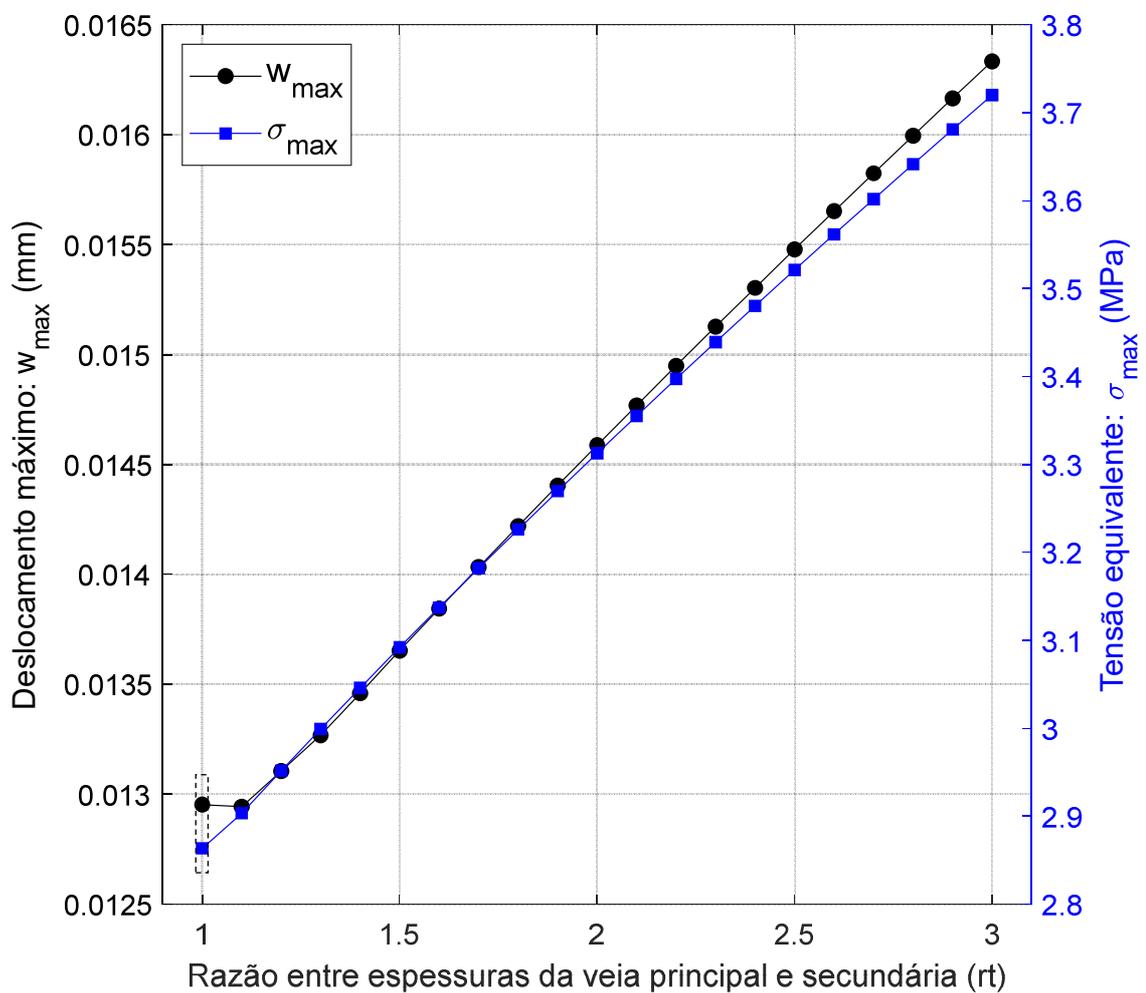


Figura 7.22. Morfogênese adaptativa (NÍVEL 3A) para $h_s \leq 150$ mm

A **Tabela 7.11** mostra a evolução dos resultados da geometria A para todos os níveis de otimização do AMAM.

Tabela 7.11. Geometria ótima por AMAM (NÍVEIS 1A/2A/3A) para $h_s \leq 150 \text{ mm}$

Geometria	β	N_{princ}	t_{princ} (<i>mm</i>)	N_{sec}	t_{sec} (<i>mm</i>)	h_s (<i>mm</i>)	w_{max} (<i>mm</i>)	σ_{max} (<i>MPa</i>)
NÍVEL 1A	75°	1	11.3561	20	10.8446	148.1665	0.0151	3.0860
NÍVEL 2A	75°	1	11.3561	20	10.8446	148.1665	0.0131	2.9118
NÍVEL 3A	75°	1	10.7938	20	10.7938	150.0000	0.0129	2.8634

Pode-se observar que a geometria final possui espessura da veia principal igual a 10.7938 *mm* e espessura das veias secundárias também igual a 10.7938 *mm*. Isso possibilitou um deslocamento máximo igual a 0.0129 *mm* e uma tensão máxima igual a 2.8634 *MPa*.

O resultado do NÍVEL 3 para a geometria B é mostrado na **Figura 7.23**. É possível verificar que também para esse caso, à medida que a razão (rt) aumenta, o deslocamento e a tensão também aumentam, sendo que a melhor geometria é obtida quando todos os enrijecedores (principal e secundários) possuem a mesma espessura ($rt = 1$).

A **Tabela 7.12** faz um comparativo entre os níveis de otimização do AMAM da geometria B. Pode-se perceber a diminuição do deslocamento máximo e da tensão máxima à medida que cada nível é executado. Observa-se que a geometria após o último nível possui espessura para todos os enrijecedores ($t_{princ} = t_{sec}$) igual a 9.4817 *mm*, o deslocamento máximo vale 0.0202 *mm* e a tensão máxima vale 3.8444 *MPa*.

Os resultados mostram que a tensão máxima é minimizada através da relação unitária entre as áreas dos enrijecedores principais e secundários. Talvez o resultado não seja intuitivo, afinal, poderia se esperar maiores espessuras nas veias principais. Contudo, isso pode ser explicado pelo fato de que a *C.C.* na estrutura é do tipo simplesmente apoiada, diferentemente das folhas na natureza, que são engastadas no caule e livres na extremidade.

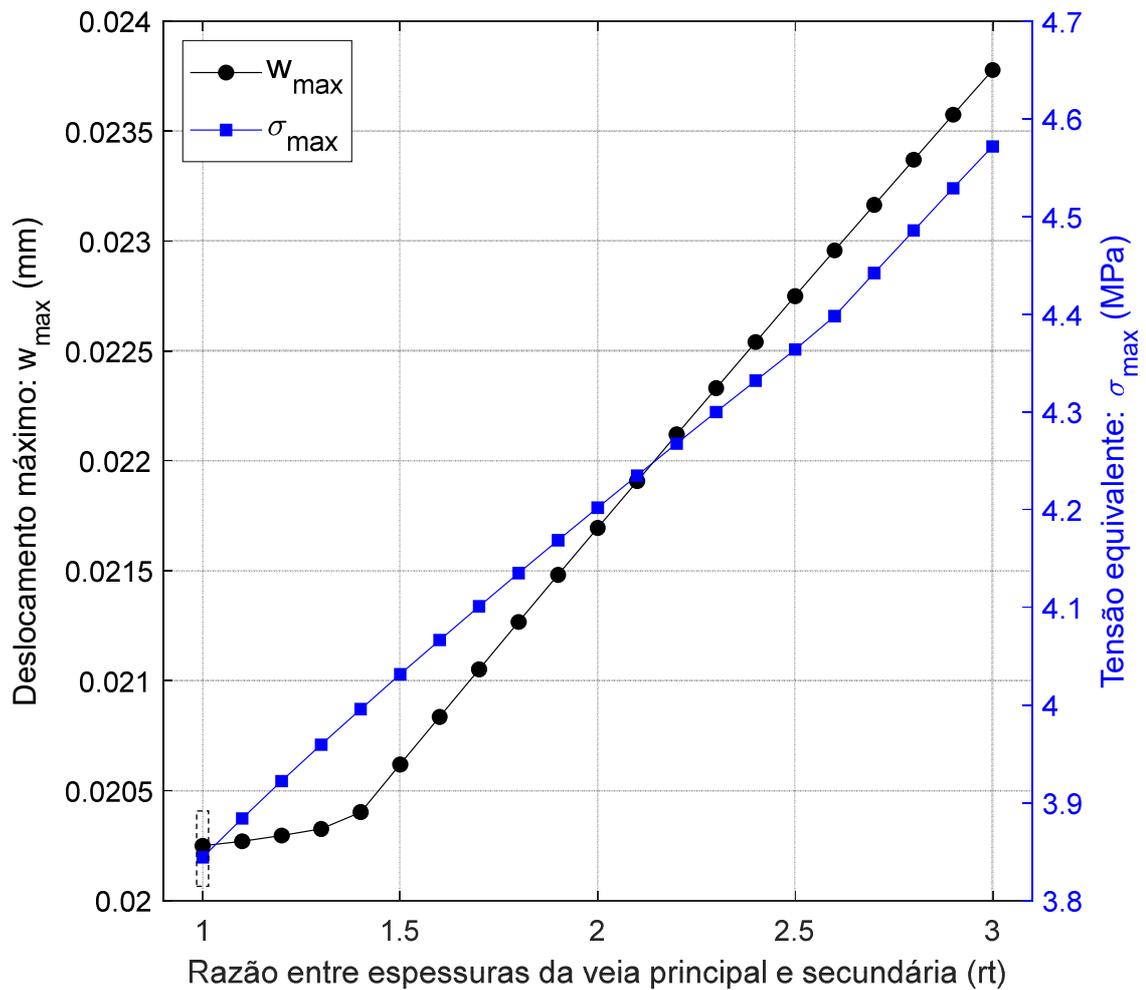


Figura 7.23. Morfogênese adaptativa (NÍVEL 3B) para $h_s \leq 150 \text{ mm}$

Tabela 7.12. Geometria ótima por AMAM (NÍVEIS 1B/2B/3B) para $h_s \leq 150 \text{ mm}$

Geometria	β	N_{princ}	t_{princ} (mm)	N_{sec}	t_{sec} (mm)	h_s (mm)	w_{max} (mm)	σ_{max} (MPa)
NÍVEL 1B	56°	1	11.3561	20	9.3077	148.1665	0.0307	4.7819
NÍVEL 2B	56°	1	11.3561	20	9.3077	148.1665	0.0204	3.9865
NÍVEL 3B	56°	1	9.4817	20	9.4817	150.0000	0.0202	3.8444

Por fim, a Figura 7.24 mostra um comparativo entre o campo de deslocamentos da placa de referência (Figura 7.24a), da geometria obtida por AGH (Figura 7.24b) e das geometrias A (Figura 7.24c) e B (Figura 7.24d) após o NÍVEL 3 do AMAM. Para facilitar a visualização, as geometrias otimizadas utilizam um contorno de cores igual (com limite superior do deslocamento de 1/20 da geometria de referência).

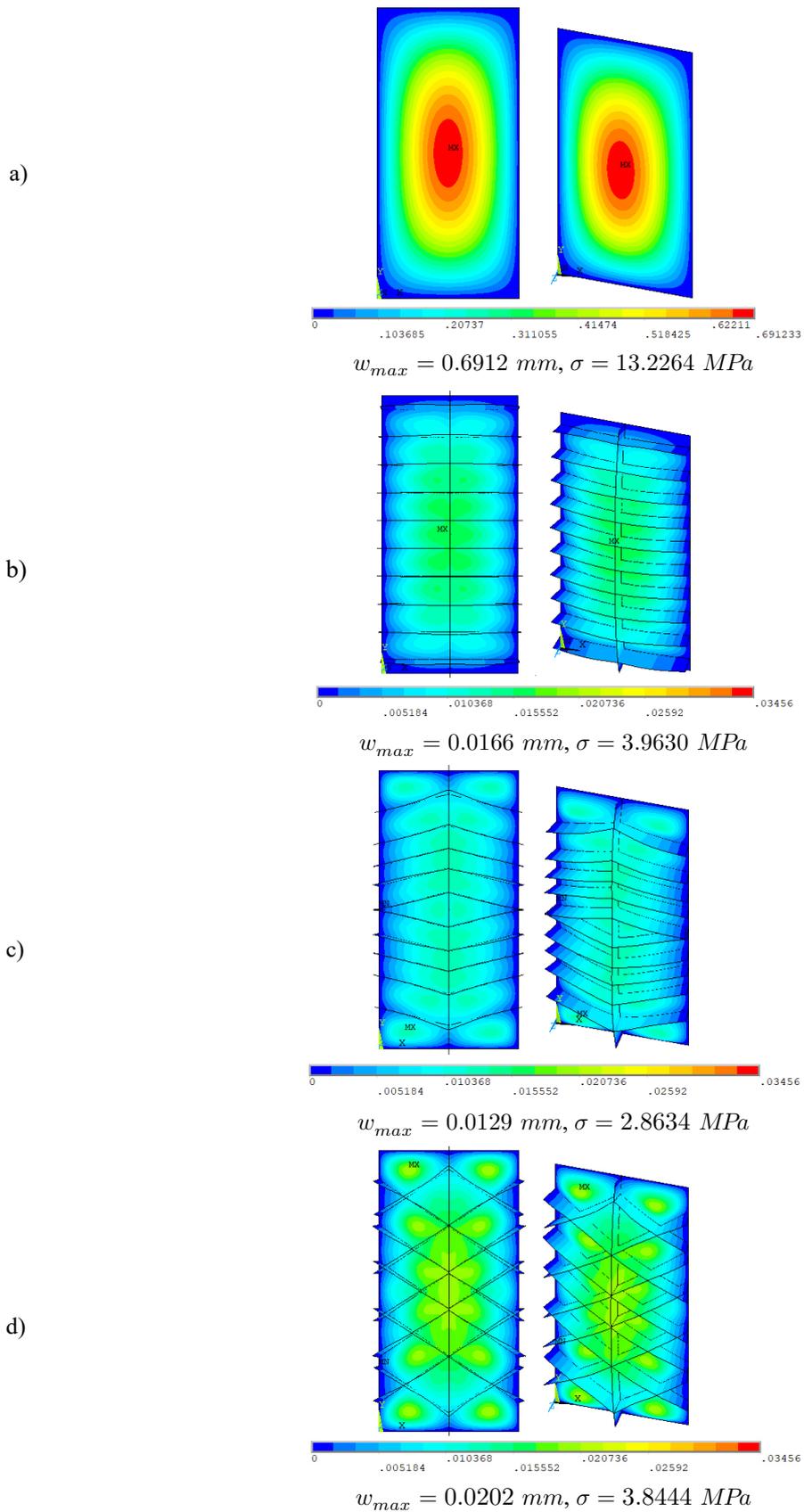


Figura 7.24. Campo de deslocamentos ($h_s \leq 150 \text{ mm}$). a) Placa de referência, b) AGH (enrijecedores perpendiculares), c) NÍVEL 3A, d) NÍVEL 3B

Os resultados finais mostram que o campo de deslocamento diminuiu de forma satisfatória. Observa-se também que a geometria otimizada pelo AGH (com enrijecedores perpendiculares) obteve bom desempenho em relação à placa de referência. O seu deslocamento máximo reduziu 97.6% e sua tensão máxima diminuiu 70%.

Das geometrias otimizadas pelo AMAM, pode-se verificar que a diminuição do deslocamento máximo da geometria A em relação à placa de referência foi de 98.13% e a tensão máxima diminuiu 78.35%. Do mesmo modo, a geometria B reduziu w_{max} em aproximadamente 97.08% e diminuiu a tensão máxima em 70.93%.

De acordo com o comparativo mostrado (mais detalhadamente) na **Figura 7.25**, é válido observar que os resultados utilizando enrijecedores que se adaptam como nervuras de folhas (AMAM) são melhores em pelo menos um objetivo/restrrição (deslocamento ou tensão) quando comparados aos enrijecedores perpendiculares (AGH).

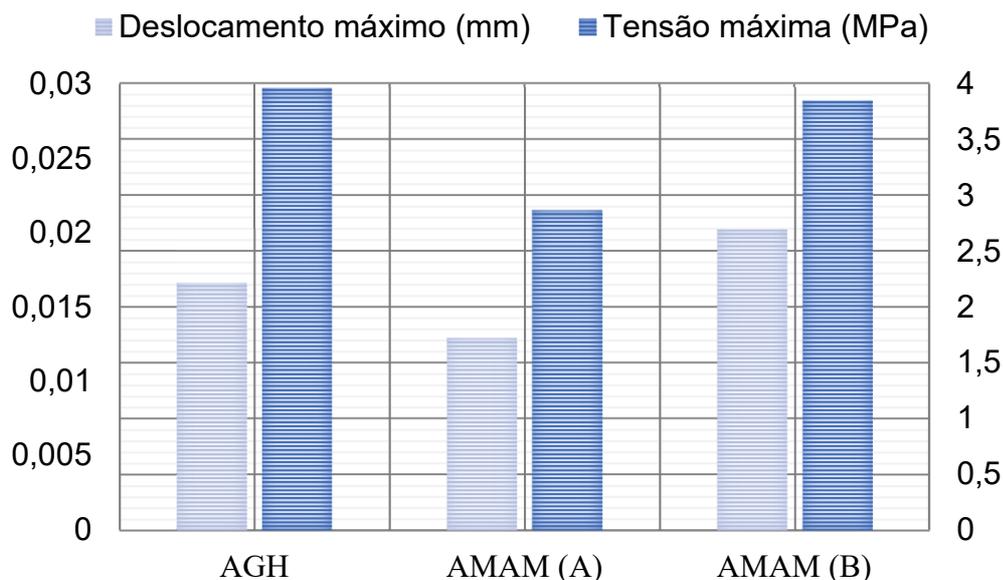


Figura 7.25. Comparativo entre geometrias otimizadas por AGH e AMAM (A e B)

A geometria A mostrou um comportamento melhor, reduzindo o deslocamento máximo e a tensão máxima em 22.3% e 27.75%, respectivamente. Por outro lado, a geometria B apresentou resultado semelhante (ou sensivelmente melhor) de tensão (-3%) e maior de deslocamento (+21.68%) se comparada à geometria obtida com enrijecedores perpendiculares.

Por fim, considerando que a energia de deformação elástica pode ser vista como fluxo de energia (LI; HONG; LIU, 2014), pode-se inferir que a geometria A é a configuração em que a estrutura interconectada fornece caminhos de carga contínuos (LIU *et al.*, 2017).

Além disso, a **Tabela 7.13** apresenta um comparativo do resultado obtido pela geometria (A) otimizada pelo AMAM, que obteve melhor desempenho nos dois objetivos, e dos dados disponíveis na literatura. Lembrando que a altura máxima estipulada na literatura (quando esse limite foi estabelecido) é o dobro da altura utilizada nessa seção de resultados. Além disso, as geometrias obtidas na literatura possuem enrijecedores perpendiculares.

Tabela 7.13. Comparativo de geometrias ótimas com alturas máximas diferentes

Ref.	Elemento	φ	N_{ls}	N_{ts}	$h_{s,max}$ (mm)	h_s/t_s (mm)	w_{max} (mm)	σ_{max} (MPa)
Geometria (AMAM 3A)	SHELL63	0.5	1	10	150	13.90	0.0166	2.8634
(TROINA, 2017)	SHELL93	0.5	2	5	300	35.03	0.0170	3.8900
(PINTO, 2019)	SHELL281	0.4	2	5	300	59.41	0.0156	—
(NOGUEIRA, 2019)	SHELL281	0.3	2	3	—	59.75	0.0145	—

Pode-se observar que os resultados de deslocamento máximo são muito semelhantes entre si. Além disso, a tensão de von Mises obtida pela geometria (AMAM 3A) foi menor do que a tensão máxima obtida na literatura (quando disponível). O ponto mais importante, porém, é que existe uma diferença muito significativa entre as relações h_s/t_s da literatura e do presente estudo.

Sabe-se que a relação h_s/t_s é extremamente influente na diminuição do campo de deslocamentos fora do plano, pois quanto maior essa razão, então, maior será o momento de inércia. Contudo, uma razão alta entre h_s/t_s pode provocar perda da estabilidade lateral no enrijecedor. Dessa forma, percebe-se que é possível obter bons resultados com baixa razão h_s/t_s .

Por fim, os resultados apontam que estudar os caminhos de carga e o campo de deslocamentos pode ser uma alternativa mais viável do que apenas aumentar a relação

h_s/t_s . Além disso, o AMAM mostrou que a avaliação dos ângulos entre enrijecedores, bem como, sua posição e relação de áreas (ou espessuras) é bastante benéfica no comportamento estrutural da placa enrijecida.

7.5 OTIMIZAÇÃO ROBUSTA DAS GEOMETRIAS A E B

Conforme comentado anteriormente, o Algoritmo de Otimização Robusta (AOR) pode ser utilizado isoladamente como método de otimização. A **Figura 7.26** mostra a região dominada e a frente de Pareto do problema multiobjetivo da geometria A aplicado ao nível 2 de otimização por AMAM.

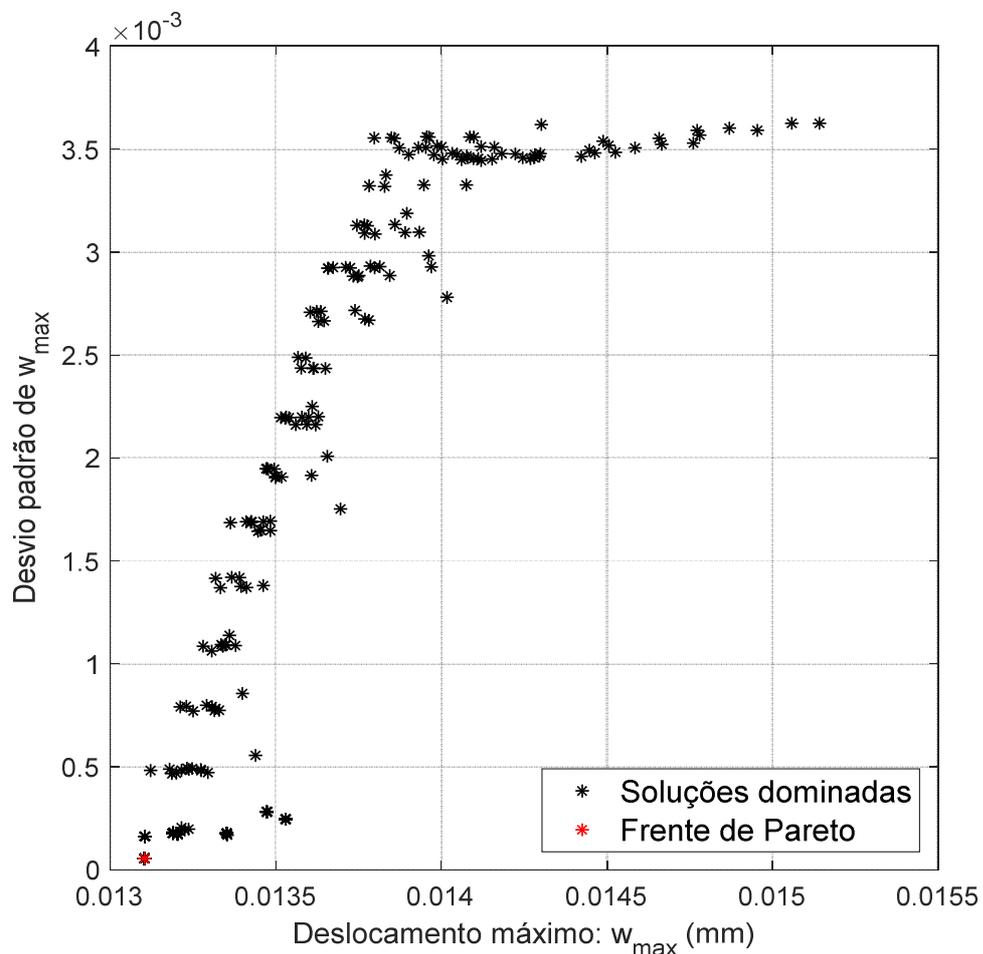


Figura 7.26. Região dominada e frente de Pareto: Geometria A

A **Figura 7.27** mostra a região dominada e a frente de Pareto do problema multiobjetivo da geometria B.

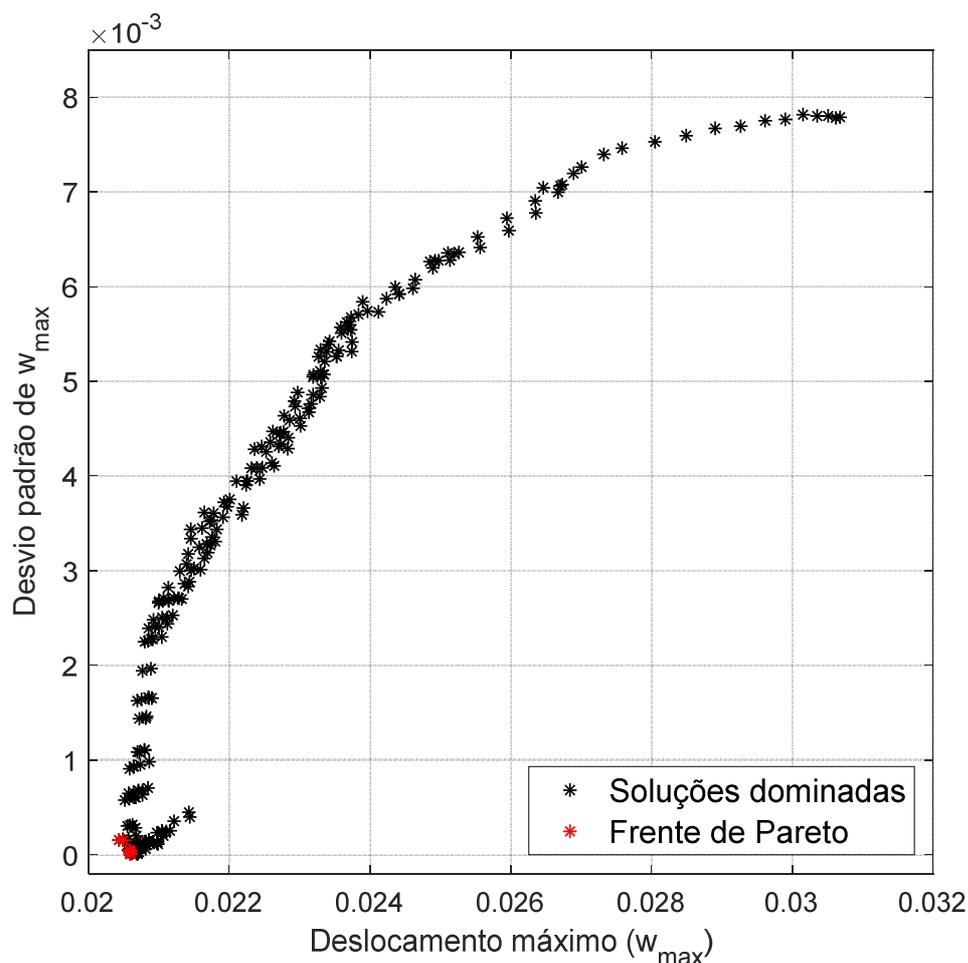


Figura 7.27. Região dominada e frente de Pareto: Geometria B

A análise utilizou 500 iterações em cada geometria, sendo o suficiente para convergência do algoritmo. Então, a melhor geometria (NÍVEL 2A e 2B) foi definida em cima da Frente de Pareto mostrada na **Figura 7.26** e **Figura 7.27**, respectivamente. O desvio padrão obtido na geometria A foi de aproximadamente $5.42e^{-5}$ e para geometria B foi cerca de $1.54e^{-4}$.

A geometria (A) apresentou uma única configuração na Frente de Pareto e a geometria B obteve oito configurações. Na determinação da ótima geometria (B) optou-se por escolher a de menor w_{max} , pois os valores de desvio padrão obtidos eram suficientemente baixos em todas essas configurações.

Os resultados demonstram que a variabilidade do deslocamento máximo é bem pequena próximo ao ponto de ótimo de w_{max} , podendo ser considerado um ponto de

ótimo robusto. Além disso, os deslocamentos decrescem junto com o desvio padrão para valores nas proximidades do ponto de ótimo.

Na geometria A, longe do ponto de ótimo, o deslocamento e o desvio padrão deixam de se correlacionar e possui um comportamento quase horizontal. Ou seja, o deslocamento diminui, mas o desvio padrão quase não muda. Para a geometria B, existe sempre certa correlação entre os dois objetivos. Aparentemente, neste caso (B), a correlação poderia ser determinada por uma curva, sendo do tipo não linear.

Como as funções objetivo possuem valores relativamente pequenos, optou-se por avaliar, também, os valores dos coeficientes de variação em relação ao deslocamento máximo. A **Figura 7.28** mostra o deslocamento máximo em relação ao coeficiente de variação da geometria A. E a **Figura 7.29** mostra o mesmo resultado para a geometria B.

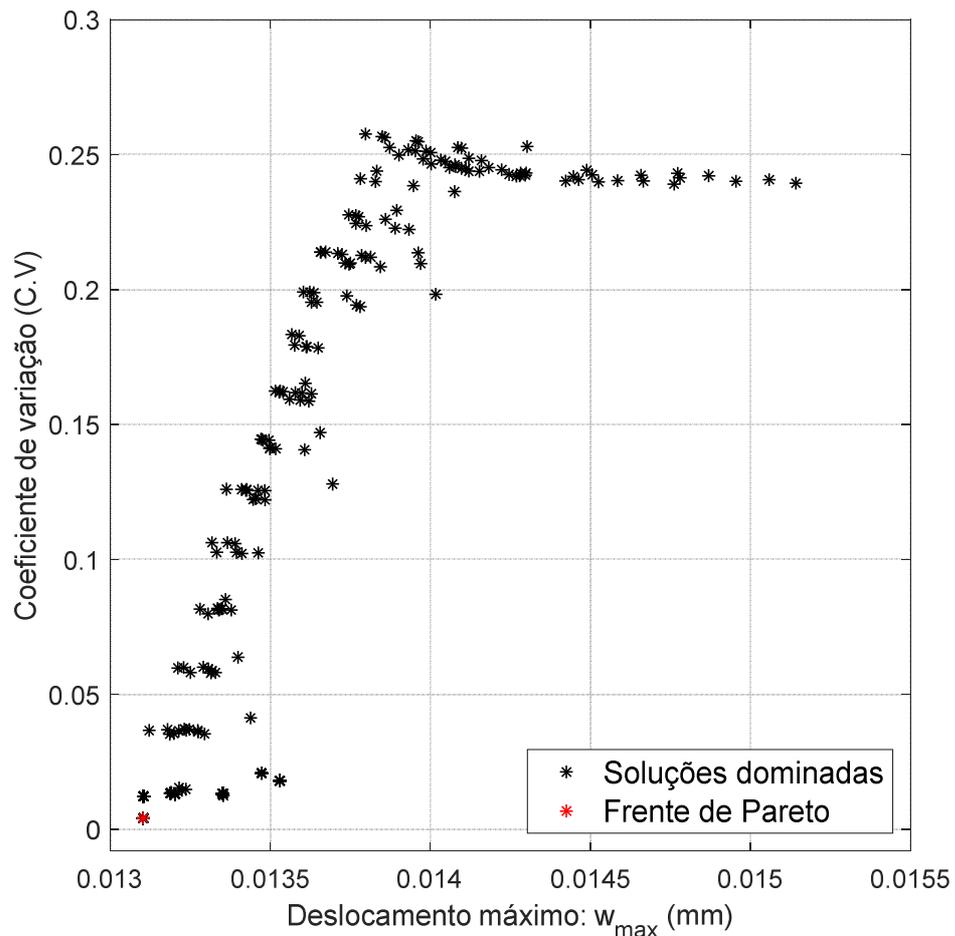


Figura 7.28. Região dominada e frente de Pareto (coeficiente de variação): Geometria A

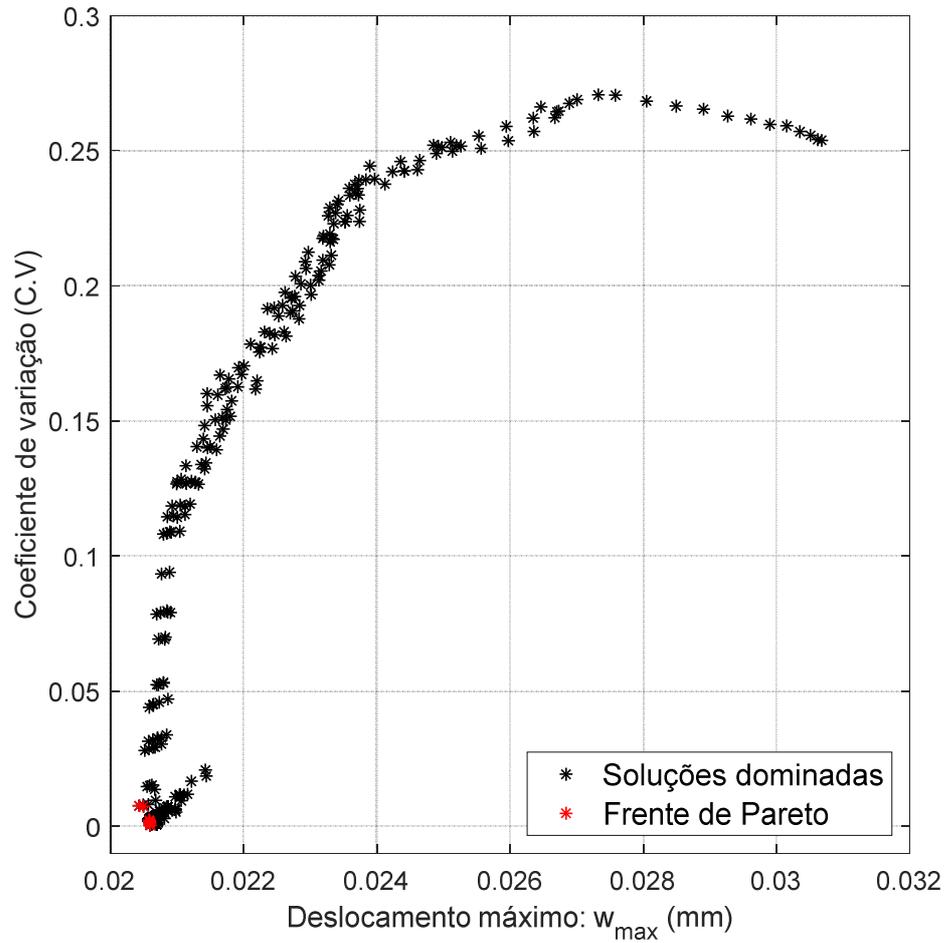


Figura 7.29. Região dominada e frente de Pareto (coeficiente de variação): Geometria B

Analisando os resultados, é possível verificar o comportamento do desvio padrão em relação ao deslocamento máximo. Por exemplo, um coeficiente de variação com valor igual a 0.05 mostra que o desvio padrão é cerca de 5% do deslocamento máximo.

Observe que próximo às soluções não dominadas (conjunto Pareto-ótimo) o coeficiente de variação é muito pequeno, chegando a valores muito próximos de zero. Isso garante que o desvio padrão é de fato pequeno em relação ao deslocamento máximo. Ou seja, a metodologia proposta é de fato eficiente e as soluções obtidas são ótimos robustos.

8 CONCLUSÃO

O presente trabalho propôs um novo algoritmo de otimização topológica denominado Algoritmo de Morfogênese Adaptativa Modificado (AMAM) que utiliza os princípios do Algoritmo de Morfogênese Adaptativa (AMA) sugerido anteriormente na literatura. O AMAM foi inspirado nas regras de ramificação de nervuras de folhas na natureza e utilizou o Algoritmo Genético Híbrido (AGH) para inicializar o processo de otimização. O estudo também propôs um Algoritmo de Otimização Robusta (AOR), que foi exemplificado no nível 2 do AMAM, mas que também pode ser utilizado isoladamente como método de otimização para reduzir a variabilidade do campo de deslocamentos.

Os algoritmos citados foram utilizados na determinação da geometria ótima de placa fina enrijecida simplesmente apoiada. A otimização buscou minimizar o deslocamento máximo (w_{max}) fora do plano quando a estrutura é sujeita a um carregamento de pressão transversal e uniforme. O problema considerou um volume total de material constante e seguiu restrições de tensão máxima de von Mises (σ_{max}).

O AMAM começou com a entrada de parâmetros iniciais (geométricos e material). Em seguida, o AGH fez a otimização da geometria para determinação da posição dos pontos de germinação, que são os pontos em que os enrijecedores principal e secundários são posicionados de acordo com o caminho de carga. Além disso, o AGH determinou parâmetros geométricos iniciais como: fração de volume, altura, espessura e número dos reforçadores. Após essa etapa, iniciaram-se os níveis topológicos.

No nível 1 da topologia de otimização, o objetivo foi aumentar o decremento da energia de deformação mantendo o volume de referência. Para isso, o AMAM buscou encontrar o ângulo de orientação ótima das veias (enrijecedores) secundárias em relação à veia principal.

No nível 2, o AOR determinou a posição (coordenadas) ótima de encontro entre veia principal e secundária. Nessa etapa, o objetivo foi reduzir o deslocamento máximo e sua variabilidade (desvio padrão) de forma que o campo de deslocamentos seja o mais uniforme possível.

No nível 3, o AMAM determinou a relação ótima entre áreas transversais (ou espessuras) dos enrijecedores principal e secundários. Essa fase buscou reduzir a tensão máxima de von Mises à medida em que a relação das áreas encontrou um ‘ponto de equilíbrio’.

Algumas vantagens do AMAM em relação ao AMA convencional é que sua forma desenvolvida em níveis topológicos permitiu verificar a influência dos parâmetros em cada etapa de otimização. Além disso, o AMAM não utilizou incremento no crescimento das nervuras, mas as adaptou na sua forma pré-definida, isso diminuiu consideravelmente o número de vezes que a modelagem em elementos finitos precisou ser utilizada. Por fim, o AMAM apresentou grande capacidade de paralelismo com outros algoritmos como o AGH e o AOR.

Como contribuição à literatura, o trabalho também apresentou um estudo de convergência para a série de Navier e para a modelagem numérica de elementos finitos em placas finas isotrópicas e em placas finas enrijecidas. Isso possibilitou determinar a confiabilidade dos resultados apresentados.

Os resultados apontaram que (em todos os casos) as placas enrijecidas apresentaram comportamento estrutural melhor do que a placa de referência (lisa) de mesmo volume. O método utilizado conseguiu diminuir os valores de deslocamento máximo em até 98% e reduzir a tensão máxima de von Mises em até 78%, se comparados à placa de referência de mesmo volume.

Além disso, em condições equivalentes de número de enrijecedores, a estrutura otimizada por AMAM obteve resultado sensivelmente melhor em pelo menos um objetivo/restrrição (deslocamento ou tensão) em relação à estrutura com enrijecedores perpendiculares.

A aplicação do AOR mostrou que, para o caso analisado, o ponto de ótimo (mínimo) da função objetivo (w_{max}) e de sua variabilidade, ou seja, de seu desvio padrão, são correspondentes. Ressalta-se também que nas proximidades do ponto de ótimo, a variabilidade relativa de w_{max} (dado pelo CV) é muito pequena. Isso mostrou que o ponto de ótimo é, na realidade, um ponto de ótimo robusto, pouco sensível às variações de w_{max} .

Notou-se que existe uma diferença muito significativa entre a razão altura/espessura (h_s/t_s) dos enrijecedores mostrados na literatura e no presente estudo. Considerando que uma razão alta de h_s/t_s pode provocar perda de estabilidade lateral no enrijecedor, o estudo mostrou que é possível obter bons resultados com relações menores de h_s/t_s garantindo, assim, maior estabilidade da estrutura.

Finalmente, pode-se inferir que o uso da metodologia desenvolvida neste trabalho permitiu a obtenção de pontos de ótimo para placas enrijecidas melhores do que aqueles obtidos usando reforçadores perpendiculares com métodos convencionais. Além disso, a investigação possibilitou a análise da robustez dos pontos de ótimo. Os objetivos estipulados foram atingidos e os algoritmos propostos mostraram-se bastante eficientes na otimização topológica do problema considerado.

8.1 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

- Estudar outras condições de apoio (ou carregamento) e sua influência com cada nível de otimização topológica, especialmente com o nível 3;
- Avaliar a relação da tensão de cisalhamento com a posição e a geometria dos enrijecedores;
- Testar a metodologia para placas com relação comprimento/largura menores (gerando diferentes decisões do algoritmo de Morfogênese) e estabelecer as correlações entre os modelos;
- Considerar incertezas nas variáveis de projeto (sejam variáveis dimensionais, ou propriedades do material);
- Verificar a influência das configurações otimizadas na flambagem local e na análise de vibrações;
- Utilizar outras técnicas de otimização bioinspirada como, por exemplo, o algoritmo de Lichtenberg (PEREIRA *et al.*, 2021a, 2021b).

8.2 PUBLICAÇÕES ASSOCIADAS A ESTE TRABALHO

- Beatriz F. Souza, Carla T. M. Anflor, Daniel O. Fernandes, Ariosto B. Jorge, Besim Baranoglu. Static Analysis and Optimization of Stiffened Plates under Pressure Loading. Proceedings of the XLI Ibero-Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering, ABMEC. Foz do Iguaçu, 2020.
- Beatriz F. Souza, Daniel O. Fernandes, Carla T. M. Anflor, Marcus V. G. Morais. Richardson Error Estimator and Convergence Error Estimator applied in a buckling analysis by Finite Difference Method (FDM). Proceedings of the XLI Ibero-Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering, ABMEC. Foz do Iguaçu, 2020.
- Daniel de O. Fernandes, Beatriz F. Souza, Carla T. M. Anflor, Marcus V. G. Morais. Error Interpolation for Reference Value Characterization for Complex Column Buckling Problems. Proceedings of the XLI Ibero-Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering, ABMEC. Foz do Iguaçu, 2020.

LISTA DE REFERÊNCIAS

ANSYS INC. **Elements Reference ANSYS Release 11.0**. [s.l: s.n.]. Disponível em: <http://www.ansys.com>.

BACARREZA, O.; ALIABADI, M. H.; APICELLA, A. Robust design and optimization of composite stiffened panels in post-buckling. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, [S. l.], v. 51, n. 2, p. 409–422, 2015. DOI: 10.1007/s00158-014-1136-5.

BEDAIR, O. Analysis and Limit State Design of Stiffened Plates and Shells : A. **Applied Mechanics Reviews**, [S. l.], v. 62, p. 1–16, 2009. DOI: 10.1115/1.3077137.

BOHN, S.; ANDREOTTI, B.; DOUADY, S.; MUNZINGER, J.; COUDER, Y. Constitutive property of the local organization of leaf venation networks. **Physical review. E, Statistical, nonlinear, and soft matter physics**, [S. l.], v. 65, n. 6, p. 61914, 2002. DOI: 10.1103/PhysRevE.65.061914.

CHAKRABORTY, S.; MUKHOPADHYAY, M.; SHA, O. P. Determination of physical parameters of stiffened plates using genetic algorithm. **Journal of Computing in Civil Engineering**, [S. l.], v. 16, n. 3, p. 206–221, 2002. DOI: 10.1061/(ASCE)0887-3801(2002)16:3(206).

COLEY, D. A. **An Introduction to Genetic Algorithms for Scientists and Engineers**. 1. ed. Singapore: World Scientific, 1999.

DAO, S. D.; ABHARY, K.; MARIAN, R. An innovative framework for designing genetic algorithm structures. **Expert Systems with Applications**, [S. l.], v. 90, p. 196–208, 2017. DOI: 10.1016/j.eswa.2017.08.018. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016/j.eswa.2017.08.018>.

DEB, K. **Multi-Objective Optimization using Evolutionary Algorithms**. 1. ed. [s.l.] : John Wiley & Sons, LTD, 2001. v. 16

DEB, K.; GUPTA, H. Introducing Robustness in Multi-Objective Optimization. **Evolutionary Computation**, [S. l.], v. 14, n. 4, p. 463–494, 2006.

DIAS, F. T.; CRUZ, J. P.; VALENTE, R. A. F.; SOUSA, R. J. A. **Método dos Elementos Finitos: Técnicas de Simulação Numérica em Engenharia**. 1. ed. Lisboa:

ETEP, 2007.

EIBEN, A. E.; SMITH, J. .. **Introduction to Evolutionary Computing**. 2. ed. [s.l.] : Springer, 2004. v. 33 DOI: 10.1108/03684920410699216.

GEN, M.; CHENG, R. A Survey of Penalty Techniques in Genetic Algorithms. **IEEE, [S. l.]**, v. 96, p. 87–97, 1996. DOI: 10.4018/978-1-5225-2154-9.ch006.

GEN, M.; CHENG, R. **Genetic Algorithms & Engineering Optimization**. 2. ed. Canada: Jhn Wiley & Sons, Inc, 2000.

GEN, M.; CHENG, R.; LIN, L. **Network Models and Optmization Multiobjective Genetic Algorithm Approach**. [s.l.] : Springer, 2008. DOI: 10.1007/978-0-85729-546-0.

HADIDI, A. A robust approach for optimal design of plate fin heat exchangers using biogeography based optimization (BBO) algorithm. **Applied Energy, [S. l.]**, v. 150, p. 196–210, 2015. DOI: 10.1016/j.apenergy.2015.04.024.

JI, J.; DING, Xi.; XIONG, M. Optimal stiffener layout of plate/shell structures by bionic growth method. **Computers and Structures, [S. l.]**, v. 135, p. 88–99, 2014. DOI: 10.1016/j.compstruc.2014.01.022. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016/j.compstruc.2014.01.022>.

JUNIOR, M. C. B. P. **Simulação numérica e Design Construtal para avaliação da influência do espaçamento entre enrijecedores na deflexão de placas finas de aço quando submetidas a carregamento transversal uniforme**. 2019. Universidade Federal do Rio Grande, Rio Grande do Sul, 2019.

KALLASSY, A.; MARCELIN, J. L. Optimization of stiffened plates by genetic search. **Structural Optimization, [S. l.]**, v. 13, n. 2–3, p. 134–141, 1997. DOI: 10.1007/BF01199232.

KANG, J.; KIM, C. Minimum-weight design of compressively loaded composite plates and stiffened panels for postbuckling strength by Genetic Algorithm. **Composite Structures, [S. l.]**, v. 69, p. 239–246, 2005. DOI: 10.1016/j.compstruct.2004.07.001.

LI, B.; GE, L.; HONG, J. An intelligent computational approach for design optimization of stiffened engineering structures. **International Journal of Precision Engineering and Manufacturing, [S. l.]**, v. 18, n. 7, p. 1005–1012, 2017. DOI: 10.1007/s12541-

017-0118-0.

LI, B.; HONG, J.; LIU, Z. Stiffness design of machine tool structures by a biologically inspired topology optimization method. **International Journal of Machine Tools and Manufacture**, [S. l.], v. 84, p. 33–44, 2014. DOI: 10.1016/j.ijmachtools.2014.03.005. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijmachtools.2014.03.005>.

LI, B.; HONG, J.; WANG, Z.; LIU, Z. An innovative layout design methodology for stiffened plate/shell structures by material increasing criterion. **Journal of Engineering Materials and Technology, Transactions of the ASME**, [S. l.], v. 135, n. 2, p. 1–11, 2013. a. DOI: 10.1115/1.4023781.

LI, B.; HONG, J.; YAN, S.; LIU, Z. Multidiscipline topology optimization of stiffened plate/shell structures inspired by growth mechanisms of leaf veins in nature. **Mathematical Problems in Engineering**, [S. l.], v. 2013, p. 1–11, 2013. b. DOI: 10.1155/2013/653895.

LI, B.; LIU, H.; YANG, Z.; ZHANG, J. Stiffness design of plate/shell structures by evolutionary topology optimization. **Thin-Walled Structures**, [S. l.], v. 141, p. 232–250, 2019. a. DOI: 10.1016/j.tws.2019.04.012. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.tws.2019.04.012>.

LI, B.; XUAN, C.; TANG, W.; ZHU, Y.; YAN, K. Topology optimization of plate/shell structures with respect to eigenfrequencies using a biologically inspired algorithm. **Engineering Optimization**, [S. l.], v. 51, n. 11, p. 1829–1844, 2019. b. DOI: 10.1080/0305215X.2018.1552952. Disponível em: <https://doi.org/0305215X.2018.1552952>.

LIU, H.; LI, B.; YANG, Z.; HONG, J. Topology optimization of stiffened plate/shell structures based on adaptive morphogenesis algorithm. **Journal of Manufacturing Systems**, [S. l.], v. 43, p. 375–384, 2017. DOI: 10.1016/j.jmsy.2017.02.002. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016/j.jmsy.2017.02.002>.

MARCELIN, J. L. Genetic optimization of stiffened plates and shells. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, [S. l.], v. 51, n. 9, p. 1079–1088, 2001. DOI: 10.1002/nme.193.

MARCHI, C. H.; SILVA, A. F. C. Unidimensional Numerical Solution Error Estimation For Convergent Apparent Order. **Numerical Heat Transfer: Part B:**

Fundamentals, [S. l.], v. 42, n. 2, p. 167–188, 2002. DOI: 10.1080/10407790190053888.

MARCHI, C. H.; SILVA, A. F. C. Multi-dimensional discretization error estimation for convergent apparent order. **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering**, [S. l.], v. 27, n. 4, p. 432–439, 2005. DOI: 10.1590/S1678-58782005000400012.

MESSAC, A.; ISMAIL-YAHAYA, A. Multiobjective robust design using physical programming. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, [S. l.], v. 23, n. 5, p. 357–371, 2002. DOI: 10.1007/s00158-002-0196-0.

NAKAZAWA, Y.; KOGISO, N.; YAMADA, T.; NISHIWAKI, S. Robust topology optimization of thin plate structure under concentrated load with uncertain load position. **Journal of Advanced Mechanical Design, Systems and Manufacturing**, [S. l.], v. 10, n. 4, p. 1–12, 2016. DOI: 10.1299/JAMDSM.2016JAMDSM0057.

NOGUEIRA, C. M. **Simulação Numérica e Design Construtal Aplicados a Placas com Enrijecedores Longitudinais e Transversais com Diferentes Relações Altura/Espessura**. 2019. Universidade Federal do Rio Grande, [S. l.], 2019. Disponível em: <https://sistemas.furg.br/sistemas/sab/arquivos/bdtd/0000013206.pdf>.

OÑATE, E. **Structural analysis with the finite element method: linear statics**. 1. ed. Barcelona: Springer, 2010. v. 2 DOI: 10.5860/choice.47-4446.

ORVOSH, D.; DAVIS, L. Using a genetic algorithm to optimize problems with feasibility constraints. **Proceedings of the First IEEE Conference on Evolutionary Computation**, [S. l.], v. 2, p. 548–553, 1994. DOI: 10.1109/icec.1994.350001.

PAULA, T. I. **Método da Interseção Normal à Fronteira baseado em Análise Fatorial para otimização de problemas multivariados utilizando-se Algoritmo Genético**. 2019. Universidade Federal de Itajubá, [S. l.], 2019. Disponível em: <https://repositorio.unifei.edu.br/jspui/handle/123456789/2005>.

PEREIRA, J. L. J.; FRANCISCO, M. B.; CUNHA JR, S. S.; GOMES, G. F. A powerful Lichtenberg Optimization Algorithm: A damage identification case study. **Engineering Applications of Artificial Intelligence**, [S. l.], v. 97, n. June 2020, p. 104055, 2021. a. DOI: 10.1016/j.engappai.2020.104055. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.engappai.2020.104055>.

PEREIRA, J. L. J.; FRANCISCO, M. B.; DINIZ, C. A.; OLIVER, G. A.; CUNHA JR, S. S.; GOMES, G. F. Lichtenberg algorithm: A novel hybrid physics-based meta-heuristic for global optimization. **Expert Systems with Applications**, [S. l.], v. 170, n. November 2020, 2021. b. DOI: 10.1016/j.eswa.2020.114522.

PINTO, V. T. **Simulação Numérica e Método Design Construtal Aplicados à Análise Geométrica de Placas Retangulares Enrijecidas Submetidas a Carregamento Transversal Uniforme**. 2019. Universidade Federal do Rio Grande, [S. l.], 2019. Disponível em:
<https://sistemas.furg.br/sistemas/sab/arquivos/bdtd/0000013173.pdf>.

PUTRA, G. L.; KITAMURA, M.; TAKEZAWA, A. Structural optimization of stiffener layout for stiffened plate using hybrid GA. **International Journal of Naval Architecture and Ocean Engineering**, [S. l.], v. 11, n. 2, p. 809–818, 2019. DOI: 10.1016/j.ijnaoe.2019.03.005. Disponível em:
<https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S2092678219300329>.

RICHARDSON, L. F. IX. The approximate arithmetical solution by finite differences of physical problems involving differential equations, with an application to the stresses in a masonry dam. **Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character**, [S. l.], v. 210, p. 307–357, 1911. DOI: 10.1098/rsta.1911.0009.

SZILARD, R. **Theories and Applications of Plate Analysis: Classical, Numerical and Engineering Methods**. 1. ed. New Jersey: John Wiley & Sons, Inc., 2004. v. 57 DOI: 10.1115/1.1849175.

TIMOSHENKO, S.; WOINOWSKY-KRIEGER, S. **Theory of Plates and Shells**. 2. ed. Singapore: McGraw-Hill, 1959. DOI: 10.1038/148606a0.

TROINA, G. S. **Modelagem Computacional e Método Design Construtal Aplicados à Otimização Geométrica de Placas Finas de Aço com Enrijecedores Submetidas a Carregamento Transversal Uniforme**. 2017. Universidade Federal do Rio Grande, [S. l.], 2017. Disponível em:
<https://sistemas.furg.br/sistemas/sab/arquivos/bdtd/0000012956.pdf>.

UGURAL, A. C. **Stresses in Beams, Plates, and Shells**. 3. ed. [s.l.] : CRC Press Taylor & Francis Group, 2010. DOI: 10.1007/s13398-014-0173-7.2.

XING, D. H.; CHEN, W. Y.; ZHAO, L.; MA, J. F. Structural bionic design for high-speed machine tool working table based on distribution rules of leaf veins. **Science China Technological Sciences**, [*S. l.*], v. 55, n. 8, p. 2091–2098, 2012. DOI: 10.1007/s11431-012-4805-x.

YANG, X. **Nature-Inspired Optimization Algorithms**. 1. ed. London: Elsevier, 2014.

ZHANG, H.; DING, X.; DONG, X.; XIONG, M. Optimal topology design of internal stiffeners for machine pedestal structures using biological branching phenomena. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, [*S. l.*], v. 57, n. 6, p. 2323–2338, 2018. DOI: 10.1007/s00158-017-1862-6.

A. APÊNDICE

A.1 FORMULAÇÃO DO ELEMENTO RETANGULAR NÃO CONFORME MCZ/ACM

Considerando um elemento retangular de 4 nós (**Figura A.1**), e considerando a definição em (3.3), a deflexão pode ser expressa como

$$w(x, y) = \psi^T \mathbf{a} , \quad (\text{A.1})$$

em que ψ é a matriz de função interpoladora do campo de deslocamentos e \mathbf{a} é o vetor de coeficientes. De acordo com Dias *et al.* (2007), o polinômio interpolador para um elemento retangular de ordem superior que descreve a aproximação elementar do campo de deslocamentos pode ser obtido através do Triângulo de Pascal (**Figura A.2**).

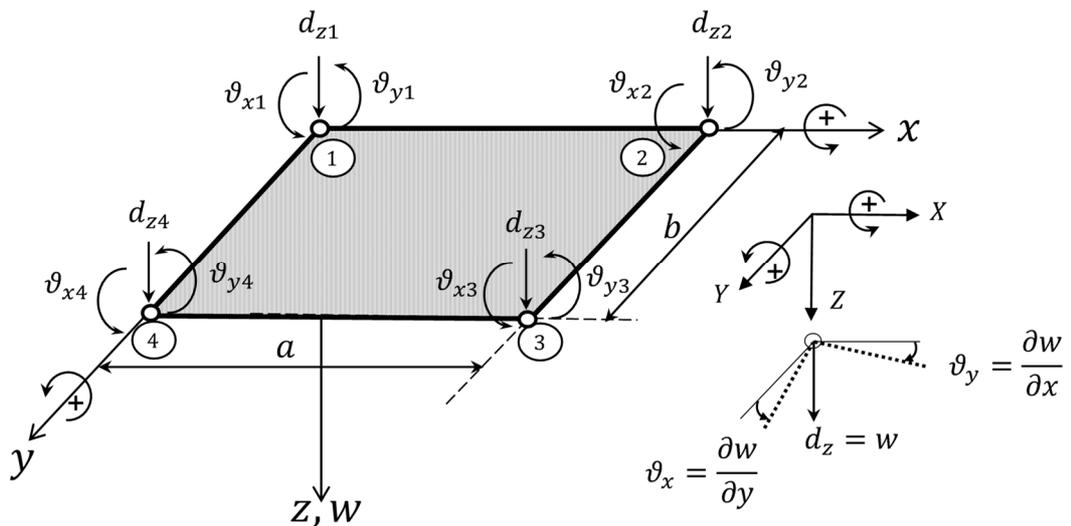


Figura A.1. Elemento retangular (MCZ/ ACM)

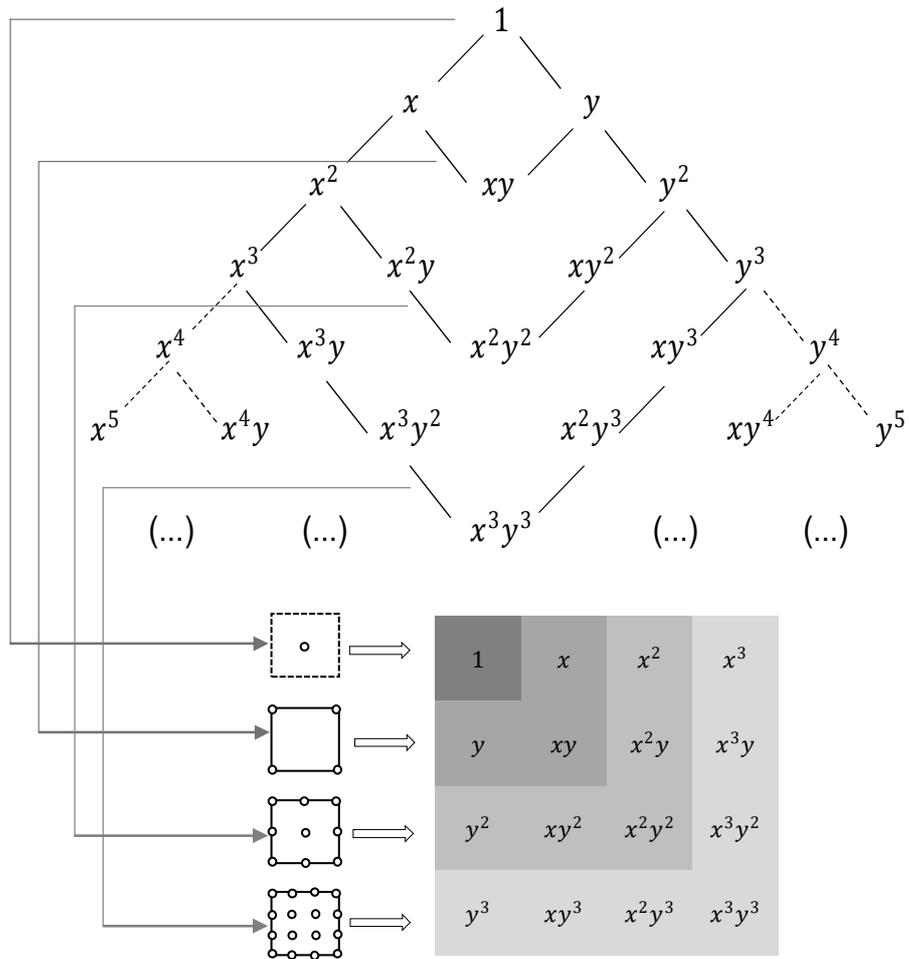


Figura A.2. Triângulo de Pascal [adaptado de (DIAS *et al.*, 2007)]

Supondo conhecida a deflexão $w(x, y)$, então suas derivadas $\partial w/\partial x$ e $\partial w/\partial y$ que descrevem as rotações nos nós também são conhecidas. Pode-se escrever, então,

$$\mathbf{G}\mathbf{a} = \mathbf{d}, \tag{A.2}$$

em que \mathbf{G} é a matriz das funções interpoladoras dos graus de liberdade do nó e \mathbf{d} é o vetor de deslocamentos nodais.

Isolando \mathbf{a} em (A.2) tem-se

$$\mathbf{a} = \mathbf{G}^{-1}\mathbf{d}. \tag{A.3}$$

Substituindo (A.3) em (A.1):

$$w(x, y) = \boldsymbol{\psi}^T \mathbf{G}^{-1}\mathbf{d}. \tag{A.4}$$

Sabendo que

$$\boldsymbol{\psi}^T \mathbf{G}^{-1} = \mathbf{N}^T, \quad (\text{A.5})$$

em que \mathbf{N} é a matriz das funções de forma. Então, (A.4) pode ser escrita como:

$$w(x, y) = \mathbf{N}^T \mathbf{d} \quad (\text{A.6})$$

Escrevendo (A.6) na forma representativa do elemento de 4 nós, tem-se:

$$w(x, y) = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4] \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{Bmatrix} \quad (\text{A.7})$$

em que cada submatriz de \mathbf{N} pode ser escrita como:

$$\mathbf{N}_i = [N_{d_z, i} \quad N_{\vartheta_x, i} \quad N_{\vartheta_y, i}]. \quad (\text{A.8})$$

Note que cada função de forma é relacionada com um determinado grau de liberdade do nó i . Do mesmo modo cada submatriz de \mathbf{d} pode ser escrita como:

$$\mathbf{d}_i = \begin{Bmatrix} d_{zi} \\ \vartheta_{xi} \\ \vartheta_{yi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w \\ \partial w / \partial y \\ -\partial w / \partial x \end{Bmatrix}, \text{ para } i = 1, 2, 3, 4. \quad (\text{A.9})$$

em que d_{zi} , ϑ_{xi} e ϑ_{yi} são, respectivamente, translação em Z , rotação em X e rotação em Y no nó i . Note que a convenção de sinais para MEF é mostrada na **Figura A.1**, e o sinal negativo em $-\partial w / \partial x$ é apenas para compatibilizar com a Teoria de Placas.

Além disso, o vetor de forças nodais no nó i é descrito por:

$$\mathbf{f}_i = \begin{Bmatrix} Q \\ M_x \\ M_y \end{Bmatrix}, \quad (\text{A.10})$$

em que Q é a força cisalhante, M_x e M_y são momentos fletores que giram em torno dos eixos x e y , respectivamente.

Considerando o vetor de deformações generalizadas como:

$$\boldsymbol{\chi}_i = \begin{Bmatrix} \partial^2 w / \partial x^2 \\ \partial^2 w / \partial y^2 \\ 2\partial^2 w / \partial x \partial y \end{Bmatrix} \quad (\text{A.11})$$

e utilizando as derivadas de (A.6) para reescrever (A.11), tem-se:

$$\chi_i = \left\{ \begin{array}{c} \partial^2 N_i / \partial x^2 \\ \partial^2 N_i / \partial y^2 \\ 2\partial^2 N_i / \partial x \partial y \end{array} \right\} \mathbf{d} \quad (\text{A.12})$$

Além disso, pode-se reescrever (A.12) como:

$$\chi_i = \mathbf{B}_i \mathbf{d}, \quad (\text{A.13})$$

em que, para o elemento de 4 nós, pode-se definir:

$$\mathbf{B} = [\mathbf{B}_1 \quad \mathbf{B}_2 \quad \mathbf{B}_3 \quad \mathbf{B}_4]. \quad (\text{A.14})$$

Escrevendo (A.14) na forma:

$$\mathbf{B} = - \left[\begin{array}{cccc} \partial^2 N_1 / \partial x^2 & \partial^2 N_2 / \partial x^2 & \partial^2 N_3 / \partial x^2 & \partial^2 N_4 / \partial x^2 \\ \partial^2 N_1 / \partial y^2 & \partial^2 N_2 / \partial y^2 & \partial^2 N_3 / \partial y^2 & \partial^2 N_4 / \partial y^2 \\ 2\partial^2 N_1 / \partial x \partial y & 2\partial^2 N_2 / \partial x \partial y & 2\partial^2 N_3 / \partial x \partial y & 2\partial^2 N_4 / \partial x \partial y \end{array} \right] \quad (\text{A.15})$$

e sabendo de (3.10) que

$$\varepsilon = \mathbf{B} \mathbf{d}. \quad (\text{A.16})$$

Através de (3.12) pode-se, então, escrever a matriz de rigidez do elemento como:

$$\mathbf{K}_e = \int_0^b \int_0^a \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} dx dy, \quad (\text{A.17})$$

em que \mathbf{E} é a matriz de elasticidade, e considerando uma placa de material isotrópico-linear é definida por:

$$\mathbf{E} = D \left[\begin{array}{ccc} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{array} \right], \quad (\text{A.18})$$

onde D é a rigidez flexural da placa e ν é o coeficiente de Poisson

É válido ressaltar que as funções de forma devem atender a alguns requisitos que garantem a convergência para a solução exata à medida em que o modelo é discretizado em uma quantidade maior de elementos. De acordo com Szilard (2004), esses requisitos são:

1. Continuidade dentro do elemento;

2. Continuidade no contorno dos elementos;
3. Compatibilidade entre elementos;
4. Capacidade para representar movimentos de corpo rígido;
5. Invariabilidade dos movimentos de corpo rígido;
6. Capacidade para representar curvaturas constantes;
7. Invariabilidade por transformações coordenadas;
8. Aproximação da deflexão verdadeira na placa devido aos movimentos unitários nos nós.

Além disso, o formato do elemento e o número de nós são considerações importantes que devem ser observadas em cada caso. Geralmente, as funções mais utilizadas como funções de forma são polinômios, devido a sua facilidade de integração e derivação.

Utilizando o triângulo de Pascal (**Figura A.2**), o polinômio que define as funções de forma para o vetor de deslocamentos mostrado em (A.9) é

$$\psi_{NC} = [1 \quad x \quad y \quad x^2 \quad xy \quad y^2 \quad x^3 \quad x^2y \quad xy^2 \quad y^3 \quad x^3y \quad xy^3]. \quad (\text{A.19})$$

Note que (A.19) é um polinômio incompleto de grau 4, mas simétrico. Isso faz com que existam algumas descontinuidades no contorno do elemento, sendo denominado não-conforme. O elemento correspondente é geralmente chamado de *MCZ* ou *ACM*, pois foi desenvolvido inicialmente por Melosh, Cheung e Zienkiewicz e sua forma explícita da matriz de rigidez foi derivada por Aldini, Clough e Melosh (SZILARD, 2004).

Conforme explicado em Szilard (2004), apesar da não conformidade do elemento, seus resultados são satisfatórios, pois a presença dos termos $1, x, y, x^2, xy, y^2$ garante o movimento de corpo rígido e estados de deformação com curvatura constante. Além disso, os termos de quarta ordem x^3y, xy^3 satisfazem a equação governante à medida que o comprimento do elemento se aproxima de zero.

A.2 FORMULAÇÃO DO ELEMENTO RETANGULAR CONFORME BFS

Para obter a conformidade do elemento retangular de 4 nós, os mesmos procedimentos desenvolvidos anteriormente podem ser utilizados.

Deve-se primeiramente, adicionar o termo $\partial^2 w / \partial x \partial y$ (**Figura A.3**) que corresponde ao grau de liberdade à torção no vetor de deslocamentos nodais resultando em

$$\mathbf{d}_i = \begin{Bmatrix} w \\ -\partial w / \partial x \\ \partial w / \partial y \\ \partial^2 w / \partial x \partial y \end{Bmatrix}. \quad (\text{A.20})$$

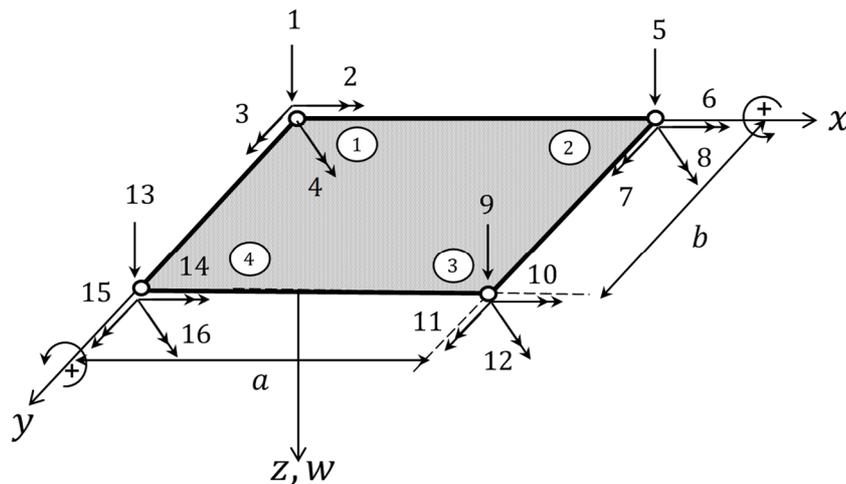


Figura A.3. Elemento retangular (BFS)

A técnica busca satisfazer os requisitos de continuidade das rotações normais e da segunda derivada no contorno do elemento. Nesse caso, o polinômio interpolador do elemento conforme (ψ_C) será completo com seus 16 termos:

$$\psi_C = [1 \ x \ y \ x^2 \ xy \ y^2 \ x^3 \ x^2y \ xy^2 \ y^3 \ x^3y \ x^2y^2 \ xy^3 \ x^3y^2 \ x^2y^3 \ x^3y^3]. \quad (\text{A.21})$$

Esse método foi inicialmente proposto por Bogner, Fox e Schmidt (BFS), que deu origem ao nome do elemento (OÑATE, 2010). Além desse, BFS também propuseram elementos mais refinados como o elemento de quatro nós com nove deslocamentos nodais, entretanto, apesar da convergência superior, existe a maior complexidade computacional (SZILARD, 2004).

Conforme explicado em (SZILARD, 2004), na maioria das vezes, as funções de forma polinomiais não fornecem modos de torção constantes, então é possível utilizar abordagens alternativas como a utilização de polinômios Hermitianos.

Pode-se escrever, então, a deflexão utilizando funções de forma Hermitianas como

$$w(x, y) = [\{N_1\} \quad \{N_2\} \quad \{N_3\} \quad \{N_4\}] \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_{16} \end{Bmatrix}, \quad (\text{A.22})$$

onde, para cada nó (1, 2, 3 e 4), as funções de forma são, respectivamente:

$$\{N_1\} = \begin{Bmatrix} N_1(\xi) & N_1(\eta) \\ N_1(\xi) & N_2(\eta) \\ -N_2(\xi) & N_1(\eta) \\ N_2(\xi) & N_2(\eta) \end{Bmatrix}_{(1)}, \quad (\text{A.23})$$

$$\{N_2\} = \begin{Bmatrix} N_3(\xi) & N_1(\eta) \\ N_3(\xi) & N_2(\eta) \\ N_4(\xi) & N_1(\eta) \\ N_4(\xi) & N_2(\eta) \end{Bmatrix}_{(2)}, \quad (\text{A.24})$$

$$\{N_3\} = \begin{Bmatrix} N_3(\xi) & N_3(\eta) \\ N_3(\xi) & N_4(\eta) \\ N_4(\xi) & N_3(\eta) \\ N_4(\xi) & N_4(\eta) \end{Bmatrix}_{(3)}, \quad (\text{A.25})$$

$$\{N_4\} = \begin{Bmatrix} N_1(\xi) & N_3(\eta) \\ N_1(\xi) & N_4(\eta) \\ N_2(\xi) & N_3(\eta) \\ N_2(\xi) & N_4(\eta) \end{Bmatrix}_{(4)}, \quad (\text{A.26})$$

em que $\xi = x/a$ e $\eta = y/b$ e considerando polinômios cúbicos Hermitianos unidimensionais, têm-se

$$\begin{aligned} N_1(\xi) &= 1 - \xi^2 + 2\xi^3, & N_1(\eta) &= 1 - \eta^2 + 2\eta^3, \\ N_2(\xi) &= (\xi - 2\xi^2 + 3\xi^3)a, & N_2(\eta) &= (\eta - 2\eta^2 + 3\eta^3)b, \\ N_3(\xi) &= 3\xi^2 - 2\xi^3, & N_3(\eta) &= 3\eta^2 - 2\eta^3, \\ N_4(\xi) &= (-\xi^2 + \xi^3)a, & N_4(\eta) &= (-\eta^2 + \eta^3)b. \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

B. APÊNDICE

B.1 ELEMENTO SHELL63 (ANSYS®, INC)

O elemento SHELL63 é um elemento tridimensional e sua forma quadrilátera (de quatro nós) pode ser vista na **Figura B.4**.

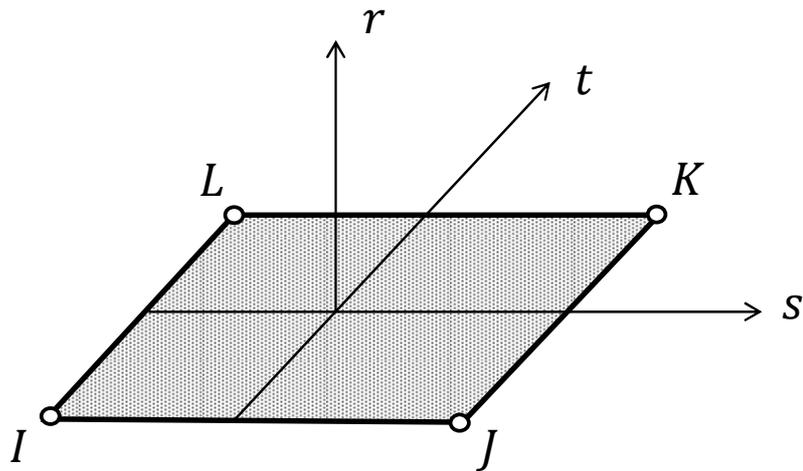


Figura B.4. Elemento Shell63 (ANSYS®, Inc)

As funções de forma utilizadas no elemento são do tipo:

$$u = \frac{1}{4} [u_I(1-s)(1-t) + u_J(1+s)(1-t) + u_K(1+s)(1+t) + u_L(1-s)(1+t)], \quad (\text{B.28})$$

$$v = \frac{1}{4} [v_I(1-s)(1-t) + v_J(1+s)(1-t) + v_K(1+s)(1+t) + v_L(1-s)(1+t)]. \quad (\text{B.29})$$

$$w = \text{não definida explicitamente (consultar manual ANSYS®, Inc)} \quad (\text{B.30})$$

em que, s , t e r são coordenadas normalizadas (-1 a 1) e u e v são movimentos no plano e w é o movimento fora do plano.

C.APÊNDICE

C.1 MALHA COM ELEMENTO SHELL63 QUADRILÁTEROS

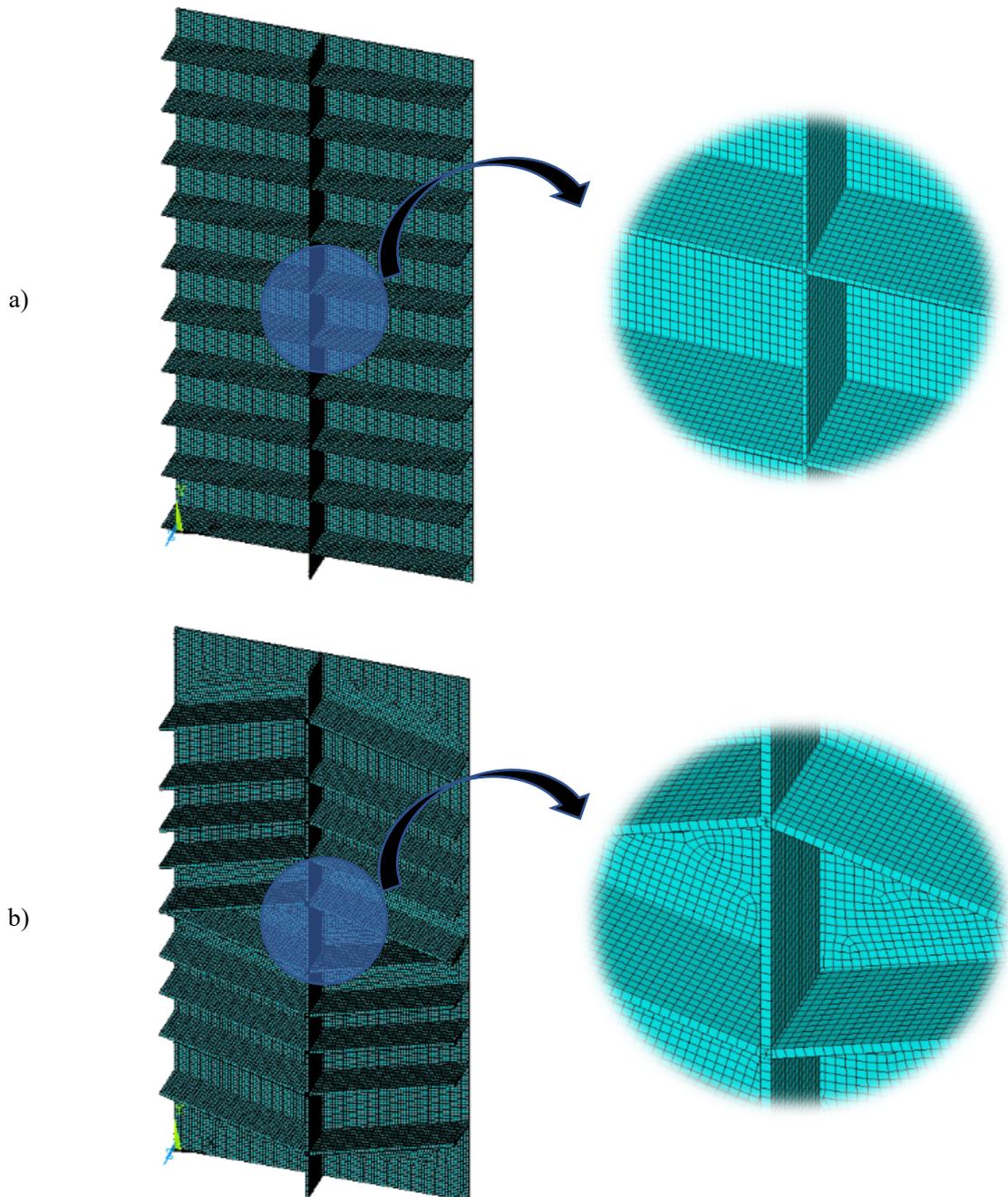


Figura C.5. Malha do elemento SHELL63 (10 mm). a) AGH, b) AMAM

D. APÊNDICE

D.1 RODADAS SUCESSIVAS DO ALGORITMO GENÉTICO HÍBRIDO

Rodada	φ	N_{ls}	N_{ts}	t_s (mm)	h_s (mm)	h_s/t_s (mm)	w_{max} (mm)	σ_{max} (MPa)
1	0.5	1	10	6.0000	279.1736	46.5289	0.0078	2.3299
2	0.5	1	10	5.5937	299.3477	53.5148	0.0074	2.2081
3	0.5	1	10	5.7953	288.9854	49.8656	0.0076	2.2660
4	0.5	1	10	7.0000	239.4923	34.2132	0.0090	2.6349
5	0.5	1	10	5.8818	284.7557	48.4130	0.0077	2.2945
6	0.4	1	9	5.9400	246.0689	41.4257	0.0101	3.2789
7	0.5	1	10	7.0000	239.4923	34.2132	0.0090	2.6349
8	0.5	1	10	6.0000	279.1736	46.5289	0.0078	2.3299
9	0.5	1	10	5.5824	299.9505	53.7311	0.0073	2.2042
10	0.5	1	10	7.0000	239.4923	34.2132	0.0090	2.6349
11	0.5	1	10	5.6862	294.5010	51.7919	0.0074	2.2338
12	0.5	1	10	6.0000	279.1736	46.5289	0.0078	2.3299
13	0.5	1	10	5.5878	299.6637	53.6281	0.0074	2.2041
14	0.5	1	10	5.5890	294.3566	51.7410	0.0075	2.2748
15	0.5	1	10	7.0000	239.4923	34.2132	0.0090	2.6349
16	0.5	1	10	5.8824	284.7268	48.4032	0.0077	2.2955
17	0.5	1	10	5.7739	290.0516	50.2351	0.0075	2.2637
18	0.5	1	10	5.6716	295.2578	52.0591	0.0074	2.2313
19	0.5	1	10	5.7796	289.7646	50.1355	0.0076	2.2630
20	0.5	1	10	5.8871	284.5010	48.3262	0.0077	2.2961

E. APÊNDICE

E.1 ALGORITMO GENÉTICO HÍBRIDO COM TAXA DE MUTAÇÃO DE 5%

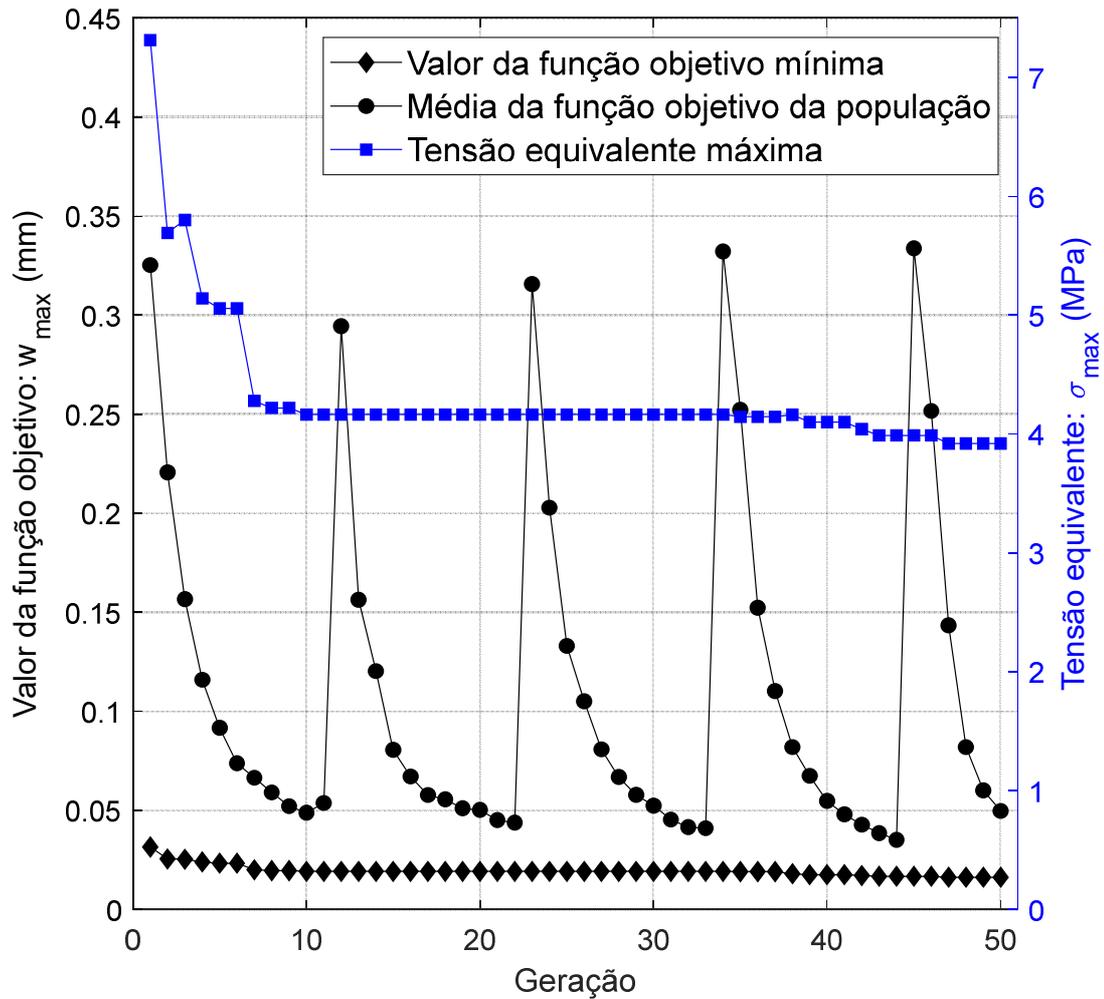


Figura E.6. Busca da geometria ótima através de Algoritmo Genético Híbrido ($h_s \leq 150$ mm), taxa de mutação 5%