UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Sobre Involuções Coloridas em Álgebras Associativas Graduadas

por

John Freddy Moreno Lozada

Brasília
2021

John Freddy Moreno Lozada

Sobre Involuções Coloridas em Álgebras Associativas Graduadas

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade de Brasília, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.
Orientador: Profa. Dra. Irina Sviridova.

Brasília
2021

Universidade de Brasília

Instituto de Ciências Exatas

Departamento de Matemática

Sobre Involuções Coloridas em Álgebras Associativas Graduadas

por

John Freddy Moreno Lozada*

Tese apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos para obtenção do grau de

DOUTOR EM MATEMÁTICA

Brasília, 29 de janeiro de 2021.

Comissão Examinadora:

____

Profa. Dra. Irina Sviridova - MAT/UnB (Orientadora)

____

Prof. Dr. Victor Petrogradskiy – MAT/UnB (Membro)

____

Prof. Dr. Vyacheslav Futorny – USP (Membro)

____

Prof. Dr. Diogo Diniz Pereira da Silva e Silva – UFCG (Membro)

* O autor foi bolsista da CAPES e do CNPq durante a elaboração desta dissertação.

Agradecimentos

Primeiramente a Deus, pelo seu amor perfeito, pela sua misericórdia e pela sua graça em nosso Senhor Jesus Cristo; por iluminar o meu caminho, pelas pessoas tão valiosas que tem colocado ao meu redor e por me permitir concluir este doutorado.

A minha família pelo seu apoio na medida do possível. À senhora Olga Cecília, pelo seu apoio incondicional, seu carinho, suas orações e incentivo a continuar enfrente. A Claudia, a Johana, à família Aponte Mora, à família Galeano Leal, à família Bustos Ríos e à família Oostra Guerrero, pelo seu carinho, sua amizade, incentivo e pelas orações.

Aos meus queridos amigos: Elaine, Genildo, Luiz, Marcos, Marcelo, Nathália, Renata, Sara, Tulio e Zé Carlos, pela sua amizade, companhia, cumplicidade, carinho, bom exemplo, por me encorajar nos momentos mais árduos e pelas orações.

A minha prezada orientadora, a professora doutora Irina Sviridova, por ter me aceitado orientar no doutorado, pelo seu exemplo como pesquisadora, pelo seu encaminhamento, liberdade e confiança durante a nossa pesquisa.

A seu Oswaldo e a dona Ariza, pela sua amizade, pelos jantares e pelas conversas na sua casa; especialmente nos Natais.

Aos honoráveis membros da banca examinadora, Victor Petrogradskiy, Vyacheslav Futorny e Diogo Diniz Pereira e Silva, pela leitura e pelas valiosas correções e sugestões que deram a uma melhora significativa deste trabalho.

Aos meus amigos, companheiros e colegas que a UnB me deu: Alan, Alancoc, Alejandro, Alex, Aldo, Andres, Andres, Bruno, Carlos, Christe, Claudia, Claudio, Cleber, Diego, Edwin, Fabian, Gabriel, Geraldo, Gláucia, Gustavo, Hércules, Henrique, Irving, Jailson, Jamer, Jesus, Josean, Karla, Kobayashi, Laena, Laís, Leo, Letícia, Lizeth, Marcio, Matheus, Melissa, Michell, Messi, Pavel, Quintino, Ricardo, Romulo, Santos, Valter, Walléf, Wellinton e Yerko.

Aos professores do departamento de Matemática da UnB, pelas suas valiosas aulas na minha formação e/ou pelo seu excelente exemplo como pesquisadores. Especialmente a: Alex, Alexei, Aline, Carlos, Cristina, Daniele, Emerson, Giovany, Igor, Jaqueline, Leandro, Martino, Maurício, Noraí, Pavel Shumyatsky, Pavel Zalesski, Raimundo, Ricardo Ruviaro, Said, Sheila e Yuri.

Aos meus queridos amigos, Leonardo, Felix e Vinícius pela sua amizade e pelas conversas de descontração.

Aos funcionários do departamento de Matemática da UnB, pelo seu valioso auxílio e colaboração no desenvolvimento das nossas atividades acadêmicas. Especialmente a Claudia, Ingride, Marta e Solange.

Ao CNPq e à CAPES pelo apoio financeiro.

A partir desta primeira, e em certo sentido, única regra da razão, (isto é) que
para aprender você deve querer aprender *e querendo isto ao não*
estar satisfeito com o que você já está inclinado a pensar, segue-se
um corolário que em si é digno de ser inscrito em
todas as paredes da cidade da filosofia:
"Não bloqueie o caminho da investigação"

Charles Sanders Peirce
Collected Papers of Charles Sanders Peirce (1931).

Resumo

Sejam G um grupo abeliano, $\mathcal{S}$ um anel associativo comutativo unitário com G-graduação trivial e com característica diferente de 2, $\mathbb{U}(\mathcal{S})$ o conjunto de todos os elementos invertíveis de $\mathcal{S}$ e $\sigma : G \times G \longrightarrow \mathbb{U}(\mathcal{S})$ um 2-cociclo antissimétrico. Nesta tese estudamos isomorfismos, σ-antiautomorfismos e involuções coloridas em $\mathcal{S}$-álgebras G-graduadas primitivas à direita com um ideal à direita G-graduado minimal. Apresentamos uma descrição dos isomorfismos nesta classe de álgebras em termos de isomorfismos triplos. Depois, caracterizamos σ-antiautomorfismos nestas álgebras, e observamos como esta caracterização está relacionada com formas sesquilineares graduadas com torção não degeneradas fracamente hermitianas. Finalmente, na mesma classe de álgebras estudamos as involuções coloridas e apresentamos uma descrição destas em termos de formas sesquilineares graduadas com torção não degeneradas hermitianas e anti-hermitianas.

Palavras-chave: Álgebra graduada primitiva; isomorfismo; σ-antiautomorfismo; involução colorida; forma sesquilinear não degenerada.

Abstract

Let G be an abelian group, $\mathcal{S}$ a unitary commutative associative ring with the trivial G-grading and characteristic different of 2, $\mathbb{U}(\mathcal{S})$ the set of all invertible elements of $\mathcal{S}$ and $\sigma : G \times G \longrightarrow \mathbb{U}(\mathcal{S})$ an antisymmetric 2-cocycle. In this PhD thesis we study isomorphisms, σ-antiautomorphisms and color involutions of the right primitive G-graded associative $\mathcal{S}$-algebras with a minimal G-graded right ideal. We give a description of graded isomorphisms in this class of algebras, in terms of triple isomorphisms. Afterwards, we characterize σ-antiautomorphisms of these algebras, and we observe how this characterization is related to nondegenerate weakly hermitian twisted sesquilinear graded forms. Finally, in the same class of algebras we characterize color involutions in terms of nondegenerate hermitian and anti-hermitian twisted sesquilinear graded forms.

Keywords: Primitive graded algebra; isomorphism; σ-antiautomorphims; color involution; nondegenerate sesquilinear form.

Sumário

Introdução

Uma involução em um anel ou em uma álgebra é um antiautomorfismo de ordem 2. Foi por volta de 1930 que Albert desenvolveu a teoria das álgebras centrais simples com involução baseado na teoria das álgebras simples iniciada, poucos anos antes, por Brauer, Noether, Hasse e o mesmo Albert. Especificamente, Albert introduziu essa teoria quando resolveu o problema de estabelecer condições necessárias e suficientes em uma álgebra de divisão sobre o corpo dos números racionais $\mathbb{Q}$, para que esta fosse uma álgebra de multiplicação [18]. Desde então, as involuções tem sido caracterizadas em outras famílias de álgebras e os conceitos de antiautomorfismo e de involução tem ganhado várias generalizações.

Sejam G um grupo abeliano, $\mathcal{S}$ um anel associativo comutativo unitário com G-graduação trivial e com característica diferente de 2, $\mathbb{U}(\mathcal{S})$ o conjunto de todos os elementos invertíveis de $\mathcal{S}$ e $\sigma : G \times G \longrightarrow \mathbb{U}(\mathcal{S})$ um 2-cociclo antissimétrico. Um σ-antiautomorfismo em uma $\mathcal{S}$-álgebra G-graduada $\mathcal{R}$ $\left(:= \bigoplus_{\alpha \in G} \mathcal{R}_\alpha\right)$ é uma aplicação $\mathcal{S}$-linear $\varphi : \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}$ que satisfaz:

- $(r_\alpha)^\varphi \in \mathcal{R}_\alpha$, para todo $r_\alpha \in \mathcal{R}_\alpha$ e qualquer $\alpha \in G$;
- $(r_\alpha r_\beta)^\varphi = \sigma(\alpha, \beta) r_\beta^\varphi r_\alpha^\varphi$, para todos $r_\alpha \in \mathcal{R}_\alpha$, $r_\beta \in \mathcal{R}_\beta$ e quaisquer $\alpha, \beta \in G$.

Se uma aplicação $*_\sigma : \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}$ é um σ-antiautomorfismo de ordem 2, isto é, se

- $(r_\alpha)^{*_\sigma *_\sigma} = r_\alpha$, para todo $r_\alpha \in \mathcal{R}_\alpha$ e qualquer $\alpha \in G$,

diz-se que $*_\sigma$ é uma σ-involução. Aqui ressaltamos que os conceitos de σ-antiautomorfismo e de σ-involução foram introduzidos em [22]. Salientamos também que estes conceitos estendem outras generalizações dos conceitos de antiautomorfismo e de involução em anéis e álgebras. Em particular, se σ é um bicaráter antissimétrico, isto é, se σ é um 2-cociclo antissimétrico que satisfaz $\sigma(\alpha+\beta, \gamma) = \sigma(\alpha, \gamma)\sigma(\beta, \gamma)$ e $\sigma(\alpha, \beta+\gamma) = \sigma(\alpha, \beta)\sigma(\alpha, \gamma)$ para todos $\alpha, \beta, \gamma \in G$, então uma σ-involução $*_\sigma$ é chamada de involução colorida [10]. Se $\sigma(\alpha, \beta) = 1$ para todos $\alpha, \beta \in G$, então $*_\sigma$ é chamada de involução graduada [11]. Se $G = \mathbb{Z}_2$ (ou $G = \mathbb{Z}_3$) e $\sigma(\overline{\alpha}, \overline{\beta}) = (-1)^{\alpha\beta}$ para todos $\overline{\alpha}, \overline{\beta} \in G$ com $\alpha, \beta \in \{0, 1\}$ (ou com $\alpha, \beta \in \{0, 1, 2\}$), então $*_\sigma$ é chamada de superinvolução [24] (ou de $\mathbb{Z}_3$-involução [16]). Logo, involuções graduadas, superinvoluções e $\mathbb{Z}_3$-involuções são σ-involuções para 2-cociclos específicos. O termo de involução colorida é usado na literatura para quando σ é um bicaráter antissimétrico fixo (neste trabalho, quando σ é subentendido como sendo um bicaráter antissimétrico, usaremos o termo "σ-involução" para uma involução colorida e também, por vezes, usaremos o termo "σ-involução" no contexto mais geral, quando σ não é necessariamente um bicaráter antissimétrico).

Se $*_\sigma : \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}$ é uma involução graduada, um elemento $r \in \mathcal{R}$ é dito anti-simétrico se $r^{*_\sigma} = -r$ e é dito simétrico se $r^{*_\sigma} = r$. O conjunto de todos os elementos anti-simétricos, denotado por $K(\mathcal{R}, *_\sigma)$, é uma álgebra de Lie graduada com o colchete $[a, b] := ab - ba$. Por outro lado, o conjunto de todos os elementos simétricos, denotado por $H(\mathcal{R}, *_\sigma)$, é uma álgebra de Jordan graduada com o produto $a \circ b := ab + ba$. Ainda, num contexto mais geral, quando σ é um bicaráter antissimétrico e $*_\sigma$ é uma involução colorida, temos que $H(\mathcal{R}, *_\sigma)$ é uma álgebra de Jordan Colorida com o produto $a_\alpha \circ b_\beta := a_\alpha b_\beta + \sigma(\alpha, \beta) b_\beta a_\alpha$. Em [10] se estudaram as álgebras de Jordan coloridas simples obtidas de álgebras associativas graduadas simples com involução colorida. Além disso, em [9], se estudaram os subconjuntos nilpotentes de álgebras graduadas com involução colorida.

Quando G é finito, $\mathbb{F}$ é um corpo algebricamente fechado e $\mathcal{R} = \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ é a álgebra das matrizes sobre o corpo $\mathbb{F}$, os fatos do parágrafo anterior são essenciais na classificação das G-graduações em algumas álgebras de Lie simples clássicas de dimensão finita, e nas álgebras de Jordan especiais simples. Logo, com esse objetivo, os antiautomorfismos graduados, e as involuções graduadas na álgebra de matrizes $\mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ tem sido amplamente estudados [11].

Já em [2], Bahturin, Kochetov e Escudero classificaram, a menos de isomorfismo e a menos de equivalência, as involuções em álgebras reais graduadas simples de divisão com dimensão finita. Esta classificação foi usada por Bahturin e Zaicev, em [7], para classificar graduações nas álgebras de Lie reais clássicas. Ainda, quando $\mathbb{F}$ é um corpo algebricamente fechado com característica diferente de 2, Fidelis, Gonçalves, Diniz e Yasumura, em [13], classificaram as involuções e as involuções graduadas em álgebras de matrizes triangulares superiores em blocos. Além disso, em [16], Jaber estudou as $\mathbb{Z}_3$-involuções na álgebra de matrizes $\mathcal{M}_{p+q+p}(\Delta)$, quando Δ é uma álgebra de divisão. Em [26], Sviridova descreveu todas as $\mathbb{F}$-álgebras $*_{gr}$-graduadas simples de dimensão finita, para $G = \mathbb{Z}_q$, quando q é um número primo ou $q = 4$, $\mathbb{F}$ um corpo algebricamente fechado com característica $\neq 0$ e $*_{gr}$ uma involução graduada.

Alias, caracterizações dos antiautomorfismos graduados e involuções graduadas tem sido feitas nas álgebras matriciais, estes objetos também tem sido intensamente estudados em anéis (superanéis) primitivos e álgebras (superálgebras) primitivas. A teoria estrutural dos anéis primitivos com ideais unilaterais minimais tem sido bastante desenvolvida e pode ser consultada em [15], [17], [19] e [25]. Em particular, em [19], Theorem 4.6.8, temos o Teorema de Kaplansky o qual caracteriza involuções em anéis primitivos à direita com um ideal à direita minimal em termos de formas não degeneradas e alternadas.

Motivado pela caracterização das involuções em anéis primitivos com ideais unilaterais minimais, Racine, em [24], caracterizou os superanéis primitivos com um superideal unilateral minimal e com superinvolução em termos de superformas hermitianas e anti-hermitianas não degeneradas. Posteriormente, Bahturin, M. Tvalavadze e T. Tvalavadze, em [4], descreveram as superálgebras simples de dimensão finita com superinvolução, quando o corpo base é algebricamente fechado e com característica diferente de 2. Em [12], Elduque e Villa provaram versões graduadas dos teoremas clássicos de Albert e Albert-Riehm sobre a existência de superinvoluções em superálgebras associativas centrais simples com dimensão finita.

Subsequentemente, em [1], Bahturin, Bresǎr e Kochetov, trabalhando sobre um corpo base algebricamente fechado de característica diferente de 2, com o propósito de classificar, a menos de isomorfismo, todas as graduações da álgebra de Lie finitária simples de transformações lineares (linear especial, ortogonal e simplética) em um espaço vetorial de dimensão infinita, classificaram antiautomorfismos e involuções graduadas em anéis graduados primitivos (álgebras graduadas primitivas) à esquerda com um ideal à esquerda graduado minimal, em termos de formas sesquilineares graduadas não degeneradas fracamente hermitianas.

Incentivadas, principalmente pelo desenvolvimento teórico de Racine em [22], Souza e Sviridova estudaram a estrutura dos anéis graduados primitivos (álgebras graduadas primitivas) à direita com um ideal à direita graduado minimal e apresentaram um resultado onde caracterizam estes anéis (álgebras) envolvendo formas bilineares graduadas não degeneradas [[22], Teorema 3.4.2]. Anotamos aqui que, independentemente, Bahturin, Bresăr e Kochetov, em [1], tinham obtido uma caracterização análoga. Também em [22], considerando um grupo cíclico finito de ordem prima $G = \mathbb{Z}_p$, Souza e Sviridova caracterizaram os anéis G-graduados primitivos (álgebras G-graduadas primitivas) à direita com um ideal à direita graduado minimal e com uma σ-involução em termos de formas sesquilineares graduadas não degeneradas hermitianas e anti-hermitianas [[22], Teorema 4.3.1].

Ressaltando que ainda existem muitos outros trabalhos que envolvem investigações sobre antiautomorfismos e involuções (e suas respectivas generalizações) em anéis e álgebras, que não foram mencionados acima, fica claro que o estudo deles é muito importante. Além do interesse intrínseco por estudar estes objetos, temos visto que eles tem sido fundamentais no estudo de outros conceitos em álgebras centrais simples, superanéis e superálgebras, álgebras de matrizes, álgebras de Lie e álgebras de Jordan.

Nesta tese nos focamos em estudar σ-antiautomorfismos e involuções coloridas em $\mathcal{S}$-álgebras G-graduadas primitivas à direita com um ideal à direita G-graduado minimal. Motivados, especialmente, pelos trabalhos de Souza e Sviridova em [22] e de Bahturin, Bresăr e Kochetov em [1], nós estudamos sob que condições duas $\mathcal{S}$-álgebras G-graduadas primitivas à direita simples com um ideal à direita G-graduado minimal são isomorfas. Também, nestas mesmas álgebras, caracterizamos σ-antiautomorfismos em termos de formas sesquilineares graduadas com torção não degeneradas fracamente hermitianas e caracterizamos involuções coloridas em termos de formas sesquilineares graduadas com torção não degeneradas hermitianas e anti-hermitianas.

Sejam G um grupo abeliano, $\mathbb{F}$ um corpo e $\sigma : G \times G \longrightarrow \mathbb{U}(\mathcal{S})$ um 2-cociclo antissimétrico satisfazendo $\sigma(\alpha, -\alpha)^2 = 1$ para todo $\alpha \in G$. Uma tripla (Δ, V, W) significa que Δ é uma $\mathcal{S}$-álgebra graduada de divisão, ${}_\Delta V$ é um Δ-espaço G-graduado à esquerda e W_Δ é um Δ-espaço G-graduado à direita. Se $\langle -, - \rangle_\gamma : V \times W \longrightarrow \Delta$ é uma forma Δ-bilinear homogênea de grau γ não degenerada associada à tripla (Δ, V, W) (veja a Definição 2.5), temos que o conjunto de todas as σ-adjuntas, denotado por $\mathcal{L}_W^{gr_\sigma}(V)$, é uma $\mathcal{S}$-subálgebra G-graduada da $\mathcal{S}$-álgebra G-graduada $End_\Delta^{gr}({}_\Delta V)$. Além disso, o conjunto de todos os elementos de $\mathcal{L}_W^{gr_\sigma}(V)$ com posto finito, denotado por $\mathcal{F}_W^{gr_\sigma}(V)$, é um ideal G-graduado de $\mathcal{L}_W^{gr_\sigma}(V)$. Salientamos aqui que os conceitos de σ-adjunta e de σ-coadjunta foram introduzidos por Souza e Sviridova em [22]. Agora, com a definição dos objetos anteriores, estamos prontos para apresentar o resultado que caracteriza $\mathcal{S}$-álgebras G-graduadas primitivas à direita com um ideal à direita G-graduado minimal. Este resultado é a versão para $\mathcal{S}$-álgebras do Teorema 3.4.2 apresentado em [22].

Teorema A (Teorema 2.28). *Sejam $\sigma : G \times G \longrightarrow U(\mathcal{S})$ um 2-cociclo antissimétrico satisfazendo $\sigma(\alpha, -\alpha)^2 = 1$, para cada $\alpha \in G$, e $\mathcal{R}$ uma $\mathcal{S}$-álgebra G-graduada. Então, $\mathcal{R}$ é graduada primitiva à direita com um ideal à direita graduado minimal se, e somente se, existem um elemento $\gamma \in G$ e uma forma Δ-bilinear homogênea de grau γ não degenerada $\langle -, - \rangle_\gamma : V \times W \longrightarrow \Delta$ associada a uma tripla (Δ, V, W), tal que*

$$\mathcal{F}_W^{gr_\sigma}(V) \subseteq \mathcal{R} \subseteq \mathcal{L}_W^{gr_\sigma}(V).$$

Além disso, quando temos a relação $\mathcal{F}_W^{gr_\sigma}(V) \subseteq \mathcal{R} \subseteq \mathcal{L}_W^{gr_\sigma}(V)$, então $\mathcal{F}_W^{gr_\sigma}(V)$ é o único ideal graduado minimal de $\mathcal{R}$.

Dados um $\mathcal{S}$-módulo G-graduado M $\left(:= \bigoplus_{\alpha \in G} M_\alpha\right)$ e um elemento fixo $g \in G$, temos que o shift na G-graduação de M, dada pelo elemento g, é definido como $M^{[g]} := \bigoplus_{\alpha \in G} M_\alpha^{[g]}$, onde $M_\alpha^{[g]} = M_{\alpha - g}$ para cada $\alpha \in G$. Dadas duas formas bilineares homogêneas de grau γ não degeneradas $\langle -, - \rangle_\gamma : V \times W \longrightarrow \Delta$ e $\langle -, - \rangle'_\gamma : V' \times W' \longrightarrow \Delta'$ associadas às triplas (Δ, V, W) e (Δ', V', W'), respectivamente, dizemos que uma tripla (ψ_0, ψ_1, ψ_2) é um isomorfismo triplo de (Δ, V, W) para (Δ', V', W') se:

- $\psi_0 : \Delta \longrightarrow \Delta'$ é um isomorfismo graduado de $\mathcal{S}$-álgebras graduadas de divisão;
- $\psi_1 : V \longrightarrow V'$ e $\psi_2 : W \longrightarrow W'$ são isomorfismos graduados de $\mathcal{S}$-módulos graduados,

tais que

$$\langle \psi_1(v_\alpha), \psi_2(w_\beta) \rangle'_\gamma = \psi_0\left(\langle v_\alpha, w_\beta \rangle_\gamma\right)$$

para todos $v_\alpha \in V_\alpha, w_\beta \in W_\beta$ e quaisquer $\alpha, \beta \in G$.

Enfatizamos que o conceito de isomorfismo triplo foi introduzido em [1] ainda num contexto mais geral, quando o grupo G não é necessariamente abeliano. Agora, já estamos preparados para apresentar nosso teorema que estabelece quando duas $\mathcal{S}$-álgebras simples descritas pelo **Teorema A** são isomorfas. Este resultado é um resultado semelhante a um resultado de [1], Theorem 3.6, que é apresentado para grupos arbitrários e para um 2-cociclo trivial, enquanto aqui, nos apresentamos o **Teorema B** para grupos abelianos e 2-cociclos antissimétricos arbitrários.

Teorema B (Teorema 3.14). *Sejam $\langle -, - \rangle_\gamma : V \times W \longrightarrow \Delta$, associadas à tripla (Δ, V, W), e $\langle -, - \rangle'_\gamma : V' \times W' \longrightarrow \Delta'$, associadas à tripla (Δ', V', W'), duas formas bilineares homogêneas de grau γ não degeneradas. Se $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}'$ são duas $\mathcal{S}$-álgebras G-graduadas, tais que*

$$\mathcal{F}_W^{gr_\sigma}(V) \subseteq \mathcal{R} \subseteq \mathcal{L}_W^{gr_\sigma}(V) \text{ e } \mathcal{F}_{W'}^{gr_\sigma}(V') \subseteq \mathcal{R}' \subseteq \mathcal{L}_{W'}^{gr_\sigma}(V'),$$

e se $\Psi : \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}'$ é um isomorfismo graduado de $\mathcal{S}$-álgebras G-graduadas, então existem um elemento $g \in G$ e um isomorfismo triplo (ψ_0, ψ_1, ψ_2) de $\left(\Delta, V^{[g]}, W^{[-g]}\right)$ para (Δ', V', W'), tais que

$$\Psi(r) = \psi_1^{-1} \cdot r \cdot \psi_1, \text{ para todo } r \in \mathcal{R}. \tag{1}$$

Além disso, se outro elemento $h \in G$ e outro isomorfismo triplo $(\psi_0', \psi_1', \psi_2')$, de $\left(\Delta, V^{[h]}, W^{[-h]}\right)$ para (Δ', V', W'), definem Ψ como em (1), então existe um elemento homogêneo não nulo $d' \in \Delta'$ tal que

- $h = g + \mathbf{deg}(d')$;
- $\psi_0'(x) = d'\psi_0(x)(d')^{-1}$ *para todo* $x \in \Delta$;
- $(v)\psi_1' = d'(v)\psi_1$ *para todo* $v \in V$;
- $\psi_2'(w) = \psi_2(w)(d')^{-1}$ *para todo* $w \in W$.

Como uma recíproca parcial, se $g \in G$ e (ψ_0, ψ_1, ψ_2) é um isomorfismo triplo de $\left(\Delta, V^{[g]}, W^{[-g]}\right)$ para (Δ', V', W'), então existe um isomorfismo graduado de $\mathcal{S}$-álgebras G-graduadas

$$\Psi : End^{gr}_{\Delta}(V^{[g]}) \longrightarrow End^{gr}_{\Delta'}(V'),$$

definido pela correspondência $a_\tau \longmapsto \psi_1^{-1} \cdot a_\tau \cdot \psi_1$, tal que

$$\Psi\left(\mathcal{L}^{gr_\sigma}_{W^{[-g]}}(V^{[g]})\right) = \mathcal{L}^{gr_\sigma}_{W'}(V') \ \text{ e } \ \Psi\left(\mathcal{F}^{gr_\sigma}_{W^{[-g]}}\left(V^{[g]}\right)\right) = \mathcal{F}^{gr_\sigma}_{W'}(V').$$

Para a descrição dos σ-antiautomorfismos, introduzimos o conceito de forma sesquilinear homogênea com torção não degenerada fracamente hermitiana (veja as Definições 3.15 e 3.24). Este generaliza o conceito de forma sesquilinear homogênea não degenerada fracamente hermitiana, introduzida em [1]. Apontamos que o **Teorema C** é uma generalização do teorema [[1], Theorem 3.16], que caracteriza antiautomorfismos graduados, isto é, σ-antiautomorfismos quando σ é o 2-cociclo antissimétrico definido por $\sigma(\alpha, \beta) = 1$, para todos $\alpha, \beta \in G$. Logo, a generalização consiste em que no **Teorema C** o σ é qualquer 2-cociclo antissimétrico satisfazendo $\sigma(\alpha, -\alpha)^2 = 1$ para todo $\alpha \in G$.

Teorema C (Teorema 3.25). *Sejam G um grupo abeliano, $\sigma : G \times G \longrightarrow \mathbb{U}(\mathcal{S})$ um 2-cociclo antissimétrico satisfazendo $\sigma(\alpha, -\alpha)^2 = 1$ para todo $\alpha \in G$, $\langle -, - \rangle : V \times W \longrightarrow \Delta$ uma forma Δ-bilinear graduada associada à tripla (Δ, V, W) e $\mathcal{R}$ uma $\mathcal{S}$-álgebra G-graduada tal que $\mathcal{F}^{gr_\sigma}_W(V) \subseteq \mathcal{R} \subseteq \mathcal{L}^{gr_\sigma}_W(V)$. Se $\Phi : \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}$ é um σ-antiautomorfismo, então existem um σ-antiautomorfismo $\psi_0 : \Delta \longrightarrow \Delta$ e uma forma ψ_0-sesquilinear graduada com torção não degenerada fracamente hermitiana $B : V \times V^{[g]} \longrightarrow \Delta$, para algum $g \in G$, tal que:*

(i) para todo $r_\tau \in R_\tau$, temos que $\Phi(r_\tau)$ é a σ-coadjunta de r_τ a respeito de B, isto é,

$$B(u_\alpha, v_\beta r_\tau) = \sigma(\beta, \tau) B(u_\alpha \Phi(r_\tau), v_\beta), \ \text{ para todos } u_\alpha \in V_\alpha, v_\beta \in V_\beta^{[g]};$$

(ii) $\langle -, W \rangle$ é a imagem da aplicação

$$\begin{array}{ccccccc} V & \longrightarrow & V^{gr_\sigma *} & & & & \\ u & \longmapsto & f_u : & V & \longrightarrow & \Delta & \\ & & & v & \longmapsto & f_u(v) := B(v, u). & \end{array}$$

Além disso, se $\varphi_0' : \Delta \longrightarrow \Delta$ *é um outro* σ*-antiautomorfismo e* $B' : V \times V^{[g]} \longrightarrow \Delta$ *é uma outra forma* φ_0'*-sesquilinear graduada com torção não degenerada fracamente hermitiana, que definem* Φ *e* $\langle -, W\rangle$ *como nos itens (i) e (ii) acima, então existe um elemento homogêneo* $0 \neq d \in \Delta$ *tal que:*

- $B' = \sigma(0,0)Bd$*;*
- $\varphi_0'(x) = d\psi_0(x)d^{-1}$ *para todo* $x \in \Delta$*.*

Como uma recíproca parcial, se $\psi_0 : \Delta \longrightarrow \Delta$ *é um* σ*-antiautomorfismo e, para algum* $g \in G$*,* $B : V \times V^{[g]} \longrightarrow \Delta$ *é uma forma* ψ_0*-sesquilinear graduada com torção não degenerada fracamente hermitiana, então existe uma forma* Δ*-bilinear graduada não degenerada* $\langle -,-\rangle : V^{[g]} \times W^{[-g]} \longrightarrow \Delta$ *associada à tripla* $\left(\Delta, V^{[g]}, W^{[-g]}\right)$*, sendo* $W := \{B(-,u) = f_u : \ u \in V\}$*, tal que a* σ*-coadjunta a respeito de* B *define um* σ*-antiautomorfismo*

$$\Phi : \mathcal{L}^{gr_\sigma}_{W^{[-g]}}(V^{[g]}) \longrightarrow \mathcal{L}^{gr_\sigma}_{W^{[-g]}}(V^{[g]}),$$

e $\Phi\left(\mathcal{F}^{gr_\sigma}_{W^{[-g]}}(V^{[g]})\right) = \mathcal{F}^{gr_\sigma}_{W^{[-g]}}(V^{[g]})$*.*

Seja $\epsilon : G \times G \longrightarrow \mathbb{U}(\mathcal{S})$ um bicaráter antissimétrico. Para a caracterização das involuções coloridas, generalizamos o conceito de forma sesquilinear homogênea com torção não degenerada ξ-hermitiana, introduzido em [22] (veja a Definição 4.1). Ademais, introduzimos os conceitos de ϵ-semiadjunta e ϵ-semicoadjunta associados a uma forma sesquilinear homogênea com torção não degenerada ξ-hermitiana (veja a Definição 4.4). Temos que, o conjunto de todas as ϵ-semiadjuntas, denotado por $\mathcal{L}^{gr_{*\epsilon}}_V$, é uma $\mathcal{S}$-subálgebra graduada da $\mathcal{S}$-álgebra graduada $End^{gr}_\Delta({}_\Delta V)$. Além disso, temos que o conjunto de todas as ϵ-semiadjuntas de posto finito, denotado por $\mathcal{F}^{gr_{*\epsilon}}_V$, é um ideal G-graduado de $\mathcal{L}^{gr_{*\epsilon}}_V$. Com isso, estamos preparados para apresentar a nossa caraterização das involuções coloridas.

Teorema D (Teorema 4.21). *Seja* G *um grupo abeliano e* $\epsilon : G \times G \longrightarrow \mathbb{U}(\mathcal{S})$ *um bicaráter antissimétrico. Então, uma* $\mathcal{S}$*-álgebra* G*-graduada* $\mathcal{R}$ *é primitiva à direita com um ideal à direita* G*-graduado minimal e com uma* ϵ*-involução* $\star_\epsilon : \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}$ *se, e somente se, existem um elemento* $g \in G$*, uma* $\mathcal{S}$*-álgebra* G*-graduada de divisão* Δ *com uma* ϵ*-involução* $\bar{\bullet} : \Delta \longrightarrow \Delta$*, um* Δ*-espaço* ${}_\Delta V$ *e uma forma sesquilinear graduada com torção não degenerada hermitiana ou anti-hermitiana* $B : V \times V^{[g]} \longrightarrow \Delta$*, tais que*

$$\mathcal{F}^{gr_{*\epsilon}}_V \subseteq \mathcal{R} \subseteq \mathcal{L}^{gr_{*\epsilon}}_V$$

e $\mathcal{R}$ *é invariante pela ação da* ϵ*-semiadjunta associada a* B*.*

Agora explicaremos como a tese está organizada. No Capítulo 1, apresentamos as preliminares necessárias para o desenvolvimento de todo o trabalho. Na Seção 1.1, expõem-se os conceitos básicos de anéis graduados, $\mathcal{S}$-álgebras graduadas, módulos graduados e bimódulos graduados, e aproveitarmos para fixarmos algumas notações. Na Seção 1.2, fazemos uma recopilação de alguns resultados sobre anéis graduados semiprimos. Apresentamos eles sem demonstração mas colocamos no inicio da seção as referências onde as demonstrações podem ser encontradas. Finalizamos este capítulo com a Seção 1.3, introduzindo o conceito de 2-cociclo antissimétrico e de bicaráter antissimétrico, dois conceitos fundamentais para definir σ-antiautomorfismos e involuções coloridas no capítulo seguinte.

No Capítulo 2, apresentamos parte da teoria desenvolvida no Capítulo 3 de [22], mas desta vez para as $\mathcal{S}$-álgebras graduadas. Na Seção 2.1, se introduzem as formas bilineares homogêneas não degeneradas e se apresentam alguns resultados relacionados com estas formas. Em particular, se caracterizam os elementos de $\mathcal{F}_W^{gr_\sigma}(V)$ e se mostra que se $\mathcal{R}$ é uma $\mathcal{S}$ álgebra graduada satisfazendo $\mathcal{F}_W^{gr_\sigma}(V) \subseteq \mathcal{R} \subseteq \mathcal{L}_W^{gr_\sigma}(V)$, então $\mathcal{R}$ é uma $\mathcal{S}$-álgebra graduada primitiva à direita. Na Seção 2.2, introduzimos o conceito de σ-involução e apresentamos alguns exemplos. Já na última seção deste capítulo, encontra-se o **Teorema A** com a sua demonstração.

No Capítulo 3, estudamos os σ-antiautomorfismos. Na Seção 3.1, provamos alguns fatos básicos relacionados às formas bilineares graduadas não degeneradas e ao conceito de isomorfismo triplo. Na Seção 3.2, apresentamos o Teorema do Isomorfismo: **Teorema B**. Finalmente, na Seção 3.3, introduzimos o conceito de forma sesquilinear homogênea com torção não degenerada fracamente hermitiana e estudamos os σ-antiautomorfismos no **Teorema C**.

Por fim, no Capítulo 4, estudamos as involuções coloridas. Na Seção 4.1, introduzimos os conceitos de forma sesquilinear homogênea com torção não degenerada ξ-hermitiana, ϵ-semiadjunta e ϵ-semicoadjunta. Finalizamos esta seção provando que se $\mathcal{R}$ é uma $\mathcal{S}$-álgebra graduada que satisfaz $\mathcal{F}_V^{gr_{*\epsilon}} \subseteq \mathcal{R} \subseteq \mathcal{L}_V^{gr_{*\epsilon}}$ e $\mathcal{R}$ é invariante pela ação da ϵ-semiadjunta associada à forma, então $\mathcal{R}$ é graduada primitiva à direita e a ϵ-semiadjunta é uma involução colorida em $\mathcal{R}$. Na Seção 4.2, demonstramos a recíproca: isto é, que se $\mathcal{R}$ é uma álgebra graduada primitiva à direita com um ideal à direita graduado minimal e possui uma involução colorida $\star_\epsilon : \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}$, então existe uma forma sesquilinear graduada com torção não degenerada hermitiana ou anti-hermitiana tal que $\star_\epsilon$ é a ϵ-semiadjunta e $\mathcal{F}_V^{gr_{*\epsilon}} \subseteq \mathcal{R} \subseteq \mathcal{L}_V^{gr_{*\epsilon}}$. Por fim, na Seção 4.3, apresentamos o **Teorema D** com a caracterização das involuções coloridas.

Capítulo 1

Preliminares

Neste primeiro capítulo apresentamos os conceitos básicos fixando suas notações para o desenvolvimento de todo o trabalho.

1.1 Conceitos Básicos

No decorrer de todo o trabalho, $(G, +)$ será um grupo abeliano, $\mathcal{S}$ um anel associativo comutativo unitário com G-graduação trivial e $\mathbb{U}(\mathcal{S})$ o conjunto de todos os elementos invertíveis de $\mathcal{S}$. A menos que se diga o contrário, os anéis e álgebras aqui encontrados serão associativos e associativas, respectivamente, com característica diferente de 2.

Lembramos que uma $\mathcal{S}$-álgebra associativa (ou simplesmente uma $\mathcal{S}$-álgebra) é um grupo abeliano aditivo $(\mathcal{A}, +)$ que tem estrutura de anel associativo e de $\mathcal{S}$-módulo, tal que

$$s \cdot (xy) = (s \cdot x)y = x(s \cdot y),$$

para todos $s \in \mathcal{S}$ e $x, y \in A$. Além disso, dizemos que $\mathcal{A}$ é unitária se contém um elemento $1_{\mathcal{A}} \in \mathcal{A}$ tal que

$$1_{\mathcal{A}}x = x = x1_{\mathcal{A}},$$

para todo elemento $x \in \mathcal{A}$. Em particular, observamos que no caso em que $\mathcal{S} = \mathbb{Z}$, $\mathcal{A}$ é um anel associativo e o grupo abeliano aditivo $(\mathcal{A}, +)$ é um $\mathbb{Z}$-módulo. Já no caso em que $\mathcal{S} = \mathbb{F}$ é um corpo, $\mathcal{A}$ é uma $\mathbb{F}$-álgebra e o grupo abeliano aditivo $(\mathcal{A}, +)$ é um $\mathbb{F}$-espaço vetorial.

Anéis Graduados e Álgebras Graduadas

Um anel ($\mathcal{S}$-álgebra) $\mathcal{R}$ é G-graduado (G-graduada) se é uma soma direta de grupos abelianos ($\mathcal{S}$-módulos) $\mathcal{R} = \bigoplus_{\alpha \in G} \mathcal{R}_\alpha$ tal que $\mathcal{R}_\alpha \mathcal{R}_\beta \subseteq \mathcal{R}_{\alpha+\beta}$, para todos $\alpha, \beta \in G$. Quando $\mathcal{R}_\alpha = (0)$ para todo $\alpha \neq 0$ e $\mathcal{R}_0 = \mathcal{R}$, dizemos que a G-graduação é trivial e, no caso contrário, dizemos que a G-graduação é não trivial.

No caso particular em que $G = \mathbb{Z}_2$, na literatura matemática, $\mathcal{R}$ é chamado de superanel (superálgebra). Se $0 \neq r \in \mathcal{R}_\alpha$, para algum $\alpha \in G$, r é denominado um elemento homogêneo de grau α de $\mathcal{R}$. Neste caso escrevemos $\mathbf{deg}\,(r) := \alpha$. O conjunto $\bigcup\limits_{\alpha\in G}\mathcal{R}_\alpha$, de todos os elementos homogêneos de $\mathcal{R}$, é denotado por $\mathfrak{H}(\mathcal{R})$. Se $r \in \mathcal{R}\left(:= \bigoplus\limits_{\alpha\in G}\mathcal{R}_\alpha\right)$ e $r = \sum\limits_{\alpha\in G} r_\alpha$, cada elemento $0 \neq r_\alpha \in \mathcal{R}_\alpha$ é chamado de componente homogênea de grau α de r. Quando $\mathcal{X}$ é um subanel ($\mathcal{S}$-subálgebra), ideal bilateral, ideal à direita ou ideal à esquerda, dizemos que $\mathcal{X}$ é graduado (graduada) se $\mathcal{X} = \bigoplus\limits_{\alpha\in G}\mathcal{X}_\alpha$, sendo $\mathcal{X}_\alpha := \mathcal{X} \cap \mathcal{R}_\alpha$, para cada $\alpha \in G$.

Se $\mathcal{R}$ é um anel graduado unitário ($\mathcal{S}$-álgebra graduada unitária), lembramos que:

(i) $1 \in \mathcal{R}_0$;

(ii) se $r_\alpha \in \mathcal{R}_\alpha$ tem inverso r_α^{-1} em $\mathcal{R}$, então $r_\alpha^{-1} \in \mathcal{R}_{-\alpha}$.

Um anel graduado unitário ($\mathcal{S}$-álgebra graduada unitária) $\mathcal{R}$ é graduado (graduada) de divisão se todos os seus elementos homogêneos não nulos são invertíveis. Neste caso, observamos que $\mathcal{R}_0$ é anel ($\mathcal{S}$-álgebra) de divisão.

Se $\mathcal{R}$ é um anel graduado (uma $\mathcal{S}$-álgebra graduada), o anel graduado oposto ($\mathcal{S}$-álgebra graduada oposta) de $\mathcal{R}$, que denotamos por $\mathcal{R}^{op_{gr}}$, é o grupo aditivo $(\mathcal{R}, +)$ com produto dado por

$$r_\alpha \circ_{op_{gr}} r_\beta = r_\beta r_\alpha, \text{ para todos } r_\alpha \in \mathcal{R}_\alpha,\, r_\beta \in \mathcal{R}_\beta \text{ e quaisquer } \alpha, \beta \in G.$$

Sejam $A = \bigoplus\limits_{\alpha\in G} A_\alpha$ e $B = \bigoplus\limits_{\alpha\in G} B_\alpha$ dois anéis graduados ($\mathcal{S}$-álgebras graduadas). Um homomorfismo de anéis ($\mathcal{S}$-álgebras), $\phi : A \longrightarrow B$, é um homomorfismo homogêneo de grau $\beta \in G$ se $\phi\,(A_\alpha) \subset B_{\alpha+\beta}$, para todo $\alpha \in G$. Quando $\beta = 0$, dizemos que ϕ é um homomorfismo graduado. Dizemos que ϕ é um monomorfismo, epimorfismo ou isomorfismo homogêneo se, respectivamente, ϕ é injetor, sobrejetor ou bijetor. Temos que o conjunto de todos os homomorfismo homogêneos de grau β de A em B, denotado por $Hom\,(A,B)_\beta$, é um grupo abeliano aditivo ($\mathcal{S}$-módulo). A soma direta $Hom^{gr}(A,B) := \bigoplus\limits_{\beta\in G} Hom\,(A,B)_\beta$ é um anel G-graduado (uma $\mathcal{S}$-álgebra G-graduada).

Módulos Graduados

Lembramos agora de alguns conceitos básicos para módulos graduados à direita. Estes conceitos também podem ser definidos de forma similar para módulos graduados à esquerda.

Seja $\mathcal{R}$ um anel graduado ($\mathcal{S}$-álgebra graduada). Um $\mathcal{R}$-módulo à direita M é um $\mathcal{R}$-módulo à direita G-graduado se é uma soma direta de grupos abelianos ($\mathcal{S}$-módulos) $M = \bigoplus\limits_{\alpha\in G} M_\alpha$ tal que $M_\alpha \mathcal{R}_\beta \subseteq M_{\alpha+\beta}$, para todos $\alpha, \beta \in G$. O conjunto $\bigcup\limits_{\alpha\in G} M_\alpha$, de todos os elementos homogêneos de M, é denotado por $\mathfrak{H}\,(M)$. Se $m \in M\left(:= \bigoplus\limits_{\alpha\in G} M_\alpha\right)$ e $m = \sum\limits_{\alpha\in G} m_\alpha$, cada elemento não nulo $m_\alpha \in M_\alpha$ é chamado de componente homogênea de grau $\mathbf{deg}\,(m_\alpha) = \alpha$ de m.

Seja $M = \bigoplus_{\alpha \in G} M_\alpha$ um $\mathcal{R}$-módulo à direita graduado. Dizemos que um submódulo N de M é graduado se $N = \bigoplus_{\alpha \in G} N_\alpha$, onde $N := N \cap M_\alpha$ para cada $\alpha \in G$. Quando $M\mathcal{R} \neq (0)$ e os únicos submódulos graduados de M são (0) e o próprio M, dizemos que M é um $\mathcal{R}$-módulo à direita graduado irredutível.

Quando M é um $\mathcal{R}$-módulo à direita graduado, o anulador à direita de M, denotado por $Ann^r_{\mathcal{R}}(M)$, é definido por

$$Ann^r_{\mathcal{R}}(M) = \{r \in \mathcal{R} : mr = 0, \text{ para todo } m \in M\}.$$

Aqui anotamos que $Ann^r_{\mathcal{R}}(M)$ é um ideal bilateral graduado de $\mathcal{R}$. O anulador à esquerda para $\mathcal{R}$-módulos à esquerda também se define de forma similar e este, por sua vez, é um ideal bilateral graduado de $\mathcal{R}$. Caso $Ann^r_{\mathcal{R}}(M) = (0)$, dizemos que M é um $\mathcal{R}$-módulo à direita graduado fiel.

Sejam Δ um anel graduado ($\mathcal{S}$-álgebra graduada) de divisão e M um Δ-módulo à direita graduado. Um conjunto de elementos homogêneos $\{m_1, m_2, \ldots, m_k\}$ de M é dito Δ-dependente, ou linearmente dependente sobre Δ, se existem elementos homogêneos não todos nulos $d_1, d_2, \ldots, d_k$ de Δ tais que $\sum_{i=1}^{k} m_i d_i = 0$. Lembramos que Δ-módulos à direita (à esquerda) graduados são módulos livres. Portanto, alguns conceitos básicos da álgebra linear, como por exemplo conjunto gerador e independência linear, continuam valendo para Δ-módulos graduados. Também vale o fato de que todas as bases (homogênenas) têm a mesma cardinalidade e, consequentemente, podemos definir a dimensão (ou posto) de M sobre Δ, que denotamos $dim^{gr}_{\Delta}(M)$, como sendo a cardinalidade de uma de suas bases. Mais detalhes sobre estes conceitos podem ser consultados nos livros [21] e [27]. Em [21], por exemplo, se M é um Δ-módulo à direita graduado, encontramos que são equivalentes os seguintes itens:

(i) M é finitamente gerado sobre Δ;

(ii) M tem base finita sobre Δ;

(iii) M tem uma base homogênea finita sobre Δ.

Em virtude de que todos os módulos à direita (à esquerda) graduados sobre um anel graduado ($\mathcal{S}$-álgebra graduada) de divisão Δ tem posto, vamos chamar estes Δ-módulos graduados de Δ-espaços.

Sejam M e Q $\mathcal{R}$-módulos à direita graduados sobre um anel graduado ($\mathcal{S}$-álgebra graduada) $\mathcal{R}$. Um $\mathcal{R}$-homomorfismo de módulos, $f : M \longrightarrow Q$, é dito homogêneo de grau $\beta \in G$ se $f(M_\alpha) \subseteq Q_{\alpha+\beta}$, para todo $\alpha \in G$. Em particular, quando $\beta = 0$, dizemos que f é um $\mathcal{R}$-homomorfismo graduado. Se $f : M \longrightarrow Q$ é um $\mathcal{R}$-homomorfismo homogêneo, temos que o kernel $Ker(f)$ é um submódulo graduado de M e a imagem $Im(f)$ é um submódulo graduado de Q. Também, o módulo quociente $M/Ker(f)$ é um $\mathcal{R}$-módulo à direita graduado com a graduação:

$$M/Ker(f) = \bigoplus_{\alpha \in G} (M/Ker(f))_\alpha,$$

onde $(M/Ker(f))_\alpha := (M_\alpha + Ker(f))/Ker(f)$, para cada $\alpha \in G$.

Para um $\alpha \in G$ fixo, o conjunto de todos os $\mathcal{R}$-homomorfismos homogêneos de grau α de M em Q, denotado $Hom_{\mathcal{R}}(M,Q)_{\alpha}$, é um grupo aditivo (ou um $\mathcal{S}$-módulo). Além disso, temos que a soma direta

$$Hom^{gr}_{\mathcal{R}}(M,Q) := \bigoplus_{\alpha \in G} Hom_{\mathcal{R}}(M,Q)_{\alpha},$$

é também um grupo aditivo (ou um $\mathcal{S}$-módulo graduado). Se $Q = M \left(:= \bigoplus_{\alpha \in G} M_{\alpha} \right)$, escrevemos $End^{gr}_{\mathcal{R}}(M)$ no lugar de $Hom^{gr}_{\mathcal{R}}(M,Q)$. Observamos que, em geral, vale a inclusão $Hom^{gr}_{\mathcal{R}}(M,Q) \subseteq Hom_{\mathcal{R}}(M,Q)$. Por outro lado, em [[21], Example 2.4.1] se mostra que a inclusão recíproca, $Hom_{\mathcal{R}}(M,Q)_{\mathcal{R}} \subseteq Hom^{gr}_{\mathcal{R}}(M,Q)$, nem sempre é válida. Também em [[21], Corollaries 2.4.4-2.4.6], encontramos: se M é finitamente gerado, então vale a igualdade $Hom^{gr}_{\mathcal{R}}(M,Q) = Hom_{\mathcal{R}}(M,Q)$.

Vale lembrar que para $\mathcal{R}$-módulos à direita graduados temos a versão graduada do lema de Schur, resultado muito conhecido na teoria dos módulos irredutíveis.

Lema 1.1. *([11], Lemma 2.4) Sejam $\mathbb{F}$ um corpo e $\mathcal{R}$ uma $\mathbb{F}$-álgebra graduada (um anel graduado). Suponha que V é um $\mathcal{R}$-módulo à direita graduado irredutível. Então, $\Delta = End^{gr}_{gr}(V)$ é uma $\mathbb{F}$-álgebra graduada (anel graduado) de divisão.*

Definição 1.2. *Sejam $\mathcal{R}$ e $\mathcal{C}$ anéis graduados. Dizemos que M é um $(\mathcal{R},\mathcal{C})$-bimódulo graduado se M é um $\mathcal{R}$-módulo à esquerda graduado e um $\mathcal{C}$-módulo à direita graduado tal que*

$$(r_{\alpha}m_{\beta})c_{\tau} = r_{\alpha}(m_{\beta}c_{\tau}),$$

para todos $r_{\alpha} \in \mathcal{R}_{\alpha}, m_{\beta} \in M_{\beta}, c_{\tau} \in \mathcal{C}_{\tau}$ e quaisquer $\alpha, \beta, \tau \in G$.

Agora com o conceito de bimóduo, temos a seguinte

Observação 1.3. *Seja $\mathcal{R}$ um anel graduado (ou uma $\mathcal{S}$-álgebra graduada). Se $M_{\mathcal{R}}$ é um módulo à direita graduado, observamos que M é um $End^{gr}_{\mathcal{R}}(M)$-módulo à esquerda graduado com a ação natural*

$$f_{\theta}m_{\alpha} := f_{\theta}(m_{\alpha}), \text{ para todos } f_{\theta} \in \mathfrak{H}\left(End^{gr}_{\mathcal{R}}(M)\right) \text{ e } m_{\alpha} \in \mathfrak{H}(M). \tag{1.1}$$

De forma similar, se ${}_{\mathcal{R}}N$ é um módulo à esquerda graduado, observamos que N é um $End^{gr}_{\mathcal{R}}(N)$-módulo à direita graduado com a ação natural

$$n_{\alpha}g_{\theta} := g_{\theta}(n_{\alpha}), \text{ para todos } g_{\theta} \in \mathfrak{H}\left(End^{gr}_{\mathcal{R}}(N)\right) \text{ e } n_{\alpha} \in \mathfrak{H}(N). \tag{1.2}$$

Mais ainda, M com a ação 1.1 é um $\left(End^{gr}_{\mathcal{R}}(M), \mathcal{R}\right)$-bimódulo graduado e N com a ação 1.2 é um $(\mathcal{R}, End^{gr}_{\mathcal{R}}(N))$-bimódulo graduado.

1.2 Anéis Graduados Semiprimos

Nesta seção nos concentramos nos anéis graduados semiprimos. Vamos apresentar alguns resultados, sem demonstração, que naturalmente valem também para $\mathcal{S}$-álgebras graduadas. Vamos ver que os anéis graduados semiprimos são generalização dos anéis graduados primos e que, por sua vez, estes últimos generalizam os anéis graduados primitivos. As demonstrações destes resultados, assim como outras propriedades sobre os anéis graduados semiprimos, encontram-se no Capítulo 1 de [22]. Mais sobre a teoria estrutural dos anéis semiprimos pode ser encontrado em [17], [19] e [24].

Definição 1.4. *Um anel graduado $\mathcal{R}$ é* ***graduado primo*** *se, e somente se, para quaisquer ideais bilaterais graduados não nulos, I e J, se tem $IJ \neq (0)$.*

Proposição 1.5. *Seja $\mathcal{R}$ um anel graduado. As seguintes condições são equivalentes:*

(i) *$\mathcal{R}$ é graduado primo;*

(ii) *$r_\alpha \mathcal{R} b_\beta \neq (0)$, para todos $r_\alpha \in \mathcal{R}_\alpha$, $r_\beta \in \mathcal{R}_\beta$ não nulos e para quaisquer $\alpha, \beta \in G$;*

(iii) *para quaisquer ideais à direita (à esquerda) graduados não nulos I e J de $\mathcal{R}$ tem-se $IJ \neq (0)$.*

Definição 1.6. *Um anel graduado $\mathcal{R}$ é* ***graduado semiprimo*** *se, e somente se, não contém ideais bilaterais graduados nilpotentes não nulos.*

Proposição 1.7. *Seja $\mathcal{R}$ um anel graduado. As seguintes condições são equivalentes:*

(i) *$\mathcal{R}$ é anel graduado semiprimo;*

(ii) *$r_\alpha \mathcal{R} r_\alpha \neq (0)$, para todo $r_\alpha \in \mathcal{R}_\alpha$ e para qualquer $\alpha \in G$;*

(iii) *para qualquer ideal à direita (à esquerda) graduado de $\mathcal{R}$ não nulo temos $I^n \neq (0)$, para todo inteiro $n \geq 1$.*

Agora, das Proposições 1.5 e 1.7, conclui-se que:

Corolário 1.8. *Todo anel graduado primo é anel graduado semiprimo.*

Definição 1.9. *Um anel graduado $\mathcal{R}$ é* ***graduado primitivo à direita (à esquerda)*** *se existe um $\mathcal{R}$-módulo à direita (à esquerda) irredutível e fiel.*

No seguinte resultado, vemos que os anéis graduados primitivos são casos particulares dos anéis graduados primos, como foi mencionado no início desta seção.

Lema 1.10. *Se $\mathcal{R}$ é um anel graduado primitivo, então $\mathcal{R}$ é um anel graduado primo.*

Lema 1.11. *Seja $\mathcal{R} = \bigoplus_{\alpha \in G} \mathcal{R}_\alpha$ um anel graduado semiprimo. Se $I = \bigoplus_{\alpha \in G} I_\alpha$ é um ideal à direita graduado minimal de $\mathcal{R}$, então existe um elemento idempotente minimal $e_0 \in I_0$ tal que:*

- *$I = e_0 \mathcal{R}$;*
- *$e_0 \mathcal{R} e_0 \left(= \bigoplus_{\alpha \in G} e_0 \mathcal{R}_\alpha e_0 \right)$ é um anel graduado de divisão;*
- *$\mathcal{R} e_0$ é um ideal à esquerda graduado minimal de $\mathcal{R}$.*

Reciprocamente, se $e_0 \in \mathcal{R}_0$ é um elemento idempotente tal que $e_0\mathcal{R}e_0$ é um anel graduado de divisão, então $e_0\mathcal{R}$ é um ideal à direita graduado minimal de $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}e_0$ é um ideal à esquerda graduado minimal de $\mathcal{R}$.

Agora introduzimos o conceito de densidade que relaciona anéis e módulos. Este conceito vai ser muito relevante em algumas demonstrações dos próximos capítulos.

Definição 1.12. *Sejam Δ um anel graduado de divisão, $\mathcal{R}$ um anel graduado e M um $(\Delta, \mathcal{R})$-bimódulo. Dizemos que $\mathcal{R}$ **age densamente em $\mathcal{M}$** sobre Δ se para qualquer inteiro positivo n, quaisquer elementos homogêneos $v_\alpha^1, \ldots, v_\alpha^n \in M_\alpha$ linearmente independentes sobre Δ_0 e quaisquer $w_\beta^1, \ldots, w_\beta^n \in M_\beta$, existe $r_{\beta-\alpha}$ tal que $v_\alpha^i r_{\beta-\alpha} = w_\beta^i$, para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$ e para quaisquer $\alpha, \beta \in G$.*

Lembramos que se um anel graduado $\mathcal{R}$ age densamente em um $\mathcal{R}$-módulo à direita graduado M, então M é um $\mathcal{R}$-módulo à direita graduado irredutível. Logo, no caso em que M é também fiel, segue-se que $\mathcal{R}$ é um anel graduado primitivo à direita. Vamos agora introduzir o famoso Teorema da Densidade.

Teorema 1.13. *([11], Theorem 2.5) Sejam $\mathbb{F}$ um corpo e $\mathcal{R}$ uma $\mathbb{F}$-álgebra graduada (anel graduado). Suponha que V seja um $\mathcal{R}$-módulo à esquerda graduado irredutível e que $\Delta = End_{\mathcal{R}}^{gr}(V)$. Se $v_1, \ldots, v_n$ são elementos homogêneos linearmente independentes sobre Δ, então para quaisquer $w_1, \ldots, w_n \in V$, existe $r \in \mathcal{R}$ tal que $rv_i = w_i$, para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$.*

Vamos agora apresentar duas definições que trazem alguns conceitos novos que vão nos permitir enunciar o último teorema desta seção. Este teorema vai ser usado em algumas demonstrações do próximos capítulos.

Definição 1.14. *Seja A um anel G-graduado associativo. Um A-**contexto à direita** G-**graduado** é um sistema (A, N, Δ, M, T), onde*

a) *N é um A-módulo à direita G-graduado;*

b) *$\Delta = End_A^{gr}(N_A)$ é o anel de endomorfismos G-graduados do A-módulo G-graduado N_A;*

c) *M é um Δ-módulo à esquerda G-graduado;*

d) *T é um A-submódulo à direita G-graduado de $Hom_A^{gr}({}_\Delta M, {}_\Delta N)$.*

Na Definição 1.14, observamos que N é um (Δ, A)-bimódulo G-graduado. Observamos também que $Hom_A^{gr}({}_\Delta M, {}_\Delta N)$ é um Δ-módulo à direita G-graduado com a ação dada por:

$$(m_\alpha)(f_\tau a_\beta) = ((m_\alpha) f_\tau) a_\beta,$$

para todos $m_\alpha \in M_\alpha$, $f_\tau \in Hom_A({}_\Delta M, {}_\Delta N)_\tau$, $a_\tau \in A_\beta$ e para quaisquer $\alpha, \beta, \tau \in G$. Anotamos que, similarmente, é possível definir um A-contexto à esquerda G-graduado.

Definição 1.15. *Dado um A-contexto à direita G-graduado (A, N, Δ, M, T), dizemos que:*

a) *N é **fechado** se dados um A-submódulo G-graduado não nulo U de N e um homomorfismo graduado de A-módulos graduados $f : U \longrightarrow N$, existe $\lambda \in \Delta$ tal que $f(u) = \lambda u$, para todo $u \in U$;*

b) *T é **total** se qualquer $m \in M$, não nulo, satisfaz $mT \neq 0$;*

c) *T é **fracamente denso** se dados quaisquer elementos homogêneos $m_1, \ldots, m_k \in M$, com $m_1 \notin \sum_{i=2}^{k} \Delta m_i$, existe $t \in T$ tal que $m_1 t \neq 0$ e $m_i t = 0$, para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$.*

Agora vamos enunciar o último teorema desta seção. A sua demonstração, para A-contextos à direita, encontra-se em sua respectiva referência.

Teorema 1.16. *([8], Theorem 2.10) Sejam A um anel associativo G-graduado e (A, N, Δ, M, T) um A-contexto à direita (à esquerda) G-graduado. Se N é fechado e T é total, então T é fracamente denso.*

1.3 2-Cociclos

Nesta seção introduzimos o conceito de 2-cociclo antissimétrico, o qual é fundamental na definição das álgebras opostas σ-torcidas e dos σ-antiautomorfismos e das σ-involuções no capítulo seguinte. Anotamos que os bicaracteres antissimétricos em grupos abelianos finitos foram caracterizados em [23].

Definição 1.17. *Uma aplicação $\sigma : G \times G \longrightarrow \mathbb{U}(\mathcal{S})$ é chamada de **2-cociclo** se*

$$\sigma(\alpha, \beta)\sigma(\alpha + \beta, \gamma) = \sigma(\alpha, \beta + \gamma)\sigma(\beta, \gamma), \text{ para todos } \alpha, \beta, \gamma \in G.$$

*Quando $\sigma(\alpha, \beta) = \sigma(\beta, \alpha)$, para todos $\alpha, \beta \in G$, dizemos que σ é um **2-cociclo simétrico**. Por outro lado, quando $\sigma(\alpha, \beta)\sigma(\beta, \alpha) = 1$, para todos $\alpha, \beta \in G$,dizemos que σ é um **2-cociclo antissimétrico**.*

Definição 1.18. *Uma função $\epsilon : G \times G \longrightarrow \mathbb{U}(\mathcal{S})$ que satisfaz*

$$\epsilon(\alpha, \beta + \gamma) = \epsilon(\alpha, \beta)\epsilon(\alpha, \gamma) \text{ e } \epsilon(\alpha + \beta, \gamma) = \epsilon(\alpha, \gamma)\epsilon(\beta, \gamma),$$

*para todos $\alpha, \beta, \gamma \in G$, é chamada de **bicaráter**.*

Segue, diretamente da definição 1.18, que todo bicaráter é um 2-cociclo. Como é de se esperar, dizemos que um bicaráter é simétrico ou antissimétrico se como 2-cociclo o é.

Definição 1.19. *Dada uma função $\rho : G \longrightarrow \mathbb{U}(\mathcal{S})$, a aplicação $\sigma : G \times G \longrightarrow \mathbb{U}(\mathcal{S})$ definida por*

$$\sigma(\alpha, \beta) := \frac{\rho(\alpha)\rho(\beta)}{\rho(\alpha + \beta)}, \text{ para todos } \alpha, \beta \in G,$$

*é chamada de **cobordo**.*

Como no caso dos bicaráteres, é possível verificar que um cobordo é um 2-cociclo. Os seguintes exemplos mostram que a classe de bicaracteres está estritamente contida na classe de 2-cociclos. Mais especificamente, observamos que a classe dos bicaracteres antissimétricos está estritamente contida na classe dos 2-cociclos antissimétricos. Também existem bicaracteres que não são cobordos e cobordos que não são bicaracteres.

Exemplos 1.20.

1. *Se* $G = \mathbb{Z}_n$*, a aplicação* $\sigma : G \times G \longrightarrow \mathbb{U}(\mathcal{S})$ *definida por*

$$\sigma(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) = \begin{cases} 1, & se\ \alpha + \beta < n, \\ -1, & se\ \alpha + \beta \geq n, \end{cases}$$

   é um 2*-cociclo antissimétrico mas não é um bicaráter.*

2. *Se* $G = \mathbb{Z}_n$*, a aplicação* $\sigma : G \times G \longrightarrow \mathbb{U}(\mathcal{S})$ *definida por* $\sigma(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) := (-1)^{\alpha\beta}$*, para todos* $\bar{\alpha}, \bar{\beta} \in G$ *e* $\alpha, \beta \in \{0, \ldots, n-1\}$*, é um bicaráter simétrico e antissimétrico.*

3. *Seja* $G = (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +)$*. A aplicação* σ *definida pela seguinte tabela*

σ	$(\bar{0}, \bar{0})$	$(\bar{0}, \bar{1})$	$(\bar{1}, \bar{0})$	$(\bar{1}, \bar{1})$
$(\bar{0}, \bar{0})$	1	1	1	1
$(\bar{0}, \bar{1})$	1	1	1	1
$(\bar{1}, \bar{0})$	1	-1	1	-1
$(\bar{1}, \bar{1})$	1	-1	1	-1

   é um 2*-cociclo, que não é simétrico, antisimétrico ou um bicaráter.*

O seguinte resultado estabelece que no caso de $\mathcal{S}$ ser um corpo algebricamente fechado e G um grupo cíclico finito, os cobordos são todos os 2-cociclos.

Lema 1.21. *([22], Lema 3.1.1) Sejam* G *um grupo cíclico e* $\mathbb{F}$ *um corpo algebricamente fechado. Então* $\sigma : G \times G \longrightarrow \mathbb{F}^{\times}$ *é um 2-cociclo se, e somente se, existe uma função* $\rho : G \times G \longrightarrow \mathbb{F}^{\times}$ *tal que*

$$\sigma(\alpha, \beta) = \frac{\rho(\alpha)\rho(\beta)}{\rho(\alpha + \beta)}, \text{ para todos } \alpha, \beta \in G.$$

Capítulo 2

Alguns Resultados Anteriores

Neste capítulo vamos apresentar uma caracterização das $\mathcal{S}$-álgebras G-graduadas primitivas à direita com ideais à direita graduados minimais. A teoria deste capítulo foi desenvolvida no Capítulo 3 de [22] para anéis graduados primitivos ($\mathbb{F}$-álgebras graduadas primitivas) à direita com ideais à direita graduados minimais, considerando um 2-cociclo antissimétrico $\sigma : G \times G \longrightarrow \{-1, 1\}$, para o caso dos anéis, e um 2-cociclo antissimétrico $\sigma : G \times G \longrightarrow \mathbb{F}^{\times}$, para o caso das $\mathbb{F}$-álgebras. Aqui nós apresentamos a mesma teoria para $\mathcal{S}$-álgebras graduadas primitivas à direita com ideais à direita graduados minimais, considerando um 2-cociclo antissimétrico $\sigma : G \times G \longrightarrow U(\mathcal{S})$.

Outra vez lembramos que estamos assumindo os anéis e $\mathcal{S}$-álgebras com característica diferente de 2.

Definição 2.1. *Sejam $\sigma : G \times G \longrightarrow U(\mathcal{S})$ um 2-cociclo antissimétrico e $\mathcal{R}$ um anel graduado ($\mathcal{S}$-álgebra graduada). O **anel oposto σ-torcido** (**$\mathcal{S}$-álgebra σ-torcida**) de $\mathcal{R}$, denotada por $\mathcal{R}^{op_\sigma}$, é o grupo aditivo $(\mathcal{R}, +)$ com multiplicação dada por*

$$r_\alpha \circ_{op_\sigma} r_\beta := \sigma(\alpha, \beta) r_\beta r_\alpha,$$

para todos $r_\alpha \in \mathcal{R}_\alpha, \rho_\beta \in \mathcal{R}_\beta$ e para todos $\alpha, \beta \in G$.

Na seguinte proposição se estabelecem condições suficientes para que o anel σ-torcido ($\mathcal{S}$-álgebra σ-torcida) Δ^{op_σ}, de um anel graduado ($\mathcal{S}$-álgebra graduada) de divisão Δ, seja também graduado (graduada) de divisão.

Proposição 2.2. *Sejam Δ um anel graduado ($\mathcal{S}$-álgebra graduada) de divisão e $\sigma : G \times G \longrightarrow U(\mathcal{S})$ um 2-cociclo antissimétrico tal que $\sigma(-\alpha, \alpha)^2 = 1$, para todo $\alpha \in G$. Então o anel graduado ($\mathcal{S}$-álgebra graduada) Δ^{op_σ} é também graduado (graduada) de divisão.*

Demonstração. Observamos que $1_{\Delta^{op_\sigma}} = \sigma(0,0)1_\Delta$. De fato, dado um elemento homogêneo arbitrário $d_\alpha \in \Delta_\alpha$, temos $1_{\Delta^{op_\sigma}} \circ_{op_\sigma} d_\alpha = \sigma(0,0)\sigma(0,\alpha)d_\alpha 1_\Delta = d_\alpha$ e, também, $d_\alpha \circ_{op_\sigma} 1_{\Delta^{op_\sigma}} = \sigma(0,0)\sigma(0,\alpha)1_\Delta d_\alpha = d_\alpha$.

Por outro lado, observamos que todo elemento homogêneo não nulo de Δ^{op_σ} possui inverso. De fato, para $0 \neq d_\alpha \in \Delta^{op_\sigma}$, temos:

$$d_\alpha \circ_{op_\sigma} \frac{d_\alpha^{-1}}{\sigma(0,0)\sigma(\alpha,-\alpha)} = \frac{d_\alpha \circ_{op_\sigma} d_\alpha^{-1}}{\sigma(0,0)\sigma(\alpha,-\alpha)} = \frac{\sigma(\alpha,-\alpha)d_\alpha d_\alpha^{-1}}{\sigma(0,0)\sigma(\alpha,-\alpha)} = \sigma(0,0)1_\Delta = 1_{\Delta^{op_\sigma}};$$

e

$$\frac{d_\alpha^{-1}}{\sigma(0,0)\sigma(\alpha,-\alpha)} \circ_{op_\sigma} d_\alpha = \frac{d_\alpha^{-1} \circ_{op_\sigma} d_\alpha}{\sigma(0,0)\sigma(\alpha,-\alpha)} = \frac{\sigma(-\alpha,\alpha) d_\alpha d_\alpha^{-1}}{\sigma(0,0)\sigma(\alpha,-\alpha)} = \sigma(0,0)\sigma(-\alpha,\alpha)^2 1_\Delta = 1_{\Delta^{op_\sigma}}.$$

□

Notação 2.3. *De agora em diante, $\sigma : G \times G \longrightarrow U(\mathcal{S})$ sempre será um 2-cociclo antíssimetrico satisfazendo $\sigma(-\alpha,\alpha)^2 = 1$, para todo $\alpha \in G$.*

Lema 2.4. *Seja Δ uma $\mathcal{S}$-álgebra graduada de divisão. Se W é um Δ-espaço à direita graduado, então W é um Δ^{op_σ}-espaço à esquerda graduado, com a ação dada por*

$$d_\alpha w_\beta := \sigma(\alpha,\beta) w_\beta d_\alpha, \text{ para todos } d_\alpha \in \Delta_\alpha, w_\beta \in W_\beta.$$

Também, se V é um Δ-espaço à esquerda graduado, então V é um Δ^{op_σ}-espaço à direita graduado com a ação dada por

$$v_\beta d_\alpha := \sigma(\beta,\alpha) d_\alpha v_\beta, \text{ para todos } d_\alpha \in \Delta_\alpha, v_\beta \in V_\beta.$$

Demonstração. É suficiente verificar os axiomas de módulo para elementos homogêneos. Para quaisquer $\alpha, \theta, \tau \in G$ e para elementos fixos $w_\alpha, w'_\alpha \in W_\alpha$, $d_\theta \in \Delta_\theta$, $d_\tau \in \Delta_\tau$ e $s \in \mathcal{S}$, temos:

- $d_\tau(w_\alpha + w'_\alpha) = \sigma(\tau,\alpha)(w_\alpha + w'_\alpha) d_\tau = \sigma(\tau,\alpha) w_\alpha d_\tau + \sigma(\tau,\beta) w'_\alpha d_\tau = d_\tau w_\alpha + d_\tau w'_\alpha$;
- $(d_\tau + d'_\tau) w_\alpha = \sigma(\tau,\alpha) w_\alpha (d_\tau + d'_\tau) = \sigma(\tau,\alpha) w_\beta d_\tau + \sigma(\tau,\alpha) w_\alpha d'_\tau = d_\tau w_\alpha + d'_\tau w_\alpha$;
- por ser σ um 2-cociclo, $\sigma(\theta,\tau)\sigma(\theta+\tau,\alpha) = \sigma(\theta,\tau+\alpha)\sigma(\alpha,\tau)$; logo, $(d_\theta \circ_{op_\sigma} d_\tau) w_\alpha = \sigma(\theta,\tau)(d_\tau d_\theta) w_\alpha = \sigma(\theta,\tau)\sigma(\theta+\tau,\alpha) w_\alpha (d_\tau d_\theta) = \sigma(\theta,\alpha+\tau)\sigma(\alpha,\tau)(w_\alpha d_\tau) d_\theta = d_\theta (d_\tau w_\alpha)$;
- $1_{\Delta^{op_\sigma}} w_\alpha = (\sigma(0,0) 1_\Delta) w_\alpha = \sigma(0,0)\sigma(0,\alpha) w_\alpha 1_\Delta = w_\alpha$, pois $\sigma(0,\alpha) = \sigma(0,0)$ e $\sigma(0,0)^2 = 1$;
- $(d_\tau s) w_\alpha = \sigma(\tau,\alpha) w_\alpha (d_\tau s) = \sigma(\tau,\alpha)(w_\alpha d_\tau) s = (d_\tau(w_\alpha) s = s(d_\tau w_\alpha)$.

Portanto W é, de fato, um Δ^{op_σ}-espaço à esquerda graduado. De forma semelhante demonstra-se que V é um Δ^{op_σ}-espaço à direita graduado. □

2.1 Formas Bilineares Homogêneas

Definição 2.5. *Sejam Δ uma $\mathcal{S}$-álgebra G-graduada de divisão, V um Δ-espaço à esquerda G-graduado e W um Δ-espaço à direita G-graduado. Dado $\gamma \in G$, uma aplicação $\langle -,- \rangle_\gamma : V \times W \longrightarrow \Delta$ é uma **forma Δ-bilinear homogênea de grau** γ se:*

1. *$\langle -,- \rangle_\gamma$ é bilinear;*
2. *$\langle v_\alpha, w_\beta \rangle_\gamma \in \Delta_{\alpha+\beta+\gamma}$, para todos $v_\alpha \in V_\alpha$ $w_\beta \in W_\beta$ e quaisquer $\alpha, \beta \in G$;*
3. *$\langle d_\tau v_\alpha, w_\beta \rangle_\gamma = d_\tau \langle v_\alpha, w_\beta \rangle_\gamma$ e $\langle v_\alpha, w_\beta d_\tau \rangle_\gamma = \langle v_\alpha, w_\beta \rangle_\gamma d_\tau$, para todos $d_\tau \in \Delta_\tau, v_\alpha \in V_\alpha, w_\beta \in W_\beta$ e quaisquer $\tau, \alpha, \beta \in G$.*

*Além disso, uma forma Δ-bilinear homogênea $\langle -,-\rangle_\gamma$ é dita **não degenerada** se:*

4. *para qualquer $\alpha \in G$ e todo $v_\alpha \in V_\alpha$, temos que $\langle v_\alpha, W\rangle_\gamma = (0)$ implica $v_\alpha = 0$;*

5. *para qualquer $\beta \in G$ e todo $w_\beta \in W_\beta$, temos que $\langle V, w_\beta\rangle_\gamma = (0)$ implica $w_\beta = 0$.*

Notação 2.6. *De agora em diante, uma tripla (Δ, V, W) vai significar que Δ é uma $\mathcal{S}$-álgebra G-graduada de divisão, V é um Δ-espaço G-graduado à esquerda e W é um Δ-espaço G-graduado à direita.*

Definição 2.7. *Seja $\langle -,-\rangle_\gamma : V \times W \longrightarrow \Delta$ uma forma Δ-bilinear homogênea de grau γ não degenerada associada à tripla (Δ, V, W). Se $b_\theta \in End_{\Delta^{op_\sigma}}(W)_\theta$ e $a_\theta \in End_\Delta(V)_\theta$ são dois elementos homogêneos tais que*

$$\langle v_\alpha a_\theta, w_\beta\rangle_\gamma = \sigma(\theta,\beta)\, \langle v_\alpha, w_\beta b_\theta\rangle_\gamma\,,$$

*para todos $v_\alpha \in V_\alpha, w_\beta \in W_\beta$ e quaisquer $\alpha, \beta \in G$, dizemos que b_θ é uma σ-**adjunta** de a_θ e que a_θ é uma σ-**coadjunta** de b_θ.*

Observação 2.8. *Nas condições da Definição 2.7, se b_θ e b'_θ são σ-adjuntas de a_θ, então*

$$\sigma(\theta,\beta)\, \langle v_\alpha, w_\beta b'_\theta\rangle_\gamma = \langle v_\alpha a_\theta, w_\beta\rangle_\gamma = \sigma(\theta,\beta)\, \langle v_\alpha, w_\beta b_\theta\rangle_\gamma\,,$$

para todos $v_\alpha \in V_\alpha, w_\beta \in W_\beta$ e quaisquer $\alpha, \beta \in G$. Daí, como $\langle -,-\rangle_\gamma$ é forma Δ-bilinear homogênea não degenerada, segue que $b_\theta = b'_\theta$. Isto é, quando um elemento homogêneo a_θ tem uma σ-adjunta, esta é única. Analogamente, quando b_θ tem uma σ-coadjunta, é possível mostrar que esta é única.

De agora em diante, vamos usar a notação $a_\theta^{*_\sigma}$ para a σ-adjunta de um elemento homogêneo $a_\theta \in End_\Delta(V)_\theta$ e vamos usar a notação $b_\theta^{\circledast_\sigma}$ para a σ-coadjunta de um elemento homogêneo $b_\theta \in End_{\Delta^{op_\sigma}}(W)_\theta$.

Definição 2.9. *Seja $\langle -,-\rangle_\gamma : V \times W \longrightarrow \Delta$ uma forma Δ-bilinear homogênea de grau γ não degenerada associada à tripla (Δ, V, W). Para cada $\theta \in G$ fixo, definimos os $\mathcal{S}$-submódulos de $End_\Delta(V)_\theta$:*

- $\mathcal{L}_W^{gr_\sigma}(V)_\theta := \{a_\theta \in End_\Delta(V)_\theta : a_\theta$ *tem σ-adjunta em* $End_{\Delta^{op_\sigma}}(W)_\theta\}$,
- $\mathcal{F}_W^{gr_\sigma}(V)_\theta := \{a_\theta \in \mathcal{L}_W^{gr_\sigma}(V)_\theta :\ dim_{\Delta^{op_\sigma}}(V a_\theta) < \infty\}$;

e definimos os $\mathcal{S}$-submódulos de $End_{\Delta^{op_\sigma}}(W)_\theta$:

- $\mathcal{L}_V^{gr_\sigma}(W)_\theta := \{b_\theta \in End_{\Delta^{op_\sigma}}(W)_\theta : b_\theta$ *tem σ-coadjunta em* $End_\Delta(V)_\theta\}$,
- $\mathcal{F}_V^{gr_\sigma}(W)_\theta := \{a_\theta \in \mathcal{L}_V^{gr_\sigma}(W)_\theta :\ dim_\Delta(W a_\theta^{*_\sigma}) < \infty\}$.

Seja $\theta \in G$ fixo. Observamos que se $a_\theta, a'_\theta \in \mathcal{L}_W^{gr_\sigma}(V)_\theta$ e $b_\theta, b'_\theta \in \mathcal{L}_V^{gr}(W)_\theta$, então $a_\theta - a'_\theta \in \mathcal{L}_W^{gr_\sigma}(V)_\theta$ e $b_\theta - b'_\theta \in \mathcal{L}_V^{gr}(W)_\theta$, pois $(a_\theta - a'_\theta)^{*_\sigma} = a_\theta^{*_\sigma} - a'^{*_\sigma}_\theta$ e $(b_\theta - b'_\theta)^{\circledast_\sigma} = b_\theta^{\circledast_\sigma} - b'^{\circledast_\sigma}_\theta$. Logo, $\mathcal{L}_W^{gr_\sigma}(V)_\theta$ e $\mathcal{L}_V^{gr}(W)_\theta$ são de fato $\mathcal{S}$-submódulos. Por outro lado, observamos que $\mathcal{F}_W^{gr_\sigma}(V)_\theta$ e $\mathcal{F}_V^{gr_\sigma}(W)_\theta$ também são $\mathcal{S}$-submódulos, pois se $a_\theta, a'_\theta \in \mathcal{F}_W^{gr_\sigma}(V)_\theta$ e $b_\theta, b'_\theta \in \mathcal{F}_V^{gr_\sigma}(W)_\theta$, então $dim_\Delta\left(V\left(a_\theta - a'_\theta\right)\right) < \infty$ e $dim_{\Delta^{op_\sigma}}\left(W\left(b_\theta - b'_\theta\right)\right) < \infty$, isto é, $a_\theta - a'_\theta \in \mathcal{F}_W^{gr_\sigma}(V)_\theta$ e $b_\theta - b'_\theta \in \mathcal{F}_V^{gr_\sigma}(W)_\theta$.

Lema 2.10. *$\mathcal{L}_W^{gr_\sigma}(V) := \bigoplus_{\theta\in G} \mathcal{L}_W^{gr_\sigma}(V)_\theta$ é uma $\mathcal{S}$-subálgebra graduada da $\mathcal{S}$-álgebra G-graduada $End_D^{gr}(V)$ e $\mathcal{F}_W^{gr_\sigma}(V) := \bigoplus_{\theta\in G} \mathcal{F}_W^{gr_\sigma}(V)_\theta$ é um ideal graduado da $\mathcal{S}$-álgebra G-graduada $\mathcal{L}_W^{gr_\sigma}(V)$.*

Demonstração. Como $\mathcal{L}_W^{gr_\sigma}(V) := \bigoplus_{\theta\in G} \mathcal{L}_W^{gr_\sigma}(V)_\theta$ e $\mathcal{F}_W^{gr_\sigma}(V) := \bigoplus_{\theta\in G} \mathcal{F}_W^{gr_\sigma}(V)_\theta$ são somas diretas de $\mathcal{S}$-módulos, temos que $\mathcal{L}_W^{gr_\sigma}(V)$ e $\mathcal{F}_W^{gr_\sigma}(V)$ são também $\mathcal{S}$-módulos.

Agora, sejam $a_\theta \in \mathcal{L}_W^{gr_\sigma}(V)_\theta$ e $a_\tau \in \mathcal{L}_W^{gr_\sigma}(V)_\tau$ elementos homogêneos arbitrários. Lembrando que $\sigma(x,y)\sigma(x+y,z) = \sigma(x,y+z)\sigma(y,z)$ para todos $x,y,z \in G$, temos:

$$\begin{aligned}
\langle v_\alpha (a_\theta a_\tau), v_\beta\rangle_\gamma &= \langle (v_\alpha a_\theta) a_\tau, v_\beta\rangle_\gamma \\
&= \sigma(\tau,\beta) \langle v_\alpha a_\theta, v_\beta a_\tau^{*\sigma}\rangle_\gamma \\
&= \sigma(\tau,\beta)\sigma(\theta,\tau+\beta) \langle v_\alpha, (v_\beta a_\tau^{*\sigma}) a_\theta^{*\sigma}\rangle_\gamma \\
&= \sigma(\theta,\tau)\sigma(\theta+\tau,\beta) \langle v_\alpha, v_\beta (a_\tau^{*\sigma} a_\theta^{*\sigma})\rangle_\gamma \\
&= \sigma(\theta+\tau,\beta) \langle v_\alpha, v_\beta (\sigma(\theta,\tau) a_\tau^{*\sigma} a_\theta^{*\sigma})\rangle_\gamma ,
\end{aligned}$$

para todos $v_\alpha \in V_\alpha$, $v_\beta \in V_\beta$ e para quaisquer $\alpha,\beta \in G$. Daí $(a_\theta a_\tau)^{*\sigma} = \sigma(\theta,\tau)a_\tau^{*\sigma} a_\theta^{*\sigma}$. Logo, $\mathcal{L}_W^{gr_\sigma}(V)$ é uma $\mathcal{S}$-subálgebra graduada da $\mathcal{S}$-álgebra G-graduada $End_D^{gr}(V)$.

Vamos mostrar agora que $\mathcal{F}_W^{gr_\sigma}(V)$ é um ideal graduado da $\mathcal{S}$-álgebra G-graduada $\mathcal{L}_W^{gr_\sigma}(V)$. Sejam $a_\theta \in \mathcal{F}_W^{gr_\sigma}(V)_\theta$ e $a_\tau \in \mathcal{L}_W^{gr_\sigma}(V)_\tau$ elementos homogêneos fixos. Temos $a_\tau a_\theta, a_\theta a_\tau \in \mathcal{L}_W^{gr_\sigma}(V)_{\tau+\theta}$, pois $\mathcal{L}_W^{gr_\sigma}(V)_{\tau+\theta}$ é $\mathcal{S}$-álgebra graduada. Além disso, como $dim_\Delta (V a_\theta) < \infty$, segue que $dim_\Delta (V (a_\theta a_\tau)) < \infty$ e $dim_\Delta (V (a_\theta a_\tau)) < \infty$. Logo, $\mathcal{F}_W^{gr_\sigma}(V)$ é um ideal graduado de $\mathcal{L}_W^{gr_\sigma}(V)$. □

Nos seguintes dois resultados δ_{ij} e $\delta_{\epsilon\eta}$ são o delta de Kronecker, isto é,

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1_\Delta, & \text{se} \quad i=j; \\ 0, & \text{em caso contrário,} \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \delta_{\lambda\eta} = \begin{cases} 1_\Delta, & \text{se} \quad \lambda=\eta; \\ 0, & \text{em caso contrário.} \end{cases}$$

Lema 2.11. *Seja $\langle -,- \rangle_\gamma : V \times W \longrightarrow \Delta$ uma forma Δ-bilinear homogênea de grau γ não degenerada associada à tripla (Δ, V, W). Se $\mathcal{V} := \{v_\alpha^1, \ldots, v_\alpha^{n_\alpha}, \ldots, v_\beta^1, \ldots, v_\beta^{n_\beta}\}$ é um subconjunto de elementos homogêneos de V, linearmente independentes sobre Δ, existe um subconjunto de elementos homogêneos $\mathcal{W} := \{w_{-\alpha-\gamma}^1, \ldots, w_{-\alpha-\gamma}^{n_\alpha}, \ldots, w_{-\beta-\gamma}^1, \ldots, w_{-\beta-\gamma}^{n_\beta}\}$ de W, tal que*

$$\left\langle v_\lambda^i, w_{-\eta-\gamma}^j \right\rangle_\gamma = \delta_{ij}\delta_{\lambda\eta}, \ \textit{para todos } v_\lambda^i \in \mathcal{V}, w_{-\eta-\gamma}^j \in \mathcal{W}.$$

Demonstração. Temos que $V_{gr}^{*\sigma} := \bigoplus_{\alpha\in G} Hom_\Delta ({}_\Delta V, {}_\Delta \Delta)_\alpha$ é um Δ-módulo à direita graduado com a ação:

$$(v)(fd) := (vf)\, d,$$

para todos $d \in \Delta$, $f \in V_{gr}^{*\sigma}$, $v \in V$. De fato: Observamos que $Hom_\Delta ({}_\Delta V, {}_\Delta \Delta)_\alpha$ é um $\mathcal{S}$-módulo para cada $\alpha \in G$. Além disso, dados $f_\alpha \in Hom_\Delta ({}_\Delta V, {}_\Delta \Delta)_\alpha$ e $d_\beta \in \Delta_\beta$ elementos homogêneos fixos, temos que $f_\alpha d_\beta \in Hom_\Delta ({}_\Delta V, {}_\Delta \Delta)_{\alpha+\beta}$, isto é, a ação é bem definida. Por outro lado, dados f_1, f_2 e $d_1, d_2 \in \Delta$ arbitrários, não é difícil verificar as seguintes igualdades:

- $(f_1 + f_2)\, d_1 = f_1 d_1 + f_2 d_1$;

- $f_1(d_1 + d_2) = f_1 d_1 + f_1 d_2$;
- $f_1(d_1 d_2) = (f_1 d_1) d_2$;
- $f_1 1_\Delta = f_1$.

Concluindo que $V_{gr}^{*\sigma}$ é um Δ-módulo à direita graduado, como afirmamos. Por outro lado, temos que a aplicação

$$\begin{array}{rcccl} \psi: \Delta & \longrightarrow & End_\Delta^{gr}(\Delta_\Delta) & & \\ d & \longmapsto & \psi(d): & \Delta & \longrightarrow \Delta \\ & & & x & \longmapsto \psi(d)(x) := dx \end{array}$$

é um isomorfismo de $\mathcal{S}$-álgebras G-graduadas. Observamos também que a aplicação

$$\begin{array}{rclccl} \varphi: W & \longrightarrow & V_{gr}^{*\sigma} & & & \\ w & \longmapsto & \varphi(w) := \langle -, w \rangle_\gamma : & V & \longrightarrow & \Delta \\ & & & v & \longmapsto & \langle v, w \rangle_\gamma \end{array}$$

é um homomorfismo homogêneo injetor de Δ-módulos à direita graduados. Logo, $Im(\varphi)$ é um Δ-submódulo à direita graduado de $V_{gr}^{*\sigma}$. Assim, pela Definição 1.14, temos que

$$(\Delta, \Delta_\Delta, \Delta, {}_\Delta V, Im(\varphi))$$

é um Δ-contexto à direita G-graduado.

Notamos que Δ_Δ é um módulo fechado. De fato, considerando a estrutura de anel graduado de divisão de Δ, observamos que Δ não tem ideais à direita graduados, isso implica que Δ_Δ é um módulo fechado. Também veremos que $Im(\varphi)$ é fracamente denso. De fato, anotamos que $Im(\varphi)$ é total, pois para todo $v \in V$ temos

$$0 = vIm(\varphi) = \langle v, W \rangle_\gamma \text{ se, e somente se, } v = 0.$$

Logo, como Δ_Δ é um $\mathcal{S}$-módulo fechado e $Im(\varphi)$ é total, segue, pelo Teorema 1.16, que $Im(\varphi)_\Delta$ é fracamente denso, como queríamos mostrar.

Afirmamos que para todo $v_\alpha^{i_\alpha} \in \mathcal{V}$, com $1 \leq i_\alpha \leq n_\alpha$, temos que

$$\mathcal{J}^{(\alpha, i_\alpha)} := \{w' \in Im(\varphi) : \ v_\eta^{j_\eta} w' = 0, \text{ para } (\eta, j_\eta) \neq (\alpha, i_\alpha)\} \subseteq Im(\varphi),$$

é um Δ-submódulo à direita G-graduado não nulo de $Im(\varphi)$. De fato, como $\mathcal{V}$ é linearmente independente sobre Δ, temos que

$$v_\alpha^{i_\alpha} \notin \left(\sum_{i \neq i_\alpha} \Delta v_\alpha^i + \sum_{\beta \neq \alpha} \sum_{j_\beta = 1}^{n_\beta} \Delta v_\beta^{j_\beta} \right).$$

Daí, como $Im(\varphi)$ é fracamente denso, segue que existe um elemento $t^{(\alpha, i_\alpha)} \in Im(\varphi)$ tal que

$$v_\alpha^{i_\alpha} t^{(\alpha, i_\alpha)} \neq 0 \text{ e } v_\beta^{j_\beta} t^{(\alpha, i_\alpha)} = 0 \text{ para todo } (\beta, j_\beta) \neq (\alpha, i_\alpha).$$

Logo, $0 \neq t^{(\alpha, i_\alpha)} \in \mathcal{J}^{(\alpha, i_\alpha)}$ e, consequentemente, $\mathcal{J}^{(\alpha, i_\alpha)} \neq (0)$. Por outro lado, não é difícil ver que $\mathcal{J}^{(\alpha, i_\alpha)}$ é um Δ-submódulo à direita de $Im(\varphi)$. Para finalizar a prova da nossa afirmação, vamos ver que $\mathcal{J}^{(\alpha,i_\alpha)}$ também é G-graduado. Seja $w' = \sum_{g\in G} w'_g \in \mathcal{J}^{(\alpha,i_\alpha)}$. Para todo $(\eta, j_\eta) \neq (\alpha, i_\alpha)$ temos que

$$0 = v_\eta^{j_\eta} = \sum_{g\in G} v_\eta^{j_\eta} w'_g, \text{ onde cada termo } v_\eta j_\eta w'_g \in \Delta_{\eta+g}.$$

Daí $v_\eta^{j_\eta} w'_g = 0$ para todo $g \in G$. Logo, $w'_g \in \mathcal{J}^{(\alpha,i_\alpha)}$ para todo $g \in G$ e, assim, concluímos que $\mathcal{J}^{(\alpha,i_\alpha)}$ é G-graduado.

Veremos agora que para cada $v_\alpha^{i_\alpha} \in \mathcal{V}$, $v_\alpha^{i_\alpha}\mathcal{J}^{(\alpha,i_\alpha)} = \Delta$. Por um lado, como $\mathcal{J}^{(\alpha,i_\alpha)}$ é Δ-submódulo à direita G-graduado de $Im(\varphi)$, temos que $v_\alpha^{i_\alpha}\mathcal{J}^{(\alpha,i_\alpha)}$ é ideal à direita G-graduado de Δ. Por outro lado, vimos acima que existe $t^{(\alpha,i_\alpha)} \in Im(\varphi)$ tal que

$$v_\alpha^{i_\alpha} t^{(\alpha,i_\alpha)} \neq 0 \ \text{ e } \ v_\beta^{j_\beta} t^{(\alpha,i_\alpha)} = 0 \ \text{ para todo } \ (\beta, j_\beta) \neq (\alpha, i_\alpha).$$

Logo, existe uma componente homogênea não nula de $v_\alpha^{i_\alpha} t^{(\alpha,i_\alpha)} \in \Delta$ e, como Δ é $\mathcal{S}$-álgebra G-graduada de divisão, segue que $v_\alpha^{i_\alpha}\mathcal{J}^{(\alpha,i_\alpha)} = \Delta$.

Vimos acima que para cada $v_\alpha^{i_\alpha} \in \mathcal{V}$ fixo, existe $t^{(\alpha,i_\alpha)} \in Im(\varphi)$ tal que

$$v_\alpha^{i_\alpha} t^{(\alpha,i_\alpha)} \neq 0 \ \text{ e } \ v_\beta^{j_\beta} t^{(\alpha,i_\alpha)} = 0 \ \text{ para todo } \ (\beta, j_\beta) \neq (\alpha, i_\alpha).$$

Portanto existe uma componente homogênea não nula $t_\theta^{(\alpha,i_\alpha)}$ de $t^{(\alpha,i_\alpha)}$ tal que

$$v_\alpha^{i_\alpha} t_\theta^{(\alpha,i_\alpha)} \neq 0 \ \text{ e } \ v_\beta^{j_\beta} t_\theta^{(\alpha,i_\alpha)} = 0 \ \text{ para todo } \ (\beta, j_\beta) \neq (\alpha, i_\alpha).$$

Como $t_\theta^{(\alpha,i_\alpha)} \in \mathcal{J}^{(\alpha,i_\alpha)}$ e $v_\alpha^{i_\alpha}\mathcal{J}^{(\alpha,i_\alpha)} = \Delta$, segue que existe $d_{-\alpha-\theta} \in \Delta_{-\alpha-\theta}$ tal que

$$v_\alpha^{i_\alpha} t_\theta^{(\alpha,i_\alpha)} d_{-\alpha-\theta} = 1_\Delta \ \text{ e } \ v_\beta^{j_\beta} t_\theta^{(\alpha,i_\alpha)} d_{-\alpha-\theta} = 0, \ \text{ para todo } \ (\beta, j_\beta) \neq (\alpha, i_\alpha).$$

Dado que $t_\theta^{(\alpha,i_\alpha)} d_{-\alpha-\theta} \in \mathcal{J}^{(\alpha,i_\alpha)}$, existe $w_{-\alpha-\gamma}^{i_\alpha} \in W_{-\alpha-\gamma}$ tal que

$$t_\theta^{(\alpha,i_\alpha)} d_{-\alpha-\theta} = \varphi\left(w_{-\alpha-\gamma}^{i_\alpha}\right) = \left\langle -, w_{-\alpha-\gamma}^{i_\alpha}\right\rangle_\gamma.$$

Logo,

$$1 = v_\alpha^{i_\alpha} t_\theta^{(\alpha,i_\alpha)} d_{-\alpha-\theta} = v_\alpha^{i_\alpha} \varphi\left(w_{-\alpha-\gamma}^{i_\alpha}\right) = \left\langle v_\alpha^{i_\alpha}, w_{-\alpha-\gamma}\right\rangle_\gamma$$

e

$$0 = v_\beta^{j_\beta} t_\theta^{(\alpha,i_\alpha)} d_{-\alpha-\theta} = v_\beta^{j_\beta} \varphi\left(w_{-\alpha-\gamma}^{i_\alpha}\right) = \left\langle v_\beta^{j_\beta}, w_{-\alpha-\gamma}\right\rangle_\gamma, \ \text{ para todo } \ (\beta, j_\beta) \neq (\alpha, i_\alpha).$$

Como $v_\alpha^{i_\alpha} \in \mathcal{V}$ é fixo, completamos a demonstração. □

Agora vamos apresentar a versão recíproca do Lema 2.11. Na demonstração deste lema vamos usar os conceitos análogos aos das Definições 1.14 e 1.15 para A-contextos à esquerda graduados. Como a demonstração também é similar à demonstração do Lema 2.11, vamos fazer ela com menos detalhes.

Lema 2.12. *Seja* $\langle -,- \rangle_\gamma : V \times W \longrightarrow \Delta$ *uma forma* Δ*-bilinear homogênea de grau* γ *não degenerada associada à tripla* (Δ, V, W)*. Se* $\mathcal{W} := \{w_\alpha^1, \ldots, w_\alpha^n\}$ *é um subconjunto de elementos homogêneos de* W*, linearmente independente sobre* Δ*, existe um subconjunto* $\mathcal{V} := \{v_{-\alpha-\gamma}^1, \ldots, v_{-\alpha-\gamma}^n\}$ *de elementos homogêneos de* $\mathcal{V}$ *tal que*

$$\left\langle v_{-\alpha-\gamma}^i, w_\alpha^j \right\rangle_\gamma = \delta_{ij}, \text{ para todos } v_{-\alpha-\gamma}^i \in \mathcal{V}, w_\alpha^j \in \mathcal{W}.$$

Demonstração. Observamos que $W_{gr}^{*\sigma} = \sum\limits_{\alpha \in G} Hom_\Delta (W_\Delta, \Delta_\Delta)_\alpha$ é um $\mathcal{S}$-módulo à esquerda graduado com a ação dada por

$$(df)\, w := df(w), \text{ para todos } d \in \Delta, f \in W_{gr}^{*\sigma}, w \in W.$$

Por outro lado, temos que a aplicação

$$\begin{array}{rcccccl} \varphi: & V & \longrightarrow & W_{gr}^{*\sigma} & & & \\ & v & \longmapsto & \varphi(v): & W & \longrightarrow & \Delta \\ & & & & w & \longmapsto & \varphi(v)(w) := \langle v, w \rangle_\gamma, \end{array}$$

é um homomorfismo homogêneo de grau γ de Δ-módulos à direita graduados que é injetivo. Também temos que $\Delta \cong End^{gr}({}_\Delta\Delta)$ como $\mathcal{S}$-álgebras graduadas, pois a aplicação

$$\begin{array}{rcccccl} \psi: & \Delta & \longrightarrow & End^{gr}({}_\Delta\Delta) & & & \\ & d & \longmapsto & \psi(d): & {}_\Delta\Delta & \longrightarrow & {}_\Delta\Delta \\ & & & & x & \longmapsto & \psi(d)(x) := xd, \end{array}$$

é um isomorfismo de $\mathcal{S}$-álgebras graduadas. Logo,

$$(\Delta, {}_\Delta\Delta, \Delta, W_\Delta, Im(\varphi))$$

é um Δ-contexto à esquerda G-graduado.

De forma análoga à demonstração do Lema 2.11 também obtemos que $Im(\varphi)$ é fracamente denso, como consequência de ${}_\Delta\Delta$ ser um módulo fechado e $Im(\varphi)$ total

Agora, como $Im(\varphi)$ é fracamente denso e $\mathcal{W}$ é linearmente independente sobre Δ, quando $w_\alpha^i \in \mathcal{W}$ é fixo e $w_\alpha^i \notin \sum\limits_{j \neq i} w_\alpha^j \Delta$, então existe $t^{(\alpha,i)} \in Im(\varphi)$ tal que

$$t^{(\alpha,i)} w_\alpha^i \neq 0 \text{ e } t^{(\alpha,i)} w_\alpha^j = 0, \text{ para todo } j \neq i. \tag{2.1}$$

Afirmamos que, para cada $w_\alpha^i \in \mathcal{W}$,

$$\mathcal{J}^{(\alpha,i)} = \{v' \in Im(\varphi): \ v' w_\alpha^j = 0, \text{ para todos } i \neq j\},$$

é um Δ-submódulo à esquerda graduado de $W_{gr}^{*\sigma}$ não nulo. Temos que $\mathcal{J}^{(\alpha,i)} \neq (0)$, pois de (2.1) segue que $0 \neq t^{(\alpha,i)} \in \mathcal{J}^{(\alpha,i)}$. Além disso, não é difícil ver que $\mathcal{J}^{(\alpha,i)}$ é Δ-submódulo à esquerda de $W_{gr}^{*\sigma}$. Veremos agora que $\mathcal{J}^{(\alpha,i)}$ também é graduado. Seja $v' = \sum\limits_{g \in G} v'_g \in \mathcal{J}^{(\alpha,i)}$. Para cada $j \neq i$, temos

$$0 = v' w_\alpha^j = \sum_{g \in G} v'_g w_\alpha^j, \text{ com cada } v'_g w_\alpha^j \in \Delta_{g+\alpha}.$$

Portanto, para cada $g \in G$, temos $v'_g w^j_\alpha = 0$. Então, $v'_g \in \mathcal{J}^{(\alpha,i)}$ para cada $g \in G$; Isto é, $\mathcal{J}^{(\alpha,i)}$ é graduado.

Afirmamos que, para cada $w^i_\alpha \in \mathcal{W}$, $\mathcal{J}^{(\alpha,i)} w^i_\alpha = \Delta$. De fato, temos que $\mathcal{J}^{(\alpha,i)} w^i_\alpha$ é um ideal à esquerda graduado de Δ. Pois, observamos que $\mathcal{J}^{(\alpha,i)} w^i_\alpha$ é ideal à esquerda de Δ e, por ser $\mathcal{J}^{(\alpha,i)}$ um Δ-submódulo à esquerda graduado de $Im(\varphi)$, $\mathcal{J}^{(\alpha,i)} w^i_\alpha$ é também graduado. Além disso, de (2.1) segue que $0 \neq t^{(\alpha,i)} w^i_\alpha \in \mathcal{J}^{(\alpha,i)} w^i_\alpha$. Logo, uma componente homogênea não nula de $t^{(\alpha,i)}$ pertence a $\mathcal{J}^{(\alpha,i)} w^i_\alpha$ e, consequentemente, como Δ é $\mathcal{S}$-álgebra graduada de divisão, segue que $1_\Delta \in \mathcal{J}^{(\alpha,i)} w^i_\alpha$. Assim, $\mathcal{J}^{(\alpha,i)} w^i_\alpha = \Delta$.

Vamos agora finalizar a demonstração de nosso lema. Seja $w^i_\alpha \in \mathcal{W}$ fixo. De (2.1) segue que existe uma componente homogênea $t^{(\alpha,i)}_\theta \in \mathcal{J}^{(\alpha,i)}_\theta$ de $t^{(\alpha,i)}_\theta$ tal que

$$t^{(\alpha,i)}_\theta w^i_\alpha \neq 0 \ \text{ e } \ t^{(\alpha,i)}_\theta w^j_\alpha = 0, \ \text{ para todo } j \neq i.$$

Como $t^{(\alpha,i)}_\theta w^i_\alpha \in \mathcal{J}^{(\alpha,i)} w^i_\alpha = \Delta$, segue que existe $d_{-\theta-\alpha} \in \Delta_{-\theta-\alpha}$ tal que

$$1 = d_{-\theta-\alpha} t^{(\alpha,i)}_\theta w^i_\alpha \ \text{ e } \ 0 = d_{-\theta-\alpha} t^{(\alpha,i)}_\theta w^j_\alpha \ \text{ para todo } \ j \neq i.$$

Como $d_{-\theta-\alpha} t^{(\alpha,i)}_\theta \in \mathcal{J}^{(\alpha,i)}$, segue que existe $v^i_{-\alpha-\gamma} \in V_{-\alpha-\gamma}$ tal que $d_{-\theta-\alpha} t^{(\alpha,i)}_\theta = \varphi\left(v^i_{-\alpha-\gamma}\right) = \left\langle v^i_{-\alpha-\gamma}, -\right\rangle_\gamma$. Logo,

$$1 = d_{-\theta-\alpha} t^{(\alpha,i)}_\theta w^i_\alpha = \varphi\left(v^i_{-\alpha-\gamma}\right) w^i_\alpha = \left\langle v^i_{-\alpha-\gamma}, w^i_\alpha\right\rangle_\gamma$$

e

$$0 = d_{-\theta-\alpha} t^{(\alpha,i)}_\theta w^j_\alpha = \varphi\left(v^i_{-\alpha-\gamma}\right) w^j_\alpha = \left\langle v^i_{-\alpha-\gamma}, w^j_\alpha\right\rangle_\gamma \ \text{ para todo } \ j \neq i.$$

Assim concluímos a demonstração do lema. □

Nos seguintes três lemas, Lemas 2.13, 2.14 e 2.15, vamos descrever totalmente os elementos do ideal G-graduado $\mathcal{F}^{gr_\sigma}_W(V)$.

Lema 2.13. *Seja $\langle -, - \rangle_\gamma : V \times W \longrightarrow \Delta$ uma forma Δ-bilinear homogênea de grau γ não degenerada associada à tripla (Δ, V, W). Para cada par de elementos homogêneos $v_\alpha \in V_\alpha$ e $w_{\beta-\alpha-\gamma} \in W_{\beta-\alpha-\gamma}$, a aplicação*

$$\begin{array}{rccl} a_\beta : & V & \longrightarrow & V \\ & v & \longrightarrow & \langle v, w_{\beta-\alpha-\gamma}\rangle_\gamma v_\alpha \end{array} \tag{2.2}$$

é um elemento homogêneo de grau β de $\mathcal{F}^{gr_\sigma}_W(V)$. Além disso, a_β é não nula se v_α e $w_{\beta-\alpha-\gamma}$ são não nulos.

Demonstração. Observamos que $a_\beta \in End^{gr}_\Delta ({}_\Delta V)_\beta$ e que $Im(a_\beta) = \Delta v_\alpha$. Logo, é suficiente mostrar que a_β tem uma σ-adjunta para concluir que $a_\beta \in \mathcal{F}^{gr_\sigma}_W (V)$. Temos que a aplicação

$$\begin{array}{rccl} b_\beta : & W & \longrightarrow & W \\ & w_\theta & \longrightarrow & \sigma(\theta,\alpha) w_{\beta-\alpha-\gamma} \langle v_\alpha, w_\theta\rangle_\gamma v_\alpha, \end{array}$$

é um elemento homogêneo de grau β de $End^{gr}_{\Delta^{op_\sigma}}({}_{\Delta^{op_\sigma}}W)$. Além disso, para qualquer $v_\tau \in V_\tau$, temos:

$$\begin{aligned}
\langle v_\tau a_\alpha, w_\theta\rangle_\gamma &= \left\langle \langle v_\tau, w_{\beta-\alpha-\gamma}\rangle_\gamma v_\alpha, w_\theta \right\rangle_\gamma \\
&= \langle v_\tau, w_{\beta-\alpha-\gamma}\rangle_\gamma \langle v_\alpha, w_\theta\rangle_\gamma \\
&= \left\langle v_\tau, w_{\beta-\alpha-\gamma} \langle v_\alpha, w_\theta\rangle_\gamma \right\rangle_\gamma \\
&= \sigma(\alpha,\theta) \left\langle v_\tau, \sigma(\theta,\alpha) w_{\beta-\alpha-\gamma} \langle v_\alpha, w_\theta\rangle_\gamma \right\rangle_\gamma \\
&= \sigma(\alpha,\theta) \langle v_\tau, w_{\beta-\alpha-\gamma} b_\beta\rangle_\gamma .
\end{aligned}$$

Portanto b_β é a σ-adjunta de a_β e, então, $a_\beta \in \mathcal{F}^{gr_\sigma}_W(V)_\beta$.

Além disso, se $w_{\beta-\alpha-\gamma}$ é não nulo, então $\langle V, w_{\beta-\alpha-\gamma}\rangle_\gamma \neq (0)$ pois $\langle -,-\rangle_\gamma$ é não degenerada. Logo, se v_α também é não nulo, segue que $\langle V, w_{\beta-\alpha-\gamma}\rangle_\gamma v_\alpha \neq (0)$. O que implicaria a_β não nula. Reciprocamente, se $a_\beta = \langle -, w_{\beta-\alpha-\gamma}\rangle_\gamma v_\alpha$ é não nula, é claro que $w_{\beta-\alpha-\gamma}$ e v_α devem ser não nulos. $\square$

Lema 2.14. *Seja $\langle -,-\rangle_\gamma : V\times W \longrightarrow \Delta$ uma forma Δ-bilinear homogênea de grau γ não degenerada, associada à tripla (Δ, V, W). Se a_β é um elemento homogêneo de $\mathcal{F}^{gr_\sigma}_W(V)$ de grau β e de posto 1, então existem dois elementos homogêneos $v_\theta \in V_\theta$ e $w_{\beta-\theta-\gamma} \in W_{\beta-\theta-\gamma}$ tais que*

$$(v)a_\beta := \langle v, w_{\beta-\theta-\gamma}\rangle_\gamma v_\theta, \ \textit{para todo } v \in V.$$

Demonstração. Como a_β é de posto 1, temos $Im(a_\theta) = \Delta v_\theta$, para algum $v_\theta \in V_\theta$. Observamos que, pelo Lema 2.11, existe $w_{-\theta-\gamma} \in W_{-\theta-\gamma}$ tal que $\langle v_\theta, w_{-\theta-\gamma}\rangle_\gamma = 1$.

Agora, para $v_\alpha \in V_\alpha$ fixo, segue que $v_\alpha a_\beta = d_{\alpha+\beta-\theta} v_\theta$, para algum $d_{\alpha+\beta-\theta} \in \Delta_{\alpha+\beta-\theta}$. Assim, temos

$$\langle v_\alpha a_\beta, w_{-\theta-\gamma}\rangle_\gamma = \langle d_{\alpha+\beta-\gamma} v_\theta, w_{-\theta-\gamma}\rangle_\gamma = d_{\alpha+\beta-\gamma} \langle v_\theta, w_{-\theta-\gamma}\rangle_\gamma = d_{\alpha+\beta-\gamma},$$

e

$$\langle v_\alpha a_\beta, w_{-\theta-\gamma}\rangle_\gamma = \sigma(\beta, -\theta-\gamma) \left\langle v_\alpha, w_{-\theta-\gamma} a_\beta^{*_\sigma}\right\rangle_\gamma .$$

Daí

$$\begin{aligned}
v_\alpha a_\beta &= d_{\alpha+\beta-\gamma} v_\theta \\
&= \sigma(\beta,-\theta-\gamma) \left\langle v_\alpha, w_{-\theta-\gamma} a_\beta^{*_\sigma}\right\rangle_\gamma v_\theta \\
&= \left\langle v_\alpha, \sigma(\beta,-\theta-\gamma) w_{-\theta-\gamma} a_\beta^{*_\sigma}\right\rangle_\gamma v_\theta.
\end{aligned}$$

Como v_α é fixo, concluímos que $a_\beta = \langle -, w_{\beta-\theta-\gamma}\rangle_\gamma v_\theta$, onde $w_{\beta-\theta-\gamma} = \sigma(\beta, -\theta-\gamma) w_{-\theta-\gamma} a_\beta^{*_\sigma}$. $\square$

Lema 2.15. *Seja $\langle -,-\rangle_\gamma : V \times W \longrightarrow \Delta$ uma forma Δ-bilinear homogênea de grau γ não degenerada associada à tripla (Δ, V, W). Todo elemento homogêneo de $\mathcal{F}^{gr_\sigma}_W(V)$ é uma soma finita de elementos homogêneos de posto 1 de $\mathcal{F}^{gr_\sigma}_W(V)$.*

Demonstração. Seja a_β um elemento homogêneo arbitrário de $\mathcal{F}^{gr_\sigma}_W(V)$ e seja $dim_\Delta(Va_\tau) = n \leq \infty$. Se $\mathcal{V} = \{v^1_\alpha, \ldots, v^{n_\alpha}_\alpha, \ldots, v^1_\beta, \ldots, v^{n_\beta}_\beta\}$ é uma Δ-base para Va_β temos, pelo Lema 2.11, a existência de um subconjunto $\mathcal{W} = \{w^1_{-\alpha-\gamma}, \ldots, w^{n_\alpha}_{-\alpha-\gamma}, \ldots, w^1_{-\beta'-\gamma}, \ldots, v^{n_{\beta'}}_{-\beta'-\gamma}\} \subseteq W$ de elementos homogêneos tal que

$$\left\langle v^{i_\theta}_\theta, w^{j_\tau}_{-\tau-\gamma}\right\rangle_\gamma = \delta_{i_\theta j_\tau}\delta_{\theta\tau}.$$

Portanto, para $v_\eta \in V_\eta$ e $w^{j_\tau}_{-\tau-\gamma} \in \mathcal{W}$ fixos, temos

$$\begin{aligned}
\left\langle v_\eta a_\beta, w^{j_\tau}_{-\tau-\gamma} \right\rangle_\gamma &= \left\langle \sum_{v^{i_\theta}_\theta \in \mathcal{V}} d_{\eta+\beta-\theta} v^{i_\theta}_\theta, w^{j_\tau}_{-\tau-\gamma} \right\rangle_\gamma \\
&= \sum_{v^{i_\theta}_\theta \in \mathcal{V}} d^{i_\theta}_{\eta+\beta-\theta} \left\langle v^{i_\theta}_\theta, w^{j_\tau}_{-\tau-\gamma} \right\rangle_\gamma \\
&= d^{j_\tau}_{\eta+\beta-\tau}.
\end{aligned}$$

Logo, segue que

$$\begin{aligned}
v_\eta a_\beta &= \sum_{v^{i_\theta}_\theta \in \mathcal{V}} d_{\eta+\beta-\theta} v^{i_\theta}_\theta \\
&= \sum_{v^{i_\theta}_\theta \in \mathcal{V}} \left\langle v_\eta a_\beta, w^{i_\theta}_{-\theta-\gamma} \right\rangle_\gamma v^{i_\theta}_\theta \\
&= \sum_{v^{i_\theta}_\theta \in \mathcal{V}} \sigma(\beta, -\theta-\gamma) \left\langle v_\eta, w^{i_\theta}_{-\theta-\gamma} a^{*_\sigma}_\beta \right\rangle_\gamma v^{i_\theta}_\theta \\
&= \sum_{v^{i_\theta}_\theta \in \mathcal{V}} \left\langle v_\eta, \sigma(\beta, -\theta-\gamma) w^{i_\theta}_{-\theta-\gamma} a^{*_\sigma}_\beta \right\rangle_\gamma v^{i_\theta}_\theta \\
&= v_\eta \left(\sum_{v^{i_\theta}_\theta \in \mathcal{V}} \left\langle -, \sigma(\beta, -\theta-\gamma) w^{i_\theta}_{-\theta-\gamma} a^{*_\sigma}_\beta \right\rangle_\gamma v^{i_\theta}_\theta \right).
\end{aligned}$$

Como v_η é arbitrário, concluímos que $a_\beta = \sum_{v^{i_\theta}_\theta \in \mathcal{V}} \left\langle -, \sigma(\beta, -\theta-\gamma) w^{i_\theta}_{-\theta-\gamma} a^{*_\sigma}_\beta \right\rangle_\gamma v^{i_\theta}_\theta$. Assim concluímos a prova do lema. □

Proposição 2.16. *Seja $\langle -, - \rangle_\gamma : V \times W \longrightarrow \Delta$ uma forma Δ-bilinear homogênea de grau γ não degenerada associada à tripla (Δ, V, W). Temos que $\mathcal{F}^{gr_\sigma}_W(V)$ age densamente à direita de V.*

Demonstração. Seja $\{v^1_\alpha, \ldots, v^n_\alpha\} \subseteq V_\alpha$ um conjunto de elementos homogêneos linearmente independente sobre Δ e seja $\{v^1_\beta, \ldots, v^n_\beta\} \subseteq V_\beta$ um conjunto arbitrário de elementos homogêneos. Pelo Lema 2.11 existem elementos homogêneos $w^1_{-\alpha-\gamma}, \ldots, w^n_{-\alpha-\gamma} \in W_{-\alpha-\gamma}$ tais que

$$\left\langle v^i_\alpha, w^j_{-\alpha-\gamma} \right\rangle_\gamma = \delta_{ij}.$$

Logo, pelo Lema 2.13, $\left\langle -, w^j_{-\alpha-\gamma} \right\rangle_\gamma v^j_\beta \in \mathcal{F}^{gr_\sigma}_W(V)$, para todo $j = 1, \ldots, n$. Daí, como $\mathcal{F}^{gr_\sigma}_W(V)$ é um $\mathcal{S}$-módulo, temos $t_{\beta-\alpha} = \sum_{j=1}^n \left\langle -, w^j_{-\alpha-\gamma} \right\rangle_\gamma v^j_\beta \in \mathcal{F}^{gr_\sigma}_W(V)$. Agora, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, observamos que

$$v^i_\alpha t_{\beta-\alpha} = \sum_{j=1}^n \left\langle v_\alpha, w^j_{-\alpha-\gamma} \right\rangle_\gamma v^j_\beta = v^i_\beta.$$

Portanto, $\mathcal{F}^{gr_\sigma}_W(V)$ age densamente à direita de V, como queríamos mostrar. □

Proposição 2.17. *Seja $\langle -, - \rangle_\gamma : V \times W \longrightarrow \Delta$ uma forma Δ-bilinear homogênea de grau γ não degenerada associada à tripla (Δ, V, W). Temos que V é um $\mathcal{F}^{gr_\sigma}_W(V)$-módulo à direita graduado irredutível e fiel.*

Demonstração. Como $\mathcal{F}_W^{gr_\sigma}(V)$ é uma $\mathcal{S}$-subálgebra graduada da $\mathcal{S}$-álgebra graduada $\mathcal{L}_W^{gr_\sigma}(V)$ que, por sua vez, é $\mathcal{S}$-subálgebra da $\mathcal{S}$-álgebra graduada de endomorfismos homogêneos $End_\Delta^{gr_\sigma}(V)$, segue que V é um $\mathcal{F}_W^{gr_\sigma}(V)$-módulo à direita graduado fiel. Por outro lado, V é $\mathcal{F}_W^{gr_\sigma}(V)$-módulo à direita graduado irredutível pois, como vimos na Proposição 2.16, $\mathcal{F}_W^{gr_\sigma}(V)$ age densamente à direita de V. □

Finalizamos esta seção com o seguinte corolário da Proposição 2.17. Este corolário vai ser usado na prova do principal resultado deste capítulo: o Teorema 2.28.

Corolário 2.18. *Seja $\langle -,-\rangle_\gamma : V \times W \longrightarrow \Delta$ uma forma Δ-bilinear homogênea de grau γ não degenerada, associada à tripla (Δ, V, W). Se $\mathcal{R}$ é uma $\mathcal{S}$-álgebra graduada tal que $\mathcal{F}_W^{gr_\sigma}(V) \subseteq \mathcal{R} \subseteq \mathcal{L}_W^{gr_\sigma}(V)$, então $\mathcal{R}$ é uma $\mathcal{S}$-álgebra graduada primitiva à direita.*

2.2 σ-Antiautomorfismos e σ-Involuções

Quando $\mathbb{F}$ é um corpo e $\epsilon : G \times G \longrightarrow \mathbb{F}^\times$ é um bicarater antissimétrico, as ϵ-involuções em álgebras associativas aparecem em [10] como involuções coloridas. Nesta seção lembramos o conceito de σ-involução quando $\sigma : G \times G \longrightarrow U(\mathcal{S})$ é um 2-cociclo antissimétrico, e veremos assim que as σ-involuções generalizam o conceito de involução colorida. Também vamos ver, nos exemplos, que o conceito de σ-involução generaliza os conceitos de Involução, Superinvolução, Involução graduada e $\mathbb{Z}_3$-involução.

Definição 2.19. *Sejam $\sigma : G \times G \longrightarrow U(\mathcal{S})$ um 2-cociclo antissimétrico e $\mathcal{R}$, $\mathcal{A}$ $\mathcal{S}$-álgebras G-graduadas. Um **σ-anti-homomorfismo** de $\mathcal{R}$ em $\mathcal{A}$ é um homomorfismo de $\mathcal{S}$-álgebras graduado, $\varphi_\sigma : \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{A}$, que satisfaz*

$$(r_\alpha r_\beta)^{\varphi_\sigma} = \sigma(\alpha,\beta) r_\beta^{\varphi_\sigma} r_\alpha^{\varphi_\sigma},$$

*para todos $r_\alpha \in \mathcal{R}_\alpha$, $r_\beta \in \mathcal{R}_\beta$ e para quaisquer $\alpha, \beta \in G$. Quando φ_σ é sobrejetivo, ou injetivo, dizemos que φ_σ é um **σ-antiepimorfismo**, ou um **σ-antimonomorfismo**, respectivamente. Se φ_σ é um **σ-anti-homomorfismo** que é injetivo e sobrejetivo, dizemos que φ_σ é um **σ-anti-isomorfismo**. Quando $\mathcal{R} = \mathcal{A}$ um σ-anti-isomorfismo é chamado de **σ-antiautomorfismo**.*

Exemplo 2.20. *Se $\mathcal{R}$ é uma $\mathcal{S}$-álgebra G-graduada e σ é um 2-cociclo antissimétrico, temos que*

$$\begin{aligned} \varphi_\sigma : \quad \mathcal{R} &\longrightarrow \mathcal{R}^{op_\sigma} \\ r &\longmapsto r, \end{aligned}$$

é um σ-anti-isomorfismo de $\mathcal{S}$-álgebras G-graduadas.

Agora vamos apresentar algumas propriedades básicas, de fácil verificação, dos σ-anti-homomorfismos em $\mathcal{S}$-álgebras graduadas.

Proposição 2.21. *Sejam $\mathcal{R}$ e $\mathcal{A}$ $\mathcal{S}$-álgebras graduadas e seja $\sigma : G \times G \longrightarrow U(\mathcal{S})$ um 2-cociclo antissimétrico. Se $\varphi_\sigma : \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{A}$ é um σ-anti-homomorfismo, então*

1. $(0_\mathcal{R})^{\varphi_\sigma} = 0_\mathcal{A}$;

2. *quando φ_σ é σ-anti-homomorfismo de $\mathcal{S}$-álgebras unitárias, $(1_\mathcal{R})^{\varphi_\sigma} = \sigma(0,0)1_\mathcal{A}$ e $(-1_\mathcal{R})^{\varphi_\sigma} = \sigma(0,0)(-1_\mathcal{A}) = -\sigma(0,0)1_\mathcal{A}$;*

3. *$Ker\,(\varphi_\sigma)$ é um ideal graduado de $\mathcal{R}$;*

4. *$Im\,(\varphi_\sigma)$ é ideal graduado de $\mathcal{A}$;*

5. *$Ker\,(\varphi_\sigma) = (0)$ se, e somente se, φ_σ é injetivo.*

Definição 2.22. *Sejam $\mathcal{R}$ uma $\mathcal{S}$-álgebra G-graduada e $\sigma : G \times G \longrightarrow U\,(\mathcal{S})$ um 2-cociclo antissimétrico. Uma σ-**involução** da $\mathcal{S}$-álgebra $\mathcal{R}$ é um σ-anti-isomorfismo $*_\sigma : \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}$ tal que $r^{*_\sigma *_\sigma} = r$, para todo $r \in \mathcal{R}$. Quando σ é um bicarater antissimétrico, dizemos que a σ-involução $*_\sigma$ é uma **involução colorida** da $\mathcal{S}$-álgebra $\mathcal{R}$.*

Proposição 2.23. *Sejam $\mathcal{R}$ uma $\mathcal{S}$-álgebra G-graduada e $\sigma : G \times G \longrightarrow U\,(\mathcal{S})$ um 2-cociclo antissimétrico. Então $\mathcal{R}$ admite uma σ-involução se, e somente se, existe um isomorfismo de ordem 2, $\varphi : \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}^{op_\sigma}$, de $\mathcal{S}$-álgebras graduadas de grau neutro.*

Exemplos 2.24. *Sejam $\sigma : G \times G \longrightarrow U\,(\mathcal{S})$ um 2-cociclo antissimétrico e $*_\sigma : \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}$ uma σ-involução da $\mathcal{S}$-álgebra G-graduada $\mathcal{R}$.*

1. *Se $\sigma(\alpha, \beta) = 1$, para todos $\alpha, \beta \in G$, $*_\sigma$ é conhecida na literatura matemática como uma **involução graduada**;*

2. *Quando $G = \mathbb{Z}_2$, $U\,(\mathcal{S}) = \mathbb{F}^\times$, sendo $\mathbb{F}$ um corpo, e $\sigma(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) = (-1)^{\alpha\beta}$, para todos $\bar{\alpha}, \bar{\beta} \in \mathbb{Z}_2$, temos que $\star_\sigma$ é chamada de **superinvolução**;*

3. *Se $G = \mathbb{Z}_3$, $U\,(\mathcal{S}) = \mathbb{F}^\times$, sendo $\mathbb{F}$ um corpo, e $\sigma(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) = (-1)^{\alpha\beta}$, para todos $\bar{\alpha}, \bar{\beta} \in \mathbb{Z}_3$, então $\star_\sigma$ é chamada de $\mathbb{Z}_3$-**involução**.*

Observação 2.25. *Aqui ressaltamos que, para um 2-cociclo antissimétrico σ fixo, nem toda $\mathcal{S}$-álgebra G-graduada $\mathcal{R}$ admite uma σ-involução. Por exemplo, se $\mathcal{S} = \mathbb{F}$ é um corpo e $G = \mathbb{Z}_2$, pode-se definir o 2-cociclo antissimétrico $\sigma : \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \mathbb{F}^\times$ por $\sigma(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) = (-1)^{\alpha\beta}$, para todos $\bar{\alpha}, \bar{\beta} \in \mathbb{Z}_2$. Logo, é possível mostrar que a $\mathbb{F}$-álgebra de grupo $\mathcal{M}\,(\mathbb{F}[\mathbb{Z}_2])$ não possui superinvoluções, ver [14].*

A seguinte proposição é uma fonte de exemplos de σ-involuções na $\mathcal{S}$-álgebra de matrizes $\mathbb{Z}_3$-graduada $\mathcal{M}_k\,(\Delta)$ sobre uma $\mathcal{S}$-álgebra graduada de divisão Δ. Este resultado corresponde à Proposição 3.3.6 de [22] que generalizou o resultado análogo: Theorem 4.2 em [16].

Antes de enunciar a proposição, lembramos que se Δ_0 é um anel ($\mathcal{S}$-álgebra) de divisão munido de uma involução $\bar{\ } : \Delta \longrightarrow \Delta$, então $\mathcal{M}_k\,(\Delta)$ possui uma σ-involução $\tilde{\ } : \mathcal{M}_k\,(\Delta) \longrightarrow \mathcal{M}_k\,(\Delta)$, dada pela correspondência $a \longmapsto \tilde{a} = \bar{a}^t$.

Proposição 2.26. *([22], Proposição 3.3.6) Seja $\Delta = \Delta_0$ um anel de divisão munido com uma involução $\bar{\ } : \Delta \longrightarrow \Delta$ e seja $\sigma : \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \longrightarrow \{-1, 1\}$ um 2-cociclo antissimétrico.*

a) *Considere $\mathcal{A} = \mathcal{M}_{p+p}\,(\Delta)$, com $p \geq 1$, $\mathbb{Z}_3$-graduada por:*

$$\mathcal{A}_0 = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix} : \ x, y \in \mathcal{M}_p\,(\Delta) \right\},$$

$$\mathcal{A}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix} : \; a \in \mathcal{M}_p(\Delta) \right\},$$

$$\mathcal{A}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : \; b \in \mathcal{M}_p(\Delta) \right\}.$$

Então a função $*_\sigma : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ definida pela correspondência

$$\begin{pmatrix} f & x \\ y & z \end{pmatrix}^{*_\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma(0,0)\tilde{z} & c\tilde{x} \\ \sigma(1,2)\sigma(0,0)\bar{c}\tilde{y} & \sigma(0,0)\tilde{f} \end{pmatrix},$$

onde $\tilde{a} = \bar{a}^t$ em $\mathcal{M}_p(\Delta)$, c pertence ao centro de Δ e $\bar{c}c = 1$, é uma σ-involução.

b) Considere $\mathcal{B} = \mathcal{M}_{p+q+p}(\Delta)$, onde $1 \leq p, q$, com $\mathbb{Z}_3$-graduação dada por

$$\mathcal{B}_0 = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix} : \; x, z \in \mathcal{M}_p(\Delta), y \in \mathcal{M}_q(\Delta) \right\},$$

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix} : \; a \in \mathcal{M}_{q\times p}(\Delta), b \in \mathcal{M}_{p\times q}(\Delta), c \in \mathcal{M}_p(\Delta) \right\}.$$

$$\mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & y \\ z & 0 & 0 \end{pmatrix} : \; x \in \mathcal{M}_{p\times q}(\Delta), y \in \mathcal{M}_{q\times p}(\Delta), z \in \mathcal{M}_p(\Delta) \right\}.$$

Então, a função $*_\sigma : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}$, definida por

$$\begin{pmatrix} f & x & c \\ a & g & y \\ z & b & h \end{pmatrix}^{*_\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma(0,0)\tilde{h} & \alpha\tilde{y} & \beta\tilde{c} \\ \tau\tilde{b} & \sigma(0,0)\tilde{g} & \gamma\tilde{x} \\ \omega\tilde{z} & \eta\tilde{a} & \sigma(0,0)\tilde{f} \end{pmatrix},$$

onde $\tilde{a} = \bar{a}^t$ é uma involução em $\mathcal{M}_p(\Delta)$ e $\mathcal{M}_q(\Delta)$, e $\alpha, \beta, \gamma, \tau$ são elementos do centro de Δ tais que

$$\beta\tau = \sigma(1,1)\gamma, \;\; \beta\eta = \sigma(1,1)\alpha, \;\; \eta\tau = \sigma(1,1)\omega,$$
$$\alpha\gamma = \sigma(2,2)\beta\gamma\omega = \sigma(2,2)\tau, \;\; \omega\alpha = \sigma(2,2)\eta,$$
$$\bar{\tau}\eta = \gamma\bar{\alpha} = \beta\bar{\beta} = \omega\bar{\omega} = 1,$$

é uma σ-involução.

Aqui anotamos que, além dos 2-cociclos triviais, os Itens 1 e 2 do Exemplo 1.20 apresentam dois exemplos de 2-cociclos para os quais a proposição anterior vale.

2.3 Teorema de Estrutura

Nesta seção vamos apresentar o Teorema 2.28 de estrutura para $\mathcal{S}$-álgebras G-graduadas primitivas à direita com um ideal à direita graduado minimal. Este teorema foi provado em [22], Teorema 3.4.2., para anéis ($\mathbb{F}$-álgebras), com característica diferente de 2, G-graduados primitivos à direita com um ideal à direita graduado minimal. Ressaltamos também que o Teorema 3.4.2. de [22] generalizou os teoremas: Theorem 6 de [24] e Theorem 3.3. de [1].

Antes de apresentar o principal resultado desta seção, recordemos o seguinte fato bem conhecido.

Lema 2.27. *Sejam $\mathcal{R}$ um anel G-graduado primitivo, $e_0 \in \mathcal{R}$ um idempotente minimal, $V = e_0\mathcal{R}$ um ideal à direita graduado minimal e $\Delta = e_0\mathcal{R}e_0$ um anel graduado de divisão. Então a aplicação*

$$\begin{array}{rccl} \varphi: & \mathcal{R} & \longrightarrow & End_{\Delta}^{gr}\left({}_{\Delta}V\right) \\ & r & \longmapsto & \varphi_r \end{array}$$

onde, para cada $r \in \mathcal{R}$, $\varphi_r : V \longrightarrow V$ é definida pela correspondência $v \longmapsto vr$, é um monomorfismo de anéis graduados ($\mathcal{S}$-álgebras graduadas).

Teorema 2.28. *Sejam $\mathcal{R}$ uma $\mathcal{S}$-álgebra G-graduada e $\sigma : G \times G \longrightarrow U(\mathcal{S})$ um 2-cociclo antissimétrico satisfazendo $\sigma(\alpha, -\alpha)^2 = 1$ para cada $\alpha \in G$. Então $\mathcal{R}$ é graduada primitiva à direita com um ideal à direita graduado minimal se, e somente se, existe um elemento $\gamma \in G$ e existe uma forma Δ-bilinear homogênea de grau γ não degenerada $\langle -, - \rangle_{\gamma} : V \times W \longrightarrow \Delta$ associada a uma tripla (Δ, V, W), tal que*

$$\mathcal{F}_W^{gr_\sigma}(V) \subseteq \mathcal{R} \subseteq \mathcal{L}_W^{gr_\sigma}(V).$$

Além disso, quando temos a relação $\mathcal{F}_W^{gr_\sigma}(V) \subseteq \mathcal{R} \subseteq \mathcal{L}_W^{gr_\sigma}(V)$, então $\mathcal{F}_W^{gr_\sigma}(V)$ é o único ideal graduado minimal de $\mathcal{R}$.

Demonstração. Seja $\mathcal{R}$ uma $\mathcal{S}$-álgebra G-graduada primitiva à direita com um ideal à direita graduado minimal I. Pelo Lema 1.10 e pelo Corolário 1.8 segue que $\mathcal{R}$ é graduada semiprima. Logo, pelo Lema 1.11, existe um idempotente minimal $e_0 \in I_0$ tal que $I = e_0\mathcal{R}$, $\Delta = e_0\mathcal{R}e_0$ é uma $\mathcal{S}$-álgebra graduada de divisão e $\mathcal{R}e_0$ é ideal à esquerda graduado minimal de $\mathcal{R}$. Agora, temos que $V = e_0\mathcal{R}$ e $W = \mathcal{R}e_0$ são Δ-espaços à esquerda graduado e à direita graduado, respectivamente. Definindo a aplicação

$$\begin{array}{rccl} \langle -, - \rangle : & V \times W & \longrightarrow & \Delta \\ & (e_0r, r'e_0) & \longmapsto & e_0rr'e_0, \end{array}$$

temos que $\langle -, - \rangle$ é uma forma Δ-bilinear homogênea de grau zero. Além disso, pela Proposição 1.5, temos que $\mathcal{R}$ é graduada prima. Daí, se $e_0r_\alpha\mathcal{R}e_0 = (0)$ ou se $e_0\mathcal{R}r_\beta e_0 = (0)$, então $e_0r_\alpha = 0$ ou $r_\beta e_0 = 0$, respectivamente. Assim $\langle -, - \rangle$ também é não degenerada.

Veremos que $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{L}_W^{gr_\sigma}(V)$. Pelo Lema 2.27 temos que a aplicação

$$\begin{array}{rccl} \varphi: & \mathcal{R} & \longrightarrow & End_{\Delta}^{gr}\left({}_{\Delta}V\right) \\ & r & \longmapsto & \varphi_r \end{array}$$

onde, para cada $r \in \mathcal{R}$, $\varphi_r : V \longrightarrow V$ é definida pela correspondência $v \longmapsto vr$, é um monomorfismo de anéis graduados ($\mathcal{S}$-álgebras graduadas). Observamos ainda que, para $r_\alpha \in \mathcal{R}_\alpha$ fixo, $\varphi_{r_\alpha} \in End_{\Delta}\left({}_{\Delta}V\right)_\alpha$. Logo, se definimos a aplicação

$$\begin{array}{rccl} \psi_{r_\alpha}: & {}_{\Delta^{op_\sigma}}W & \longrightarrow & {}_{\Delta^{op_\sigma}}W \\ & w_\beta & \longmapsto & r_\alpha w_\beta, \end{array}$$

temos $\psi_{r_\alpha} \in End_{\Delta^{op_\sigma}}\left({}_{\Delta^{op_\sigma}}W\right)_\alpha$. Além disso, para todos $v_\theta = e_0 r_\theta \in V_\theta$ e $w_\beta = r_\beta e_0 \in W_\beta$, temos que

$$\begin{aligned} \langle v_\theta \varphi_{r_\alpha}, w_\beta \rangle &= ((e_0 r_\theta) r_\alpha)(r_\beta e_0) \\ &= \sigma(\alpha,\beta)(e_0 r_\theta)((r_\beta e_0) r_\alpha) \\ &= \sigma(\alpha,\beta)\langle v_\theta, w_\beta \psi_\alpha \rangle . \end{aligned}$$

Assim ψ_{r_α} é a σ-adjunta de φ_α. Logo, $\varphi_{r_\alpha} \in \mathcal{L}_W^{gr_\sigma}(V)_\alpha$, para cada $r_\alpha \in \mathcal{R}_\alpha$. Portanto, $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{L}_W^{gr_\sigma}(V)$.

Agora, vamos mostrar que $\mathcal{F}_W^{gr_\sigma}(V) \subseteq \mathcal{R}$. Pelo Lema 2.15 sabemos que, para $\beta \in G$ fixo, todo elemento homogêneo de $\mathcal{F}_W^{gr_\sigma}(V)_\beta$ é uma soma finita de elementos homogêneos da forma $\langle -, w_{\beta-\alpha}\rangle u_\alpha \in \mathcal{F}_W^{gr_\sigma}(V)_\beta$, onde $w_{\beta-\alpha} \in W_{\beta-\alpha}$ e $u_\alpha \in V_\alpha$. Logo, para $w_{\beta-\alpha} \in W_{\beta-\alpha}$ e $u_\alpha \in V_\alpha$ fixos, observamos que

$$\langle v_\theta, w_{\beta-\alpha}\rangle u_\alpha = (v_\theta w_{\beta-\alpha}) u_\alpha = v_\theta (w_{\beta-\alpha} u_\alpha) = v_\theta \varphi_{w_{\beta-\alpha} u_\alpha},$$

para qualquer $v_\theta \in V_\theta$. Daí que $\langle v_\theta, w_{\beta-\alpha}\rangle u_\alpha = \varphi_{w_{\beta-\alpha}u_\alpha} \in \mathcal{R}_\beta$, para $w_{\beta-\alpha} \in W_{\beta-\alpha}$ e $u_\alpha \in V_\alpha$ fixos. Assim, concluímos que $\mathcal{F}_W^{gr_\sigma}(V) \subseteq \mathcal{R}$.

Reciprocamente, suponhamos que existe uma forma Δ-bilinear homogênea de grau γ não degenerada $\langle -,-\rangle_\gamma : V \times W \longrightarrow \Delta$, associada a uma tripla (Δ, V, W), tal que

$$\mathcal{F}_W^{gr_\sigma}(V) \subseteq \mathcal{R} \subseteq \mathcal{L}_W^{gr_\sigma}(V).$$

Então, pelo Corolário 2.18, $\mathcal{R}$ é uma $\mathcal{S}$-álgebra graduada primitiva à direita.

Mostremos agora que $\mathcal{R}$ tem um ideal à esquerda graduado minimal. Seja $0 \neq u_0 \in V_0$ fixo. Para cada $\alpha \in G$, definimos o $\mathcal{S}$-submódulo de $\mathcal{R}$

$$M_\alpha = \{r_\alpha \in \mathcal{R}_\alpha : V_\beta r_\alpha \subseteq \Delta_{\alpha+\beta} u_0, \text{ para todo } \beta \in G\}.$$

Logo, temos que $M = \bigoplus_{\alpha \in G} M_\alpha$ é um $\mathcal{S}$-submódulo graduado de $\mathcal{F}_W^{gr_\sigma}(V)$ e, assim também, de $\mathcal{R}$. Para $r = \sum_{g\in G} r_g \in \mathcal{R} = \bigoplus_{g\in G}\mathcal{R}_g$ e $r_\alpha \in M_\alpha$ fixos, temos

$$V_\beta(r_g r_\alpha) = (V_\beta r_g) r_\alpha \subseteq V_{\beta+g} r_\alpha \subseteq \Delta_{\beta+\alpha+g} u_0,$$

para todos $g, \beta \in G$. Daí $r_g r_\alpha \in M_{g+\alpha}$, para todo $g \in G$. Logo, M é ideal à esquerda graduado de $\mathcal{R}$.

Afirmamos que M é graduado minimal. Seja $0 \neq y_{\beta-\gamma} \in W_{\beta-\gamma}$ um elemento fixo, para algum $\beta \in G$. Pelo Lema 2.13, temos que $a_\beta = \langle -, y_{\beta-\gamma}\rangle u_0$ é um elemento homogêneo de posto 1, que pertence a $\mathcal{F}_W^{gr_\sigma}(V)_\beta$. Daí $a_\beta \in M_\beta$ e, como M é ideal à esquerda graduado de $\mathcal{R}$, temos $\mathcal{R}a_\beta \subseteq M$. Por outro lado, consideramos um elemento fixo $r_\alpha \in M_\alpha \subseteq \mathcal{F}_W^{gr_\sigma}(V)_\alpha \subseteq \mathcal{R}_\alpha$. Como $u_0 \in V_0$ é não nulo, pelo Lema 2.11, existe $w_{-\gamma} \in W_{-\gamma}$ tal que $\langle u_0, w_{-\gamma}\rangle_\gamma = 1$. Logo, para qualquer $v_\theta \in V_\theta$, temos:

$$\begin{aligned} v_\theta r_\alpha = d_{\theta+\alpha} u_0 &= \langle d_{\theta+\alpha} u_0, w_{-\gamma}\rangle_\gamma u_0 \\ &= \langle v_\theta r_\alpha, w_{-\gamma}\rangle_\gamma u_0 \\ &= \sigma(\alpha,-\gamma)\langle v_\theta, w_{-\gamma} r_\alpha^{*_\sigma}\rangle_\gamma u_0; \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} v_\theta a_\beta = d_{\theta+\beta} u_0 &= \langle d_{\theta+\beta} u_0, w_{-\gamma}\rangle_\gamma u_0 \\ &= \langle v_\theta a_\beta, w_{-\gamma}\rangle_\gamma u_0 \\ &= \sigma(\beta,-\gamma)\langle v_\theta, w_{-\gamma} a_\beta^{*_\sigma}\rangle_\gamma u_0. \end{aligned}$$

Agora, como $a_\beta \neq 0$, obtemos $0 \neq \sigma(\beta, -\gamma) w_{-\gamma} a_\beta^{*\sigma}$. Logo, pelo Lema 2.12, existe $v_{-\beta} \in V_{-\beta}$ tal que $\left\langle v_{-\beta}, \sigma(\beta,-\gamma) w_{-\gamma} a_\beta^{*\sigma} \right\rangle_\gamma = 1$. Assim, se $c_{\alpha-\beta} = \sigma(\alpha,-\gamma) \left\langle -, w_{-\gamma} r_\alpha^{*\sigma} \right\rangle_\gamma v_{-\beta}$, então

$$\begin{aligned} v_\theta c_{\alpha-\beta} a_\beta &= \sigma(\alpha,-\gamma) \left\langle v_\theta, w_{-\gamma} r_\alpha^{*\sigma} \right\rangle_\gamma v_{-\beta} a_\beta \\ &= \sigma(\alpha,-\gamma) \left\langle v_\theta, w_{-\gamma} r_\alpha^{*\sigma} \right\rangle_\gamma \sigma(-\beta,-\gamma) \left\langle v_{-\beta}, w_{-\gamma} a_\beta^{*\sigma} \right\rangle_\gamma u_0 \\ &= \sigma(\alpha,-\gamma) \left\langle v_\theta, w_{-\gamma} r_\alpha^{*\sigma} \right\rangle_\gamma u_0 \\ &= v_\theta r_\alpha, \end{aligned}$$

para qualquer $v_\theta \in V_\theta$. Consequentemente $r_\alpha = c_{\alpha-\beta} a_\beta$. Logo, como r_α é fixo, segue que $M_\alpha \subseteq \mathcal{R}_{\alpha-\beta} a_\beta$, para todo $\alpha \in G$. Assim, $M \subseteq \mathcal{R} a_\beta$ e, portanto, $M = \mathcal{R} a_\beta$.

Suponhamos agora que $(0) \neq M' \subseteq M$ é um ideal à esquerda graduado minimal de $\mathcal{R}$ e que $0 \neq a_\alpha \in M'_\alpha$. Dado $v_\eta \in V_\eta$ fixo, temos $v_\eta b_\alpha = d_{\eta+\alpha} u_0$, para algum $d_{\eta+\alpha}$. Por outro lado, pelo Lema 2.11, existe um elemento homogêneo $w_{-\gamma} \in W_{-\gamma}$ tal que $\left\langle u_0, w_{-\gamma} \right\rangle_\gamma = 1$. Assim,

$$v_\eta b_\alpha = d_{\eta+\alpha} u_0 = \left\langle d_{\eta+\alpha} u_0, w_{-\gamma} \right\rangle_\gamma u_0 = \left\langle v_\eta b_\alpha, w_{-\gamma} \right\rangle_\gamma u_0 = \sigma(\alpha,-\gamma) \left\langle v_\eta, w_{-\gamma} b_\alpha^{*\sigma} \right\rangle_\gamma u_0. \quad (2.3)$$

Como $b_\alpha \neq 0$, temos que $\sigma(\alpha,-\gamma) w_{-\gamma} b_\alpha^{*\sigma} \neq 0$. Logo, pelo Lema 2.12, existe um elemento homogêneo $u_{-\alpha} \in V_{-\alpha}$ tal que $\sigma(\alpha,-\gamma) \left\langle u_{-\alpha}, w_{-\gamma} b_\alpha^{*\sigma} \right\rangle_\gamma = 1$. Assim, por (2.3), temos

$$u_{-\alpha} b_\alpha = \sigma(\alpha,-\gamma) \left\langle u_{-\alpha}, w_{-\gamma} b_\alpha^{*\sigma} \right\rangle_\gamma u_0 = u_0. \quad (2.4)$$

Agora, definindo

$$\begin{array}{rccl} t_{\beta-\alpha}: & V & \longrightarrow & V \\ & v & \longmapsto & \left\langle v, y_{\beta-\gamma} \right\rangle_\gamma u_{-\alpha}, \end{array} \quad (2.5)$$

temos que $t_{\beta-\alpha} \in \mathcal{F}_W^{gr_\sigma}(V)_{\beta-\gamma}$. Logo, para qualquer $v_\theta \in V_\theta$,

$$\begin{aligned} v_\theta t_{\beta-\gamma} b_\alpha &= \left\langle v_\theta, y_{\beta-\gamma} \right\rangle_\gamma u_{-\alpha} b_\alpha \\ &= \left\langle v_\theta, y_{\beta-\gamma} \right\rangle_\gamma u_0 \\ &= v_\theta a_\beta. \end{aligned}$$

De onde concluímos que $a_\beta = t_{\beta-\gamma} b_\alpha \in M'_\alpha$. Logo, $M = \mathcal{R} a_\beta \subseteq M' \subseteq M$ e,assim, obtemos que M é ideal à esquerda graduado minimal de $\mathcal{R}$, como tinhamos afirmado.

Agora, como $\mathcal{R}$ é uma $\mathcal{S}$-álgebra graduada prima com um ideal à esquerda graduado minimal então, pelo Lema 1.11, $\mathcal{R}$ também tem um ideal à direita graduado minimal. Assim concluímos a demostração da parte se, e somente se, do teorema.

Para finalizar a prova do teorema, vamos mostrar que $\mathcal{F}_W^{gr_\sigma}(V)$ é o único ideal graduado minimal de $\mathcal{R}$. Seja $(0) \neq I \subseteq \mathcal{R}$ um ideal graduado. Como $\mathcal{R}$ é graduada primitiva, também é graduada prima. Assim, $Ann_{\mathcal{R}}^r(I) = (0)$. Logo, para $b_\beta \in \mathcal{L}_W^{gr_\sigma}(V)_\beta$ fixo, de posto 1, temos $Ib_\beta \neq (0)$. Assim, existe $x_\theta \in I_\theta$ tal que $0 \neq x_\theta b_\beta \in I_{\theta+\beta}$. Como o posto de b_β é 1, pelo Lema 2.14, existem $w_\beta - \tau - \gamma \in W_{\beta-\tau-\gamma}$ e $u_\tau \in V_\tau$, tais que

$$b_\beta = \left\langle -, w_{\beta-\tau-\gamma} \right\rangle_\gamma u_\tau.$$

Daí, para qualquer $v_\alpha \in V_\alpha$, segue que

$$v_\alpha x_\theta b_\beta = \left\langle v_\alpha x_\theta, w_{\beta-\tau-\gamma} \right\rangle_\gamma u_\tau = \sigma(\theta, \beta-\tau-\gamma) \left\langle v_\alpha, w_{\beta-\tau-\gamma} x_\theta^{*\sigma} \right\rangle_\gamma u_\tau.$$

Como $0 \neq x_\theta b_\beta$, segue que $w_{\beta-\tau-\gamma} x_\theta^{gr_\sigma} \neq 0$. Portanto, pelo Lema 2.12, existe $u_{-\beta+\tau-\theta} \in V_{-\beta+\tau-\theta}$ tal que

$$\sigma(\theta, \beta-\tau-\gamma) \langle u_{-\beta+\tau-\theta}, w_{\beta-\tau-\gamma} x_\theta^{*_\sigma} \rangle_\gamma = 1$$

Agora, temos que $r_{-\theta} = \langle -, w_{\beta-\tau-\gamma} \rangle_\gamma u_{-\beta+\tau-\theta} \in \mathcal{F}_W^{gr_\sigma}(V)_\theta$. Logo, para qualquer $v_\alpha \in V_\alpha$, segue que

$$\begin{aligned}
v_\alpha r_{-\theta} x_\theta b_\beta = {} & \sigma(\theta, \beta-\tau-\gamma) \langle v_\alpha r_{-\theta}, w_{\beta-\tau-\gamma} x_\theta^{*_\sigma} \rangle_\gamma u_\tau \\
= {} & \sigma(\theta, \beta-\tau-\gamma) \left\langle \langle v_\alpha, w_{\beta-\tau-\gamma} \rangle_\gamma u_{-\beta+\tau-\theta}, w_{\beta-\tau-\gamma} x_\theta^{*_\sigma} \right\rangle_\gamma u_\tau \\
= {} & \sigma(\theta, \beta-\tau-\gamma) \langle v_\alpha, w_{\beta-\tau-\gamma} \rangle_\gamma \langle u_{-\beta+\tau-\theta}, w_{\beta-\tau-\gamma} x_\theta^{*_\sigma} \rangle_\gamma u_\tau \\
= {} & \langle v_\alpha, w_{\beta-\tau-\gamma} \rangle_\gamma u_\tau \\
= {} & v_\alpha b_\beta.
\end{aligned}$$

Assim, obtemos que $b_\beta = r_{-\theta} x_\theta b_\beta$. Como $x_\theta b_\beta \in I_{\theta+\beta}$, segue que $b_\beta \in I_\beta$. Agora, como b_β é fixo, concluímos que $\mathcal{F}_W^{gr_\sigma}(V) \subseteq I$. Portanto, $\mathcal{F}_W^{gr_\sigma}(V)$ é o único ideal graduado minimal de $\mathcal{R}$. $\square$

Finalizamos esta seção com um outro resultado que nos será útil no próximo capítulo. Apresentamos o resultado sem demonstração já que a demostração do Item (i) encontra-se em [22], Teorema 3.4.3, e a demonstração do Item (ii) é análoga a do Item (i).

Teorema 2.29. *Sejam $\langle -, - \rangle_\gamma : V \times W \longrightarrow \Delta$ uma forma Δ-bilinear homogênea de grau γ não degenerada associada à tripla (Δ, V, W), e $\sigma : G \times G \longrightarrow U(\mathcal{S})$ um 2-cociclo antissimétrico tal que $\sigma(\alpha, -\alpha)^2 = 1$, para todo $\alpha \in G$. Então, se $*_\sigma$ e $\star_\sigma$ são a σ-adjunta e a σ-coadjunta associadas a $\langle -, - \rangle_\gamma$, respectivamente, temos:*

(i) a aplicação

$$\begin{array}{rccc} *_\sigma : & \mathcal{L}_W^{gr_\sigma}(V) & \longrightarrow & \mathcal{L}_V^{gr_\sigma}(W) \\ & a & \longmapsto & a^{*_\sigma}, \end{array}$$

é um σ-anti-isomorfismo;

(ii) e a aplicação

$$\begin{array}{rccc} \star_\sigma : & \mathcal{L}_V^{gr_\sigma}(W) & \longrightarrow & \mathcal{L}_W^{gr_\sigma}(V) \\ & b & \longmapsto & b^{\star_\sigma}, \end{array}$$

é também um σ-anti-isomorfismo.

Além disso, temos $(\mathcal{F}_W^{gr_\sigma}(V))^{*_\sigma} = \mathcal{F}_V^{gr_\sigma}(W)$ e $(\mathcal{F}_V^{gr_\sigma}(W))^{\star_\sigma} = \mathcal{F}_W^{gr_\sigma}(V)$.

Capítulo 3

σ-Antiautomorfismos

Vimos que no Teorema 2.28 se deu uma caracterização das $\mathcal{S}$-álgebras G-graduadas primitivas à direita com ideais à direita G-graduados minimais. Na segunda seção deste capítulo vamos usar essa caraterização para estudar quando duas $\mathcal{S}$-álgebras G-graduadas, desse tipo, são isomorfas: Teorema 3.14. Por último, na terceira seção, estudamos sob que condições uma $\mathcal{S}$-álgebra G-graduada primitiva à direita com ideais à direita graduados minimais admite um σ-antiautomorfismo quando σ é um 2-cociclo antissimétrico satisfazendo $\sigma(\alpha, -\alpha)^2 = 1$ para todo $\alpha \in G$: Teorema 3.25.

Começamos introduzindo alguns conceitos e alguns resultados que são necessários para conseguir nosso objetivo.

3.1 Alguns Conceitos e Alguns Resultados Básicos

Definição 3.1. *Seja* $M = \bigoplus_{\alpha \in G} M_\alpha$ *um* $\mathcal{S}$*-módulo* G*-graduado e seja* $g \in G$ *um elemento fixo. O* ***shift na*** G***-graduação de*** M ***dado por*** g *é definido como* $M^{[g]} = \bigoplus_{\alpha \in G} M_\alpha^{[g]}$*, onde* $M_\alpha^{[g]} = M_{\alpha - g}$*, para cada* $\alpha \in G$*.*

Observamos que se $\mathcal{R}$ é uma $\mathcal{S}$-álgebra G-graduada e $M = \bigoplus_{\alpha \in G} M_\alpha$ é um $\mathcal{R}$-módulo à direita (à esquerda) G-graduado, então qualquer shift $M^{[g]} = \bigoplus_{\alpha \in G} M_\alpha^{[g]}$, dado por un elemento $g \in G$, também é um R-módulo G-graduado à direita (à esquerda). Ainda mais, se M é irredutível, $M^{[g]}$ também o é.

Se $\mathcal{R}$ é uma $\mathcal{S}$-álgebra G-graduada primitiva à direita com ideais à direita G-graduados minimais, o seguinte resultado estabelece que todo $\mathcal{R}$-módulo à direita G-graduado irredutível M é determinado de forma única por $\mathcal{R}$, a menos de um isomorfismo graduado de $\mathcal{R}$-módulos à direita e de um shift na G-graduação de M.

Lema 3.2. *Seja* $\mathcal{R}$ *uma* $\mathcal{S}$*-álgebra* G*-graduada primitiva à direita com um ideal à direita* G*-graduado minimal* I*. Se* M *é um* $\mathcal{R}$*-módulo à direita* G*-graduado irredutível e fiel, então existe um elemento* $g \in G$ *tal que* $M \cong I^{[g]}$ *como* $\mathcal{R}$*-módulos* G*-graduados.*

Demonstração. Como M é $\mathcal{R}$-módulo à direita fiel, existe um elemento homogêneo não nulo $m_g \in M$ tal que $m_g I \neq (0)$. Como $m_g I$ é $\mathcal{R}$-submódulo G-graduado de $M_{\mathcal{R}}$ segue, pela irredutibilidade de $M_{\mathcal{R}}$, que $m_g I = M_{\mathcal{R}}$.

Definimos a aplicação $f : I \longrightarrow m_g I$, pela correspondência $x \longmapsto m_g x$. É claro que f é um epimorfismo homogêneo, de grau g, de $\mathcal{R}$-módulos à direita G-graduados. Por outro lado, como $Ker(f) = \{x \in I : m_g x = 0\}$ é um ideal à direita G-graduado de $\mathcal{R}$ e $m_g I \neq (0)$, pela minimalidade de I, temos que $Ker(f) = (0)$. Daí que f é um isomorfismo homogêneo, de grau g, de $\mathcal{R}$-módulos à direita G-graduados.

Como f é homogênea de grau g, a aplicação de $I^{[g]}$ em M, definida pela correspondência $a \longmapsto f(a)$, é um isomorfismo graduado de $\mathcal{R}$-módulos à direita G-graduados. $\square$

Observação 3.3. *Sabemos que uma tripla (Δ, V, W) significa que Δ é uma $\mathcal{S}$-álgebra G-graduada de divisão e que ${}_{\Delta}V$, W_{Δ} são Δ-espaços G-graduados. Agora, dado um elemento $g \in G$ fixo, temos que ${}_{\Delta}V^{[g]}$ e $W_{\Delta}^{[-g]}$ também são Δ-espaços. Se $\langle -,- \rangle_{\gamma} : V \times W \longrightarrow \Delta$ é uma forma Δ-bilinear homogênea de grau γ não degenerada, segue que a aplicação*

$$\begin{array}{ccc} V^{[g]} \times W^{[-g]} & \longrightarrow & \Delta \\ (v_{\alpha}, w_{\beta}) & \longmapsto & \langle v_{\alpha}, w_{\beta} \rangle_{\gamma}, \end{array}$$

é também uma forma Δ-bilinear homogênea de grau γ não degenerada. Isto é, para cada $g \in G$ fixo, temos que $\langle -,- \rangle_{\gamma}$ é forma Δ-bilinear homogênea de grau γ, não degenerada, associada à tripla $\left(\Delta, V^{[g]}, W^{[-g]}\right)$ se, e somente se, $\langle -,- \rangle_{\gamma}$ é forma Δ-bilinear homogênea de grau γ, não degenerada, associada à tripla (Δ, V, W).

Para o seguinte resultado, lembramos que se Δ é uma $\mathcal{S}$-álgebra G-graduada de divisão e V é um Δ-espaço à direita G-graduado, então o Δ-módulo à direita G-graduado dual de V é $V^{gr*} := Hom_{\Delta}^{gr}(V, D)$.

Proposição 3.4. *Seja $\langle -,- \rangle_{\gamma} : V \times W \longrightarrow \Delta$ uma forma Δ-bilinear homogênea de grau γ não degenerada associada à tripla (Δ, V, W). Então, a aplicação*

$$\begin{array}{rcl} \Phi_{\gamma} : W & \longrightarrow & V^{gr*} \\ w & \longmapsto & \Phi_{\gamma}(w) := \langle -, w \rangle_{\gamma} : \begin{array}{rcl} V & \longrightarrow & \Delta \\ v & \longmapsto & \langle v, w \rangle_{\gamma}, \end{array} \end{array}$$

é um monomorfismo homogêneo de grau γ de Δ-espaços à direita G-graduados.

Demonstração. Observamos que para cada $w_{\beta} \in W_{\beta}$, $\langle -, W_{\beta} \rangle_{\gamma}$ é um elemento homogêneo de grau $\beta + \gamma$ de V^{gr*}. Logo, Φ_{γ} é bem definida.

Como $\langle -,- \rangle_{\gamma}$ é Δ-bilinear, não é difícil ver que Φ_{γ} é homomorfismo homogêneo de grau γ de Δ-espaços à direita G-graduados. Além disso, se tem que Φ é injetor porque $\langle -,- \rangle_{\gamma}$ é não degenerada. $\square$

Neste ponto, introduzimos algumas notações que, embora são simples, vão ser úteis nas contas das demonstrações de alguns resultados no que segue deste capítulo.

Notação 3.5. *Consideremos a cadeia*

$$M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \xrightarrow{f_2} M_3 \xrightarrow{f_3} M_4$$

onde cada M_i é um $\mathcal{S}$-módulo e cada f_i é um $\mathcal{S}$-homomorfismo, para $i = 1, 2, 3$. Dado $x \in M_1$ arbitrário vamos escrever: $(f_3 \circ f_2 \circ f_1)(x)$ ou $(x)(f_1 \cdot f_2 \cdot f_3)$ para $f_3(f_2(f_1(x)))$.

Definição 3.6. *Sejam Δ, Δ' $\mathcal{S}$-álgebras G-graduadas de divisão, $\psi_0 : \Delta \longrightarrow \Delta'$ um isomorfismo de $\mathcal{S}$-álgebras G-graduadas de divisão e ${}_{\Delta}V$, ${}_{\Delta'}V'$ W_{Δ}, $W'_{\Delta'}$ espaços G-graduados. Se $\psi : V \longrightarrow V'$ é um homomorfismo graduado de $\mathcal{S}$-módulos G-graduados, dizemos que ψ é ψ_0-**semilinear** se*

$$\psi(d_\tau v_\alpha) = \psi_0(d_\tau)\psi(v_\alpha),$$

*para todos $d_\tau \in \Delta_\tau$, $v_\alpha \in V_\alpha$ e quaisquer $\tau, \alpha \in G$. Analogamente, dizemos que um homomorfismo graduado de $\mathcal{S}$-módulos G-graduados $\psi' : W \longrightarrow W'$ é ψ_0-**semilinear** se*

$$\psi'(w_\alpha d_\tau) = \psi'(w_\alpha)\psi_0(d_\tau),$$

para todos $d_\tau \in \Delta_\tau$, $w_\alpha \in W_\alpha$ e quaisquer $\tau, \alpha \in G$.

Agora, nas condições da Definição 3.6, suponhamos que ψ é bijetora e ψ_0-semilinear. Dados $d'_\tau \in \Delta'_\tau$ e $v'_\alpha \in V'_\alpha$ fixos, temos que $\psi_0(d_\tau) = d'_\tau$ e $v'_\alpha = \psi_1(v_\alpha)$ para alguns $d_\tau \in \Delta_\tau$ e $v_\alpha \in V_\alpha$. Logo,

$$\begin{aligned} \psi_1^{-1}\left(d'_\tau v'_\alpha\right) &= \psi_1^{-1}\left(\psi_0\left(d_\tau\right)\psi_1\left(v_\alpha\right)\right) \\ &= \psi_1^{-1}\left(\psi_1\left(d_\tau v_\alpha\right)\right) \\ &= d_\tau v_\alpha \\ &= \psi_0^{-1}\left(d'_\tau\right)\psi_1^{-1}\left(v'_\alpha\right). \end{aligned}$$

Isto é, ψ^{-1} é ψ_0^{-1}-semilinear quando ψ é bijetora e ψ_0-semilinear. Anotamos que o fato análogo também vale para ψ'.

Definição 3.7. *Sejam Δ, Δ' $\mathcal{S}$-álgebras G-graduadas de divisão e ${}_{\Delta}V$, ${}_{\Delta'}V'$ espaços G-graduados. Dado um isomorfismo de $\mathcal{S}$-álgebras G-graduadas de divisão $\psi_0 : \Delta \longrightarrow \Delta'$ e dado um homomorfismo graduado de $\mathcal{S}$-módulos G-graduados $\psi_1 : V \longrightarrow V'$ que é ψ_0-**semilinear**, definimos o $\mathcal{S}$-**homomorfismo adjunto** de ψ_1 como sendo a aplicação*

$$\begin{array}{rcllcl} \Psi_1^* : V'^{gr*} & \longrightarrow & V^{gr*} & & & \\ f'_\theta & \longmapsto & \Psi_1^*\left(f'_\theta\right) : & V & \longrightarrow & \Delta \\ & & & v & \longmapsto & \left(\Psi_1^*\left(f'_\theta\right)\right)(v) := \left(\psi_0^{-1} \circ f'_\theta \circ \psi_1\right)(v). \end{array}$$

Observamos que, nas condições da Definição 3.7, o adjunto Ψ_1^* de ψ_1 faz comutar o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd} \Delta \arrow[r, "\psi_0"] & \Delta' \\ V \arrow[u, "\Psi_1^*(f'_\theta)"] \arrow[r, "\psi_1"'] & V' \arrow[u, "f'_\theta"'] \end{tikzcd}$$

para cada $f'_\theta \in V'^{gr*}_\theta$ e qualquer $\theta \in G$.

Proposição 3.8. *Sejam Δ, Δ' $\mathcal{S}$-álgebras G-graduadas de divisão, ${}_{\Delta}V$, ${}_{\Delta'}V'$ espaços G-graduados, $\psi_0 : \Delta \longrightarrow \Delta'$ um isomorfismo graduado de $\mathcal{S}$-álgebras G-graduadas de divisão, $\psi_1 : V \longrightarrow V'$ um homomorfismo graduado de $\mathcal{S}$-módulos G-graduados ψ_0-semilinear, e $\Psi_1^* : V'^{gr*} \longrightarrow V^{gr*}$ o homomorfismo adjunto de ψ_1. Então, Ψ_1^* é um homomorfismo graduado de $\mathcal{S}$-módulos G-graduados ψ_0^{-1}-semilinear. Além disso, Ψ_1^* é bijetor se ψ_1 é bijetor.*

Demonstração. Como ψ_1 é um $\mathcal{S}$-homomorfismo graduado e ψ_0 é um $\mathcal{S}$-isomorfismo graduado, então para qualquer elemento homogêneo $f'_\theta \in (V')^{gr*}_\theta$ temos $\psi_0^{-1} \circ f'_\theta \circ \psi_1 \in V^{gr*}_\theta$. Daí que Ψ_1^* é um homomorfismo graduado de $\mathcal{S}$-módulos G-graduados.

Por outro lado, sejam $d'_\tau \in \Delta'_\tau$ e $f'_\theta \in (V')^{gr*}_\theta$ elementos homogêneos fixos. Como ψ_0 é um isomorfismo graduado de $\mathcal{S}$-álgebras graduadas de divisão, existe $d_\tau \in \Delta_\tau$ tal que $\psi_0(d_\tau) = d'_\tau$. Agora, seja $v_\alpha \in V_\alpha$ um elemento homogêneo fixo. Pela definição de Ψ_1^*, temos

$$\left(\Psi_1^*\left(f'_\theta d'_\tau\right)\right)(v_\alpha) = \left(\psi_0^{-1} \circ \left(f'_\theta d'_\tau\right) \circ \psi_1\right)(v_\alpha) = \psi_0^{-1}\left(f'_\theta\left(\psi_1\left(v_\alpha\right)\right) d'_\tau\right).$$

Logo, como ψ_0^{-1} também é um isomorfismo de $\mathcal{S}$-álgebras graduadas de divisão, segue que

$$\psi_0^{-1}\left(f'_\theta\left(\psi_1\left(v_\alpha\right)\right) d'_\tau\right) = \psi_0^{-1}\left(f'_\theta\left(\psi_1\left(v_\alpha\right)\right)\right) \psi_0^{-1}\left(d'_\tau\right).$$

Agora, outra vez pela definição de Ψ_1^*, obtemos

$$\psi_0^{-1}\left(f'_\theta\left(\psi_1\left(v_\alpha\right)\right)\right) \psi_0^{-1}\left(d'_\tau\right) = \left(\Psi_1^*\left(f'_\theta\right)(v_\alpha)\right) \psi_0^{-1}\left(d'_\tau\right) = \left(\Psi_1^*\left(f'_\theta\right) \psi_0^{-1}\left(d'_\tau\right)\right)(v_\alpha).$$

Como $v_\alpha \in V_\alpha$ é fixo, então $\Psi_1^*\left(f'_\theta d'_\tau\right) = \Psi_1^*\left(f'_\theta\right) \psi_0^{-1}\left(d'_\tau\right)$. Assim, concluímos que Ψ_1^* é ψ_0^{-1}-semilinear.

Finalmente, suponhamos que ψ_1 é bijetora. Assim, $\psi_1^{-1} : V' \longrightarrow V$ também é um isomorfismo graduado de $\mathcal{S}$-módulos graduados. Logo, para cada $f_\theta \in V^{gr*}_\theta$, temos que $\psi_0 \circ f_\theta \circ \psi_1^{-1} \in (V')^{gr*}_\theta$. Também, observamos que

$$\Psi_1^*\left(\psi_0 \circ f_\theta \circ \psi_1^{-1}\right) = \psi_0^{-1} \circ \left(\psi_0 \circ f_\theta \circ \psi_1^{-1}\right) \circ \psi_1 = f_\theta.$$

Daí, segue que Ψ_1^* é sobrejetora. Além disso, se

$$\psi_0^{-1} \circ f'_\theta \circ \psi_1 = \Psi_1^*\left(f'_\theta\right) = \Psi_1^*\left(g'_\theta\right) = \psi_0^{-1} \circ g'_\theta \circ \psi_1,$$

então $f'_\theta = g'_\theta$, pois ψ_1 e ψ_0^{-1} são bijetoras. Logo, Ψ_1^* também é injetora. □

Definição 3.9. *Sejam $\langle -,- \rangle_\gamma : V \times W \longrightarrow \Delta$ e $\langle -,- \rangle'_\gamma : V' \times W' \longrightarrow \Delta'$ duas formas bilineares homogêneas de grau γ não degeneradas associadas às triplas (Δ, V, W) e (Δ', V', W'), respectivamente. Então, uma tripla (ψ_0, ψ_1, ψ_2) é um **isomorfismo triplo**, da tripla (Δ, V, W) para a tripla (Δ', V', W'), se*

- *$\psi_0 : \Delta \longrightarrow \Delta'$ é um isomorfismo graduado de $\mathcal{S}$-álgebras G-graduadas de divisão;*
- *$\psi_1 : V \longrightarrow V'$ e $\psi_2 : W \longrightarrow W'$, são isomorfismos graduados de $\mathcal{S}$-módulos G-graduados;*

tais que

$$\left\langle \psi_1\left(v_\alpha\right), \psi_2\left(w_\beta\right) \right\rangle'_\gamma = \psi_0\left(\left\langle v_\alpha, w_\beta \right\rangle_\gamma\right),$$

para todos $v_\alpha \in V_\alpha, w_\beta \in W_\beta$ e quaisquer $\alpha, \beta \in G$.

Proposição 3.10. *Sejam $\langle -,- \rangle_\gamma : V \times W \longrightarrow \Delta$ e $\langle -,- \rangle'_\gamma : V' \times W' \longrightarrow \Delta'$ duas formas bilineares homogêneas de grau γ, não degeneradas, associadas às triplas (Δ, V, W) e (Δ', V', W'), respectivamente. Se (ψ_0, ψ_1, ψ_2) é um isomorfismo triplo, da tripla (Δ, V, W) para a tripla (Δ', V', W'), então ψ_1 e ψ_2 são ψ_0-semilineares.*

Demonstração. Sejam $v_\alpha \in V_\alpha$ e $d_\tau \in \Delta_\tau$ elementos homogêneos arbitrários. Para um elemento homogêneo fixo $w_\beta \in W_\beta$, temos

$$\begin{aligned}
\langle \psi_1(d_\tau v_\alpha), \psi_2(w_\beta)\rangle'_\gamma &= \psi_0\left(\langle d_\tau v_\alpha, w_\beta\rangle_\gamma\right) \\
&= \psi_0(d_\tau)\psi_0\left(\langle v_\alpha, w_\beta\rangle_\gamma\right) \\
&= \psi_0(d_\tau)\,\langle \psi_1(v_\alpha), \psi_2(w_\beta)\rangle'_\gamma \\
&= \langle \psi_0(d_\tau)\psi_1(v_\alpha), \psi_2(w_\beta)\rangle'_\gamma .
\end{aligned}$$

Daí, como ψ_2 é bijetora e $\langle -, -\rangle'_\gamma$ é não degenerada, obtemos

$$\psi_1(d_\tau v_\alpha) = \psi_0(d_\tau)\psi_1(v_\alpha).$$

Logo, ψ_1 é ψ_0-semilinear.

Agora, sejam $d_\tau \in \Delta_\tau$ e $w_\beta \in W_\beta$ elementos homogêneos arbitrários. Para v_α fixo, temos que

$$\begin{aligned}
\langle \psi_1(v_\alpha), \psi_2(w_\beta d_\tau)\rangle'_\gamma &= \psi_0\left(\langle v_\alpha, w_\beta d_\tau\rangle_\gamma\right) \\
&= \psi_0\left(\langle v_\alpha, w_\beta\rangle_\gamma\right)\psi_0(d_\tau) \\
&= \langle \psi_1(v_\alpha), \psi_2(w_\beta)\rangle'_\gamma\,\psi_0(d_\tau) \\
&= \langle \psi_1(v_\alpha), \psi_2(w_\beta)\psi_0(d_\tau)\rangle'_\gamma .
\end{aligned}$$

Logo, como ψ_1 é bijetora e $\langle -, -\rangle'_\gamma$ é não degenerada, segue que

$$\psi_2(w_\beta d_\tau) = \psi_2(w_\beta)\psi_0(d_\tau).$$

Assim, concluímos que ψ_2 é ψ_0-semilinear. $\square$

Proposição 3.11. *Sejam $\langle -, -\rangle_\gamma : V \times W \longrightarrow \Delta$ e $\langle -, -\rangle'_\gamma : V' \times W' \longrightarrow \Delta'$ duas formas bilineares homogêneas de grau γ não degeneradas associadas às triplas (Δ, V, W) e (Δ', V', W'), respectivamente. Se $\psi_0 : \Delta \longrightarrow \Delta'$ é um isomorfismo graduado de $\mathcal{S}$-álgebras G-graduadas de divisão e $\psi_1 : V \longrightarrow V'$ é um isomorfismo graduado de $\mathcal{S}$-módulos G-graduados, então:*

(i) existe no máximo um isomorfismo graduado de $\mathcal{S}$-módulos G-graduados, $\psi_2 : W \longrightarrow W'$, que torna a tripla (ψ_0, ψ_1, ψ_2) um isomorfismo triplo de (Δ, V, W) para (Δ', V', W');

(ii) existe um isomorfismo graduado $\psi_2 : W \longrightarrow W'$ de $\mathcal{S}$-módulos G-graduados que torna a tripla (ψ_0, ψ_1, ψ_2) um isomorfismo triplo de (Δ, V, W) para (Δ', V', W') se, e somente se, ψ_1 é ψ_0-semilinear e $\Psi_1^*\left(Im\left(\Phi'_\gamma\right)\right) = Im\left(\Phi_\gamma\right)$, onde Ψ_1^* é o homomorfismo adjunto de ψ_1, e $\Phi_\gamma : W \longrightarrow V^{gr*}$, $\Phi'_\gamma : W' \longrightarrow V'^{gr*}$ são definidas como na Proposição 3.4.

Demonstração. (*i*) Suponhamos que (ψ_0, ψ_1, ψ_2) e $\left(\psi_0, \psi_1, \tilde{\psi}_2\right)$ são isomorfismos triplos de (Δ, V, W) para (Δ', V', W'). Então, para $v_\alpha \in V_\alpha$ e $w_\beta \in W_\beta$ arbitrários, temos que

$$\langle \psi_1(v_\alpha), \psi_2(w_\beta)\rangle'_\gamma = \psi_0\left(\langle v_\alpha, w_\beta\rangle_\gamma\right) = \left\langle \psi_1(v_\alpha), \tilde{\psi}_2(w_\beta)\right\rangle'_\gamma .$$

Daí, como ψ_1 é bijetora e $\langle -,-\rangle'_\gamma$ é não degenerada, segue que $\psi_2(w_\beta) = \tilde{\psi}_2(w_\beta)$, para todo $w_\beta \in W_\beta$. Logo, $\psi_2 = \tilde{\psi}_2$, como queríamos mostrar.

(ii) Seja (ψ_0, ψ_1, ψ_2) um isomorfismo triplo de (Δ, V, W) para (Δ', V', W'). Pela Proposição 3.10 temos que ψ_1 é ψ_0-semilinear. Por outro lado, se $w'_\beta \in \mathfrak{H}(W')$ é fixo, existe $w_\beta \in W_\beta$ tal que $\psi_2(w_\beta) = w'_\beta \in W'_\beta$. Logo, para qualquer $v_\alpha \in \mathfrak{H}(V)$, pelas definições de Ψ_1^* e Φ'_γ temos

$$\begin{aligned} \left(\Psi_1^*\left(\Phi'_\gamma(w'_\beta)\right)\right)(v_\alpha) = & \left(\psi_0^{-1} \circ \left(\langle -, w'_\beta\rangle'_\gamma\right) \circ \psi_1\right)(v_\alpha) \\ = & \ \psi_0^{-1}\left(\langle \psi_1(v_\alpha), w'_\beta\rangle'_\gamma\right) \\ = & \ \psi_0^{-1}\left(\langle \psi_1(v_\alpha), \psi_2(w_\beta)\rangle'_\gamma\right). \end{aligned}$$

Agora, como (ψ_0, ψ_1, ψ_2) é um isomorfismo triplo, segue que

$$\psi_0^{-1}\left(\langle \psi_1(v_\alpha), \psi_2(w_\beta)\rangle'_\gamma\right) = \langle v_\alpha, w_\beta\rangle_\gamma .$$

Assim, $\left(\Psi_1^*\left(\Phi'_\gamma(w'_\beta)\right)\right)(v_\alpha) = \langle v_\alpha, w_\beta\rangle_\gamma = (\Phi_\gamma(w_\beta))(v_\alpha)$. Daí que $\Psi_1^*\left(\Phi'_\gamma(w'_\beta)\right) = \Phi_\gamma(w_\beta)$. Logo, como ψ_2 é uma bijeção e $\psi_2(w_\beta) = w'_\beta$ é fixo, obtemos $\Psi_1^*\left(\Phi'_\gamma(W')\right) = \Phi_\gamma(W)$.

Reciprocamente, seja ψ_1 ψ_0-semilinear e $\Psi_1^*\left(\Phi'_\gamma(W')\right) = \Phi_\gamma(W)$. Como ψ_1 é uma bijeção, pela Proposição 3.8, segue que Ψ_1^* é um isomorfismo graduado de $\mathcal{S}$-módulos graduados ψ_0^{-1}-semilinear. Logo, como $\Psi_1^*\left(\Phi'_\gamma(W')\right) = \Phi_\gamma(W)$, temos que

$$(\Psi_1^*)^{-1} : \Phi_\gamma(W) \longrightarrow \Phi'_\gamma(W'),$$

também é um isomorfismo graduado de $\mathcal{S}$-módulos graduados. Além disso, pela Proposição 3.4, sabemos que $\Phi_\gamma : W \longrightarrow V^{gr*}$ e $\Phi'_\gamma : W' \longrightarrow V'^{gr*}$ são monomorfismos homogêneos de grau γ de Δ-espaços à direita G-graduados. Assim, obtemos que a aplicação composta

$$\psi_2 := \left(\Phi'_\gamma\right)^{-1} \circ (\Psi_1^*)^{-1} \circ \Phi_\gamma : W \longrightarrow W',$$

é um isomorfismo de $\mathcal{S}$-módulos graduados. Agora, pela definição de Ψ_1^*, segue que $(\Psi_1^*)^{-1}(f_\theta) = \psi_1 \circ f_\theta \circ (\psi_1)^{-1}$, para cada $f_\theta \in \mathfrak{H}(V^{gr*})$. Logo, para $v_\alpha \in \mathfrak{H}(V)$ e $w_\beta \in \mathfrak{H}(W)$ arbitrários, pelas definições de Φ'_γ, Φ_γ e ψ_2 obtemos

$$\begin{aligned} \langle \psi_1(v_\alpha), \psi_2(w_\beta)\rangle'_\gamma &= \psi_1(v_\alpha) \cdot \left(\langle -, \psi_2(w_\beta)\rangle'_\gamma\right) \\ &= \left(\left(\Phi'_\gamma\left(\psi_2(w_\beta)\right) \circ \psi_1\right)\right)(v_\alpha) \\ &= \left(\left(\Phi'_\gamma\left(\left(\Phi'_\gamma\right)^{-1} \circ (\Psi_1^*)^{-1} \circ \Phi_\gamma(w_\beta)\right)\right) \circ \psi_1\right)(v_\alpha) \\ &= \left(\left((\Psi_1^*)^{-1} \circ \Phi_\gamma(w_\beta)\right) \circ \psi_1\right)(v_\alpha) \\ &= \left(\left((\psi_0 \circ (\Phi_\gamma(w_\beta)) \circ \psi_1)^{-1}\right) \circ \psi_1\right)(v_\alpha) \\ &= (\psi_0 \circ (\Phi_\gamma(w_\beta)))(v_\alpha) \\ &= \psi_0\left(\langle v_\alpha, w_\beta\rangle_\gamma\right). \end{aligned}$$

Daí, concluímos que (ψ_0, ψ_1, ψ_2) é um isomorfismo triplo. □

3.2 Teorema do Isomorfismo

Nesta seção temos por objetivo apresentar o Teorema 3.14 que caracteriza isomorfismos graduados entre $\mathcal{S}$-álgebras graduadas primitivas à direita simples com ideais à direita graduados minimais. Salientamos que este teorema é um resultado análogo do resultado: Theorem 3.6 de [1]. Para facilitar a leitura da demonstração do teorema, dividimos o teorema em dois lemas: Lemas 3.12 e 3.13.

Lema 3.12. *Sejam $\langle -,- \rangle_\gamma : V \times W \longrightarrow \Delta$ e $\langle -,- \rangle'_\gamma : V' \times W' \longrightarrow \Delta'$ duas formas bilineares homogêneas de grau γ, não degeneradas, associadas às triplas (Δ, V, W) e (Δ', V', W'), respectivamente. Se $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}'$ são duas $\mathcal{S}$-álgebras G-graduadas tais que*

$$\mathcal{F}_W^{gr_\sigma}(V) \subseteq \mathcal{R} \subseteq \mathcal{L}_W^{gr_\sigma}(V) \text{ e } \mathcal{F}_{W'}^{gr_\sigma}(V') \subseteq \mathcal{R}' \subseteq \mathcal{L}_{W'}^{gr_\sigma}(V'),$$

e se $\Psi : \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}'$ é um isomorfismo graduado de $\mathcal{S}$-álgebras G-graduadas, então existe um elemento $g \in G$ e existe um isomorfismo triplo (ψ_0, ψ_1, ψ_2) de $\left(\Delta, V^{[g]}, W^{[-g]}\right)$ para (Δ', V', W'), tais que

$$\Psi(r) = \psi_1 \circ r \circ \psi_1^{-1} = \psi_1^{-1} \cdot r \cdot \psi_1, \text{ para todo } r \in \mathcal{R}. \tag{3.1}$$

Além disso, se outro elemento $h \in G$ e outro isomorfismo triplo $(\psi'_0, \psi'_1, \psi'_2)$, de $\left(\Delta, V^{[h]}, W^{[-h]}\right)$ para (Δ', V', W'), definem Ψ como em (3.1), então existe um elemento homogêneo não nulo $d' \in \Delta'$ tal que

- $h = g + \mathbf{deg}(d')$;
- $\psi'_0(x) = d'\psi_0(x)(d')^{-1}$ *para todo* $x \in \Delta$;
- $\psi'_1(v) = d'\psi_1(v)$ *para todo* $v \in V$;
- $\psi'_2(w) = \psi_2(w)(d')^{-1}$ *para todo* $w \in W$.

Demonstração. Pela Proposição 2.17, temos que V' é um $\mathcal{R}'$-módulo à direita G-graduado irredutível e fiel. Logo, segue que V' é um $\mathcal{R}$-módulo à direita G-graduado irredutível e fiel, com a ação

$$v'r := v'\Psi(r), \text{ para todos } r \in \mathcal{R},\ v' \in V'.$$

Agora, pelo Lema 3.2, existe um isomorfismo graduado de $\mathcal{R}$-módulos à direita G-graduados $\psi_1 : V^{[g]} \longrightarrow V'$, para algum $g \in G$. Observamos que, para quaisquer $v \in V$ e $r \in \mathcal{R}$,

$$(v)\,(r \cdot \psi_1) = \psi_1(vr) = \psi_1(v)r = (v)\,(\psi_1 \cdot \Psi(r))\,.$$

Daí que $r \cdot \psi_1 = \psi_1 \cdot \Psi(r)$, para todo $r \in \mathcal{R}$. Logo, como ψ_1 é bijetor, segue que

$$\Psi(r) = \psi_1^{-1} \cdot r \cdot \psi_1 = \psi_1 \circ r \circ \psi_1^{-1}, \text{ para todo } r \in \mathcal{R}. \tag{3.2}$$

Por outro lado, pelo Teorema 2.28, podemos assumir $\Delta = End_{\mathcal{R}}^{gr}(V)$ e $\Delta' = End_{\mathcal{R}}^{gr}(V')$. Logo, definindo

$$\begin{array}{rccccl} \psi_0 : & \Delta & \longrightarrow & \Delta' & & \\ & d & \longmapsto & \psi_0(d) : & V' \longrightarrow & V' \\ & & & & v' \longmapsto & (\psi_0(d))\,(v') := \psi_1\left(d\left(\psi_1^{-1}(v')\right)\right), \end{array}$$

segue que ψ_0 é bem definida, é graduada e é $\mathcal{S}$-linear. Como $\psi_0(x) = 0$ implica $x = 0$, segue que ψ_0 é injetora. Dado $d'_\theta \in \Delta'_\theta$ temos que $d_\theta = \psi_1^{-1} \circ d'_\theta \circ \psi_1 \in \Delta_\theta$ e $\psi_0(d_\theta) = d'_\theta$, isto é, também temos que ψ_0 é sobrejetora. Além disso, para $d_1, d_2 \in \Delta$ fixos e para qualquer $v' \in V'$, temos

$$\begin{aligned}(\psi_0(d_1d_2))(v') &= \psi_1\left((d_1d_2)\left(\psi_1^{-1}(v')\right)\right)\\ &= \psi_1\left(d_1\left(\psi_1^{-1}\left(\psi_1\left(d_2\left(\psi_1^{-1}(v')\right)\right)\right)\right)\right)\\ &= \psi_0(d_1)\circ\psi_0(d_2)(v').\end{aligned}$$

Logo, $\psi_0(d_1d_2) = \psi_0(d_1) \circ \psi_0(d_2)$ e, então, ψ_0 é um isomorfismo graduado de $\mathcal{S}$-álgebras G-graduadas de divisão. Também observamos, para elementos fixos $\psi^{-1}(v') = v \in V$ e $d \in \Delta$, que

$$\psi_1(dv) = \psi_1\left(d\psi_1^{-1}(v')\right) = (\psi_0(d))(v') = \psi_0(d)\psi_1(v).$$

Daí que ψ_1 é ψ_0-semilinear.

Agora, vamos mostrar que $\Psi_1^*\left(Im\left(\Phi'_\gamma\right)\right) = Im\left(\Phi_\gamma\right)$. Seja $w_\beta \in W_\beta^{[-g]}$ um elemento homogêneo não nulo arbitrário. Pelo Lema 2.12, existe um elemento homogêneo $v_{-\beta-\gamma} \in V_{-\beta-\gamma}^{[g]}$ tal que $\langle v_{-\beta-\gamma}, w_\beta\rangle_\gamma = 1_\Delta$. Como $\psi_1(v_{-\beta-\gamma}) \in V'_{-\beta-\gamma}$ é não nulo, Pelo Lema 2.11, existe $w'_\beta \in W'_\beta$ tal que $\langle \psi_1(v_{-\beta-\gamma}), w'_\beta\rangle'_\gamma = 1_{\Delta'}$. Assim, para $v_\alpha \in V_\alpha^{[g]}$ fixo, segue que

$$\psi_0\left(\langle v_\alpha, w_\beta\rangle_\gamma\right) = \left(\psi_0\left(\langle v_\alpha, w_\beta\rangle_\gamma\right)\right)1_{\Delta'} = \left(\psi_0\left(\langle v_\alpha, w_\beta\rangle_\gamma\right)\right)\langle \psi_1(v_{-\beta-\gamma}), w'_\beta\rangle'_\gamma.$$

Logo, como $\psi_0\left(\langle v_\alpha, w_\beta\rangle_\gamma\right) \in \Delta'_{\alpha+\beta+\gamma}$ e $\langle -,-\rangle_\gamma$ é Δ'-bilinear, segue que

$$\left(\psi_0\left(\langle v_\alpha, w_\beta\rangle_\gamma\right)\right)\langle \psi_1(v_{-\beta-\gamma}), w'_\beta\rangle'_\gamma = \left\langle \psi_0\left(\langle v_\alpha, w_\beta\rangle_\gamma\right)\psi_1\left(v_{-\beta-\gamma}\right), w'_\beta\right\rangle'_\gamma.$$

Daí, como ψ_1 é ψ_0-semilinear, temos

$$\left\langle \psi_0\left(\langle v_\alpha, w_\beta\rangle_\gamma\right)\psi_1\left(v_{-\beta-\gamma}\right), w'_\beta\right\rangle'_\gamma = \left\langle \psi_1\left(\langle v_\alpha, w_\beta\rangle_\gamma v_{-\beta-\gamma}\right), w'_\beta\right\rangle'_\gamma.$$

Agora, pelo Lema 2.13, $\langle -, w_\beta\rangle_\gamma v_{-\beta-\gamma}$ é um elemento homogêneo de $\mathcal{F}_W^{gr_\sigma}(V) \subseteq \mathcal{R}$ e, por (3.2), $\psi_1 \cdot \Psi(r) = r \cdot \psi_1$, para todo $r \in \mathcal{R}$. Assim, obtemos

$$\begin{aligned}\left\langle \psi_1\left(\langle v_\alpha, w_\beta\rangle_\gamma v_{-\beta-\gamma}\right), w'_\beta\right\rangle'_\gamma &= \left\langle (v_\alpha)\left(\left(\langle -, w_\beta\rangle_\gamma v_{-\beta-\gamma}\right)\cdot\psi_1\right), w'_\beta\right\rangle'_\gamma\\ &= \left\langle (v_\alpha)\left(\psi_1\cdot\Psi\left(\langle -, w_\beta\rangle_\gamma v_{-\beta-\gamma}\right)\right), w'_\beta\right\rangle'_\gamma.\end{aligned}$$

Logo, como $\Psi\left(\langle -, w_\beta\rangle_\gamma v_{-\beta-\gamma}\right) \in \mathcal{R}' \subseteq \mathcal{L}_{W'}^{gr_\sigma}(V')$, então, pela definição de σ-adjunta, temos

$$\left\langle (v_\alpha)\left(\psi_1\cdot\Psi\left(\langle -, w_\beta\rangle_\gamma v_{-\beta-\gamma}\right)\right), w'_\beta\right\rangle'_\gamma = \sigma(0,\beta)\left\langle \psi_1(v_\alpha), w'_\beta\left(\Psi\left(\langle -, w_\beta\rangle_\gamma v_{-\beta-\gamma}\right)\right)^{*_\sigma}\right\rangle'_\gamma.$$

Recapitulando, e lembrando que $\sigma(0,\beta) = \sigma(0,0)$ para todo $\beta \in G$, obtemos que

$$\psi_0\left(\langle v_\alpha, w_\beta\rangle_\gamma\right) = \sigma(0,0)\left\langle \psi_1(v_\alpha), w'_\beta\left(\Psi\left(\langle -, w_\beta\rangle_\gamma v_{-\beta-\gamma}\right)\right)^{*_\sigma}\right\rangle'_\gamma. \tag{3.3}$$

Daí, como ψ_0 é bijetora, segue que

$$\begin{aligned}\langle v_\alpha, w_\beta\rangle_\gamma = \;& \psi_0^{-1}\left(\sigma(0,0)\left\langle \psi_1(v_\alpha), w'_\beta\left(\Psi\left(\langle -, w_\beta\rangle_\gamma v_{-\beta-\gamma}\right)\right)^{*\sigma}\right\rangle'_\gamma\right)\\ = \;& (v_\alpha)\left(\psi_1\cdot\left(\left\langle -, w'_\beta\left(\sigma(0,0)\Psi\left(\langle -, w_\beta\rangle_\gamma v_{-\beta-\gamma}\right)\right)^{*\sigma}\right\rangle'_\gamma\right)\cdot\psi_0^{-1}\right).\end{aligned}$$

Agora, como $\left\langle -, w'_\beta\left(\sigma(0,0)\Psi\left(\langle -, w_\beta\rangle_\gamma v_{-\beta-\gamma}\right)\right)^{*\sigma}\right\rangle'_\gamma \in Im\left(\Phi'_\gamma\right) \subseteq V'^{gr*}$, segue pela definição de Ψ_1^* que

$$\begin{aligned}&(v_\alpha)\left(\psi_1\cdot\left(\left\langle -, w'_\beta\left(\sigma(0,0)\Psi\left(\langle -, w_\beta\rangle_\gamma v_{-\beta-\gamma}\right)\right)^{*\sigma}\right\rangle'_\gamma\right)\cdot\psi_0^{-1}\right) =\\ &\qquad = (v_\alpha)\left(\Psi_1^*\left(\left\langle -, w'_\beta\left(\sigma(0,0)\Psi\left(\langle -, w_\beta\rangle_\gamma v_{-\beta-\gamma}\right)\right)^{*\sigma}\right\rangle'_\gamma\right)\right).\end{aligned}$$

Resumindo, como v_α é fixo, obtemos que

$$\Phi_\gamma\left(w_\beta\right) = \langle -, w_\beta\rangle_\gamma = \Psi_1^*\left(\left\langle -, w'_\beta\left(\sigma(0,0)\Psi\left(\langle -, w_\beta\rangle_\gamma v_{-\beta-\gamma}\right)\right)^{*\sigma}\right\rangle'_\gamma\right) \in \Psi_1^*\left(Im\left(\Phi'_\gamma\right)\right).$$

Então, como w_β é fixo, concluímos que $Im\left(\Phi_\gamma\right) \subseteq \Psi_1^*\left(Im\left(\Phi'_\gamma\right)\right)$.

Agora, vamos mostrar a inclusão no outro sentido. Seja $w'_\beta \in W'_\beta$ um elemento homogêneo não nulo arbitrário. Pelo Lema 2.12, existe um elemento homogêneo $v'_{-\beta-\gamma} \in V'_{-\beta-\gamma}$ tal que $\left\langle v'_{-\beta-\gamma}, w'_\beta\right\rangle'_\gamma = 1_{\Delta'}$. Por outro lado, se $v_{-\beta-\gamma} \in V^{[g]}_{-\beta-\gamma}$ é tal que $\psi_1(v_{-\beta-\gamma}) = v'_{-\beta-\gamma}$, pelo Lema 2.11, existe um elemento homogêneo $w_\beta \in W^{[-g]}_\beta$ tal que $\langle v_{-\beta-\gamma}, w_\beta\rangle_\gamma = 1_\Delta$. Agora, para $v_\alpha \in V_\alpha$ fixo, temos

$$\Psi_1^*\left(\left\langle -, w'_\beta\right\rangle'_\gamma\right)(v_\alpha) = \left(\psi_0^{-1}\circ\left(\left\langle -, w'_\beta\right\rangle'_\gamma\right)\circ\psi_1\right)(v_\alpha) = \psi_0^{-1}\left(\left\langle \psi_1(v_\alpha), w'_\beta\right\rangle'_\gamma\right),$$

pela definição de Ψ_1^*. Daí, como $\psi_0^{-1}\left(\left\langle \psi_1(v_\alpha), w'_\beta\right\rangle'_\gamma\right) \in \Delta$ e $\langle -, -\rangle_\gamma$ é Δ-bilinear, segue que

$$\begin{aligned}\psi_0^{-1}\left(\left\langle \psi_1(v_\alpha), w'_\beta\right\rangle'_\gamma\right) = \;& \left(\psi_0^{-1}\left(\left\langle \psi_1(v_\alpha), w'_\beta\right\rangle'_\gamma\right)\right)1_\Delta\\ = \;& \left(\psi_0^{-1}\left(\left\langle \psi_1(v_\alpha), w'_\beta\right\rangle'_\gamma\right)\right)\langle v_{-\beta-\gamma}, w_\beta\rangle_\gamma\\ = \;& \left\langle\left(\psi_0^{-1}\left(\left\langle \psi_1(v_\alpha), w'_\beta\right\rangle'_\gamma\right)\right)v_{-\beta-\gamma}, w_\beta\right\rangle_\gamma.\end{aligned}$$

Agora, como $\psi_1(v_{-\beta-\gamma}) = v'_{-\beta-\gamma}$ e ψ_1^{-1} é ψ_0^{-1}-semilinear, obtemos

$$\begin{aligned}\left\langle\left(\psi_0^{-1}\left(\left\langle \psi_1(v_\alpha), w'_\beta\right\rangle'_\gamma\right)\right)v_{-\beta-\gamma}, w_\beta\right\rangle_\gamma = \;& \left\langle\psi_0^{-1}\left(\left\langle \psi_1(v_\alpha), w'_\beta\right\rangle'_\gamma\right)\psi_1^{-1}(v'_{-\beta-\gamma}), w_\beta\right\rangle_\gamma\\ = \;& \left\langle\psi_1^{-1}\left(\left\langle \psi_1(v_\alpha), w'_\beta\right\rangle'_\gamma v'_{-\beta-\gamma}\right), w_\beta\right\rangle_\gamma.\end{aligned}$$

Logo, por (3.2), temos $\Psi^{-1}(r) = \psi_1\cdot r\cdot\psi_1^{-1}$, para todo $r \in \mathcal{R}$. Assim, segue que

$$\begin{aligned}\left\langle\psi_1^{-1}\left(\left\langle \psi_1(v_\alpha), w'_\beta\right\rangle'_\gamma v'_{-\beta-\gamma}\right), w_\beta\right\rangle_\gamma = \;& \left\langle v_\alpha\left(\psi_1\cdot\left(\left\langle -, w'_\beta\right\rangle'_\gamma v'_{-\beta-\gamma}\right)\cdot\psi_1^{-1}\right), w_\beta\right\rangle_\gamma\\ = \;& \left\langle v_\alpha\left(\Psi^{-1}\left(\left\langle -, w'_\beta\right\rangle'_\gamma v'_{-\beta-\gamma}\right)\right), w_\beta\right\rangle_\gamma.\end{aligned}$$

Daí, como $\Psi^{-1}\left(\left\langle -, w'_\beta\right\rangle'_\gamma v'_{-\beta-\gamma}\right) \in \mathcal{R} \subseteq \mathcal{L}_W^{gr_\sigma}(V)$, pela definição de σ-adjunta, obtemos

$$\left\langle v_\alpha\left(\Psi^{-1}\left(\left\langle -, w'_\beta\right\rangle'_\gamma v'_{-\beta-\gamma}\right)\right), w_\beta\right\rangle_\gamma = \sigma(0,\beta)\left\langle v_\alpha, w_\beta\left(\Psi^{-1}\left(\left\langle -, w'_\beta\right\rangle'_\gamma v'_{-\beta-\gamma}\right)\right)^{*\sigma}\right\rangle_\gamma.$$

Agora, lembrando que $\sigma(0,\beta) = \sigma(0,0)$ para todo $\beta \in G$, segue que

$$\sigma(0,\beta)\left\langle v_\alpha, w_\beta\left(\Psi^{-1}\left(\left\langle -, w'_\beta\right\rangle'_\gamma v'_{-\beta-\gamma}\right)\right)^{*\sigma}\right\rangle_\gamma = \left\langle v_\alpha, w_\beta\left(\Psi^{-1}\left(\left\langle -, \sigma(0,0)w'_\beta\right\rangle'_\gamma v'_{-\beta-\gamma}\right)\right)^{*\sigma}\right\rangle_\gamma.$$

Como v_α é fixo, então

$$\Psi_1^*\left(\Phi'_\gamma\left(w'_\beta\right)\right) = \Psi_1^*\left(\left\langle -, w'_\beta\right\rangle'_\gamma\right) = \left\langle -, w_\beta\left(\Psi^{-1}\left(\left\langle -, \sigma(0,0)w'_\beta\right\rangle'_\gamma v'_{-\beta-\gamma}\right)\right)^{*\sigma}\right\rangle_\gamma \in Im\left(\Phi_\gamma\right).$$

Daí, como w'_β é arbitrário, segue que $\Psi_1^*\left(Im\left(\Phi'_\gamma\right)\right) \subseteq Im\left(\Phi_\gamma\right)$. Assim, concluímos que $\Psi_1^*\left(Im\left(\Phi'_\gamma\right)\right) = Im\left(\Phi_\gamma\right)$. Como ψ_1 é ψ_0-semilinear, pelo Item (ii) da Proposição 3.11, obtemos que a tripla (ψ_0, ψ_1, ψ_2) é um isomorfismo triplo de $\left(\Delta, V^{[g]}, W^{[-g]}\right)$ para (Δ', V', W').

Agora, vamos mostrar a última parte do lema. Suponhamos que existe um outro elemento $h \in G$ e que existe um outro isomorfismo triplo $(\psi'_0, \psi'_1, \psi'_2)$, de $\left(\Delta, V^{[h]}, W^{[-h]}\right)$ para (Δ', V', W'), tais que

$$\Psi(r) = (\psi')_1^{-1} \cdot r \cdot \psi'_1, \text{ para todo } r \in \mathcal{R}. \tag{3.4}$$

Nestas condições, temos que $\psi'_1 \circ \psi_1^{-1} : V' \longrightarrow V'$ é um elemento homogêneo de grau $h - g$, não nulo, que pertence a $\Delta' = End^{gr}_{\mathcal{R}'}(V')$ $\left(= End^{gr}_{\mathcal{R}}(V'),\right.$ com a ação $v'r := v'\Psi(r)$, para todos $r \in \mathcal{R}$, $\left.v' \in V'\right)$. Pois, para $v' \in V'$ e $r \in \mathcal{R}$ fixos, temos que:

$$\begin{aligned}
\psi'_1 \circ \psi_1^{-1}(v'r) = {} & \left(v'\Psi(r)\right)\psi_1^{-1} \cdot \psi'_1, \quad \text{pela definição da ação de } \mathcal{R} \text{ sobre } V'; \\
= {} & v'\left(\Psi(r) \cdot \psi_1^{-1} \cdot \psi'_1\right) \\
= {} & v'\left(\psi_1^{-1} \cdot r \cdot \psi'_1\right), \quad \text{pois por (3.2) é: } \Psi(r) \cdot \psi_1^{-1} = \psi_1^{-1} \cdot r; \\
= {} & v'\left(\psi_1^{-1} \cdot \psi'_1 \cdot \Psi(r)\right), \quad \text{pois por (3.4) é: } \psi'_1 \cdot \Psi(r) = r \cdot \psi'_1; \\
= {} & \left(\left(\psi'_1 \circ \psi_1^{-1}\right)(v')\right)r, \quad \text{pela definição da ação de } \mathcal{R} \text{ sobre } V'.
\end{aligned}$$

Observamos que se $d' = \psi'_1 \circ \psi_1^{-1}$, então

$$h = g + \mathbf{deg}(d'). \tag{3.5}$$

Por outro lado, observamos que se $v = \psi_1^{-1}(v')$ é fixo, então

$$\psi'_1(v) = \psi'_1 \circ \psi_1^{-1}(v') = d'v' = d'\psi_1(v). \tag{3.6}$$

Agora, para $x \in \Delta$ e $v \in V$ arbitrários, temos

$$\begin{aligned}
\psi'_0(x)\psi'_1(v) = {} & \psi'_1(xv), \quad \text{pois } \psi'_1 \text{ é } \psi'_0\text{-semilinear}; \\
= {} & d'\psi_1(xv), \quad \text{por (3.6)}; \\
= {} & d'\psi_0(x)\psi_1(v), \quad \text{pois } \psi_1 \text{ é } \psi_0\text{-semilinear}; \\
= {} & d'\psi_0(x)(d')^{-1}\psi'_1(v), \quad \text{outra vez por (3.6)}.
\end{aligned}$$

Então,

$$\psi_0'(x) = d'\psi_1(x)(d')^{-1}, \text{ para todo } x \in D. \tag{3.7}$$

Além disso, para quaisquer $w_\beta \in W_\beta^{[-g]}$ e $v_\alpha \in V_\alpha^{[g]}$, temos que

$$\begin{aligned}
\langle \psi_1'(v_\alpha), \psi_2'(w_\beta)\rangle_\gamma' &= \psi_0'\left(\langle v_\alpha, w_\beta\rangle_\gamma\right), \quad \text{porque } (\psi_0', \psi_1', \psi_2') \text{ é isomorfismo triplo;}\\
&= d'\psi_0\left(\langle v_\alpha, w_\beta\rangle_\gamma\right)(d')^{-1}, \text{ por (3.7);}\\
&= d'\langle \psi_1(v_\alpha), \psi_2(w_\beta)\rangle_\gamma'(d')^{-1}, \quad (\psi_0, \psi_1, \psi_2) \text{ é isomorfismo triplo;}\\
&= \left\langle d'\psi_1(v_\alpha), \psi_2(w_\beta)(d')^{-1}\right\rangle_\gamma', \ \langle -,-\rangle_\gamma' \text{ é } \Delta'\text{-bilinear;}\\
&= \left\langle \psi_1'(v_\alpha), \psi_2(w_\beta)(d')^{-1}\right\rangle_\gamma', \quad \text{por (3.6).}
\end{aligned}$$

Daí, como ψ_1' é uma bijeção e $\langle -,-\rangle_\gamma'$ é não degenerada, segue que

$$\psi_2'(w_\beta) = \psi_2(w_\beta)(d')^{-1}, \text{ para todo } w_\beta \in W_\beta. \tag{3.8}$$

Assim, finalizamos a prova do lema. □

Lema 3.13. *Sejam* $\langle -,-\rangle_\gamma : V \times W \longrightarrow \Delta$ *e* $\langle -,-\rangle_\gamma' : V' \times W' \longrightarrow \Delta'$ *duas formas bilineares homogêneas de grau* γ*, não degeneradas, associadas às triplas* (Δ, V, W) *e* (Δ', V', W')*, respectivamente. Se* $g \in G$ *e* (ψ_0, ψ_1, ψ_2) *é um isomorfismo triplo de* $\left(\Delta, V^{[g]}, W^{[-g]}\right)$ *para* (Δ', V', W')*, então existe um isomorfismo graduado de* $\mathcal{S}$*-álgebras* G*-graduadas*

$$\Psi : End_\Delta^{gr}(V^{[g]}) \longrightarrow End_{\Delta'}^{gr}(V'),$$

definido pela correspondência $a_\tau \longmapsto \psi_1^{-1} \cdot a_\tau \cdot \psi_1$*, tal que*

$$\Psi\left(\mathcal{L}_{W^{[-g]}}^{gr_\sigma}(V^{[g]})\right) = \mathcal{L}_{W'}^{gr_\sigma}(V') \ e \ \Psi\left(\mathcal{F}_{W^{[-g]}}^{gr_\sigma}\left(V^{[g]}\right)\right) = \mathcal{F}_{W'}^{gr_\sigma}(V'). \tag{3.9}$$

Demonstração. Suponhamos que a tripla (ψ_0, ψ_1, ψ_2) é um isomorfismo triplo de $\left(\Delta, V^{[g]}, W^{[-g]}\right)$ para (Δ', V', W'). Observamos que para um elemento homogêneo fixo $a_\tau \in End_\Delta(V)_\tau$ se tem

$$\psi_1^{-1}\left(V_\beta'\right) = V_\beta^{[g]}, \quad \left(V_\beta^{[g]}\right) a_\tau \subseteq V_{\beta+\tau}^{[g]}, \ \text{ e } \ \psi_1\left(V_{\beta+\tau-g}\right) = V_{\beta+\tau}', \ \text{ para qualquer } \beta \in G.$$

Logo, segue que a aplicação composta $\psi_1 \circ a_\tau \circ \psi_1^{-1} : V' \longrightarrow V'$ é um homomorfismo homogêneo de grau τ de $\mathcal{S}$-módulos G-graduados. Além disso, como ψ_1^{-1} é ψ_0^{-1}-semilinear e ψ_1 é ψ_0-semilinear, temos

$$\begin{aligned}
\psi_1 \circ a_\tau \circ \psi_1^{-1}\left(d_\theta' v_\beta'\right) &= \psi_1\left(a_\tau\left(\psi_1^{-1}\left(d_\theta' v_\beta'\right)\right)\right)\\
&= \psi_1\left(a_\tau\left(\psi_0^{-1}\left(d_\theta'\right)\psi_1^{-1}\left(v_\beta'\right)\right)\right)\\
&= \psi_1\left(\psi_0^{-1}\left(d_\theta'\right) a_\tau\left(\psi_1^{-1}\left(v_\beta'\right)\right)\right)\\
&= d_\theta'\psi_1\left(a_\tau\left(\psi_1^{-1}\left(v_\beta'\right)\right)\right)\\
&= d_\theta'\left(\psi_1 \circ a_\tau \circ \psi_1^{-1}\right)\left(v_\beta'\right).
\end{aligned}$$

para todos $d_\theta' \in \mathfrak{H}(\Delta')$ e $v_\beta' \in \mathfrak{H}(V')$. Daí que $\psi_1^{-1} \circ a_\tau \circ \psi_1 \in End_{\Delta'}(V')_\tau$. Agora, definimos a aplicação graduada

$$\begin{aligned}
\Psi : \ End_\Delta^{gr}\left(V^{[g]}\right) &\longrightarrow End_{\Delta'}^{gr}(V')\\
a_\tau &\longmapsto \Psi(a_\tau) := \psi_1 \circ a_\tau \circ \psi_1^{-1}.
\end{aligned}$$

Agora, para dois elementos homogêneos $a_\eta, a_\tau \in \mathfrak{H}\left(End_\Delta\left(V^{[g]}\right)\right)$ fixos, temos que

$$\Psi\left(a_\tau + a_\eta\right) = \psi_1 \circ \left(a_\tau + a_\eta\right) \circ \psi_1^{-1} = \psi_1 \circ a_\tau \circ \psi_1^{-1}\psi_1 + \psi_1 \circ a_\eta \circ \psi_1^{-1} = \Psi\left(a_\tau\right) + \Psi\left(a_\eta\right);$$

e também temos que

$$\Psi\left(a_\tau \cdot a_\eta\right) = \psi_1 \circ \left(a_\tau a_\eta\right) \circ \psi_1^{-1} = \left(\psi_1 \circ a_\tau \circ \psi_1^{-1}\right)\left(\psi_1 \circ a_\eta \circ \psi_1^{-1}\right) = \Psi\left(a_\tau\right)\Psi\left(a_\eta\right).$$

Daí, segue que Ψ é um homomorfismo graduado de $\mathcal{S}$-álgebras G-graduadas.

Como ψ_1 é bijetora, para todo $a_\tau \in \mathfrak{H}\left(End_\Delta\left(V^{[g]}\right)\right)$, $\psi_1^{-1} \circ a_\tau \circ \psi_1 = 0$ implica $a_\tau = 0$. Logo, Ψ é também injetora. Agora, só resta mostrar que Ψ é sobrejetora para concluir que Ψ é um isomorfismo graduado de $\mathcal{S}$-álgebras G-graduadas. Dado $a'_\tau \in \mathfrak{H}\left(End_{\Delta'}\left(V'\right)\right)$ fixo, temos que

$$\psi_1\left(V_\beta^{[g]}\right) = V'_\beta, \quad a'_\tau\left(V'_\beta\right) \subseteq V'_{\beta+\tau} \text{ e } \psi_1^{-1}\left(V'_{\beta+\tau}\right) = V_{\beta+\tau}^{[g]}, \quad \text{para qualquer } \beta \in G.$$

Logo, a aplicação composta $\psi_1^{-1} \circ a'_\tau \circ \psi_1 : V^{[g]} \longrightarrow V^{[g]}$ é um homomorfismo homogêneo de grau τ de $\mathcal{S}$-módulos G-graduados. Além disso, como ψ_1 é ψ_0-semilinear e ψ_1^{-1} é ψ_0^{-1}-semilinear, se pode verificar que $\psi_1^{-1} \circ a'_\tau \circ \psi_1 \in End_\Delta\left(V^{[g]}\right)_\tau$. Por último, observamos que

$$\Psi\left(\psi_1^{-1} \circ a'_\tau \circ \psi_1\right) = \psi_1 \circ \left(\psi_1^{-1} \circ a'_\tau \circ \psi_1\right) \circ \psi_1^{-1} = a'_\tau.$$

Então Ψ também é sobrejetora.

Vamos mostrar agora que $\Psi\left(\mathcal{L}_{W^{[-g]}}^{gr_\sigma}\left(V^{[g]}\right)\right) = \mathcal{L}_{W'}^{gr_\sigma}\left(V'\right)$. Seja $a_\tau \in \mathfrak{H}\left(\mathcal{L}_{W^{[-g]}}^{gr_\sigma}\left(V^{[g]}\right)\right)$ fixo. Temos que existe $a_\tau^{*_\sigma} \in End_{\Delta^{op_\sigma}}\left(W^{[-g]}\right)_\tau$ tal que

$$\left\langle v_\alpha a_\tau, w_\beta\right\rangle_\gamma = \sigma(\tau,\beta)\left\langle v_\alpha, w_\beta a_\tau^{*_\sigma}\right\rangle_\gamma, \text{ para todos } v_\alpha \in \mathfrak{H}\left(V^{[g]}\right), w_\beta \in \mathfrak{H}\left(W^{[-g]}\right).$$

Agora, para quaisquer $v'_\alpha \in \mathfrak{H}\left(V'\right)$ e $w'_\beta \in \mathfrak{H}\left(W'\right)$, temos que

$$\begin{aligned}
\left\langle v'_\alpha \Psi\left(a_\tau\right), w'_\beta\right\rangle'_\gamma &= \left\langle \left(v'_\alpha\right)\left(\psi_1^{-1} \cdot a_\tau \cdot \psi_1\right), w'_\beta\right\rangle'_\gamma \\
&= \psi_0\left(\left\langle\left(v'_\alpha\right)\left(\psi_1^{-1} \cdot a_\tau\right), \psi_2^{-1}\left(w'_\beta\right)\right\rangle_\gamma\right), \quad (\psi_0,\psi_1,\psi_2) \text{ é isomorfismo triplo;} \\
&= \psi_0\left(\sigma(\tau,\beta)\left\langle\left(v'_\alpha\right)\psi_1^{-1}, \left(\psi_2^{-1}\left(w'_\beta\right)\right)a_\tau^{*_\sigma}\right\rangle_\gamma\right), \text{ definição de } \sigma\text{-adjunta;} \\
&= \sigma(\tau,\beta)\left\langle v'_\alpha, \left(w'_\beta\right)\left(\psi_2^{-1} \cdot a_\tau^{*_\sigma} \cdot \psi_2\right)\right\rangle'_\gamma, \quad (\psi_0,\psi_1,\psi_2) \text{ é isomorfismo triplo.}
\end{aligned}$$

Agora, para $d'_\theta \in \mathfrak{H}\left(\Delta'^{op_\sigma}\right)$ e $w'_\beta \in \mathfrak{H}\left(W'\right)$ fixos, observamos que

$$\begin{aligned}
\left(d'_\theta w'_\beta\right)\left(\psi_2^{-1} \cdot a_\tau^{*_\sigma} \cdot \psi_2\right) &= \left(\left(d'_\theta w'_\beta\right)\psi_2^{-1}\right)\left(a_\tau^{*_\sigma} \cdot \psi_2\right) \\
&= \left(\psi_2^{-1}\left(\sigma(\theta,\beta) w'_\beta d'_\theta\right)\right)\left(a_\tau^{*_\sigma} \cdot \psi_2\right), \quad \text{ação de } \Delta'^{op_\sigma} \text{ em } W'; \\
&= \sigma(\theta,\beta)\left(\psi_2^{-1}\left(w'_\beta\right)\psi_0^{-1}\left(d'_\theta\right)\right)\left(a_\tau^{*_\sigma} \cdot \psi_2\right), \quad \psi_2^{-1} \text{ é } \psi_0^{-1}\text{-semilinear;} \\
&= \left(\psi_0^{-1}\left(d'_\theta\right)\psi_2^{-1}\left(w'_\beta\right)\right)\left(a_\tau^{*_\sigma} \cdot \psi_2\right), \quad \text{ação de } \Delta^{op_\sigma} \text{ em } W^{[-g]}; \\
&= \left(\psi_0^{-1}\left(d'_\theta\right)\left(\psi_2^{-1}\left(w'_\beta\right)\right)a_\tau^{*_\sigma}\right)\psi_2, \quad a_\tau^{*_\sigma} \in End_{\Delta^{op_\sigma}}^{gr_\sigma}(W); \\
&= \sigma(\theta,\beta+\tau)\left(\left(\left(\psi_2^{-1}\left(w'_\beta\right)\right)a_\tau^{*_\sigma}\right)\psi_0^{-1}\left(d'_\theta\right)\right)\psi_2, \quad \text{ação de } \Delta^{op_\sigma} \text{ em } W^{[-g]}; \\
&= \sigma(\theta,\beta+\tau)\left(\left(\psi_2^{-1}\left(w'_\beta\right)\right)\left(a_\tau^{*_\sigma} \cdot \psi_2\right)\right)d'_\theta, \quad \psi_2 \text{ é } \psi_0\text{-semilinear;} \\
&= d'_\theta\left(\left(w'_\beta\right)\left(\psi_2^{-1} \cdot a_\tau^{*_\sigma} \cdot \psi_2\right)\right), \quad \text{ação de } \Delta'^{op_\sigma} \text{ em } W';
\end{aligned}$$

isto é, $\psi_2^{-1} \cdot a_\tau^{*_\sigma} \cdot \psi_2 \in End_{\Delta^{op_\sigma}}\left(W'\right)_\tau$. Logo, $\left(\Psi\left(a_\tau\right)\right)^{*_\sigma} = \psi_2^{-1} \cdot a_\tau^{*_\sigma} \cdot \psi_2$ e então, $\Psi\left(a_\tau\right) \in \mathcal{L}_{W'}^{gr_\sigma}\left(V'\right)$. Como a_τ é arbitrário, obtemos $\Psi\left(\mathcal{L}_{W^{[-g]}}^{gr_\sigma}\left(V^{[g]}\right)\right) \subseteq \mathcal{L}_{W'}^{gr_\sigma}\left(V'\right)$.

Por outro lado, dado $a'_\tau \in \mathcal{L}^{gr_\sigma}_{W'}(V')_\tau$ fixo, temos que existe $a^{*\sigma}_\tau \in End_{(\Delta')^{op_\sigma}}(W')$, tal que

$$\left\langle v'_\alpha a'_\tau, w'_\beta \right\rangle'_\gamma = \sigma(\tau,\beta)\left\langle v'_\alpha, w'_\beta\left(a'_\tau\right)^{*\sigma}\right\rangle'_\gamma, \text{ para todos } v'_\alpha \in \mathfrak{H}\left(V'\right), w'_\beta \in \mathfrak{H}\left(W'\right).$$

Agora, para quaisquer $v_\alpha \in \mathfrak{H}\left(V^{[g]}\right)$ e $w_\beta \in \mathfrak{H}\left(W^{[-g]}\right)$, temos que

$$\begin{aligned}
\left\langle v_\alpha \Psi^{-1}\left(a'_\tau\right), w_\beta\right\rangle_\gamma &= \left\langle v_\alpha\left(\psi_1\cdot a'_\tau\cdot\psi_1^{-1}\right), w_\beta\right\rangle_\gamma\\
&= \psi_0^{-1}\left(\left\langle\left(v_\alpha\right)\left(\psi_1\cdot a'_\tau\right), \psi_2\left(w_\beta\right)\right\rangle'_\gamma\right), \quad (\psi_0,\psi_1,\psi_2) \text{ é isomorfismo triplo;}\\
&= \sigma(\tau,\beta)\psi_0^{-1}\left(\left\langle\psi_1\left(v_\alpha\right), \left(\psi_2\left(w_\beta\right)\right)\left(a'_\tau\right)^{*\sigma}\right\rangle'_\gamma\right)\\
&= \sigma(\tau,\beta)\left\langle v_\alpha, w_\beta\left(\psi_2\cdot\left(a'_\tau\right)^{*\sigma}\cdot\psi_2^{-1}\right)\right\rangle_\gamma, \quad (\psi_0,\psi_1,\psi_2) \text{ é isomorfismo triplo.}
\end{aligned}$$

Logo, para $d_\theta \in \mathfrak{H}(\Delta)$ e $w_\beta \in \mathfrak{H}\left(W^{[-g]}\right)$ fixos, observamos que

$$\begin{aligned}
\left(d_\theta w_\beta\right)\left(\psi_2\cdot\left(a'\right)^{*\sigma}_\tau\cdot\psi_2^{-1}\right) &= \left(\psi_2\left(d_\theta w_\beta\right)\right)\left(\left(a'_\tau\right)^{*\sigma}\cdot\psi_2^{-1}\right)\\
&= \sigma(\theta,\beta)\left(\psi_2\left(w_\beta d_\theta\right)\right)\left(\left(a'_\tau\right)^{*\sigma}\cdot\psi_2^{-1}\right), \quad \text{ação de } \Delta^{op_\sigma} \text{ em } W^{[-g]};\\
&= \sigma(\theta,\beta)\left(\psi_2\left(w_\beta\right)\psi_0\left(d_\theta\right)\right)\left(\left(a'_\tau\right)^{*\sigma}\cdot\psi_2^{-1}\right), \quad \psi_2 \text{ é } \psi_0\text{-semilinear;}\\
&= \left(\psi_0\left(d_\theta\right)\psi_2\left(w_\beta\right)\right)\left(\left(a'_\tau\right)^{*\sigma}\cdot\psi_2^{-1}\right), \quad \text{ação de } (\Delta')^{op_\sigma} \text{ em } W';\\
&= \psi_2^{-1}\left(\psi_0\left(d_\theta\right)\left(\psi_2\left(w_\beta\right)\right)\left(a'_\tau\right)^{*\sigma}\right), \quad \left(a'_\tau\right)^{*\sigma} \in End_{(\Delta')^{op_\sigma}}(W');\\
&= \sigma(\theta,\beta+\tau)\psi_2^{-1}\left[\left(\psi_2\left(w_\beta\right)\right)\left(a'\right)^{*\sigma}_\tau\psi_0\left(d_\theta\right)\right], \quad \text{ação de } (\Delta')^{op_\sigma} \text{ em } W';\\
&= \sigma(\theta,\beta+\tau)\psi_2^{-1}\left(\left(\psi_2\left(w_\beta\right)\right)\left(a'_\tau\right)^{*\sigma}\right)d_\theta, \quad \psi_2^{-1} \text{ é } \psi_0^{-1}\text{-semilinear;}\\
&= d_\theta\left(w_\beta\right)\left(\psi_2\cdot\left(a'_\tau\right)^{*\sigma}\cdot\psi_2^{-1}\right), \ \text{ação de } \Delta^{op_\sigma} \text{ em } W^{[-g]};
\end{aligned}$$

assim, temos que $\psi_2\cdot\left(a'_\tau\right)^{*\sigma}\cdot\psi_2^{-1} \in End_{\Delta^{op_\sigma}}\left(W^{[-g]}\right)_\tau$. Logo, temos mostrado que $\left(\Psi^{-1}\left(a'_\tau\right)\right)^{*\sigma} = \psi_2\cdot\left(a'_\tau\right)^{*\sigma}\cdot\psi_2^{-1}$ e, assim, segue que $\Psi^{-1}\left(a'_\tau\right) \in \mathcal{L}^{gr_\sigma}_{W^{[-g]}}\left(V^{[g]}\right)$. Logo, como a'_τ é fixo, então $\Psi\left(\mathcal{L}^{gr_\sigma}_{W^{[-g]}}\left(V^{[g]}\right)\right) \supseteq \mathcal{L}^{gr_\sigma}_{W'}(V')$.

Por fim, vamos mostrar que $\Psi\left(\mathcal{F}^{gr_\sigma}_{W^{[-g]}}\left(V^{[g]}\right)\right) = \mathcal{F}^{gr_\sigma}_{W'}(V')$, para completar a prova do lema. Seja $r_\tau \in \mathfrak{H}\left(\mathcal{F}^{gr_\sigma}_{W^{[-g]}}\left(V^{[g]}\right)\right)$ fixo. Temos que

$$\left(V'\right)\left(\Psi\left(r_\tau\right)\right) = \left(V'\right)\left(\psi_1^{-1}\cdot r_\tau\cdot\psi_1\right) = (V)\left(r_\tau\cdot\psi_1\right).$$

Como $dim_\Delta\left(Vr_\tau\right) < \infty$ e ψ_1 é bijetora ψ_0-semilinear, segue que

$$dim_{\Delta'}\left(\left(V'\right)\Psi\left(r_\tau\right)\right) = dim_\Delta\left((V)\,r_\tau\cdot\psi_1\right) < \infty.$$

Assim, temos que $\Psi\left(r_\tau\right) \in \mathcal{F}^{gr_\sigma}_{W'}(V')$. Logo, $\Psi\left(\mathcal{F}^{gr_\sigma}_{W^{[-g]}}\left(V^{[g]}\right)\right) \subseteq \mathcal{F}^{gr_\sigma}_{W'}(V')$, pois r_τ é arbitrário.

Por outro lado, dado $r'_\tau \in \mathfrak{H}\left(\mathcal{F}^{gr_\sigma}_{W'}(V')\right)$ fixo, temos

$$(V)\left(\Psi^{-1}\left(r'_\tau\right)\right) = (V)\left(\psi_1\cdot r'_\tau\cdot\psi_1^{-1}\right) = \left(\left(V'\right)r'_\tau\right)\psi_1^{-1}.$$

Como $dim_{\Delta'}\left(\left(V'\right)r'_\tau\right) < \infty$ e ψ_1 é ψ_0^{-1}-semilinear, segue que

$$dim_\Delta\left((V)\left(\Psi^{-1}\left(r'_\tau\right)\right)\right) = dim_\Delta\left(\left(V'r'_\beta\right)\psi_1^{-1}\right) < \infty.$$

Logo, $\Psi^{-1}\left(r'_\tau\right) \in \mathcal{F}^{gr_\sigma}_{W^{[-g]}}\left(V^{[g]}\right)$. Como r'_τ é fixo, obtemos que $\Psi\left(\mathcal{F}^{gr_\sigma}_{W^{[-g]}}\left(V^{[g]}\right)\right) \supseteq \mathcal{F}^{gr_\sigma}_{W'}(V')$. Assim completamos a prova do lema. $\square$

Agora, os enunciados dos Lemas 3.12 e 3.13 acima podem ser juntados no seguinte teorema, que é o principal resultado desta seção.

Teorema 3.14. *Sejam* $\langle -,- \rangle_\gamma : V \times W \longrightarrow \Delta$ *e* $\langle -,- \rangle'_\gamma : V' \times W' \longrightarrow \Delta'$ *duas formas bilineares homogêneas de grau* γ *não degeneradas associadas às triplas* (Δ, V, W) *e* (Δ', V', W')*, respectivamente. Se* $\mathcal{R}$ *e* $\mathcal{R}'$ *são duas* $\mathcal{S}$*-álgebras* G*-graduadas, tais que*

$$\mathcal{F}_W^{gr_\sigma}(V) \subseteq \mathcal{R} \subseteq \mathcal{L}_W^{gr_\sigma}(V) \text{ e } \mathcal{F}_{W'}^{gr_\sigma}(V') \subseteq \mathcal{R}' \subseteq \mathcal{L}_{W'}^{gr_\sigma}(V'),$$

e se $\Psi : \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}'$ *é um isomorfismo graduado de* $\mathcal{S}$*-álgebras* G*-graduadas, então existe um elemento* $g \in G$ *e existe um isomorfismo triplo* (ψ_0, ψ_1, ψ_2) *de* $\left(\Delta, V^{[g]}, W^{[-g]}\right)$ *para* (Δ', V', W')*, tais que*

$$\Psi(r) = \psi_1^{-1} \cdot r \cdot \psi_1, \text{ para todo } r \in \mathcal{R}. \tag{3.10}$$

Além disso, se outro elemento $h \in G$ *e outro isomorfismo triplo* $(\psi'_0, \psi'_1, \psi'_2)$*, de* $\left(\Delta, V^{[h]}, W^{[-h]}\right)$ *para* (Δ', V', W')*, definem* Ψ *como em (3.10), então existe um elemento homogêneo não nulo* $d' \in \Delta'$ *tal que*

- $h = g + \mathbf{deg}(d')$;
- $\psi'_0(x) = d'\psi_0(x)(d')^{-1}$ *para todo* $x \in \Delta$;
- $(v)\psi'_1 = d'(v)\psi_1$ *para todo* $v \in V$;
- $\psi'_2(w) = \psi_2(w)(d')^{-1}$ *para todo* $w \in W$.

Como uma recíproca parcial, se $g \in G$ *e* (ψ_0, ψ_1, ψ_2) *é um isomorfismo triplo de* $\left(\Delta, V^{[g]}, W^{[-g]}\right)$ *para* (Δ', V', W')*, então existe um isomorfismo graduado de* $\mathcal{S}$*-álgebras* G*-graduadas*

$$\Psi : End_\Delta^{gr}(V^{[g]}) \longrightarrow End_{\Delta'}^{gr}(V'),$$

definido pela correspondência $a_\tau \longmapsto \psi_1^{-1} \cdot a_\tau \cdot \psi_1$*, tal que*

$$\Psi\left(\mathcal{L}_{W^{[-g]}}^{gr_\sigma}(V^{[g]})\right) = \mathcal{L}_{W'}^{gr_\sigma}(V') \text{ e } \Psi\left(\mathcal{F}_{W^{[-g]}}^{gr_\sigma}\left(V^{[g]}\right)\right) = \mathcal{F}_{W'}^{gr_\sigma}(V').$$

3.3 Caracterização dos σ-Antiautomorfismos

Nesta seção investigamos sob que condições uma $\mathcal{S}$-álgebra G-graduada primitiva à direita com ideais à direita G-graduados minimais admite um σ-antiautomorfismo, quando consideramos um 2-cociclo antissimétrico $\sigma : G \times G \longrightarrow \mathbb{U}(\mathcal{S})$ satisfazendo $\sigma(\alpha, -\alpha)^2 = 1$ para todo $\alpha \in G$.

Definição 3.15. *Sejam* $g \in G$ *um elemento fixo,* Δ *uma* $\mathcal{S}$*-álgebra* G*-graduada de divisão com um* σ*-antiautomorfismo* $\psi_0 : \Delta \longrightarrow \Delta$ *e* ${}_\Delta V$ *um* Δ*-espaço* G*-graduado. Uma aplicação* $\mathcal{S}$*-bilinear* $B_\gamma : V \times V^{[g]} \longrightarrow \Delta$ *é uma **forma*** ψ_0***-sesquilinear homogênea de grau*** $\gamma \in G$ ***com torção*** *se*

1. $B_\gamma(v_\alpha, w_\beta) \in \Delta_{\alpha+\beta+\gamma}$*, para todos* $v_\alpha \in V_\alpha$*,* $w_\beta \in V_\beta^{[g]}$*;*

2. $B_\gamma(d_\theta v_\alpha, w_\beta) = d_\theta B_\gamma(v_\alpha, w_\beta)$ e $B_\gamma(v_\alpha, d_\theta w_\beta) = \sigma(\theta,\beta) B_\gamma(v_\alpha, w_\beta)\,\psi_0(d_\theta)$, para todos $v_\alpha \in V_\alpha$, $w_\beta \in V_\beta^{[g]}$ e $d_\theta \in \Delta_\theta$.

Se, além disso, B_γ satisfaz que

3. para todo $v_\alpha \in V_\alpha$, $B_\gamma(v_\alpha, V) = (0)$ implica $v_\alpha = 0$;

4. para todo $w_\beta \in V_\beta^{[g]}$, $B_\gamma(V, w_\beta) = (0)$ implica $w_\beta = 0$;

*dizemos que B_γ é uma **forma ψ_0-sesquilinear homogênea de grau γ com torção não degenerada**.*

Observamos que se $B_\gamma : V \times V^{[g]} \longrightarrow \Delta$ é uma forma sesquilinear homogênea de grau γ, então $B_\gamma(0, w) = 0 = B(v, 0)_\gamma$ e $B_\gamma(-v, w) = -B_\gamma(v, w) = B_\gamma(v, -w)$, para todos $v \in V$, $w \in V^{[g]}$.

Notação 3.16. *Quando $B_\gamma : V \times V^{[g]} \longrightarrow \Delta$ for uma forma ψ_0-sesquilinear homogênea de grau zero com torção, no lugar de escrever B_0 vamos escrever B e vamos dizer que B é forma ψ_0-sesquilinear graduada com torção.*

Observação 3.17. *Observamos que, dado $g \in G$ fixo, temos $a_\tau \in End_\Delta(V)_\tau$ se, e somente se, $a_\tau \in End_\Delta(V)$ e $V_\alpha a_\tau \subseteq V_{\alpha+\tau}$ para todo $\alpha \in G$ se, e somente se, $a_\tau \in End_\Delta\left(V^{[g]}\right)$ e $V_\alpha^{[g]} a_\tau \subseteq V_{\alpha+\tau}^{[g]}$ para todo $\alpha \in G$ se, e somente se, $a_\tau \in End_\Delta\left(V^{[g]}\right)_\tau$. Daí que, dado $g \in G$ fixo, $End_\Delta(V)_\tau = End_\Delta\left(V^{[g]}\right)_\tau$, para todo $\tau \in G$. Logo, para todo $g \in G$, $End_\Delta^{gr}(V) = End_\Delta\left(V^{[g]}\right)$.*

Definição 3.18. *Seja $B_\gamma : V \times V^{[g]} \longrightarrow \Delta$ uma forma ψ_0-sesquilinear homogênea de grau γ com torção não degenerada. Dados dois elementos homogêneos $a_\tau, b_\tau \in End_\Delta(V)_\tau$ tais que*

$$B_\gamma(v_\alpha a_\tau, w_\beta) = \sigma(\tau,\beta) B_\gamma(v_\alpha, w_\beta b_\tau), \tag{3.11}$$

*para todos $v_\alpha \in V_\alpha$, $w_\beta \in V_\beta^{[g]}$, dizemos que b_τ é uma **σ-adjunta** de a_τ e que a_τ é uma **σ-coadjunta** de b_τ.*

Observação 3.19. *Sejam $b_\tau, b'_\tau \in End_\Delta(V)_\tau$ duas σ-adjuntas de $a_\tau \in End_\Delta(V)_\tau$. Então*

$$\sigma(\tau,\beta) B_\gamma(v_\alpha, w_\beta b'_\tau) = B_\gamma(v_\alpha a_\tau, w_\beta) = \sigma(\tau,\beta) B_\gamma(v_\alpha, w_\beta b_\tau),$$

para todos $v_\alpha \in V_\alpha$ e $w_\beta \in V_\beta^{[g]}$. Logo, como B_γ é não degenerada, segue que $b'_\tau = b_\tau$. Analogamente, podemos mostrar que a σ-coadjunta de um elemento homogêneo $b_\tau \in End_\Delta(V)_\tau$ é única.

Proposição 3.20. *Seja $\langle -,- \rangle : V \times W \longrightarrow \Delta$ uma forma Δ-bilinear graduada não degenerada associada à tripla (Δ, V, W). A aplicação*

$$\begin{array}{rccl} \langle -,- \rangle^{op_\sigma} : & W \times V & \longrightarrow & \Delta^{op_\sigma} \\ & (w_\beta, v_\alpha) & \longmapsto & \langle w_\beta, v_\alpha \rangle^{op_\sigma} := \sigma(\beta,\alpha)\,\langle v_\alpha, w_\beta \rangle, \end{array}$$

é uma forma Δ^{op_σ}-bilinear graduada não degenerada associada à tripla $(\Delta^{op_\sigma}, W, V)$.

Demonstração. Como $\langle -,- \rangle$ é $\mathcal{S}$-bilinear e não degenerada, não é difícil ver que $\langle -,- \rangle^{op_\sigma}$ também o é. Além disso, para $w_\beta \in W_\beta$, $v_\alpha \in V_\alpha$ e $d_\theta \in \Delta_\theta$ elementos homogêneos fixos, temos que

- $\langle d_\theta w_\beta, v_\alpha \rangle^{op_\sigma} = \sigma(\theta+\beta,\alpha) \langle v_\alpha, d_\theta w_\beta \rangle = \sigma(\theta+\beta,\alpha)\sigma(\theta,\beta) \langle v_\alpha, w_\beta \rangle d_\theta =$ $= \sigma(\theta,\beta+\alpha)\sigma(\beta,\alpha) \langle v_\alpha, w_\beta \rangle d_\theta = d_\theta \langle w_\beta, v_\alpha \rangle^{op_\sigma}$.
- $\langle w_\beta, v_\alpha d_\theta \rangle^{op_\sigma} = \sigma(\beta,\alpha+\theta) \langle v_\alpha d_\theta, w_\beta \rangle = \sigma(\beta,\alpha+\theta)\sigma(\alpha,\theta) \langle d_\theta v_\alpha, w_\beta \rangle =$ $= \sigma(\beta,\alpha)\sigma(\beta+\alpha,\theta) d_\theta \langle v_\alpha, w_\beta \rangle = \langle w_\beta, v_\alpha \rangle d_\theta$.

Daí que $\langle -,- \rangle^{op_\sigma}$ é, de fato, uma forma Δ^{op_σ}-bilinear graduada não degenerada. □

Observação 3.21. *Sejam $\mathcal{R}$ uma $\mathcal{S}$-álgebra G-graduada e $\langle -,- \rangle : V \times W \longrightarrow \Delta$ uma forma Δ-bilinear graduada não degenerada associada à tripla (Δ, V, W), tais que*

$$\mathcal{F}_W^{gr_\sigma}(V) \subseteq \mathcal{R} \subseteq \mathcal{L}_W^{gr_\sigma}(V). \tag{3.12}$$

Pela Proposição 3.20, temos que $\langle -,- \rangle^{op_\sigma}$ é uma forma Δ^{op_σ}-bilinear não degenerada associada à tripla $(\Delta^{op_\sigma}, W, V)$. Logo, temos

$$\mathcal{L}_V^{gr_{op_\sigma}}(W) = \bigoplus_{\tau \in G} \left(\mathcal{L}_V^{gr_{op_\sigma}}(W)\right)_\tau \ \ e\ \mathcal{F}_V^{gr_{op_\sigma}}(W) = \bigoplus_{\tau \in G} \left(\mathcal{F}_V^{gr_{op_\sigma}}(W)\right)_\tau,$$

onde, para cada $\tau \in G$,

- $\left(\mathcal{L}_V^{gr_{op_\sigma}}(W)\right)_\tau =: \{b_\tau \in End_{\Delta^{op_\sigma}}^{gr}({}_{\Delta^{op_\sigma}}W)_\tau :\ b_\tau$ *tem σ-coadjunta em* $End_\Delta^{gr}({}_\Delta V)\}$,
- $\left(\mathcal{F}_V^{gr_{op_\sigma}}(W)\right)_\tau =: \{b_\tau \in \left(\mathcal{L}_V^{gr_{op_\sigma}}(W)\right)_\tau :\ dim_{\Delta^{op_\sigma}}(Wb_\tau) < \infty\}$,

Observamos que:

$$b_\tau \in \left(\mathcal{L}_V^{gr_{op_\sigma}}(W)\right)_\tau$$

se, e somente se, existe $a_\tau \in End_\Delta^{gr}({}_\Delta V)$ tal que

$$\langle w_\beta b_\tau, v_\alpha \rangle^{op_\sigma} = \sigma(\tau,\alpha) \langle w_\beta, v_\alpha a_\tau \rangle^{op_\sigma},\ \text{para todos } w_\beta \in W_\beta,\ v_\alpha \in V_\alpha$$

se, e somente se,

$$\langle v_\alpha a_\tau, w_\beta \rangle = \sigma(\tau,\beta) \langle v_\alpha, w_\beta b_\tau \rangle,\ \text{para todos } w_\beta \in W_\beta,\ v_\alpha \in V_\alpha$$

se, e somente se,

$$b_\tau \in (\mathcal{L}_V^{gr_\sigma}(W))_\tau.$$

Daí que, $\left(\mathcal{L}_V^{gr_{op_\sigma}}(W)\right)_\tau = (\mathcal{L}_V^{gr_\sigma}(W))_\tau$, para todo $\tau \in G$. Logo,

$$\mathcal{L}_V^{gr_{op_\sigma}}(W) = \mathcal{L}_V^{gr_\sigma}(W)\ \ e\ \mathcal{F}_V^{gr_{op_\sigma}}(W) = \mathcal{F}_V^{gr_\sigma}(W)$$

como anéis graduados e como ideais graduados, respectivamente.

Por outro lado, pelo Teorema 2.29, temos que a aplicação

$$\begin{array}{rccc} *_\sigma: & \mathcal{L}_W^{gr_\sigma}(V) & \longrightarrow & \mathcal{L}_V^{gr_\sigma}(W) \\ & a_\tau & \longmapsto & a_\tau^{*\sigma}, \end{array}$$

é um σ-anti-isomorfismo tal que $\left(\mathcal{F}_W^{gr_\gamma}(V)\right)^{*_\sigma} = \mathcal{F}_V^{gr_\sigma}(W)$.

Resumindo, temos que $\langle -,- \rangle^{op_\sigma} : W \times V \longrightarrow \Delta^{op_\sigma}$ é uma forma graduada Δ^{op_σ}-bilinear não degenerada, associada à tripla $(\Delta^{op_\sigma}, V, W)$, e $\mathcal{R}^{*_\sigma}$ é uma $\mathcal{S}$-álgebra G-graduada tal que

$$\mathcal{F}_V^{gr_{op_\sigma}}(W) = \mathcal{F}_V^{gr_\sigma}(W) \subseteq \mathcal{R}^{*_\sigma} \subseteq \mathcal{L}_V^{gr_\sigma}(W) = \mathcal{L}_V^{gr_{op_\sigma}}(W). \tag{3.13}$$

Por outro lado, se $\Phi : \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}$ é um σ-antiautomorfismo, temos que a composta $\Psi := *_\sigma \circ \Phi : \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}^{*_\sigma}$ é um isomorfismo de $\mathcal{S}$-álgebras G-graduadas. Logo, pelo Teorema 3.14, segue que existe um elemento $g \in G$ e existe um isomorfismo triplo (ψ_0, ψ_1, ψ_2) de $\left(\Delta, V^{[g]}, W^{[-g]}\right)$ para $(\Delta^{op_\sigma}, W, V)$, tal que

$$\Psi(r) = \psi_1^{-1} \cdot r \cdot \psi_1, \text{ para todo } r \in \mathcal{R}. \tag{3.14}$$

Finalmente anotamos que, por ser (ψ_0, ψ_1, ψ_2) um isomorfismo triplo,

$$\sigma(\alpha, \beta) \langle \psi_2(w_\beta), \psi_1(v_\alpha) \rangle = \langle \psi_1(v_\alpha)\psi_2(w_\beta) \rangle^{op_\sigma} = \psi_0\left(\langle v_\alpha, w_\beta \rangle\right); \tag{3.15}$$

por ser ψ_1 ψ_0-semilinear,

$$\psi_1(dv) = \psi_0(d)\psi_1(v), \text{ para todos } v \in V,\ d \in \Delta; \tag{3.16}$$

por ser $\psi_0 : \Delta \longrightarrow \Delta^{op_\sigma}$ um isomorfismo de $\mathcal{S}$-álgebras graduadas de divisão, então $\psi_0 : \Delta \longrightarrow \Delta$ é um σ-antiautomorfismo.

Agora, nas condições da Observação 3.21, segue que

Proposição 3.22. *A aplicação*

$$\begin{array}{rccl} B: & V \times V^{[g]} & \longrightarrow & \Delta \\ & (u,v) & \longrightarrow & B(u,v) := \langle u, \psi_1(v) \rangle, \end{array}$$

é uma forma ψ_0-sesquilinear graduada com torção não degenerada. Além disso, para todo $r_\tau \in \mathcal{R}_\tau$, a σ-coadjunta de r_τ a respeito de B é $\Phi(r_\tau)$, isto é,

$$B(u_\alpha, v_\beta r_\tau) = \sigma(\beta, \tau) B(u_\alpha \Phi(r_\tau), v_\beta), \text{ para todos } u_\alpha \in V_\alpha, v_\beta \in V_\beta^{[g]}.$$

Demonstração. Como $\langle -,- \rangle$ é $\mathcal{S}$-bilinear não degenerada e a aplicação $\psi_1 : V^{[g]} \longrightarrow W$ é uma bijeção $\mathcal{S}$-linear graduada, segue que B é uma forma graduada $\mathcal{S}$-bilinear não degenerada. Além disso,

- para todos $d_\theta \in \Delta_\theta$, $u_\alpha \in V_\alpha$ e $v_\beta \in V_\beta^{[g]}$, temos

$$B(d_\theta u_\alpha, v_\beta) = \langle d_\theta u_\alpha, \psi_1(v_\beta) \rangle = d_\theta \langle u_\alpha, \psi_1(v_\beta) \rangle = d_\theta B(u_\alpha, v_\beta).$$

  Isto é, B é Δ-bilinear no primeiro argumento.

- Também, para todos $d_\theta \in \Delta_\theta$, $u_\alpha \in V_\alpha$ e $v_\beta \in V_\beta^{[g]}$, temos

$$\begin{aligned} B(u_\alpha, d_\theta v_\beta) &= \langle u_\alpha, \psi_1(d_\theta v_\beta) \rangle \\ &= \langle u_\alpha, \psi_0(d_\theta)\psi_1(v_\beta) \rangle \\ &= \sigma(\theta, \beta) \langle u_\alpha, \psi_1(v_\beta)\psi_0(d_\theta) \rangle \\ &= \sigma(\theta, \beta) \langle u_\alpha, \psi_1(v_\beta) \rangle \psi_0(d_\theta) \\ &= \sigma(\theta, \beta) B(u_\alpha, v_\beta)\psi_0(d_\theta). \end{aligned}$$

Daí que B é uma forma ψ_0-sesquilinear graduada com torção não degenerada.

Finalmente, para $r_\tau \in \mathcal{R}_\tau$ fixo, observamos que

$$\begin{aligned}
B(u_\alpha, v_\beta r_\tau) = & \ \langle u_\alpha, \psi_1(v_\beta r_\tau)\rangle \\
= & \ \langle u_\alpha, (v_\beta)\,(r_\tau \cdot \psi_1)\rangle \\
= & \ \langle u_\alpha, (v_\beta)\,(\psi_1 \cdot \Psi\,(r_\tau))\rangle\,, \quad \text{segue de (3.14);} \\
= & \ \langle u_\alpha, \psi_1(v_\beta)\Phi(r_\tau)^{*_\sigma}\rangle\,, \quad \text{pela definição de } \Psi; \\
= & \ \sigma(\beta,\tau)\,\langle u_\alpha \Phi(r_\tau), \psi_1(v_\beta)\rangle\,,
\end{aligned}$$

para todos $d_\theta \in \Delta_\theta$, $u_\alpha \in V_\alpha$ e $v_\beta \in V_\beta^{[g]}$. Ou seja, $\Phi(r_\tau)$ é a σ-coadjunta de $r_\tau \in \mathcal{R}_\tau$ a respeito de B.

□

Também, outra vez nas mesmas condições da Observação 3.21 e nas condições da Proposição 3.22, temos o seguinte resultado:

Proposição 3.23. *Existe um isomorfismo graduado ψ_0^{-2}-semilinear $Q : V^{[g]} \longrightarrow V^{[g]}$, de $\mathcal{S}$-módulos G-graduados, tal que*

$$B(v_\beta, v_\alpha) = \sigma(\beta,\alpha)\psi_0(B(v_\alpha, v_\beta Q)), \ \textit{para todos}\ v_\beta \in V_\beta,\ v_\alpha \in V_\alpha^{[g]}.$$

Demonstração. Definimos a aplicação

$$Q := \psi_1^{-1} \circ \psi_2^{-2} : \ V^{[g]} \ \longrightarrow \ V^{[g]}.$$

Q é um isomorfismo graduado de $\mathcal{S}$-módulos G-graduados, pois é a composta de dois isomorfismos graduados de $\mathcal{S}$-módulos G-graduados. Além disso, para quaisquer $v_\alpha \in V_\alpha^{[g]}$ e $d_\theta \in \Delta_\theta$, temos

$$\begin{aligned}
(d_\theta v_\alpha)Q = & \ (d_\theta v_\alpha)\psi_2^{-1} \cdot \psi_1^{-1} \\
= & \ \big(\psi_0^{-1}(d_\theta)\psi_2^{-1}(v_\alpha)\big)\,\psi_1^{-1} \\
= & \ \psi_0^{-2}(d_\theta)\,\big((v_\alpha)\psi_2^{-1} \cdot \psi_1^{-1}\big) \\
= & \ \psi_0^{-2}(d_\theta)\,((v_\alpha)Q)\,,
\end{aligned}$$

isto é, Q é ψ_0^{-2}-semilinear.

Por outro lado, para todos $v_\alpha \in V_\alpha^{[g]}$ e $v_\beta \in V_\beta$, obtemos que

$$\begin{aligned}
B(v_\alpha, v_\beta Q) = & \ B(v_\alpha, v_\beta\psi_2^{-1} \cdot \psi_1^{-1}) \\
= & \ \big\langle v_\alpha, (v_\beta)\psi_2^{-1}\big\rangle \\
= & \ \psi_0^{-1}\left(\langle (v_\alpha)\psi_1, v_\beta\rangle^{op_\sigma}\right) \\
= & \ \sigma(\alpha,\beta)\psi_0^{-1}\left(\langle v_\beta, (v_\alpha)\psi_1\rangle\right) \\
= & \ \sigma(\alpha,\beta)\psi_0^{-1}\left(B(v_\beta, v_\alpha)\right).
\end{aligned}$$

□

Agora vamos introduzir mais um conceito para logo enunciar o resultado principal desta seção.

Definição 3.24. *Dizemos que uma forma ψ_0-sesquilinear graduada com torção não degenerada $B : V \times V^{[g]} \longrightarrow \Delta$ é* ***fracamente hermitiana*** *se existe um isomorfismo de $\mathcal{S}$-módulos G-graduados ψ_0^{-2}-semilinear, $Q : V \longrightarrow V$, tal que*

$$B(v_\beta, v_\alpha) = \sigma(\beta,\alpha)\psi_0(B(v_\alpha, v_\beta Q)), \ \textit{para todos}\ v_\beta \in V_\beta, v_\alpha \in V_\alpha^{[g]}.$$

Observamos que, nas condições da Definição 3.24, Q^{-1} é ψ_0^2-semilinear. Agora estamos prontos para apresentar o principal resultado de esta seção, no qual caracterizamos σ-antiautomorfismos em $\mathcal{S}$-álgebras graduadas simples com um ideal à direita graduado minimal. Também salientamos que este resultado é análogo ao resultado Theorem 3.16 de [1].

Teorema 3.25. *Sejam G um grupo abeliano, $\langle -,-\rangle : V\times W \longrightarrow \Delta$ uma forma Δ-bilinear graduada não degenerada associada à tripla (Δ, V, W) e $\mathcal{R}$ uma $\mathcal{S}$-álgebra G-graduada tal que $\mathcal{F}_W^{gr_\sigma}(V) \subseteq \mathcal{R} \subseteq \mathcal{L}_W^{gr_\sigma}(V)$. Se $\Phi : \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}$ é um σ-antiautomorfismo, então existe um σ-antiautomorfismo $\psi_0 : \Delta \longrightarrow \Delta$ e existe uma forma ψ_0-sesquilinear graduada com torção não degenerada fracamente hermitiana $B : V \times V^{[g]} \longrightarrow \Delta$, para algum $g \in G$, tal que:*

(i) para todo $r_\tau \in R_\tau$, temos que $\Phi(r_\tau)$ é a σ-coadjunta de r_τ a respeito de B, isto é,

$$B(u_\alpha, v_\beta r_\tau) = \sigma(\beta,\tau)B(u_\alpha\Phi(r_\tau), v_\beta), \ \ \textit{para todos } u_\alpha \in V_\alpha, v_\beta \in V_\beta^{[g]};$$

(ii) $\langle -, W\rangle$ é a imagem da aplicação

$$\begin{array}{rcll} V & \longrightarrow & V^{gr_\sigma *} & \\ u & \longmapsto & f_u: & V \longrightarrow \Delta \\ & & & v \longmapsto f_u(v) := B(v,u). \end{array}$$

Além disso, se $\varphi_0' : \Delta \longrightarrow \Delta$ é um outro σ-antiautomorfismo e $B' : V \times V^{[g]} \longrightarrow \Delta$ é uma outra forma φ_0'-sesquilinear graduada com torção não degenerada fracamente hermitiana, que definem Φ e $\langle -, W\rangle$ como nos itens (i) e (ii) acima, então existe um elemento homogêneo $0 \neq d \in \Delta$ tal que:

- *$B' = \sigma(0,0)Bd$;*
- *$\varphi_0'(x) = d\psi_0(x)d^{-1}$ para todo $x \in \Delta$.*

Como uma recíproca parcial, se $\psi_0 : \Delta \longrightarrow \Delta$ é um σ-antiautomorfismo e, para algum $g \in G$, $B : V \times V^{[g]} \longrightarrow \Delta$ é uma forma ψ_0-sesquilinear graduada com torção não degenerada fracamente hermitiana, então existe uma forma Δ-bilinear graduada não degenerada $\langle -,-\rangle : V^{[g]} \times W^{[-g]} \longrightarrow \Delta$ associada à tripla $\left(\Delta, V^{[g]}, W^{[-g]}\right)$, sendo $W := \{B(-,u) = f_u : \ u \in V\}$, tal que a σ-coadjunta a respeito de B define um σ-antiautomorfismo

$$\Phi : \mathcal{L}_{W^{[-g]}}^{gr_\sigma}(V^{[g]}) \longrightarrow \mathcal{L}_{W^{[-g]}}^{gr_\sigma}(V^{[g]}),$$

e $\Phi\left(\mathcal{F}_{W^{[-g]}}^{gr_\sigma}(V^{[g]})\right) = \mathcal{F}_{W^{[-g]}}^{gr_\sigma}(V^{[g]})$.

Demonstração. Sejam $\mathcal{R}$ uma $\mathcal{S}$-álgebra G-graduada tal que $\mathcal{F}_W^{gr_\sigma}(V) \subseteq \mathcal{R} \subseteq \mathcal{L}_W^{gr_\sigma}(V)$ e $\Phi : \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}$ um σ-antiautomorfismo. Agora, pela Proposição 3.20 temos que a aplicação $\langle -,-\rangle^{op_\sigma} : W \times V \longrightarrow \Delta^{op_\sigma}$, é uma forma Δ^{op_σ}-bilinear graduada não degenerada associada à tripla $(\Delta^{op_\sigma}, W, V)$. Logo, se consideramos o σ-antiautomorfismo $*_\sigma : \mathcal{L}_W^{gr_\sigma}(V) \longrightarrow \mathcal{L}_V^{gr_\sigma}(W)$, na Observação 3.21, vimos que

$$\Psi := *_\sigma \circ \Phi : \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}^{*_\sigma},$$

é um isomorfismo de $\mathcal{S}$-álgebras G-graduadas. Consequentemente, pelo Teorema 3.14, existe $g \in G$ e existe um isomorfismo triplo (ψ_0, ψ_1, ψ_2) de $\left(\Delta, V^{[g]}, W^{[-g]}\right)$ para $(\Delta^{op_\sigma}, W, V)$. Na Observação 3.21 também anotamos que $\psi_0 : \Delta \longrightarrow \Delta$ é um σ-antiautomorfismo.

Por outro lado, pela Proposição 3.22, temos que

$$\begin{array}{rccl} B: & V \times V^{[g]} & \longrightarrow & \Delta \\ & (u, v) & \longrightarrow & B(u, v) := \langle u, \psi_1(v) \rangle \,, \end{array}$$

é uma forma ψ_0-sesquilinear graduada com torção não degenerada fracamente hermitiana, tal que, para todo $r_\tau \in \mathcal{R}_\tau$,

$$B(u_\alpha, v_\beta r_\tau) = \sigma(\beta, \tau) B(u_\alpha \Phi(r_\tau), v_\beta), \text{ para todos } u_\alpha \in V_\alpha, v_\beta \in V_\beta^{[g]};$$

isto é, a σ-coadjunta de r_τ a respeito de B é $\Phi(r_\tau)$. Com isso obtemos a prova do item (i).

Agora, vamos provar o item (ii). Observamos que a aplicação

$$\begin{array}{ccccccc} V & \longrightarrow & V^{gr_\sigma *} & & & & \\ u & \longmapsto & f_u : & V & \longrightarrow & \Delta & \\ & & & v & \longmapsto & f_u(v) := B(u, v), & \end{array}$$

é bem definida, em virtude de que B é não degenerada. Além disso, a imagem desta aplicação é $\langle -, W \rangle$, pois

$$B\left(-, V^{[g]}\right) = \left\langle -, \psi_1\left(V^{[g]}\right)\right\rangle = \langle -, W \rangle \,.$$

Assim completamos a prova do item (ii).

Continuando com a prova do teorema, sejam $\varphi_0' : \Delta \longrightarrow \Delta$ um outro σ-antiautomorfismo e $B' : V \times V^{[g]} \longrightarrow \Delta$ uma outra forma φ_0'-sesquilinear com torção fracamente hermitiana não degenerada, que definem Φ e $\langle -, W \rangle$ como nos itens (i) e (ii). Na Observação 3.21 vimos que

$$\mathcal{F}_V^{gr_\sigma}(W) \subseteq \mathcal{R}^{*_\sigma} \subseteq \mathcal{L}_V^{gr_\sigma}(W).$$

Assim, W é um $\mathcal{R}^{*_\sigma}$-módulo à direita graduado. Logo, como $\Psi : \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}^{*_\sigma}$ é um isomorfismo graduado, segue que W é um $\mathcal{R}$-módulo à direita graduado com a ação:

$$w_\beta r_\tau := w_\beta \Psi(r_\tau), \text{ para todos } w_\beta \in W_\beta, r_\tau \in \mathcal{R}_\tau.$$

Temos que para cada $v_\beta \in V_\beta^{[g]}$ existe um único $w_\beta \in W_\beta$ tal que $B'(-, v_\beta) = \langle -, w_\beta \rangle$, pois B' define $\langle -, W \rangle$ como no item (i). Logo, a aplicação

$$\begin{array}{rccl} \psi' : & V^{[g]} & \longrightarrow & W \\ & v_\beta & \longmapsto & \psi'(v_\beta) := w_\beta, \text{ onde } B'(-, v_\beta) = \langle -, w_\beta \rangle \,, \end{array}$$

é um isomorfismo de $\mathcal{S}$-módulos graduados.

Afirmamos que a aplicação $\psi' \circ \psi_1^{-1} : W \longrightarrow W$ é um elemento homogêneo de grau zero que pertence a $End_{\mathcal{R}}^{gr}(W_{\mathcal{R}})$ $(= \Delta^{op_\sigma})$. De fato, temos que $\psi' \circ \psi_1^{-1}$ é $\mathcal{S}$-linear e graduado. Além disso, dados $r_\tau \in \mathcal{R}_\tau$ e $v_\beta \in V_\beta^{[g]}$ fixos, temos que

$$\begin{aligned} \langle v_\alpha, \psi'(v_\beta r_\tau) \rangle &= B'(v_\alpha, v_\beta r_\tau) \\ &= \sigma(\beta, \tau) B'(v_\alpha \Phi(r_\tau), v_\beta) \\ &= \sigma(\beta, \tau) \langle v_\alpha \Phi(r_\tau), \psi'(v_\beta) \rangle \\ &= \langle v_\alpha, (\psi'(v_\beta))\, \Phi(r_\tau)^{*_\sigma} \rangle \\ &= \langle v_\alpha, (\psi'(v_\beta))\, \Psi(r_\tau) \rangle \,, \end{aligned}$$

para todo $v_\alpha \in V_\alpha$. Logo, como $\langle -,- \rangle$ é não degenerada, segue que

$$\psi'(v_\beta r_\tau) = \psi'(v_\beta)\Psi(r_\tau) = \psi'(v_\beta)r_\tau, \text{ para todos } v_\beta \in V_\beta^{[g]}, r_\tau \in \mathcal{R}_\tau. \tag{3.17}$$

Assim, para $w_\beta = \psi'(v_\beta) \in W_\beta$ e $r_\tau \in \mathcal{R}_\tau$ fixos, segue que

$$\begin{aligned}
\psi' \circ \psi_1^{-1}(w_\beta r_\tau) = {} & \psi' \circ \psi_1^{-1}\left((w_\beta)\Psi(r_\tau)\right) \\
= {} & \psi'\left((w_\beta)\left(\Psi(r_\tau)\cdot\psi_1^{-1}\right)\right) \\
= {} & \psi'\left((w_\beta)\left(\psi_1^{-1}\cdot r_\tau\right)\right), \text{ pois } \Psi(r_\tau) = \psi_1^{-1}\cdot r_\tau\cdot\psi_1; \\
= {} & \psi'\left(\left((w_\beta)\psi_1^{-1}\right)r_\tau\right) \\
= {} & \psi'\left((w_\beta)\psi_1^{-1}\right)\Psi(r_\tau), \text{ por } (3.17)\ ; \\
= {} & \left(\psi' \circ \psi_1^{-1}(w_\beta)\right) r_\tau.
\end{aligned}$$

Então, $d = \psi' \circ \psi_1^{-1} \in (End_{\mathcal{R}}(W_{\mathcal{R}}))_0$, pois ψ' e ψ_1^{-1} são homogêneos de grau zero.

Agora, vamos mostrar que $B' = \sigma(0,0)Bd$ e que $\varphi_0'(x) = d\psi_0(x)d^{-1}$, para todo $x \in \Delta$. Dados $v_\alpha \in V_\alpha$ e $v_\beta \in V_\beta^{[g]}$ fixos, temos que

$$\begin{aligned}
B'(v_\alpha, v_\beta) = {} & \langle v_\alpha, \psi'(v_\beta)\rangle \\
= {} & \left\langle v_\alpha, \left(\psi' \circ \psi_1^{-1}\right)\psi_1(v_\beta)\right\rangle \\
= {} & \langle v_\alpha, d\psi_1(v_\beta)\rangle \\
= {} & \sigma(0,\beta)\langle v_\alpha, \psi_1(v_\beta)d\rangle \\
= {} & \sigma(0,0)\langle v_\alpha, \psi_1(v_\beta)\rangle d \\
= {} & \sigma(0,0)B(v_\alpha, v_\beta)d.
\end{aligned}$$

Logo, $B' = \sigma(0,0)Bd$, como queríamos mostrar. Também, para $v_\alpha \in V_\alpha$ e $v_\beta \in V_\beta^{[g]}$ fixos, temos:

$$\begin{aligned}
\sigma(\theta,\beta)B'(v_\alpha, v_\beta)\psi_0'(x_\theta) = {} & B'(v_\alpha, x_\theta v_\beta) \\
= {} & \sigma(0,0)B(v_\alpha, x_\theta v_\beta)d \\
= {} & \sigma(0,0)\sigma(\theta,\beta)B(v_\alpha, v_\beta)\psi_0(x_\theta)d \\
= {} & \sigma(\theta,\beta)B'(v_\alpha, v_\beta)d^{-1}\psi_0(x_\theta)d,
\end{aligned}$$

para todo $x_\theta \in \Delta_\theta$. Daí que

$$\psi_0'(x) = d^{-1}\psi_0(x)d, \text{ para todo } x \in \Delta.$$

Agora vamos mostrar a recíproca parcial. Suponhamos que $\psi_0 : \Delta \longrightarrow \Delta$ é um σ-antiautomorfismo e que, para algum $g \in G$, $B : V \times V^{[g]} \longrightarrow \Delta$ é uma forma ψ_0-sesquilinear graduada com troção não degenerada fracamente hermitiana. Temos que a aplicação

$$\begin{array}{rcll}
\psi_1 : V^{[g]} & \longrightarrow & V^{gr_\sigma *} & \\
v & \longmapsto & f_v : & V \longrightarrow \Delta \\
 & & & u \longmapsto f_v(u) := B(u,v),
\end{array}$$

é um monomorfismo graduado de $\mathcal{S}$-módulos G-graduados ψ_0-semilinear.

Afirmamos que $W := \{B(-,v) = f_v : v \in V^{[g]}\}$ é um Δ-submódulo à direita G-graduado de $V^{gr_\sigma *}$. De fato, lembrando que a ação de Δ à direita de $V^{gr_\sigma *}$ é dada por

$$(u)(fd) := ((u)f)\,d, \text{ para todos } u \in V, f \in V^{gr_\sigma *}, d \in \Delta,$$

segue, para quaisquer $f_{v_\beta} \in W_\beta$ e $d_\theta \in \Delta_\theta$, que

$$\begin{array}{rl}(u_\alpha)(f_{v_\beta} d_\theta) = & (u_\alpha) f_{v_\beta} d_\theta \\ = & B(u_\alpha, v_\beta) d_\theta \\ = & \sigma(\beta,\theta) B\left(u_\alpha, \psi_0^{-1}(d_\theta) v_\beta\right) \\ = & B\left(u_\alpha, \sigma(\beta,\theta)\psi_0^{-1}(d_\theta) v_\beta\right) \\ = & (u_\alpha) f_{\sigma(\beta,\theta)\psi_0^{-1}(d_\theta)v_\beta},\end{array}$$

para todo $u_\alpha \in V_\alpha$. Daí que $f_{v_\beta} d_\theta = f_{\sigma(\beta,\theta)\psi_0^{-1}(d_\theta)v_\beta} \in W_{\beta+\theta}$, para todos $f_{v_\beta} \in W_\beta$ e $d_\theta \in \Delta_\theta$. Isto é, W é um Δ-submódulo à direita graduado de $V^{gr_\sigma *}$.

Definimos a aplicação

$$\begin{array}{rrcl}\langle -,- \rangle : & V \times W & \longrightarrow & \Delta \\ & (v_\alpha, v_\beta) & \longmapsto & \langle v_\alpha, w_\beta \rangle := B(v_\alpha, \psi_1^{-1}(w_\beta)).\end{array}$$

Observamos que $\langle -,- \rangle$ é bem definida, pois $\psi_1^{-1} : W \longrightarrow V^{[g]}$ é uma bijeção. Além disso, temos que:

- $\langle v_\alpha, w_\beta \rangle \in \Delta_{\alpha+\beta}$, para todos $v_\alpha \in V_\alpha$ e $w_\beta \in W_\beta$;
- $\langle -,- \rangle$ é bilinear;
- para todos $v_\alpha \in V_\alpha$, $v_\beta \in V_\beta^{[g]}$ e $d_\theta \in \Delta_\theta$,

  $$\langle d_\theta v_\alpha, v_\beta \rangle = B\left(d_\theta v_\alpha, \psi_1^{-1}(w_\beta)\right) = d_\theta B(v_\alpha, \psi_1^{-1}(w_\beta)) = d_\theta \langle v_\alpha, w_\beta \rangle ;$$

  e também

  $$\begin{array}{rl}\langle v_\alpha, w_\beta d_\theta \rangle = & B\left(v_\alpha, \psi_1^{-1}(w_\beta d_\theta)\right) \\ = & (v_\alpha)\left(\psi_1\left(\psi_1^{-1}(w_\beta d_\theta)\right)\right) \\ = & (v_\alpha)\left(w_\beta d_\theta\right) \\ = & \left((v_\alpha) w_\beta\right) d_\theta \\ = & \left((v_\alpha)\left(\psi_1 \psi_1^{-1}(w_\beta)\right)\right) d_\theta \\ = & B\left(v_\alpha, \psi_1^{-1}(w_\beta)\right) d_\theta \\ = & \langle v_\alpha, w_\beta \rangle d_\theta.\end{array}$$

- como B é não degenerada e $\psi_1^{-1} : W \longrightarrow V^{[g]}$ é uma bijeção, segue que $\langle -,- \rangle$ é não degenerada.

Assim, concluímos que $\langle -,- \rangle$ é uma forma Δ-bilinear graduada não degenerada.

Agora, como B é fracamente hermitiana, existe um isomorfismo de $\mathcal{S}$-módulos G-graduados ψ^{-2}-semilinear $Q : V \longrightarrow V$. Afirmamos que a aplicação

$$\psi_2 := Q^{-1} \circ \psi_1^{-1} : \quad W \quad \longrightarrow \quad V^{[g]},$$

é um isomorfismo graduado de $\mathcal{S}$-módulos G-graduados. De fato, como Q e ψ_1 são isomorfismos de $\mathcal{S}$-módulos G-graduados, ψ_2 também o é. Além disso, dados $w_\beta \in W_\beta$ e $d_\theta \in \Delta_\theta$ fixos, temos

$$\begin{array}{rl}\psi_2(w_\beta d_\theta) = & Q^{-1} \circ \psi_1^{-1}(w_\beta d_\theta) \\ = & Q^{-1}\left(\psi_1^{-1}(\sigma(\beta,\theta) d_\theta w_\beta)\right) \\ = & Q^{-1}\left(\sigma(\beta,\theta)\psi_0^{-1}(d_\theta)\psi_1^{-1}(w_\beta)\right) \\ = & \sigma(\beta,\theta)\psi_0(d_\theta) Q^{-1}\left(\psi_1^{-1}(w_\beta)\right) \\ = & \sigma(\beta,\theta)\psi_0(d_\theta)\psi_2\left(w_\beta\right) \\ = & \psi_2\left(w_\beta\right)\psi_0(d_\theta).\end{array}$$

Afirmamos que a tripla (ψ_0, ψ_1, ψ_2) é um isomorfismo triplo de $\left(\Delta, V^{[g]}, W^{[-g]}\right)$ para $(\Delta^{op_\sigma}, W, V)$. Aqui, a tripla $(\Delta^{op_\sigma}, W, V)$ está associada a $\langle -, - \rangle^{op_\sigma}$. Agora, para quaisquer $v_\alpha \in V_\alpha^{[g]}$ e $w_\beta \in W_\beta^{[-g]}$, temos

$$\begin{aligned}
\langle (v_\alpha)\psi_1, \psi_2(w_\beta) \rangle^{op_\sigma} &= \sigma(\alpha,\beta) \langle \psi_2(w_\beta), \psi_1(v_\alpha) \rangle \\
&= \sigma(\alpha,\beta) \left\langle Q^{-1} \circ \psi_1^{-1}(w_\beta), \psi_1(v_\alpha) \right\rangle \\
&= \sigma(\alpha,\beta) B \left(Q^{-1} \circ \psi_1^{-1}(w_\beta), v_\alpha \right) \\
&= \psi_0 \left(B \left(v_\alpha, \psi_1^{-1}(w_\beta) \right) \right) \\
&= \psi_0 \left(\langle v_\alpha, w_\beta \rangle \right).
\end{aligned}$$

Daí que a tripla (ψ_0, ψ_1, ψ_2) é um isomorfismo triplo, como queríamos mostrar. Agora, pelo Teorema 3.14, segue que existe um isomorfismo graduado de $\mathcal{S}$-álgebras G-graduadas

$$\Psi : End_\Delta^{gr}({}_\Delta V^{[g]}) \longrightarrow End_{\Delta^{op_\sigma}}^{gr}({}_{\Delta^{op_\sigma}} W),$$

definido pela correspondência $a_\tau \longmapsto \psi_1^{-1} \cdot a_\tau \cdot \psi_1$, tal que

$$\Psi \left(\mathcal{L}_{W^{[-g]}}^{gr_\sigma}(V^{[g]}) \right) = \mathcal{L}_V^{gr_\sigma}(W) \text{ e } \Psi \left(\mathcal{F}_{W^{[-g]}}^{gr_\sigma}(V^{[g]}) \right) = \mathcal{F}_V^{gr_\sigma}(W).$$

Logo, para todos $v_\alpha \in V_\alpha$, $v_\beta \in V_\beta^{[g]}$ e $r_\tau \in \mathcal{R}_\tau$, temos

$$\begin{aligned}
B(v_\alpha, v_\beta r_\tau) &= \langle v_\alpha, (v_\beta r_\tau)\psi_1 \rangle \\
&= \langle v_\alpha, (v_\beta)\psi_1 \Psi(r_\tau) \rangle \\
&= \sigma(\beta,\tau) \langle (v_\alpha)\Psi(r_\tau)^{\star_\sigma}, (v_\beta)\psi_1 \rangle \\
&= \sigma(\beta,\tau) B \left((v_\alpha)\Psi(r_\tau)^{\star_\sigma}, v_\beta \right).
\end{aligned}$$

Ou seja, se $r_\tau \in \mathcal{R}_\tau$, $\Psi(r_\tau)^{\star_\sigma}$ é a sua σ-coadjunta a respeito de B. Logo, a aplicação composta

$$\Phi := \star_\sigma \circ \Psi : \mathcal{L}_{W^{[-g]}}^{gr_\sigma}(V^{[g]}) \longrightarrow \mathcal{L}_{W^{[-g]}}^{gr_\sigma}(V^{[g]})$$

é um σ-anti-isomorfismo de $\mathcal{S}$-álgebras G-graduadas tal que

$$\Phi \left(\mathcal{F}_{W^{[-g]}}^{gr_\sigma}(V^{[g]}) \right) = \mathcal{F}_{W^{[-g]}}^{gr_\sigma}(V^{[g]})$$

□

Capítulo 4

Involuções Coloridas

Neste capítulo caracterizamos ϵ involuções em álgebras G-graduadas primitivas à direita com ideais à direita G-graduados minimais em termos de formas sesquilineares graduadas com torção não degeneradas hermitianas e anti-hermitianas.

Em todo o capítulo $\epsilon : G\times G \longrightarrow \mathbb{U}(\mathcal{S})$ vai ser um bicaráter antissimétrico. Lembramos que ϵ-involuções são chamadas na literatura de involuções coloridas.

4.1 Formas Sesquilineares Graduadas ξ-Hermitianas

Sejam $g \in G$ um elemento fixo, Δ uma $\mathcal{S}$-álgebra G-graduada de divisão com um σ-antiautohomorfismo $\psi_0 : \Delta \longrightarrow \Delta$, e ${}_{\Delta}V$ um Δ-espaço G-graduado. Lembramos que uma aplicação $\mathcal{S}$-bilinear $B_\gamma : V \times V^{[g]} \longrightarrow \Delta$ é uma **forma sesquilinear homogênea de grau** $\gamma \in G$ **com torção** se:

(*i*) $B_\gamma(v_\alpha, w_\beta) \in \Delta_{\alpha+\beta+\gamma}$, para todos $v_\alpha \in V_\alpha,\ w_\beta \in V^{[g]}_\beta$;

(*ii*) $B_\gamma(d_\theta v_\alpha, w_\beta) = d_\theta B_\gamma(v_\alpha, w_\beta)$ e $B_\gamma(v_\alpha, d_\theta w_\beta) = \sigma(\theta,\beta)B_\gamma(v_\alpha, w_\beta)\,\psi_0(d_\theta)$, para todos $v_\alpha \in V_\alpha$, $w_\beta \in V^{[g]}_\beta$ e $d_\theta \in \Delta_\theta$.

Também lembramos que B_γ é uma **forma sesquilinear homogênea de grau** γ **com torção não degenerada** se, além dos itens (*i*) e (*ii*) acima, B_γ satisfaz:

(*iii*) para todo $v_\alpha \in V_\alpha$, $B_\gamma(v_\alpha, V) = (0)$ implica $v_\alpha = 0$;

(*iv*) para todo $w_\beta \in V^{[g]}_\beta$, $B_\gamma(V, w_\beta) = (0)$ implica $w_\beta = 0$.

Seja $\epsilon : G \times G \longrightarrow \mathbb{U}(\mathcal{S})$ um bicarater antissimétrico. Sabemos que se Δ é uma $\mathcal{S}$-álgebra G-graduada de divisão e $^-: \Delta \longrightarrow \Delta$ é uma ϵ-involucão, então $\bar{\Delta}$ também é uma $\mathcal{S}$-álgebra G-graduada de divisão. Se $\mathcal{Z}(\Delta)$ $(:= \{x \in \Delta : xd = dx,\ \text{para todo } d \in \Delta\})$ é o centro de Δ, temos que existem elementos homogêneos $\xi \in \mathcal{Z}(\Delta) \cap \Delta_0$ tais que $\xi\overline{\xi} = 1$. Em particular, observamos que $(1)\overline{(1)} = 1$ e $(-1)\overline{(-1)} = 1$.

Definição 4.1. *Seja $B_\gamma : V \times V^{[g]} \longrightarrow \Delta$ uma forma sesquilinear homogênea de grau γ com torção não degenerada e seja $\xi \in \mathcal{Z}(\Delta) \cap \Delta_0$ tal que $\xi\overline{\xi} = 1$. Dizemos que B_γ é **ξ-hermitiana** se*

$$B_\gamma(v_\alpha, w_\beta) = \epsilon(\alpha, \beta - g)\epsilon(\alpha,\gamma)\epsilon(\gamma, \beta - g)\xi\overline{B_\gamma(w_\beta, v_\alpha)}, \tag{4.1}$$

para todos $v_\alpha \in V_\alpha,\ w_\beta \in V_\beta^{[g]}$.

Notação 4.2. *Nas condições da Definição 4.1, quando* $\xi = 1$*, dizemos que* B_γ *é* ***hermitiana*** *e, quando* $\xi = -1$*, dizemos que* B_γ *é* ***anti-hermitiana****, no lugar de dizer que* B_γ *é* ξ***-hermitiana****.*

Lema 4.3. *Seja* $B_\gamma : V \times V^{[g]} \longrightarrow \Delta$ *uma forma sesquilinear homogênea de grau* γ *com torção não degenerada* ξ*-hermitiana. Para todo* $v_\alpha \in V_\alpha$*,*

$$B_\gamma\left(v_\alpha, V\right) = (0) \text{ se, e somente se, } B_\gamma\left(V, v_\alpha\right) = (0).$$

Demonstração.

$$\begin{aligned}
&(0) = B_\gamma\left(V, v_\alpha\right) \\
&\text{se, e somente se,}\quad 0 = B_\gamma\left(w_\beta, v_\alpha\right), \quad \text{para todo } w_\beta \in V_\beta; \\
&\text{se, e somente se,}\quad 0 = \overline{B_\gamma\left(w_\beta, v_\alpha\right)}, \quad \text{para todo } w_\beta \in V_\beta; \\
&\text{se, e somente se,}\quad 0 = \epsilon(\alpha, \beta - g)\epsilon(\alpha, \gamma)\epsilon(\gamma, \beta - g)\xi\overline{B_\gamma\left(w_\beta, v_\alpha\right)}, \quad \text{para todo } w_\beta \in V_\beta; \\
&\text{se, e somente se,}\quad 0 = B_\gamma\left(v_\alpha, w_\beta\right), \quad \text{para todo } w_\beta \in V_\beta; \\
&\text{se, e somente se,}\quad 0 = B_\gamma\left(v_\alpha, V\right).
\end{aligned}$$

□

Para a seguinte definição lembramos que, para todo $g \in G$, $End_\Delta^{gr}(V) = End_\Delta\left(V^{[g]}\right)$.

Definição 4.4. *Seja* $B_\gamma : V \times V^{[g]} \longrightarrow \Delta$ *uma forma sesquilinear homogênea de grau* γ *com torção não degenerada* ξ*-hermitiana. Dados dois elementos homogêneos* $a_\tau, b_\tau \in End_\Delta\left(V\right)_\tau$ *tais que*

$$B_\gamma\left(v_\alpha a_\tau, w_\beta\right) = \epsilon(\tau, \beta - g + \gamma)B_\gamma\left(v_\alpha, w_\beta b_\tau\right), \tag{4.2}$$

para todos $v_\alpha \in V_\alpha,\ w_\beta \in V_\beta^{[g]}$*, dizemos que* b_τ *é uma* ϵ***-semiadjunta*** *de* a_τ *e que* a_τ *é uma* ϵ***-semicoadjunta*** *de* b_τ*.*

Observação 4.5. *Se* $b_\tau, b'_\tau \in End_\Delta(V)_\tau$ *são duas* ϵ*-semiadjuntas de* $a_\tau \in End_\Delta(V)_\tau$*, temos*

$$\epsilon(\tau, \beta - g + \gamma)B_\gamma\left(v_\alpha, w_\beta b'_\tau\right) = B_\gamma\left(v_\alpha a_\tau, w_\beta\right) = \epsilon(\tau, \beta - g + \gamma)B_\gamma\left(v_\alpha, w_\beta b_\tau\right),$$

para todos $v_\alpha \in V_\alpha$ *e* $w_\beta \in V_\beta^{[g]}$*. Logo, como* B_γ *é não degenerada, segue que* $b'_\tau = b_\tau$*. Análogamente, é possível mostrar que quando um elemento homogêneo* $b_\tau \in End_\Delta(V)_\tau$ *tem uma* ϵ*-semicoadjunta, esta é unica. De agora em diante: se* $a_\tau \in End_\Delta(V)$ *tem* ϵ*-semiadjunta, esta vai ser denotada por* $a_\tau^{\circledast_\epsilon}$*; e se se* $b_\tau \in End_\Delta(V)_\tau$ *tem* ϵ*-semicoadjunta, esta vai ser denotada por* $b_\tau^{\circledast_\epsilon}$*.*

Definição 4.6. *Seja* $B_\gamma : V \times V^{[g]} \longrightarrow \Delta$ *uma forma sesquilinear homogênea de grau* γ *com torção não degenerada* ξ*-hermitiana. Para todo* $\tau \in G$ *fixo, definimos os seguintes conjuntos:*

- $\left(\mathcal{L}_V^{gr\circledast_\epsilon}\right)_\tau := \{a_\tau \in End_\Delta(V)_\tau :\ a_\tau$ *tem* ϵ*-semiadjunta*$\}$;
- $\left(\mathcal{F}_V^{gr\circledast_\epsilon}\right)_\tau := \{a_\tau \in \mathcal{L}_V^{gr\circledast_\epsilon} :\ dim_\Delta(Va_\tau) < \infty\}$;

- $\left(\mathcal{L}_V^{gr\circledast_\epsilon}\right)_\tau := \{b_\tau \in End_\Delta(V)_\tau :\ b_\tau$ *tem* ϵ*-semicoadjunta*$\}$;
- $\left(\mathcal{F}_V^{gr\circledast_\epsilon}\right)_\tau := \{b_\tau \in \mathcal{L}_V^{gr\circledast_\epsilon} :\ dim_\Delta(Vb_\tau) < \infty\}$.

Lema 4.7. *Seja* $B_\gamma : V \times V^{[g]} \longrightarrow \Delta$ *uma forma sesquilinear homogênea de grau* γ *com torção não degenerada* ξ*-hermitiana.*

1. *Para todo* $a_\tau \in \left(\mathcal{L}_V^{gr\ast_\epsilon}\right)_\tau$, *temos* $a_\tau^{\ast_\epsilon\ast_\epsilon} = a_\tau$ *e* $a_\tau^{\ast_\epsilon} = a_\tau^{\circledast_\epsilon}$;
2. *Para todo* $b_\tau \in \left(\mathcal{L}_V^{gr\circledast_\epsilon}\right)_\tau$, *temos* $b_\tau^{\circledast_\epsilon\circledast_\epsilon} = b_\tau$ *e* $b_\tau^{\circledast_\epsilon} = b_\tau^{\ast_\epsilon}$.

Demonstração. Sejam $v_\alpha \in V_\alpha$ e $w_\beta \in V_\beta^{[g]}$ fixos.

1. Se $a_\tau \in \left(\mathcal{L}_V^{gr\ast_\epsilon}\right)_\tau$, temos

$$\begin{aligned} B_\gamma\left(v_\alpha a_\tau^{\ast_\epsilon}, w_\beta\right) = {} & \xi\epsilon(\alpha+\tau,\beta-g)\epsilon(\alpha+\tau,\gamma)\epsilon(\gamma,\beta-g) \\ & \overline{B_\gamma\left(w_\beta, v_\alpha a_\tau^{\ast_\epsilon}\right)},\ \text{por } (4.1) \\ = {} & \xi\epsilon(\alpha+\tau,\beta-g)\epsilon(\alpha+\tau,\gamma)\epsilon(\gamma,\beta-g)\epsilon(\alpha+\gamma,\tau) \\ & \overline{B_\gamma\left(w_\beta a_\tau, v_\alpha\right)},\ \text{por } (3.11) \\ = {} & \xi\epsilon(\alpha+\tau,\beta-g)\epsilon(\alpha+\tau,\gamma)\epsilon(\gamma,\beta-g)\epsilon(\alpha+\gamma,\tau) \\ & \left(\overline{\xi}\epsilon(\beta+\tau-g,\alpha)\epsilon(\gamma,\alpha)\epsilon(\beta+\tau-g,\gamma)B_\gamma\left(v_\alpha, w_\beta a_\tau\right)\right),\text{por } (4.1) \\ = {} & \epsilon(\tau,\beta+\gamma-g)B_\gamma\left(v_\alpha, w_\beta a_\tau\right). \end{aligned}$$

   Daí que a_τ é a ϵ-semiadjunta de $a_\tau^{\ast_\epsilon}$ e $a_\tau^{\ast_\epsilon}$ é a ϵ-semicoadjunta de a_τ, isto é, $a_\tau^{*_\epsilon *_\epsilon} = a_\tau$ e $a_\tau^{*_\epsilon} = a_\tau^{\star_\epsilon}$.

2. Se $b_\tau \in \left(\mathcal{L}_V^{gr\circledast_\epsilon}\right)_\tau$ temos,

$$\begin{aligned} B_\gamma\left(v_\alpha, w_\beta b_\tau^{\circledast_\epsilon}\right) = {} & \xi\epsilon(\alpha,\gamma)\epsilon(\alpha,\beta-g+\tau)\epsilon(\gamma,\beta-g+\tau) \\ & \overline{B_\gamma\left(w_\beta b_\tau^{\circledast_\epsilon}, v_\alpha\right)},\text{por } (4.1) \\ = {} & \xi\epsilon(\alpha,\gamma)\epsilon(\alpha,\beta-g+\tau)\epsilon(\gamma,\beta-g+\tau)\epsilon(\tau,\alpha+\gamma) \\ & \overline{B_\gamma\left(w_\beta, v_\alpha b_\tau\right)},\text{por } (3.11) \\ = {} & \xi\epsilon(\alpha,\gamma)\epsilon(\alpha,\beta-g+\tau)\epsilon(\gamma,\beta-g+\tau)\epsilon(\tau,\alpha+\gamma) \\ & \left(\overline{\xi}\epsilon(\beta-g,\gamma)\epsilon(\beta-g,\alpha+\tau)\epsilon(\gamma,\alpha+\tau)B_\gamma\left(v_\alpha b_\tau, w_\beta\right)\right),\text{por } (4.1) \\ = {} & \epsilon(\beta-g+\gamma,\tau)B_\gamma\left(v_\alpha b_\tau, w_\beta\right). \end{aligned}$$

   Logo, b_τ é a ϵ-semicoadjunta de $b_\tau^{\circledast_\epsilon}$ e $b_\tau^{\circledast_\epsilon}$ é a ϵ-semiadjunta de b_τ. Assim, $b_\tau = b_\tau^{\circledast_\epsilon\circledast_\epsilon}$ e $b_\tau^{\circledast_\epsilon} = b_\tau^{\ast_\epsilon}$.

□

Corolário 4.8. *Seja* $B_\gamma : V \times V^{[g]} \longrightarrow \Delta$ *uma forma sesquilinear homogênea de grau* γ *com torção não degenerada* ξ*-hermitiana. Para todo* $\tau \in G$, *temos que* $\left(\mathcal{L}_V^{gr\ast_\epsilon}\right)_\tau = \left(\mathcal{L}_V^{gr\circledast_\epsilon}\right)_\tau$ *e* $\left(\mathcal{F}_V^{gr\ast_\epsilon}\right)_\tau = \left(\mathcal{F}_V^{gr\circledast_\epsilon}\right)_\tau$.

Demonstração. Se $a_\tau \in \left(\mathcal{L}_V^{gr\ast_\epsilon}\right)_\tau$ segue, pelo item 1 do Lema 4.7, que $a_\tau^{\ast_\epsilon}$ é a ϵ-semicoadjunta de a_τ. Daí que $a_\tau \in \left(\mathcal{L}_V^{gr\circledast_\epsilon}\right)_\tau$. Por outro lado, se $b_\tau \in \left(\mathcal{L}_V^{gr\circledast_\epsilon}\right)_\tau$ segue, pelo item 2 do Lema 4.7, que b_τ é a ϵ-semiadjunta de $b_\tau^{\circledast_\epsilon}$. Logo, $b_\tau \in \left(\mathcal{L}_V^{gr\ast_\epsilon}\right)_\tau$. Então $\left(\mathcal{L}_V^{gr\ast_\epsilon}\right)_\tau = \left(\mathcal{L}_V^{gr\circledast_\epsilon}\right)_\tau$.

Como $\left(\mathcal{L}_V^{gr\ast_\epsilon}\right)_\tau = \left(\mathcal{L}_V^{gr\circledast_\epsilon}\right)_\tau$, é imediato que $\left(\mathcal{F}_V^{gr\ast_\epsilon}\right)_\tau = \left(\mathcal{F}_V^{gr\circledast_\epsilon}\right)_\tau$. □

Lema 4.9. *Seja $B_\gamma : V \times V^{[g]} \longrightarrow \Delta$ uma forma sesquilinear homogênea de grau γ com torção não degenerada ε-hermitiana. Temos que:*

1. $\mathcal{L}_V^{gr_{\divideontimes\epsilon}} := \bigoplus_{\tau\in G} (\mathcal{L}_V^{gr_\epsilon})_\tau$ *é uma $\mathcal{S}$-subálgebra G-graduada da $\mathcal{S}$-álgebra G-graduada $End_\Delta^{gr}(V)$;*

2. $\mathcal{F}_V^{gr_{\divideontimes\epsilon}} := \bigoplus_{\tau\in G} (\mathcal{F}_V^{gr_{\divideontimes\epsilon}})_\tau$ *é ideal G-graduado da $\mathcal{S}$-álgebra G-graduada $\mathcal{L}_V^{gr_{\divideontimes\epsilon}}$.*

Demonstração. 1. Sejam $a_\tau, \tilde{a}_\tau \in (\mathcal{L}_V^{gr_{\divideontimes\epsilon}})_\tau$ e seja $a_\eta \in (\mathcal{L}_V^{gr_{\divideontimes\epsilon}})_\eta$.

- Para quaisquer $v_\alpha \in V_\alpha$ e $w_\beta \in V_\beta^{[g]}$, temos

$$\begin{aligned} B_\gamma\left(v_\alpha\left(a_\tau - \tilde{a}_\tau\right), w_\beta\right) = & \; B_\gamma\left(v_\alpha a_\tau, w_\beta\right) - B_\gamma\left(v_\alpha \tilde{a}_\tau, w_\beta\right) \\ = & \; \epsilon(\tau, \beta - g + \gamma) B_\gamma\left(v_\alpha, w_\beta a_\tau^{\divideontimes_\epsilon}\right) - \\ & \; \epsilon(\tau, \beta - g + \gamma) B_\gamma\left(v_\alpha, w_\beta \tilde{a}_\tau^{\divideontimes_\epsilon}\right), \text{ por } (3.11) \\ = & \; \epsilon(\tau, \beta - g + \gamma) B_\gamma\left(v_\alpha, w_\beta\left(a_\tau^{\divideontimes_\epsilon} - \tilde{a}_\tau^{\divideontimes_\epsilon}\right)\right). \end{aligned}$$

  Logo, $(a_\tau - \tilde{a}_\tau)^{\divideontimes_\epsilon} = a_\tau^{\divideontimes_\epsilon} - \tilde{a}_\tau^{\divideontimes_\epsilon}$. Daí que, para cada $\tau \in G$, $(\mathcal{L}_V^{gr_{\divideontimes\epsilon}})_\tau$ é um $\mathcal{S}$-submódulo de $End_\Delta(V)_\tau$. Consequentemente, $\mathcal{L}_V^{gr_{\divideontimes\epsilon}}$ é um $\mathcal{S}$-submódulo de $End_\Delta^{gr}(V)$.

- Para quaisquer $v_\alpha \in V_\alpha$ e $w_\beta \in V_\beta^{[g]}$, temos

$$\begin{aligned} B_\gamma\left(v_\alpha\left(a_\tau a_\eta\right), w_\beta\right) = & \; B_\gamma\left(\left(v_\alpha a_\tau\right) a_\eta, w_\beta\right) \\ = & \; \epsilon(\eta, \beta - g + \gamma) B_\gamma\left(v_\alpha a_\tau, w_\beta a_\eta^{\divideontimes_\epsilon}\right) \\ = & \; \epsilon(\eta, \beta - g + \gamma)\epsilon(\tau, \beta + \eta - g + \gamma) \\ & \; B_\gamma\left(v_\alpha, \left(w_\beta a_\eta^{\divideontimes_\epsilon}\right) a_\tau^{\divideontimes_\epsilon}\right), \text{ por } (3.11) \\ = & \; \epsilon(\eta, \beta - g + \gamma)\epsilon(\tau, \beta + \eta - g + \gamma) \\ & \; B_\gamma\left(v_\alpha, w_\beta\left(a_\eta^{\divideontimes_\epsilon} a_\tau^{\divideontimes_\epsilon}\right)\right), \text{ por } (3.11) \\ = & \; \epsilon(\eta, \beta - g + \gamma)\epsilon(\tau, \beta - g + \gamma) \\ & \; B_\gamma\left(v_\alpha, w_\beta\left(\epsilon(\tau, \eta) a_\eta^{\divideontimes_\epsilon} a_\tau^{\divideontimes_\epsilon}\right)\right) \\ = & \; \epsilon(\eta + \tau, \beta - g + \gamma) B_\gamma\left(v_\alpha, w_\beta\left(\epsilon(\tau, \eta) a_\eta^{\divideontimes_\epsilon} a_\tau^{\divideontimes_\epsilon}\right)\right). \end{aligned}$$

  Logo, $(a_\tau a_\eta)^{\divideontimes_\epsilon} = \epsilon(\tau, \eta) a_\eta^{\divideontimes_\epsilon} a_\tau^{\divideontimes_\epsilon}$ e, assim, $a_\tau a_\eta \in (\mathcal{L}_V^{gr_{\divideontimes\epsilon}})_{\tau+\eta}$. Então $\mathcal{L}_V^{gr_{\divideontimes\epsilon}}$ é uma $\mathcal{S}$-subálgebra G-graduada da $\mathcal{S}$-subálgebra G-graduada $End_\Delta^{gr}(V)$.

2. Sejam $a_\tau, \tilde{a}_\tau \in (\mathcal{F}_V^{gr_{\divideontimes\epsilon}})_\tau$ e seja $a_\eta \in (\mathcal{L}_V^{gr_{\divideontimes\epsilon}})_\eta$.

- Temos que $a_\tau - a'_\tau \in (\mathcal{F}_V^{gr_{\divideontimes\epsilon}})_\tau$, pois $dim_\Delta(Va_\tau) < \infty$ e $dim_\Delta(Va'_\tau) < \infty$ implicam que $dim_\Delta\left(V(a_\tau - a'_\tau)\right) < \infty$. Assim, para cada $\tau \in G$, $(\mathcal{F}_V^{gr_{\divideontimes\epsilon}})_\tau$ é um $\mathcal{S}$-submódulo de $End_\Delta(V)_\tau$ e, consequentemente, $\mathcal{F}_V^{gr_{\divideontimes\epsilon}}$ é um $\mathcal{S}$-submódulo de $\mathcal{L}_V^{gr_\epsilon}$.

- Como $V(a_\tau a_\eta) = (Va_\tau)\,a_\eta$ e $dim_\Delta\left(Va_\tau\right) < \infty$, $dim_\Delta\left(V(a_\tau a_\eta)\right) < \infty$. Logo, $a_\tau a_\eta \in (\mathcal{F}_V^{gr_{\divideontimes\epsilon}})_{\tau+\eta}$. Por outro lado, como $V(a_\eta a_\tau) = (Va_\eta)\,a_\tau \subseteq Va_\tau$ e $dim_\Delta(Va_\tau) < \infty$, obtemos que $dim_\Delta\left(V(a_\eta a_\tau)\right) < \infty$. Então $a_\eta a_\tau \in (\mathcal{F}_V^{gr_{\divideontimes\epsilon}})_{\tau+\eta}$. Assim, concluímos que $\mathcal{F}_V^{gr_{\divideontimes\epsilon}}$ é ideal G-graduado de $\mathcal{L}_V^{gr_{\divideontimes\epsilon}}$.

$\square$

Observação 4.10. *Sejam Δ uma $\mathcal{S}$-álgebra G-graduada de divisão e ${}_{\Delta}V$ um Δ-espaço G-graduado.*

1. *Não é difícil verificar que o $\mathcal{S}$-módulo G-graduado $V^{gr*_{\epsilon}} := \bigoplus_{\tau\in G} Hom_{\Delta}(V,D)_{\tau}$ é um Δ-módulo à direita G-graduado com a ação dada por:*

$$(v)(fd) := ((v)f)\,d, \text{ para todos } v\in V,\ f\in V^{gr*_{\epsilon}},\ d\in\Delta. \tag{4.3}$$

2. *Seja $^{-}\colon \Delta \longrightarrow \Delta$ uma ϵ-involução. Para qualquer $g\in G$ fixo, temos que $V^{[g]}$ é um Δ módulo à direita G-graduado com a ação:*

$$v_{\alpha}d_{\theta} := \epsilon(\alpha,\theta)\overline{d}_{\theta}v_{\alpha}, \text{ para todos } v_{\alpha}\in V_{\alpha}^{[g]},\ d_{\theta}\in\Delta_{\theta}. \tag{4.4}$$

De fato, a ação é bem definida e, para todos $v_{\alpha}, v'_{\alpha}\in V_{\alpha}^{[g]}$ e $d_{\theta}, d'_{\theta}\in\Delta_{\theta}$, se tem $(v_{\alpha}+v'_{\alpha})d_{\theta} = v_{\alpha}d_{\theta}+v'_{\alpha}d_{\theta}$ e $v_{\alpha}(d_{\theta}+d'_{\theta}) = v_{\alpha}d_{\theta}+v_{\alpha}d'_{\theta}$. Além disso, para quaisquer $v_{\alpha}\in V_{\alpha}^{[g]}$, $d_{\theta}\in\Delta_{\theta}$ e $d_{\eta}\in\Delta_{\eta}$,

$$\begin{aligned} v_{\alpha}(d_{\theta}d_{\eta}) &= \epsilon(\alpha,\theta+\eta)\overline{d_{\theta}d_{\eta}}v_{\alpha}, \text{ por } (4.4)\\ &= \epsilon(\alpha,\theta+\eta)\epsilon(\theta,\eta)\left(\overline{d_{\eta}}\ \overline{d_{\theta}}\right)v_{\alpha}\\ &= \epsilon(\alpha,\theta)\epsilon(\alpha+\theta,\eta)\overline{d_{\eta}}\left(\overline{d_{\theta}}v_{\alpha}\right)\\ &= (v_{\alpha}d_{\theta})\,d_{\eta}, \text{ por } (4.4). \end{aligned}$$

3. *A aplicação*

$$\begin{array}{rcccccl} \mathfrak{L}: & \Delta & \longrightarrow & End_{\Delta}^{gr}(\Delta_{\Delta}) & & & \\ & d & \longmapsto & \mathfrak{L}_{d}: & \Delta & \longrightarrow & \Delta \\ & & & & x & \longmapsto & (\mathfrak{L}_{d})(x) := dx, \end{array}$$

é um isomorfismo de $\mathcal{S}$-álgebras G-graduadas.

De fato, não difícil verificar que $\mathfrak{L}$ é bem definida, é graduada e é $\mathcal{S}$-linear. Também observamos que, para $d, d'\in\Delta$ arbitrários, $(dd')x = d(d'x')$, para todo $x\in\Delta$; isto é, $\mathfrak{L}_{dd'} = \mathfrak{L}_{d}\mathfrak{L}_{d'}$. Daí que $\mathfrak{L}$ é homomorfismo de $\mathcal{S}$-álgebras G-graduadas. Além disso, temos que $\mathfrak{L}$ é injetora, pois se $d\in\Delta$ e $\mathfrak{L}_{d}=0$, então $0=\mathfrak{L}_{d}(1)=d$. Por último, observamos que $\mathfrak{L}$ também é sobrejetora, pois dado $f\in End_{\Delta}^{gr}(\Delta_{\Delta})$ fixo, segue que $f(x)=f(1)x=\mathfrak{L}_{f(1)}(x)$, para todo $x\in\Delta$. Assim, concluímos que $\mathfrak{L}$ é um isomorfismo de $\mathcal{S}$-álgebras G-graduadas.

Na prova do seguinte lema vão aparecer os conceitos introduzidos nas Defnições 1.14 e 1.15. Também, na prova deste lema, vamos usar o Teorema 1.16.

Lema 4.11. *Seja $B_{\gamma}: V\times V^{[g]} \longrightarrow \Delta$ uma forma sesquilinear homogênea de grau γ com torção não degenerada ξ-hermitiana. A aplicação*

$$\begin{array}{rcccccl} \varphi: & V^{[g]} & \longrightarrow & V^{gr*_{\epsilon}} & & & \\ & w_{\beta} & \longmapsto & \varphi(w_{\beta}): & V & \longrightarrow & \Delta \\ & & & & v_{\alpha} & \longmapsto & (v_{\alpha})(\varphi(w_{\beta})) := B_{\gamma}(v_{\alpha}, w_{\beta}), \end{array}$$

é um monomorfismo homogêneo de grau γ de Δ-espaços à direita G-graduados. Além disso, $Im(\varphi)$ é fracamente denso.

Demonstração. É claro que φ é bem definida. Também, não é difícil verificar que φ é $\mathcal{S}$-linear e homogênea de grau γ. Agora, dados $v_\alpha \in V_\alpha$ e $w_\beta \in V_\beta^{[g]}$ fixos, segue que

$$\begin{aligned}(v_\alpha)\left(\varphi(w_\beta d_\theta)\right) = & \; B_\gamma\left(v_\alpha, w_\beta d_\theta\right)\\ = & \; \epsilon(\beta,\theta) B_\gamma\left(v_\alpha, \overline{d_\theta} w_\beta\right)\\ = & \; B_\gamma\left(v_\alpha, w_\beta\right) d_\theta\\ = & \; (v_\alpha)\left(\varphi(w_\beta) d_\theta\right).\end{aligned}$$

Logo, $\varphi(w_\beta d_\theta) = \varphi(w_\beta) d_\theta$, para todos $w_\beta \in V_\beta^{[g]}$ e $d_\theta \in \Delta_\theta$. Então, φ é um homomorfismo graduado de Δ-módulos G-graduados à direita. Além disso, se $0 = \varphi(w_\beta)$, temos $B_\gamma\left(V, w_\beta\right) = (0)$. Daí, como B_γ é não degenerada, obtemos $w_\beta = 0$. Assim segue que φ é injetor e, consequentemente, um monomorfismo de Δ-módulos à direita G-graduados.

Agora, vamos mostrar que $Im(\varphi)$ é fracamente denso. No item 3 da Observação 4.10, vimos que Δ e $End_\Delta^{gr}(\Delta_\Delta)$ são isomorfas como $\mathcal{S}$-álgebras G-graduadas. Daí que, $(\Delta, \Delta_\Delta, \Delta, {}_\Delta V, Im(\varphi))$ é um Δ-contexto à direita G-graduado. Além disso, observamos que Δ_Δ é fechado, pois Δ_Δ e (0) são os únicos Δ-sumódulos G-graduados de Δ_Δ e, para todo homomorfismo graduado de Δ-módulos à direita $f : \Delta \longrightarrow \Delta$, se tem $f(x) = f(1)x$, para todo $x \in \Delta$. Também temos que $Im(\varphi)$ é total, pois dado $0 \neq v_\alpha \in V_\alpha$, como B_γ é não degenerada, existe $w_\beta \in V_\beta^{[g]}$ tal que $0 \neq B_\gamma\left(v_\alpha, w_\beta\right) = (v_\alpha)\left(\varphi(w_\beta)\right)$. Assim, pelo Teorema 1.15, segue que $Im(\varphi)$ é fracamente denso. □

Lema 4.12. *Seja $B_\gamma : V \times V^{[g]} \longrightarrow \Delta$ uma forma sesquilinear graduada não degenerada ξ-hermitiana. Se $\mathcal{V} := \{v_\alpha^1, \ldots, v_\alpha^{n_\alpha}, \ldots, v_\beta^1, \ldots, v_\beta^{n_\beta}\} \subseteq V$ é um conjunto de elementos homogêneos linearmente independentes sobre Δ, então existe um conjunto*

$$\mathcal{W} := \{w_{-\alpha-\gamma}^1, \ldots, w_{-\alpha-\gamma}^{n_\alpha}, \ldots, w_{-\beta-\gamma}^1, \ldots, w_{-\beta-\gamma}^{n_\beta}\} \subseteq V^{[g]}$$

de elementos homogêneos, tal que

$$B_\gamma\left(v_\theta^i, w_{-\omega-\gamma}^j\right) = \delta_{ij}\delta_{\theta\omega}, \text{ para todos } v_\theta^i \in \mathcal{V},\ w_{-\omega-\gamma}^j \in \mathcal{W}.$$

Demonstração. Seja $\varphi : V^{[g]} \longrightarrow V^{gr*_\epsilon}$ o monomorfismo homogêneo de grau γ definido no Lema 4.11.

- Afirmamos que, para cada $v_\theta^i \in \mathcal{V}$,

  $$J^{(i,\theta)} := \{B_\gamma\left(-, w\right) \in Im(\varphi) :\ B_\gamma\left(v_{\alpha'}^l, w\right) = 0, \text{ para todo } v_{\alpha'}^l \in \mathcal{V},\ v_{\alpha'}^l \neq v_\gamma^i\}$$

  é um Δ-submódulo G-graduado de $Im(\varphi)$, não nulo.

  Não é difícil ver que $J^{(i,\theta)}$ é um $\mathcal{S}$-submódulo de $Im(\varphi)$. Dado $B_\gamma\left(-, w\right) = \sum_{\beta' \in G} B_\gamma\left(-, w_{\beta'}\right) \in J^{(i,\theta)}$, temos que $0 = B_\gamma\left(v_{\eta'}^l, w\right) = \sum_{\beta' \in G} B_\gamma\left(v_{\eta'}^l, w_{\beta'}\right) \in Im(\varphi)$, para todo $v_{\eta'}^l \in \mathcal{V}$, $v_{\eta'}^l \neq v_\theta^i$. Daí que, para cada $\beta' \in G$, $B_\gamma\left(v_{\eta'}^l, w_{\beta'}\right) = 0$, para todo $v_{\eta'}^l \in \mathcal{V}$, $v_{\eta'}^l \neq v_\theta^i$. Logo, para cada $\beta' \in G$, $B_\gamma\left(-, w_{\beta'}\right) \in J^{(i,\theta)}$; isto é, $J^{(i,\theta)}$ é um $\mathcal{S}$-submódulo G-graduado de $Im(\varphi)$. Além disso, para quaisquer $B_\gamma\left(-, w_{\beta'}\right) \in J^{(i,\theta)}$, $d_\upsilon \in \Delta_\upsilon$, temos $0 = B_\gamma\left(v_{\eta'}^l, w_{\beta'}\right) d_\upsilon = (v_{\eta'}^l)\left(B_\gamma\left(-, w_{\beta'}\right) d_\upsilon\right)$, para todo $v_{\eta'}^l \in \mathcal{V}$ tal que $v_{\eta'}^l \neq v_\theta^i$. Então, $J^{(i,\theta)}$ é Δ-submódulo G-graduado de $Im(\varphi)$. Agora, resta mostrar que $J^{(i,\theta)}$ é não nulo. Temos, pelo Lema 4.11, que $Im(\varphi)$ é um Δ-módulo à direita G-graduado fracamente denso. Logo, existe $B_\gamma(-, w_{\beta'}) \in Im(\varphi)$ tal que

$$B_\gamma\left(v^i_\theta, w_{\beta'}\right) \neq 0 \text{ e } B_\gamma\left(v^l_{\eta'}, w_{\beta'}\right) = 0, \text{ para todo } v^l_{\eta'} \in \mathcal{V},\ v^l_{\eta'} \neq v^i_\theta.$$

Então $0 \neq B_\gamma(-, w_{\beta'}) \in J^{(i,\theta)}$.

- Afirmamos que, para cada $v^i_\theta \in \mathcal{V}$, $v^i_\theta J^{(i,\theta)} = \Delta$.

  Observamos que $v^i_\theta J^{(i,\theta)} \subseteq v^i_\theta Im(\varphi) \subseteq \Delta$. Por outro lado, como $Im(\varphi)$ é fracamente denso, existe $B_\gamma(-, w_{\beta'}) \in Im(\varphi)$ tal que

  $$d_{\theta+\beta'+\gamma} = B_\gamma\left(v^i_\theta, w_{\beta'}\right) \neq 0 \text{ e } B_\gamma\left(v^l_{\eta'}, w_{\beta'}\right) = 0, \text{ para todo } v^l_{\eta'} \in \mathcal{V},\ v^l_{\eta'} \neq v^i_\theta.$$

  Assim $B_\gamma(-, w_{\beta'}) \in J^{(i,\theta)}$ e, como $J^{(i,\theta)}$ é Δ-módulo à direita G-graduado, segue que $B_\gamma(-, w_{\beta'})\left(d_{\theta+\beta'+\gamma}\right)^{-1} d_\upsilon \in J^{(i,\theta)}$, para todo $d_\upsilon \in \Delta_\upsilon$. Logo, para todo $d_\upsilon \in \Delta_\upsilon$,

  $$d_\upsilon = B_\gamma\left(v^i_\theta, w_{\beta'}\right)\left(d_{\theta+\beta'+\gamma}\right)^{-1} d_\upsilon \in v^i_\theta J^{(i,\theta)}.$$

  Daí segue que $\Delta \subseteq v^i_\theta J^{(i,\theta)}$.

- Agora vamos finalizar a prova de nosso lema. Vimos que, para cada $v^i_\theta \in \mathcal{V}$, $v^i_\theta J^{(i,\theta)} = \Delta$. Logo, para todo $v^i_\theta \in \mathcal{V}$, existe $B_\gamma\left(-, w^i_{-\theta-\gamma}\right) \in J^{(i,\theta)}$ tal que $B_\gamma\left(v^i_\theta, w^i_{-\theta-\gamma}\right) = 1$. Assim, temos que existe um conjunto de elementos homogêneos

  $$\mathcal{W} = \{w^1_{-\alpha-\gamma}, \ldots, w^{n_\alpha}_{-\alpha-\gamma}, \ldots, w^1_{-\beta-\gamma}, \ldots, w^{n_\beta}_{-\beta-\gamma}\} \subseteq V^{[g]}$$

  tal que

  $$B_\gamma\left(v^i_\theta, w^j_{-\eta-\gamma}\right) = \delta_{ij}\delta_{\theta\eta}, \text{ para todos } v^i_\theta \in \mathcal{V},\ w^j_{-\eta-\gamma} \in \mathcal{W}.$$

$\square$

Agora, nos três resultados que seguem, Lemas 4.13, 4.14 e 4.15, vamos caracterizar os elementos de $(\mathcal{F}^{gr_\epsilon}_V)$.

Lema 4.13. *Seja $B_\gamma : V \times V^{[g]} \longrightarrow \Delta$ uma forma sesquilinear homogênea de grau γ com torção não degenerada ξ-hermitiana. Dados $w_{\beta-\eta-\gamma} \in V^{[g]}_{\beta-\eta-\gamma}$ e $v_\eta \in V_\eta$ fixos, temos que a aplicação*

$$\begin{array}{rccl} \varphi_\beta : & V & \longrightarrow & V \\ & v & \longmapsto & (v)\varphi := B_\gamma(v, w_{\beta-\eta-\gamma})\, v_\eta, \end{array}$$

é um elemento homogêneo de grau β que pertence a $\mathcal{F}^{gr*\epsilon}_V$, com $dim_\Delta(V\varphi_\beta) = 1$. Além disso, $\varphi_\beta \neq 0$ se, e somente se, $v_\eta \neq 0$ e $w_{\beta-\eta-\gamma} \neq 0$.

Demonstração. Observamos que $(V)\varphi \subseteq \Delta v_\eta$. Daí que se $\varphi_\beta \neq 0$, então $(V)\varphi_\beta = \Delta v_\eta$, isto é, $dim_\Delta(V\varphi_\beta) = 1$. Agora, vamos mostrar que a aplicação

$$\begin{array}{rccl} \psi_\beta : & V^{[g]} & \longrightarrow & V^{[g]} \\ & w & \longmapsto & (w)\psi_\beta := \overline{\xi}\epsilon(\beta-\eta-\gamma, \eta)\epsilon(\beta, g)\epsilon(\gamma, -\gamma)\epsilon(\gamma+\eta, -g)B_\gamma(w, v_\eta)\, w_{\beta-\eta-\gamma}, \end{array}$$

é a ϵ-semiadjunta de φ_β. Não é difícil verificar que $\psi_\beta \in End_\Delta^{gr}({}_\Delta V^{[g]})_\beta$. Por outro lado, sejam $v_\alpha \in V_\alpha$ e $w_{\beta'} \in V_{\beta'}^{[g]}$ elementos homogêneos fixos. Logo, como B é uma forma sesquilinear homogênea com torção não degenerada ξ-hermitiana, segue que

$$\begin{aligned} B_\gamma\left((v_\alpha)\varphi_\beta, w_{\beta'}\right) = & \; B_\gamma\left(B_\gamma\left(v_\alpha, w_{\beta-\eta-\gamma}\right)v_\eta, w_{\beta'}\right) \\ = & \; B_\gamma\left(v_\alpha, w_{\beta-\eta-\gamma}\right)B_\gamma\left(v_\eta, w_{\beta'}\right) \\ = & \; \epsilon(\beta-\eta-\gamma, \eta+\beta'+\gamma)B_\gamma\left(v_\alpha, \left(\overline{B_\gamma\left(v_\eta, w_{\beta'}\right)}\right)w_{\beta-\eta-\gamma}\right) \\ = & \; \epsilon(\beta-\eta-\gamma, \eta+\beta'+\gamma) \\ & \; B_\gamma\left(v_\alpha, \overline{\xi}\epsilon(\eta, \beta'-g)\epsilon(\gamma, \beta'-g)\epsilon(\eta,\gamma)B_\gamma\left(w_{\beta'}, v_\eta\right)w_{\beta-\eta-\gamma}\right) \end{aligned}$$

Agora, observamos que $\epsilon(\beta-\eta-\gamma, \eta+\beta'+\gamma) = \epsilon(\beta-\eta-\gamma, \beta'+\gamma)\epsilon(\beta-\eta-\gamma, \eta)$, $\epsilon(\beta,-g)\epsilon(\beta,g) = 1$ e $\epsilon(-g,\eta)\epsilon(\eta,-g) = 1$, porque ϵ é um bicarater antissimétrico. Assim, obtemos

$$\begin{aligned} & \epsilon(\beta-\eta-\gamma, \eta+\beta'+\gamma)B_\gamma\left(v_\alpha, \overline{\xi}\epsilon(\eta, \beta'-g)\epsilon(\gamma, \beta'-g)\epsilon(\eta,\gamma)B_\gamma\left(w_{\beta'}, v_\eta\right)w_{\beta-\eta-\gamma}\right) = \\ & = \left(\epsilon(\beta-\eta-\gamma, \beta'+\gamma)\epsilon(\beta-\eta-\gamma, \eta)\right)\epsilon(\eta, \beta'-g)\epsilon(\gamma, \beta'-g)\epsilon(\eta,\gamma) \\ & \left(\epsilon(\beta,-g)\epsilon(\beta,g)\right)\left(\epsilon(-g,\eta)\epsilon(\eta,-g)\right)B_\gamma\left(v_\alpha, \overline{\xi}B_\gamma\left(w_{\beta'}, v_\eta\right)w_{\beta-\eta-\gamma}\right) = \\ & = \epsilon(\beta-\eta-\gamma, \beta'+\gamma)\epsilon(\beta,-g)\epsilon(-g,\eta)\epsilon(\eta, \beta'-g)\epsilon(\gamma, \beta'-g)\epsilon(\eta,\gamma) \\ & B_\gamma\left(v_\alpha, \overline{\xi}\epsilon(\beta-\eta-\gamma, \eta)\epsilon(\beta,g)\epsilon(\eta,-g)B_\gamma\left(w_{\beta'}, v_\eta\right)w_{\beta-\eta-\gamma}\right) \end{aligned}$$

Logo, como

$$\epsilon(\beta-\eta-\gamma, \beta'+\gamma)\epsilon(\beta,-g)\epsilon(-g,\eta)\epsilon(\eta, \beta'-g)\epsilon(\gamma, \beta'-g)\epsilon(\eta,\gamma) = \epsilon(\beta, \beta'-g+\gamma)\epsilon(-\gamma,\gamma)\epsilon(\gamma,-g),$$

segue que

$$\begin{aligned} & \epsilon(\beta-\eta-\gamma, \beta'+\gamma)\epsilon(\beta,-g)\epsilon(-g,\eta)\epsilon(\eta, \beta'-g)\epsilon(\gamma, \beta'-g)\epsilon(\eta,\gamma) \\ & B_\gamma\left(v_\alpha, \overline{\xi}\epsilon(\beta-\eta-\gamma, \eta)\epsilon(\beta,g)\epsilon(\eta,-g)B_\gamma\left(w_{\beta'}, v_\eta\right)w_{\beta-\eta-\gamma}\right) = \\ = & \; \epsilon(\beta, \beta'-g+\gamma)\epsilon(-\gamma,\gamma)\epsilon(\gamma,-g) \\ & B_\gamma\left(v_\alpha, \overline{\xi}\epsilon(\beta-\eta-\gamma, \eta)\epsilon(\beta,g)\epsilon(\eta,-g)B_\gamma\left(w_{\beta'}, v_\eta\right)w_{\beta-\eta-\gamma}\right) = \\ = & \; \epsilon(\beta, \beta'-g+\gamma) \\ & B_\gamma\left(v_\alpha, \overline{\xi}\epsilon(\beta-\eta-\gamma, \eta)\epsilon(\beta,g)\epsilon(-\gamma,\gamma)\epsilon(\gamma,-g)\epsilon(\eta,-g)B_\gamma\left(w_{\beta'}, v_\eta\right)w_{\beta-\eta-\gamma}\right) \end{aligned}$$

Por fim, pela definição de ψ_β, obtemos

$$\begin{aligned} & \epsilon(\beta, \beta'-g+\gamma) \\ & B_\gamma\left(v_\alpha, \overline{\xi}\epsilon(\beta-\eta-\gamma, \eta)\epsilon(\beta,g)\epsilon(-\gamma,\gamma)\epsilon(\gamma+\eta,-g)B_\gamma\left(w_{\beta'}, v_\eta\right)w_{\beta-\eta-\gamma}\right) = \\ = & \; \epsilon(\beta, \beta'-g+\gamma)B_\gamma\left(v_\alpha, \left(w_{\beta'}\right)\psi_\beta\right). \end{aligned}$$

Recapitulando, temos que

$$B_\gamma\left((v_\alpha)\varphi_\beta, w_{\beta'}\right) = \epsilon(\beta, \beta'-g+\gamma)B_\gamma\left(v_\alpha, \left(w_{\beta'}\right)\psi_\beta\right), \quad \text{para todos } v_\alpha \in V_\alpha \text{ e } w_{\beta'} \in V_{\beta'}^{[g]}.$$

Isto é, ψ_β é a ϵ-semiadjunta de φ_β.

Por último, para completar a prova do lema, observamos que por ser B_γ não degenerada, temos:

$$\varphi_\beta \neq 0 \text{ se, e somente se, } v_\eta \neq 0 \text{ e } w_{\beta-\eta} \neq 0.$$

□

Lema 4.14. *Seja $B_\gamma : V \times V^{[g]} \longrightarrow \Delta$ uma forma sesquilinear homogênea de grau γ com torção não degenerada ξ-hermitiana. Todo elemento homogêneo $\varphi_\beta \in (\mathcal{F}_V^{gr_{*\epsilon}})_\beta$, com $dim_\Delta(V\varphi_\beta) = 1$, é da forma $\varphi_\beta := B_\gamma(-, w_{\beta-\eta-\gamma})\, v_\eta$, para alguns $w_{\beta-\eta-\gamma} \in V^{[g]}_{\beta-\eta-\gamma}$, $v_\eta \in V_\eta$.*

Demonstração. Como $dim_\Delta(V\varphi_\beta) = 1$, segue que $(V)\varphi_\beta = \Delta v_\eta$, para algum $v_\eta \in V_\eta$, não nulo. Logo, pelo Lema 4.12, existe $w_{\eta-\gamma} \in V^{[g]}_{\eta-\gamma}$ tal que $B_\gamma(v_\eta, w_{-\eta-\gamma}) = 1$. Agora, dado $v_\alpha \in V_\alpha$ fixo, temos $(v_\alpha)\varphi_\beta = d_{\alpha+\beta-\eta}v_\eta$ para algum $d_{\alpha+\beta-\eta} \in \Delta$, e assim

$$B_\gamma((v_\alpha)\varphi_\beta, w_{-\eta-\gamma}) = B_\gamma(d_{\alpha+\beta-\eta}v_\eta, w_{-\eta-\gamma}) = d_{\alpha+\beta-\eta}B_\gamma(v_\eta, w_{-\eta-\gamma}) = d_{\alpha+\beta-\eta}.$$

Logo, para $v_\alpha \in V_\alpha$ fixo,

$$\begin{aligned}(v_\alpha)\varphi_\beta &= d_{\alpha+\beta-\eta}v_\eta\\ &= B_\gamma((v_\alpha)\varphi_\beta, w_{-\eta-\gamma})\, v_\eta\\ &= \epsilon(\beta, -\eta-g)B_\gamma\left(v_\alpha, (w_{-\eta-\gamma})\varphi_\beta^{*\epsilon}\right) v_\eta\\ &= (v_\alpha)\left(B_\gamma\left(-, \epsilon(\beta,-\eta-g)(w_{-\eta-\gamma})\varphi_\beta^{*\epsilon}\right) v_\eta\right).\end{aligned}$$

Daí, segue que $\varphi_\beta = B_\gamma\left(-, \epsilon(\beta,-\eta-g)(w_{-\eta-\gamma})\varphi_\beta^{*\epsilon}\right) v_\eta$. □

Lema 4.15. *Seja $B_\gamma : V \times V^{[g]} \longrightarrow \Delta$ uma forma sesquilinear homogênea de grau γ com torção não degenerada ξ-hermitiana. Temos $a_\tau \in (\mathcal{F}_V^{gr_{*\epsilon}})_\tau$ se, e somente se, a_τ é soma finita de elementos homogêneos da forma $B_\gamma(-, w_{\tau-\eta-\gamma})\, v_\eta$, com $v_\eta \in V_\eta$, $w_{\tau-\eta-\gamma} \in V^{[g]}_{\tau-\eta-\gamma}$.*

Demonstração. Seja $a_\tau \in (\mathcal{F}_V^{gr_{*\epsilon}})_\tau$. Como $dim_\Delta(Va_\tau) < \infty$, podemos escolher uma Δ-base finita de elementos homogêneos, $\mathcal{B} := \{u_\alpha^1, \dots, u_\alpha^{n_\alpha}, \dots, u_\beta^1 \dots, u_\beta^{n_\beta}\} \subseteq V$, para Va_τ. Agora, pelo Lema 4.12, existe um conjunto finito

$$\mathcal{W} = \{w^1_{-\alpha-\gamma}, \dots, w^{n_\alpha}_{-\alpha-\gamma}, \dots, w^1_{-\beta-\gamma} \dots, w^{n_\beta}_{-\beta-\gamma}\} \subseteq V^{[g]}$$

de elementos homogêneos, tal que

$$B_\gamma\left(u_\theta^i, w^j_{-\eta-\gamma}\right) = \delta_{ij}\delta_{\theta\eta},\ \text{para todos } u_\theta^i \in \mathcal{B},\ w^j_{-\eta-\gamma} \in \mathcal{W}.$$

Para $v_\alpha \in V_\alpha$ fixo, temos $v_\alpha a_\tau = \sum_{u_\eta^i \in \mathcal{B}} d^i_{\alpha+\tau-\eta}u_\eta^i$ e temos

$$B_\gamma\left(v_\alpha a_\tau, w^j_{-\omega-\gamma}\right) = \sum_{u_\eta^i \in \mathcal{B}} d^i_{\alpha+\tau-\eta}B_\gamma\left(u_\eta^i, w^j_{-\omega-\gamma}\right)_\gamma = d^j_{\alpha+\tau-\omega},\ \text{para todo } w^j_{-\omega-\gamma} \in \mathcal{W}.$$

Assim, para qualquer $v_\alpha \in V_\alpha$, segue que

$$\begin{aligned}v_\alpha a_\tau &= \sum_{v_\eta^i \in \mathcal{B}} d^i_{\alpha+\tau-\eta}v^i_\eta\\ &= \sum_{v_\eta^i \in \mathcal{B}} B_\gamma\left(v_\alpha a_\tau, w^i_{-\eta-\gamma}\right) v^i_\eta\\ &= \sum_{v_\eta^i \in \mathcal{B}} \epsilon(\tau,-\eta-g)B_\gamma\left(v_\alpha, w^i_{-\eta-\gamma}a_\tau^{*\epsilon}\right) v^i_\eta\\ &= (v_\alpha)\left(\sum_{v_\eta^i \in \mathcal{B}} B_\gamma\left(-, \epsilon(\tau,-\eta-g)w^i_{-\eta-\gamma}a_\tau^{*\epsilon}\right) v^i_\eta\right).\end{aligned}$$

Daí que, $a_\tau = \sum_{v_\eta^i \in \mathcal{B}} B_\gamma\left(-, \epsilon(\tau, -\eta - g) w^i_{-\eta-\gamma} a_\tau^{\circledast_\epsilon}\right) v^i_\eta$.

Reciprocamente, se a_τ é soma finita de elementos homogêneos da forma $B_\gamma\left(-, w_{\tau-\eta-\gamma}\right) v_\eta$, com $v_\eta \in V_\eta$ e $w_{\tau-\eta-\gamma} \in V^{[g]}_{\tau-\eta-\gamma}$ segue, pelo Lema 4.13, que $a_\tau \in (\mathcal{F}_V^{gr\circledast_\epsilon})_\tau$. $\square$

Agora, no seguinte resultado apresentamos condições sufientes para que uma $\mathcal{S}$-álgebra G-graduada seja uma $\mathcal{S}$-álgebra G-graduada primitiva à direita. Como é de se esperar, este resultado envolve a teoria desenvolvida neste capítulo. Anotamos que este resultado é uma peça chave na prova do Teorema 4.21, que é o principal resultado deste capítulo.

Proposição 4.16. *Seja $B_\gamma : V \times V^{[g]} \longrightarrow \Delta$ uma forma sesquilinear homogênea de grau γ com torção não degenerada ξ-hermitiana. Então,*

(i) $\mathcal{F}_V^{gr\circledast_\epsilon}$ age densamente à direita de V;

(ii) Se $\mathcal{R}$ é uma $\mathcal{S}$-álgebra G-graduada tal que

$$\mathcal{F}_V^{gr\circledast_\epsilon} \subseteq \mathcal{R} \subseteq \mathcal{L}_V^{gr\circledast_\epsilon},$$

então $\mathcal{R}$ é uma $\mathcal{S}$-álgebra G-graduada primitiva à direita.

Demonstração. (*i*) Seja $\mathcal{V} = \{v^1_\alpha, \dots, v^n_\alpha\} \subseteq V$ um conjunto de elementos homogêneos linermente independente sobre Δ e seja $\mathcal{B} = \{u^1_\beta, \dots, u^n_\beta\} \subseteq V$ um subconjunto de elementos homogêneos. Pelo Lema 4.12, existe um conjunto de elementos homogêneos $\mathcal{W} = \{w^1_{-\alpha-\gamma} \dots, w^n_{-\alpha-\gamma}\} \subseteq V^{[g]}_{-\alpha-\gamma}$, tal que

$$B_\gamma\left(v^i_\alpha, w^j_{-\alpha-\gamma}\right) = \delta_{ij}, \text{ para todos } v^i_\alpha \in \mathcal{V},\ w^j_{-\alpha-\gamma} \in \mathcal{W}.$$

Agora, pelo Lema 4.13, para $j = 1, \dots, n$, temos que $B_\gamma\left(-, w^j_{-\alpha-\gamma}\right) u^j_\beta \in (\mathcal{F}_V^{gr\circledast_\epsilon})_{-\alpha+\beta}$. Assim, $t = \sum_{j=1}^n B_\gamma\left(-, w^j_{-\alpha-\gamma}\right) u^j_\beta \in (\mathcal{F}_V^{gr\circledast_\epsilon})_{-\alpha+\beta}$. Logo, observamos que

$$\begin{aligned} v^i_\alpha t = &\ (v^i_\alpha)\left(\sum_{j=1}^n B_\gamma\left(-, w^j_{-\alpha-\gamma}\right) u^j_\beta\right) \\ = &\ \sum_{j=1}^n B_\gamma\left(v^i_\alpha, w^j_{-\alpha-\gamma}\right) u^j_\beta \\ = &\ u^i_\beta. \end{aligned}$$

Então, $\mathcal{F}_V^{gr\circledast_\epsilon}$ age densamente à direita sobre V.

(*ii*) Como V é $End^{gr}_\Delta(V)$-módulo à direita G-graduado fiel e $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{L}_V^{gr\circledast_\epsilon} \subseteq End^{gr}_\Delta(V)$, segue que $\mathcal{R}$ age à direita fielmente sobre V. Por outro lado, pelo item anterior, $\mathcal{F}_V^{gr\circledast_\epsilon}$ age densamente à direita sobre V. Logo, como $\mathcal{F}_V^{gr\circledast_\epsilon} \subseteq \mathcal{R}$, segue que $\mathcal{R}$ age densamente à direita sobre V. Daí que V é $\mathcal{R}$-módulo à direita G-graduado irredutível. Então, $\mathcal{R}$ é $\mathcal{S}$-álgebra G-graduada primitiva à direita.

$\square$

Para finalizar esta seção, apresentamos a seguinte proposição que estabelece condições suficientes para que uma $\mathcal{S}$-álgebra G-graduada primitiva à direita possua uma involução colorida. Este resultado também é usado na prova do principal resultado deste capítulo, o Teorema 4.21.

Proposição 4.17. *Seja $B_\gamma : V \times V^{[g]} \longrightarrow \Delta$ uma forma sesquilinear homogênea de grau γ com torção não degenerada ξ-hermitiana. Então*

(i) Se $\circledast_\epsilon$ é a ϵ-semiadjunta associada a B_γ, $\circledast_\epsilon$ é uma ϵ-involução sobre $\mathcal{L}_V^{gr\circledast_\epsilon}$;

(ii) Se $\mathcal{R}$ é uma $\mathcal{S}$-álgebra G-graduada tal que $\mathcal{F}_V^{gr\circledast_\epsilon} \subseteq \mathcal{R} \subseteq \mathcal{L}_V^{gr\circledast_\epsilon}$ e $\mathcal{R}$ é invariante pela ação de $\circledast_\epsilon$, segue que $\circledast_\epsilon$ é uma ϵ-involução sobre $\mathcal{R}$.

Demonstração. Vimos no Corolário 4.8 que, para todo $\tau \in G$, $(\mathcal{L}_V^{gr\circledast_\epsilon})_\tau = (\mathcal{L}_V^{gr\circledast_\epsilon})_\tau$. Daí, e do fato de que a ϵ-adjunta de um elemento $a_\tau \in (Li_V^{gr\circledast_\epsilon})_\tau$ é única, segue que

$$\circledast_\epsilon \colon \mathcal{L}_V^{gr\circledast_\epsilon} \longrightarrow \mathcal{L}_V^{gr\circledast_\epsilon}$$

é bem definida. Além disso, na demonstração do Lema 4.9 vimos, para todos $a_\tau, \tilde{a}_\tau \in (\mathcal{L}_V^{gr\circledast_\epsilon})_\tau$ e $a_\eta \in (\mathcal{L}_V^{gr\circledast_\epsilon})_\eta$, que

$$(a_\tau - \tilde{a}_\tau)^{\circledast_\epsilon} = a_\tau^{\circledast_\epsilon} - \tilde{a}_\tau^{\circledast_\epsilon} \text{ e } (a_\tau a_\eta)^{\circledast_\epsilon} = \epsilon(\tau, \eta) a_\eta^{\circledast_\epsilon} a_\tau^{\circledast_\epsilon}.$$

Logo, como $\circledast_\epsilon$ também é $\mathcal{S}$-linear, segue que $\circledast_\epsilon$ é um ϵ-antiautomorfismo. Também temos que $\circledast_\epsilon$ é injetora, pois se $a_\tau, \tilde{a}_\tau \in (\mathcal{L}_V^{gr\circledast_\epsilon})_\tau$ e $a_\tau^{\circledast_\epsilon} = \tilde{a}_\tau^{\circledast_\epsilon}$, obtemos que $a_\tau = \tilde{a}_\tau$, já que B_γ é não degenerada. Por último, anotamos que $\circledast_\epsilon$ é sobrejetora, pois, pelo Lema 4.7, $a_\tau^{\circledast_\epsilon \circledast_\epsilon} = a_\tau$, para todo $a_\tau \in (\mathcal{L}_V^{gr\circledast_\epsilon})_\tau$.

Observamos que o item (ii) é imediato do item (i). $\square$

4.2 Álgebras Graduadas Primitivas à Direita com um Ideal à Direita Graduado Minimal e com Involução Colorida

O seguinte teorema já é conhecido na literatura das álgebras graduadas e, por esse motivo, aqui apresentamos ele sem demonstração. Se o leitor tiver interesse na sua demonstração, ela pode ser consultada na referência [22], onde a demonstração foi feita para o caso de anéis G-graduados.

Teorema 4.18. *([22], Teorema 4.2.2) Seja $\mathcal{R}$ uma $\mathcal{S}$-álgebra G-graduada primitiva à direita, com característica diferente de 2, com um ideal à direita G-graduado minimal e com uma σ-involução $\star_\sigma : \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}$. Então ocorre um, e somente um, dos seguintes casos:*

(i) Existe um idempotente minimal $\mathbf{e} \in \mathcal{R}_0$ tal que $\mathbf{e}^{\star_\sigma} = \pm\mathbf{e}$;

(ii) Existe um idempotente minimal $\mathbf{e} \in \mathcal{R}_0$ tal que $\mathbf{e}\mathbf{e}^{\star_\sigma} = 0$.

Agora nos dois lemas que seguem, Lema 4.19 e Lema 4.20, consideramos os dois casos que nos apresenta o Teorema 4.18 e vemos que, em cada um deles, existe uma forma sesquilinear graduada com torção não degenerada hermitiana ou anti-hermitiana $B : V \times V^{[g]} \longrightarrow \Delta$ onde $\star_\epsilon$ é a ϵ-semiadjunta associada a B e $\mathcal{F}_V^{gr\circledast_\epsilon} \subseteq \mathcal{R} \subseteq \mathcal{L}_V^{gr\circledast_\epsilon}$.

Lema 4.19. *Seja $\mathcal{R}$ uma $\mathcal{S}$-álgebra G-graduada primitiva à direita, com característica diferente de 2, com um ideal à direita G-graduado minimal e com uma ϵ-involução $\star_\epsilon : \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}$. Se existe um idempotente minimal $\mathbf{e} \in \mathcal{R}_0$ tal que $\mathbf{e}^{\star_\epsilon} = \pm\mathbf{e}$, então existem um elemento $g \in G$, uma $\mathcal{S}$-álgebra G-graduada de divisão Δ com uma ϵ-involução $\bar{\bullet}: \Delta \longrightarrow \Delta$, um Δ-espaço G-graduado ${}_\Delta V$, e uma forma sesquilinear graduada (homogênea de grau zero) com torção não degenerada hermitiana $B : V \times V^{[g]} \longrightarrow \Delta$, tais que $\star_\epsilon$ é a ϵ-semiadjunta associada a B e*

$$\mathcal{F}_V^{gr\ast_\epsilon} \subseteq \mathcal{R} \subseteq \mathcal{L}_V^{gr\ast_\epsilon}.$$

Demonstração. Suponhamos que $\mathbf{e} \in \mathcal{R}_0$ é um idempotente minimal tal que $\mathbf{e}^{\star_\epsilon} = \pm\mathbf{e}$. Observamos que $V = \mathbf{e}\mathcal{R}$ é ideal à direita G-graduado minimal de $\mathcal{R}$. Logo, pelo Lema 1.11, temos que $\Delta = \mathbf{e}\mathcal{R}\mathbf{e}$ é uma $\mathcal{S}$-álgebra G-graduada de divisão e V é um Δ-módulo à esquerda G-graduado.

Passo 1. Afirmamos que a restrição da ϵ-involução de $\mathcal{R}$ a Δ, $\star_\epsilon|_\Delta : \Delta \longrightarrow \Delta$, é uma ϵ-involução sobre Δ. De fato, para $d = \sum\limits_{\theta\in G} d_\theta = \sum\limits_{\theta\in G} \mathbf{e}r_\theta\mathbf{e} \in \Delta$ fixo, observamos que

$$(d)^{\star_\epsilon} = \sum_{\theta\in G} (d_\theta)^{\star_\epsilon} = \sum_{\theta\in G} \mathbf{e}r_\theta^{\star_\epsilon}\mathbf{e}.$$

Logo, Δ é invariante pela ação de $\star_\epsilon$ e, consequentemente, a restrição $\star_\epsilon|_\Delta$ é uma ϵ-involução sobre Δ.

Passo 2. Afirmamos que a aplicação

$$\begin{array}{rccl} B: & V \times V & \longrightarrow & \Delta \\ & (\mathbf{e}r, \mathbf{e}\tilde{r}) & \longrightarrow & B(\mathbf{e}r, \mathbf{e}\tilde{r}) := \mathbf{e}r\tilde{r}^{\star_\epsilon}\mathbf{e}, \end{array}$$

é uma forma sesquilinear graduada com torção não degenerada hermitiana. De fato, pela definição de B, não é difícil ver que B é $\mathcal{S}$-bilinear. Além disso, para $\mathbf{e}r_\alpha \in V_\alpha$ e $\mathbf{e}r_\beta \in V_\beta$ fixos, sendo $r_\alpha \in \mathcal{R}_\alpha$ e $r_\beta \in \mathcal{R}_\beta$, segue que $B(\mathbf{e}r_\alpha, \mathbf{e}r_\beta) = \mathbf{e}r_\alpha r_\beta^{\star_\epsilon}\mathbf{e} \in \Delta_{\alpha+\beta}$, isto é, B é graduada. Também, dados $d_\theta \in \Delta_\theta$, $\mathbf{e}r_\alpha \in V_\alpha$ e $\mathbf{e}r_\beta \in V_\beta$ fixos, temos que $B(d_\theta(\mathbf{e}r_\alpha), \mathbf{e}r_\beta) = d_\theta B(\mathbf{e}r_\alpha, \mathbf{e}r_\beta)$ e

$$\begin{aligned} B(\mathbf{e}r_\alpha, d_\theta(\mathbf{e}r_\beta)) = &\ \mathbf{e}r_\alpha (d_\theta r_\beta)^{\star_\epsilon}\mathbf{e} = \epsilon(\theta,\beta)\mathbf{e}r_\alpha r_\beta^{\star_\epsilon} d_\theta^{\star_\epsilon}\mathbf{e} = \\ = &\ \epsilon(\theta,\beta)\mathbf{e}r_\alpha r_\beta^{\star_\epsilon}\mathbf{e}d_\theta^{\star_\epsilon} = \epsilon(\theta,\beta)B(\mathbf{e}r_\alpha, \mathbf{e}r_\beta)\, d_\theta^{\star_\epsilon}; \end{aligned}$$

isto é, B é forma sesquilinear graduada com torção. Ainda, para $\mathbf{e}r_\alpha \in V_\alpha$ e $\mathbf{e}r_\beta \in V_\beta$ fixos, temos

$$\overline{B(\mathbf{e}r_\alpha, \mathbf{e}r_\beta)} = \left(\mathbf{e}r_\alpha r_\beta^{\star_\epsilon}\mathbf{e}\right)^{\star_\epsilon} = \epsilon(\alpha,\beta)\mathbf{e}^{\star_\epsilon}r_\beta r_\alpha^{\star_\epsilon}\mathbf{e}^{\star_\epsilon} = \epsilon(\alpha,\beta)\mathbf{e}r_\beta r_\alpha^{\star_\epsilon}\mathbf{e} = \epsilon(\alpha,\beta)B(\mathbf{e}r_\beta, \mathbf{e}r_\alpha),$$

isto é, B é hermitiana. Por outro lado, pelo Lema 1.10, sabemos que por $\mathcal{R}$ ser uma $\mathcal{S}$-álgebra G-graduada primitiva à direita, $\mathcal{R}$ é uma $\mathcal{S}$-álgebra G-graduada prima. Logo, se $\mathbf{e}r_\alpha \in V_\alpha$ e $B(\mathbf{e}r_\alpha, V) = \mathbf{e}r_\alpha\mathcal{R}\mathbf{e} = (0)$, então, pela Proposição 1.5, obtemos que $\mathbf{e}r_\alpha = 0$. Pelo mesmo argumento, se $(0) = B(V, \mathbf{e}r_\alpha) = \mathbf{e}\mathcal{R}r_\alpha^{\star_\epsilon}\mathbf{e}$, segue que $\mathbf{e}r_\alpha^{\star_\epsilon} = 0$. Daí, como $\star_\epsilon$ é uma ϵ-involução, obtemos $\mathbf{e}r_\alpha = 0$. Assim, concluímos que B também é não degenerada.

Passo 3. Afirmamos que $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{L}_V^{gr\ast_\epsilon}$. De fato, temos que a aplicação

$$\begin{array}{rcccccl} \mathfrak{R}: & \mathcal{R} & \longrightarrow & End_\Delta^{gr}(V) & & & \\ & r & \longmapsto & \mathfrak{R}_r: & V & \longrightarrow & V \\ & & & & v & \longmapsto & (v)\mathfrak{R}_r := vr, \end{array}$$

é bem definida, $\mathcal{S}$-linear e graduada. Além disso, dados $r_\alpha \in \mathcal{R}_\alpha$ e $r_\beta \in \mathcal{R}_\beta$, temos $v\mathfrak{R}_{r_\alpha r_\beta} = v(r_\alpha r_\beta) = (vr_\alpha)r_\beta = v\mathfrak{R}_{r_\alpha}\mathfrak{R}_{r_\beta}$, para todo $v \in V$. Logo, $\mathfrak{R}$ é um homomorfismo graduado de $\mathcal{S}$-álgebras G-graduadas. Por outro lado, como $\mathcal{R}$ é prima, pelo item (ii) da Proposição 1.5 temos que $a_\alpha \mathcal{R} b_\beta = (0)$ implica $a_\alpha = 0$ ou $b_\beta = 0$, para quaisquer elementos homogêneos $a_\alpha \in \mathcal{R}_\alpha$ e $b_\beta \in \mathcal{R}_\beta$. Daí, como $Ann^r_{\mathcal{R}}(V) = \{r \in \mathcal{R} : \mathbf{e}\mathcal{R}r = (0)\}$ é um ideal graduado de $\mathcal{R}$, segue que $Ann^r_{\mathcal{R}}(V) = (0)$. Consequentemente, $\mathcal{R}$ age fielmente sobre V e, então $\mathfrak{R}$ é injetora. Assim, $\mathfrak{R}$ é um monomorfismo de $\mathcal{S}$-álgebras G-graduadas. Agora, vamos mostrar que todo elemento homogêneo de $\mathcal{R}$ tem ϵ-semiadjunta. Dado $r_\beta \in \mathcal{R}_\beta$ fixo, temos

$$B\left((\mathbf{e}r_\alpha)r_\beta, \mathbf{e}r_\gamma\right) = (\mathbf{e}r_\alpha)r_\beta r_\gamma^{\star_\epsilon}\mathbf{e} = \epsilon(\beta,\gamma)\mathbf{e}r_\alpha\left(r_\gamma r_\beta^{\star_\epsilon}\right)^{\star_\epsilon}\mathbf{e} = \epsilon(\beta,\gamma)B\left(\mathbf{e}r_\alpha, \mathbf{e}r_\gamma r_\beta^{\star_\epsilon}\right),$$

para quaisquer $\mathbf{e}r_\alpha \in V_\alpha$ e $\mathbf{e}r_\gamma \in V_\gamma$. Isto é, a ϵ-semiadjunta de um elemento fixo $r_\beta \in \mathcal{R}_\beta$ é $r_\beta^{\star_\epsilon}$. Com isso completamos a prova de que $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{L}_V^{gr_{*\epsilon}}$.

Passo 4. Afirmamos que $\mathcal{F}_V^{gr_{*\epsilon}} \subseteq \mathcal{R}$. De fato, observamos que para $w_{\beta-\eta} \in V_{\beta-\eta}$ e $v_\eta \in V_\eta$ fixos,

$$B\left(v_\alpha, w_{\beta-\eta}\right)v_\eta = v_\alpha\left(w_{\beta-\eta}\right)^{\star_\epsilon}\mathbf{e}v_\eta = (v_\alpha)\mathfrak{R}_{\left(w_{\beta-\eta}\right)^{\star_\epsilon}\mathbf{e}v_\eta},$$

para todo $v_\alpha \in V_\alpha$. Logo, $B\left(-, w_{\beta-\eta}\right)v_\eta \in \mathcal{R}$. Assim, pelo Lema 4.15, concluímos que $\mathcal{F}_V^{gr_{*\epsilon}} \subseteq \mathcal{R}$. □

Lema 4.20. *Seja $\mathcal{R}$ uma $\mathcal{S}$-álgebra G-graduada primitiva à direita, com característica diferente de 2, com um ideal à direita G-graduado minimal e com uma ϵ-involução $\star_\epsilon : \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}$. Se $\mathbf{e} \in \mathcal{R}$ é um idempotente minimal tal que $\mathbf{e}\mathbf{e}^{\star_\epsilon} = 0$, então existem: um elemento $g \in G$, uma $\mathcal{S}$-álgebra G-graduada de divisão Δ com uma ϵ-involução $\bar{\bullet}: \Delta \longrightarrow \Delta$, um Δ-espaço ${}_\Delta V$ G-graduado e uma forma sesquilinear graduada com torção hermitiana ou anti-hermitiana $B : V \times V^{[g]} \longrightarrow \Delta$, tais que $\star_\epsilon$ é a ϵ-semiadjunta associada a B e $\mathcal{F}_V^{gr_{*\epsilon}} \subseteq \mathcal{R} \subseteq \mathcal{L}_V^{gr_{*\epsilon}}$.*

Demonstração. Suponhamos que $\mathbf{e} \in \mathcal{R}_0$ é um idempotente minimal tal que $\mathbf{e}\mathbf{e}^{\star_\epsilon} = 0$. Observamos que $V = \mathbf{e}\mathcal{R}$ é ideal à direita G-graduado minimal de $\mathcal{R}$. Logo, pelo Lema 1.11, temos que $\Delta = \mathbf{e}\mathcal{R}\mathbf{e}$ é $\mathcal{S}$-álgebra G-graduada de divisão e ${}_\Delta V$ é um Δ-espaço à esquerda G-graduado.

Como $\mathcal{R}$ é $\mathcal{S}$-álgebra G-graduada primitiva à direita, então, pelo Lema 1.10, $\mathcal{R}$ é uma $\mathcal{S}$-álgebra G-graduada prima. Daí, pela Proposição 1.5, obtemos que $\mathbf{e}\mathcal{R}\mathbf{e}^{\star_\epsilon} \neq (0)$ e, consequentemente, $\mathbf{e}\mathcal{R}_\gamma\mathbf{e}^{\star_\epsilon} \neq (0)$, para algum $\gamma \in G$. Seja $t_\gamma \in \mathcal{R}_\gamma$ tal que $\mathbf{e}t_\gamma\mathbf{e}^{\star_\epsilon} \neq 0$. Outra vez, como $\mathcal{R}$ é uma $\mathcal{S}$-álgebra G-graduada prima, temos $(0) \neq \mathbf{e}^{\star_\epsilon}\mathcal{R}\mathbf{e}t_\gamma\mathbf{e}^{\star_\epsilon}$ pela Proposição 1.5. Logo, como $\Delta^{\star_\epsilon}$ é uma $\mathcal{S}$-álgebra G-graduada de divisão e $\mathbf{e}^{\star_\epsilon}\mathcal{R}\mathbf{e}t_\gamma\mathbf{e}^{\star_\epsilon}$ é um ideal G-graduado de $\Delta^{\star_\epsilon}$, segue que $\Delta^{\star_\epsilon} = \mathbf{e}^{\star_\epsilon}\mathcal{R}\mathbf{e}t_\gamma\mathbf{e}^{\star_\epsilon}$. Assim, existe $s_{-\gamma} \in \mathcal{R}_{-\gamma}$ tal que

$$\mathbf{e}^{\star_\epsilon}s_{-\gamma}\mathbf{e}t_\gamma\mathbf{e}^{\star_\epsilon} = 1_{\Delta^{\star_\epsilon}} = \mathbf{e}^{\star_\epsilon}. \tag{4.5}$$

Observamos que se $\mathbf{e}\left(r_\gamma + r_\gamma^{\star_\epsilon}\right)\mathbf{e}^{\star_\epsilon} \neq 0$, para algum $r_\gamma \in \mathcal{R}_\gamma$, podemos escolher $t_\gamma = r_\gamma + r_\gamma^{\star_\epsilon}$ para obter $\left(\mathbf{e}t_\gamma\mathbf{e}^{\star_\epsilon}\right)^{\star_\epsilon} = \mathbf{e}t_\gamma\mathbf{e}^{\star_\epsilon}$. Em caso contrário, se $\mathbf{e}\left(r_\gamma + r_\gamma^{\star_\epsilon}\right)\mathbf{e}^{\star_\epsilon} = 0$, para todo $r_\gamma \in \mathcal{R}_\gamma$, podemos escolher $t_\gamma = r_\gamma$ para obter $\left(\mathbf{e}t_\gamma\mathbf{e}^{\star_\epsilon}\right)^{\star_\epsilon} = \mathbf{e}t_\gamma^{\star_\epsilon}\mathbf{e} = -\mathbf{e}t_\gamma\mathbf{e}^{\star_\epsilon}$. Em resumo, sempre é possível escolher $t_\gamma \in \mathcal{R}_\gamma$ tal que

$$\left(\mathbf{e}t_\gamma\mathbf{e}^{\star_\epsilon}\right)^{\star_\epsilon} = \xi'\mathbf{e}t_\gamma\mathbf{e}^{\star_\epsilon}, \text{ com } \xi' = \pm 1_{\mathcal{S}}. \tag{4.6}$$

Passo 1. Afirmamos que:

(i) $\mathbf{e} = \epsilon(-\gamma,\gamma)\xi'\mathbf{e}t_\gamma \mathbf{e}^{\star_\epsilon} s_{-\gamma}^{\star_\epsilon}\mathbf{e}$;

(ii) $(\mathbf{e}^{\star_\epsilon} s_{-\gamma}\mathbf{e})^{\star_\epsilon} = \mathbf{e}^{\star_\epsilon} s_{-\gamma}^{\star_\epsilon}\mathbf{e} = \epsilon(-\gamma,\gamma)\xi'\mathbf{e}^{\star_\epsilon} s_{-\gamma}\mathbf{e}$;

(iii) $\mathbf{e} = \mathbf{e}t_\gamma \mathbf{e}^{\star_\epsilon} s_{-\gamma}\mathbf{e}$.

De fato:

(i) Das equações (4.5) e (4.6), temos que

$$\begin{aligned} \mathbf{e} = (\mathbf{e}^{\star_\epsilon})^{\star_\epsilon} = & \ (\mathbf{e}^{\star_\epsilon} s_{-\gamma}\mathbf{e}t_\gamma \mathbf{e}^{\star_\epsilon})^{\star_\epsilon} \\ = & \ \epsilon(-\gamma,\gamma)\,(\mathbf{e}t_\gamma \mathbf{e}^{\star_\epsilon})^{\star_\epsilon}\,(\mathbf{e}^{\star_\epsilon} s_{-\gamma}\mathbf{e})^{\star_\epsilon} \\ = & \ \epsilon(-\gamma,\gamma)\xi'\mathbf{e}t_\gamma \mathbf{e}^{\star_\epsilon}\mathbf{e}^{\star_\epsilon} s_{-\gamma}^{\star_\epsilon}\mathbf{e} \\ = & \ \epsilon(-\gamma,\gamma)\xi'\mathbf{e}t_\gamma \mathbf{e}^{\star_\epsilon} s_{-\gamma}^{\star_\epsilon}\mathbf{e}. \end{aligned}$$

(ii) Da equação (4.5) e do item anterior, temos

$$\begin{aligned} \epsilon(-\gamma,\gamma)\xi'\mathbf{e}^{\star_\epsilon} s_{-\gamma}\mathbf{e} = & \ \epsilon(-\gamma,\gamma)\xi'\mathbf{e}^{\star_\epsilon} s_{-\gamma}\left(\epsilon(-\gamma,\gamma)\xi'\mathbf{e}t_\gamma \mathbf{e}^{\star_\epsilon} s_{-\gamma}^{\star_\epsilon}\mathbf{e}\right) \\ = & \ \mathbf{e}^{\star_\epsilon} s_{-\gamma}\mathbf{e}t_\gamma \mathbf{e}^{\star_\epsilon} s_{-\gamma}^{\star_\epsilon}\mathbf{e} \\ = & \ \mathbf{e}^{\star_\epsilon} s_{-\gamma}^{\star_\epsilon}\mathbf{e} \\ = & \ (e^{\star_\epsilon} s_{-\gamma}\mathbf{e})^{\star_\epsilon}\,. \end{aligned}$$

(iii) Pelos itens (i) e (ii) anteriores, e lembrando que $\epsilon(\alpha,-\alpha)^2 = 1$ para todo $\alpha \in G$, temos

$$\mathbf{e} = \epsilon(-\gamma,\gamma)\xi'\mathbf{e}t_\gamma \mathbf{e}^{\star_\epsilon} s_{-\gamma}^{\star_\epsilon}\mathbf{e} = \epsilon(-\gamma,\gamma)\epsilon(-\gamma,\gamma){\xi'}^2\mathbf{e}t_\gamma \mathbf{e}^{\star_\epsilon} s_{-\gamma}\mathbf{e} = \mathbf{e}t_\gamma \mathbf{e}^{\star_\epsilon} s_{-\gamma}\mathbf{e}.$$

<u>**Passo 2.**</u> Afirmamos que a aplicação

$$\begin{array}{rccl} \bar{\bullet}\colon & \Delta & \longrightarrow & \Delta \\ & d = \sum\limits_{\theta\in G} d_\theta & \longmapsto & \overline{d} := \sum\limits_{\theta\in G}\epsilon(\theta,\gamma)\mathbf{e}t_\gamma \mathbf{e}^{\star_\epsilon} d_\theta^{\star_\epsilon}\mathbf{e}^{\star_\epsilon} s_{-\gamma}\mathbf{e}, \end{array}$$

é uma ϵ-involução sobre Δ. De fato, observamos que a aplicação é bem definida, pois se $\sum\limits_{\theta\in G} d_\theta = d = d' = \sum\limits_{\theta\in G} d'_\theta$, segue que $d_\theta = d'_\theta$, para todo $\theta \in G$. Daí que $\overline{d} = \overline{d'}$. Como $\star_\epsilon$ é $\mathcal{S}$-linear e o produto na $\mathcal{S}$-álgebra $\mathcal{R}$ também o é, segue que a aplicação $\bar{\bullet}\colon \Delta \longrightarrow \Delta$ é $\mathcal{S}$-linear. Sejam $d_\theta \in \Delta_\theta$ e $d_\tau \in \Delta_\tau$ fixos. Usando a equação (4.5), temos

$$\begin{aligned} \overline{d_\theta d_\tau} = & \ \epsilon(\theta+\tau,\gamma)\mathbf{e}t_\gamma \mathbf{e}^{\star_\epsilon}\,(d_\theta d_\tau)^{\star_\epsilon}\,\mathbf{e}^{\star_\epsilon} s_{-\gamma}\mathbf{e} \\ = & \ \epsilon(\theta+\tau,\gamma)\epsilon(\theta,\tau)\mathbf{e}t_\gamma \mathbf{e}^{\star_\epsilon} d_\tau^{\star_\epsilon} d_\theta^{\star_\epsilon}\mathbf{e}^{\star_\epsilon} s_{-\gamma}\mathbf{e} \\ = & \ \epsilon(\theta+\tau,\gamma)\epsilon(\theta,\tau)\mathbf{e}t_\gamma \mathbf{e}^{\star_\epsilon} d_\tau^{\star_\sigma}\,(\mathbf{e}^{\star_\epsilon} s_{-\gamma}\mathbf{e}t_\gamma \mathbf{e}^{\star_\epsilon})\,d_\theta^{\star_\epsilon}\mathbf{e}^{\star_\epsilon} s_{-\gamma}\mathbf{e}, \quad ; \\ = & \ \epsilon(\theta+\tau,\gamma)\epsilon(\theta,\tau)\,(\mathbf{e}t_\gamma \mathbf{e}^{\star_\epsilon} d_\tau^{\star_\sigma}\mathbf{e}^{\star_\epsilon} s_{-\gamma}\mathbf{e})\,(\mathbf{e}t_\gamma \mathbf{e}^{\star_\epsilon} d_\theta^{\star_\epsilon}\mathbf{e}^{\star_\epsilon} s_{-\gamma}\mathbf{e}) \\ = & \ \epsilon(\theta,\tau)\,(\epsilon(\tau,\gamma)\mathbf{e}t_\gamma \mathbf{e}^{\star_\epsilon} d_\tau^{\star_\sigma}\mathbf{e}^{\star_\epsilon} s_{-\gamma}\mathbf{e})\,(\epsilon(\theta,\gamma)\mathbf{e}t_\gamma \mathbf{e}^{\star_\epsilon} d_\theta^{\star_\epsilon}\mathbf{e}^{\star_\epsilon} s_{-\gamma}\mathbf{e}) \\ = & \ \epsilon(\theta,\tau)\overline{d_\tau}\;\overline{d_\theta} \end{aligned}$$

Agora, seja $d_\theta \in \Delta_\theta$. Da equação (4.6) e os itens (i), (ii) e (iii) do Passo 1, temos

$$\begin{aligned}
\overline{\overline{d_\theta}} = & \ \epsilon(\theta,\gamma)\mathbf{e}t_\gamma \mathbf{e}^{\star_\epsilon} \left(\overline{d_\theta}\right)^{\star_\epsilon} \mathbf{e}^{\star_\epsilon} s_{-\gamma}\mathbf{e} \\
= & \ \epsilon(\theta,\gamma)\epsilon(\theta,\gamma)\mathbf{e}t_\gamma \mathbf{e}^{\star_\epsilon} \left(\mathbf{e}t_\gamma \mathbf{e}^{\star_\epsilon} d_\theta^{\star_\epsilon} \mathbf{e}^{\star_\epsilon} s_{-\gamma}\mathbf{e}\right)^{\star_\epsilon} \mathbf{e}^{\star_\epsilon} s_{-\gamma}\mathbf{e} \\
= & \ \epsilon(\theta,\gamma)^2\mathbf{e}t_\gamma \mathbf{e}^{\star_\epsilon} \left(\epsilon(\gamma,\theta-\gamma)\left(d_\theta^{\star_\epsilon} \mathbf{e}^{\star_\epsilon} s_{-\gamma}\mathbf{e}\right)^{\star_\epsilon} \left(\mathbf{e}t_\gamma \mathbf{e}^{\star_\epsilon}\right)^{\star_\epsilon}\right) \mathbf{e}^{\star_\epsilon} s_{-\gamma}\mathbf{e} \\
= & \ \epsilon(\theta,\gamma)^2\mathbf{e}t_\gamma \mathbf{e}^{\star_\epsilon} \left(\epsilon(\gamma,\theta-\gamma)\epsilon(\theta,-\gamma)\left(\mathbf{e}^{\star_\epsilon} s_{-\gamma}\mathbf{e}\right)^{\star_\epsilon} d_\theta \left(\mathbf{e}t_\gamma \mathbf{e}^{\star_\epsilon}\right)^{\star_\epsilon}\right) \mathbf{e}^{\star_\epsilon} s_{-\gamma}\mathbf{e} \\
= & \ \epsilon(\theta,\gamma)^2\mathbf{e}t_\gamma \mathbf{e}^{\star_\epsilon} \left(\epsilon(\gamma,\theta-\gamma)\epsilon(\theta,-\gamma)\mathbf{e}^{\star_\epsilon} s_{-\gamma}^{\star_\epsilon}\mathbf{e}d_\theta \left(\xi'\mathbf{e}t_\gamma \mathbf{e}^{\star_\epsilon}\right)\right) \mathbf{e}^{\star_\epsilon} s_{-\gamma}\mathbf{e}, \\
= & \ \epsilon(\theta,\gamma)^2\epsilon(\gamma,\theta-\gamma)\epsilon(\theta,-\gamma)\xi' \left(\mathbf{e}t_\gamma \mathbf{e}^{\star_\epsilon}\mathbf{e}^{\star_\epsilon} s_{-\gamma}^{\star_\epsilon}\mathbf{e}\right) d_\theta \left(\mathbf{e}t_\gamma \mathbf{e}^{\star_\epsilon}\mathbf{e}^{\star_\epsilon} s_{-\gamma}\mathbf{e}\right) \\
= & \ \epsilon(\theta,\gamma)^2\epsilon(\gamma,\theta-\gamma)\epsilon(\theta,-\gamma)\xi' \left(\mathbf{e}t_\gamma \mathbf{e}_{\star_\epsilon} s_{-\gamma}^{\star_\epsilon}\mathbf{e}\right) d_\theta \left(\mathbf{e}t_\gamma \mathbf{e}^{\star_\epsilon} s_{-\gamma}\mathbf{e}\right) \\
= & \ \epsilon(\theta,\gamma)^2\epsilon(\gamma,\theta)\epsilon(\theta,-\gamma) \left(\epsilon(\gamma,-\gamma)\xi'\mathbf{e}t_\gamma \mathbf{e}^{\star_\epsilon} s_{-\gamma}^{\star_\epsilon}\mathbf{e}\right) d_\theta\mathbf{e} \\
= & \ \mathbf{e}d_\theta \\
= & \ d_\theta.
\end{aligned}$$

Por fim, para concluir que $\bar{\bullet}\colon \Delta \longrightarrow \Delta$ é uma ϵ-involução, vamos mostrar que é bijetora. Se

$$0 = \overline{d_\theta} = \epsilon(\theta,\gamma)\mathbf{e}t_\gamma \mathbf{e}^{\star_\epsilon} d_\theta^{\star_\epsilon} \mathbf{e}^{\star_\epsilon} s_{-\gamma}\mathbf{e},$$

então, usando a equação (4.5), obtemos

$$0 = \epsilon(\gamma,\theta)\mathbf{e}^{\star_\epsilon} s_{-\gamma}\overline{d_\theta}t_\gamma \mathbf{e}^{\star_\epsilon} = \epsilon(\gamma,\theta)\epsilon(\theta,\gamma)\left(\mathbf{e}^{\star_\epsilon} s_{-\gamma}\mathbf{e}t_\gamma \mathbf{e}^{\star_\epsilon}\right) d_\theta^{\star_\epsilon} \left(\mathbf{e}^{\star_\epsilon} s_{-\gamma}\mathbf{e}t_\gamma \mathbf{e}^{\star_\epsilon}\right) = \mathbf{e}^{\star_\epsilon} d_\theta^{\star_\epsilon} \mathbf{e}^{\star_\epsilon} = d_\theta^{\star_\epsilon}.$$

Logo, $d_\theta = 0$ e, assim, segue que a aplicação $\bar{\bullet}$ é injetora. Por outro lado, como $\overline{\overline{d_\theta}} = d_\theta$ para todo $d_\theta \in \Delta_\theta$, segue que a aplicação $\bar{\bullet}$ é sobrejetora. Portanto, $\bar{\bullet}\colon \Delta \longrightarrow \Delta$ é uma ϵ-involução sobre Δ.

Passo 3. Afirmamos que a aplicação

$$\begin{aligned}
B: \quad V \times V^{[-\gamma]} & \longrightarrow \Delta \\
(v_\alpha, w_\beta) & \longmapsto B\left(v_\alpha, w_\beta\right) := v_\alpha \left(w_\beta\right)^{\star_\epsilon} s_{-\gamma}\mathbf{e}
\end{aligned}$$

é uma forma sesquilinear graduada não degenerada ξ-hermitiana com $\xi = \pm 1_\Delta = \pm\mathbf{e}$. De fato, vemos que B é bem definida e $\mathcal{S}$-bilinear. Além disso, para quaisquer $v_\alpha = \mathbf{e}r_\alpha \in V_\alpha$, $w_\beta = \mathbf{e}r_{\beta+\gamma} \in V_\beta^{[-\gamma]}$ e $d_\theta \in \Delta_\theta$:

- $B\left(v_\alpha, w_\beta\right) = v_\alpha \left(w_\beta\right)^{\star_\epsilon} s_{-\gamma}\mathbf{e} \in \Delta_{\alpha+\beta}$;
- $B\left(d_\theta v_\alpha, w_\beta\right) = d_\theta B\left(v_\alpha, w_\beta\right)$;
- pela equação (4.5) e pelo fato de que $u_\eta^{\star_\epsilon}\mathbf{e}^{\star_\epsilon} = u_\eta^{\star_\epsilon}$ para todo $u_\eta \in V_\eta^{[-\gamma]}$, também temos

$$\begin{aligned}
B\left(v_\alpha, d_\theta w_\beta\right) = & \ v_\alpha \left(d_\theta w_\beta\right)^{\star_\epsilon} s_{-\gamma}\mathbf{e} \\
= & \ \epsilon(\theta,\beta+\gamma)v_\alpha w_\beta^{\star_\epsilon} d_\theta^{\star_\epsilon} s_{-\gamma}\mathbf{e} \\
= & \ \epsilon(\theta,\beta+\gamma)v_\alpha w_\beta^{\star_\epsilon} \left(\mathbf{e}^{\star_\epsilon} s_{-\gamma}\mathbf{e}t_\gamma \mathbf{e}^{\star_\epsilon}\right) d_\theta^{\star_\epsilon} s_{-\gamma}\mathbf{e} \\
= & \ \epsilon(\theta,\beta+\gamma)v_\alpha w_\beta^{\star_\epsilon} s_{-\gamma}\mathbf{e}t_\gamma \mathbf{e}^{\star_\epsilon} d_\theta^{\star_\epsilon} s_{-\gamma}\mathbf{e} \\
= & \ \epsilon(\theta,\beta+\gamma)\left(v_\alpha w_\beta^{\star_\epsilon} s_{-\gamma}\mathbf{e}\right) \mathbf{e}t_\gamma \mathbf{e}^{\star_\epsilon} d_\theta^{\star_\epsilon} \mathbf{e}^{\star_\epsilon} s_{-\gamma}\mathbf{e} \\
= & \ \epsilon(\theta,\beta)B\left(v_\alpha, w_\beta\right)\left(\epsilon(\theta,\gamma)\mathbf{e}t_\gamma \mathbf{e}^{\star_\epsilon} d_\theta^{\star_\epsilon} \mathbf{e}^{\star_\epsilon} s_{-\gamma}\mathbf{e}\right) \\
= & \ \epsilon(\theta,\beta)B\left(v_\alpha, w_\beta\right)\overline{d_\theta}.
\end{aligned}$$

Logo, B é uma forma sesquilinear graduada com torção. Agora, vamos ver que B também é não degenerada. Se $(0) = B\left(v_\alpha, V^{[-\gamma]}\right) = v_\alpha\left(\mathbf{e}\mathcal{R}\right)^{\star_\epsilon} s_{-\gamma}\mathbf{e} = v_\alpha\mathcal{R}\mathbf{e}^{\star_\epsilon}s_{-\gamma}\mathbf{e}$, como $\mathcal{R}$ é uma $\mathcal{S}$-álgebra G-graduada prima, pela Proposição 1.5 segue que $v_\alpha = 0$. Por outro lado, se $(0) = B\left(V, w_\beta\right) = \mathbf{e}\mathcal{R}w_\beta^{\star_\epsilon}s_{-\gamma}\mathbf{e}$, então, pela equação 4.5, $(0) = \mathbf{e}\mathcal{R}w_\beta^{\star_\epsilon}s_{-\gamma}\mathbf{e}t_\gamma\mathbf{e}^{\star_\epsilon} = \mathbf{e}\mathcal{R}w_\beta^{\star_\epsilon}$. Daí segue, outra vez pela Proposição 1.5, que $w_\beta^{\star_\epsilon} = 0$. Logo, como $\star_\epsilon$ é uma ϵ-involução sobre $\mathcal{R}$, obtemos $w_\beta = 0$. Assim, concluímos que B é não degenerada.

Por fim, vamos mostrar que B é ξ-hermitiana com $\xi = \pm 1_\Delta = \pm\mathbf{e}$. Usando os itens (i) e (ii) do Passo 1, temos

$$\begin{aligned}
\overline{B\left(w_\beta, v_\alpha\right)} = \; & \epsilon(\beta+\alpha,\gamma)\mathbf{e}t_\gamma\mathbf{e}^{\star_\epsilon}B\left(w_\beta, v_\alpha\right)^{\star_\epsilon}\mathbf{e}^{\star_\epsilon}s_{-\gamma}\mathbf{e} \\
= \; & \epsilon(\beta+\alpha,\gamma)\mathbf{e}t_\gamma\mathbf{e}^{\star_\epsilon}\left(w_\beta v_\alpha^{\star_\epsilon}s_{-\gamma}\mathbf{e}\right)^{\star_\epsilon}\mathbf{e}^{\star_\epsilon}s_{-\gamma}\mathbf{e} \\
= \; & \epsilon(\beta+\alpha,\gamma)\mathbf{e}t_\gamma\mathbf{e}^{\star_\epsilon}\left(\epsilon(\beta+\gamma,\alpha-\gamma)\left(v_\alpha^{\star_\epsilon}\mathbf{e}^{\star_\epsilon}s_{-\gamma}\mathbf{e}\right)^{\star_\epsilon}w_\beta^{\star_\epsilon}\right)\mathbf{e}^{\star_\epsilon}s_{-\gamma}\mathbf{e} \\
= \; & \epsilon(\beta+\alpha,\gamma)\mathbf{e}t_\gamma\mathbf{e}^{\star_\epsilon}\left(\epsilon(\beta+\gamma,\alpha-\gamma)\epsilon(\alpha,-\gamma)\left(\mathbf{e}^{\star_\epsilon}s_{-\gamma}\mathbf{e}\right)^{\star_\epsilon}v_\alpha w_\beta^{\star_\epsilon}\right)\mathbf{e}^{\star_\epsilon}s_{-\gamma}\mathbf{e} \\
= \; & \epsilon(\beta+\alpha,\gamma)\epsilon(\beta+\gamma,\alpha-\gamma)\epsilon(\alpha,-\gamma)\mathbf{e}t_\gamma\mathbf{e}^{\star_\epsilon}\mathbf{e}^{\star_\epsilon}s_{-\gamma}^{\star_\epsilon}\mathbf{e}\left(v_\alpha w_\beta^{\star_\epsilon}\mathbf{e}^{\star_\epsilon}s_{-\gamma}\mathbf{e}\right), \\
= \; & \epsilon(\beta+\alpha,\gamma)\epsilon(\beta+\gamma,\alpha-\gamma)\epsilon(\alpha,-\gamma)\epsilon(-\gamma,\gamma)\xi'\left(\epsilon(\gamma,-\gamma)\xi'\mathbf{e}t_\gamma\mathbf{e}^{\star_\epsilon}\mathbf{e}^{\star_\epsilon}s_{-\gamma}^{\star_\epsilon}\mathbf{e}\right) \\
& B\left(v_\alpha, w_\beta\right) \\
= \; & \epsilon(\beta+\alpha,\gamma)\epsilon(\beta+\gamma,\alpha-\gamma)\epsilon(\alpha,-\gamma)\epsilon(-\gamma,\gamma)\xi'\mathbf{e}B\left(v_\alpha w_\beta\right), \\
= \; & \epsilon(\beta+\gamma,\alpha)(\xi'\mathbf{e})B\left(v_\alpha, w_\beta\right).
\end{aligned}$$

Por outro lado, pelo item (i) do Passo 1, temos

$$\overline{\xi'\mathbf{e}} = \xi'\epsilon(0,\gamma)\mathbf{e}t_\gamma\mathbf{e}^{\star_\epsilon}\mathbf{e}^{\star_\epsilon}\mathbf{e}^{\star_\epsilon}s_{-\gamma}\mathbf{e} = \xi'\mathbf{e}t_\gamma\mathbf{e}^{\star_\epsilon}s_{-\gamma}\mathbf{e} = \xi'\mathbf{e} = \pm\mathbf{e}.$$

Então

$$\overline{B\left(w_\beta, v_\alpha\right)} = \epsilon(\beta+\gamma,\alpha)\xi B\left(v_\alpha, w_\beta\right), \text{ com } \xi = \pm\mathbf{e} = \pm 1_\Delta.$$

Portanto, B é uma forma sesquilinear graduada com torção não degenerada hermitiana ou anti-hermitiana.

Passo 4. Afirmamos que $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{L}_V^{gr*_\epsilon}$. De fato, para $r_\tau \in \mathcal{R}_\tau$ fixo e para quaisquer $v_\alpha \in V_\alpha$, $w_\beta \in V_\beta^{[-\gamma]}$, segue que

$$\begin{aligned}
B\left(v_\alpha r_\tau, w_\beta\right) = \; & \left(v_\alpha r_\tau\right)w_\beta^{\star_\epsilon}s_{-\gamma}\mathbf{e} \\
= \; & v_\alpha\left(r_\tau^{\star_\epsilon\star_\epsilon}w_\beta^{\star_\epsilon}\right)s_{-\gamma}\mathbf{e} \\
= \; & \epsilon(\tau,\beta+\gamma)v_\alpha\left(w_\beta r_\tau^{\star_\epsilon}\right)^{\star_\epsilon}s_{-\gamma}\mathbf{e} \\
= \; & \epsilon(\tau,\beta+\gamma)B\left(v_\alpha, w_\beta r_\tau^{\star_\epsilon}\right).
\end{aligned}$$

Logo, observamos que a ϵ-semiadjunta de B coincide com $\star_\epsilon$ e que $r_\tau \in \mathcal{L}_V^{gr_\epsilon}$. Então, $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{L}_V^{gr_\epsilon}$.

Passo 5. Afirmamos que $\mathcal{F}_V^{gr*_\epsilon} \subseteq \mathcal{R}$. De fato, como vimos no Passo 3 da prova do Lema 4.19 acima, a aplicação

$$\begin{array}{rccccc}
\mathfrak{R}: & \mathcal{R} & \longrightarrow & End_\Delta^{gr}(V) & & \\
& r & \longmapsto & \mathfrak{R}_r: & V & \longrightarrow & V \\
& & & & v & \longmapsto & (v)\mathfrak{R}_r := vr,
\end{array}$$

é um monomorfismo de $\mathcal{S}$-álgebras G-graduadas. Agora, observamos que para quaisquer $w_{\beta-\eta} \in V_{\beta-\eta}^{[-\gamma]}$ e $v_\eta \in V_\eta$, temos

$$B\left(v_\alpha, w_{\beta-\eta}\right)v_\eta = v_\alpha w_{\beta-\eta}^{\star_\epsilon}s_{-\gamma}\mathbf{e}v_\eta = (v_\alpha)\mathfrak{R}_{w_{\beta-\eta}^{\star_\epsilon}s_{-\gamma}\mathbf{e}v_\eta},$$

para todo $v_\alpha \in V_\alpha$. Logo, $B\left(-, w_{\beta-\eta}\right)v_\eta = \mathfrak{R}_{w_{\beta-\eta}^{\star_\epsilon}s_{-\gamma}\mathbf{e}v_\eta} \in \mathcal{R}$. Assim, pelo Lema 4.15, segue que $\mathcal{F}_V^{gr*_\epsilon} \subseteq \mathcal{R}$. □

4.3 Caracterização das Involuções Coloridas

Teorema 4.21. *Seja G um grupo abeliano e $\epsilon : G \times G \longrightarrow \mathbb{U}(\mathcal{S})$ um bicaráter antissimétrico e $\mathcal{R}$ uma $\mathcal{S}$-álgebra G-graduada com característica diferente de 2. Então, $\mathcal{R}$ é uma $\mathcal{S}$-álgebra G-graduada primitiva à direita com um ideal à direita G-graduado minimal e com uma ϵ-involução $\star_\epsilon : \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}$ se, e somente se, existem um elemento $g \in G$, uma $\mathcal{S}$-álgebra G-graduada de divisão Δ com uma ϵ-involução $\bar{\bullet}: \Delta \longrightarrow \Delta$, um Δ-espaço ${}_\Delta V$ e uma forma sesquilinear graduada com torção não degenerada hermitiana ou anti-hermitiana $B : V \times V^{[g]} \longrightarrow \Delta$, tais que*

$$\mathcal{F}_V^{gr*\epsilon} \subseteq \mathcal{R} \subseteq \mathcal{L}_V^{gr*\epsilon}$$

e $\mathcal{R}$ é invariante pela ação da ϵ-semiadjunta associada a B.

Demonstração. Se $\mathcal{R}$ é uma $\mathcal{S}$-álgebra G-graduada primitiva à direita com um ideal à direita G-graduado minimal e com uma ϵ-involução $\star_\epsilon : \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}$ então, pelo Teorema 4.18 e pelos Lemas 4.19 e 4.20, existem um elemento $g \in G$, uma $\mathcal{S}$-álgebra G-graduada de divisão Δ com uma ϵ-involução $\bar{\bullet}: \Delta \longrightarrow \Delta$, um Δ-espaço ${}_\Delta V$ e uma forma sesquilinear graduada com torção não degenerada hermitiana ou anti-hermitiana $B : V \times V^{[g]} \longrightarrow \Delta$, tais que

$$\mathcal{F}_V^{gr*\epsilon} \subseteq \mathcal{R} \subseteq \mathcal{L}_V^{gr*\epsilon}$$

e $\mathcal{R}$ é invariante pela ação da ϵ-adjunta associada a B.

Reciprocamente, seja $\mathcal{R}$ uma $\mathcal{S}$-álgebra G-graduada. Se existem um elemento $g \in G$, uma $\mathcal{S}$-álgebra G-graduada de divisão Δ com uma ϵ-involução $\bar{\bullet}: \Delta \longrightarrow \Delta$, um Δ-espaço graduado ${}_\Delta V$ e uma forma sesquilinear graduada com torção não degenerada hermitiana ou anti-hermitiana $B : V \times V^{[g]} \longrightarrow \Delta$ tais que $\mathcal{F}_V^{gr*\epsilon} \subseteq \mathcal{R} \subseteq \mathcal{L}_V^{gr*\epsilon}$ e $\mathcal{R}$ é invariante pela ação da ϵ-semiadjunta $*_\epsilon$ associada a B, então, pela Proposição 4.17, segue que $*_\epsilon$ é uma ϵ-involução sobre $\mathcal{R}$. Além disso, pela Proposição 4.16, $\mathcal{R}$ é G-graduada primitiva.

Agora vamos mostrar que $\mathcal{R}$ também tem um ideal à direita graduado minimal. Seja $u_0 \in V_0$ um elemento homogêneo não nulo. Para cada $\alpha \in G$, definimos o conjunto

$$J_\alpha := \{r_\alpha \in \mathcal{R}_\alpha : V_\beta r_\alpha \in \Delta_{\alpha+\beta} u_0, \text{ para todo } \beta \in G\} \subseteq \mathcal{F}_V^{gr*\epsilon} \subseteq \mathcal{R}.$$

Observamos que

$$J := \bigoplus_{\alpha \in G} J_\alpha$$

é um ideal à esquerda graduado de $\mathcal{R}$. Além disso, pelo Lema 4.14, $J \neq (0)$.

Vamos verificar que J é um ideal à esquerda graduado minimal. Seja $0 \neq y_{\beta-\gamma} \in V_{\beta-\gamma}^{[g]}$ fixo. Agora, definimos o elemento homogêneo de $(\mathcal{F}_V^{gr*\epsilon})_\beta$,

$$\begin{array}{rccc} b_\beta : & {}_\Delta V & \longrightarrow & {}_\Delta V \\ & v & \longmapsto & B_\gamma(v, y_{\beta-\gamma}) u_0, \end{array}$$

que, evidentemente, também pertence a J_β. Afirmamos que $J = \mathcal{R} b_\beta$. Seja $a_\alpha \in J_\alpha$ um elemento homogêneo arbitrário. Pelo Lema 4.12, existe $w_{-\gamma} \in V_{-\gamma}^{[g]}$ tal que

$$B_\gamma(u_0, w_{-\gamma}) = 1.$$

Daí, para todo $v_\theta \in V_\theta$ e qualquer $\theta \in G$, obtemos:

$$\begin{aligned} v_\theta a_\alpha = & \; d_{\theta+\gamma} u_0 \\ = & \; B_\gamma \left(d_{\theta+\gamma} u_0, w_{-\gamma} \right) u_0 \\ = & \; B_\gamma \left(v_\theta a_\alpha, w_{-\gamma} \right) u_0 \\ = & \; \epsilon(\alpha, -g) B_\gamma \left(v_\theta, w_{-\gamma} a^{\circledast_\epsilon} \right) \end{aligned}$$

e

$$v_\theta b_\beta = \epsilon(\beta, -g) B_\gamma \left(v_\theta, w_{-\gamma} b_\beta^{\circledast_\epsilon} \right).$$

Como $b_\beta \neq 0$, então $w_{-\gamma} b_\beta^{\circledast_\epsilon} \neq 0$. Logo, também

$$0 \neq \overline{\xi} \epsilon(-\beta, -\gamma + \beta - g) \epsilon(-\beta, \gamma) \epsilon(\gamma, -\gamma + \beta - g) \epsilon(\beta, -g) w_{-\gamma} b_\beta^{\circledast_\epsilon} \in V_{\beta-\gamma-g}$$

Agora, pelo Lema 4.12, existe $x_{-\beta} \in V_{-\beta} = V_{g-\beta}^{[g]}$, tal que

$$B_\gamma \left(\overline{\xi} \epsilon(-\beta, -\gamma + \beta - g) \epsilon(-\beta, \gamma) \epsilon(\gamma, -\gamma + \beta - g) \epsilon(\beta, -g) w_{-\gamma} b_\beta^{\circledast_\epsilon}, x_{-\beta} \right) = 1$$

Assim, como B_γ é ξ-hermitiana com $\xi = \pm 1$, obtemos

$$\begin{aligned} & B_\gamma \left(x_{-\beta}, \epsilon(\beta - g) w_{-\gamma} b_\beta^{\circledast_\epsilon} \right) = \\ = \; & \epsilon(-\beta, -\gamma + \beta - g) \epsilon(-\beta, \gamma) \epsilon(\gamma, -\gamma + \beta - g) \xi \overline{B_\gamma \left(\epsilon(\beta, -g) w_{-\gamma} b_\beta^{\circledast_\epsilon}, x_{-\beta} \right)} \\ = \; & \xi \left(\overline{\xi \overline{\xi} \epsilon(-\beta, -\gamma + \beta - g) \epsilon(-\beta, \gamma) \epsilon(\gamma, -\gamma + \beta - g) B_\gamma \left(\epsilon(\beta, -g) w_{-\gamma} b_\beta^{\circledast_\epsilon}, x_{-\beta} \right)} \right) \\ = \; & \xi \left(\overline{\xi B_\gamma \left(\overline{\xi} \epsilon(-\beta, -\gamma + \beta - g) \epsilon(-\beta, \gamma) \epsilon(\gamma, -\gamma + \beta - g) \epsilon(\beta, -g) w_{-\gamma} b_\beta^{\circledast_\epsilon}, x_{-\beta} \right)} \right) \\ = \; & \xi \overline{\xi} \\ = \; & 1. \end{aligned}$$

Definimos

$$c_{\alpha-\beta} := \epsilon(\alpha, -g) B_\gamma \left(-, w_{-\gamma} a_\alpha^{\circledast_\epsilon} \right) x_{-\beta} : \quad \begin{array}{rcl} {}_\Delta V & \longrightarrow & {}_\Delta V \\ v = \sum\limits_{\theta \in G} v_\theta & \longmapsto & \sum\limits_{\theta \in G} \epsilon(\alpha, -g) B_\gamma \left(v_\theta, w_{-\gamma} a_\alpha^{\circledast_\epsilon} \right) x_{-\beta}. \end{array}$$

Observamos que, pelo Lema 4.13, $c_{\alpha-\beta} \in (\mathcal{F}_V^{gr \circledast_\epsilon})_{\alpha-\beta}$. Agora, temos

$$\begin{aligned} v_\theta c_{\alpha-\beta} b_\beta = & \; \epsilon(\beta, -g) B_\gamma \left(v_\theta c_{\alpha-\beta}, w_{-\gamma} b_\beta^{\circledast_\epsilon} \right) u_0 \\ = & \; \epsilon(\beta, -g) B_\gamma \left(\epsilon(\alpha, -g) B_\gamma \left(v_\theta, w_{-\gamma} b_\beta^{\circledast_\epsilon} \right) x_{-\beta}, w_{-\gamma} b_\beta^{\circledast_\epsilon} \right) u_0 \\ = & \; \epsilon(\beta, -g) \epsilon(\alpha, -g) B_\gamma \left(v_\theta, w_{-\gamma} b_\beta^{\circledast_\epsilon} \right) B_\gamma \left(x_{-\beta}, w_{-\gamma} b_\beta^{\circledast_\epsilon} \right) u_0 \\ = & \; \epsilon(\alpha, -g) B_\gamma \left(v_\theta, w_{-\gamma} b_\beta^{\circledast_\epsilon} \right) u_0 \\ = & \; v_\theta a_\alpha, \end{aligned}$$

para todo $v_\theta \in V_\theta$ e qualquer $\theta \in G$. Em outras palavras, qualquer $a_\alpha \in J_\alpha$ é da forma $a_\alpha = c_{\alpha-\beta} b_\beta$, para algum $c_{\alpha-\beta} \in \left(\mathcal{F}_V^{\circledast_\epsilon} \right)_{\alpha-\beta} \subseteq \mathcal{R}_{\alpha-\beta}$. Consequentemente, $J \subseteq \mathcal{R} b_\beta$. Por outro lado, como $b_\beta \in J_\beta$, $\mathcal{R} b_\beta \subseteq J$. Portanto,

$$J = \mathcal{R} b_\beta,$$

como tínhamos afirmado.

Suponha que $(0) \neq J' \subseteq J$ é também um ideal à esquerda graduado de $\mathcal{R}$. Seja $0 \neq a_\alpha \in J'_\alpha \subseteq J_\alpha$. Então,

$$v_\theta a_\alpha = \epsilon(\alpha, -g) B_\gamma\left(v_\theta, w_{-\gamma} a_\alpha^{\circledast_\epsilon}\right) u_0$$

Como $a_\alpha \neq 0$, $w_{-\gamma} a_\alpha^{\circledast_\epsilon} \neq 0$. Logo, pelo Lema 4.12, existe $u_{-\alpha} \in V_\alpha$ tal que

$$\epsilon(\alpha, -g) B_\gamma\left(u_{-\alpha}, w_{-\gamma} a_\alpha^{\circledast_\epsilon}\right) = 1$$

Daí, $u_{-\alpha} a_\alpha = \epsilon(\alpha, -g) B_\gamma\left(u_{-\alpha}, w_{-\gamma} a_\alpha^{\circledast_\epsilon}\right) u_0 = u_0$. Definimos

$$\begin{array}{rccc} t_{\beta-\alpha}: & {}_\Delta V & \longrightarrow & {}_\Delta V \\ & v & \longmapsto & B_\gamma\left(v, y_{\beta-\gamma}\right) u_{-\alpha} \end{array}$$

que pelo Lema 4.13, pertence a $(\mathcal{F}_V^{gr *_\epsilon})_{\beta-\alpha}$. Além disso,

$$\begin{aligned} v_\theta t_{\beta-\alpha} a_\alpha &= \epsilon(\alpha, -g) B_\gamma\left(v_\theta t_{\beta-\alpha}, w_{-\gamma} a_\alpha^{\circledast_\epsilon}\right) u_0 \\ &= \epsilon(\alpha, -g) B_\gamma\left(B_\gamma\left(v_\theta, y_{\beta-\gamma}\right) u_{-\alpha}, w_{-\gamma} a_\alpha^{\circledast_\epsilon}\right) u_0 \\ &= \epsilon(\alpha, -g) B_\gamma\left(v_\theta, y_{\beta-\gamma}\right) B_\gamma\left(u_{-\alpha}, w_{-\gamma} a_\alpha^{\circledast_\epsilon}\right) u_0 \\ &= B_\gamma\left(v_\theta, y_{\beta-\gamma}\right) u_0 \\ &= v_\theta b_\beta, \end{aligned}$$

para todo v_θ e qualquer $\theta \in G$. Logo,

$$b_\beta = t_{\beta-\alpha} a_\alpha \in J'.$$

Consequentemente, $J' \subseteq J = \mathcal{R} b_\beta \subseteq J'$. Portanto, J é um ideal à direita graduado minimal de $\mathcal{R}$. Logo, pelo Lema 1.11, $\mathcal{R}$ também contém um ideal à direita graduado minimal. Com isso completamos a demonstração do teorema. $\square$

Considerações Finais

Em todo o trabalho assumimos que G é um grupo abeliano, $\mathcal{S}$ é um anel associativo comutativo unitário com característica diferente de 2 e com G-graduação trivial, $\mathbb{U}(\mathcal{S})$ é o conjunto de todos os elementos invertíveis de $\mathcal{S}$ e $\sigma : G \times G \longrightarrow \mathbb{U}(\mathcal{S})$ é um 2-cociclo antissimétrico.

Um σ-antiautomorfismo em uma $\mathcal{S}$-álgebra G-graduada $\mathcal{R} = \bigoplus_{\alpha \in G} \mathcal{R}_\alpha$ é uma aplicação bijetora $\mathcal{S}$-linear $\varphi : \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}$ tal que

$$r_\alpha^\varphi \in \mathcal{R}_\alpha \quad \text{e} \quad (r_\beta r_\tau)^\varphi = \sigma(\beta, \tau) r_\tau^\varphi r_\beta^\varphi,$$

para todos $r_\alpha \in \mathcal{R}_\alpha, r_\beta \in \mathcal{R}_\beta, r_\tau \in \mathcal{R}_\tau$ e todos $\alpha, \beta, \tau \in G$. Além disso, φ é uma σ-involução quando φ é um σ-antiautomorfismo de ordem 2, isto é, quando $r_\alpha^{\varphi^2} = r_\alpha$ para todo r_α e todo $\alpha \in G$. Também temos que uma σ-involução φ é chamada de involução colorida quando σ é um bicaráter antissimétrico, isto é, quando σ é um 2-cociclo antissimétrico que satisfaz

$$\sigma(\alpha + \beta, \gamma) = \sigma(\alpha, \gamma)\sigma(\beta, \gamma) \quad \text{e} \quad \sigma(\alpha, \beta + \gamma) = \sigma(\alpha, \beta)\sigma(\alpha, \gamma),$$

para todos $\alpha, \beta, \gamma \in G$. As involuções coloridas são generalização das involuções graduadas, das $\mathbb{Z}_3$-involuções e das superinvoluções, em álgebras associativas.

Em [22], Sousa e Sviridova apresentaram uma descrição para os anéis G-graduados primitivos ($\mathbb{F}$-álgebras G-graduadas primitivas) com um ideal à direita G-graduado minimal. Em nosso trabalho, verificamos que esse resultado continua válido para $\mathcal{S}$-álgebras G-graduadas primitivas com um ideal à direita G-graduado minimal (ver Teorema 2.28). Usando esta descrição, nós estudamos nestas álgebras os isomorfismos graduados (ver Teorema 3.14), os σ-antiautomorfismos (ver Teorema 3.25) e as involuções coloridas (ver Teorema 4.21). Vimos que a descrição dos σ-antiautomorfismos está relacionada com formas sesquilineares graduadas com torção não degeneradas fracamente hermitianas enquanto que a descrição das involuções coloridas está relacionada com formas sesquilineares graduadas com torção não degeneradas hermitianas e anti-hermitianas. Para alcançar estes resultados, introduzimos alguns conceitos que generalizam outros conceitos que já apareciam antes na literatura. Apresentamos, no que segue, detalhes dos nossos resultados, algumas relações deles com resultados de outros autores, e como nossos resultados podem incentivar, ou ser úteis, para investigações futuras.

Teorema de Estrutura

Em [22] foi introduzido o conceito de forma bilinear homogênea não degenerada para o caso em que $\mathcal{S} = \mathbb{Z}$ é o anel dos números inteiros ou $\mathcal{S} = \mathbb{F}$ é um corpo. Aqui apresentamos este conceito para quando $\mathcal{S}$ é um anel associativo comutativo unitário arbitrário, com característica diferente de 2 e com G-graduação trivial.

Definição (forma bilinear homogênea não degenerada): *Sejam Δ uma $\mathcal{S}$-álgebra G-graduada de divisão, V um Δ-espaço à esquerda G-graduado e W um Δ-espaço à direita G-graduado. Dado $\gamma \in G$, uma aplicação $\langle -,- \rangle_\gamma : V \times W \longrightarrow \Delta$ é uma **forma Δ-bilinear homogênea de grau** γ se:*

1. *$\langle -,- \rangle_\gamma$ é bilinear;*
2. *$\langle v_\alpha, w_\beta \rangle_\gamma \in \Delta_{\alpha+\beta+\gamma}$, para todos $v_\alpha \in V_\alpha$ $w_\beta \in W_\beta$ e quaisquer $\alpha, \beta \in G$;*
3. *$\langle d_\tau v_\alpha, w_\beta \rangle_\gamma = d_\tau \langle v_\alpha, w_\beta \rangle_\gamma$ e $\langle v_\alpha, w_\beta d_\tau \rangle_\gamma = \langle v_\alpha, w_\beta \rangle_\gamma d_\tau$, para todos $d_\tau \in \Delta_\tau, v_\alpha \in V_\alpha, w_\beta \in W_\beta$ e quaisquer $\tau, \alpha, \beta \in G$.*

*Além disso, uma forma Δ-bilinear homogênea $\langle -,- \rangle_\gamma$ é dita **não degenerada** se:*

4. *para qualquer $\alpha \in G$ e todo $v_\alpha \in V_\alpha$, temos que $\langle v_\alpha, W \rangle_\gamma = (0)$ implica $v_\alpha = 0$;*
5. *para qualquer $\beta \in G$ e todo $w_\beta \in W_\beta$, temos que $\langle V, w_\beta \rangle_\gamma = (0)$ implica $w_\beta = 0$.*

Logo, associados a uma forma bilinear homogênea não degenerada, temos os conceitos de σ-adjunta e de σ-coadjunta. Dada uma forma Δ-bilinear homogênea de grau γ não degenerada $\langle -,- \rangle_\gamma : V \times W \longrightarrow \Delta$, se $b_\theta \in End_{\Delta^{op\sigma}}(W)_\theta$ e $a_\theta \in End_\Delta(V)_\theta$ são dois elementos homogêneos tais que

$$\langle v_\alpha a_\theta, w_\beta \rangle_\gamma = \sigma(\theta, \beta) \langle v_\alpha, w_\beta b_\theta \rangle_\gamma ,$$

para todos $v_\alpha \in V_\alpha, w_\beta \in W_\beta$ e quaisquer $\alpha, \beta \in G$, então b_θ é dita uma **σ-adjunta** de a_θ e a_θ é dita uma **σ-coadjunta** de b_θ. Observamos que para cada $\theta \in G$ fixo:

$$\mathcal{L}_W^{gr_\sigma}(V)_\theta := \{a_\theta \in End_\Delta(V)_\theta : a_\theta \text{ tem } \sigma\text{-adjunta em } End_{\Delta^{op\sigma}}(W)_\theta\}$$

e

$$\mathcal{F}_W^{gr_\sigma}(V)_\theta := \{a_\theta \in \mathcal{L}_W^{gr_\sigma}(V)_\theta : \ dim_{\Delta^{op\sigma}}(V a_\theta) < \infty\}$$

são $\mathcal{S}$-módulos. Além disso, temos que

$$\mathcal{L}_W^{gr_\sigma}(V) := \bigoplus_{\theta \in G} \mathcal{L}_W^{gr_\sigma}(V)_\theta$$

é uma $\mathcal{S}$-subálgebra graduada da $\mathcal{S}$-álgebra G-graduada $End_D^{gr}(V)$ e

$$\mathcal{F}_W^{gr_\sigma}(V) := \bigoplus_{\theta \in G} \mathcal{F}_W^{gr_\sigma}(V)_\theta$$

é um ideal graduado da $\mathcal{S}$-álgebra G-graduada $\mathcal{L}_W^{gr_\sigma}(V)$. Logo, em termos da $\mathcal{S}$-álgebra G-graduada $\mathcal{L}_W^{gr_\sigma}(V)$ e do ideal G-graduado $\mathcal{F}_W^{gr_\sigma}(V)$, é apresentada a descrição das $\mathcal{S}$-álgebras associativas G-graduadas primitivas com um ideal à direita graduado minimal.

Teorema A (Teorema 2.28): *Sejam* $\sigma : G \times G \longrightarrow \mathbb{U}(\mathcal{S})$ *um* 2*-cociclo antissimétrico satisfazendo* $\sigma(\alpha, -\alpha)^2 = 1$*, para cada* $\alpha \in G$*, e* $\mathcal{R}$ *uma* $\mathcal{S}$*-álgebra* G*-graduada. Então* $\mathcal{R}$ *é graduada primitiva à direita com um ideal à direita graduado minimal se, e somente se, existe um elemento* $\gamma \in G$ *e existe uma forma* Δ*-bilinear homogênea de grau* γ *não degenerada* $\langle -, - \rangle_\gamma : V \times W \longrightarrow \Delta$*, tal que*

$$\mathcal{F}_W^{gr_\sigma}(V) \subseteq \mathcal{R} \subseteq \mathcal{L}_W^{gr_\sigma}(V).$$

Além disso, quando temos a relação $\mathcal{F}_W^{gr_\sigma}(V) \subseteq \mathcal{R} \subseteq \mathcal{L}_W^{gr_\sigma}(V)$*, então* $\mathcal{F}_W^{gr_\sigma}(V)$ *é o único ideal graduado minimal de* $\mathcal{R}$*.*

Como já foi mencionado anteriormente, o **Teorema A** foi apresentado em [22] para o caso particular em que $\mathcal{S} = \mathbb{Z}$ é o anel dos números inteiros ou $\mathcal{S} = \mathbb{F}$ é um corpo. Este teorema é semelhante ao um resultado de [1] (ver Theorem 3.), obtido por Bahturin, Bresar e Kochetov. O resultado deles é válido para anéis graduados ($\mathbb{F}$-álgebras graduadas) por um grupo arbitrário, mas não envolve os 2-cociclos antissimétricos.

O **Teorema A** nos mostra que as álgebras associativas G-graduadas primitivas com ideal à direita G-graduado minimal que são simples são exatamente as $\mathcal{S}$-álgebras $\mathcal{F}_W^{gr_\sigma}(V)$. Uma questão natural que surge neste teorema é sobre a unicidade da forma bilinear homogênea graduada $\langle -, - \rangle_\gamma : V \times W \longrightarrow \Delta$. Nosso seguinte resultado, o Teorema do Isomorfismo, responde a esta questão.

Teorema do Isomorfismo

O nosso Teorema do Isomorfismo descreve os isomorfismos entre as $\mathcal{S}$-álgebras G-graduadas primitivas com um ideal à direita graduado minimal. Para o estudo destes isomorfismos graduados usamos a descrição das $\mathcal{S}$-álgebras apresentada no **Teorema A**. Agora, antes de apresentar a descrição dos isomorfismos, lembramos os conceitos de shift e de isomorfismo triplo.

Se $M = \bigoplus_{\alpha \in G} M_\alpha$ é um $\mathcal{S}$-módulo G-graduado e $g \in G$ é um elemento fixo, então o **shift na G-graduação de M dado por** g é definido como $M^{[g]} = \bigoplus_{\alpha \in G} M_\alpha^{[g]}$, onde $M_\alpha^{[g]} = M_{\alpha - g}$, para cada $\alpha \in G$. Se $\langle -, - \rangle_\gamma : V \times W \longrightarrow \Delta$ e $\langle -, - \rangle'_\gamma : V' \times W' \longrightarrow \Delta'$ saõ duas formas bilineares homogêneas de grau γ não degeneradas, então uma tripla (ψ_0, ψ_1, ψ_2) é um **isomorfismo triplo**, da tripla (Δ, V, W) para a tripla (Δ', V', W'), se

- $\psi_0 : \Delta \longrightarrow \Delta'$ é um isomorfismo graduado de $\mathcal{S}$-álgebras G-graduadas de divisão;
- $\psi_1 : V \longrightarrow V'$ e $\psi_2 : W \longrightarrow W'$ são isomorfismos graduados de $\mathcal{S}$-módulos G-graduados;

tais que

$$\langle \psi_1(v_\alpha), \psi_2(w_\beta) \rangle'_\gamma = \psi_0\left(\langle v_\alpha, w_\beta \rangle_\gamma\right),$$

para todos $v_\alpha \in V_\alpha, w_\beta \in W_\beta$ e quaisquer $\alpha, \beta \in G$.

Teorema B (Teorema 3.14): *Sejam* $\langle -,- \rangle_\gamma : V \times W \longrightarrow \Delta$ *e* $\langle -,- \rangle'_\gamma : V' \times W' \longrightarrow \Delta'$ *duas formas bilineares homogêneas de grau* γ *não degeneradas. Se* $\mathcal{R}$ *e* $\mathcal{R}'$ *são duas* $\mathcal{S}$*-álgebras* G*-graduadas, tais que*

$$\mathcal{F}_W^{gr_\sigma}(V) \subseteq \mathcal{R} \subseteq \mathcal{L}_W^{gr_\sigma}(V) \text{ e } \mathcal{F}_{W'}^{gr_\sigma}(V') \subseteq \mathcal{R}' \subseteq \mathcal{L}_{W'}^{gr_\sigma}(V'),$$

e se $\Psi : \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}'$ *é um isomorfismo graduado de* $\mathcal{S}$*-álgebras* G*-graduadas, então existem um elemento* $g \in G$ *e um isomorfismo triplo* (ψ_0, ψ_1, ψ_2) *de* $\left(\Delta, V^{[g]}, W^{[-g]}\right)$ *para* (Δ', V', W')*, tais que*

$$\Psi(r) = \psi_1^{-1} \cdot r \cdot \psi_1, \text{ para todo } r \in \mathcal{R}. \tag{4.7}$$

Além disso, se outro elemento $h \in G$ *e outro isomorfismo triplo* $(\psi'_0, \psi'_1, \psi'_2)$*, de* $\left(\Delta, V^{[h]}, W^{[-h]}\right)$ *para* (Δ', V', W')*, definem* Ψ *como em (4.7), então existe um elemento homogêneo não nulo* $d' \in \Delta'$ *tal que*

- $h = g + \mathbf{deg}(d')$*;*
- $\psi'_0(x) = d'\psi_0(x)(d')^{-1}$ *para todo* $x \in \Delta$*;*
- $(v)\psi'_1 = d'(v)\psi_1$ *para todo* $v \in V$*;*
- $\psi'_2(w) = \psi_2(w)(d')^{-1}$ *para todo* $w \in W$*.*

Como uma recíproca parcial, se $g \in G$ *e* (ψ_0, ψ_1, ψ_2) *é um isomorfismo triplo de* $\left(\Delta, V^{[g]}, W^{[-g]}\right)$ *para* (Δ', V', W')*, então existe um isomorfismo graduado de* $\mathcal{S}$*-álgebras* G*-graduadas*

$$\Psi : End_\Delta^{gr}(V^{[g]}) \longrightarrow End_{\Delta'}^{gr}(V'),$$

definido pela correspondência $a_\tau \longmapsto \psi_1^{-1} \cdot a_\tau \cdot \psi_1$*, tal que*

$$\Psi\left(\mathcal{L}_{W^{[-g]}}^{gr_\sigma}(V^{[g]})\right) = \mathcal{L}_{W'}^{gr_\sigma}(V') \text{ e } \Psi\left(\mathcal{F}_{W^{[-g]}}^{gr_\sigma}\left(V^{[g]}\right)\right) = \mathcal{F}_{W'}^{gr_\sigma}(V').$$

Observamos que o **Teorema B**, ou Teorema do Isomorfismo, responde à questão sobre a unicidade da forma bilinear homogênea não degenerada que aparece na descrição das $\mathcal{S}$-álgebras G-graduadas primitivas com um ideal à direita G-graduado minimal, do **Teorema A**. Além disso, observamos que este teorema descreve totalmente os isomorfismos entre as $\mathcal{S}$-álgebras G-graduadas primitivas com um ideal à direita G-graduado minimal que são simples.

O **Teorema B** também é um resultado semelhante ao Theorem 6, em [1]. Neste resultado, Bahturin, Bresar e Kochetov descrevem os isomorfismos em anéis ($\mathbb{F}$-álgebras), graduados (graduadas) por um grupo arbitrário, que são primitivos (primitivas) com um ideal à esquerda graduado minimal. Também destacamos que o resultado presente em [1] não envolve os 2-cociclos antissimétricos.

Ressaltamos que o **Teorema B** foi fundamental na demonstração do teorema que descreve os σ-antiautomorfismos nas $\mathcal{S}$-álgebras G-graduadas primitivas com um ideal à direita G-graduado minimal.

σ-Antiautomorfismos

Para o estudo dos σ-antiautomorfismos nas $\mathcal{S}$-álgebras associativas G-graduadas primitivas com um ideal à direita G-graduado minimal, nós introduzimos o conceito de forma sesquilinear homogênea com torção não degenerada. Este conceito generalizou o conceito de forma sesquilinear graduada com torção não degenerada que foi introduzido em [22] e generalizou o conceito de forma sesquilinear homogênea não degenerada que aparece em [1].

Definição (forma sesquilinear homogênea com torção não degenerada): *Sejam $g \in G$ um elemento fixo, Δ uma $\mathcal{S}$-álgebra G-graduada de divisão com um σ-antiautomorfismo $\psi_0 : \Delta \longrightarrow \Delta$ e ${}_{\Delta}V$ um Δ-espaço G-graduado. Uma aplicação $\mathcal{S}$-bilinear $B_\gamma : V \times V^{[g]} \longrightarrow \Delta$ é uma **forma ψ_0-sesquilinear homogênea de grau** $\gamma \in G$ **com torção** se*

1. *$B_\gamma\left(v_\alpha, w_\beta\right) \in \Delta_{\alpha+\beta+\gamma}$, para todos $v_\alpha \in V_\alpha,\ w_\beta \in V_\beta^{[g]}$;*
2. *$B_\gamma\left(d_\theta v_\alpha, w_\beta\right) = d_\theta B_\gamma\left(v_\alpha, w_\beta\right)$ e $B_\gamma\left(v_\alpha, d_\theta w_\beta\right) = \sigma(\theta,\beta) B_\gamma\left(v_\alpha, w_\beta\right)\psi_0\left(d_\theta\right)$, para todos $v_\alpha \in V_\alpha$, $w_\beta \in V_\beta^{[g]}$ e $d_\theta \in \Delta_\theta$.*

Se, além disso, B_γ satisfaz que

3. *para todo $v_\alpha \in V_\alpha$, $B_\gamma\left(v_\alpha, V\right) = (0)$ implica $v_\alpha = 0$;*
4. *para todo $w_\beta \in V_\beta^{[g]}$, $B_\gamma\left(V, w_\beta\right) = (0)$ implica $w_\beta = 0$;*

*dizemos que B_γ é uma **forma ψ_0-sesquilinear homogênea de grau** γ **com torção não degenerada**.*

Associados a uma forma sesquilinear homogênea com torção não degenerada, temos os conceitos de σ-adjunta e de σ-coadjunta. Seja $B_\gamma : V \times V^{[g]} \longrightarrow \Delta$ uma forma ψ_0-sesquilinear homogênea de grau γ com torção não degenerada. Dados dois elementos homogêneos $a_\tau, b_\tau \in End_\Delta\left(V\right)_\tau$ tais que

$$B_\gamma\left(v_\alpha a_\tau, w_\beta\right) = \sigma(\tau,\beta) B_\gamma\left(v_\alpha, w_\beta b_\tau\right), \tag{4.8}$$

para todos $v_\alpha \in V_\alpha,\ w_\beta \in V_\beta^{[g]}$, dizemos que b_τ é uma **σ-adjunta** de a_τ e que a_τ é uma **σ-coadjunta** de b_τ.

Lembramos que se Δ e Δ' são $\mathcal{S}$-álgebras G-graduadas de divisão, $\psi_0 : \Delta \longrightarrow \Delta'$ é um isomorfismo de $\mathcal{S}$-álgebras G-graduadas de divisão e, ${}_{\Delta}V$, ${}_{\Delta'}V'$, W_Δ e $W'_{\Delta'}$ são espaços G-graduados, então um homomorfismo graduado de $\mathcal{S}$-módulos G-graduados, $\psi : V \longrightarrow V'$, é **$\psi_0$-semilinear** se

$$\psi(d_\tau v_\alpha) = \psi_0(d_\tau)\psi(v_\alpha),$$

para todos $d_\tau \in \Delta_\tau,\ v_\alpha \in V_\alpha$ e quaisquer $\tau, \alpha \in G$. Analogamente, um homomorfismo graduado de $\mathcal{S}$-módulos G-graduados $\psi' : W \longrightarrow W'$ é **ψ_0-semilinear** se

$$\psi'(w_\alpha d_\tau) = \psi'(w_\alpha)\psi_0(d_\tau),$$

para todos $d_\tau \in \Delta_\tau,\ w_\alpha \in W_\alpha$ e quaisquer $\tau, \alpha \in G$.

Outro conceito que introduzimos foi o conceito de forma fracamente hermitiana. Este é uma generalização do conceito de forma fracamente hermitiana que aparece em [1].

Definição (forma fracamente hermitiana): *Dizemos que uma forma ψ_0-sesquilinear graduada com torção não degenerada $B : V \times V^{[g]} \longrightarrow \Delta$ é* ***fracamente hermitiana*** *se existe um isomorfismo de $\mathcal{S}$-módulos G-graduados ψ_0^{-2}-semilinear, $Q : V \longrightarrow V$, tal que*

$$B(v_\beta, v_\alpha) = \sigma(\beta, \alpha)\psi_0(B(v_\alpha, v_\beta Q)), \text{ para todos } v_\beta \in V_\beta, v_\alpha \in V_\alpha^{[g]}.$$

Agora, estamos prontos para apresentar a nossa descrição dos σ-antiautomorfismos.

Teorema C (Teorema 3.25): *Sejam G um grupo abeliano, $\langle -,-\rangle : V \times W \longrightarrow \Delta$ uma forma Δ-bilinear graduada não degenerada associada à tripla (Δ, V, W) e $\mathcal{R}$ uma $\mathcal{S}$-álgebra G-graduada tal que $\mathcal{F}_W^{gr_\sigma}(V) \subseteq \mathcal{R} \subseteq \mathcal{L}_W^{gr_\sigma}(V)$. Se $\Phi : \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}$ é um σ-antiautomorfismo, então existe um σ-antiautomorfismo $\psi_0 : \Delta \longrightarrow \Delta$ e existe uma forma ψ_0-sesquilinear graduada com torção não degenerada fracamente hermitiana $B : V \times V^{[g]} \longrightarrow \Delta$, para algum $g \in G$, tal que:*

(i) para todo $r_\tau \in R_\tau$, temos que $\Phi(r_\tau)$ é a σ-coadjunta de r_τ a respeito de B, isto é,

$$B(u_\alpha, v_\beta r_\tau) = \sigma(\beta, \tau)B(u_\alpha \Phi(r_\tau), v_\beta), \text{ para todos } u_\alpha \in V_\alpha, v_\beta \in V_\beta^{[g]};$$

(ii) $\langle -, W\rangle$ é a imagem da aplicação

$$\begin{array}{rcl} V & \longrightarrow & V^{gr_\sigma *} \\ u & \longmapsto & f_u : \begin{array}{rcl} V & \longrightarrow & \Delta \\ v & \longmapsto & f_u(v) := B(v,u). \end{array} \end{array}$$

Além disso, se $\varphi_0' : \Delta \longrightarrow \Delta$ é um outro σ-antiautomorfismo e $B' : V \times V^{[g]} \longrightarrow \Delta$ é uma outra forma φ_0'-sesquilinear graduada com torção não degenerada fracamente hermitiana, que definem Φ e $\langle -, W\rangle$ como nos itens (i) e (ii) acima, então existe um elemento homogêneo $0 \neq d \in \Delta$ tal que:

- *$B' = \sigma(0,0)Bd$;*
- *$\varphi_0'(x) = d\psi_0(x)d^{-1}$ para todo $x \in \Delta$.*

Como uma recíproca parcial, se $\psi_0 : \Delta \longrightarrow \Delta$ é um σ-antiautomorfismo e, para algum $g \in G$, $B : V \times V^{[g]} \longrightarrow \Delta$ é uma forma ψ_0-sesquilinear graduada com torção não degenerada fracamente hermitiana, então existe uma forma Δ-bilinear graduada não degenerada $\langle -,-\rangle : V^{[g]} \times W^{[-g]} \longrightarrow \Delta$ associada à tripla $\left(\Delta, V^{[g]}, W^{[-g]}\right)$, sendo $W := \{B(-,u) = f_u : \ u \in V\}$, tal que a σ-coadjunta a respeito de B define um σ-antiautomorfismo

$$\Phi : \mathcal{L}_{W^{[-g]}}^{gr_\sigma}(V^{[g]}) \longrightarrow \mathcal{L}_{W^{[-g]}}^{gr_\sigma}(V^{[g]}),$$

e $\Phi\left(\mathcal{F}_{W^{[-g]}}^{gr_\sigma}(V^{[g]})\right) = \mathcal{F}_{W^{[-g]}}^{gr_\sigma}(V^{[g]})$.

O **Teorema C** é uma generalização do *Theorem 16.*, em [1]. Neste resultado, Bahturin, Bresar e Kochetov descreveram os antiautomorfismos graduados em anéis G-graduados primitivos ($\mathbb{F}$-álgebras G-graduadas primitivas) com um ideal à esquerda graduado minimal.

Bahturin, Bresar e Kochetov, também em [1], estudaram os antiautomorfismos graduados que são involutivos na componente neutra das $\mathbb{F}$-álgebras G-graduadas simples localmente finitas com um ideal à esquerda G-graduado minimal, para um corpo $\mathbb{F}$ algebricamente fechado com característica diferente de 2 (ver Theorem 19). Logo, é natural tentar obter um resultado semelhante com a descrição dos σ-antiautomorfismos que são involutivos na componente neutra destas $\mathbb{F}$-álgebras, para qualquer 2-cociclo antissimétrico σ que satisfaz a condição $\sigma(\alpha, -\alpha)^2 = 1$ para todo $\alpha \in G$.

Ainda em [1], Bahturin, Bresar e Kochetov, usando o Theorem 19 e algumas técnicas de identidades funcionais, descreveram todas as G-graduações, a menos de isomorfismo, da álgebra de Lie finitária simples de transformações lineares (linear especial, ortogonal e simplética) em um espaço vetorial de dimensão infinita sobre o corpo $\mathbb{F}$. Logo, dado que vários resultados de [1] foram generalizados, uma tarefa mais complexa é tentar descrever as G-graduações nas álgebras de Lie coloridas de transformações lineares.

Involuções Coloridas

Nesta parte, assumimos que $\epsilon : G \times G \longrightarrow \mathbb{U}(\mathcal{S})$ é um bicaráter antissimétrico. Para a descrição das involuções coloridas nós introduzimos os conceitos de ϵ-semiadjunta e de ϵ-semicoadjunta associados a uma forma sesquilinear homogênea com torção não degenerada. Também introduzimos o conceito de forma hermitiana e anti-hermitiana.

Definição (forma hermitiana e anti-hermitiana): *Seja $B_\gamma : V \times V^{[g]} \longrightarrow \Delta$ uma forma sesquilinear homogênea de grau γ com torção não degenerada e seja $\xi \in \mathcal{Z}(\Delta) \cap \Delta_0$ tal que $\xi\overline{\xi} = 1$. Dizemos que B_γ é **ξ-hermitiana** se*

$$B_\gamma(v_\alpha, w_\beta) = \epsilon(\alpha, \beta - g)\epsilon(\alpha, \gamma)\epsilon(\gamma, \beta - g)\xi\overline{B_\gamma(w_\beta, v_\alpha)}, \tag{4.9}$$

*para todos $v_\alpha \in V_\alpha$, $w_\beta \in V_\beta^{[g]}$. Em particular, quando $\xi = 1$, dizemos que B_γ é **hermitiana** e, quando $\xi = -1$, dizemos que B_γ é **anti-hermitiana**, no lugar de dizer que B_γ é **ξ-hermitiana**.*

Definição (ϵ-semiadjunta e ϵ-semicoadjunta): *Seja $B_\gamma : V \times V^{[g]} \longrightarrow \Delta$ uma forma sesquilinear homogênea de grau γ com torção não degenerada ξ-hermitiana. Dados dois elementos homogêneos $a_\tau, b_\tau \in End_\Delta(V)_\tau$ tais que*

$$B_\gamma(v_\alpha a_\tau, w_\beta) = \epsilon(\tau, \beta - g + \gamma)B_\gamma(v_\alpha, w_\beta b_\tau), \tag{4.10}$$

*para todos $v_\alpha \in V_\alpha$, $w_\beta \in V_\beta^{[g]}$, dizemos que b_τ é uma **ϵ-semiadjunta** de a_τ e que a_τ é uma **ϵ-semicoadjunta** de b_τ.*

Observamos que para cada $\tau \in G$:

$$(\mathcal{L}_V^{gr*_\epsilon})_\tau := \{a_\tau \in End_\Delta(V)_\tau : \; a_\tau \text{ tem } \epsilon\text{-semiadjunta}\}$$

e

$$(\mathcal{F}_V^{gr_{*\epsilon}})_\tau := \{a_\tau \in \mathcal{L}_V^{gr_{*\epsilon}} : \ dim_\Delta(Va_\tau) < \infty\},$$

são $\mathcal{S}$-módulos. Além disso, vimos que

$$\mathcal{L}_V^{gr_{*\epsilon}} := \bigoplus_{\tau \in G} (\mathcal{L}_V^{gr_\epsilon})_\tau$$

é uma $\mathcal{S}$-subálgebra G-graduada da $\mathcal{S}$-álgebra G-graduada $End_\Delta^{gr}(V)$, e

$$\mathcal{F}_V^{gr_{*\epsilon}} := \bigoplus_{\tau \in G} (\mathcal{F}_V^{gr_{*\epsilon}})_\tau$$

é ideal G-graduado da $\mathcal{S}$-álgebra G-graduada $\mathcal{L}_V^{gr_{*\epsilon}}$. Agora, estamos prontos para apresentar o nosso resultado que descreve as involuções coloridas nas $\mathcal{S}$-álgebras G-graduadas primitivas com um ideal à direita G-graduado minimal.

Teorema D (Teorema 4.21): *Sejam G um grupo abeliano, $\epsilon : G \times G \longrightarrow \mathbb{U}(\mathcal{S})$ um bicaráter antissimétrico e $\mathcal{R}$ uma $\mathcal{S}$-álgebra G-graduada com característica diferente de 2. Então, $\mathcal{R}$ é uma $\mathcal{S}$-álgebra G-graduada primitiva à direita com um ideal à direita G-graduado minimal e com uma ϵ-involução $\star_\epsilon : \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}$ se, e somente se, existem um elemento $g \in G$, uma $\mathcal{S}$-álgebra G-graduada de divisão Δ com uma ϵ-involução $\bar{\bullet}\colon \Delta \longrightarrow \Delta$, um Δ-espaço ${}_\Delta V$ e uma forma sesquilinear graduada com torção não degenerada hermitiana ou anti-hermitiana $B : V \times V^{[g]} \longrightarrow \Delta$, tais que*

$$\mathcal{F}_V^{gr_{*\epsilon}} \subseteq \mathcal{R} \subseteq \mathcal{L}_V^{gr_{*\epsilon}}$$

e $\mathcal{R}$ é invariante pela ação da ϵ-semiadjunta associada a B.

Sousa e Sviridova, em [22], considerando um 2-cociclo antissimétrico σ que satisfaz $\sigma(\alpha, -\alpha)^2 = 1$ para todo $\alpha \in G$, apresentaram uma descrição das σ-involuções em anéis ($\mathbb{F}$-álgebras), graduados (graduadas) por um grupo cíclico de ordem prima, que são primitivos (primitivas) e com um ideal à direita graduado minimal. Sousa e Sviridova, ainda em [22], também se perguntaram se esta descrição poderia ser estendida para qualquer grupo abeliano finito. No **Teorema D**, nós apresentamos uma resposta afirmativa a esta pergunta, ainda num contexto mais geral, para $\mathcal{S}$-álgebras G-graduadas primitivas com um ideal à direita G-graduado minimal e para G um grupo abeliano arbitrário, mas, em contrapartida, para um bicaráter antissimétrico. Agora, nós formulamos a seguinte questão, um pouco mais geral: **É possível estender o "Teorema D" para qualquer 2-cociclo antissimétrico σ que satisfaz $\sigma(\alpha, -\alpha)^2 = 1$, para todo $\alpha \in G$?**

Observamos que a descrição das involuções coloridas nas $\mathcal{S}$-álgebras G-graduadas primitivas com um ideal à direita G-graduado minimal envolve a existência de uma involução colorida na $\mathcal{S}$-álgebra G-graduada de divisão Δ. Logo, uma tarefa a ser investigada é a descrição das involuções coloridas nesta $\mathcal{S}$-álgebra G-graduada de divisão.

A classificação das involuções em algumas famílias de álgebras associativas graduadas tem sido essencial para a classificação das graduações em algumas famílias de álgebras de Lie e de Jordan (ver [1], [2], [5], [11] e suas bibliografias). Por outro lado, em [20], Montgomery estudou algumas superálgebras de Lie que se obtêm de álgebras associativas graduadas. Em [10], Bergen e Grzeszczuk, motivados pelo trabalho de Montgomery, mostraram que álgebras de Jordan coloridas simples se obtêm de álgebras associativas graduadas simples e de álgebras associativas graduadas simples com involução colorida. Estes trabalhos geram **"muita curiosidade"** em nós sobre como, a descrição das involuções coloridas apresentada no **Teorema D**, pode influir no estudo das álgebras de Lie e de Jordan coloridas.

Referências Bibliográficas

[1] Yu. A. Bahturin, M. Bresar, M. Kochetov, *Group gradings on finitary simple Lie algebras*, Int. J. Algebra Comp, **22**(2012), 125-146.

[2] Yu. Bahturin, M. Kochetov, R. Escudero, *Classification of involutions on graded-division simple real algebras*, Linear Algebra and its Applications, **546**(2018), 1-36.

[3] Yu. A. Bahturin, A. Giambruno, *Group gradings on associative algebras with involutions*, Canad. Math. Bull., **51**(2008), 182-194.

[4] Yu. A. Bahturin, M. Tvalavadze, T. Tvalavadze, *Group gradings on superinvolution simple superalgebras*, Linear Algebra and its Applications, **431**(2009), 1054-1069.

[5] Yu. A. Bahturin, I. P. Shestakov, M. V. Zaicev, *Gradings on simple Jordan and Lie algebras*, J. Algebra, **283**(2005), 849-868.

[6] Yu. A. Bahturin, M. V. Zaicev, *Involutions on graded matrix algebras*, J. Algebra, **315**(2007), 527-540.

[7] Yu. A. Bahturin, M. Zaicev, *Graded division algebras over the field of real numbers*, J. Algebra, **514**(2018), 273-309.

[8] I. N. Balaba, S. V. Limarenko, A. V. Mikhalev, S. V. Zelenov, *Density theorems for graded rings*, Journal of Mathemathical Sciences, **128**(2005).

[9] J. Bergen, *nilpotent subsets of graded algebras with involution*, Communications in Algebra, **40**(2012), 823–833.

[10] J. Bergen, P. Grzeszczuk, *Simple Jordan Color algebras arising from associative graded algebras*, J. Algebra, **246**(2001), 915-950.

[11] A. Elduque, M. Kochetov, *Gradings on simple Lie algebras*, Amer. Math. Soc., Mathematical Surveys and Monographs, **189**(2013).

[12] A. Elduque, O. Villa, *The existence of superinvolutions*, J. Algebra, **319**(2008), 4338-4359.

[13] C. Fidelis, D. Gonçalves, D. Diniz, F. Yasumura, *Graded involutions on block-triangular matrix algebras*, Linear Algebra and its Applications, **585**(2020), 24-44.

[14] C. Gómez-Ambrosi, I.P. Shestakov, *On the Lie structure of the skew-elements of a simple superalgebra with superinvolutions*, J. Algebra, **208**(1998), 43-71.

[15] I. N. Herstein, *Rings with involution*, Chicago Lectures in Math.,Univ. of Chicago Press, Chicago, 1976.

[16] A. Jaber, *Division $\mathbb{Z}_3$-algebras*, International Electronic J. Algebra, **7** (2010), 1-11.

[17] N. Jacobson, *Structure of rings*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., Providence, RI, **37**(1959).

[18] M. A. Knus, A. Merkurjev, M. Rost, J. P. Tignol, *The book of involutions*, AMS Colloquium Publications, **44**(1998).

[19] A. V. Mikhalev, K.I. Beidar, W.S. Martindale III, *Rings with generalized identities*, Pure and applied mathematics, A series of Monographs and Textbooks, New York, 1996.

[20] S. Mongomery, *Constructing simple Lie superalgebras from associative graded algebras*, Jorunal of Algebra, **195**(1997), 558-579.

[21] C. Nastasescu, F. Van Oystaeyen, *Methods of graded rings*, Lecture Notes in Mathematics, 1836 edição, Springer, 2004.

[22] K. SOUZA, *Involuções coloridas em anéis graduados primitivos*, Tese de Doutorado, Universidade de Brasília, 2016.

[23] M. Scheunert, *Generalized Lie algebras*, J. Math. Phys. **20**(1979), 712-720.

[24] M. L. Racine, *Primitive superalgebras with superinvolutions*, J. Algebra, **206** (1998), 588-614.

[25] L. H. Rowen, *Ring theory*, Academic Press, **1**(1988).

[26] I. Sviridova, *Identities of finitely generated graded algebras with involution*, arXiv: 1410.222v2, Dc 6. 2014, 1-34.

[27] J. -P. Tignol, A. R. Wadsworth, *Value functions on simple algebras, and associated graded rings*, Springer Monographs in Mathematics, 2015.