Universidade de Brasília - UnB
Instituto de Ciências Exatas - IE
Mestrado acadêmico em Matemática

RODOLFO FERREIRA DE OLIVEIRA

Uma equação elíptica no semi-plano com não-linearidade crítica no bordo

Brasília/DF

2021

RODOLFO FERREIRA DE OLIVEIRA

Uma equação elíptica no semi-plano com não-linearidade crítica no bordo

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Fernandes Furtado

Brasília/DF

2021

Uma equação elíptica no semi-plano com não linearidade crítica no bordo.

por

Rodolfo Ferreira de Oliveira*

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos para obtenção do grau de

MESTRE EM MATEMÁTICA

Brasília, 30 de março de 2021.

Comissão Examinadora:

Marcelo Fernandes Furtado

Prof. Dr. Marcelo Fernandes Furtado - MAT/UnB (Orientador)

Ricardo Ruviaro

Prof. Dr. Ricardo Ruviaro – MAT/UnB (Membro)

João Pablo Pinheiro da Silva

Prof. Dr. João Pablo Pinheiro da Silva– UFPA (Membro)

* O autor foi bolsista do CNPq e da CAPES durante a elaboração desta dissertação.

Dedico este trabalho a todos os brasileiros que foram vitimados, tanto direta quanto indiretamente, pela pandemia de COVID-19.

AGRADECIMENTOS

Acima de tudo, quero começar agradecendo a Deus por tudo que tem realizado em minha vida, mas mais especificamente, por esses 2 anos em que tive a oportunidade de cursar esse mestrado, onde Ele me deu forças em vários momentos que eu já não sabia como encontrá-las.

Agradeço a minha mãe, Joana D'arc, por todo o amor, carinho, dedicação e afeto durante todos esses 23 anos de minha vida, em especial também nesses últimos 2 anos em que estive longe onde ela sempre estava me mandando mensagem para saber se estava tudo bem, se eu estava precisando de alguma coisa, sempre torcendo por mim e orando para que eu pudesse realizar este objetivo.

Agradeço ao meu falecido pai, Raimundo, por tudo o que me ensinou enquanto em vida. Meu pai é um modelo de homem para mim e eu fico feliz de poder seguir na matemática, área que ele sempre me incentivou a estudar.

Agradeço a minha namorada, Sharmenya, por todo o seu amor por mim, sua dedicação, sua confiança, seu afeto, sua paciência, seu companheirismo, tudo. Estivemos nesses 2 últimos anos distantes fisicamente, no entanto muito próximos em sentimento e coração.

Agradeço ao meu irmão, Pedro Henrique, por todo o apoio, todos os ensinamentos e por ser esse excelente irmão, que está sempre presente, buscando me ajudar a ter forças quando eu acho que não vou conseguir tê-las.

Agradeço aos meus animais de estimação, em especial as minhas gatas Pôdi, Valentina e Yoru, esta última que eu tive a felicidade de adotar aqui em Brasília, a qual foi uma companhia primordial em vários momentos em que a solidão se fazia mais angustiante.

Agradeço a todos os meus amigos, mas em especial à aqueles mais próximos, tanto os que já tinha antes do mestrado, quanto aqueles que fiz durante essa caminhada. Em especial agradecimento a Luan, Ricardo, Isael, Elaine, Geovane e Samuel.

Agradeço muito ao meu orientador, Marcelo, que foi muito mais do que um professor ou um bom orientador, foi também um bom amigo. Eu não tenho palavras para expressar minha gratidão pela sua paciência, sua preocupação e sua dedicação.

Agradeço aos demais membros da banca, pelo compromisso com meu trabalho e por terem dedicado um pouco de suas agendas apertadas para revisá-lo e me ajudar a corrigir os eventuais erros.

Agradeço ao Programa de Mestrado da UnB pela oportunidade de realizar este curso e esta defesa.

Agradeço finalmente as instituições de fomento, CNPq e CAPES que me concederam bolsas de estudo durante todo o curso, as quais me permitiram condições financeiras para morar em Brasília e poder realizar meu mestrado.

O passado faz você morrer de arrependimentos e o futuro faz você se deprimir em ansiedade, então por eliminação o presente é provavelmente o momento mais feliz

RESUMO

Neste trabalho apresentamos os Espaços de Sobolev com peso, os quais possuem a propriedade de preservar a compacidade da imersão, mesmo estando em domínio ilimitado. Como aplicação deste resultado, é possível obter soluções para equações do calor em $\mathbb{R}^N$ a partir dos teoremas minimax já conhecidos, entre os quais citamos o Lema de Deformação Quantitativo, o Princípio Variacional de Ekeland e o Teorema do Passo da Montanha. Dada a natureza da aplicação desses espaços, resolvemos no final deste texto um problema elíptico em $\mathbb{R}^N_+$ com não-linearidade do tipo côncavo-convexo na fronteira, com expoentes subcrítico e crítico.

Palavras-chave: Espaços de Sobolev com Peso. Teoremas Minimax. Existência e Multiplicidade.

ABSTRACT

In this work we present weighted Sobolev spaces, which have the property of preserving the compactness of the immersion, even being in an unlimited domain. As an application of this result, it is possible to obtain solutions for heat equations in $\mathbb{R}^N$ from the minimax theorems already known, among which we quote the Quantitative Deformation Lemma, Ekeland's Variational Principle and the Mountain Pass Theorem. Given the nature of the application of these spaces, at the end of this text we have solved a eliptic problem in $\mathbb{R}^N_+$ with concave-convex nonlinearity on the boundary, with subcritical and critical exponents.

Keywords: Weighted Sobolev Spaces. Minimax Theorems. Existence and Multiplicity.

SUMÁRIO

LISTA DE NOTAÇÕES E SÍMBOLOS

- $\hookrightarrow$ é o símbolo utilizado para retratar a imersão entre dois espaços normados
- $\overset{c}{\hookrightarrow}$ é o símbolo utilizado para denotar que a imersão é compacta
- $(PS)_c$ é a notação adotada para dizer que determinado funcional satisfaz a condição de Palais-Smale no nível c
- σ_N denota o volume da esfera $\mathbb{S}^{N-1} \subset \mathbb{R}^N$
- $||.||$ denota a norma fixada no espaço $D_K^{1,2}(\mathbb{R}_+^N)$ definida por

$$||u|| = \left(\int_{\mathbb{R}_+^N} K(x)|\nabla u|^2 dx \right)^{1/2}$$

- $|\!|.|\!|_r$ denota a norma fixada no espaço $L_K^r(\mathbb{R}^{N-1})$, definida por

$$|\!|u|\!|_r = \left(\int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x', 0)|u(x', 0)|^r dx' \right)^{1/r}$$

Introdução

Neste trabalho, estudamos o seguinte problema elíptico

$$(P) \qquad \begin{cases} -\Delta u - \dfrac{1}{2}\Big(x \cdot \nabla u\Big) = 0, \text{ em } \mathbb{R}^N_+ \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = \mu a(x')|u|^{q-2}u + b(x')|u|^{p-2}u, \text{ sobre } \mathbb{R}^{N-1} \end{cases},$$

onde $1 < q < 2 < p \leq 2_*$, $\mu > 0$ e a, b irão cumprir determinadas hipóteses.

Em (P), a condição na fronteira retrata um comportamento côncavo-convexo, pois há a presença de expoentes sub-lineares e super-lineares. Diversos textos já foram desenvolvidos nesse sentido, como por exemplo os trabalhos [1], [8], [9], [10]. No clássico artigo de Ambrosetti, Brezis e Cerami [1], os autores encontraram duas soluções para o problema

$$(P_1) \qquad \begin{cases} -\Delta u = \lambda u^q + u^p, \text{ em } \Omega \\ u > 0, \text{ em } \Omega \\ u = 0, \text{ sobre } \partial\Omega \end{cases},$$

onde Ω é um domínio limitado de $\mathbb{R}^N$ e $\lambda \in (0, \Lambda)$. Além disso, no caso de $\lambda > 0$ suficientemente pequeno, eles provaram a existência de um número infinito de soluções para o problema

$$(P_2) \qquad \begin{cases} -\Delta u = \lambda |u|^{q-1}u + |u|^{p-1}u, \text{ em } \Omega \\ u = 0, \text{ sobre } \partial\Omega \end{cases},$$

Ainda para domínio limitado, em [8], os autores encontraram duas soluções positivas para

$$(P_3) \qquad \begin{cases} \Delta u = 0, \text{ em } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = a(x')|u|^{q-2}u + \mu b(x')|u|^{p-2}u, \text{ sobre } \partial\Omega \end{cases},$$

caso μ seja pequeno o suficiente.

Pensando em domínio ilimitado, citamos [10], onde os autores estudaram um problema bastante similar ao nosso

$$(P_4) \qquad \begin{cases} -\Delta u - \dfrac{1}{2}\Big(x \cdot \nabla u\Big) = \mu a(x')|u|^{q-2}u+, \text{ em } \mathbb{R}^N_+ \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = b(x')|u|^{p-2}u, \text{ sobre } \mathbb{R}^{N-1} \end{cases}.$$

Observe, no entanto, que neste problema apenas o termo super-linear está presente no dado de fronteira. Entretanto, como veremos no decorrer do texto, as técnicas para atacar os dois são praticamente idênticas e em verdade, não há contribuição significativa do termo sub-linear estar ou não definido no interior para a resolução em si, apesar que o local onde ele está configure um problema diferente e, obviamente, possui uma solução diferente.

Referenciamos também o trabalho [9], desenvolvido pelos professores membros dessa banca de defesa, os quais estudaram a versão em $\mathbb{R}^N$ do problema, isto é, o operador laplaciano e os termos sub e super-linear estão todos na mesma igualdade:

$$(P_5) \qquad -\Delta u + \frac{\alpha}{2}|x|^{\alpha-2}(x \cdot \nabla u) = a(x)u^{q-1} + b(x)u^{p-1}, \text{ em } \mathbb{R}^N,$$

A motivação para estudar problemas desta natureza reside no fato de que em alguns casos, resolvê-lo se torna equivalente a encontrar soluções auto-similares de uma equação do calor, como é o caso dos problemas das referências [5], [6] e [9].

No primeiro capítulo nós trazemos uma revisão sobre os Espaços de Sobolev e alguns dos principais resultados utilizados na teoria de minimização de funcionais: o Lema de Deformação Quantitativo, o Princípio Variacional de Ekeland e o Teorema do Passo da Montanha.

No segundo capítulo, construímos os Espaços de Sobolev com peso, os quais se mostrarão essenciais para resolver a EDP que estamos interessados. Exibiremos diversos resultados de imersão para estes espaços, dentre eles citamos em especial, a compacidade da imersão, mesmo estando em domínio ilimitado.

Já no terceiro capítulo, exibimos o problema central deste trabalho, estabelecemos suas hipóteses e, empregando as mesmas técnicas utilizados nos trabalhos [9] e [10], já mencionados acima, o resolvemos tanto no caso de expoente subcrítico, quanto no caso de expoente crítico. Em ambos, mostramos a presença de duas soluções não-negativas.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Os Espaços de Sobolev

Nesta seção, iremos trazer alguns resultados sobre os Espaços de Sobolev clássicos, os quais tentaremos generalizar mais adiante para os Espaços de Sobolev com peso, que são o foco do próximo capítulo.

Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, definimos o espaço de Sobolev

$$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) : |\nabla u| \in L^2(\Omega)\},$$

onde o gradiente acima é no sentido das distribuições. A norma neste espaço é dada por

$$||u||_{H^1(\Omega)} := \left(\int_\Omega |u|^2 dx + \int_\Omega |\nabla u|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Um importante subespaço de $H^1(\Omega)$ é o conjunto $H_0^1(\Omega) := \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{||.||_{H^1(\Omega)}}$. No caso onde Ω é domínio limitado, a norma usual de $H_0^1(\Omega)$ é dada por

$$||u||_{H_0^1(\Omega)} = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Vamos relembrar agora três dos resultados principais de imersão para estes espaços, cujas provas podem ser encontradas em [2].

Teorema 1.1 (Imersão de Sobolev). *A imersão $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ é contínua, para todo $2 \leq p \leq 2^* := \dfrac{2N}{N-2}$.*

Teorema 1.2 (Compacidade). *Se $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado, a imersão $H_0^1(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow}$*

$L^p(\Omega)$ é compacta para todo $2 \leq p < 2^*$.

Teorema 1.3 (Desigualdade de Poincaré)**.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ domínio limitado. A melhor constante da imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ é o inverso do primeiro autovalor do operador $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$, isto é*

$$\int_\Omega |u|^2 dx \leq \frac{1}{\lambda_1} \int_\Omega |\nabla u|^2 dx.$$

Outro espaço de Sobolev relevante é o espaço

$$D^{1,2}(\Omega) = \{u \in L^{2^*}(\Omega) : |\nabla u| \in L^2(\Omega)\},$$

com norma

$$||u||_{D^{1,2}(\Omega)} = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Teorema 1.4. *Sobre o espaço $D^{1,2}(\Omega)$, valem as afirmativas*

(a) $D^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$,

(b) No caso $\Omega = \mathbb{R}^N$, a melhor constante de imersão, dada por

$$S = \inf_{u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N) - \{0\}} \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx}{\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*} dx \right)^{2/2^*}} > 0,$$

é atingida e é chamada de melhor constante de Sobolev.

(c) No caso $\Omega = \mathbb{R}_+^N$, ocorre também a imersão $D^{1,2}(\mathbb{R}_+^N) \hookrightarrow L^{2_*}(\mathbb{R}^{N-1})$, onde $2_* := \dfrac{2(N-1)}{N-2}$. Além disso, a melhor constante de imersão é dada por

$$S_0 = \inf_{u \in D^{1,2}(\mathbb{R}_+^N) - \{0\}} \frac{\int_{\mathbb{R}_+^N} |\nabla u|^2 dx}{\left(\int_{\mathbb{R}^{N-1}} |u|^{2_*} dx' \right)^{2/2_*}} = \frac{N-2}{2} \sigma_{N-1}^{1/N-1},$$

onde $\sigma_{N-1} = \mathrm{vol}(\mathbb{S}^{N-2})$.

Demonstração. A prova para este resultado pode ser encontrada em [11] e [12]. $\square$

A imersão dada no item (c) do Teorema 1.4 é a comumente chamada de imersão do traço. Para dar uma noção geral do que ela significa, vamos fazer uma pequena revisão de como se define o operador traço em $H^1(\mathbb{R}_+^N)$. O processo é análogo para $D^{1,2}(\mathbb{R}_+^N)$.

Em [2], prova-se que existe $C > 0$ tal que para toda $u \in C_0^1(\mathbb{R}_+^N)$, vale que:

$$\left(\int_{\mathbb{R}^{N-1}} |u(x',0)|^2 dx' \right)^{1/2} \leq C||u||_{H^1(\mathbb{R}_+^N)}. \tag{1.1}$$

Por densidade, (1.1) se estende à $H^1(\mathbb{R}_+^N)$. Deste modo, sendo $\Gamma = \partial \mathbb{R}_+^N = \mathbb{R}^{N-1} \times \{0\} \cong \mathbb{R}^{N-1}$, a aplicação $u \mapsto u|_\Gamma$ definida em $C_0^1(\mathbb{R}_+^N)$ assumindo valores em $L^2(\mathbb{R}^{N-1})$ pode ser estendida a um operador linear limitado $T : H^1(\mathbb{R}_+^N) \to L^2(\mathbb{R}^{N-1})$, tal que $T(u) = u|_\Gamma$ se $u \in H^1(\mathbb{R}_+^N) \cap C(\overline{\mathbb{R}_+^N})$. O operador T é chamado de operador traço e quando dizemos que $H^1(\mathbb{R}_+^N) \hookrightarrow L^r(\mathbb{R}^{N-1})$, na realidade o que acontece, é que para toda $u \in H^1(\mathbb{R}_+^N)$, $T(u) \in L^r(\mathbb{R}^{N-1})$. Em [2] podem ser encontradas as principais propriedades deste operador, uma delas que ganha especial destaque é que:

$$\operatorname{Ker}(T) = H_0^1(\mathbb{R}_+^N),$$

ou seja, somente as funções de $H_0^1(\mathbb{R}_+^N)$ possuem dado de fronteira nulo.

1.2 Teoremas Minimax

Nesta seção vamos trazer alguns resultados Minimax que serão essenciais no decorrer deste texto, como o Princípio Variacional de Ekeland e o Teorema do Passo da Montanha. Para demonstrá-los faremos uso de um resultado bem abstrato, no entanto bastante útil, que é o Lema de Deformação Quantitativo. Iremos deixar uma referência para consulta da prova, afinal ela é longa, demanda muitos resultados precedentes e provar este resultado não se enquadra nos nossos objetivos, queremos apenas utilizá-lo.

Lema 1.1 (Lema de Deformação Quantitativo). *Seja X espaço de Banach, $S \subset X$, $\delta > 0$ e $S_\delta = \{u \in X : \operatorname{dist}(u, S) \leq \delta\}$. Além disso, considere $I \in C^1(X, \mathbb{R})$, $c \in \mathbb{R}$ e $\epsilon > 0$ tais que*

$$||I'(u)||_{X'} \geq \frac{4\epsilon}{\delta}, \forall u \in I^{-1}([c - 2\epsilon, c + 2\epsilon]) \cap S_{2\delta}.$$

Então, existe uma aplicação contínua $\eta : [0,1] \times X \to X$ tal que para todo $u \in X$ e para todo $t \in [0,1]$, valem

(a) $\eta(0, u) = u$,

(b) $\eta(t, u) = u$ *se* $u \notin I^{-1}([c - 2\epsilon, c + 2\epsilon]) \cap S_{2\delta}$,

(c) $\eta(1, I^{c+\epsilon} \cap S) \subset I^{c-\epsilon} \cap S_\delta$.

Demonstração. A prova para este resultado pode ser encontrada com detalhes em [12], p.38. $\square$

Antes de enunciar e provar os dois teoremas citados inicialmente, vamos recordar a definição de sequências Palais-Smale, as quais tem vital importância para o método que aplicaremos para resolver nossa EDP.

Definição 1.1 (Condição de Palais-Smale)**.** *Seja X espaço de Banach e $I \in C^1(X,\mathbb{R})$. Dado $c \in \mathbb{R}$, dizemos que $\{u_n\} \subset X$ é uma sequência de Palais-Smale no nível c quando*

$$\lim_{n\to+\infty} I(u_n) = c, \qquad \lim_{n\to+\infty} I'(u_n) = 0.$$

Além disso, dizemos que I satisfaz a condição de Palais-Smale no nível c se toda sequência de Palais-Smale no nível c possui subsequência convergente. Nessas condições, dizemos que se o funcional é limitado inferiormente, então sequências minimizantes podem ser consideradas.

O Princípio Variacional de Ekeland é um resultado extremamente útil, pois uma de suas consequências naturais é que sequências minimizantes, sem perca de generalidade, são sequências de Palais-Smale se o funcional for limitado inferiormente. Tal resultado foi proposto e demonstrado no célebre artigo [3]. Exibiremos agora uma demonstração deste resultado usando o Lema de Deformação Quantitativo apresentado acima.

Teorema 1.5 (Princípio Variacional de Ekeland)**.** *Sejam X um espaço de Banach, $I \in C^1(X,\mathbb{R})$ um funcional limitado inferiormente, $u \in X$ e $\epsilon > 0$ tais que*

$$I(u) \leq \inf_X I + \epsilon.$$

Então, dado $\delta > 0$, existe $v = v(\delta) \in X$ tal que

(*a*) $I(v) \leq \inf_X I + 2\epsilon$,

(*b*) $||v - u||_X \leq 2\delta$,

(*c*) $||I'(v)||_{X'} < \dfrac{4\epsilon}{\delta}$.

Demonstração. Considere o conjunto

$$\mathcal{A} = \{v \in X : (a) \text{ e } (b) \text{ valem}\}.$$

Claramente, $\mathcal{A} \neq \emptyset$, afinal $u \in \mathcal{A}$. Suponha que não exista $v \in \mathcal{A}$ que não satisfaça (c). Neste caso, definindo $S = \{u\}$, $S_\delta = \overline{B_\delta(u)}$ e $c = \inf_X I$, temos que

$$||I'(v)||_{X'} \geq \frac{4\epsilon}{\delta}, \forall v \in I^{-1}([c - 2\epsilon, c + 2\epsilon]) \cap \overline{B_{2\delta(u)}}.$$

Pelo Lema de Deformação (cf. Lema 1.1), existe uma aplicação contínua $\eta : [0,1]\times X \to X$ de tal modo que $\eta(1,u) \in I^{c-\epsilon}$. No entanto, $c = \inf_X I$, o que implica que $I^{c-\epsilon} = \emptyset$, chegando a uma contradição. $\square$

É bom salientar que o resultado acima é bem mais geral. Em [3], o autor prova que é necessário apenas que o funcional I seja semi-contínuo inferiormente e que X seja um espaço métrico completo, não necessariamente normado. Trazemos agora essa versão geral, que não será demonstrada, mas que será utilizada para obter uma versão local do resultado. Esta última versão é que será aplicada nos nossos resultados.

Teorema 1.6 (Princípio Variacional de Ekeland - Versão Geral). *Sejam X um espaço métrico completo, $F : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ um funcional semi-contínuo inferiormente, não identicamente igual a $+\infty$ e limitado inferiormente, $\epsilon > 0$ e $u \in X$ tais que*

$$\inf_X I \leq I(u) \leq \inf_X I + \epsilon$$

Então, dado $\delta > 0$, existe $v = v(\delta) \in X$ tal que

(a) $I(v) \leq I(u)$,

(b) $d(u,v) \leq \delta$,

(c) $I(w) > I(v) - \frac{\epsilon}{\delta} d(v,w)$ *para todo* $w \neq v$.

Demonstração. A prova para este resultado pode ser encontrada em [3], p. 326. $\square$

Vamos agora enunciar e provar a versão local do Princípio Variacional de Ekeland. Tal demonstração foi feita se baseando no Teorema 2.2 e no Corolário 2.3 de [3].

Corolário 1.1 (Princípio Variacional de Ekeland - Versão Local). *Seja X um espaço de Banach e $B \subset X$ uma bola fechada em X na topologia induzida pela norma $||.||_X$. Seja também $I \in C^1(X,\mathbb{R})$ um funcional limitado inferiormente em B e $\{u_n\} \subset B$ uma sequência minimizante, isto é, $I(u_n) \to \inf_B I$. Então, existe $\{v_n\} \subset B$ também minimizante tal que $I'(v_n) \to 0$.*

Demonstração. Sendo que B é fechado em X, segue que B é um espaço métrico completo com a métrica induzida pela norma. Estamos então nas hipóteses do Teorema 1.6. Assim, existe $\{v_n\} \subset B$ também minimizante tal que $\lim ||u_n - v_n||_X = 0$ e para todo $w \in B$ e $t > 0$:

$$I(v_n + tw) - I(v_n) > -\frac{t}{n}||w||_X$$

Como I é de classe C^1, a desigualdade acima implica que

$$\frac{I'(v_n)w}{||w||_X} < \frac{1}{n}$$

Da arbitrariedade de $w \in B$, segue que

$$||I'(v_n)||_{B'} \leq \frac{1}{n}$$

Fazendo $n \to +\infty$, obtemos que $I'(v_n) \to 0$. $\square$

O Teorema do Passo da Montanha, o qual provaremos agora é um dos resultados mais importantes da área de métodos variacionais. Iremos fazer uma versão bem geral dele, mas em essência este teorema nos mostra que sob determinadas condições geométricas respeitadas pelo funcional, têm-se a existência uma sequência Palais-Smale em um determinado nível e, como consequência, caso o funcional satisfaça a condição de Palais-Smale neste nível, mostra-se então a existência de um ponto crítico.

Teorema 1.7 (Passo da Montanha)**.** *Seja X um espaço de Banach e $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ de modo que $I(0) = 0$. Suponha que existam $\rho, \alpha > 0$ tais que*

(i) $I(u) \geq \alpha > 0, \forall u \in \partial B_\rho(0)$,

(ii) *existe $v \in X$ com $||v||_X > \rho$ e $I(v) < 0$.*

Seja

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I(\gamma(t)),$$

onde $\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], X) : \gamma(0) = 0 \text{ e } \gamma(1) = v\}$. Então, para cada $\epsilon > 0$, existe $u_\epsilon \in X$ tal que

(a) $c - 2\epsilon \leq I(u_\epsilon) \leq c + 2\epsilon$,

(b) $||I'(u_\epsilon)||_{X'} < 4\epsilon$.

Demonstração. Primeiramente, vamos provar que c é um número real. Com efeito, dada $\gamma \in \Gamma$, como $\gamma(0) = 0 \in B_\rho(0)$ e $\gamma(1) = v \notin \overline{B_\rho(0)}$, então pelo Teorema da Alfândega, existe $t \in (0, 1)$ onde $\gamma(t) \in \partial B_\rho(0)$. Pela hipótese (i), segue então que $I(\gamma(t)) \geq \alpha > 0$ e, consequentemente,

$$\max_{t \in [0,1]} I(\gamma(t)) \geq \alpha > 0.$$

Daí, $c \geq \alpha$ e, portanto, $c \in \mathbb{R}$. Agora, suponha por absurdo, que exista $\epsilon > 0$ tal que para todo $u \in X$, tenhamos que

$$||I'(u)||_{X'} \geq 4\epsilon, \forall u \in I^{-1}([c - 2\epsilon, c + 2\epsilon]). \tag{1.2}$$

Observe que a desigualdade (1.2) ainda é válida para $\epsilon' \in (0, \epsilon)$. Assim, podemos reduzir ϵ para que tenhamos

$$I(v) < 0 = I(0) < c - 2\epsilon.$$

Pelo Lema de Deformação (cf. Lema 1.1), existe $\eta : [0,1] \times X \to X$ satisfazendo

(1) $\eta(1, u) = u, \forall u \notin I^{-1}([c - 2\epsilon, c + 2\epsilon])$,

(2) $\eta(1, I^{c+\epsilon}) \subset I^{c-\epsilon}$.

Pela definição de ínfimo, existe $\gamma \in \Gamma$ tal que

$$\max_{t \in [0,1]} I(\gamma(t)) \leq c + \epsilon. \tag{1.3}$$

Defina $\tilde{\gamma} : [0,1] \to X$ por

$$\tilde{\gamma}(t) = \eta(1, \gamma(t)).$$

Claramente, $\tilde{\gamma}$ é contínua. Além disso, $\tilde{\gamma}(0) = \eta(1, 0) = 0$ e $\tilde{\gamma}(1) = \eta(1, v) = v$ e, portanto, $\tilde{\gamma} \in \Gamma$. Usando (1.3), concluímos que $\gamma(t) \in I^{c+\epsilon}, \forall t \in [0,1]$ e, consequentemente, $\tilde{\gamma}(t) \in I^{c-\epsilon}, \forall t \in [0,1]$. Daí,

$$I(\tilde{\gamma}(t)) \leq c - \epsilon, \forall t \in [0,1],$$

Em particular,

$$c \leq \max_{t \in [0,1]} I(\tilde{\gamma}(t)) \leq c - \epsilon,$$

o que é uma contradição. □

Corolário 1.2. *Nas mesmas hipóteses do Teorema* 1.7*, se* I *satisfaz* $(PS)_c$*, então existe* $u \neq 0$ *tal que* $I(u) = c$ *e* $I'(u) = 0$*.*

Demonstração. Do Teorema do Passo da Montanha, existe $\{u_n\} \subset X$ sequência Palais-Smale no nível c. Sendo que I satisfaz $(PS)_c$, a menos de subsequência, existe $u \in X$ tal que $u_n \to u$. Pela regularidade de I,

$$I(u) = \lim_{n \to +\infty} I(u_n) = c, \quad I'(u) = \lim_{n \to +\infty} I'(u_n) = 0.$$

Logo u é ponto crítico de I. Como $I(u) = c > 0$, segue que $u \neq 0$. □

Capítulo 2

Espaços Funcionais

2.1 Espaços de Sobolev com peso

Para a resolução de muitas EDP's em domínio ilimitado, como o $\mathbb{R}^N$, a falta de compacidade da imersão de Sobolev pode ser um grande obstáculo. Dependendo da formulação do problema é possível contornar a falta de compacidade por maneiras mais simples. No entanto, para o problema que nos interessa, deveremos contornar a falta de compacidade introduzindo um novo espaço de Sobolev, o qual é subespaço do usual, e além disso, possui compacidade na imersão, mesmo quando em $\mathbb{R}^N$, o que é um fato extremamente útil.

Definição 2.1. *Seja $\theta : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}_+$ cumprindo as seguintes condições*

(θ_1) $\theta \in C^2(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}_+)$,

(θ_2) $\displaystyle\lim_{|x|\to+\infty} \left(\Delta\theta(x) + \frac{1}{2}|\nabla\theta(x)|^2\right) = +\infty.$

A função $K_\theta : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}_+$ definida por

$$K_\theta(x) = \exp(\theta(x)),$$

será chamada de função com peso θ ou mais simplesmente de função peso.

Exemplo 2.1. *No decorrer do nosso trabalho, teremos interesse especial em um peso específico, a função com peso $\theta(x) = \dfrac{|x|^2}{4}$. Tal função cumpre as condições (θ_1) e (θ_2), afinal, claramente $\theta \in C^2(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}_+)$ e além disso,*

$$\nabla\theta(x) = \frac{x}{2} \implies \frac{1}{2}|\nabla\theta(x)|^2 = \frac{|x|^2}{8} \text{ e } \Delta\theta(x) = \frac{N}{2}.$$

Logo,

$$\lim_{|x|\to+\infty}\left(\Delta(x)+\frac{1}{2}|\nabla\theta(x)|^2\right)=\lim_{|x|\to+\infty}\frac{1}{2}\left(N+\frac{|x|^2}{4}\right)=+\infty.$$

Observação 2.1. *Quando estivermos nos referindo especificamente à função dada no Exemplo* 2.1*, denotaremos K_θ simplesmente por K.*

Vamos agora definir os espaços de Lebesgue com peso

Definição 2.2. *Seja $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ aberto, $1\leq p<+\infty$ e K_θ uma função peso. Definimos*

$$L^p_{K_\theta}(\Omega)=\left\{u:\Omega\to\mathbb{R}\ \textit{mensuráveis}: \int_\Omega K_\theta|u|^p dx<+\infty\right\},$$

o espaço de Lebesgue de ordem p com peso. A norma fixada neste espaço é

$$||u||_{L^p_{K_\theta}(\Omega)}=\left(\int_\Omega K_\theta|u|^p dx\right)^{1/p}.$$

Note que os Espaços de Lebesgue (e também os de Sobolev) com peso são, na realidade, subespaços dos seus respectivos espaços usuais. Com efeito, já que $K_\theta(x)\geq 1$, temos que

$$\int_\Omega |u|^p dx\leq\int_\Omega K_\theta|u|^p dx, \forall\ 1\leq p<+\infty.$$

Proposição 2.1. $(L^p_{K_\theta}(\Omega), ||.||_{L^p_{K_\theta}(\Omega)})$ *é Banach para todo $1\leq p<+\infty$ e é reflexivo para todo $1<p<+\infty$.*

Demonstração. Primeiramente, mostraremos que $L^p_{K_\theta}(\Omega)$ é Banach. Com efeito, dada $\{u_n\}\subset L^p_{K_\theta}(\Omega)$ sequência de Cauchy, temos que, dado $\epsilon>0$ existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal que, para todo $n,m\geq n_0$,

$$\left(\int_\Omega |K_\theta^{1/p}u_n-K_\theta^{1/p}u_m|^p dx\right)^{1/p}=\left(\int_\Omega K_\theta|u_n-u_m|^p dx\right)^{1/p}<\epsilon.$$

Daí, $K_\theta^{1/p}u_n$ é de Cauchy em $L^p(\Omega)$. Como $L^p(\Omega)$ é Banach, existe $w\in L^p(\Omega)$ tal que $K_\theta^{1/p}u_n\to w$ em $L^p(\Omega)$. Como $K_\theta\neq 0$, para todo $x\in\Omega$, podemos definir

$$u(x):=\frac{w(x)}{K_\theta^{1/p}(x)}.$$

Logo, $K_\theta^{1/p}u_n\to K_\theta^{1/p}u$ em $L^p(\Omega)$, mostrando que $u_n\to u$ em $L^p_{K_\theta}(\Omega)$.

Para a reflexividade, defina o operador $T:L^p_{K_\theta}(\Omega)\to L^p(\Omega)$ dado por $T(u)=K_\theta^{1/p}u$. Como $L^p_{K_\theta}(\Omega)$ é Banach, $T(L^p_{K_\theta}(\Omega))$ é subespaço fechado de $L^p(\Omega)$ e portanto é reflexivo. [vide [2], p. 70]. Além disso, como T é isometria, segue que $L^p_{K_\theta}(\Omega)$ é reflexivo. $\square$

Quanto aos espaços de Sobolev, teremos interesse em dois principais:

Definição 2.3. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ e K_θ uma função peso. Definimos*

$$H^1_{K_\theta}(\Omega) = \{u \in L^2_{K_\theta}(\Omega) : |\nabla u| \in L^2_{K_\theta}(\Omega)\},$$

com norma

$$||u||_{H^1_{K_\theta}(\Omega)} = \left(\int_\Omega K_\theta |u|^2 dx + \int_\Omega K_\theta |\nabla u|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Definimos ainda

$$D^{1,2}_{K_\theta}(\Omega) = \{u \in L^{2^*}_{K_\theta}(\Omega) : |\nabla u| \in L^2_{K_\theta}(\Omega)\},$$

com norma

$$||u||_{D^{1,2}_{K_\theta}(\Omega)} = \left(\int_\Omega K_\theta |\nabla u|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Proposição 2.2. *Os espaços $H^1_{K_\theta}(\Omega)$ e $D^{1,2}_{K_\theta}(\Omega)$ são espaços de Banach reflexivos.*

Demonstração. Mostraremos primeiramente que $H^1_{K_\theta}(\Omega)$ é Banach. Com efeito, dada $\{u_n\} \subset H^1_{K_\theta}(\Omega)$ sequência de Cauchy, temos que $\{u_n\}$ e $\{\nabla u_n\}$ são sequências de Cauchy em $L^2_{K_\theta}(\Omega)$. Daí, pela Proposição 2.1, existem $u, v \in L^2_{K_\theta}(\Omega)$ tais que $u_n \to u$ e $\nabla u_n \to v$ em $L^2_{K_\theta}(\Omega)$. Dada $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, pelo teorema de integração por partes

$$\int_\Omega u_n \nabla \varphi dx = -\int_\Omega \nabla u_n \varphi dx.$$

Fazendo $n \to \infty$, temos que

$$\int_\Omega u \varphi dx = -\int_\Omega v \varphi dx, \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Logo $\nabla u = v$ e portanto, $|\nabla u| \in L^2_{K_\theta}(\Omega)$, donde segue que $u_n \to u$ em $H^1_{K_\theta}(\Omega)$.

Para $D^{1,2}_{K_\theta}(\Omega)$ a prova é bem similar, a única diferença é que em vez de ser Cauchy em $L^2_{K_\theta}(\Omega)$, a sequência tomada $\{u_n\}$ será Cauchy em $L^{2^*}_{K_\theta}(\Omega)$. Já a sequência ∇u_n continua Cauchy em $L^2_{K_\theta}(\Omega)$.

Quanto a reflexividade de $H^1_{K_\theta}(\Omega)$, iremos nos basear na prova da reflexividade dos Espaços de Sobolev feita em [2], p.204. Definindo o espaço reflexivo $E = L^2_{K_\theta}(\Omega) \times L^2_{K_\theta}(\Omega)$, considere a isometria $T : H^1_{K_\theta(\Omega)} \to E$ definida por

$$T(u) = (u, \nabla u).$$

Desde que $H^1_{K_\theta}(\Omega)$ é Banach, então $T(H^1_{K_\theta}(\Omega))$ é um subespaço fechado de E e portanto é reflexivo. Como T é isometria, segue que $H^1_{K_\theta}(\Omega)$ é reflexivo.

Para o espaço $D^{1,2}_{K_\theta}(\Omega)$ basta considerar a isometria $S : D^{1,2}_{K_\theta}(\Omega) \to L^2_{K_\theta}(\Omega)$ dada por $S(u) = \nabla u$. $\square$

2.2 Resultados de Imersão dos Espaços de Sobolev com peso

Nesta seção iremos buscar generalizar os resultados de imersão para os Espaços de Sobolev clássicos comentados no primeiro capítulo para os Espaços de Sobolev com peso. De início, vamos exibir um resultado de densidade que também é válido para o Espaço de Sobolev usual.

Proposição 2.3. $\overline{C_0^\infty(\mathbb{R}^N)}^{||\cdot||_{H^1_{K_\theta}(\mathbb{R}^N)}} = H^1_{K_\theta}(\mathbb{R}^N)$.

Demonstração. A prova para este tipo de resultado é bem conhecida, basta aproximarmos funções de $H^1_{K_\theta}(\mathbb{R}^N)$ por elementos deste mesmo conjunto com suporte compacto e por fim, aproximar as funções com suporte compacto deste espaço por funções regulares. $\square$

A primeira imersão que vamos mostrar é a imersão compacta $H^1_{K_\theta}(\mathbb{R}^N) \overset{c}{\hookrightarrow} L^2_{K_\theta}(\mathbb{R}^N)$, a qual é extremamente útil, afinal podemos tratar de problemas em $\mathbb{R}^N$ sem nos preocuparmos com compacidade. Para demonstrarmos esse resultado precisaremos, entretanto, de alguns resultados preliminares.

Lema 2.1. *Seja $\theta : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}_+$ cumprindo as condições (θ_1) e (θ_2) da Definição 2.1. Para toda $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, vale que*

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} K_\theta|\varphi|^2\left(\Delta\theta + \frac{1}{2}|\nabla\theta|^2\right)dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} K_\theta|\nabla\varphi|^2 dx. \tag{2.1}$$

Demonstração. Seja $\phi(x) = \exp\left(\dfrac{\theta(x)}{2}\right)\varphi(x)$. Temos que $\phi \in C^2(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}_+)$, além disso

$$\begin{aligned} \nabla\phi(x) &= \frac{1}{2}\exp\left(\frac{\theta(x)}{2}\right)\nabla\theta(x)\varphi(x) + \exp\left(\frac{\theta(x)}{2}\right)\nabla\varphi(x) \\ &= \frac{1}{2}\phi(x)\nabla\theta(x) + K_{\theta/2}(x)\nabla\varphi(x). \end{aligned}$$

Assim,

$$\int_{\mathbb{R}^N} K_\theta|\nabla\varphi|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\phi|^2 dx - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} 2\phi\nabla\phi\nabla\theta dx + \frac{1}{4}|\phi|^2|\nabla\theta|^2.$$

Usando integração por partes,

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} 2\phi\nabla\phi\nabla\theta dx &= -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\int_{\mathbb{R}^N} 2\phi\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\frac{\partial\theta}{\partial x_i}dx \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial\phi^2}{\partial x_i}\frac{\partial\theta}{\partial x_i} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\int_{\mathbb{R}^N} \phi^2\frac{\partial^2\theta}{\partial x_i^2}dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\phi|^2\Delta\theta dx.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} K_\theta|\nabla\varphi|^2dx &= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\phi|^2dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\phi|^2\Delta\theta dx + \frac{1}{4}|\phi|^2|\nabla\theta|^2 \\
&\geq \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\phi|^2\Big(\Delta\theta + \frac{1}{2}|\nabla\theta|^2\Big)dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} K_\theta|\varphi|^2\Big(\Delta\theta + \frac{1}{2}|\nabla\theta|^2\Big)dx.
\end{aligned}$$

□

Tendo em vista o resultado de densidade dado pela Proposição 2.3 é natural que a estimativa (2.1) se estenda para funções de $H^1_{K_\theta}(\mathbb{R}^N)$.

Lema 2.2. *Seja $\theta : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}_+$ cumprindo as condições (θ_1) e (θ_2) da Definição 2.1. Para toda $u \in H^1_{K_\theta}(\mathbb{R}^N)$, vale que*

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} K_\theta|u|^2\Big(\Delta\theta + \frac{1}{2}|\nabla\theta|^2\Big)dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} K_\theta|\nabla u|^2dx. \tag{2.2}$$

Demonstração. Dada $u \in H^1_{K_\theta}(\mathbb{R}^N)$, existe $\{\varphi_n\} \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $\varphi_n \to u$ em $H^1_{K_\theta}(\mathbb{R}^N)$. Logo, a menos de subsequência, $\varphi_n(x) \to u(x)$ q.t.p em $\mathbb{R}^N$. Devido à condição (θ_2), existe $R > 0$ tal que

$$\Delta\theta(x) + \frac{1}{2}|\nabla\theta(x)|^2 > 0, \text{ sempre que } |x| > R.$$

Além disso, utilizando a estimativa (2.1) provada no Lema anterior, temos que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} K_\theta|\nabla\varphi_n|^2dx &\geq \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} K_\theta|\varphi_n|^2\Big(\Delta\theta + \frac{1}{2}|\nabla\theta|^2\Big)dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{|x|<R} K_\theta|\varphi_n|^2\Big(\Delta\theta + \frac{1}{2}|\nabla\theta|^2\Big) + \frac{1}{2}\int_{|x|\geq R} K_\theta|\varphi_n|^2\Big(\Delta\theta + \frac{1}{2}|\nabla\theta|^2\Big).
\end{aligned}$$

Desse modo,

$$\liminf_n \frac{1}{2}\int_{|x|<R} K_\theta|\varphi_n|^2\Big(\Delta\theta + \frac{1}{2}|\nabla\theta|^2\Big)dx \;+\; \liminf_n \frac{1}{2}\int_{|x|\geq R} K_\theta|\varphi_n|^2\Big(\Delta\theta + \frac{1}{2}|\nabla\theta|^2\Big)dx$$
$$\leq \liminf_n \int_{\mathbb{R}^N} K_\theta|\nabla\varphi_n|^2 = \int_{\mathbb{R}^N} K_\theta|\nabla u|^2 dx.$$

Agora, como $\Delta\theta + \dfrac{1}{2}|\nabla\theta|^2 > 0$ para $|x| \geq R$, pelo Lema de Fatou, segue que

$$\liminf_n \frac{1}{2}\int_{|x|\geq R} K_\theta|\varphi_n|^2\Big(\Delta\theta + \frac{1}{2}|\nabla\theta|^2\Big)dx \geq \frac{1}{2}\int_{|x|\geq R} K_\theta|u|^2\Big(\Delta\theta + \frac{1}{2}|\nabla\theta|^2\Big)dx.$$

Por outro lado, como $\theta \in C^2(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}_+)$, $\Delta\theta + \dfrac{1}{2}|\nabla\theta|^2 \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$. Assim, existe $C > 0$ tal que

$$K_\theta|\varphi_n|^2\Big(\Delta\theta + \frac{1}{2}|\nabla\theta|^2\Big) \leq C, \forall x \in B_R(0).$$

Como $C \in L^1(B_R(0))$, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\liminf_n \int_{|x|<R} K_\theta|\varphi_n|^2\Big(\Delta\theta + \frac{1}{2}|\nabla\theta|^2\Big)dx = \int_{|x|<R} K_\theta|u|^2\Big(\Delta\theta + \frac{1}{2}|\nabla\theta|^2\Big)dx.$$

Daí, combinando essa desigualdade com as demais obtidas, segue o resultado. □

Teorema 2.1. *Seja* $\theta : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}_+$ *cumprindo as condições* (θ_1) *e* (θ_2)*. A imersão* $H^1_{K_\theta}(\mathbb{R}^N) \overset{c}{\hookrightarrow} L^2_{K_\theta}(\mathbb{R}^N)$ *é compacta.*

Demonstração. Tomemos $\{u_n\} \subset H^1_{K_\theta}(\mathbb{R}^N)$ limitada. Como $H^1_{K_\theta}(\mathbb{R}^N)$ é Hilbert, existe $u \in H^1_{K_\theta}(\mathbb{R}^N)$ tal que $u_n \rightharpoonup u$, a menos de subsequência. Devido à (θ_2), dado $\epsilon > 0$, existe $R > 0$ tal que se $|x| > R$, então $\Delta\theta + \dfrac{1}{2}|\nabla\theta|^2 > \dfrac{2}{\epsilon}$. Daí,

$$\int_{|x|\geq R} K_\theta|u_n - u|^2\Big(\Delta\theta + \frac{1}{2}|\nabla\theta|^2\Big)dx > \frac{2}{\epsilon}\int_{|x|\geq R} K_\theta|u_n - u|^2 dx.$$

Combinando a inequação acima com a estimativa (2.2), temos que

$$\int_{|x|\geq R} K_\theta|u_n - u|^2 dx \leq \epsilon\int_{|x|\geq R} K_\theta|\nabla u_n - \nabla u|^2 dx \leq 2\epsilon(||u||^2_{H^1_{K_\theta}(\mathbb{R}^N)} + ||u_n||^2_{H^1_{K_\theta}(\mathbb{R}^N)}) \leq C\epsilon.$$

Para $|x| < R$, façamos uso da compacidade da imersão $H^1(B_R(0)) \overset{c}{\hookrightarrow} L^2(B_R(0))$. Neste caso, vale que $u_n\Big|_{B_R(0)} \to u\Big|_{B_R(0)}$ em $L^2(B_R(0))$. Pela continuidade de K_θ,

$$\int_{|x|<R} K_\theta|u_n - u|^2 dx \leq C_1\int_{|x|<R} |u_n - u|^2 dx < C_1\epsilon, \text{ para } n \text{ suficientemente grande.}$$

Sendo assim,

$$\int_{\mathbb{R}^N} K_\theta |u_n - u|^2 dx < C_2\epsilon, \text{ para } n \text{ suficientemente grande.}$$

Assim, $u_n \to u$ em $L^2_{K_\theta}(\mathbb{R}^N)$, donde segue a compacidade da imersão. □

Tendo em mãos a imersão compacta, vamos agora obter uma versão da Desigualdade de Poincaré para os espaços de Sobolev com peso, onde naturalmente, não necessitaremos estar em domínio limitado.

Teorema 2.2 (Desigualdade de Poincaré)**.** *Seja* $\theta : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}_+$ *cumprindo as condições* (θ_1) *e* (θ_2) *da Definição* 2.1*. Existe* $\lambda = \lambda(\theta) > 0$ *tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^N} K_\theta |u|^2 dx \leq \frac{1}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^N} K_\theta |\nabla u|^2 dx, \forall u \in H^1_{K_\theta}(\mathbb{R}^N). \tag{2.3}$$

Demonstração. Suponha que a desigualdade (2.3) não ocorra, assim, para cada $n \in \mathbb{N}$ é possível obter $u_n \in H^1_{K_\theta}(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$\frac{1}{n} \int_{\mathbb{R}^N} K_\theta |u_n|^2 dx > \int_{\mathbb{R}^N} K_\theta |\nabla u_n|^2 dx.$$

Façamos $v_n = \dfrac{u_n}{||u_n||_{L^2_{K_\theta}(\mathbb{R}^N)}}$. Assim,

$$\nabla v_n = \frac{\nabla u_n}{||u_n||_{L^2_{K_\theta}(\mathbb{R}^N)}} \text{ e } ||v_n||_{L^2_{K_\theta}(\mathbb{R}^N)} = 1.$$

Entretanto, pela hipótese de contradição,

$$||\nabla v_n||^2_{L^2_{K_\theta}(\mathbb{R}^N)} = \frac{\int_{\mathbb{R}^N} K_\theta |\nabla u_n|^2 dx}{\int_{\mathbb{R}^N} K_\theta |u_n|^2 dx} < \frac{1}{n}.$$

Assim, $\nabla v_n \to 0$ em $L^2_{K_\theta}(\mathbb{R}^N)$. Por outro lado, como v_n é limitada em $H^1_{K_\theta}(\mathbb{R}^N)$, afinal

$$||v_n||^2_{H^1_{K_\theta}(\mathbb{R}^N)} = ||v_n||^2_{L^2_{K_\theta}(\mathbb{R}^N)} + ||\nabla v_n||^2_{L^2_{K_\theta}(\mathbb{R}^N)} < 1 + \frac{1}{n} \leq 2.$$

Daí, existe $v \in H^1_{K_\theta}(\mathbb{R}^N)$ tal que $v_n \rightharpoonup v$ em $H^1_{K_\theta}(\mathbb{R}^N)$ e, pelo Teorema 2.1, $v_n \to v$ em $L^2_{K_\theta}(\mathbb{R}^N)$ a menos de subsequência. Naturalmente, $||v||_{L^2_{K_\theta}(\mathbb{R}^N)} = 1$. Além disso, pela convergência fraca e usando que a norma é fracamente semicontínua inferiormente,

$$\begin{aligned}
||v||^2_{L^2_{K_\theta}(\mathbb{R}^N)} + ||\nabla v||^2_{L^2_{K_\theta}(\mathbb{R}^N)} &= ||v||^2_{H^1_{K_\theta}(\mathbb{R}^N)} \\
&\leq \liminf_n ||v_n||^2_{H^1_{K_\theta}(\mathbb{R}^N)} \\
&\leq \limsup_n ||v_n||^2_{H^1_{K_\theta}(\mathbb{R}^N)} \\
&\leq \limsup_n ||v_n||^2_{L^2_{K_\theta}(\mathbb{R}^N)} + \limsup_n ||\nabla v_n||^2_{L^2_{K_\theta}(\mathbb{R}^N)} \\
&\leq 1.
\end{aligned}$$

Portanto, $||\nabla v||_{L^2_{K_\theta}(\mathbb{R}^N)} = 0 \implies \nabla v = 0$ q.t.p em $\mathbb{R}^N$. Da conexidade de $\mathbb{R}^N$, existe $C > 0$ tal que $v = C$ q.t.p em $\mathbb{R}^N$. Daí,

$$1 = ||v||^2_{L^2_{K_\theta}(\mathbb{R}^N)} = C^2 \int_{\mathbb{R}^N} K_\theta dx \geq C^2 \int_{\mathbb{R}^N} dx = +\infty,$$

o que é uma contradição, provando o resultado. $\square$

De agora em diante, vamos considerar apenas o caso particular onde $\theta(x) = \exp(|x|^2/4)$, afinal esta será a função que será utilizada no decorrer do texto. Vamos então provar a imersão contínua para o expoente crítico de Sobolev e, usando interpolação, iremos obter o resultado final de imersão para o espaço $H^1_K(\mathbb{R}^N)$.

Teorema 2.3. *A imersão $H^1_K(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2^*}_K(\mathbb{R}^N)$ é contínua.*

Demonstração. Com efeito, dada $u \in H^1_K(\mathbb{R}^N)$, observe que, como consequência da imersão clássica $H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$, temos que

$$\begin{aligned}
\left(\int_{\mathbb{R}^N} K|u|^{2^*} dx \right)^{1/2^*} &= \left(\int_{\mathbb{R}^N} |uK^{1/2^*}|^{2^*} dx \right)^{1/2^*} \\
&\leq C_1 \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(uK^{1/2^*})|^2 dx \right)^{1/2} \\
&\leq C_1 \left(\int_{\mathbb{R}^N} K^{2/2^*} |\nabla u|^2 dx + C_2 \int_{\mathbb{R}^N} K^{2/2^*} |x|^2 |u|^2 dx \right)^{1/2} \\
&\leq C_1 \left(\int_{\mathbb{R}^N} K|\nabla u|^2 dx + C_2 \int_{\mathbb{R}^N} K|x|^2|u|^2 dx \right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Pelo Lema 2.2,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{16} \int_{\mathbb{R}^N} K|x|^2|u|^2 dx &\leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} K|u|^2 \left(\frac{|x|^2}{8} + \frac{n}{2} \right) dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N} K|\nabla u|^2 dx.
\end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}\left(\int_{\mathbb{R}^N} K|u|^{2^*}dx\right)^{1/2^*} &\leq C_1\left(\int_{\mathbb{R}^N} K|\nabla u|^2dx + C_2\int_{\mathbb{R}^N} K|x|^2|u|^2dx\right)^{1/2}\\ &\leq C_1\left(\int_{\mathbb{R}^N} K|\nabla u|^2dx + C_3\int_{\mathbb{R}^N} K|\nabla u|^2dx\right)^{1/2}\\ &\leq C_4\left(\int_{\mathbb{R}^N} K|\nabla u|^2dx\right)^{1/2} = C_4||u||_{H^1_K(\mathbb{R}^N)}.\end{aligned}$$

□

Corolário 2.1. *A imersão* $H^1_K(\mathbb{R}^N) \overset{c}{\hookrightarrow} L^s_K(\mathbb{R}^N)$ *é compacta para todo* $2 \leq s < 2^*$.

Demonstração. Pela desigualdade de interpolação, para toda $u \in H^1_K(\mathbb{R}^N)$,

$$||u||_{L^s_K(\mathbb{R}^N)} \leq ||u||^a_{L^2_K(\mathbb{R}^N)}||u||^{1-a}_{L^{2^*}_K(\mathbb{R}^N)},$$

onde $\dfrac{1}{s} = \dfrac{a}{2} + \dfrac{1-a}{2^*}$ e segue portanto a imersão contínua. Para concluir a compacidade, tomemos uma sequência $\{u_n\}$ limitada em $H^1_K(\mathbb{R}^N)$. Passando a uma subsequência, existe $u_0 \in H^1_K(\mathbb{R}^N)$ tal que $u_n \rightharpoonup u_0$ e, pelo Teorema 2.1, vale também que $u_n \to u_0$ em $L^2_K(\mathbb{R}^N)$. Como $\{u_n\}$ é também limitada em $L^{2^*}_K(\mathbb{R}^N)$, temos que

$$\begin{aligned}||u_n - u_0||_{L^s_K(\mathbb{R}^N)} &\leq ||u_n - u_0||^a_{L^2_K(\mathbb{R}^N)}||u_n - u_0||^{1-a}_{L^{2^*}_K(\mathbb{R}^N)}\\ &\leq C(u_0)||u_n - u_0||^a_{L^2_K(\mathbb{R}^N)} \to 0.\end{aligned}$$

□

Observação 2.2. *Como em* $H^1_K(\mathbb{R}^N)$ *vale a desigualdade de Poincaré* (cf. Teorema 2.2), *então* $H^1_K(\mathbb{R}^N)$ *e* $D^{1,2}_K(\mathbb{R}^N)$ *possuem normas equivalentes. Por esse motivo, as imersões provadas para* $H^1_K(\mathbb{R}^N)$ *também se aplicam para* $D^{1,2}_K(\mathbb{R}^N)$.

Nos resultados anteriores, como estávamos trabalhando com vários espaços diferentes e consequentemente com diversas normas, estávamos preocupados em sempre deixar especificado na norma a que espaço estávamos nos referindo. Agora, no entanto, vamos começar a trabalhar especificamente ao espaço de Sobolev no qual procuraremos as soluções do nosso problema e por isso, vamos começar a fixar notações.

Buscaremos soluções no espaço de Sobolev $X = D^{1,2}_K(\mathbb{R}^N_+) = \overline{C^\infty_0(\overline{\mathbb{R}^N_+})}^{||.||}$ com norma dada por

$$||u|| = \left(\int_{\mathbb{R}^N_+} K(x)|\nabla u|^2dx\right)^{1/2}.$$

Vamos também fixar uma notação para as normas nos Espaços de Lebesgue nos quais provaremos imersão para X

Para $2 \leq s \leq 2^* = \dfrac{2N}{N-2}$, denotaremos

$$||u||_s = \left(\int_{\mathbb{R}^N_+} K(x)|u(x)|^s dx \right)^{1/s},$$

a norma em $L^s_K(\mathbb{R}^N_+)$. Para $2 \leq r \leq 2_* = \dfrac{2(N-1)}{N-2}$, denotaremos

$$|\!|\!| u |\!|\!|_r = \left(\int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x',0)|u(x',0)|^r \right)^{1/r},$$

a norma em $L^r_K(\mathbb{R}^{N-1})$.

Para obter os resultados de imersão para X, vamos utilizar as imersões que obtivemos anteriormente e já que tais imersões se davam em espaços com funções definidas em todo o $\mathbb{R}^N$, faz-se necessário sermos capazes de estender uma função de X para todo $\mathbb{R}^N$. Intuitivamente, poderíamos pensar em uma extensão por zeros, mas tal extensão não seria muito benéfica para nossos propósitos. Vamos considerar para $u \in X$ a extensão $\tilde{u} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ definida por

$$\tilde{u}(x', x_N) = \begin{cases} u(x', x_N), \text{ se } x_n > 0 \\ -2u(x', -2x_N) + 3u(x', -x_N), \text{ se } x_n \leq 0 \end{cases}.$$

A escolha destes coeficientes é para garantir a diferenciabilidade de $\tilde{u}$ sobre $\{x_N = 0\}$, isto é, que as derivadas das partes definidas no semiplano superior e no semiplano inferior coincidam quando toma-se $x_N = 0$. Claramente, se $x_N > 0$, então $\nabla \tilde{u} = \nabla u$. No outro caso,

$$\tilde{u}_{x_i}(x', x_N) = \begin{cases} -2u_{x_i}(x', -2x_N) + 3u_{x_i}(x', -x_N), \text{ se } 1 \leq i < N \\ 4u_{x_N}(x', -2x_N) - 3u_{x_N}(x', x_N), \text{ se } i = N \end{cases}.$$

Lema 2.3. *Seja $u \in X$ e $\tilde{u}$ sua extensão à $\mathbb{R}^N$ como definido acima. Então $\tilde{u} \in D^{1,2}_K(\mathbb{R}^N)$.*

Demonstração. Com efeito,

$$\int_{\mathbb{R}^N} K(x)|\nabla \tilde{u}|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^N_+} K(x)|\nabla u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N_-} K(x)|\nabla \tilde{u}|^2 dx.$$

Da definição de $\tilde{u}$,

$$\int_{\mathbb{R}^N_-} K(x)|\nabla \tilde{u}|^2 \leq C\Big(\sum_{i=1}^N \int_{\mathbb{R}^N_-} K(x)u^2_{x_i}(x', -2x_N) + \sum_{i=1}^N \int_{\mathbb{R}^N_-} K(x)u^2_{x_i}(x', -x_N)\Big).$$

Façamos então na segunda integral a mudança de variáveis $(x', x_N) \mapsto (x', -x_N)$. Neste caso,

$$\int_{\mathbb{R}^N_-} K(x)|\nabla \tilde{u}|^2 dx \leq C\Big(\sum_{i=1}^N \int_{\mathbb{R}^N_-} K(x)u^2_{x_i}(x', -2x_N)dx'dx_N + \int_{\mathbb{R}^N_+} K(x)|\nabla u|^2 dx\Big).$$

Por outro lado, como $K(x) = \exp(|x|^2/4)$ possui crescimento radial, vale que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N_-} K(x)u^2_{x_i}(x', -2x_N)dx'dx_N &= \int_{\mathbb{R}^N_-} \exp(|x|^2/4)u^2_{x_i}(x', -2x_N)dx'dx_N \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N_-} \exp(|(x', -2x_N)|^2/4)u^2_{x_i}(x', -2x_N)dx'dx_N. \end{aligned}$$

Façamos a mudança de variáveis $(x', x_N) \mapsto (x', -2x_N)$ e com isso a desigualdade acima vira

$$\int_{\mathbb{R}^N_-} K(x)u^2_{x_i}(x', -2x_N)dx'dx_N \leq c_1 \int_{\mathbb{R}^N_+} K(x)|\nabla u|^2 dx.$$

Logo,

$$\int_{\mathbb{R}^N_-} K(x)|\nabla \bar{u}|^2 dx \leq c_2 \int_{\mathbb{R}^N_+} K(x)|\nabla u|^2 dx.$$

Daí,

$$\int_{\mathbb{R}^N} K(x)|\nabla \bar{u}|^2 dx \leq C_1 \int_{\mathbb{R}^N_+} K(x)|\nabla u|^2 dx, \tag{2.4}$$

e o resultado segue. □

Teorema 2.4. *A imersão $X \hookrightarrow L^2_K(\mathbb{R}^N_+)$ é contínua para todo $2 \leq s \leq 2^*$ e é compacta para todo $2 \leq s < 2^*$*

Demonstração. Pelo Lema 2.3 dada $u \in X$, a sua extensão $\tilde{u} \in D^{1,2}_K(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^s_K(\mathbb{R}^N)$, $s \in [2, 2^*]$, vide Observação 2.2 e portanto, usando a equação (2.4),

$$\int_{\mathbb{R}^N_+} K(x)|u|^s dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} K(x)|\bar{u}|^s dx \leq C\int_{\mathbb{R}^N} K(x)|\nabla \bar{u}|^2 dx \leq C_1 \int_{\mathbb{R}^N_+} K(x)|\nabla u|^2 dx,$$

o que mostra a imersão $X \hookrightarrow L^s_K(\mathbb{R}^N_+)$.

Para a compacidade, seja $\{u_n\} \subset X$ uma sequência limitada. Temos então que $\{\tilde{u}_n\}$ é limitada em $D^{1,2}_K(\mathbb{R}^N)$ e consequentemente, pela Observação 2.2, existe $\tilde{u} \in D^{1,2}_K(\mathbb{R}^N)$ tal que, a menos de subsequência, $\tilde{u}_n \to \tilde{u}$ em $L^2_K(\mathbb{R}^N)$. Sendo u a restrição de $\tilde{u}$ à $\mathbb{R}^N_+$, temos que $u \in X$ e pela desigualdade de interpolação, obtemos que

$$\begin{aligned} ||u_n - u||_s &\leq ||u_n - u||_2^a ||u_n - u||_{2^*}^{1-a} \\ &\leq C(u)||\tilde{u}_n - \tilde{u}||^a_{L^2_K(\mathbb{R}^N)} \to 0, \end{aligned}$$

onde $\dfrac{1}{s} = \dfrac{a}{2} + \dfrac{1-a}{2}$, o que conclui a prova. □

Tendo em vista que o problema que iremos resolver possui não-linearidade na fronteira, a imersão mais importante para nós é a imersão do traço, a qual provaremos agora utilizando as imersões provadas anteriormente.

Teorema 2.5 (Imersão do Traço). *A imersão de Sobolev $X \hookrightarrow L^r_K(\mathbb{R}^{N-1})$ é contínua para todo $2 \leq r \leq 2_*$ e compacta para todo $2 \leq r < 2_*$. Além disso, no caso crítico, isto é, quando $r = 2_*$, a melhor constante de imersão, dada por*

$$S_{2_*} = \inf_{u \in X - \{0\}} \frac{\int_{\mathbb{R}^N_+} K(x)|\nabla u|^2 dx}{\left(\int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x',0)|u|^{2_*} dx' \right)^{2/2_*}},$$

coincide com a constante S_0 da imersão $D^{1,2}(\mathbb{R}^N_+) \hookrightarrow L^{2_*}(\mathbb{R}^{N-1})$ dada no Teorema 1.4.

Demonstração. Pelo Teorema 1.4,

$$S_0 = \inf_{u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N_+) - \{0\}} \frac{\int_{\mathbb{R}^N_+} |\nabla u|^2 dx}{\left(\int_{\mathbb{R}^{N-1}} |u|^{2_*} dx' \right)^{2/2_*}}.$$

Como provado em [4], as funções extremais são

$$U_\epsilon(x', x_N) = \left(\frac{\epsilon}{|x'|^2 + (x_N + \epsilon)^2} \right)^{(N-2)/2}, \forall \epsilon > 0.$$

Em vista disso, dado $\rho > 0$, escolha $\phi_\rho \in C^\infty_0(\mathbb{R}^N_+)$ uma função corte tal que $\phi_\rho \equiv 1$ em $B_{\rho/2}(0) \cap \overline{\mathbb{R}^N_+}$ e $\phi_\rho \equiv 0$ em $\overline{\mathbb{R}^N_+} - B_\rho(0)$. Para cada $\epsilon > 0$, tome U_ϵ como acima uma função extremal minimizante de S_0 e defina $\varphi_\epsilon = \phi_\rho U_\epsilon$. Pela definição de S_0, como $\varphi_\epsilon \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N_+)$, temos que

$$\frac{\int_{\mathbb{R}^N_+} |\nabla \varphi_\epsilon|^2 dx}{\left(\int_{\mathbb{R}^{N-1}} |\varphi_\epsilon|^{2_*} dx' \right)^{2/2_*}} = S_0 + o(\epsilon).$$

Defina então $K_\rho = K(\rho, 0, \cdots, 0)$ e note que como $\text{supp}(\varphi_\epsilon) \subset B_{\rho/2}(0)$, então $K(x) \leq K_\rho$ no $\text{supp}(\varphi_\epsilon)$. Além disso, $K(x) \geq 1$, para todo x. Pela definição de ínfimo

$$
\begin{aligned}
S_{2_*} \leq \frac{||\varphi_\epsilon||^2}{\|\varphi_\epsilon\|_{2_*}^2} &= \frac{\int_{\mathbb{R}^N_+} K(x)|\nabla\varphi_\epsilon|^2 dx}{\left(\int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x',0)|\varphi_\epsilon|^{2_*} dx'\right)^{2/2_*}} \\
&\leq K_\rho \frac{\int_{\mathbb{R}^N_+} |\nabla\varphi_\epsilon|^2 dx}{\left(\int_{\mathbb{R}^{N-1}} |\varphi_\epsilon|^{2_*} dx'\right)^{2/2_*}} = K_\rho S_0 + o(\epsilon),
\end{aligned}
$$

fazendo $\rho \to 0^+$ e $\epsilon \to 0^+$, obtemos que $S_{2_*} \leq S_0$.

Por outro lado, tomando $u \in C_0^\infty(\overline{\mathbb{R}^N_+})$, seja $b > 0$ tal que $u = 0$ sempre que $|x'| > \dfrac{b}{2}$ ou $x_N > \dfrac{b}{2}$ (note que a existência de b nessas condições é garantida pelo suporte de u ser compacto). Defina

$$\Omega = \{x' \in \mathbb{R}^{N-1} : |x'| < b\}.$$

Nessas condições, $\text{supp}(u) \subset \Omega \times [0, b]$. Além disso, $K^{1/2}u \in C_0^\infty(\overline{\mathbb{R}^N_+})$ e por um cálculo direto, segue que

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N_+} |\nabla(K^{1/2}u)|^2 dx &= \int_{\mathbb{R}^N_+} |\nabla(K^{1/2})|u + K^{1/2}\nabla u|^2 dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N_+} |\nabla K^{1/2}|^2 u^2 + 2uK^{1/2}\nabla u \nabla K^{1/2} + K|\nabla u|^2 dx \\
&= ||u||^2 + \int_{\mathbb{R}^N_+} \nabla(K^{1/2}u^2)\nabla K^{1/2} dx \\
&= ||u||^2 + \int_0^b \int_\Omega \nabla(K^{1/2}u^2)\nabla K^{1/2} dx' dx_N.
\end{aligned}
$$

Defina

$$B := \int_0^b \int_\Omega \nabla(K^{1/2}u^2)\nabla K^{1/2} dx' dx_N.$$

Provaremos que $B \leq 0$. Com efeito, dado $x' \in \mathbb{R}^{N-1}$, nós definimos

$$A(x') = \int_0^b (K^{1/2}u^2)_{x_N} (K^{1/2})_{x_N} dx_N.$$

Pelo Teorema da Divergência,

$$\begin{aligned} B &= \int_0^b \int_\Omega \nabla_{x'}(K^{1/2}u^2)\nabla_{x'}(K^{1/2})dx'dx_N + \int_\Omega A(x')dx' \\ &= -\int_0^b \int_\Omega K^{1/2}u^2 \Delta_{x'}(K^{1/2})dx'dx_N + \int_\Omega A(x')dx'. \end{aligned}$$

No entanto,

$$\Delta_{x'}(K^{1/2}) = \left(\frac{N-1}{4} + \frac{|x'|^2}{16}\right)K(x) \geq 0.$$

Logo é suficiente provar que $A(x') \leq 0$.

Observe que

$$(K^{1/2}u^2)_{x_N}(K^{1/2})_{x_N} + \left(\frac{1}{4} + \frac{x_N^2}{16}\right)K(x)u^2 = \frac{1}{4}(x_N u^2 K(x))_{x_N}. \tag{2.5}$$

Integrando (2.5) no intervalo $[0, b]$,

$$A(x') + \int_0^b \left(\frac{1}{4} + \frac{x_N^2}{16}\right)K(x)u^2 dx_N = \frac{1}{4}\int_0^b (x_N u^2 K(x))_{x_N} dx_N = \frac{1}{4}x_N u^2 K(x)\Big|_0^b = 0,$$

afinal $u(x', b) = 0$, donde segue que $A(x') \leq 0$ e, portanto, $B \leq 0$. Assim, para toda $u \in C_0^\infty(\overline{\mathbb{R}_+^N})$,

$$\int_{\mathbb{R}_+^N} |\nabla(K^{1/2}u)|^2 dx \leq ||u||^2.$$

Da densidade de $C_0^\infty(\overline{\mathbb{R}_+^N})$ em X, segue que a equação acima vale para toda $u \in X$. Daí, $K^{1,2}u \in D^{1,2}(\mathbb{R}_+^N)$ sempre que $u \in X$. Como $K(x) \geq 1$ e usando a definição de S_0, temos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+^N} |\nabla(K^{1/2}u)|^2 dx &\geq S_0\left(\int_{\mathbb{R}^{N-1}} (K(x,0)^{1/2}u)^{2_*}dx'\right)^{2/2_*} \\ &= S_0\left(\int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x',0)|u|^{2_*}dx'\right)^{2/2_*}. \end{aligned}$$

Consequentemente, para toda $u \in X$,

$$S_0\left(\int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x',0)|u|^{2_*}dx'\right)^{2/2_*} \leq ||u||^2,$$

o que prova que $S_0 \leq S_{2_*} \implies S_{2_*} = S_0$.

Em particular, a desigualdade acima prova a imersão $X \hookrightarrow L_K^{2_*}(\mathbb{R}^{N-1})$. Agora, para mostrar a imersão $X \hookrightarrow L_K^2(\mathbb{R}^{N-1})$, seja $u \in C_0^\infty(\overline{\mathbb{R}_+^N})$ e observe que pelo Teorema de Fubini, segue que

$$\int_{\mathbb{R}^N_+} (K(x)u^2)_{x_N} dx = \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_0^{+\infty} (K(x)u^2)_{x_N} dx_N dx' = -\int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x',0)u(x',0)dx',$$

afinal u tem suporte compacto. Consequentemente, como $x_N > 0$ em $\mathbb{R}^N_+$, e tendo em vista a imersão $X \hookrightarrow L^2_K(\mathbb{R}^N_+)$ provada no Teorema 2.4 e a desigualdade clássica

$$-2ab \leq a^2 + b^2, \text{ temos que}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x',0)u^2 dx' &= \int_{\mathbb{R}^N_+} (K(x)u^2)_{x_N} dx \\
&= -\int_{\mathbb{R}^N_+} \frac{x_N}{2} K(x)u^2 dx - 2\int_{\mathbb{R}^N_+} K(x)u\frac{\partial u}{\partial x_N} dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N_+} K(x)u^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N_+} K(x)\left(\frac{\partial u}{\partial x_N}\right)^2 dx \\
&\leq (C_1+1)\int_{\mathbb{R}^N_+} K(x)|\nabla u|^2 dx, \forall u \in C_0^\infty(\overline{\mathbb{R}^N_+}).
\end{aligned}$$

Usando a densidade de $C_0^\infty(\overline{\mathbb{R}^N_+})$ em X, segue que, para toda $u \in X$ vale que

$$\int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x',0)|u|^2 dx' \leq (C_1+1)\int_{\mathbb{R}^N_+} K(x)|\nabla u|^2 dx,$$

e, portanto, a imersão $X \hookrightarrow L^2_K(\mathbb{R}^{N-1})$ está demonstrada. Para $r \in (2, 2_*)$, basta usar a desigualdade de interpolação

$$\|u\|_s \leq \|u\|_2^a \|u\|_{2_*}^{1-a},$$

onde $\dfrac{1}{r} = \dfrac{a}{2} + \dfrac{1-a}{2_*}$.

Quanto à compacidade da imersão para $2 \leq r < 2_*$, tomamos $\{u_n\} \subset X$ uma sequência limitada. Desse modo, $\{\tilde{u}_n\}$ é limitada em $D^{1,2}_K(\mathbb{R}^N)$. Existe então $\tilde{u} \in D^{1,2}_K(\mathbb{R}^N)$ tal que passando a uma subsequência se necessário, $\tilde{u}_n \rightharpoonup \tilde{u}$ em $D^{1,2}_K(\mathbb{R}^N)$ e $\tilde{u}_n \to \tilde{u}$ em $L^2_K(\mathbb{R}^N)$ em vistas da imersão compacta $D^{1,2}_K(\mathbb{R}^N) \overset{c}{\hookrightarrow} L^2_K(\mathbb{R}^N)$ (cf. Observação 2.2). Definindo $u = \tilde{u}|_{\mathbb{R}^N_+}$, temos que $u \in X$ e, utilizando as estimativas feitas em [4], Lema 2.4,

$$\|u_n - u\|_r \leq C||\tilde{u}_n - \tilde{u}||^s_{H^1_K(\mathbb{R}^N)} ||\tilde{u}_n - \tilde{u}||^{1-s}_{L^2_K(\mathbb{R}^N)}.$$

Como já discutimos na Observação 2.2, as normas de $H^1_K(\mathbb{R}^N)$ e $D^{1,2}_K(\mathbb{R}^N)$ são equivalentes. Portanto,

$$\|u_n - u\|_r \leq C(u)||\tilde{u}_n - \tilde{u}||^{1-s}_{L^2_K(\mathbb{R}^N)} \to 0 \text{ se } n \to +\infty,$$

o que mostra que $u_n \to u$ em $L^r_K(\mathbb{R}^{N-1})$, concluindo a prova. $\square$

Capítulo 3

Uma equação do tipo côncavo-convexo

Neste capítulo, provaremos os resultados principais deste trabalho. Denotando $\mathbb{R}^N_+ = \{(x', x_N) : x' \in \mathbb{R}^{N-1} \text{ e } x_N > 0\}$, vamos considerar o problema de fronteira não linear

$$(P) \qquad \begin{cases} -\Delta u - \dfrac{1}{2}\Big(x \cdot \nabla u\Big) = 0, \ \text{em } \mathbb{R}^N_+ \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = \mu a(x')|u|^{q-2}u + b(x')|u|^{p-2}u, \ \text{sobre } \mathbb{R}^{N-1} \end{cases},$$

onde $1 < q < 2 < p \leq 2_*$, $\mu > 0$ e os potenciais a e b satisfazem determinadas hipóteses que serão em breve estabelecidas. Nosso objetivo é mostrar a existência de ao menos duas soluções não-negativas e não-triviais para o problema (P).

Multiplicando a primeira equação pela função peso $K(x) = \exp(|x|^2/4)$, ficamos com

$$-\text{div}(K(x)\nabla u) = 0, \ \text{em } \mathbb{R}^N_+.$$

Já a segunda equação multiplicamos por $K(x', 0) = \exp(|x'|^2/4)$ e ficamos com

$$K(x', 0)\frac{\partial u}{\partial \nu} = \mu a(x')K(x', 0)|u|^{q-2}u + b(x')K(x', 0)|u|^{p-2}u, \ \text{sobre } \mathbb{R}^{N-1}.$$

Como já foi dito, buscaremos soluções em $X = D^{1,2}_K(\mathbb{R}^N_+)$ e usaremos as imersões $X \hookrightarrow L^r_K(\mathbb{R}^{N-1})$, $2 \leq r \leq 2_*$ provadas no Teorema 2.5. Note que, tendo em mãos essa imersão, podemos definir para todo $2 \leq r \leq 2_*$ a melhor constante de imersão

$$S_r = \inf_{u \in X}\left\{ \int_{\mathbb{R}^N_+} K(x)|\nabla u|^2 dx : \int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x')|u(x')|^r dx' = 1\right\}. \qquad (3.1)$$

Vamos pedir as seguintes hipóteses para os potenciais a e b:

(a_1) $a \in L_K^{\sigma_q}(\mathbb{R}^{N-1})$, onde

$$\left(\frac{p}{q}\right)' < \sigma_q \leq \left(\frac{2}{q}\right)',$$

(a_2) O conjunto $\Omega_a^+ = \{x \in \mathbb{R}^{N-1} : a(x) > 0\}$ possui um ponto interior,

(b_1) $b \in L^\infty(\mathbb{R}^{N-1})$,

(b_2) O conjunto $\Omega_b^+ = \{x \in \mathbb{R}^{N-1} : b(x) > 0\}$ possui um ponto interior.

O funcional $I : X \to \mathbb{R}$ associado à (P) é definido por

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}_+^N} K(x)|\nabla u|^2 dx - \frac{\mu}{q}\int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x')a(x')|u^+|^q dx' - \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x')b(x')|u^+|^p dx'.$$

Note que I está bem definido, afinal por Hölder

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x')a(x')|u^+|dx' &= \int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x')^{1/\sigma_q} a(x') K(x')^{1/\sigma_q'}|u^+|dx' \\ &\leq \| a \|_{\sigma_q}\left(\int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x')|u^+|^{q\sigma_q'}dx'\right). \qquad (3.2)\end{aligned}$$

Agora, por (a_1),

$$\left(\frac{p}{q}\right)' < \sigma_q \leq \left(\frac{2}{q}\right)' \implies 2 \leq q\sigma_q' < p \leq 2_*.$$

Usando a imersão $X \hookrightarrow L_K^{q\sigma_q'}(\mathbb{R}^{N-1})$ segue que o lado direito é finito e, consequentemente, usando também a imersão $X \hookrightarrow L_K^p(\mathbb{R}^{N-1})$, concluímos que I está bem definido. Além disso, $I \in C^1(X, \mathbb{R})$, onde para toda $v \in X$,

$$I'(u)v = \int_{\mathbb{R}_+^N} K(x)\nabla u \nabla v dx - \mu\int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x')a(x')(u^+)^{q-1}v dx' - \int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x')b(x')(u^+)^{p-1}v dx'.$$

Como é padrão, pontos críticos de I nos fornecerão soluções não-negativas de (P).

O nosso primeiro resultado é o seguinte:

Teorema 3.1 (Caso Subcrítico). *Se $1 < q < 2 < p < 2_*$ e a, b satisfazem as hipóteses $(a_1) - (a_2)$ e $(b_1) - (b_2)$, respectivamente, então (P) possui ao menos duas soluções não-negativas não-triviais se μ for suficientemente pequeno.*

No nosso segundo resultado, vamos considerar o caso crítico $p = 2_*$. Para os potenciais a e b, além de pedir as mesmas hipóteses solicitadas no caso anterior, vamos adicionar esta hipótese à b

(b_3) Existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(0) \subset \Omega_a^+ \cap \Omega_b^+$ e

$$|b|_\infty - b(x') \leq M|x'|^\gamma,$$

para x' q.t.p em $B_\delta(0)$, com $M > 0$ e $\gamma > N-1$.

O segundo resultado principal deste capítulo é o seguinte

Teorema 3.2 (Caso Crítico). *Se $1 < q < 2$, $p = 2_*$ e a, b satisfazem as hipóteses $(a_1) - (a_2)$ e $(b_1) - (b_3)$, respectivamente, então (P) possui ao menos duas soluções não-negativas não-triviais se μ for suficientemente pequeno.*

3.1 O caso subcrítico

Provaremos nesta seção o Teorema 3.1. O primeiro passo é verificar as condições geométricas do Teorema do Passo da Montanha.

Lema 3.1. *Existem $\rho, \alpha > 0$ tais que $I(u) \geq \alpha > 0$ para todo $u \in X$ com $||u|| = \rho$, desde que μ seja suficientemente pequeno.*

Demonstração. Usando as equações (3.1) e (3.2) temos que, para todo $u \in X$, vale

$$\begin{aligned} I(u) &= \frac{1}{2}||u||^2 - \frac{\mu}{q}\int_{\mathbb{R}^{N-1}} a(x')K(x')|u^+|^q dx' - \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^{N-1}} b(x')K(x')|u^+|^p dx' \\ &\geq \frac{1}{2}||u||^2 - \frac{\mu}{q}|a|_{\sigma_q}|u|^q_{q\sigma_q'} - \frac{1}{p}|b|_\infty |u|_p \\ &\geq \frac{1}{2}||u||^2 - \frac{\mu}{q}S_{q\sigma_q'}^{-q/2}|a|_{\sigma_q}||u||^q - \frac{S_p^{-p/2}}{p}|b|_\infty ||u||^p \\ &= \frac{1}{2}||u||^q\left[||u||^{2-q} - \frac{2\mu}{q}S_{q\sigma_q'}^{-q/2}|a|_{\sigma_q} - \frac{2S_p^{-p/2}}{p}|b|_\infty ||u||^{p-q}\right]. \end{aligned}$$

Definamos

$$B := \frac{2S_p^{-p/2}}{p}|b|_\infty,$$

e consideremos a função auxiliar $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(t) = t^{2-q} - Bt^{p-q}.$$

Derivando,

$$f'(t) = (2-q)t^{1-q} - B(p-q)t^{p-q-1}.$$

Daí, se $f'(t) = 0$, então

$$t = \left(\frac{2-q}{B(p-q)}\right)^{1/(p-2)} =: \rho.$$

Portanto, ρ assim definido é ponto crítico de f. Em verdade, ρ é ponto de máximo de f, afinal

$$f''(t) = t^{-q}[(2-q)(1-q) - B(p-q)(p-q-1)t^{p-2}],$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} f''(\rho) &= \rho^{-q}\left[(2-q)(1-q) - B(p-q)(p-q-1)\left(\frac{2-q}{B(p-q)}\right)\right] \\ &= \rho^{-q}[(2-q)(1-q) - (2-q)(p-q-1)] \\ &= (2-q)\rho^{-q}[1-q-p+q+1] = (2-q)(2-p)\rho^{-q} < 0. \end{aligned}$$

Ponha $M = f(\rho) > 0$ e note que para todo $u \in X$ com $||u|| = \rho$, vale

$$\begin{aligned} I(u) &\geq \frac{\rho^q}{2}\left[\rho^{2-q} - \frac{2\mu}{q} S_{q\sigma_q'}^{-q/2} \| a \|_{\sigma_q} - B\rho^{p-q}\right] \\ &= \frac{\rho^q}{2}\left[M - \frac{2\mu}{q} S_{q\sigma_q'}^{-q/2} \| a \|_{\sigma_q}\right] \\ &\geq \frac{\rho^q M}{4} := \alpha > 0, \end{aligned} \tag{3.3}$$

sempre que

$$\mu \leq \frac{qM}{4\| a \|_{\sigma_q}} S_{q\sigma_q'}^{q/2}. \tag{3.4}$$

□

Proposição 3.1. *Suponha que μ satisfaça a Equação* (3.4) *e tome $\rho > 0$ como na prova do Lema* 3.1. *O ínfimo*

$$-\infty < c_0 := \inf_{u \in \overline{B_\rho(0)}} I(u) < 0,$$

é atingido para algum $u \in B_\rho(0)$.

Demonstração. Se $u \in \overline{B_\rho(0)}$, então $||u|| \leq \rho$. Daí, usando Hölder e as imersões $X \hookrightarrow$

$L^r_K(\mathbb{R}^{N-1})$, $2 \leq r \leq 2_*$,

$$
\begin{aligned}
|I(u)| &= \left|\frac{1}{2}||u||^2 - \frac{\mu}{q}\int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x')a(x')|u^+|^q dx' - \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x')b(x')|u^+|^p dx'\right| \\
&\leq \frac{1}{2}||u||^2 + \frac{\mu}{q}\left|\int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x')a(x')|u^+|^q dx'\right| + \frac{1}{p}\left|\int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x')b(x')|u^+|^p dx'\right| \\
&\leq \frac{1}{2}||u||^2 + \frac{\mu}{q}\|a\|_{\sigma_q}\|u\|^q_{q\sigma_q'} + \frac{1}{p}\|b\|_\infty\|u\|_p \\
&\leq \frac{1}{2}||u||^2 + \frac{\mu S_{q\sigma_q'}^{-q/2}\|a\|_{\sigma_q}}{q}||u||^q + \frac{S_p^{-p/2}\|b\|_\infty}{p}||u||^p \\
&\leq \rho^q\left[\frac{\rho^{2-q}}{2} + \frac{\mu S_{q\sigma_q'}^{-q/2}\|a\|_{\sigma_q}}{q} + \frac{S_p^{-p/2}\|b\|_\infty \rho^{p-q}}{p}\right] = C(\rho,\mu,p,q,a,b),
\end{aligned}
$$

donde segue que $I(\overline{B_\rho(0)})$ é limitado em $\mathbb{R}$ e portanto, $c_0 > -\infty$.

Por (a_2), existe $x_0' \in \mathbb{R}^{N-1}$ e $\delta > 0$ tal que $B_\delta(x_0') \subset \Omega_a^+$. Tome então $\varphi \in C_0^\infty(B_\delta(x_0'))$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x')a(x')\varphi(x')^q dx' > 0.$$

Observe que não podemos a priori avaliar I em termos de φ. Para contornar isso, considere para cada $s \in \mathbb{R}_+$ o conjunto isomorfo à $\mathbb{R}^{N-1}$

$$Y_s = \{(x', s) : x' \in \mathbb{R}^{N-1}\},$$

e consideremos $\varphi_s : B_\delta(x_0^s) \to \mathbb{R}$, onde $x_0^s = (x_0', s)$, dada por

$$\varphi_s(x', s) = \varphi(x').$$

Claramente, $\varphi_s \in C_0^\infty(Y_s)$ a menos de extensão por zeros (a partir de agora quando fizermos menção a esta função, na realidade estaremos tratando de sua extensão por zeros). Observe que $\mathbb{R}^N_+ = \bigcup_{s>0} Y_s$ é uma união disjunta. Defina então $\psi : \overline{\mathbb{R}^N_+} \to \mathbb{R}$ por

$$\psi(x) = \begin{cases} \varphi_s(x), & \text{se } x = (x', s), s > 0 \\ \varphi(x'), & \text{se } x = (x', 0) \end{cases}.$$

Note que $\psi \in C_0^\infty(\overline{\mathbb{R}^N_+}) \subset X$ e agora como $\psi = \varphi$ em $\mathbb{R}^{N-1}$, temos

$$I(t\psi) = \frac{t^2}{2}||\psi||^2 - \frac{\mu t^q}{q}\int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x')a(x')\varphi(x')^q dx' - \frac{t^p}{p}\int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x')b(x')\varphi(x')dx'.$$

Daí,

$$\frac{I(t\psi)}{t^q} = \frac{t^{2-q}}{2}||\psi||^2 - \frac{\mu}{q}\int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x')a(x')\varphi^q dx' - \frac{t^{p-q}}{p}\int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x')b(x')\varphi^p dx'.$$

Fazendo $t \to 0^+$, obtemos que

$$\limsup \frac{I(t\psi)}{t^q} \leq \frac{-\mu}{q}\int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x')a(x')\varphi(x')^q dx' < 0,$$

o que mostra que para t suficientemente pequeno $I(t\psi) < 0$ e, portanto, $c_0 < 0$.

Tome $\{u_n\} \subset \overline{B_\rho(0)}$ uma sequência minimizante. De acordo com a versão local do Princípio Variacional de Ekeland (cf. Corolário 1.1) podemos, sem perda de generalidade, assumir que

$$I(u_n) \to c_0, \quad I'(u_n) \to 0.$$

Desde que $\{u_n\}$ é limitada e $2 \leq q\sigma_q' < p \leq 2_*$, existe $u_0 \in X$ tal que a menos de subsequência,

$$\begin{cases} u_n \rightharpoonup u_0 \text{ em } X \\ u_n \to u_0 \text{ em } L_K^{q\sigma_q'}(\mathbb{R}^{N-1}) \\ u_n^+(x') \to u_0^+(x') \text{ q.t.p em } \mathbb{R}^{N-1} \\ |u_n(x')| \leq \phi(x') \text{ q.t.p em } \mathbb{R}^{N-1} \end{cases},$$

onde $\phi \in L_K^{q\sigma_q'}(\mathbb{R}^{N-1})$. Consequentemente, para x' q.t.p em $\mathbb{R}^{N-1}$, segue pela desigualdade de Young que

$$\begin{aligned} |K(x')a(x')(u_n^+(x'))^q| &\leq K(x')|a(x')||\phi(x')|^q \\ &\leq \frac{1}{\sigma_q}K(x')|a(x')|^{\sigma_q} + \frac{1}{\sigma_q'}K(x')|\phi(x')|^{q\sigma_q'}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Como $\phi \in L_K^{q\sigma_q'}(\mathbb{R}^{N-1})$, segue que o lado direito da equação (3.5) está em $L^1(\mathbb{R}^{N-1})$. Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos então que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x')a(x')(u_n^+)^q dx' = \int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x')a(x')(u_0^+)^q dx'. \tag{3.6}$$

Seja $\eta \in C_0^\infty(\overline{\mathbb{R}_+^N})$. Como $\sigma_q > \left(\frac{p}{q}\right)' = \frac{p}{p-q}$, existe $p_0 \in (2,p)$ tão próximo de p quanto for necessário, satisfazendo

$$\sigma_q > \frac{p_0}{p_0 - q} > \frac{p_0}{(p_0+1)-q} \implies \frac{1}{\sigma_q} + \frac{q-1}{p_0} < 1.$$

Logo, existe $\tau > 1$ tal que
$$\frac{1}{\sigma_q} + \frac{q-1}{p_0} + \frac{1}{\tau} = 1.$$
Claramente, sendo $p_0 \in (2, p)$, $u_n \to u$ em $L^{p_0}_K(\mathbb{R}^{N-1})$. Daí, existe $\eta_0 \in L^{p_0}_K(\mathbb{R}^{N-1})$ tal que, a menos de subsequência, $|u_n(x')| \leq \eta_0(x')$ q.t.p em $\mathbb{R}^{N-1}$. Novamente, pela desigualdade de Young, segue que

$$\begin{aligned} |K(x')a(x')(u_n^+(x'))^{q-1}\eta(x')| &\leq |K(x')a(x')\eta_0(x')^{q-1}\eta(x')| \\ &\leq K(x')\left[\frac{|a(x')|^{\sigma_q}}{\sigma_q} + \frac{q-1}{p_0}|\eta_0(x')|^{p_0} + \frac{|\eta(x')|^{\tau}}{\tau}\right], \end{aligned}$$

que é uma função de $L^1(\mathbb{R}^{N-1})$. Usando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x')a(x')(u_n^+)^{q-1}\eta(x')dx' = \int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x')a(x')(u_0^+)^{q-1}\eta(x')dx'. \tag{3.7}$$

Como p_0 está tão próximo quanto se queira de p, podemos assumir que $p_0 > p-1$. Dito isto, existe $\chi > 1$ tal que
$$\frac{1}{\chi} + \frac{p-1}{p_0} = 1.$$
Com isso e como $b \in L^\infty(\mathbb{R}^{N-1})$, para x' q.t.p em $\mathbb{R}^{N-1}$,

$$\begin{aligned} |K(x')b(x')(u_n^+(x')^{p-1})\eta(x')| &\leq |b|_\infty |K(x')\eta_0(x')^{p-1}\eta(x')| \\ &\leq |b|_\infty K(x')\left[\frac{p-1}{p_0}|\eta_0(x')|^{p_0} + \frac{1}{\chi}|\eta(x')|^{\chi}\right] \in L^1(\mathbb{R}^{N-1}). \end{aligned}$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, segue que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x')b(x')(u_n^+)^{p-1}\eta(x')dx' = \int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x')b(x')(u_0^+)^{p-1}\eta(x')dx'. \tag{3.8}$$

Daí, como $u_n \rightharpoonup u_0$ em X,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N_+} K(x)\nabla u_n \nabla \eta dx = \int_{\mathbb{R}^N_+} K(x)\nabla u_0 \nabla \eta dx. \tag{3.9}$$

Combinando as equações (3.7) – (3.9),

$$0 = \lim_{n\to+\infty} I'(u_n)\eta = I'(u_0)\eta, \forall \eta \in C_0^\infty(\overline{\mathbb{R}^N_+}).$$

Por densidade, segue então que $I'(u_0) = 0$ e, portanto, u_0 é ponto crítico de I e um candidato natural à solução de (P).

Falta mostrar que $I(u_0) = c_0$ e que $u_0 \notin \partial B_\rho(0)$. Como $I'(u_n) \to 0$ e $I(u_n) \to$

c_0, podemos escrever

$$\begin{aligned}
c_0 &= \liminf_n I(u_n) - \frac{1}{p} I'(u_n)u_n \\
&= \liminf_n \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) ||u_n||^2 + \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) \mu \int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x')a(x')(u_n^+)^q dx' \right] \\
&\geq \liminf_n \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) ||u_n||^2 + \liminf_n \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) \mu \int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x')a(x')(u_n^+)^q dx' \\
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) ||u_0||^2 + \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) \mu \int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x')a(x')(u_0^+)^q dx' \\
&= I(u_0) - \frac{1}{p} I'(u_0)u_0 = I(u_0), \text{ afinal } I'(u_0) = 0.
\end{aligned}$$

Assim, $I(u_0) \leq c_0$. No entanto, pela definição de c_0, $I(u_0) \geq c_0$ e, portanto, $I(u_0) = c_0$. Pelo Lema 3.1, se $u_0 \in \partial B_\rho(0)$, então $I(u_0) \geq \alpha > 0$, o que não ocorre, afinal $I(u_0) = c_0 < 0$ e, consequentemente, $u_0 \in B_\rho(0)$. $\square$

Lema 3.2. *Suponha que b satisfaça (b_2) e seja $B_\delta(x_1') \subset \Omega_b^+$. Se $\varphi \in C_0^\infty(B_\delta(x_1')) - \{0\}$ é não-negativa, então*

$$\lim_{t \to +\infty} I(u_0 + t\varphi) = -\infty.$$

Demonstração. Observe que

$$\begin{aligned}
I(u_0 + t\varphi) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N_+} K(x)|\nabla(u_0 + t\varphi)|^2 dx - \frac{\mu}{q} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x')a(x')(u_0 + t\varphi)^q dx' \\
&\quad - \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x')b(x')(u_0 + t\varphi)^p dx' \\
&= \frac{1}{2}||u_0||^2 + t \int_{\mathbb{R}^N_+} K(x)\nabla u_0 \nabla\varphi dx + \frac{t^2}{2}||\varphi||^2 \\
&\quad - \frac{\mu}{q} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x')a(x')(u_0 + t\varphi)^q dx' - \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x')b(x')(u_0 + t\varphi)^p dx' \\
&\leq O(1) + O(t) + O(t^2) - \frac{\mu}{q} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x')a(x')(u_0 + t\varphi)^q dx' \\
&\quad - \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x')b(x')(u_0 + t\varphi)^p dx'.
\end{aligned}$$

Como $u_0 \geq 0$ e $\varphi = 0$ fora da bola $B_\delta(x_1)'$, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x')a(x')(u_0 + t\varphi)^q dx' &\geq \int_{B^c_\delta(x_1')} K(x')a(x')u_0^q dx' + t^q \int_{B_\delta(x_1')} K(x')a(x')\varphi^q dx' \\
&= O(1) + O(t^q).
\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x')b(x')(u_0+t\varphi)^p dx' &\geq \int_{B^c_\delta(x'_1)} K(x')b(x')u_0^p dx' + t^p \int_{B_\delta(x'_1)} K(x')b(x')\varphi^p dx' \\ &= O(1) + t^p \int_{B_\delta(x'_1)} K(x')b(x')\varphi^p dx'.\end{aligned}$$

Combinando as três desigualdades obtidas, temos que

$$I(u_0+t\varphi) \leq O(t^2) + O(t^q) + O(t) + O(1) - \frac{t^p}{p}\int_{B_\delta(x'_1)} K(x')b(x')\varphi^p dx'.$$

Desde que $\varphi \geq 0$ e $B_\delta(x'_1) \subset \Omega_b^+$, temos que a integral na inequação acima é positiva e como $1 < q < 2 < p$, ao fazer $t \to +\infty$, obtemos

$$\lim_{t\to+\infty} I(u_0+t\varphi) = -\infty,$$

concluindo assim o resultado. □

Lema 3.3. *Se $2 < p < 2_*$, então o funcional I satisfaz a condição $(PS)_c$, para todo $c \in \mathbb{R}$.*

Demonstração. Seja $\{u_n\} \subset X$ tal que $I(u_n) \to c$ e $I'(u_n) \to 0$. Usando a desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned} c + o_n(1)||u_n|| &= I(u_n) - \frac{1}{p}I'(u_n)u_n \\ &= \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)||u_n||^2 - \left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)\mu\int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x')a(x')(u_n^+)^q dx' \\ &\geq \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)||u_n||^2 - \left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)\mu S_{q\sigma'_q}^{-q/2}\|a\|_{\sigma_q}||u_n||^q,\end{aligned}$$

o que mostra que $\{u_n\}$ é limitada em X. Assim, existe $u \in X$ tal que, a menos de subsequência, $u_n \rightharpoonup u$ em X e $u_n \to u$ em $L^r_K(\mathbb{R}^{N-1})$, $2 \leq r < 2_*$. A escolha de σ_q nos dá $p_0 \in [2,p)$ tal que $\sigma_q = \left(\dfrac{p_0}{q}\right)'$. Fazendo Hölder com os expoentes σ_q, $\dfrac{p_0}{q-1}$ e p_0, temos que

$$\left|\int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x')a(x')(u_n^+(x'))^{q-1}(u_n-u)dx'\right| \leq \|a\|_{\sigma_q}\|u_n\|_{p_0}^{q-1}\|u_n-u\|_{p_0},$$

e, portanto,

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x')a(x')(u_n^+)^{q-1}(u_n-u)dx' = 0. \tag{3.10}$$

De modo análogo,

$$\left| \int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x')b(x')(u_n^+(x'))^{p-1}(u_n - u)dx' \right| \leq \|b\|_\infty \|u_n\|_p^{p-1} \|u_n - u\|_p,$$

e, consequentemente,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x')a(x')(u_n^+)^{p-1}(u_n - u)dx' = 0. \tag{3.11}$$

Combinando as equações (3.10) e (3.11), temos que

$$o_n(1) = I'(u_n)(u_n - u) = ||u_n||^2 - ||u||^2 + o_n(1) \text{ se } n \to +\infty.$$

Daí,

$$\lim_{n\to+\infty} ||u_n||^2 = ||u||^2,$$

e portanto, $u_n \to u$ em X, provando o resultado. $\square$

Com estes resultados em mãos, estamos aptos a demonstrar o Teorema 3.1.

Demonstração do Teorema 3.1: Supondo que μ satisfaça (3.4), obtemos uma solução $u_0 \in X$ com $I(u_0) < 0$. Tomando $\rho > 0$ dado pelo Lema 3.1 e considerando φ dada no Lema 3.2, nós podemos obter $t_0 > 0$ grande o suficiente de modo que $v = u_0 + t_0\varphi$ obedeça $I(v) \leq I(u_0) < 0$. Defina o nível do passo da montanha

$$c_M = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} I(\gamma(t)),$$

onde $\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], X) : \gamma(0) = u_0 \text{ e } \gamma(1) = v\}$. Como é padrão, $c_M \geq \alpha > 0$, onde α é o obtido no Lema 3.1. Pelo Teorema do Passo da Montanha (cf. Teorema 1.7), existe $\{u_n\} \subset X$ tal que $I(u_n) \to c_M$ e $I'(u_n) \to 0$. Agora pelo Lema 3.3, I satisfaz $(PS)_{c_M}$ e, consequentemente, existe $u \in X$ tal que $I(u) = c_M > 0$ e $I'(u) = 0$. Dito isso, $u \neq u_0$ e então obtemos duas soluções não-negativas para o problema (P). $\square$

3.2 O caso crítico

Nessa seção provaremos a versão crítica do nosso teorema. Assim como na seção anterior, iremos provar primeiro uma série de resultados preliminares. Observe que como não foi necessário utilizar a compacidade da imersão $X \overset{c}{\hookrightarrow} L_K^p(\mathbb{R}^{N-1})$ no Lema 3.1 e na Proposição 3.1, eles podem ser replicados sem prejuízo aqui e desse modo, já encontramos uma solução de energia negativa $u_0 \in X$. Vamos então em busca da segunda solução.

No primeiro resultado, mostraremos que o funcional I satisfaz Palais-Smale em determinados níveis.

Lema 3.4. *Suponha que* 0 *e* u_0 *são os únicos pontos críticos de* I*. Então* I *satisfaz a condição* $(PS)_c$ *para todo* $c \in \mathbb{R}$ *tal que*

$$c < \bar{c} := I(u_0) + \frac{1}{2(N-1)} \frac{1}{\|b\|_\infty^{N-2}} S_{2_*}^{N-1},$$

onde

$$S_{2_*} = \inf_{u \in X} \left\{ \int_{\mathbb{R}^N_+} K(x)|\nabla u|^2 dx : \int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x')|u(x')|^{2_*} dx' = 1 \right\} = S_0.$$

Demonstração. Seja $\{u_n\} \subset X$ tal que $I(u_n) \to c$ e $I'(u_n) \to 0$. Usando a desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned}
c + o_n(1)||u_n|| &= I(u_n) - \frac{1}{2_*} I'(u_n)u_n \\
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2_*}\right)||u_n||^2 - \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{2_*}\right)\mu \int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x')a(x')(u_n^+)^q dx' \\
&\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2_*}\right)||u_n||^2 - \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{2_*}\right)\mu S_{q\sigma'_q}^{-q/2} \|a\|_{\sigma_q} ||u_n||^q,
\end{aligned}$$

o que mostra que $\{u_n\}$ é limitada em X. Passando então a uma subsequência, existe $u \in X$ tal que $u_n \rightharpoonup u$ em X e $u_n \to u$ em $L_K^{q\sigma'_q}(\mathbb{R}^{N-1})$. Procedendo de maneira análoga à prova da Proposição 3.1, temos

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x')a(x')(u_n^+)^q dx' = \int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x')a(x')(u^+)^q dx'.$$

Definindo $v_n = u_n - u$, pelo Lema de Brezis-Lieb (cf. [12], p. 21),

$$\begin{aligned}
0 = I'(u_n)u_n &= ||u_n||^2 - \mu \int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x')a(x')(u_n^+)^q dx' - \int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x')b(x')(u_n^+)^{2_*} dx' \\
&= ||u||^2 + ||v_n||^2 - \mu \int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x')a(x')(u^+)^q dx' + o_n(1) \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x')b(x')(u^+)^{2_*} dx' - \int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x')b(x')(v_n^+)^{2_*} dx' \\
&= I'(u)u + ||v_n||^2 - \int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x')b(x')(v_n^+)^{2_*} dx' + o_n(1).
\end{aligned}$$

De modo análogo à prova da Proposição 3.1, temos que $I'(u) = 0$, isto é, u é ponto crítico de I. Desse modo, existe $l \geq 0$ tal que

$$\lim_{n \to +\infty} ||v_n||^2 = l = \lim_{n \to +\infty} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x')b(x')(v_n^+)^{2_*} dx'.$$

Afirmamos que $l = 0$. Com efeito, note inicialmente que utilizando a imersão contínua $X \hookrightarrow L^{2_*}(\mathbb{R}^{N-1})$, temos que

$$\int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x')b(x')(v_n^+)^{2_*}dx' \leq \|b\|_\infty S_0^{-2_*/2}\left(\int_{\mathbb{R}^N_+} K(x)|\nabla v_n|^2 dx\right)^{2_*/2}.$$

Tomando o limite com $n \to +\infty$ temos que, supondo $l > 0$,

$$l \leq \|b\|_\infty S_0^{-2_*/2} l^{2_*/2} \implies l \geq \frac{1}{\|b\|_\infty^{N-2}} S_0^{N-1}. \tag{3.12}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
c + o_n(1) = I(u_n) &= \frac{1}{2}||u_n||^2 - \frac{\mu}{q}\int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x')a(x')(u_n^+)^q dx' - \frac{1}{2_*}\int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x')b(x')(u_n^+)^{2_*}dx' \\
&= \frac{1}{2}||u||^2 + \frac{1}{2}||v_n||^2 - \frac{\mu}{q}\int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x')a(x')(u^+)^q dx' + o_n(1) \\
&\quad -\frac{1}{2_*}\int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x')b(x')(u^+)^{2_*}dx' - \frac{1}{2_*}\int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x')b(x')(v_n^+)^{2_*}dx' \\
&= I(u) + \frac{1}{2}||v_n||^2 - \frac{1}{2_*}\int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x')b(x')(v_n)^{2_*}dx' + o_n(1).
\end{aligned}$$

Fazendo $n \to +\infty$ na expressão acima e utilizando a estimativa obtida em (3.12), obtemos

$$c = I(u) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2_*}\right) l \geq I(u) + \frac{1}{2(N-1)} \frac{1}{\|b\|_\infty^{N-2}} S_0^{N-1}.$$

Mas, como u é ponto crítico de I, temos que $u = 0$ ou $u = u_0$. De qualquer forma, como $\max\{I(0), I(u_0)\} \leq 0$, a desigualdade acima contradiz o fato de que $c < \bar{c}$ e, portanto, $l = 0$. Consequentemente,

$$0 = l = \lim_{n\to+\infty} ||v_n||^2 = \lim_{n\to+\infty} ||u_n - u||^2,$$

e portanto, $u_n \to u$ em X, o que conclui a prova. $\square$

Dado o resultado acima, fica claro então como iremos encontrar a segunda solução do problema. Vamos determinar um nível $c < \bar{c}$ específico onde ao se verificar nele a condição de Palais-Smale gerará uma contradição. Para tal considere, para todo $\epsilon > 0$ a seguinte função

$$u_\epsilon(x) = K(x)^{-1/2}\phi(x)U_\epsilon(x), \quad x \in \mathbb{R}^N_+,$$

com $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N_+, [0,1])$ uma função corte tal que $\phi \equiv 1$ em $B_{\delta/2}(0)^+$ e $\phi \equiv 0$ em $(B_\delta(0)^+)^c$, onde $\delta > 0$ é o dado na hipótese (b_3). Além disso, U_ϵ é dada por

$$U_\epsilon(x', x_N) = \left(\frac{\epsilon}{(|x'|^2 + (x_N + \epsilon)^2)}\right)^{(N-2)/2}.$$

Para o nosso próximo resultado, vamos usar a seguinte notação: para cada $\delta > 0$, $B_\delta^+ = \{x \in \mathbb{R}_+^N : |x| < \delta\} = B_\delta(0) \cap \mathbb{R}_+^N$.

Lema 3.5. *Suponha que $N \geq 4$ e sejam*

$$A_N = \int_{\mathbb{R}_+^N} |\nabla U_\epsilon|^2 dx, \quad B_N = \left(\int_{\mathbb{R}^{N-1}} |U_\epsilon|^{2_*} dx'\right)^{2/2_*}.$$

Então, $A_N/B_N = S_0$, com S_0 sendo a constante dada no item (c) do Teorema 1.4. *Além disso, se $\epsilon \to 0^+$,*

$$||u_\epsilon||^2 = A_N + \begin{cases} O(\epsilon^2|\ln\epsilon|), & se\ N = 4, \\ O(\epsilon^2), & se\ N \geq 5, \end{cases}$$

e

$$\| u_\epsilon \|_{2_*}^{2_*} = B_N^{2^*/2} + O(\epsilon^2).$$

Demonstração. Como as funções extremais do problema variacional,

$$\inf_{u \in D^{1,2}(\mathbb{R}_+^N) - \{0\}} \left\{ \int_{\mathbb{R}_+^N} |\nabla u|^2 dx : \int_{\mathbb{R}^{N-1}} |u(x', 0)|^{2_*} = 1 \right\},$$

são dadas justamente por U_ϵ, com $\epsilon > 0$, já segue daí que $A_N/B_N = S_0$. Para a segunda afirmativa, note que

$$\nabla u_\epsilon = -\frac{x}{4} K^{-1/2} \phi U_\epsilon + K^{-1/2} \phi \nabla U_\epsilon + K^{-1/2} U_\epsilon \nabla \phi.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+^N} K(x)|\nabla u_\epsilon|^2 dx &= \frac{1}{16} \int_{\mathbb{R}_+^N} |x|^2 \phi^2 U_\epsilon^2 + \int_{\mathbb{R}_+^N} \phi^2 |\nabla U_\epsilon|^2 + \int_{\mathbb{R}_+^N} U_\epsilon^2 |\nabla \phi|^2 \\ &- \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}_+^N} \phi^2 U_\epsilon (x \cdot \nabla U_\epsilon) - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}_+^N} U_\epsilon^2 \phi (x \cdot \nabla \phi) + 2 \int_{\mathbb{R}_+^N} \phi U_\epsilon \nabla \phi \nabla U_\epsilon. \end{aligned}$$

Da definição de ϕ, $\nabla \phi \neq 0$ apenas em $B_\delta^+ - B_{\delta/2}^+$, portanto

$$\int_{\mathbb{R}_+^N} U_\epsilon^2 |\nabla \phi|^2 dx = \epsilon^{N-2} \int_{B_\delta^+ - B_{\delta/2}^+} \frac{|\nabla \phi^2|}{[|x'|^2 + (x_N + \epsilon)^2]^{N-2}} dx = O(\epsilon^{N-2}).$$

De modo análogo,

$$\int_{\mathbb{R}^N_+} \phi U_\epsilon \nabla\phi \nabla U_\epsilon dx = -(N-2)\epsilon^{N-2}\int_{B^+_\delta - B^+_{\delta/2}} \frac{[(x', x_N+\epsilon)\cdot\nabla\phi]\phi}{[|x'|^2+(x_N+\epsilon)^2]^{N-1}}dx = O(\epsilon^{N-2}),$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N_+} \phi U_\epsilon^2 (x\cdot\nabla\phi)dx = \epsilon^{N-2}\int_{B^+_\delta - B^+_{\delta/2}} \frac{(x\cdot\nabla\phi)\phi}{[|x'|^2+(x_N+\epsilon)^2]^{N-2}}dx = O(\epsilon^{N-2}).$$

Dessas três igualdades, segue que

$$||u_\epsilon||^2 = O(\epsilon^{N-2}) + \int_{\mathbb{R}^N_+} \phi^2|\nabla U_\epsilon|^2 dx - \frac{1}{2}\phi^2 U_\epsilon (x\cdot\nabla U_\epsilon)dx + \frac{1}{16}\int_{\mathbb{R}^N_+}|x|^2\phi^2U_\epsilon^2 dx.$$

Como

$$\nabla U_\epsilon = -\frac{(N-2)\epsilon^{(N-2)/2}}{[|x'|^2+(x_N+\epsilon)^2]^{N/2}}(x', x_N+\epsilon),$$

e usando que $\phi^2|\nabla U_\epsilon|^2 = |\nabla U_\epsilon|^2 + (\phi^2-1)|\nabla U_\epsilon|^2$,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N_+}\phi^2|\nabla U_\epsilon|^2dx &= \int_{\mathbb{R}^N_+}|\nabla U_\epsilon|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N_+ - B^+_{\delta/2}}(\phi^2-1)|\nabla U_\epsilon|^2 dx \\ &= A_N + (N-2)^2\epsilon^{N-2}\int_{\mathbb{R}^N_+ - B^+_{\delta/2}}\frac{\phi^2-1}{[|x'|^2+(x_N+\epsilon)^2]^{N-1}}dx.\end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variáveis $y = \dfrac{x}{\epsilon}$, obtemos que $dx = \epsilon^N dy$, logo

$$\epsilon^{N-2}\int_{\mathbb{R}^N_+ - B^+_{\delta/2}}\frac{\phi^2-1}{[|x'|^2+(x_N+\epsilon)^2]^{N-1}}dx = \int_{\mathbb{R}^N_+ - B^+_{\delta/2\epsilon}}\frac{(\phi^2-1)}{[|y'|^2+(y_N+1)^2]^{N-1}}dy.$$

Uma vez que $|\phi^2-1|\leq 1$

$$\int_{\mathbb{R}^N_+ - B^+_{\delta/2\epsilon}}\frac{\phi^2-1}{[|y'|^2+(y_N+\epsilon)^2]^{N-1}}dy \leq \int_{\mathbb{R}^N_+ - B^+_{\delta/2\epsilon}}|y|^{-2(N-1)}dy,$$

mas, se denotarmos $\sigma_{N-1} = \mathrm{vol}(\mathbb{S}^{N-2})$, temos que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N_+ - B^+_{\delta/2\epsilon}}|y|^{-2(N-1)}dx &= \frac{1}{2}\int_{\delta/2\epsilon}^{+\infty}\int_{\partial B_s}|y'|^{2-2N}dy'ds \\ &= \frac{1}{2}\int_{\delta/2\epsilon}^{+\infty}\int_{\partial B_s}s^{2-2N}dy'ds \\ &= \frac{1}{2}\sigma_{N-1}\int_{\delta/2\epsilon}^{+\infty}s^{2-2N}s^{N-1}ds \\ &= c(N)\left[\lim_{s\to+\infty}s^{2-N} - \left(\frac{2\epsilon}{\delta}\right)^{N-2}\right] = O(\epsilon^{N-2}),\end{aligned}$$

afinal $\lim\limits_{s\to+\infty} s^{2-N} < +\infty$ para todo $N > 2$. Assim,

$$\int_{\mathbb{R}^N_+} \phi^2 |\nabla U_\epsilon|^2 dx = A_N + O(\epsilon^{N-2}).$$

De modo análogo, temos que

$$\phi^2 U_\epsilon (x \cdot \nabla U_\epsilon) = (\phi^2 - 1) U_\epsilon (x \cdot \nabla U_\epsilon) + U_\epsilon (x \cdot \nabla U_\epsilon),$$

portanto

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N_+} \phi^2 U_\epsilon (x \cdot \nabla U_\epsilon) dx &= \int_{B_\delta^+} \phi^2 U_\epsilon (x \cdot \nabla U_\epsilon) dx \\ &= \int_{B_\delta^+ - B_{\delta/2}^+} (\phi^2 - 1) U_\epsilon (x \cdot \nabla U_\epsilon) dx + \int_{B_\delta^+} U_\epsilon (x \cdot \nabla U_\epsilon) dx, \end{aligned}$$

mas

$$\begin{aligned} \int_{B_\delta^+ - B_{\delta/2}^+} (\phi^2 - 1) U_\epsilon (x \cdot \nabla U_\epsilon) &= -(N-2)\epsilon^{N-2} \int_{B_\delta^+ - B_{\delta/2}^+} \frac{[|x'|^2 + x_N(x_N + \epsilon)](\phi^2 - 1)}{[|x'|^2 + (x_N + \epsilon)^2]^{N-1}} \\ &= O(\epsilon^{N-2}). \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\int_{B_\delta^+} U_\epsilon (x \cdot \nabla U_\epsilon) dx = -(N-2)\epsilon^{N-2} \int_{B_\delta^+} \frac{[|x'|^2 + x_N(x_N + \epsilon)]}{[|x'|^2 + (x_N + \epsilon)^2]^{N-1}} dx.$$

Fazendo a mudança de variáveis $y = \dfrac{x}{\epsilon}$,

$$\int_{B_\delta^+} U_\epsilon (x \cdot \nabla U_\epsilon) dx = -(N-2)\epsilon^2 (\Gamma_{1,N,\epsilon} + \Gamma_{2,N,\epsilon}),$$

onde

$$\Gamma_{1,N,\epsilon} = \int_{B_{\delta/\epsilon}^+} \frac{|y'|^2}{[|y'|^2 + (y_N + 1)^2]^{N-1}} dy, \quad \Gamma_{2,N,\epsilon} = \int_{B_{\delta/\epsilon}^+} \frac{y_N(y_N + 1)}{[|y'|^2 + (y_N + 1)^2]^{N-1}} dy.$$

Note que

$$\begin{aligned}
\Gamma_{1,N,\epsilon} &\leq \int_{\mathbb{R}^N_+} \frac{|y'|^2}{[|y'|^2+(y_N+1)^2]^{N-1}}dy \\
&= \int_{B_1^+} \frac{|y'|^2}{[|y'|^2+(y_N+1)^2]^{N-1}}dy + \int_{\mathbb{R}^N_+ - B_1^+} \frac{|y'|^2}{[|y'|^2+(y_N+1)^2]^{N-1}}dy \\
&\leq \int_{B_1^+} \frac{|y'|^2}{[|y'|^2+(y_N+1)^2]^{N-1}}dy + \int_{\mathbb{R}^N_+ - B_1^+} |y|^{2-2(N-1)}dy.
\end{aligned}$$

Veja que se $N \geq 5$, temos que $\Gamma_{1,N,\epsilon} < +\infty$, pois

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N_+ - B_1^+} |y|^{2-2(N-1)}dy &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N - B_1} |y|^{2-2(N-1)}dy \\
&= \frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\int_{\partial B_s} |y'|^{2-2(N-1)}dy'ds \\
&= \frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\int_{\partial B_s} s^{2-2(N-1)}dy'ds \\
&= \frac{1}{2}\sigma_{N-1}\int_1^{+\infty} s^{2-2(N-1)}s^{N-1}ds \\
&= c(N)\left[\lim_{s\to+\infty} s^{2-2(N-1)+N} - 1\right] < +\infty,
\end{aligned}$$

se, e somente se, $2-2(N-1)+N < 0$, ou equivalentemente, $N > 4$. Procedendo de maneira análoga para $\Gamma_{2,N,\epsilon}$, obtemos que para $N \geq 5$

$$\int_{\mathbb{R}^N_+} U_\epsilon(x \cdot U_\epsilon)dx = O(\epsilon^2).$$

Quando $N = 4$, temos que proceder de maneira diferente, afinal não há convergência na integral de $|y|^{2-2(N-1)}$ em $\mathbb{R}^4$. No entanto,

$$\Gamma_{1,4,\epsilon} = \int_{B^+_{\delta/\epsilon}} \frac{|y'|^2}{[|y'|^2+(y_N+1)^2]^3}dy = \Sigma_1 + \Sigma_{1,\epsilon},$$

onde

$$\Sigma_1 = \int_{\mathbb{R}^3\times[0,\delta]} \frac{|y'|^2}{[|y'|^2+(y_4+1)^2]^3}dy, \quad \Sigma_{1,\epsilon} = \int_{\mathbb{R}^3\times[\delta,\delta/\epsilon]} \frac{|y'|^2}{[|y'|^2+(y_4+1)^2]^3}dy.$$

Usando o Teorema de Fubini e a mudança de variáveis $z' = \dfrac{y'}{y_4+1}$, obtemos

$$\begin{aligned}
\Sigma_1 &= \int_0^\delta \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|y'|^2}{[|y'|^2 + (y_4+1)^2]^3} dy' dy_4 \\
&= \int_0^\delta \int_{\mathbb{R}^3} \frac{(y_4+1)^2 |z'|^2}{(y_4+1)^6 (|z'|^2+1)^3} (y_4+1)^3 dz' dy_4 \\
&= \left(\int_0^\delta \frac{1}{y_4+1} dy_4 \right) \left(\int_{\mathbb{R}^3} \frac{|z'|^2}{[|z'|^2+1]^3} dz' \right) = 3\frac{\pi^2}{4} \ln \delta = O(1).
\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}
\Sigma_{1,\epsilon} &= \left(\int_\delta^{\delta/\epsilon} \frac{1}{y_4+1} dy_4 \right) \left(\int_{\mathbb{R}^3} \frac{|z'|^2}{[|z'|^2+1]^3} dz' \right) \\
&\leq \left(\int_\delta^{\delta/\epsilon} \frac{1}{y_4} dy_4 \right) \left(\int_{\mathbb{R}^3} \frac{|z'|^2}{[|z'|^2+1]^3} dz' \right) = -3\frac{\pi^2}{4} \ln \epsilon = O(|\ln \epsilon|),
\end{aligned}$$

de modo que

$$\Gamma_{1,4,\epsilon} = O(|\ln \epsilon|).$$

Quanto à $\Gamma_{2,N,\epsilon}$, temos

$$\Gamma_{2,4,\epsilon} = \int_{B^+_{\delta/\epsilon}} \frac{y_4(y_4+1)}{[|y'|^2 + (y_N+1)^2]^3} dy = \Sigma_2 + \Sigma_{2,\epsilon},$$

onde

$$\Sigma_2 = \int_{\mathbb{R}^3 \times [0,\delta]} \frac{y_4(y_4+1)}{[|y'|^2 + (y_4+1)^2]^3} dy, \quad \Sigma_{2,\epsilon} = \int_{\mathbb{R}^3 \times [\delta, \delta/\epsilon]} \frac{y_4(y_4+1)}{[|y'|^2 + (y_4+1)^2]^3} dy.$$

Usando novamente o Teorema de Fubini e a mudança de variáveis $z' = \dfrac{y'}{y_4+1}$,

$$\begin{aligned}
\Sigma_2 &= \int_0^\delta \int_{\mathbb{R}^3} \frac{y_4(y_4+1)}{[|y'|^2 + (y_4+1)^2]^3} dy' dy_4 \\
&= \int_0^\delta \int_{\mathbb{R}^3} \frac{y_4(y_4+1)}{(y_4+1)^6 (|z'|^2+1)^3} (y_4+1)^3 dz' dy_4 \\
&= \left(\int_0^\delta \frac{y_4}{(y_4+1)^2} dy_4 \right) \left(\int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{[|z'|^2+1]^3} dz' \right) \\
&\leq \left(\int_0^\delta \frac{y_4}{y_4^2+1} \right) \left(\int_{\mathbb{R}^3} \frac{|z'|^2}{[|z'|^2+1]^3} dz' \right) = 3\frac{\pi^2}{8} \ln(\delta^2+1) = O(1).
\end{aligned}$$

Analogamente para $\Sigma_{2,\epsilon}$,

$$\begin{aligned}
\Sigma_{2,\epsilon} &= \left(\int_{\delta}^{\delta/\epsilon} \frac{y_4}{(y_4+1)^2} dy_4\right)\left(\int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{[|z'|^2+1]^3} dz'\right) \\
&\leq \left(\int_{\delta}^{\delta/\epsilon} \frac{1}{y_4} dy_4\right)\left(\int_{\mathbb{R}^3} \frac{|z'|^2}{[|z'|^2+1]^3} dz'\right) = -3\frac{\pi^2}{4} \ln \epsilon = O(|\ln \epsilon|),
\end{aligned}$$

de forma que

$$\Gamma_{2,4,\epsilon} = O(|\ln \epsilon|).$$

Disto, concluímos que

$$\int_{\mathbb{R}^N_+} \phi^2 U_\epsilon (x \cdot \nabla U_\epsilon) dx = \begin{cases} O(\epsilon^2), & \text{se } N \geq 5, \\ O(\epsilon^2 |\ln \epsilon|), & \text{se } N = 4. \end{cases}$$

Falta avaliar apenas $\int_{\mathbb{R}^N_+} |x|^2 \phi^2 U_\epsilon^2 dx$. Novamente, usando que $\phi^2 = (\phi^2 - 1) + 1$,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N_+} |x|^2 \phi^2 U_\epsilon^2 dx &= \int_{B_\delta^+} |x|^2 \phi^2 U_\epsilon^2 dx \\
&= \int_{B_\delta^+ - B_{\delta/2}^+} |x|^2 (\phi^2 - 1) U_\epsilon^2 dx + \int_{B_\delta^+} |x|^2 U_\epsilon^2 dx.
\end{aligned}$$

Por um lado,

$$\int_{B_\delta^+ - B_{\delta/2}^+} |x|^2 (\phi^2 - 1) U_\epsilon^2 = \epsilon^{N-2} \int_{B_\delta^+ - B_{\delta/2}^+} \frac{|x|^2 (\phi^2 - 1)}{[|x'|^2 + (x_N + \epsilon)^2]^{N-2}} = O(\epsilon^{N-2}).$$

Para a outra integral, temos que ao fazer a mudança de variáveis $y = \dfrac{x}{\epsilon}$,

$$\begin{aligned}
\int_{B_\delta^+} |x|^2 U_\epsilon^2 dx &= \epsilon^{N-2} \int_{B_\delta^+} \frac{|x|^2}{[|x'|^2 + (x_N + \epsilon)^2]^{N-2}} dx \\
&= \epsilon^4 \int_{B_{\delta/\epsilon}^+} \frac{|y|^2}{[|y'|^2 + (y_N + 1)^2]^{N-2}} dy \\
&\leq \epsilon^4 \left(\int_{B_1^+} \frac{|y|^2}{[|y'|^2 + (y_N + 1)^2]^{N-2}} dy + \int_{\mathbb{R}^N_+ - B_1^+} \frac{|y|^2}{[|y'|^2 + (y_N + 1)^2]^{N-2}} dy \right) \\
&= \epsilon^4 \left(\int_{B_1^+} \frac{|y|^2}{[|y'|^2 + (y_N + 1)^2]^{N-2}} dy + \int_{\mathbb{R}^N_+ - B_1^+} |y|^{2-2(N-2)} dy \right).
\end{aligned}$$

Note que se $N \geq 7$, então a última integral lado direito da desigualdade acima é finita. Com efeito,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N_+ - B_1^+} |y|^{2-2(N-2)} dy &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N - B_1} |y|^{2-2(N-2)} dy \\
&= \frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\int_{\partial B_s} |y'|^{2-2(N-2)} dy' ds \\
&= \frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\int_{\partial B_s} s^{2-2(N-2)} dy' ds \\
&= \frac{1}{2}\sigma_{N-1}\int_1^{+\infty} s^{2-2(N-2)} s^{N-1} ds \\
&= c(N)\left[\lim_{s\to+\infty} s^{2-2(N-2)+N} - 1\right] < \infty,
\end{aligned}$$

se, e somente se, $2 - 2(N-2) + N < 0$ ou, equivalentemente, $N > 6$. Logo, se $N \geq 7$,

$$\int_{\mathbb{R}^N_+} |x|^2 \phi^2 U_\epsilon^2 dx = O(\epsilon^4).$$

Nos casos em que $N \in \{4, 5, 6\}$, temos

$$\begin{aligned}
\int_{B_\delta^+} |x|^2 U_\epsilon^2 dx &= \epsilon^4 \int_{B_{\delta/\epsilon}^+} \frac{|y|^2}{[|y'|^2 + (y_N+1)^2]^{N-2}} dy \\
&= \epsilon^4 \left(\int_{B_\delta^+} \frac{|y|^2}{[|y'|^2 + (y_N+1)^2]^{N-2}} dy + \int_{B_{\delta/\epsilon}^+ - B_\delta^+} \frac{|y|^2}{[|y'|^2 + (y_N+1)^2]^{N-2}} dy \right) \\
&= O(\epsilon^4) + \epsilon^4 \int_{B_{\delta/\epsilon}^+ - B_\delta^+} \frac{|y|^2}{[|y'|^2 + (y_N+1)^2]^{N-2}} dy.
\end{aligned}$$

No entanto,

$$\begin{aligned}
\int_{B_{\delta/\epsilon}^+ - B_\delta^+} \frac{|y|^2}{[|y'|^2 + (y_N+1)^2]^{N-2}} dy &\leq \int_{B_{\delta/\epsilon}^+ - B_\delta^+} |y|^{6-2N} dy \\
&= \frac{1}{2}\int_\delta^{\delta/\epsilon}\int_{\partial B_s} |y'|^{6-2N} dy' ds \\
&= \frac{1}{2}\int_\delta^{\delta/\epsilon}\int_{\partial B_s} s^{6-2N} dy' ds \\
&= \frac{1}{2}\sigma_{N-1}\int_\delta^{\delta/\epsilon} s^{6-2N} s^{N-1} ds \\
&= \frac{1}{2}\sigma_{N-1}\int_\delta^{\delta/\epsilon} s^{5-N} ds.
\end{aligned}$$

Como

$$\int_2^{2/\epsilon} s^{5-N} ds = \begin{cases} \dfrac{\sigma_{N-1}}{12-2N}[\epsilon^{N-6}-1], & \text{se } N \in \{4,5\}, \\ -\dfrac{\sigma_{N-1}}{2}\ln\epsilon, & \text{se } N = 6, \end{cases},$$

concluímos que

$$\int_{\mathbb{R}^N_+} |x|^2 \phi^2 U_\epsilon^2 dx = \begin{cases} O(\epsilon^{N-2}), & \text{se } N \in \{4,5\}, \\ O(\epsilon^4 |\ln\epsilon|), & \text{se } N = 6. \end{cases}.$$

Combinando os resultados obtidos, chegamos as seguintes situações

- Se $N = 4$:

$$\begin{aligned} ||u_\epsilon||^2 &= O(\epsilon^{N-2}) + A_N + O(\epsilon^{N-2}) + O(\epsilon^{N-2}) + O(\epsilon^2|\ln\epsilon|) + O(\epsilon^{N-2}) + O(\epsilon^{N-2}) \\ &= A_N + O(\epsilon^2|\ln\epsilon|), \end{aligned}$$

- Se $N = 5$:

$$\begin{aligned} ||u_\epsilon||^2 &= O(\epsilon^{N-2}) + A_N + O(\epsilon^{N-2}) + O(\epsilon^{N-2}) + O(\epsilon^2) + O(\epsilon^{N-2}) + O(\epsilon^{N-2}) \\ &= A_N + O(\epsilon^2), \end{aligned}$$

- Se $N = 6$:

$$\begin{aligned} ||u_\epsilon||^2 &= O(\epsilon^4|\ln\epsilon|) + A_N + O(\epsilon^{N-2}) + O(\epsilon^{N-2}) + O(\epsilon^2) + O(\epsilon^{N-2}) + O(\epsilon^{N-2}) \\ &= A_N + O(\epsilon^2), \end{aligned}$$

- Se $N \geq 7$:

$$\begin{aligned} ||u_\epsilon||^2 &= O(\epsilon^4) + A_N + O(\epsilon^{N-2}) + O(\epsilon^{N-2}) + O(\epsilon^2) + O(\epsilon^{N-2}) + O(\epsilon^{N-2}) \\ &= A_N + O(\epsilon^2). \end{aligned}$$

Logo,

$$||u_\epsilon||^2 = A_N + \begin{cases} O(\epsilon^2|\ln\epsilon|), \text{ se } N = 4 \\ O(\epsilon^2), \text{ se } N \geq 5 \end{cases},$$

como queríamos.

Falta calcular a norma do traço de u_ϵ. Como $u_\epsilon = K^{-1/2}\phi U_\epsilon$, temos que

$$\begin{aligned}
\|u_\epsilon\|_{2_*}^{2^*} &= \int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x')|K^{-1/2}(x')\phi(x')U_\epsilon(x')|^{2_*}dx' \\
&= \epsilon^{N-1}\int_{\mathbb{R}^{N-1}} \frac{K^{-1/(N-2)}\phi^{2_*}}{[|x'|^2+\epsilon^2]^{N-1}}dx' \\
&= \epsilon^{N-1}\left(\int_{B_\delta^\partial - B_{\delta/2}^\partial} \frac{K^{-1/(N-2)}(\phi^{2_*}-1)}{[|x'|^2+\epsilon^2]^{N-1}}dx' + \int_{B_\delta^\partial} \frac{K^{-1/N-2}}{[|x'|^2+\epsilon^2]^{N-1}}dx'\right) \\
&= O(\epsilon^{N-1}) + \epsilon^{N-1}\int_{B_\delta^\partial} \frac{K^{-1/N-2}}{[|x'|^2+\epsilon^2]^{N-1}}dx' \\
&= O(\epsilon^{N-1}) + \epsilon^{N-1}[\Gamma_{1,\epsilon}+\Gamma_{2,\epsilon}],
\end{aligned}$$

onde $B_r^\partial := \{x' \in \mathbb{R}^{N-1} : |x'| < r\}$ e

$$\Gamma_{1,\epsilon} = \int_{B_\delta^\partial} \frac{1}{[|x'|^2+\epsilon^2]^{N-1}}dx', \quad \Gamma_{2,\epsilon} = \int_{B_\delta^\partial} \frac{K^{-1/(N-2)}-1}{[|x'|^2+\epsilon^2]^{N-1}}dx'.$$

Note que

$$\Gamma_{1,\epsilon} = \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \frac{1}{[|x'|^2+\epsilon^2]^{N-1}}dx' - \int_{\mathbb{R}^{N-1}-B_\delta^\partial} \frac{1}{[|x'|^2+\epsilon^2]^{N-1}}dx'.$$

Para a segunda integral do lado direito, fazendo a mudança de variáveis $y' = \dfrac{x'}{\epsilon}$, obtemos

$$\begin{aligned}
\epsilon^{1-N}\int_{\mathbb{R}^{N-1}-B_{\delta/\epsilon}^\partial} \frac{1}{[|y'|^2+1]^{N-1}}dy' &= \epsilon^{1-N}\int_{\delta/\epsilon}^{+\infty}\int_{\partial B_s} |y''|^{-2N+2}dy''ds \\
&= \epsilon^{1-N}\sigma_{N-2}\int_{\delta/\epsilon}^{+\infty} s^{-2N+2}s^{N-2}ds \\
&= \epsilon^{1-N}c(N)\left[\lim_{s\to+\infty} s^{-N+1} - \delta^{-N+1}\epsilon^{N-1}\right] = c(N),
\end{aligned}$$

uma vez que $-N+1<0$. Já para a primeira integral,

$$\int_{\mathbb{R}^{N-1}} \frac{1}{[|x'|^2+\epsilon^2]^{N-1}}dx' = \epsilon^{1-N}\int_{\mathbb{R}^{N-1}} U_\epsilon^{2_*}dx' = \epsilon^{1-N}B_N^{2_*/2}.$$

Logo,

$$\|u_\epsilon\|_{2_*}^{2^*} = O(\epsilon^{N-1}) + B_N^{2_*/2} + \epsilon^{N-1}\Gamma_{2,\epsilon}.$$

Agora, para $\Gamma_{2,\epsilon}$, façamos novamente a mudança de variáveis $y' = \dfrac{x'}{\epsilon}$, para obter

$$\epsilon^{N-1}\Gamma_{2,\epsilon} = -\int_{B^{\partial}_{\delta/\epsilon}} \frac{1-K(\epsilon y',0)^{-1/N-2}}{[|y'|^2+1]^{N-1}}dy' = -\int_{B^{\partial}_{\delta/\epsilon}} \frac{1-\exp(-\alpha_0\epsilon^2|y'|^2)}{(|y'|^2+1)^{N-1}}dy',$$

onde $\alpha_0 = \dfrac{1}{4(N-2)}$. Observe que para chegar ao resultado pretendido, precisamos mostrar que $\epsilon^{N-1}\Gamma_{2,\epsilon} = O(\epsilon^2)$. Para tanto, considere a função $f : (0,1)\times\mathbb{R}^{N-1} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(\epsilon,y') = \frac{1-\exp(-\alpha_0\epsilon^2|y'|^2)}{\epsilon^2},$$

e considere, para cada $0<\epsilon<1$ fixado, $f_\epsilon(y') = f(\epsilon,y')$. Usando a Regra de L'Hospital, obtemos

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} f(\epsilon,y') = \lim_{\epsilon\to 0^+} \frac{2\epsilon\alpha_0|y'|^2\exp(-\alpha_0\epsilon^2|y'|^2)}{2\epsilon} = \alpha_0|y'|^2.$$

Por outro lado,

$$\frac{\partial f}{\partial\epsilon}(\epsilon,y') = \frac{2}{\epsilon^3}(\exp(-\alpha_0\epsilon^2|y'|^2)[\alpha_0\epsilon^2|y'|^2+1]-1) = \frac{2}{\epsilon^3}\left[\frac{\alpha_0\epsilon^2|y'|^2+1}{\exp(\alpha_0\epsilon^2|y'|^2)}-1\right] \le 0,$$

já que $1+t \le \exp(t), \forall t \in \mathbb{R}$. Logo, a sequência de funções $(f_\epsilon)_{\epsilon\in(0,1)}$ configura uma sequência de funções não-crescentes. Pelo Teorema da Convergência Monótona, segue que

$$\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{\mathbb{R}^{N-1}} \frac{f(\epsilon,y')}{[|y'|^2+1]^{N-1}}dy' = \alpha_0\int_{\mathbb{R}^{N-1}} \frac{|y'|^2}{[|y'|^2+1]^{N-1}}dy'.$$

Em outras palavras,

$$\int_{\mathbb{R}^{N-1}} \frac{1-\exp(-\alpha_0\epsilon^2|y'|^2)}{(|y'|^2+1)^{N-1}}dy' = O(\epsilon^2)\alpha_0\int_{\mathbb{R}^{N-1}} \frac{|y'|^2}{[|y'|^2+1]^{N-1}}dy'.$$

Por outro lado, como $N \ge 4$

$$\int_{\mathbb{R}^{N-1}} \frac{|y'|^2}{[|y'|^2+1]^{N-1}}dy' \le \int_{\mathbb{R}^{N-1}} |y'|^{-2N+4}dy' < +\infty.$$

Com efeito,

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^{N-1}} |y'|^{-2N+4} dy' &= \int_{B_1^\partial} |y'|^{-2N+4} dy' + \int_{\mathbb{R}^{N-1}-B_1^\partial} |y'|^{-2N+4} dy' \\
&= O(1) + \int_1^{+\infty} \int_{\partial B_s} |y''|^{-2N+4} dy'' ds \\
&= O(1) + \int_1^{+\infty} \int_{\partial B_s} s^{-2N+4} dy'' ds \\
&= O(1) + \sigma_{N-2} \int_1^{+\infty} s^{-2N+4} s^{N-2} ds \\
&= O(1) + c(N) \left[\lim_{s \to +\infty} s^{-N+3} - 1 \right] < +\infty.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
\epsilon^{N-1} \Gamma_{2,\epsilon} = - \int_{B_{\delta/\epsilon}^\partial} \frac{1 - \exp(-\alpha_0 \epsilon^2 |y'|^2)}{(|y'|^2+1)^{N-1}} dy' \leq \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \frac{1 - \exp(-\alpha_0 \epsilon^2 |y'|^2)}{(|y'|^2+1)^{N-1}} dy' = O(\epsilon^2).
$$

Sendo assim, concluímos que

$$
|u_\epsilon|_{2_*}^{2_*} = B_N^{2_*/2} + O(\epsilon^2),
$$

provando o resultado. $\square$

Estamos perto de obter a segunda solução do nosso problema. Antes disso, vamos usar o resultado anterior para estimar as normas da normalização no traço de u_ϵ.

Lema 3.6. *Suponha $N \geq 5$ e considere A_N, B_N e u_ϵ como no Lema 3.5. Então, definindo*

$$
\psi_\epsilon = \frac{u_\epsilon}{|u_\epsilon|_{2_*}},
$$

vale que

$$
||\psi_\epsilon||^{2(N-1)} = S_0^{N-1} + O(\epsilon^2), \quad |\psi_\epsilon|_\tau^\tau = O(\epsilon^{N-1-\tau(N-2)/2}),
$$

sempre que $(N-1)/(N-2) < \tau < 2_*$.

Demonstração. Sejam $A, t, s > 0$ e considere a função real $g(r) = r^s$. Pelo Teorema do Valor Médio, existe $\zeta \in (A, A + O(\epsilon^t))$ tal que

$$
g'(\zeta) = \frac{(A + O(\epsilon^t))^s - A^s}{A + O(\epsilon^t) - A}.
$$

Daí,

$$
(A + O(\epsilon^t))^s - A^s = O(\epsilon^t) g'(\zeta) = O(\epsilon^t) \implies (A + O(\epsilon^t))^s = A^s + O(\epsilon^t). \tag{3.13}
$$

Pelo Lema 3.5 se $N \geq 5$, vale

$$||u_\epsilon||^2 = A_N + O(\epsilon^2) \ \text{ e } \ |u_\epsilon|_{2_*}^{2_*} = B_N^{2_*/2} + O(\epsilon^2).$$

Assim,

$$||\psi_\epsilon||^{2(N-1)} = \frac{||u_\epsilon||^{2(N-1)}}{|u_\epsilon|_{2_*}^{2(N-1)}} = \frac{(A_N + O(\epsilon^2))^{N-1}}{(B_N^{2_*/2} + O(\epsilon^2))^{N-2}}.$$

Usando (3.13), obtemos

$$||\psi_\epsilon||^{2(N-1)} = \frac{A_N^{N-1} + O(\epsilon^2)}{B_N^{2_*(N-2)/2} + O(\epsilon^2)} = \frac{A_N^{N-1} + O(\epsilon^2)}{B_N^{N-1} + O(\epsilon^2)} = \left(\frac{A_N}{B_N}\right)^{N-1} + O(\epsilon^2) = S_0^{N-1} + O(\epsilon^2),$$

provando assim a primeira parte do resultado.

Para a outra parte, observe que como ϕ tem suporte compacto, u_ϵ também o possui. Além disso, $0 \leq \phi \leq 1$. Consequentemente,

$$|u_\epsilon|_\tau^\tau = \int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x')K^{-\tau/2}\phi^\tau U_\epsilon^\tau dx' = \epsilon^{\tau(N-2)/2} \int_{B_\delta^\partial} \frac{K^{1-\tau/2}\phi^\tau}{[|x'|^2 + \epsilon^2]^{\tau(N-2)/2}} dx'.$$

Como a integral acima é avaliada em um conjunto limitado, temos pela continuidade de K que existe $c_1 > 0$ tal que

$$|u_\epsilon|_\tau^\tau \leq c_1 \epsilon^{\tau(N-2)/2} \int_{B_\delta^\partial} \frac{1}{[|x'|^2 + \epsilon^2]^{\tau(N-2)/2}} dx'.$$

Fazendo então a mudança de variáveis $y' = \dfrac{x'}{\epsilon}$, obtemos

$$\begin{aligned} |u_\epsilon|_\tau^\tau &\leq c_1 \epsilon^{N-1-\tau(N-2)/2} \int_{B_{\delta/\epsilon}^\partial} \frac{1}{[|y'|^2 + 1]^{\tau(N-2)/2}} dy' \\ &\leq c_1 \epsilon^{N-1-\tau(N-2)/2} \int_{B_{\delta/\epsilon}^\partial} |y'|^{-\tau(N-2)} dy' \\ &\leq c_1 \epsilon^{N-1-\tau(N-2)/2} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} |y'|^{-\tau(N-2)} dy'. \end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^{N-1}} |y'|^{-\tau(N-2)}dy' &= O(1) + \int_{\mathbb{R}^{N-1}-B_1^{\partial}} |y'|^{-\tau(N-2)}dy' \\
&= O(1) + \frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\int_{\partial B_s} |y''|^{-\tau(N-2)}dy''ds \\
&= O(1) + \frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\int_{\partial B_s} s^{-\tau(N-2)}dy''ds \\
&= O(1) + \frac{1}{2}\sigma_{N-2}\int_1^{+\infty} s^{-\tau(N-2)}s^{N-2}ds \\
&= O(1) + c(N)\left[\lim_{s\to+\infty} s^{-\tau(N-2)+N-1} - 1\right] < +\infty,
\end{aligned}$$

se, e somente se, $-\tau(N-2)+N-1<0$ ou, equivalentemente, $\tau > \dfrac{N-1}{N-2}$. Portanto,

$$\|u_\epsilon\|_\tau^\tau = O(\epsilon^{N-1-\tau(N-2)/2}).$$

Por outro lado, como $\|u\|_{2_*}^{2_*} = B_N^{2_*/2} + O(\epsilon^2)$, temos que

$$\|u\|_{2_*}^{\tau} = B_N^{\tau/2} + O(\epsilon^2) = B_N^{\tau/2} + o(1).$$

Assim,

$$\|\psi_\epsilon\|_\tau^\tau = \frac{\|u_\epsilon\|_\tau^\tau}{\|u_\epsilon\|_{2_*}^{\tau}} = \frac{O(\epsilon^{N-1-\tau(N-2)/2})}{B_N^{\tau/2}+o(1)} = O(\epsilon^{N-1-\tau(N-2)/2}),$$

o que finaliza a prova. □

Com os dois próximos resultados, seremos capazes de determinar a segunda solução para o nosso problema.

Lema 3.7. *Seja ψ_ϵ a função definida no Lema 3.6 e defina*

$$m_\epsilon = I(u_0 + t_\epsilon\psi_\epsilon) = \max_{t\geq 0} I(u_0 + t\psi_\epsilon).$$

Então, a sequência $\{t_\epsilon\}_{\epsilon>0}$ é limitada.

Demonstração. Desde que u_0 é um mínimo local de I, o número t_ϵ dado no enunciado está bem definido e é positivo. Suponha por contradição que $t_{\epsilon_n}\to\infty$, para alguma sequência $\epsilon_n\to 0$. Defina $g(t) = \max_{t\geq 0} I(u_0+t\psi_\epsilon)$, temos que g tem ponto de máximo em t_ϵ, de modo que $0 = g'(t_\epsilon) = I'(u_0 + t_\epsilon\psi_\epsilon)\psi_\epsilon$. Assim,

$$\begin{aligned}
0 &= I'(u_0 + t_\epsilon\psi_\epsilon) \\
&= \int_{\mathbb{R}^N_+} K(x)\nabla u_0 \nabla\psi_\epsilon dx + t_\epsilon||\psi_\epsilon||^2 \\
&- \mu\int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x')a(x')(u_0 + t_\epsilon\psi_\epsilon)^{q-1}\psi_\epsilon dx' - \int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x')b(x')(u_0 + t_\epsilon\psi_\epsilon)^{2_*-1}\psi_\epsilon dx'.
\end{aligned}$$

Além disso, $I'(u_0)\psi_\epsilon = 0$, pois u_0 é ponto crítico de I. Logo,

$$\int_{\mathbb{R}^N_+} K(x)\nabla u_0\nabla\psi_\epsilon dx - \mu\int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x')a(x')u_0^{q-1}\psi_\epsilon dx' - \int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x')b(x')u_0^{2_*-1}\psi_\epsilon dx' = 0.$$

Usando as duas últimas equações e o fato dos potenciais a e b serem positivos no suporte de ψ_ϵ, concluímos que

$$\begin{aligned}
t_\epsilon||\psi_\epsilon||^2 &= \mu\int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x')a(x')(u_0 + t_\epsilon\psi_\epsilon)^{q-1}\psi_\epsilon dx' - \mu\int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x')a(x')u_0^{q-1}\psi_\epsilon dx' \\
&+ \int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x')b(x')(u_0 + t_\epsilon\psi_\epsilon)^{2_*-1}\psi_\epsilon dx' - \int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x')b(x')u_0^{2_*-1}\psi_\epsilon dx' \\
&\geq \mu\int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x')a(x')u_0^{q-1}\psi_\epsilon dx' - \mu\int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x')a(x')u_0^{q-1}\psi_\epsilon dx' \\
&+ \int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x')b(x')(t_\epsilon\psi_\epsilon)^{2_*-1}\psi_\epsilon dx' - \int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x')b(x')u_0^{2_*-1}\psi_\epsilon dx' \\
&= t_\epsilon^{2_*-1}\int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x')b(x')\psi_\epsilon^{2_*} dx' - \int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x')b(x')u_0^{2_*-1}\psi_\epsilon dx'.
\end{aligned}$$

Logo,

$$t_\epsilon^{2_*-1}\int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x')b(x')\psi_\epsilon^{2_*} dx' \leq t_\epsilon||\psi_\epsilon||^2 + \int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x')b(x')u_0^{2_*-1}\psi_\epsilon dx'.$$

Usando Hölder e o Lema 3.6, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x')b(x')\psi_\epsilon^{2_*} dx' &\leq t_\epsilon^{2-2_*}||\psi_\epsilon||^2 + t_\epsilon^{1-2_*}|b|_\infty|u_0|_{2_*}^{2_*-1}|\psi_\epsilon|_{2_*} \\
&\leq t_\epsilon^{2-2_*}(S_0 + o(1)) + t_\epsilon^{1-2_*}|b|_\infty|u_0|_{2_*}^{2_*-1}.
\end{aligned}$$

Observe que a equação acima vale para todo $\epsilon > 0$. Em particular, sendo $\epsilon = \epsilon_n$ como da hipótese de contradição, temos que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x')b(x')\psi_{\epsilon_n}^{2_*} dx' = 0.$$

Pela hipótese (b_3), temos que existe $\delta > 0$ tal que para x' q.t.p em $B_\delta^\partial(0)$ vale

$$\|b\|_\infty - b(x') \leq M|x'|^\gamma,$$

onde $M > 0$ e $\gamma > N-1$. Consequentemente,

$$o_n(1) = \int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x')b(x')\psi_{\epsilon_n}^{2_*}dx' \geq \|b\|_\infty - M\int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x')|x'|^\gamma\psi_{\epsilon_n}^{2_*}dx'.$$

Por outro lado, como $\|u_{\epsilon_n}\|_{2_*} = B_N^{1/2} + o(1)$ e usando a definição de ψ_{ϵ_n},

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x')|x'|^\gamma\psi_{\epsilon_n}^{2_*}dx' &\leq \frac{C_1}{\|u_{\epsilon_n}\|_{2_*}^{2_*}}\int_{B_\delta^\partial}\frac{\epsilon_n^{N-1}|x'|^\gamma}{[|x'|^2+\epsilon_n^2]^{N-1}}dx' \\ &\leq O(\epsilon_n^{N-1})\int_{B_\delta^\partial}|x'|^{\gamma-2(N-1)}dx'.\end{aligned}$$

No entanto, como $\gamma > N-1$

$$\begin{aligned}\int_{B_\delta^\partial}|x'|^{\gamma-2(N-1)}dx' &= \int_0^\delta\int_{\partial B_s}|x''|^{\gamma-2(N-1)}dx''ds \\ &= C_N\int_0^\delta s^{\delta-2(N-1)}s^{N-2}ds \\ &= C_N[\delta^{\gamma-(N-1)} - \lim_{s\to 0}s^{\gamma-(N-1)}] < \infty.\end{aligned}$$

Segue então que

$$\int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x')|x'|^\gamma\psi_{\epsilon_n}^{2_*}dx' = O(\epsilon_n^{N-1}),$$

quando $n \to +\infty$. Portanto,

$$o(1) \geq \|b\|_\infty + O(\epsilon_n^{N-1}),$$

o que implica que $\|b\|_\infty = 0$, mas isso é uma contradição, afinal $b > 0$ em todo um conjunto aberto. Assim, $\{t_\epsilon\}_{\epsilon>0}$ é limitada. □

Lema 3.8. *Seja m_ϵ como definido no Lema 3.7, então*

$$m_\epsilon < \bar{c} = I(u_0) + \frac{1}{2(N-1)}\frac{S_0^{N-1}}{\|b\|_\infty^{N-2}}.$$

Demonstração. Usando novamente que $I'(u_0)\psi_\epsilon = 0$, obtemos que

$$m_\epsilon = I(u_0) + \frac{t_\epsilon^2}{2}||\psi_\epsilon||^2 - \frac{\mu}{q}\Gamma_{1,\epsilon} - \frac{1}{2_*}\Gamma_{2,\epsilon}, \tag{3.14}$$

onde

$$\Gamma_{1,\epsilon} = \int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x')a(x')[(u_0 + t_\epsilon\psi_\epsilon)^q - u_0^q - t_\epsilon q u_0^{q-1}\psi_\epsilon]dx',$$

e

$$\Gamma_{2,\epsilon} = \int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x')b(x')[(u_0 + t_\epsilon\psi_\epsilon)^{2_*} - u_0^{2_*} - t_\epsilon 2_* u_0^{2_*-1}\psi_\epsilon]dx'.$$

Como a função real $g(r) = r^q$ é derivável, temos pelo Teorema do Valor Médio que existe $\theta \in (0,1)$ tal que

$$(\alpha + h)^q - \alpha^q = q(\theta(\alpha + h) + (1-\theta)\alpha)^{q-1}h = q(\alpha + \theta h)^{q-1}h \geq q\alpha^{q-1}h.$$

Considerando $\alpha = u_0(x')$, $h = t_\epsilon\psi_\epsilon(x')$, $\theta = \theta(x') \in (0,1)$, obtemos para x' q.t.p em $\mathbb{R}^{N-1}$ vale

$$(u_0 + t_\epsilon\psi_\epsilon)^q - u_0^q \geq q t_\epsilon u_0^{q-1}\psi_\epsilon.$$

Daí, como $a > 0$ no suporte de ψ_ϵ, temos que $\Gamma_{1,\epsilon} \geq 0$. Aplicando essa desigualdade na equação (3.14), ganhamos que

$$m_\epsilon \leq I(u_0) + \frac{t_\epsilon^2}{2}||\psi_\epsilon||^2 - \frac{1}{2_*}\Gamma_{2,\epsilon}. \tag{3.15}$$

Note agora que poderíamos estimar $\Gamma_{2,\epsilon}$ da mesma maneira, no entanto, vamos percorrer outro caminho desta vez: vamos usar o fato de que dados $r, s \geq 0$ e $\sigma \in (1, 2_*-1)$, existe $A_\sigma > 0$ de tal modo que

$$(r+s)^{2_*} \geq r^{2_*} + s^{2_*} + 2_* r^{2_*-1}s + 2_* r s^{2_*-1} - A_\sigma r^{2_*-\sigma}s^\sigma.$$

Sendo então $r = u_0(x')$ e $s = t_\epsilon\psi_\epsilon(x')$, temos que para x' q.t.p em $\mathbb{R}^{N-1}$

$$(u_0 + t_\epsilon\psi_\epsilon)^{2_*} \geq u_0^{2_*} + t_\epsilon^{2_*}\psi_\epsilon^{2_*} + 2_* u_0^{2_*-1}t_\epsilon\psi_\epsilon + 2_* u_0 t_\epsilon^{2_*-1}\psi_\epsilon^{2_*-1} - A_\sigma u_0^{2_*-\sigma}t_\epsilon^\sigma\psi_\epsilon^\sigma.$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}
\Gamma_{2,\epsilon} &\geq \int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x')b(x')[u_0^{2_*} + t_\epsilon^{2_*}\psi_\epsilon^{2_*} + 2_* u_0^{2_*-1}t_\epsilon\psi_\epsilon + 2_* u_0 t_\epsilon^{2_*-1}\psi_\epsilon^{2_*-1} - A_\sigma u_0^{2_*-\sigma}t_\epsilon^\sigma\psi_\epsilon^\sigma]dx' \\
&= \int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x')b(x')(t_\epsilon^{2_*}\psi_\epsilon^{2_*} + 2_* u_0 t_\epsilon^{2_*-1}\psi_\epsilon^{2_*-1} - A_\sigma u_0^{2_*-\sigma}t_\epsilon^\sigma\psi_\epsilon^\sigma)dx'.
\end{aligned}$$

Definindo então

$$\begin{cases} \Gamma_{2,\epsilon,1} = \dfrac{t_\epsilon^{2_*}}{2_*}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x')[|b|_\infty - b(x')]\psi_\epsilon^{2_*}dx' \\ \Gamma_{2,\epsilon,2} = t_\epsilon^{2_*-1}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x')b(x')u_0\psi_\epsilon^{2_*-1}dx' \\ \Gamma_{2,\epsilon,3} = A_\sigma\dfrac{t_\epsilon^{\sigma}}{2_*}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x')b(x')u_0^{2_*-\sigma}\psi_\epsilon^{\sigma}dx' \end{cases},$$

temos que

$$\Gamma_{2,\epsilon} \geq \frac{t_\epsilon^{2_*}}{2_*}|b|_\infty - \Gamma_{2,\epsilon,1} + \Gamma_{2,\epsilon,2} - \Gamma_{2,\epsilon,3}.$$

Portanto,

$$m_\epsilon \leq I(u_0) + \left(\frac{t_\epsilon^2}{2}||\psi_\epsilon||^2 - \frac{t_\epsilon^{2_*}}{2_*}|b|_\infty\right) + \Gamma_{2,\epsilon,1} - \Gamma_{2,\epsilon,2} + \Gamma_{2,\epsilon,3}. \tag{3.16}$$

Novamente,

$$\Gamma_{2,\epsilon,1} = \frac{t_\epsilon^{2_*}}{2_*}\int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x')(|b|_\infty - b(x'))\psi_\epsilon^{2_*}dx' \leq \frac{t_\epsilon^{2_*}M}{2_*}\int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x')|x'|^\gamma\psi_\epsilon^{2_*}dx'.$$

Como $\gamma > N-1$, então

$$\int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x')|x'|^\gamma\psi_\epsilon^{2_*}dx' = O(\epsilon^{N-1}).$$

Como $\{t_\epsilon\}_{\epsilon>0}$ é limitada, segue então que $\Gamma_{2,\epsilon,1} = O(\epsilon^{N-1})$. Além disso, definindo $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ por

$$f(t) = \frac{t^2}{2}||\psi_\epsilon||^2 - \frac{t^{2_*}}{2_*}|b|_\infty.$$

Derivando,

$$f'(t) = t||\psi_\epsilon||^2 - t^{2_*-1}|b|_\infty, \quad f''(t) = ||\psi_\epsilon||^2 - (2_*-1)t^{2_*-2}|b|_\infty.$$

Daí, se $f'(t) = 0$, então

$$t||\psi_\epsilon||^2 - t^{2_*-1}|b|_\infty = 0.$$

Note que $t = 0$ é uma solução, porém $f''(0) = ||\psi_\epsilon||^2 > 0$. Assim, supondo $t \neq 0$, obtemos que

$$||\psi_\epsilon||^2 - t^{2_*-2}|b|_\infty = 0 \implies t^{2_*-2} = \frac{||\psi_\epsilon||^2}{|b|_\infty} \implies t = \frac{||\psi_\epsilon||^{N-2}}{|b|_\infty^{(N-2)/2}} =: t_0.$$

Além disso,

$$f''(t_0) = ||\psi_\epsilon||^2 - (2_*-1)\frac{||\psi_\epsilon||^2|b|_\infty}{|b|_\infty} = ||\psi_\epsilon||^2(2-2_*) < 0.$$

Portanto, t_0 é ponto de máximo de f e

$$\begin{aligned} f(t_0) &= \frac{t_0^2}{2}||\psi_\epsilon||^2 - \frac{t_0^{2_*}}{2_*}|b|_\infty \\ &= \frac{||\psi_\epsilon||^{2(N-2)}||\psi_\epsilon||^2}{2|b|_\infty} - \frac{||\psi_\epsilon||^{2_*(N-2)}|b|_\infty}{2_*|b|_\infty^{2_*(N-2)/2}} \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2_*}\right)\frac{||\psi_\epsilon||^{2(N-1)}}{|b|_\infty^{N-2}} = \frac{1}{2(N-1)}\frac{||\psi_\epsilon||^{2(N-1)}}{|b|_\infty^{N-2}}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\max_{t\geq 0}\left\{\frac{t^2}{2}||\psi_\epsilon||^2 - \frac{t^{2_*}}{2_*}|b|_\infty\right\} = \frac{1}{2(N-1)}\frac{||\psi_\epsilon||^2}{|b|_\infty}.$$

Pelo Lema 3.6, $||\psi_\epsilon||^{2(N-1)} = S_0^{N-1} + O(\epsilon^2)$, e pela definição de $\bar{c}$, segue que

$$m_\epsilon \leq \bar{c} + O(\epsilon^2) - \Gamma_{2,\epsilon,2} + \Gamma_{2,\epsilon,3}. \tag{3.17}$$

Para estimar $\Gamma_{2,\epsilon,2}$ e $\Gamma_{2,\epsilon,3}$, note $u_0 \in L^\nu_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N_+) \cap L^\nu_{\text{loc}}(\mathbb{R}^{N-1})$, para todo $\nu \geq 1$. Além disso, existe $\tau_1 > 1$ tal que

$$\frac{2(N-1)}{N+4} < \tau_1 < \frac{2(N-1)}{N}.$$

Podemos usar a desigualdade de Hölder, para obter

$$\int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x')b(x')u_0\psi_\epsilon^{2_*-1}dx' \leq |b|_\infty\left(\int_{B_\delta^\partial} K(x')u_0^{\tau_1'}dx'\right)^{1/\tau_1'}|\psi_\epsilon|_{\tau_1(2_*-1)}^{2_*-1}.$$

Mas, se $\dfrac{N-1}{N-2} < \tau < 2_*$, temos pelo Lema 3.6 que

$$|\psi_\epsilon|_\tau^\tau = O(\epsilon^{(N-1)-\tau(N-2)/2}).$$

Observe que

$$2_* > (2_*-1)\tau_1 > \frac{N}{N-2} > \frac{N-1}{N-2}$$

e, portanto,

$$|\psi_\epsilon|_{\tau_1(2_*-1)}^{2_*-1} = O(\epsilon^{(N-1)/\tau_1 - N/2}), \text{ se } \epsilon \to 0^+.$$

Desde que $\{t_\epsilon\}_{\epsilon>0}$ é limitada, então

$$\Gamma_{2,\epsilon,2} = O(\epsilon^{(N-1)/\tau_1 - N/2})$$

Por fim, escolhendo $\sigma = (N-1)/(N-2)$ e $1 < \tau_2 < 2$, temos pela desigualdade de Hölder que

$$\int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x')b(x')u_0^{2_*-\sigma}\psi_\epsilon^\sigma dx' \leq \|b\|_\infty \left(\int_{B_\delta^\partial} K(x')u_0^{(2_*-\sigma)\tau_2'}\right)^{1/\tau_2'} \|\psi_\epsilon\|_{\tau_2\sigma}^\sigma.$$

No entanto, $\dfrac{N-1}{N-2} < \tau_2 < 2_*$ e, portanto

$$\|\psi_\epsilon\|_{\tau_2\sigma}^\sigma = O(\epsilon^{(N-1)/\tau_2-(N-1/2)}.$$

Como $\{t_\epsilon\}_{\epsilon>0}$ é limitada,

$$\Gamma_{2,\epsilon,3} = O(\epsilon^{(N-1)/\tau_2-(N-1)/2}).$$

Como

$$\lim_{\tau\to 2(N-1)/N}\left(\frac{N-1}{\tau} - \frac{N}{2}\right) = 0 < \frac{N-1}{2} = \lim_{\tau\to 1}\left(\frac{N-1}{\tau} - \frac{N-1}{2}\right),$$

podemos escolher τ_1 e τ_2 de modo que

$$\nu_1 := \frac{N-1}{\tau_1} - \frac{N}{2} < 2, \quad \nu_2 := \frac{N-1}{\tau_2} - \frac{N-1}{2} > \nu_1.$$

Temos então que, se $\epsilon \to 0^+$,

$$m_\epsilon \leq \bar{c} + O(\epsilon^2) - O(\epsilon^{\nu_1}) + O(\epsilon^{\nu_2}) = \bar{c} + O(\epsilon^{\nu_1})(O(\epsilon^{2-\nu_1}) - O(1) + O(\epsilon^{\nu_2-\nu_1})).$$

Portanto, se $\epsilon > 0$ é pequeno,

$$m_\epsilon = I(u_0 + t_\epsilon\psi_\epsilon) < \bar{c} = I(u_0) + \frac{1}{2(N-1)}\frac{S_0^{N-1}}{\|b\|_\infty^{N-2}}, \tag{3.18}$$

o que prova o resultado. □

Estamos prontos para demonstrar nosso último resultado.

Demonstração do Teorema 3.2: Já encontramos via minimização a solução de energia negativa u_0. Supondo que não há pontos críticos para I além de 0 e u_0, pelo Lema 3.4, como $m_\epsilon < \bar{c}$, I satisfaz $(PS)_{m_\epsilon}$. Pelo Teorema do Passo da Montanha, existe $u \neq 0$ tal que $I(u) = m_\epsilon$ e $I'(u) = 0$. No entanto, desde que $m_\epsilon = I(u_0 + t_\epsilon\psi_\epsilon)$ temos que $m_\epsilon > I(u_0)$, pela definição de m_ϵ e também por u_0 ser mínimo local de I, assim $u \neq u_0$, chegando então a uma contradição. Logo, existe $0 < u_1 \neq u_0$, tal que u_1 é ponto crítico de I. Portanto, u_1 é outra solução não-negativa para (P). □

Considerações Finais

Neste trabalho investigamos a existência de soluções para um problema elíptico em $\mathbb{R}^N_+$ com não-linearidade do tipo côncavo-convexo na fronteira, com expoentes subcrítico e crítico. Devido a natureza do problema não foi possível atacá-lo diretamente com as ferramentas padrão. Na realidade, se fez necessário trabalhar em um outro tipo de espaço de Sobolev para alcançar os resultados de compacidade que foram necessários.

Inicialmente, fizemos um resumo breve da teoria clássica de Sobolev e dos resultados de minimax os quais são válidos para espaços de Banach em geral. Posteriormente construímos um outro espaço de Sobolev utilizando uma função particular e estudamos algumas propriedades deste espaço, sendo a mais importante delas, a compacidade da imersão mesmo no caso do $\mathbb{R}^N$.

Com essas ferramentas em mãos, pudemos atacar diretamente o problema, tanto nos casos subcrítico e crítico. Como esperado, foi necessário trabalhar um pouco mais neste último caso, afinal a presença do expoente crítico invalida o uso de ferramentas muito práticas, como a compacidade. No entanto, conseguimos mostrar em ambos os casos a existência de duas soluções não-triviais e não-negativas para o problema.

Bibliografia

[1] AMBROSETTI, A.; BREZIS, H.; CERAMI, G. **Combined Effects of Concave and Convex Nonlinearities in Some Elliptic Problems**. J. Funct. Anal. 122 (1994), 519-543.

[2] BREZIS, H. **Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations**. New York: Springer, 2011.

[3] EKELAND, I. **On the Variational Principle**. J. Math. Anal. Appl. 47 (1976), 324-353.

[4] ESCOBAR, J. F. **Sharp constant in a Sobolev trace inequality**. Indiana Univ. Math. J. 37 (1988), 687-698.

[5] ESCOBEDO, M.; KAVIAN, O. **Variational problems related to self-similar solutions of the heat equation**. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications 11 (1987), 1103-1133.

[6] FERREIRA, L. C. F.; FURTADO, M. F.; MEDEIROS, E. S. **Existence and multiplicity of self-similar solutions for heat equation with nonlinear boundary conditions**. Calc. Var. 54 (2015), 4065-4078.

[7] FERREIRA, L. C. F.; FURTADO, M. F.; MEDEIROS, E. S.; SILVA, J. P. P. da S. **On a weighted trace embedding and applications to critical boundary problems**. Math. Nach. (2021).

[8] FURTADO, M. F.; RUVIARO, R.; SILVA, E. D. **Semilinear elliptic problems with combined nonlinearities on the boundary**. Ann. Mat. Pra Appl. 196 (2017), 1887-1901.

[9] FURTADO, M. F.; RUVIARO, R.; SILVA, J. P. P. da. **Two solutions for an elliptic equation with fast increasing weight and concave-convex nonlinearities**. J. Math. Anal. Appl. 416 (2014), 698-709.

[10] FURTADO, M. F.; SOUSA, K. C. V. de. **Multiplicity of solutions for a nonlinear value problem in the upper half-space**. J. Math. Anal. Appl. 493 (2021), 124544.

[11] LIONS, P. L. **The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The limit case**. Rev. Mat. Iberoamericana 1 (1985), 145-201.

[12] WILLEM, M. **Minimax Theorems**. Boston: Birkhauser, 1996, 159p.