Master MEEF
« Métiers de l'Enseignement, de l'Éducation et de la Formation »
Mention Pratique et Ingénierie de la Formation

Mémoire

Parcours: Ingénierie de Formation et Contextes Internationaux

La construction de sens dans l'enseignement des mathématiques

Comparaison des programmes et de manuels brésiliens et français concernant l'introduction de la multiplication

Mémoire présenté en vue de l'obtention du grade de master

soutenu par
Isabelle Guillon
le 08 juillet 2020

en présence de la commission de soutenance composée de :

Annette Schmehl-Postai, directrice de mémoire

Danglei de Castro Pereira, membre de la commission

Dora François, membre de la commission

Résumé

Cette recherche observe comment des manuels scolaires brésiliens et français, interfaces stables entre curriculum prescrit et curriculum réel, proposent un enseignement des mathématiques qui permette aux élèves de construire du sens. Après avoir extrait des programmes les paramètres favorisant la compréhension en mathématiques, elle compare l'ordre et la manière d'approcher le champ conceptuel multiplicatif, révélant des associations variables avec l'addition, la division, et avec un réel besoin d'une nouvelle opération. L'analyse quantitative de l'ensemble des consignes permet ensuite d'observer la rareté des configurations rectangulaires au profit des situations de proportion simple, mais aussi la variabilité des usages et de la richesse de contextualisation des énoncés. L'étude soulève alors que, bien qu'évoquant majoritairement la vie quotidienne, les auteurs ne se basent que peu sur de véritables situations adidactiques. Les données des situations, bien souvent orales en France, ont des formes plus variées au Brésil, où les sens sont plus sollicités. Enfin, l'analyse des objectifs poursuivis par les consignes dévoile une standardisation nationale et/ou culturelle du schéma pédagogique suivi par les manuels, tout en rapprochant entre les pays des manuels qui font plus rechercher qu'appliquer. Au total, ce qui diffère le plus entre les pays concerne essentiellement la forme des contenus et les propositions au-delà du fichier de l'élève et l'étude soulève donc la question de ce que l'on attend d'un manuel scolaire dans l'enseignement.

Resumo

Esta pesquisa observa como os livros didáticos brasileiros e franceses, interfaces estáveis entre currículo prescrito e currículo real, oferecem uma educação matemática que permite aos alunos construir sentido. Depois de extrair dos programas os parâmetros que favorecem a compreensão em matemática, ela compara a ordem e a maneira de abordar o campo conceitual multiplicativo, revelando associações variáveis com adição, divisão e com a necessidade real de uma operação nova. A análise quantitativa de todas as instruções permite observar a raridade das configurações retangulares em favor de situações de proporção simples, mas também a variabilidade de usos e de riqueza da contextualização das situações. O estudo então levanta que embora se refiram principalmente à vida cotidiana, os autores não se baseam muito em situações adidáticas verdadeiras. Os dados matemáticas, muitas vezes orais na França, têm formas variadas no Brasil, com maior envolvimento dos sentidos. Por fim, a análise dos objetivos perseguidos pelas instruções revela uma padronização nacional e / ou cultural do esquema educacional seguido pelos livros didáticos, ao mesmo tempo que reúne livros didáticos entre países que fazem as pessoas pesquisarem mais do que aplicar. Em suma, o que mais difere entre os países diz respeito essencialmente à forma dos conteúdos e às propostas além do livro do aluno e, portanto, o estudo levanta a questão do que se espera de um livro didático na educação.

Abstract

This research studies how Brazilian and French textbooks, as stable interfaces between prescribed and real curricula, offer mathematics education that allows student to construct meaning. After the programs' extraction of parameters helping comprehension in mathematics, it compares the order and the manner of approaching the multiplicative conceptual field, revealing variable associations with addition, division, and with a real need for a new mathematical operation. The quantitative analysis of all instructions makes it possible to observe the rarity of rectangular configurations in favor of situations of simple proportion, but also the variability of uses and of richness of contextualization of the statements. The study points out that, although they mostly deal with everyday life, the authors do not rely very often on real adidactic situations. Often oral in France, the data for calculating have more varied forms in Brazil, where the senses are more involved. Finally, the analysis of the objectives pursued by the instructions reveals a national and/or cultural standardization of the educational scheme followed by the textbooks, while bringing together from both countries textbooks that lead more to research than to application. All in all, what differs the most between countries concerns essentially the form of contents and the proposals beyond the pupil's file, therefore the study raises the question of what is expected of a school textbook in education.

Sommaire

Un élève heureux,
c'est un élève qui trouve du sens à ce qu'il fait à l'école.
Jacques Lévine

1. Introduction

Le simple mot *mathématiques* renvoie pour de nombreux adultes un sentiment désagréable. J'ai connu plus d'un aspirant au professorat des écoles dans ce cas, alors même qu'on leur proposait des manipulations en cours universitaire. À quinze ans, les mathématiques apparaissent comme une véritable source d'anxiété pour 59 % des élèves interrogés par l'OCDE[1] (2015:2). C'est aussi la seule matière pour laquelle des croyances donnent lieu à un clivage à tel point marqué entre les « matheux » et les autres qu'une mauvaise performance en mathématique paraît définitive et parfois socialement acceptable. Les individus ont donc besoin de se sentir plus confiants vis-à-vis des mathématiques. Cette confiance peut passer par des évaluations positives de la part des enseignants, une meilleure compréhension par les apprenants de ce qui est attendu d'eux, des concepts et des langages qu'ils manipulent. Pour prendre en compte l'ensemble des compétences dont les premières bases sont construites en maternelle et en élémentaire, l'OCDE a définit le concept de culture mathématique, parallèlement à celui de littératie. La culture mathématique, ou littératie mathématique, correspond à « l'aptitude d'un individu à raisonner de façon mathématique et à formuler, à employer et à interpréter les mathématiques pour résoudre des problèmes dans un éventail de contextes du monde réel » (OCDE 2020:Aperçu). Selon l'OCDE, cette culture aiderait « les individus à comprendre le rôle que les mathématiques jouent dans le monde et à se comporter en citoyens constructifs, engagés et réfléchis » (OCDE 2017:19). On attend donc des élèves qu'ils construisent progressivement des faits et des concepts, qu'ils développent des procédures, et, simultanément, qu'ils construisent un sens pour les mathématiques dans le monde et, par nécessité, pour l'activité mathématique dans leur cursus scolaire. Avec Léonard Vannetzel, qui évoque la découverte d'une logique de plaisir au CP (cité par Leroux 2020), je suis convaincue que c'est lors de ces premiers enseignements des mathématiques que se posent les bases de leur rapport aux mathématiques influençant tout leur apprentissage mathématique futur.

Devant mes propres constats du mal-être vis-à-vis des mathématiques, élargis par ceux de l'OCDE, je me suis intéressée depuis longtemps à l'enseignement de cette matière, et

1 « L'Organisation de coopération et de développement économiques est une organisation internationale d'études économiques dont les pays membres ont en commun un système de gouvernement démocratique et une économie de marché » (Wikipedia/OCDE).

notamment à comment celui-ci recherche la compréhension des concepts manipulés. Pour cette étude, je me suis centrée sur l'apprentissage de la multiplication, dans la mesure où cette opération est particulièrement utilisée pour des apprentissages mathématiques futurs. Elle est, de plus, abordée à l'école sans être auparavant utilisée dans la vie quotidienne (contrairement à l'addition et à la soustraction) et a donc un aspect très scolaire, qui peut cristalliser les premières pertes de sens.

Dans le cadre du master, j'ai pu découvrir pendant quelques mois le Brésil, et son système éducatif par les cours universitaires et des stages. Le Brésil est un pays distant de la France géographiquement, historiquement, socialement et politiquement. Il participe également aux enquêtes de l'OCDE en tant que partenaire. En envisageant une comparaison internationale de l'enseignement, les observations s'ancrent dans les réalités sociétales de chaque pays et relativisent différences et similitudes entre les parcours scolaires des citoyens du monde.

Comment les différents acteurs du système éducatif de chaque pays, en abordant la multiplication pour la première fois, proposent un enseignement qui permette aux élèves de construire du sens ? Loin de couvrir tous les acteurs, je soumets ici une comparaison des programmes scolaires qui encadrent nationalement l'enseignement et celle de manuels en tant que supports au plus proche des enseignants.

Dans une première partie, je présente d'une part les systèmes éducatifs des deux pays, et d'autre part les programmes nationaux et les recherches en éducation dont ils s'inspirent. J'expose également le cadre institutionnel brésilien de publication des manuels dont il n'existe pas d'équivalent en France, mais qui pourrait en inspirer. Les critères favorisant la compréhension en mathématiques que j'extrais de cette première partie sont décrits et analysés dans la seconde partie, pour les activités concernant la multiplication dans quatre manuels, de manière qualitative et/ou quantitative. Pour nourrir l'analyse de chaque critère, j'ai décidé de ne pas traiter toute la théorie préalablement mais plutôt de solliciter au fur et à mesure les classifications utilisées lors des enquêtes d'évaluation internationale, les apports de didacticiens, la typologie des structures multiplicatives de Gérard Vergnaud ou encore les études portant sur la contextualisation des questions et sur les manuels en général.

2. Cadres d'élaboration et d'utilisation des manuels

Dans l'optique d'une utilisation par les enseignants et les élèves en milieu scolaire, les manuels publiés dans un pays s'inscrivent dans la logique éducative de celui-ci. Pour comparer des manuels édités au Brésil et en France, il me paraît nécessaire de comparer tout d'abord les deux systèmes éducatifs.

2.1 Les systèmes éducatifs en France et au Brésil

Pilotés par des lois nationales, les systèmes éducatifs encadrent l'enseignement des citoyens. Nous allons voir dans cette partie que la structure d'enseignement est similaire entre la France et le Brésil, malgré les grandes différences sociétales et culturelles entre les deux pays, que nous percevrons en partie, dans le fonctionnement pratique de l'école. Enfin, nous verrons ce qui diffère entre les programmes éducatifs qui cadrent le contenu et la forme de l'enseignement dispensé.

2.1.1 Structure de l'enseignement

D'après la Loi de Directives et Bases de l'Éducation Nationale de 1996, dite LDB, l'enseignement scolaire brésilien se compose de l'éducation de base (*Educação Básica*) et de l'enseignement supérieur (*Ensino superior*) (BRASIL 1996).

> L'éducation de base a pour finalités de développer l'élève, en lui garantissant la formation commune indispensable à l'exercice de la citoyenneté et de lui fournir les moyens de progresser dans son travail et dans ses études (loi nº 9.394/96) [traduction Vendramini 2005:2][2].

Elle est formée de trois étapes : l'enseignement infantile (*Ensino infantil),* qui regroupe la crèche et la maternelle, l'enseignement fondamental *(Ensino fundamental)* qui comprend les équivalents de l'élémentaire et du collège français, et l'enseignement moyen *(Ensino médio),* équivalent au lycée (voir Tableau 2.1). Contrairement à la France, qui sépare traditionnellement le premier du second degré, donc l'élémentaire du collège, la distinction semble ici marquée entre le collège et le lycée. Pourtant, ce qu'on appelle les « années initiales » (de 6 à 10 ans) et les « années finales » (de 11 à 14 ans) de l'enseignement fondamental diffèrent de la même façon qu'en France : les élèves changent d'établissement et passent d'un professeur unique généraliste à des professeurs spécialisés par matière. Pour cette raison, il y a, au Brésil comme en France, une

2 Sauf indication contraire, j'ai traduit moi-même les citations de sources brésiliennes.

attention particulière donnée à la continuité 5°-6° anos, qui est l'équivalent du lien école-collège, afin d' « éviter une rupture dans le processus d'apprentissage » (Ministério da Educação 2018:57, 59). Les structures des deux systèmes éducatifs semblent donc proches.

Tableau 2.1: Structures des enseignements de base en France et au Brésil.

L'enseignement scolaire en France		L'Educação Básica au Brésil	
		E. infantil: creche	4 années (0-3 ans)
Premier degré : Maternelle	**3 années (3-5 ans)**	**pré-escola**	**2 années (4-5 ans)**
Élémentaire	**5 années (6-10 ans)**	**E. fundamental: anos iniciais**	**5 années (6-10 ans)**
Second degré : **Collège**	**4 années (11-14 ans)**	**anos finais**	**4 années (11-14 ans)**
Lycée général et technologique	**2-3 années (15-16**/17 ans)	**Ensino médio**	**3 années (15-17 ans)**

En gras, ce qui correspond à la scolarité ***obligatoire*** *(pour un cursus sans particularités).*

Toutefois, l'obligation d'enseignement au Brésil, étendue dans la LDB en 2013 à partir de 4 ans, et portant jusqu'à 17 ans[3], couvre théoriquement tout l'enseignement moyen, alors qu'en France, l'enseignement obligatoire a été récemment étendu à partir de 3 ans mais ne porte depuis 1959 que jusqu'à 16 ans, ne couvrant donc pas tout l'enseignement secondaire général. Ainsi, la scolarité obligatoire est définie entre deux âges et les programmes sont définis par niveau d'enseignement. Or, les pratiques de redoublement, évolutives, diffèrent entre les deux pays.

2.1.2 Fonctionnement de l'école

Deux grandes différences entre la France et le Brésil me sont apparues sur le fonctionnement de l'école. Premièrement, l'école brésilienne est un établissement accueillant jusqu'à trois promotions différentes au cours d'une même journée avec un directeur différent pour chacune : les cours du matin (7h15-12h30), les cours de l'après-midi et les cours du soir (essentiellement pour les adultes). Il n'est donc pas rare de croiser des enfants dans la rue au cours de la journée. Seuls certains élèves sont en

3 « L'amendement constitutionnel nº 59/200926 détermine l'enseignement de base obligatoire de 4 à 17 ans » (Ministério da Educação 2018:36).

programme *Integral* et peuvent donc venir dès le matin alors qu'ils n'ont cours que l'après-midi. Ils ont alors des activités organisées et encadrées à l'école, et quelques sorties. Ils sont les seuls à avoir un déjeuner à l'école, mais j'ai pu observer dans plusieurs écoles que deux collations étaient proposées gratuitement à tous les élèves dans la matinée.

Deuxièmement, l'année scolaire brésilienne n'est pas à cheval sur deux années civiles comme en France : elle commence en février et se termine en décembre, avec des vacances inter-semestrielles en juillet. L'année est partagée en quatre *bimestres* de 50 jours sur lesquels se basent les programmations d'enseignement. Il existe des variations de calendrier selon les États, et parfois même selon les communes. Par exemple, en 2019 à Brasília (et dans tout le District Fédéral), le premier semestre a eu lieu du 11 février jusqu'au 7 juillet. Le deuxième semestre s'étale entre le 29 juillet et le 19 décembre.

2.1.3 Les programmes

La LDB de 1996 prévoit pour le Brésil un document national unique afin d'homogénéiser l'éducation de base sur l'ensemble du territoire, car les États, les districts, les municipalités et même les différentes institutions scolaires peuvent concevoir leur propre programme. Ce document unique intègre la politique nationale de l'Educação Básica, oriente donc l'éducation de la naissance à la fin du lycée et s'intitule la *Base Nacional Comum Curricular* (Base Curriculaire Nationale Commune) ou BNCC. Il est publié par le Ministère de l'Éducation (MEC) sur un site gouvernemental dédié[4] et sert désormais de référence pour la formulation des curriculums par les systèmes et réseaux scolaires. La version actuelle date de mai 2018.

> La Base curriculaire nationale commune (BNCC) est un document de caractère normatif qui définit un ensemble organique et progressif d'apprentissages essentiels que tous les élèves doivent développer au cours des étapes et des modalités de l'Educação Básica, de manière à ce que soient garantis leurs droits à l'apprentissage et au développement, conformément aux dispositions du Plan national d'éducation (PNE). Ce document normatif s'applique exclusivement à l'éducation scolaire […] et est guidée par les principes éthiques, politiques et esthétiques qui visent à la formation humaine complète et

4 http://basenacionalcomum.mec.gov.br/

> à la construction d’une société juste, démocratique et inclusive (Ministério da Educação 2018:7).

En France, l’enseignement obligatoire est orienté par le *Socle commun de connaissances, de compétences et de culture*[5] et organisé par les différents programmes. Ces documents sont publiés au *Bulletin Officiel de l’Éducation Nationale* et sont accessibles via les sites publics du Ministère de l’Éducation Nationale et de la Jeunesse[6]. On peut distinguer quatre programmes différents[7] : celui de la maternelle (pour les enfants de 3 à 5 ans), celui des cycles 2, 3 et 4 (recouvrant l’élémentaire et le collège) et ceux des lycées (général et technologique d’une part, et professionnel d’autre part, qui suit des programmes spécifiques à chaque matière). Pour le cycle 2 qui intéresse cette étude, la dernière version du programme de mathématiques date de 2018 (BO n°30 du 26 juillet 2018). Toutefois les manuels étudiés sont construits pour une utilisation contemporaine des programmes publiés en novembre 2015 (Ministère de l’Éducation Nationale 2015b). Je me réfèrerai donc à cette version antérieure des programmes.

La BNCC définit un ensemble de connaissances et de compétences que tous les élèves doivent développer au cours de la scolarité « de base », et organise également la progressivité et le détail de ces compétences. En cela, elle est un équivalent à la fois du *Socle Commun* français et des programmes qui le concrétisent et l’organisent. Il est important de noter que son usage par les professionnels de l’éducation est néanmoins très différent : si en France tous les professeurs doivent construire leur enseignement à partir des programmes et du socle (sans oublier les élèves), les professeurs brésiliens se réfèrent bien plus aux programmes spécifiques à leur institution, qu’ils considèrent plus adaptés aux conditions locales. Selon les éditeurs de manuels scolaires Editora Moderna[8], la BNCC serait bien différente d’un curriculum, dans la mesure où « le curriculum définit le parcours que chaque institution éducative établit pour développer les compétences et habilités proposées par la BNCC » (Edições Educativas da Editora Moderna s. d.:7). Selon ce manuel, l’autonomie de chaque réseau d’enseignement serait

5 La version actuelle du *Socle Commun* date d’avril 2015.
6 https://education.gouv.fr et https://eduscol.education.fr
7 La dernière version de chacun d’eux a été publiée dans un BO de mars 2015 (pour la maternelle), de juillet 2018 (pour les cycles 2-3-4) et de janvier et juillet 2019 (pour les lycées d’enseignement général et technologique).
8 Il s’agit d’un document publié lors de la quatrième édition du manuel *Buriti*. C’est la première édition qui est analysée dans cette étude.

préservée pour adapter les curriculums aux particularités de chaque contexte éducatif, et la BNCC aurait plutôt un rôle d'**orientation** pour la construction des curriculums et des projets politico-pédagogiques des écoles. Il se rapprocherait donc plus du rôle du *Socle Commun* en France. Néanmoins les manuels semblent tous se référer aux compétences décrites et codées par la BNCC.

Curieusement, ce document unique pour un territoire immense et des populations très diverses, comporte un contenu plus précis que les programmes français, et ce, alors même que la LDB insiste sur la possibilité de chaque État, district, municipalité, institution scolaire d'adapter le fonctionnement aux conditions locales. La BNCC développe en effet les compétences (*habilidades*) à aborder pour chaque année d'enseignement alors qu'en France, les programmes sont désormais rédigés par cycles (avec quelques indications de progression au cours des trois années qui forment un cycle). En France c'est donc aux écoles et aux enseignants qu'il revient de programmer l'enseignement de chaque année d'enseignement en vue de l'acquisition de toutes ces compétences à la fin du cycle. La plupart des manuels français, peut-être par habitude d'un ancien système plus détaillé, sont restés sur des propositions annuelles d'enseignement et prennent donc en charge une partie de cette programmation, mais certains auteurs proposent des collections par cycle[9].

Les programmes des différents réseaux éducatifs étant nombreux, par souci de comparabilité et de simplification, **je considère dans cet écrit la BNCC comme le programme national brésilien,** en gardant à l'esprit qu'elle ne reflète pas la grande diversité des écoles brésiliennes.

On trouve dans les programmes français et brésilien les compétences à faire développer (organisées par domaines et niveaux), mais aussi des indications sur les processus d'apprentissage et des conseils pédagogiques.

9 En mathématiques, c'est le cas d'un manuel édité chez Magnard et rédigé par l'association *Sésamath* en 2016, qui est unique pour tout le cycle 4.

2.2 Apprentissages et didactique selon les programmes et la recherche

Après le rapprochement de mentions des programmes alimentées par certaines recherches, qui portent sur ce qui permet la construction des connaissances en général, j'aborde plus particulièrement la place de l'éducation mathématique dans les programmes et le cas de la multiplication.

2.2.1 La construction des connaissances

Du point de vue des contenus, les deux programmes fonctionnent de manière spiralaire : les notions et compétences abordées sont « reprises, amplifiées et approfondies année après année » (BNCC 2018:276). Du point de vue pédagogique et didactique, les auteurs adaptent leurs propositions et conseils selon l'âge et le développement des apprenants, nourries par les études réalisées en psychologie et en sciences de l'éducation. À tous niveaux, les publications des deux pays évoquent l'importance de l'organisation de situations variées, particulièrement « choisies selon les besoins du groupe classe et ceux de chaque enfant » en maternelle (MEN 2015a:2).

> Une partie du travail de l'éducateur est de réfléchir, sélectionner, organiser, planifier, mener et superviser un ensemble de pratiques et d'interactions, garantissant la pluralité de situations qui promeuvent le plein développement des enfants (BNCC 2018:39).

Pour les plus jeunes enfants, le programme français de maternelle, insiste sur l'organisation de « modalités spécifiques d'apprentissage ».

> Dans tous les cas et notamment avec les petits, [l'enseignant] donne une place importante à l'observation et à l'imitation des autres enfants et des adultes. Il favorise les interactions entre enfants […]. Les situations inscrites dans un vécu commun sont préférables aux exercices formels proposés sous forme de fiches (MEN 2015a:2).

De fait, les aspects émotionnels et visuels influencent grandement les opérations mentales de mémorisation, qui à cet âge « ne sont pas volontaires » (p. 3). La place des jeux semble plus importante que dans les cycles suivants. Ils peuvent être libres, pendant lesquels l'enseignant observe les enfants, ou structurés « visant explicitement des apprentissages spécifiques » (p. 2). De la même manière, les interactions et le jeu sont considérées au Brésil comme les deux axes structurant les pratiques pédagogiques pour l’éducation infantile. Les auteurs brésiliens précisent aussi l’importance de l’observation des interactions entre enfants, et avec les adultes (BNCC 2018:39).

Ils définissent six droits d’apprentissage et de développement pour l’éducation infantile qui assurent de bonnes conditions pour que les enfants apprennent de manière active, sollicités par des défis : vivre ensemble, jouer, participer, explorer, s’exprimer et se connaître (Id., p. 38). Les expériences proposées par l’enseignant à l’école doivent permettre l’expression de ces droits.

Pour les enfants de l’école maternelle, il est donc important que les apprentissages soient intégrés dans des situations à vivre ensemble, commentées et nommées par un adulte, que l’on peut ensuite évoquer pour des rappels et pour la mise en relation avec de nouvelles situations. L’enseignant « aide les enfants à prendre conscience qu’apprendre à l’école, c’est remobiliser en permanence les acquis antérieurs pour aller plus loin » (MEN 2015a:3).

Au cours du cycle 2 qui intéresse cette étude, les connaissances en cours d’acquisition font aussi l’objet d’indispensables reprises, de manière constante. La BNCC entend valoriser des situations ludiques d’apprentissage et considère nécessaire l’articulation avec les expériences vécues en Éducation infantile (p. 58). Elle ajoute :

> Tout au long [des années initiales], la progression de la connaissance intervient par la consolidation des apprentissages antérieurs et par l’élargissement des pratiques de langage et d’expérience esthétique et interculturelle des enfants (BNCC 2018:59).

Si le programme brésilien fait essentiellement référence aux expériences vécues dans l’Éducation infantile à systématiser progressivement, le programme français évoque les connaissances acquises de façon implicite en dehors de l’école, avant tout enseignement, et dans de nombreux domaines. Il préconise d’utiliser ces connaissances « intuitives » comme « fondements des apprentissages explicites » et de les placer « au cœur des situations de prise de conscience, où l’élève se met à comprendre ce qu’il savait faire sans y réfléchir » (MEN 2015b:5). Les élèves sont dès lors amenés à « questionner » leur propre connaissance du monde qui les entoure : en prendre conscience grâce à la formulation, mais aussi la confronter à celle des autres et à la réalité. La BNCC parle, elle, de « nouvelles formes de relation au monde » (p. 58).

Le programme brésilien souligne que les deux premières années de l'Enseignement fondamental doivent avoir comme priorité l'alphabétisation[10]. En France, le programme rappelle que l'écrit est, à cette étape, en décalage par rapport à l'oral. Il montre ainsi la nécessité de présenter les situations d'apprentissage sous diverses formes, et l'intérêt d'articuler le concret et l'abstrait, le réel avec ses représentations « qu'elle[s] soient analogique[s] (dessins, images, schématisations) ou symbolique[s] abstraite[s] (nombres, concepts) » (MEN 2015b:5).

Il ajoute enfin que c'est à ce moment que « différentes formes de raisonnement commencent à être mobilisées (par analogie, par déduction logique, par inférence…) en fonction des besoins ».

En France comme au Brésil, la compréhension des savoirs et leur communication par les langages oral et écrit, utilisant progressivement des vocabulaires spécifiques, semblent donc être les objectifs premiers pour la classe d'âge qui m'intéresse. Cela se retrouve dans le volet mathématiques des deux programmes.

2.2.2 Les mathématiques

Les mathématiques, *a matemática* en portugais (donc au singulier), une « science hypothético-déductive par excellence » (BNCC 2018:265), regroupent plusieurs disciplines articulées entre elles, qui « étudient les propriétés des êtres abstraits comme les nombres, les figures géométriques ainsi que les relations qui existent entre eux » (CNRTL s. d.). Les mathématiques traitent et décrivent donc des objets abstraits entre lesquels elles formalisent les liens.

Le programme brésilien distingue et aborde cinq aires mathématiques dès les *années initiales* : les nombres (*números*) ; l'algèbre (*álgebra*) ; la géométrie (*geometria*) ; les grandeurs et les mesures (*grandezas e medidas*); les probabilités et les statistiques (*probabilidades e estatísticas*), ces dernières étant regroupées. Seuls trois de ces cinq thèmes sont abordés en élémentaire français : nombres et calculs ; grandeurs et mesure ; espace et géométrie (Voir Tableau 2.2).

10 "Nos dois primeiros anos do Ensino Fundamental, a ação pedagógica deve ter como foco a alfabetização, a fim de garantir amplas oportunidades para que os alunos se apropriem do sistema de escrita alfabética de modo articulado ao desenvolvimento de outras habilidades de leitura e de escrita e ao seu envolvimento em práticas diversificadas de letramentos" (Ministério da Educação 2018:59).

Tableau 2.2 : Thèmes de mathématiques en élémentaire (anos iniciais).

Cinq unités thématiques au Brésil	Trois thèmes en France
1. Nombres (*Números*) **2.** Algèbre (*Álgebra*) **3.** Géométrie (*Geometria*) **4.** Grandeurs et mesures (*Grandezas e medidas*) **5.** Probabilités et statistiques (*Probabilidades e estatísticas*)	**1.** Nombres et calculs **2.** Grandeurs et mesures **3.** Espace et géométrie

L'enseignement des mathématiques traite donc de la plupart des disciplines, dès l'élémentaire (*anos iniciais*) au Brésil, mais en réserve certaines pour le secondaire en France. La visée de cet enseignement va bien au-delà des calculs.

> La connaissance mathématique est nécessaire pour tous les élèves de l'Educação Básica, que ce soit pour sa grande application dans la société contemporaine, ou pour ses potentialités dans la formation de citoyens critiques, conscients de leurs responsabilités sociales (BNCC 2018:265).

Lui reconnaissant également un rôle dans le développement de l'esprit critique et des raisonnements scientifiques, le programme français y voit de plus un intérêt d'un point de vue langagier :

> Les mathématiques participent à l'acquisition des langages scientifiques : compréhension du système de numération, pratique du calcul, connaissance des grandeurs. Les représentations symboliques transcrivent l'observation, l'exploration et le questionnement des objets et de la réalité du monde (MEN 2015b:7).

Les deux premières années d'enseignement fondamental se centrent donc sur l'alphabétisation mathématique, comme construction des premiers langages et outils participant à la culture mathématique, aussi appelée numératie ou littératie mathématique (Cnesco 2016:29) – en portugais *letramento matemático ou literacia matemática*. Ce concept de l'OCDE que j'ai défini en introduction et qui est étudié notamment lors des enquêtes PISA, se retrouve dans les programmes :

> L'enseignement fondamental doit s'engager à développer la littératie mathématique, définie comme les compétences et capacités à raisonner, représenter, communiquer et argumenter mathématiquement, de manière à favoriser l'établissement d'hypothèses, la formulation et la résolution de problèmes dans une

> variété de contextes, en utilisant des concepts, des procédures, des faits et des outils mathématiques (BNCC 2018:266).
>
> En mathématiques, mémoriser, utiliser des outils de référence, essayer, proposer une réponse, argumenter, vérifier sont des composantes de la résolution de problèmes simples de la vie quotidienne (MEN 2015b:8).

Les auteurs français répertorient six compétences majeures de l'activité mathématique : chercher, modéliser, représenter, raisonner, calculer, communiquer (Id., p. 74) à travers lesquelles l'apprenant acquiert des éléments essentiels au développement de la numératie et à l'exercice de sa citoyenneté. Le programme brésilien en développe huit (voir Tableau 6.3). L'objectif de cet enseignement est que les élèves « développent la capacité d'identifier les opportunités de l'utilisation des mathématiques pour résoudre des problèmes », en appliquant des concepts, des procédures et des résultats pour obtenir des résultats et les interpréter suivant les contextes des situations (BNCC 2018:265).

Pour ce faire, « la BNCC s'oriente par le postulat que l'apprentissage en mathématiques est intrinsèquement relié à la compréhension, c'est-à-dire à l'appréhension de significations des objets mathématiques, sans laisser de côté leurs applications » (p. 276). En effet, il est difficile, notamment en mathématiques de séparer une connaissance de ses usages. « La connaissance rationnelle est opératoire ou n'est pas » écrivait Vergnaud en 1991 (cité par Roditi 2016:1), et désormais on reconnaît

> qu'un élève possède des connaissances mathématiques [non] au fait qu'il est capable de les « réciter » [mais] au fait qu'il est capable de les mobiliser, sans être aidé, pour résoudre des problèmes inédits, nouveaux, en dehors même du contexte scolaire dans lequel elles ont été enseignées (Charnay 1996, p. 53).

Les auteurs du programme français soulignent donc eux aussi l'importance de la construction du sens, qu'ils mettent en lien avec celle de l'automatisation à construire simultanément.

> La compréhension est indispensable à l'élaboration de savoirs solides que les élèves pourront réinvestir et l'automatisation de certains savoir-faire est le moyen de libérer des ressources cognitives pour qu'ils puissent accéder à des opérations plus élaborées et à la compréhension (MEN 2015b:4).

Roland Charnay écrit à ce sujet que certaines compétences techniques doivent être « routinisées » pour être utilisables » mais qu'elles « n'ont d'intérêt que si elles sont au service de la résolution de problèmes » (Charnay 2006).

La dialectique entre automatisation et compréhension intervient particulièrement dans le domaine des mathématiques qui m'intéresse. On peut en voir une illustration dans un texte de Charnay datant de 2008, à propos de l'apprentissage de la technique de la division posée qui était alors en débat. Il montre, en détaillant toutes les étapes « que l'élève doit comprendre pour parvenir au terme du calcul », que « l'apprentissage [de la technique] du calcul posé de la division de 87 par 5 ne présente, au CE1, que des inconvénients ». Mais il soutient qu'au contraire

> la recherche de la solution à un problème comme « *Thomas a 87 stylos. Il remplit des boîtes de 5 crayons. Combien de boîtes peut-il remplir ?* » n'est, elle, pas dénuée d'intérêt à ce niveau de la scolarité. A condition, [qu'on] incite les élèves à réfléchir. […] Et là, les élèves auront réalisé un travail mathématique, c'est-à-dire qu'ils auront cherché, réfléchi, utilisé leurs connaissances (Charnay 2008).

S'appuyant sur le *Socle Commun* qui stipule que les élèves doivent « comprendre des concepts et des techniques (calcul, algorithme) et les mémoriser afin d'être en mesure de les utiliser » (cité par Charnay 2008), il demande pourquoi la mémorisation est « privilégiée » dans le projet de programmes d'alors par rapport à la compréhension « alors que les deux sont nécessaires et que la seconde est souvent une condition de la première » (Ibid.).

2.2.3 Construire la compréhension en mathématiques

Ce qui favoriserait cette compréhension, selon les programmes, serait la construction par l'élève, de liens entre l'objet à apprendre et à utiliser et le connu, que ce dernier soit du champ mathématique, d'un autre champ scolaire ou du domaine de la vie quotidienne (BNCC 2018:276). Comme pour les autres domaines, l'enseignement des mathématiques au cours des années initiales gagne ainsi à rebondir sur les expériences vécues par les enfants en Éducation infantile et quotidiennement avec les nombres, les formes et l'espace. Dans les deux pays, effectivement, on veille désormais à « ne pas séparer les mathématiques du monde de l'expérience », ce qui avait été le cas avec les mathématiques modernes, car cette séparation « empêche les élèves de *fonder* les mathématiques et d'accéder à toute réalité objective » (Descaves 1992:15).

Dans *Faire construire des savoirs* (1996), Gérard de Vecchi et Nicole Carmona-Magnaldi soulignent que la maitrise ou la connaissance d'un tout est supérieure à la maitrise de ses parties, car « une collection de faits n'est pas plus une science qu'un tas de briques n'est une maison » (Henri Poincaré, cité p. 156) et « ce qui fait le fondement d'un phénomène, ce sont les relations qui existent entre ses différents composants » (Descaves 1992:40). Ainsi, « un savoir n'a aucun sens en soi » (Id.:22) et seuls les réseaux de connexions entre les composants d'un savoir et avec les autres savoirs, « souvent complexes, [lui] donne[nt] un statut opérationnel » (Id.:139).

> Donner du sens à une activité, ce sera donc agir de telle sorte que l'apprenant soit présent et qu'il ressente l'intérêt du savoir abordé. Cela doit donc se matérialiser par la mise en relation d'un savoir avec ce qu'est la personne-élève (Ibid.).

C'est donc là que l'on voit les limites du modèle transmissif d'enseignement. Le seul énoncé d'un savoir par l'enseignant ne suffit pas à devenir savoir pour l'apprenant, même si celui-ci écoute attentivement. C'est sa construction de connexions entre l'information portée à son attention, d'autres qu'il possède déjà et sa propre histoire qui lui permet de donner du sens à cette information et de l'intégrer à ses savoirs (Id.:151-152), interprétation nécessaire que l'on observe aussi en didactique de la littérature à propos de toute lecture.

> L'enfant est un chercheur de structures qui s'efforce de comprendre comment les choses du monde sont reliées entre elles (Bruner, 1983, cité p. 159).

Néanmoins, l'enseignant ne peut pas simplement attendre que l'apprenant construise ses propres liens, car ils pourraient faire sens pour lui tout en étant faux ou non appropriés, personne n'en aurait alors conscience et il y aurait donc peu de chances qu'ils évoluent. Son rôle est donc d'accompagner cette organisation en réseaux de connaissances, de faire formuler ces relations entre connaissances par les élèves afin de favoriser les conflits cognitifs et socio-cognitifs et de permettre de « passer du sens *personnel* (individuel) au sens *universel* (social) reconnu et utilisé par tous » (Id.:42).

L'enseignant met en place des situations, outil principal d'enseignement, « qui conduisent des agents en interaction avec elles à manifester » les connaissances « que nous reconnaissons comme mathématiques » (Brousseau 2011:2). Celles-ci peuvent être « mathématiques [si] aucune intervention didactique n'est envisagée », typiquement des *exercices* ou des *problèmes*, ou « didactiques » lorsque c'est l'intervention du professeur qui mène à l'adoption des comportements (Ibid.)

Douady (cité par Fénichel et Pfaff 2005:17-18) organise ainsi l'apprentissage en six phases:

- la phase « ancien », où les élèves s'engagent dans le problème avec leurs connaissances actuelles ;
- la phase recherche, où les élèves s'aperçoivent de l'insuffisance de leurs connaissances et où ils les réorganisent ;
- la phase explicitation, où la connaissance découverte en tant qu'outils à la phase précédente est explicitée ;
- la phase institutionnalisation, où l'enseignant donne le statut d'objet à la nouvelle connaissance ;
- la phase familiarisation ou réinvestissement, où la nouvelle connaissance est réutilisée dans des contextes connus ;
- la phase de complexification, où la nouvelle connaissance est réinvestie dans des contextes plus complexes impliquant d'autres concepts.

Douady fait alors référence à un apprentissage dans le cadre de situations-problèmes qui part de l'insuffisance des connaissances des élèves ou du postulat que des élèves possèdent des conceptions erronées. En présentant une situation qui concerne l'élève, ce type d'apprentissage vise la prise de conscience d'un obstacle, « souvent vécu par les élèves comme une contradiction » (ce qu'on appelle le conflit cognitif), afin de le dépasser pour poursuivre les apprentissages. Après remise en cause de ce qu'ils croyaient savoir, une nécessaire « réorganisation » des connaissances va « ouvrir sur la construction d'une idée générale » (De Vecchi et Carmona-Magnaldi 1996:120). Mais tout problème n'est pas une situation-problème. Les auteurs soulignent ce qui est communément appelé « problème » en mathématiques ne relève en général que d'un exercice, dans la mesure où le questionnement est extérieur à l'élève qui dispose d'une « procédure toute faite » à appliquer. Au contraire, un véritable problème nécessite « d'entrer dans une démarche d'invention d'une procédure de résolution » qui en est le principal intérêt. Il s’assortit donc d’une importante « phase d’analyse métacognitive » afin que la résolution dépasse les seuls résultats du problème (Ibid.).

Dans le programme brésilien,

> les processus de résolution de problèmes, d’investigation, de développement de projet et de modélisation peuvent être cités comme formes privilégiées d’activité mathématique, raison pour laquelle ils sont, en même temps, objet et stratégie pour l’apprentissage tout au long de l’Enseignement fondamental (BNCC, p. 266).

En France, la résolution de problèmes au cycle 2 est également placée « au centre de l’activité mathématique des élèves, [afin de développer] leurs capacités à chercher, raisonner et communiquer » (MEN 2015b:73). Selon les auteurs des programmes, les problèmes contribuent à donner du sens aux quatre opérations, en particulier ceux mettant en jeu des grandeurs qu’ils rencontrent dans d’autres domaines d’enseignement et qu’ils apprennent à mesurer.

> Les problèmes permettent d’aborder de nouvelles notions, de consolider des acquisitions, de provoquer des questionnements. Ils peuvent être issus de situations de vie de classe ou de situations rencontrées dans d’autres enseignements, notamment Questionner le monde. Ils ont le plus souvent possible un caractère ludique. (Id., p. 73).

Les problèmes proposés ne doivent pas n’être que des problèmes d’application, et de fait, dès le CP (*1° ano*), les élèves gagnent à se confronter à des recherches avec tâtonnements : ce qu’on appelle des « problèmes pour apprendre à chercher » (Id.:66). Contextualisant les compétences à développer, les problèmes « portent sur des objets tout d’abord matériels puis évoqués à l’oral ou à l’écrit » (Id.:75) et leur modélisation permet d’introduire progressivement les quatre opérations. Le calcul peut alors utiliser divers supports ou instruments : « les doigts ou le corps, bouliers ou abaques, ficelle à nœuds, cailloux ou jetons, monnaie fictive, double règle graduée, calculette, etc. » auxquels la BNCC ajoute « les grilles, [...], les jeux, les livres, [...], les feuilles de calcul électroniques et les logiciels de géométrie ». Ces matériaux nécessitent d’être « intégrés à des situations qui mènent à la réflexion et à la systématisation, pour que s’initie un processus de formalisation » (BNCC:276). On n’oublie pas le calcul mental, aptitude essentielle dans la vie quotidienne, dont « la pratique quotidienne [conforte] la maitrise des nombres et des opérations » (MEN 2015b:73).

On l’a vu également, la compréhension dans les programmes français ne se construit pas sans mémorisation : les stratégies de calcul « s’appuient sur la connaissance de faits numériques mémorisés […] et sur celle des propriétés des opérations et de la numération ». De même, « une bonne connaissance des nombres inférieurs à mille et de leurs relations est le fondement de la compréhension des nombres entiers » (Id.:75). Les programmes prennent notamment comme exemple la mémorisation de faits numériques (« comme les résultats des tables de multiplication ») dont la disponibilité immédiate « [améliore] considérablement les capacités de *calcul intelligent*, où les élèves comprennent ce qu’ils font et pourquoi ils le font » (Id.:4).

2.2.4 La multiplication dans les programmes

En 1994, Levain et Vergnaud indiquent que « la plupart des chercheurs », sous des perspectives diverses, s'accordent à dire que « le passage, au cours de l'apprentissage, des problèmes additifs aux problèmes multiplicatifs est relativement difficile » (p. 56). Cette difficulté résulte en partie de l’intrication des structures multiplicatives dans les structures additives partiellement acquises « provoquant des interférences » dans l’esprit de l’élève.

> L'enfant doit faire face à la fois à une augmentation importante du nombre de catégories de problèmes, et à une complexité plus grande des procédures et des concepts qui permettent de les résoudre (Levain et Vergnaud 1994, p. 56).

Dans « Les débuts de la multiplication à l’école » (2018), Toromanoff soutient que l’apprentissage de la multiplication « nécessite un fort degré d’abstraction » et il ajoute :

> Si donc on ne se satisfait pas du simple fait que les élèves « sachent effectuer » des multiplications, sans rien y comprendre, mais au contraire si on veut qu’ils maîtrisent vraiment cette opération, il convient d’en soigner l’introduction, car il va falloir que les élèves en construisent le sens, leur sens, qui ne peut vraiment exister que dans leur tête.

Le sens d'une opération correspond selon Vergnaud à « l'aptitude à reconnaître l'occasion de s'en servir » (1976 et 1978 cité par Didry 1983:29) et donc à la capacité d' « utiliser à bon escient cette opération pour résoudre un problème » (Combier, Dussuc, et Madier 2016:28). Selon ces auteurs, qui se réfèrent eux-mêmes aux travaux de Vergnaud, « il serait plus juste de parler des différents sens d'une opération » puisque « une même opération peut être sollicitée pour résoudre une grande variété de problèmes » (Ibid.). Toromanoff présente et analyse succinctement « les trois principales façons d'introduire la multiplication » qui vont donc permettre de construire des sens différents par les élèves.

Dans les situations de dénombrement d'assortiments possibles par exemple, la multiplication est sous-jacente. La formalisation de tels problèmes en produits cartésiens intervient seulement au lycée, essentiellement pour le calcul de probabilités. Or la fréquentation de telles situations, est « très souhaitable » car elle permet d'élargir la compréhension de la multiplication, dans d'autres contextes du quotidien, au lieu de la limiter à quelques problèmes classiques. Ce type de situations est d'ailleurs très intéressant pour des problèmes de recherche, à l'école, néanmoins, « il ne [faut] pas chercher à […] introduire ainsi la multiplication » (Toromanoff 2018).

L'opération de multiplication peut également être introduite par un deuxième ensemble de situations qu'elle permet de résoudre, les dispositions rectangulaires. Ces situations, très visuelles, avec beaucoup d'exemples concrets et favorisant la compréhension de la commutativité, cachent selon l'auteur « de réelles difficultés à venir » car « l'élève croit qu'il a compris alors qu'il ne fait que « voir », « que compter ». Selon Toromanoff, ce choix d'introduction pourrait ainsi entraîner un traitement trop rapide, masquer et freiner la réelle compréhension par l'apprenant.

Enfin, un troisième type de situations permet l'introduction de la multiplication non comme une nouvelle opération, mais comme une écriture qui abrège des additions itérées. Les élèves la considèrent alors comme une abréviation et l'on parle d' « écriture multiplicative » pour décrire la même situation que l'écriture additive et celles-ci représentent alors, de manière provisoire, la même chose. Fénichel et Pfaff qui admettent que « cette définition convient parfaitement pour introduire la multiplication à l'école élémentaire » alertent tout de même sur les difficultés qu'elle soulève par la suite (Fénichel et Pfaff 2005:132-33). Par exemple, en définissant le *multiplicateur* par le nombre d'itérations d'additions, on construit une conception de la multiplication qui « ne concerne que la multiplication par un entier naturel » et sous-entend que le résultat d'une multiplication est supérieur au *multiplicande.* Elle nécessite donc un élargissement secondaire pour les nombres décimaux (Ibid.). Les auteurs soulignent de plus que certaines propriétés n'apparaissent pas de manière évidente comme la commutativité et la multiplication par zéro. C'est avec la découverte de ces propriétés (telle la commutativité) que la simple écriture raccourcie devient une nouvelle opération qui permet de résoudre de nouveaux problèmes (Toromanoff 2018).

Nous percevons ainsi que l'approche de la multiplication est un passage délicat et important dans la construction du raisonnement mathématique.

Tableau 2.3: Compétences concernant la multiplication en 2° ano. Source : BNCC 2018

Problèmes impliquant l'addition de parties égales (multiplication)	EF02MA07 : Résoudre et élaborer des problèmes de multiplication (par 2, 3, 4 et 5) avec l'idée de l'addition de quantités égales au moyen de stratégies et de formes personnelles, en utilisant ou non un support visuel et/ou matériel manipulable.
Problèmes impliquant les sens de double, moitié, triple et tiers	EF02MA08 : Résoudre et élaborer des problèmes impliquant le double, la moitié, le triple et le tiers avec l'aide d'images ou de matériel manipulable, en utilisant des stratégies personnelles.

Au Brésil, les premières références à l'étude de la multiplication dans la BNCC sont deux compétences en *2° ano*. On observe sur le Tableau 2.3 que l'approche de la multiplication est alors circonscrite par le programme brésilien aux situations d'additions itérées. Ce n'est qu'en *3° ano* que la BNCC mentionne dans les objets de connaissance les configurations rectangulaires et le lien avec la division (voir Tableau 6.4). Le calcul mental ne concerne que les structures additives.

En France différentes compétences concernent la multiplication, qui sont à développer tout au long du cycle 2, dont le CE1 est l'année centrale (voir Tableau 2.4). Elles sont donc plus nombreuses et plus développées ; les sélections pour l'année de CE1 peuvent être variables dans la programmation d'un acteur éducatif à un autre.

Tableau 2.4: Compétences impliquant la multiplication au cycle 2. Source : BO 2015

Dénombrer, constituer et comparer des collections.	- Procédures additives ou multiplicatives de dénombrement - Utilisations d'unités intermédiaires : dizaines, centaines…
Résoudre des problèmes en utilisant des nombres entiers et le calcul.	- Sens des quatre opérations. - Problèmes relevant des structures multiplicatives, de partages ou de groupements (multiplication/division). Distinguer les problèmes relevant des structures additives des problèmes relevant de structures multiplicatives. - Modéliser ces problèmes à l'aide d'écritures mathématiques ; - Sens des symboles +, −, ×, :
Calculer avec des nombres entiers.	**Mémoriser** des faits numériques et des procédures pour calculer avec des nombres entiers - Tables de l'addition et de la multiplication - Décompositions additives et multiplicatives de 10 et de 100, multiplication par une puissance de 10, doubles et moitiés de nombres d'usage courant, etc.
	Élaborer ou choisir des **stratégies de calcul** à l'oral et à l'écrit. Vérifier la vraisemblance d'un résultat, notamment en estimant son ordre de grandeur. - Propriétés implicites des opérations, propriétés de la numération - calcul mental, calcul en ligne, calcul posé

2.3 Des programmes aux manuels scolaires

À partir de ces préconisations sur les formes et les contenus de l'enseignement des mathématiques en élémentaire (*anos iniciais*), j'analyse en seconde partie des manuels scolaires. Ceux-ci, en opérant à la jonction entre les programmes et leur mise en œuvre en classe, jouent alors un rôle considérable, bien que variable d'un enseignant à un autre. Or, avec la proposition de collections par cycle ou par niveau de classe, par discipline ou non, les auteurs et les éditeurs interprètent déjà les curriculums.

Au Brésil, le manuel scolaire serait « le principal matériel utilisé par le professeur dans la préparation de ses cours » (Bittar 2017:365; Reis et Nehring 2017:360). Les deux études expliquent la nécessité, au Brésil, de son approbation par le Programme National des Livres Didactiques, aujourd'hui appelé Programme national des livres et du matériel didactiques (PNLD). Ce programme à l'initiative du Ministère de l'Éducation dans les années 1990 est destiné à « évaluer et rendre disponibles les œuvres didactiques, pédagogiques et littéraires […] de manière systématique, régulière et gratuite, pour les écoles publiques d’éducation de base […] » sur tout le territoire (Ministério da Educação 2020). Les manuels sont édités, évalués et distribués de manière alternée selon une division de l’éducation de base en quatre segments. Avant l’évaluation, les éditeurs ont connaissance d’un *Edital* qui décrit le déroulement et les conditions de cette édition du PNLD. Le document définit notamment les critères éliminatoires. Les manuels que je présente/j’analyse en seconde partie sont issus du PNLD 2019, qui permettait le renouvellement des manuels d’*éducation infantile* et des *années initiales* de l’enseignement fondamental. Le Tableau 6.5 renseigne les critères éliminatoires communs aux manuels de ces deux étapes de l’éducation de base. Deux critères intéressent plus particulièrement mon étude, qui concernent la didactique des mathématiques :

> Proposer des situations-problèmes qui stimulent la recherche de réflexion avant les explications théoriques (critère 7.c)
>
> Stimuler la manifestation de la connaissance que l’élève détient déjà à l’entrée dans la salle de classe et établir des liens entre cette connaissance et la nouvelle connaissance (critère 7.e).

Après évaluation pédagogique, un guide de synthèse présente l’analyse des œuvres approuvées afin d’ « orienter le corps enseignant et la direction des écoles dans le choix des collections » pour le segment concerné.

En France, le rapport récent de Villani et Torossian (2018) sur l’enseignement des mathématiques évoque justement que « les équipes [enseignantes] ont besoin d’être accompagnés dans leur lecture réflexive de l’offre éditoriale » (p. 57). Les auteurs indiquent que les enseignants utilisent les manuels comme source importante pour la préparation des cours. Toutefois, des observations menées dans le cadre d’études réalisées par le Centre national d’étude des systèmes scolaire (Cnesco 2015 cité par Villani et Torossian 2018:55) ont montré l’utilisation croissante d’autres sources et données, notamment numériques. Les auteurs du rapport signalent que cette multiplicité des ressources, numériques et/ou papier, risque de nuire à la cohérence pédagogique d’une école. Afin que les manuels « regagnent la confiance des enseignants », le rapport recommande leur « positionnement sur une échelle, par un comité scientifique, en regard de chacun des critères d’une courte liste arrêtée par ce même comité » (p. 57). Le PNLD brésilien et ses critères pourraient être un exemple inspirant cette évolution.

Largement utilisés pour construire les enseignements, les manuels, qui constituent donc une première étape d'interprétation et de sélection des programmes, représentent un enjeu important dans le système éducatif d'un pays. Bien qu'ils ne reflètent pas les situations de classe, leur élaboration par des experts (dont nous verrons la formation) fait de leur étude un moyen d'approcher des pratiques enseignantes potentiellement préconisées.

2.4 Critérios de qualificação das atividades

Ao agrupar as ideias essenciais dos capítulos prévios sobre a aprendizagem em geral e em matemática, elaborei uma lista de critérios que qualificam atividades favorecendo a construção de sentido. São os critérios que guiam a minha análise dos livros didáticos para determinar de que modo as propostas de atividades os satisfazem. Assim, segundo os programas francês e brasileiro, uma aprendizagem baseada no sentido dos conteúdos ensinados deveria apresentar:

1. **Situações contextualizadas,** referindo-se às experiências vividas pelo aluno, na escola e fora dela; permitindo a transcrição da observação, da exploração e do questionamento dos objetos e da realidade do mundo; permitindo interrogar o seu próprio conhecimento do mundo; favorecendo as ligações entre o real e as representações dele.

2. **Situações apresentadas de vários jeitos**, variando os usos do escrito e do oral bem como as modalidades de ação e de interação; mobilizando os sentidos e o afeto do aprendiz; vividas de jeito lúdico; apoiando-se ao início em material que permite uma manipulação; colocando os alunos numa situação de impasse, de resolução de problemas, de pesquisa; ligando o abstrato e o concreto.

3. **Situações requerendo alguns tipos de atividade do aluno,** mobilizando várias formas de raciocínio; favorecendo o uso progressivo de vocabular específico; desenvolvendo a distinção dos problemas sobre estruturas multiplicativas com os sobre estruturas aditivas; desenvolvendo a modelização de problemas; estimulando a manifestação do conhecimento que o alundo já possui; favorecendo as conexões com conhecimentos já presentes, incluindo ligações com outras operações e com o sistema de numeração decimal; estimulando a reflexão antes das explicações teóricas.

4. **Situações envolvendo vários componentes do conceito de multiplicação:** configurações padrão que a multiplicação permite resolver; linguagens e símbolos; tabelas de multiplicação; ligações com a divisão e as situações de distribuição.

3. Análise de um corpus de quatro livros didáticos

Nesta segunda parte, apresento os livros didáticos que estudei (3.1), explico brevemente o meu sistema para recolher e encriptar os dados (3.2), descrevo e comparo a atividade oferecida pelos quatro livros para começar a aprendizagem sobre a multiplicação (3.3), como eles lidam com as diferentes noções que formam o campo conceitual da multiplicação ao longo do livro (3.4). Analiso a contextualização das atividades (3.5), os tipos de dados propostos (3.6), e, finalmente, as atividades esperadas do aluno e os objetivos de aprendizagem almejados (3.7).

3.1 O corpus estudado

Primeiro veremos como construí o corpus, de onde vêm os livros didáticos estudados e quem os escreveu, depois falo sobre todos os recursos oferecidos a alunos e professores. Finalmente, as comparações começam com uma descrição da estrutura dos livros e do ensinamento proposto pelos métodos de aprendizagem dos quais eles fazem parte.

3.1.1 Apresentação do corpus

O corpus consiste em quatro livros didáticos de matemática: dois brasileiros e dois franceses, para o segundo ano do ensino fundamental, ou seja, o *CE1* na França. Cada livro do aluno está estudado com o guia para o professor.

No Brasil, os livros do professor têm uma forma padronizada pelo PNLD: após uma parte específica que apresenta a coleção, seus princípios e a abordagem escolhida, fica cada página dupla do livro do aluno, emoldurada “em U” pelo texto destinado ao professor: os objetivos dos programas, comentários e extensões para as atividades em sala de aula e sugestões de outras atividades. Portanto, a leitura do livro do professor permite que o livro do aluno seja lido ao mesmo tempo.

Na França, não há padrão nacional dos livros didáticos nem dos seus guias associados. Se uma padronização social pode operar em livros dos alunos (por hábito e efeitos de uso), os formatos e o conteúdo do livro do professor são muito heterogêneos, de acordo com os editores e suas coleções. Veremos que seus usos podem realmente diferir bastante.

3.1.2 Seleção dos livros

A seleção dos livros didáticos mais usados no Brasil foi possibilitada pela publicação dos números de pedidos de livros didáticos ao nível nacional, no site institucional do FNDE (Fundo nacional de desenvolvimento da educação)[11]. Selecionei então os dois livros mais pedidos na edição do PNLD 2019, em matemática, que juntos correspondem à 45% das vendas: *Ápis* da editora Ática, e *Buriti Mais* da editora Moderna, que são as coleções mais ordenadas em matemática para o ensino fundamental I em geral, mas também para o 2° ano especificamente. As tabelas 6.6 e 6.7 apresentam os números de vendas dos três livros didáticos mais vendidos no Brasil pelo PNLD 2019.

Na França, os dados sobre os números de vendas ou as coleções mais vendidas são de propriedade das editoras e não são publicados por questões de confidencialidade[12]. Selecionei dois dos três livros recomendados por Magali Hersant, professora em didática da matemática na Universidade de Nantes[13], por ser muito presente nas escolas francesas. Esses são os livros *Nouveaux Outils pour les maths* da editora Magnard, e *Cap Maths* da editora Hatier.

3.1.3 Autor(es) de cada coleção

A maioria das coleções é escrita por vários autores, cujos horizontes diferentes trazem perícias complementares (veja a Tabela 6.10). Assim, encontramos entre eles especialistas em matemática, e sobretudo em sua didática, e especialistas do ensino fundamental I, que trazem sua experiência de ensino para as crianças. No Brasil, é comum encontrar autores licenciados em educação matemática, formação que parece ligar os dois pontos de vista. A coleção *Ápis*, escrita por um único autor, não carece necessariamente de complementaridade de olhares, pois este autor apresenta diplomas de diferentes treinamentos, ao contrário, pode-se perguntar se não há falta de perícia em matemática ou em sua didática na elaboração da coleção da editora Magnard.

11 Os dados são publicados na seção PNLD 2019 - Valor de aquisição em https://www.fnde.gov.br/index.php/programas/programas-do-livro/pnld/dados-estatisticos

12 Conforme as respostas que recebi do GIDEC (Agrupamento de informação das editoras clássicos) e do site www.lesediteursdeducation.com ou seja as editoras de educação.

13 Inicialmente planejei selecionar três livros de cada país, mas a dificuldade de acesso online para dois livros (*A conquista da matemática* da editora FTD no Brasil e *J'apprends les maths* da editora Retz na França) e a quantidade de dados já disponíveis com os outros quatro me levaram a desistir da análise desses dois livros.

3.1.4 Os recursos oferecidos pelas coleções

Para o aluno, as coleções estudadas parecem oferecer uma ferramenta única. O livro do aluno contém as atividades sobre cada tema da matemática, enquanto as coleções francesas tratam da geometria e, para *Cap Maths* das grandezas e medidas igualmente, em um outro caderno. Apenas *Nouveaux Outils* não propõe material destacável no final do livro. *Cap Maths* lista o curso e os métodos em um livreto separado, intitulado "Dico-maths". Em anexo, a Tabela 6.8 apresenta os recursos destinados aos alunos.

Ao estudar os sítios das coleções, *Buriti* parece ser o único que não oferece múltiplos suportes e ferramentas destinados ao professor e complementares ao livro: atividades recreativas, material coletivo, atividades interativas, etc. Observamos que o conteúdo dos livros do professor diferem bastante. Os guias brasileiros parecem basear-se nas atividades do livro do aluno para comentá-los e ampliá-los alterando os números e/ou sugerindo uma atividade complementar, bem diferente do *Cap Maths*, cujo caderno é apenas uma parte do método proposto, intervindo apenas após as fases coletivas de cada aprendizagem. O guia *Cap Maths* é especialmente consistente, pois ele desenvolve, após apresentação das escolhas didáticas dos autores e dos processos de aprendizagem, o curso de cada sessão, às vezes com os discurso do professor. Segue que este guia tem mais que o dobro do tamanhop do outro guia francês (364 páginas versus 144 páginas). O guia *Nouveaux Outils* oferece apenas correções de exercícios, o curso (não detalhado) da seção de descoberta coletiva, algumas etapas corretivas e atividades aritméticas mentais. Anexa, a Tabela 6.9 apresenta os recursos destinados aos professores.

3.1.5 Estrutura e funcionamento do livro

A própria estrutura do livro didático (resumida na Tabela 3.1), a dos capítulos e as partes para o professor, constituem uma abordagem proposta pelos autores, mesmo que os professores tenham sempre autonomia para realizar as atividades.

Ao observar os sumários, notamos que o livro *Cap Maths* distingue-se mais uma vez dos três outros: é o único que não subdivide o livro por tema e subtemas, mas que escolhe tratar cada tema em cada unidade. Essa organização específica é vinculada ao uso esperado deste livro: o livro deve ser percorrido em ordem de página, uma sessão após a outra, ao longo do ano. Ele assume a responsabilidade da alternância dos temas matemáticos e os retornos sobre o conhecimento, para os quais parece ter havido uma atenção especial.

O guia destinado ao professor está por isso muito detalhado, uma vez que ele descreve cada etapa da aprendizagem e informa sobre variáveis didáticas ou algumas dificuldades potenciais. Contudo, as buscas (pelo professor ou pelo aluno) ficam mais difíceis, pois as atividades sobre o mesmo tema estão dispersas no livro todo, enquanto, nos outros livros, elas estão juntas em uma ou várias unidades diferentes.

Os livros didáticos estudados, exceto o *Buriti*, propõem uma programação de ensino-aprendizagens. Na programação do *Ápis*[14], parece que as unidades devem ser estudadas seguindo a ordem do livro, no ritmo de duas unidades por bimestre. Com o livro *Ápis*, alguns temas serão estudados somente durante o mesmo bimestre (grandezas e medidas, por exemplo), o que parece justapor e acumular os saberes, em comparação com *Nouveaux Outils*, no qual livro descobre-se uma parte de cada unidade (então de cada tema) em cada período. Portanto, ao observar mais finamente os sumários e as programações, percebe-se que, para *Nouveaux Outils* como para *Ápis*, o estudo de uma noção, com aquela da multiplicação, não está repartida no ano todo mas aglomerada em um ou dois períodos. Ao contrário, no *Cap Maths*, uma noção está abordada várias vezes ao longo do ano, com novos conteúdos e aprofundamento progressivo. Os dois livros franceses parecem dar mais importância que *Ápis* à complementaridade de várias abordagens para cada tema ao longo do ensino anual, mas usam de graus diferentes de espiralização do ensino (ou seja retornos sobre competências e saberes adquiridos e aprofundamento desses). No entanto,

> é impossível de conceber a aprendizagem da matemática como um acúmulo de conhecimento, cada um dos quais seria definitivamente adquirido na primeira tentativa. Nada entende-se completamente no primeiro encontro. O sentido de um conceito, de um teorema, só se aprofunda com o uso, pelo reconhecimento do seu papel, seus prós e contras num conjunto mais amplo de conhecimentos (CREM[15] citado por Watthez 2010:13).

14 A programação do livro *Ápis* está disponível no sítio companheiro: https://www.aticascipione.com.br/pnld/edital/pnld-2019/plano-bimestral/?disciplina=93

15 O CREM é um Centro de pesquisa sobre o ensino da matemática e fica em Nivelles, na Bélgica.

Tabela 3.1: Estrutura dos livros didáticos

	Estrutura do livro	**Abordagem da multiplicação**
Ápis (Ática)	- 8 unidades separando os temas incluindo 3 sobre operações	Uma unidade dedicada e algumas atividades em dois outros capítulos
Buriti (Moderna)	- 8 unidades separando os temas incluindo 3 sobre operações	Uma unidade dedicada, questões na unidade Grandezas e medidas, e parte duma unidade sobre operações
Nouveaux Outils pour les maths (Magnard)	- 5 unidades separando os temas incluindo 2 sobre cálculo	Parte dedicada nos dois capítulos de cálculo (Cálculo e Cálculo mental)
Cap Maths (Hatier)	- 10 unidades associando os temas	Atividades dedicadas em sete unidades

Como as atividades sobre a multiplicação são repartidas em várias partes do livro *Cap Maths*, não posso reduzir minha pesquisa às unidades dedicadas e busquei nos outros livros cada atividade referindo-se às estruturas multiplicativas.

3.2 Métodos de análise

Recolhi em cada livro todas questões sobre o campo da multiplicação tal qual definido em 3.4. O presente capítulo expõe um registro conciso das atividades levadas em consideração, os parâmetros selecionados na lista de critérios, assim como o modo de recolhimento e de análise de dados.

3.2.1 As atividades estudadas nos livros

Nos dois livros brasileiros, a maior parte das atividades sobre a multiplicação fica concentrada na ou nas unidades dedicadas. *Ápis* propõe anteriormente compartilhar uma dúzia em meia-dúzias[16] (unidade 1: Números até 100), uma situação de compartilhamento equitativo (unidade 4: Adição) e, após a unidade dedicada à multiplicação (unidade 6), uma atividade sobre esses dois conceitos (unidade 8: Números a partir de 100). Após a unidade dele sobre a multiplicação (unidade 5), *Buriti* aprofunda a aprendizagem dessa operação numa unidade falando das operações sobre os números naturais (unidade 7). Entretempo, algumas questões de estrutura multiplicativa ficam na unidade de grandezas e medidas (unidade 6).

Do lado dos livros franceses, a aprendizagem da multiplicação aparece na parte dedicada de duas unidades (Cálculo e Cálculo mental) de *Nouveaux Outils*, com três problemas nas grandezas e medidas, e em atividades variadas e disseminadas em sete das dez unidades de *Cap Maths*. A estrutura e o método de ensino deste livro não permite separar o que lida com a multiplicação do que lida com a numeração decimal, podendo ser problemático para recolher os dados, mas enfatiza as conexões entre os dois conceitos para a aprendizagem (via as decomposições multiplicativas especialmente). Nos outros livros, a numeração é estudada de maneira separada, antes da multiplicação, de jeito que não é abordada via a multiplicação (mas adições de parcelas iguais).

3.2.2 Parâmetros estudados entre os critérios da lista estabelecida

Neste estudo não podia tratar-se todos os critérios, que listei previamente e que favorecem a construção de sentido (2.4). Me interessei por alguns parâmetros de

16 *Buriti* também apresenta o agrupamento “meia-dúzia” mas, como esse não é construído como sendo a metade de uma dúzia, considero a atividade como desenvolvimento da numeração e não como parte do campo multiplicativo, assim como as outras atividades de *Ápis* sobre dúzias.

maneira qualitativa: a entrada no tema da multiplicação (capítulo 3.3), a abordagem das diferentes partes do campo conceitual (3.4.2) nas quais especialmente as linguagens para formular a operação (3.4.4). Escolhi tratar de outros de forma quantitativa: a contextualização (3.5), os tipos de dados (3.6), as atividades esperadas e os objetivos visados (3.7). As modalidades de interação (agrupamentos de alunos, conversas e reações, etc.) e de ação (manipulação, esquematização, exemplo visível, etc.) não são sempre explicitadas pelos livros, portanto não podia as recolher para cada instrução (*consigne*). Além disso, a liberdade do professor está muito grande para adaptar essas modalidades à estrutura da turma, à sua própria pedagogia e às possíveis dificuldades de alunos.

Para permitir a compreensão da minha análise quantitativa desses critérios, preciso apresentar o meu modo de recolhimento dos dados e algumas distinções que tive de fazer.

3.2.3 Recolhimento dos dados

A unidade do meu recolhimento é a *instrução*. Ela corresponde a uma atividade elementar do aluno (por exemplo um cálculo) e pode ser implícita (por exemplo a leitura de uma parte teórica). Uma instrução pode pertencer a um exercício que inclui várias. Não mantive as unidades "exercício" dos livros porque elas não são análogas entre as editoras nem entre duas páginas do mesmo livro. Construí então uma outra unidade, que chamei *situação*. Uma situação é um conjunto de instruções sucessivas tendo em comum seja o contexto, seja a atividade pedida sobre os dados. Portanto, há troca de instrução desde que o contexto ou a atividade muda (ou se o tipo de dados muda significativamente), e há troca de situação se tanto a atividade como o contexto mudam. Quando a mesma atividade é pedida várias vezes no mesmo contexto, e com os mesmos tipos de dados (sobretudo quando mudam os números), conto tanto tarefas adicionais quanto *repetições*. Esse número pode ser alto, tal como em cálculos de completamento da tabela de multiplicação, pois cada cálculo é contado como uma tarefa.

Esse sistema de recolhimento não permite agrupar duas instruções que pedem a mesma atividade e/ou invocam o mesmo contexto se elas não são sucessivas. Um código dos exemplos permite, por conseguinte, mencionar se uma atividade similar já foi efetuada antes. Para cada um dos quatro livros, construí uma planilha inventariando vários parâmetros, cuja importância e uso a posteriori são variáveis (veja a Tabela 6.11).

3.2.4 Descrição global dos dados recolhidos

A Tabela 3.2 apresenta o número de instruções e de situações inventariadas deste modo, assim como o número de tarefas. Esses dados brutos, que são disponíveis quase diretamente na planilha, fornecem primeiras informações sobre os livros, especialmente sobre a amplitude dos dados e aquela de cada livro. Toma-se nota que *Cap maths* é, de longe, o livro com a maior quantidade de instruções e situações (conta, por si só, 40% do total de instruções e de situações). Não há surpresa nenhuma, pois tratar-se de um método pronto para usar, segundo o qual o professor nada tem a acrescentar.

Tabela 3.2 : Dados globais brutos do estudo

	Ápis	***Buriti***	***Nouveaux Outils***	***Cap Maths***	**Total**
Número de situações	97	89	77	185	448
Número de instruções	181	174	122	314	791
Número de tarefas	432	409	612	924	2377

Outros indicadores podem ser calculados e são apresentados na Tabela 3.3. O nível médio de repetição constitui um indicador sobre a repetitividade das atividades. Recorda-se que se trata de pedidos sucessivos da mesma tarefa com mudança de valores numéricos, o que não corresponde exatamente a uma repetição. Aqui toca-se em um limite do meu estudo, pois, por escolha, não me interessei pelos valores numéricos, que constituem, entretanto, uma variável didática maior para a atividade cognitiva do aluno e para a progressão dele na aprendizagem.

Se for possível estimar a repetitividade irrelevante para uma aprendizagem com sentido, pode também pensar que, uma vez que o contexto seja considerado e a instrução seja entendida, a atividade do estudante fica totalmente dedicada à resolução matemática da questão e às mudanças da troca dos valores. Assim, propor tarefas “repetitivas” contribui plenamente para o desenvolvimento matemático.

Descobre-se que esse nível é relativamente semelhante entre os livros, salvo *Nouveaux Outils*, para o qual a repetição revela-se duas vezes mais frequente. Através da observação das atividades repetidas nesse livro, aparece que a maior parte delas fica na unidade Cálculo mental. Assim, calculando a taxa sem contar com esta unidade, fica só de 2,3. Todavia, o cálculo mental é contado na taxa global de *Cap Maths* que não é muito maior (3,0) do que a dos livros brasileiros.

Tabela 3.3 : Primeiros indicadores da análise dos livros didáticos

	Ápis	***Buriti***	***Nouveaux Outils***	***Cap Maths***	**Média**
Taxa média de repetição das instruções	2,4	2,4	5,0	2,9	3,0
Número médio de instruções por situação	1,9	2,0	1,6	1,7	1,8
Quota das instruções do caderno	85%	80%	75%	73%	78%

Com o código das situações e o número médio de instruções por situação, esperava aproximar a tendência dos livros para propor situações enriquecedoras e desenvolvidas, nas quais as instruções são ligadas, o que seria o contrário de uma justaposição de atividades sem ligação. Mas, afinal, por causa da definição híbrida dela (contexto/atividade), a ferramenta é dificilmente aproveitável.

Ter várias instruções na mesma situação pode significar que há várias questões sobre o mesmo contexto, o que diz respeito a um aprofundamento do questionamento sobre um contexto. Pode também significar que os autores trocam os contextos para aplicar a mesma atividade, o que constitui um treinamento à matematização até mesmo uma automatização dela (pela associação de um tipo de problema com um tratamento matemático). Para distinguir esses dois casos, me interessei de um lado ao número de contextos diferentes e à retomada deles no capítulo 3.5 sobre a contextualização, e do outro lado aos objetivos das atividades pedidas ao aluno no capítulo 3.7.

Finalmente observa-se que a quota de instruções trazidas pelo guia varia entre 16% para *Ápis* e 27% para *Cap Maths*. Em *Nouveaux Outils*, essas instruções correspondem em maior parte, a atividades de cálculo mental. Para os livros brasileiros, são mais sugestões de atividades complementares (com materiais, movimentos) e algumas instruções de apoio e de prolongamento das atividades do caderno (ou seja, o livro do aluno). Para *Cap Maths*, todas pesquisas e descobertas ocorrem inicialmente sem o caderno, que constitui o meio do treino, das revisões e o espaço para colocar os resultados de cálculo mental.

3.3 A entrada no conceito da multiplicação

O meu estudo interessando-se à introdução da multiplicação na cultura matemática dos alunos, proponho nessa primeira parte observar concretamente a primeira atividade sobre a multiplicação. No livro *Ápis*, a abertura da unidade Multiplicação não corresponde, de fato, à primeira atividade do campo multiplicativo, visto que há uma atividade com a ideia de metade na aprendizagem do agrupamento "meia-dúzia"[17] e uma situação de distribuição na unidade Adição. Estas duas situações, resolvidas pelos conhecimentos já adquiridos ou em processo de adquisição, preparam o caminho para a abordagem explícita da multiplicação.

3.3.1 *Ápis*

Ilustração 1: A entrada na multiplicação – livro Ápis p. 132-133

Descrição

a) A abertura da unidade dedicada à multiplicação é uma página dupla ilustrada: uma cena da vida social e familiar (o quiosque de um vendedor de açaí[18]) que os alunos

17 No livro *Buriti*, a aprendizagem do agrupamento meia-dúzia não envolve nenhum cálculo nem ligação explícita com a dúzia para os alunos; dúzia e meia-dúzia são apresentados como dois agrupamentos para conhecer.

18 O açaí é um fruto das palmeiras da América do Sul reconhecido pelas valores nutricionais. Parecido com a uva de cor roxa, é uma fruta popular na América latina. Nas ruas brasileiras ou em frente da universidade, é comum encontrar vendedores de açaí em várias formas, principalmente com a polpa batida e gelada. Os Brasileiros a misturam com sorvete, com granola ou com outras frutas.

devem descrever e comentar. Começando com uma pergunta aberta (*O que você vê nesta cena?*), torna-se depois mais fechada (*Quais frutas estão disponíveis para bater com o açaí?*) para entrar na identificação progressiva dos dados, depois de fazer a ligação com a experiência pessoal (*Você já provou açaí batido com frutas? Gostou? Conte para um colega como foi a experiência!*).

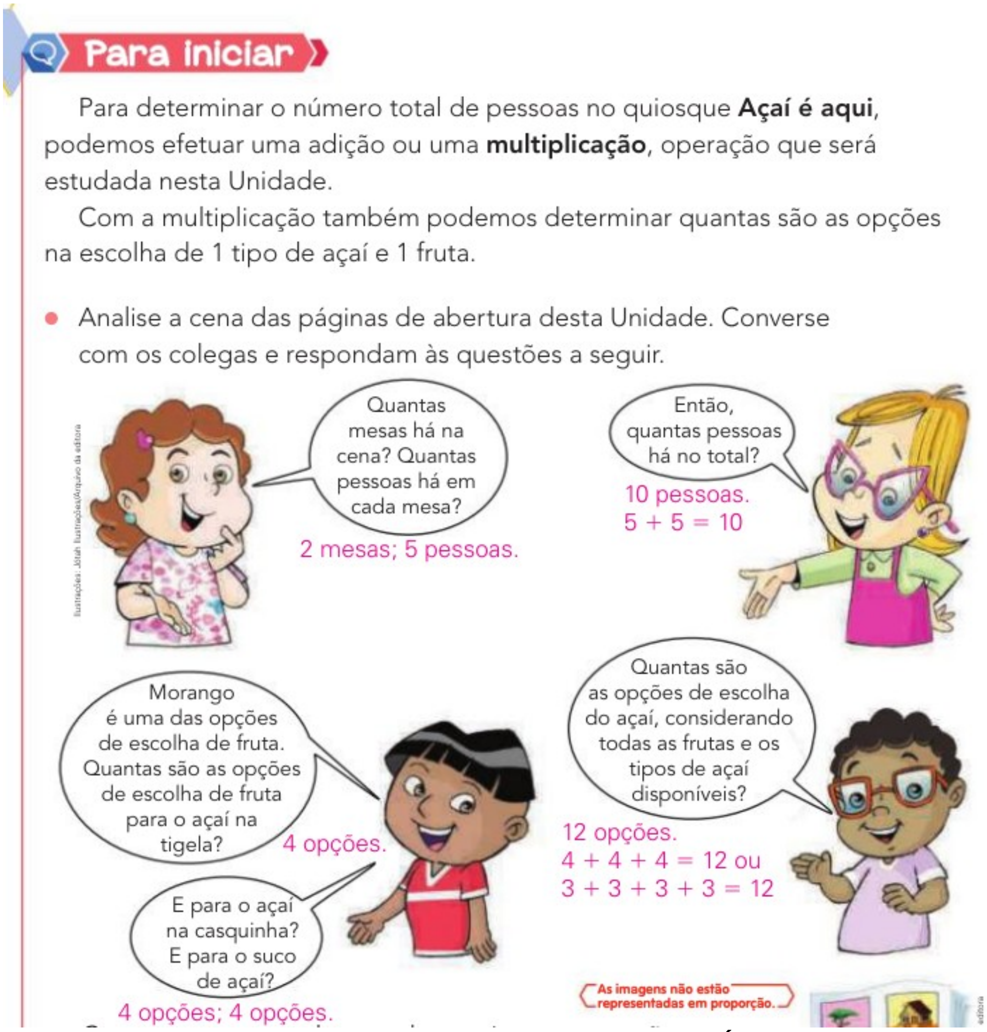


Ilustração 2: Exploração da primeira atividade – livro Ápis p. 134

b) Na página seguinte (veja a Ilustração 2), é indicado que a multiplicação pode ser usada, como a adição, para "determinar o número total de pessoas no quiosque". É também indicado um outro uso da multiplicação nesta situação: para "determinar quantas são as opções na escolha de 1 tipo de açaí e 1 fruta".

c) Depois há questões para discutir com a turma, permitindo a identificação dos dados para o cálculo das duas quantidades mencionadas anteriormente, que são propostas por duas figuras de mesma idade que os leitores, como se fossem colegas na turma.

Observação – análise

Constata-se na fase a) que a unidade está introduzida a partir de uma "situação da vida cotidiana no Brasil", os quiosques de açaí, e mais geralmente de fastfood, sendo muito mais abundantes e mais visitadas de que na França, e isso a qualquer hora do dia. O livro enfatiza a importância que todos os alunos possam discutir a situação, para que todos a entendam da mesma maneira. Ele pretende assim fazer a ligação com a cultura do país, os conhecimentos sobre o açaí e o que pode ser feito com essa fruta para consumi-la. A introdução da unidade baseia-se, portanto, na experiência dos alunos e em seus hábitos no contexto da situação.

Contudo, observa-se na fase b) que a multiplicação está introduzida e nomeada para responder a duas perguntas que não foram apresentadas anteriormente. Não há perguntas nem pesquisas antes de fornecer um método de resolução, todavia este parágrafo é encontrado após a página dupla que deixa os alunos falarem; o professor pode, portanto, decidir reduzir a subitaneidade de um modo ou de um outro, antes de virar a página. Por outro lado, a primeira pergunta envolve uma multiplicação por 2, o que é facilmente resolvida por adição. Assim, a multiplicação não constitui nesse livro uma solução a uma necessidade dos alunos, e a apresentação dele aos alunos, antes de qualquer pergunta, sugere uma abordagem dedutiva. Este tipo de abordagem segue um raciocínio da regra para aplicações sobre casos específicos.

Na fase c), as questões levam progressivamente os alunos a identificar os dados para responder a cada pergunta do b). É então o livro que fornece um método de resolução e o raciocínio para seguir, apesar de declarar na introdução da página que a multiplicação pode ser usada, a correção e os comentários para o professor privilegiam o caminho pela adição de parcelas iguais.

Na mesma página e dando seguimento à atividade, há outras perguntas em outros contextos: duas perguntas têm a ver com a reunião de quantidades iguais, e uma busca determinar o número total de opções disponíveis. Elas também são resolvidas por adições, de caminho paralelo aos tratamentos prévios.

3.3.2 ***Buriti***

Ilustração 3: A entrada na multiplicação – livro Buriti p. 94-95

Descrição

a) A primeira situação da unidade dedicada à multiplicação escolhida por *Buriti* apresenta um jogo de crianças: uma página dupla retrata crianças avançando em uma trilha. Uma imagem em destaque, mostrando um hábito, está associada a algumas casas. Distingue-se bons hábitos, que aumentam o número de pontos, de maus hábitos que retiram pontos. As perguntas em grande parte dizem respeito ao contexto duplo: o contexto do jogo e o dos hábitos. O guia do professor precisa:

> *Ao cair na casa cuja imagem mostra uma pessoa jogando papel para fora do carro, que é um hábito ruim, perdem-se 10 pontos (indicado por -10).*
>
> **b)** *Se cair na casa cuja imagem mostra o menino jogando papel na lixeira, que é um bom hábito, dobra-se a pontuação (indicado por X2).*
>
> **c)** *Caso os alunos não reconheçam esse símbolo, diga que a multiplicação será estudada nesta Unidade.*

Análise sucinta

A compreensão desta situação introdutiva foi difícil para mim, pois o suporte está pouco explicado e, além disso, ele inclui um contexto duplo e poucas ligações com a multiplicação. O objetivo das perguntas parece ser o de verificar o entendimento de todos sobre o jogo, e, em seguida, discutir habilidades extra-matemáticas, como a higiene e o respeito ao meio ambiente (lixo, água potável). Em nenhum lugar, no livro do aluno ou nos comentários para o professor, é indicado jogar, aliás, a ilustração não parece feita com esta finalidade, pois as figuras retratadas são os peões. Pode-se só comentar. Observei prolongadamente a imagem antes notar dados retratados, sugerindo que as figuras avançam na trilha lançando os dados. Compreendo que não pode-se adivinhar a pontuação das figuras, pois não conhecemos quais foram as casas em que elas já caíram, o que limita a discussão. Além disso, há dificuldade em entender o que as figuras fazem nas casas fora da trilha, e o detalho até mesmo a presença de algumas imagens (como a câmera).

A relação da situação com a multiplicação só aparece no uso do símbolo × (b), apresentado sem nenhuma introdução, e a conexão dele com bons hábitos, o que poderia sugerir que “× 2” ou “× 5” aumenta o número de pontos, o que não é mencionado dessa maneira nos comentários do guia. Pode-se também presumir que essa situação possibilita o diagnóstico do conhecimento da turma sobre o símbolo × e a operação associada. Finalmente, a observação (c) no guia vincula o símbolo ao nome da operação sem outra explicação além do fato de que será discutida a seguir (aparece na página 100).

As perguntas levantadas possibilitam unicamente discutir o contexto e refletir sobre os dados. Não se trata de cálculo, nem de apresentar uma situação padrão da multiplicação, nem de usar as formas de multiplicação da linguagem social (“a sua pontuação dobrou”, “você tem o dobro de pontos que…” etc.) que teriam interesse em lidar com essa situação. Afinal, para a multiplicação, essa situação só mostra o símbolo sem o apresentar. As atividades a seguir envolvem adições de parcelas iguais, para as quais apenas os resultados devem ser inseridos no meio das frases de resposta.

3.3.3 *Nouveaux Outils pour les maths*

lustração 4: A entrada na multiplicação – livro Nouveaux Outils p. 86

Tem 4 pacotes, cada um contendo 3 doces.
3 + 3 + 3 + 3 = 12 *É 4 vezes o número 3.* *Diz-se 4 vezes 3.*

Descrição

a) A primeira abordagem da multiplicação começa com uma procura do número total de objetos (veja a Ilustração 4).

> *A turma de Jade pediu livros. Hoje o pacote chegou! Tem quatro pilhas de 6 livros. Quantos livros a turma de Jade pediu?*

O método esperado, bem provável, é o uso da adição de parcelas iguais[19], aliás, o guia do professor menciona a importância das adições de parcelas iguais na introdução da multiplicação.

> *Dois pontos serão abordados ao mesmo tempo:*
> *- O uso de adições de parcelas iguais para dar sentido à multiplicação*
> *- A construção das tabelas de multiplicação a partir dos resultados obtidos durante a aula* (guia *Nouveaux Outils* p. 81)

b) Após essa fase de pesquisa, uma contribuição teórica aparece no livro, designada por "Retenho". Ela se baseia nos outros agrupamentos (as *pilhas* são substituídas por *pacotes*) de outros objetos (os *livros* são substituídos por *doces*) para contá-los.

19 Na BNCC, e por seguinte nos livros didáticos brasileiros, fala-se de "adição de parcelas iguais", enquanto na didática francesa fala-se de "adição iterada".

Introduz-se, em três linhas paralelas, a relação entre a adição de parcelas iguais e sua linguagem abreviada, que é a palavra “vezes” e que nomearei “multiplicação oral”.

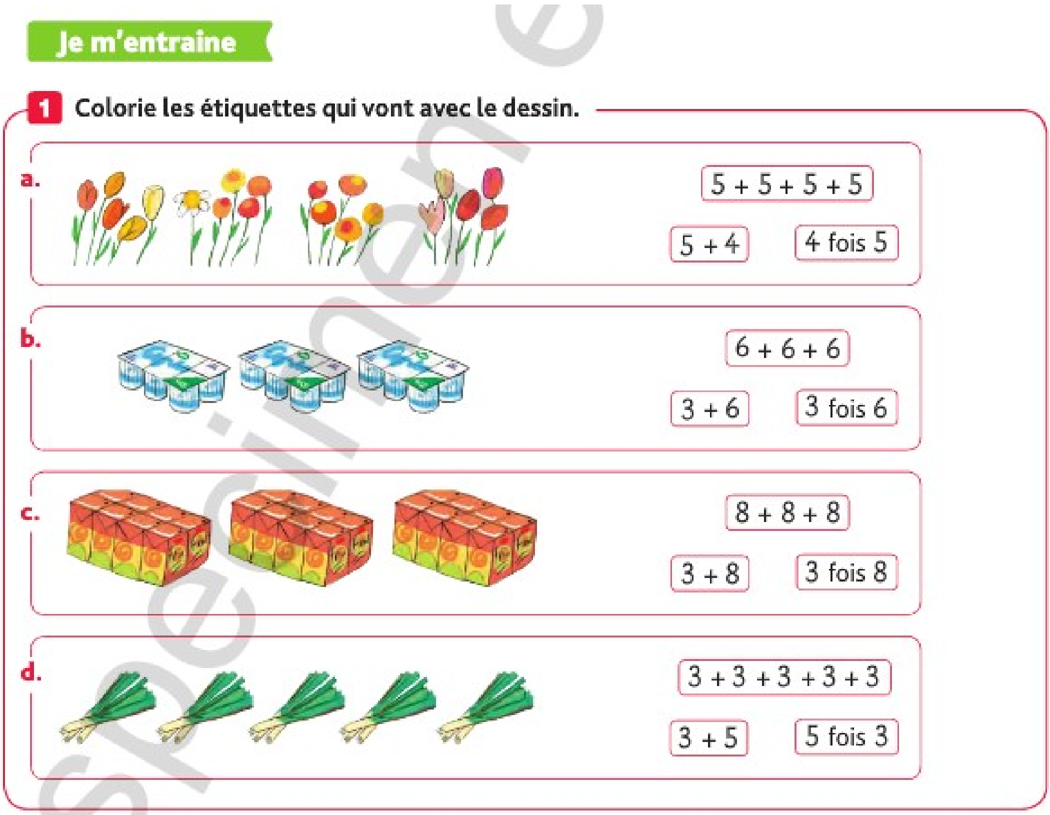


Ilustração 5: Treinamento sobre a primeira atividade – livro Nouveaux Outils p. 86.

c) A terceira etapa de aprendizagem prevista pelos autores é o treinamento (veja a Ilustração 5). Para tanto, eles propõem quatro tarefas diferentes entre as quais só muda o tipo de objetos para contar. A tarefa pedida é a mesma: associar as formulações matemáticas corretas às imagens de agrupamentos de objetos. Há três proposições cada vez: a adição de parcelas iguais, a adição dos dois dígitos e a multiplicação oral (“vezes”).

Análise sucinta

Os autores nomearam esse primeiro capítulo “Entender o sentido da multiplicação”, o que indica interesse à busca do sentido no início da aprendizagem. A situação escolhida é de adições de parcelas iguais sobre objetos para contar. O aprendiz não pode se sentir desorientado pela questão “Pesquisamos”, pois ele já conhece a adição, e a situação está bem próxima do seu cotidiano escolar. Ele pode responder à pergunta usando conhecimento já visto nas aulas, que o leva à adição iterada. Os autores deixaram muita liberdade para o professor conduzir a descoberta. A observação teórica “Retenho” descrita em (b) consta no caderno do aluno imediatamente abaixo da atividade de pesquisa. A multiplicação aí está apresentada como uma maneira simplificada ou mais rápida para formular uma adição repetida: “3 + 3 + 3 + 3 = 12. É 4 vezes o número 3. Diz-se 4 vezes 3”. Essa fase teórica, embora abordada após a primeira atividade, pode, no entanto, perturbar uma pesquisa pessoal genuína. De fato, alguns alunos podem ficar tentados a observar, até mesmo copiar, a resolução proposta. Pode-se mesmo supor que eles estão acostumados às três fases (*Pesquisamos – Retenho – Treino*) seguidas pelo livro, e eles sabem, portanto, que a parte “Retenho” os permite resolver situações[20].

Introduzir a multiplicação após uma situação de pesquisa sugere uma abordagem mais ativa para os alunos, todavia, trata-se mais de uma situação introdutória do que uma situação-problema verdadeira. De fato, de acordo com De Vecchi, uma “situação de partida” (*situation de départ*) visa “surpreender, tornar curioso, motivar, revelar as concepções dos alunos e suscitar um questionamento” na perspectiva de envolver os alunos (1996, citado por Dodokal 2012:3)[21]. Ela difere de uma situação-problema (definida pelo mesmo autor em 2.2.3), também chamada “situação-impasse”, que permite uma ruptura genuína, pois “ela conscientiza [o aluno] de que seu modelo explicativo é inadequado e que deve ser desconstruído” (Dodokal 2012:3). No entanto, os alunos não ficam num impasse nessa primeira atividade, nem há várias estratégias para resolvê-la. Refere-se às fases de aprendizagem de Douady (também apresentadas em 2.2.3), aqui tem a fase “antigo” mas não tem nenhuma fase de pesquisa.

Após a explicitação e a institucionalização trazida pelo (b), a fase de familiarização ocorre em (c). Os autores antecipam um erro: “*Por hábito, os alunos vão ser tentados por adicionar os dois números propostos*”, e eles o tornam em um “objetivo-obstáculo” (Martinand 1986, citado por De Vecchi e Carmona-Magnaldi 1996:56), em conta que a tarefa foi criada para favorecer o erro pela justaposição da adição e da multiplicação. De fato, segundo a abordagem construtivista, é muito importante e plenamente positivo que os alunos cometam erros, pois eles refletem representações mentais subjacentes erradas.

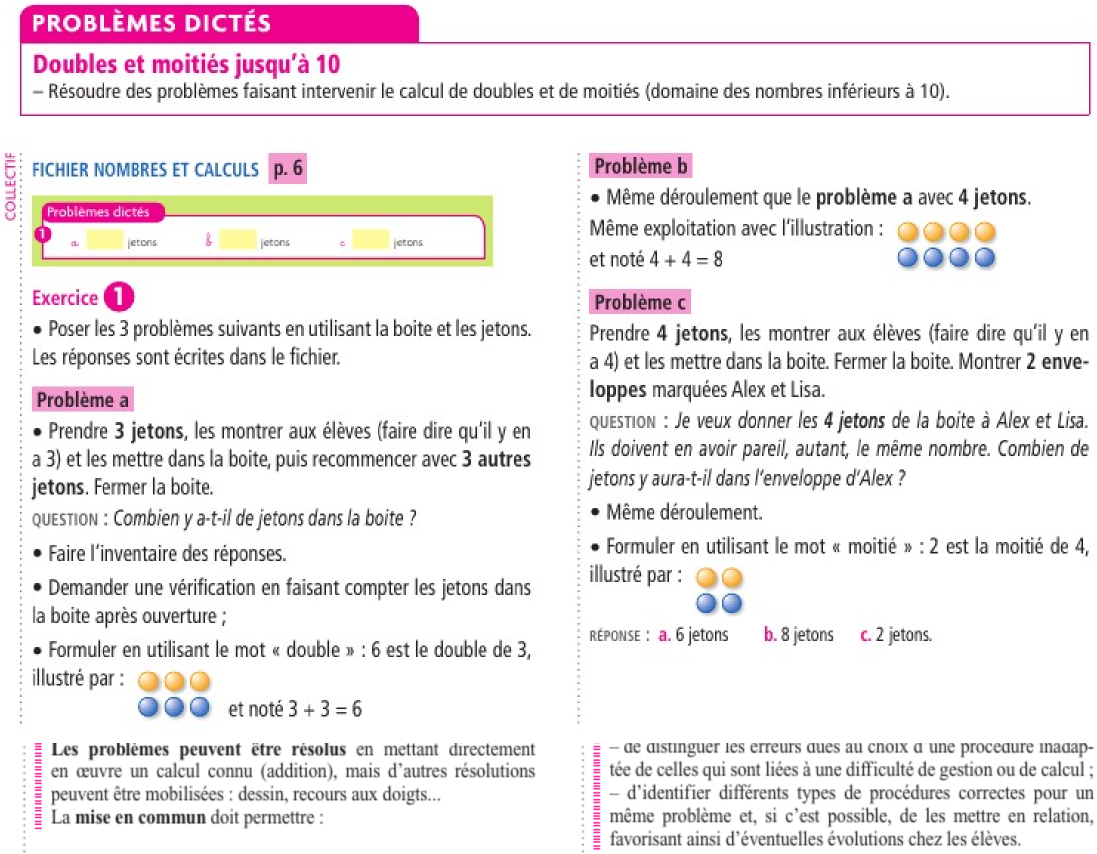
20 É sem dúvida por esse motivo que os autores de Cap Maths começam as novas aprendizagens sem a ajuda do caderno, mas também optaram por registar a teoria em outra mídia (o Dico-maths).

21 Dado que as bibliotecas estavam fechadas durante vários meses, não pude retornar lá para consultar o livro original (Fénichel et Pfaff 2005) e me tornei então para essa ficha de leitura escrita por uma professora-tutora (*Professeur des Écoles Maître Formateur*).

Cometer erros na sala de aula permite ao professor conhecer a existência dessas concepções erradas e assim, planejar atividades que favoreçam a evolução delas.

Contudo, o livro não apresenta uma situação aditiva para contrapor as situações multiplicativas. Isso não teria sido relevante, a fim de que a decisão de usar tal ou tal operação seja pensada em vez de repetida? A repetição dessas escolhas permite, no entanto, que os alunos verbalizem quatro vezes essa nova formulação matemática, com objetos diferentes. Ao total, *Nouveaux Outils* apresenta também uma abordagem dedutiva, mas essa é precedida de uma situação introdutória com sentido.

3.3.4 *Cap Maths*



PROBLÈMES DICTÉS

Doubles et moitiés jusqu'à 10

– Résoudre des problèmes faisant intervenir le calcul de doubles et de moitiés (domaine des nombres inférieurs à 10).

COLLECTIF

FICHIER NOMBRES ET CALCULS p. 6

Problèmes dictés

1 a. jetons b. jetons c. jetons

Exercice 1

• Poser les 3 problèmes suivants en utilisant la boite et les jetons. Les réponses sont écrites dans le fichier.

Problème a

• Prendre **3 jetons**, les montrer aux élèves (faire dire qu'il y en a 3) et les mettre dans la boite, puis recommencer avec **3 autres jetons**. Fermer la boite.

QUESTION : *Combien y a-t-il de jetons dans la boite ?*

• Faire l'inventaire des réponses.

• Demander une vérification en faisant compter les jetons dans la boite après ouverture ;

• Formuler en utilisant le mot « double » : 6 est le double de 3, illustré par :

et noté 3 + 3 = 6

Problème b

• Même déroulement que le **problème a** avec **4 jetons**.

Même exploitation avec l'illustration :

et noté 4 + 4 = 8

Problème c

Prendre **4 jetons**, les montrer aux élèves (faire dire qu'il y en a 4) et les mettre dans la boite. Fermer la boite. Montrer **2 enveloppes** marquées Alex et Lisa.

QUESTION : *Je veux donner les **4 jetons** de la boite à Alex et Lisa. Ils doivent en avoir pareil, autant, le même nombre. Combien de jetons y aura-t-il dans l'enveloppe d'Alex ?*

• Même déroulement.

• Formuler en utilisant le mot « moitié » : 2 est la moitié de 4, illustré par :

RÉPONSE : a. 6 jetons b. 8 jetons c. 2 jetons.

Les problèmes peuvent être résolus en mettant directement en œuvre un calcul connu (addition), mais d'autres résolutions peuvent être mobilisées : dessin, recours aux doigts...
La **mise en commun** doit permettre :
– de distinguer les erreurs dues au choix d'une procédure inadaptée de celles qui sont liées à une difficulté de gestion ou de calcul ;
– d'identifier différents types de procédures correctes pour un même problème et, si c'est possible, de les mettre en relation, favorisant ainsi d'éventuelles évolutions chez les élèves.

Illustration 6: Entrée dans la multiplication - guide Cap Maths p. 2

Descrição

a) A primeira abordagem do campo multiplicativo em *Cap Maths* visa o cálculo mental de dobros e metades durante o primeiro curso do ano. No primeiro problema, três fichas são colocadas em uma caixa à vista dos alunos, três outras são colocadas, antes de fechar a caixa. Pergunta-se aos alunos quantas fichas há na caixa, e eles devem responder no caderno, que só apresenta espaços para escrever algarismos e a palavra "*jetons*" (fichas) pois é o que tem para enumerar. Verifica-se o resultado, de maneira experimental, logo depois da partilha de respostas e procedimentos. O guia do professor explicita o objetivo duplo desta partilha que é a distinção da origem dos erros e a identificação dos procedimentos corretos, e salienta a importância da pluralidade de procedimentos corretos e a interligação entre eles. Em seguida, se ninguém já o fez, o professor formula que "6 é o dobro de 3" antes de falar do problema seguinte. Este ocorre do mesmo jeito, com duas sérias de 4 fichas.

b) O terceiro problema é, por sua vez, um problema de repartição. Ele começa do mesmo jeito, com 4 fichas colocadas na caixa, mas em vez de acrescentar a mesma quantidade, pede-se aos alunos que repartam de maneira equitativa as quatro fichas entre dois personagens: "*eles tem de ter igual, tanto quanto, o mesmo número*". A repartição é materializada visualmente por dois envelopes, e, mais uma vez, a formulação e a esquematização encerram a atividade.

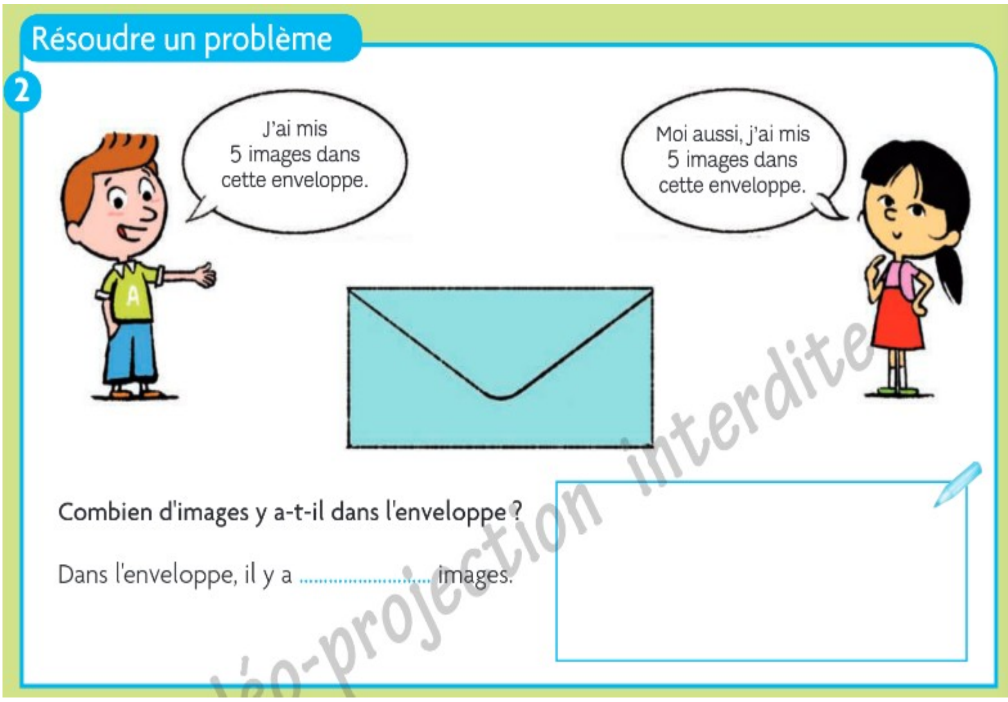


Illustration 7: Entraînement sur la première activité - manuel Cap Maths.

c) Após a fase coletiva, cujo suporte é visual, o livro propõe um problema escrito, no livro do aluno. O problema é estruturado do mesmo modo: objetos escondidos em um envelope e colocados em duas séries. Dessa vez, não há visualização dos depósitos, mas a narração deles por dois personagens que falam ao leitor. O caderno inclui espaço para o aluno esquematizar ou escrever a reflexão. Ele apresenta a frase de resposta para completar o espaço branco com o resultado. Após a reformulação da situação pelos alunos (“fazer relatar e explicar a situação pelos alunos”), o tempo acordado à pesquisa individual parece mais importante. De fato, o guia recomenda “uma partilha no mesmo dia ou no dia depois”.

Análise sucinta

Na fase (a) os objetos não são visíveis o tempo todo, o que torna necessário o cálculo, mas o suporte material tem um papel importante: os alunos veem a ação de acrescentar as fichas, o que favorece a construção de uma representação pessoal da situação. Os objetos usados são pouco contextualizados: são fichas e uma caixa. Pode-se considerar que são (para as fichas) um material didático especialmente usado em matemática, e provavelmente já usados no 1° ano. Os objetos são mostrados pelo professor e escondidos depois, para evitar a contagem direta e promover assim a busca de outros procedimentos, um método que *Cap Maths* parece usar repetidamente. Exceto adaptação especial ou durante a fase de verificação, as fichas não são manipuladas pelos alunos. O fato de partilhar as respostas ao nível coletivo e de corrigir juntos visa que todos alunos podem encontrar a resposta correta. É confirmado na segunda etapa, que apresenta o mesmo problema com a única mudança de números, mudança pequena a fim de que os procedimentos abordados anteriormente possam ser aplicados.

Além dos procedimentos de pesquisa e de cálculo, o objetivo parecer ser representativo (por linguagens e esquematização), pois a atividade não acaba com a validação do resultado mas com a formulação da relação entre os dados (2 séries de 3) e o resultado: “6 é o dobro de 3”, ilustrada por um esquema e escrita “3 + 3 = 6”. Portanto, o objetivo da atividade de descoberta não seria saber investigar o dobro de um algarismo (o guia menciona a competência “resolver problemas envolvendo o cálculo de dobros e de metades”), mas também saber usar a palavra “dobro”, a combinar a uma matematização sob a forma de adição e a uma esquematização.

Na fase (b) o problema de repartição é apresentado em paralelo aos problemas anteriores, o que facilita a compreensão da relação de proximidade entre dobro e metade. Da mesma forma, a situação final não é visível (“quantas fichas vai ter”), o que convida os alunos a representarem e a situação mentalmente, e/ou a representá-la por um esquema ou notas.

Durante a fase (c), os alunos são convidados a procurar individualmente a resposta, com base no que acabam de fazer. A situação tornou-se contextualizada pela presença de duas figuras e de objetos do cotidiano: um envelope e, sobretudo, imagens para contar. A ação já aconteceu, não se pode ver os objetos, mas o princípio é conservado de objetos num contentor fechado. Os números usados ainda acrescentam: começaram por 3, logo 4 e agora busca-se o dobro de 5.

Em resumo sobre a primeira abordagem, *Ápis*, *Nouveaux Outils* e *Cap Maths* propõem situações que podem ser resolvidas com os conhecimentos já disponíveis para os alunos. Para *Ápis*, embora o livro introduza a multiplicação como uma operação nova que resolveria situações novas, espera-se que os alunos respondam às perguntas com seus conhecimentos, isto é, pela adição iterada. Em seguida, a multiplicação é introduzida como uma "representação" possível para as adições de parcelas iguais (Ápis p. 135), mas as situações anteriores não são abordadas de novo para as "representar" com a multiplicação. Em *Nouveaux Outils*, a multiplicação oral é introduzida como formulação simplificada de uma adição de parcelas iguais anteriormente formulada pelos alunos, mas novamente, sem retomar o mesmo contexto nem retornar a ele. *Cap Maths* introduze a palavra "dobro" no caso de uma adição de duas parcelas iguais e convida os alunos a completar a sua formulação da adição por esse novo vocábulo e um esquema. *Cap Maths* tem também a particularidade de introduzir as situações recíprocas com a situação de repartição e a palavra "metade". Na primeira atividade, o livro *Buriti* parece querer ver o conhecimento dos estudantes, especialmente se eles já encontraram o símbolo ×.

3.4 Champ(s) de la multiplication

Lorsque l'on veut enseigner la multiplication, on voit ainsi que l'on peut faire découvrir et apprendre beaucoup de notions et de concepts en lien avec cette opération et son utilisation. De même, beaucoup d'apprentissages ultérieurs sont en lien avec l'acquisition de cette opération et, bien qu'elle « [n'apparaisse] explicitement qu'en CE1, [elle est], en fait, présente dès la maternelle » (Toromanoff 2018).

3.4.1 Différents aspects d'une même opération

Jean Toromanoff, qui est formateur des professeurs référents mathématiques de circonscription, définit quatre aspects pour une opération : son symbole (ou son signe) ; son sens (ce à quoi elle sert, les problèmes qu'elle permet de résoudre) ; sa ou ses techniques opératoires ; et son versant théorique, « savant » (ses définitions, ses propriétés et les relations qu'elle entretient avec d'autres concepts). Il indique l'« ordre classique de ces quatre aspects dans l'enseignement d'une opération à l'école » (Ibid.) :

> En général, quand on enseigne une opération, on commence par le sens (en tout cas une partie de ce sens). On donne des problèmes que cette opération permet de résoudre puis, très vite (trop vite, la plupart du temps), pour des raisons pratiques, on apporte le symbole, et enfin une technique opératoire. Technique qui finit (hélas) très souvent par être confondue avec l'opération elle-même, surtout si on impose « la » technique (experte… ou simplement habituelle !), à coup d'exercices nombreux et répétitifs (Ibid.).

Pour la multiplication, au contraire, on commencerait « toujours » par l'introduction du symbole × car il serait « absolument nécessaire » : Toromanoff indique que sauf en restant « au simple stade d'additions… itérées », la multiplication « *n'existe pas* si elle n'est pas écrite ». Déjà en 1978, Viennot et Artigue observaient que « la démarche suivie dans la plupart des manuels et brochures consacrés à la multiplication se présente de façon linéaire » et commence par l'introduction du signe ×. À l'époque, les auteures observaient que « l'apprentissage d'une technique opératoire et parallèlement du répertoire standard, à savoir la table de multiplication, [précédait] l'application de situations multiplicatives » (Viennot et Artigue 1978:43). Elles recommandaient alors « que les enfants manipulent le langage qu'ils ont construit et, expérimentalement, se forgent un modèle implicite de son fonctionnement » avant l'apprentissage d'une technique opératoire particulière qu'elles proposaient de repousser en milieu de CE2 (p. 44).

> Les mathématiques ne sont pas un langage, mais une connaissance. Il est clair cependant que le langage naturel et le symbolisme jouent un rôle essentiel dans l'activité mathématique et dans l'apprentissage des mathématiques (Vergnaud 1991, p. 79).

Le Tableau 3.4 présente l'ordre observé d'apprentissage de certains de ces aspects dans les manuels étudiés. Pour le manuel *Buriti,* on ne tient pas compte de l'apparition du symbole × lors de la première activité ni de l'évocation de la moitié juste après le double, puisque l'apprentissage explicite est envisagé par la suite. De même, le mot « multiplication » évoqué en titre de chapitre de certains manuels n'est pas pris en compte.

Tableau 3.4 : Ordre d'apprentissage des éléments du champ de la multiplication. « Multiplication » renvoie à l'évocation du nom même de l'opération mais « division » renvoie à l'approche de situations de partage ou de groupement.

Ápis	Division – multiplication – fois – × – tables – double – moitié
Buriti	Fois – × & multiplication – double – tables – division – moitié
Nouveaux Outils	Fois – × – multiplication – division – double & moitié – tables
Cap Maths	Double & moitié – division – fois – × – multiplication – tables

On constate que certaines progressions sont conservées : l'oralisation du calcul par le mot « fois » (*vezes*) précède dans les quatre manuels le symbole ×, avec lequel il est souvent mis en lien. De même, on observe que l'apprentissage du double précède celui de moitié mais ils ne sont pas toujours reliés. Dans trois manuels sur quatre, le mot « multiplication » n'est formulé qu'après un temps de travail sur les formulations d'opérations. Sans que cela n'apparaisse dans le tableau, les deux manuels brésiliens séparent l'étude de la moitié de celle du double, quand les manuels français les associent. Enfin, on remarque que l'approche des situations de partage et de groupements apparaît à un moment très variable selon les manuels.

3.4.2 Le champ conceptuel de la multiplication

Spécialiste de psychologie cognitive et de didactique, Gérard Vergnaud définit le champ conceptuel comme étant « un espace de problèmes ou de situations-problèmes dont le traitement implique des concepts et des procédures de plusieurs types en étroite connexion » (Vergnaud, cité par IA21 2011:12). Je réutilise cette notion en l'élargissant et en la croisant avec les aspects de Toromanoff afin de dresser la liste des notions, concepts et méthodes abordés dans les chapitres traitant de la multiplication et comparer leur traitement par les différents manuels.

Selon Vergnaud,

> La référence pour un psychologue cognitiviste, c'est d'abord le réel, et les situations dans lesquelles se joue la transformation des compétences et des conceptions du sujet.
>
> Le signifié, c'est les schèmes, et les invariants opératoires implicites sur lesquels ils reposent.
>
> Le signifiant, c'est la langue naturelle, et les autres symbolismes. (Vergnaud 1991:85)

3.4.3 Le « signifié » - le sens du concept pour le sujet

La construction du sens par l'élève, dans le cadre de la théorie des champs conceptuels de Gérard Vergnaud, est analysée par « sa relation aux situations et aux signifiants, c'est-à-dire les schèmes évoqués chez le sujet par ces situations ou ces signifiants » (Roditi 2016:16). L'objectif d'apprentissage est que devant un problème, le sujet puisse reconnaître si la situation lui permet d'utiliser ou non ses connaissances concernant le concept. Je ne peux ici analyser ni même décrire les schèmes, qui sont propres aux élèves, mais seulement les situations et les signifiants qui leur sont proposés dans les manuels.

3.4.4 Le « signifiant » - langage naturel et symbolismes

Le signifiant d'un concept est « l'ensemble des formes langagières et non langagières qui permettent de représenter symboliquement le concept, ses propriétés, les situations et les procédures de traitement » (Vergnaud 1990, cité par Reuter et al. 2013:35). Les signifiants ont une fonction de communication, une fonction calculatoire mais aussi une fonction d'accompagnement de la pensée (Roditi 2016:15). Ce sont d'ailleurs les fonctions du langage soulignées par le *Socle Commun* français qui intitule son premier domaine de formation « Les langages pour penser et communiquer ».

> Ce domaine permet l'accès à d'autres savoirs et à une culture rendant possible l'exercice de l'esprit critique ; il implique la maîtrise de codes, de règles, de systèmes de signes et de représentations. Il met en jeu des connaissances et des compétences qui sont sollicitées comme

> outils de pensée, de communication, d'expression et de travail et qui sont utilisées dans tous les champs du savoir et dans la plupart des activités (MEN 2015c:3).

Différentes formes de représentation se réfèrent à la multiplication. Pour certaines, l'usage est courant dans des situations de la vie quotidienne. Pour d'autres, l'usage est plus spécifique au calcul et à la résolution de problèmes et reste alors, pour beaucoup d'élèves et d'adultes, uniquement scolaire, alors même que l'enseignement des mathématiques vise à en faire un outil pour la pensée, qui permette la résolution de problèmes au-delà de l'école.

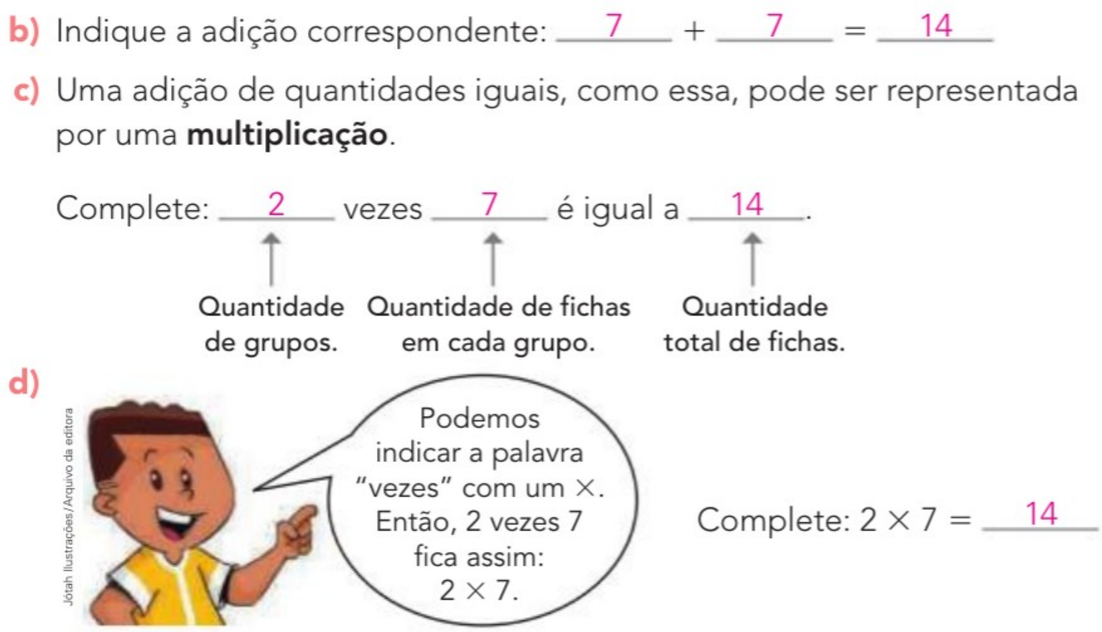
À l'instar de la contextualisation (voir 3.5), la construction de liens entre le langage mathématique et le langage courant favorise l'appropriation des codes du langage mathématique et par là l'appropriation des outils mathématiques. De la même façon, Stella Baruk souligne à propos du nombre que le savoir mathématique et le savoir socialisé « doivent coexister » et qu'il est important de « remettre constamment l'enfant en relation avec sa mémoire – *le lu, le vu, le su, l'entendu* » (2003, notes personnelles). L'usage des mots « fois » (*vezes*), « double » (*dobro*) et de « moitié » (*metade*) fait partie du langage courant, et ce dans des situations multiples de la vie quotidienne. Les manuels créent-ils des liens entre les nouveaux apprentissages liés à la multiplication et ces formulations de la vie courante ?

1) La multiplication orale

Dans les quatre manuels du corpus, l'utilisation du mot « ***fois*** **» («** ***vezes*** ») apparaît dans les premières formulations au cours de l'étude de la multiplication. C'est ce que j'appelle la multiplication du langage oral, ou plus rapidement la multiplication orale. Dans tous ces manuels, la multiplication orale précède l'introduction du symbolisme × à laquelle elle est reliée.

- Ápis : Après les situations introduisant les additions itérées, la partie Explorer et Découvrir (voir Illustration 8) établit le lien entre une addition de deux quantités égales et la multiplication, proposée comme une autre représentation. On remarque l'utilisation de flèches qui est intéressante pour favoriser la construction du sens de cette formulation, car elles relient le nombre à écrire à ce qu'il représente dans la situation (*nombre de groupes / nombre de jetons par groupe / quantité totale de jetons*). Sans

commentaire ou lien avec l'utilisation courante du mot « fois », il est remplacé juste après par le symbole ×, présenté par un personnage comme un équivalent.



b) Indique a adição correspondente: 7 + 7 = 14

c) Uma adição de quantidades iguais, como essa, pode ser representada por uma **multiplicação**.

Complete: 2 vezes 7 é igual a 14.

Quantidade de grupos. / Quantidade de fichas em cada grupo. / Quantidade total de fichas.

d)

Complete: 2 × 7 = 14

Illustration 8: Introduction de l'utilisation du mot "fois" et du symbole × - manuel Ápis p. 135.
« Une addition de quantités égales, comme celle-ci, peut être représentée par une multiplication.
On peut indiquer le mot « fois » avec un ×. Alors 2 fois 7 devient ainsi : 2 × 7 »

L'oralité de la formulation est présente dans des comptines proposées lors de l'approche du double et du triple (voir un exemple sur l'Illustration 11).

- Buriti : Dans ce manuel, l'utilisation du mot « fois » est avant tout orale, ce qui me paraît intéressant pour la construction du sens, puisqu'il s'agit d'une formulation orale. Lors d'une activité de calcul d'un total d'oiseaux disposés par deux sur trois décorations (activité 4 p. 97), le guide propose à l'enseignant de « faciliter le calcul » par les questions suivantes :

- *Combien de fois sont disposés les 2 oiseaux ? (3 fois).*
- *3 fois 2 oiseaux sont combien d'oiseaux ? (6 oiseaux).*

Ces questions étant proposées pour faciliter la résolution du problème, c'est bien qu'elles s'appuient sur du vocabulaire connu des apprenants, avec lequel ils sont familiarisés (dans leur vie quotidienne). C'est seulement pour l'introduction du symbole × (p. 100) qu'est écrit le mot « *vezes* ». Des flèches permettent de faire le parallèle entre la formulation orale et l'écriture symbolique de la multiplication, favorisant la compréhension de ce nouveau symbolisme, là aussi présenté comme un équivalent.

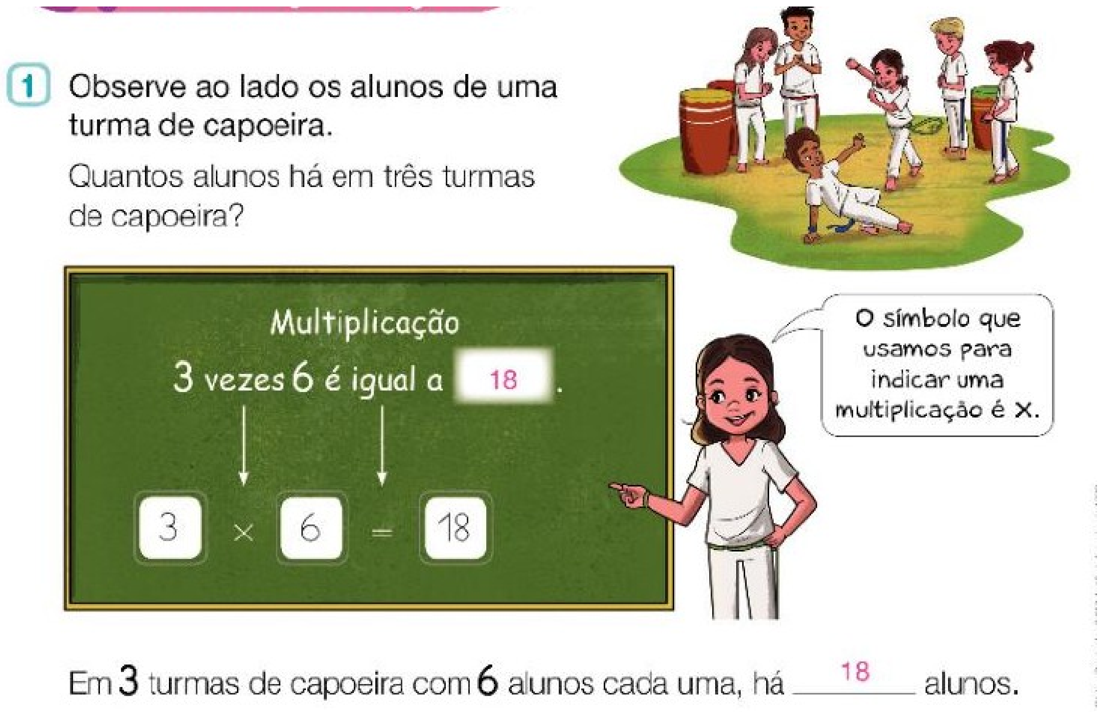


Illustration 9 : Introduction du symbole × - Manuel Buriti p. 100

« Observe à côté les élèves d'une classe de capoeira. Combien d'élèves y a-t-il dans trois classes de capoeira ?
Multiplication. 3 fois 6 est égal à...

Le symbole que nous utilisons pour indiquer une multiplication est × ».

<u>*- Nouveaux Outils*</u> : Comme on l'a vu, cette collection utilise la multiplication orale dès la première activité (Voir 5). Le mot « fois » est écrit dans la synthèse, en établissant le lien avec l'addition itérée, et en présentant une étape intermédiaire, de formulation orale, qui développe : « c'est 4 fois le nombre 3 », soulignant son usage courant.

<u>*- Cap Maths*</u> aborde l'usage de la formulation avec « fois » au sein d'une activité de calculs dictés (p. 56 du guide) comme simplification de l'appréhension d'additions itérées à l'oral. Comme dans le manuel *Buriti*, le sens de cette formulation est favorisé

par son usage oral premier. On constate, de plus, qu'elle permet de présenter l'intérêt de la multiplication comme simplification, orale, de la longueur d'une addition itérée. Ceci est une approche habituelle, mais les faits de ne pas employer le mot « multiplication » et d'utiliser le calcul dicté pour accentuer la difficulté des additions itérées et donc souligner le besoin de la nouvelle opération permettent une introduction très douce et porteuse de sens. Le symbole × est introduit quelque temps plus tard (p. 80) dans le même objectif de raccourcir les additions répétées de nombreuses fois.

Concernant les signifiants, les auteurs de *Nouveaux Outils* alertent les enseignants dans le guide sur les significations différentes de « 6 fois 4 » et « 4 fois 6 ». Ils justifient le fait de retarder l'approche de la notation × par le fait que sa lecture a une signification inverse à celle de « fois », ce qui contredit le parallélisme présenté dans les deux manuels brésiliens :

> Il est à noter que « mathématiquement », « 6 × 4 » se lit « 6 multiplié par 4 » et correspond au nombre 6 multiplié 4 fois, et donc à « 4 fois 6 ». […] Le signe sera introduit lorsque la propriété de commutativité de la multiplication aura été abordée (guide *Nouveaux Outils* p. 81)

De même chez *Buriti*, dans le deuxième chapitre traitant de cette opération, le guide interpelle l'enseignant sur le sens de lecture d'un produit.

> Indiquez que, dans ce contexte, il n'est pas adéquat d'écrire 3 × 4 = 12 et 2 × 4 = 8, bien que les résultats seraient égaux à ceux des multiplications 4 × 3 = 12 et 4 × 2 = 8, respectivement. En effet, fabriquer trois miroirs arrondis par jour pendant quatre jours est différent de fabriquer quatre miroirs arrondis par jour pendant trois jours (manuel *Buriti* p. 148 – voir Illustration 30 en Annexe).

Le guide du manuel *Cap Maths* présente, lui, une remarque préalable sur la formulation orale « multiplié par » (qui n'apparaît pas dans les manuels brésiliens) selon laquelle

> il peut être parfois préférable de ne pas utiliser le vocabulaire *mathématiquement correct* pour expliciter certaines procédures. […] L'expression *3 fois 5 c'est 2 fois 5 et encore 1 fois 5* sera certainement mieux comprise que l'expression *5 multiplié par 3 égale 5 multiplié par 2 plus 5 multiplié par 1* (Combier et al. 2016b:XXII)

Lors de l'introduction du symbole ×, la multiplication est

> d'emblée [posée] comme commutative et 5 × 6 (lu « 5 multiplié par 6 ») exprime aussi bien « 5 fois 5 » (ou 6 + 6 + 6 + 6 + 6) que « 6 fois 5 » (ou 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5) (Combier et al. 2016b:81)

et les auteurs préconisent ainsi l'utilisation des deux formules orales.

> – calcul éventuel de 8 × 5 ou de 5 × 8 avec la calculette.
> • Faire formuler les deux écritures multiplicatives sous la forme « 8 fois 5 ». La lecture « 8 multiplié par 5 » pour la première écriture ou « 5 multiplié par 8 » pour la seconde est également utilisée.

Illustration 10 : Souplesse sur les formulations orales - manuel Cap Maths p. 99

Certains manuels sont donc plus précis que d'autres sur les formulations mathématiques. De nombreux enseignants (qui, à ce degré, ne sont pas spécialistes des mathématiques) et certains élèves peuvent être décontenancés devant la variation de la précision des formulations. Il me semble qu'il serait cohérent que les élèves d'un même niveau de classe aient affaire aux mêmes exigences de précision, affinées ou non au fil des ans. Les manuels devraient alors porter le même niveau de précision, qui pourrait être réfléchi et défini par une communauté en amont.

2) **Le mot « multiplication »**

De la même manière, la première évocation du nom même de la multiplication ne semble pas toujours anticipée. On rappelle que dans la plupart des manuels, le mot « multiplication » apparaît dans le titre du chapitre qui lui est dédié. Le manuel *Cap Maths* est le seul à ne pas l'indiquer ainsi. Sans prendre en compte ce titre, l'utilisation de la multiplication orale et de son symbole précèdent, dans trois manuels, l'évocation de son propre nom. Comme on l'a vu en 2.3, le manuel brésilien *Ápis* présente le terme de multiplication dès la première situation pour indiquer à quoi l'opération peut servir, après la simple évocation du contexte (Voir 2). Dans le manuel *Buriti*, le mot « multiplication » apparaît de manière discrète lors de la présentation du symbole. La discrétion est également de mise pour *Nouveaux Outils :* après l'introduction du symbole page 88 (« cette opération s'écrit 3 × 4 ou 4 × 3 »), on demande ensuite à l'élève d'écrire « l'opération », puis à la page suivante, sans transition, d'écrire « la multiplication ». Chez *Cap maths*, malgré le détail des activités, l'introduction me paraît, elle aussi, très discrète. Après l'introduction de l'écriture multiplicative en correspondance avec le mot « fois », le mot « multiplier » apparaît pour la première fois, en titre, page 31 du fichier. L'activité similaire précédente s'intitule « Obtenir un nombre par addition répétée ». Finalement *Ápis* est le seul manuel à introduire explicitement le nom de l'opération.

3) Le double et la moitié

Autres liens avec le langage courant, le double et la moitié font partie des apprentissages de cette année d'enseignement. Comme on l'a vu, le manuel *Cap Maths* les aborde en tout premier (voir partie 3.3.4 et Tableau 3.4) mais dans une optique d'introduction de ce vocabulaire, c'est-à-dire comme si les élèves le découvraient pour la première fois. Si certains élèves peuvent formuler les mots avant l'enseignant, la situation ne mentionne pas de temps prévu pour cela, et n'est pas construite pour favoriser l'établissement de liens avec des emplois antérieurs de ces mots. Les autres manuels situent l'approche de ce vocabulaire vers la fin du chapitre, et même après les tables pour la collection *Ápis*. On peut donc considérer qu'ils ne se basent pas sur ces liens avec le langage courant pour construire le sens de la multiplication. Seul Ápis présente deux situations, visuelles, basées sur l'expérience réelle de moitié (voir Illustration 11).

Arrêtons-nous un instant sur la proposition du manuel *Buriti*. Curieusement, celui-ci présente deux fois le concept de moitié. Dans les pages traitant du double (unité 5, p. 103), deux activités le mentionnent alors. L'activité 4, pour la formulation d'une comparaison d'âge, permet d'accéder aux relations entre « deux fois », « double » et « moitié ». Le guide préconise alors de « vérifier les connaissances préalables que les élèves ont de la notion de moitié » (Ibid.). L'activité 5, selon les commentaires du guide, espère montrer que le double de la moitié revient au nombre de départ. Néanmoins la question porte sur le total de bananes achetées par les deux compères, donc pas du tout sur la relation entre « moitié » et « double ». L'introduction explicite du concept est elle située sur deux pages du chapitre 7 (Calculer avec les nombres naturels), logiquement traitée deux mois plus tard.

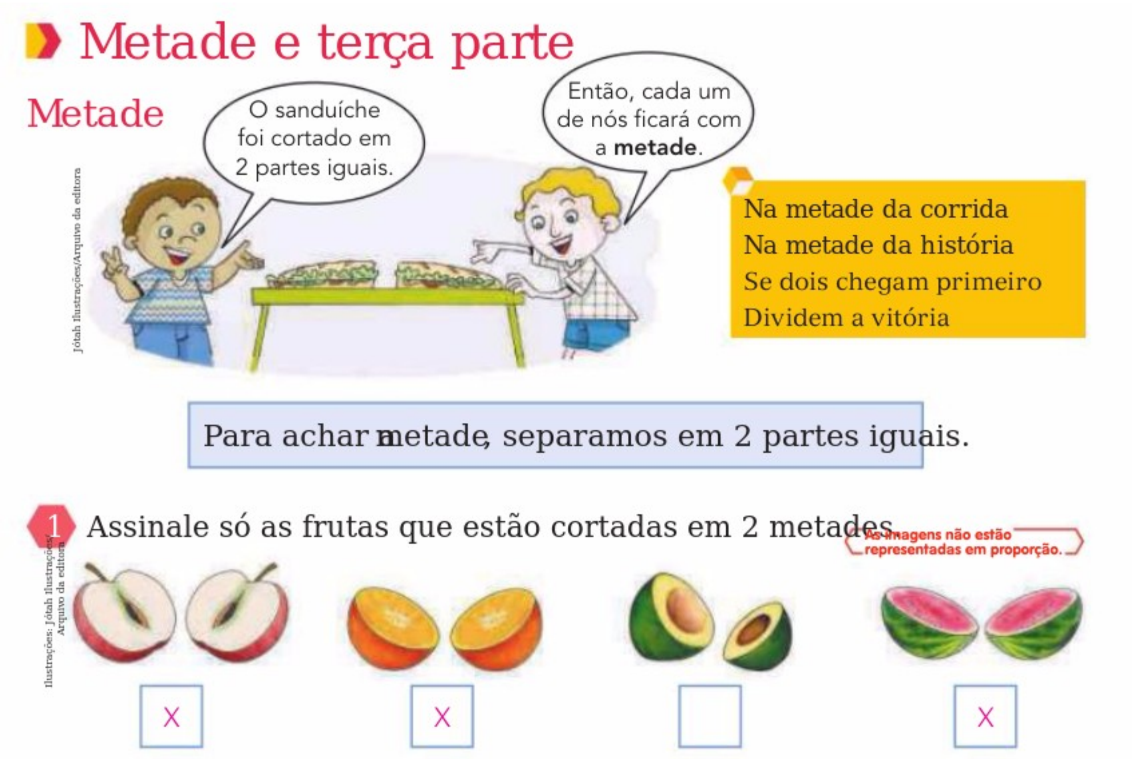


Illustration 11: Situations de moitié issues de l'expérience quotidienne, comptine et exemple d'apport théorique - manuel Apis p. 153

On peut se demander pourquoi le manuel propose l'étude systématique de la moitié aussi tard, alors que les auteurs ont vu l'intérêt de le relier au concept de double du chapitre 5 et de l'instancier dans l'unité 6 (Grandeurs et mesures) à propos de la répartition de liquide dans des bouteilles d'un demi-litre (*Desafio* p. 125). Peut-être que les auteurs sont contraints par des aspects formels (par exemple une taille limitée pour un chapitre), ce qui peut se comprendre. Il reste que la « discussion préalable à propos du mot moitié » proposée en fin d'année (p. 152) perd tout son intérêt. Il est en effet un peu tard pour indiquer à l'enseignant qu' « il est probable que l'idée de moitié est familière pour les élèves de ce niveau scolaire, en raison de son usage social », pour proposer de « vérifier ce qu'ils savent à propos du sujet, en demandant qu'ils donnent des exemples de situations dans lesquelles cette idée apparaît » et pour alerter les enseignants sur des théorèmes-en-acte courants : « il est commun [que les élèves] reconnaissent la moitié comme une distribution en deux parties, mais pas nécessairement en des parties égales » (Ibid.). Rappelons ici que cette récolte des représentations initiales a tout à fait sa place au cours d'une démarche constructiviste mais elle n'a d'intérêt que si elle intervient au début de l'approche commune du concept en question puisque son rôle est de permettre l’adaptation des activités et des formulations selon les représentations pré-existantes formulées.

3.4.5 La « référence » - les situations qui donnent du sens au concept

On a vu les trois types de situations mathématisées par la multiplication que Toromanoff présente comme moyens plus ou moins pertinents d’aborder l’opération : les configurations rectangulaires, les choix réitérés (ou assortiments) et les situations pouvant être modélisées par des additions itérées (revoir p. 24). Viennot et Artigue en distinguent deux : l’écriture réduite d’additions répétées et la situation de « mesure-produit » (1978:48). Néanmoins ces distinctions ne représentent pas réellement une classification, puisque les additions itérées relèvent de la stratégie de résolution et de la formulation mathématique tandis que les configurations rectangulaires relèvent de la structure de la situation elle-même.

Vergnaud a construit une catégorisation des problèmes de structure multiplicative, qu’on pourrait qualifier d’exhaustive. Une classe de situations y est définie par la « structure mathématique de la relation ou des relations qui permettent de l’analyser » (Vergnaud 1989:48). Deux situations font donc partie de la même classe si elles appellent le sujet à les traiter de la même manière. Cette typologie est présentée dans le Tableau 3.5. Toutes les classes de situations qu’il y décrit ne sont pas traitées à l’école primaire. Certaines le sont avant même le CE1, mais de manière plus implicite.

Dans leur recherche sur la résolution des problèmes de proportionnalité au CM2, Levain et Vergnaud reconnaissent que « la proportionnalité est probablement l’un des domaines des mathématiques le[s] plus nécessaire[s] dans la vie. […] On en reconnaît aussi la difficulté, sans toujours voir suffisamment qu'il existe aussi des raisonnements proportionnels relativement précoces chez les élèves » (1994:65). Les auteurs rapportent l’observation de Françoise Tourniaire :

> dès huit ou neuf ans 50% des élèves réussissent des problèmes simples de type recherche d'une quatrième proportionnelle, lorsque le domaine de référence est familier et que les nombres sont petits et entiers. Même si les stratégies utilisées sont souvent de type «addition itérée», elles n'en respectent pas moins la structure de proportion du problème (1986, citée p. 55).

L’enjeu pour les élèves est donc de dépasser les stratégies additives. Comme *Cap Maths* use du calcul dicté pour accentuer la lourdeur des additions itérées, les auteurs de certains manuels ont réfléchi à des paramètres didactiques qui facilitent ce dépassement.

Tableau 3.5 : Typologie de Vergnaud des situations de structure multiplicative. D’après (Charnay et Mante 2014:246-49; Fénichel et Pfaff 2005; Levain et Vergnaud 1994:58-60)

<table>
<tr><td>1. Proportion simple avec présence de l’unité
a) Problèmes de multiplication :
recherche du total
b) Problèmes de division-partition :
recherche de la valeur d’une part
c) Problèmes de division-quotition :
recherche du nombre de parts</td><td>1 | c
b | ?

1 | ?
b | d

1 | c
? | d</td><td rowspan="2">Relation quaternaire</td><td rowspan="2">2 espaces de mesure</td></tr>
<tr><td>2. Proportion simple sans présence de l’unité :
recherche d’une quatrième proportionnelle</td><td>a | c
b | ?</td></tr>
<tr><td>3. Problèmes du type n fois plus ou n fois moins :
problèmes de comparaison</td><td>a
b</td><td rowspan="2">Relation ternaire</td><td>1 espace de mesure</td></tr>
<tr><td>4. Produit de mesures
a) Problèmes de multiplication :
recherche du produit
b) Problèmes de division :
recherche d’une des mesures</td><td>a, b
→ f(a, b) ?

a, f(a,b)
→ b ?</td><td rowspan="3">3 espaces de mesure</td></tr>
<tr><td>5. Proportion double
a) Division-partition
b) Division-quotition</td><td>a | (c, e)
b | (d, f)</td><td></td></tr>
<tr><td>6. Proportion simple composée
a) Multiplication
b) Division-partition
c) Division-quotition</td><td>a | c | e
b | d | f</td><td></td></tr>
</table>

Il semble que, chez Vergnaud, les configurations rectangulaires et les choix cartésiens soient regroupés dans la même classe des produits de mesures car ils feraient partie de ce que Bertin appelle les « nombres rectangulaires » (Bertin 2012:4). Pour mieux considérer ce regroupement, on peut se rappeler qu’une situation d’assortiment peut être représentée par un tableau à double entrée, le nombre de possibilités correspondant au nombre de cases. Dans mon recueil de données, j’ai toutefois préféré les séparer, car les dispositions rectangulaires me paraissent dotées d’un aspect visuel (même si uniquement mental) qui influence leur mathématisation et que ne détiennent pas directement les situations de choix cartésien. Quant aux situations modélisables par des additions itérées, décrites par Toromanoff, Viennot et Artigue pour introduire la multiplication, elles relèvent généralement de la proportion simple, mais elles sont aussi une stratégie de résolution pour les situations de produit de mesures.

Quelle variété de structures multiplicatives les manuels proposent-ils pour cette année de premières formalisations de l'opération ? Pour répondre à cette question, j'ai codé la structure de chaque question de calcul (ou d'élaboration et explication de stratégie). La Figure 1, construite à partir de ces codages, présente la répartition quantitative des structures proposées par rapport à l'ensemble des consignes du manuel.

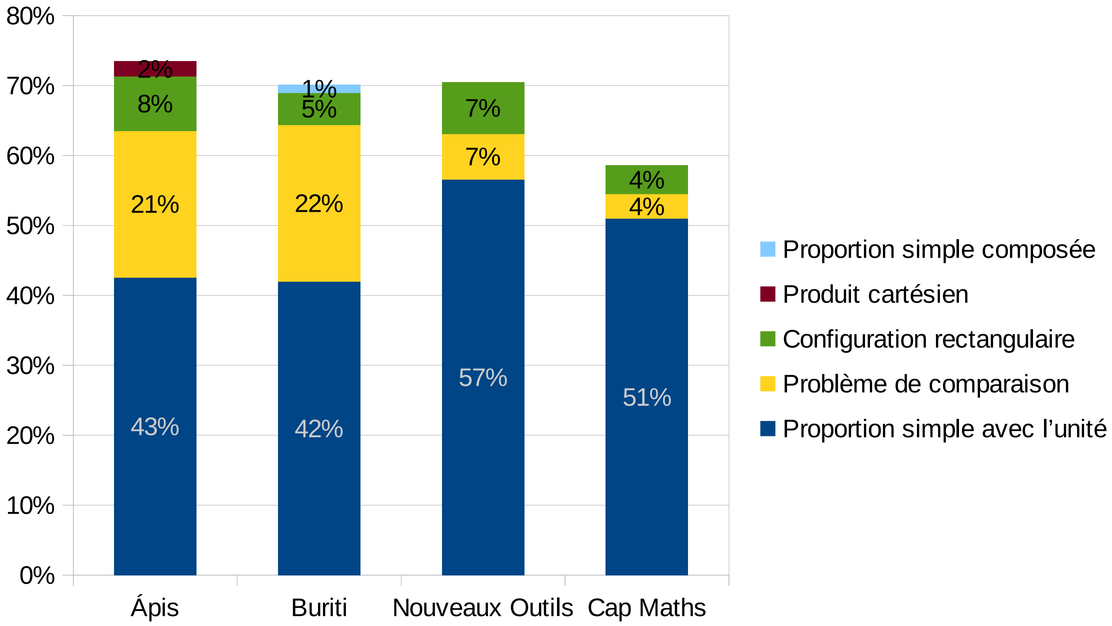


Figure 1: Part des différentes structures multiplicatives dans les consignes de chaque manuel.

Il apparaît nettement que les situations de proportion simple sont majoritaires, et ce dans les quatre manuels. Les situations de configuration rectangulaire se retrouvent étonnamment peu nombreuses. Ces configurations permettent pourtant d'expérimenter facilement (et de constater) la commutativité de la multiplication. Dans le manuel *Ápis* par exemple, la mathématisation d'une quantité de boutons organisés en rectangle est opérée de manière identique deux fois de suite, considérant les lignes puis les colonnes pour observer l'égalité des résultats, après avoir précisé l'ordre des facteurs dans la situation précédente, de proportion simple (voir Illustration 13). Rappelons que l’inconvénient majeur de ces situations est que l’apprenant peut ne pas avoir besoin de calcul et ne faire que compter les quantités présentées. Certaines astuces didactiques peuvent souligner l’intérêt de la multiplication comme masquer une partie du rectangle, le présenter incomplet ou le décrire sans le présenter. Seul *Cap Maths* présente de telles situations (voir un exemple dans l’Illustration 14), les configurations rectangulaires des autres manuels pouvant être résolues par comptage.

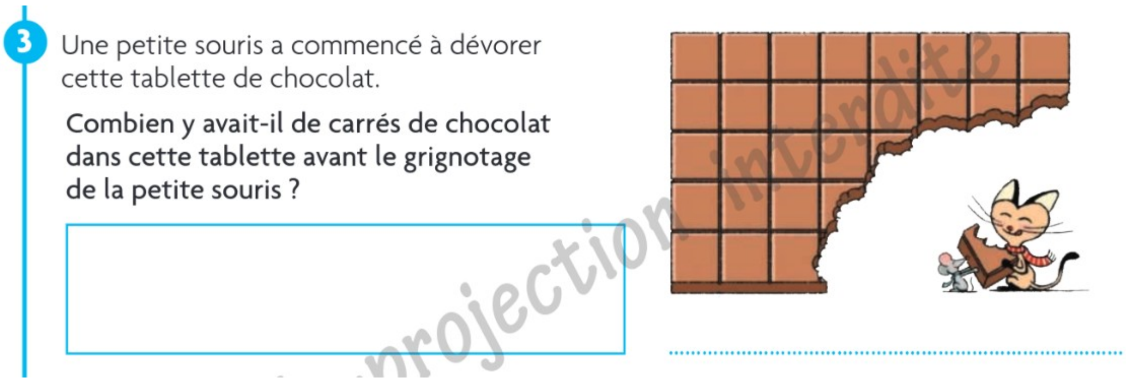


Illustration 12: Configuration rectangulaire sans comptage - manuel Cap Maths p. 42

Les problèmes de comparaison représentent la seconde plus grande part, essentiellement alimentée par l’étude du double et de la moitié (et le triple et tiers pour les manuels brésiliens), qui n’est pas particulièrement abordée dans *Nouveaux Outils*. La plupart des calculs non contextualisés ne permettent pas d’établir une structure mais selon la formulation, certains calculs de double et de moitié non contextualisés sont néanmoins comptés comme problèmes de comparaison. En effet, les mots mêmes suggèrent une comparaison multiplicative.


representadas em proporção.

2 Observe como os botões ao lado estão dispostos (em linhas e colunas).
Aqui podemos registrar 2 multiplicações correspondentes. Complete.

a) São 4 linhas e 5 botões em cada linha.

São 20 botões no total.

Com desenhos:

Adição: 5 + 5 + 5 + 5 = 20

Multiplicação: 4 × 5 = 20

b) São 5 colunas e 4 botões em cada coluna.

São 20 botões no total.

Com desenhos:

Adição: 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 20 Multiplicação: 5 × 4 = 20

Illustration 13: Observation de la commutativité dans une configuration rectangulaire - manuel Apis p. 136

Le manuel *Buriti* se distingue par la présence de deux problèmes pour lesquels trois espaces de mesures interviennent : l’un est structuré selon une proportion simple composée (voir Illustration 15 dont la question est posée à partir de la situation de l’Illustration 14) et l’autre selon une proportion double (lien entre le nombre de jours, le nombre de miroirs par jour et le nombre de miroirs p. 148). Ainsi une réflexion supplémentaire est nécessaire pour ces deux problèmes, notamment pour les œufs des poules, qui n’est pas forcément évidente en CE1.

Problema 1

No sítio do vovô João, as galinhas botaram, ao todo, 28 ovos em um só dia. Cada galinha botou 2 ovos. Quantas galinhas há no sítio do vovô João?

No sítio do vovô João, há 14 galinhas.

Illustration 14: Situation de proportion simple - manuel Buriti p. 158

À la ferme du vieux João, les poules ont pondu, en tout, 28 œufs en un seul jour. Chaque poule a pondu 2 œufs. Combien de poules y a-t-il à la ferme du vieux João ?

No *Problema 1*, se as galinhas botassem ao todo os 28 ovos em 2 dias e cada galinha botasse apenas 1 ovo por dia, mudaria a quantidade de galinhas que há no sítio? Não.

- Converse com um colega sobre como cada um pensou para responder a essa questão. Resposta pessoal.

Illustration 15: Situation de proportion simple composée - manuel Buriti p. 159

Dans le problème 1, si les poules pondaient en tout les 28 œufs en 2 jours et chaque poule pondait seulement 1 œuf par jour, cela changerait-il la quantité de poules à la ferme ?

Échange avec un camarade sur ce que chacun a pensé pour répondre à cette question.

Ápis est le seul manuel à présenter des situations de choix cartésien. On a observé l’une en entrée dans le chapitre ; la seconde figure sur la même page, avec les autres situations de proportion simple.

Le manuel *Cap Maths* présente une part plus faible de situations structurées. Le manuel présente effectivement plus de consignes sans structure mathématique définie, notamment de nombreuses consignes non contextualisées, comme nous le verrons dans le chapitre suivant. Si l'on observe les quantités absolues, *Cap Maths* est en réalité le manuel qui propose le plus de consignes pour la proportion simple (avec unité) et il propose autant de configurations rectangulaires que les autres. *Ápis* est le manuel qui propose le plus de situations comparatives différentes. Finalement, les deux manuels brésiliens sont ceux présentant le plus de structures différentes au fil du manuel.

Les structures multiplicatives rassemblent des situations résolues par une multiplication et des situations réciproques, résolues de manière experte par une division.

3.4.6 L'approche de la réciprocité avec les situations de partage

La proposition d'activités cognitives relevant d'un raisonnement inverse à la multiplication est très variable selon les manuels. Les multiplications à trous proposées par les manuels (excepté *Ápis*), jouent le rôle d'intermédiaires entre la multiplication et la division, en permettant de déclencher un raisonnement inverse chez l'élève tout en restant dans son champ de connaissance. Qu'il utilise des résultats mémorisés de la table de multiplication ou qu'il doive les retrouver par le raisonnement, l'élève doit penser le calcul différemment de celui d'un total. Et lorsque ces multiplications ne sont pas écrites, l'élève est amené à formuler lui-même le calcul qui lui permettra de répondre ou de justifier sa réponse. Ce mouvement cognitif inversé concerne donc à la fois les questions de multiplication « à trous », appelant à chercher un facteur, et parfois même les deux facteurs, et les questions de calcul de parts et de nombre de parts lors d'un partage ou d'un groupement.

En 1978, Viennot et Artigue considéraient qu'il valait mieux ne pas

> séparer artificiellement multiplication et division, [mais] au contraire mettre l'accent sur la réciprocité des opérations et introduire tôt un langage qui donne à l'élève les moyens de le faire, ce qui doit faciliter l'utilisation des transformations inverses au niveau des schémas relationnels. C'est pourquoi nous nous proposons d'introduire cette année dès le CE1, un symbole « : » pour la division avec le sens suivant : a : b = c si et seulement si a = b × c et si le besoin en est ressenti par les enfants une notation pour la division euclidienne (Viennot et Artigue 1978:44)

De même elles précisaient préférer « aborder la division dans le cas général, où le reste [peut ne] pas être nul » (Ibid.). Qu'en est-il de cette réciprocité dans les manuels ? Introduisent-ils également la division avec son symbole dès le CE1 ?

Si la réciprocité des transformations est explicitée et utilisée par certains manuels au sein des activités concernant le double et la moitié, le tiers et le triple, elle n'est pas extrapolée pour toute division et toute multiplication. Dans le manuel *Cap Maths*, l'alternance des raisonnements réciproques est fréquente et recherchée : la moitié est abordée avec le double, les groupements sont approchés par le calcul du total (multiplication) tout comme par le calcul des parts (division partition et quotition), et les situations de partage sont résolues entre autres par des multiplications approchées. Pour les autres manuels, le lien entre les raisonnements est moins explicitement étudié. Lorsque les deux manuels brésiliens proposent des suites logiques à compléter, dont certaines sont organisées selon un rapport multiplicatif, les élèves effectuent vraisemblablement une multiplication « à trou » pour trouver le schéma logique, puis une multiplication pour la compléter, mais aucune réciprocité n'est explicitée. En dehors de ces situations, les opérations réciproques sont séparées pour leur étude. Il en est de même dans *Nouveaux Outils*. La division est certes introduite comme autre notation du rapport multiplicatif entre les trois nombres considérés, mais elle est traitée dans une double-page séparée sur laquelle aucun calcul de total n'est demandé. Même sur les pages de révision, les deux sens de relation interviennent de manière séparée.

Le Tableau 3.6 et la Figure 2 résument l'approche de la division dans les manuels étudiés. On peut y décerner de nombreuses différences qualitatives et quantitatives sur l'approche de la division au CE1. Seul le manuel français *Nouveaux Outils* présente le nom et l'écriture symbolique de la division, ainsi qu'un lien formel avec la multiplication (Illustration 16). Cet apport théorique intervient, comme habituellement dans ce manuel, dès le début de son approche après une activité introductive. Il y présente simultanément les objectifs des deux types de division, ce qui permet de les mettre en parallèle et de les distinguer, et propose ensuite alternativement des problèmes de partage et de groupement, qui figurent donc en proportions égales.

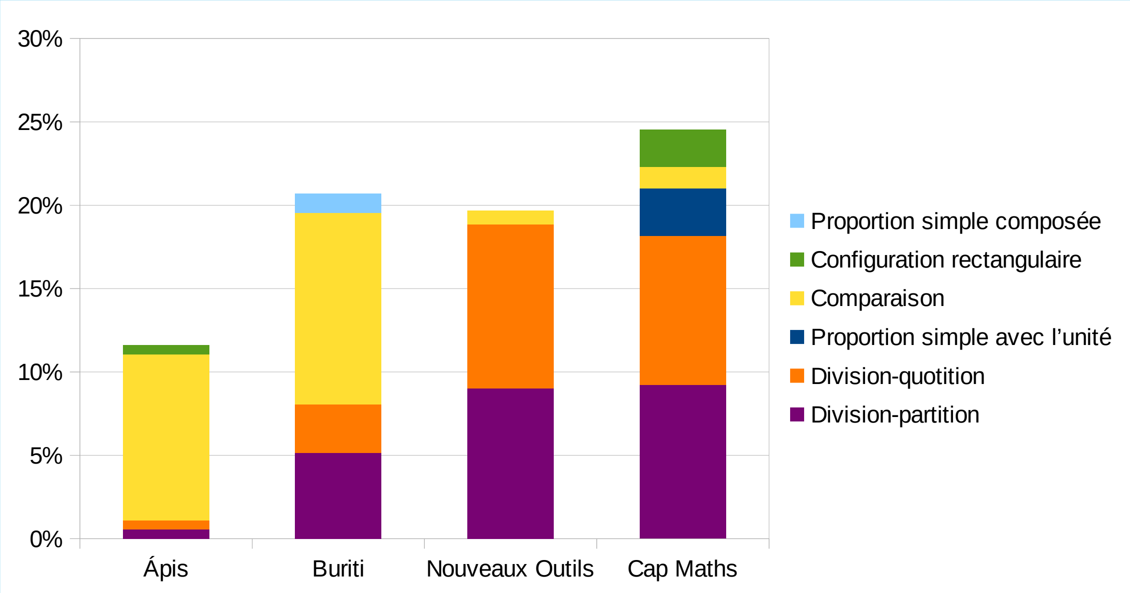


Figure 2: Structure des consignes résolues par un raisonnement divisif

Le manuel *Ápis* est celui qui propose le moins de situations mettant en œuvre un raisonnement inverse à la multiplication. On peut observer sur la Figure 2 que, comme pour Buriti, la majeure partie de l'activité « divisive » attendue relève de la comparaison à travers l'étude de la moitié et donc du partage d'une quantité ou d'un objet en deux. En dehors de l'étude de la moitié n'apparaît qu'une situation de groupement dans le chapitre « Addition », c'est-à-dire avant toute étude de la multiplication, et une situation de partage, en deux, dans le chapitre « Nombres jusqu'à 100 » (p. 213). Au décours de cette dernière, le guide précise qu'il vise à travailler « intuitivement avec l'idée de la division de répartir en parties égales, que les élèves étudieront » en 3° ano (guide *Ápis*, p. 213).

Sur la Figure 2, on observe que *Buriti* propose plus de division-partition (pour lesquelles le nombre de parts est connu) que de groupements (pour lesquelles le nombre de parts est à chercher). Le manuel *Buriti* propose en effet quelques situations de groupements sans accompagnement spécifique de leur résolution, qui est possible avec les connaissances et outils connus des élèves. Une double-page sur la « distribution » permet la résolution accompagnée de situations de partage, dont l'une avec reste. Au sein de ces situations de structure divisive, l'une est à résoudre par une multiplication puisque le nombre recherché est le total avant la distribution. Dans sa situation de proportion simple composée, j'ai considéré qu'il y avait également un calcul divisif ; il est, sans surprise, le seul à présenter cette structure. *Buriti* semble donc vouloir montrer le lien entre multiplication et division de manière implicite, préparant le terrain pour l'année suivante.

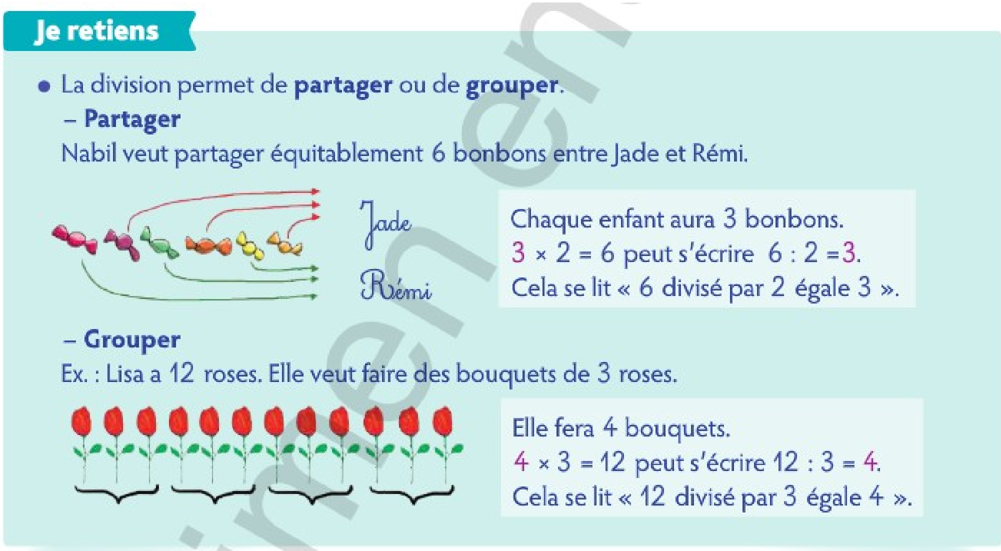


Illustration 16: Découverte de la division - manuel Nouveaux Outils p. 92

Préparer le terrain, c'est essentiellement ce que font les auteurs de *Cap Maths* en proposant de nombreuses situations de partage et de groupement dont la résolution est discutée en classe après des temps de recherche, ce qui favorise l'établissement de stratégies personnelles. Sur la Figure 2 apparaissent des situations de proportion simple avec unité pour lesquelles je n'ai pas pu déterminer le type de division. Il s'agit d'activités de recherche des deux facteurs d'une multiplication (Illustration 17) qui amène donc l'élève à la recherche de plusieurs solutions possibles.

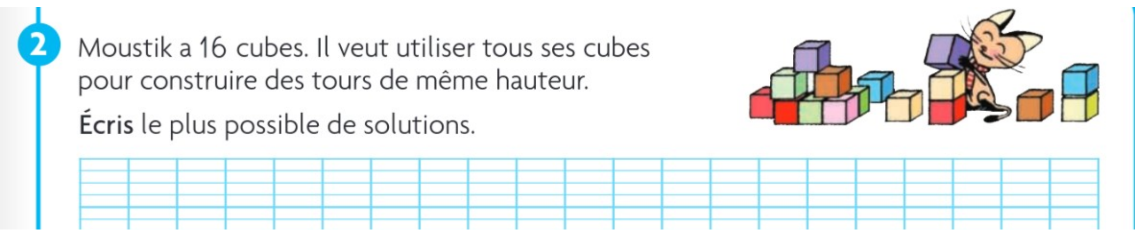


Illustration 17: Recherche des deux facteurs d'une multiplication (proportion simple) - manuel Cap Maths p. 43

> Nous avons fait le choix de ne pas formaliser immédiatement la division, mais de mettre en place les éléments qui permettront qu'elle soit comprise au CE2 (notamment en instituant alors la relation avec la multiplication) (Guide *Cap Maths*, p. 249).

Parmi les méthodes attendues, les essais d'addition itérée et de multiplication évoquent néanmoins une mise en relation entre les deux transformations. De même, la vérification des résultats, au départ uniquement expérimentale par manipulation du matériel, se complète par ces deux calculs (Guide *Cap Maths*, p. 268). *Cap Maths* est également le seul manuel à présenter des situations de groupement-échanges. Fonctionnant en parallèle des situations typiques d'apprentissage de la numération décimale, ces situations représentent des cas de division avec reste et peuvent être manipulables.

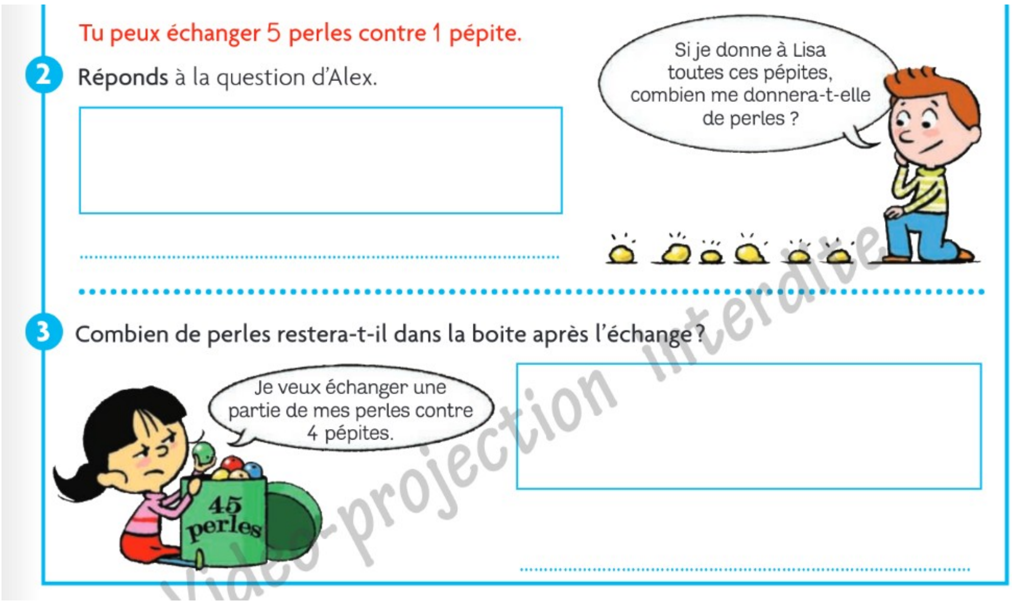


Illustration 18: Une situation de division basée sur des groupements et des échanges - manuel Cap Maths p. 79

Tableau 3.6 : L'approche de la division dans les manuels.

	Situations	**Reste non nul**	**Lien avec la multiplication**
Ápis	Distribution Moitié et tiers	Non	Justification de la moitié par multiplication par 2 (p. 153)
Buriti	Distribution Moitié et tiers	1	Une situation de distribution dont on calcule le total parmi les autres situations de distribution. Relation inverse avec le double et le triple.
Nouveaux Outils	Partage et groupement alternés (p. 92-93)	Non	Écritures équivalentes : « 3 × 2 = 6 peut s'écrire 6 : 2 = 3. Cela se lit *6 divisé par 2 égale 3* »
Cap Maths	Partage et groupement séparés, échanges (p. 3,6 et 249, 251)	4	Vérification de résultats de partage par la multiplication, activités de raisonnements réciproques (ex : Illustration 6)

Au total, *Cap Maths* est le manuel présentant le plus de situations de « division ». Elles y sont également plus variées et plus en lien avec la multiplication.

Selon Vergnaud, la structure mathématique n’est qu’un des nombreux facteurs de complexité d’un problème, et une classe de situations est définie « en second lieu par le domaine d’expérience physique, technologique, économique ou social dans lequel cette structure est instanciée » (1989:48). Il évoque notamment l’importance de « la plus ou moins grande familiarité du domaine de référence de l’énoncé ou éventuellement de l’ordre de présentation des informations » (Levain et Vergnaud 1994:56) et leur forme (1989:49). Il faudrait ensuite affiner la classification en fonction des valeurs numériques car celles-ci jouent « un rôle très important […] dans l’émergence de nouveaux savoirs, mais aussi dans le traitement par l’adulte (ou par l’élève-expert) d’un même problème » (Vergnaud 1989:49). Néanmoins les choix de valeurs numériques ont une telle importance didactique qu’elle constituerait aisément une analyse entièrement dédiée, j’ai donc choisi de ne pas les étudier. Je présenterai les formes des données proposées dans les manuels en 3.6.1 et je propose de se pencher à présent sur la contextualisation. De celle-ci dépend la familiarité de l’élève avec le domaine de référence de l’énoncé et le développement de sa compétence à utiliser les outils mathématiques en contexte.

3.5 Contextualisation

La contextualisation est une « suggestion méthodologique pour l'enseignement des mathématiques » (Santos 2011, mentionné par Reis et Nehring 2017:348), ici entendue comme la présentation d'éléments extérieurs au champ d'apprentissage en cours, à partir desquels est posée une ou plusieurs questions mathématiques. Certaines questions ne font pas référence à d'autres éléments que le concept mathématique en cours d'acquisition (ici, la multiplication) et ceux auxquels il est intimement lié (l'addition et la numération décimale par exemple) et ne sont donc pas contextualisées. Les données sont uniquement numériques, et l'activité du sujet, indépendante de ses autres expériences et connaissances, est centrée sur une activité numérique et calculatoire. Dès lors qu'une question se réfère à un contexte, les nombres en jeu pour sa résolution (les données) représentent chacun quelque chose de particulier dans ce contexte. L'activité mathématique de l'apprenant ne traite donc pas seulement de nombres mais également du sens singulier qui est attribué à chacun par le contexte. De plus, la contextualisation permet d'enrichir l'éducation des apprenants en abordant de nombreuses thématiques. Ainsi, Vieira souligne que les directives officielles pour l'Éducation Mathématique au Brésil se soucient fortement de « la répercussion sociale de l'apprentissage scolaire », réfléchissant aux thèmes abordés afin d' « insérer l'approche des contenus dans un contexte plus large que sa logique et ses résultats spécifiques » (Vieira 2004:11).

Le Tableau 3.7 présente pour chaque manuel le nombre de consignes qui ne comportent aucun contexte et le taux de contextualisation correspondant.

Tableau 3.7: Taux de contextualisation initial des différents manuels.

	Ápis	***Buriti***	***Nouveaux Outils***	***Cap Maths***
Nombre de consignes	181	174	122	314
Nombre de consignes sans contexte	46	35	37	153
Taux de contextualisation des consignes	74,6%	79,9%	69,7%	51,3%

On observe que ce taux varie significativement entre les manuels étudiés, puisque le manuel *Cap Maths* ne présente un contexte que pour la moitié de ses consignes tandis qu'au moins trois quarts des consignes des manuels brésiliens en comportent. Le contexte influe sur l'activité cognitive, et cette influence varie selon l'usage qu'il en est fait.

3.5.1 Des usages d’un contexte dans une question mathématique

La contextualisation d’une question mathématique peut n’être qu’un simple « habillage » (Coquin-Viennot, in Durpaire et al. 2008:90) de celle-ci par du réel, destiné à susciter l’intérêt de l’apprenant, à favoriser son entrée dans le problème et sa représentation personnelle de celui-ci. Mais ses liens avec le réel peuvent être également une nécessité, lorsque, par exemple, la question mathématique est posée par le contexte lui-même (et non pas seulement *à propos* de celui-ci). Ainsi, les questions de rendu de monnaie nécessitent additions et éventuelle soustraction dont les résultats sont utiles à l’action, contrairement au dénombrement de collections d’objets du quotidien de l’enfant.

La contextualisation « nécessaire » me paraît particulièrement intéressante dans l’apprentissage, en le faisant se rapprocher d’un apprentissage par problèmes ou en le plaçant dans le cadre de projets, car le contexte favorise ainsi la compréhension de l’intérêt du calcul et de son choix, et motive d’autant plus la résolution qu’elle est nécessaire. Un tel problème aurait tout son intérêt dans l’introduction d’un concept. Telle l’approche actionnelle pour l’apprentissage des langues, le calcul est alors un outil demandé *par* et *pour* l’action, et le contexte n’est plus seulement un prétexte pour un calcul didactisé. De fait, si l’intérêt de la contextualisation de l’enseignement mathématique a été relevé par de nombreux travaux, Nesher (1980, citée par Coquin-Viennot in Durpaire et al. 2008, p. 86) oppose les problèmes scolaires aux problèmes quantitatifs de la vie réelle. Elle décrit les modifications sémantiques, référentielles et stylistiques qui font des énoncés de l’école « un type de texte vraiment spécial qui ne peut être considéré comme une description de la vie réelle » (Ibid.). Un problème issu de la vie réelle peut être transposé en problème scolaire, moyennant généralement des simplifications, tandis qu’un problème scolaire peut être plongé dans une situation plus réelle, entouré d’une histoire concrète et familière pour le rendre « plus motivant, plus concret, plus familier, mais [ce] déguisement ne modifie pas les caractéristiques du problème » (Coquin-Viennot in Durpaire et al. 2008:88). Certains auteurs montrent néanmoins que les « tentatives d’application interviennent souvent de manière artificielle, avec des énoncés étendus et inutiles aux activités, qui apparaissent à peine pour informer des données à utiliser, de sorte que leur absence n’affecte en rien la résolution de l’activité » (Souza 2014:19).

Danièle Coquin-Viennot, en se référant aux « World Problems » et « Word Problems » de Gerofsky (1996, cité par Coquin-Viennot in Durpaire et al. 2008:87), souligne que les problèmes de l'école, stéréotypés, activent des automatismes et qu'ils ne font pas réfléchir. Les problèmes de la vie réelle, eux, sont multiformes et demandent de repérer la part arithmétique. Toutefois, problèmes scolaires et problèmes de la vie courante « correspondent à des objectifs différents pour le maître et à des activités différentes pour les élèves ». On peut les considérer destinés respectivement à « exercer des routines de résolution » et à s'entraîner à « modéliser et arithmétiser une situation » (Fayol, Thévenot & Devidal 2005 cités p. 87). Coquin-Viennot en conclut donc que les deux types sont nécessaires (in Durpaire et al. 2008:89).

La question de la contextualisation des questions proposées par les manuels de mathématiques correspond donc à celle des liens entre les mathématiques scolaires et la réalité extra-mathématique. Quelle est la nature de ces liens et quelle est leur direction ?

3.5.2 De la nécessité de retourner vers le contexte

Pour la construction du sens d'un concept, il y a, nous l'avons vu, nécessité d'allers-retours entre le réel et ses représentations, entre le concret et l'abstrait, comme le préconise le programme français :

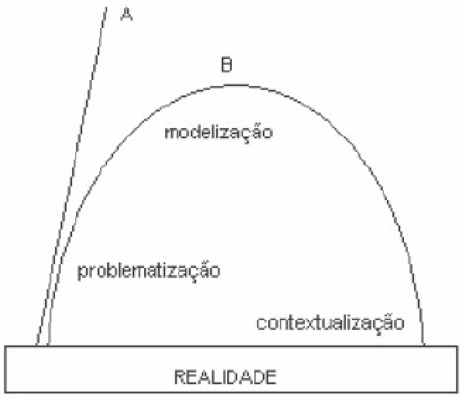
> Le lien entre familiarisation pratique et élaboration conceptuelle est toujours à construire et reconstruire, dans les deux sens (MEN 2015b:5).

Dans leur méta-analyse de recherches traitant du concept de contextualisation, Reis et Nehring montrent que la LDB souligne que c'est justement

> dans la dynamique de contextualisation/décontextualisation que l'élève construit la connaissance avec du sens, en s'identifiant avec les situations qui lui sont présentées, que ce soit en contexte scolaire ou dans l'exercice de sa pleine citoyenneté. La contextualisation ne peut se faire de manière *naïve*[22], étant donné qu'elle est fondamentale pour les apprentissages. […] La contextualisation n'apparaît pas comme une manière d' « illustrer » l'énoncé d'un problème, mais comme un moyen de donner du sens à la connaissance mathématique à l'école (Brasil 2006 cité par Reis et Nehring 2017:340).

22 Le texte d'origine utilise l'adjectif *ingênuo* pour qualifier cette manière, ce qui pourrait autrement se traduire par *simple*.

En effet, selon Ricardo, si l’on ne comprend la contextualisation que comme l’approche de concepts qui part de la réalité, la finalité est « la connaissance scientifique scolaire systématisée en situations didactiques excessivement artificielles » (Ricardo 2005 cité par Reis et Nehring 2017:343). Le contexte ne constitue alors qu’un prétexte d’introduction et l’apprentissage est « restreint au développement des procédures, c’est-à-dire à des questions internes aux mathématiques » (Reis et Nehring 2017:343). C’est la situation représentée par la courbe A de l’Illustration 19.



Fonte: RICARDO, 2005, p. 239

Illustration 19: Schéma de Ricardo (2005) présenté par Reis et Nehring 2017, p. 343

RÉALITÉ – problématisation – modélisation – contextualisation.

Au contraire, lors de l’application de connaissances mathématiques à un contexte (courbe A inversée), la « descente de l’abstrait vers le concret sert plus d’illustration que d’instrument de compréhension du monde » et cela renforce, là encore, « le développement des procédures mathématiques comme fin en soi » (Ibid.). Ricardo montre ainsi que la contextualisation nécessite de partir de la réalité vers l’abstrait et de revenir ensuite vers la réalité « mais avec un nouveau regard, avec des possibilités de compréhension et d’action » (cité p. 344), car disposant désormais de nouveaux outils intellectuels. Ce mouvement est représenté par la courbe B. C’est le nouvel affrontement de la réalité, que Reis et Nehring expriment comme se faisant « à un nouveau niveau intellectuel » (p. 344), qui est important dans la progression de l’apprentissage. Ils ajoutent :

> Cette nouvelle connaissance ne peut être simplifiée au simple développement d'une nouvelle procédure de traitement ; il faut que, dans chaque nouveau contexte, le développement du traitement mathématique ait un sens qui contribue à la formation des significations pour la formation d'un nouveau concept (Ibid.).

C'est alors le fait d'affronter plusieurs contextes qui fait évoluer le sens construit pour le concept. Pour Spinelli, la construction de la connaissance est aussi vue comme « processus de signification entre contexte et abstraction » (Spinelli 2011, cité par Reis et Nehring 2017:344). Selon lui, « les contextes d'enseignement sont des agents qui donnent vie aux abstractions, dans la mesure où ils placent l'objet d'étude dans un réseau de significations dans lequel divers concepts s'associent » (Ibid.). Au fur et à mesure de l'utilisation du concept dans des situations variées reliées en réseau, l'individu en construit progressivement les contours et les liens avec d'autres concepts Reis et Nehring soutiennent que dans le cas où le contexte n'est qu'un prétexte à l'application reproductive d'une technique, la contextualisation ne sert pas à l'enseignement, car elle ne modifie pas les conceptions (Id.:361).

Les contextes peuvent donc être utilisés à des simples fins d'attraction de l'apprenant vers un apprentissage, d'illustration du concept ou encore, ce qui devrait être visé, de modification des conceptions. L'étude de Reis et Nehring affirme que le manuel scolaire « doit être un matériel analysé avec un regard sur la formation des concepts mathématiques, c'est-à-dire comment la contextualisation présente permet d'établir des sens pour la négociation des significations dans l'élaboration des concepts » (Id., p. 360). On pourrait analyser alors la contribution de chaque contexte à l'élaboration du sens de la multiplication, en s'intéressant à ce que chacun apporte comme conflit cognitif se résolvant par une nouvelle part de connaissance à propos de l'opération. Néanmoins j'ai choisi de ne pas centrer mon étude sur la contextualisation pour étudier d'autres paramètres qui contribuent à la construction de sens. Je vais donc surtout retenir de tout ceci que le sens se construit par l'expérience et en déduire qu'un concept est mieux approché en plusieurs fois, employé comme outil dans des contextes variés et qu'il est nécessaire de retourner vers le contexte après avoir cherché les outils mathématiques pour résoudre la question qu'il pose.

J'ai souvent constaté en soutien que des élèves de collège oubliaient le contexte d'une question une fois entrés dans les méandres de sa résolution mathématique. Lorsque la question est ainsi résolue, ne jamais conclure de manière contextualisée ne leur pose aucun problème. Et pourtant peut-on considérer que la question est effectivement résolue ? De même, nombreux sont ceux qui, ayant correctement résolu la question mathématiquement donnent une réponse contextualisée inadéquate, associant maladroitement des nombres avec ce qu'ils représentent en contexte. De manière parallèle, Verschaffel, de Corte, & Boghart montrent que « l'attitude de déconnexion de la réalité » se rencontre également chez des étudiants aspirant à devenir professeurs, qui sont « dérangés par les remarques des élèves qui les ramèneraient au monde réel et les corrigent ou les évacuent » (Verschaffel, de Corte, & Boghart, 1997, cité par Coquin-Viennot in Durpaire et al. 2008:87).

Afin d'étudier la prévalence de ce retour nécessaire vers le contexte dans les manuels, j'ai noté quelles questions demandent une phrase de réponse, c'est-à-dire à quelles questions contextualisées on demande explicitement aux élèves de répondre de manière contextualisée. Les résultats sont présentés dans la Figure 3. Bien-sûr, le retour au contexte y est sous-évalué car je ne compte globalement que les phrases à compléter. J'ai choisi de ne pas compter les lignes pointillées, que je suppose pourtant destinées à une phrase de réponse complète, car j'ai observé bien souvent la sous-utilisation de ces lignes par les élèves, qui renseignent alors le seul résultat numérique voire y écrivent seulement le calcul. Aussi, elles n'explicitent pas suffisamment la nécessité de retour au contexte. Les phrases-réponses comptabilisées sont donc le fait d'un retour vers le contexte forcé, mais assuré. On observe sur la Figure 3 que le manuel *Buriti* présente bien plus de phrases de réponse à compléter (28 % des consignes contextualisées) que les autres : *Ápis* et *Nouveaux Outils* fournissent 8 à 13 % de phrases-réponses et *Cap Maths* en propose à peine 5 %.

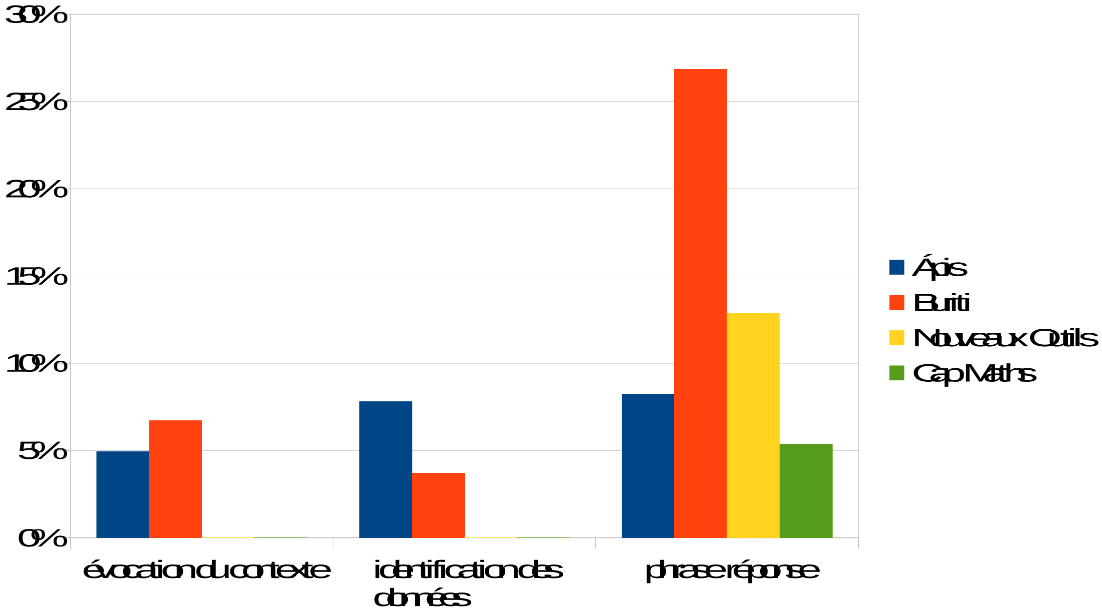


Figure 3: Prévalence selon les manuels de trois types de liens explicites au contexte au sein des consignes contextualisées.

Je me suis d'autre part penchée sur les situations qui ont pour objectif de développer la capacité à appliquer une connaissance mathématique à des nouveaux contextes (voir 3.7.3 Objectifs des activités), car il est nécessaire selon moi, notamment en début d'apprentissage des outils mathématiques, de faire formuler par les élèves les liens entre le contexte et sa modélisation mathématique. Par exemple, il me paraît essentiel qu'à tout moment de la résolution, ils sachent ce que représente, dans le contexte, un nombre qu'ils manipulent et l'opération qu'ils réalisent. Je pense que cela diminue le risque que, plus tard, des élèves additionnent des *mètres* avec des *kilomètres* ou avec des *mètres carré* ou même avec des *litres*.

Afin d'accompagner l'apprenant dans cette mise en relation des nombres avec ce qu'ils représentent en contexte, certains manuels introduisent des questions qui servent à identifier les données : elles appellent à les indiquer et/ou à les représenter autrement que la forme par laquelle elles sont données. Lors de cette étape de formulation, les apprenants doivent passer de ce que Bruner appelle une « pensée de type narratif orientée par la construction de phénomènes concrets, personnels et intentionnels », qui est le type de pensée naturelle, à la pensée mathématique, qui a un « caractère pragmatique qui supprime les intentions et les motivations et se base sur des représentations abstraites et très générales » (cité par Lopes et Pavanello 2019:2). On constate sur la Figure 3 que les manuels n'accordent pas la même importance à ces questions puisque seuls les manuels brésiliens présentent ce type d'activité : *Ápis* en propose dix et *Buriti* seulement cinq. Toutefois, en accompagnant de manière trop directive cette étape, la réduction de la complexité des situations risque d'en diminuer également l'intérêt.

Les manuels brésiliens sont également les seuls à poser des questions sur le contexte. J'ai montré que l'intérêt d'un contexte est de placer l'étude du concept dans un réseau de significations pour l'apprenant. Cela est possible si le contexte fait sens pour lui, c'est-à-dire si l'évocation du contexte rappelle des faits à sa conscience. Inviter les élèves à évoquer le contexte permet à l'enseignant de s'assurer que l'élève est bien placé dans son réseau de significations. L'apprenant peut évoquer ce à quoi le contexte lui fait penser, ce qu'il lui rappelle, ce qu'il a vécu de similaire, ce qu'il en a entendu dire, etc. En didactique des langues étrangères, on parle de « coréférence », qui favorise les apprentissages : on comprend plus vite si le cadre conceptuel est déjà familier et si cette familiarité est partagée (Martinez 1996). Si la situation est familière à l'apprenant, il peut plus facilement comprendre la question qu'on lui pose (voire se la poser lui-même), il est plus disponible pour tenter d'y répondre, et, d'autre part, il peut mettre en relation cette situation avec la modélisation que l'on en construit au cours de l'activité. Néanmoins, l'enseignant a toute liberté d'ajouter ce type de questionnement introductif lors du lancement d'une activité. D'autre part, pour bien des contextes, très communs, il n'est pas nécessaire de s'assurer de cette familiarité. Quels types de contextes sont évoqués qui peuvent favoriser cette activité mathématique basée sur le sens ?

3.5.3 Des types de contextes

Lors de l'analyse de chaque manuel, j'ai initialement considéré comme contextualisée une question portant sur un nombre si celui-ci est associé à une quantité réelle de quelque chose. Par exemple, « dessiner 8 bananes » est une consigne contextualisée dont le contexte est l'alimentation, les fruits. Le contexte est pourtant pauvre (où sont ces bananes, qu'en fait-on ?) face à une situation du quotidien qui nécessite le calcul d'un produit pour agir, comme par exemple si on cherche le nombre de bananes à incorporer dans un gâteau. D'autre part, la tentation est grande de comptabiliser comme contextualisés des calculs à faire pour remplir une grille de loto, considérant alors le contexte de jeu vécu en classe comme finalité des calculs. J'ai ainsi perçu que certaines distinctions s'avéraient nécessaires. Quelles distinctions font les programmes et les auteurs qui évoquent la contextualisation en mathématiques ?

La contextualisation d'un exercice mathématique est couramment comprise comme la référence, dans l'exercice, à des situations sociales qui seraient issues du quotidien de l'élève. Dans les Instructions Officielles françaises de 1945, par exemple,

> les mots de *vie courante*, marquent la volonté d'une relation étroite entre les mathématiques de l'école et les nécessités de la vie courante. Des problèmes de la vie courante sont des problèmes vraisemblables, dont l'élève a vu ou verra des exemples autour de lui (cité par Didry 1983:27).

Néanmoins, dans une analyse de manuels de 7° ano (équivalent de la 5[e] française) Souza souligne que la contextualisation « ne doit pas se restreindre à des cas particuliers du quotidien » (2014:16). Selon cette auteure, la contextualisation en mathématiques correspond aussi à l'établissement d'un lien avec les différents champs scientifiques et les autres aires de connaissance dans lesquelles les mathématiques s'expriment (2014:15). La contextualisation vise ainsi à promouvoir « l'attribution de significations » aux objets étudiés et leur compréhension, mais aussi la construction d'une posture critique et autonome de l'élève dans la prise de décision au sein de ces différents contextes. S'intéressant à l'enseignement de l'algèbre, l'auteure considère certains contextes comme « d'importance fondamentale dans l'enseignement de cette aire de connaissance » et indique qu'ils sont ceux considérés par le PNLD. En effet, du fait de son importance reconnue par la LDB, la contextualisation est un critère de qualification des manuels au Brésil par le PNLD. Et, selon Souza, les auteurs du guide du PNLD distinguent quatre types de contextualisation[23] :

> ○ une contextualisation interne aux mathématiques, qui se réfère aux liens possibles entre les différents champs [des mathématiques], dans laquelle un champ résout un problème donné dans un autre ;
>
> ○ une contextualisation historique, qui aborde le développement des mathématiques [et les besoins de concepts] au cours du temps ;
>
> ○ une contextualisation avec d'autres aires de connaissance, qui considère l'application des mathématiques dans diverses aires, que ce soit dans

23 Je n'ai pas retrouvé cette classification dans l'édition étudiée du guide du PNLD ni dans le document de cadrage de l'édition 2019 du PNLD (Ministério da Educação 2017, 2018b).

d'autres disciplines scolaires ou dans des situations vécues en dehors de l'école […] ;

- une contextualisation avec les pratiques sociales, qui traite des mathématiques présentes non seulement dans le quotidien des apprenants mais aussi dans diverses branches de la société (Souza 2014:17)

À la lecture des manuels sélectionnés, ces quatre catégories m'ont semblé moins pertinentes. En effet, je n'ai relevé aucune contextualisation historique, je retrouve peu de liens avec d'autres champs mathématiques et avec d'autres aires de connaissance, mais une forte représentation des pratiques sociales. Seul le manuel Buriti, à l'occasion de l'apprentissage des groupements « douzaine » (dúzia) et « demi-douzaine » (meia-dúzia), en dehors des activités du champ multiplicatif qui font l'objet de cette étude, évoque, à l'intention des enseignants, leur usage social en diminution, une forme de langage dérivée qu'est le terme « meia » (demi) renvoyant au nombre six20 et une possible origine historique des groupements par douze et soixante. La classification de la contextualisation par le PNLD possède donc un intérêt limité pour cette étude.

Skovsmose (2000 cité par Souza 2014:15-16), qui n'utilise pas le terme « contexte », répertorie trois types de « références » dans les questions mathématiques :

- la référence aux mathématiques pures : des « exercices sans aucune relation avec des éléments autres que les mathématiques » (p. 15) ;
- la référence à la semi-réalité, c'est-à-dire « des situations de fiction, créées et élaborées par une autorité externe à la salle de classe, comme c'est le cas des manuels scolaires » (p. 16) ;
- la référence à la réalité, « comme l'utilisation de graphiques de chômage extraits de journaux, ou la discussion de factures de téléphone, d'eau, d'électricité » (p. 16) qui pourraient être intégrés ou suggérés par les manuels.

Comme lui, je me suis intéressée à l'authenticité des situations proposées : est-ce que les élèves vivent directement en classe la situation proposée ou est-ce qu'au contraire la situation est seulement évoquée ? Peuvent-ils la vivre à l'école ou en dehors ? Se poseraient-ils la même question s'ils étaient réellement dans la situation décrite ? Est-ce que les supports utilisés sont réellement issus de la vie quotidienne ? Pour répondre à ces questions, j'ai répertorié pour chaque consigne le type de contextualisation selon le code présenté dans le Tableau 3.8. La Figure 4 présente la répartition des consignes de chaque manuel selon cette grille de description.

PISA est également une source intéressante de types de classification de contextes. En effet, l'enquête s'intéresse particulièrement à l'utilisation des mathématiques en contexte :

> pour l'OCDE, et donc pour PISA, les connaissances n'ont d'intérêt pour l'ensemble des citoyens que dans la mesure où ces derniers seront capables de les utiliser pour résoudre les problèmes qu'ils sont susceptibles de rencontrer dans la *vie réelle » (Cnesco 2016:16).*

Le cadre de référence de PISA classe les items selon leur place « dans le monde des individus » (OCDE 2020) en distinguant les contextes personnels (comme les achats, l'alimentation, les loisirs, la santé personnelle), les contextes professionnels (par exemple les devis, les commandes de matériaux, la comptabilité, le design), les contextes sociétaux (comme les systèmes électoraux, les politiques publiques, la démographie) et les contextes scientifiques (l'application des mathématiques dans le monde naturel et en technologie). Avant 2012, le classement, semblable, comportait une notion de distance à l'individu.

La juxtaposition, au premier codage, de mots clés résumant le contexte m'a permis de regrouper a posteriori les consignes contextualisées selon les univers qu'elles convoquent. J'ai ainsi construit six catégories d'univers selon si les contextes proposés se réfèrent à un quotidien partagé par tous, à des activités ou des objets particulièrement enfantins, à l'école, à certains métiers ou s'il s'agit de loisirs, qui ne sont pas forcément accessibles à tous mais qui peuvent être connus par des récits et/ou des images (voir Tableau 3.9). Par rapport au classement de PISA, apparaît séparément l'environnement, car je ne peux préjuger de la proximité des individus avec ce thème. De plus, l'environnement, notamment sa protection, fait partie des thèmes transversaux introduits par les Paramètres Curriculaires Nationaux brésiliens en 1998 (comme l'éthique, la pluralité culturelle, la santé et l'orientation sexuelle – Vieira 2004:11). Le thème est donc attendu par le PNLD.

Tableau 3.8 : Grille de la première description de la contextualisation.

Code	**Signification**	**Univers**

C0	Pas de contexte.	Non contextualisé
C1	Expérience à vivre en classe.	Univers de l'enfance ou C0
C2 C2a C2b C2c	Évocation du monde de l'expérience : Dénombrement d'objets réels (contexte pauvre); Évocation d'une action réelle ; Situation réelle posant une question mathématique.	Divers univers convoqués
C4	Lien avec un autre domaine d'étude.	Divers univers convoqués
C5	Lien avec un autre domaine mathématique.	Non contextualisé ou univers convoqué
C6	Exemples à donner par les élèves.	/

C0. Dans cette première description, le code C0 relève toutes les consignes qui ne font appel à aucun contexte : pour la plupart de questions de calcul, mais aussi de vocabulaire. On retrouve sur la Figure 4 la variation observée dans le Tableau 3.7 des taux de contextualisation : l'histogramme souligne visuellement l'importance des consignes non contextualisées dans le manuel Cap Maths, deux fois supérieure à celles des manuels brésiliens. L'activité du sujet, alors indépendante de ses autres expériences et connaissances, est centrée sur une activité numérique et calculatoire. On pourrait parler d'une centration sur une activité mathématique, mais n'ai-je pas justement montré que la mise en relation des outils mathématiques avec la réalité, nécessaire dans toutes les autres questions, fait tout autant partie de l'activité mathématique ?

C1. Le codage C1 répertorie les consignes déclenchant des expériences vécues en classe comme support de l'activité mathématique. Ces propositions représentent moins de 10 % des consignes et sont particulièrement rares chez *Cap Maths*. Essentiellement basées sur le ludisme de l'activité et sur la manipulation, elles convoquent parfois d'autres expériences personnelles et sociales (par des images ou la pratique-même du jeu). Dans le manuel *Ápis*, il s'agit d'expériences de groupements d'élèves à partir desquelles on formule des multiplications, de parcours nécessitant de sauter de *n* en *n* cases, d'activités manuelles et d'un jeu de roulette russe basé sur le calcul. Si les trois premiers types font référence à des activités enfantines, le dernier n'est basé que sur le calcul et rejoint donc les consignes non contextualisées dans la deuxième description. Dans le manuel *Buriti*, ces expériences reflètent différents jeux et une manipulation de matériel de la vie quotidienne apporté par les élèves, qui rejoint les activités scolaires.

Le jeu de loto et le jeu de calcul ne convoquent pas d'autre univers que le calcul, mais le jeu de l'oie, avec son parcours et sa pratique à cet âge, rejoint les activités enfantines. De manière similaire, chez *Nouveaux Outils*, *u*n jeu de rapidité de calcul et le jeu du furet pour le calcul mental ne sont pas contextualisés, mais les jeux de formulation mathématique de collections imagées d'objets rejoignent la vie quotidienne, et l'enfance pour le mémory. Du matériel quotidien est également à manipuler pour observer des groupements. Chez *Cap Maths* seul un jeu de calcul créé par la méthode est comptabilisé dans les expériences à vivre en classe. Même si les consignes ne se basent sur la manipulation, les élèves sont amenés à manipuler des objets lors d'autres activités et notamment lors des phases de vérification.

C2. La majorité des consignes évoque le monde extérieur à l'école (50 % à 60 % des consignes). Je considère un simple dénombrement d'objets réels non placés dans un contexte (C2a) comme un contexte plus pauvre qu'une action réelle avec ces objets que les enfants pourraient ou non avoir expérimentée (C2b)[24]. Parmi ces actions réelles, je compte séparément celles qui en elles-mêmes soulèvent un questionnement mathématique en situation (C2c), c'est-à-dire que si l'élève vivait réellement l'expérience, il aurait besoin de la réponse à la question mathématique. Le manuel *Ápis* propose de nombreux contextes de simple dénombrement : les contextes pauvres correspondent à un quart de l'ensemble des consignes alors qu'ils représentent moins de 10 % dans les autres manuels et seulement 2 % chez *Cap Maths*. *Buriti* semble être le manuel offrant le plus de contextes plus riches : 30 % des questions évoquent une action réelle et 19 % un questionnement réel.

C4. C5. Les codages C4 et C5 rapportent les consignes en lien avec d'autres aires de connaissances et des mathématiques. La plupart convoque un univers issu des pratiques sociales, mais certaines sont uniquement mathématiques et rejoignent ainsi les consignes non contextualisées. Se situant dans la moyenne pour la majorité des catégories, le manuel *Nouveaux Outils* se distingue par une présentation accrue de questions en lien avec d'autres aires de connaissance du fait de quatre questions de biologie sur les animaux du monde sur un total d'à peine 122 consignes.

24 Si un personnage est évoqué, qui veut dénombrer des objets réels, la situation est comptée comme C2b car les objets sont placés dans un contexte donc la représentation de la situation est possible.

C6. Enfin, le codage C6 répertorie les consignes pour lesquelles il est demandé aux élèves d'associer eux-mêmes un contexte. Cette activité est très intéressante, et sa faible apparition dans les manuels (deux fois dans *Buriti*), probablement due à l'utilisation généralement prévue d'un tel ouvrage, a tout intérêt à être compensée par les pratiques enseignantes. En effet, de la même manière que les raisonnements opératoires inverses sont enrichissants pour la compréhension d'un concept, il est très profitable pour la classe qu'elle s'attache à chercher elle-même des contextes possibles d'application ou de fréquentation des concepts étudiés, à partager les expériences de chacun et à discuter de la possibilité de leur association au concept.

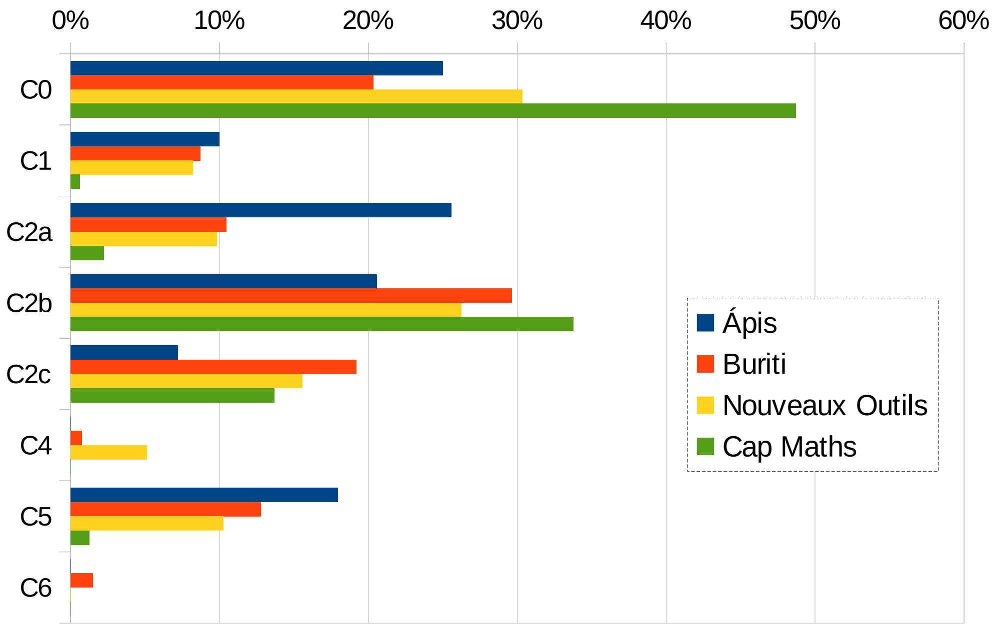


Figure 4: Première description des contextes utilisés par les manuels.

Quels sont donc ces contextes que les manuels ont associé à la majorité des consignes ? Les univers convoqués constituent une deuxième description dont la répartition dans chaque manuel est présentée par la Figure 5. On constate sur cette figure que les auteurs des manuels contextualisent leurs questions essentiellement par la vie personnelle et sociale de ces jeunes apprenants : entre 59 % et 79 % des questions contextualisées convoquent la vie quotidienne ou l'enfance. *Cap Maths* se distingue des autres manuels en ce qu'il s'adresse principalement à la part enfantine de l'apprenant avec 55 % des questions contextualisées, quand la plus grande part des contextes des autres manuels relèvent de la vie quotidienne, allant jusqu'à 50 % chez *Buriti*. La référence aux loisirs est très variable, et celle des contextualisations mentionnant l'environnement naturel tourne autour de 10 %. L'école est globalement peu représentée alors qu'elle fait partie du quotidien des élèves. Enfin, peu de questions portent sur la vie professionnelle (vente alimentaire comptée à part) dans l'ensemble des manuels : *Buriti* en propose six et *Nouveaux Outils* trois (voir un exemple de contextualisation professionnelle sur l'Illustration 30 en Annexe).

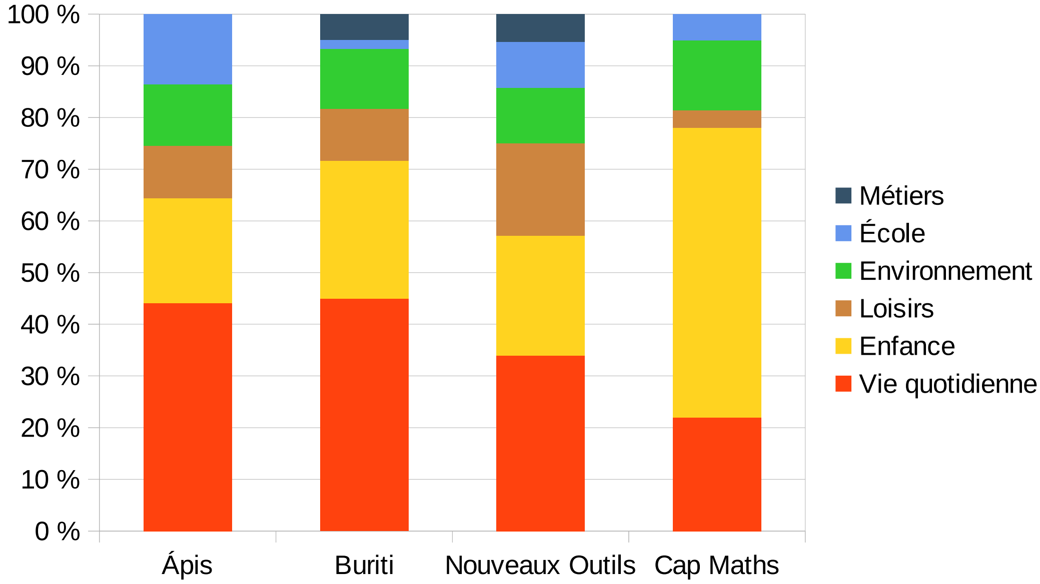


Figure 5 : Part de chaque univers convoqué dans les questions contextualisées

Tableau 3.9 : Description de la contextualisation selon les univers convoqués

0,00 %	**Description, exemples**
C0	Pas de référence à un contexte. Regroupe les consignes non contextualisées de la première description auxquelles s'ajoutent les consignes décrites comme expériences en classe, liens avec d'autres champs mathématiques, etc. qui n'ont pas de contexte autre.
Vie quotidienne	Les nécessités et les habitudes de vie partagées par tous : alimentation, hygiène, habillage, rangement, argent, courrier, etc.
Enfance	Ce qui concerne particulièrement l'enfant en tant qu'enfant : imaginaire, collections et albums, activités manuelles, dessins, bouquets de fleurs, comptines, images, bonbons, jeux, etc.
Loisirs	Des activités pouvant être pratiquées par l'enfant, ou connues via des images et/ou des textes : sport, vacances, cinéma, zoo, restaurant, etc.
Environnement	L'environnement et son respect : animaux, fleurs et arbres, champignons, etc.
École	Ce qui concerne spécifiquement la vie scolaire : groupes d'élèves, matériel de classe, etc.
Métiers	Activités de production, de vente[25], etc.

Je propose en Annexe des nuages de mots représentant pour chaque manuel les mots-clés que j'ai associés (voir Illustration 32 et suivantes). S'ils ne représentent pas directement les énoncés des consignes, ils donnent un aperçu de la fréquence relative des sous-ensembles de chaque univers.

Si l'on considère l'ensemble des consignes (contextualisées et non contextualisées), on observe que plus d'un tiers des questions portent sur une situation de la vie quotidienne dans les manuels brésiliens, mais seulement 10 % chez *Cap Maths* qui, lui, accorde un tiers aux activités et objets enfantins. Cette répartition de la contextualisation montre bien que pour un public de si jeune âge (7 ans), les manuels ne proposent pas de situation très distante de leur quotidien. Les enfants apprennent à observer et utiliser les mathématiques dans tout ce qui les entoure. Les situations de leur vie quotidienne posent-elles réellement des problèmes mathématiques ?

3.5.4 Proposition de contextes différents

Certains contextes apparaissent plusieurs fois, que ce soit dans une même situation pour des consignes différentes, ou pour de nouvelles situations à distance. Ainsi, plusieurs séances d'apprentissage de *Cap Maths* se basent sur les tours de cubes de même hauteur, et, bien-sûr, plusieurs activités sont demandées à chaque séance. On peut alors s'intéresser au nombre de contextes différents que chaque manuel offre.

Tableau 3.10: Nombre de contextes différents.

	Ápis	***Buriti***	***Nouveaux Outils***	***Cap Maths***
Nombre de consignes contextualisées	128	135	78	159
Nombre de contextes différents	54	60	52	59
Nombre moyen de consignes par contexte	2,37	2,25	1,50	2,69
Indice de reprise des contextes	1,48	1,18	1,27	1,69
Part de contextes pauvres C2a	33%	0%	25%	10%
Part de contextes problématiques C2c	11%	0%	27%	17%

Le Tableau 3.10 fournit, par cet indicateur, un aperçu de la diversité des contextes proposés par chaque manuel et de leur richesse selon les trois niveaux définis précédemment. On constate que, bien que le nombre total de consignes et le nombre de

25 Les questions portant sur la vente alimentaire ont été comptabilisées dans la vie quotidienne en ce que ces situations sont connues par les enfants via les courses d'alimentation.

consignes contextualisées soient très variables, le nombre de contextes différents est similaire. Cela révèle une différence d'exploitation d'un même contexte par des consignes successives ou une tendance à réutiliser un contexte pour de nouvelles activités. Le taux de reprise des contextes, calculé à partir du nombre de situations présentant un même contexte, donne une indication sur cette seconde tendance. On observe par exemple que, pour un nombre égal de contextes différents, *Cap Maths* propose en moyenne plus de consignes par contexte, et son taux de reprise est supérieur à celui de *Buriti*. Chez *Cap Maths*, un contexte se retrouve en moyenne dans 1,69 situations.

Contextualiser une question comporte différents degrés formateurs. Un contexte pauvre ne permet que la simple application d'une opération ou d'un vocabulaire. Un contexte riche, qui soulève une question mathématique, peut être présenté de différentes façons à l'élève : naturellement tel qu'il se présente dans la vie réelle ou de manière énigmatique. D'autre part, s'agissant de l'apprentissage de la multiplication, les contextes évoquent des groupements et des distributions, qui peuvent être réels ou arbitraires. Enfin, les contextes peuvent s'instancier en classe par l'utilisation de supports réels, très utilisés dans les pédagogies actives dont notamment l'apprentissage par projets. J'ai regroupé toutes ces distinctions dans la question de l'authenticité que je présente dans la partie suivante, avec quelques exemples dans les manuels, sans aucune exhaustivité.

3.5.5 Authenticité

1) Authenticité du lien entre le contexte et la tâche

Selon Didry, « la marge des raisonnements offerte par les problèmes de la vie courante *vraisemblable* [...] ne couvre pas l'ensemble des questions gravitant autour d'une même structure mathématique » (1983:29). Parfois, il suffit d'inverser les données avec ce que l'on cherche pour inviter le sujet à réfléchir tout autrement.

Ainsi, certaines situations sont plausibles car elles arrivent régulièrement ou peuvent arriver dans la réalité. Je qualifie d'authentique le cas d'une situation plausible qui poserait, dans la vie de cet individu, la même question que celle qui est posée à l'élève (cf exercice 6 de l'Illustration 20). Ces situations matérialisent le besoin du calcul étudié. L'apprenant peut se représenter à la place de l'individu et se rendre compte qu'il a besoin du calcul pour agir, ou que le calcul facilite son action. Dans le cas de l’exercice 6, on pourrait se passer du calcul en donnant les sucres un à un jusqu’à épuisement du stock, mais ce serait plus fastidieux[26]. On pourrait également préparer les tas destinés à chaque éléphanteau en les alimentant de sucres un par un, ce qui limite les déplacements et facilite le moment du goûter, mais est toujours fastidieux. Le calcul permet d’anticiper combien on donne à chacun et de facilement adapter la réponse si la quantité initiale et/ou le nombre d’éléphants venaient à changer.

Illustration 20: Lien authentique et lien énigmatique entre le contexte et la tâche à effectuer - Manuel Nouveaux Outils p. 93

Au contraire, je qualifie d’énigmatique le cas d’une situation certes plausible mais qui ne poserait pas la même question que celle que l’on pose à l’élève (ex : exercice 7 de l’Illustration 20). Les données sont inversées par rapport à ce qui se présenterait dans la vie réelle, sauf si une personne pose une énigme à une autre en refusant de lui donner une donnée qu’elle peut retrouver par le calcul. Les tâches demandées par le manuel peuvent parfois ne pas faire sens dans l’esprit de l’élève (pour l’exercice 7, il suffirait d’aller voir la cage pour voir le nombre d’animaux qu’elle contient). Ces situations ne donnent pas l’impression d’avoir besoin de notre calcul, mais plutôt que quelqu’un nous cache la vérité et il faut une certaine motivation pour accepter de jouer aux devinettes. Ce côté « énigme », ludique, peut être une motivation pour certains, mais peut paraître alambiqué voire inutile pour d’autres. C’est le cas du problème suivant, issu du manuel *Buriti* (p. 154) :

> *Aline a acheté 24 poires au marché et, à l’arrivée chez elle, elle a utilisé un tiers de ces poires pour faire un dessert. Combien de poires Aline a utilisé ?*

26 Le choix des nombres en jeu influe grandement la possibilité d’utiliser de telles stratégies.

Je considère cette situation artificielle. Le lien entre le contexte et la tâche n’a pas de sens puisque la quantité de fruits à utiliser pour une recette ne dépend pas de la quantité achetée (sauf s’il y a la nécessité de répartir ces fruits dans différentes recettes ou de calculer par combien je peux multiplier les quantités de la recette, ce qui n’est pas exposé ici), et le calcul du tiers ne sert donc que pour l’exercice. Le contexte ne sert qu’à l’utilisation du mot tiers. Dans la réalité, un sujet qui cuisine sait combien de fruits il a incorporé, ou éventuellement retrouverait ce nombre par soustraction des fruits restants. D’autres contextes sont utilisés à l’encontre de l’expérience réelle. Par exemple, la situation de partage en deux de deux boîtes identiques, issue du manuel *Nouveaux Outils* (p. 156, voir Illustration 21).

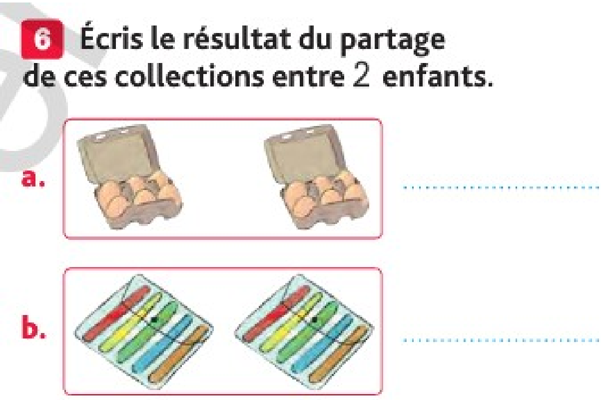


Illustration 21: Un partage de deux groupements en deux – manuel Nouveaux Outils p. 156

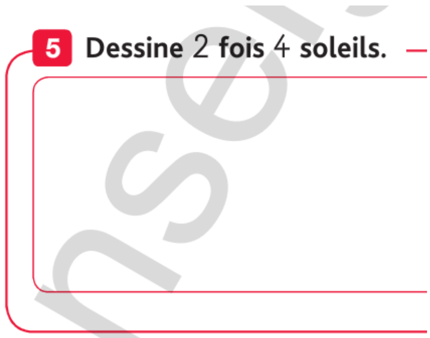
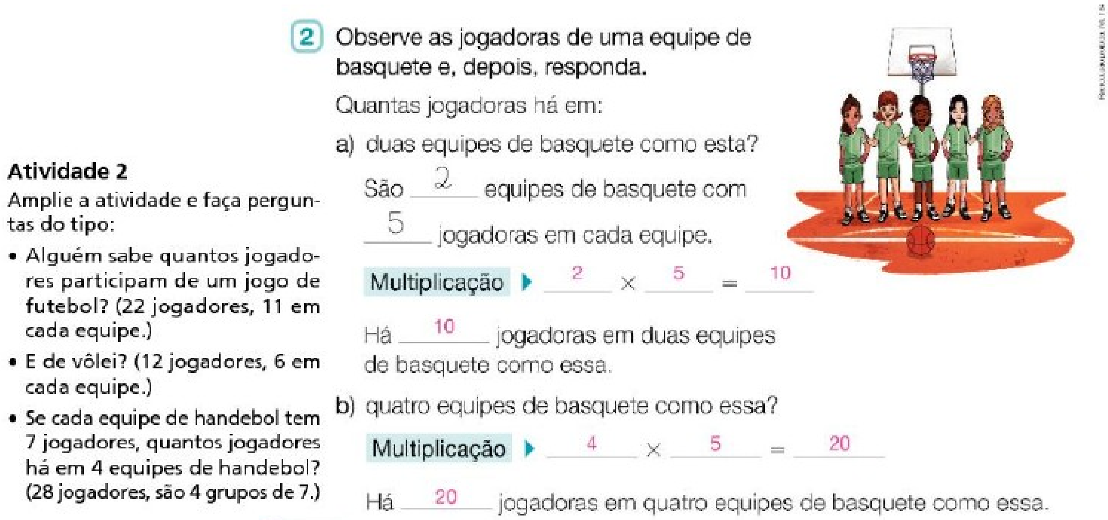


Illustration 22: Activité purement scolaire – manuel Nouveaux Outils p. 87

Ces situations posent-elles véritablement une question dans la vie réelle ? Le partage évident et non problématique dans la vie réelle est proposé dans le fichier, ce qui suggère d’aller plus loin et préciser par exemple le contenu de chaque boîte, à savoir que chacun recevra six œufs ou cinq feutres. D’autre part, beaucoup d’activités de contexte pauvre ont une existence uniquement scolaire et un intérêt uniquement mathématique (Illustration 22). Au contraire, certaines activités des manuels, même pauvres, ont un intérêt au-delà des mathématiques lorsqu’elles font référence à des groupements socialement partagés.

2) Authenticité des groupements

Certains exercices mentionnent des groupements usuels d’objets, comme une boîte d’œufs, ou des subdivisions habituelles, comme une tablette de chocolat. Dénombrer des quantités dans ces contextes peut avoir plus de sens pour les élèves que compter des groupements non spécifiques d’objets, surtout s’il n’est pas usuel de les grouper (des soleils – *Nouveaux Outils* p. 87).



Atividade 2

Amplie a atividade e faça perguntas do tipo:

- Alguém sabe quantos jogadores participam de um jogo de futebol? (22 jogadores, 11 em cada equipe.)
- E de vôlei? (12 jogadores, 6 em cada equipe.)
- Se cada equipe de handebol tem 7 jogadores, quantos jogadores há em 4 equipes de handebol? (28 jogadores, são 4 grupos de 7.)

2 Observe as jogadoras de uma equipe de basquete e, depois, responda.

Quantas jogadoras há em:

a) duas equipes de basquete como esta?

São 2 equipes de basquete com 5 jogadoras em cada equipe.

Multiplicação ▸ 2 × 5 = 10

Há 10 jogadoras em duas equipes de basquete como essa.

b) quatro equipes de basquete como essa?

Multiplicação ▸ 4 × 5 = 20

Há 20 jogadoras em quatro equipes de basquete como essa.

Illustration 23: Utilisation intéressante du contexte et de groupements authentiques pour faire varier les nombres en jeu – manuel Buriti p. 100

Pour souligner l’intérêt que je vois à utiliser de tels groupements, je propose de comparer deux consignes à propos d’équipes en sport. Une équipe sportive est un groupement socialement partagé, variable selon les sports. Les manuels *Buriti* et *Ápis* proposent tous deux une activité basée sur les équipes sportives, mais les calculs sont d’intérêt différent. *Ápis* demande combien de joueurs forment cinq équipes (p. 150), c’est-à-dire un nombre arbitraire, alors qu’en suggestion de prolongement d’une activité similaire (deux équipes et quatre équipes), *Buriti* demande combien de joueurs sont sur le terrain pour un sport donné (voir Illustration 23). *Buriti* fait alors référence aux équipes en action et à leur groupement par deux réellement rencontré pour les matchs, c’est-à-dire ce pour quoi elles sont créées. La comparaison avec d’autres sports, qui suit, ajoute d’autant plus de sens aux calculs ainsi contextualisés et contribue à la formation culturelle des apprenants. Pour aller au-delà de la multiplication par deux (qui n’est pas plus rapide qu’une addition), on peut poursuivre dans les regroupements réels que vont être par exemple des championnats, en prenant les données dans le réel. Les fichiers peuvent inciter enseignants et élèves à récolter des supports réels.

3) **Authenticité du support**

L’authenticité d’un support est un paramètre issu de la didactique des langues étrangères. On y distingue les documents authentiques des documents didactisés. Un support authentique est celui qui n’a pas été conçu à l’origine pour être utilisé en classe. Il est sans intentions didactiques. Mais dès lors qu’un document est modifié à des fins d’apprentissage, « adapté, coupé, résumé, expurgé, voire réécrit et [qu’il] subit des transformations visant à le rendre plus accessible à un public d’apprenants » (Quivy et Tardieu cités par Timuc Mirela23), il devient un document didactisé.

De fait, bien que Skovsmose semble indiquer que les manuels scolaires ne peuvent faire référence qu’à une « semi-réalité », en élaborant des « situations de fiction » (cf 3.5.3), l’association au fichier d’un guide à destination de l’enseignant peut faciliter des suggestions d’activités avec des contextes et des supports bien réels, permettant aux auteurs de dépasser pédagogiquement les limites d’un fichier, et améliorant par là la méthode fournie à l’enseignant comme support pour son enseignement.

Nouveaux Outils présente par exemple une activité basée sur des tickets de caisse (p. 91), alternant l’utilisation de l’addition et de la multiplication, mais ceux-ci sont simplifiés et le total est masqué, ce qui en fait une situation énigmatique. Elle a sans doute son intérêt, surtout pour de jeunes apprenants, mais il y aurait tout autant d’intérêt à se baser sur des tickets non didactisés, que ce soit au niveau mathématique pour comprendre comment est calculé le résultat, ou au niveau transversal pour apprendre à lire ces supports particuliers de la vie quotidienne. L’utilisation de vrais tickets de caisse apportés par les élèves ou reçus dans le cadre d’un projet de classe est envisageable directement, ou en prolongement du support fichier.

En soumettant un support didactique fortement inspiré du réel, le manuel *Buriti* propose une situation de vérification critique d’une promotion (voir Illustration 36 en Annexe). Après discussion à propos du support et de ce qu’il évoque chez chacun, les élèves sont invités à vérifier la validité de cette promotion grâce à des questions progressives (Illustration 37) et notamment en calculant le prix d’une même quantité d’articles selon s’ils sont achetés individuellement ou en lots. Cette situation est très intéressante pour la construction de sens et c’est la seule des quatre manuels qui incite autant les élèves à porter un regard interrogateur sur le monde qui les entoure. Or elle correspond tout à fait au premier critère favorisant la construction de sens, tel que je l’ai établi dans la première partie.

Le deuxième critère évoque la diversité des formes de présentation des situations. Nous avons vu que certains manuels suggèrent des activités à vivre en classe, dont la forme, ludique et kinesthésique, diffère considérablement des exercices écrits en mobilisant particulièrement les affects et les sens. Je vais présenter dans le chapitre suivant la diversité des formes de données proposée par les manuels et son intérêt.

3.6 Types de données

Pour toute question mathématique, contextualisée ou non, le sujet est appelé à identifier les données nécessaires à la résolution. Or, dans la vie quotidienne, les questions qui se posent font appel à des informations qui peuvent être perçues au moyen des cinq sens, à rechercher plus ou moins loin dans le temps et dans l'espace. Au contraire, dans un exercice scolaire, et a fortiori s'il est issu d'un manuel, les données sont rassemblées et ne peuvent prendre qu'un nombre limité de formes. Annie Camenisch (2012:59) souligne que la présentation des données d'un problème sous forme de texte peut constituer un obstacle à la compréhension de la situation par les élèves. Une part importante des difficultés d'élèves en mathématiques provient précisément de la compréhension textuelle. En effet, la résolution d'un problème a pour première étape, avec la lecture de celui-ci, sa compréhension via la construction d'une représentation (Fayol, in Durpaire et al. 2008:49) avant toute modélisation mathématique et mise en signes (Descaves 1992, notes personnelles). Chercheur et formateur en didactique des mathématiques, Roland Charnay (2006) résume ainsi : « la résolution de problèmes nécessite sommairement des connaissances en lecture, sur le contexte et en mathématiques ». Pour contrer les difficultés de compréhension des textes mathématiques, Camenisch propose de « faire entrer les élèves dans un apprentissage de l'écriture en contexte mathématique dès le premier cycle du primaire » (Ibid.). Cette pratique ne semble pas suggérée par les manuels étudiés. On observe plutôt, dans ces ouvrages destinés à de jeunes apprenants pour lesquels les connaissances en lecture sont encore fragiles, une faible présentation de textes longs, la présence de nombreuses illustrations ainsi que la suggestion de manipulations. L'étude du guide de l'enseignant permet en outre d'accéder à des activités conduites à l'oral, qui accompagnent ou complètent les propositions écrites.

Varier les formes des données favorise la compréhension de tous les apprenants quelles que soient leurs facilités, par la diversification des accès potentiels au sens, et leur permet de développer des compétences de recherche et de reformulation des données, compétences nécessaires pour répondre à une question. Les programmes éducatifs nationaux soulignent l'importance particulière de la manipulation dans l'apprentissage. Les questions posées par les manuels font-elles seulement référence à des données textuelles ? Quelles sont les autres formes de données des activités qu'ils proposent ?

3.6.1 Formes de présentation

Les premiers constats concernant les données des consignes étudiées m'ont amenée à repérer quatre grands types de données : les langages, les illustrations, le matériel et les connaissances. Au sein de chaque type, d'autres distinctions m'ont paru intéressantes. Les différents langages employés, par exemple, comportent une certaine graduation du niveau de lecture et de spécification mathématique. C'est pourquoi je distingue l'oral des textes courts et des textes longs[27], le langage courant des formulations mathématiques et des différentes présentations organisées que sont le tableau, le graphique, la ligne graduée, les suites logiques, etc. Il m'a paru nécessaire ensuite de distinguer si l'illustration n'est qu'un auxiliaire de représentation ou si le comptage des données ou même du résultat est possible sur l'illustration voire nécessaire. Par ailleurs, j'ai considéré différemment la présence de matériel selon s'il est visible tout le long de la résolution ou en partie, et s'il est manipulable par l'élève. Enfin, la classe des connaissances regroupe les connaissances préalables (données implicites) et les résultats précédant la question. Le Tableau 3.11 récapitule la répartition des principales formes de données des consignes pour chaque manuel. La Figure 6 présente ensuite une description de quelques associations des langages ainsi différenciés, et avec les illustrations.

Avant d'interpréter les résultats par catégories dans les parties suivantes, remarquons que 27 à 47 % des questions font appel à des données de multiples sources. Pour certaines consignes, les données peuvent être sous quatre formes associées ! Majoritairement redondantes, plus en partie qu'en totalité, ces différentes formes

27 L'appréciation de la longueur des textes se base sur la longueur des phrases et sur la séparation des données. J'ai tenté de me mettre à la place d'un élève en difficulté de lecture. Un texte long nécessite plusieurs lectures pour en extraire les données. Mes difficultés de classement montrent toutefois que celui-ci garde une grande part de subjectivité.

peuvent parfois se compléter. Proposer des formes complémentaires de données se rapproche plus de situations réelles, participe au développement de la recherche d'informations et à la capacité de percevoir celles-ci quelle que soit leur présentation. L'Illustration 9 (p. 57), dont les données sont présentées sous quatre formes (texte, illustration, formule mathématique orale et formule mathématique écrite) montre que la redondance des informations est également bénéfique pour construire le sens et les formulations des concepts en jeu. Il est alors utile d'expliciter la correspondance entre les diverses formes.

Tableau 3.11: Principales formes des données présentes dans les consignes.

	Ápis	***Buriti***	***Nouveaux Outils***	***Cap Maths***
Texte	42,0%	47,7%	47,5%	40,4%
Texte long (dense)	5,5%	8,0%	3,3%	4,1%
Oral sans texte	**8,8%**	**10,9%**	**19,7%**	**22,0%**
Présentation organisée des données	9,4%	13,2%	7,4%	2,5%
Formule mathématique écrite	7,2%	6,9%	13,9%	26,4%
Illustration	**39,8%**	**42,0%**	**35,2%**	**20,4%**
Matériel visible	1,7%	2,9%	0,0%	7,0%
Matériel manipulable	4,4%	0,6%	3,3%	5,4%
Résultats précédents	16,6%	10,9%	0,8%	1,6%
Connaissances personnelles (hors évocation du contexte)	2,2%	5,2%	0,8%	1,0%
Plusieurs formes de données	**34,8%**	**47,1%**	**27,0%**	**27,7%**
Formes complémentaires de données	7,7%	10,9%	4,1%	5,7%

3.6.2 Les langages

On constate dans le Tableau 3.11 que moins de la moitié des consignes fait appel à des données textuelles, plus rares chez *Cap Maths* et la Figure 6 montre que moins de 20 % des consignes font appel uniquement au texte, légèrement plus rares chez *Buriti*. Les textes denses, qui regroupent plusieurs données dans une même phrase et semblent par conséquent nécessiter une relecture, sont peu abondants (8 % chez *Buriti*, moins de 6% dans les autres manuels). De fait, les quatre manuels, parce qu'ils sont adressés à des élèves de deuxième année d'école primaire, ont plutôt tendance à séparer les informations dans des phrases courtes, parfois elles-mêmes séparées par des questions sur les données, ce qui permet de les appréhender progressivement. Le manuel *Buriti* associe des illustrations à près de la moitié de ces textes (soit 22 % des consignes) suivi de près par *Nouveaux Outils*. Les deux autres manuels ne présentent des données textuelles accompagnées d'illustrations que dans un tiers des cas (soit 13 à 14 % des consignes).

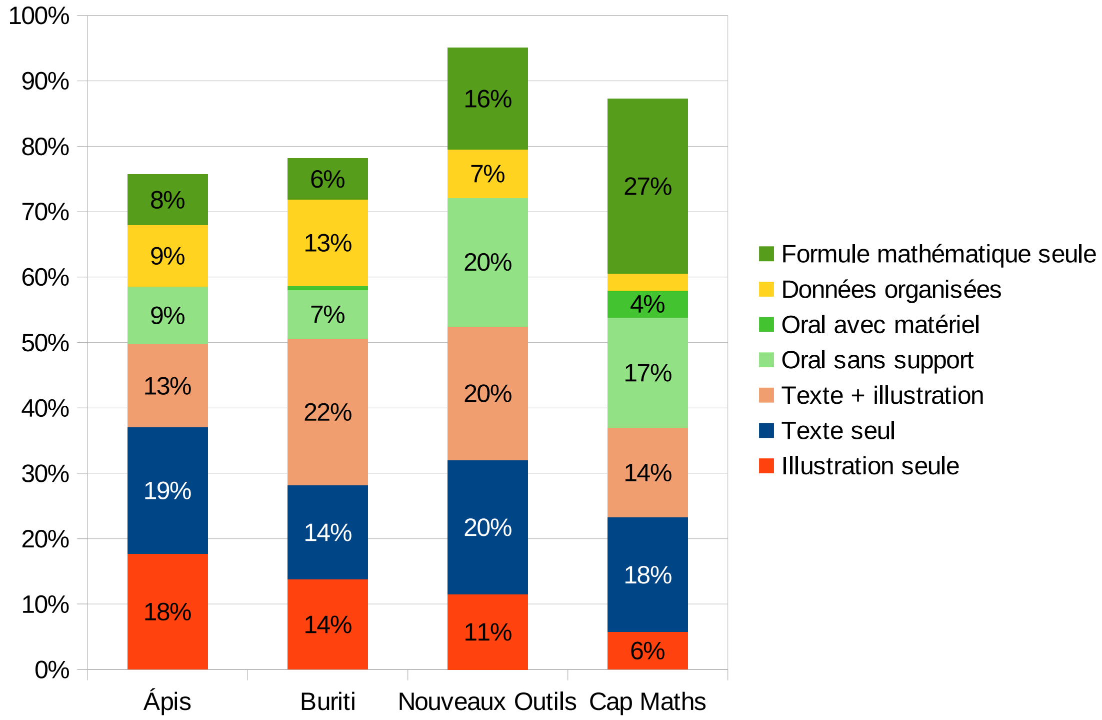


Figure 6: Part de certaines formes de données dans les consignes.

Concernant leurs propositions de travail à l'oral (sans texte), le tableau montre les différences entre les manuels : dans les deux manuels brésiliens, seulement 8 à 10% des consignes se rapportent à des données orales, contre 20 % pour les manuels français. Cette différence rejoint les disparités des apports du guide selon les manuels. On observait dans le 3.3 la variation de part des consignes issues du fichier, plus élevée dans les manuels brésiliens (de dix points de pourcentage). On y percevait que le guide a une place quantitativement plus importante dans les deux manuels français. *Nouveaux Outils* est le manuel présentant le plus de consignes entièrement orales (20 % des consignes), ceci étant dû à l'importance consacrée aux activités de calcul mental. *Cap Maths* propose quant à lui 17 % de données uniquement orales.

Les données organisées de manière spécifique sont peu fréquentes chez *Cap Maths*, et particulièrement présentes chez *Buriti* qui propose beaucoup de séquences logiques à compléter, voire à créer. *Cap Maths* est le manuel qui présente le plus de consignes sous forme de formule mathématique seule, à l'oral ou à l'écrit. Elles représentent en effet plus d'un quart des consignes de ce manuel, quand elles atteignent à peine 8 % dans les manuels brésiliens. Poser des questions sous cette forme dispense l'élève de toute l'étape de mathématisation mais permet de l'entraîner à manipuler ces formulations nouvelles et à les résoudre.

3.6.3 Les illustrations

La proposition d'illustrations est d'usage variable selon les manuels : le manuel *Ápis* en présente pour 42 % de ses consignes, tandis que seules 20 % des consignes de *Cap Maths* sont illustrées. Ces contrastes se retrouvent lorsque l'on s'intéresse aux données uniquement illustratives, pour lesquelles la part la plus grande est proposée chez *Ápis* (pour 20 % des questions du manuel). Au sein de ce livre, c'est la source la plus fréquente des données. Au contraire, dans les autres manuels, les illustrations seules sont plus rares que celles accompagnant un texte. Elles ne représentent que 6% des questions de *Cap Maths,* et environ le double dans les deux autres manuels.

La nature des illustrations elle-même est variée. Certaines ne représentent que l'environnement (le contexte) des quantités à calculer et ne présentent alors aucune donnée. J'ai qualifié ces illustrations d'auxiliaires, car elles accompagnent l'apprenant dans la construction de sa représentation de la situation. Elles correspondent aux illustrations-support selon Tonelli et Carmargo (2009, cités par Martinez 2012:56) qui classent les images des manuels en trois catégories suivant leur rôle dans l'activité : les illustrations esthétiques (aucun rôle), les illustrations fonctionnelles (rôle important) et les illustrations-support (rôle d' « éclairage »). Dans ces illustrations auxiliaires, on voit des personnages et/ou des objets évoqués par les autres sources de données, mais leur quantité représentée n'est pas à prendre en compte. L'aide apportée me paraît néanmoins très variable.

Je n'ai pas relevé d'illustrations esthétiques puisque j'ai trouvé une fonction à toutes les illustrations répertoriées. Néanmoins, on peut remarquer la présence de personnages qui ne font pas partie du contexte. Ni esthétiques ni fonctionnelles, ces illustrations ont un rôle d'identification des élèves à la méthode en jouant sur le psycho-affectif. Utilisés par les quatre manuels pour introduire des questions et dynamiser la progression, les personnages s'apparentent en effet à des camarades de classe (exemple dans le manuel *Ápis* dans l'2). Comme des élèves qui réfléchissent, ils permettent parfois d'entrer dans un questionnement et favorisent un conflit socio-cognitif (Illustration 31).

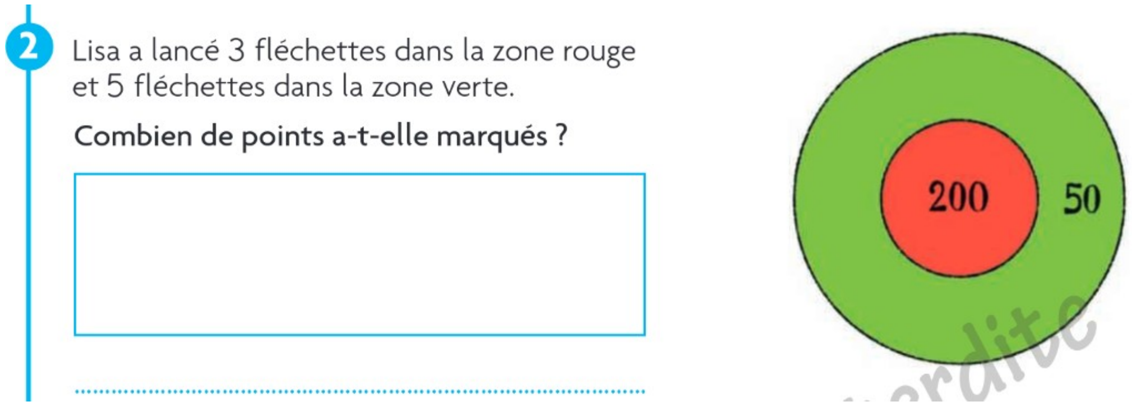


Illustration 24: Exemple d'illustration fonctionnelle complémentaire - manuel Cap Maths p. 84

Les autres illustrations sont fonctionnelles, en ce qu'elles font partie intégrante de l'activité. Elles peuvent présenter l'environnement en y introduisant certaines données, dans la forme sous laquelle on les trouverait dans le contexte, comme l'affichage de prix pour un billet de cinéma (manuel *Buriti* p. 133 et *Nouveaux Outils* p. 159)[28]. Certaines illustrations représentent les quantités à dénombrer, que ce soit en partie (données) ou totalement (résultat). Les données peuvent également être représentées par groupes dont l'unité n'est pas visible. Par exemple, un billet de 5 *reais* brésiliens est un groupement de *reais* par cinq (manuel *Ápis* p. 150). L'illustration contient toutes les données ; l'élève peut compter le nombre de billets mais il ne peut pas compter directement les *reais*. Il doit calculer, ou compter de 5 en 5 en pointant chaque billet. Au contraire, les illustrations permettant le comptage des données représentent le contenu d'un groupe (les unités) et le nombre de groupes est indiqué par ailleurs. L'élève peut itérer son comptage en pointant chaque unité du groupe (voir Illustration 9).

La Figure 7 présente pour chaque manuel le nombre et la part de ces différents types d'illustrations. On s'aperçoit que les illustrations permettant le comptage direct du résultat sont nombreuses dans les manuels *Ápis* et *Nouveaux Outils* avec une proportion

28 Considérant principalement l'environnement représenté, je n'ai comptabilisé ces textes que lorsqu'ils étaient conséquents (comme c'est le cas pour une recette de cuisine écrite « à la main » sur un bloc-notes).

respective de 65 % et 45 % des illustrations. Chez *Buriti*, les illustrations présentent majoritairement les données sans comptage du résultat. *Ápis*, qui est le manuel proposant le plus d'illustrations, ne présente pratiquement pas d'illustrations auxiliaires. *Cap Maths* et *Buriti* semblent présenter les quatre types d'illustrations de manière plus équilibrée.

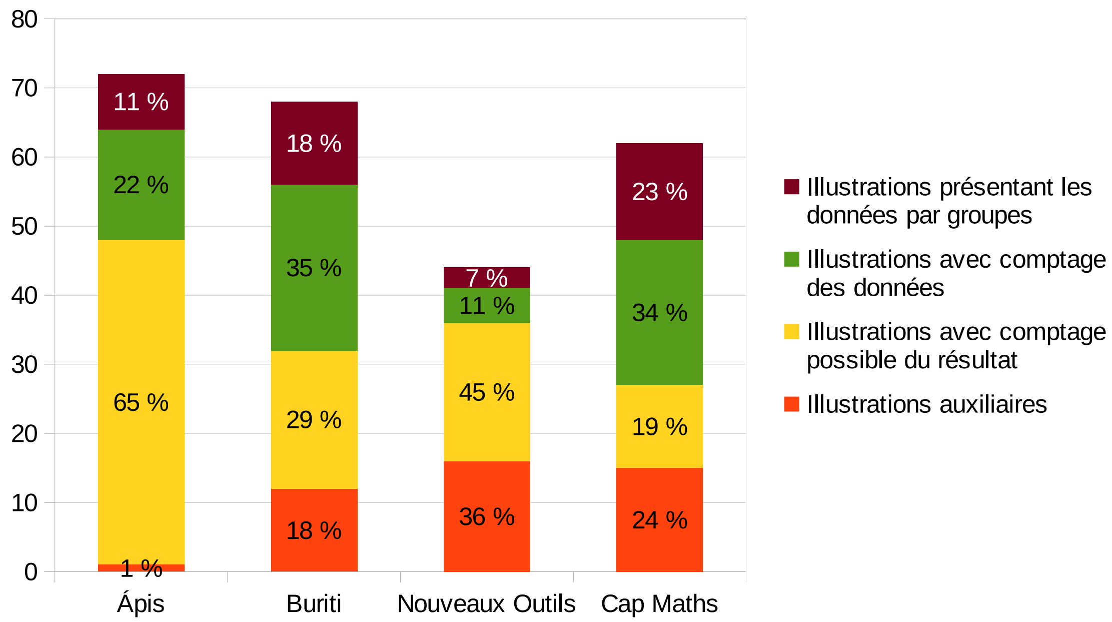


Figure 7: Rôles des différentes illustrations

3.6.4 Le matériel

Dans les critères facilitant la compréhension et l'accès des apprenants au sens des apprentissages figure l'importance de la manipulation. Moyen d'expérimenter, de tester en agissant et en observant, les manipulations représentent par le toucher un sens supplémentaire d'accès aux informations. De par la nature des exercices étudiés, cette forme de données n'est pas fréquente. Néanmoins, les guides suggèrent plusieurs activités basées sur la manipulation de matériel. Le Tableau 3.11 montre que du matériel est visible sans être manipulable dans trois des quatre manuels, et plus particulièrement avec la méthode *Cap Maths* qui présente 22 consignes basées sur du matériel visible. Généralement, ces consignes font partie de situations au cours desquelles les élèves sont amenés à manipuler ce matériel (7 consignes), ne serait-ce que par certains lors d'une vérification après les calculs (6 consignes). Globalement, le manuel *Nouveaux Outils* est celui qui suggère le moins d'activités avec un support matériel.

Pour une vision plus globale de l'utilisation des divers sens au cours des activités de chaque manuel, la Figure 8 présente la mobilisation de quatre sens[29]. La lecture a été séparée de la vision.

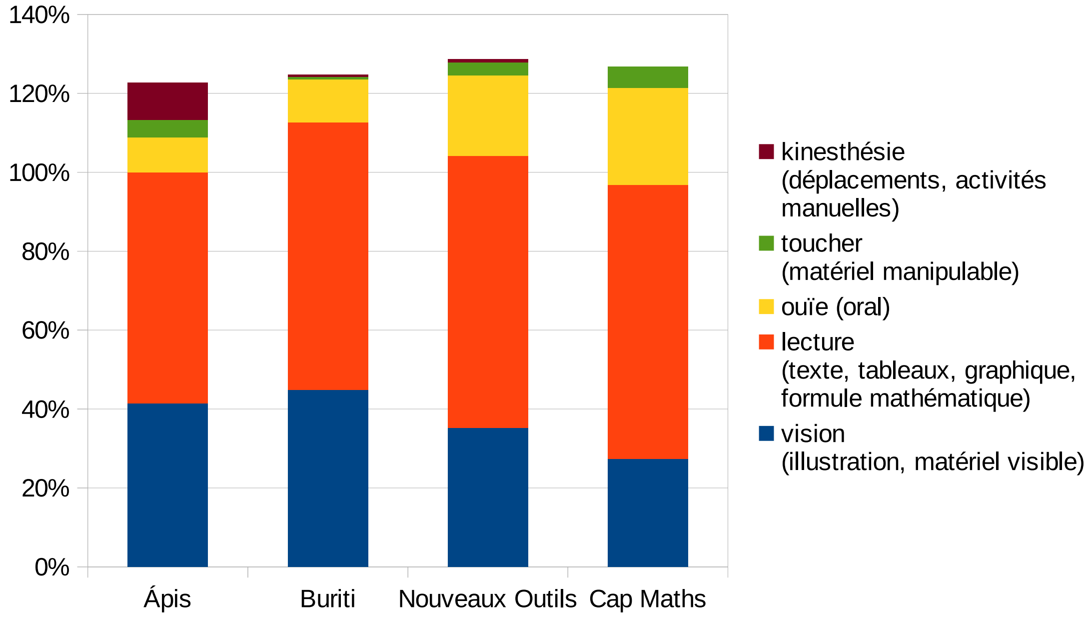


Figure 8: Mobilisation des sens par les manuels.

On y observe sans surprise que la lecture représente la part la plus importante des mobilisations par les manuels. La vision d'images ou de matériel en classe vient ensuite. L'oral, comme on l'a vu, est plus sollicité par les manuels français, mais c'est le manuel *Ápis* qui sollicite le plus de sens différents grâce aux nombreuses propositions kinesthésiques de déplacements et d'activités manuelles (découpages, mosaïques à colorer).

3.6.5 Les connaissances

Certains manuels font appel à des connaissances considérées comme acquises par tous en ne détaillant pas toutes les données. Se référant parfois à des apprentissages en cours d'acquisition comme la numération décimale, le calendrier (*Ápis* p. 150 et *Nouveaux Outils* p. 159) ou la demi-douzaine (*Buriti* p. 103), il peut aussi s'agir de connaissances extérieures à l'école que le manuel suppose acquises. Ainsi, le problème oral suivant,

> *Lisa voit 3 moutons dans un pré. Elle compte les pattes. Combien trouve-t-elle de pattes ?* (guide de *Cap Maths* p. 257, fichier p. 90)

29 Les pourcentages dépassent 100 % car plusieurs sens peuvent être mobilisés par une même consigne.

en n’indiquant que le nombre d’animaux et leur nature, amène l’élève à chercher dans ses connaissances les informations manquantes pourtant nécessaires au calcul ; ces informations sont implicites du fait du lien établi et partagé entre le nom d’un animal et son nombre de pattes. Lorsque plusieurs animaux (moutons et poules) sont ensuite rassemblés pour le problème écrit abordé le même jour et formulé de manière parallèle,

> *Lisa voit 5 moutons et 6 poules dans la cour de la ferme. Elle compte toutes les pattes de ces animaux. Combien de pattes a-t-elle comptées ?* (Id. p. 258)

des consignes intermédiaires de formulation des données pourraient expliciter le besoin et le nombre de ces données. Comme les auteurs n’en proposent pas, c’est à l’élève de penser que les deux animaux n’ont pas le même nombre de pattes et à en déduire qu’il y a deux données numériques différentes.

Il arrive aussi que des exercices nécessitent des connaissances qui sont moins partagées par tous. Dans le manuel *Ápis* par exemple, lorsqu’on demande *combien de joueurs sont nécessaires pour former cinq équipes de volley* (p. 150), le nombre de joueurs par équipe n’est pas indiqué. Le déroulement en classe peut alors contenir une étape préalable de partage de cette donnée manquante, profitant alors des connaissances de l’ensemble de la classe pour y rechercher l’information. C’est le cas dans le manuel *Buriti* (p. 100) également pour un calcul à propos des équipes de sport (voir chapitre 3.5.5 à propos de l’authenticité des groupements).

Ainsi, en ancrant certains exercices sur les connaissances préalables des élèves, il est tout à fait possible de contourner de possibles inégalités et de les rendre fructifiantes. Les auteurs des manuels peuvent en effet proposer des activités variées en lien avec un contexte, en poursuivant différents objectifs.

3.7 Types d’activités et objectifs poursuivis

J’expose dans ce chapitre mes analyses des activités déclenchées par les consignes. Comme nous le verrons, j’ai utilisé une grille de tâches à partir de laquelle j’ai effectué des regroupements, puis je présente la répartition des objectifs des activités.

3.7.1 Une description des tâches

Afin d’évaluer la variété des activités proposées, j’ai d’abord pensé à la taxonomie de Bloom (1956). Très utilisée en éducation pour formuler et apprécier les objectifs d’activités, elle répertorie six niveaux cognitifs d’apprentissage, allant du plus simple au plus complexe : la connaissance, la compréhension, l’application, l’analyse, la synthèse et l’évaluation. Les verbes d’action employés dans les consignes d’activités permettent de répartir celles-ci selon les niveaux de complexité cognitive (voir Illustration 25). Répertorier les tâches demandées à l’élève pourrait donc permettre de classer ensuite les consignes suivant cette taxonomie.

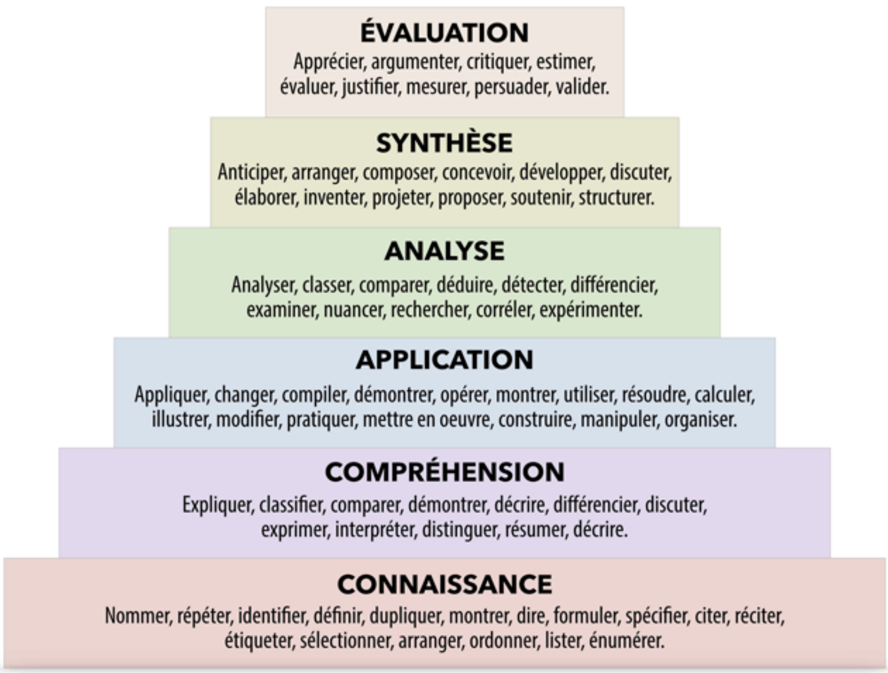


Illustration 25 : La taxonomie de Bloom des objectifs cognitifs d’apprentissage

J'ai construit dans ce but une grille de lecture déclinant 43 tâches élémentaires, en me demandant, pour chaque consigne ce que l'élève devait faire concrètement pour répondre naturellement à la question. La grille a évolué au fil des pages parcourues, car j'ai préféré créer un nouveau codage lorsque des différences me paraissaient potentiellement intéressantes, comptant sur les regroupements *a posteriori* (voir Tableau 6.12 en Annexe). La combinaison de plusieurs codages d'activités rend parfois mieux compte de l'activité de l'élève pour une même consigne, par exemple s'il doit manipuler les données avant de les utiliser sans qu'une question intermédiaire n'ait été posée. Mais cette association de plusieurs tâches complique les potentialités de post-traitement des données. De plus, mon questionnement est centré sur la compréhension qui est elle-même un des niveaux de la taxonomie. Enfin, dans son recueil de classifications des questions de mathématiques (2009:13), Bodin affirme, tout en reconnaissant qu'elle est « à l'origine de beaucoup d'autres taxonomies », que

> la taxonomie de Bloom a démontré son inadaptation aux mathématiques. Elle place en effet l'analyse après la compréhension et il est bien rare, en mathématiques, que l'analyse de la situation ne constitue pas un préalable à la compréhension (Ibid.).

Je présente alors par la Figure 9 la répartition des consignes telles qu'elles sont catégorisées *a priori* dans ma grille de codage. En effet, lors de sa construction, j'avais distingué sommairement le domaine de connaissance mobilisé et le produit de l'activité attendue par la consigne. La correspondance des différentes tâches avec ces domaines est consultable dans le Tableau 6.12 en Annexe. Du fait des associations de tâches, le diagramme ne se base pas sur l'ensemble des consignes, comme précédemment, mais sur l'ensemble (plus grand) des activités mises en œuvre par l'élève pour y répondre.

On constate que la production d'un résultat ne représente qu'un quart de l'ensemble des activités attendues dans les manuels, légèrement plus chez *Cap Maths*. Les consignes demandent plus souvent la formulation d'une multiplication chez *Ápis* et *Nouveaux Outils* (20 % des activités demandées), qui appellent également plus l'élève à formuler l'addition itérée que les consignes de *Buriti* et a fortiori de *Cap Maths*. Le vocabulaire est l'objet de moins de 8 % des activités des manuels, moins de 1 % chez *Cap Maths*. Ainsi les nouveautés que sont la formulation multiplicative et le vocabulaire du champ de la multiplication atteignent presque un quart des activités, sauf chez *Cap Maths* pour lequel ces activités représentent moins de 10 % des activités. Dans ce manuel certaines activités sont plus fréquentes que dans les autres : une grande part des consignes est consacrée au traitement des situations de division et aux liens avec les connaissances déjà acquises (tissage).

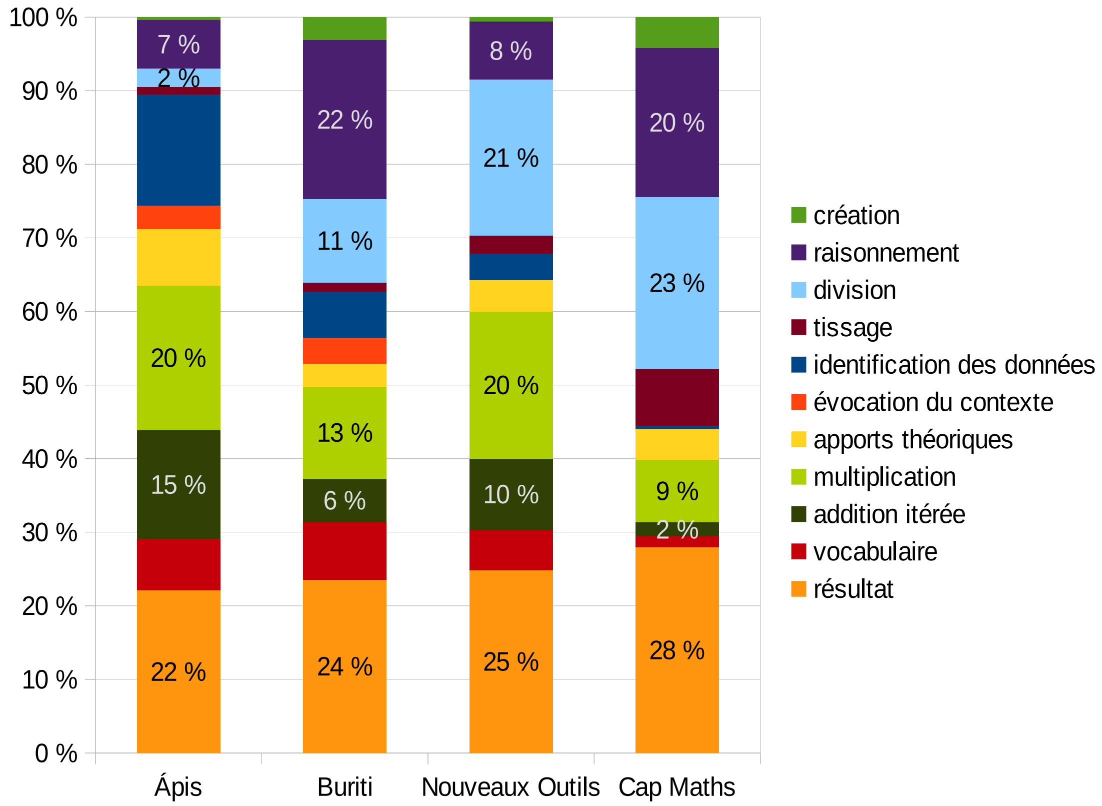


Figure 9: Répartition des activités demandées par les manuels selon les domaines de connaissance impliqués et le type de raisonnement

Les apports théoriques représentent deux fois plus d’activités chez *Ápis* que dans les autres manuels. L’identification des données est également une activité importante pour ce manuel. Enfin, les activités de raisonnement analytique et les rares activités de raisonnement créatif sont presque trois fois plus fréquentes dans les manuels *Buriti* et *Cap Maths* que dans les deux autres. Au total, cette première description donne un aperçu de ce qui est demandé mais ne renseigne que peu sur l’activité cognitive de l’élève. J’ai donc recherché comment les recherches et les enquêtes en mathématiques classaient les items.

3.7.2 Des tâches aux compétences

L'OCDE, dans le Cadre d'évaluation et d'analyse de l'enquête PISA (2017:72), distingue sept facultés fondamentales que sont la communication ; la mathématisation ; la représentation ; le raisonnement et l'argumentation ; la conception de stratégies ; l'utilisation d'opérations et d'un langage ; l'utilisation d'outils mathématiques. Selon cette grille d'aptitudes, la complexité d'un item augmente avec le nombre de facultés nécessaires pour y répondre. Toutefois, elle ne m'a paru adaptée aux cas d'activités d'apprentissage car j'éprouvais des difficultés à classer certaines activités de structuration. J'ai présenté en 2.2.2 les six compétences du programme français de mathématiques, à savoir : chercher, calculer, modéliser, représenter, raisonner et communiquer (MEN 2015b:74). Enfin, la pluralité des raisonnements en jeu fait partie des paramètres favorisant la construction de sens. C'est donc en m'inspirant de ces deux classifications et des différentes formes de raisonnements utilisés dans les démarches d'apprentissage que j'ai construit une grille plus développée de compétences, en lien avec les tâches renseignées auparavant (voir Tableau 3.12).

Tableau 3.12: Grille d'activités mathématiques de l'apprenant

Représenter	Changer le mode de représentation des données ou du résultat, transposer
Mathématiser	Formuler mathématiquement la situation
Interpréter	Interpréter les données ou les résultats en contexte
Formaliser	Lire et comprendre, expliquer, partager, synthétiser – communiquer
Créer	Imaginer des données, des contextes, des solutions multiples
Tisser	Faire des liens avec les connaissances déjà là, mathématiques ou contextuelles
Calculer	Donner le résultat d'un calcul
Résoudre	Donner la réponse à une question mathématique contextualisée
Chercher	Chercher des stratégies, des solutions possibles

La description des consignes selon cette grille permet de visualiser le panel de compétences sollicitées par chaque manuel, et notamment de différencier les raisonnements présentés dans la description précédente.

Ainsi, on observe sur la Figure 10 que la plus grande part des activités des manuels appellent l'élève à résoudre une question mathématisée sans qu'aucune indication de stratégie n’ait été donnée (*Résoudre*). Seul *Ápis* n’accorde pas la même importance à ce type de questionnement, et se centre plus sur la représentation et la mathématisation des situations. La mathématisation représente chez *Cap Maths* une faible part des questions et n’y est donc pas l’objectif de nombreuses questions, même intermédiaires. Le manuel *Cap Maths* se distingue également par sa part plus importante de questions de recherche et de calcul que celle observée dans les autres manuels. Cette méthode semble donc aborder les situations contextualisées de manière moins décortiquée et les séparant des questions de connaissances.

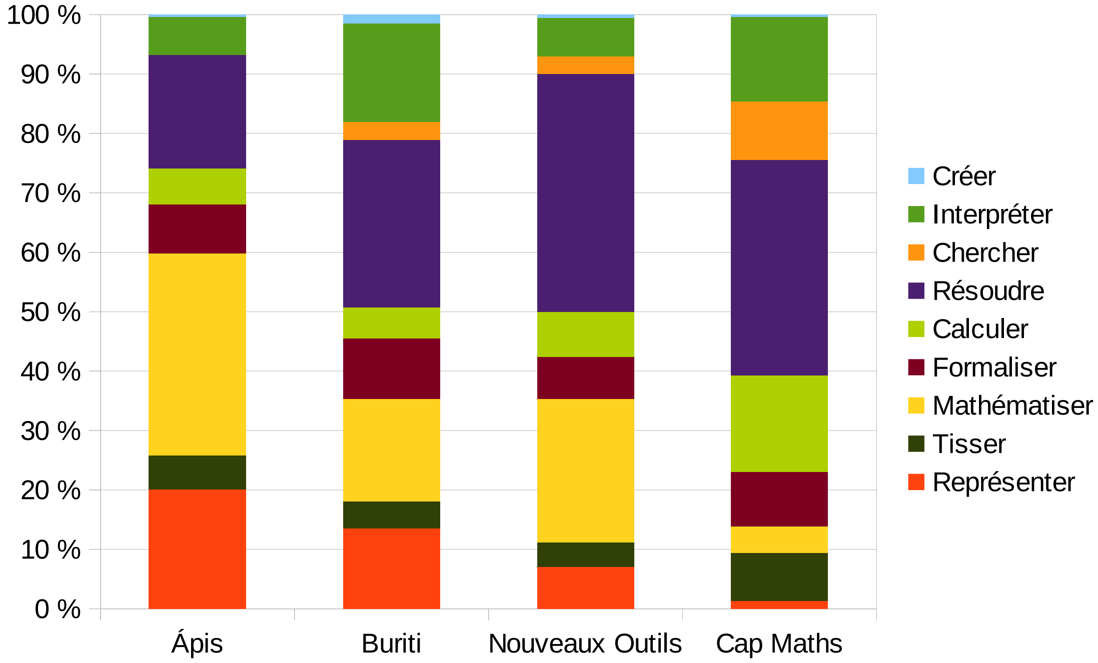


Figure 10 : Compétences mathématiques sollicitées par les consignes des manuels

Là encore, la description isolée des compétences ne permet pas de repérer leurs associations pour répondre à une consigne. Or, entre un calcul déjà présenté sous forme mathématique et un problème sous forme d’un récit, l’activité cognitive de l’élève diffère considérablement. Le premier ne fait appel qu’aux connaissances des formulations mathématiques, des algorithmes de calcul ou des résultats mémorisés. Le second nécessite la construction d’une représentation de la situation, l’extraction des informations pertinentes, la reconnaissance d’une structure mathématique permettant la mathématisation de la situation avant sa résolution et son interprétation dans le contexte du problème. Entre les deux, la plupart des exercices cherchent à faire construire par l’élève les connaissances, ou à développer les liens entre les connaissances à apprendre et les situations dans lesquelles elles peuvent être utilisées. Mes descriptions séparées des différents paramètres ne permettent pas de rendre compte d'enjeux plus globaux. Je me suis donc penchée sur les objectifs recherchés par les auteurs pour chaque consigne qu'ils proposent et je me suis tournée une fois de plus sur les classifications des questions mathématiques dans la littérature scientifique.

3.7.3 Les objectifs de l'activité

L'OCDE (Organisation de coopération et de développement économiques) analyse la littératie mathématique lors des enquêtes PISA selon trois aspects interdépendants : les contenus mathématiques utilisés pour traiter les questions, les contextes dans lesquels elles s'inscrivent et les processus mathématiques engendrés chez les individus pour les résoudre (Cnesco 2016:30). Les premiers sont peu divers dans mon étude puisque celle-ci est centrée sur une opération, et j'étudie les deuxièmes dans une autre partie. Ce sont les processus mathématiques (formuler, employer, interpréter et évaluer) et les capacités qu'ils englobent qui peuvent intéresser mon classement des activités demandées à l'élève, en décrivant plus globalement ce que les individus ont besoin de faire pour résoudre un problème contextualisé. Avec la conceptualisation de ces processus en cycle de modélisation (Voir Illustration 26), on retrouve l'idée d'un retour vers le contexte du problème après sa résolution mathématique.

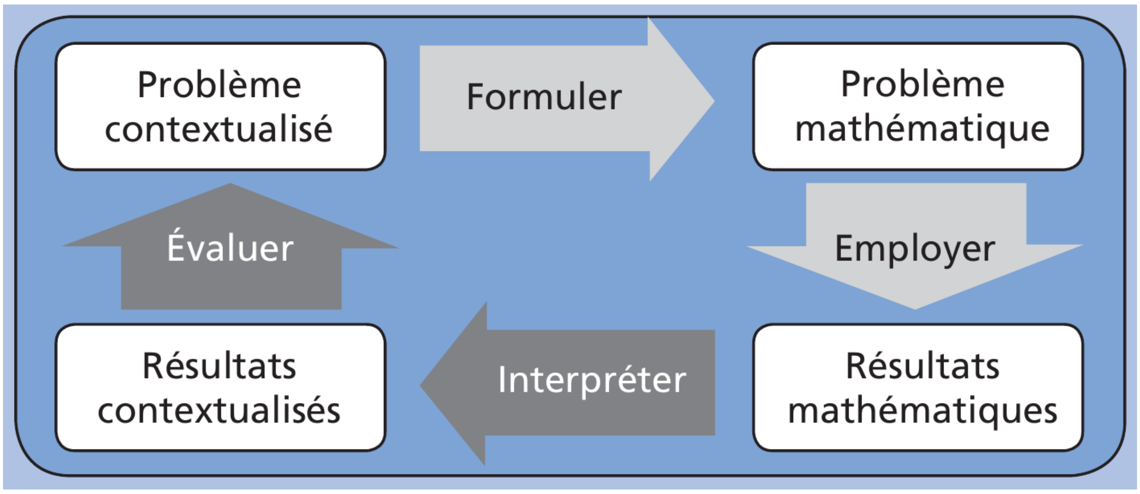


Illustration 26: Cycle de modélisation utilisé à partir de PISA 2012 (OCDE 2013).

> Dans la définition de la culture mathématique, le mot *formuler* désigne la capacité qu'a une personne d'établir et de reconnaître des possibilités d'utiliser les mathématiques, puis de structurer sous forme

> mathématique un problème présenté jusqu'à un certain point sous une forme contextualisée.
>
> […] Le verbe *employer* renvoie à la capacité des individus d'appliquer des concepts, des faits, des procédures et des raisonnements mathématiques pour résoudre des problèmes énoncés de façon mathématique afin d'aboutir à des conclusions mathématiques.
>
> […] Le verbe *interpréter* (et *évaluer*) renvoie à la capacité des individus de réfléchir à des solutions, à des résultats ou à des conclusions mathématiques et de les interpréter dans le cadre de problèmes tirés du monde réel à l'origine du processus (OCDE 2020:Raisonnement mathématique).

De structure proche, le cadre de référence des enquêtes TIMSS (Tendances Internationales dans l'Enseignement des Mathématiques et des Sciences) menées par l'IEA (International Association for the Evaluation of Educational Achievement) distingue trois compétences cognitives entremêlées (connaître ; appliquer ; raisonner) et regroupant chacune différentes capacités.

> Le premier domaine, *connaître*, couvre les faits, les concepts et les procédures que les élèves ont besoin de connaître, tandis que le deuxième, *appliquer*, met l'accent sur la capacité des élèves à appliquer les connaissances et la compréhension des concepts pour résoudre des problèmes ou pour répondre à des questions. Le troisième domaine, *raisonner*, va au-delà de la solution des problèmes de routine pour englober des situations inhabituelles, des contextes complexes et des problèmes à plusieurs étapes » (Mullis et al., 2013 traduit et cité par Cnesco, 2016, p. 55).

Les enquêtes TIMSS régulières portent sur deux niveaux scolaires dont l'un est élémentaire ce qui les rapproche de mon sujet d'étude. Ces enquêtes ont pour but la comparaison des enseignements et non l'évaluation et s'intéressent également aux curriculums d'enseignement. Une autre différence avec les études PISA est que les exercices proposés « sont le plus souvent placés d'emblée dans le monde mathématique et, lorsqu'ils ne le sont pas, leur [contextualisation] est beaucoup plus réduit[e] » (Id., p. 63). Or, pour la construction d'une culture mathématique pertinente et mobilisable par l'individu, la contextualisation, comme on l'a vu, joue un rôle majeur.

En m'inspirant fortement de ces deux cadres décrivant les items des enquêtes évaluatives, j'ai classé les questions des manuels de manière parallèle, en considérant l'objectif d'apprentissage qu'elles développent :

- la construction de la connaissance : la découverte et la manipulation d'un vocabulaire, d'un calcul, la construction de faits à mémoriser, de techniques et de méthodes ;
- le développement des capacités d'application : la capacité à relier ces connaissances à un contexte, à transposer ces connaissances dans un contexte, à repérer et manipuler les données à disposition ;
- le développement du raisonnement : la recherche de stratégies pour résoudre des situations jamais abordées et des problèmes à étapes.

Comme pour les typologies de PISA et de TIMSS, ces critères sont enchevêtrés car les questions qui développement le raisonnement font également appel à l'application, qui elle-même nécessite des connaissances. La Figure 11 présente la répartition des consignes selon l'objectif qu'elles poursuivent, en suivant la catégorisation présentée par le Tableau 3.13 que j'ai utilisée pour le codage.

Tableau 3.13 : Catégorisation utilisée pour le codage des objectifs

O1.	Connaissance
a)	découverte et construction
b)	entraînement
O2.	Application
a)	avec stratégie explicitée
b)	avec stratégie implicite : partie associée à une stratégie étudiée
c)	avec stratégie à retrouver : mélange avec d'autres types de problèmes
O3.	Raisonnement
a)	recherche : pas de stratégie préalable ou à adapter
b)	problème à étapes

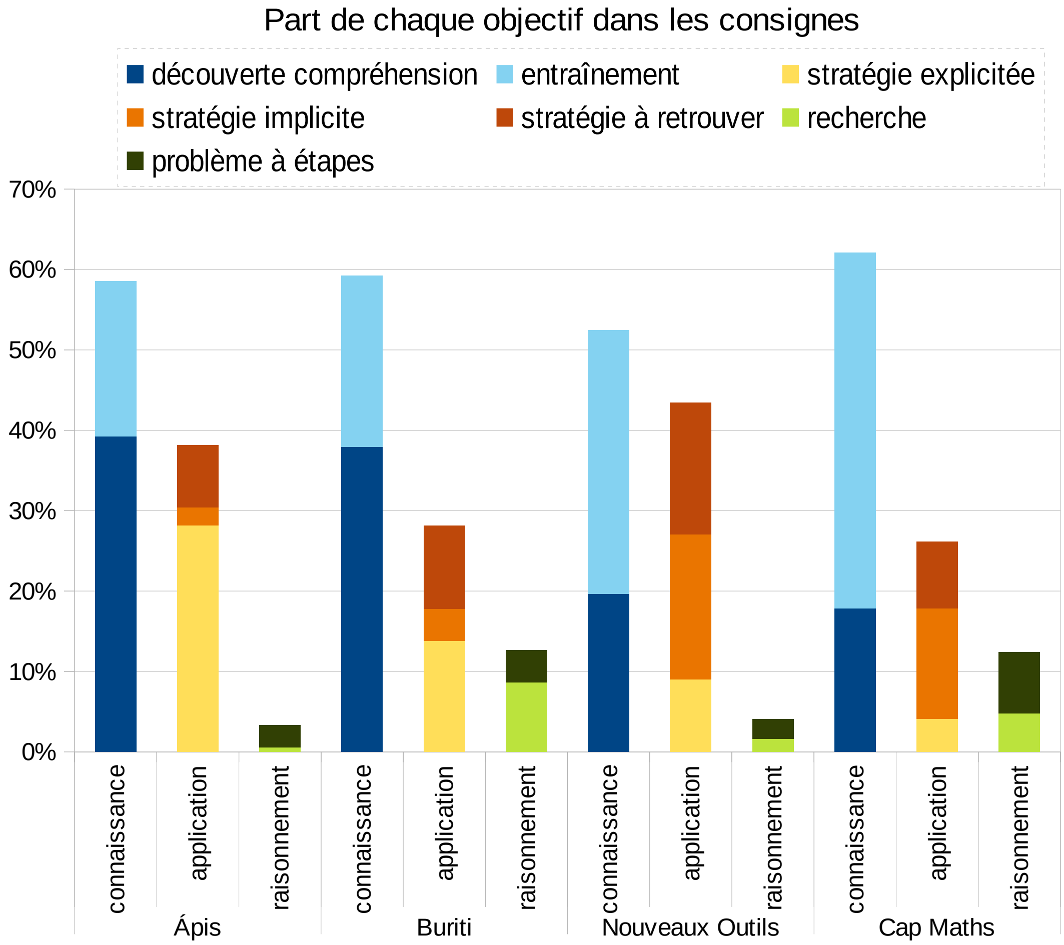


Figure 11: Part de chaque objectif dans les consignes

Sur cette vue globale issue d'un codage spécifique, on observe que la part de questions ciblant la connaissance varie peu d'un manuel à un autre, bien que légèrement plus faible chez *Nouveaux Outils*. Néanmoins la connaissance regroupe les activités de découverte et de structuration des concepts, mais également les entraînements. En s'intéressant à ces précisions, des différences significatives apparaissent entre les manuels brésiliens et les manuels français car les entraînements sont plus importants chez les seconds.

Concernant le développement des capacités d'application, *Nouveaux Outils* offre la plus grande part de questions d'application, et celles-ci sont relativement peu explicitées (moins d'un tiers de ces questions ont une stratégie explicitée). Les manuels brésiliens proposent 28 % à 38 % de questions d'application, mais la majorité d'entre explicitent et donc imposent (voire décortiquent) une stratégie à suivre.

Les manuels français présentent de nombreuses questions pour lesquelles la stratégie est implicite, c'est-à-dire qu'elle n'est pas écrite, mais que l'emplacement spatio-temporel de la consigne permet à l'élève de déduire une stratégie possible.

Enfin, les consignes sollicitant un raisonnement particulier de l'élève sont plus fréquentes dans *Buriti* et *Cap Maths* que dans les autres manuels. Le premier développe plus de recherche quand le second propose plus de problèmes à étapes.

À propos de ces divers degrés d'autonomie dans le choix d'une stratégie, De Vecchi et Carmona-Magnaldi alertent les enseignants :

> Les auteurs de manuels scolaires prennent souvent soin d'aménager les situations complexes afin qu'elles soient plus accessibles aux apprenants. […] Mais en réalité, ces activités relativement riches au départ, ne constituent plus que de simples exercices (2007, notes personnelles).

Charnay (1996:57) insistait déjà sur la nécessité de problèmes complexes, dans la mesure où leur difficile résolution est facilitée par le calcul littéral, ce qui motive l'étude de celui-ci. Ce n'est donc pas par hasard que *Cap Maths* accentue la lourdeur des additions itérées afin que les élèves ressentent le besoin d'abréviation que résout la multiplication : Roland Charnay est le directeur de cette collection. En proposant une telle complexité, c'est dans les mathématiques mêmes, et dans l'activité intellectuelle qu'elles permettent, que les apprenants trouvent de l'intérêt à l'apprentissage. Au contraire, les formes de motivation externes à l'activité mathématique, que peuvent être la contextualisation et le ludisme de l'activité, « ne doivent pas se substituer à la motivation véritable [qui] naît de la curiosité intellectuelle, de la volonté d'affronter des défis » (Charnay 1996, notes personnelles).

Au total, il y a plus de situations complexes chez *Buriti* et *Cap Maths,* et le développement des compétences d'application est moins décortiqué dans les manuels français, mais plus souvent rencontré dans les manuels *Ápis* et *Nouveaux Outils*.

4. Conclusion

Finalement, je constate des regroupements récurrents de manuels qui présentent des similitudes au regard de certains paramètres. Un premier groupement oppose *Ápis* et *Nouveaux Outils* à *Buriti* et *Cap Maths*. On le retrouve essentiellement pour ce qui concerne la démarche d'enseignement, déductive et très explicite dans les premiers, plus constructiviste et progressive dans les seconds. Je ne suis pas étonnée de voir des différences entre les manuels d'un même pays.

Le groupement par pays apparaît essentiellement pour la forme des contenus proposés, posant la question de ce qu'on attend d'un manuel scolaire. Au-delà de la standardisation visuelle de leur guide, les manuels brésiliens proposent un enseignement plus basé sur le fichier que celui des manuels français (et plus particulièrement *Cap Maths*) qui offre de nombreuses activités sans ce support écrit. Les activités des fichiers brésiliens paraissent relativement plus décortiquées, prenant en charge, à l'écrit, les étapes de la construction du savoir. La construction de sens passe par un usage plus marqué de contextes au Brésil, qui relèvent en grande partie de la vie quotidienne, quand les manuels français s'autorisent à proposer de nombreuses activités d'entraînement mathématique pur, entre la sollicitation des contextes pour la découverte constructive et celle visant le développement de l'application. On peut supposer que l'inscription de la contextualisation à l'évaluation par le PNLD accentue les recours aux contextes. Pourtant, nous l'avons vu, les entraînements ont aussi leur intérêt dans certaines phases d'apprentissage.

Les manuels étudiés proposent donc effectivement des situations contextualisées qui, dans la classe, font référence aux expériences extérieures des apprenants et mobilisent les affects. Ils présentent les situations sous diverses formes, qui sollicitent les sens et permettent la construction des langages spécifiques. Celle-ci est plus ou moins progressive selon les manuels. Les activités proposées sont globalement variées, même si la répétition paraît nécessaire à certaines étapes. Elles permettent aux apprenants d'exprimer leur point de vue. Enfin, les manuels abordent une grande partie du champ conceptuel dès le CE1 et préparent le terrain de la division.

Néanmoins peu de propositions cherchent à explorer et questionner le monde. Leur réponse est également moins positive concernant les activités de recherche et de résolution de problème. La compréhension des mathématiques passe par l'appropriation d'un nouveau langage, international, qui permet de répondre à des questionnements sur le monde. Il paraît donc essentiel que les apprenants questionnent ce qui les entoure et tentent d'y apporter une réponse avant qu'un outil et une stratégie ne leur soit imposée. Certains manuels introduisent artificiellement les contenus du programme comme nouvel outil, et seul le contrat scolaire suggère aux élèves de s'en emparer. On ressent chez *Nouveaux Outils* l'envie de susciter le besoin par des situations préalables de recherche, mais celles-ci sont très vite abrégées par la présentation de l'outil que les élèves sont priés d'utiliser, quand bien même leurs connaissances antérieures suffisaient. La méthode *Cap Maths*, qui semble provenir d'une longue réflexion didactique, aboutit à des propositions intéressantes dans une perspective socio-constructiviste. Outre les phases de recherche qui permettent aux apprenants de raisonner avec leurs moyens et de s'ouvrir aux raisonnements des autres, c'est la méthode qui établit le plus de connexions entre les connaissances précédemment acquises et celles visées. Or, nous avons vu que le réseau de connaissances est ce qui fait sens pour l'individu. *Cap Maths* ne le limite pas à une association aux connaissances expérientielles du monde extérieur.

Au total, chaque manuel répond en partie aux critères établis à partir des recherches et des programmes. Leurs propositions parfois complémentaires peuvent inspirer des pratiques enseignantes, qui risquent d'être restreintes si un seul manuel est utilisé. Toutefois, il ressort que les manuels ne proposent pas seulement des activités didactiquement intéressantes et réfléchies par des experts de différents horizons. C'est en réalité toute leur progression que les auteurs offrent, avec des propositions au-delà du fichier, l'établissement plus ou moins marqué de liens entre les différents champs au programme et la construction d'habitudes qui peuvent rassurer les jeunes élèves mais aussi risquer de circonscrire leur vision des mathématiques.

5. Bibliographie

Baruk, Stella. 2003. *Comptes pour petits et grands*.

Bertin, Didier. 2012.« Conquête de la multiplication à l'école élémentaire ».

Besset, Natacha, Guérin, Laurence, et Patrice Gros. 2016. *Les Nouveaux Outils pour les Maths CE1 (2016) - Fichier de l'élève*. Paris: Magnard.

Bittar, Marilena. 2017. « A Teoria Antropológica do Didático como ferramenta metodológica para análise de livros didáticos ». *Zetetike* 25(3):364-87.

Bodin, Antoine. 2009. « Comment classer les questions de mathématiques ? » 39.

BRASIL. 1996. « Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional ».

Camenisch, Annie. 2012. « Apprendre à écrire (aussi) en mathématiques : une démarche intégrée d'écriture de phrases ». *Québec français* (165):59-61.

Charnay, Roland. 1996. *Pourquoi des mathématiques à l'école ?* Paris: ESF éd.

Charnay, Roland. 2006.« La résolution de problèmes », janvier 26, SNUipp-FSU du CHER.

Charnay, Roland. 2008. « Mathématiques : apprendre ou comprendre ? » *Le Café pédagogique*. Consulté 14 mai 2020 (http://www.cafepedagogique.net/lesdossiers/Pages/2008/programmes08_Maths apprendreoucomprendre.aspx).

Charnay, Roland, et Michel Mante. 2014. *Mathématiques. Epreuve écrite d'admissibilité CRPE Tome 2*. Hatier.

Cnesco. 2016. *Comparaison des évaluations PISA et TIMSS. Vol.1 Analyse comparative des cadres de référence des deux enquêtes*. Cnesco.

CNRTL. s. d. « Mathématique ». *Portail lexical*. Consulté 4 mai 2020 (https://www.cnrtl.fr/lexicographie/mathematique).

Combier, Georges, Marie-Paule Dussuc, et Dany Madier. 2016a. *Cap maths CE1, cycle 2 [nouveaux programmes 2016] : fichier d'entraînement, nombres et calculs*. Paris: Hatier.

Combier, Georges, Marie-Paule Dussuc, et Dany Madier. 2016b. *Cap maths CE1, cycle 2 [nouveaux programmes 2016] : guide de l'enseignant*. Paris: Hatier.

Dante, Luiz Roberto. 2017. *Ápis matemática 2° ano*. 3e éd. São Paulo: Editora Ática.

De Vecchi, Gérard, et Nicole Carmona-Magnaldi. 1996. *Faire construire des savoirs*. Paris: Hachette éducation.

De Vecchi, Gérard, et Nicole Carmona-Magnaldi. 2007. *Faire vivre de véritables situations-problèmes*. 2015e éd. Paris: Hachette éducation.

Descaves, Alain. 1992. *Comprendre des énoncés, résoudre des problèmes*.

Didry, Jean-Marie. 1983. « Regards sur le problème ». *Grand N* (29):25-41.

Dodokal, Karine. 2012. « Donner du sens aux mathématiques   Tome 2 - Nombres, opérations et grandeurs ». *La classe de KaDo*. Consulté 12 août 2019 (http://kalolanea.hautetfort.com/archive/2012/12/31/donner-du-sens-aux-mathematiques-tome-2.html).

Durpaire, Jean-Louis, Jacques Moisan, Marie Mégard, Dominique Tournès, Michel Fayol, Bernard Sarrazy, Danièle Coquin-Viennot, Alain Mercier, Stanislas Dehaene, et Bruno Suchaut. 2008. *L'enseignement des mathématiques à l'école primaire*. Paris: Ministère de l'Éducation nationale - DIrection générale de l'enseignement scolaire.

Edições Educativas da Editora Moderna. s. d. « Projeto Buriti matemática e a base nacional comum curricular - Material para o professor ».

Fénichel, Muriel, et Nathalie Pfaff. 2005. *Donner du sens aux mathématiques : Tome 2 : Nombres, opérations et grandeurs*. Paris: Bordas.

IA21. 2011. « Résoudre des problèmes aux cycles 2 et 3 ».

Leroux, Hugo. 2020. « Anxiété mathématique : un mal très français - Science & Vie ». *Sciences et Vie*, février 25.

Levain, Jean-Pierre, et Gérard Vergnaud. 1994. « Proportionnalité simple, proportionnalité multiple ». *Grand N* (56):55-67.

Lopes, Sílvia Ednaira, et Regina Maria Pavanello. 2019. « Linguagem e Matemática na Resolução de Problemas ».

Martinez, Michelle Cristine Pinto Tyszka. 2012. « Um olhar para a abordagem do conteúdo de divisão de números naturais em livros didáticos de matemática dos anos iniciais do ensino fundamental ».

Martinez, Pierre. 1996. *Didactique des langues étrangères*. 2011e éd.

Ministère de l'Éducation Nationale. 2015a. « Programme d'enseignement de l'école maternelle ». *Bulletin officiel du ministère de l'éducation nationale* Bulletin officiel spécial(2):19.

Ministère de l'Éducation Nationale. 2015b. « Programmes d'enseignement du cycle des apprentissages fondamentaux (cycle 2), du cycle de consolidation (cycle 3) et du cycle des approfondissements (cycle 4) ». *Bulletin officiel du ministère de l'éducation nationale* Bulletin officiel spécial(11).

Ministère de l'Éducation Nationale. 2015c. « Socle commun de connaissances, de compétences et de culture ». *Bulletin officiel du ministère de l'éducation nationale* (17).

Ministério da Educação. 2018. *Base Nacional Comum Curricular*. Brásilia, DF.

Ministério da Educação. 2020. « Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) - Apresentação ». Consulté 5 mai 2020 (http://portal.mec.gov.br/pnld/apresentacao).

OCDE. 2013. *Cadre d'évaluation et d'analyse du cycle PISA 2012: Compétences en mathématiques, en compréhension de l'écrit, en sciences, en résolution de problèmes et en matières financières*. Éditions OCDE.

OCDE. 2015. « Qui a peur du Grand Méchant Maths ? » *PISA à la loupe* (48).

OCDE. 2017. *Cadre d'évaluation et d'analyse de l'enquête PISA pour le développement : Compétences en compréhension de l'écrit, en mathématiques et en sciences, version préliminaire*. Paris: Editions OCDE.

OCDE. 2020. « Cadre pour les mathématiques du PISA 2021 ». *PISA 2021 mathematics framework*. Consulté 13 mai 2020 (https://pisa2021-maths.oecd.org/fr/index.html).

Reis, Ana Queli, et Cátia Maria Nehring. 2017. « A contextualização no ensino de matemática: concepções e práticas Contextualization in the teaching of mathematics: conceptions and practices ». *Educação Matemática Pesquisa : Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática* 19(2):339-64.

Reuter, Yves, Cora Cohen-Azria, Bertrand Daunay, Isabelle Delcambre-Derville, et Dominique Lahanier-Reuter. 2013. *Dictionnaire des concepts fondamentaux des didactiques*. De Boeck Supérieur.

Roditi, Eric. 2016.« La théorie des champs conceptuels ».

Souza, Naiara Fonseca De. 2014. « Contextualização no ensino da álgebra: análise de livros didáticos do 7º ano ». 107.

Toledo, Carolina Maria. 2017. *Buriti Mais Matemática 2º ano : Manual do Professor*. 1°. São Paulo: Editora Moderna.

Toromanoff, Jean. 2018. « Les débuts de la multiplication à l'école » édité par Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public. *Au Fil des Maths* (527):6-11.

Vendramini, Célia Regina. 2005. « L'organisation du système d'enseignement au Brésil ». *Revue internationale d'éducation de Sèvres* (38):131-36.

Vergnaud, Gérard. 1989. « La théorie des champs conceptuels ». *Publications mathématiques et informatique de Rennes* (S6):47-50.

Vergnaud, Gérard. 1991. « Langage et pensée dans l'apprentissage des mathématiques ». *Revue française de pédagogie* (96):79-86.

Vieira, Gláucia Marcondes. 2004. « Estratégias de "contextualização" nos livros didáticos de matemática dos ciclos iniciais do ensino fundamental ». 139.

Viennot, Jacqueline, et Michèle Artigue. 1978. « Quelques réflexions à propos de la multiplication ». *Grand N* (15):43-68.

Villani, Cédric, et Charles Torossian. 2018. *21 mesures pour l'enseignement des mathématiques*.

Watthez, Christian. 2010.« Esprit mathématique, es-tu là ? », CESP Hainaut.

6. Annexes

Index des tableaux

Index des illustrations

Tableau 6.1: Compétences générales à développer tout au long de l'éducation de base (BNCC p. 9)

1. Valoriser et utiliser les connaissances historiquement construites sur le monde physique, social, culturel et numérique pour comprendre et expliquer la réalité, continuer à apprendre et collaborer pour la construction d'une société juste, démocratique et inclusive.
2. Exercer une curiosité intellectuelle et recourir à l'approche propre des sciences, incluant la recherche, la réflexion, l'analyse critique, l'imagination et la créativité, pour rechercher des causes, élaborer et tester des hypothèses, formuler et résoudre des problèmes et créer des solutions (dont les technologiques) en se basant sur les connaissances des différentes aires.
3. Valoriser et profiter des différentes manifestations artistiques et culturelles, des locales aux mondiales, et participer aussi à des pratiques diversifiées de la production artistico-culturelle.
4. Utiliser différents langages – verbal (oral ou visuo-moteur comme la langue des signes, et écrit), corporel, visuel, sonore et numérique -, mais aussi les connaissances des langages artistiques, mathématiques et scientifiques, pour s'exprimer et partager des informations, des expériences, des idées et des sentiments dans différents contextes et produire des significations qui mènent à une compréhension mutuelle.
5. Comprendre, utiliser et créer des technologies numériques d'information et de communication de manière critique, significative, réflexive et éthique dans les différentes pratiques sociales (dont les pratiques scolaires) pour transmettre, accéder et diffuser des informations, produire des connaissances, résoudre des problèmes et exercer un rôle et une responsabilité (?) dans la vie personnelle et collective.
6. Valoriser la diversité de savoirs et d'expériences culturelles et s'approprier des connaissances et des expériences qui permettent de comprendre les relations propres du monde du travail et faire des choix en accord avec l'exercice de la citoyenneté et avec son projet de vie, en faisant preuve de liberté, d'autonomie, de conscience critique et de responsabilité.
7. Justifier en se basant sur des faits, des données et des informations fiables, pour formuler, négocier et défendre des idées, des points de vue et des décisions communes qui respectent et promeuvent les droits humains, la conscience socio-environnementale et la consommation responsable dans l'environnement local, régional et mondial, avec un positionnement éthique en relation avec le soin de soi-même, des autres et de la planète.
8. Se connaître, s'apprécier et prendre soin de sa santé physique et émotionnelle, se situer dans la diversité humaine et reconnaître ses émotions et celles des autres, avec de l'autocritique et la capacité de vivre avec elles.
9. Exercer de l'empathie, du dialogue, la résolution de conflits et la coopération, en faisant respecter et promouvoir le respect de l'autre et des droits humains, en accueillant et valorisant la diversité des individus et des groupes sociaux, leurs savoirs, leurs identités, leurs cultures et potentiels, sans préjugé de quelque nature.
10. Agir personnellement et collectivement en faisant preuve d'autonomie, de responsabilité, de flexibilité, de résilience et de détermination, en prenant des décisions se basant sur des principes éthique, démocratiques, inclusifs, durables et solidaires.

Tableau 6.2: Les compétences mathématiques ciblées en fin d'éducation infantile.

Les notions mathématiques abordées au cours de l'éducation infantile se retrouvent dans le dernier champ d'expériences de la BNCC, intitulé « Espaces, temps, quantités, relations et transformations ».
- identifier, nommer de manière adéquate et comparer des propriétés d'objets, établissant des relations entre eux. […] - utiliser un vocabulaire spécifique relatif aux notions de grandeurs (plus grand, plus petit, égal, etc.), d'espace (dedans et dehors) et de mesures (long, court, épais, fin) comme moyen de communication de ses expériences. - utiliser des unités de mesure (jour et nuit ; jours, semaines, mois et années) et de temps (présent, passé et futur ; avant, maintenant et après) pour répondre à des nécessités et des questions du quotidien - identifier et enregistrer des quantités au moyen de différentes formes de représentation (comptage, dessins, symboles, écriture de nombres, organisation de graphiques basiques etc.) (BNCC, p. 55)

Tableau 6.3: Compétences spécifiques de mathématiques pour l'enseignement fondamental[30]

Compétences spécifiques de mathématique pour l'enseignement fondamental
1. Reconnaître que les mathématiques sont une science humaine, résultats des besoins et des préoccupations de différentes cultures, à différents moments historiques, et sont une science vivante, qui contribue à résoudre des problèmes scientifiques et technologiques et à ancrer des découvertes et des constructions, y compris avec des conséquences sur le monde du travail.
2. Développer le **raisonnement logique,** l'esprit d'investigation et la capacité à produire des arguments convaincants, en recourant aux connaissances mathématiques pour comprendre et agir dans le monde.
3. **Comprendre les relations** entre les concepts et les procédures des différents champs des Mathématiques (Arithmétique, Algèbre, Géométrie, Statistiques et Probabilités) et ceux d'autres aires de connaissances, se sentant en sécurité quant à sa propre capacité de construire et appliquer des connaissances mathématiques, en développant l'estime de soi et la persévérance dans la recherche de solutions.
4. Faire des **observations** systématiques d'aspects quantitatifs et qualitatifs présents dans les pratiques sociales et culturelles, de façon à étudier, organiser, **représenter** et **communiquer** les informations pertinentes, pour les **interpréter** et les évaluer de manière **critique** et **éthique**, en produisant des arguments convaincants.
5. Utiliser des processus et des **outils mathématiques**, incluant les technologies numériques disponibles, pour **modéliser** et résoudre des problèmes quotidiens, sociaux et d'autres aires de connaissances, en validant les **stratégies** et les résultats.
6. Affronter des situations-problèmes dans de multiples contextes, incluant des situations imaginaires, non directement en relation avec un aspect pratico-utilitaire, exprimer ses réponses et **synthétiser** les conclusions, en utilisant différents registres et **langages** (graphiques, tableaux, schémas, outre le texte écrit dans la langue maternelle et d'autres langages pour décrire des algorithmes, comme des fluxogrammes, et des données).
7. Développer et/ou discuter des projets qui concernent, notamment, des questions d'urgence sociale, ayant pour base des principes éthiques, démocratiques, durables et solidaires, et qui valorisent la diversité d'opinion des individus et des groupes sociaux, sans préjugé d'aucune nature.
8. **Interagir** avec ses pairs de forme coopérative, en travaillant collectivement dans la **planification** et le développement de **recherches** pour répondre à des questionnements, et dans la recherche de solutions aux problèmes, de manière à identifier des aspects consensuels ou non dans la discussion d'une question déterminée, en respectant le mode de pensée des autres et en apprenant avec eux.

30 BNCC 2018 p. 267

Tableau 6.4: Compétences concernant la multiplication en 3° ano.

Construction de faits fondamentaux de l'addition, de la soustraction et de la multiplication	(EF03MA03) Construire et utiliser des faits basiques de l'addition et de la multiplication pour le calcul mental ou écrit.
Problèmes impliquant différentes significations de la multiplication et de la division : addition de parties égales, configurations rectangulaires, répartition en parties égales et dimension.	(EF03MA07) Résoudre et élaborer des problèmes de multiplication par 2, 3, 4, 5 et 10) avec les sens d'addition de parties égales et d'éléments présentés en disposition rectangulaires, en utilisant différentes stratégies de calcul et des faits mémorisés.

Source: BNCC 2018

Tableau 6.5 : Critères éliminatoires communs du PNLD 2019

(Educação infantil et anos iniciais)

1. Respect de la législation, des directives et des normes officielles relatives à l'éducation infantile et à l'éducation fondamentale
2. Observation de principes éthiques et démocratiques nécessaires à la construction de la citoyenneté, au respect de la diversité et au vivre-ensemble social républicain.
3. Cohérence et adéquation de l'approche théorico-méthodologique assumée par l'œuvre, dans ce qui concerne la proposition didactico-pédagogique explicitée et les objectifs visés
4. Correction et actualisation de concepts, informations et procédures.
5. Adéquation de la structure éditoriale du projet graphique aux objectifs didactico-pédagogiques de l'œuvre
6. Observation de thèmes contemporains au sein des contenus de l'œuvre
7. Autres critères communs
   a) Présenter, de forme contextualisée, des propositions et/ou suggestions pour que les professeurs et les élèves accèdent à d'autres sources d'informations (radio, TV, internet etc.), en dehors des limites du livre didactique proprement.
   b) Contribuer au développement chez l'élève de l'autonomie de pensée, de raisonnement critique et de la capacité d'argumenter
   c) **Proposer des situations-problèmes qui stimulent la recherche de réflexion avant les explications théoriques**
   d) Proposer l'usage de laboratoires virtuels, de simulateurs, de vidéos, de films et d'autres technologies de l'information et de la communication
   e) **Stimuler la manifestation de la connaissance que l'élève détient déjà à l'entrée dans la salle de classe et établir des liens entre cette connaissance et la nouvelle connaissance.**
   f) Proposer des activités qui stimulent l'interaction entre les élèves, le vivre ensemble social et la reconnaissance de la différence dans la communauté scolaire, les familles et la population
   g) Aborder la diversité de l'expérience humaine et la pluralité sociale, avec respect et intérêt

h) Proposer des activités de terrain et des visites de musées, de centres de sciences, de parcs zoo-botaniques, d'universités, de laboratoires et d'autres espaces qui favorisent le processus éducatif

i) Offrir des orientations claires et précises sur d'éventuels risques dans la réalisations des expériences et des activités proposées afin de garantir l'intégrité physique des élèves, des professeurs et des autres personnes impliquées dans le processus éducatif

j) Approximer graduellement les principaux processus, pratiques et procédures d'analyse et d'investigation, au moyen de propositions d'activités qui stimulent l'observation, la curiosité, l'expérimentation, l'interprétation, l'analyse, les discussions de résultats, la créativité, la synthèse, les registres et la communication.

k) Insérer des lectures complémentaires de sources reconnues et actualisées, accompagnées de références bibliographiques, de notes de bas de page ou d'autres formes adaptées, qui amplifient les concepts et les informations, et sont, de fait, cohérentes avec le texte principal, en évitant les textes hermétiques, même s'ils sont de penseurs reconnus.

l) Mettre en valeur les discussions et rénovations, en les montrant actualisées en relation aux avancées théorico-méthodologiques récentes, acceptées par la communauté scientifique et incorporées au fil de la pensée qui est adoptée par la collection ou le manuel

m) Éviter le réductionnisme et les stéréotypes dans le traitement des questions sociales et naturelles

n) Présenter et discuter les différence politiques, économiques, sociales et culturelles de peuples et pays, sans discriminer ou traiter négativement ceux qui ne suivent pas le patron hégémonique, en évitant les visions distordues de la réalité et la propagation d'idéologies anthropocentriques et politiques, ou les deux

o) Représenter la pluralité sociale et culturelle du Brésil, au moyen de textes et d'illustrations exonérées de pré-concepts et de stéréotypes en relation au genre, à l'âge, à la religion, à d'autres régions du pays et d'autres nations du monde

p) Dépeindre les croisements de la population brésilienne, au moyen de textes et d'illustrations, en mettant en valeur la diversité ethno-raciale comme elle existe dans la réalité

q) Promouvoir positivement l'image d'afro-descendants et de descendants des ethnies indigènes brésiliennes, en considérant leur participation dans différents travaux, professions et espaces de pouvoir, sans restreindre son étude à l'initiation de l'occupation du territoire brésilien ou aux exemples de l'agriculture tropical produite avec la main d'œuvre esclave.

	Collection	Editeur	Quantité de livres vendus (manuel et guide)	Part des livres de maths	Pourcentage cumulé
1	ÁPIS MATEMÁTICA	EDITORA ATICA S.A.	3 000 908,00	23,00 %	23,00 %
2	BURITI MAIS - MATEMÁTICA	EDITORA MODERNA I	2 892 519,00	22,17 %	45,17 %
3	A CONQUISTA DA MATEMÁT	EDITORA FTD S A	1 653 918,00	12,68 %	57,85 %

Tableau 6.6: Les trois collections de manuels de mathématiques (PNLD 2019) les plus vendues au Brésil

Les deux premières collections représentent 45,17 % des ventes pour l'enseignement primaire (Anos iniciais do Ensino fundamental).

Source : Tabela dos valores de aquisição (FNDE s. d.)

	Titre	Editeur	année	Quantité de livres vendus (manuel et guide)	Proportion de livres de maths	Pourcentage cumulé
1	ÁPIS MATEMÁTICA - 2º ANO	EDITORA ATICA S.A.	2º ano	580 612	23,37 %	23,37 %
2	BURITI MAIS - MATEMÁTICA	EDITORA MODERNA LTDA	2º ano	541 957	21,82 %	45,19 %
3	A CONQUISTA DA MATEMÁTICA	EDITORA FTD S A	2º ano	308 862	12,43 %	57,62 %

Tableau 6.7 : Les trois manuels de mathématiques de 2° ano (PNLD 2019) les plus vendus au Brésil

Les deux manuels sélectionnés représentent 45,19 % des ventes pour la 2° ano.

Source : Tabela dos valores de aquisição (FNDE s. d.)

Tableau 6.8 : Ressources des collections pour l'élève.

Ápis (Ática)	- un fichier de **240 pages** (219 pages + 21 pages de matériel détachable)
Buriti (Moderna)	- un fichier de **224 pages** (187 pages + 37 pages de matériel détachable)
Nouveaux Outils pour les maths (Magnard)	- un fichier de **160 pages** (11,70€) - un cahier de géométrie de **48 pages** (4,50€)
Cap Maths (Hatier)	- un fichier de **122 pages** (111 pages + 11 pages de matériel détachable) 11,90€ - un cahier de Grandeurs et mesures, espace et géométrie de **64 pages** (4,10€) - un livret de cours et méthodes *Dico-maths* de **16 pages** (1,60€) - une application Android et Apple (payante)

Tableau 6.9: Ressources des collections pour l'enseignant.

Ápis (Ática)	- un guide de **292 pages** consultable en ligne . 240 pages de l'élève commentées en U, avec les réponses aux questions . présentation de la collection et de ses principes pédagogiques et didactiques . présentation du volume et des compétences du niveau d'enseignement - matériel numérique - "*Ápis* divertido": matériel détachable en complément du livre et jeux - cahier d'activités : activités complémentaires en lien direct avec le livre.
Buriti (Moderna)	- un guide de **275 pages**[31] . 224 pages de l'élève commentées en U, avec les réponses aux questions
Nouveaux Outils pour les maths (Magnard)	- un guide de **144 pages** téléchargeable dans sa totalité gratuitement sur le « site compagnon » (36€) . déroulement pédagogique de la découverte collective . corrigés des exercices, pistes de remédiation . avec un CD-ROM de ressources imprimables : matériel, évaluation, remédiation - une proposition de programmation sur l'année
Cap Maths (Hatier)	- un guide de **364 pages** téléchargeable gratuitement en ligne (24,10€) . programmation, principes de la collection, zoom sur les risques d'erreur [didactique++] . déroulement des séances, séances supplémentaires et suggestions . corrigés des exercices . avec CD-ROM de ressources imprimables : évaluations, bilans de compétences, matériel - fiches photocopiables pour les situations de recherche (33,40€) - matériel collectif (24 posters) ; les solides de l'école + livre de 90 activités et jeux de consolidation / remédiation + 90 activités interactives (clé usb) pour TNI [calcul mental] + guide d'activités pour la calculatrice

31 Les auteurs font des remarques fréquentes dans le manuel sur l'importance de rendre accessible du matériel manipulable (cf. p. 100) pour les élèves (ou de les laisser dessiner) sans pour autant préciser de quel type de matériel il peut s'agir, ni le fournir.

Tableau 6.10: Les auteurs des collections.

Ápis (Ática)	**Un seul auteur pour toute la collection** Luiz Roberto Dante, ancien professeur en enseignement primaire et secondaire, chercheur en enseignement des mathématiques, docteur en psychologie de l'éducation
Buriti (Moderna)	**10 à 14 auteurs selon les volumes dont un noyau fixe de 10 auteurs** collection dirigée par Carolina Maria Toledo, professeure de mathématiques - mathématiques : 4 auteurs + jusqu'à 4 auteurs supplémentaires - éducation en mathématiques : noyau de 6 auteurs
Cap Maths (Hatier)	**4 auteurs + 1 pour CM1-CM2** collection dirigée par Roland Charnay, professeur de mathématiques, chercheur en enseignement des maths, formateur ESPE / IEN - éducation en mathématiques : deux professeurs de mathématiques à l'ESPE + un pour le CM1-CM2, un professeur de mathématiques - éducation Premier Degré : un professeur des écoles
Nouveaux Outils pour les maths (Magnard)	**2 à 5 auteurs évoluant au fil de la collection** collection dirigée par Patrice Gros, inspecteur d'académie, pour le CP, CE1, CE2, et par Isabelle Petit-Jean, professeure des écoles, pour le CM1, CM2. - éducation premier degré : professeurs des écoles, conseiller pédagogique, IEN - éducation : inspecteur académique

Tableau 6.11 : Paramètres renseignés pour le recueil de données.

	Paramètre	Chapitre de traitement
1	Repères d'extraction : livre (fichier élève ou guide du professeur), page, chapitre, titres des partie et sous-partie	
2	Numéro de situation et numéro de consigne	3.2 Méthodes
3	Type de contextualisation (C0-C6 et mots clés)	3.5 Contextualisation
4	Degré d'authenticité du support et du lien entre le contexte et la tâche	3.5.5 Authenticité
5	Type d'activité demandée	3.7 Activités
6	Structure mathématique (Vergnaud)	3.4 Champ conceptuel
7	Objectif	3.7 Activités
8	Nombre de répétitions de la consigne	3.2 Méthodes
9	Forme des données et forme de la consigne	3.6 Données
10	Présence ou non d'un exemple de résolution (proche ou à distance, résolution au fur et à mesure)	
11	Modalité de travail (seul, en duo, en groupe, en classe) [données incomplètes et non analysées]	
12	Facteurs numériques en jeu [données incomplètes et non analysées]	
13	Éventuelles remarques	

Tableau 6.12: Grille de codage descriptif de l'activité attendue et classements a posteriori

Représenter	identification des données	indiquer les données	A1
Représenter	identification des données	manipuler les données	A1a
Interpréter	raisonnement	raisonner sur les données	A1b
Représenter	identification des données	représenter les données autrement	A1c
Représenter	identification des données	dessiner les données	A2a
Tisser	évocation du contexte	activité non mathématique (évoquer le conte	A0
Formaliser	apports théoriques	lire et comprendre (apports théoriques)	A13
Créer	création	créer ses propres données	A14
Créer	création	créer sa propre question	A14b
Tisser	tissage	distinction/lien avec une autre opération	A15
Tisser	tissage	lien avec le système décimal	A15b
Résoudre	division	trouver un facteur	A11a
Résoudre	division	trouver un facteur (QCM)	A11ac
Chercher	division	trouver deux facteurs	A11aa
Résoudre	division	diviser (par 2, par 5)	A11b
Résoudre	division	multiplication à trous	A11f
Mathématiser	addition itérée	complétion d’une addition itérée	A4
Mathématiser	addition itérée	QCM choix d’une addition itérée	A4c
Calculer	addition itérée	résultat d’une addition itérée	A4r
Mathématiser	addition itérée	rédaction complète d’une addition itérée	A5
Représenter	addition itérée	addition itérée sur calculatrice	A5b
Tisser	addition itérée	écrire l’addition itérée équivalente à la multip	A5e
Mathématiser	multiplication	complétion d’une multiplication	A6
Mathématiser	multiplication	QCM choix d’une multiplication	A6c
Tisser	multiplication	écrire la multiplication équivalente à l’additio	A6e
Calculer	multiplication	résultat d’une multiplication	A6r
Mathématiser	multiplication	rédaction complète d’une multiplication	A7
Représenter	multiplication	multiplication sur calculatrice	A7b
Calculer	multiplication	technique de la multiplication posée	A7t
Formaliser	raisonnement	formuler sa stratégie	A10
Chercher	raisonnement	décider d’utiliser ou non la multiplication	A10a
Formaliser	raisonnement	observer d’autres stratégies	A10b
Interpréter	raisonnement	observer les résultats	A12
Interpréter	raisonnement	possible ou non	A16
Interpréter	raisonnement	interpréter les résultats	A9
Représenter	résultat	dessiner ou former le résultat (support)	A2b
Résoudre ou calculer	résultat	indiquer le résultat (comptage possible)	A3a
Résoudre ou calculer	résultat	indiquer le résultat (comptage non possible)	A3b
Résoudre ou calculer	résultat	QCM choix du résultat	A3c
Chercher	création	donner plusieurs solutions possibles	A3d
Mathématiser	vocabulaire	complétion des chiffres	A8a
Mathématiser	vocabulaire	complétion d’un mot	A8b
Mathématiser	vocabulaire	QCM choix d’une phrase correcte	A8c

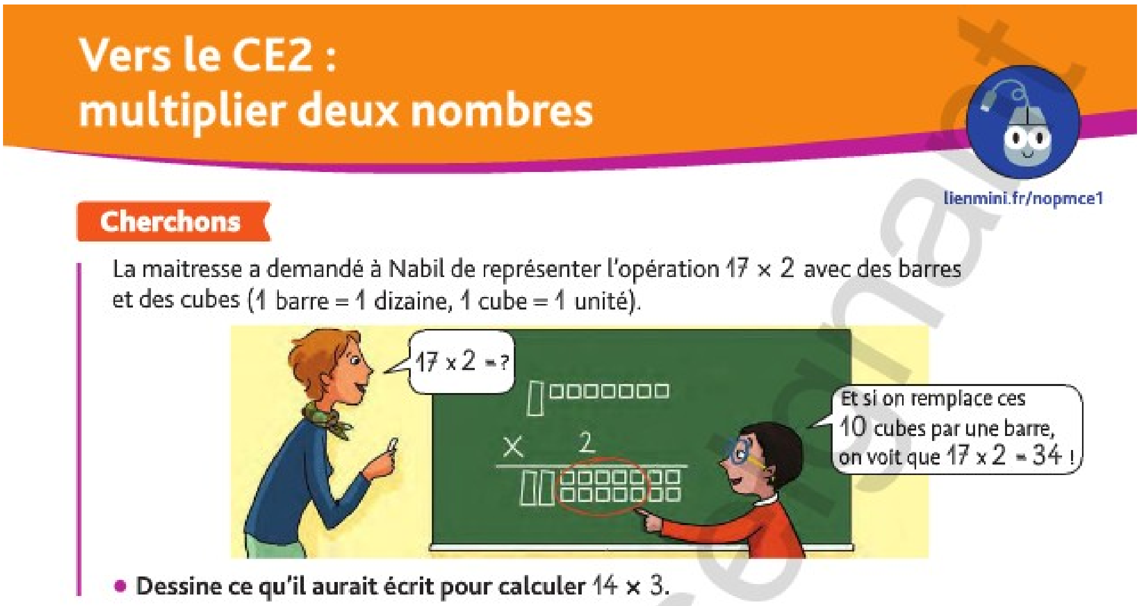


Illustration 27 : Un exemple de recherche qui n'en est pas une – manuel Nouveaux Outils p. 98

Illustration 28 : Un exemple de partie théorique – manuel Buriti p. 102

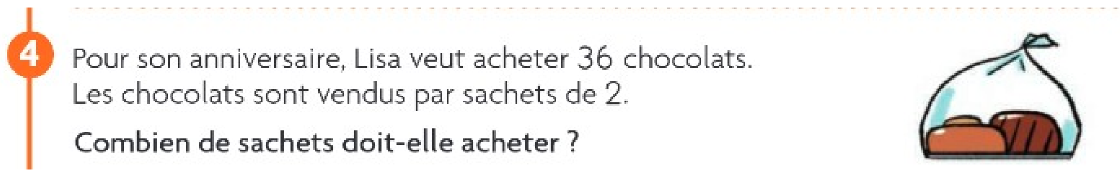


Illustration 29: Exemple d'illustration fonctionnelle redondante – manuel Cap Maths p. 86

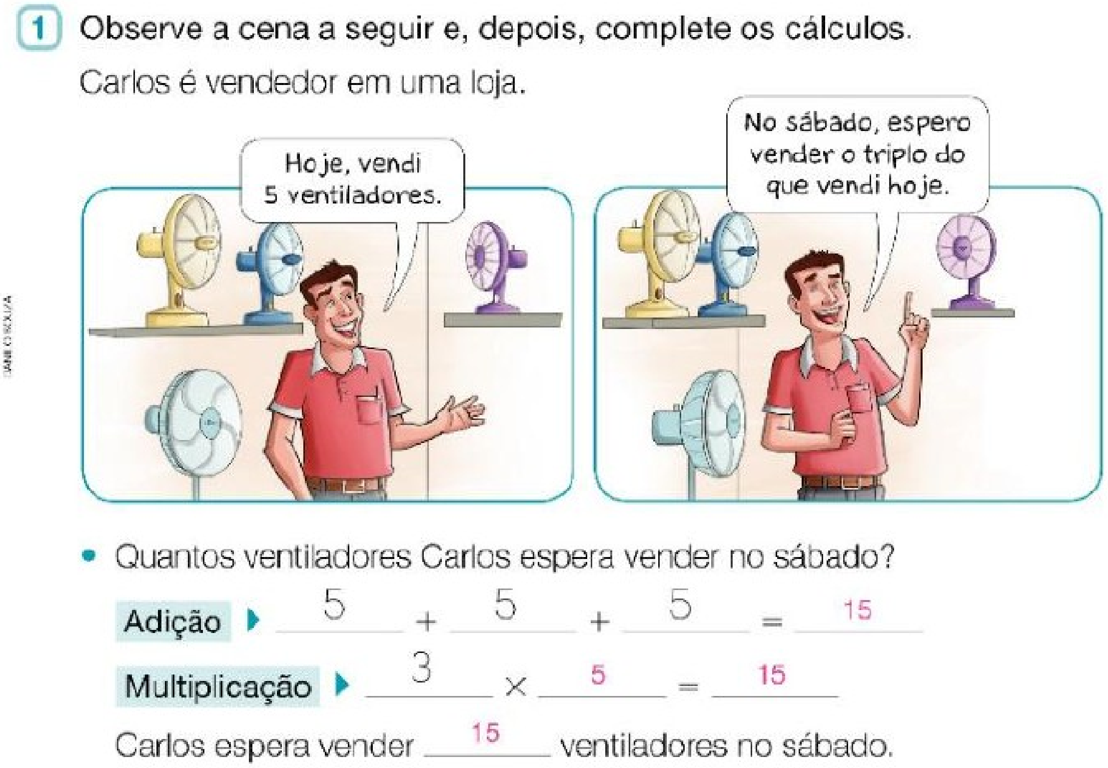


Illustration 30: Une situation professionnelle – manuel Buriti p. 104

Illustration 31: Questions posées par des personnages – manuel Buriti p. 107

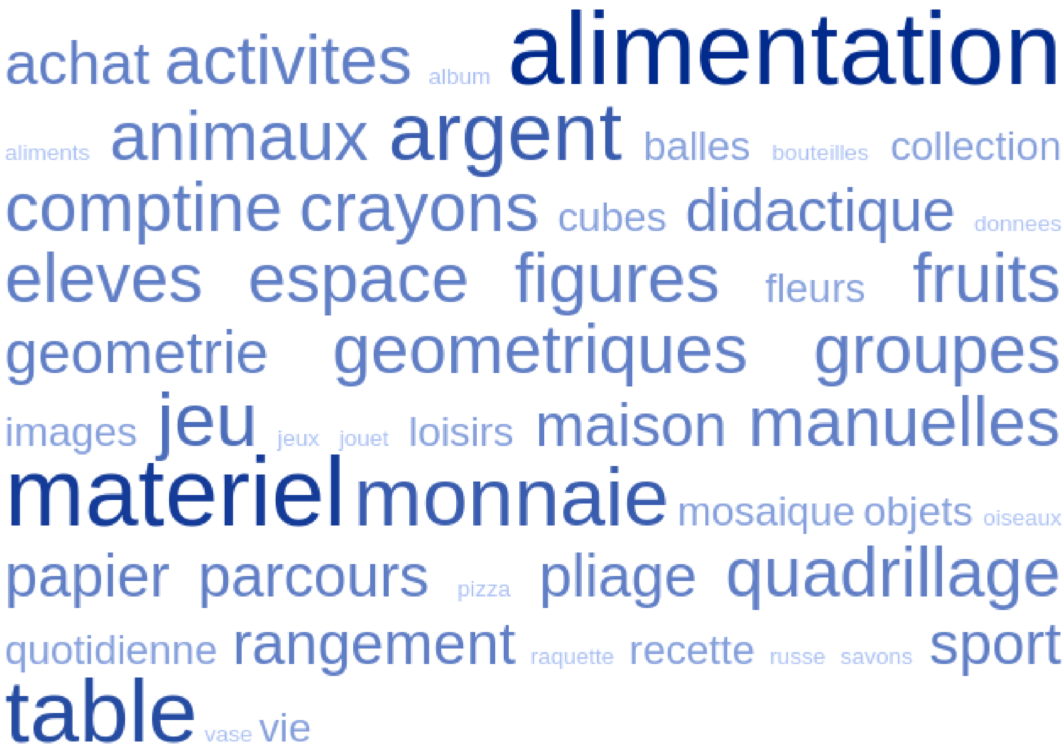


Illustration 32 : Nuage de mots représentant les consignes du manuel Apis.

Illustration 33 : Nuage de mots représentant les consignes du manuel Buriti

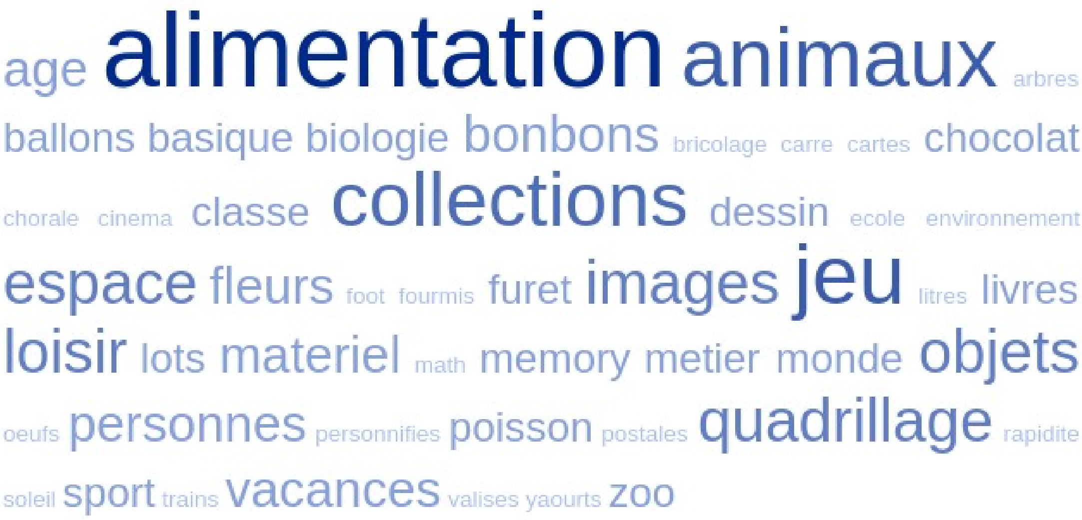


Illustration 34 : Nuage de mots représentant les consignes du manuel Magnard

Illustration 35 : Nuage de mots représentant les consignes du manuel Cap Maths

A matemática me ajuda a ser...

... um consumidor atento

Observe o folheto com as ofertas de um supermercado.

SUPERMERCADO

LEVE MAIS POR MENOS

Balas

10 unidades

BALAS 3 REAIS

Balas

40 unidades

EMBALAGEM ECONÔMICA 10 REAIS

Chocolate

100g

CHOCOLATE 2 REAIS

Chocolate

12 tabletes

EMBALAGEM ECONÔMICA COM 12 TABLETES 26 REAIS

As pessoas que moram com você costumam comprar produtos em oferta ou em embalagens econômicas?

Propaganda enganosa é crime! O anúncio enganador é aquele que conduz o consumidor ao erro, garantindo algo que, de fato, não vai acontecer.

É preciso estar sempre atento! Há ofertas e embalagens econômicas que não são realmente vantajosas para o consumidor.

110 cento e dez

Illustration 36 : « Les mathématiques m’aident à être… un consommateur attentif » – manuel Buriti p. 110

Tome nota

1 Você acha que as duas ofertas do folheto são vantajosas? Resposta pessoal.

2 O que é mais vantajoso: comprar a embalagem econômica com 12 tabletes de chocolate ou comprar 12 tabletes separadamente?

12 tabletes separadamente.

3 Se comprar a embalagem econômica de balas, você vai economizar? Explique.

Sim, pois cada pacote com 10 balas custa 3 reais, e 4 desses custariam 12 reais.

4 A propaganda "LEVE MAIS POR MENOS" do folheto é verdadeira?

No caso da embalagem econômica de chocolate, não é verdadeira.

Reflita

1 Quais deveriam ser os preços das embalagens econômicas do folheto para que o consumidor realmente tivesse vantagem?
Exemplo de resposta: Balas: preço menor que 12 reais; chocolate: preço menor que 24 reais.

- Como você fez para chegar a esses valores?
Espera-se que os alunos multipliquem o preço da embalagem de 10 unidades de balas por 4 e o preço do tablete de chocolate por 12.

2 Marque com um **X** as ofertas vantajosas.

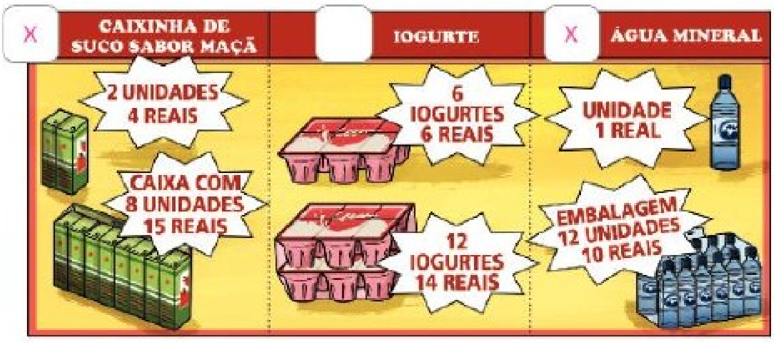


Illustration 37 : Critiquer une promotion par le calcul – manuel Buriti p. 111