



Universidade de Brasília

OPERADORES DE REDUÇÃO PARA
COMPLETAMENTO DE SISTEMAS DE REESCRITA

Andrés Felipe González Barragán

Orientadora:

Daniele Nantes Sobrinho

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

2021

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Operadores de Redução para Completamento de Sistemas de Reescrita

por

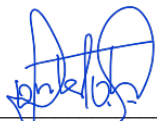
Andrés Felipe González Barragan*

*Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade
de Brasília, como parte dos requisitos para obtenção do grau de*

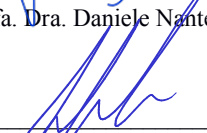
MESTRE EM MATEMÁTICA

Brasília, 22 de janeiro de 2021.

Comissão Examinadora:



Prof. Dra. Daniele Nantes Sobrinho - MAT/UnB (Orientadora)



Prof. Dr. Alex Carrazedo Dantas – MAT/UnB (Membro)



Prof. Dra. Thaynara Arielly de Lima – UFG (Membro)

* O autor foi bolsista da CAPES e do CNPq durante a elaboração desta dissertação.

Ficha catalográfica elaborada automaticamente,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

GG643o González Barragan, Andrés Felipe
Operadores de Redução para Completamento de Sistemas de
Reescrita / Andrés Felipe González Barragan; orientador
Daniele Nantes Sobrinho. -- Brasília, 2021.
86 p.

Dissertação (Mestrado - Mestrado em Matemática) --
Universidade de Brasília, 2021.

1. Procedimento de Completação. I. Nantes Sobrinho,
Daniele , orient. II. Título.

Agradecimentos

A Deus por todas as benções que tem me dado, a oportunidade de estar aqui no Brasil e me proteger em todo momento.

A meus pais Martha e Marco que desde longe sempre foram um apoio incondicional, sempre me deram as forças para continuar e por eles é que cheguei até onde estou.

Aos meus amigos Carlos, Leticia, Angy, Eva e Fernando por seus conselhos e apoio incondicional em todo momento, a Katianny e Vinicius por todas as ajudas no português, nas correções e me receber na sua casa.

A minha orientadora Daniele Nantes e ao professor Mauricio Ayala pelo apoio acadêmico, por me ensinar e me orientar para poder fazer possível este trabalho.

Aos professores, Alex Carrazedo e Thaynara Arielly, pelas correções, sugestões e contribuições para a versão final deste trabalho.

Ao CNPq e CAPES pelo financiamento durante a construção deste trabalho. A todos vocês o meu sincero agradecimento.

Resumo

Esta dissertação apresenta um estudo do procedimento de *completação*, introduzido recentemente por Cyrille Chenavier, que consiste em completar um conjunto de identidades que sejam suficientes para representar uma álgebra, utilizando os chamados *operadores de redução*, que são endomorfismos lineares idempotentes sobre um espaço vetorial gerado por um conjunto finito e ordenado. A abordagem de Chenavier consiste na definição de uma ordem parcial sobre os operadores de redução que os enriquecem com a estrutura de reticulado a qual permite definir um sistema abstrato e o conceito de completção através destes operadores. Apresentamos detalhes das demonstrações de resultados inspirados no trabalho de Chenavier. Além disso, se apresentam os diferentes conceitos que se trabalham na teoria de reescrita como confluência, terminação, propriedade Church-Rosser entre outros, para estes operadores de redução.

Palavras-Chave: Sistemas de reescrita, Terminação, Confluência e Procedimento de Completção.

Abstract

This dissertation presents a study about the *completion procedure*, introduced by Cyrille Chenavier, which consists of completion of a set of identities that are sufficient to represent an algebra, using the called *reduction operators*, which are idempotent linear endomorphisms over a vector space generated by a finite and ordered basis. We will define a partial order over the reduction operators that will enrich them with a lattice structure which will allow us to define an abstract reduction system and also the completion through these operators. We present the demonstrations of results inspired by the work of Chenavier where this approach and its properties are proposed. Moreover, the different concepts that are worked on in the rewriting theory such as confluence, termination, Church-Rosser property among others are presented from the reduction operators.

Keywords: Rewriting System, Termination, Confluence and Completion Procedure.

Conteúdo

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Introdução | 3 |
| 2 | Preliminares | 7 |
| 2.1 | Sistema de rescrita da palavra | 7 |
| 2.2 | Relações de Ordem | 11 |
| 2.3 | Conceitos Básicos de Álgebra Linear | 12 |
| 3 | Operadores de redução e propriedades | 16 |
| 3.1 | Operadores de redução | 16 |
| 3.1.1 | Matrizes de redução | 17 |
| 3.2 | Bases de redução | 21 |
| 4 | Obstruções e Confluência | 35 |
| 4.1 | Uma Relação de Ordem Parcial | 35 |
| 4.2 | Obstruções | 40 |
| 4.3 | Propriedade Church-Rosser e Lema de Newman | 45 |
| 4.3.1 | Propriedade de Church-Rosser | 47 |
| 4.3.2 | Confluência local | 52 |

| | |
|--|-----------|
| 5 Operadores de Redução e Completação | 54 |
| 5.1 Sistema Abstrato de Reescrita | 54 |
| 5.2 Confluência para um par de operadores de redução | 58 |
| 5.2.1 Completação | 68 |
| Referências | 77 |

Capítulo 1

Introdução

Em Matemática, geralmente definimos classes de estruturas algébricas (grupos, anéis, corpos, etc) a partir de identidades, e precisamos determinar quais identidades derivam de outras, para que possamos tratar de um conjunto minimal de identidades que seja *completo* o suficiente para modelar tal estrutura. Por exemplo, podemos definir a adição dos números naturais $+$ usando a constante 0 e a função sucessor s através do seguinte conjunto de identidades:

$$\begin{aligned}x + 0 &\approx x; \\x + s(y) &\approx s(x + y).\end{aligned}$$

Aplicando estas identidades é possível calcular a soma de 1 (representado como $s(0)$) com 2 (representado como $s(s(0))$) como:

$$s(0) + s(s(0)) \approx s(s(0) + s(0)) \approx s(s(s(0) + 0)) \approx s(s(s(0))).$$

Neste cálculo, interpretamos as identidades como regras de reescrita.

$$\begin{aligned}x + 0 &\rightarrow x; \\x + s(y) &\rightarrow s(x + y).\end{aligned}$$

Através da completção das regras pode-se modelar a adição dos naturais.

De maneira mais geral, um *Sistema Abstrato de Redução* (SAR) é um par (A, \rightarrow) onde \rightarrow é uma relação binária, chamada *redução*, sobre um conjunto A . Redução pode ser

utilizada em vários contextos, por exemplo, para modelar o caminho transversal por um grafo dirigido, computação passo a passo, raciocínio dentro de álgebras, etc.

Algumas propriedades são essenciais para sistemas abstratos de redução:

- \rightarrow é *terminante*, isto é, não existem cadeias infinitas de redução $a_0 \rightarrow a_1 \rightarrow a_2 \rightarrow \dots$;
- \rightarrow é *confluente*, isto é, sempre que houver uma divergência do tipo $a_0 \rightarrow \dots \rightarrow a_1$ e $a_0 \rightarrow \dots \rightarrow a_2$, existe um elemento b , para o qual os elementos a_1 e a_2 convergem: $a_1 \rightarrow \dots \rightarrow b$ e $a_2 \rightarrow \dots \rightarrow b$;

Outras propriedades, serão descritas nas Definições 2.5 e 2.6.

Consideraremos uma versão de SAR chamado *Sistema (Abstrato) de Redução da Palavra* denotado por (X^*, \rightarrow) , em que \rightarrow é uma relação de redução sobre o conjunto X^* de palavras sobre um alfabeto finito X (Definição 2.2). E investigaremos o respectivo conjunto de regras, chamado de *Sistema de Reescrita da Palavra (SRP)* denotado por $\langle X^* \mid R \rangle$, que irá compor a relação \rightarrow .

Um dos objetivos quando se estuda os SRP é obter um sistema de reescrita *convergente*, ou seja, um sistema terminante e confluente, que são usados principalmente na teoria de reescrita para resolver o problema de decisão, chamado *problema da palavra*, que consiste em determinar se duas palavras são iguais (dentro de determinada álgebra) através de um conjunto de identidades.

Com o intuito de obter a propriedade de convergência de algum sistema de reescrita, primeiro equipamos tal sistema de reescrita com uma *boa ordem* para garantir a terminação, e depois verificamos se divergências podem ser fechadas com as identidades já existentes no sistema. No caso em que novas identidades precisam ser adicionadas, inicia-se o processo de completção, e a confluência é obtida se apenas um número finito de novas identidades precisam ser adicionadas para que todas as divergências se fechem. Mais detalhes sobre o processo podem ser obtidos em [BN98].

A seguir daremos uma ideia geral da abordagem proposta para esta interpretação aos sistemas de reescrita da palavra para logo dar uma breve síntese do que será apresentado em cada capítulo.

Interpretação dos sistemas de reescrita da palavra. O método consiste em considerar uma aplicação idempotente que modele as regras de reescrita, os chamados operadores de redução. Este método funciona para sistemas de reescrita da palavra *semi-reduzidos*, ou seja, sistemas que tem a seguinte propriedade:

1. Os lados esquerdos das regras são distintos dois a dois;
2. Nenhum lado direito de uma regra é o lado esquerdo de outra regra.

Considere um sistema de reescrita da palavra $\langle X^* \mid R \rangle$, com alfabeto X e conjunto de regras de reescrita R , equipada com uma ordem de redução $<$, no Teorema 3.2 garantimos que, usando esta ordem, o sistema $\langle X^* \mid R \rangle$ pode ser transformado em um único sistema de reescrita da palavra semi-reduzido. A aplicação que modela as regras $S : X^* \rightarrow X^*$ é definida por:

1. $S(l(\alpha)) = r(\alpha)$, para cada $\alpha \in R$ tal que $r(\alpha)$ é o lado direito da regra e $l(\alpha)$ é o lado esquerdo;
2. $S(w) = w$ se não há elemento de R que tenha ocorrências de $l(\alpha)$ em w .

A ordem $<$ garante a terminação. Então, basta mostrar a confluência para determinar a convergência. Esta aplicação permite caracterizar as formas normais para $\langle X^* \mid R \rangle$ que serão palavras que ficarão fixas por todas as extensões de S . Mais especificamente,

- Dada uma palavra w , denotaremos por $[w]$ a classe de w com respeito à relação de equivalência induzida por R ;
- Como a ordem $<$ é bem fundada, $[w]$ admite um elemento mínimo;
- Definiremos uma aplicação $M : X^* \rightarrow X^*$ que envia cada palavra a seu correspondente mínimo;
- Uma palavra w fixada por todas as extensões de S que não é fixada por M , que será chamada de *obstrução* de $\langle X^* \mid R \rangle$, isto é, uma obstrução é uma forma normal cujo mínimo não está na mesma classe de equivalência.

Assim, dado que um sistema de reescrita terminante é confluyente se e, somente se, cada elemento admite uma única forma normal (Lema 2.2), então poderemos obter uma caracterização da confluência se e, somente se, o conjunto de obstruções é vazio.

Contribuições. Neste trabalho, apresentaremos uma interpretação funcional para o procedimento de completção, seguindo o desenvolvimento proposto por Chenavier em [Che18] o artigo base para este trabalho. Por conseguinte, apresentaremos de maneira ampla e detalhada à abordagem dada em [Che18], exemplificando-a, desenvolvendo as respectivas computações, com a finalidade de mostrar de maneira mais prática e detalhada o interessante ponto de vista dos sistemas de reescrita via endomorfismos lineares, que além de facilitar o jeito de trabalhar com estes sistemas também permite obter diferentes conceitos como confluência, Propriedade de Church-Rosser, Lema de Newman (Lema 2.1) através dos operadores de redução.

Organização.

Capítulo 2. Estabelecemos as notações e conceitos básicos utilizados neste trabalho. Iniciamos com definições básicas de sistemas de reescrita e algumas propriedades. Em seguida estabelecemos algumas notações para as relações de ordem utilizadas e também alguns conceitos de álgebra linear.

Capítulo 3. Introduzimos os operadores de redução e suas respectivas propriedades, bem como a relação com matrizes, e mostramos que todo sistema de reescrita da palavra pode ser transformado num único sistema semi-reduzido.

Capítulo 4. Abordamos a confluência através do conjunto de *obstruções* que é gerado a partir de um reticulado induzido no conjunto de operadores de redução com uma ordem parcial. Introduzimos conceitos e propriedades tradicionais de sistemas de reescrita: forma normal, Church-Rosser, confluência local, entre outros, através dos operadores de redução.

Capítulo 5. Introduzimos o sistema abstrato de reescrita gerado pelos operadores de redução e verificamos as propriedades de confluência e Church-Rosser do produto entrelaçado entre operadores de redução para a completção.

Capítulo 2

Preliminares

Começaremos introduzindo os sistemas abstratos de redução tomados de [BO93] e de [BN98]. Como o objetivo deste trabalho consta em estudar sistemas de reescrita da palavra convergentes, falaremos de propriedades como terminação, confluência, Lema de Newman, pares críticos e completação. Seguiremos com algumas relações de ordem que serão utilizadas no decorrer dos próximos capítulos e finalmente, estabeleceremos notações e algumas propriedades das transformações lineares, como idempotência, composição de transformações e matriz associada, entre outros.

2.1 Sistema de rescrita da palavra

Um *Sistema Abstrato de Redução* (SAR) é um par (A, \rightarrow) onde \rightarrow é uma relação binária, chamada de *redução*, sobre o conjunto A , isto é, $\rightarrow \subseteq A \times A$. Denotaremos $(a, b) \in \rightarrow$ por $a \rightarrow b$. Neste trabalho estamos interessados em uma relação de redução sobre um conjunto de palavras.

Definição 2.1 (Alfabeto e Conjunto de palavras). A um conjunto finito X de símbolos chamamos de *alfabeto*. Uma cadeia finita de símbolos formada por concatenação é chamada *palavra*. Denotamos o conjunto das palavras formadas pelo alfabeto X por X^* .

A seguir introduziremos noções básicas sobre uma relação binária definida sobre $X^* \times X^*$, a chamada *regra de reescrita* (ou relação de reescrita), que será utilizada no restante deste trabalho.

Definição 2.2 (Regra de Reescrita e Sistema de Reescrita da Palavra).

- Uma *regra de reescrita* é um par ordenado $(l, r) \in X^* \times X^*$ com $(l, r) \in \rightarrow$, usualmente é denotado por $(l \rightarrow r)$;
- Um *sistema de reescrita da palavra* $\langle X^* \mid R \rangle$ é um conjunto de regras de reescrita.

Definição 2.3 (Relação de redução em um passo). Seja $\langle X^* \mid R \rangle$ um sistema de reescrita. A relação de *redução em um passo* $\rightarrow_R \in X^* \times X^*$ é definida como:

$u \rightarrow_R v$ se, e somente se, existem $x, y \in X^*$, e uma regra de reescrita $(l \rightarrow r) \in R$
tais que $u = xly$ e $v = xry$.

Uma palavra $u \in X^*$ é chamada *reduzível* se, e somente se, existe $v \in X^*$ tal que $u \rightarrow_R v$; caso contrário, será chamada de *irreduzível*.

Mostraremos no seguinte exemplo como calcular a paridade de adições múltiplas de inteiros como em [AC14].

Exemplo 2.1.1. Seja $X = \{i, p\}$, em que as letras p e i representam par e ímpar respectivamente. Considere as regras de reescrita em R dadas por:

$$R := \{(pp, p), (ii, p), (ip, i), (pi, i)\},$$

o conjunto de regras onde (pp, p) indica a regra $pp \rightarrow_R p$ que representa par + par reduz a par.

Definição 2.4 (Composição de relações). Dadas duas relações $R \subseteq A \times B$ e $S \subseteq B \times C$ a composição esta definida

$$R \circ S := \{(x, z) \in A \times C \mid \exists y \in B. (x, y) \in R \text{ e } (y, z) \in S\}$$

A partir da composição da relação \rightarrow_R definimos:

| | | |
|-------------------------|---|--|
| $\xrightarrow{0}_R$ | $:= \{(x, x) x \in A\}$ | Reflexividade |
| $\xrightarrow{i+1}_R$ | $:= \xrightarrow{i}_R \circ \rightarrow_R$ | $(i + 1)$ -composição |
| $\xrightarrow{+}_R$ | $:= \bigcup_{i>0} \xrightarrow{i}_R$ | Fecho Transitivo |
| $\xrightarrow{=}_R$ | $:= \rightarrow_R \cup \xrightarrow{0}_R$ | Fecho Reflexivo |
| $\xrightarrow{*}_R$ | $:= \xrightarrow{+}_R \cup \xrightarrow{0}_R$ | Fecho Reflexivo, Transitivo |
| \leftarrow_R | $:= \{(y, x) x \rightarrow_R y\}$ | Inversa |
| \leftrightarrow_R | $:= \rightarrow_R \cup \leftarrow_R$ | Fecho Simétrico |
| $\xleftrightarrow{*}_R$ | $:= (\leftrightarrow_R)^*$ | Fecho Reflexivo, Simétrico, Transitivo |

O fecho reflexivo e transitivo $\xrightarrow{*}_R$ de \rightarrow_R é chamado de *relação de redução* gerada por R . A relação $\xleftrightarrow{*}_R$ pode se chamar também de *fecho de equivalência*.

Definição 2.5 (Propriedades de \rightarrow_R). Seja (A, \rightarrow_R) um sistema de redução e \rightarrow_R a relação de redução em um passo. Para $u, v \in A$, definimos:

1. Se $u \xrightarrow{*}_R v$ e v é irredutível, então v é chamado de *forma normal* de u .
2. As palavras u e v são *juntáveis*, denotadas como $u \downarrow v$ se, e somente se, existe $w \in X^*$ tal que $u \xrightarrow{*}_R w \xleftarrow{*}_R v$.

Definição 2.6 (Propriedades dos Sistemas de Redução). Um sistema de redução (A, \rightarrow_R) é chamado de:

- *Terminante*, se não existe uma cadeia infinita de redução da forma $u_1 \rightarrow_R u_2 \rightarrow_R \dots$.
- *Normalizante* se, e somente se, cada elemento tem uma forma normal.
- *Localmente confluyente* se, e somente se, $v \leftarrow_R u \rightarrow_R w$, implica que $v \downarrow w$.
- *Confluyente* se, e somente se $v \xleftarrow{*}_R u \xrightarrow{*}_R w$, implica que $v \downarrow w$.
- *Convergente* se, e somente se, \rightarrow_R é terminante e confluyente.
- *Church-Rosser* se, e somente se, $x \xleftrightarrow{*}_R y$ implica $x \downarrow_R y$

O seguinte lema é uma caracterização de confluência:

Lema 2.1 (Lema de Newman). *Uma relação terminante é confluyente se esta é localmente confluyente.*

Demonstração. A prova pode ser encontrada em [BN98]. □

Lema 2.2 (cf. Lema 2.1.8 [BN98]). *Se uma relação é normalizante e confluyente, então todo elemento tem uma única forma normal.*

Demonstração. A prova pode ser encontrada em [BN98]. □

Definição 2.7 (Par Crítico). Seja $\langle X^* \mid R \rangle$ um sistema de reescrita da palavra. Se temos duas regras $(l_1 \rightarrow r_1), (l_2 \rightarrow r_2) \in R$ que tem sobreposição, isto é, $l_1 = w_1 l_2 w'_1$ (ou $l_2 = w_2 l_1 w'_2$) para palavras w_1, w'_1 (resp. w_2, w'_2), então dizemos que o par $\langle r_1, w_1 r_2 w'_1 \rangle$ é um *par crítico*, isto é, é o par de palavras onde ambas as regras foram aplicadas:

$$r_1 \xleftarrow{*} l_1 = w_1 l_2 w'_1 \xrightarrow{*} w_1 r_2 w'_1$$

Além disso, $\langle X^* \mid R \rangle$ será localmente confluyente se todos os pares críticos são juntáveis (Teorema 6.2.4 [BN98]). Então se $\langle X^* \mid R \rangle$ é convergente podemos obter uma única forma normal para cada palavra, e é possível determinar se duas palavras são congruentes módulo R ou não. Nesse contexto, estamos falando do seguinte problema de decisão:

Definição 2.8. O *problema da palavra* (para sistemas de reescrita da palavra) é um problema de decisão para um SAR o qual está definido como: para duas palavras $u, v \in X^*$, decidimos se $u \xleftrightarrow{*}_R v$ se satisfaz.

O problema da palavra para um SRP $\langle X^* \mid R \rangle$ finito e convergente depende da relação de redução \rightarrow_R , e este é decidível, isto é, é possível responder se existe ou não um caminho de reduções entre as duas palavras.

Assim dado um SRP R podemos nos perguntar se este é convergente. No caso que este não seja convergente, podemos tentar convertê-lo num sistema convergente, que é o que procura o *processo de completção*.

2.2 Relações de Ordem

Nesta seção, relembremos alguns conceitos básicos de relações de ordem, que serão usados neste trabalho. Noções e notações foram retiradas de [BN98] e [BO93].

Considere uma relação binária $R \in A \times A$. Chamamos a R de

- **Reflexiva** se, e somente se, para cada $x \in A$, tem-se xRx .
- **Antissimétrica** se, e somente se, para cada $x, y \in A$, se xRy e yRx então $x = y$.
- **Transitiva** se, e somente se, para cada $x, y, z \in A$, se xRy e yRz então xRz .
- **Dicotoma** se, e somente se, para cada $x, y \in A$, xRy ou yRx .

Uma relação binária R sobre um conjunto X é *bem fundada*, se para cada subconjunto não-vazio $S \subseteq X$, S tem elemento mínimo com relação a R .

Definição 2.9 (Ordem total e Conjunto bem ordenado). Seja R uma relação binária sobre X . A relação R é chamada *ordem total* se esta é reflexiva, antissimétrica, transitiva e conexa. Além disso, se R é uma relação bem fundada, então dizemos que R é uma *boa ordem* e X é um conjunto *bem ordenado* ou *com uma boa ordenação*.

Definição 2.10 (Ordem lexicográfica). Seja X um alfabeto totalmente ordenado e sejam $v, w \in X^*$ com $v = v_0v_1 \cdots v_n$ e $w = w_0w_1 \cdots w_m$ então:

$v <_{lex} w$ se, e somente se, existe k tal que para $i < k$ tem-se $v_i = w_i$ e $v_k < w_k$.

Exemplo 2.2.1. Seja $X = \{x < y < z\}$ se $v = xyxz$ e $w = xyyz$, notamos que as duas primeiras letras de ambas palavras são iguais, portanto nosso $k = 3$ e neste caso $x = v_3 < w_3 = y$ e assim $xyxz <_{lex} xyyz$.

Definição 2.11 (Ordem lexicográfica com grau). Sejam $v, w \in X^*$ com $v = v_0v_1 \cdots v_n$ e $w = w_0w_1 \cdots w_m$. Então:

$v <_{deg-lex} w$ se, e somente se, $|v| < |w|$ ou se $|v| = |w|$ e $v <_{lex} w$.

Onde $|v|$ denota o número de símbolos de v .

2.3 Conceitos Básicos de Álgebra Linear

Nesta seção, descreveremos alguns conceitos de álgebra linear que serão utilizados nos próximos capítulos. Conceitos básicos de espaço vetorial, subespaços, base, dimensão, transformações lineares, entre outros, serão assumidos, e definições formais não serão dadas. Mais detalhes podem ser encontrados em [Apo85].

Definição 2.12 (Espaço Vetorial Gerado e Suporte). Sejam X um conjunto não vazio e \mathbb{K} um corpo.

1. Denotaremos por $\mathbb{K}X$ o espaço vetorial com *base* X . Cada elemento v do espaço vetorial $\mathbb{K}X$, com exceção do elemento neutro, denotado por $\bar{0}$, pode ser escrito como uma combinação linear dos elementos de X com coeficientes em \mathbb{K} . Elementos de X são chamados de *geradores* de $\mathbb{K}X$.
2. Para cada $v \in \mathbb{K}X \setminus \{\bar{0}\}$, existem um único subconjunto finito S_v , chamado de *suporte de v* , e uma única família de coeficientes $(\lambda_x)_{x \in S_v}$ tais que

$$v = \sum_{x \in S_v} \lambda_x x.$$

Um subconjunto não-vazio $V \subseteq \mathbb{K}X$, que é espaço vetorial, é chamado de *subespaço de $\mathbb{K}X$* .

Definição 2.13 (Transformação Linear). Sejam V e W dois espaços vetoriais sobre um corpo \mathbb{K} . Uma função $T : V \rightarrow W$ é chamada de *transformação linear* de V em W , se tem as seguintes propriedades:

1. $T(x + y) = T(x) + T(y)$, para todo $x, y \in V$;
2. $T(\alpha x) = \alpha T(x)$, para todo $x \in V$ e todo $\alpha \in \mathbb{K}$.

Estas duas propriedades podem ser consideradas numa expressão $T(\alpha x + y) = \alpha T(x) + T(y)$. Também, se o espaço $W = V$, então a transformação linear T é chamada de *endomorfismo linear* (ou operador linear).

Definição 2.14 (Núcleo e imagem). Seja T uma transformação linear de V em W . Então definimos os conjuntos *núcleo* e *imagem* de T (denotados por $\text{Ker}(T)$ e $\text{Im}(T)$, respec.) por:

$$\begin{aligned}\text{Im}(T) &:= \{y \in W \mid y = T(x) \text{ para } x \in V\} \\ \text{Ker}(T) &:= \{x \in V \mid T(x) = \bar{0}\},\end{aligned}$$

onde $\bar{0}$ é o elemento neutro de W .

Sabe-se que o núcleo e a imagem de uma transformação linear $T : V \rightarrow W$ são subespaços de V e W respectivamente. A seguir U, V e W são espaços vetoriais sobre \mathbb{K} .

Definição 2.15 (Composição). Sejam $T : U \rightarrow V$ e $S : V \rightarrow W$ duas transformações lineares. A composição de S com T , denotada por $S \circ T : U \rightarrow W$, é definida por:

$$[S \circ T](x) = S(T(x)), \text{ para todo } x \in U$$

Definição 2.16 (Projetor). Um endomorfismo linear $T : V \rightarrow V$ é chamado *idempotente* quando satisfaz $[T \circ T](x) = T(x)$, para todo $x \in V$. Nos próximos capítulos, estaremos interessados em endomorfismos lineares idempotentes ou também chamados de *projetores*.

A proposição a seguir, mostra que a composição de transformações lineares é associativa.

Proposição 2.1. *Sejam $T : U \rightarrow V, S : V \rightarrow W$ e $R : W \rightarrow X$ transformações lineares. Para cada $x \in U$, temos*

$$R \circ (S \circ T) = (R \circ S) \circ T$$

Demonstração. As duas transformações $R \circ (S \circ T)$ e $(R \circ S) \circ T$ tem como domínio U e como imagem X . Para $x \in U$, temos:

$$[R \circ (S \circ T)](x) = R([S \circ T](x)) = R(S(T(x)))$$

$$[(R \circ S) \circ T](x) = [R \circ S](T(x)) = R(S(T(x)))$$

Portanto, $R \circ (S \circ T) = (R \circ S) \circ T$. □

Teorema 2.1. *A composição finita de operadores lineares é um operador linear.*

Demonstração. Só precisamos mostrar que a composição de dois operadores também é um operador, dado que a composição de transformações lineares é associativa. Sejam $S : V \rightarrow V$ e $T : V \rightarrow V$ dois operadores, então para $x, y \in V$ e $\alpha \in \mathbb{K}$ temos:

$$\begin{aligned} [S \circ T](\alpha x + y) &= S(T(\alpha x + y)) \\ &= S(\alpha T(x) + T(y)), \text{ pois } T \text{ é operador} \\ &= \alpha S(T(x)) + S(T(y)), \text{ pois } S \text{ é operador} \\ &= \alpha[S \circ T](x) + [S \circ T](y) \end{aligned}$$

Portanto $S \circ T$ é um operador. □

Definição 2.17 (Coordenadas). Seja V um espaço vetorial de dimensão n e consideremos uma base cujos elementos $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ são tomados numa certa ordem. Ao elemento $x \in V$, escrito como

$$x = \sum_{i=1}^n c_i e_i,$$

associaremos a n -tupla ordenada (c_1, \dots, c_n) de coeficientes de x , também chamadas de *coordenadas de x respectivas à base \mathcal{B}* , e denotada por $[x]_V$. Este pode ser expresso como uma matriz coluna de tamanho $n \times 1$:

$$[x]_V = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

Sejam V e W espaços vetoriais de bases $\mathcal{B}_V = \{e_1, \dots, e_n\}$ e $\mathcal{B}_W = \{u_1, \dots, u_m\}$, respectivamente.

Definição 2.18 (Matriz associada). Sejam $T : V \rightarrow W$ um operador linear. A *matriz associada* a T é a matriz $M_T = (t_{ij})_{m \times n}$, cuja j -ésima coluna consiste das coordenadas $(t_{1j}, t_{2j}, \dots, t_{mj})$ de $T(e_j)$ respectivas à base \mathcal{B}_W :

$$M_T = \begin{pmatrix} t_{11} & \dots & t_{1j} & \dots & t_{1n} \\ t_{21} & \dots & t_{2j} & \dots & t_{2n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ t_{m1} & \dots & t_{mj} & \dots & t_{mn} \end{pmatrix}$$

Além disso, para $x \in V$, temos a matriz $1 \times n$ dada por

$$[T(x)]_w = M_T \cdot [x]_V,$$

onde \cdot é o produto matricial.

Definição 2.19 (Monóide Livre). Um *monóide* (M, \otimes) é uma estrutura algébrica, onde M é um conjunto não vazio, \otimes uma operação binária interna sobre M que cumpre as propriedades:

1. Para $x, y \in M$, temos que $x \otimes y \in M$.
2. Para cada $x, y, z \in M$, temos que: $(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z)$.
3. Existe $e \in M$ tal que para cada $x \in M$, temos: $e \otimes x = x \otimes e = x$.

Um *monóide é livre* se cada elemento é uma finita sequência de zero ou mais elementos de algum conjunto X como a concatenação.

Capítulo 3

Operadores de redução e propriedades

Neste capítulo, vamos introduzir os operadores de redução que são o conceito mais importante para entender a interpretação linear dos sistemas de reescrita que queremos mostrar. Para isto, primeiro usaremos algumas relações matriciais que podem ser feitas devido a que estamos trabalhando com operadores lineares. Esta relação facilitará alguns cálculos, como o cálculo do núcleo de cada operador. Também, definiremos o conceito de *base reduzida*, que nos permitirá relacionar uma única base a cada subespaço para depois associar um único operador e assim poder definir a confluência através dos operadores.

3.1 Operadores de redução

As noções principais, notações e resultados foram retirados do artigo [Che18].

Definição 3.1 (Gerador e Coeficiente Principal). Sejam $(G, <)$ um conjunto bem ordenado e $v \in \mathbb{K}G \setminus \{\bar{0}\}$. O subconjunto não-vazio S_v de G admite um elemento máximo, denotado por $\mathbf{lg}(v)$, chamado *gerador principal* e o respectivo coeficiente $\lambda_{\mathbf{lg}(v)}$ será chamado de *coeficiente principal*, $\mathbf{lc}(v)$. Assim, pelo dito na Definição 2.12 todo $v \in \mathbb{K}G \setminus \{0\}$ tem a forma

$$v = \sum_{g \in G} \lambda_g g$$

Com o propósito de estender a ordem de G no espaço vetorial, podemos induzir uma ordem parcial em $\mathbb{K}G$ da seguinte maneira:

$$u <_{\mathbb{K}G} v \text{ se, e somente se, } (u = 0 \text{ e } v \neq 0) \text{ ou } \mathbf{lg}(u) < \mathbf{lg}(v).$$

Definição 3.2 (Operadores de redução). Um *operador de redução* relativo a $(G, <)$ é um endomorfismo linear idempotente $T : \mathbb{K}G \rightarrow \mathbb{K}G$ tal que $T(g) \leq g$. Denotaremos o conjunto de todos os operadores de redução sobre $(G, <)$ por $\mathbf{RO}(G, <)$.

Definição 3.3 (Elemento T -reduzido). Para $T \in \mathbf{RO}(G, <)$, um elemento $g \in G$ é chamado *T -reduzido* sempre que $T(g) = g$, e definimos os seguintes conjuntos:

$$\begin{aligned} \mathbf{Red}(T) &= \{g \in G \mid T(g) = g\} \\ \mathbf{NRed}(T) &= (\mathbf{Red}(T))^c \end{aligned}$$

Proposição 3.2. *Seja $T \in \mathbf{RO}(G, <)$ um operador de redução. A imagem de T é o espaço vetorial gerado pelos elementos T -reduzidos, isto é,*

$$\mathbf{Im}(T) = \mathbb{K}\mathbf{Red}(T)$$

Demonstração. A partir da Definição 3.3 de elementos T -reduzidos, sabemos que $g \in \mathbb{K}\mathbf{Red}(T)$ é um elemento gerado pela aplicação de T , então $\mathbb{K}\mathbf{Red}(T) \subseteq \mathbf{Im}(T)$.

Reciprocamente, seja $w \in \mathbf{Im}(T)$. Então existe um $v \in \mathbb{K}G$ tal que $w = T(v)$, vamos assumir por contradição que $T(v) \notin \mathbb{K}\mathbf{Red}(T)$ portanto, $T(T(v)) \neq T(v)$ o que é uma contradição pois T é idempotente.

□

Dado que nossos operadores de redução são operadores lineares, então é possível falar da matriz associada a cada operador.

3.1.1 Matrizes de redução

Sejam G uma base ordenada e finita, que pode ser denotada por $G = \{g_1 < g_2 < \dots < g_n\}$, T um endomorfismo de $\mathbb{K}G$ e M a matriz associada a T relativa à $(G, <)$.

A matriz de T com relação a base G , chamada de matriz associada de T relativa a $(G, <)$, é tal que a j -ésima coluna é a matriz coluna com os coeficientes de $T(g_j)$ com relação a base de G como na Definição 2.18, como T é um endomorfismo então esta matriz é quadrada.

Agora vamos introduzir a definição de *matriz de redução*:

Definição 3.4 (Matriz de redução). Uma matriz M quadrada é uma *matriz de redução* se cumpre as seguintes condições:

- (i) M é triangular superior e a diagonal da matriz contém só 1 ou 0.
- (ii) Se o elemento da diagonal é 0, então os elementos dessa linha são iguais a 0.
- (iii) Se o elemento da diagonal é 1, então os elementos dessa coluna são iguais a 0.

Lema 3.3. (Lema 2.16 [Che18]) *Toda matriz de redução é idempotente*¹.

Demonstração. Seja $M = (m_{ij})_{n \times n}$ uma matriz de redução, e considere a matriz $A = M \cdot M$. Temos $A = (a_{ij})_{n \times n}$ tal que:

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^n m_{ik}m_{kj}$$

Vamos mostrar que a matriz $A = M$, isto é, que $a_{ij} = m_{ij}$ para todo $i, j = 1, \dots, n$. Observe que, para $1 \leq i \leq n$, temos:

- (i) Se $m_{ii} = 0$.

Como M é uma matriz de redução, para $1 \leq k \leq n$ temos que $m_{ik} = 0$. Assim $m_{ik}m_{kj} = 0$ e, portanto, $a_{ij} = 0 = m_{ij}$. Nesse caso, as linhas cuja diagonal em M é 0, são iguais na matriz A .

- (ii) Se $m_{ii} = 1$, como $A = M \cdot M$, então para $1 \leq j \leq n$ temos que:

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \sum_{k \neq i} m_{ik}m_{kj} + m_{ii}m_{ij} \\ &= \sum_{k \neq i} m_{ik}m_{kj} + m_{ij} \end{aligned}$$

aqui temos dois casos:

¹Uma matriz M é idempotente sempre que $M \cdot M = M$.

- (a) $m_{ik} = 0$, caso em que $k < i$ (condição (i) da Definição 3.4) ou que $k > i$ e $T(g_k) = g_k$, então $a_{ij} = m_{ij}$ assim as linhas nesse caso são iguais.
- (b) $m_{ik} \neq 0$, então $m_{ik} = 1$ e dessa forma pela condição (iii) da Definição 3.4 $m_{kk} = 0$ e pela condição (ii) $m_{kj} = 0$ para $1 \leq j \leq n$, que é $m_{ik}m_{kj} = 0$ de onde $a_{ij} = m_{ij}$

Assim as linhas de M e A são iguais, com o que $A = M$ portanto M é idempotente. \square

Desta maneira podemos mostrar o resultado principal desta seção:

Proposição 3.3. (Proposição 2.1.7 [Che18]) *Seja G um conjunto finito Um endomorfismo linear T de $\mathbb{K}G$ é um operador de redução relativo a $(G, <)$ se, e somente se, a matriz de T associada a $(G, <)$ é uma matriz de redução.*

Demonstração. (\Rightarrow) Suponha que T é um operador de redução. Mostraremos que a matriz associada é uma matriz de redução. Pela Definição 2.18, a matriz M associada a T é a matriz cuja j -ésima coluna tem coeficientes $T(g_j)$ com relação à base G .

Seja $G = \{g_1 < \dots < g_j < \dots < g_n\}$. Pela definição de T , temos $T(g) \leq g$. Dessa forma, $T(g_j) \leq g_j$ e na base temos $T(g_j) = \lambda_{1j}g_1 + \dots + \lambda_{jj}g_j + 0 \cdot g_{j+1} + \dots + 0 \cdot g_n$, assim para $i < j$ temos que $m_{ij} = 0$, isto é, a matriz coluna

$$\begin{pmatrix} \lambda_{1j} \\ \lambda_{2j} \\ \vdots \\ \lambda_{jj} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Portanto cumpre a condição (i) da Definição 3.4.

Além disso, se temos que $g_j \in \text{Red}(T)$, então $T(g_j) = g_j$. Assim, temos que $\lambda_{jj} = 1$ e escrito na base G seria $T(g_j) = 0 \cdot g_1 + \dots + g_j + 0 \cdot g_{j+1} + \dots + 0 \cdot g_n$, desta maneira cumpre-se a condição (ii) da Definição 3.4. Por último se $g_j \in \text{Nred}(T)$, neste caso a diagonal

é 0, e para $i < j$ $m_{ji} = 0$ já que a matriz é triangular superior e pela Proposição 3.2 a imagem é gerada pelos T -reduzidos então para $i > j$ temos que $m_{ji} = 0$, assim toda a linha compõe-se de 0, ou seja, cumpre a condição (iii) da Definição 3.4 e portanto M é uma matriz reduzida.

⇐) Reciprocamente, vamos supor que a matriz associada a T é uma matriz reduzida, pelas condições (i – iii) da Definição 3.4, temos que $T(g) \leq g$ e pelo Lema 3.3 como M é idempotente temos:

$$\begin{aligned} [T(T(v))]_{\mathbb{K}G} &= M \cdot [T(v)]_{\mathbb{K}G} \\ &= M \cdot M \cdot [v]_{\mathbb{K}G} \\ &= M \cdot [v]_{\mathbb{K}G} \\ &= T(v) \end{aligned}$$

Assim T é idempotente e portanto T é um operador de redução. □

Agora vamos mostrar alguns exemplos:

Exemplo 3.1.1. *A matriz:*

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & 0 & \pi \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

é uma matriz reduzida sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Exemplo 3.1.2. (Exemplo 2.1.8(3) [Che18]) *Como uns dos focos é o sistema de rescrita da palavra, consideramos o monóide livre X^* gerado pelo alfabeto $X = \{x < y < z\}$ com a operação de concatenação e sujeito as duas seguintes relações $yz = x$ e $zx = xy$.*

O conjunto X^ é totalmente ordenado pela ordem deg-lex da definição 2.11, de onde neste caso temos:*

$$\begin{aligned} x &<_{deg-lex} yz \text{ já que } |x| < |yz| \text{ e} \\ xy &<_{deg-lex} zx \text{ devido a que } |xy| = |zx| \text{ e } x < z, \end{aligned}$$

assim o endomorfismo de $\mathbb{K}X^$ definido na base por:*

$$S(yz) = x \text{ e } S(zx) = xy \text{ e } S(w) = w \text{ para } w \in X^* \setminus \{yz, zx\},$$

é um operador de redução dado que S é linear por estar definido na base. S é idempotente

- $S(S(yz)) = S(x) = x = S(yz)$
- $S(S(zx)) = S(xy) = xy = S(zx)$

Finalmente, S tem a propriedade $S(w) \leq_{deg-lex} w$

- $S(zx) = xy <_{deg-lex} zx$
- $S(yz) = x <_{deg-lex} yz$

3.2 Bases de redução

Definição 3.5 (Base de redução). Seja V um subespaço de $\mathbb{K}G$. Uma base \mathcal{B} de V é chamada *base de redução* se satisfaz as seguintes condições:

1. Para cada $e \in \mathcal{B}$, $lc(e) = 1$.
2. Dados dois elementos e e e' distintos de \mathcal{B} , $lg(e')$ não pertence ao suporte de e .

Exemplo 3.2.1. (Exemplo 2.1.12 [Che18]) Sejam $G = \{g_1 < g_2 < g_3 < g_4\}$ e $V \subseteq \mathbb{K}G$ um subespaço tal que $V = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$, onde:

$$v_1 = g_2 - g_1$$

$$v_2 = g_4 - g_3$$

$$v_3 = g_4 - g_2$$

Temos os seguintes suportes S_v , para $v \in V$: $S_{v_1} = \{g_1, g_2\}$, $S_{v_2} = \{g_3, g_4\}$ e $S_{v_3} = \{g_2, g_4\}$.

Dado que $lg(v_2) = lg(v_3)$ para elementos distintos, então a base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ não é reduzida. Mas, no Exemplo 3.2.3, vamos mostrar que $\mathcal{B}' = \{g_2 - g_1, g_3 - g_1, g_4 - g_1\}$ é base reduzida para V . O processo para gerar uma base reduzida para V será dado pelo Teorema 3.2.

Observação 3.1. *Dados dois elementos e e e' de uma base reduzida \mathcal{B} , pela Condição 2 da Definição 3.5, sabemos que $\mathbf{lg}(e') \notin S_e$, assim $\mathbf{lg}(e) \neq \mathbf{lg}(e')$.*

Desta maneira o seguinte conjunto fica bem definido.

Definição 3.6 (Conjunto de índices). Sejam $V \subseteq \mathbb{K}G$ e \mathcal{B} uma base de V . O conjunto

$$\tilde{G} = \{\mathbf{lg}(e) \mid e \in \mathcal{B}\}$$

será chamado de *conjunto de índices* da base \mathcal{B} .

Pela Definição 3.6, pode-se escrever a base \mathcal{B} de V como $\mathcal{B} = (e_g)_{g \in \tilde{G}}$. Note que para cada $g \in \tilde{G}$, temos que $\mathbf{lg}(e_g) = g$. Além disso, todo elemento $v \in V$ pode ser escrito como combinação linear dos elementos de \mathcal{B} :

$$v = \sum_{g \in \tilde{G}} \lambda_g e_g$$

Definição 3.7 (Conjunto indicador). Sejam $V \subseteq \mathbb{K}G$ e $(e_g)_{g \in \tilde{G}}$ uma base reduzida de V . Para cada $g \in \tilde{G}$, o conjunto

$$V_g = \{w \in V \mid \mathbf{lg}(w) = g\}$$

será chamado de *conjunto indicador* de g .

A seguir verificamos que os conjuntos indicadores V_{g_2}, V_{g_3} e V_{g_4} do Exemplo 3.2.1 são não-vazios.

Exemplo 3.2.2 (Cont. Exemplo 3.2.1). *(Exemplo 2.1.12 [Che18]) Considere o subespaço $V = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ com $v_1 = g_2 - g_1, v_2 = g_4 - g_3$ e $v_3 = g_4 - g_2$. Note que $v_1 \in V$ e $\mathbf{lg}(v_1) = g_2$, então $v_1 \in V_{g_2}$. Similarmente, $v_2, v_3 \in V$ com $\mathbf{lg}(v_2) = \mathbf{lg}(v_3) = g_4$, e então $v_2, v_3 \in V_{g_4}$. Observe também que se tomarmos v_{g_3} como*

$$\begin{aligned} v_{g_3} &= v_3 - v_2 \\ &= g_4 - g_2 - (g_4 - g_3) \\ &= g_3 - g_2 \end{aligned}$$

Temos que $\mathbf{lg}(v_{g_3}) = g_3$ e portanto, $v_{g_3} \in V_{g_3}$.

Proposição 3.4. 1. $V_g \neq \emptyset$ se, e somente se, $g \in \tilde{G}$.

2. Se $\mathcal{B}_1 = (e_g)_{g \in \tilde{G}_1}$ e $\mathcal{B}_2 = (e_g)_{g \in \tilde{G}_2}$ duas bases reduzidas de V , então os dois conjuntos \tilde{G}_1 e \tilde{G}_2 são iguais.

Demonstração. 1. Seja $\mathcal{B} = (e'_g)_{g' \in \tilde{G}}$ uma base reduzida para V . Para $g \in G$, $V_g \neq \emptyset$ se, e somente se, existe um $w \in V$ tal que $\text{lg}(w) = g$ (i). Como \mathcal{B} é base para V , temos que:

$$w = \sum_{g' \in \tilde{G}} \mu_{g'} e_{g'}, \quad (ii)$$

De (i) e (ii), segue que $e_g \in \mathcal{B}$, com $\text{lg}(e_g) = g$. Logo, $g \in \tilde{G}$, e o resultado segue.

2. Vamos a supor que $\tilde{G}_1 \neq \tilde{G}_2$ assim existe algum $g^* \in \tilde{G}_1$ com $\text{lg}(e^*) = g^*$ e e^* na base \mathcal{B}_1 que não está em \tilde{G}_2 w.l.o.g., deste jeito pela parte 1, temos que $V_{g^*} \neq \emptyset$ e de novo pela parte 1 agora aplicado na base \mathcal{B}_2 , como $V_{g^*} \neq \emptyset$ então $g^* \in \tilde{G}_2$, mas isso é um absurdo. Portanto $\tilde{G}_1 = \tilde{G}_2$

□

O seguinte teorema garante que cada subespaço de V de $\mathbb{K}G$, tem uma única base reduzida. A **ideia da prova** consiste em construir a base reduzida indutivamente tomando cada elemento de g na ordem de G , e analisando se ele gera ou não os elementos de V , para logo criar cada elemento da base de modo que cumpra as condições da Definição 3.5.

Teorema 3.2. (Teorema 2.1.13 [Che18]) *Seja $(G, <)$ um conjunto bem ordenado. Cada subespaço de $\mathbb{K}G$ admite uma única base reduzida.*

Demonstração. Seja $V \subseteq \mathbb{K}G$. Vamos construir uma base reduzida para V por indução sobre G .

Como G é bem ordenado, existe um elemento mínimo g_0 de G .

Caso Base. Se $V_{g_0} = \emptyset$, definimos $\mathcal{B}_{g_0} = \emptyset$. Caso contrário, $V_{g_0} = \{w \in V \mid \text{lg}(w) = g_0\}$ é não-vazio, e o próprio g_0 está em V . Neste caso, considere o conjunto $\mathcal{B}_{g_0} = \{g_0\}$.

Passo Indutivo. Seja $g \in G$. Vamos assumir por hipótese de indução que, para cada $g' < g$, temos construído o conjunto $\mathcal{B}_{g'}$ cumprindo as seguintes condições:

1. Para cada $g' < g$, o conjunto $\mathcal{B}_{g'}$ contém no máximo um elemento.
2. Considere o conjunto I_g dado por:

$$I_g = \{g' \in G \mid g' < g \text{ e } \mathcal{B}_{g'} \neq \emptyset\}$$

Para cada $g' \in I_g$:

- (a) O único elemento $e_{g'}$ de $\mathcal{B}_{g'}$ pertence a V .
- (b) $\mathbf{lg}(e_{g'}) = g'$ e $\mathbf{lc}(e_{g'}) = 1$.
- (c) Para $\tilde{g} \in I_g$ tal que $\tilde{g} \neq g'$, então $\tilde{g} \notin S_{e_{g'}}$.
- (d) O conjunto $V_{g'} \subseteq \mathbb{K}\{e_{\tilde{g}} \mid \tilde{g} \in I_g\}$.

A condição (a) é para garantir que estamos gerando uma base para V . Precisamos da condição (b) para garantir a parte 1 da definição de base reduzida. A condição (c) garante a parte 2 da definição de base reduzida e precisamos da condição (d) para garantir que em cada passo até o elemento $g \in G$ o conjunto $\mathcal{B}' = \bigcup_{\tilde{g} \in I_g} \mathcal{B}_{\tilde{g}}$ está gerando o subespaço correspondente de V .

Vamos construir \mathcal{B}_g :

- Suponha $V_g = \emptyset$.

Pela definição da base restrita para g , $\mathcal{B}_g = \emptyset$.

- Suponha $V_g \neq \emptyset$.

Afirmção: Existe $v_g \in V_g$ com $\mathbf{lc}(v_g) = 1$.

A existência de tal elemento pode ser garantida se tomamos $v'_g \in V_g$ tal que $\mathbf{lc}(v'_g) = \alpha$ que é

$$v'_g = \sum_{g' \in J} \mu'_{g'} g' + \alpha g$$

onde cada $g' \in J$ é menor que g . Note que $v'_g \in V_g$, portanto pela definição $\mathbf{lg}(v'_g) = g$. Como $\alpha \in \mathbb{K}$, existe $\beta = \alpha^{-1} \in \mathbb{K}$ e o elemento

$$\begin{aligned} \beta v'_g &= \sum_{g' \in J} \beta \mu'_{g'} g' + \beta \alpha g \\ &= \sum_{g' \in J} \beta \mu'_{g'} g' + g, \end{aligned} \tag{3.1}$$

observe $\mathbf{lg}(\beta v'_g) = g$, $\beta v'_g$ está em V_g , além disso $\mathbf{lc}(\beta v'_g) = 1$. Tome $v_g = \beta v'_g$, por (3.1) e como $\mathbf{lg}(v_g) = g$, v_g admite a decomposição:

$$v_g = g + \sum_{g' \in J} \mu_{g'} g' \quad (3.2)$$

Definimos a $\mathcal{B}_g = \{e_g\}$ com:

$$e_g = v_g - \sum_{g' \in I_g} \mu_{g'} e_{g'} \quad (3.3)$$

Só temos que mostrar que para \mathcal{B}_g se cumprem todos as condições anteriores:

1. Esta construção \mathcal{B}_g tem só um elemento.
2. (a) O único elemento e_g de \mathcal{B}_g pertence a V .
Como $v_g \in V_g \subseteq V$, pela condição 2(a) da hipótese indução para $g' < g$ $e_{g'} \in V$. Portanto $\sum_{g' \in I_g} \mu_{g'} e_{g'} \in V$ e pela equação (3.3) $e_g \in V$.
- (b) $\mathbf{lg}(e_g) = g$ e $\mathbf{lc}(e_g) = 1$.
Dado que por indução $\mathbf{lg}(e_{g'}) = g'$ para cada $g' < g$. Então, na soma em (3.3) cada elemento gerador é menor que g e pela equação (3.2) $\mathbf{lg}(v_g) = g$, portanto $\mathbf{lg}(e_g) = g$ e pela construção de e_g , temos que $\mathbf{lc}(e_g) = 1$.
- (c) Por 3.3, para cada $g' \in I_g$ então $g' \notin S_{e_g}$:

$$\begin{aligned} e_g &= v_g - \sum_{g' \in I_g} \mu_{g'} e_{g'} \\ &= g + \sum_{g' \in J} \mu_{g'} g' - \sum_{g' \in I_g} \mu_{g'} e_{g'}, \quad \text{pela equação 3.2} \\ &= g + \underbrace{\sum_{g' \in J - I_g} \mu_{g'} g' - \sum_{g' \in I_g} \mu_{g'} (g' - e_{g'})}_{E_g}, \end{aligned}$$

Como $e_{g'} = g' + \sum_{\bar{g} \in I_{g'}} \eta_{\bar{g}} \bar{g}$ é a representação pela base G , continuamos a computação, chamando a última expressão da igualdade de E_g :

$$\begin{aligned}
E_g &= g + \sum_{g' \in J - I_g} \mu_{g'} g' - \sum_{g' \in I_g} \mu_{g'} \left(g' - \left[g' + \sum_{\bar{g} \in I_{g'}} \eta_{\bar{g}} \bar{g} \right] \right) \\
&= g + \sum_{g' \in J - I_g} \mu_{g'} g' - \sum_{g' \in I_g} \mu_{g'} \left(\sum_{\bar{g} \in I_{g'}} \eta_{\bar{g}} \bar{g} \right)
\end{aligned}$$

De onde na primeira somatória os $g' \in J - I_g$ que é os $g' \in J$ e $g' \notin I_g$ e na segunda soma $\bar{g} \neq g'$ isto que já que cada elemento de $I_{g'}$ é menor que g' , portanto $g' \notin S_{e_g}$.

(d) $V_g \subseteq \mathbb{K}\{e_{\tilde{g}} \mid \tilde{g} \in I_g\} \oplus \mathbb{K}e_g$.

Seja $v \in V_g$, então $v \in V$ e $\text{lg}(v) = g$. Assim,

$$v = \sum_{g' \in J} \eta_{g'} g' + \text{lc}(v)g,$$

onde segue

$$\begin{aligned}
v - \text{lc}(v)e_g &= \sum_{g' \in J} \eta_{g'} g' + \text{lc}(v)g - \text{lc}(v) \left[\sum_{g'' \in J - I_g} \mu_{g''} g'' + g \right] \\
&= \sum_{g' \in J} \eta_{g'} g' + \text{lc}(v)g - \sum_{g'' \in J - I_g} \text{lc}(v) \mu_{g''} g'' - \text{lc}(v)g \\
&= \sum_{g' \in J} \eta_{g'} g' - \sum_{g'' \in J - I_g} \text{lc}(v) \mu_{g''} g''
\end{aligned}$$

Portanto, $v - \text{lc}(v)e_g \in V$ e $\text{lg}(v - \text{lc}(v)e_g) < g$, dado que nos dois somatórios todos os geradores $g' \in J$ são tais que $g' < g$. Pela hipótese de indução

$$v - \text{lc}(v)e_g \in \mathbb{K}\{e_{\tilde{g}} \mid \tilde{g} \in I_g\},$$

e assim $v = (v - \text{lc}(v)e_g) + \text{lc}(v)e_g \in \mathbb{K}\{e_{\tilde{g}} \mid \tilde{g} \in I_g\} \oplus \mathbb{K}\{e_g\}$.

(Existência) Tome a base reduzida dada por $\mathcal{B} = \bigcup_{g \in G} \mathcal{B}_g$.

Como $V_{g'} \subset \mathbb{K}\{e_{\tilde{g}}, \tilde{g} \in I_g\}$ então em cada passo $\bigcup_{\tilde{g} \in G} \mathcal{B}_{\tilde{g}}$ está gerando $V_{g'}$ para $g' \in I_g$. Além disso, temos que² $V = \bigsqcup_{g \in G} V_g$, devido ao fato de que $\mathbf{lg}(g) \neq \mathbf{lg}(g')$ então $v_g \cap v_{g'} = \emptyset$ dois a dois. Por último como cada gerado principal é distinto dois a dois, então $(e_g)_{g \in \tilde{G}}$ onde $\tilde{G} = \bigcup_{g \in G} I_g$ são linearmente independentes pois:

$$\sum_{g \in \tilde{G}} \lambda_g e_g = 0$$

$$\sum_{g \in \tilde{G}} \lambda_g \left(\sum_{g' \in I_g} \mu_{g'} g' + g \right) = 0$$

para isto acontecer ou $\lambda_g = 0$ ou $\sum_{g' \in I_g} \mu_{g'} g' + g = 0$ mas como $g' < g$ para todo g' então $\sum_{g' \in I_g} \mu_{g'} g' + g \neq 0$, assim $\lambda_g = 0$. Logo, o conjunto $\mathcal{B} = (e_g)_{g \in \tilde{G}}$ forma uma base reduzida.

(Unicidade) Sejam $\mathcal{B}_1 = (e_g)_{g \in \tilde{G}_1}$ e $\mathcal{B}_2 = (e_g)_{g \in \tilde{G}_2}$ bases reduzidas de V .

Pela Proposição 3.4, temos que $\tilde{G}_1 = \tilde{G}_2$, e assim $\mathcal{B}_1 = (e_g)_{g \in \tilde{G}}$ e $\mathcal{B}_2 = (e_g)_{g \in \tilde{G}}$. Vamos supor que $e'_g \neq e_g$, então

$$e'_g - e_g = \sum_{g' \in I} \lambda_{g'} e'_{g'}$$

a decomposição na base \mathcal{B}_2 . Temos pela definição de gerador principal que

$$\mathbf{lg}(e'_g - e_g) = \max\{I\} = \bar{g}$$

e, pela definição do conjunto \tilde{G} , segue que $\bar{g} \in \tilde{G}$. Agora, nenhum elemento de \tilde{G} esta no suporte de e_g e de e'_g com exceção do g pela condição 2 de base reduzida, de onde $e_g - g, e'_g - g \in \mathbb{K}(\tilde{G})^c$ e, portanto, $e'_g - g - (e_g - g) = e'_g - e_g \in \mathbb{K}(\tilde{G})^c$ que é $\mathbf{lg}(e'_g - e_g) \in \tilde{G}^c$. Mas é um absurdo pois $\mathbf{lg}(e'_g - e_g) \in \tilde{G}$. Assim, para cada $g \in \tilde{G}$, vale $e_g = e'_g$, o que implica $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_2$, e o resultado segue. \square

Vamos mostrar como construir uma base reduzida a partir de um subespaço.

² \bigsqcup denota a união disjunta

Exemplo 3.2.3. [Continuação do Exemplo 3.2.2] Ainda considerando o conjunto gerador $G = \{g_1 < g_2 < g_3 < g_4\}$ e o subespaço $V = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ com $v_1 = g_2 - g_1, v_2 = g_4 - g_3$ e $v_3 = g_4 - g_2$. Agora usando o Teorema 3.2 vamos a gerar uma base reduzida para V .

- Primeiro tomamos o menor elemento de G , no caso g_1 .

Como $V_{g_1} = \{w \in V \mid \text{lg}(w) = g_1\} = \emptyset$, tomamos o conjunto $\mathcal{B}_{g_1} = \emptyset$. Desta forma temos que:

$$I_{g_1} = \{g' \in G \mid g' < g_1 \text{ e } \mathcal{B}_{g'} \neq \emptyset\} = \emptyset,$$

já que não existe $g' \in G$ tal que $g' < g_1$.

- Agora, considere o conjunto $I_{g_2} = \{g' \in G \mid g' < g_2 \text{ e } \mathcal{B}_{g'} \neq \emptyset\} = \emptyset$. Como $g_1 < g_2$ e $\mathcal{B}_{g_1} = \emptyset$, temos que $I_{g_2} = \emptyset$.

No Exemplo 3.2.2 verificamos que $V_{g_2} \neq \emptyset$, pois $v_1 \in V_{g_2}$. Como $\text{lc}(v_1) = 1$, seguindo a construção da prova do teorema, a identidade (3.3) nos dá

$$e_{g_2} = v_1 - \sum_{g' \in I_{g_2}} \mu_{g'} e_{g'} = v_1,$$

pois, pelo item anterior, verificamos que $I_{g_2} = \emptyset$. Logo, $\mathcal{B}_{g_2} = \{e_{g_2}\} = \{v_1\}$.

- O conjunto $I_{g_3} = \{g' \in G \mid g' < g_3 \text{ e } \mathcal{B}_{g'} \neq \emptyset\} = \{g_2\}$, pois $g_2 < g_3$ e $\mathcal{B}_{g_2} \neq \emptyset$.

Verificamos no Exemplo 3.2.2 que $V_{g_3} \neq \emptyset$, e que $v_{g_3} = g_3 - g_2$, com $\text{lc}(v_{g_3}) = 1$. Note que, da identidade (3.1)

$$\begin{aligned} v_{g_3} &= g_3 - g_2 \\ &= g_3 + (-1)g_2 \end{aligned}$$

e $\mu_{g_2} = -1$. Além disso, da identidade (3.3), temos que

$$\begin{aligned} e_{g_3} &= v_{g_3} - \sum_{g' \in I_{g_3}} \mu_{g'} e_{g'} \\ &= g_3 - g_2 - \mu_{g_2} e_{g_2} \\ &= g_3 - g_2 - \mu_{g_2} v_1 \\ &= g_3 - g_2 - (-1)(g_2 - g_1) \\ &= g_3 - g_1 \end{aligned}$$

Então, tomamos $\mathcal{B}_{g_3} = \{e_{g_3}\}$.

- O conjunto $I_{g_4} = \{g' \in G \mid g' < g_4 \text{ e } \mathcal{B}_{g'} \neq \emptyset\} = \{g_2, g_3\}$. No exemplo anterior, verificamos que $V_{g_4} \neq \emptyset$, pois contém o elemento v_3 :

$$\begin{aligned} v_3 &= g_4 - g_2 \\ &= g_4 + (-1)g_2 + 0g_3 \end{aligned}$$

Da identidade 3.1, temos $\mu_{g_2} = -1$ e $\mu_{g_3} = 0$. Para manter os índices, tomaremos $v_{g_4} = v_3$. Como $\text{lc}(v_{g_4}) = 1$, podemos gerar e_{g_4} :

$$\begin{aligned} e_{g_4} &= v_{g_4} - \sum_{g' \in I_{g_4}} \mu_{g'} e_{g'} \\ &= g_4 - g_2 - \mu_{g_2} e_{g_2} - \mu_{g_3} e_{g_3} \\ &= g_4 - g_2 - (-1)e_{g_2} - 0e_{g_3} \\ &= g_4 - g_2 - (-1)e_{g_2} \\ &= g_4 - g_2 - (-1)v_1 \\ &= g_4 - g_2 - (-1)(g_2 - g_1) \\ &= g_4 - g_1 \end{aligned}$$

Então tomamos $\mathcal{B}_{g_4} = \{e_{g_4}\}$.

Finalmente como já se usaram todos os elementos de G então:

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &= \bigcup_{g \in G} \mathcal{B}_g = \mathcal{B}_{g_1} \cup \mathcal{B}_{g_2} \cup \mathcal{B}_{g_3} \cup \mathcal{B}_{g_4} \\ &= \{e_{g_2}, e_{g_3}, e_{g_4}\} \\ &= \{g_2 - g_1, g_3 - g_1, g_4 - g_1\} \end{aligned}$$

Como para todo $i = 1, \dots, 4$ valem: $\text{lc}(e_{g_i}) = 1$ e $\text{lg}(e_{g_i}) \neq \text{lg}(e_{g_j})$ para $i \neq j$. Concluimos que $\mathcal{B} = (e_g)_{g \in \tilde{G}}$ é uma base reduzida para V , onde $\tilde{G} = \{g_2, g_3, g_4\}$

Teorema 3.3. (Proposição 2.1.14 [Che18]) Seja $V \subseteq \mathbb{K}G$. Então existe um único operador de redução T tal que $\text{Ker}(T) = V$ e $\tilde{G} = \text{NRed}(T)$, onde $(e_g)_{g \in \tilde{G}}$ é uma base reduzida de V .

Demonstração. Seja $\mathcal{B} = (e_g)_{g \in \tilde{G}}$ uma base reduzida para V .

(Existência) Considere o endomorfismo linear $T : \mathbb{K}G \rightarrow \mathbb{K}G$ sobre a base G definido por:

$$T(g) := \begin{cases} g - e_g & , \text{ se } g \in \tilde{G} \\ g & , \text{ se } g \in (\tilde{G})^c \end{cases} \quad (3.4)$$

1. T é um operador de redução:

(a) T é idempotente:

$$(T \circ T)(g) := \begin{cases} T(g - e_g) & , \text{ se } g \in \tilde{G} \\ T(g) & , \text{ se } g \in (\tilde{G})^c \end{cases} ,$$

temos que $T(g - e_g) = g - e_g$, pois

$$g - e_g = g - \left[\sum \mu_{g'} g' + g \right] = \sum \mu_{g'} g' ,$$

e para $g^* \in \tilde{G}$, por ser base reduzida $g^* \notin S_{e_g}$ e $g' \notin \tilde{G}$, logo, pela definição de T , $T(g') = g'$ para todo g' na soma

$$\begin{aligned} T(g - e_g) &= T\left(g - \left[\sum \mu_{g'} g' + g \right]\right), \quad \text{pela representação de } e_g \\ &= T(g) - \left[\sum \mu_{g'} T(g') + T(g) \right], \quad T \text{ é linear} \\ &= g + T(g) - \left[\sum \mu_{g'} T(g') + g + T(g) \right] \\ &= g - \left[\sum \mu_{g'} g' + g \right] \\ &= g - e_g. \end{aligned}$$

Então

$$(T \circ T)(g) := \begin{cases} g - e_g & , \text{ se } g \in \tilde{G} \\ g & , \text{ se } g \in (\tilde{G})^c \end{cases} ,$$

portanto $T(T(g)) = T(g)$.

(b) Para $g \in G$, temos que $T(g) \leq g$:

De fato, para $g \in (\tilde{G})^c$ temos que $T(g) = g$. Agora se $g \in \tilde{G}$, obtemos

$$\begin{aligned} T(g) &= g - e_g \\ T(g) &= g - \left[\sum \mu_{g'} g' + g \right] \\ &= \sum \eta_{g'} g', \quad \text{onde } \eta_{g'} = -\mu_{g'} \end{aligned}$$

pela ordem induzida depois da Definição 3.1 em $\mathbb{K}G$, como $g' < g$ para todo $g' \in [S_{e_g} \setminus \{g\}]$ então $\mathbf{lg}(T(g)) < g = \mathbf{lg}(g)$ e portanto, $T(g) <_{\mathbb{K}G} g$.

por conseguinte, por (a), (b) e (c) temos que $T \in \mathbf{RO}(G, <)$.

2. Vamos mostrar que $\mathbf{Ker}(T) = V$

- Seja $v \in \mathbf{Ker}(T) = \{v \in \mathbb{K}G \mid T(v) = 0\}$. Para $v = \sum_{g \in G} \lambda_g g$ temos:

$$\begin{aligned} T(v) &= T\left(\sum_{g \in G} \lambda_g g\right) \\ &= \sum_{g \in G} \lambda_g T(g), \quad T \text{ é linear} \\ &= \sum_{g \in \tilde{G}} \lambda_g T(g) + \sum_{g \in (\tilde{G})^c} \lambda_g T(g), \quad \text{pois } G = \tilde{G} \sqcup (\tilde{G})^c \\ &= \sum_{g \in \tilde{G}} \lambda_g (g - e_g) + \sum_{g \in (\tilde{G})^c} \lambda_g T(g) \\ &= \sum_{g \in \tilde{G}} \lambda_g g - \sum_{g \in \tilde{G}} \lambda_g e_g + \sum_{g \in (\tilde{G})^c} \lambda_g T(g) \\ &= \sum_{g \in \tilde{G}} \lambda_g g - \sum_{g \in \tilde{G}} \lambda_g e_g + \sum_{g \in (\tilde{G})^c} \lambda_g g, \quad \text{pela definição de } v \\ &= v - \sum_{g \in \tilde{G}} \lambda_g e_g \end{aligned}$$

como $v \in \mathbf{Ker}(T)$, $v - \sum_{g \in \tilde{G}} \lambda_g e_g = 0$ implica que $v = \sum_{g \in \tilde{G}} \lambda_g e_g \in V$. Assim $\mathbf{Ker}(T) \subseteq V$.

- Para $x \in V$ temos que x tem a forma $\sum_{g \in \tilde{G}} \mu_g e_g$ para a respectiva base $(e_g)_{g \in \tilde{G}}$.
Aplicando o operador T :

$$\begin{aligned}
T(x) &= T\left(\sum_{g \in \tilde{G}} \mu_g e_g\right) \\
&= \sum_{g \in \tilde{G}} \mu_g T(e_g) \\
&= \sum_{g \in \tilde{G}} \mu_g T\left(g + \sum \lambda_{g'} g'\right) \\
&= \sum_{g \in \tilde{G}} \mu_g \left(T(g) + \sum \lambda_{g'} T(g')\right) \\
&= \sum_{g \in \tilde{G}} \mu_g \left(T(g) + \sum \lambda_{g'} g'\right) \\
&= \sum_{g \in \tilde{G}} \mu_g \left(g - e_g + \sum \lambda_{g'} g'\right) \\
&= \sum_{g \in \tilde{G}} \mu_g \left(g - g - \sum \lambda_{g'} g' + \sum \lambda_{g'} g'\right) \\
&= \sum_{g \in \tilde{G}} \mu_g 0 = 0
\end{aligned}$$

Assim $V \subseteq \text{Ker}(T)$, e o resultado segue.

3. Agora vamos mostrar $\text{NRed}(T) = \tilde{G}$

$g \in \text{NRed}(T)$ se, e somente se, $g \neq T(g)$, pela Definição 3.3
se, e somente se, $\neg(g = T(g))$,
se, e somente se, $g \in \tilde{G}$ pela definição do operador T neste teorema

(Unicidade) Sejam T_1 e T_2 operadores tais que $\text{Ker}(T_1) = V$ e $\text{Ker}(T_2) = V$, sem perda da generalidade, podemos definir:

$$T_1(g) := \begin{cases} g - e'_g & , \text{ se } g \in \tilde{G} \\ g & , \text{ se } g \in (\tilde{G})^c \end{cases}$$

$$T_2(g) := \begin{cases} g - e_g & , \text{ se } g \in \tilde{G} \\ g & , \text{ se } g \in (\tilde{G})^c \end{cases}$$

Devido a que são dois operadores distintos, além disso:

$$\begin{aligned} e'_g &= g - (g - e'_g) \\ &= g - T_1(g) \text{ sempre que } T_1(g) \neq g. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_g &= g - (g - e_g) \\ &= g - T_2(g) \text{ sempre que } T_2(g) \neq g. \end{aligned}$$

Logo obtemos que:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_1 &= \{g - T_1(g) \mid T_1(g) \neq g\}, \\ \mathcal{B}_2 &= \{g - T_2(g) \mid T_2(g) \neq g\}, \end{aligned}$$

seriam duas bases reduzidas para V , pelo Teorema 3.2, existe uma única base reduzida para V , portanto $\{g - T_1(g) \mid T_1(g) \neq g\} = \{g - T_2(g) \mid T_2(g) \neq g\}$, ou seja, $T_1(g) \neq g$ se, e somente se, $T_2(g) \neq g$, que é equivalentemente lógico com $T_1(g) = g$ se, e somente se, $T_2(g) = g$. Assim $T_1(g) = T_2(g)$ e como o g é arbitrário, então $T_1 = T_2$. \square

Observação 3.2. *O Núcleo pode ser visto como a aplicação $\text{Ker} : \text{RO}(G, <) \rightarrow S(\mathbb{K}G)^3$, definida como $\text{Ker}(T) = V$. Pelo Teorema 3.3 para cada subespaço V existe um operador T , ou seja, a aplicação núcleo é sobrejetiva, e como é único então também seria injetiva, isto é existe uma bijeção entre $\text{RO}(G, <)$ e $S(\mathbb{K}G)$. Deste modo, existe uma função inversa Ker^{-1} , que chamaremos de θ . E onde $\theta : S(\mathbb{K}G) \rightarrow \text{RO}(G, <)$ tal que para V com base de redução $(e_g)_{g \in \tilde{G}}$:*

$$T(g) := \begin{cases} g - e_g & , \text{ se } g \in \tilde{G} \\ g & , \text{ se } g \in (\tilde{G})^c \end{cases}$$

Proposição 3.5. *Sejam $G = \{g_1 < \dots < g_n\}$ e $T \in \text{RO}(G, <)$. Então $(g - T(g))_{g \in \tilde{G}}$ é uma base para $\text{Ker}(T)$.*

³ $S(\mathbb{K}G)$ denota o conjunto de subespaços de $\mathbb{K}G$.

Demonstração. Pela Proposição 3.3 existe M matriz $n \times n$ de redução associada a T cujo núcleo é gerado pelo espaço nulo da matriz $M = (a_{ij})_{n \times n}$. Assim temos que resolver

$$M \cdot X = \bar{0},$$

onde X é o vetor coluna com entradas x_1, \dots, x_n . Desta forma quando na diagonal k -ésima tem um 0, então essa linha é uma linha de zeros e portanto x_k é uma variável livre, de onde associamos o parâmetro s_k . Agora existe algum l tal que $a_{kl} = 1$ por ser M matriz de redução, e de igual forma $a_{ll} = 1$, de onde obtemos a equação $x_l + x_k = 0$, isto é, $x_l = -x_k = -s_k$. Deste modo obtemos que

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_l \\ \vdots \\ x_k \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ -s_k \\ \vdots \\ s_k \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = s_k \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ -1 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Pela base G obtemos que $g_k - g_l$ é um gerador, com $T(g_k) = g_l$. Portanto $g_k - T(g_k)$ é um gerador e, como $T(g_k) \neq g_k$, então $g_k \in \tilde{G}$. Assim, $(g - T(g))_{g \in \tilde{G}}$ é uma base para o espaço nulo, isto é uma base para o núcleo de T . \square

Capítulo 4

Obstruções e Confluência

O principal objetivo deste capítulo é definir a confluência através dos operadores de redução, para este fim, definimos uma ordem parcial em $\text{RO}(G, <)$ e induzimos um retriado para que com o ínfimo de todos operadores e definir a confluência mediante o conjunto de obstruções. Já definida confluência, definiremos a propriedade de Church-Rosser e a confluência local para obter uma versão do Lema de Newman (Seção 4.3) através dos operadores de redução. Estas definições são feitas através das formas normais e da ordem multiconjunto, uma boa ordem definida em $\mathbb{K}G$.

4.1 Uma Relação de Ordem Parcial

Considere a relação \preceq sobre $\text{RO}(G, <)$ definida por:

$$T_1 \preceq T_2 \text{ se, e somente se, } \text{Ker}(T_2) \subseteq \text{Ker}(T_1) \quad (4.1)$$

A seguir T_1, T_2 e T_3 são operadores de redução sobre $(G, <)$ arbitrários.

Proposição 4.6. *A relação \preceq é uma relação de ordem parcial.*

Demonstração. Verificaremos que a relação \preceq é reflexiva, antissimétrica e transitiva.

- \preceq é reflexiva:

Como $\text{Ker}(T_1) = \text{Ker}(T_1)$, temos que $T_1 \preceq T_1$

- \preceq é transitiva:

Suponha que $T_1 \preceq T_2$ e $T_2 \preceq T_3$. Pela definição de \preceq temos que $\text{Ker}(T_2) \subseteq \text{Ker}(T_1)$ e $\text{Ker}(T_3) \subseteq \text{Ker}(T_2)$ respectivamente. Pela transitividade da inclusão obtemos $\text{Ker}(T_3) \subseteq \text{Ker}(T_1)$, que implica $T_1 \preceq T_3$.

- \preceq é antissimétrica:

Suponha que $T_1 \preceq T_2$ e $T_2 \preceq T_1$. Então pela definição de \preceq temos $\text{Ker}(T_2) \subseteq \text{Ker}(T_1)$ e $\text{Ker}(T_1) \subseteq \text{Ker}(T_2)$, respectivamente. Portanto, $\text{Ker}(T_1) = \text{Ker}(T_2)$ que implica $T_1 = T_2$.

□

Lema 4.4. (Lema 2.1.18 [Che18]) *Sejam T_1 e T_2 dois operadores de redução relativos a $(G, <)$ tais que $T_1 \preceq T_2$. Então, $\text{Red}(T_1) \subseteq \text{Red}(T_2)$.*

Demonstração. De $T_1 \preceq T_2$ temos que $\text{Ker}(T_2) \subseteq \text{Ker}(T_1)$. Pelo Teorema 3.2, $\text{Ker}(T_2)$ e $\text{Ker}(T_1)$ têm bases reduzidas $\mathcal{B}_1 = (e_g)_{g \in \tilde{G}_1}$ e $\mathcal{B}_2 = (e_g)_{g \in \tilde{G}_2}$, respectivamente, e $\text{Red}(T_1) = (\tilde{G}_1)^c$ e $\text{Red}(T_2) = (\tilde{G}_2)^c$.

Observe que se $(\text{Ker}(T_1))_g \neq \emptyset$ então existe $x \in \text{Ker}(T_1)$ tal que $\text{lg}(x) = g$ se, e somente se, $g \in \tilde{G}_1$, e desta forma:

$$\{g \in G \mid \text{Ker}(T_1)_g \neq \emptyset\} = \tilde{G}_1,$$

$$\{g \in G \mid \text{Ker}(T_2)_g \neq \emptyset\} = \tilde{G}_2.$$

Por hipótese $\text{Ker}(T_2) \subseteq \text{Ker}(T_1)$, portanto $\tilde{G}_2 \subseteq \tilde{G}_1$ o que implica que $(\tilde{G}_1)^c \subseteq (\tilde{G}_2)^c$ e então $\text{Red}(T_1) \subseteq \text{Red}(T_2)$. □

Uma caracterização a partir da definição anterior:

Proposição 4.7. *Sejam T_1 e T_2 dois operadores de redução relativos a $(G, <)$. Então $T_1 \preceq T_2$ se, e somente se, $T_1 \circ T_2 = T_1$.*

Demonstração. (\Leftarrow) Suponha $T_1 \circ T_2 = T_1$. Então, para todo $x \in \mathbb{K}G$, vale

$$T_1 \circ T_2(x) = T_1(T_2(x)) = T_1(x)$$

Em particular, para $x' \in \text{Ker}(T_2) \subseteq \mathbb{K}G$, temos:

$$T_1 \circ T_2(x') = T_1(T_2(x')) = T_1(x')$$

e

$$T_1 \circ T_2(x') = T_1(T_2(x')) = T_1(0) = 0,$$

de onde se deduz $T_1(x') = 0$ e, portanto $x' \in \text{Ker}(T_1)$. Como x' é arbitrário, temos que $\text{Ker}(T_2) \subseteq \text{Ker}(T_1)$, o que pela definição de \preceq , implica que $T_1 \preceq T_2$.

(\Rightarrow) Suponha que $T_1 \preceq T_2$.

Pela prova do Teorema 4.4, temos que $\tilde{G}_2 \subseteq \tilde{G}_1$, e pela definição de T no Teorema 3.3 para $T_1 \circ T_2$ temos os dois seguintes casos

1. Se $g \notin \tilde{G}_2$ então

$$T_1(T_2(g)) = T_1(g)$$

Observemos que $e_g \in \text{Ker}(T_1)$ já que:

$$\begin{aligned} T_1(e_g) &= T_1\left(g + \sum \lambda_{g'} g'\right) \\ &= T_1(g) + \sum \lambda_{g'} T_1(g') \\ &= g - e_g + \sum \lambda_{g'} g', \quad \text{pois } g' \notin \tilde{G}_1 \\ &= e_g - e_g = 0 \end{aligned}$$

2. Se $g \in \tilde{G}_2$ então

$$\begin{aligned} T_1(T_2(g)) &= T_1(g - e_g) \\ &= T_1(g) - T_1(e_g) \\ &= T_1(g) \end{aligned}$$

□

Estrutura de Reticulado para $\mathbf{RO}(G, <)$

Um *reticulado* é um conjunto A dotado de uma relação de ordem parcial na qual para todo par de elementos do conjunto existe um único *ínfimo* e um único *supremo*.

Se equipamos $\mathbf{RO}(G, <)$ com ordem parcial \preceq definida na equação (4.1) e definindo

$$T_1 \wedge T_2 = \theta(\mathbf{Ker}(T_1) + \mathbf{Ker}(T_2))$$

$$T_1 \vee T_2 = \theta(\mathbf{Ker}(T_1) \cap \mathbf{Ker}(T_2))$$

Mostraremos que o par $(\mathbf{RO}(G, <), \preceq)$ é um reticulado com ínfimo $T_1 \wedge T_2$ e com supremo $T_1 \vee T_2$.

Proposição 4.8. *Os operadores $T_1 \wedge T_2$ e $T_1 \vee T_2$ são o único ínfimo e o único supremo com a ordem \preceq de T_1 e T_2 respectivamente.*

Demonstração. Dado que $\mathbf{Ker}(T_1) + \mathbf{Ker}(T_2)$ e $\mathbf{Ker}(T_1) \cap \mathbf{Ker}(T_2)$ são dois subespaços vectoriais, então $T_1 \wedge T_2$ e $T_1 \vee T_2$ estão bem definidos e são únicos pelo Teorema 3.3 e pela Observação 3.2. Além disso, temos

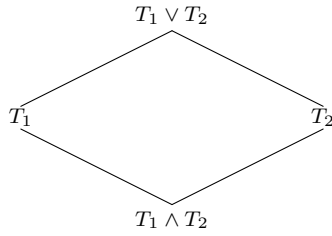
- $\mathbf{Ker}(T_1 \wedge T_2) = \mathbf{Ker}(\theta(\mathbf{Ker}(T_1) + \mathbf{Ker}(T_2))) = \mathbf{Ker}(T_1) + \mathbf{Ker}(T_2) \subseteq \mathbf{Ker}(T_i)$, para $i = 1, 2$ que pela definição na Equação 4.1, obtemos $T_1 \wedge T_2 \preceq T_i$ para $i = 1, 2$, ou seja, é o ínfimo.
- $\mathbf{Ker}(T_i) \subseteq \mathbf{Ker}(T_1) \cap \mathbf{Ker}(T_2) = \mathbf{Ker}(\theta(\mathbf{Ker}(T_1) \cap \mathbf{Ker}(T_2))) = \mathbf{Ker}(T_1 \vee T_2)$, para $i = 1, 2$ que pela definição na Equação 4.1, obtemos $T_i \preceq T_1 \vee T_2$ para $i = 1, 2$, ou seja, é o supremo.

□

Portanto obtemos um reticulado sobre o conjunto $\mathbf{RO}(G, <)$.

Exemplo 4.1.1. (*Exemplo 2.2.21 [Che18]*) *Seja $G = \{g_1 < g_2 < g_3 < g_4\}$ e $P = (T_1, T_2)$ onde*

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



ínfimo e supremo de T_1 e T_2

Vamos calcular o ínfimo de T_1 e T_2 , para isto calcularemos primeiro $\text{Ker}(T_1)$ e $\text{Ker}(T_2)$ a partir das respectivas matrizes de redução, achando os geradores do espaço do núcleo:

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix}_{\mathbb{K}G} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathbb{K}G},$$

pele produto de matrizes obtemos

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 \\ 0 \\ \lambda_3 + \lambda_4 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathbb{K}G} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathbb{K}G},$$

Como as variáveis livres neste caso são λ_2 e λ_4 , então associamos um parâmetro para cada uma como segue $\lambda_2 = s$ e $\lambda_4 = t$. Pela igualdade de vetores temos que $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ que é $\lambda_1 = -\lambda_2 = -s$ e $\lambda_3 + \lambda_4 = 0$ que é $\lambda_3 = -\lambda_4 = -t$. Portanto o vetor solução é

$$\begin{pmatrix} -s \\ s \\ -t \\ t \end{pmatrix}_{\mathbb{K}G} = s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathbb{K}G} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathbb{K}G} = s[x]_{\mathbb{K}G} + t[y]_{\mathbb{K}G}$$

Ou seja, o núcleo é gerado por $(g_2 - g_1)$ e $(g_4 - g_3)$, devido a x e y eram as coordenadas na base $\{g_1, g_2, g_3, g_4\}$ isto é, $\text{Ker}(T_1) = \mathbb{K}\{g_2 - g_1\} \oplus \mathbb{K}\{g_4 - g_3\}$. De maneira análoga

achamos que $\text{Ker}(T_2) = \mathbb{K}\{g_4 - g_2\}$, assim $\text{Ker}(T_1) \oplus \text{Ker}(T_2)$ estaria gerado pelos vetores

$$v_1 = g_2 - g_1$$

$$v_2 = g_4 - g_3$$

$$v_3 = g_4 - g_2$$

Cuja base reduzida foi achada no Exemplo 3.2.3. A base $(e_g)_{g \in \tilde{G}} = \{g_2 - g_1, g_3 - g_1, g_4 - g_1\}$ é a base reduzida de $\text{Ker}(T_1) \oplus \text{Ker}(T_2)$. Por último calculamos $\theta(\text{Ker}(T_1) \oplus \text{Ker}(T_2))$:

$$(T_1 \wedge T_2)(g) := \begin{cases} g - e_g & , \text{ se } g \in \tilde{G} \\ g & , \text{ se } g \in (\tilde{G})^c \end{cases}$$

calculamos para cada elemento de G , pela definição no Teorema 3.3 temos que $\tilde{G} = \{g \in G \mid \text{lg}(e_g)\} = \{\text{lg}(g_2 - g_1), \text{lg}(g_3 - g_1), \text{lg}(g_4 - g_1)\} = \{g_2, g_3, g_4\}$, assim

- $(T_1 \wedge T_2)(g_1) = g_1$
- $(T_1 \wedge T_2)(g_2) = g_2 - e_{g_2} = g_2 - (g_2 - g_1) = g_1$
- $(T_1 \wedge T_2)(g_3) = g_3 - e_{g_3} = g_3 - (g_3 - g_1) = g_1$
- $(T_1 \wedge T_2)(g_4) = g_4 - e_{g_4} = g_4 - (g_4 - g_1) = g_1$

Cuja matriz de redução é

$$T_1 \wedge T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

O ínfimo de T_1 e T_2 .

4.2 Obstruções

Nesta seção introduziremos o conceito de *obstruções*, que será construído a partir do conjunto $\text{Red}(F)$, para $F \subseteq \text{RO}(G, <)$, e $\text{Ker}(T)$, para cada $T \in F$. Esta noção é fundamental para determinar a confluência, a propriedade Church-Rosser, confluência local a partir dos operadores de redução.

Definição 4.1. Seja F um subconjunto de $\text{R0}(G, <)$, definimos:

$$\text{Red}(F) = \bigcap_{T \in F} \text{Red}(T)$$

$$\wedge F = \theta \left(\sum_{T \in F} \text{Ker}(T) \right)$$

Para cada $T \in F$, temos $\wedge F \preceq T$, devido a que pela definição

$$\text{Ker}(\wedge F) = \text{Ker} \left(\theta \left(\sum_{T \in F} \text{Ker}(T) \right) \right) = \sum_{T \in F} \text{Ker}(T) \quad (4.2)$$

o que significa que para cada $T \in F$, se $T(x) = 0$ então $\wedge F(x) = 0$ que é $\text{Ker}(T) \subseteq \text{Ker}(\wedge F)$, que pelo lema temos então $\text{Red}(\wedge F) \subseteq \text{Red}(T)$ então para cada $T \in F$, que esta incluindo em $\text{Red}(F)$ assim definimos:

$$\text{obs}^F = \text{Red}(F) \setminus \text{Red}(\wedge F)$$

Definição 4.2 (Cofluência). Um subconjunto F de $\text{R0}(G, <)$ se diz *confluente* se $\text{obs}^F = \emptyset$, isto é, se $\text{Red}(F) = \text{Red}(\wedge F)$.

A seguir ilustramos os resultados com alguns exemplos.

Exemplo 4.2.1. (*Exemplo 2.1.21 [Che18]*)

Seja $G = \{g_1 < g_2 < g_3 < g_4\}$ e $F = (T_1, T_2)$, onde :

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

como a coluna j -ésima representa a coordenadas de $T(g_j)$ temos que $T_1(g_1) = g_1$, $T_1(g_2) = g_1$, $T_1(g_3) = g_3$, $T_1(g_4) = g_3$ ou seja $\text{Red}(T_1) = \{g_1, g_3\}$, argumentando da mesma forma

pela matriz T_2 obtemos $\text{Red}(T_2) = \{g_1, g_2, g_3\}$

Portanto:

$$\begin{aligned}\text{Red}(F) &= \bigcap_{T \in F} \text{Red}(T) \\ &= \text{Red}(T_1) \cap \text{Red}(T_2) \\ &= \{g_1, g_3\} \cap \{g_1, g_2, g_3\} \\ &= \{g_1, g_3\}\end{aligned}$$

e pelo Exemplo 4.1.1 o único elemento T -reduzido da matriz é g_1 portanto $\text{Red}(T_1 \wedge T_2) = \{g_1\}$.

Logo,

$$\begin{aligned}\text{obs}^F &= \text{Red}(F) \setminus \text{Red}(\wedge F) \\ &= \{g_1, g_3\} \setminus \{g_1\} \\ &= \{g_3\},\end{aligned}$$

isto é, $\text{obs}^F \neq \emptyset$, e portanto F não é confluente.

Exemplo 4.2.2 (Continuação Exemplo 3.1.1). Seja S definido no Exemplo 3.1.1, sobre o alfabeto ordenado $X = \{x < y < z\}$.

Sejam S_1 e S_2 definidos sobre $X^{\leq 3}$ como¹:

$$\begin{array}{ll} S_1(yzt) = xt, & t \in X & S_2(tyz) = tx, & t \in X \\ S_1(zxt) = xyt, & t \in X & S_2(tzx) = txy, & t \in X \\ S_1(w) = w, & \text{caso contrário} & S_2(w) = w, & \text{caso contrário} \end{array}$$

Os valores de $S_1(w)$ e $S_2(w)$, para as palavras $w \in X^{\leq 3}$, são dados na Tabela 4.1. Em ambos os casos, as seis primeiras linhas das tabelas correspondentes determinam os valores de w tais que $S_1(w) \neq w$ e $S_2(w) \neq w$ (formando os conjuntos $\text{NRed}(S_1)$ e $\text{NRed}(S_2)$, resp.), a última linha expressa o complementar, isto é, os valores w' tais que $S_1(w') = w'$ e $S_2(w') = w'$ (formando os conjuntos $\text{Red}(S_1)$ e $\text{Red}(S_2)$, resp.).

1. $S_1(yzt) = xt; S_1(zxt) = xyt$ para cada $t \in X$ e $S_1(w) = w$ para $w \neq yzt$ e $w \neq zxt$

¹ $X^{\leq 3}$ denota as palavras sobre X de comprimento menor ou igual a três.

| w | $S_1(w)$ |
|-------------|----------------|
| yzx | xx |
| $yz y$ | xy |
| $yz z$ | xz |
| zxx | xyx |
| zxy | xyy |
| $z x z$ | xyz |
| $w' \neq w$ | $S_1(w') = w'$ |

| w | $S_2(w)$ |
|--------------|------------------|
| xyz | xx |
| yyz | yx |
| zyz | zx |
| xzx | xyx |
| yzx | xyy |
| $z z x$ | zxy |
| $w^* \neq w$ | $S_2(w^*) = w^*$ |

Tabela 4.1: Valores para $S_1(w)$ e $S_2(w)$, para $w \in X^{\leq 3}$

2. $S_2(tyz) = tx; S_1(tzx) = txy$ para cada $t \in X$ e $S_1(w) = w$ para $w \neq tyz$ e $w \neq tzx$.

Então,

$$\text{NRed}(S_1) = \{yzx, yzy, yzz, zxx, zxy, z x z\}$$

$$\text{NRed}(S_2) = \{xyz, yyz, zyz, xzx, yzx, z z x\}$$

e como $\text{Red}(S_1) = (\text{NRed}(S_1))^c$ e $\text{Red}(S_2) = (\text{NRed}(S_2))^c$ então

$$\text{Red}(P) = \text{Red}(S_1) \cap \text{Red}(S_2)$$

$$= \{xxx, xxy, xxz, yxx, yxy, yxz, yyx, yyy, zyx, zyy, zzy, zzz, xyx, xzy, xzz\}$$

Para calcular $\text{Red}(\wedge P) = \text{Red}(S_1 \wedge S_2) = (\tilde{G})^c$ usaremos a base reduzida gerada pelos respectivos núcleos de S_1 e S_2 usando a Proposição 3.5.

Considerando os conjuntos $\text{NRed}(S_1)$ e $\text{NRed}(S_2)$, o núcleo de S_1 é gerado pelos vetores:

$$\begin{aligned} r_1 &= yzx - xx & r_4 &= zxx - xyx \\ r_2 &= yzy - xy & r_5 &= zxy - xyy \\ r_3 &= yzz - xz & r_6 &= z x z - xyz \end{aligned}$$

O núcleo de S_2 é gerado pelos vetores:

$$\begin{aligned} r'_1 &= xyz - xx & r'_4 &= xzx - xxy \\ r'_2 &= yyz - yx & r'_5 &= yzx - yxy \\ r'_3 &= zyz - zy & r'_6 &= z z x - zxy \end{aligned}$$

Desta maneira,

$$\text{Ker}(S_1) + \text{Ker}(S_2) = \mathbb{K} \left\{ \bigoplus_{i=1}^6 r_i \right\} \oplus \mathbb{K} \left\{ \bigoplus_{i=1}^6 r'_i \right\}$$

que é subespaço de $\mathbb{K}X_{|3|}^*$, e pelo Teorema 3.2 existe uma única base \mathcal{B} , que será achada para calcular $\wedge P$, usando a ordem em $X_{|3|}^*$

Abaixo $I_w = \{w' \in X_{|3|}^* \mid w' < w \text{ e } \mathcal{B}_w \neq \emptyset\}$.

| w | $\exists x \in V_w?$ | I_w | $\mu_{g'}$ | $e_w = r_i - \sum_{g' \in I_{w-1}} \mu_{g'} e_{g'}$ |
|--------|-------------------------|------------------------|------------|---|
| xyz | $r'_1 = xyz - xx$ | \emptyset | xx | $e_{xyz} = r'_1 = xyz$ |
| xzx | $r'_4 = xzx - xxy$ | $I_{xyz} \cup \{xyz\}$ | xyy | $e_{xzx} = r'_4 = xzx$ |
| yxy | $r_1 - r'_5 = yxy - xx$ | $I_{xzx} \cup \{xzx\}$ | xx | $e_{yxy} = r_1 - r'_5 = yxy$ |
| yyz | $r'_2 = yyz - yx$ | $I_{yxy} \cup \{yxy\}$ | yx | $e_{yyz} = r'_2$ |
| yzx | $r'_5 = yzx - yxy$ | $I_{yyz} \cup \{yyz\}$ | yxy | $e_{yzx} = r'_5$ |
| $yzzy$ | $r_2 = yzy - xy$ | $I_{yzx} \cup \{yzx\}$ | xy | $e_{yzzy} = r_2$ |
| $yzzz$ | $r_3 = yzz - xz$ | $I_{yzy} \cup \{yzy\}$ | xz | $e_{yzzz} = r_3$ |
| zxx | $r_4 = zxx - xxy$ | $I_{yzz} \cup \{yzz\}$ | xyx | $e_{zxx} = r_4$ |
| zxy | $r_5 = zxy - xyy$ | $I_{zxx} \cup \{zxx\}$ | xyy | $e_{zxy} = r_5$ |
| zxz | $r_6 = zxz - xyz$ | $I_{zxy} \cup \{zxy\}$ | xyz | $e_{zxz} = r_6$ |
| zyz | $r'_3 = zyz - zy$ | $I_{zxx} \cup \{zxz\}$ | zy | $e_{zyz} = r'_3$ |
| zzx | $r'_6 = zzx - zxy$ | $I_{zyz} \cup \{zyz\}$ | zxy | $e_{zzx} = r'_6$ |

Tabela 4.2: Construção de \mathcal{B}

Portanto, a soma dos núcleos está gerada pelos e_w achados na Tabela 5.1 de onde temos então o operador:

| w | xyz | xzy | yxy | yyz | yzx | yzy | yzz | zxx | zxy | zxz | zyz | zzx |
|---------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $S_1 \wedge S_2(w)$ | xx | xyy | xx | yx | yxy | xy | xz | xyx | xyy | xyz | zy | zxy |

Tabela 4.3: Tabela de NRed

Apartir da informação da Tabela 4.3 temos então:

$$\text{NRed}(\wedge P) = \{xyz, xzx, yxy, yyz, yzx, yzy, yzz, zxx, zxy, zxz, zyz, zzx\}$$

de onde

$$\text{Red}(\wedge P) = \text{NRed}(P)^C = \{xxx, xxy, xxz, xyx, xzy, xzz, yxx, yxz, yyx, yyy, zyx, zyy, zzy, zzz\}$$

portanto:

$$\text{Obs}^P = \text{Red}(P) \setminus \text{Red}(\wedge P) = \{yxy\}$$

assim o par P não é confluyente.

4.3 Propriedade Church-Rosser e Lema de Newman

Na sequência $\langle F \rangle$ representa o submonoide de $(\text{End}(\mathbb{K}G), \circ)$, gerado por $F \subseteq \text{RO}(G, <)$ conjunto finito, onde $\text{End}(\mathbb{K}G)$ são os endomorfismos de $\mathbb{K}G$ e o operador identidade $Id_{\mathbb{K}G}$ é o elemento neutro. Além disso,

$$F = \{T_i \mid T_i \text{ é um operador de redução}\} = \{T_1, T_2, \dots, T_n\}$$

Um elemento $R \in \langle F \rangle$ é da forma $R = T'_1 \cdots T'_n$ onde cada $T'_i \in F$. Dado que cada um deles é um operador de redução esta combinação é finita.

Definição 4.3. Sejam v e v' dois elementos de $\mathbb{K}G$. Dizemos que v *reescreve para* v' , e denotamos por $v \rightsquigarrow v'$, se existe $R \in \langle F \rangle$ tal que $v' = R(v)$.

Definição 4.4 (Forma Normal). 1. Uma forma F -normal é um elemento de $\mathbb{K}\text{Red}(F)$ (não existem possíveis reduções)

2. Seja $v \in \mathbb{K}G$. Uma *forma F -normal de v* é uma forma F -normal v' tal que $v \rightsquigarrow v'$

Lema 4.5. (*Observação 2.2.23 [Che18]*) Sejam $v, v' \in \mathbb{K}G$ tais que $v \rightsquigarrow v'$ então $v - v' \in \text{Ker}(\wedge F)$.

Demonstração. A prova é por indução sobre $|R| = m$, o comprimento de R , isto é, o número de operadores que tem na composição, vamos a supor que $R = T'_1 \circ T'_2 \circ \cdots \circ T'_m$ uma composição de operadores de redução.

(Caso Base) $|R| = 1$.

Considere $R = T'_1$, para algum $T'_1 \in F$ e assim $v' = T'_1(v)$. Pela equação (4.2) da Definição 4.1 temos

$$\text{Ker}(\wedge F) = \sum_{i=1}^n \text{Ker}(T_i),$$

Vamos mostrar que $v - T'_1(v) \in \sum_{i=1}^n \text{Ker}(T_i)$, de fato

$$\begin{aligned} T'_1(v - T'_1(v)) &= T'_1(v) - T'_1(T'_1(v)) \\ &= T'_1(v) - T'_1(v) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Logo, $v - T'_1(v) \in \text{Ker}(\wedge F)$ e o resultado segue.

(Passo Indutivo.) Suponha que o resultado vale para $|R| = k$. Vamos mostrar que vale para $k + 1$:

Suponha que $R = T'_1 \circ T'_2 \circ \dots \circ T'_{k+1}$ e que $R(v) = v'$, isto é,

$$\begin{aligned} R(v) &= T'_1 \circ \underbrace{T'_2 \circ \dots \circ T'_{k+1}}_{R'}(v) \\ &= T'_1(R'(v)), \text{ pois } \circ \text{ é associativa} \end{aligned}$$

Então, $v \rightsquigarrow R'(v)$ via R' de comprimento k . Por HI, segue que $v - R'(v) \in \text{Ker}(\wedge F)$, isto é, que $(\wedge F)(v - R'(v)) = 0$. Note que

$$\begin{aligned} (\wedge F)(v - R(v)) &= (\wedge F)(v - T'_1(R'(v))) \\ &= (\wedge F)(v) - (\wedge F)(T'_1(R'(v))) \\ &= (\wedge F)(v) - (((\wedge F) \circ T'_1) \circ R')(v) \end{aligned} \tag{4.3}$$

Como $\wedge F \preceq T$, para $T \in F$, como estabelecido na Definição 4.1, temos que $(\wedge F) \preceq T'_1$. Pela Proposição 4.7, $(\wedge F) \circ T'_1 = \wedge F$. Então, continuando (4.3), temos

$$\begin{aligned} (\wedge F)(v - R(v)) &= (\wedge F)(v) - ((\wedge F) \circ R')(v) \\ &= (\wedge F)(v) - (\wedge F)(R'(v)) \\ &= (\wedge F)(v - R'(v)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

o que implica que $v - R(v) \in \text{Ker}(\wedge F)$, como queríamos. □

4.3.1 Propriedade de Church-Rosser

Introduzimos a boa ordem que será utilizada nas seguintes provas.

Definição 4.5 (Ordem Multiconjunto). A ordem multiconjunto sobre $\mathbb{K}G$, denotada por \leq_{mul} , é definida para $v, v' \in \mathbb{K}G$, da seguinte forma:

$$v \leq_{mul} v' \text{ se, e somente se, } \text{ para cada } g \in S_{v \setminus v'}, \text{ existe } g' \in S_{v' \setminus v} \\ \text{ tal que } g < g'.$$

onde $S_{v \setminus w} := S_v \setminus S_w$. O elemento $\bar{0}$ é o elemento mínimo nessa ordem.

Exemplo 4.3.1. Considere o conjunto $G = \{g_1 < g_2 < g_3 < g_4\}$. Sejam $v, v' \in \mathbb{K}G$ dados por $v = g_2 + g_3 - g_1$ e $v' = g_4 + g_1$. Primeiro determinamos os elementos de cada suporte: $S_v = \{g_1, g_2, g_3\}$ e $S_{v'} = \{g_1, g_4\}$. Como $g_2, g_3 \in S_v$ e $g_2, g_3 \notin S_{v'}$ e existem $g_4, g_3 \in S_{v'}$ tais que $g_2 < g_4$ e $g_2 < g_3$, respectivamente, pela definição 4.5 temos que $v \leq_{mul} v'$.

A seguinte propriedade de \leq_{mul} é importante já que se temos uma ordem bem fundada é possível usar indução a partir da ordem, o qual será útil para as seguintes provas.

Observação 4.3. A ordem \leq_{mul} é uma boa ordem.

Proposição 4.9. Seja $T \in \text{RO}(G, <)$. Se $v \notin \mathbb{K}\text{Red}(T)$ então $T(v) <_{mul} v$.

Demonstração. Seja $v \notin \mathbb{K}\text{Red}(T)$. Então, pela Definição 3.2, $v \in \mathbb{K}\text{NRed}(T)$, ou seja, para cada $g \in S_v$ e $T(v) \in S_{T(v)}$ temos $T(g) < g$, assim os elementos dos suportes são distintos. Como $T(\mathbf{1}g(v)) < \mathbf{1}g(v)$, então para $g' \in S_{T(v)}$ temos que $g' < \mathbf{1}g(v)$, o que implica que $T(v) <_{mul} v$. \square

Definição 4.6 (Church-Rosser). Seja $F \subseteq \text{RO}(G, <)$. Dizemos que F tem a propriedade Church-Rosser se para cada $v \in \mathbb{K}G$, tem-se que

$$v \rightsquigarrow (\wedge F)(v).$$

O seguinte teorema mostra a equivalência entre confluência e a propriedade Church-Rosser.

Teorema 4.4. (Teorema 2.2.5 [Che18]) *Seja $F \subseteq \mathbf{RO}(G, <)$. F é confluyente se, e somente se, F tem a propriedade Church-Rosser.*

Demonstração. (\Leftarrow) Suponha que F é Church-Rosser, isto é para todo $v \in \mathbb{K}G$, existe $R \in \langle F \rangle$ tal que $R(v) = (\wedge F)(v)$.

Temos que mostrar que $Obs^F = \mathbf{Red}(F) \setminus \mathbf{Red}(\wedge F) = \emptyset$.

Como $\mathbf{Red}(\wedge F) \subseteq \mathbf{Red}(F)$, só resta mostrar que $\mathbf{Red}(F) \subseteq \mathbf{Red}(\wedge F)$. Tome $g \in \mathbf{Red}(F)$, então, para todo $T \in F$, temos que $T(g) = g$. Por hipótese F é Church-Rosser portanto para g , $g \rightsquigarrow (\wedge F)(g)$. Então, existe $R \in \langle F \rangle$, com $R = T'_1 \circ T'_2 \circ \dots \circ T'_n$ tal que $(\wedge F)(g) = R(g) = T'_1 \circ T'_2 \circ \dots \circ T'_n(g) = g$, o que implica que $g \in \mathbf{Red}(\wedge F)$. Deste modo $\mathbf{Red}(F) = \mathbf{Red}(\wedge F)$, ou seja, $Obs^F = \emptyset$.

(\Rightarrow) Suponha que F é confluyente.

Vamos mostrar que F tem a propriedade Church-Rosser. Como \leq_{mul} é uma ordem bem fundada então pode-se aplicar uma indução em $\mathbb{K}G$.

(Caso Base) O primeiro elemento é o 0 assim para 0 temos que $0 = (\wedge F)(0)$ ja que $\wedge F$ é um operador linear.

(Passo Indutivo) Assumimos que para $v' \in \mathbb{K}G$ com $v' \leq_{mul} v$, $v' \rightsquigarrow (\wedge F)(v')$, isto é que existe $R \in \langle F \rangle$ tal que $R(v') = (\wedge F)(v')$. Para mostrar que a propriedade vale, temos que analisar para v em dois casos

1. Se $v \in \mathbb{K}\mathbf{Red}(\wedge F)$, então $(\wedge F)(v) = v = Id_{\mathbb{K}G}(v)$ portanto $v \rightsquigarrow (\wedge F)(v)$.
2. Se $v \notin \mathbb{K}\mathbf{Red}(\wedge F)$, então $v \notin \mathbb{K}\mathbf{Red}(F)$ pois por hipótese F é confluyente. Assim existe $T \in F$ tal que $T(v) \neq v$, e pela Proposição 4.9 temos que $T(v) <_{mul} v$. Logo, por HI, $T(v) \rightsquigarrow (\wedge F)(T(v))$, isto é, existe $R \in \langle F \rangle$ tal que $R(T(v)) = (\wedge F)(T(v))$. Pela Definição 4.1 $(\wedge F) \preceq T$ então pela Proposição 4.7 $\wedge F \circ T = \wedge F$. Portanto $R(T(v)) = (\wedge F)(v)$ o que implica que $v \rightsquigarrow (\wedge F)(v)$.

□

No restante do trabalho utilizaremos a noção de *divisor à direita*: para $T, T' \in \langle F \rangle$ dizemos que T é *divisor à direita de T' em $\langle F \rangle$* se, $T' = T'' \circ T$, para algum T'' .

O seguinte resultado é importante pois mostraremos propriedades relacionadas com formas normais. De onde pode-se observar que as formas normais são os elementos que ficam fixos pelos operadores ou por combinações lineares deles, motivo pelo qual usaremos o conceito de *sequência estacionária*².

Lema 4.6. (Lemma 2.2.6 [Che18]) *Seja $v \in \mathbb{K}G$ e seja (R_1, \dots, R_n, \dots) uma sequência de elementos de $\langle F \rangle$ tal que para cada inteiro n , R_n é um divisor à direita de R_{n+1} em $\langle F \rangle$. A sequência $(R_n(v))_{n \in \mathbb{N}}$ é estacionária.*

Demonstração. Vamos a proceder por indução sobre v .

(Caso Base) Seja $v = 0$.

Então a sequência $(R_n(v))_{n \in \mathbb{N}}$ é constante e igual a 0, pois R_n é um operador para cada n .

(Passo Indutivo) Assumimos que para todo $v' \in \mathbb{K}G$ tal que $v' <_{mul} v$ o lema se satisfaz. Vamos provar que existe uma sequência $(R_n(v))_{n \in \mathbb{N}}$ estacionária:

- Se $(R_n(v))_{n \in \mathbb{N}}$ é constante é igual a v então não temos nada a provar.
- Se $(R_n(v))_{n \in \mathbb{N}}$ não é estacionária, então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $R_{n_0}(v) \neq v$

Como $R_{n_0} \in \langle F \rangle$ temos que $R_{n_0} = T'_m \circ T'_{m-1} \circ \dots \circ T'_1$.

Sejam $T_i^* = T'_i \circ T'_{i-1} \circ \dots \circ T'_1$ e $w_i = T'_i \circ T'_{i-1} \circ \dots \circ T'_1(v)$.

Como $T'_m \circ T'_{m-1} \circ \dots \circ T'_1(v) \neq v$ então temos que para alguns índices

$$T_i^*(v) = (T'_i \circ T'_{i-1} \circ \dots \circ T'_1)(v) <_{\mathbb{K}G} (T'_{i-1} \circ \dots \circ T'_1)(v) = T_{i-1}^*(v)$$

isto é, $T'_i(w_{i-1}) <_{\mathbb{K}G} w_{i-1}$ isto para $i = 1, \dots, m$, a última relação implica pela Proposição 4.9 que $T'_i(w_{i-1}) <_{mul} w_{i-1}(i)$ e como cada T'_i é operador de redução teríamos uma cadeia

$$R_{n_0}(v) = T_m^*(v) <_{\mathbb{K}G} \dots <_{\mathbb{K}G} T_i^*(v) <_{\mathbb{K}G} T_{i-1}^*(v) \dots <_{\mathbb{K}G} v$$

O que por (i) obtemos

$$R_{n_0}(v) = T_m^*(v) <_{mul} \dots <_{mul} T_i^*(v) <_{mul} T_{i-1}^*(v) \dots <_{mul} v$$

²Uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é *estacionária* se existe n_0 inteiro tal que para $n \geq n_0$ temos que $x_n = x_{n+1}$.

o que implica que $R_{n_0}(v) \leq_{mul} v$. Por hipótese, para cada inteiro n existe $R'_n \in \langle F \rangle$ tal que $R_{n+1} = R'_{n+1} \circ R_n$.

Seja $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a sequência de elementos de $\langle F \rangle$ definida por

$$\begin{aligned} Q_1 &= R'_{n_0} \\ Q_{n+1} &= R'_{n_0+n} \circ Q_n \end{aligned} \tag{4.4}$$

Observe que, para cada n , Q_n é divisor à direita de Q_{n+1} . Pela hipótese de indução sobre R_{n_0} a sequência $(Q_n(R_{n_0}(v)))_{n \in \mathbb{N}}$ é estacionária, mais ainda, para cada inteiro n , $Q_n \circ R_{n_0}$ temos que:

$$\begin{aligned} Q_n \circ R_{n_0} &= R'_{n_0+(n-1)} \circ Q_{n-1} \circ R_{n_0} \\ &= R'_{n_0+(n-1)} \circ R'_{n_0+(n-1)} \circ Q_{n-2} \circ R_{n_0} \\ &= \dots \\ &= R'_{n_0+(n-1)} \circ R'_{n_0+(n-1)} \circ \dots \circ R'_{n_0+1} \circ Q_1 \circ R_{n_0} \\ &= R'_{n_0+(n-1)} \circ R'_{n_0+(n-1)} \circ \dots \circ R'_{n_0+1} \circ R'_{n_0} \circ R_{n_0} \\ &= R'_{n_0+(n-1)} \circ R'_{n_0+(n-1)} \circ \dots \circ R'_{n_0+1} \circ R_{n_0+1} \\ &= \dots \\ &= R'_{n_0+(n-1)} \circ R_{n_0+(n-1)} \\ &= R_{n_0+n} \end{aligned}$$

Assim para todo n a sequência $(Q_n(R_{n_0}(v)))_{n \in \mathbb{N}}$ é estacionária e portanto $(R_n(v))_{n \in \mathbb{N}}$ é estacionária.

□

Proposição 4.10. (*Proposição 2.2.7 [Che18]*) *Cada elemento de $\mathbb{K}G$ admite uma F -forma normal.*

Demonstração. Seja $v \in \mathbb{K}G$. Vamos mostrar que existe $R \in \langle F \rangle$ tal que $R(v) \in \mathbb{K}\text{Red}(F)$.

Suponha, por contradição, que para cada $R \in \langle F \rangle$, $R(v) \notin \mathbb{K}\text{Red}(F)$.

Note que o morfismo $Id_{\mathbb{K}G} \in \langle F \rangle$, e pela hipótese, $v = Id_{\mathbb{K}G}(v) \notin \mathbb{K}\text{Red}(F)$. Em particular, podemos tomar algum elemento em F pois $F \subseteq \langle F \rangle$, então seja T_1 tal que $v \notin \mathbb{K}\text{Red}(T_1)$.

Agora, sem perda de generalidade escolhemos os elementos T_1, \dots, T_n de F de modo que o morfismo $R_n(v) \notin \mathbb{K}\text{Red}(F)$ com $R_n = T_n \circ \dots \circ T_1 \in \langle F \rangle$. E pelo assumido é sempre possível achar um $T_{n+1} \in F$ tal que $R_n(v)$ não está em $\mathbb{K}\text{Red}(T_{n+1})$.

Este processo permite obter uma sequência $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos $\langle F \rangle$ tal que para cada inteiro n , R_n é um divisor a direita de R_{n+1} em $\langle F \rangle$ pela construção e $(R_n(v))_{n \in \mathbb{N}}$ não é estacionária, o que é uma contradição com o Lema 4.6. \square

Definição 4.7. Para cada $v \in \mathbb{K}G$, definimos a classe de v como segue:

$$[v] := \{v' \in \mathbb{K}G \mid v' - v \in \text{Ker}(\wedge F)\}.$$

Proposição 4.11. (Lemma 2.2.9 [Che18]) Para cada $v \in \mathbb{K}G$, $(\wedge F)(v)$ é o menor elemento de $[v]$ pela ordem \leq_{mul} . Além disso, se cada elemento v de $\mathbb{K}G$ admite exatamente uma F -forma normal, então esta forma normal é igual a $(\wedge F)(v)$.

Demonstração. A prova desta proposição pode ser encontrada em [Che18]. \square

Proposição 4.12. (Lemma 2.2.9 [Che18]) O conjunto F é confluyente se, e somente se, cada elemento de $\mathbb{K}G$ admite uma única F -forma normal.

Demonstração. (\Rightarrow) Suponha que F é confluyente.

Seja $v \in \mathbb{K}G$ e suponha que existam v_1 e v_2 duas F -formas normais de v . Seja R_1 e R_2 os dois elementos de $\langle F \rangle$ tais que $R_i(v) = v_i$, para $i = 1, 2$. Pelo Lema 4.5, temos que $v - v_1, v - v_2 \in \text{Ker}(\wedge F)$, então

$$v_1 - v_2 = v - v_2 - (v - v_1) \in \text{Ker}(\wedge F).$$

Além disso $v_1 - v_2 \in \mathbb{K}\text{Red}(F)$ dado que v_1 e v_2 são F -formas normais. Como F é confluyente, $\mathbb{K}\text{Red}(F) = \mathbb{K}\text{Red}(\wedge F)$, e então,

$$v_1 - v_2 \in \mathbb{K}\text{Red}(\wedge F) \cap \text{Ker}(\wedge F) \tag{4.5}$$

Observe que,

$$\begin{aligned}
x \in \mathbb{K}\mathbf{Red}(\wedge F) \cap \mathbf{Ker}(\wedge F) & \text{ se, e somente se, } x \in \mathbb{K}\mathbf{Red}(\wedge F) \text{ e } x \in \mathbf{Ker}(\wedge F) \\
& \text{ se, e somente se, } \wedge F(x) = x \text{ e } \wedge F(x) = 0 \\
& \text{ se, e somente se, } x = 0 \\
& \text{ se, e somente se, } x \in \{0\}
\end{aligned}$$

Portanto, de (4.5) temos que $v_1 - v_2 = 0$, isto é $v_1 = v_2$, o que implica que v admite uma única F -forma normal.

(\Leftarrow) Suponha que cada elemento de $v \in \mathbb{K}G$ admite uma única F -forma normal.

Pela Proposição 4.11 a forma normal de v é igual a $(\wedge F)$, portanto, $v \rightsquigarrow (\wedge F)$ e pela Definição 4.6, segue que F tem a propriedade Church-Rosser, donde, pelo Teorema 4.4, temos que F é confluente. \square

4.3.2 Confluência local

Definição 4.8 (Confluência Local). F é *localmente confluente* se, para cada $v \in \mathbb{K}G$ e para cada $T_1, T_2 \in F$, existe v' tal que $T_1(v)$ e $T_2(v)$ se reescrevem em v' .

Proposição 4.13. (*Lemma de Newman*)(Proposição 2.2.12 [Che18]) *O conjunto F é confluente se, e somente se, este é localmente confluente.*

Demonstração. (\Rightarrow) Suponha que F é confluente.

Sejam $v \in \mathbb{K}G$ e $T_1, T_2 \in F$. Pelo Teorema 4.4, temos que

$$T_i(v) \rightsquigarrow (\wedge F)(T_i(v)),$$

para $i = 1, 2$. Como $\wedge F \preceq T_i$, pelo Lema 4.7, temos

$$(\wedge F)(T_i(v)) = (\wedge F)(v).$$

Portanto F é localmente confluente.

(\Leftarrow) Suponha que F é localmente confluente.

Vamos mostrar que cada elemento admite uma única forma normal para usar o Lema 4.12. Mostraremos isto usando indução sobre v .

(Caso base) Se $v = 0$ não tem nada pra mostrar.

(Passo Indutivo) Seja $v \in \mathbb{K}G$. Asumiremos por indução que para cada $v' \leq_{mul} v$, v' admite uma única F -forma normal. Temos dois casos:

1. Se $v \in \mathbb{K}\text{Red}(F)$, então a forma normal única é o mesmo v já que $T(v) = v$ para todo operador em F .
2. Se $v \notin \mathbb{K}\text{Red}(F)$, Sejam v_1 e v_2 duas F -formas normais de v , assim existem $R_1, R_2 \in \langle F \rangle$ tal que $R_i(v) = v_i$. Agora podemos escrever a $R_i = R'_i \circ T_i$ com $R'_i \in \langle F \rangle$ e $T_i \in F$ e $T_i(v) \neq v$. Como F é localmente confluyente existe $u \in \mathbb{K}G$ tal que $T_i(v) \rightsquigarrow u$ (existem $S_1, S_2 \in \langle F \rangle$ tal que $S_i(T_i(v)) = u$). Pela Proposição 4.10, u admite uma F -forma normal \hat{u} , isto é que existe $R^* \in \langle F \rangle$ tal que $R^*(u) = \hat{u} \in \mathbb{K}G$ e portanto $R^*(S_i(T_i(v))) = \hat{u} \in \mathbb{K}G$, assim \hat{u} é uma F -forma normal de $T_i(v)$.

Além disso, $v_i = R'_i(T_i(v))$ são F -formas normais de $T_i(v)$. Como T_i é um operador de redução, pela Proposição 4.9, temos $T_i(v) <_{mul} v$. Pela hipótese de indução $T_i(v)$ admite uma única F -forma normal que seria $v_1 = \hat{u} = v_2$ de onde $v_1 = v_2$, assim v admite uma única forma normal, e o resultado segue.

□

Capítulo 5

Operadores de Redução e Completação

Baseados na construção dos Capítulos 3 e 4, introduziremos um sistema abstrato de reescrita sobre $\mathbb{K}G$, a partir de $F \subseteq \mathbf{RO}(G, <)$. Mostraremos as principais propriedades deste sistema de reescrita como Church-Rosser e confluência tomando como base a parte final do capítulo 4. Na segunda parte deste capítulo definiremos o *produto entrelaçado* de operadores de redução, conceito que permitirá estabelecer a completção através do ínfimo e do o supremo definidos no Capítulo 3 e com isso conseguiremos o objetivo principal deste trabalho.

5.1 Sistema Abstrato de Reescrita

Seja $F \subseteq \mathbf{RO}(G, <)$. Neste capítulo e no restante deste trabalho, consideraremos o sistema abstrato de reescrita $(\mathbb{K}G, \rightarrow_F)$, onde \rightarrow_F é uma relação binária sobre $\mathbb{K}G$, definido por: para $v, v' \in \mathbb{K}G$,

$$v \rightarrow_F v' \text{ se, e somente se, existe } T \in F \text{ tal que } v \notin \mathbb{K}\mathbf{Red}(F) \text{ e } v' = T(v).$$

Pela construção do capítulo anterior, \rightarrow_F satisfaz algumas propriedades:

Propriedade 1. Se temos $v \rightarrow_F v'$ temos que $v' = T(v) \leq_{mul} v$ pela Proposição 4.9.

Propriedade 2. Como \leq_{mul} é bem fundada então a relação \rightarrow_F é também bem fundada.

Propriedade 3. Temos $v \xrightarrow{*}_F v'$ se, e somente se, existe $R \in \langle F \rangle$ tal que $v' = R(v)$ já que cada possível passo representa um operador em F , isto é, $v \rightsquigarrow v'$. Em particular, $v \xrightarrow{*}_F v'$ implica que $v - v' \in \text{Ker}(\wedge F)$.

O fecho de equivalência \leftrightarrow^*_F é fechado para adição vetorial.

Lema 5.7. (Lema 2.3.5 [Che18]) *Sejam $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{K}G$ tal que $v_1 \leftrightarrow^*_F v_3$. Então, temos $v_1 + v_2 \leftrightarrow^*_F v_2 + v_3$.*

Demonstração. Sejam $u_1, u_2 \in \mathbb{K}G$ e $T \in F$ arbitrários.

Pela definição, $u_1 + u_2 \xrightarrow{*}_F T(u_1 + u_2)$ e também por ser T idempotente

$$\begin{aligned} u_1 + T(u_2) &\xrightarrow{*}_F T(u_1 + T(u_2)) \\ &= T(u_1) + T(T(u_2)) \\ &= T(u_1) + T(u_2) \\ &= T(u_1 + u_2) \end{aligned}$$

Isto é, $u_1 + T(u_2) \xrightarrow{*}_F T(u_1 + u_2)$, desta maneira

$$u_1 + T(u_2) \xrightarrow{*}_F T(u_1 + u_2) \leftrightarrow^*_F u_1 + u_2$$

Portanto, temos

$$u_1 + u_2 \leftrightarrow^*_F u_1 + T(u_2). \quad (5.1)$$

Seja $u_3 \in \mathbb{K}G$ tal que $u_2 \xrightarrow{*}_F u_3$, isto é, que existe $R \in \langle F \rangle$ tal que $u_3 = R(u_2)$. Pela equação 5.1 temos

$$u_1 + u_2 \leftrightarrow^*_F u_1 + u_3 \quad (5.2)$$

Sejam $v_1, v_2 \in \mathbb{K}G$ tais que $v_1 \leftrightarrow^*_F v_2$, isto é, existe uma sequência de reduções:

$$v_1 = u_1 \xrightarrow{*}_F u_2 \leftrightarrow^*_F u_3 \xrightarrow{*}_F \cdots \xrightarrow{*}_F u_{r_1} \leftrightarrow^*_F u_r = v_2$$

A relação (5.2) implica que para cada $v_3 \in \mathbb{K}$ e para cada $i \in \{1, \dots, r-1\}$, temos que $u_i + v_3 \xrightarrow{*}_F u_{i+1} + v_3$, ou seja,

$$v_1 + v_3 = u_1 + v_3 \xrightarrow{*}_F u_2 + v_3 \xrightarrow{*}_F \cdots \xrightarrow{*}_F u_{r-1} + v_3 \xrightarrow{*}_F u_r + v_3 = v_2 + v_3,$$

e o resultado segue. \square

Proposição 5.14. (*Proposição 2.3.6 [Che18]*) Para cada $v_1, v_2 \in \mathbb{K}G$, temos que $v_1 \xrightarrow{*}_F v_2$ se, e somente se, $v_1 - v_2 \in \text{Ker}(\wedge F)$.

Demonstração. (\Rightarrow) Suponha que $v_1 \xrightarrow{*}_F v_2$.

Portanto existe uma sequência de reduções:

$$v_1 + v_3 = u_1 + v_3 \xrightarrow{*}_F u_2 + v_3 \xrightarrow{*}_F \cdots \xrightarrow{*}_F u_{r-1} + v_3 \xrightarrow{*}_F u_r + v_3 = v_2 + v_3$$

Para cada $i \in \{1, \dots, r-1\}$, $u_i - u_{i+1} \in \text{Ker}(\wedge)$ devido a parte **Propriedade 3**, assim como

$$v_1 - v_2 = (u_1 - u_2) - (u_2 - u_3) - \cdots - (u_{r-2} - u_{r-1}) + (u_{r-1} - u_r)$$

E como cada termo pertence ao núcleo, vale $v_1 - v_2 \in \text{Ker}(\wedge F)$.

(\Leftarrow) Reciprocamente, suponha que $v_1 - v_2 \in \text{Ker}(\wedge F)$.

O conjunto

$$\{v - T(v) \mid T \in F \text{ e } v \in \mathbb{K}G\},$$

é o conjunto gerador do núcleo, uma vez que,

$$T(v - T(v)) = T(v) - T(T(v)) = T(v) - T(v) = 0,$$

pela idempotência de T . Desta maneira, existem $T_1, \dots, T_n \in F$ e $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{K}G$ tais que

$$v_1 - v_2 = \sum_{i=1}^n u_i - T_i(u_i),$$

então temos

$$v_1 = \sum_{i=1}^n u_i - T_i(u_i) + v_2.$$

Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, temos que $T(u_i - T_i(u_i)) = 0$ e pela definição seria

$$T(u_i - T_i(u_i)) \xrightarrow{*}_F 0.$$

Portanto, pelo Lema 5.7, $T(u_i - T_i(u_i)) + v_2 \xrightarrow{*}_F v_2 + 0$, ou seja, $v_1 \xrightarrow{*}_F v_2$. \square

Observação 5.4. (Observação 2.3.7 [Che18]) Seja $v \in \mathbb{K}G$ e seja $[v]$ o conjunto de elementos v' tal que $v - v' \in \text{Ker}(\wedge F)$. Pela Proposição 5.2,

$$\begin{aligned} [v]_{\overset{*}{\leftrightarrow}_F} &= \{v' \in \mathbb{K}G \mid v \overset{*}{\leftrightarrow}_F v'\} \\ &= \{v' \in \mathbb{K}G \mid v' - v \in \text{Ker}(\wedge F)\} \\ &= [v] \end{aligned}$$

E de igual forma $(\wedge F)(v)$ é o menor elemento da classe.

Proposição 5.15. (Proposição 2.3.8 [Che18]) O conjunto F tem a propriedade de Church-Rosser se, e somente se, \rightarrow_F tem a propriedade Church-Rosser.

Demonstração. (\Leftarrow) Suponha que F tem a propriedade Church-Rosser.

Sejam $v, v' \in \mathbb{K}G$ tal que $v \overset{*}{\leftrightarrow}_F v'$. Pela Proposição 5.14, $v - v' \in \text{Ker}(\wedge F)$, ou seja, $(\wedge F)(v - v') = 0$, de onde $(\wedge F)(v) = (\wedge F)(v')$ dado que $(\wedge F)$ é um operador linear, chamaremos de u esse valor comum.

O conjunto F por ter a propriedade de Church-Rosser satisfaz

$$v = (\wedge F)(v) = u = (\wedge F)(v') = v',$$

que pela a definição seria $v \overset{*}{\rightarrow}_F u \overset{*}{\leftarrow}_F v'$. Portanto \rightarrow_F tem a propriedade Church-Rosser.

(\Rightarrow) Reciprocamente, suponha que \rightarrow_F tem a propriedade Church-Rosser.

Seja $v \in \mathbb{K}G$. Note que $v - (\wedge F)(v) \in \text{Ker}(\wedge F)$, de fato,

$$\begin{aligned} (\wedge F)(v - (\wedge F)(v)) &= (\wedge F)(v) - (\wedge F)((\wedge F)(v)) \\ &= (\wedge F)(v) - (\wedge F)(v) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Pela Proposição 5.14 temos $v \overset{*}{\leftrightarrow}_F (\wedge F)(v)$ e como \rightarrow_F tem a propriedade Church-Rosser, existe $u \in \mathbb{K}G$ tal que

$$v \overset{*}{\rightarrow}_F u \overset{*}{\leftarrow}_F (\wedge F)(v).$$

Além disso, pelo Proposição 4.11 $(\wedge F)(v)$ é a F -forma normal de v , assim a única opção é

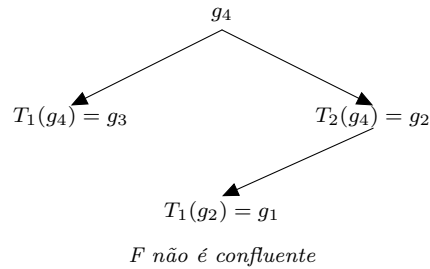
$$(\wedge F)(v) \overset{0}{\rightarrow}_F u \quad ((\wedge F)(v) = u)$$

Então, $v \xrightarrow{*}_F (\wedge F)(v)$, isto é, $v \rightsquigarrow (\wedge F)(v)$ e, portanto, F tem a propriedade de Church-Rosser. \square

Corolário 5.1. (*Colorario 2.3.9 [Che18]*) *O conjunto F é confluyente se, e somente se, \rightarrow_F é confluyente.*

Demonstração. Pelo Teorema 4.4, F é confluyente se, e somente se, este tem a propriedade de Church-Rosser. Portanto, pela Proposição 4.4, F é confluyente se \rightarrow_F tem a propriedade de Church-Rosser o que é equivalente a \rightarrow_F ser confluyente. \square

Exemplo 5.1.1. (*Exemplo 2.3.10 [Che18]*) *Se consideramos o par F do Exemplo 4.2.1, vimos que este par F não é confluyente. O seguinte diagrama*



Mostra que $g_4 \xrightarrow{*}_P g_1$ e $g_4 \xrightarrow{*}_P g_3$, dois elementos que são formas normais, assim \rightarrow_P não é confluyente.

5.2 Confluência para um par de operadores de redução

Nesta seção fixaremos o par $P = (T_1, T_2)$ de operadores de redução relativos a $(G, <)$.

Definição 5.1 (Produto Entrelaçado). Sejam S, T dois endomorfismos lineares de $\mathbb{K}G$. O n -ésimo *produto entrelaçado* de S por T , denotado por $\langle T, S \rangle^n$ ao produto de n fatores de combinações de S e T da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\langle T, S \rangle^1 &= S \\
\langle T, S \rangle^2 &= T \circ S \\
\langle T, S \rangle^3 &= S \circ T \circ S \\
&\vdots \\
\langle T, S \rangle^{2k} &= \underbrace{T \circ S \circ \dots \circ T \circ S}_{2k \text{ fatores}} = (T \circ S)^k \\
\langle T, S \rangle^{2k+1} &= S \circ \underbrace{T \circ S \circ \dots \circ T \circ S}_{2k \text{ fatores}} = S \circ (T \circ S)^k \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Para $g \in G$, a sequência $(\langle T_1, T_2 \rangle^m(g))_{m \in \mathbb{N}}$ elementos de $\langle F \rangle$ cumpre:

- $\langle T_1, T_2 \rangle^{m+1} = T_1 \circ \langle T_1, T_2 \rangle^m$, se m é ímpar; e
- $\langle T_1, T_2 \rangle^{m+1} = T_2 \circ \langle T_1, T_2 \rangle^m$, se m é par.

Isto é, que cada para cada inteiro m , $\langle T_1, T_2 \rangle^m$ é divisor a direita de $\langle T_1, T_2 \rangle^{m+1}$ em $\langle F \rangle$ e pelo Lema 4.6 temos que a sequência $(\langle T_1, T_2 \rangle^m(g))_{m \in \mathbb{N}}$ é estacionária.

Portanto, existe um inteiro n tal que $\langle T_1, T_2 \rangle^n(g)$ e $\langle T_2, T_1 \rangle^n(g)$ são P -formas normais. Seja n_g o menor inteiro que cumpre esta condição. Definimos os dois endomorfismos lineares $\langle T_1, T_2 \rangle$ e $\langle T_2, T_1 \rangle$ como:

$$\langle T_2, T_1 \rangle(g) = \langle T_2, T_1 \rangle^{n_g}(g) \quad \text{e} \quad \langle T_1, T_2 \rangle(g) = \langle T_1, T_2 \rangle^{n_g}(g)$$

Para cada $g \in G$. Observemos que existe uma diferença entre $\langle T_1, T_2 \rangle(g)$ e $\langle T_1, T_2 \rangle^1(g)$ já que n_g pode tomar qualquer valor diferente de 1 e $\langle T_1, T_2 \rangle^1(g) = T_1$.

Observação 5.5. (*Observação 3.1.2 [Che18]*) *Os espaços vetoriais $\text{Im}(\langle T_2, T_1 \rangle)$ e $\text{Im}(\langle T_1, T_2 \rangle)$ estão incluídos em $\mathbb{K}\text{Red}(P)$, já que para $n_g \leq k$ inteiro, $\langle T_2, T_1 \rangle^k(g) = \langle T_2, T_1 \rangle^{k+1}(g)$ e como T_1 e T_2 são operadores de redução então só temos uma opção que $\langle T_2, T_1 \rangle(g) = g$. Portanto, cada elemento $v \in \mathbb{K}G$ admite no máximo duas P -formas normais: $\langle T_2, T_1 \rangle(v)$ e $\langle T_1, T_2 \rangle(v)$.*

Lema 5.8. (Lema 3.1.3 [Che18]) O par P é confluente se, e somente se, $\langle T_2, T_1 \rangle = \langle T_1, T_2 \rangle$, nesse caso temos

$$\begin{aligned}\wedge P &= \langle T_2, T_1 \rangle \\ &= \langle T_1, T_2 \rangle\end{aligned}$$

Demonstração. Pela Proposição 4.12, P é confluente se, e somente se, para cada $v \in \mathbb{K}G$ admite uma única P -forma normal. Portanto P é confluente se, e somente se, $\langle T_2, T_1 \rangle(v) = \langle T_1, T_2 \rangle(v)$ e como esta P -forma normal é única então pela Proposição 4.11, temos que

$$\begin{aligned}\langle T_2, T_1 \rangle(v) &= \langle T_1, T_2 \rangle(v) \\ &= (\wedge P)(v)\end{aligned}$$

□

A seguir escreveremos Id para $Id_{\mathbb{K}G}$, omitindo o $\mathbb{K}G$.

Proposição 5.16 (Produto entrelaçado dual). Para n inteiro temos que:

$$\begin{aligned}\langle Id - T_2, Id - T_1 \rangle^n &= Id + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i \left(\langle T_1, T_2 \rangle^i + \langle T_2, T_1 \rangle^i \right) + (-1)^n \langle T_2, T_1 \rangle^n \\ \langle Id - T_1, Id - T_2 \rangle^n &= Id + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i \left(\langle T_1, T_2 \rangle^i + \langle T_2, T_1 \rangle^i \right) + (-1)^n \langle T_1, T_2 \rangle^n\end{aligned}$$

Demonstração. A prova é por indução sobre n .

(Caso Base) Para $n = 2$ temos

$$\begin{aligned}\langle Id - T_2, Id - T_1 \rangle^2 &= (Id - T_2) \circ (Id - T_1) \\ &= Id \circ (Id - T_1) - T_2 \circ (Id - T_1) \\ &= Id \circ Id - Id \circ T_1 - T_2 \circ Id + T_2 \circ T_1 \\ &= Id - T_1 - T_2 + T_2 \circ T_1 \\ &= Id - (T_1 + T_2) + T_2 \circ T_1 \\ &= Id + (-1)^1 (\langle T_2, T_1 \rangle^1 + \langle T_1, T_2 \rangle^1) + (-1)^2 \langle T_2, T_1 \rangle^2 \\ &= Id + \sum_{i=1}^1 (-1)^i \left(\langle T_2, T_1 \rangle^i + \langle T_1, T_2 \rangle^i \right) + (-1)^2 \langle T_2, T_1 \rangle^2\end{aligned}$$

(Passo Indutivo) Assumimos que a propriedade se cumpre para n .

Vamos mostrar para $n + 1$ em dois casos:

(Caso 1) Se $n + 1$ é par, observamos as seguintes propriedades:

Propriedade 1.

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i+1} T_2 \circ \langle T_1, T_2 \rangle^i \\
&= T_2 \circ \langle T_1, T_2 \rangle^1 - T_2 \circ \langle T_1, T_2 \rangle^2 + \cdots + T_2 \circ \langle T_1, T_2 \rangle^{n-2} - T_2 \circ \langle T_1, T_2 \rangle^{n-1} \\
&= T_2 \circ T_2 - T_2 \circ (T_1 \circ T_2) + T_2 \circ (T_2 \circ T_1 \circ T_2) - \cdots + T_2 \circ \underbrace{T_2 \circ \cdots \circ T_1 \circ T_2}_{n-2 \text{ fatores}} - T_2 \circ \underbrace{T_1 \circ \cdots \circ T_1 \circ T_2}_{n-1 \text{ fatores}} \\
&= T_2 - T_2 \circ T_1 \circ T_2 + T_2 \circ T_1 \circ T_2 - \cdots + \underbrace{T_2 \circ \cdots \circ T_1 \circ T_2}_{n-2 \text{ fatores}} - \underbrace{T_2 \circ T_1 \circ \cdots \circ T_1 \circ T_2}_n \\
&= T_2 - \underbrace{T_2 \circ T_1 \circ \cdots \circ T_1 \circ T_2}_n \\
&= T_2 - \langle T_1, T_2 \rangle^n.
\end{aligned}$$

Propriedade 2.

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i+1} T_2 \circ \langle T_2, T_1 \rangle^i \\
&= T_2 \circ \langle T_2, T_1 \rangle^1 - T_2 \circ \langle T_2, T_1 \rangle^2 + \cdots + T_2 \circ \langle T_2, T_1 \rangle^{n-2} - T_2 \circ \langle T_2, T_1 \rangle^{n-1} \\
&= T_2 \circ T_1 - T_2 \circ (T_2 \circ T_1) + \cdots + T_2 \circ \underbrace{T_1 \circ \cdots \circ T_1 \circ T_2}_{n-2 \text{ fatores}} - T_2 \circ \underbrace{T_2 \circ T_1 \circ \cdots \circ T_1 \circ T_2}_{n-1 \text{ fatores}} \\
&= T_2 \circ T_1 - T_2 \circ T_1 + \cdots + \underbrace{T_2 \circ T_1 \circ \cdots \circ T_1 \circ T_2}_{n-1 \text{ fatores}} - \underbrace{T_2 \circ T_1 \circ \cdots \circ T_1 \circ T_2}_{n-1 \text{ fatores}} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Propriedade 3. Usando as propriedades 1 e 2 na somatoria temos que:

$$\begin{aligned}
& -T_2 \circ \langle Id - T_2, Id - T_1 \rangle^n \\
&= -T_2 \circ \left[Id + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i \left(\langle T_1, T_2 \rangle^i + \langle T_2, T_1 \rangle^i \right) + (-1)^n \langle T_2, T_1 \rangle^n \right] \\
&= -T_2 + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i+1} \left(T_2 \circ \langle T_1, T_2 \rangle^i + T_2 \circ \langle T_2, T_1 \rangle^i \right) - (-1)^n T_2 \circ \langle T_2, T_1 \rangle^n \\
&= -T_2 + T_2 - \langle T_1, T_2 \rangle^n + (-1)^{n+1} \langle T_2, T_1 \rangle^{n+1} \\
&= (-1)^n \langle T_1, T_2 \rangle^n + (-1)^{n+1} \langle T_2, T_1 \rangle^{n+1}.
\end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}
& \langle Id - T_2, Id - T_1 \rangle^{n+1} \\
&= (Id - T_2) \circ \langle Id - T_2, Id - T_1 \rangle^n \\
&= (Id \circ (\langle Id - T_2, Id - T_1 \rangle^n) - T_2 \circ (\langle Id - T_2, Id - T_1 \rangle^n)) \\
&= \langle Id - T_2, Id - T_1 \rangle^n - T_2 \circ \langle Id - T_2, Id - T_1 \rangle^n \\
&= Id + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i \left(\langle T_1, T_2 \rangle^i + \langle T_2, T_1 \rangle^i \right) + (-1)^n \langle T_2, T_1 \rangle^n + (-1)^n \langle T_1, T_2 \rangle^n + (-1)^{n+1} \langle T_2, T_1 \rangle^{n+1} \\
&= Id + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i \left(\langle T_1, T_2 \rangle^i + \langle T_2, T_1 \rangle^i \right) + (-1)^n \left(\langle T_2, T_1 \rangle^n + \langle T_1, T_2 \rangle^n \right) + (-1)^{n+1} \langle T_2, T_1 \rangle^{n+1} \\
&= Id + \sum_{i=1}^n (-1)^i \left(\langle T_1, T_2 \rangle^i + (-1)^i \langle T_2, T_1 \rangle^i \right) + (-1)^{n+1} \langle T_2, T_1 \rangle^{n+1}
\end{aligned}$$

(Caso 2) Para quando $n + 1$ é ímpar, é análogo ao Caso 1.

Portanto

$$\langle Id - T_2, Id - T_1 \rangle^{n+1} = Id + \sum_{i=1}^n (-1)^i \left(\langle T_1, T_2 \rangle^i + (-1)^i \langle T_2, T_1 \rangle^i \right) + (-1)^{n+1} \langle T_2, T_1 \rangle^{n+1}$$

□

Observação 5.6. (Observação 3.1.5 [Che18]) Pelo o Lema 5.8 temos que se o par P é confluyente, então

$$\begin{aligned}
\langle Id - T_2, Id - T_1 \rangle(g) &= \langle Id - T_2, Id - T_1 \rangle^{n_g}(g) \\
&= Id + \sum_{i=1}^{n_g-1} (-1)^i \left(\langle T_1, T_2 \rangle^i + \langle T_2, T_1 \rangle^i \right) + (-1)^{n_g} \langle T_2, T_1 \rangle^{n_g} \\
&= Id + \sum_{i=1}^{n_g-1} (-1)^i \left(\langle T_1, T_2 \rangle^i + \langle T_2, T_1 \rangle^i \right) + (-1)^{n_g} \langle T_1, T_2 \rangle^{n_g} \\
&= \langle Id - T_1, Id - T_2 \rangle^{n_g}(g) \\
&= \langle Id - T_2, Id - T_1 \rangle(g)
\end{aligned}$$

Assim quando P é confluyente o valor comum de $\langle Id - T_2, Id - T_1 \rangle$ e $\langle Id - T_1, Id - T_2 \rangle$ será denotado por T .

Lema 5.9. (Lema 3.1.6 [Che18]) Assuma que P é confluyente. Então, $Id - T$ é um operador de redução relativo a $(G, <)$. Além disso temos

$$\text{NRed}(Id - T) = \text{NRed}(T_1) \cap \text{NRed}(T_2)$$

Demonstração. Primeiro vamos mostrar que $Id - T$ é um projetor. Como T_1, T_2 são projetores então para $v_1, v_2 \in \mathbb{K}G$

$$\begin{aligned}
(Id - T_1)(\alpha v_1 + v_2) &= Id(\alpha v_1 + v_2) - T_1(\alpha v_1 + v_2) \\
&= \alpha Id(v_1) + Id(v_2) - \alpha T_1(v_1) - T_1(v_2) \\
&= \alpha(Id(v_1) - T_1(v_1)) + Id(v_2) - T_1(v_2) \\
&= \alpha(Id - T_1)(v_1) + (Id - T_1)(v_2)
\end{aligned}$$

Assim é linear $(Id - T_1)$, agora como

$$\begin{aligned}
(Id - T_1) \circ (Id - T_1) &= Id \circ (Id - T_1) - T_1 \circ (Id - T_1) \\
&= Id - T_1 - T_1 + T_1^2 \\
&= Id - T_1 - T_1 + T_1 \\
&= Id - T_1
\end{aligned}$$

Assim $(Id - T_1)$ é idempotente, e portanto $Id - T_1$ e $Id - T_2$ são projetores e como T é composição de projetores então T também e pelo anteriormente mostrado $(Id - T)$ é projetor.

Seja $g \in G$. Vamos mostrar que $g - T(g)$ é igual a g ou menor estrito que g . Pela Proposição 5.16 temos que:

$$\begin{aligned}
T(g) &= \langle Id - T_2, Id - T_1 \rangle(g) \\
&= \left[Id + \sum_{i=1}^{n_g-1} (-1)^i \left(\langle T_1, T_2 \rangle^i + \langle T_2, T_1 \rangle^i \right) + (-1)^{n_g} \langle T_2, T_1 \rangle^{n_g} \right](g) \\
&= Id(g) + \sum_{i=1}^{n_g-1} (-1)^i \left(\langle T_1, T_2 \rangle^i + \langle T_2, T_1 \rangle^i \right)(g) + (-1)^{n_g} \langle T_2, T_1 \rangle^{n_g}(g) \\
&= g + \sum_{i=1}^{n_g-1} (-1)^i \left(\langle T_1, T_2 \rangle^i + \langle T_2, T_1 \rangle^i \right)(g) + (-1)^{n_g} \langle T_2, T_1 \rangle^{n_g}(g)
\end{aligned}$$

Assim temos

$$\begin{aligned}
g - T(g) &= (-1) \left[\sum_{i=1}^{n_g-1} (-1)^i \left(\langle T_1, T_2 \rangle^i + \langle T_2, T_1 \rangle^i \right)(g) + (-1)^{n_g} \langle T_2, T_1 \rangle^{n_g}(g) \right] \\
&= \sum_{i=1}^{n_g-1} (-1)^{i+1} \left(\langle T_1, T_2 \rangle^i + \langle T_2, T_1 \rangle^i \right)(g) + (-1)^{n_g+1} \langle T_2, T_1 \rangle^{n_g+1}(g)
\end{aligned}$$

Desta forma se $g \in \text{NRed}(T_1) \cap \text{NRed}(T_2)$, então $\langle T_1, T_2 \rangle^i(g) < g$ e $\langle T_2, T_1 \rangle^i(g) < g$ dado que

$$\begin{aligned}
\langle T_1, T_2 \rangle^1(g) &= T_2(g) < g \\
\langle T_1, T_2 \rangle^2(g) &= T_1(T_2(g)) < T_2(g) < g \\
\langle T_1, T_2 \rangle^i(g) &= T_1(T_2(\dots(T_2(g))) < \dots < T_2(g) < g
\end{aligned}$$

portanto o gerador principal de cada parte da suma de $g - T(g)$ vai ser menor que g , portanto $g - T(g)$ vai ser menor estrito que g . Assuma que $g \notin \text{NRed}(T_1) \cap \text{NRed}(T_1)$.

Assuma que $g \in \text{Red}(T_1)$ temos:

$$\begin{aligned}
\langle T_2, T_1 \rangle^1(g) &= T_1(g) = g \\
\langle T_2, T_1 \rangle^2(g) &= T_2(T_1(g)) = T_2(g) \\
\langle T_2, T_1 \rangle^3(g) &= T_1(T_2(T_1(g))) = T_1(T_2(g)) = \langle T_1, T_2 \rangle^2(g) \\
\langle T_2, T_1 \rangle^4(g) &= T_2(T_1(T_2(T_1(g)))) = T_2(T_1(T_2(g))) = \langle T_1, T_2 \rangle^3(g) \\
&\dots \\
\langle T_2, T_1 \rangle^i(g) &= T_{1,2}(\dots T_1(T_2(T_1(g)))) = T_{1,2}(\dots (T_1(T_2(g)))) = \langle T_1, T_2 \rangle^{i-1}(g) \\
&\dots \\
\langle T_2, T_1 \rangle^{n_g}(g) &= T_{1,2}(\dots T_1(T_2(T_1(g)))) = T_{1,2}(\dots (T_1(T_2(g)))) = \langle T_1, T_2 \rangle^{n_g-1}(g)
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
g - T(g) &= g + T_2(g) + \sum_{i=2}^{n_g-1} (-1)^{i+1} \left(\langle T_1, T_2 \rangle^i + \langle T_1, T_2 \rangle^{i-1} \right) (g) + (-1)^{n_g+1} \langle T_1, T_2 \rangle^{n_g-1}(g) \\
&= g
\end{aligned}$$

Devido a que a soma é telescópica¹ e os termos que ficam são

$$(-1)^{n_g} \langle T_1, T_2 \rangle^{n_g-1}(g) - T_2(g).$$

No caso em que $g \in \text{Red}(T_2)$ é análogo e portanto $Id - T$ é um operador relativo a $(G, <)$ e o conjunto $\text{NRed}(Id - T)$ é igual a $\text{NRed}(T_1) \cap \text{NRed}(T_2)$ \square

Lema 5.10. (Lema 3.1.7 [Che18]) Assumamos P confluente, então $T_1 \vee T_2 = Id - T$

Demonstração. Como $Id - T \in \text{RO}(G, <)$ e $\theta : \mathbb{K}G \rightarrow \text{RO}(G, <)$ então é suficiente mostrar que $\text{Ker}(Id - T) = \text{Ker}(T_1 \vee T_2)$ dado que

$$Id - T = \theta(\text{Ker}(Id - T)) = \theta(\text{Ker}(T_1 \vee T_2)) = \text{Ker}(T_1 \vee T_2)$$

¹As somas telescópicas são somas finitas nas quais pares de termos consecutivos se cancelam, deixando apenas os alguns termos.

Vamos mostrar as respectivas continências.

Para $\text{Ker}(T_1 \vee T_2) \subseteq \text{Ker}(Id - T)$, primeiro vemos que

$$\begin{aligned}\text{Ker}(T_1 \vee T_2) &= \text{Ker}(\theta(\text{Ker}(T_1) \cap \text{Ker}(T_2))) \\ &= \text{Ker}(T_1) \cap \text{Ker}(T_2)\end{aligned}$$

Para $v \in \mathbb{K}G$, temos

$$v - T(v) = \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i+1} \left(\langle T_1, T_2 \rangle^i + \langle T_2, T_1 \rangle^i \right) (v) + (-1)^{n+1} \langle T_2, T_1 \rangle^n (v)$$

Onde $n = \max_{g \in S_v} \{n_g\}$.

Se $v \in \text{Ker}(T_1) \cap \text{Ker}(T_2)$ então

$$\begin{aligned}\langle T_1, T_2 \rangle^i (v) &= T_{1,2}(\dots (T_1(T_2(v)))) \\ &= T_{1,2}(\dots (T_1(0))) = 0\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\langle T_2, T_1 \rangle^i (v) &= T_{1,2}(\dots (T_2(T_1(v)))) \\ &= T_{1,2}(\dots (T_2(0))) \\ &= 0\end{aligned}$$

Portanto,

$$v - T(v) = \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i+1} \left(\langle T_1, T_2 \rangle^i + \langle T_2, T_1 \rangle^i \right) (v) + (-1)^{n+1} \langle T_2, T_1 \rangle^n (v) = 0$$

E assim $v \in \text{Ker}(Id - T)$.

Agora, para $\text{Ker}(Id - T) \subseteq \text{Ker}(T_1 \vee T_2)$, como $Id - T$ é um projetor então

$$\begin{aligned}
\text{Ker}(Id - T) &= \{w \in \mathbb{K}G \mid (Id - T)(w) = 0\} \\
&= \{w \in \mathbb{K}G \mid Id(w) - T(w) = 0\} \\
&= \{w \in \mathbb{K}G \mid w - T(w) = 0\} \\
&= \{w \in \mathbb{K}G \mid T(w) = w\} \\
&= \mathbb{K}\text{Red}(T) \\
&= \text{Im}(T)
\end{aligned}$$

Ou seja

$$\begin{aligned}
\text{Ker}(Id - T) &= \text{Im}(\langle Id - T_1, Id - T_2 \rangle) \\
&= \text{Im}(\langle Id - T_2, Id - T_1 \rangle)
\end{aligned}$$

Da primeira igualdade temos que para $w \in \text{Im}(\langle Id - T_1, Id - T_2 \rangle)$ e $w' \in \mathbb{K}G$

$$\begin{aligned}
w &= \langle Id - T_1, Id - T_2 \rangle(w') \\
&= (Id - T_{1,2}) \circ (Id - T_{2,1}) \circ \cdots \circ (Id - T_1) \circ (Id - T_2)(w') \\
&= (Id - T_{1,2}) \circ (z) \\
&= Id \circ (z) - T_{1,2}(z) \\
&= z - T_{1,2}(z)
\end{aligned}$$

Onde $z = (Id - T_{2,1}) \circ \cdots \circ (Id - T_1) \circ (Id - T_2)(w')$.

- Se $T_{1,2} = T_1$ então

$$\begin{aligned}
T_1(w) &= T_1(z - T_1 \circ (z)) \\
&= T_1(z) - T_1(T_1 \circ (z)) \\
&= T_1(z) - T_1(z) \\
&= 0
\end{aligned}$$

assim $w \in \text{Ker}(T_1)$ e pela segunda igualdade deduzimos que $w \in \text{Ker}(T_2)$ de maneira análoga. Portanto $w \in \text{Ker}(T_1) \cap \text{Ker}(T_2)$.

- Se $T_{1,2} = T_2$ então

$$\begin{aligned}
T_2(w) &= T_2(z - T_2 \circ (z)) \\
&= T_2(z) - T_2(T_2 \circ (z)) \\
&= T_2(z) - T_2(z) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

assim $w \in \text{Ker}(T_2)$ e pela segunda igualdade deduzimos que $w \in \text{Ker}(T_1)$ de maneira análoga. Portanto $w \in \text{Ker}(T_1) \cap \text{Ker}(T_2)$ Finalmente temos então que $\text{Ker}(Id - T) \subseteq \text{Ker}(T_1 \vee T_2)$, e com isso $\text{Ker}(Id - T) = \text{Ker}(T_1 \vee T_2)$.

□

Lema 5.11. (Lema 3.1.8 [Che18]) *Seja P confluyente. Então*

$$\text{NRed}(T_1 \vee T_2) = \text{NRed}(T_1) \cap \text{NRed}(T_2)$$

Demonstração. Como P é confluyente pelo Lema 5.9 $\text{NRed}(Id - T) = \text{NRed}(T_1) \cap \text{NRed}(T_2)$ e pelo Lema 5.10 $T_1 \vee T_2 = Id - T$. Portanto $\text{NRed}(T_1 \vee T_2) = \text{NRed}(T_1) \cap \text{NRed}(T_2)$ □

5.2.1 Completação

Definição 5.2. Seja $F \subseteq \text{RO}(G, <)$.

1. A *completação de F* é um subconjunto F' de $\text{RO}(G, <)$ tal que:

- (a) F' é confluyente.
- (b) $F \subseteq F'$ e $\wedge F' = \wedge F$.

2. O *complemento de F* é um elemento de C de $\text{RO}(G, <)$ tal que:

- (a) $(\wedge F) \wedge C = \wedge F$
- (b) $\text{Obs}^F \subseteq \text{NRed}(C)$

Um *complemento* é chamado de minimal se em 2(b) temos que $\text{Obs}^F = \text{NRed}(C)$.

Proposição 5.17. (Proposição 3.2.2 [Che18]) Seja $C \in \mathbf{RO}(G, <)$ tal que $(\wedge F) \wedge C = \wedge F$. O conjunto $F \cup \{C\}$ é a completção de F se, e somente se, C é um complemento de F .

Demonstração. Seja $F' = F \cup \{C\}$, vamos mostrar que F' é a completção de F , vemos que $F' = F \cup \{C\} \subseteq F$ e

$$\begin{aligned}
\wedge F' &= \wedge(F \cup \{C\}) \\
&= \theta\left(\sum_{T \in F} \text{Ker}(T) + \text{Ker}(C)\right) \\
&= \theta\left(\text{Ker}\left(\theta\left(\sum_{T \in F} \text{Ker}(T)\right)\right) + \text{Ker}(C)\right) \\
&= \theta\left(\sum_{T \in F} \text{Ker}(T)\right) \wedge C \\
&= (\wedge F) \wedge C \\
&= \wedge F
\end{aligned}$$

Desta forma, F' é a completção se, e somente se, F é confluyente, isto é $\text{Obs}^F = \emptyset$, é dizer se $\text{Red}(F) = \text{Red}(\wedge F)$ esto pela Definição de obstrução. O conjunto

$$\begin{aligned}
\text{Red}(F') &= \bigcap_{T \in F'} \text{Red}(T) \\
&= \bigcap_{T \in F \cup \{C\}} \text{Red}(T) \\
&= \left(\bigcap_{T \in F} \text{Red}(T)\right) \cap \text{Red}(C) \\
&= \text{Red}(F) \cap \text{Red}(C)
\end{aligned}$$

E obtemos que $\text{Red}(\wedge F) = \text{Red}(F) \cap \text{Red}(C)$. Além disso, como $\text{Obs}^F = \text{Red}(F) \setminus \text{Red}(\wedge F)$ então $\text{Red}(F) = \text{Obs}^F \sqcup \text{Red}(\wedge F)$ e assim:

$$\text{Red}(F) \cap \text{Red}(C) = \left(\text{Red}(\wedge F) \cap \text{Red}(C)\right) \sqcup \left(\text{Obs}^F \cap \text{Red}(C)\right) \quad (5.3)$$

Pela hipótese $(\wedge F) \wedge C = \wedge F$ temos que $\wedge F \preceq \wedge C$. Então pelo Lema 4.4, $\text{Red}(\wedge F) \subseteq \text{Red}(C)$. Pela relação (4.1), temos

$$\text{Red}(F) \cap \text{Red}(C) = \text{Red}(\wedge F) \sqcup \left(\text{Obs}^F \cap \text{Red}(C)\right)$$

Portanto, F' é confluyente se, e somente se, $Obs^F \cap \text{Red}(C) =$, isto é, se, e somente se, C é o complemento de F . \square

Exemplo 5.2.1. (Exemplo 3.2.3 [Che18])

1. O operador $\wedge F$ é o complemento de F , $\wedge F \subseteq \text{RO}(G, <)$, pela definição mostrada na Observação 3.2 que estabelece uma bijeção entre $\mathbb{K}G$ e $\text{RO}(G, <)$

(a)

$$\begin{aligned} (\wedge F) \wedge (\wedge F) &= \theta(\text{Ker}(\wedge F) + \text{Ker}(\wedge F)) \\ &= \theta(\text{Ker}(\wedge F)) \\ &= \wedge F \end{aligned}$$

(b) Como $Obs^F = \text{Red}(F) \setminus \text{Red}(\wedge F)$ então temos que $Obs^F \subseteq \text{NRed}(\wedge F)$.

2. Consideremos o par P do exemplo

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Daí obtemos que $C_1(g_3) = g_1, C_2(g_3) = g_2$ e $C_i(g_j) = g_j$ para $i = 1, 2$ e $j = 1, 2, 4$, assim $\text{NRed}(C_1) = \{g_3\} = \text{NRed}(C_2)$, agora temos também que $Obs^F = \text{Red}(F) \setminus \text{Red}(\wedge F) = \{g_3\}$ pelo feito anteriormente. $\text{Ker}(C_1) = \{g_3 - g_1\}$ e $\text{Ker}(C_2) = \{g_3 - g_2\}$. Estes dois espaços vetoriais estão incluídos em $\text{Ker}(T_1 \wedge T_2) = \{g_2 - g_1, g_3 - g_1, g_4 - g_1\}$ já que $g_3 - g_1 \in \text{Ker}(T_1 \wedge T_2)$ e

$$\begin{aligned} g_3 - g_2 &= \underbrace{g_3 - g_1}_{\in \text{Ker}(T_1 \wedge T_2)} - \underbrace{(g_2 - g_1)}_{\in \text{Ker}(T_1 \wedge T_2)} \\ &= g_3 - g_2 \in \text{Ker}(T_1 \wedge T_2) \end{aligned}$$

Portanto pela Definição 4.1 temos que: $C_1 \preceq T_1 \wedge T_2$ e $C_2 \preceq T_1 \wedge T_2$ assim $(\wedge P) \wedge C_1 = \wedge P$ e $(\wedge P) \wedge C_2 = \wedge P$, como $Obs^F = \mathbb{NRed}(C_1) = \mathbb{NRed}(C_2)$ então pela Definição 5.2 C_1 e C_2 são dois complementos minimais de P . Também podemos lembrar que $\mathbb{NRed}(T_1 \wedge T_2) = \{g_2, g_3, g_4\}$ assim $Obs^F \subset \mathbb{NRed}(T_1 \wedge T_2)$ e então $\mathbb{NRed}(T_1 \wedge T_2)$ não é minimal.

Definição 5.3 (F-Complemento). O F - Complemento é o operador

$$C^F = (\wedge F) \vee (\vee \bar{F}),$$

onde $\vee \bar{F}$ é igual a $\theta(\mathbb{KRed}(F))$.

Lema 5.12. (Lema 3.2.5 [Che18]) O par é $P = (\wedge F, \vee \bar{F})$ é confluente. Além disso, temos

$$\mathbb{NRed}(\vee \bar{F}) = \mathbb{Red}(F).$$

Demonstração. Vamos mostrar a primeira parte, a imagem de $\wedge F$ está inclusa em $\mathbb{KRed}(F)$, pois pela a Proposição 3.2, temos $\text{Im}(\wedge F) = \mathbb{KRed}(\wedge F)$ e para cada $T \in F$ temos que $\mathbb{KRed}(\wedge F) \subseteq \mathbb{KRed}(T)$ dado que $\wedge F \preceq T$, portanto

$$\mathbb{KRed}(\wedge F) \subseteq \mathbb{K} \left(\bigcap_{T \in F} \mathbb{Red}(T) \right) = \mathbb{KRed}(F).$$

Assim,

$$\begin{aligned} \text{Im}(\wedge F) &= \mathbb{KRed}(\wedge F) \subseteq \mathbb{KRed}(F) \\ &= \text{Ker}(\theta(\mathbb{KRed}(F))) \\ &= \text{Ker}(\vee \bar{F}) \end{aligned}$$

Então, para todo $x \in \mathbb{K}G$, temos $\vee \bar{F}(\wedge F(x)) = 0$ o que implica

$$\vee \bar{F} \circ \wedge F = \mathbb{O},$$

onde \mathbb{O} é o operador nulo.

Portanto, temos

$$\vee \bar{F} \circ \wedge F \circ \vee \bar{F} = \mathbb{O} \circ \vee \bar{F} = \mathbb{O}$$

de onde,

$$\vee \bar{F} \circ \wedge F \circ \vee \bar{F} = \vee \bar{F} \circ \wedge F.$$

Logo, $\langle \vee \bar{F}, \wedge F \rangle = \langle \wedge F, \vee \bar{F} \rangle$, dado que os dois são o operador \mathbb{O} , e pelo Lema 5.8, P é confluyente.

Para a segunda parte, consideremos o endomorfismo $U : \mathbb{K}G \rightarrow \mathbb{K}G$ definido como

$$U(g) := \begin{cases} 0, & \text{se } g \in \text{Red}(F) \\ g, & \text{se } g \notin \text{Red}(F) \end{cases}$$

O operador U é um projetor já que

1. Se $g \in \text{Red}(F)$ temos que $U(U(g)) = U(0) = 0 = U(g)$, devido a que $0 \notin \text{Red}(F)$.
2. Se $g \notin \text{Red}(F)$ temos $U(U(g)) = U(g) = g$.

E é um operador que para todo $g \in G$ tal que $U(g) \notin g$. Então $U(0) = 0$. Portanto é tal que para todo $g \in G$ $U(g) = 0 \leq g$, ou seja, é um operador de redução relativo a $(G, <)$. Além disso, temos pela definição do operador que

$$\begin{aligned} \text{Ker}(U) &= \text{Im}(Id - U) \\ &= \mathbb{K}\text{Red}(F). \end{aligned}$$

Portanto, U e $\vee \bar{F}$ são dois operadores de redução com o mesmo núcleo, então são iguais. Em particular $\text{NRed}(\vee \bar{F}) = \text{NRed}(U) = \text{Red}(F)$, que era o que se queria mostrar. \square

Teorema 5.5. (Teorema 3.2.6 [Che18]) *Seja $F \subseteq \text{RO}(G, <)$. Então o F -complemento é o complemento minimal de F .*

Demonstração. Como $C^F = (\wedge F) \wedge (\vee \bar{F})$, ou seja, C^F é o limite superior entre $\wedge F$ e $\vee \bar{F}$, temos então $\wedge F \preceq C^F$. Pelo Lema 5.12 o par $(\wedge F, \vee \bar{F})$ é confluyente. Por último como

$$\begin{aligned} x \in \text{Red}(F) \setminus \text{Red}(\wedge F) &\Leftrightarrow x \in \text{Red}(F) \text{ e } x \notin \text{Red}(\wedge F) \\ &\Leftrightarrow x \in \text{Red}(F) \text{ e } x \in [\text{Red}(\wedge F)]^C \\ &\Leftrightarrow x \in \text{Red}(F) \text{ e } x \in \text{NRed}(\wedge F) \\ &\Leftrightarrow x \in \text{Red}(F) \cap \text{NRed}(\wedge F) \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned}
\mathbb{N}\text{Red}(C^F) &= \mathbb{N}\text{Red}((\wedge F) \wedge (\vee \bar{F})) \\
&= \mathbb{N}\text{Red}(\wedge F) \cap \mathbb{N}\text{Red}(F) \\
&= \mathbb{N}\text{Red}(\wedge F) \cap \text{Red}(F) \\
&= \text{Red}(F) \setminus \text{Red}(\wedge F) \\
&= \text{Obs}^F
\end{aligned}$$

□

Lema 5.13. (Lema 3.2.7 [Che18]) O conjunto $C^F(\text{Obs}^F) = \{C^F(y) \mid y \in \text{Obs}^F\} \subseteq \mathbb{K}\text{Red}(\wedge F)$

Demonstração. Pelo feito no Lema 5.3 temos a expressão

$$\vee \bar{F} \circ \wedge F \circ \vee \bar{F} = \vee \bar{F} \circ \wedge F,$$

que é equivalente a $\langle \wedge F, \vee \bar{F} \rangle^3 = \langle \vee \bar{F}, \wedge F \rangle^2$, e do mesmo lema o par $(\wedge, \vee \bar{F})$ é confluyente. Portanto, pelo Lema 5.8, obtemos

$$\begin{aligned}
C^F &= (\wedge F) \vee (\vee \bar{F}) \\
&= Id - T
\end{aligned}$$

De onde para que $T = \langle Id - \wedge F, Id - \vee \bar{F} \rangle = \langle Id - \vee \bar{F}, Id - \wedge F \rangle$ o expoente $n_g = 2$ assim

$$\begin{aligned}
\langle Id - \vee \bar{F}, Id - \wedge F \rangle^2 &= Id + \sum_{i=1}^1 (-1)^i \left(\langle \wedge F, \vee \bar{F} \rangle^i + \langle \vee \bar{F}, \wedge F \rangle^i \right) + (-1)^2 \langle \vee \bar{F}, \wedge F \rangle^2 \\
&= Id + (-1)^1 \left(\langle \wedge F, \vee \bar{F} \rangle^1 + \langle \vee \bar{F}, \wedge F \rangle^1 \right) + \langle \vee \bar{F}, \wedge F \rangle^2 \\
&= Id - \vee \bar{F} - \wedge F + \vee \bar{F} \circ \wedge F.
\end{aligned}$$

E,

$$\begin{aligned}
C^F &= Id - (Id - \vee \bar{F} - \wedge F + \vee \bar{F} \circ \wedge F) \\
&= \vee \bar{F} + \wedge F - \vee \bar{F} \circ \wedge F,
\end{aligned}$$

e pela definição de obstrução temos que $Obs^F, \mathbb{K}\text{Red}(\wedge) \subset \mathbb{K}\text{Red}(F) = \text{Ker}(\vee\bar{F})$, portanto $\forall g \in Obs^F$, temos

$$\begin{aligned} C^F(g) &= \vee\bar{F}(g) + \wedge F(g) - \vee\bar{F}(\wedge F(g)) \\ &= \wedge F(g). \end{aligned}$$

O que mostra $C^F(Obs^F) \in \text{Im}(\wedge) = \mathbb{K}\text{Red}(\wedge F)$. □

Proposição 5.18. (Proposição 3.2.8 [Che18]) *O F -Complemento é o único complemento minimal C de F tal que $C(Obs^F)\mathbb{K} = \text{Red}(F)$.*

Demonstração. Seja C o complemento minimal de F tal que $C(Obs^F) \subseteq \mathbb{K}\text{Red}(F)$. Mostraremos por casos que $C^F = C$ assim

1. Para $g \in G \setminus Obs^f$, como $Obs^F = \mathbb{N}\text{Red}(C^F)$ (Teorema 5.5), e $Obs^F = \mathbb{N}\text{Red}(C)$ por ser C complemento minimal de F , então $\text{Red}(C) = \text{Red}(C^F)$, ou seja $C(g) = C^F(g)$.
2. Se $g \in Obs^F$, por hipótese $C(Obs^F) \subseteq \mathbb{K}\text{Red}(F)$, e $Obs^F = \mathbb{N}\text{Red}(C)$ também temos que $\text{Im}(C) = \mathbb{K}\text{Red}(F)$ então $C(Obs^F) \subseteq \mathbb{K}(\text{Red}(F) \setminus Obs^F)$ e

$$\begin{aligned} x \in \text{Red}(F) \setminus Obs^F &\Leftrightarrow x \in \text{Red}(F) \text{ e } x \notin Obs^F \\ &\Leftrightarrow x \in \text{Red}(F) \text{ e } x \notin (\text{Red}(F) \setminus \text{Red}(\wedge F)) \\ &\Leftrightarrow x \in \text{Red}(F) \text{ e } \neg(x \in (\text{Red}(F) \setminus \text{Red}(\wedge F))) \\ &\Leftrightarrow x \in \text{Red}(F) \text{ e } \neg(x \in \text{Red}(F) \text{ e } x \notin \text{Red}(\wedge F)) \\ &\Leftrightarrow x \in \text{Red}(F) \text{ e } (x \notin \text{Red}(F) \text{ ou } x \in \text{Red}(\wedge F)) \\ &\Leftrightarrow (x \in \text{Red}(F) \text{ e } x \notin \text{Red}(F)) \text{ ou } x \in \text{Red}(\wedge F) \\ &\Leftrightarrow x \in \emptyset \text{ ou } x \in \text{Red}(\wedge F) \\ &\Leftrightarrow x \in (\emptyset \cup \text{Red}(\wedge F)) \\ &\Leftrightarrow x \in \text{Red}(\wedge F). \end{aligned}$$

Assim, $C(Obs^F) \subseteq \mathbb{K}\text{Red}(\wedge F)$ e pelo Lema 5.13 $C^F(Obs^F) \subseteq \mathbb{K}\text{Red}(\wedge F)$ logo

$$(\wedge F \circ C^F)(g) = \wedge F(C^F(g)) = C^F(g) \tag{5.4}$$

$$(\wedge F \circ C)(g) = \wedge F(C(g)) = C(g) \tag{5.5}$$

para $g \in Obs^F$. Portanto, pela condição 2(a) da definição 5.2 $(\wedge F) \wedge C = \wedge F$ e $(\wedge F) \wedge C^F = \wedge F$ assim

$$C(g) = ((\wedge F) \wedge C)(g) = \wedge F(g) = ((\wedge F) \wedge C^F)(g) = C^F(g),$$

para $g \in Obs^F$. E portanto, o resultado se satisfaz. □

Exemplo 5.2.2. (Exemplo 3.2.9 [Che18])

1. O operador C_1 do exemplo 5.2.1 item (2) é o P -complemento C_1 e complemento minimal de P e como $C_1(Obs^P) = \{C_1(g_3)\} = \{g_1\} \subseteq \mathbb{K}\text{Red}(P)$ já que $\text{Red}(P) = \{g_1, g_3\}$.

2. Considere o item (2) do exemplo 4.2.1 o operador $C \in \text{RO}(G, <)$ definido como $C(yxy) = xx$ e $C(w) = w$ em outros casos é o P -complemento já que:

(a) $((\wedge P) \wedge C)(yxy) = \wedge P(xx) = xx = \wedge P(yxy)$ e para $w \neq yxy$ $((\wedge P) \wedge C)(w) = \wedge P(w)$, portanto

$$((\wedge P) \wedge C) = \wedge P$$

(b) $E Obs^F = \{yxy\} = \mathbb{N}\text{Red}(C)$.

Além disso é o P é minimal.

Exemplo 5.2.3. Consideremos $F = \{T_1, T_2\}$ do Exemplo 4.2.1. O conjunto $\mathbb{K}\text{Red}(F) = \mathbb{K}\{g_1\} \oplus \mathbb{K}\{g_3\}$ cuja base reduzida é $(e_g)_{g \in \tilde{G}} = \{g_1, g_3\}$, portanto

$$\theta(\mathbb{K}\text{Red}(F)) = \vee \bar{F}(g) = \begin{cases} g - e_g & , \text{ se } g \in \{g_1, g_3\} \\ g & , \text{ se } g \in \{g_2, g_4\} \end{cases}$$

ou seja, $\vee \bar{F}(g_i) = \bar{0}$ para $i = 1, 3$ e $\vee \bar{F}(g_i) = g_i$ para $i = 2, 4$.

Agora calcularemos o supremo entre $\wedge F$ e $\vee \bar{F}$. Como $(\wedge F, \vee \bar{F})$ são confluentes então existe n_g tal que $\langle Id - \wedge F, Id - \vee \bar{F} \rangle^{n_g} = \langle Id - \vee \bar{F}, Id - \wedge F \rangle^{n_g}$, que segundo a tabela 5.1:

| | g_1 | g_2 | g_3 | g_4 |
|--|-----------|-------------|-------------|-------------|
| $\langle Id - \vee \bar{F}, Id - \wedge F \rangle^1$ | $\bar{0}$ | $g_2 - g_1$ | $g_3 - g_1$ | $g_4 - g_1$ |
| $\langle Id - \wedge F, Id - \vee \bar{F} \rangle^1$ | g_1 | $\bar{0}$ | g_3 | $\bar{0}$ |
| $\langle Id - \vee \bar{F}, Id - \wedge F \rangle^2$ | $\bar{0}$ | $-g_1$ | $g_3 - g_1$ | $-g_4$ |
| $\langle Id - \wedge F, Id - \vee \bar{F} \rangle^2$ | $\bar{0}$ | $\bar{0}$ | $g_3 - g_1$ | $\bar{0}$ |
| $\langle Id - \vee \bar{F}, Id - \wedge F \rangle^3$ | $\bar{0}$ | $\bar{0}$ | $g_3 - g_1$ | $\bar{0}$ |
| $\langle Id - \wedge F, Id - \vee \bar{F} \rangle^3$ | $\bar{0}$ | $\bar{0}$ | $g_3 - g_1$ | $\bar{0}$ |

Tabela 5.1: Produtos trançados

Como pode-se observar nas duas últimas linhas vermelhas, os operadores coincidem quando $n_g = 3$. Assim, T está dado por:

$$T(g_i) := \begin{cases} \bar{0} & , \text{ se } i = 1, 2, 4 \\ g_3 - g_1 & , \text{ se } i = 3 \end{cases}$$

Portanto,

$$C^F(g_i) = (Id - T)(g_i) = \begin{cases} g_1 & , \text{ se } i = 3 \\ \bar{0} & , \text{ caso contrário} \end{cases}$$

Tomando $C^F = T_3$ temos que o conjunto $F' = \{T_1, T_2, T_3\}$ é a completção de F .

Conclusão

No decorrer deste trabalho vimos como o conceito de operador de redução gerou uma ponte entre as regras de reescrita e os operadores lineares. E assim dado um sistema de reescrita da palavra R pelo Teorema 3.2 podemos obter um sistema semi-reduzido para o qual pode-se associar um operador de redução T para todas as regras ou para um conjunto de regras. Logo, já com um conjunto de operadores de redução F , mediante o reticulado definido no Capítulo 4 podemos obter o conjunto de obstruções. De onde através do conjunto de obstruções podemos determinar a confluência e a completção deste sistema de regras.

Além disso, esta abordagem de completção via operadores de redução nos permite, de forma mais prática, calcular a confluência e a completção do sistema abstrato da palavra. Também é possível determinar se nosso sistema é Church-Rosser, se ele é localmente confluyente, encontrar formas normais de uma forma alternativa.

Um interessante trabalho futuro seria estender os desenvolvimentos apresentados aqui para sistemas de reescrita de termos, que envolvem símbolos de função e identidades específicas para a álgebra equivalente.

Referências

- [AC14] M. Ayala and F. Cavalvanti. Fundamentos da Programação Lógica e Funcional. Editora UnB, 2014.
- [Apo85] T. Apostol. Calculus, Cálculo con funciones de varias variables y álgebra lineal. Editorial Reverté, 1985.
- [BN98] F. Baader and T. Nipkow. Term rewriting and all that. Cambridge University Press, 1998.
- [BO93] R. Book and F. Otto. String-Rewriting Systems. Texts and Monographs in Computer Science. Springer, 1993.
- [Che18] C. Chenavier. Reduction operators and completion of rewriting systems. Journal Symbolic Computacional, 84:57–83, 2018.