

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

**ANÁLISE NUMÉRICA DOS MODELOS DE  
LEMAITRE E GURSON EM CORPOS DE  
PROVA ENTALHADOS**

**TIAGO RODRIGO ALVES DE SOUZA**

Brasília, 01 de dezembro de 2020

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA**

FACULDADE DE TECNOLOGIA

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
Faculdade de Tecnologia  
Departamento de Engenharia Mecânica

## DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

# ANÁLISE NUMÉRICA DOS MODELOS DE LEMAITRE E GURSON EM CORPOS DE PROVA ENTALHADOS

**TIAGO RODRIGO ALVES DE SOUZA**

Dissertação de Mestrado submetida ao Departamento de Engenharia Mecânica da Faculdade de Tecnologia da Universidade de Brasília como requisito para obtenção do grau de Mestre em Ciências Mecânicas.

### **APROVADA POR:**

---

Prof. Lucival Malcher, Dr, UnB/ ENM  
(Orientador)

---

Prof. Jorge Luiz de Almeida Ferreira, Dr. UnB/ ENM  
(Examinador Interno)

---

Prof. Leonel Leonardo Delgado Morales, Dr. UACH-Chile  
(Examinador Externo)

---

Prof. José Alexander Araújo, Dr. UnB/ ENM  
(Suplente)

Brasília, 01 de dezembro de 2020

## FICHA CATALOGRÁFICA

**SOUZA, TIAGO RODRIGO ALVES DE**

**ANÁLISE NUMÉRICA DOS MODELOS DE LEMAITRE E GURSON EM CORPOS DE PROVA ENTALHADOS**

61p., 210 x 297 mm (ENM/FT/UnB, Mestre, Ciências Mecânicas, 2020)

Dissertação de Mestrado – Universidade de Brasília,  
Faculdade de Tecnologia - Departamento de Engenharia Mecânica.

1.Mecânica do Dano  
3.Modelo de Lemaitre

2. Fratura Ductil  
4.Modelo de Gurson

I. ENM/FT/UnB

II. Título (ENM.DM/2020)

## REFERÊNCIA

SOUZA, T. R. A., (2020), Análise numérica dos modelos de Lemaitre e Gurson em corpos de prova entalhados. Dissertação de mestrado, Publicação ENM.DM/2020, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Brasília, DF, 61p.

## CESSÃO DE DIREITOS

AUTOR: Tiago Rodrigo Alves de Souza.

TÍTULO: Análise numérica dos modelos de Lemaitre e Gurson em corpos de prova entalhados.

GRAU: Mestre

ANO: 2020

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta dissertação de mestrado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte dessa dissertação de mestrado pode ser reproduzida sem autorização por escrito do autor.

---

**Tiago Rodrigo Alves de Souza**

e-mail: *trasouza@gmail.com*

*Dedico aos meus pais, Maria Lúcia e Antônio Alves, que sempre investiram em minha educação com muito amor e carinho, à minha família Simone, Anna Júlia e Maria Clara por vencermos juntos mais esta etapa, aos meus irmãos Rafael e Filipe e à meus padrinhos Maria da Penha e André(in memorian), que sempre me incentivaram a seguir meu caminho, reto e infinito, e a todos os demais familiares que de alguma forma contribuíram nesta longa estrada.*

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço ao meu orientador, o Prof.Dr. Lucival Malcher, pela orientação acadêmica e a permanente disponibilidade em esclarecer as dúvidas, pela amizade demonstrada na prática e a atenção em fornecer todos os subsídios e ferramentas para alcançar o sucesso desta empreitada.

Agradeço a Deus por minha vida e pela vida de todas as pessoas positivas que fazem parte dela.

## RESUMO

Esta dissertação tem como objetivo analisar numericamente os modelos de mecânica do dano de Lemaitre e de Gurson aplicados na liga de alumínio 6101-T4 e na liga de aço AISI 4340 recozido. Os ensaios experimentais foram realizados de modo a permitir a análise da deformação plástica equivalente na fratura e a influência de altos níveis de razão de triaxialidade, a partir da aplicação de cargas monotônicas de tração em corpos de prova (CP) cilíndricos entalhados com 10mm, 6mm e 4mm de raio de entalhe. A liga AA6101-T4 e AISI 4340 foram selecionadas de modo a permitir, também, a análise da influência do nível de ductilidade no desempenho de cada modelo. Preliminarmente, foram abordados os detalhes matemáticos de cada modelo de dano, bem como, seus respectivos algoritmos de integração implícita, por meio da resolução de sistemas não-lineares de equações pelo método de Newton-Raphson. Observou-se que a deformação plástica equivalente na fratura diminuiu com o aumento do nível da razão de triaxialidade para ambas as ligas estudadas e em ambos os modelos, sendo que o modelo de Lemaitre mostrou-se mais otimista em comparação aos resultados experimentais, indicando que o material poderia resistir mais a fratura enquanto na prática o corpo de prova já havia fraturado, e o modelo de Gurson se mostrou mais conservador em sua previsão de fratura dúctil, indicando que o CP teria fraturado em um ponto anterior ao verificado experimentalmente. Quanto a determinação do local para início da falha no CP, ambos os modelos apresentaram boa capacidade preditiva, sendo que o melhor desempenho ocorreu para a liga de alumínio, que possui maior nível de ductilidade. Para a liga AISI 4340, menor ductilidade, o modelo de Lemaitre apresentou erros relativos ao deslocamento na fratura significativamente maiores do que o modelo de Gurson, indicando seu uso, preferencialmente, em materiais com maiores níveis de ductilidade.

Palavras-chave: Modelo de Lemaitre, modelo de Gurson, fratura dúctil, ductilidade, razão de triaxialidade, liga AA6101-T4, liga AISI 4340.

## ABSTRACT

This dissertation aims to analyze numerically the Lemaitre and Gurson damage mechanics models applied to the 6101-T4 aluminum alloy and the annealed AISI 4340 steel alloy. The experimental tests were performed in order to allow the analysis of the equivalent plastic deformation in the fracture and the influence of high levels of triaxiality ratio, from the application of monotonic tensile loads in 10mm, 6mm carved cylindrical specimens (CP) and 4mm of notch radius. The alloy AA6101-T4 and AISI 4340 were selected in order to also allow the analysis of the influence of the level of ductility on the performance of each model. Preliminarily, the mathematical details of each damage model were addressed, as well as their respective implicit integration algorithms, through the resolution of nonlinear systems of equations by the Newton-Raphson method. It was observed that the equivalent plastic deformation in the fracture decreases with the increase in the level of the triaxiality ratio for both studied alloys and in both models, with the Lemaitre model being more optimistic compared to the experimental results, indicating that the material could be more resistant to fracture while in practice the specimen had already fractured, and the Gurson model was more conservative in its ductile fracture prediction, indicating that the CP would have fractured at a point earlier than that verified experimentally. Regarding the determination of the location for the beginning of the failure in the PC, both models had good predictive capacity, and the best performance occurred for the aluminum alloy, which has a higher level of ductility. For the AISI 4340 alloy, which has less ductility, the Lemaitre model showed significantly greater errors in fracture displacement than the Gurson model, indicating its use, preferably, in materials with higher levels of ductility.

Keywords: Lemaitre's model, Gurson's model, ductile fracture, ductility, triaxiality ratio, AA6101-T4 alloy, AISI 4340 alloy.

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO .....</b>	<b>16</b>
1.1	MOTIVAÇÃO E ESTADO DA ARTE.....	16
1.2	OBJETIVOS .....	20
1.3	ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO .....	20
<b>2</b>	<b>MODELAGEM MATEMÁTICA E ESTRATÉGIA NUMÉRICA .....</b>	<b>21</b>
2.1	MODELO MATEMÁTICO DE LEMAITRE .....	21
2.2	ALGORITMO DE RETORNO PARA O MODELO DE LEMAITRE. ....	23
2.3	MODELO MATEMÁTICO DE GURSON .....	28
2.4	ALGORITMO DE RETORNO PARA O MODELO DE GURSON.....	30
2.5	OPERADOR TANGENTE CONSISTENTE .....	35
<b>3</b>	<b>METODOLOGIA DE PESQUISA.....</b>	<b>36</b>
3.1	INTRODUÇÃO .....	36
3.2	CARACTERÍSTICAS DOS CORPOS DE PROVA.....	37
<b>4</b>	<b>RESULTADOS NUMÉRICOS E EXPERIMENTAIS .....</b>	<b>38</b>
4.1	MALHA DE ELEMENTOS FINITOS E CALIBRAÇÃO DOS PARÂMETROS DOS MATERIAIS.....	38
4.2	CURVAS DE REAÇÃO E EVOLUÇÃO DO DANO .....	42
4.2.1	Liga de alumínio 6101-T4. ....	43
4.2.2	Liga AISI 4340 recozida.....	46
4.3	EVOLUÇÃO DA DEFORMAÇÃO PLÁSTICA EQUIVALENTE.....	50
4.3.1	Liga de alumínio 6101-T4 .....	50
4.3.2	Liga AISI 4340 recozida.....	53
<b>5</b>	<b>CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES DE TRABALHOS FUTUROS.....</b>	<b>57</b>
5.1	CONCLUSÕES .....	57
5.2	RECOMENDAÇÕES DE TRABALHOS FUTUROS.....	58
<b>6</b>	<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>59</b>

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – Detalhes dos componentes de válvula BOP.....	16
Figura 1.2 - Simulação com o <i>Riser</i> corretamente posicionado, resultando em cisalhamento total e selagem do tubo. (Fonte: DESIGNFAX <sup>l</sup> , 2014)17	17
Figura 1.3 – Detalhes de tubo <i>Riser</i> com corte irregular e sem selagem.....	18
Figura 1.4 - Exemplos de Discos de Ruptura disponíveis no mercado. ....	18
Figura 1.5 - Exemplo de aplicação da Mecânica do Dano: estudo da zona de microdanos após fratura óssea cortical. (Fonte: DAPAAH, 2018) ....	19
Figura 3.1 – Representação geométrica da região crítica do CP cilíndrico.....	38
Figura 3.2 - Parâmetros geométricos dos corpos de prova. (Fonte: Morales, 2020) .....	38
Figura 4.1 - Malhas de elementos finitos para os corpos de prova cilíndricos. a) Liso, b) entalhado $R = 10$ mm, c) entalhado $R = 6$ mm e d) entalhado $R = 4$ mm. ....	39
Figura 4.2 - Calibração dos parâmetros dos materiais. Resultados após a convergência da função objetiva, Curva de reação <i>versus</i> Deslocamento. ....	40
Figura 4.3 - Calibração dos parâmetros dos materiais. Resultados após a convergência da função objetiva, curva de Dano crítico <i>versus</i> Deslocamento. ....	40
Figura 4.4 - Curvas de endurecimento isotrópico para os modelos de Lemaitre e Gurson para AA6101-T4 .....	42
Figura 4.5 - Curvas de endurecimento isotrópico para os modelos de Lemaitre e Gurson para liga AISI 4340 .....	42
Figura 4.6 - Curvas de reação e evolução do dano para o CP entalhado – $R=10$ mm. Liga AA6101-T4. ....	44
Figura 4.7 - Curva de reação e evolução do dano para o CP entalhado – $R=6$ mm. Liga AA6101-T4. ....	45
Figura 4.8 - Curva de reação e evolução do dano para o CP entalhado $R=10$ mm Liga AISI 4340 recozida .....	47
Figura 4.9 - Curva de reação e evolução do dano para o CP entalhado – $R=6$ mm. Liga AISI 4340 recozida. ....	48
Figura 4.10 - Curva de reação e evolução do dano para o CP entalhado $R=4$ mm. Liga AISI 4340 recozida. ....	49
Figura 4.11 - Evolução da deformação plástica equivalente para o CP cilíndrico liso. Liga AA6101-T4.....	50
Figura 4.12 - Evolução da deformação plástica equivalente para o CP entalhado – $R = 10$ mm. Liga AA6101-T4 .....	51
Figura 4.13.- Evolução da deformação plástica equivalente para o CP entalhado – $R = 6$ mm. Liga AA6101-T4. ....	52

Figura 4.14. Deformação plástica equivalente na fratura em função da razão de triaxialidade inicial. Liga AA6101-T4. ....	53
Figura 4.15 - Evolução da deformação plástica equivalente para o CP cilíndrico liso. Liga AISI 4340 recozida. ....	53
Figura 4.16 -. Evolução da deformação plástica equivalente para o CP entalhado – $R = 10\text{ mm}$ . Liga AISI 4340 recozida.....	54
Figura 4.17.- Evolução da deformação plástica equivalente para o CP entalhado – $R = 6\text{ mm}$ . Liga AISI 4340 recozida. ....	55
Figura 4.18.- Evolução da deformação plástica equivalente para o CP entalhado – $R = 4\text{ mm}$ . Liga AISI 4340 recozida. ....	55
Figura 4.19.- Deformação plástica equivalente na fratura em função da razão de triaxialidade inicial. Liga AISI 4340 recozida. ....	56

## **LISTA DE TABELAS**

Tabela 4.1 - Parâmetros elastoplásticos e de dano para as ligas AA6101-T4 e AISI 4340 recozida.....	41
Tabela 4.2 - Valores iniciais de razão de triaxialidade.....	43
Tabela 4.3 – Comparativo de erro de deslocamento na fratura para os modelos .	56

## LISTA DE QUADROS

Quadro 2.1 - Modelo Matemático de Lemaitre .....	23
Quadro 2.2 - Modelo Numérico de Lemaitre .....	25
Quadro 2.3 - Algoritmo de retorno (Newton-Raphson) para o modelo de Lemaitre .....	26
Quadro 2.4 - Modelo Matemático de Gurson .....	29
Quadro 2.5 - Modelo Numérico de Gurson.....	31
Quadro 2.6 - Algoritmo de retorno (Newton-Raphson) para o modelo de Gurson	32

## LISTA DE SIMBOLOS

### Símbolos gregos

$\bar{\epsilon}^p$	Deformação plástica equivalente
$\bar{\epsilon}_f^p$	Deformação plástica na fratura
$\delta$	Expoente de calibração
$\psi^e$	Energia elástica de deformação
$\phi$	Função de escoamento material
$\Delta\epsilon$	Incremento da deformação
$\Delta\epsilon^p$	Incremento de deformação plástica
$\Delta\gamma$	Incremento do multiplicador plástico
$\sigma_y$	Limite de escoamento do material
$\sigma_{y0}$	Limite de escoamento inicial
$\zeta$	Primeiro parâmetro de calibração
$\eta$	Razão de triaxialidade
$\sigma_\infty$	Segundo parâmetro de calibração
$\dot{\gamma}$	Taxa de evolução do multiplicador plástico
$\dot{\epsilon}^p$	Taxa de crescimento da deformação plástica
$\epsilon^e$	Tensor das deformações elásticas
$\epsilon^{e \text{ trial}}$	Tensor da deformação elástica tentativa
$\epsilon_{n+1}^{e \text{ trial}}$	Tensor da deformação elástica tentativa no pseudo-tempo $t_{n+1}$
$\epsilon^p$	Tensor da deformação plástica
$\epsilon^{p \text{ trial}}$	Tensor da deformação plástica tentativa
$\epsilon_{n+1}^{p \text{ trial}}$	Tensor da deformação plástica no pseudo-tempo $t_{n+1}$
$\sigma$	Tensor tensão de Cauchy
$\sigma_{ef}$	Tensão efetiva de Lemaitre
$\sigma_n$	Tensor tensão no tempo $t_n$
$\sigma_{n+1}^{\text{trial}}$	Tensor tensão tentativa no pseudo-tempo $t_{n+1}$
$\xi$	Terceiro invariante normalizado do tensor desviador

## Símbolos latinos

$D_c$	Dano crítico
$S$	Denominador de dano
$s$	Expoente de dano
$Y$	Força termodinâmica associada a energia liberada devido ao dano
$R$	Força termodinâmica associada ao endurecimento isotrópico
$R^{trial}$	Força termodinâmica de endurecimento isotrópico tentativa
$R_{n+1}$	Força termodinâmica de endurecimento isotrópico pseudo-tempo $t_{n+1}$
$I$	Indicador de dano
$H$	Módulo de endurecimento isotrópico
$E$	Módulo de elasticidade
$G$	Módulo de elasticidade ao cisalhamento
$K$	Módulo de elasticidade volumétrico
$\mathbb{D}^e$	Operador tangente elástico
$\mathbb{D}^{ep}$	Operador tangente elastoplástico
$p$	Tensão hidrostática
$p_{n+1}^{trial}$	Tensão hidrostática tentativa no pseudo-tempo $t_{n+1}$
$I_1, I_2, I_3$	Primeiro, segundo e terceiro invariante do tensor tensão
$R$	Raio de entalhe
$J_2, J_3$	Segundo e terceiro invariante do tensor desviador
$\dot{r}$	Taxa de evolução da variável interna
$\dot{D}$	Taxa de evolução do dano
$t$	Tempo
$\mathbb{D}$	Tensor constitutivo
$\mathbb{D}^e$	Tensor constitutivo elástico
$\mathbf{S}$	Tensor das tensões desviadoras
$\mathbf{s}_{n+1}^{trial}$	Tensor das tensões desviadoras tentativa no pseudo-tempo $t_{n+1}$
$\mathbf{I}$	Tensor identidade de segunda ordem
$q$	Tensão equivalente de von Mises
$r$	Terceiro invariante do tensor desviador
$D$	Variável de dano isotrópico
$D_{n+1}^{trial}$	Variável de dano tentativa no pseudo-tempo $t_{n+1}$

$r$	Variável interna associada ao endurecimento isotrópico
$N$	Vetor de fluxo plástico
$N_{n+1}$	Vetor de fluxo plástico no pseudo-tempo $t_{n+1}$

### **SIGLAS**

AISI	American Iron and Steel Institute
MD	Mecânica do Dano
CP	Corpo de prova

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 Motivação e estado da arte.

Análises a respeito do comportamento mecânico dos materiais são realizados desde o século passado e remontam aos estudos de von Mises (1913). Com os trabalhos de Kachanov (1958), surgiu uma nova disciplina denominada Mecânica do Dano (MD), que estuda o comportamento dos materiais admitindo que possuem danos ou defeitos em sua microestrutura, e quando submetidos a esforços superiores ao seu limite elástico resultarão em deformações permanentes, também chamadas de deformações plásticas, e cujo objetivo principal desta disciplina é estudar e elaborar modelos matemáticos que possam prever a vida útil de um dado material ou componente, segundo De Souza Neto *et al.* (2008).

O campo de aplicação desta disciplina na indústria abrange todas as áreas que necessitem projetar dispositivos ou componentes cujo conhecimento do estado de tensão máximo ou do nível de degradação máximo precisam ser identificados para o correto dimensionamento e segurança de funcionamento desejado.

Um exemplo de aplicação na exploração de petróleo pode ser dado em válvulas de segurança denominadas *Blowout Preventer* (BOP), apresentada na figura 1.1.

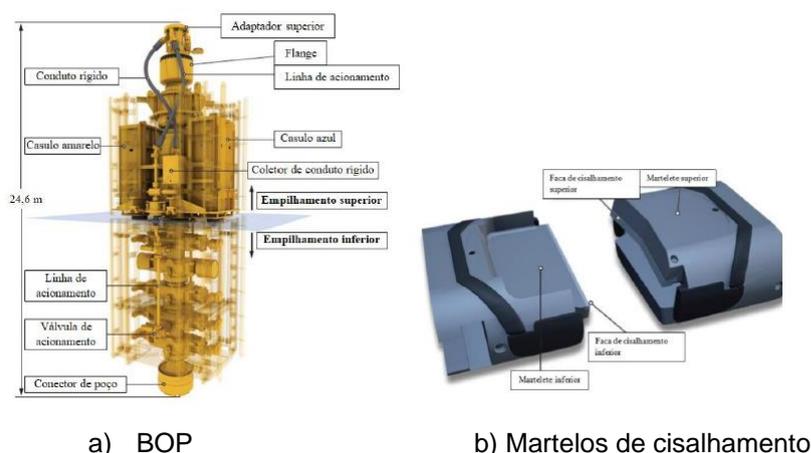


Figura 1.1 – Detalhes dos componentes de válvula BOP.  
(Fonte: Det Norske Veritas, 2011)

Estas válvulas são acionadas em situações emergenciais e são o último recurso quando ocorre um aumento súbito na vazão de petróleo que flui do poço para o tubo coletor principal, denominado *Riser*, de forma descontrolada. A liga AISI 4340 é muito utilizada na fabricação de *Risers*, e o comportamento mecânico desta liga na fratura foi objeto de estudo por Morales (2020).

A BOP têm a função de cortar o riser e selar a cabeça do poço de petróleo, por meio da ação de martelos de cisalhamento, de modo a interromper o fluxo descontrolado de petróleo.

Na situação hipotética em que o cisalhamento do *Riser* ocorre de forma parcial ou irregular, de modo que não ocorre a completa selagem do poço, se tem um cenário bastante perigoso e sempre temerário para os trabalhadores de plataformas, pois é a demonstração real da importância da correta modelagem e elaboração do projeto mecânico atuando para prevenir grandes vazamentos e principalmente o risco de incêndio. A figura 1.2 apresenta uma simulação do comportamento esperado para o corte e selagem do *Riser*.

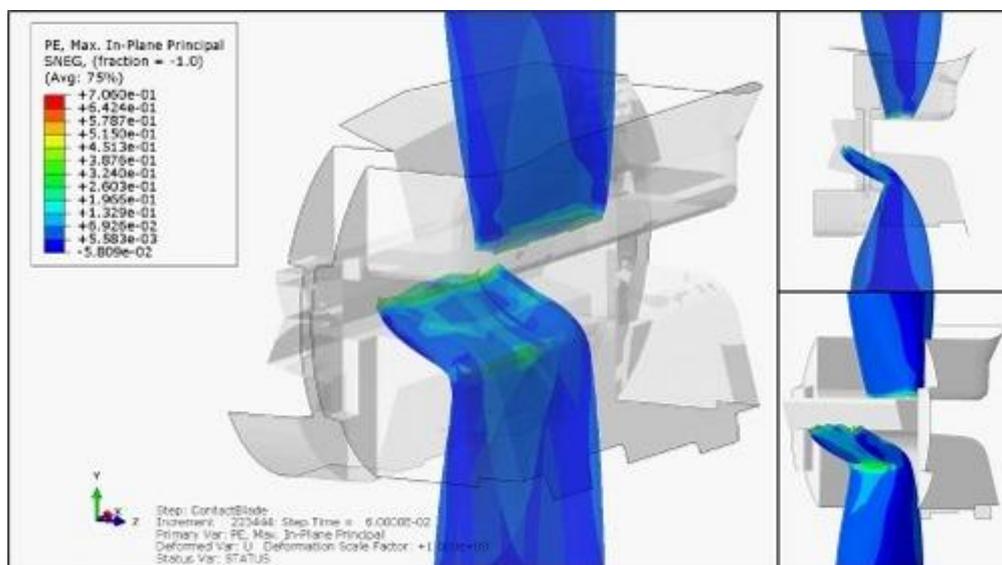


Figura 1.2 - Simulação com o *Riser* corretamente posicionado, resultando em cisalhamento total e selagem do tubo. (Fonte: DESIGNFAX<sup>[1]</sup>, 2014)

[1] Disponível no endereço eletrônico: <https://www.designfax.net/cms/dfx/opens/article-view-dfx.php?nid=4&bid=309&et=featurearticle&pn=02>; Acesso em 03/11/20.

A falha de corte e selagem do *Riser* da plataforma americana *Deepwater Horizon* situada no Golfo do México, em 2010, figura 1.3, entre outros fatores, resultou na perda de 11 vidas e no afundamento da plataforma após três dias de incêndio.



Figura 1.3 – Detalhes de tubo *Riser* com corte irregular e sem selagem.  
(Fonte: Det Norske Veritas, 2011)

Outra aplicação da Mecânica do Dano ocorre no projeto de Discos de Ruptura, vistos na Figura 1.4, e que são dispositivos formados por placas metálicas utilizadas com a finalidade de proteger vasos de pressão e tanques de armazenamento.

Os discos atuam como dispositivos de segurança de modo a prevenir que a ocorrência de um aumento do diferencial de pressão, acima do projetado, entre o interior e o exterior do vaso de pressão ou tanque de armazenamento, cause danos a estrutura do equipamento. A ruptura do disco promove então um rápido reequilíbrio de pressão de forma a proteger o equipamento.



Figura 1.4 - Exemplos de Discos de Ruptura disponíveis no mercado.  
(Fonte: BS&B<sup>[2]</sup>)

A Mecânica do Dano é uma área do conhecimento dinâmica e

---

<sup>[2]</sup> Disponível no endereço eletrônico: [http://www.bsbrasil.com/Rupture\\_Disks/rupture\\_disks.html](http://www.bsbrasil.com/Rupture_Disks/rupture_disks.html);  
Acesso em 05/11/20.

modernamente avança em outros campos de estudos tais como Biomecânica, Figura 1.5, e possibilita a modelagem da zona de microdano que se forma durante uma fratura cortical de um osso, conforme demonstra Dapaah (2018).



Figura 1.5 - Exemplo de aplicação da Mecânica do Dano: estudo da zona de microdanos após fratura óssea cortical. (Fonte: DAPAAH, 2018)

A Mecânica do dano pode ser analisada sob duas grandes abordagens, uma baseada na mecânica do dano contínuo, onde o modelo de Lemaitre (1985) é o mais conhecido, e se baseia no chamado critério de dano crítico, o qual estabelece que uma trinca, na escala mesoscópica, será iniciada quando o valor do dano atinge um valor crítico. Alguns modelos propostos que seguem esta linha são o de Rousselier (1989), o de Andrade Pires (2005), o de Chaboche (2006), o de Malcher (2011).

Outra abordagem, baseada na micromecânica de defeitos, onde a abordagem do Gurson (1977) é o caso mais conhecido, e se baseia na porosidade do material, admitindo a existência de microvazios que irão coalescer e crescer até formarem uma trinca. Ao longo dos anos outras formulações foram desenvolvidas como o modelo: de Gurson-Teevergard-Needleman (1984), o de Xue (2007), o de Nahshon & Hutchinson (2008), e o de Malcher *et al.* (2013), entre outros.

Dada a importância destas duas abordagens, de Lemaitre (1985) e de Gurson (1977), e que serviram de base para tantas outras, este trabalho se propõe a estudar numericamente a capacidade preditiva destes modelos, considerando corpos de prova entalhados em materiais metálicos distintos.

## **1.2 Objetivos**

O objetivo geral desta dissertação é comparar o desempenho dos modelos de dano de Lemaitre e Gurson, no que se refere a previsão da fratura dúctil em corpos de prova entalhados para as ligas de Alumínio 6101-T4 e de aço AISI 4340 recozido, de modo a ressaltar a influência da ductilidade do material, em região de alta triaxialidade, na seleção do modelo mais adequado para simulação numérica do comportamento mecânico destas ligas.

Como objetivos secundários temos: implementar implicitamente os modelos matemáticos de Lemaitre e Gurson em uma ferramenta acadêmica de elementos finitos, calibrar as propriedades de endurecimento isotrópico das ligas estudadas, modelar em elementos finitos os corpos de prova cilíndricos lisos e entalhados, e por fim analisar os resultados experimentais e comparar com os dados numéricos.

## **1.3 Estrutura da dissertação**

A dissertação é dividida em 4 capítulos:

Capítulo 1 (Introdução) – Apresenta aplicações da mecânica do dano em seu contexto técnico e teórico relacionados a plasticidade e a mecânica do dano.

Capítulo 2 (Revisão teórica) – Desenvolvem-se a modelagem matemática e estratégica numérica, de modo a antever as considerações e premissas adotadas na formulação da solução do problema e que serão empregadas na análise dos dados experimentais.

Capítulo 3 (Metodologia) – Delimita-se a metodologia de pesquisa, origem dos dados analisados e características dos corpos de prova.

Capítulo 4 (Discussão) – Analisam-se os resultados obtidos, a partir dos parâmetros calculados e modelos simulados. As diversas figuras presentes ao longo do trabalho apresentam de forma visual o comportamento das variáveis estudadas.

Capítulo 5 (Conclusão) – Faz-se uma síntese dos resultados e são apresentadas propostas para trabalhos futuros relacionados ao tema.

## 2 MODELAGEM MATEMÁTICA E ESTRATÉGIA NUMÉRICA

Neste capítulo são desenvolvidas as formulações matemáticas para os modelos de Lemaitre e de Gurson, acompanhados das respectivas estratégias numéricas para integração das equações de fluxo e obtenção dos algoritmos de retorno. Ambos os modelos de danos são construídos com base em uma variável isotrópica de dano, considerando endurecimento isotrópico para as ligas estudadas.

### 2.1 Modelo matemático de Lemaitre

Na construção do modelo matemático de dano de Lemaitre, há a necessidade de se definir a tensão efetiva, de acordo com a Eq. (2.1).

$$\sigma_{ef} = \frac{\sigma}{1 - D} \quad (2.1)$$

onde,  $\sigma_{ef}$  é a tensão efetiva de Lemaitre,  $\sigma$  é o tensor tensão de Cauchy e  $D$  é a variável isotrópica de dano. Assim, substituindo a Eq. (2.1) na Lei de Hooke generalizada, obtém-se a Lei de Hooke modificada.

$$\sigma_{ef} = \mathbb{D}^e : \varepsilon^e \quad (2.2)$$

ou ainda:

$$\sigma = (1 - D)\mathbb{D}^e : \varepsilon^e \quad (2.3)$$

onde,  $\mathbb{D}^e$  é a matriz de elasticidade e  $\varepsilon^e$  é o tensor das deformações elásticas.

A função de escoamento para o modelo de Lemaitre é assim escrita como sendo:

$$\phi = \frac{\sqrt{3J_2(\mathcal{S})}}{1 - D} - \sigma_{y0} - H^I(\bar{\varepsilon}^p)\bar{\varepsilon}^p \quad (2.4)$$

onde o termo  $J_2(\mathcal{S})$  é o segundo invariante do tensor desviador,  $\sigma_{y0}$  representa a tensão de escoamento inicial do material,  $\bar{\varepsilon}^p$  representa a deformação plástica equivalente, e  $H^I$  é o módulo de endurecimento isotrópico, e neste caso, é uma

função da deformação plástica equivalente, sendo representado por  $H^I(\bar{\epsilon}^p)$ .

O vetor de fluxo, calculado com base na plasticidade associativa pode ser escrito como sendo:

$$\mathbf{N} \equiv \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{3}{2(1-D)} \frac{\mathbf{S}}{q} \quad (2.5)$$

onde  $\mathbf{N}$  representa o vetor de fluxo e  $q$  é a tensão equivalente de von Mises. Assim, a Lei de fluxo plástico é então determinada:

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p \equiv \dot{\gamma} \mathbf{N} = \dot{\gamma} \frac{3}{2(1-D)} \frac{\mathbf{S}}{q} \quad (2.6)$$

onde  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p$  representa a taxa de evolução do tensor das deformações plásticas e  $\dot{\gamma}$  é o chamado multiplicador plástico. A taxa de evolução da deformação plástica equivalente, que assume o papel de variável interna de endurecimento isotrópico é calculada, de acordo com a Equação de Prandt-Reuss, Eq. (2.7).

$$\dot{\bar{\epsilon}}^p = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p} = \frac{\dot{\gamma}}{1-D} \quad (2.7)$$

onde  $\dot{\bar{\epsilon}}^p$  representa a taxa de evolução da deformação plástica equivalente. A Lei de evolução da variável de dano é dada pela Eq. (2.8).

$$\dot{D} = \frac{\dot{\gamma}}{1-D} \left( \frac{-Y}{S} \right)^s \quad (2.8)$$

onde  $\dot{D}$  é a taxa de evolução da variável isotrópica de dano,  $Y$  representa a energia liberada devido ao dano,  $S$  é o denominador de dano e  $s$  é o expoente de dano. Os termos  $(S, s)$  são parâmetros do material e necessitam ser calibrados. Assim,  $Y$  pode ser matematicamente calculado por meio da Eq. (2.9).

$$Y = \frac{-q^2}{6G(1-D)^2} - \frac{p^2}{2K(1-D)^2} \quad (2.9)$$

onde  $p$  é a tensão hidrostática,  $G$  é a módulo de elasticidade ao cisalhamento e  $K$  é o módulo de elasticidade volumétrico. Assim, o Quadro 2.1 contém todos o equacionamento matemático que defini o modelo de Lemaitre com endurecimento

isotrópico e dano isotrópico.

Quadro 2.1 - Modelo Matemático de Lemaitre

i)	Decomposição aditiva da deformação: $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p$	
ii)	Lei de Hooke modificada: $\boldsymbol{\sigma} = (1 - D)\mathbb{D}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^e$	
iii)	Função de Escoamento: $\phi = \frac{\sqrt{3J_2(S)}}{1-D} - \sigma_{y0} - H^I(\bar{\varepsilon}^p)\bar{\varepsilon}^p$	
iv)	Lei de fluxo plástico: $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\gamma} \frac{3}{2(1-D)} \frac{S}{q}$ e lei de evolução para $\bar{\varepsilon}^p$ : $\dot{\bar{\varepsilon}}^p = \frac{\dot{\gamma}}{1-D}$	
v)	Lei de evolução de dano: $\dot{D} = \frac{\dot{\gamma}}{1-D} \left(\frac{-Y}{S}\right)^s$ $Y = \frac{-q^2}{6G(1-D)^2} - \frac{p^2}{2K(1-D)^2}$	
vi)	Regra de complementariedade	
	$\dot{\gamma} \geq 0$ ,	$\phi \leq 0$ , $\dot{\gamma}\phi = 0$

## 2.2 Algoritmo de retorno para o modelo de Lemaitre.

A equação de atualização do tensor das deformações elásticas, no pseudo-tempo  $t_{n+1}$ , é definida por:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\,trial} - \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\,trial} - \Delta\gamma\mathbf{N}_{n+1} \quad (2.10)$$

onde  $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\,trial}$  representa o tensor das deformações elásticas tentativa,  $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e$  é o tensor das deformações elásticas,  $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p$  é o incremento da deformação plástica,  $\Delta\gamma$  é o incremento do multiplicador plástico e  $\mathbf{N}_{n+1}$  é o vetor de fluxo. Substituindo a Eq. (2.10) na Eq. (2.3), tem-se:

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = (1 - D_{n+1})\mathbb{D}^e : \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e = (1 - D_{n+1})\mathbb{D}^e : \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\,trial} - \Delta\gamma\mathbb{D}^e : \mathbf{N}_{n+1} \quad (2.11)$$

onde  $\sigma_{n+1}$  representa a equação de atualização para o tensor tensão de Cauchy e  $D_{n+1}$  é o dano no pseudo tempo  $t_{n+1}$ .

Por sua vez, a equação de atualização da deformação plástica equivalente é escrita como sendo:

$$\bar{\varepsilon}_{n+1}^p = \bar{\varepsilon}_n^p + \frac{\Delta\gamma}{1-D_{n+1}} \quad (2.12)$$

onde  $\bar{\varepsilon}_{n+1}^p$  é a deformação plástica equivalente no pseudo tempo  $t_{n+1}$  e  $\bar{\varepsilon}_n^p$  é a deformação plástica equivalente no pseudo tempo  $t_n$ .

A variável de dano pode ser atualizada de acordo com a equação a seguir:

$$D_{n+1} = D_n + \frac{\Delta\gamma}{1-D_{n+1}} \left( \frac{-Y_{n+1}}{S} \right)^s \quad (2.13)$$

onde  $D_{n+1}$  é a variável de dano no pseudo tempo  $t_{n+1}$  e  $D_n$  é a variável de dano no pseudo tempo  $t_n$ . O termo  $Y_{n+1}$  é então calculado como sendo:

$$Y_{n+1} = \frac{-q_{n+1}^2}{6G(1-D_{n+1})^2} - \frac{p_{n+1}^2}{2K(1-D_{n+1})^2} \quad (2.14)$$

Assim, na construção do algoritmo de retorno, o seguinte sistema de equações não lineares tem que ser resolvido, tendo como variáveis:  $\sigma_{n+1}$ ,  $D_{n+1}$  e  $\Delta\gamma$ .

$$\begin{cases} \sigma_{n+1} = (1-D_{n+1})\mathbb{D}^e: \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ trial} - \Delta\gamma\mathbb{D}^e: \mathbf{N}_{n+1} \\ D_{n+1} = D_n + \frac{\Delta\gamma}{1-D_{n+1}} \left( \frac{-Y_{n+1}}{S} \right)^s \\ \phi = \frac{\sqrt{\frac{3}{2}}\mathbf{S}_{n+1}:\mathbf{S}_{n+1}}{1-D_{n+1}} - \sigma_{y0} - H^I(\bar{\varepsilon}_n^p)\bar{\varepsilon}_n^p - H^I \frac{\Delta\gamma}{1-D_{n+1}} \end{cases} \quad (2.15)$$

O Quadro 2.2 mostra o algoritmo de integração para o modelo de Lemaitre com endurecimento e dano isotrópicos.

Quadro 2.2 - Modelo Numérico de Lemaitre

i) Determinar o estado tentativa: Dado um incremento de deformação,  $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}$ .

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ trial} = \boldsymbol{\varepsilon}_n^e + \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \qquad \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial} = (1 - D_{n+1}) \mathbb{D}^e : \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ trial}$$

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^{p\ trial} = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^p \qquad q^{trial} = \sqrt{\frac{3}{2} \boldsymbol{S}_{n+1}^{trial} : \boldsymbol{S}_{n+1}^{trial}}$$

$$D_{n+1}^{trial} = D_n$$

ii) Verificar a admissibilidade Plástica:

$$\phi^{trial} = \frac{q^{trial}}{1 - D_{n+1}} - \sigma_{y0} - H^I(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^p) \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^p - H^I \frac{\Delta \gamma}{1 - D_{n+1}}$$

Se  $\phi^{trial} \leq 0$ , então (passo elástico):  $(*)_{n+1} = (*)_{n+1}^{trial}$ ,  
 Caso contrário, então (passo plástico): Algoritmo de retorno:

iii) Algoritmo de retorno: resolver o sistema de equações não-lineares (Newton-Raphson), tendo como variáveis:  $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ ,  $D_{n+1}$  e  $\Delta \gamma$ .

$$\begin{cases} R_{\boldsymbol{\sigma}_{n+1}} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1} - (1 - D_{n+1}) \mathbb{D}^e : \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ trial} + \Delta \gamma \mathbb{D}^e : \boldsymbol{N}_{n+1} \\ R_{D_{n+1}} = D_{n+1} - D_n - \frac{\Delta \gamma}{1 - D_{n+1}} \left( \frac{-Y_{n+1}}{S} \right)^s \\ R_{\Delta \gamma} = \sqrt{\frac{3}{2} \boldsymbol{S}_{n+1} : \boldsymbol{S}_{n+1}} - \sigma_{y0} - H^I(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^p) \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^p - H^I \frac{\Delta \gamma}{1 - D_{n+1}} \end{cases}$$

iv) Atualizar outras variáveis internas:

v) Fim.

Na resolução do sistema não linear de equações, o método de Newton-Raphson é aplicado, devido a sua convergência quadrática.

O Quadro 2.3 mostra a estratégia de resolução do sistema.

Quadro 2.3 - Algoritmo de retorno (Newton-Raphson) para o modelo de Lemaitre

i) Dado o estado tentativa como parâmetros iniciais:

$$\sigma_{n+1}^{(0)} = \sigma_{n+1}^{trial} \quad D_{n+1}^{(0)} = D_n \quad \Delta\gamma^{(0)} = 0$$

ii) Resolver o sistema de equações para:  $\sigma_{n+1}$ ,  $D_{n+1}$  e  $\Delta\gamma$ .

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial \sigma_{n+1}} & \frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial D_{n+1}} & \frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial \Delta\gamma} \\ \frac{\partial R_{D_{n+1}}}{\partial \sigma_{n+1}} & \frac{\partial R_{D_{n+1}}}{\partial D_{n+1}} & \frac{\partial R_{D_{n+1}}}{\partial \Delta\gamma} \\ \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \sigma_{n+1}} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial D_{n+1}} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \Delta\gamma} \end{bmatrix}^k \cdot \begin{bmatrix} \delta\sigma_{n+1} \\ \delta D_{n+1} \\ \delta\Delta\gamma \end{bmatrix}^{k+1} = - \begin{bmatrix} R_{\sigma_{n+1}} \\ R_{D_{n+1}} \\ R_{\Delta\gamma} \end{bmatrix}^k$$

iii) Calcular:

$$\sigma_{n+1}^{(k+1)} = \sigma_{n+1}^{(k)} + \delta\sigma_{n+1}^{(k+1)} \quad D_{n+1}^{(k+1)} = D_{n+1}^{(k)} + \delta D_{n+1}^{(k+1)}$$

$$\Delta\gamma^{(k+1)} = \Delta\gamma^{(k)} + \delta\Delta\gamma^{(k+1)}$$

iv) Verificar convergência:

$$\phi^{(k+1)} = \frac{q^{(k+1)}}{1 - D_{n+1}^{(k+1)}} - \sigma_{y0} - H^I (\bar{\epsilon}_n^p) \bar{\epsilon}_n^p - H^I \frac{\Delta\gamma^{(k+1)}}{1 - D_{n+1}^{(k+1)}}$$

$$erro = \frac{\phi^{(k+1)}}{\left[ \sigma_{y0} + H^I (\bar{\epsilon}_n^p) \bar{\epsilon}_n^p + H^I \frac{\Delta\gamma^{(k+1)}}{1 - D_{n+1}^{(k+1)}} \right]} \leq \text{tolerância}$$

v) Fim.

Onde:

$$\frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial \sigma_{n+1}} = \mathbb{I} + \Delta\gamma \mathbb{D}^e : \frac{\partial \mathbf{N}_{n+1}}{\partial \sigma_{n+1}}$$

$$\frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial D_{n+1}} = \mathbb{D}^e : \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e \text{ trial}} + \Delta\gamma \mathbb{D}^e : \frac{\partial \mathbf{N}_{n+1}}{\partial D_{n+1}} \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial \Delta\gamma} = \mathbb{D}^e : \mathbf{N}_{n+1}$$

$$\frac{\partial R_{D_{n+1}}}{\partial \sigma_{n+1}} = -\frac{\Delta\gamma}{1-D_{n+1}} \left(\frac{S}{S}\right) \left(\frac{-Y_{n+1}}{S}\right)^{s-1} \frac{\partial(-Y_{n+1})}{\partial \sigma_{n+1}}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_{D_{n+1}}}{\partial D_{n+1}} &= 1 - \frac{\Delta\gamma}{(1-D_{n+1})^2} \left(\frac{-Y_{n+1}}{S}\right)^s \\ &\quad - \frac{\Delta\gamma}{1-D_{n+1}} \left(\frac{S}{S}\right) \left(\frac{-Y_{n+1}}{S}\right)^{s-1} \frac{\partial(-Y_{n+1})}{\partial D_{n+1}} \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial R_{D_{n+1}}}{\partial \Delta\gamma} = -\frac{1}{1-D_{n+1}} \left(\frac{-Y_{n+1}}{S}\right)^s$$

$$\frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \sigma_{n+1}} = \mathbf{N}_{n+1}$$

$$\frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial D_{n+1}} = \frac{\sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{S}_{n+1} : \mathbf{S}_{n+1}}}{(1-D_{n+1})^2} - H^I \frac{\Delta\gamma}{(1-D_{n+1})^2} \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \Delta\gamma} = -\frac{H^I}{1-D_{n+1}}$$

### 2.3 Modelo matemático de Gurson

Para a construção do modelo matemático de Gurson, a Lei de Hooke na forma original e generalizada é considerada.

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{D}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^e \quad (2.19)$$

onde,  $\boldsymbol{\sigma}$  é a o tensor tensão de Cauchy,  $\mathbb{D}^e$  é a matriz de elasticidade e  $\boldsymbol{\varepsilon}^e$  é o tensor das deformações elásticas.

A função de escoamento para o modelo de Gurson é definida conforme a equação a seguir:

$$\phi = J_2(\mathbf{S}) - \frac{1}{3} \left[ 1 + f^2 - 2f \cosh\left(\frac{3p}{2\sigma_y}\right) \right] \sigma_y^2 \quad (2.20)$$

onde o termo  $J_2(\mathbf{S})$  é o segundo invariante do tensor desviador,  $\sigma_y$  representa regra de escoamento do material,  $p$  é a tensão hidrostática e  $f$  é a porosidade ou fração volumétrica de vazios.

O vetor de fluxo, calculado com base na plasticidade associativa pode ser escrito como sendo:

$$\mathbf{N} = \mathbf{N}_d + \frac{1}{3} N_v \mathbf{I} = \mathbf{S} + \frac{1}{3} f \sigma_y \sinh\left(\frac{3p}{2\sigma_y}\right) \mathbf{I} \quad (2.21)$$

onde  $\mathbf{N}$  representa o vetor de fluxo,  $\mathbf{N}_d$  e  $N_v$  são as contribuições desviadoras e volumétricas e  $\mathbf{S}$  é o tensor das tensões desviadoras e  $\mathbf{I}$  é o tensor identidade de segunda ordem. Assim, a Lei de fluxo plástico é então determinada:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_d^p + \frac{1}{3} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_v^p \mathbf{I} = \dot{\gamma} \mathbf{S} + \frac{1}{3} \dot{\gamma} f \sigma_y \sinh\left(\frac{3p}{2\sigma_y}\right) \mathbf{I} \quad (2.22)$$

onde  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_d^p$  representa a contribuição desviadora do tensor das deformações plásticas e  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_v^p$  é a contribuição volumétrica. A taxa de evolução da deformação plástica equivalente, que assume o papel de variável interna de endurecimento isotrópico é calculada, de acordo com a Equação de Prandt-Reuss.

$$\dot{\bar{\varepsilon}}^p = \dot{\gamma} \sqrt{\frac{2}{3} \left\{ \mathbf{S} : \mathbf{S} + \frac{1}{3} \left[ f \sigma_y \sinh \left( \frac{3p}{2\sigma_y} \right) \right]^2 \right\}} \quad (2.23)$$

onde  $\dot{\bar{\varepsilon}}^p$  representa a taxa de evolução da deformação plástica equivalente. A Lei de evolução da porosidade ou fração volumétrica de vazios, segundo Gurson, é definida como sendo:

$$\dot{f} = (1 - f) \dot{\varepsilon}_v^p = \dot{\gamma} (1 - f) f \sigma_y \sinh \left( \frac{3p}{2\sigma_y} \right) \quad (2.24)$$

onde  $\dot{f}$  é a taxa de evolução da porosidade. Assim, o Quadro 2.4 contém todos o equacionamento matemático que defini o modelo de Gurson com endurecimento isotrópico.

Quadro 2.4 - Modelo Matemático de Gurson

i)	Decomposição aditiva da deformação: $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p$
ii)	Lei de Hooke generalizada: $\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{D}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^e$
iii)	Função de Escoamento: $\phi = J_2(\mathbf{S}) - \frac{1}{3} \left[ 1 + f^2 - 2f \cosh \left( \frac{3p}{2\sigma_y} \right) \right] \sigma_y^2$
iv)	Lei de fluxo plástico: $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\gamma} \mathbf{S} + \frac{1}{3} \dot{\gamma} f \sigma_y \sinh \left( \frac{3p}{2\sigma_y} \right) \mathbf{I}$
	e lei de evolução para $\bar{\varepsilon}^p$ : $\dot{\bar{\varepsilon}}^p = \dot{\gamma} \sqrt{\frac{2}{3} \left\{ \mathbf{S} : \mathbf{S} + \frac{1}{3} \left[ f \sigma_y \sinh \left( \frac{3p}{2\sigma_y} \right) \right]^2 \right\}}$
v)	Lei de evolução de dano: $\dot{f} = \dot{\gamma} (1 - f) f \sigma_y \sinh \left( \frac{3p}{2\sigma_y} \right)$
vi)	Regra de complementariedade
	$\dot{\gamma} \geq 0$ , $\phi \leq 0$ , $\dot{\gamma} \phi = 0$

## 2.4 Algoritmo de retorno para o modelo de Gurson.

A equação de atualização do tensor das deformações elásticas, no pseudo-tempo  $t_{n+1}$ , é definida por:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\,trial} - \Delta\gamma \mathbf{N}_{n+1} \quad (2.25)$$

onde  $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\,trial}$  representa o tensor das deformações elásticas tentativa,  $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e$  é o tensor das deformações elásticas,  $\Delta\gamma$  é o incremento do multiplicador plástico e  $\mathbf{N}_{n+1}$  é o vetor de fluxo. Substituindo a Eq. (2.10) na Lei de Hooke generalizada, tem-se:

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial} - \Delta\gamma \mathbb{D}^e : \mathbf{N}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial} - 2G\Delta\gamma \mathbf{N}_{d\,n+1} - \Delta\gamma K \frac{1}{3} N_{v\,n+1} \mathbf{I} \quad (2.26)$$

onde  $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$  representa a equação de atualização para o tensor tensão de Cauchy e  $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial}$  é o tensor tensão tentativa,  $G$  e  $K$  são os módulos cisalhante e volumétrico, respectivamente. Já, a equação de atualização da deformação plástica equivalente é escrita como sendo:

$$\bar{\varepsilon}_{n+1}^p = \bar{\varepsilon}_n^p + \Delta\gamma \sqrt{\frac{2}{3} \left\{ \mathbf{S}_{n+1} : \mathbf{S}_{n+1} + \frac{1}{3} \left[ f_{n+1} \sigma_y \sinh \left( \frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y} \right) \right]^2 \right\}} \quad (2.27)$$

onde  $\bar{\varepsilon}_{n+1}^p$  é a deformação plástica equivalente no pseudo tempo  $t_{n+1}$  e  $\bar{\varepsilon}_n^p$  é a deformação plástica equivalente no pseudo tempo  $t_n$ .

A variável de dano pode ser atualizada de acordo com a equação a seguir:

$$f_{n+1} = f_n + \Delta\gamma (1 - f_{n+1}) f_{n+1} \sigma_y \sinh \left( \frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y} \right) \quad (2.28)$$

onde  $f_{n+1}$  é a porosidade no pseudo tempo  $t_{n+1}$  e  $f_n$  é a porosidade no pseudo tempo  $t_n$ . Assim, na construção do algoritmo de retorno, o seguinte sistema de equações não lineares tem que ser resolvido, tendo como variáveis:  $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ ,  $\bar{\varepsilon}_{n+1}^p$ ,  $f_{n+1}$  e  $\Delta\gamma$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial} - 2G\Delta\gamma N_{d_{n+1}} - \Delta\gamma K \frac{1}{3} N_{v_{n+1}} \mathbf{I} \\ \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^p + \Delta\gamma \sqrt{\frac{2}{3} \left\{ \mathbf{S}_{n+1} : \mathbf{S}_{n+1} + \frac{1}{3} \left[ f_{n+1} \sigma_y \sinh \left( \frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y} \right) \right]^2 \right\}} \\ f_{n+1} = f_n + \Delta\gamma (1 - f_{n+1}) f_{n+1} \sigma_y \sinh \left( \frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y} \right) \\ \phi = J_{2_{n+1}} - \frac{1}{3} \left[ 1 + f_{n+1}^2 - 2f_{n+1} \cosh \left( \frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y} \right) \right] \sigma_y^2 \end{array} \right. \quad (2.29)$$

O Quadro 2.5 mostra o algoritmo de integração para o modelo de Gurson com endurecimento isotrópico.

Quadro 2.5 - Modelo Numérico de Gurson

i)	Determinar o estado tentativa: Dado um incremento de deformação, $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$ .	
	$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ trial} = \boldsymbol{\varepsilon}_n^e + \Delta\boldsymbol{\varepsilon} \qquad \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial} = \mathbb{D}^e : \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ trial}$	
	$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^{p\ trial} = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^p \qquad J_{2_{n+1}}^{trial} = \frac{1}{2} \mathbf{S}_{n+1}^{trial} : \mathbf{S}_{n+1}^{trial}$	
	$f_{n+1}^{trial} = f_n$	
ii)	Verificar a admissibilidade Plástica:	
	$\phi^{trial} = J_{2_{n+1}}^{trial} - \frac{1}{3} \left[ 1 + f_n^2 - 2f_n \cosh \left( \frac{3p_{n+1}^{trial}}{2\sigma_y} \right) \right] \sigma_y^2$	
	Se $\phi^{trial} \leq 0$ , então (passo elástico): $(*)_{n+1} = (*)_{n+1}^{trial}$ ;	
	Caso contrário, então (passo plástico): Algoritmo de retorno:	
iii)	Algoritmo de retorno: resolver o sistema de equações não-lineares (Newton-Raphson), tendo como variáveis: $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ , $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p$ , $f_{n+1}$ e $\Delta\gamma$ .	
	$\left\{ \begin{array}{l} R_{\boldsymbol{\sigma}_{n+1}} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1} - \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial} + 2G\Delta\gamma N_{d_{n+1}} + \Delta\gamma K \frac{1}{3} N_{v_{n+1}} \mathbf{I} \\ R_{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p} = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p - \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^p - \Delta\gamma \sqrt{\frac{2}{3} \left\{ \mathbf{S}_{n+1} : \mathbf{S}_{n+1} + \frac{1}{3} \left[ f_{n+1} \sigma_y \sinh \left( \frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y} \right) \right]^2 \right\}} \\ R_{f_{n+1}} = f_{n+1} - f_n - \Delta\gamma (1 - f_{n+1}) f_{n+1} \sigma_y \sinh \left( \frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y} \right) \\ R_{\Delta\gamma} = J_{2_{n+1}} - \frac{1}{3} \left[ 1 + f_{n+1}^2 - 2f_{n+1} \cosh \left( \frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y} \right) \right] \sigma_y^2 \end{array} \right.$	
iv)	Atualizar outras variáveis internas:	
v)	Fim.	

Na resolução do sistema não linear de equações é aplicado o método de Newton-Raphson, sendo que o Quadro 2.6 apresenta a estratégia de resolução do sistema.

Quadro 2.6 - Algoritmo de retorno (Newton-Raphson) para o modelo de Gurson

i) Dado o estado tentativa como parâmetros iniciais:

$$\sigma_{n+1}^{(0)} = \sigma_{n+1}^{trial} \quad \bar{\varepsilon}_{n+1}^{p(0)} = \bar{\varepsilon}_n^p \quad f_{n+1}^{(0)} = f_n \quad \Delta\gamma^{(0)} = 0$$

ii) Resolver o sistema de equações para:  $\sigma_{n+1}$ ,  $\bar{\varepsilon}_{n+1}^p$ ,  $f_{n+1}$  e  $\Delta\gamma$ .

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial \sigma_{n+1}} & \frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} & \frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial f_{n+1}} & \frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial \Delta\gamma} \\ \frac{\partial R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p}}{\partial \sigma_{n+1}} & \frac{\partial R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p}}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} & \frac{\partial R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p}}{\partial f_{n+1}} & \frac{\partial R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p}}{\partial \Delta\gamma} \\ \frac{\partial R_{f_{n+1}}}{\partial \sigma_{n+1}} & \frac{\partial R_{f_{n+1}}}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} & \frac{\partial R_{f_{n+1}}}{\partial f_{n+1}} & \frac{\partial R_{f_{n+1}}}{\partial \Delta\gamma} \\ \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \sigma_{n+1}} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial f_{n+1}} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \Delta\gamma} \end{bmatrix}^k \cdot \begin{bmatrix} \delta\sigma_{n+1} \\ \delta\bar{\varepsilon}_{n+1}^p \\ \delta f_{n+1} \\ \delta\Delta\gamma \end{bmatrix}^{k+1} = - \begin{bmatrix} R_{\sigma_{n+1}} \\ R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p} \\ R_{f_{n+1}} \\ R_{\Delta\gamma} \end{bmatrix}^k$$

iii) Calcular:

$$\sigma_{n+1}^{(k+1)} = \sigma_{n+1}^{(k)} + \delta\sigma_{n+1}^{(k+1)} \quad \bar{\varepsilon}_{n+1}^{p(k+1)} = \bar{\varepsilon}_{n+1}^p(k) + \delta\bar{\varepsilon}_{n+1}^{p(k+1)}$$

$$f_{n+1}^{(k+1)} = f_{n+1}^{(k)} + \delta f_{n+1}^{(k+1)} \quad \Delta\gamma^{(k+1)} = \Delta\gamma^{(k)} + \delta\Delta\gamma^{(k+1)}$$

iv) Verificar convergência:

$$\phi^{(k+1)} = J_{2n+1}^{(k+1)} - \frac{1}{3} \left[ 1 + f_{n+1}^{(k+1)2} - 2f_{n+1}^{(k+1)} \cosh\left(\frac{3p_{n+1}^{(k+1)}}{2\sigma_y}\right) \right] \sigma_y^2$$

$$erro = \frac{\phi^{(k+1)}}{\left[ \sigma_{y0} + H^l \bar{\varepsilon}_{n+1}^{p(k+1)} \right]} \leq \text{tolerância}$$

v) Fim.

Onde:

$$\frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial \sigma_{n+1}} = \mathbb{I} + 2G\Delta\gamma \frac{\partial N_{d_{n+1}}}{\partial \sigma_{n+1}} + \Delta\gamma K \frac{1}{3} \frac{\partial N_{v_{n+1}}}{\partial \sigma_{n+1}} \otimes \mathbf{I}$$

$$\frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} = \Delta\gamma K \frac{1}{3} \frac{\partial N_{v_{n+1}}}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} \mathbf{I}$$

$$\frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial f_{n+1}} = \Delta\gamma K \frac{1}{3} \frac{\partial N_{v_{n+1}}}{\partial f_{n+1}} \mathbf{I}$$

$$\frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial \Delta\gamma} = 2GN_{d_{n+1}} + K \frac{1}{3} N_{v_{n+1}} \mathbf{I}$$

(2.30)

$$\frac{\partial R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p}}{\partial \sigma_{n+1}} = -\Delta\gamma \frac{\partial \sqrt{\frac{2}{3} \left\{ \mathbf{S}_{n+1} : \mathbf{S}_{n+1} + \frac{1}{3} \left[ f_{n+1} \sigma_y \sinh \left( \frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y} \right) \right]^2 \right\}}}{\partial \sigma_{n+1}}$$

$$\frac{\partial R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p}}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} = 1 - \Delta\gamma \frac{\partial \sqrt{\frac{2}{3} \left\{ \mathbf{S}_{n+1} : \mathbf{S}_{n+1} + \frac{1}{3} \left[ f_{n+1} \sigma_y \sinh \left( \frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y} \right) \right]^2 \right\}}}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p}$$

(2.31)

$$\frac{\partial R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p}}{\partial f_{n+1}} = -\Delta\gamma \frac{\partial \sqrt{\frac{2}{3} \left\{ \mathbf{S}_{n+1} : \mathbf{S}_{n+1} + \frac{1}{3} \left[ f_{n+1} \sigma_y \sinh \left( \frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y} \right) \right]^2 \right\}}}{\partial f_{n+1}}$$

$$\frac{\partial R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p}}{\partial \Delta\gamma} = -\sqrt{\frac{2}{3} \left\{ \mathbf{S}_{n+1} : \mathbf{S}_{n+1} + \frac{1}{3} \left[ f_{n+1} \sigma_y \sinh \left( \frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y} \right) \right]^2 \right\}}$$

$$\frac{\partial R_{f_{n+1}}}{\partial \sigma_{n+1}} = -\Delta\gamma(1 - f_{n+1})f_{n+1}\sigma_y \frac{\partial \sinh\left(\frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y}\right)}{\partial \sigma_{n+1}}$$

$$\frac{\partial R_{f_{n+1}}}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} = -\Delta\gamma(1 - f_{n+1})f_{n+1}\sigma_y \frac{\partial \sinh\left(\frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y}\right)}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p}$$

(2.32)

$$\frac{\partial R_{f_{n+1}}}{\partial f_{n+1}} = 1 + \Delta\gamma f_{n+1}\sigma_y \sinh\left(\frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y}\right) - \Delta\gamma(1 - f_{n+1})\sigma_y \sinh\left(\frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y}\right)$$

$$\frac{\partial R_{f_{n+1}}}{\partial \Delta\gamma} = -(1 - f_{n+1})f_{n+1}\sigma_y \sinh\left(\frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y}\right)$$

$$\frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \sigma_{n+1}} = N_{n+1}$$

$$\frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} = -\frac{1}{3} \frac{\partial \left[1 + f_{n+1}^2 - 2f_{n+1} \cosh\left(\frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y}\right)\right]}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} \sigma_y^2$$

$$- \frac{1}{3} \left[1 + f_{n+1}^2 - 2f_{n+1} \cosh\left(\frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y}\right)\right] 2\sigma_y H^l$$

(2.33)

$$\frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial f_{n+1}} = -\frac{1}{3} \frac{\partial \left[1 + f_{n+1}^2 - 2f_{n+1} \cosh\left(\frac{3p_{n+1}}{2\sigma_y}\right)\right]}{\partial f_{n+1}} \sigma_y^2$$

$$\frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \Delta\gamma} = 0$$

## 2.5 Operador tangente consistente

O operador tangente pode ser determinado com base na seguinte estratégia:

$$\mathbb{D} = \frac{d\boldsymbol{\sigma}_{n+1}}{d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ trial}} = \mathbb{D}_{11} : \mathbb{D}^e \quad (2.34)$$

onde,  $\mathbb{D}$  representa o operador tangente que pode ser utilizado na análise de elementos finitos não linear. O termo  $\mathbb{D}_{11}$  é obtido por meio do Jacobiano do sistema não linear de equações residuais, descritos nos Quadros 2.3 e 2.6. Assim, para Lemaitre, pode-se escrever:

$$\begin{bmatrix} d\boldsymbol{\sigma}_{n+1} \\ dD_{n+1} \\ d\Delta\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{D}_{11} & \mathbf{D}_{12} & \mathbf{D}_{13} \\ \mathbf{D}_{21} & D_{22} & D_{23} \\ \mathbf{D}_{31} & D_{32} & D_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (1 - D_{n+1})\mathbb{D}^e : d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ trial} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

e,

$$\begin{bmatrix} \mathbb{D}_{11} & \mathbf{D}_{12} & \mathbf{D}_{13} \\ \mathbf{D}_{21} & D_{22} & D_{23} \\ \mathbf{D}_{31} & D_{32} & D_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial R_{\boldsymbol{\sigma}_{n+1}}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} & \frac{\partial R_{\boldsymbol{\sigma}_{n+1}}}{\partial D_{n+1}} & \frac{\partial R_{\boldsymbol{\sigma}_{n+1}}}{\partial \Delta\gamma} \\ \frac{\partial R_{D_{n+1}}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} & \frac{\partial R_{D_{n+1}}}{\partial D_{n+1}} & \frac{\partial R_{D_{n+1}}}{\partial \Delta\gamma} \\ \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial D_{n+1}} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \Delta\gamma} \end{bmatrix}^{-1} \quad (2.36)$$

onde, na Eq. (2.34) há a necessidade de se acrescentar o termo  $(1 - D_{n+1})$ , devido a proposição do conceito de tensão efetiva, feita por Lemaitre e consequente alteração na Lei de Hooke, a qual passa a se denominar Lei de Hooke danificada (ver Eq. 2.3). Por sua vez, para Gurson, pode-se estabelecer a seguinte relação:

$$\begin{bmatrix} d\boldsymbol{\sigma}_{n+1} \\ d\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p \\ df_{n+1} \\ d\Delta\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{D}_{11} & \mathbf{D}_{12} & \mathbf{D}_{13} \\ \mathbf{D}_{21} & D_{22} & D_{23} \\ \mathbf{D}_{31} & D_{32} & D_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{D}^e : d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ trial} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

e,

$$\begin{bmatrix} \mathbb{D}_{11} & \mathbf{D}_{12} & \mathbf{D}_{13} & \mathbf{D}_{14} \\ \mathbf{D}_{21} & D_{22} & D_{23} & D_{24} \\ \mathbf{D}_{31} & D_{32} & D_{33} & D_{34} \\ \mathbf{D}_{41} & D_{42} & D_{43} & D_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial \sigma_{n+1}} & \frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial \varepsilon_{n+1}^p} & \frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial f_{n+1}} & \frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial \Delta\gamma} \\ \frac{\partial R_{\varepsilon_{n+1}^p}}{\partial \sigma_{n+1}} & \frac{\partial R_{\varepsilon_{n+1}^p}}{\partial \varepsilon_{n+1}^p} & \frac{\partial R_{\varepsilon_{n+1}^p}}{\partial f_{n+1}} & \frac{\partial R_{\varepsilon_{n+1}^p}}{\partial \Delta\gamma} \\ \frac{\partial R_{f_{n+1}}}{\partial \sigma_{n+1}} & \frac{\partial R_{f_{n+1}}}{\partial \varepsilon_{n+1}^p} & \frac{\partial R_{f_{n+1}}}{\partial f_{n+1}} & \frac{\partial R_{f_{n+1}}}{\partial \Delta\gamma} \\ \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \sigma_{n+1}} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \varepsilon_{n+1}^p} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial f_{n+1}} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \Delta\gamma} \end{bmatrix}^{-1} \quad (2.38)$$

### 3 METODOLOGIA DE PESQUISA

#### 3.1 Introdução

A dissertação baseia-se em pesquisa quantitativa desenvolvida a partir da coleta e análise de dados de ensaios de tração.

Para a liga AA6101-T4 os dados foram obtidos de ensaios realizados por Malcher *et al.* (2020) em corpos de prova cilíndricos lisos e corpos de prova cilíndricos entalhados, com entalhe de raio  $R = 10 \text{ mm}$  e  $R = 6 \text{ mm}$ . Vale ressaltar que não foi realizado ensaio para o CP de raio de entalhe  $R = 4 \text{ mm}$  para a liga de alumínio.

Para a liga AISI 4340 recozida foram utilizados dados extraídos dos ensaios realizados por Morales (2020) também para CPs cilíndricos lisos e entalhados, sendo entalhes de raio  $R = 10 \text{ mm}$ ,  $R = 6 \text{ mm}$  e  $R = 4 \text{ mm}$ .

Os dados obtidos foram processados em ferramentas acadêmicas computacionais, de modo a permitir a calibração dos parâmetros de cada modelo em ambas as ligas. Foram identificadas, ainda, a porosidade inicial e porosidade crítica para o modelo de Gurson e denominador de dano, expoente de dano e dano crítico para o modelo de Lemaitre.

No processo de identificação paramétrica, um processo iterativo foi assumido, tendo como base, o método dos mínimos quadrados e a curva força versus deslocamento para a função objetiva, método baseado no gradiente como abordagem de busca e o método dos elementos finitos como solução numérica do

problema.

Ao final, os resultados experimentais são comparados com os resultados numéricos de cada simulação, de forma a destacar a influência da severidade do entalhe e ductilidade de cada liga, e seus impactos no deslocamento na fratura, no local de dano crítico e no nível de deformação plástica equivalente para cada modelo.

### 3.2 Características dos corpos de prova

A razão de triaxialidade, é definida, conceitualmente, como a razão entre a tensão hidrostática  $p$ , e a tensão equivalente de von Mises  $q$ , representada na Eq. (3.1).

$$\eta = \frac{p}{q} \quad (3.1)$$

Bridgman (1952), por sua vez, relacionou a razão de triaxialidade  $\eta$ , com os parâmetros construtivos utilizados para confecção dos CPs: raio do entalhe  $R$ , e raio da seção central do corpo de prova  $a$ , conforme Eq. (3.2)

$$\eta = \frac{1}{3} + \ln\left(1 + \frac{a}{2R}\right) \quad (3.2)$$

Com base na equação de Bridgman (1952), foram preparados corpos de prova cilíndricos, projetados de forma a permitir uma razão de triaxialidade inicial na região crítica, de 0,33, 0,50, 0,60 e 0,70, com seção transversal cilíndrica maciça. Os CPs cilíndricos lisos e entalhados foram usinados com comprimento total de 128 mm e 120 mm, respectivamente, bem como um comprimento útil de 40 mm.

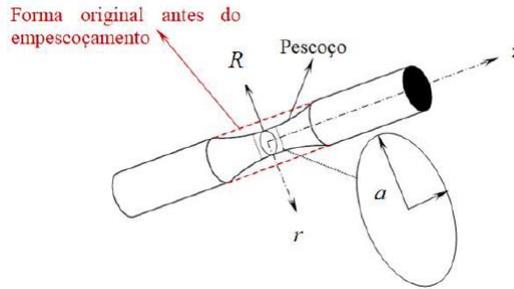


Figura 3.1 – Representação geométrica da região crítica do CP cilíndrico.

(Fonte: Morales, 2020)

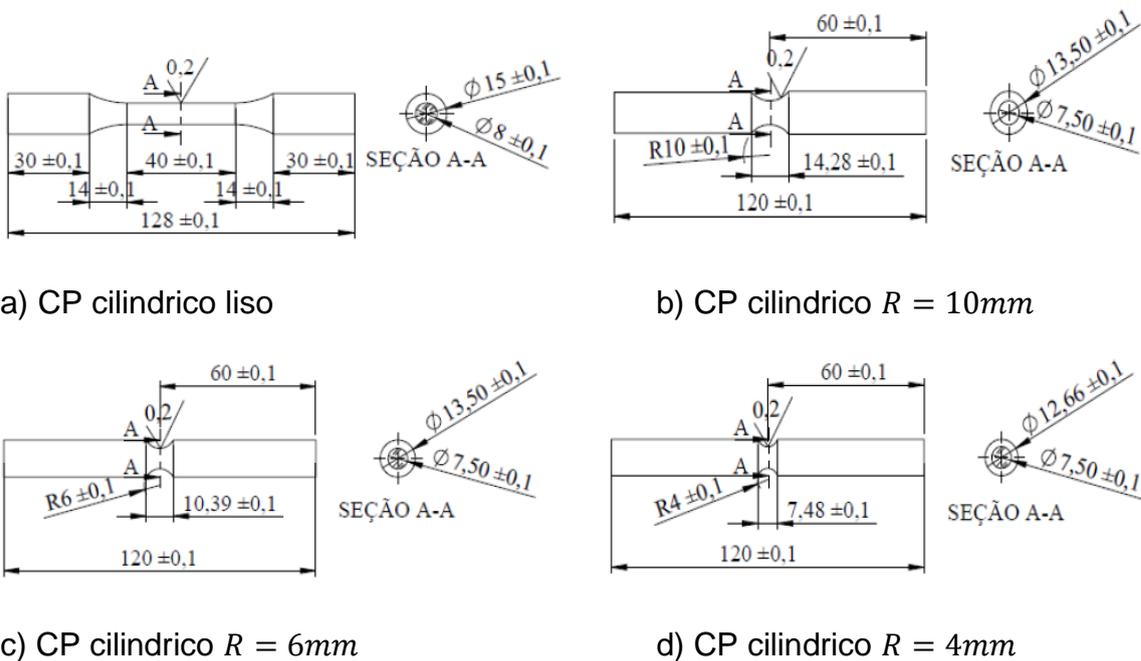


Figura 3.2 - Parâmetros geométricos dos corpos de prova. (Fonte: Morales, 2020)

## 4 RESULTADOS NUMÉRICOS E EXPERIMENTAIS

### 4.1 Malha de elementos finitos e Calibração dos parâmetros dos materiais

As malhas de elementos finitos foram definidas a partir de modelagem axissimétrica, equivalente a  $\frac{1}{4}$  do CP, e estruturadas com elementos quadriláteros de oito nós e integração reduzida. A Figura 4.1 apresenta as malhas de elementos finitos utilizadas nas simulações numéricas, sendo que cada malha foi formada por 2146 nós e 675 elementos, com refinamento na parte central para permitir maior discretização dos resultados nesta região de interesse.

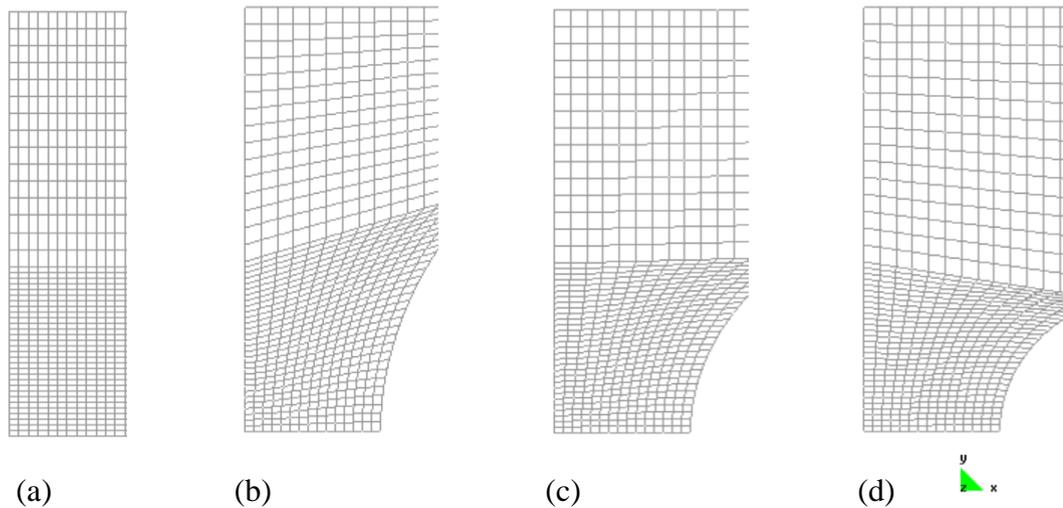


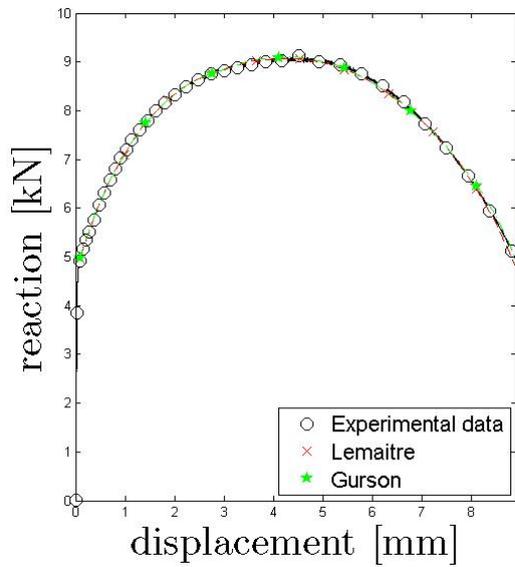
Figura 4.1 - Malhas de elementos finitos para os corpos de prova cilíndricos. a) Liso, b) entalhado R = 10 mm, c) entalhado R = 6 mm e d) entalhado R = 4 mm.

Para ambos os materiais, os corpos de prova cilíndricos lisos, sob carga trativa, resultaram na curva de reação experimental e na curva otimizada, por meio do método de busca multivariável baseado no gradiente proposto por Machado e Malcher (2019) e Machado (2019), para calibração das propriedades dos materiais. Neste caso, foram calibrados, ainda, os parâmetros da curva de Kleiner e Ponthot (2003), Eq.(4.1), utilizados para representar o comportamento da curva de encruamento isotrópico dos materiais, por meio de quatro parâmetros:  $\sigma_{y0}$ ,  $\sigma_{\infty}$ ,  $\xi$ ,  $\delta$ .

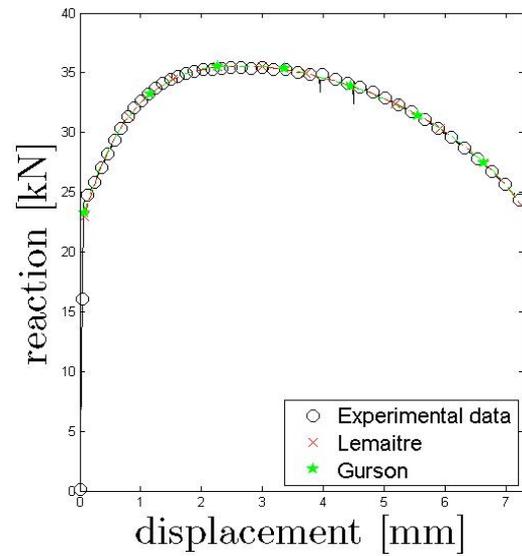
$$\sigma_y = \sigma_{y0} + \xi \bar{\epsilon}^p + (\sigma_{\infty} - \sigma_{y0})(1 - e^{-\delta \bar{\epsilon}^p}) \quad (4.1)$$

As Figuras 4.2 e 4.3 apresentam o resultado gráfico do processo de identificação paramétrica, onde se pode observar que a curva força versus deslocamento numericamente calculada se aproxima da curva experimentalmente determinada.

Por sua vez, a Tabela 4.1 contém todos os parâmetros identificados e que serão utilizados no processo de análise numérica.

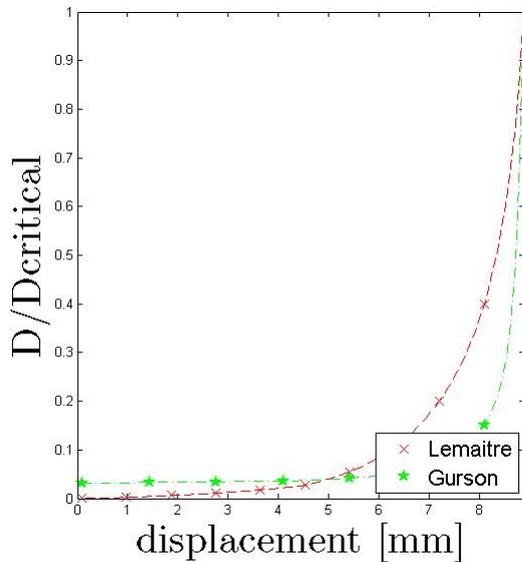


a) Curva de reação *versus* Deslocamento para liga AA-6101-T4.

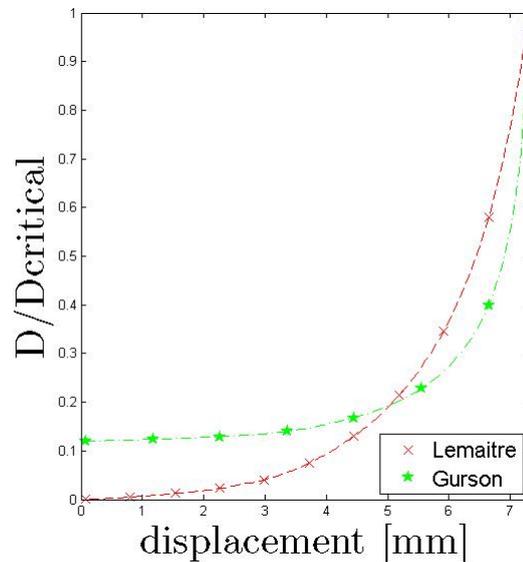


b) Curva de reação *versus* Deslocamento para liga AISI 4340.

Figura 4.2 - Calibração dos parâmetros dos materiais. Resultados após a convergência da função objetiva, Curva de reação *versus* Deslocamento.



a) Dano crítico *versus* Deslocamento para Liga 6101-T4



b) Dano crítico *versus* Deslocamento para Liga AISI 4340 recozida

Figura 4.3 - Calibração dos parâmetros dos materiais. Resultados após a convergência da função objetiva, curva de Dano crítico *versus* Deslocamento.

Na Tabela 4.1 pode ser observado ainda, que o dano crítico, segundo

Lemaitre, é 0,42 e 0,20, respectivamente para as ligas AA6101-T4 e AISI 4340 recozida. Já para o modelo de Gurson, a porosidade crítica é 0,34 e 0,22, respectivamente para as ligas AA6101-T4 e AISI 4340 recozida.

Tabela 4.1 - Parâmetros elastoplásticos e de dano para as ligas AA6101-T4 e AISI 4340 recozida.

Descrição	Símbolo	AA6101-T4		AISI 4340 R		Unidade
Módulo de elasticidade	$E$	65.554		206.000		MPa
		Lemaitre	Gurson	Lemaitre	Gurson	
Limite de escoamento inicial	$\sigma_{y0}$	94,80	96,50	448,75	471,33	MPa
Parâmetros da equação de Kleiner e Ponthot	$\xi$	118,76	83,75	568,21	514,74	MPa
	$\sigma_{\infty}$	206,65	216,93	746,92	780,22	MPa
	$\delta$	14,0	13,13	28,85	27,14	-
Def. plástica equivalente na fratura	$\bar{\epsilon}_f^p$	2,40	2,28	1,44	1,57	-
Expoente de dano	$s$	1,0		1,0		
Denominador de dano	$S$	4,85		25,02		MPa
Dano crítico	$D_c$	0,42		0,20		-
Porosidade inicial	$f_0$	0,01076		0,02705		-
Porosidade crítica	$f_c$	0,34		0,22		-

As Figuras 4.4 e 4.5 apresentam as curvas de encruamento determinadas de acordo com os modelos de Lemaitre e Gurson. Pode-se observar uma diferença entre as curvas, justificada pela natureza das equações de evolução do dano proposta por ambos os modelos, no qual para Lemaitre o dano é uma função da deformação plástica acumulada e da energia liberada devido ao dano, e para Gurson, o dano é associado a razão entre a quantidade de vazios e o volume total representativo, deduzido a partir da micromecânica de um defeito esférico.

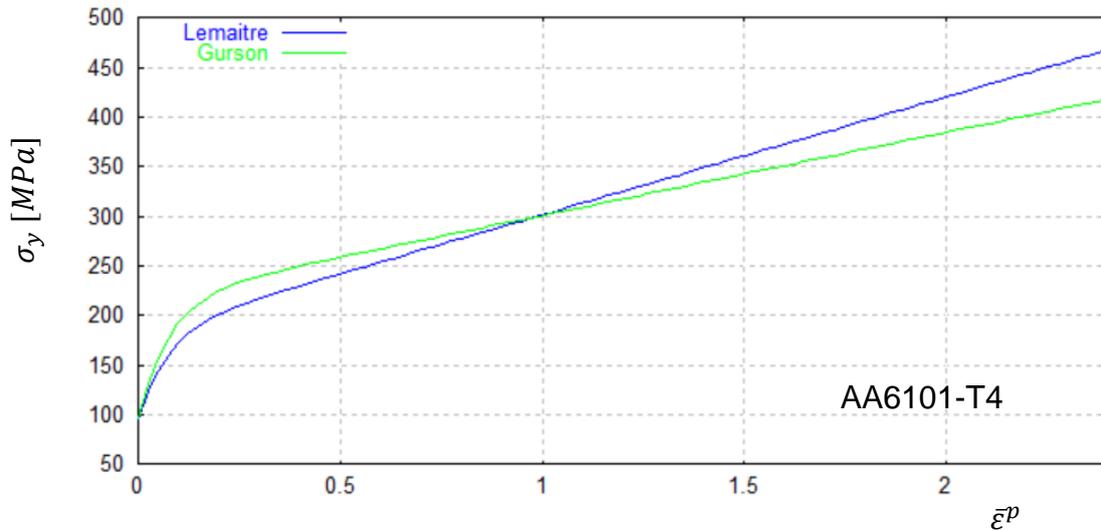


Figura 4.4 - Curvas de endurecimento isotrópico para os modelos de Lemaitre e Gurson para AA6101-T4

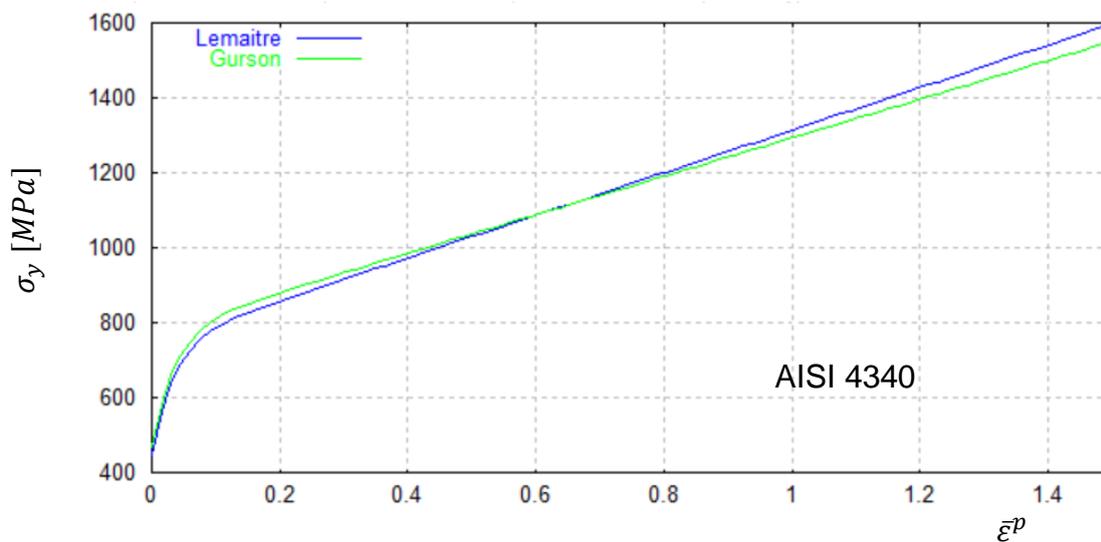


Figura 4.5 - Curvas de endurecimento isotrópico para os modelos de Lemaitre e Gurson para liga AISI 4340

## 4.2 Curvas de reação e evolução do dano

Neste item são apresentados os resultados numéricos para os corpos de prova entalhados com  $R = 10 \text{ mm}$  e  $R = 6 \text{ mm}$  fabricados com a liga AA6101-T4 e os resultados dos corpos de prova entalhados com  $R = 10 \text{ mm}$ ,  $R = 6 \text{ mm}$  e  $R = 4 \text{ mm}$  fabricados com a liga AISI 4340 recozida.

Vale destacar que em região de alta triaxialidade ( $\eta \geq \frac{1}{3}$ ) o aumento da

severidade do entalhe do CP, redução do raio, resulta em aumento da razão de triaxialidade. Os valores iniciais de razão de triaxialidade constam da tabela 4.2.

Tabela 4.2 - Valores iniciais de razão de triaxialidade

Liga	CP	Razão de Triaxialidade Inicial ( $\eta_0$ )
AA6101-T4	Liso	0,33
	R=10mm	0,5
	R=6mm	0,6
AISI 4340	Liso	0,33
	R=10mm	0,5
	R=6mm	0,6
	R=4mm	0,7

#### 4.2.1 Liga de alumínio 6101-T4.

A partir dos parâmetros os materiais obtidos anteriormente, para a liga AA6101-T4, foram simulados os corpos de prova entalhados, sujeitos a carga trativa e aplicadas as leis de evolução do dano propostas por Lemaitre e Gurson, para avaliar a capacidade preditiva dos modelos.

A Figura 4.6 apresenta a curva de reação, evolução do dano no nó crítico e contorno do dano, para o corpo de prova (CP) cilíndrico entalhado com  $R = 10 \text{ mm}$ . As simulações foram realizadas até o instante onde os modelos atingissem os valores de dano crítico.

Assim, são comparados os deslocamentos experimentalmente observados com os numericamente calculados, a localização do valor máximo de dano (nó crítico) ao longo do contorno da malha de elementos finitos.

Pode-se observar que o modelo de Lemaitre previu o deslocamento necessário para início da fratura, maior do que o valor experimentalmente medido, o que mostra que o modelo teve um comportamento otimista quando ao momento do início da fratura dúctil.

Já o modelo de Gurson, previu o deslocamento numericamente calculado para início da fratura, menor do que o valor experimentalmente medido, o que mostra que o modelo teve uma capacidade preditiva conservadora quanto ao início

da fratura.

Quanto a localização do nó crítico, ou seja, o nó com o máximo dano, ambos os modelos indicaram que o início da fratura ocorre no centro do corpo de prova, o que está em concordância com as observações experimentais.

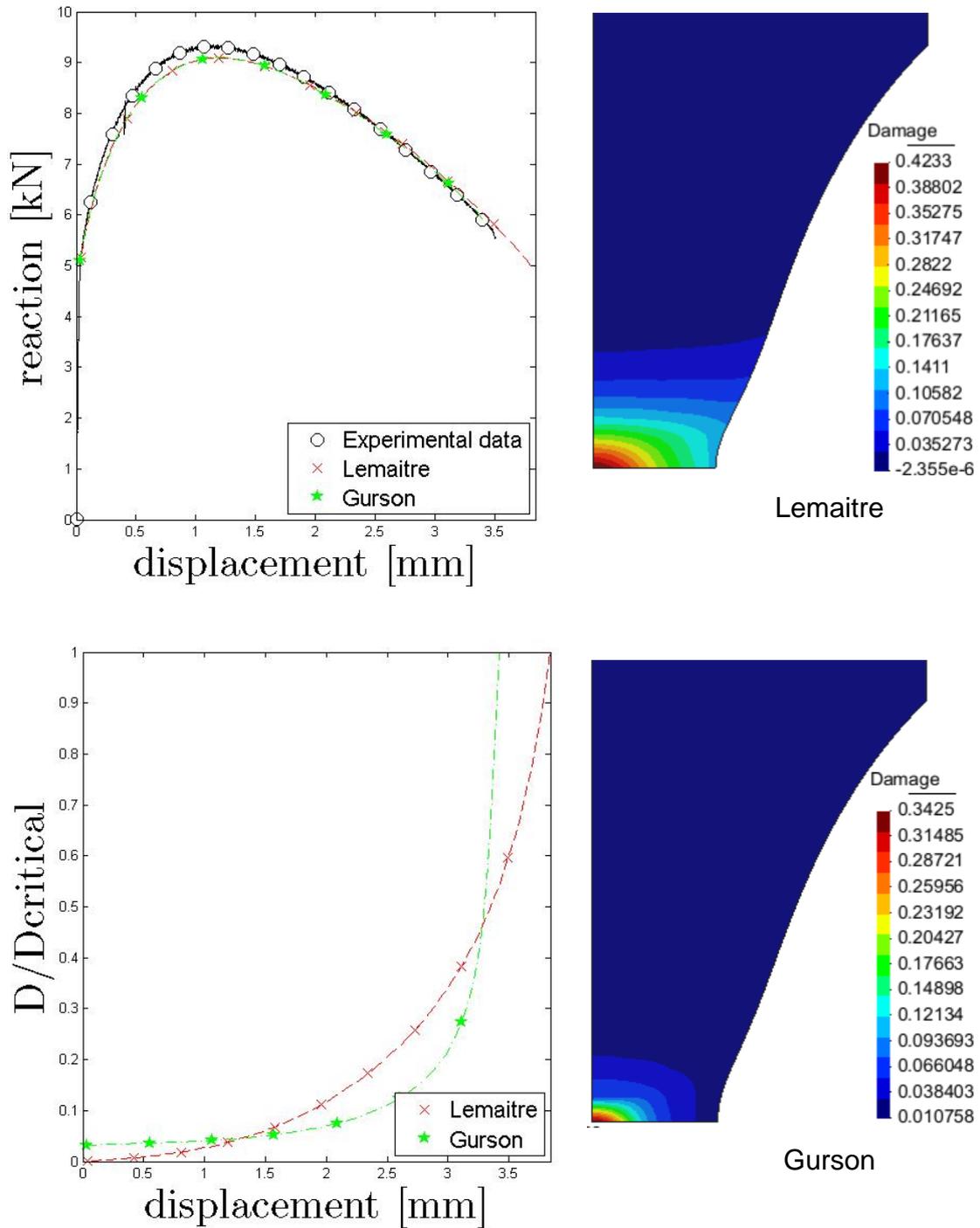


Figura 4.6 - Curvas de reação e evolução do dano para o CP entalhado – R=10 mm. Liga AA6101-T4.

A Figura 4.7 apresenta o comportamento para o corpo de prova entalhado com  $R = 6 \text{ mm}$ . Novamente, o modelo de Gurson apresentou um comportamento mais próximo do real, dada a comparação entre os deslocamentos numericamente calculados e o experimentalmente observado. Neste caso, também, ambos os modelos foram capazes de indicar o centro do corpo de prova como o local de início da fratura, compatível com as observações experimentais.

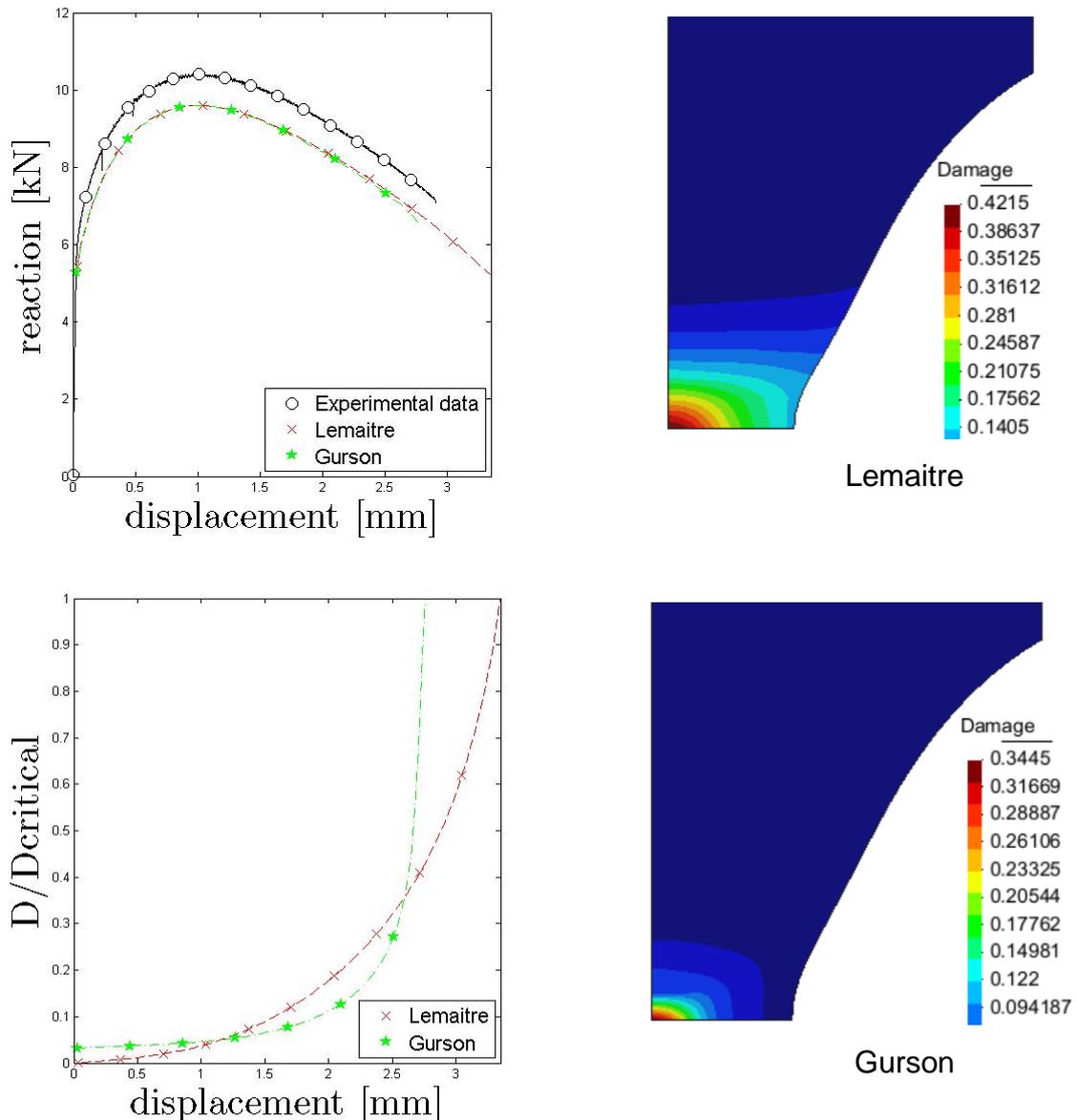


Figura 4.7 - Curva de reação e evolução do dano para o CP entalhado –  $R=6\text{mm}$ . Liga AA6101-T4.

É possível também destacar a diferença entre os níveis de força de reação calculados pelos modelos e os níveis observados experimentalmente. Verifica-se

que ambos os modelos calcularam níveis de força de reação menores do que os níveis experimentais. Este comportamento é típico de modelos baseados na função de escoamento de von Mises, onde a razão de triaxialidade ou o efeito da tensão hidrostática é negligenciado no processo de determinação da lei de fluxo plástico do material.

#### **4.2.2 Liga AISI 4340 recozida.**

Para a liga AISI 4340 recozida, foram simulados os CP's entalhados com raio de 10, 6 e 4 mm. A Figura 4.8 mostra os resultados para o CP com  $R = 10 \text{ mm}$ . É possível, novamente, observar um melhor desempenho do modelo de Gurson, no que se refere a previsão do correto deslocamento para a fratura. O modelo de Lemaitre foi extremamente otimista, calculando um deslocamento para a fratura de cerca de 30% maior que o observado através dos dados experimentais. A localização do nó crítico, para ambos os modelos, se aproximou do local de início da fratura dúctil, experimentalmente verificada.

A Figura 4.9 apresenta os resultados para os CP's entalhados com  $R = 6 \text{ mm}$ . A capacidade preditiva do modelo de Gurson foi novamente maior que a capacidade preditiva do modelo de Lemaitre. É importante destacar que para ambas as simulações, os níveis de força de reação calculados foram muito próximos dos experimentalmente medidos, o que difere do resultado obtido para a liga AA6101-T4.

Este fato pode ser justificado pelo nível de ductilidade dos materiais, onde os modelos baseados em Mises possuem um melhor comportamento quanto ao nível de força em materiais menos dúcteis. Analisando o nível de deformação plástica na fratura, obtidos através das curvas de endurecimento isotrópico (Figura 4.4), pode-se constatar que  $\bar{\epsilon}_f^p = 2,5$  para a liga AA6101-T4 e  $\bar{\epsilon}_f^p = 1,5$  para a liga AISI 4340 recozida, indicando que a liga de alumínio possui maior ductilidade que a liga de aço estudada.

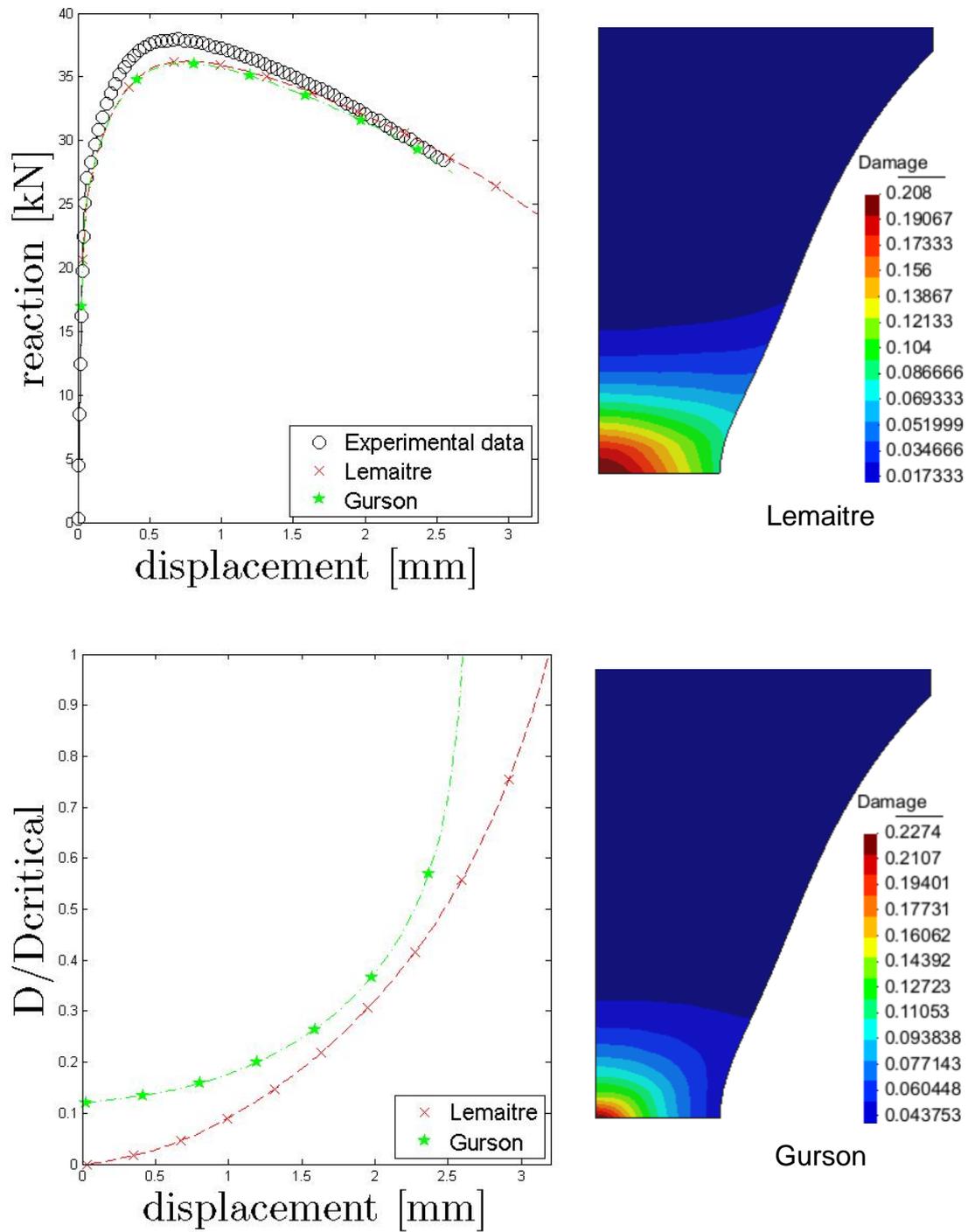


Figura 4.8 - Curva de reação e evolução do dano para o CP entalhado R=10mm Liga AISI 4340 recozida

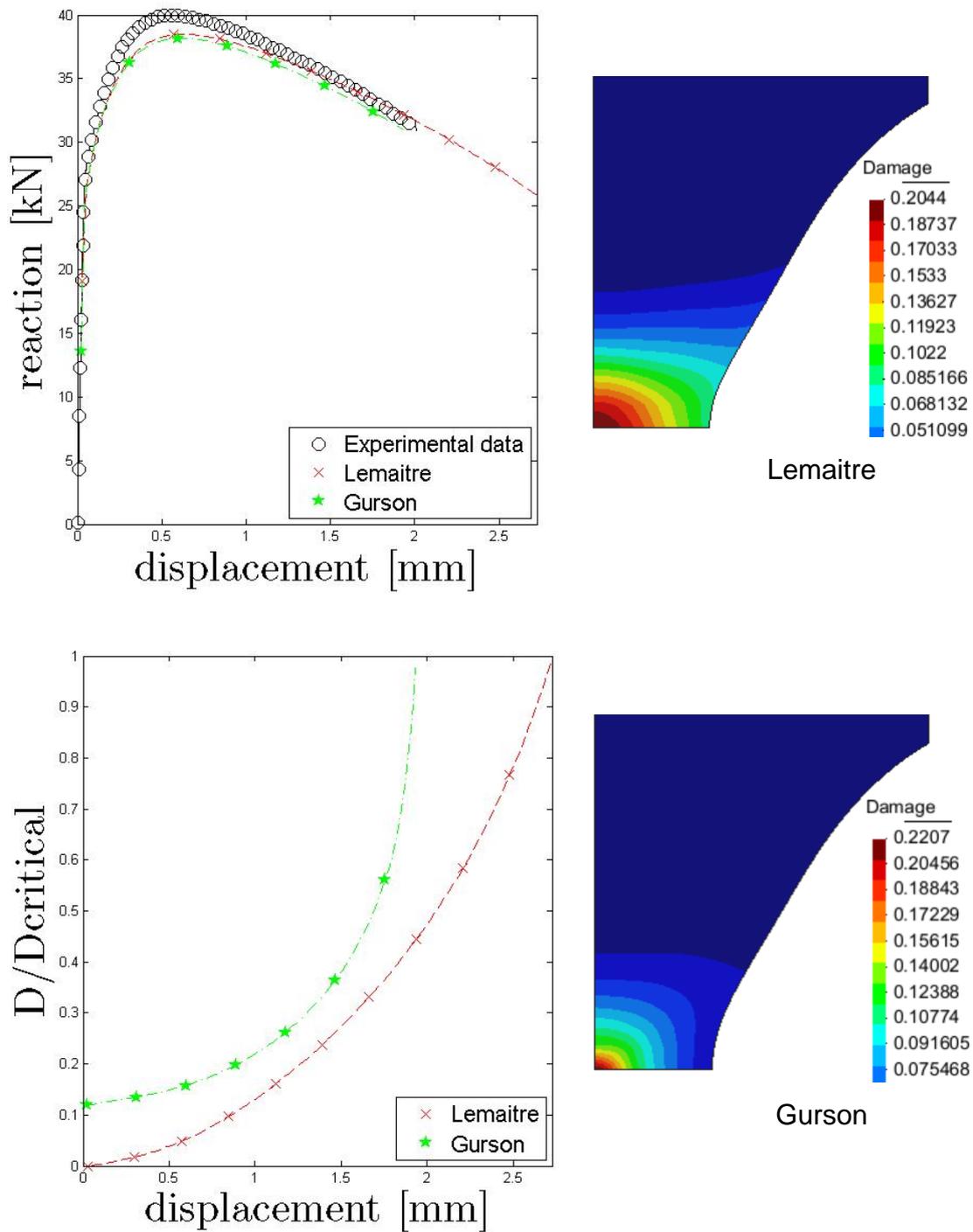


Figura 4.9 - Curva de reação e evolução do dano para o CP entalhado –  $R=6$  mm. Liga AISI 4340 recozida.

Para o corpo de prova entalhado com  $R = 4$  mm, observa-se que o modelo de Lemaitre se comporta de maneira bastante otimista e o modelo de Gurson se

comporta de maneira conservativa, na determinação do deslocamento necessário para o início da fratura. Gurson calculou um deslocamento na fratura menor que o experimentalmente necessário e Lemaitre um deslocamento maior, o que denota o comportamento impreciso dos modelos em relação a previsão de deslocamento na fratura.

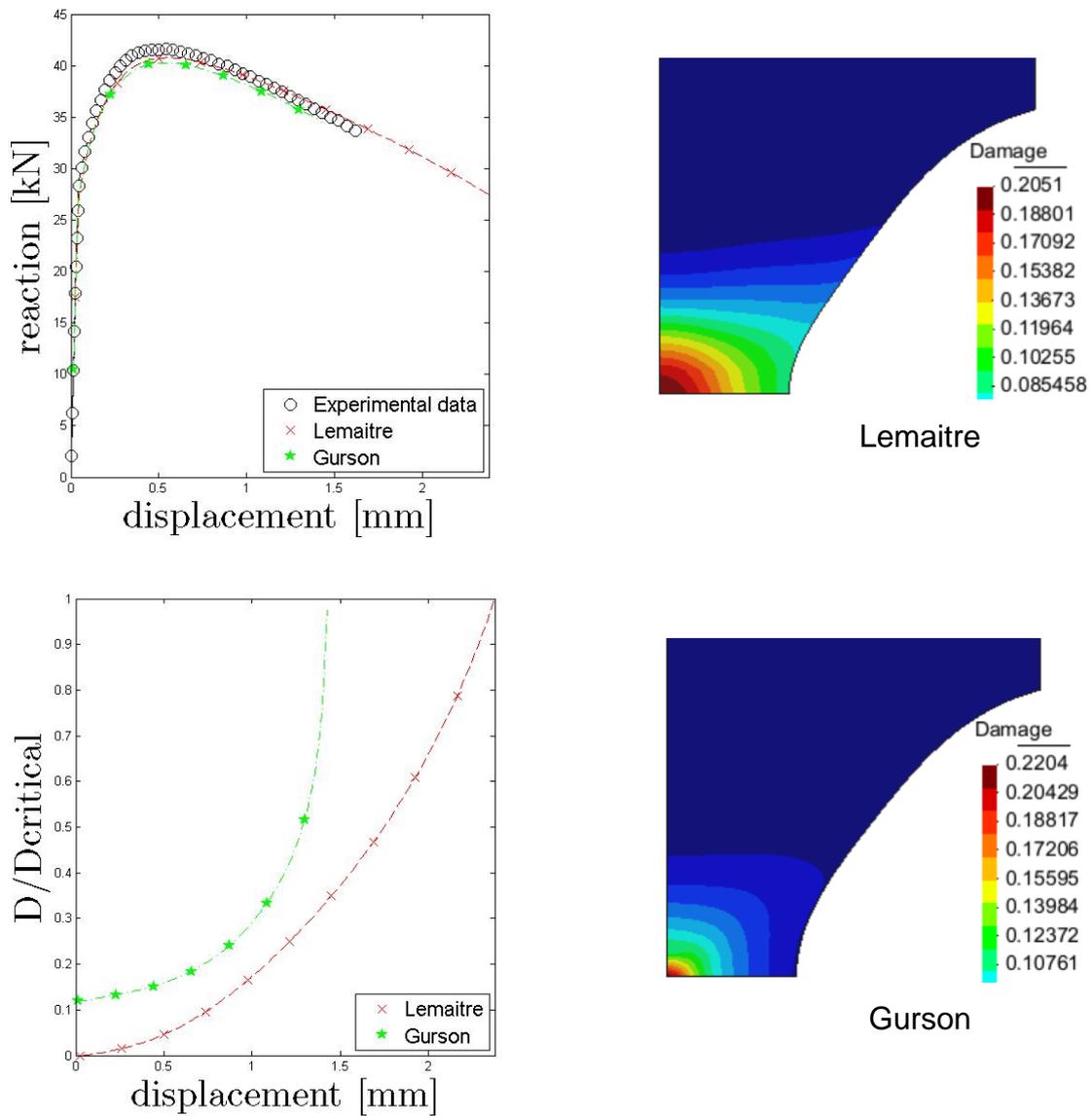
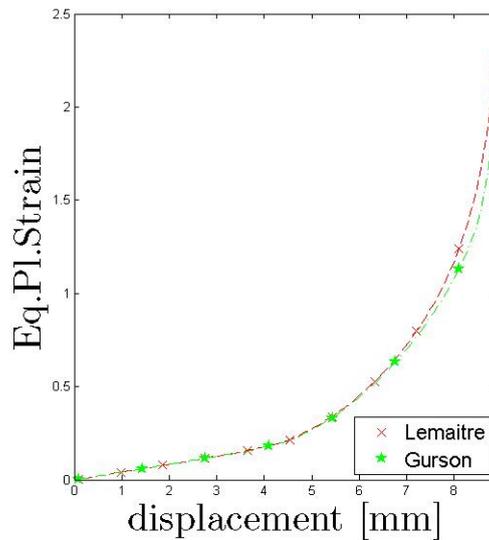


Figura 4.10 - Curva de reação e evolução do dano para o CP entalhado R=4mm. Liga AISI 4340 recozida.

### 4.3 Evolução da deformação plástica equivalente

Nesta etapa do trabalho, são avaliados os níveis de deformação plástica equivalente na fratura, calculados por ambos os modelos. Através destes resultados, ao final, monta-se um gráfico de deformação plástica na fratura versus a razão de triaxialidade inicial ou característica do corpo de prova.



a) CP Liso

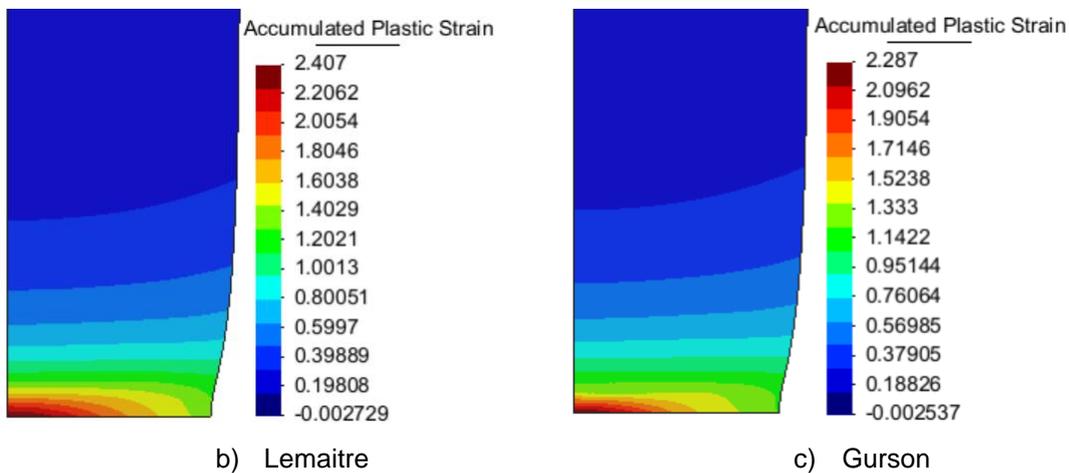
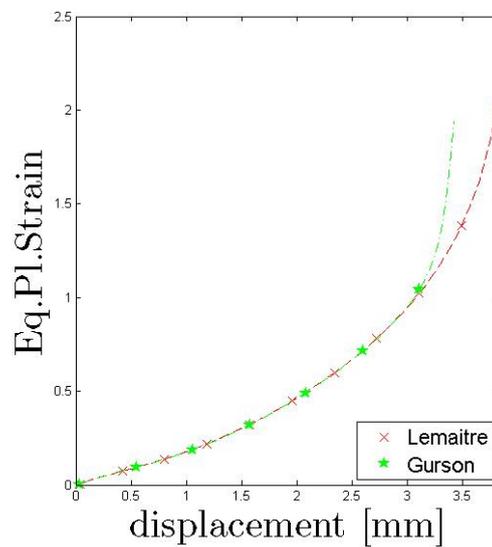


Figura 4.11 - Evolução da deformação plástica equivalente para o CP cilíndrico liso. Liga AA6101-T4

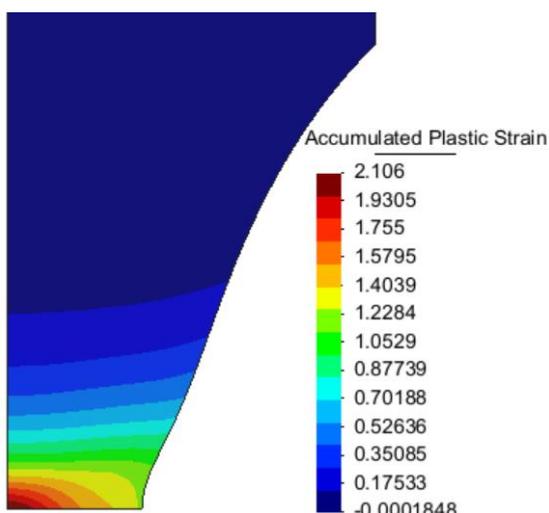
#### 4.3.1 Liga de alumínio 6101-T4

As Figuras 4.12, 4.13 e 4.14 mostram o comportamento da deformação

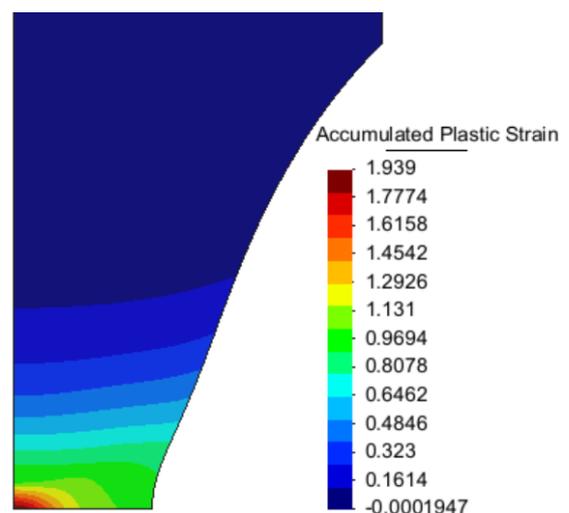
plástica equivalente na fratura, para os corpos de prova liso e entalhados, segundo Lemaitre e Gurson, para a liga de alumínio. Os níveis de deformação plástica equivalente são determinados no instante em que os modelos atingem o dano crítico anteriormente calibrado. Pode-se observar que ambos os modelos atingem níveis próximos de deformação plástica equivalente na fratura, contudo, em instantes diferentes, ou seja, para níveis de deslocamento diferentes, o que mostra que a taxa de evolução da deformação plástica para Gurson é sempre maior que para Lemaitre, visto que o modelo de Gurson necessita de menores deslocamentos para atingir o dano crítico.



a) CP  $R = 10 \text{ mm}$

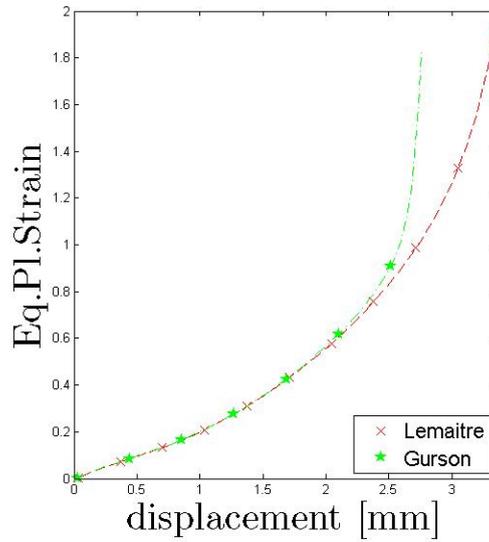


b) Lemaitre

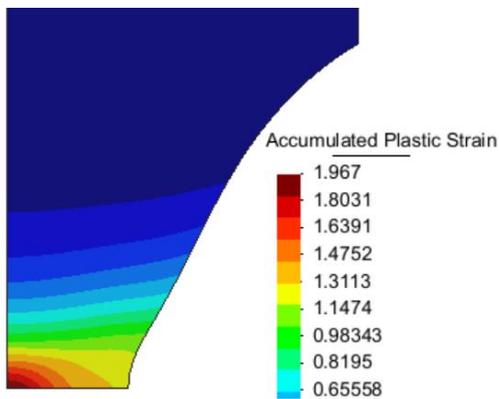


c) Gurson

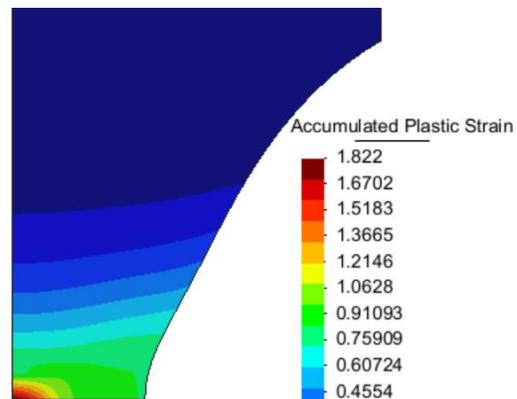
Figura 4.12 - Evolução da deformação plástica equivalente para o CP entalhado –  $R = 10 \text{ mm}$ . Liga AA6101-T4



a) CP  $R = 6 \text{ mm}$



b) Lemaitre



c) Gurson

Figura 4.13.- Evolução da deformação plástica equivalente para o CP entalhado –  $R = 6 \text{ mm}$ . Liga AA6101-T4.

A Figura 4.14 apresenta um gráfico da relação entre a razão de triaxialidade e o nível de deformação plástica equivalente esperada na fratura. Pode-se constatar que para  $\eta \geq 1/3$  a deformação plástica esperada na fratura sempre diminui com o aumento da razão de triaxialidade, para ambos os modelos.

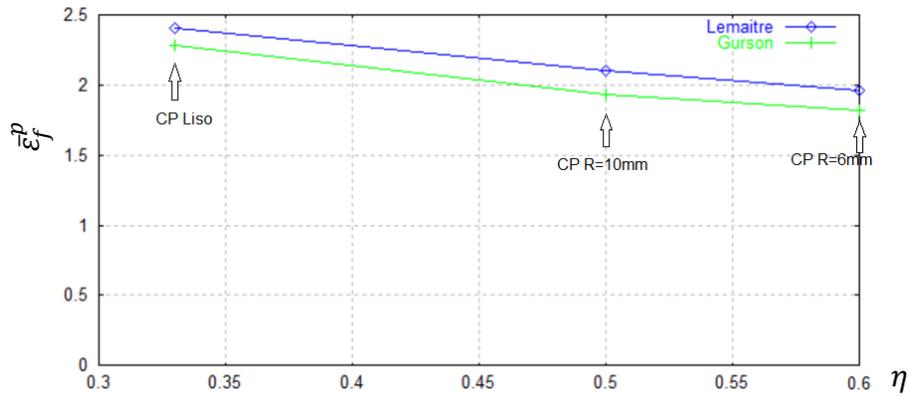


Figura 4.14. Deformação plástica equivalente na fratura em função da razão de triaxialidade inicial. Liga AA6101-T4.

### 4.3.2 Liga AISI 4340 recozida

As Figuras 4.15, 4.16, 4.17, 4.18 e 4.19 apresentam o comportamento da deformação plástica equivalente na fratura para a liga AISI4340 recozida. Pode-se constatar, também, que os valores calculados pelos modelos para esta liga não possuem tanta disparidade.

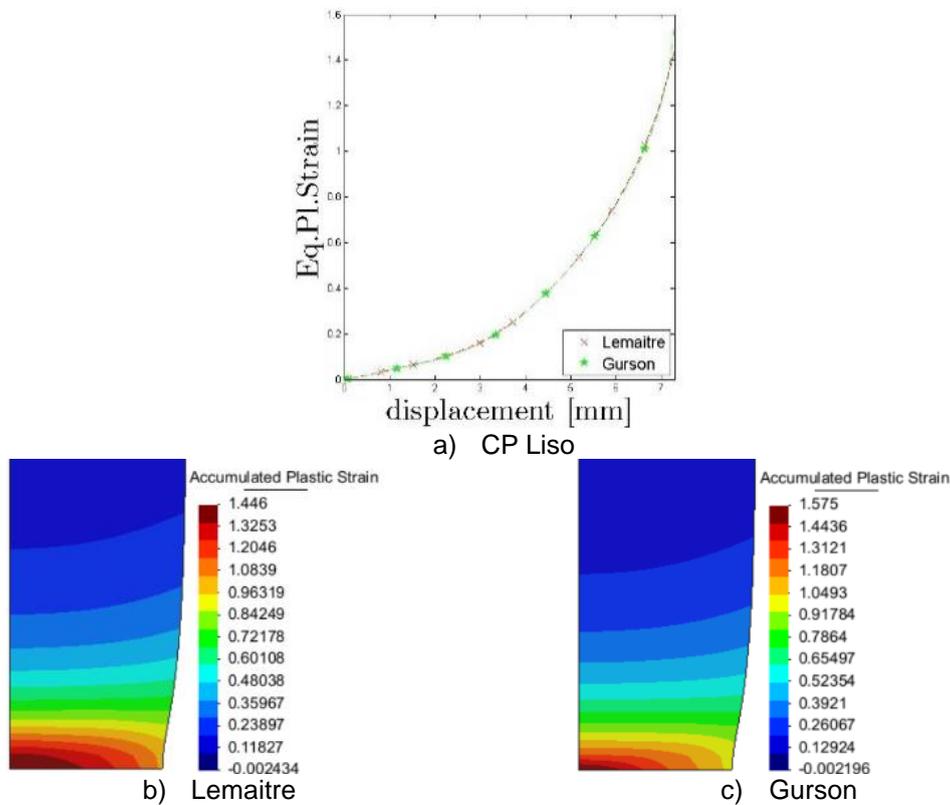


Figura 4.15 - Evolução da deformação plástica equivalente para o CP cilíndrico liso. Liga AISI 4340 recozida.

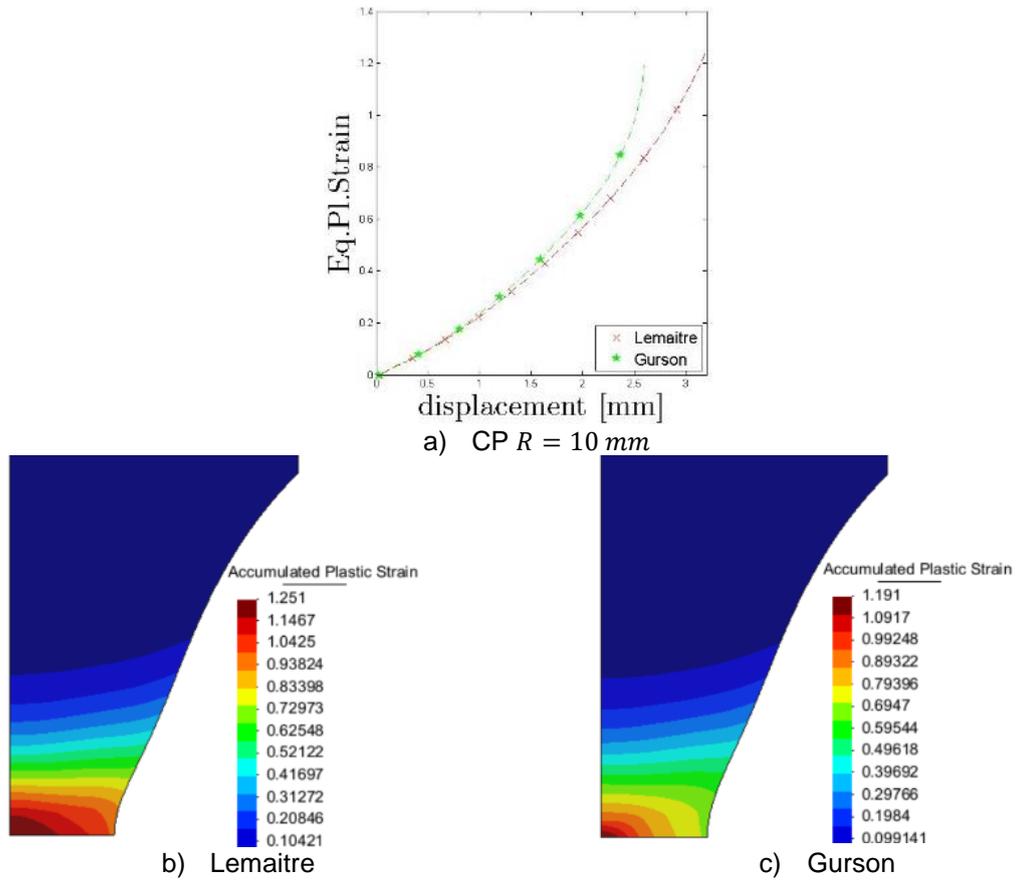
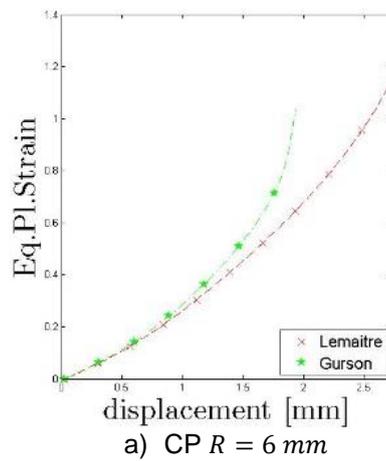


Figura 4.16 - Evolução da deformação plástica equivalente para o CP entalhado –  $R = 10 \text{ mm}$ . Liga AISI 4340 recozida.



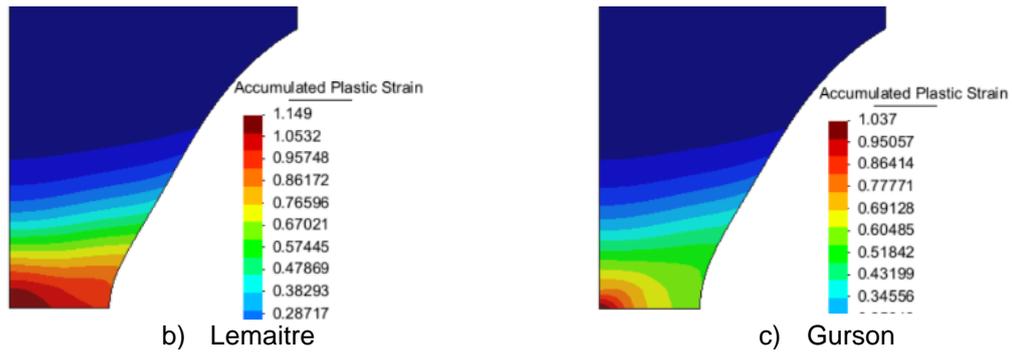
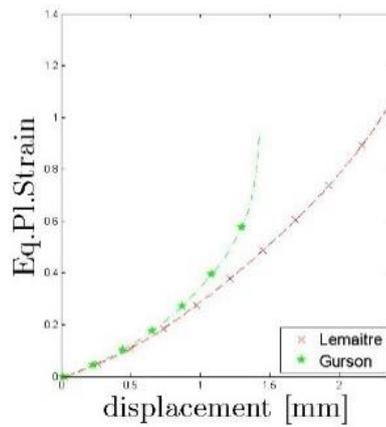


Figura 4.17.- Evolução da deformação plástica equivalente para o CP entalhado –  $R = 6 \text{ mm}$ . Liga AISI 4340 recozida.



a) CP  $R = 4 \text{ mm}$

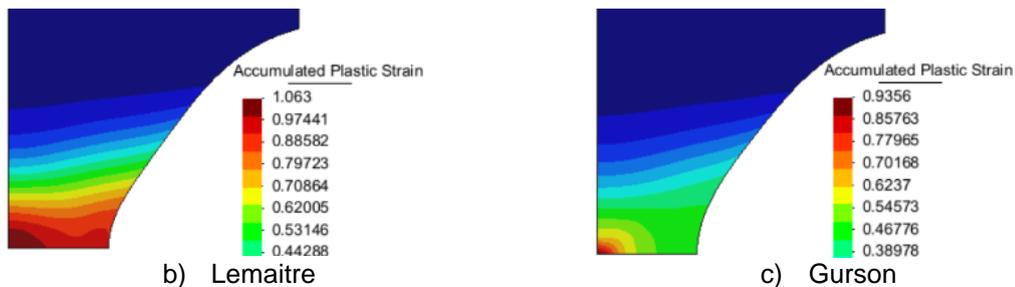


Figura 4.18.- Evolução da deformação plástica equivalente para o CP entalhado –  $R = 4 \text{ mm}$ . Liga AISI 4340 recozida.

Vale ressaltar, os resultados foram obtidos para níveis de deslocamento diferentes, o que pode indicar, que mesmo para materiais com menor ductilidade, a taxa de evolução da deformação plástica, segundo Gurson, é sempre maior que para Lemaître.

A Figura 4.19, também, apresenta o comportamento da deformação plástica

equivalente na fratura, em função da razão de triaxialidade, e mesmo para a liga AISI 4340 recozida, para  $\eta \geq 1/3$ , a deformação plástica requerida para início da fratura dúctil, diminui com o aumento da razão de triaxialidade.

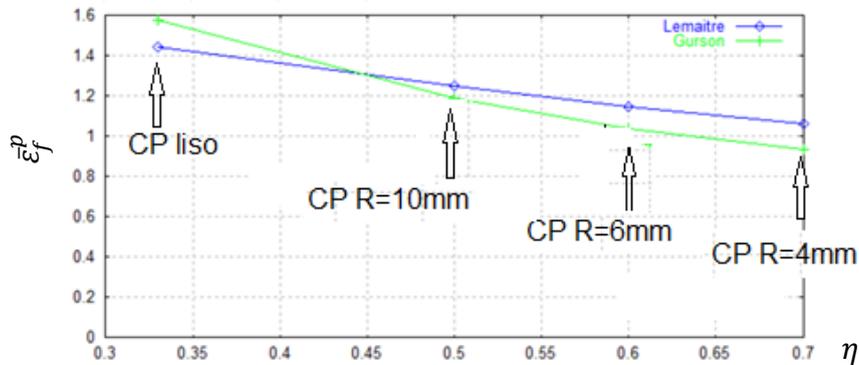


Figura 4.19.- Deformação plástica equivalente na fratura em função da razão de triaxialidade inicial. Liga AISI 4340 recozida.

Em ambos os casos, o nível máximo de deformação plástica ocorreu no mesmo local do nível máximo de dano. A tabela 4.3 apresenta o comparativo de percentual de erro com base na diferença do deslocamento na fratura para cada modelo e nível de severidade do entalhe.

Tabela 4.3 – Comparativo de erro de deslocamento na fratura para os modelos

Liga	Raio	Deslocamento (mm)			Erro	
		Exp.	L	G	L	G
AA6101-T4	10mm	3,45	3,80	3,40	10,1%	1,4%
	6mm	2,85	3,40	2,75	19,3%	3,5%
AISI 4340	10mm	2,50	3,30	2,60	32,0%	-4,0%
	6mm	2,00	2,70	1,80	35,0%	10,0%
	4mm	1,70	2,80	1,40	64,7%	17,6%

Legenda: Exp=experimental; L = modelo de Lemaitre; G = modelo de Gurson

O modelo de Gurson apresentou erros percentualmente menores que os de Lemaitre, e tal fato pode ser devido a existência de uma parcela volumétrica na formulação de Gurson, enquanto o modelo de Lemaitre não contempla esta parcela, possuindo apenas uma parcela desviadora em sua função de escoamento.

## 5 CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES DE TRABALHOS FUTUROS

### 5.1 Conclusões

Em relação ao desempenho dos modelos, em relação a previsibilidade do deslocamento na fratura, na tabela 4.3, pode-se observar que o modelo de Gurson apresentou percentuais de erro menores em comparação ao modelo de Lemaitre, para as ligas estudadas, de modo que seus resultados se aproximaram mais dos deslocamentos críticos obtidos experimentalmente. Vale ressaltar, que em ambos os modelos, percebeu-se um aumento do erro conforme se aumenta a severidade do entalhe.

Tais diferenças de valores podem indicar também a dependência dos modelos em relação aos parâmetros calibrados inicialmente, de modo que em relação a Lemaitre, para região de alta triaxialidade,  $\eta \geq 1/3$ , o modelo tende a indicar a fratura das ligas estudadas de forma um tanto quanto tardia, ou seja, aponta deslocamentos na fratura maiores que os observados na prática experimental; Para o modelo de Gurson, a indicação da fratura tende a ser mais conservadora pois ocorre antecipadamente aos valores experimentais.

Em relação a influência da ductilidade das ligas nos modelos analisados, observou-se que a ocorrência dos maiores erros no modelo de Lemaitre foram com a liga de aço AISI 4340, que possui menor ductilidade se comparada com a liga de alumínio, indicando uma maior compatibilidade do modelo de Lemaitre com ligas de maior ductilidade. Por sua vez, não foi observada esta diferenciação em relação ao modelo de Gurson.

Em ambas as ligas testadas, o nível máximo de deformação plástica aconteceu no ponto de nível máximo de dano, no centro do CP, o que pode sugerir que no caso de corpos de prova entalhados, a deformação plástica equivalente na fratura também pode ser um bom indicador do local de início da fratura dúctil. Vale ressaltar ainda, que para ambas as ligas, a taxa de evolução da deformação plástica, segundo Gurson, foi sempre maior que para Lemaitre.

## **5.2 Recomendações de trabalhos futuros**

- a) Avaliar os modelos de Lemaitre e de Gurson, em outras condições de carregamento.
- b) Implementar o modelo GTN e assim eliminar a dependência da porosidade inicial para o modelo de Gurson.

## 6 REFERÊNCIAS

ANDRADE, F.X.C., PIRES, F.M.A., DE SÁ, J.M.A., MALCHER, L. (2009) **Improvement of the numerical prediction of ductile failure with an integral nonlocal damage mode**. *International Journal of Material Forming*, pp.439-442.

BRIDGMAN, P. (1952) **Studies in Large Plastic and Fracture**. London: McGraw-Hill Book Company.

CHABOCHE, J.L. (1984) **Anisotropic Creep Damage in the Framework of Continuum Damage Mechanics**. *Nuclear Engineering and Design*, 79:309–319.

DAPAAH, D.Y. (2018) **An experimentally validated continuum damage mechanics model of the micro-damage process zone during cortical bone fracture**. Master Thesis presented to the University of Waterloo, Canada.

DE SOUZA NETO, E.A., PERIC, D., OWEN, D.R.J. (2008) **Computational methods for plasticity: theory and applications**. John Wiley & Sons.

DET NORSKE VERITAS (2011) **Forensic Examination of Deepwater Horizon Blowout Preventer**, Final Report no. EP030842, 3 v.

GURSON, A.L. (1977) **Continuum Theory of ductile rupture by void nucleation and growth - Part I. Yield criteria and flow rules for porous ductile media**. *J. Eng. Mat. Tech.*, 99:2-15.

KACHANOV, Lazar M. (1958) **Rupture time under creep conditions**.

KLEINERMANN, J.-P., PONTHOT, J.-P. (2003) **Parameter identification and shape/process optimization in metal forming simulation**. *Journal of Materials Processing Technology*, pp.521-526.

LEMAITRE, J. (1985) **A continuous damage mechanics model for ductile fracture**. *Journal of Engineering Materials and Technology* - Trans. of the ASME, 107:83–89.

LEMAITRE, J., CHABOCHE, J.L. (1990) **Mechanics of Solid Materials**. Cambridge Univ. Press.

MACHADO, L. Q. (2019) **Extraction of plasticity parameters of metallic materials from spherical indentation tests and fem modelling**. Master thesis/Mechanical Engineering, Universidade de Brasília, DF, 102p.

MACHADO, L. Q., MALCHER, L. (2019) **Isotropic hardening curve characterization by the resultant profile of ball indentation tests**. *Journal of the*

*Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, 41:1-14.

MALCHER, L., MORALES, L.L.D., RODRIGUES, V.A.M., SILVA, V.R.M., ARAUJO, L.M., FERREIRA, G.V., NEVES, R.S. (2020) **Experimental program and numerical assessment for determination of stress triaxiality and J effects on AA6101-T4**, *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, <https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2020.102476>.

MALCHER, L., ANDRADE PIRES, F.M., CÉSAR DE SÁ, J.M.A (2012) **An Assessment of Isotropic Damage Constitutive Models under High and Low Stress Triaxialities**. *International Journal of Plasticity*, pp.81-115.

MALCHER, L. (2011) **Da Mecânica do Dano Contínuo: Uma Evolução do Modelo de Lemaitre para Redução da Dependência do Ponto de Calibração**. Tese de Doutorado em Ciências Mecânicas, Universidade de Brasília, DF, 122p.

MALCHER, L. (2012) **Continuum Modelling and Numerical Simulation of Damage for Ductile Materials**. Ph.D Thesis, Porto: University of Porto.

MALCHER, L., MAMIYA, E.N. (2014) **An Improved Damage Evolution Law Based on Continuum Damage Mechanics and its Dependence on Both Stress Triaxiality and the Third Invariant**. *International Journal of Plasticity*, 56:232-261.

MALCHER, L., REIS, F.J.P., ANDRADE PIRES, F.M., CÉSAR DE SÁ, J.M.A. (2013) **Evaluation of shear mechanisms and influence of the calibration point on the numerical results of the GTN model**. *International Journal of Mechanical Sciences*, 75:407-422.

MALCHER, L., ANDRADE PIRES, F.M., CÉSAR DE SÁ, J.M.A. (2013) **An Extended GTN Model for Ductile Fracture under High and Low Stress Triaxiality**. *International Journal of Plasticity*, 54:193-228.

MALCHER, L., ANDRADE PIRES, F.M., CÉSAR DE SÁ, J.M.A. (2012) **An assessment of isotropic constitutive models for ductile fracture under high and low stress triaxiality**. *International Journal of Plasticity*, 30:81-115.

MISES, R. von, (1913) **Mechanics of solid bodies in the plastically-deformable state**, *Göttingen Nachrichten Math Phys*, 1:582-592.

MORALES, L.L.D. (2020) **Estudo experimental e numérico do comportamento mecânico na fratura da liga AISI 4340**, Tese de Doutorado em Ciências Mecânicas, Universidade de Brasília, DF, 151p.

NAHSHON, K., HUTCHINSON, J.W. (2008) **Modification of Gurson Model for shear failure**, *European Journal of Mechanics*, 1-17.

ROUSSELIER, G., DEVAUX, J.C., MOTTET, G., DEVESA, G. (1989) **A**

**Methodology for Ductile Fracture Analysis Based on Damage Mechanics: An Illustration of a Local Approach of Fracture**, *Nonlinear Fracture Mechanics: volume II Elastic-Plastic Fracture*, ASTM STP 995, Philadelphia, pp.332-354.

TVERGAARD, V., NEEDLEMAN, A. (1984) **Analysis of the cup-cone fracture in a round tensile bar**, *Acta Metallurgica*, 32:157-169.

XUE, L. (2007) **Damage accumulation and fracture initiation in uncracked ductile solids subject to triaxial loading**. *International journal of solids and structures*, 44:5163-5181.