UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

INSTITUTO DE FÍSICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

SOBRE A QUANTIZAÇÃO DO UNIVERSO DE GÖDEL

Josué Junior Gonçalves Macena

Brasília-DF

2020

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

INSTITUTO DE FÍSICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

SOBRE A QUANTIZAÇÃO DO UNIVERSO DE GÖDEL

Josué Junior Gonçalves Macena

Orientador: Prof. Dr. Sérgio Costa Ulhoa

Brasília-DF

2020

"*Quod est inferius est sicut quod est superius, et quod est superius est sicut quod est inferius, ad perpetranda miracula rei unius.*"

Hermes Trimegisto

"*Ph'nglui mglw'nafh Cthulhu R'lyeh wgah'nagl fhtagn*"

H.P. Lovrecraft

Agradecimentos

Agradeço primeiramente minha família, por ter me apoiado incondicionalmente e ter mudado drasticamente suas vidas apenas para me acompanhar nesse importante passo.

Em especial minha esposa, Keth, a quem dedico meu amor e minhas conquistas. À minha mãe, Carme, pois sem ela não estaria nem perto de ser o homem que sou, que eu possa trazer orgulho ainda mais.

Ao professor Sérgio, pela paciência e conselhos, por ter me guiado nessa jornada incrível e por ser um orientador sem igual, quase um pai, que me recebeu de braços abertos e acreditou no meu potencial.

Agradeço também à cada cidadão e cidadã do nosso país. Minha ciência é de vocês, para vocês e com vocês. Que um dia o proletariado se ponha sob o sol e dias felizes virão para todos.

E por último, gostaria de agradecer ao CNPq pelo aporte financeiro, pelo qual seria impossível a mim fazer pesquisa séria, de qualidade e comprometida.

Resumo

O Teleparalelismo Equivalente à Relatividade Geral é uma descrição alternativa à Relatividade Geral, baseado no campo de tétradas como observadores fundamentais, que substitui o conceito de Curvatura pela Torção, agindo de maneira análoga a uma equação de força. A partir disto é possível construir uma versão regularizada da densidade de energia e de uma hamiltoniana, da qual será quantizada pelo procedimento de Weyl, um formalismo robusto que permite transformar quantidades clássicas em possíveis observáveis e respectivos operadores quânticos, num espaço de fase quântico. O modelo cosmológico em questão é o de Gödel, modificado conforme Obukhov para comportar além da rotação, também expansão. Em seus trabalhos Obukhov vai demonstrar que é possível fugir dos problemas de causalidade inerentes aos modelos com rotação, impondo certos parâmetros, a serem mensurados, que evitam os problemas das CTC's (Closed Time-like Curves). Encontrar uma equação de Schrödinger deste modelo, através da quantização da energia gravitacional e encontrar uma possível solução é o objetivo principal, e por fim discutir as possibilidades que trás tal solução e perspectivas futuras.

Palavras Chaves: Gravitação, TERG, Cosmologia, Equação de Schrödinger, energia gravitacional, Universo Tipo-Gödel.

Brasília - DF

2020

Abstract

Teleparallelism Equivalent to General Relativity is an alternative description to General Relativity, based on the field of tetradas as fundamental observers, which replaces the concept of Curvature by Torsion, acting in a manner similar to an equation of force. From this it is possible to build a regularized version of the energy density and a Hamiltonian, which will be quantized by the Weyl procedure, a robust formalism that allows transforming classical quantities into possible observables and respective quantum operators, in a quantum phase space. The cosmological model in question is Gödel, modified according to Obukhov to be able to support not only rotation but also expansion. In his work, Obukhov will demonstrate that it is possible to escape from the problems of causality inherent to models with rotation, imposing certain parameters, to be measured, that avoid the problems of CTC's (Closed Time-like Curves). Finding a Schrödinger equation for this model, through the quantization of gravitational energy and finding a possible solution is the main objective, and finally discuss the possibilities that this solution brings and future perspectives.

Keywords: Gravitation, TEGR, Cosmology, Schrödinger Equation, gravitational energy, Type-Gödel Universe.

Brasília - DF

2020

Notações e Abreviaturas

Notações: as unidades G (constante da gravitação universal) e c (velocidade da luz no espaço vazio) são fixadas e escolhidas no sistema natural de unidade tal que $G = c = 1$. A assinatura da métrica adotada será do tipo $diag = (-, +, +, +)$. A constante de Planck $\hbar$ continua com seu valor explicitado para melhor identificar quando estamos trabalhando com Mecânica Quântica.

- **RG** $\Rightarrow$ Relatividade Geral e Teoria Geral da Relatividade.
- **TERG** $\Rightarrow$ Teleparalelismo Equivalente à Relatividade Geral.
- **CTC** $\Rightarrow$ Closed Time-like Curves (Curvas tipo-tempo fechadas em traduzação direta).
- **MQ** $\Rightarrow$ Mecânica Quântica.

Sumário

Lista de Tabelas

Capítulo 1

Introdução

A construção de uma cosmologia quântica é um avanço significativo das ciências naturais. Ao desenvolver a teoria geral da relatividade, Einstein abriu um leque de infindáveis possibilidades para se estudar todas os sistemas físicos onde a gravidade tem um importante papel, e assim desenvolver a era da cosmologia moderna, alimentado com cada vez mais dados e entendido à luz desta robusta teoria. Em paralelo se deslancha a teoria quântica e a descrição da matéria e suas interações nos níveis mais básicos, e nas menores escalas; qualquer que seja o paradigma adotado na descrição dos fenômenos da realidade, ele com certeza deve partir da própria mecânica quântica.

Unir ambas as áreas mostra-se uma tarefa hercúlea. Questões como renormalização da teoria quântica da gravitação, bósons associados a gravitação em nível quântico, problema de hierarquia das interações fundamentais, determinação do que é energia e matéria escura, até hoje ainda estão em aberto e constituem um sério desafio para um programa completo de uma versão quântica para a interação gravitacional. O trabalho que apresentamos aqui é apenas mais um *"pequeno passo"* para o desenvolvimento da teoria. Em tal tentativa de reproduzir uma cosmologia quântica consistente, não é possível conciliar diretamente os pilares da RG com Mecânica Quântica, pois é quantizar diretamente a RG [8] se mostra um trabalho bastante dificultoso. Diante deste problema, a maneira que este trabalho encontrou de contornar tal dificuldade é em usar um modelo alternativo, mas completamente equivalente à RG, baseado no Teleparalelismo absoluto, chamado de Teleparalelismo Equivalente à Relatividade Geral, ou simplesmente TERG. Com tal proposta é possível reconstruir todos os resultados obtidos pela RG padrão e ainda adicionar novas informações ao sistema como energia, momento angular e linear gravitacional.

No TERG a noção de interação gravitacional é caracterizada por meio da noção do tensor de Torção [32, 54] e se abandona o tensor de Curvatura de Riemann como maneira de determinar a dinâmica do campo gravitacional. Assim há uma série de novas interpretações para o fenômeno da gravidade. É Maluf [32] que vai de encontro a uma expressão regularizada para a hamiltoniana gravitacional, sustentada completamente no princípio de gauge e em princípios relativísticos fortes.

Com o desenvolvimento então de uma gravitação relativística e por consequência uma cosmologia relativística, poderia o universo estar em rotação? Há inúmeros dados coletados do nosso universo que apontam para a sua expansão uniforme, entretanto poucas se atrevem a questionar se estes mesmos dados não indicariam uma possível rotação do universo como um todo. Se a Terra gira em torno do próprio eixo, a Lua, em torno da Terra, a Terra em torno do Sol, o Sol em torno do centro da Via Láctea, e até mesmo é possível pensar no mundo atômico e subatômico como possuindo momento angular (não exatamente uma rotação mas que possui correlação), por que não imaginar o Universo inteiro, como um todo, estando em rotação? Não poderia um modelo possuindo ambas, rotação e expansão, explicar a expansão acelerada do universo (talvez uma espécie de potencial centrífugo empurrando as galáxias para longe umas das outras)?

Será Gamow [20] o primeiro a pensar num possível Universo em rotação, entretanto é Gödel [21] que irá mostrar que há uma solução exata das equações de campo de Einstein que possui solução com rotação. As equações encontradas por Gödel apresentavam sérios problemas, entre os quais a violação da causalidade do espaço-tempo. Serão então formulados outros modelos que emulam e tentam contornar estas dificuldades da solução apresentada por Gödel. Entre estas ressaltaremos a generalização não-estacionária proposto por Obukhov [40], que apresenta expansão, além de rotação. Essa generalização é conhecida como modelo de Gödel-Obukhov e não estaria em conflito com qualquer observação cosmológica atual. Assim podemos determinar, usando TERG, características como energia gravitacional, momento linear e momento angular gravitacional.

É aqui que podemos observar o desenvolvimento de um método que permita quantizar em observáveis físicos diretamente e de uma maneira simples. Teremos um operador associado a cada quantidade e a partir disto determinar a versão quântica do sistema e seu comportamento. Os primeiros passos para uma verdadeira gravitação/cosmologia quântica.

No segundo capítulo trataremos das propriedades da gravitação e sua relação com a relatividade de maneira que sejam consistentes entre si, mostrando suas bases e alguns resultados bem conhecidos da literatura.

No capítulo terceiro, as bases do próprio Teleparalelismo em si, da sua relação com a RG, e a construção do tensor energia-momento gravitacional a partir das próprias equações de campo. No quarto capítulo, chegamos finalmente nos princípios envolvendo cosmologia e a solução proposta para o Universo de Gödel-Obukhov, calculando a densidade de energia gravitacional associada à métrica.

Por último apresentamos a quantização da densidade de energia encontrada, através do método de quantização de Weyl no modo como realizado por McCoy, e assim expressar um operador hamiltoniano que possa ser usada numa equação do tipo Schrödinger, e por fim encontrar as autofunções associadas. E então apresentamos a conclusão e possíveis discussões sobre os resultados obtidos.

Capítulo 2

Gravitação e Relatividade

A base atual de entendimento do Cosmos, a estrutura do universo como um todo, e da astrofísica está situada nos alicerces da Gravitação Relativística [58, 16, 60, 7, 8]. Para isso se faz necessário entender o contexto da aplicação e extensão da Teoria da Relatividade Especial para fenômenos gravitacionais. A construção de uma teoria que leve em conta a velocidade limite de interação entre sistemas físicos, a *velocidade da luz*, e a interação gravitacional foi realizada por A. Einstein, culminando na chamada Teoria Geral da Relatividade. Tal teoria prevê uma nova gama de fenômenos envolvendo a força gravitacional newtoniana não antes previstas pela mesma, estendendo nossa compreensão sobre o universo e seu comportamento.

A RG será então multi-aplicada em qualquer situação onde precisamos estabelecer a interação gravitacional entre um conjunto de corpos, um sistema físico, e por isso tem uma ampla aplicação em Astrofísica Estelar, formação e evolução de nebulosas, dinâmica de sistemas solares, modelar a evolução cósmica do universo e etc. Seu sucesso é tal que permitiu a previsão de *Buracos Negros*, entender a formação mais detalhadamente de um sistema solar e descrever a estrutura completa do Universo pela Cosmologia. Vamos então estabelecer os fundamentos e postulados que constroem a RG.

2.2 Fundamentos da Teoria Geral da Relatividade

A RG terá como base alguns postulados fundamentais para a construção da mesma:

- Gravidade é geometria. A força gravitacional é substituída pelo conceito de entidade geométrica no espaço-tempo quadridimensional, chamada de *Curvatura*;
- O tensor energia-momento é a fonte da gravidade, logo há uma relação entre *Curvatura* e energia-massa do sistema;
- Partículas descrevem trajetórias chamadas de *geodésicas*, que se apresentam como "linhas retas" numa região curvada, quando livres de forças externas de qualquer natureza.

Com tais conceitos é possível construir as equações dinâmicas que regem a interação gravitacional, bem como a própria forma com que ele é produzido e *alimentado* [16]. A ideia que nasce na Relatividade Restrita de podermos escrever as **leis da física** de maneira covariante, ou seja, invariantes em forma, para todos os observadores inerciais, tendo a velocidade da luz c como parâmetro universal [30], é estendida ao fenômenos envolvendo a gravitação, de tal forma que agora os referenciais em queda livre não girantes são considerados também inerciais. Einstein então introduz o conceito de *Princípio da Covariância Geral* [16], que em linhas gerais dita:

As leis da física devem ser escritas em forma tensorial.

Assim como descrevemos as leis do eletromagnetismo através de uma forma compacta covariante, válido para qualquer referencial inercial, desejamos fazer o mesmo com a gravidade. Entretanto a transição entre a descrição da gravidade, dada pela Lei de Newton, e sua forma tensorial requer o sacrifício de abandonar a ideia de um espaço-tempo de Minkowski, palco da Relatividade Restrita, plano, infinito e ilimitado, por um espaço-tempo dinâmico, curvado, que se modifica na presença de matéria.

Outro princípio básico adotado por Einstein que permitiu estender a relatividade ao problema gravitacional é o *Princípio da Equivalência* [7] que diz:

Todos os laboratórios em queda-livre, não girantes, são equivalentes no que diz respeito às leis da física.

Evidentemente, os laboratórios em queda livre são os referenciais inerciais locais de Lorentz, e as leis da física são as leis formuladas relativisticamente.

Para introduzir esses novos conceitos, base fundamental da RG, precisamos expandir nosso formalismo matemático. Assim trocamos o tensor métrico plano do espaço de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ por um mais geral $g_{\mu\nu}$, que em RG fará o papel principal na dinâmica da gravidade, chamado de *Tensor Métrico* . Tal tensor é introduzido com a necessidade de se medir distâncias infinitesimais entre pontos distintos de uma dada variedade, assim ele é definido de forma geral como [16]

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\left(x\right) dx^{\mu} dx^{\nu}. \tag{2.1}$$

De uma maneira mais formal definamos a dinâmica gravitacional como [57]:

- **Definição 1:** O espaço-tempo é descrito por uma variedade diferenciável Riemanniana, ou pseudo-Riemanniana, de 4 dimensões, num espaço métrico de Hausdorff homeomorfo ao $\Re^4$. A coleção de todos os pontos nessa variedade é chamado de *Universo.*

- **Definição 2:** Uma variedade M real, n-dimensional, C^{∞} é um conjunto, junto com uma coleção de subconjuntos O_α tal que:

  - Para todo $p \in M$ se encontra pelo menos um O_α, uma vez que o mesmo cobre M;
  - Para todo α existe $\Psi_\alpha : O_\alpha \to U_\alpha$, bijetora, em que U_α é um aberto em $\Re^n$;
  - Se quaisquer dois conjuntos O_α e O_β se sobrepõem, $O_\alpha \bigcap O_\beta \neq \emptyset$, existe $f_\beta \circ f_\alpha^{-1} : f_\alpha\left[O_\alpha \bigcap O_\beta\right] \to f_\beta\left[O_\alpha \bigcap O_\beta\right]$ tal que $f_\alpha\left[O_\alpha \bigcap O_\beta\right]$ e $f_\beta\left[O_\alpha \bigcap O_\beta\right]$ sejam aberto em $\Re^n$ e que $f_\beta \circ f_\alpha^{-1}$ sejam C^{∞}. Os mapeamentos $\{f_\alpha\}$ são chamados de *coordenadas.*

- **Definição 3:** Um *Tensor* é um mapa multilinear cobrindo M, tal que se define em $p \in M$ como

$$T : \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{\text{p-vezes}} \times \underbrace{V \times \cdots \times V}_{\text{q-vezes}} \to \Re$$

Dito assim, temos um tensor covariante p vezes e contravariante q vezes. Um tensor é definido de tal maneira que suas componentes seguem a lei de transformação

$$T^{\mu_1'\mu_2'\cdots\mu_p'}_{\nu_1'\nu_2'\cdots\nu_q'} = \frac{\partial x^{\mu_1'}}{\partial x^{\mu_1}}\frac{\partial x^{\mu_2'}}{\partial x^{\mu_2}}\cdots\frac{\partial x^{\mu_p'}}{\partial x^{\mu_p}}\cdots\frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial x^{\nu_1'}}\frac{\partial x^{\nu_2}}{\partial x^{\nu_2'}}\cdots\frac{\partial x^{\nu_q}}{\partial x^{\nu_q'}}T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_p}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_q}.$$

Assim para um dado referencial existe um número infinito de coordenadas, no qual a quantidade física escrita na forma tensorial deve ser invariante por tais transformações. Assim uma lei física é dita *covariante* (ou seja, invariante em forma) sobre transformação de coordenadas.

Com a definição de um tensor T, podemos construir a ideia de medidas físicas no espaço e no tempo, assim *comprimentos*, *áreas* e *volume* em uma variedade M arbitrária qualquer de dimensão n. Assim há a necessidade de derivar e integrar em tais espaços, e por isso devemos definir de maneira inequívoca como se pode fazer isso nos mesmos. Para isso comecemos tomando o campo escalar Φ que se transforma como

$$\Phi(\vec{x'}, t') = \Phi\left(\vec{x}, t\right)$$

e portanto a derivada em uma variedade qualquer será

$$\partial_{\mu'}\Phi(x^{\nu'}) = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x^{\mu'}}\partial_\lambda\Phi(x^\nu)$$

que é exatamente a lei de transformação de um tensor. Entretanto quando inserimos índices tensoriais no nosso campo, ou de outro modo, queremos derivar um campo tensorial, a derivada simples já não se transforma como um tensor de maneira geral. Então estabelecemos o conceito de *derivada covariante* de tal maneira que

$$\nabla_\mu T^\alpha{}_\beta = \partial_\mu T^\alpha{}_\beta + \Gamma^\alpha_{\mu\lambda} T^\lambda{}_\beta - \Gamma^\lambda_{\mu\beta} T^\alpha{}_\lambda$$

onde $\mathring{\Gamma}^\theta_{\rho\sigma}$ são chamados de símbolos de Christoffel, definidos como

$$\mathring{\Gamma}^\theta_{\rho\sigma} = \frac{1}{2} g^{\theta\lambda} \left(\partial_\rho g_{\lambda\sigma} + \partial_\sigma g_{\lambda\rho} - \partial_\lambda g_{\rho\sigma} \right). \tag{2.2}$$

A partir disso apresenta-se a construção das equações básicas da RG, a saber que

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \mathring{\Gamma}^\mu_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} = 0. \tag{2.3}$$

Tal equação, chamada **Equação da Geodésica** [16, 57, 15, 7], representa o deslocamento de uma massa de prova se movendo única e exclusivamente na presença de um campo gravitacional não-nulo. Essas equações, de caráter cinemático, prevê como uma partícula se move no espaço-tempo sob um dado sistema referencial e tomando um determinado sistema de coordenadas. Assim fica garantido a necessidade de covariância. Se definirmos a quadrivelocidade local como

$$v^\mu = \frac{dx^\mu}{ds}$$

então a equação da geodésica pode ser reescrita de forma mais compacta, usando auxílio da derivada covariante

$$v^\mu \nabla_\mu v^\nu = 0. \tag{2.4}$$

Dessa forma estamos substituindo o *Princípio do Movimento Retilíneo Uniforme*, pelo princípio do movimento geodésico, que diz

> *O movimento dos corpos no espaço-tempo serão dadas por geodésicas, ou seja, a menor distância entres dois pontos num espaço-tempo curvado, quando há ausência de forças.*

Isto significa que gravidade é reinterpretada como um efeito geométrico puro e que tal efeito, manifesto por uma curvatura que veremos mais adiante, faz os corpos desviarem do seu caminho natural (velocidade constante e linha reta na ausência de outras forças quaisquer) da Relatividade Restrita, para realizarem curvas que aparentam ser desvios naturais graças a uma força. Resumidamente, não há mais força gravitacional, mas gravidade na forma de curvatura geométrica que desviam os corpos do caminho retilíneo que seria na ausência da mesma.

Uma vez que temos uma equação cinemática de descrição do movimento, falta entender a parte dinâmica da geração do próprio campo gravitacional. Para isso introduzimos o tensor de Curvatura **R**, que é construindo percebendo-se que as derivadas covariantes de um tensor qualquer em geral não comutam, e que tal propriedade é uma "medida" direta de tal curvatura, da seguinte maneira

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]\, V^\alpha = R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} V^\beta$$

onde $[\nabla_\mu, \nabla_\nu]$ é um comutador [7, 16]. Em termos de componentes pode ser escrito como [57, 7, 16, 19, 60]

$$R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} = \partial_\mu \mathring{\Gamma}^\alpha_{\beta\nu} - \partial_\nu \mathring{\Gamma}^\alpha_{\beta\mu} + \mathring{\Gamma}^\lambda_{\beta\nu} \mathring{\Gamma}^\alpha_{\lambda\mu} - \mathring{\Gamma}^\lambda_{\beta\mu} \mathring{\Gamma}^\alpha_{\lambda\nu}. \tag{2.5}$$

Tal tensor obedece a 2ª Identidade de Bianchi

$$\nabla_\alpha R_{\beta\lambda\mu\nu} + \nabla_\mu R_{\beta\lambda\nu\alpha} + \nabla_\nu R_{\beta\lambda\alpha\mu} = 0.$$

A partir de $R^\alpha{}_{\beta\mu\nu}$ podemos construir outros tensores (tomando as suas contrações) que são o tensor de Ricci e o escalar de Ricci, respectivamente

$$R^\alpha{}_{\beta\alpha\nu} = R_{\beta\nu} \quad \text{e} \quad R^\mu{}_\mu = R$$

usando isso e a 2ª Identidade de Bianchi, podemos demonstrar que [15]

$$\nabla_\beta \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) = 0 \tag{2.6}$$

este resultado então é chamado de Tensor de Einstein

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R.$$

Uma vez que necessitamos ligar isto a fonte do campo gravitacional (uma massa), então devemos utilizar sua generalização covariante, o tensor energia-momento $T_{\mu\nu}$, de tal maneira que $G_{\mu\nu}$ se mostre proporcional e com a garantia de derivada covariante nula. Disso podemos concluir que [27, 30]

$$G_{\mu\nu} = kT_{\mu\nu} \tag{2.7}$$

onde k é uma constante que deve ser ajustada conforme o sistema de unidades e encontrada fazendo o limite da gravitação newtoniana.

2.3 Ação de Hilbert-Einstein

Einstein chegou a eq.(2.7) de forma eurística, baseado na ideia da *covariância geral* que generalizasse o força gravitacional newtoniana. Entretanto, aqui derivaremos a partir de um princípio variacional de uma *Ação* S. A forma mais simples que podemos construir uma Ação para o campo gravitacional é usando o *Escalar de Ricci* $R = R^{\mu}{}_{\mu}$ (Princípio do acoplamento mínimo). Como estamos trabalhando no espaço-tempo curvado, precisamos que o funcional da Ação seja invariante por transformação de coordenadas, assim chamamos de *Ação de Hilbert-Einstein* [16, 7, 30]

$$S_{HE} = \int d^4x \sqrt{-g} R$$

o sinal "$-$" foi introduzido no radicando, devido a assinatura da métrica. Realizando uma variação com relação ao tensor métrico $g^{\mu\nu}$ e exigindo que o mesmo se anule, temos

$$\delta_g S_{HE} = \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} + \int d^4x \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + \int d^4x g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \delta \sqrt{-g}. \tag{2.8}$$

Realizando as devidas variações em cada parcela e deixando todos os termos em função de $\delta g^{\mu\nu}$, então pode-se escrever queremos

$$\delta_g S_{HE} = \int d^4x\sqrt{-g}(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R)\delta g^{\mu\nu} \tag{2.9}$$

uma vez que $\delta_g S_{HE} = 0$, a única forma disso ser nulo para toda a variação $\delta g^{\mu\nu}$ será se

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0$$

ou seja, podemos definir uma densidade de lagrangiana $\mathcal{L}$ tal que

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g}R$$

que se refere apenas a gravitação pura, sem envolver campos de matéria. Caso insiramos a Ação da matéria separadamente e variando também com relação a $g^{\mu\nu}$, então temos as equações completas de campo de Einstein para a geração de um campo gravitacional.

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = kT_{\mu\nu} \tag{2.10}$$

onde define-se o tensor energia-momento da matéria como [38]

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_m}{\delta g^{\mu\nu}}.$$

Note, que podemos tomar a traço da equação de campo e inverter a relação para obter

$$R_{\mu\nu} = k(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T) \tag{2.11}$$

sendo $T = T^{\mu}_{\ \mu}$. Tal equação é muito útil no uso da chamada Equação de Landau-Raychaudhuri [13], que envolve as grandezas de *expansão, cisalhamento, aceleração* e *rotação* do fluido cosmológico, que usaremos depois para caracterizar nosso modelo de universo.

2.4 Constante cosmológica

Uma das características fundamentais da RG é que se baseia na relação entre a derivada covariante e o tensor métrico $g_{\mu\nu}$

$$\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = 0.$$

Quando isto acontece dizemos que a conexão Γ é compatível com a métrica, e como consequência chegamos em (2.2). Em vista disso podemos adicionar um termo nas equações de Einstein na forma

$$R_{\mu\nu} = k(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T + \Lambda g_{\mu\nu}) \tag{2.12}$$

onde Λ é chamada de *constante cosmológica*. A mesma foi introduzida por Einstein no contexto do seu universo estático, servindo como fator de repulsão, enquanto o conteúdo material do universo se atrairia, gerando assim um equilíbrio entre os dois. Assim podemos separar a densidade de lagrangiana em três componentes independentes

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_g + \mathcal{L}_M + \mathcal{L}_\Lambda$$

com $\mathcal{L}_\Lambda = -2\Lambda$.

O modelo do Universo de Einstein, contudo, fracassou com a descoberta da expansão do universo, advinda da interpretação do *redshift* cosmológico dada pela Lei de Hubble. Assim Λ entrará e sairá dos modelos cosmológicos diversos que se criam, ora justificado por não ser necessária num contexto de expansão, ora justificado por ser necessário como forma de energia escura do modelo FLRW [18].

2.5 Aplicações e Resultados Experimentais em Relatividade Geral

Ao se construir o aparato matemático da RG, esperamos que ela possa ter resultados que sejam compatíveis com a gravitação já conhecida (órbitas planetárias, por exemplo), que consiga explicar experimentos ainda sem uma teoria adequada e que produza novos resultados testáveis.

Assim, por exemplo, uma das previsões é a existência de *Buracos Negros*, resultado do colapso gravitacional de certos tipos de estrela, do desvio da luz na presença de um objeto massivo e o periélio de mercúrio, todos no âmbito da Astrofísica. Vamos então descrever alguns desses resultados.

Corpo Esférico Estático

O primeiro resultado exato das Equações de Campo de Einstein foi dado por Schwarzschild [45, 7, 57, 58], que descreveu o modelo de um corpo de massa M, esfericamente simétrico de raio R e completamente estático. Tal modelo, descrito por uma métrica que passou a ser conhecida como *métrica de Schwarzschild*

$$ds^2 = -A(r)dt^2 + B(r)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \tag{2.13}$$

cuja solução descreveria os valores das funções $A(r)$ e $B(r)$, para o vácuo, ou seja, a forma da gravidade externa a um corpo com $r > R$. O tensor métrico se escreverá então em coordenadas esféricas como

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -A(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2\sin^2(\theta) \end{pmatrix}.$$

O trabalho então será computar os símbolos de Christoffel (2.2) e encontrar o tensor de curvatura de Riemann (2.5). O cálculo completo é bastante longo, e aqui resumiremos a solução encontrada (para mais detalhes pode-se consultar [7, 16])

$$A(r) = B^{-1}(r) = 1 - \frac{2M}{r}.$$

Tal resultado apresenta uma notável característica: ela não depende do raio R característico do corpo, mas apenas da sua massa M. Esse resultado descreve então uma estrela, planeta ou astro qualquer, desde que estes tenham uma rotação lenta o suficiente para que seja desprezada (caso não seja possível teríamos a métrica de Kerr [7]). O caso gravitacional mais extremo, um *buraco negro* serve como consequência do colapso gravitacional a partir desta métrica. Existirá então um raio característico chamado *Raio de Schwarzschild*, $r_s = 2M$, que determina uma foliação do espaço-tempo, se $R > r_s$ temos estrelas e planetas (o sol por exemplo tem seu raio de schwarzschild de apenas 3 km, contra o seu raio real é de aproximadamente $7,0 \cdot 10^5$ km), se, por outro lado, $R \leq r_s$ temos um caso extremo de colapso gravitacional caracterizado por um buraco negro. Tal métrica apresenta duas singularidades (a métrica não é bem definida) para o valor de $r = 0$ e $r = r_s$, uma vez que as funções A e B divergem ou se anulam nesses pontos. Essa será então a principal característica de um Buraco Negro de maneira geral, o colapso gravitacional de uma estrela massiva suficiente ou ainda através de gases e poeira irá culminar irremediavelmente na presença de singularidades no seu interior e a impossibilidade de se escapar dele. Essa constatação é simples, se notarmos que as coordenadas r e t, para um dado valor de r, tornam a criar um outro tipo de singularidade, essa entretanto removível (bastando apenas uma mudança no sistema de coordenadas local), chamada Horizonte de Eventos, no qual nenhuma partícula pode retornar depois de atravessar. A distância entre o centro do Buraco Negro até esse Horizonte é justamente o chamado *Raio de Schwarzschild* [7, 30], que vai depender exclusivamente da massa do astro. Ao longo do tempo, com a evolução científica e tecnológica vários resultados astronômicos sugerem a detecção de diversos Buracos Negros indicando que tais astros podem realmente existir. Outros tipos também foram desenvolvidos envolvendo as principais características como *carga elétrica, massa* e *rotação.*

Tabela 2.1: Tipos de buracos negros

TIPO	MASSA	CARGA	ROTAÇÃO
Schwarzschild	sim	não	não
Kerr	sim	não	sim
Reissner-Nordström	sim	sim	não
Kerr-Newman	sim	sim	sim

Ainda hoje há procura por buracos negros espalhados pelos cosmos, e acredita-se que toda galáxia deve ter um em seu centro.

2.5.1 Deflexão da luz por efeito gravitacional

Uma das consequências da nova teoria da gravitação de Einstein é que a a gravidade dos corpos é capaz de desviar a luz de seu caminho retilíneo. Essa descoberta é responsável por descrever as chamadas *lentes gravitacionais*, que permitem a análise de objetos distantes através do fluido que preenche o universo.

Mesmo na antiga teoria corpuscular da luz, predita por Newton, já se era capaz de realizar este tipo de cálculo: $\Theta = 2M/R$, onde Θ é o ângulo de desvio do caminho em linha reta original,M é a massa do Sol e R, o seu raio. Von Soldner, em 1801 [6], previu um desvio de $0,87''$ (oitenta e sete segundos de arco) para um feixe luminoso defletido pelo Sol quando o mesmo passa próximo a sua superfície, entretanto o valor atual é pelo menos 2 vezes este valor. Einstein, usando RG então, faz a previsão desse desvio como sendo [30]

$$\Theta = \frac{4M}{R}$$

resultando em $1,75''$, o dobro do previsto teórico pela teoria newtoniana da luz e da gravitação. Einstein vai interpretar este resultado como sendo uma parte devido a gravitação newtoniana, e a outra parte devido as suas correções relativísticas. Esse foi o principal resultado experimental usado a favor da RG [6], completando assim com sucesso e uma boa acurácia a verificação experimental da RG.

2.5.2 Efeito Doppler Gravitacional

Um efeito comum na propagação de ondas na mecânica clássica é o chamado "Efeito Doppler", que registra a mudança de frequência da um onda emitida devido ao movimento relativo entre dois referenciais inerciais, tomando um referencial como sendo o emissor e outro como o receptor [25]. Um análogo deste fenômeno acontece devido a presença da gravidade atuante.

Para entender melhor este fenômeno, tomaremos, por simplicidade, a métrica de

Schwarzschild (2.13) e tomar dois referenciais espacialmente estacionários, um sendo o **Receptor** e outro o **Emissor**. Imaginemos então o emissor gerando uma onda luminosa de comprimento de onda λ_E no ponto do espaço-tempo r_E, ϕ_E e θ_E durante um intervalo de tempo próprio $d\tau_E$, que chega no receptor no ponto do espaço-tempo r_R, ϕ_R e θ_R, durante o intervalo de tempo próprio $d\tau_R$. Consideremos então que $dr = d\phi = d\theta = 0$ para ambos os observadores (portanto espacialmente em repouso em relação a distribuição de massa M, que gera a métrica), e neste caso $ds^2 = -d\tau^2$ (intervalo tipo-tempo), segue que

$$d\tau_E^2 = \left(1 - \frac{2M}{r_E}\right) dt^2$$

e

$$d\tau_R^2 = \left(1 - \frac{2M}{r_R}\right) dt^2.$$

Por outro lado, os comprimentos de onda no emissor e no receptor são definidos por $\lambda_E = cd\tau_E$ e $\lambda_R = cd\tau_R$, e portanto

$$\frac{\lambda_E}{\lambda_R} = \frac{d\tau_E}{d\tau_R} = \frac{\left(1 - \frac{2M}{r_E}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(1 - \frac{2M}{r_R}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

como neste contexto a relação de dispersão da luz continua sendo $\lambda\nu = c$, podemos reescrever em função das frequências de emissão e recepção

$$\frac{\nu_R}{\nu_E} = \frac{\left(1 - \frac{2M}{r_E}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(1 - \frac{2M}{r_R}\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Claramente as frequências só serão idênticas se $r_R = r_E$. Lembrando que os observadores são espacialmente estacionários, temos então uma mudança de frequência única e exclusivamente devido a atuação da gravidade em diferentes pontos.

Outros exemplos estão bem distribuídos pela literatura, lentes gravitacionais, ondas gravitacionais, arraste de referenciais (Efeito Lense-Thirring), precessão do periélio de Mercúrio, etc [30, 7, 57, 16].

Capítulo 3

Teleparalelismo Equivalente à Relatividade Geral

Uma condição fundamental para analisar a dinâmica de uma teoria física é observar como esta é capaz de construir certas leis de conservação, ou seja, ser capaz de detectar grandezas físicas que se mantém constantes conforme essa dinâmica evolui quando um vínculo é quebrado ou imposto. Assim, uma forma matemática de firmar tais invariantes através da equação tensorial que é descrita por algum tensor T [7, 5]

$$\partial_\mu T^{\mu\cdots\nu} = 0.$$

Essa equação deve representar, especificamente, a conservação de uma "carga". Se o tensor acima representar a energia-momento, por exemplo, então a equação se refere a lei da conservação local da energia e do fluxo de momento. Entretanto, elas estão definidas por uma derivada comum, e assim não respeita o princípio da covariância geral.

Uma maneira de manter a interpretação da conservação de energia, seria usar o acoplamento mínimo e reescrever como [30]

$$\nabla_\mu T^{\mu\cdots\nu} = 0$$

isto porém não está formalizado de acordo com o *Teorema de Noether* [55], onde a conservação das quantidades estão associadas a derivadas simples. Assim, para o caso de um tensor do tipo $T^{\mu\nu}$, separamos essa derivada como

$$\partial_\mu \left(T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu} \right) = 0$$

onde temos que

$$\partial_\mu t^{\mu\nu} = \mathring{\Gamma}^{\mu}_{\mu\alpha} T^{\alpha\nu} + \mathring{\Gamma}^{\nu}_{\mu\alpha} T^{\mu\alpha}.$$

Procura-se então o tensor $t^{\mu\nu}$ que possa fazer esse papel, entretanto vários autores conseguiram no máximo pseudo-tensores, escolhidos usando alguma particularidade necessária para resolver um problema em específico. Foi Møller [35] que mostra que é impossível anular o campo gravitacional por transformações de coordenadas, ou seja, a ideia de um pseudo-tensor torna impraticável a ideia de uma energia gravitacional independente das coordenadas adotadas. Uma nova alternativa vem se mostrando promissora (apesar de datar de meados da década de 1930) é o *Teleparalelismo Equivalente a Relatividade Geral*, iniciada por Einstein numa tentativa de unir gravitação e eletromagnetismo (que acabou não tendo um resultado adequado por não haver uma justificativa adequada para os coeficientes da lagrangiana formada).

O paralelismo absoluto (ou Teleparalelismo) então é uma descrição alternativa à RG, usando uma descrição geométrica do campo gravitacional através de tétradas definidas como base do espaço-tempo local. As tétradas serão então um conjunto de 4 vetores linearmente independentes, que substituem o tensor métrico no papel de agente da gravidade. A descrição de Møller [35] permite a criação de um expressão para a energia e o momento do campo gravitacional de maneira local, superando a problema da localização da energia gravitacional. A forma com que trabalhou apresentava invariância por transformações de Lorentz globais $SO(1,3)$ e permitiu que fosse criado uma versão lagrangiana da teoria, baseado em tais tétradas. É Y. M. Cho [9] que mostra que a lagrangiana do Teleparalelismo é equivalente à de Hilbert-Einstein (2.3), em 1967 Hayashi e Nakano desenvolvem uma teoria de gauge para o grupo de translações do espaço-tempo, e em 1978 Hayashi e Shirafuji [26] unem as duas ideias (teoria de calibre das translações e teleparalelismo) e chamam de "*New General Relativity*". Temos a partir disso então que, do ponto de vista observacional, ambas as teorias predizem o mesmo resultado, ainda que com ligeiras interpretações diferentes. A maior vantagem, entretanto, é que é possível construir um verdadeiro tensor energia-momento para a gravidade. É Maluf em [32] que formula uma versão Hamiltoniana do Teleparalelismo, obtendo uma expressão regularizada para a densidade de energia e momento angular, e é neste contexto que surge então a expressão TERG (Teleparalelismo Equivalente à Relatividade Geral).

No desenvolvimento deste capítulo então será mostrado a forma do TERG através dos campos de tétradas de uma maneira formal.

3.1 O campo de tétradas

Iniciaremos então introduzindo o conceito de campo de tétradas (ou vierbein), um conjunto de quatro vetores linearmente independentes que servem como uma base local para o espaço-tempo designado. Dado o conjunto de bases $\left\{\hat{e}_{(\mu)}\right\}$, fixados no espaço-tempo, podemos construir um conjunto de referenciais (não necessariamente inerciais), tais que para cada ponto p associamos um conjunto de tétradas relacionando o espaço tangente T_p considerado minkowskiano, ou seja, plano [44, 42].

$$\hat{e}_{(\mu)} = e^a{}_\mu \hat{e}_{(a)}$$

que obedecem a relação

$$g\left(\hat{e}_{(a)}, \hat{e}_{(b)}\right) = \eta_{ab}$$

onde os índices a, b, $c\ldots$, são índices do espaço tangente plano. As quantidades $e^a{}_\mu$ são matrizes 4×4 invertíveis que estão associadas com a métrica do espaço-tempo físico e do espaço tangente pela relação acima:

$$g_{\mu\nu} e_a{}^\mu e_b{}^\nu = \eta_{ab}.$$

Da ortonormalidade de $g_{\mu\nu}$ e η_{ab} deduz-se as seguintes relações para as tétradas

$$e^{a}{}_{\mu} e_{a}{}^{\nu} = \delta^{\nu}_{\mu} \quad \text{e} \quad e^{a}{}_{\mu} e_{b}{}^{\mu} = \delta^{b}_{a}$$

e usando isso podemos inverter e obter a métrica do espaço-tempo em função do campo de tétradas:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{ab} e^{a}{}_{\mu} e^{b}{}_{\nu}.$$

Definindo o determinante de $e^{a}{}_{\mu}$ como

$$e = \det\left(e^{a}{}_{\mu}\right)$$

temos que o determinante se relaciona com a métrica da forma

$$\sqrt{-g} = e.$$

Para realizarmos medidas do espaço-tempo físico no espaço tangente do observador dado pelos vetores de base $\hat{e}_{(a)}$, definimos tensores com componentes latinas no espaço plano do observador como projeções dele próprio originalmente vindo do espaço-tempo físico curvo, com o auxílio das tétradas:

$$V^{a_1 a_2 \cdots a_n}{}_{b_1 b_2 \cdots b_m} = e^{a_1}{}_{\mu_1} e^{a_2}{}_{\mu_2} \cdots e^{a_n}{}_{\mu_n} e_{b_1}{}^{\nu_1} e_{b_2}{}^{\nu_2} \cdots e_{b_m}{}^{\nu_m} V^{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n}{}_{\nu_1 \nu_2 \cdots \nu_m}.$$

Por outro lado podemos considerar tensores com índices mistos representando as projeções cujas transformações de Lorentz e de coordenadas são dadas por [33]

$$V^{a\mu'}{}_{b\nu'} = \Lambda^{a}{}_{c} \Lambda^{d}{}_{b} \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\lambda}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\nu'}} V^{c\lambda}{}_{d\beta}.$$

As transformações de Lorentz Λ atuam apenas nos índices latinos que estão associados ao espaço tangente tomado como plano para o observador, e variam de ponto a ponto $(\Lambda(x))$, já as derivadas são devidas as transformações de coordenadas no espaço-tempo físico não-plano.

3.2 Dinâmica Gravitacional

Uma vez que estabelecemos um conjunto de vetores para um observador e seu referencial podemos verificar as consequências dinâmicas no ambiente do Teleparalelismo. Para isso então pensamos separadamente no efeito gravitacional per si, e assim estabelecer as equações de campo que determinam a evolução do sistema, e em seguida entender o efeito das distribuições de matéria e gravidade na trajetória de partículas testes, em outra palavras, desenvolvemos uma parte dinâmica com as equações de campo do Teleparalelismo e outra parte cinemática ao deduzir uma "equação de força" sobre partículas.

3.2.1 Formalismo Lagrangiano

Dado uma variedade dotada de um campo de tétradas ${e^a}_\mu$ e uma conexão de spin $\omega_{\mu ab}$, que garanta a invariância por transformações globais de Lorentz $SO(1,3)$ e usando

$$g_{\mu\nu} = {e^a}_\mu e_{a\nu}.$$

Considerando agora o paralelismo absoluto, devemos impor que

$$\nabla_\mu {e^a}_\nu = 0$$

o que implica que nossa conexão se escreve como

$$\Gamma^\nu_{\mu\lambda} = {e_a}^\nu \partial_\mu {e^a}_\lambda + {e_a}^\nu {\omega_\mu}^a{}_b {e^b}_\lambda \tag{3.1}$$

onde a conexão de spin é anti-simétrica nos últimos índices

$$\omega_{\lambda ba} = -\omega_{\lambda ab}.$$

Tomando a comutação da derivada covariante

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]V^\alpha = {R^\alpha}_{\beta\mu\nu} V^\beta + T^\beta_{\mu\nu} \nabla_\beta V^\alpha \tag{3.2}$$

os tensores de Curvatura e Torção em termos dessa conexão se escrevem

$$R^{\rho}{}_{\lambda\nu\mu} = \partial_{\nu}\Gamma^{\rho}_{\mu\lambda} - \partial_{\mu}\Gamma^{\rho}_{\nu\lambda} + \Gamma^{\rho}_{\nu\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\mu\lambda} - \Gamma^{\rho}_{\mu\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\nu\lambda} \tag{3.3}$$

e

$$T^{\alpha}_{\mu\nu} = \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\nu\mu}. \tag{3.4}$$

Definimos o tensor Torção tomando a conexão da derivada covariante num variedade geral

$$T^{a}_{\mu\nu}(e,\omega) = \partial_{\mu}e^{a}{}_{\nu} - \partial_{\nu}e^{a}{}_{\mu} + \omega_{\mu}{}^{a}{}_{b}e^{b}{}_{\nu} - \omega_{\nu}{}^{a}{}_{b}e^{b}{}_{\mu} \tag{3.5}$$

e o tensor de Curvatura

$$R^{a}{}_{b\mu\nu}(\omega) = \partial_{\mu}\omega_{\nu}{}^{a}{}_{b} - \partial_{\nu}\omega_{\mu}{}^{a}{}_{b} + \omega_{\mu}{}^{a}{}_{c}\omega_{\nu}{}^{c}{}_{b} - \omega_{\nu}{}^{a}{}_{c}\omega_{\mu}{}^{c}{}_{b} \tag{3.6}$$

e o escalar de Curvatura

$$R(e,\omega) = e^{a\mu}e^{b\nu}R_{ab\mu\nu}(\omega). \tag{3.7}$$

Podemos escrever a conexão de spin em duas partes

$$\omega_{\mu ab} = \mathring{\omega}_{\mu ab} + K_{\mu ab}$$

onde $\mathring{\omega}_{\mu ab}$ é a conexão de spin de Levi-Civita da RG e $K_{\mu ab}$ é o tensor de Contorção, escrito em termos da Torção:

$$K_{\mu\nu\alpha} = \frac{1}{2}\left(T_{\nu\mu\alpha} + T_{\alpha\mu\nu} - T_{\mu\nu\alpha}\right).$$

A RG então será caracterizada por uma Torção que se anula e uma Curvatura não-nula. A conexão se torna a de Levi-Civita, dado em termos dos *Símbolos de Christoffel* $\mathring{\Gamma}^{\alpha}_{\mu\nu}$

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \mathring{\Gamma}^{\alpha}_{\mu\nu} + e^{a\alpha}K_{\mu ab}e^{b}{}_{\nu} \tag{3.8}$$

e para RG, $K_{\mu ab} = 0$. Contudo, podemos escolher fazer $\omega_{\mu ab} = 0$ [32] e com isso, temos que

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = e^{a\alpha}\partial_\mu e_{a\nu}.$$

Essa conexão, chamada de *Conexão de Weitzenböck* [33, 42], tem a sutileza de anular identicamente a Curvatura

$$R_{\alpha\beta\mu\nu}(\omega) = 0$$

e mas não a Torção [26]

$$T^{\alpha}_{\ \mu\nu} = \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\nu\mu}. \tag{3.9}$$

E assim nossa variedade deixa de ser a Riemanniana (ou pseudo-Riemanniana) e passa ser a *Variedade de Weitzenböck* W_4, onde desenvolveremos toda a dinâmica gravitacional. A pergunta que se pode fazer é: se a Curvatura é responsável pela dinâmica da gravidade na RG, como é possível que em TERG a curvatura se anule e ainda tenhamos gravidade? Essa aparente contradição se desfaz se notarmos que podemos fazer as seguintes separações nos tensores

$$R_{\alpha\beta\mu\nu}(\omega) = \mathring{R}_{\alpha\beta\mu\nu}(\omega) + Q_{\alpha\beta\mu\nu}(\omega)$$

e

$$T'^{\alpha}_{\ \mu\nu}(e,\omega) = \mathring{T}^{\alpha}_{\ \mu\nu}(e,\omega) + T^{\alpha}_{\ \mu\nu}(e,\omega).$$

Temos que $\mathring{T}^{\alpha}_{\ \mu\nu}$, $T^{\alpha}_{\ \mu\nu}(e,\omega)$ e $Q_{\alpha\beta\mu\nu}(\omega)$ em RG são nulos, enquanto em TERG os tensores que se anulam são $R_{\alpha\beta\mu\nu}(\omega)$ e $\mathring{T}^{\alpha}_{\ \mu\nu}$. Tudo subsiste na escolha a ser feita sobre o tipo da conexão de spin $\omega_{\mu ab}$, tal liberdade está vinculada diretamente a ideia de uma teoria de gauge para a gravitação e com isso, a partir da formulação lagrangiana, temos que a conexão de spin não interfere na dinâmica gravitacional e portanto pode ser anulada, fazendo assim a fixação de um gauge adequado.

Assumindo que a Curvatura (geral) se anula, mas a Torção, não, podemos contrair os índices e formar

$$e\mathring{R}(e) = -e\left(\frac{1}{4}T^{\alpha\beta\mu}T_{\alpha\beta\mu} + \frac{1}{2}T^{\alpha\beta\mu}T_{\beta\alpha\mu} - T^{\mu}T_{\mu}\right) - 2\partial_\mu(eT^{\mu}) \tag{3.10}$$

onde $T_\mu = T^{\nu}{}_{\nu\mu}$. O lado esquerdo de (3.10) nada mais é que a densidade de lagrangiana da RG, se abandonarmos o termo de divergência total representado pela derivada, podemos concluir que a densidade de lagrangiana da gravitação teleparalela será

$$L_g = -\kappa e\left(\frac{1}{4}T^{\alpha\beta\mu}T_{\alpha\beta\mu} + \frac{1}{2}T^{\alpha\beta\mu}T_{\beta\alpha\mu} - T^{\mu}T_{\mu}\right) \tag{3.11}$$

onde κ é uma constante de ajuste de unidades, valendo para o nosso caso $1/16\pi$. A densidade de lagrangiana total (matéria + gravidade) será escrita

$$L = -\frac{1}{16\pi}e\Sigma^{\alpha\mu\nu}T_{\alpha\mu\nu} - L_M. \tag{3.12}$$

O tensor Σ é definido como [32, 33, 18]

$$\Sigma^{\xi\mu\nu} = \frac{1}{4}\left(T^{\xi\mu\nu} + T^{\mu\xi\nu} - T^{\nu\xi\mu}\right) + \frac{1}{2}\left(g^{\xi\nu}T^{\mu} - g^{\xi\mu}T^{\nu}\right)$$

e L_M é lagrangiana da matéria. Realizando uma variação em (3.12) com respeito ao campo de tétradas $e^{a\mu}$ temos [54, 12]

$$e_{b\mu}e_{a\lambda}\partial_\rho\left(e\Sigma^{b\lambda\rho}\right) - e\left(\Sigma^{b\nu}{}_{a}T_{b\nu\mu} - \frac{1}{4}e_{a\mu}\Sigma^{bcd}T_{bcd}\right) = \frac{1}{4k}e\Theta_{a\mu} \tag{3.13}$$

essa equação então prediz que uma fonte $\Theta_{a\mu}$ de gravidade afetará o espaço-tempo torcendo-o conforme descrito pelo lado esquerdo de eq.(3.13). Logo podemos observar que as duas teorias, Teoria Geral da Relatividade e Teleparalelismo, são portanto equivalentes dinamicamente e representam os mesmos efeitos gravitacionais, ainda que a fenomenologia seja drasticamente oposta [10]. Podemos reescrever a eq.(3.13) como

$$\partial_\rho\left(e\Sigma^{b\lambda\rho}\right) = \frac{e}{4k}\left(\Theta^{\lambda b} + t^{\lambda b}\right) \tag{3.14}$$

onde foi definido o novo tensor $t^{\lambda b}$

$$t^{\lambda b} = \frac{1}{16\pi}\left(4\Sigma^{c\nu\lambda}T_{c\nu}{}^{b} - e^{b\lambda}\Sigma^{\alpha\beta\nu}T_{\alpha\beta\nu}\right) \tag{3.15}$$

a natureza de tal tensor será discutida se analisarmos as propriedades de anti-simetria do tensor $\Sigma^{b\lambda\rho}$. Derivando a equação em λ, temos:

$$\partial_\lambda \partial_\rho \left(e\Sigma^{b\lambda\rho}\right) = 4\pi\partial_\lambda \left[e\left(\Theta^{\lambda b} + t^{\lambda b}\right)\right]$$

mas o tensor $\Sigma^{b\lambda\rho}$ é antissimétrico nos dois últimos índices, enquanto as derivadas parciais são simétricas, e portanto temos o lado esquerdo de (3.15) identicamente nulo $\partial_\lambda \partial_\rho \left(e\Sigma^{b\lambda\rho}\right) \equiv 0$. Levando a [53]

$$\partial_\lambda \left[ee^b{}_\mu \left(\Theta^{\lambda\mu} + t^{\lambda\mu}\right)\right] = 0.$$

Usando o Teorema de Noether [37], podemos associar então a quantidade entre colchetes como uma corrente conservada:

$$\mathcal{J}^{b\lambda} = ee^b{}_\mu \left(\Theta^{\lambda\mu} + t^{\lambda\mu}\right)$$

e $\partial_\lambda \mathcal{J}^{b\lambda} = 0$. Sabendo que o tensor de matéria está associado a $\Theta^{\lambda\mu}$, uma possível interpretação para $t^{\lambda\mu}$ é ser o tensor energia-momento do próprio campo gravitacional puro. Reescrevendo $\partial_\lambda \mathcal{J}^{b\lambda} = 0$ em termos de componentes

$$\frac{\partial \mathcal{J}^{b0}}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{\mathcal{J}}^b = 0$$

onde $\vec{\mathcal{J}}^b = \hat{x}_i \mathcal{J}^{bi}$, com $i = 1, 2, 3$. E usando o Teorema da Divergência

$$\frac{dQ^b}{dt} = -\oint_{\partial\Omega} \vec{\mathcal{J}}^b \cdot \hat{n} dS$$

onde a carga de Noether associada é

$$Q^b = \int_\Omega \mathcal{J}^{b0} d^3x$$

usando a definição da corrente conservada $\mathcal{J}$

$$Q^b = \int_\Omega d^3x e e^b{}_\mu \left(\Theta^{0\mu} + t^{0\mu}\right)$$

lembrando dos conceitos básicos de Teoria Clássica de Campos, essa carga Q^b pode ser associada com o momento canônico do campo [53, 55, 37], dividido em duas partes, o quadrimomento da matéria/radiação advinda do tensor Θ e o quadrimomento do próprio campo gravitacional vinda da parte de t. Logo, sem constante cosmológica ($\Lambda = 0$), será dado por:

$$P^a = \int_\Omega d^3x e e^a{}_\mu \left(\Theta^{0\mu} + t^{0\mu}\right).$$

O quadrimomento obedece $P^\mu = (E, \vec{p})$, onde E é a energia e $\vec{p}$ é o momento linear total do sistema considerado. Usando então a relação dada, podemos separar a energia total em componentes de matéria e gravitacional, bem como o momento linear.

$$E = E_g + E_M \tag{3.16}$$

$$\vec{P} = \vec{P}_g + \vec{P}_M \tag{3.17}$$

O que nos leva a poder separar claramente os efeitos advindos da matéria sem gravidade e da gravidade pura (sem matéria), mas ainda considerando sua interação. De maneira análoga como podemos fazer ao analisar a dinâmica de uma carga num campo elétrico, ao estudar a energia da partícula em si devido a efeitos do campo, bem como entender a energia do campo em si devido a presença da carga.

3.2.2 Campo de Tétradas e Sistemas Referenciais

Queremos determinar as equações que descrevem a gravidade através do formalismo das tétradas e teleparalelismo como uma teoria de gauge da gravitação. Comecemos, então, determinado um conjunto de campo de tétradas como $\{e^{(0)}{}_\mu, e^{(1)}{}_\mu, e^{(2)}{}_\mu, e^{(3)}{}_\mu\}$, que estabelece o referencial local de um observador que se move ao longo de uma trajetória

C, representado por uma linha de mundo $x^{\mu}(\tau)$, onde τ é o tempo próprio do observador. As componentes $e^{(0)}{}_{\mu}$ e $e^{(i)}{}_{\mu}$, com $i = 1, 2, 3$, são vetores tipo-tempo e tipo-espaço, respectivamente.

Assim podemos escolher de maneira tal que $e_{(0)}{}^{\mu} = v^{\mu}$, onde $v^{\mu} = dx^{\mu}/d\tau$ é a quadrivelocidade do observador. Por sua vez, a quadri-aceleração é definida como a derivada absoluta da quadrivelocidade

$$a^{\mu} = \frac{Dv^{\mu}}{d\tau}$$

que expandido em termos da conexão de Levi-Civita é

$$a^{\mu} = \frac{dv^{\mu}}{d\tau} + \mathring{\Gamma}^{\mu}_{\alpha\beta} v^{\alpha} v^{\beta}.$$

Para a RG $a^{\mu} = 0$ na ausência de forças externas, então não há força gravitacional. Referenciais Inerciais são descritos então por partículas que seguem geodésicas numa geometria curvada, e portanto, em constante queda livre de forma a anular, pelo menos localmente, a interação gravitacional (Princípio da Equivalência Fraco). No caso do Teleparalelismo, mesmo com $a^{\mu} = 0$ para forças externas não-gravitacionais nulas, temos que

$$\frac{dv^{\mu}}{d\tau} + \left(\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} - K_{\beta}{}^{\mu}{}_{\alpha}\right) v^{\alpha} v^{\beta} = 0.$$

Manipulando e usando a identidade $K^{\alpha}{}_{\mu\nu} v^{\alpha} v^{\mu} = T^{\alpha}{}_{\mu\nu} v^{\alpha} v^{\mu}$

$$\frac{dv^{\mu}}{d\tau} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} v^{\alpha} v^{\beta} = T_{\beta}{}^{\mu}{}_{\alpha} v^{\alpha} v^{\beta} \tag{3.18}$$

assim, para a conexão de Weitzenböck, a Torção **T** atua como uma força gravitacional, em semelhança a Força de Lorentz num contexto de um campo eletromagnético externo. Notemos entretanto que não há presença da massa da partícula que caminha sobre tal linha de mundo, essa característica ainda é remetida à ideia de equivalência entre a massa gravitacional e inercial. Em resumo, no Teleparalelismo há uma força gravitacional, atuando por meio do tensor de Torção.

É fácil provar usando $e_{(0)}{}^{\mu} = v^{\mu}$ e a eq.(3.8) que isto se reduz à:

$$a^{\mu} = -K_{(0)}{}^{\mu}{}_{(0)}$$

isto sugere que existe uma íntima ligação entre a Torção T e a aceleração de referenciais. Projetando no espaço tangente do observador, devido a anti-simetria de K, as únicas componentes não nulas serão a^i, com $i = 1, 2, 3$. Projetando no espaço do observador, identificamos o tensor de aceleração que generaliza a ideia de referenciais gerais de aceleração própria

$$\phi_{ab} = K_{0ab}$$

sendo $a_k = \phi_{(0)k}$. De maneira geral $\phi_{ab} \rightarrow (\mathbf{a}, \Omega)$, onde $\mathbf{a}$ é a aceleração translacional e Ω, a frequência de rotação de um referencial espacial não-rotacional. Assim ϕ é utilizado para caracterizar o tipo de referencial que estamos lhe dando, interpretando-o como as acelerações inerciais ao longo da trajetória descrita pelo sistema de referência. Por outro lado se a^{μ} se anula então a trajetória é dita geodésica [33].

Assim podemos resumir as diferenças entre a RG e o TERG da seguinte maneira

Tabela 3.1: Diferenças entre RG e TERG

	RG	**TERG**
Tensor fundamental	tensor métrico $g_{\mu\nu}$	campo de tétradas $e^{a}{}_{\mu}$
Tipo de Conexão	Levi-Civita $\mathring{\Gamma}^{\rho}_{\mu\nu}$	Weitzenböck $\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} = e_{a}{}^{\rho}\partial_{\mu}e^{a}{}_{\nu}$
Dinâmica	Determinação da Curvatura $R^{\rho}{}_{\mu\lambda\nu}$	Determinação da Torção $T^{a}{}_{\mu\nu}$
Equações de movimento	$\frac{dv^{\mu}}{d\tau} + \mathring{\Gamma}^{\mu}_{\alpha\beta}v^{\alpha}v^{\beta} = 0$	$\frac{dv^{\mu}}{d\tau} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}v^{\alpha}v^{\beta} = T_{\beta}{}^{\mu}{}_{\alpha}v^{\alpha}v^{\beta}$

Capítulo 4

Cosmologia e Universo de Tipo-Gödel

Ao estabelecer as suas equações de campo da gravitação, Einstein então parte para a primeira tentativa de descrever todo o universo como uma única estrutura coesa medida em larga escala [38]. Desta forma inaugura-se a *Cosmologia Relativista*, que usa como base princípios básicos as equações de campo da gravitação, termodinâmica de fluidos e observação experimental dos modelos.

Há uma miríade de modelos que podem ser estudados, e que oferecem diferentes resultados e possibilidades para explicar o universo conforme a disponibilidade de dados que temos. Sendo hoje o modelo padrão da cosmologia baseado na métrica de Friedmann-Robertson-Walker baseado na ideia do "ovo primordial" de Lamaître.

Apesar de tal modelo ter muito sucesso na descrição atual do universo, existem uma série de desafios a serem explicados satisfatoriamente, como a anisotropia local da radiação cósmica de fundo, expansão acelerada do universo, ausência de simetria matéria-antimatéria, entre outros. Tais problemas, é claro, esperam-se ser resolvidos com o advento da mecânica quântica e sua compatibilização com processos gravitacionais.

O que podemos fazer de maneira geral então é estabelecer certos princípios gerais que qualquer modelo cosmológico deve ter e/ou obedecer.

4.1 Princípios gerais em Cosmologia

Os princípios e características que descrevemos se aplicam a qualquer modelo cosmológico descrito por uma métrica sobre uma variedade $M^{1,3}$ lorentziana, cujo espaço tangente T_p em $p \in M$ é o espaço da relatividade restrita einsteiniana [59, 57].

- **Princípio Cosmológico**

  Afirma-se que não existe nenhum observador preferencial nas propriedades do universo quando este é tomado em larga escala. O universo então aparentará obedecer as mesmas leis em cada uma das suas partes locais.

- **Conteúdo material**

  Um universo é tomado de várias propriedades que vão depender exclusivamente do conteúdo material que lhe preenche e se puder ser subdivido, a relação entre suas partes. Em geral os modelos de Universo apresentam matéria e radiação em proporções desiguais de tal maneira que a medida que o universo evolui, essas diferentes partes afetam essa evolução bem como elas próprias são afetadas por essa evolução e pelas interações com as outras partes, como num sistema retro-alimentante. A priori os efeitos locais da interação matéria + radiação pouco importa, pois em Cosmologia tomaremos apenas o comportamento médio em larga escala. Diversos modelos irão incluir além da matéria e radiação comum, outras substâncias a fim de preencher lacunas teóricas nos processos observacionais, como energia escura, matéria escura, inflaton e etc.

- **Observadores**

  Um observador, em Cosmologia, será um sistema de coordenadas caracterizada por uma congruência de velocidades dentro do fluido cósmico que é capaz de realizar medidas, ou seja, para qual se projeta as quantidades físicas (expansão, radiação de fundo na faixa do micro-ondas, rotação, etc)

- **Parâmetros Cinéticos**

  Serão os parâmetros principais associados a forma como um observador "enxerga" seu universo. Estão intimamente relacionados com a forma da métrica e se apresentam como propriedades globais do universo em questão. Os parâmetros cinéticos serão: Expansão, Cisalhamento, Rotação e Aceleração [38, 49].

Esses parâmetros e condições são gerais e dizem a respeito de qualquer solução física que respeite as equações de campo da gravidade. Há um grande número de soluções exatas [48], e explorá-las ao máximo é quase impossível, dada a riqueza de propriedades e possibilidades de cada uma. Alguns modelos cosmológicos estão descritos nestas possibilidades:

1. **Universo Estático de Einstein:**

   A proposta de descrição do universo por Einstein partiu da hipótese de que sua geometria é estática, a matéria é um fluido perfeito de densidade ρ e velocidade v^{μ}. Por sua estaticidade, queremos dizer que ele não possui rotação, nem expansão e nem deformação, sem início e sem fim. O que promove um universo que não possui dinâmica para evoluir.

   Einstein ao desenvolver seu modelo de universo percebeu que qualquer flutuação que ocorresse na densidade do seu conteúdo material leva a uma instabilidade irreversível que o faria contrair indefinidamente e por fim colapsar, e por isso insere sua famosa constante cosmológica Λ a fim de frear qualquer instabilidade que possa surgir e manter equilibrada a atração gravitacional de suas partes.

2. **Universo de Friedmann**:

   O Universo de Friedmann é hoje considerado a base do *Modelo Padrão da Cosmologia*, apresenta uma estrutura simples contendo um universo que possui expansão e preenchido por um fluido de densidade de matéria/energia ρ e uma pressão p, e que não tem partes interagentes [58]. Este seria o paradigma cosmológico mais aceito atualmente, baseado num começo quente e denso, até a evoluir para o seu estado atual de baixa densidade e muito mais frio. Há uma vasta literatura para trabalhar em todos os detalhes as vantagens e desvantagens de tal modelo. Seu maior empecilho hoje é descrever de maneira satisfatória o que seria a energia escura, a assimetria matéria/anti-matéria na bariogênese e etc.

3. **Universo de Kasner:**

O universo descrito por Kasner [38] é um modelo que irá apresentar anisotropias na sua densidade global de matéria, ele representa uma região do espaço-tempo no qual a participação da matéria na criação da curvatura é desprezível. Neste caso a curvatura sustentaria a si própria. A métrica de Kasner então terá um cisalhamento e expansão não-nulas, e a rotação nula. A métrica é descrita em coordenadas cartesianas como:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)dx^2 + b^2(t)dy^2 + c^2(t)dz^2$$

a taxa de expansão é $\Theta = \dot{V}/V$, onde $V(t) = a(t)b(t)c(t)$. Assim a geometria de Kasner representa um Universo sem matéria (o campo gravitacional se autoalimenta), com expansão distinta (e daí surge a anisotropia) segundo três eixos ortogonais.

Nosso tipo de Universo a ser trabalhado será então um tipo-Gödel, que absorve características de rotação e expansão que detalharemos a seguir.

4.2 Universo de Gödel

O matemático e lógico Kurt Gödel, amigo íntimo de Einstein [14], apresenta em 1949 uma solução exata para as equações de campo de Einstein da Relatividade Geral, criando um modelo cosmológico de universo contendo apenas rotação [21, 51]. Gödel considerou para isso um cenário onde se tinha um cosmos preenchido por um fluido perfeito, isto é, com densidade de energia $\varepsilon \neq 0$ e pressão $p = 0$ dada pela seguinte métrica

$$ds^2 = A^2(-dt^2 + 2e^{mx}dtdy - \frac{1}{2}e^{2mx}dy^2 + dx^2 + dz^2) \tag{4.1}$$

sendo A e m parâmetros constantes. Tal modelo então exibia algumas propriedades notáveis:

- Apresenta homogeneidade e é estacionário, porém não estático;
- Apresenta simetria rotacional;
- A fonte do campo gravitacional é um fluido perfeito, ou seja, matéria com baixa pressão conjuntamente com uma constante cosmológica negativa (sinal contrário ao introduzido por Einstein);
- Não apresenta singularidade e é geodesicamente completo (completamente regular);
- Possui curvas tipo-tempo fechadas.

Nesta solução, a velocidade angular Ω da rotação cósmica é dada por

$$\Omega = \frac{m}{2A^2}$$

com densidade de energia ε dado por

$$4\pi\varepsilon = -\Lambda$$

Apesar de ser um boa solução das equações de Einstein, este modelo foi muito criticado por não considerar a expansão do Universo e apresentar curvas tipo-tempo fechadas (CTCs) - que permitia a violação da causalidade no espaço-tempo. Novello, mais tarde, mostra que é impossível estender o tempo t de um referencial local para um tempo global cósmico sobre toda a variedade, chamado tempo gaussiano S, diferentemente da métrica do Modelo Cosmológico Padrão (modelo FLRW) onde se é possível realizar tal procedimento e "cobrir" todo o universo com um tempo universal (o que nos permite falar sobre coisas como *Idade do Universo, Big Bang, Expansão Cósmica, etc*) [38].

4.3 Modelo de Obukhov-Gödel

Apresentamos o modelo de Gödel para um universo homogêneo, preenchido por um fluido perfeito em rotação. Obukhov, em trabalhos posteriores ao de Gödel, propõe um novo elemento de linha permitindo os efeitos de expansão e rotação dessa forma de universo [40, 39, 29], que nos limites dos parâmetros adequados reproduzem a solução original de Gödel com rotação apenas, ou o universo Friedmanneano plano com expansão apenas. Comecemos então definindo o elemento de linha que descreve a geometria do que chamaremos a partir de agora de Universos Tipo-Gödel:

$$ds^2 = -dt^2 + 2A\sqrt{\sigma}e^{mx}dtdy + A^2\left(dx^2 + ke^{2mx}dy^2 + dz^2\right) \tag{4.2}$$

onde temos $A = A(t)$, e σ, m e k são constantes, com $\sigma > 0$ e $m > 0$. O tensor métrico **g** e sua inversa serão dados respectivamente por:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & A\sqrt{\sigma}e^{mx} & 0 \\ 0 & A^2 & 0 & 0 \\ A\sqrt{\sigma}e^{mx} & 0 & A^2ke^{2mx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A^2 \end{pmatrix}$$

e

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\frac{k}{\xi} & 0 & \frac{e^{-mx}}{A\xi}\sqrt{\sigma} & 0 \\ 0 & A^{-2} & 0 & 0 \\ \frac{e^{-mx}}{A\xi}\sqrt{\sigma} & 0 & \frac{e^{-2mx}}{A^2\xi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A^{-2} \end{pmatrix}$$

onde $\xi = \sigma + k$. Façamos a escolha específica de uma congruência de observadores v^μ co-móvel ao fluido que preenche nosso universo [4, 39], de tal maneira que os parâmetros de *expansão, cisalhamento, aceleração* e *rotação*, são dados respectivamente por

$$\theta = 3\frac{\dot{A}}{A} \tag{4.3}$$

$$\Delta_{\mu\nu} = 0 \tag{4.4}$$

$$a_\mu = \dot{A}\sqrt{\sigma}e^{mx}\delta_\mu^2 \tag{4.5}$$

$$\Omega = \frac{m}{2A}\sqrt{\frac{\sigma}{\xi}} \tag{4.6}$$

assim, o modelo cosmológico Gödel-Obukhov não tem cisalhamento para este conjunto de observadores. Para o caso de A ser constante, o único parâmetro que não se anula será a rotação global Ω recaindo na forma original de Gödel [21]. Obukhov então mostra que para determinados valores da constante k (maiores que 1) é possível contornar as dificuldades do modelo original de Gödel e evitar *Curvas Tipo-Tempo Fechadas* (CTC, na sigla inglesa), e assim evitar os problemas de causalidade inerentes a essa geometria [40, 39, 29, 38].

Resumidamente, já que o movimento de rotação está tão presente em diversos fenômenos físicos, desde a "rotação" do elétron em torno do núcleo atômico, passando pelo movimento de translação da Terra em torno do Sol, seria então interessante observar os efeitos, ainda que teóricos, de uma possível rotação não-nula do próprio Universo como um todo.

Uma pergunta interessante do modelo de Gödel surge: se o Universo gira, então onde estaria o seu centro? A resposta entretanto é um tanto sutil. A primeira vista uma possível rotação global indicaria a presença de um tipo especial de observadores sobre o eixo da rotação para qual seria possível indicar um "repouso absoluto", ferindo assim a principal característica da Relatividade Especial, ou ainda o *Princípio Copernicano*.

Ao observarmos melhor a métrica (4.2), temos que o mesmo é isométrico a $M \times \Re$, onde M é uma variedade com métrica [41]

$$d\lambda^2 = -dt^2 + 2A\sqrt{\sigma}e^{mx}dtdy + A^2\left(dx^2 + ke^{2mx}dy^2\right).$$

A componente dz não contribui efetivamente para a Torção do Universo de Gödel, consequentemente uma forma de visualizá-lo espacialmente é imaginarmos que em qualquer ponto este é um disco de Poincaré produto cartesiano com uma componente euclidiana. Algo como um "cilindro de Poincaré". A atenção aqui é que esta interpretação vale para todos os pontos do espaço. Se imaginarmos Maria e o João no universo de Gödel a uma certa distância um do outro, Maria vai visualizar algo como um cilindro de Poincaré, e vai esperar que João a veja no centro e que ele esteja na periferia, mas *não é isso que acontece.* O que acontece é que o João também se vê como centro do cilindro. Em consequência dessa estrutura espacial, a conclusão que podemos chegar é que tal modelo possui um eixo de simetria cuja rotação se dá em um eixo específico (que no nosso caso foi escolhido como sendo o eixo z), entretanto sem apresentar qualquer centro de rotação.

4.4 Energia Gravitacional do Universo de Obukhov-Gödel

Um conjunto de tétradas associado a um referencial co-móvel ao fluido que preenche esse universo pode ser escolhido como

$$e^a{}_\mu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -A\sqrt{\sigma}e^{mx} & 0 \\ 0 & A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A\sqrt{\xi}e^{mx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A \end{pmatrix}. \tag{4.7}$$

Lembrando que a quadrivelocidade está relacionado com as tétradas

$$v^\mu = e_{(0)}{}^\mu$$

então

$$v^\mu = \delta^\mu_0. \tag{4.8}$$

Assim, então, podemos calcular o tensor energia-momento gravitacional (3.15). Para isso devemos, usando (4.7), calcular a Torção (3.4)

$$T_{\lambda\mu\nu} = e_{a\lambda}(\partial_\mu e^a{}_\nu - \partial_\nu e^a{}_\mu). \tag{4.9}$$

Cujas únicas componentes não-nulas serão

$$
\begin{aligned}
T_{002} &= -T_{020} = \dot{A}\sqrt{\sigma}e^{mx} \\
T_{012} &= -T_{021} = m\sqrt{\sigma}Ae^{mx} \\
T_{101} &= -T_{110} = A\dot{A} \\
T_{202} &= -T_{220} = kA\dot{A}e^{2mx} \\
T_{212} &= -T_{221} = mkA^2e^{2mx} \\
T_{303} &= -T_{330} = A\dot{A}.
\end{aligned}
$$

Usando a definição do tensor Σ (também chamado de Superpotencial) [42]

$$\Sigma^{\lambda\mu\nu} = \frac{1}{4}\left(T^{\lambda\mu\nu} + T^{\mu\lambda\nu} - T^{\nu\lambda\mu}\right) + \frac{1}{2}\left(g^{\lambda\nu}T^{\mu} - g^{\lambda\mu}T^{\nu}\right)$$

o cálculo, laborioso, nos leva as seguintes componentes não-nulas

$$\Sigma^{010} = \frac{mk}{2\xi}\frac{1}{A^2}$$

$$\Sigma^{202} = \frac{1}{\xi}\frac{\dot{A}}{A^3}e^{-2mx}$$

$$\Sigma^{331} = -\frac{m}{2A^4}$$

$$\Sigma^{101} = \Sigma^{303} = \frac{k}{\xi}\frac{\dot{A}}{A^3}$$

$$\Sigma^{112} = \Sigma^{332} = \frac{\sqrt{\sigma}}{\xi}\frac{\dot{A}e^{-mx}}{A^4}$$

$$\Sigma^{012} = \Sigma^{120} = \Sigma^{201} = \frac{m\sqrt{\sigma}}{3\xi}\frac{e^{-mx}}{A^3}.$$

Por fim, com os valores dos nosso tensores, podemos finalmente calcular o Tensor Energia-Momento Gravitacional, e a energia associada ao campo. Usando (3.15), encontramos as devidas componentes

$$t^{00} = \frac{1}{32\pi}\frac{1}{\xi^2A^2}\left(m^2\sigma k - 12k^2\dot{A}^2\right)$$

$$t^{01} = \frac{mk}{8\pi\xi}\frac{\dot{A}}{A^3}$$

$$t^{02} = \frac{1}{32\pi}\frac{\sqrt{\sigma}e^{-mx}}{\xi^2 A^3}\left(12k\dot{A}^2 - m^2\sigma\right)$$

$$t^{10} = \frac{mk}{4\pi\xi}\frac{\dot{A}}{A^3}$$

$$t^{11} = -\frac{1}{32\pi\xi}\frac{1}{A^4}\left(m^2\sigma + 4k\dot{A}^2\right)$$

$$t^{12} = -\frac{m}{16\pi}\frac{\sqrt{\sigma}}{\xi}\frac{\dot{A}}{A^4}e^{-mx}$$

$$t^{20} = \frac{\sqrt{\sigma}}{16\pi}\frac{e^{-mx}}{\xi^2 A^3}\left\{6k\dot{A}^2 + m^2\left(k + \frac{\sigma}{2}\right)\right\}$$

$$t^{21} = -\frac{3m\sqrt{\sigma}}{16\pi}\frac{e^{-mx}}{\xi}\frac{\dot{A}}{A^4}$$

$$t^{22} = -\frac{1}{8\pi}\frac{e^{-2mx}}{\xi^2 A^4}\left\{(k + 4\sigma)\,\dot{A}^2 + \frac{m^2\sigma}{4}\right\}$$

$$t^{33} = \frac{1}{32\pi}\frac{1}{\xi A^4}\left(m^2\sigma - 4k\dot{A}^2\right).$$

Claramente $t^{\mu\nu}$ não é um tensor simétrico, entretanto é sempre possível torná-lo simétrico nos seus índices pela adição de um termo que seja uma divergência pura [30]. Em posse do tensor, podemos calcular a energia gravitacional como

$$P^{(0)} = E_g = \int d^3x e e^{(0)}{}_{\mu} t^{\mu 0} \tag{4.10}$$

onde $e = \det(e^a{}_{\mu})$

$$e = A^3\sqrt{\xi}e^{mx}.$$

O que nos leva a escrever

$$E_g = -\int d^3x \frac{e^{mx}}{32\pi\sqrt{\xi}}\left(\sigma m^2 A + 12kA\dot{A}^2\right).$$

Ao se realizar a integração sobre todo o espaço, claramente a integral diverge, dando uma energia infinita, por isso, a fim de trabalhar apenas com valores finitos, podemos usar apenas a densidade de energia ε, que será

$$\varepsilon_g = -\frac{e^{mx}}{32\pi\sqrt{\xi}}\left(\sigma m^2 A + 12kA\dot{A}^2\right). \tag{4.11}$$

Assim temos como caso limite quando $m = \sigma = 0$, a vorticidade se anula e a energia gravitacional é dada apenas pela expansão (num universo plano), enquanto para o caso de expansão nula (fator de escala A constante), a energia fica atrelada somente a vorticidade do mesmo (Universo de Gödel).

Capítulo 5

Mecânica Quântica e Quantização

Os fenômenos físicos que descrevem o mundo, desde o movimento dos astros em torno do Sol até o comportamento de partículas subatômicas, é regido por um conjunto de ideias e interpretações de observações que culminam no que chamamos de *Leis da Física.* Assim sendo, cada grupo dessas leis se estabeleceu num corpo mais ou menos coeso para formar troncos comuns: Eletromagnetismo, Mecânica Clássica, Termodinâmica, Óptica, etc. Esse conjunto de regras denominadas leis, entretanto, podem entrar em contradição entre si quando um mesmo fenômeno perpassa mais de um tronco. Por exemplo, a radiação de *corpo negro*, que se fundamenta nos princípios da Termodinâmica e do Eletromagnetismo, e que só foi completamente compreendido supondo uma reinterpretação do próprio fenômeno que levou Planck a postular seus "osciladores discretizados".

Nesse contexto de necessidade de se explicar os diversos fenômenos que surgiram ao se experimentar sob o domínio atômico [47], surge então a Mecânica Quântica, em sua primeira versão como um apanhado de postulados (vários deles feitos por Bohr [36]), entretanto ainda com certa limitação. É com Heisenberg, e sua mecânica matricial, e Schrödinger, com a mecânica ondulatória, que se solidifica e começamos a ter um aparato matemático mais robusto para realizar previsões, munidos da *Interpretação de Copenhague*, tendo por Bohr, Pauli e Born seus principais defensores.

A Mecânica Quântica, então, terá uma constante característica do mundo microscópico h, chamada *constante de Planck*, que definirá a "fronteira" entre o mundo clássico e quântico. Fazendo $h \to 0$ recuperaríamos os resultados da Física Clássica.

O processo se daria então ao identificar os observáveis físicos, como energia, momento angular, momento linear, em operadores atuando em vetores num espaço abstrato, conforme um conjunto de regras, que permitem predizer ou calcular as probabilidades dos eventos que ocorrem. Percebamos que a Mecânica Quântica, como criada, permite apenas que calculemos probabilidades de medidas. É por este motivo que se necessita de uma interpretação altamente cuidadosa, já que isto se mostra completamente fora do senso comum e daquilo que se tinha na física contemporânea da época em que a teoria quântica foi desenvolvida. Os longos debates entre Bohr e Einstein, discorrendo sobre a natureza em si e a natureza da própria mecânica quântica frente à natureza, levaram a um melhor entendimento do significado de tudo isso. Como historicamente quem "venceu" o debate sobre como interpretar a Mecânica Quântica foi Bohr, apresentaremos aqui os postulados dessa teoria conforme essa leitura da mesma, entretanto existem outras variadas interpretações que se dispõem a explicar de uma maneira "mais satisfatória" os fenômenos quânticos, e assim a discussão em torno disso ainda está longe do fim [28].

Os métodos desenvolvidos para pensar na forma dos operadores, que correspondem a quantidades físicas observáveis, será chamado de *quantização*, o que basicamente nos instrui na maneira de construir tais operadores. Os métodos então são desenvolvidos principalmente por P.A.M. Dirac, com a chamada *quantização canônica* [17], ou as integrais de caminho de R.P. Feynman, que conseguem dar um bom subsídio para as quantizações. Entretanto o processo de quantização sofrem de inconsistências internas que veremos mais adiante.

5.1 Fundamentos da Mecânica Quântica

Nesta seção faremos um breve resumo dos postulados da Mecânica Quântica. Podemos descrever as propriedades da Mecânica Quântica então, segundo a Interpretação de Copenhague como:

1. Qualquer estado de um sistema quântico em um tempo t_0 está caracterizado por um vetor ("ket") $|\Psi(t_0)\rangle$ que pertence a um espaço de Hilbert.

Este vetor no espaço de Hilbert descreve completamente o estado físico do sistema. Tudo que pode ser dito sobre o sistema está contido em $|\Psi(t_0)\rangle$.

2. Toda quantidade física mensurável é descrita por um operador auto-adjunto (chamado observável) agindo no espaço de Hilbert do sistema. Entretanto, o inverso não é necessariamente verdade.

3. O único resultado possível de uma medida de uma quantidade física é um dos autovalores do operador autoadjunto associado a ela.

4. A probabilidade de se encontrar um dos autovalores (por exemplo, a_n) associado à quantidade observada é dada por (no caso discreto):

$$p(a_n) = |P_n|\Psi\rangle|^2 = \langle\Psi|P_n|\Psi\rangle = \Sigma_{g=1}^{g_n}|\langle\Psi|\phi_n^g\rangle|^2$$

onde P_n é o projetor sobre o auto-subespaço do espaço de Hilbert com autovalor a_n e $|\phi_n^g\rangle$ é um dos auto-estados com este autovalor com degenerescência g_n.

Como o estado definido no primeiro postulado descreve integralmente o sistema físico, esta probabilidade é a máxima informação que podemos ter sobre o sistema e não se refere a uma ignorância sobre este que poderia ser eliminada com uma investigação mais detalhada.

5. A evolução do vetor de estado enquanto não se realizam experimentos é governada pela equação de Schrödinger:

$$i\hbar\frac{d|\Psi(t)\rangle}{dt} = H(t)|\Psi(t)\rangle \tag{5.1}$$

onde $H(t)$ é o operador hamiltoneano do sistema. Na descrição de Heisenberg são os observáveis que variam com tempo.

6. Depois de uma medida gerando o autovalor a_n, o estado do sistema colapsa para:

$$|\Psi'\rangle = \frac{P_n|\Psi\rangle}{\sqrt{\langle\Psi|P_n|\Psi\rangle}} \tag{5.2}$$

Outro ponto importantíssimo advindo da Mecânica Quântica é a impossibilidade de ter medidas extremamente precisas quando se tenta colapsar a função de onda para observáveis que são conjugados. O exemplo mais simples que temos é ao tentar medir *simultaneamente* a posição em uma dada direção do espaço de uma partícula e seu momento linear na mesma direção. Como x e p_x são conjugados, possuem um comutador que não se anula

$$[x, p_x] = i\hbar$$

então teremos incertezas associadas a tais medidas dada por

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}. \tag{5.3}$$

O primeiro a observar essa propriedade de sistemas físicos quânticos foi Heisenberg [23, 43] e por isso ficou conhecido como ***Princípio da Incerteza de Heisenberg*** [47].

5.2 Quantização

Há inúmeras formas de se tentar quantizar um sistema físico, ou seja, dado a sua descrição clássica, desenvolver um correspondente quântico [46, 11]. Se Q representa o mapa de quantização que atua nas funções f no espaço de fase clássico, as propriedades a seguir são geralmente consideradas desejáveis [46]:

1. $Q_x\psi = x\psi$ e $Q_p\psi = -i\hbar\partial_x\psi$;

2. $f \to Q_f$ é um mapa linear;

3. $[Q_f, Q_g] = i\hbar Q_{\{f,g\}}$ (parênteses de Poisson);

4. $Q_{g\circ f} = g(Q_f)$ (Regra de Von Neumann).

No entanto, essas quatro propriedades não são apenas mutuamente inconsistentes, mas qualquer de três delas são também inconsistentes [3]. Um problema apresentado na chamada Regra do Parênteses de Poisson é demonstrado pelo Teorema de Groenewold [24]:

Teorema 1. *Não há nenhum mapa de quantização Q (seguindo as regras acima) sob observáveis polinomiais de grau menor ou igual a quatro que satisfaça o Parênteses de Poisson, ainda que f e g tenham graus menor ou igual a três.*

E assim, podemos dizer que não há de fato nenhuma boa regra de quantização. Entretanto algumas possuem vantagens sobre outras, de acordo com a necessidade ou *visão* de quem realiza o processo de quantização.

A chamada *quantização canônica* então será uma das formas mais usuais de se relacionar observáveis (ou quasi-observáveis como os potenciais eletromagnéticos ϕ e $\vec{A}$) a operadores hermitianos correspondentes, passando de um espaço de fase clássico para um análogo quântico.

5.3 Quantização de Weyl

Uma vez que não haverá uma técnica de quantização que seja completamente satisfatória, o processo dependerá exclusivamente de uma escolha arbitrária e que seja conveniente para o sistema físico, podemos escolher então a *Quantização de Weyl* [22, 3] como a que traz de uma maneira mais natural a quantização dos observáveis do problema de Gödel em questão.

A quantização de Weyl (ou mapeamento de Wigner-Weyl) é definido matematicamente como

$$W[f]\left(z_1, z_2, ..., z_n\right) := \frac{1}{\left(2\pi\alpha\right)^n} \int \mathbf{d}^n z \mathbf{d}^n k f\left(z_1, z_2, ..., z_n\right) exp\left(\frac{i}{\alpha}\sum_{l=1}^{n} k_l\left(z_l - \hat{z}_l\right)\right) \quad (5.4)$$

de maneira geral podemos entender esse mapeamento como sendo um conjunto de observáveis clássicos tomado num espaço de fase descrito por n variáveis $z_1, z_2, ..., z_n$, que possui suas contrapartidas quânticas (seus operadores $\hat{z}_1, \hat{z}_2, ..., \hat{z}_n$), e que são quantizadas através do procedimento (5.4), para um dada função f nesse espaço de fase. Ou seja, o procedimento de Weyl-Wigner toma uma função f das coordenadas generalizadas e seus momenta conjugados e quantiza num operador $\hat{f}$ [12].

O conjunto dos operadores hermitianos $\hat{z}_i$ formaram assim um espaço não-comutativo obedecendo à álgebra da comutação

$$[\hat{z}_j, \hat{z}_l] = i\alpha_{ij}. \tag{5.5}$$

Esse mapeamento gera então o nosso espaço de fase quântico. Sua principal vantagem é eliminar ambiguidades que podem surgir na hora de simetrizar ou anti-simetrizar um operador, já que isso acontece naturalmente, tendo assim um significado físico mais claro, além de podermos, ao menos em tese, quantizar funções não-polinomiais de mais difícil tratamento em outras formas de quantização, como a quantização canônica. Para o caso de um funções polinomiais o resultado é o mesmo que a quantização canônica [1, 52, 31].

Essa forma garante que podemos determinar operadores quânticos para qualquer observável desejável, apesar do inconveniente de que nem sempre teremos a capacidade de realizar essa integral de maneira analítica, e por isso lançar mão de técnicas numéricas.

Será conveniente, entretanto, usar um resultado de McCoy [34, 46]. Se $G(p, q)$ é a função clássica e $G(p, q_1)$ é a mesma função clássica de tal maneira que os fatores são ordenado com q sempre precedendo p, então a regra de Weyl eq.(5.4) pode ser escrita na forma:

$$\hat{G} = W\left[G\right] := exp\left(-\frac{i\hbar}{2}\frac{\partial^2}{\partial q \partial p}\right) G(p, q_1). \tag{5.6}$$

O operador diferencial atua apenas em $G(p, q_1)$ e é importante manter a ordem dos fatores durante a diferenciação. Fica claro a partir da eq.(5.6) que o operador quântico associado é único e idêntico ao clássico quando $\hbar \to 0$ (*Princípio da Correspondência* [23, 28, 36]).

5.4 Aplicação do procedimento de Weyl

Vamos ilustrar na prática como quantizar um sistema a partir de uma dada função, usando a forma dada por McCoy eq(5.6). Tomemos então uma função $f(p, q) = qp$, onde seguimos o ordenamento normal para aplicação de eq(5.6), vamos ter ao final do processo um operador hermitiano $F(\hat{p}, \hat{q}) = W[f(p, q)]$. Seguindo o procedimento teremos:

$$
\begin{aligned}
F(\hat{p},\hat{q}) &= exp\left(-\frac{i\hbar}{2}\frac{\partial^2}{\partial q\partial p}\right) f(p,q) \\
&= exp\left(-\frac{i\hbar}{2}\frac{\partial^2}{\partial q\partial p}\right)(qp) \\
&= qp - \frac{i\hbar}{2}\frac{\partial^2(qp)}{\partial q\partial p} + \frac{1}{2!}\left(-\frac{i\hbar}{2}\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial q\partial p}\left(\frac{\partial^2(qp)}{\partial q\partial p}\right) + \cdots
\end{aligned}
$$

onde foi usado a expansão em Maclaurin [50]

$$e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \cdots$$

com A sendo uma matriz (operador).

Realizando as derivações e fazendo a substituição $q \rightarrow \hat{q}$ e $p \rightarrow \hat{p}$, conforme McCoy, nosso operador F será escrito

$$F(\hat{p},\hat{q}) = \hat{q}\hat{p} - \frac{i\hbar}{2}$$

que aparentemente não é o operador correspondente de qp. Entretanto, basta utilizarmos a relação de comutação entre $\hat{p}$ e $\hat{q}$

$$[\hat{q},\hat{p}] = \hat{q}\hat{p} - \hat{p}\hat{q} = i\hbar$$

e substituindo na expressão de F que chegamos a forma mais conhecida desse operador

$$F(\hat{p},\hat{q}) = \frac{1}{2}\left(\hat{q}\hat{p} + \hat{p}\hat{q}\right) \tag{5.7}$$

que é a forma direta, exata e simetrizada do da função $f(p,q) = qp$. Este exemplo simples mostra o poder da técnica, que funciona de maneira geral mesmo para casos mais complicados de funções.

Baseado em todo esse aparato estamos prontos para tentar realizar uma quantização sobre a densidade de energia eq(4.11) e obter uma equação de Schrödinger correspondente.

Capítulo 6

Quantização da Energia Gravitacional do Modelo de Gödel-Obukhov

Uma vez que já estabelecemos a (densidade) energia gravitacional do *Universo de Gödel-Obukhov* eq.(4.11) e construímos uma técnica que permite a quantização direta de quantidade físicas clássicas mapeando em operadores no espaço de Hilbert [56, 46], podemos então unir essas duas ideias e encontrar o respectivo operador Hamiltoniano e consequentemente uma Equação do tipo Schrödinger. Para isso então vamos construir um espaço de fase clássico nas variáveis A e $\dot{A}$. E, portanto, construir operadores associados $\hat{A}$ e $\hat{\dot{A}}$, obedecendo a relação de comutação

$$\left[\hat{A}, \hat{\dot{A}}\right] = i\lambda \tag{6.1}$$

com λ sendo a constante associada ao sistema. Quantizando a energia, teremos:

$$\begin{aligned}
\hat{H} &= exp\left(-\frac{i\lambda}{2}\frac{\partial^2}{\partial A\partial\dot{A}}\right)\varepsilon_g\left(A,\dot{A}\right) \\
\hat{H} &= exp\left(-\frac{i\lambda}{2}\frac{\partial^2}{\partial A\partial\dot{A}}\right)\left(-\frac{e^{mx}}{32\pi\sqrt{\xi}}\right)\left(\sigma m^2A+12kA\dot{A}^2\right) \\
\hat{H} &= -\frac{e^{mx}}{32\pi\sqrt{\xi}}\left(\sigma m^2A+12kA\dot{A}^2\right)-\frac{i\lambda}{2}\frac{\partial^2}{\partial A\partial\dot{A}}\left(-\frac{e^{mx}}{32\pi\sqrt{\xi}}\left(\sigma m^2A+12kA\dot{A}^2\right)\right)+\cdots \\
\hat{H} &= -\frac{e^{mx}}{32\pi\sqrt{\xi}}\left(12kA\dot{A}^2+m^2\sigma A-\frac{i\lambda}{2}24k\dot{A}\right) \\
\hat{H} &= -\frac{e^{mx}}{32\pi\sqrt{\xi}}\left(12kA\dot{A}^2-12i\lambda k\dot{A}+m^2\sigma A\right)
\end{aligned}$$

E usando a comutação eq.(6.1), podemos reescrever $\hat{\dot{A}}$ como um operador na base de A:

$$\hat{\dot{A}}=-i\lambda\frac{d}{dA}.$$

Assim reescrevemos o operador Hamiltoniano em termos de A e suas derivadas. E então construir uma equação diferencial que determina as autofunções da Equação de Schrödinger [23]. Escrevendo então $\hat{H}\Psi\left(A,x\right)=\epsilon\Psi\left(A,x\right)$, teremos a seguinte equação diferencial

$$-\frac{e^{mx}}{8\pi\sqrt{\xi}}\left(-12\lambda^2kA\frac{\partial^2\Psi(A,x)}{\partial A^2}-12\lambda^2k\frac{\partial\Psi(A,x)}{\partial A}+\sigma m^2A\Psi(A,x)\right)=\epsilon\Psi \tag{6.2}$$

reorganizando os termos, nossa equação fica

$$A\frac{\partial^2\Psi}{\partial A^2}+\frac{\partial\Psi}{\partial A}-\left(\frac{m^2\sigma}{12\lambda^2k}A+\frac{2\pi\sqrt{\xi}}{3e^{mx}\lambda^2k}\epsilon\right)\Psi=0 \tag{6.3}$$

que nos leva a uma solução:

$$\Psi\left(A,x\right)=e^{-\frac{m}{2\lambda}\sqrt{\frac{\sigma}{3k}}a}\left(F_1(x)M\left(J,1,\frac{m}{\lambda}\sqrt{\frac{\sigma}{3k}}a\right)+F_2(x)U\left(J,1,\frac{m}{\lambda}\sqrt{\frac{\sigma}{3k}}a\right)\right) \tag{6.4}$$

onde F_1 e F_2 são funções complexas que depende apenas da coordenada x e é determinada a partir das condições de contorno sobre essa variável e

$$J = \frac{2\pi}{3}\sqrt{\frac{3\xi}{k\sigma}}\frac{e^{-mx}}{m\lambda}\epsilon + \frac{1}{2}.$$

As funções $M(a,b,z)$ e $U(a,b,z)$ são as Funções Hipergeométrica Confluentes, ou funções de Kummer [2]:

$$M(a,b,z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^{(n)}z^n}{b^{(n)}n!}$$

onde $a^{(0)} = 1$ e $a^{(n)} = a\,(a+1)\,(a+2)\cdots(a+n-1)$, enquanto $U(a,b,z)$

$$U(a,b,z) = \frac{\Gamma\,(1-b)}{\Gamma\,(a+1-b)}M(a,b,z) + \frac{\Gamma\,(b-1)}{\Gamma\,(a)}z^{1-b}M(a+1-b,2-b,z)$$

Através da função de onda temos todas as informações necessárias, pelo menos na interpretação ortodoxa da mecânica quântica [36, 28], para caracterizar o sistema físico e suas propriedades junto aos observáveis. O problema então é definir os autovalores da autofunção encontrada, para isso devemos que ter que J seja um número inteiro não positivo, garantindo o bom comportamento da função de onda (6.4):

$$\frac{2\pi}{3}\sqrt{\frac{3\xi}{k\sigma}}\frac{e^{-mx}}{m\lambda}\epsilon + \frac{1}{2} = -n.$$

Realizando as manipulações algébricas para isolar a auto-energia ϵ

$$\epsilon_n = -\frac{3m\lambda}{2\pi}\sqrt{\frac{k\sigma}{3\xi}}e^{mx}\left(n + \frac{1}{2}\right) \tag{6.5}$$

Uma vez que $n \in \mathbb{N}$, claramente esta expressão se assemelha às auto-energias do *Oscilador Harmônico Quântico*, com a diferença que em nosso caso elas podem ser negativas. Como estamos trabalhando no regime quântico fica claro que λ deve ser um número muito pequeno, e portanto podemos assumir numa primeira análise que tanto A quanto $\dot{A}$ são quantidade pequenas, o que nos leva a interpretar nossos resultados para um universo de Gödel-Obukhöv muito pequeno também. Realizando então uma expansão no parâmetro espacial x

$$\begin{aligned}\epsilon_n &= -\frac{3m\lambda}{2\pi}\sqrt{\frac{k\sigma}{3\xi}}e^{mx}\left(n+\frac{1}{2}\right)\\ \epsilon_n &= -\frac{3m\lambda}{2\pi}\sqrt{\frac{k\sigma}{3\xi}}\left(1+mx+\frac{(mx)^2}{2}+\cdots\right)\left(n+\frac{1}{2}\right).\end{aligned}$$

Se levarmos em conta que x deve ser muito pequeno no ínicio do Universo, então podemos desprezar os termos de ordem alta e ter apenas

$$\epsilon_n = -\frac{3m\lambda}{2\pi}\sqrt{\frac{k\sigma}{3\xi}}\left(n+\frac{1}{2}\right).$$

Assim a energia tem um máximo em $n = 0$ e $\lambda > 0$ e para valores maiores, temos energia cada vez mais negativas

$$\epsilon_0 = -\frac{3m\lambda}{4\pi}\sqrt{\frac{k\sigma}{3\xi}} \quad \text{e} \quad \epsilon_0 > \epsilon_1 > \epsilon_2 > \cdots \tag{6.6}$$

Expressões negativas de energia são incomuns, mas não impossíveis, já que o *Teorema da Positividade da Energia* [30] é provado válido apenas para os campos de matéria, e o nosso caso é puramente gravitacional. Uma maneira de contornar tais problema é imaginar que a adição de matéria no processo de quantização pode levar a um valor de $n_{\text{máx}}$ do qual a energia gravitacional não poderia decair mais, tornado o saldo de energia total do modelo de Gödel positivo ou pelo menos nulo, mas não completamente negativo.

Por outro lado, supondo $\lambda = -\omega < 0$, teremos auto-energias positivas associadas ao sistema, o que é mais comum e mais fácil de interpretar fisicamente.

$$\epsilon_0 = \frac{3m\omega}{4\pi}\sqrt{\frac{k\sigma}{3\xi}} \quad \text{e} \quad \epsilon_0 < \epsilon_1 < \epsilon_2 < \cdots \tag{6.7}$$

O valor de λ então só pode ser definido experimentalmente para podermos determinar o valor de ϵ_0.A dificuldade está em detectar qual o valor exato de ϵ_0 devido a sua dependência direta com os muitos parâmetros do modelo de Gödel-Obukhov, o que significa ainda um longo caminho para entender completamente os valores de energia envolvidos. Conseguimos assim uma expressão bastante clara baseada tanto nos conceitos consistentes da mecânica quântica, quanto da cosmologia, baseada na formulação TERG da mesma.

Capítulo 7

Consideração Finais

Neste trabalho propusemos uma possível solução para a quantização de energia gravitacional do modelo tipo-Gödel como feito por Obukhov, que descreve um universo preenchido por um fluido cósmico de densidade ε e pressão p, apresentando rotação e expansão simultaneamente. Isso é possível graças a formulação do *TERG*, que nos possibilita encontrar a (densidade de) energia gravitacional do modelo.

Houve dois objetivos em nossa proposta: a utilização de uma teoria que não a teoria da relatividade geral ao tentar descrever um Universo em rotação e expansão, apesar das evidências observacionais não serem conclusivas. Determinar uma equação de Schrödinger a partir da quantização da hamiltoniana clássica que descreve o universo de Gödel-Obukhov, pela regra de quantização de Weyl.

Para o primeiro problema recorremos à TERG como teoria base da gravitação que permitiu, a partir da métrica de Obukhov e assim determinar completamente o tensor de energia-momento gravitacional (sem adição de matéria) para esse Universo, com base em um conjunto de observadores co-móveis ao fluido que o preenche.

Através de tal tensor $t_{\mu\nu}$, expressamos a densidade de energia ε (já que a energia total do universo de Gödel-Obukhov é divergente) em termos do fator de escala $A(t)$ e sua respectiva derivada temporal $\dot{A}(t)$. O processo de quantização dessa densidade de energia nos leva então a um operador quântico hermitiano, o hamiltoniano $\hat{H}$ usando como base a versão quantizada dos operadores acima citados.

De posse do operador Hamiltoniano escrevemos uma equação de Schrödinger que avalia a evolução temporal da função de onda cosmológica que governa o comportamento da gravidade. Como resultado temos eq(6.4), com nível de complexidade bem alto. As constantes associados à normalização são obtidas garantindo que

$$\int_0^\infty dA|\Psi(A,x)|^2 = 1$$

para todo x [36].

A função de onda apresentada contém assim toda a informação que podemos obter deste sistema. Há ainda a questão, não explorada neste trabalho, de quantizar o próprio momento angular gravitacional diretamente pelo procedimento de Weyl. Então, trabalhar com a possibilidade de um Universo em rotação pode trazer luz à questões ainda em aberto, principalmente oriundas de recentes dados observacionais que estão se tornando cada vez mais acurados e precisos graças ao avanço tecnológico.

Com isso avançamos mais alguns passos para estabelecer os alicerces da Cosmologia Quântica nos moldes aqui apresentada. Novos desafios se impõe e que precisam ser elucidados com mais clareza, e esperamos que este trabalho possa ajudar no desenvolvimento de outros pesquisadores e futuros cientistas e cosmólogos.

Referências Bibliográficas

[1] R. Abraham, J. E. Marsden, T. Ratiu, and R. Cushman. *Foundations of mechanics*. Benjamin/Cummings Pub. Co, 2d ed., rev., enl., and reset edition, 1980.

[2] S. I. e. Abramowitz M. *Handbook of mathematical functions*. NBS, 10 edition, 1972.

[3] S. T. ALI and M. ENGLIŠ. Quantization methods: A guide for physicists and analysts. *Reviews in Mathematical Physics*, 17(04):391–490, 2005.

[4] J. D. Barrow and C. G. Tsagas. Dynamics and stability of the gödel universe. *Classical and Quantum Gravity*, 21(7):1773–1789, Mar 2004.

[5] M. Blagojevic. *Gravitation and gauge symmetries*. Series in High Energy Physics, Cosmology and Gravitation. Taylor & Francis, 1st edition, 2001.

[6] H. L. C, P. J. Pompeia, and N. Studart. A deflexão gravitacional da luz: De Newton a Einstein. *Revista Brasileira de Ensino de FÃsica*, 41, 00 2019.

[7] S. Carroll. *Spacetime and geometry: an introduction to General Relativity*. Benjamin Cummings, 2004.

[8] J. A. W. Charles W. Misner, Kip S. Thorne. *Gravitation*. Physics Series. W. H. Freeman, first edition edition, 1973.

[9] Y. M. Cho. Einstein lagrangian as the translational yang-mills lagrangian. *Phys. Rev. D*, 14:2521–2525, Nov 1976.

[10] L. Combi and G. E. Romero. Is teleparallel gravity really equivalent to general relativity? *Annalen der Physik*, 530(1):1700175, 2018.

[11] T. L. Curtright and C. K. Zachos. Quantum mechanics in phase space. *Asia Pacific Physics Newsletter*, 01(01):37–46, May 2012.

[12] A. da Silva Fernandes. Cosmologia quântica na gravidade teleparalela. Master's thesis, Universidade de Brasília, 2017.

[13] N. Dadhich. Derivation of the raychaudhuri equation. *arXiv preprint gr-qc/0511123*, 2005.

[14] S. R. Dahmen. Gödel e einstein: e quando o tempo não resiste à amizade? *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 28:531 – 539, 00 2006.

[15] D. F. L. Derek F. Lawden. *An Introduction to Tensor Calculus, Relativity, and Cosmology.* Wiley, 3rd ed edition, 1982.

[16] R. d'Inverno. *Introducing Einstein's relativity.* Clarendon Press; Oxford University Press, 1992.

[17] P. A. M. Dirac. *Principles of Quantum Mechanics, The.* International series of monographs on physics. Oxford University Press, 4th revised edition, 1978.

[18] A. S. Fernandes, S. C. Ulhoa, and R. G. G. Amorim. On quantum cosmology in teleparallel gravity. *Journal of Physics: Conference Series*, 965:012014, feb 2018.

[19] R. P. Feynman. *Feynman lectures on gravitation.* Frontiers in Physics. Addison-Wesley, 1st edition, 1995.

[20] G. Gamow. Expanding universe and the origin of elements. *Phys. Rev.*, 70:572–573, Oct 1946.

[21] K. Gödel. An example of a new type of cosmological solutions of einstein's field equations of gravitation. *Rev. Mod. Phys.*, 21:447–450, Jul 1949.

[22] M. J. Gotay, H. B. Grundling, and G. M. Tuynman. Obstruction results in quantization theory. *Journal of Nonlinear Science*, 6(5):469–498, Sep 1996.

[23] D. J. Griffiths. *Introduction to quantum mechanics.* Prentice Hall, 1st edition, 1995.

[24] H. Groenewold. On the principles of elementary quantum mechanics. *Physica*, 12(7):405 – 460, 1946.

[25] D. Halliday, R. Resnick, and J. Walker. *Fundamentos de Fisica: gravitação, ondas e termodinâmica: volume 2*. LTC, 2008.

[26] K. Hayashi and T. Shirafuji. New general relativity. *Phys. Rev. D*, 19:3524–3553, Jun 1979.

[27] J. D. N. James Foster. *A short course in general relativity*. Longman mathematical texts. Longman, 1979.

[28] O. P. Jr. *Conceitos de Física Quântica*, volume 1. Editora Livraria da Física, 2 edition, 2005.

[29] V. A. KOROTKY and Y. N. OBUKHOV. On cosmic rotation. *Gravity, Particles and Space-Time*, pages 421–439, 1996.

[30] L. E. Landau L.D. *The classical theory of fields*, volume Volume 2. Butterworth Heinemann, 4 edition, 1980.

[31] C. Lima. Constrained quantization: Summer training activities cbpf, 2019.

[32] J. Maluf. Hamiltonian formulation of the teleparallel description of general relativity. *Journal of Mathematical Physics*, 35:335–343, jan 1994.

[33] J. W. Maluf. The teleparallel equivalent of general relativity. *Annalen der Physik*, 525(5):339–357, 2013.

[34] N. H. McCoy. On the function in quantum mechanics which corresponds to a given function in classical mechanics. *Proc Natl Acad Sci U S A.*, 18(11):674–676, 1932.

[35] C. Møller. Further remarks on the localization of the energy in the general theory of relativity. *Annals of Physics*, 12(1):118 – 133, 1961.

[36] N. P. Neto. *Teoria e Interpretações da Mecânica Quântica*. Coleção CBPF - Tópicos de Física. Editora Livraria da Física, 1st edition, 2010.

[37] E. Noether. Invariant variation problems. *Transport Theory and Statistical Physics*, 1(3):186–207, Jan 1971.

[38] M. Novello. *Cosmologia*. Coleção CBPF - Tópicos de Física. Editora Livraria da Física, 2010.

[39] Y. Obukhov and T. Vargas. Gödel type solution in teleparallel gravity. *Physics Letters A*, 327(5):365 – 373, 2004.

[40] Y. N. Obukhov. On physical foundations and observational effects of cosmic rotation, 2000.

[41] P. Peres. Viagens no tempo no universo de gödel. *https://www.math.tecnico.ulisboa.pt*, 2013.

[42] J. G. P. Ruben Aldrovandi. *Teleparallel Gravity: An Introduction*. Fundamental Theories of Physics. Springer, 2013 edition, 2012.

[43] J. J. Sakurai. *Modern quantum mechanics*. Addison-Wesley Pub. Co, rev. ed edition, 1994.

[44] F. Scheck. *Classical Field Theory: On Electrodynamics, Non-Abelian Gauge Theories and Gravitation*. Graduate Texts in Physics. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1 edition, 2012.

[45] K. Schwarzschild. On the gravitational field of a mass point according to einstein's theory. *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)*, 1916.

[46] J. R. Shewell. On the formation of quantum-mechanical operators. *American Journal of Physics*, 27(1):16–21, 1959.

[47] T. O. Sin-itiro Tomonaga. *The story of spin*. University of Chicago Press, 1997.

[48] M. M. Stephani H., Kramer D. *Exact solutions of Einstein's field equations*. Cambridge monographs on mathematical physics. Cambridge University Press, 2nd ed edition, 2003.

[49] G. F. R. E. Stephen W. Hawking. *The large scale structure of space-time*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 1975.

[50] J. Stewart. *Calculus*. Brooks/Cole, 4th ed edition, 1999.

[51] E. Sviestins. *Rotating relativistic models of the universe : construction and interpretation / Egils Sviestins*. University of Stockholm, Institute of Theoretical Physics Stockholm, 1983.

[52] I. Todorov. "quantization is a mystery", 2012.

[53] V. Tunyak. Conservation laws in the tetrad formulation of the general theory of relativity. *Russian Physics Journal*, 22:194–197, 02 1979.

[54] S. C. ULHOA, A. F. SANTOS, and R. G. G. AMORIM. On the energy–momentum flux in gÖdel-type models. *Modern Physics Letters A*, 28(10):1350039, 2013.

[55] K. V. V. I. Arnold, A. Weinstein. *Mathematical Methods Of Classical Mechanics*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 2nd edition, 1989.

[56] E. C. Vagenas, S. C. Ulhoa, and R. G. G. Amorim. On teleparallel quantum gravity in schwarzschild space-time. *Advances in High Energy Physics*, 2014:6, 2014.

[57] R. M. Wald. *General relativity*. University of Chicago Press, first edition edition, 1984.

[58] S. Weinberg. *Gravitation and cosmology: principles and applications of GR*. John Wiley & Sons, Inc., first edition edition, 1972.

[59] S. Weinberg. *Cosmology*. Oxford University Press, USA, oup edition, 2008.

[60] S. H. Øyvind Grøn. *Einstein's general theory of relativity: with modern applications in cosmology*. Springer, 1 edition, 2007.