



UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

# **FILTRO DE KALMAN APLICADO NO ENSINO MÉDIO**

**SIDNEY CLAUDINO SILVESTRE**

Brasília, 2020

**SIDNEY CLAUDINO SILVESTRE**

**FILTRO DE KALMAN APLICADO NO ENSINO MÉDIO**

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos do Programa de Mestrado Profissionalizante em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, para obtenção do grau de

**Mestre**

Orientador: Prof. Dr. Vinicius de Carvalho Rispoli

Brasília  
2020

Ficha catalográfica elaborada automaticamente,  
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

SS587f Silvestre, Sidney Claudino  
Filtro de Kalman Aplicado no Ensino Médio / Sidney  
Claudino Silvestre; orientador Vinicius de Carvalho  
Rispoli. -- Brasília, 2020.  
86 p.

Dissertação (Mestrado - Mestrado Profissional em  
Matemática) -- Universidade de Brasília, 2020.

1. Filtro de Kalman. 2. Probabilidade. 3. Distribuição  
Gaussiana. 4. Sequência Didática. I. Rispoli, Vinicius de  
Carvalho, orient. II. Título.

**SIDNEY CLAUDINO SILVESTRE**

**FILTRO DE KALMAN APLICADO NO ENSINO MÉDIO**

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos do Programa de Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT, para obtenção do grau de

**MESTRE EM MATEMÁTICA**

Brasília, 30 de Setembro de 2020

Banca Examinadora

---

Prof. Vinicius de Carvalho Rispoli - Mat/UnB  
(Orientador)

---

Prof. Dr. Matheus Bernardini de Souza - FGA/UnB  
(Membro 1)

---

Profa. Dra. Rafaela Fernandes do Prado - IFB  
(Membro 2)

*Dedico este trabalho aos meus pais, José Silvestre e Cecília, ao meu filho João Vinícius e a minha esposa Caroline, pois é na instituição chamada família em que encontro a base para todas as minhas conquistas.*

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço, em primeiro lugar, a Deus, que está ao meu lado todos os dias me dando força para nunca desistir dos meus sonhos e objetivos, alimentando minha esperança por um “amanhã” ainda melhor e por ter proporcionado a um menino da periferia, de escola pública, porém com muitos sonhos, a oportunidade de atingir seus objetivos e ir além do que muitos imaginavam.

Aos meus pais, por sempre terem me estimulado e mostrado que o único caminho para o sucesso passa pela dedicação e pelos estudos, e por nunca terem deixado que eu desistisse dos meus sonhos.

A todos os colegas de turma do PROFMAT, que sempre se mostraram solícitos, e, em especial, aos queridos Francisco Wagner, Douglas, Clébia, Cláudio, Fabiano, Rodrigo, Mayco e Juci, com os quais desfrutei grandes momentos de estudo e de crescimento intelectual.

Agradeço a todos os funcionários do Departamento de Matemática e do Instituto de Ciências Exatas da UNB, em especial aos professores do PROFMAT e ao meu orientador, professor Dr. Vinicius de Carvalho Rispoli que sempre se mostrou dedicado e pronto para ajudar a todos os alunos nesse processo que não foi nada fácil.

A todos que acreditaram em mim, que me apoiaram e que sempre me estimularam a continuar nessa empreitada.

Ao CNPq/CAPES pelo apoio e por manter um Mestrado Profissional de tão alto nível e de grande relevância para o processo de formação de professores.

## RESUMO

Este trabalho tem como foco a aplicação do Filtro de Kalman em situações problemas que recaiam em comportamentos lineares e Gaussianos, com vistas à utilização no ensino básico. São apresentadas algumas sugestões de aplicabilidade e a construção de roteiros para mostrar o funcionamento do Filtro de Kalman em situações reais e que contemple o contexto de um estudante do ensino básico, sendo que para se chegar a esse ponto, será necessário passar por toda a construção do método desenvolvido por Kalman, por algumas técnicas de operações algébricas e aritméticas, aprofundadas nos estudos de matrizes, estatística e probabilidade. Portanto, a realização deste trabalho, além de fomentar a aplicação do filtro de Kalman, também possui como objetivo subsidiar o professor para a aplicação do método em sua sala de aula, por meio de situações simples e do cotidiano de seu aluno, sendo que, para isso, basta seguir os passos descritos por meio de uma sequência didática proposta para aplicação no ensino médio.

**Palavras-chave:** Filtro de Kalman. Probabilidade. Distribuição Gaussiana. Ruído. Sistema linear dinâmico. Sequência didática.

## ABSTRACT

This research focuses on the application of the Kalman filter in situations that relapse into linear and Gaussian behaviors, with a view to use in basic education. Some suggestions of applicability and the construction of scripts to show the functioning of the Kalman filter in real situations and that contemplates the context of a student of basic education are presented. To reach this point, it will be necessary to go through all the construction of the method developed by Kalman, by some techniques of algebraic and arithmetic operations, deepened in the study of matrices, statistics and probability. Therefore, the accomplishment of this work, besides promoting the application of the Kalman filter, also has the objective of subsidizing the teacher for the application of the method in his classroom, through simple situations and the daily life of his student, being enough to follow the steps described through a didactic sequence proposed for the application in high school.

**Key-words:** Kalman filter, probability, gaussian distribution, noise, dynamic linear system, didactic sequence.



## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Distribuição de Probabilidade Gaussiana .....	25
Figura 2 – Elementos da Função de Distribuição Gaussiana .....	26
Figura 3 – Nível de água em um tanque .....	49
Figura 4 – Posições do veículo .....	65
Figura 5 – Posição provável do automóvel .....	67
Figura 6 – Posições do automóvel .....	68
Figura 7 – Ganho de Kalman.....	69
Figura 8 – Comparando o Ganho de Kalman e Estimando a Posição do Automóvel.....	70
Figura 9 – Posição do automóvel para $t = 2$ .....	71

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Exemplo de matriz de variância-covariância para três variáveis .....	31
Tabela 2 – Fases da estimativa .....	45
Tabela 3 – Valores obtidos para fase de Previsão e Atualização .....	53
Tabela 4 – Tanque enchendo a uma taxa constante.....	55

## LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1 – Estimando o nível do tanque .....	54
Gráfico 2 - Estimando o Nível no Tanque para $q = 0,001$ .....	55
Gráfico 3 – Estimando o Nível do Tanque para $q = 0,01$ .....	56
Gráfico 4 – Estimando o Nível do Tanque para $q = 0,1$ .....	57
Gráfico 5 – Estimando o Nível do Tanque para $q = 1$ .....	57
Gráfico 6 – Ruído de medição real de $\pm 0,3$ .....	62
Gráfico 7 – Filtro usando um nível constante .....	63
Gráfico 8 – Resultado para $c = 0,5$ , $r = 0,05$ e $l = 1$ .....	64

# SUMÁRIO

<b>INTRODUÇÃO .....</b>	<b>14</b>
<b>1. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA PARA APLICAÇÃO DO FILTRO DE KALMAN</b>	<b>17</b>
<b>1.1 Estatística Básica .....</b>	<b>18</b>
1.1.1 <i>Medidas de Centralidade .....</i>	18
1.1.2 <i>Medidas de dispersão.....</i>	20
<b>1.2 Analisando ruídos.....</b>	<b>21</b>
<b>1.3 Variável aleatória .....</b>	<b>22</b>
1.3.1 <i>Variáveis aleatórias discretas .....</i>	23
1.3.2 <i>Variáveis aleatórias contínuas .....</i>	24
<b>1.4 Distribuição Gaussiana ou Distribuição Normal.....</b>	<b>24</b>
1.4.1 <i>Média e Variância da Distribuição Gaussiana ou Normal.....</i>	27
<b>1.5 Vetores Aleatórios .....</b>	<b>29</b>
1.5.1 <i>Matriz de covariância.....</i>	30
1.5.2 <i>Matriz de Variância .....</i>	31
<b>1.6 Sistema Dinâmico Linear .....</b>	<b>32</b>
<b>2. FILTRO DISCRETO .....</b>	<b>35</b>
<b>2.1 Modelo padrão para aplicação da Filtragem Discreta .....</b>	<b>35</b>
<b>2.2 Equações do Filtro de Kalman .....</b>	<b>36</b>
<b>2.3 Equações de Previsão - Atualização.....</b>	<b>38</b>
<b>2.4 Ganho de Kalman Ideal .....</b>	<b>41</b>
<b>2.5 Ajustando o Filtro de Kalman .....</b>	<b>46</b>
<b>2.6 Modelo alternativo para fase de previsão.....</b>	<b>46</b>
<b>3. APLICAÇÕES DO FILTRO DE KALMAN.....</b>	<b>49</b>
<b>3.1 Modelagem 1: Estimando o nível de água em um tanque.....</b>	<b>49</b>
3.1.1 <i>Primeira opção: um modelo estático.....</i>	50
3.1.2 <i>Segunda opção: um modelo para enchimento do tanque.....</i>	58
3.1.3 <i>Terceira opção: Constante, mas instável (com ondulações) .....</i>	63
<b>3.2 Modelagem 2: Estimando a posição de um automóvel.....</b>	<b>65</b>
<b>4. SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA APLICAÇÃO DO FILTRO KALMAN NO ENSINO MÉDIO .....</b>	<b>73</b>

<b>4.1 Sequência didática como um recurso pedagógico .....</b>	<b>73</b>
<i>4.1.1 A sequência .....</i>	<i>75</i>
<b>4.2 Uma sequência didática para aplicação do Filtro de Kalman.....</b>	<b>76</b>
<b>5. CONSIDERAÇÕES FINAIS .....</b>	<b>86</b>
<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>87</b>

## INTRODUÇÃO

O Filtro de Kalman é uma excelente ferramenta matemática para produzir previsões do estado de um sistema, usando medidas estatísticas coletadas dentro de um intervalo de tempo, desenvolvido pelo matemático Rudolf Emil Kalman e publicado em 1960 em seu trabalho "*A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems*", cujo contexto era a disputa pela corrida espacial entre a União Soviética e os Estados Unidos, evidenciando um possível estudo voltado para aplicação aeroespacial. O filtro tem como base principal verificar, dentro de um processo de controle ou medidas, as incertezas intrínsecas associadas ao sistema e/ou objeto de controle (termômetro, velocímetro, GPS, balança, etc.) com o intuito de criar um modelo analítico que expresse o comportamento do erro, baseado em uma modelagem matemática para que se possa maximizar a precisão de uma medida ou informação.

Um exemplo prático da atuação do Filtro de Kalman no cotidiano de boa parte das pessoas, se dá com a utilização do GPS. A atuação do Filtro fica evidente quando, por exemplo, o GPS orienta a pessoa a fazer uma curva à direita e por motivo de distração o comando não foi obedecido e seguiu-se em linha reta. O tempo que o GPS leva para identificar que a pessoa não seguiu a orientação e prosseguiu em linha reta, corresponde ao instante em que ele começará a recalcular a rota, sendo que quanto menor esse intervalo de tempo para a identificação no não cumprimento da trajetória, menor será o ruído do sensor e o Filtro de Kalman estará atuando de forma a potencializar a estimativa do estado.

O Filtro de Kalman é considerado por muitos o grande avanço da teoria de estimação do século XX. Muitas realizações que ocorreram desde a sua introdução talvez não fossem possíveis sem ele. As principais aplicações da filtragem de Kalman estão nos sistemas de controle modernos, na navegação e no rastreamento de todos os tipos de veículos.

A teoria da estimação teve seu desenvolvimento aguçado por estudos astronômicos, que foram intensificados pela corrida espacial, na segunda metade do século XX, sendo que Rudolf Kalman teve sua significativa contribuição ao desenvolver um algoritmo de filtragem, ao qual leva seu nome, Filtro de Kalman (KF).

É reconhecido e considerado, por muitos, até hoje, o principal trabalho científico sobre estimação de estados, sendo uma das principais saídas para muitos problemas do setor aeroespacial. O impacto do filtro de Kalman se solidifica com aplicações em diversas áreas da matemática aplicada. O KF mostrou-se fundamental no sucesso do programa Apollo, que enviou os primeiros humanos à Lua. O filtro Kalman e suas extensões posteriores a problemas não lineares talvez representem o subproduto mais amplamente aplicado na teoria de controle moderno. Assim, como exemplos de sua diversidade, podem-se mencionar os ônibus espaciais da NASA, os submarinos da marinha dos EUA, as armas aeroespaciais, como mísseis de cruzeiro, pilotos automáticos, processamento de dados sísmicos, usina nuclear instrumentação, controle de processo, previsão do tempo, econometria, monitoramento de saúde, processamento de dados médicos, visão computacional, gerenciamento e controle de tráfego, posicionamento, rastreamento, navegação e controle do motor, entre outros. Nesse sentido:

A primeira aplicação prática para o Filtro de Kalman foi encontrada por Stanley F. Shimidt que trabalhava no projeto Apollo da NASA cujo objetivo era levar uma nave à Lua e trazê-la de volta à Terra. No momento ele tinha problemas na estimação de trajetórias e controle. Shimidt trabalhou no que seria a primeira implementação completa do Filtro de Kalman e tornou o mesmo parte integrante do sistema de controle da Apollo. Também por inuência de Shimidt, o Filtro de Kalman foi incluído no sistema de navegação do cargueiro aéreo C5A. Neste caso, o Filtro de Kalman resolveu o problema da fusão sensorial, quando combinou dados de radar com aqueles provenientes de sensores inerciais para estimar a trajetória do avião. Desde então o Filtro de Kalman vem sendo parte integrante da maioria dos sistemas *onboard* de estimação de trajetória e controle em aeronaves. (GONÇALVES, 2005, p.52)

O Filtro de Kalman pode ser usado para prever o comportamento de sistemas que são, ou não, controlados pelo ser humano, como, por exemplo, a localização instantânea de um automóvel, a reconstrução de uma trajetória, o posicionamento de um satélite, o movimento de corpos celestes, o rastreamento de um objeto, a fusão de dados de um radar, as medições de profundidades estabilizadoras, entre outros. O filtro de Kalman possui aplicação nas mais diversas áreas do conhecimento, entre elas, física, química, biologia, medicina, computação, matemática, engenharia, economia e etc. Com isso, fica evidente que a utilização do filtro é muito ampla e tem sua potencialidade voltada para comportamentos lineares e Gaussianos, podendo ser aplicados recursivamente. Se o sistema não for linear, uma boa saída é a aplicação

de métodos de aproximação Gaussiana. Para aplicações que recaiam em restrições não lineares, o leitor pode consultar a referência (TEXEIRA; TÔRRES; AGUIRRE, 2019).

Portanto, uma descrição simples e direta para o filtro de Kalman pode ser dada da seguinte forma: conjunto de equações matemáticas que constitui um processo recursivo de estimação, sendo possível constatar que é um procedimento aplicável quando os modelos estão escritos sob a forma espaço-estado. Além disso, o KF permite a estimação dos parâmetros desconhecidos do modelo por meio da minimização de um erro de previsão que, propriamente, se trata de uma forma de minimizar a média do erro ao quadrado para, assim, obter uma estimativa o mais próximo possível do seu valor real. O filtro é muito poderoso em vários aspectos, suporta estimativas de estados passados, presentes e até futuros. Para mais detalhes sobre o estudo a teoria da estimação, veja (FERNANDES, 2019; GONÇALVES, 2005).

No primeiro capítulo desta dissertação, abordaremos a fundamentação teórica essencial para a aplicação do Filtro de Kalman, passando por toda a análise probabilística e algébrica necessária para a sua colocação em prática.

Em seguida, no segundo capítulo, são apresentados o modelo de filtragem, as equações associadas ao KF e uma forma de ajustar as equações para que se obtenha uma melhor precisão na estimativa.

Posteriormente, no terceiro capítulo, trabalhamos duas aplicações do Filtro de Kalman, seguindo as etapas propostas no capítulo anterior.

Por fim, no quarto capítulo, é abordado o conceito de uma sequência didática. Para concluir, é sugerida uma sequência didática para aplicação do referido conceito no Ensino Médio.



# CAPÍTULO 1

## FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA PARA APLICAÇÃO DO FILTRO DE KALMAN

A teoria de filtragem de Kalman é baseada no uso de duas fontes de informações incertas: uma modelagem matemática que represente a situação problema (em que podemos ter um erro associado a possíveis aproximações) e as medições (em que podemos ter um erro associado à imprecisão do objeto de medida). Porém, nas situações em que é possível verificar ou colher alguma informação sobre o sistema, essa poderá ser outra fonte de informação para melhorar as estimativas e maximizar a precisão dos resultados a serem obtidos.

Com a modelagem da situação problema (função matemática que melhor represente a situação real), é possível, com um valor de entrada (domínio da função) na equação, obter um valor de saída (imagem da função). Logo, há uma previsão de como o sistema se comporta. Agora, com um sensor se avança para a segunda etapa, que é a medição. Com isso, teremos duas informações, uma obtida matematicamente e a outra por meio de uma medição/aferição, sendo que o ponto-chave é uma média ponderada entre as duas informações.

Kalman, em sua teoria, colocou em prática que quanto mais incerteza se tem na medida do sensor, mais peso nessa média ponderada se dará para a modelagem, ou vice-versa; isto é, quanto mais incerteza se tem com a modelagem, mais peso se dará para a medida do sensor. Esse processo continuará recursivamente até se obter a informação mais precisa que possa representar a situação problema. Logo, um processo estatístico de controle das medidas de centralidade (média) e dispersão (variância) é fundamental para a obtenção do resultado mais preciso possível. Vale observar que essa técnica de filtragem, utilizando as médias ponderadas, é válida para sistemas ou modelagens lineares; para situações não lineares, é bem usual linearizar a modelagem a cada medida, utilizando, assim, a aplicação de métodos de aproximações Gaussianas. Com isso, poderão ser estimados os estados passados, o estado presente e mesmo previstos os estados futuros.

Podemos perceber que o Filtro de Kalman é uma ferramenta muito poderosa quando se trata de controlar sistemas ruidosos; portanto, para que sua aplicação

ocorra de forma eficiente e eficaz, precisamos abordar alguns conceitos algébricos e probabilísticos com o intuito de tornar determinados pontos o mais claro possível, sendo que, para isso, utilizaremos as próximas seções para alguns detalhes.

## 1.1 Estatística Básica

A estatística, sendo a ciência que estuda a coleta, a organização, a classificação, a análise, o registro e interpretação de dados por amostras, terá uma grande importância para os estudos, análises e abordagens que teremos neste trabalho. Portanto, tangenciaremos alguns conceitos que serão de suma importância para o desenvolvimento e aplicação do Filtro de Kalman, entre eles as medidas de centralidade e de dispersão.

### 1.1.1 Medidas de Centralidade

São medidas que representam um único valor, entorno do qual os dados da variável em observação se distribuem. As três medidas de centralidade com maior usabilidade são:

*Moda*: é definida como o valor que aparece com maior frequência dentre os valores observados, ou seja, é o dado que aparece mais vezes. Sendo que esse conjunto de dados da amostra pode ser amodal (nenhuma moda, com isso, nenhum valor se repete), unimodal (uma moda, com isso, teremos um único valor com maior frequência), bimodal (duas modas, com isso, dois valores com a maior frequência) ou multimodal (três ou mais modas, com isso, três ou mais valores com a maior frequência). Representaremos a moda de uma amostra por  $M_o$ .

*Mediana*: é a medida que ocupa a posição central do conjunto de dados, ou seja, a metade das observações estará antes da mediana e a outra metade estará após. Representaremos a mediana de uma amostra por  $M_{ed}$  e para determinar seu valor é preciso organizar os dados e, em seguida, verificar se o número de elementos da amostra é par ou ímpar. Ao ordenar os dados em ordem crescente (ou decrescente) da forma  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ , em que  $n$  é a quantidade de elementos na amostra, há dois casos a serem considerados:

Sendo  $n$  ímpar, a mediana será encontrada da seguinte forma:

$$M_{ed} = x_{\frac{n+1}{2}} \quad (1.1)$$

em que  $x_{\frac{n+1}{2}}$  é o valor do elemento que se encontra na posição  $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ , se  $n$  par, a mediana será encontrada da seguinte forma:

$$M_{ed} = \frac{x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}}{2} \quad (1.2)$$

em que  $x_{\frac{n}{2}}$  e  $x_{\frac{n}{2}+1}$  são os valores dos elementos que se encontram na posição  $\left(\frac{n}{2}\right)$  e  $\left(\frac{n}{2} + 1\right)$ , respectivamente.

*Média:* é a medida que representa o ponto de concentração dos valores de um conjunto de dados, ou seja, o valor médio entre todos os valores da amostra, podendo ser utilizada para representar um conjunto de dados, tabelados ou não. Essa medida de centralidade pode ser subdividida em *média aritmética simples* e *média aritmética ponderada* e a representaremos por  $\bar{X}$ .

*Média Aritmética Simples:* Nada mais é do que a razão entre a soma dos valores observados pela quantidade de elementos da amostra.

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad (1.3)$$

em que  $x_i$  é o valor observado do  $i$  – ésimo dado e  $n$  é a quantidade de elementos da amostra.

*Média Aritmética ponderada:* Uma média aritmética será considerada ponderada se os valores observados tiverem pesos diferentes:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \cdot P_i}{\sum_{i=1}^n P_i} \quad (1.4)$$

em que  $x_i$  é o valor observado do  $i$ -ésimo dado e  $P_i$  é o respectivo peso.

### 1.1.2 Medidas de dispersão

São as medidas que representam o grau de variação entre a média e os elementos de um conjunto de dados, ou seja, mostra o quão próxima ou distante uma distribuição está da sua média. Essas medidas nos possibilitam realizar uma análise mais completa do fenômeno a ser estudado, permitindo comparar fenômenos de mesma natureza e mostrando de que forma os valores se afastam ou aproximam do valor de tendência central. Algumas medidas de dispersão com maior usualidade são o desvio, a variância e o desvio padrão. É comum utilizarmos as medidas de dispersão com intuito de confronta-las com as medidas de tendência central e, juntas, elas serão utilizadas em algumas propriedades de distribuições.

*Desvio Médio:* o Desvio Médio nada mais é do que uma medida de dispersão dos dados em relação à média de uma amostra, ou seja, analisa o “distanciamento” em relação a essa média. Esta medida trabalha com a média das distâncias entre cada elemento da amostra e seu valor médio, a representaremos por  $Dm$  e seu valor é calculado da seguinte forma:

$$Dm = \frac{|x_1 - \bar{X}| + |x_2 - \bar{X}| + |x_3 - \bar{X}| + \dots + |x_n - \bar{X}|}{n} \quad (1.5)$$

em que  $\bar{X}$  é a média aritmética de uma amostra de números  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  e  $n$  é a quantidade de elementos.

*Variância:* a Variância de uma amostra nada mais é do que a medida de dispersão que mostra o quão distante cada elemento desse conjunto está do valor central (média), ou seja, quanto menor é a variância, mais próximos os valores estão da média e quanto maior ela é, mais os valores estão distantes da média. A representaremos por  $V$  e seu valor será calculado da seguinte forma:

$$V = \frac{(x_1 - \bar{X})^2 + (x_2 - \bar{X})^2 + (x_3 - \bar{X})^2 + \dots + (x_n - \bar{X})^2}{n} \quad (1.6)$$

em que  $\bar{X}$  é a média aritmética de uma amostra de números  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  e  $n$  é a quantidade de elementos da amostra.

*Desvio Padrão:* o Desvio Padrão nada mais é do que uma medida que expressa o grau de dispersão de um conjunto de dados, ou seja, o desvio padrão indica a concentração dos dados em torno da média (o quanto está mais próximo ou distante da média); portanto, quanto mais próximo de 0 for o desvio padrão, mais homogêneo são os dados, com isso, um desvio pequeno indica que os dados estão mais próximos da média, já quando o desvio padrão é alto, temos o indício que os dados se espalham ao longo dos valores. Representaremos o desvio padrão por  $Dp$  e seu valor será exatamente a raiz quadrada da variância; portanto, teremos:

$$Dp = \sqrt{V}, \text{ ou} \tag{1.7}$$

$$Dp = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{X})^2 + (x_2 - \bar{X})^2 + (x_3 - \bar{X})^2 + \dots + (x_n - \bar{X})^2}{n}}$$

## 1.2 Analisando ruídos

De forma generalista, o ruído é uma contribuição indesejada, que proporciona o incremento de um erro associado à medida ou modelagem de uma situação problema. Existem estudos sobre vários tipos de ruídos relacionados a um contexto definido.

Neste trabalho mencionaremos ruído relacionados a processos de medição, por meio de um sensor qualquer e ruídos associados a estimativas.

O ruído num processo de medição, modelagem ou estimativa, estará diretamente relacionado aos erros associados aos respectivos processos, podendo existir vários fatores para a contribuição do aumento ou diminuição do erro dentro de uma etapa de estimativa, entre eles, fatores climáticos, temperatura ambiente, ajuste inadequado de um aparelho de medição, modelagem equivocada de uma situação problema, entre outros.

É de suma importância darmos a devida atenção a modelagem do ruído, para que se possa minimizar o erro e entender de maneira mais fidedigna o que está ocorrendo em uma dada situação.

Vale observar que para uma estimativa precisa dos valores de um processo dependente do tempo, temos que modelar o próprio processo, incluindo ruídos futuros. A solução “ótima” para um problema que possua ruídos e que esteja representado na forma espaço-estado, pode ser alcançada com a aplicação de um Filtro Kalman apropriado.

### 1.3 Variável aleatória

Uma variável aleatória é representada pelo resultado numérico de um experimento aleatório dentro de um espaço amostral conhecido. Vejamos alguns exemplos de variável aleatória: o resultado que se pode obter com um lançamento de uma moeda (cara ou coroa), lançamento de um dado (face 1, 2, 3, 4, 5 ou 6), a altura de um estudante dentro de uma turma, o tempo decorrido do plantio até a germinação de uma determinada semente, entre outros.

Uma variável aleatória  $X$  será definida pela função  $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , em que  $\Omega$  é o espaço amostral de todos os resultados possíveis do experimento aleatório correspondente. Ao relacionarmos essa análise à probabilidade, teremos uma função de distribuição de probabilidade associada à uma variável aleatória.

Vamos considerar que o espaço amostral  $\Omega$  é um conjunto finito ou infinito enumerável e que  $\wp(\Omega)$  é o conjunto das partes de  $\Omega$ . A função de distribuição de probabilidade da variável aleatória  $X$  é definida por

$$P: \wp(\Omega) \rightarrow [0,1]$$

$$A \mapsto P(A),$$

com  $P(\Omega) = 1$ , e se os eventos  $A$  e  $B$  são tais que  $A \subseteq B \subseteq \Omega$  teremos que  $P(A) \leq P(B)$ . Dados dois eventos  $A$  e  $B$ , eles serão independentes se  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ .

Também é pertinente descrever uma variável aleatória  $X$  por meio de sua função de distribuição cumulativa de probabilidade, assim para para  $a \in \mathbb{R}$  define-se a distribuição cumulativa de probabilidade como sendo

$$P(X \leq a) = P(\{\omega : \omega \in \Omega \wedge X(\omega) \leq a\}).$$

A função densidade de probabilidade  $f_X: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  satisfaz a seguinte relação:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x) dx.$$

Portanto, podemos chegar à conclusão que uma variável aleatória é uma variável que pode assumir diferentes valores numéricos, definidos para um evento de um espaço amostral  $\Omega$ . As variáveis aleatórias se subdividem em duas: as variáveis aleatórias discretas e as variáveis aleatórias contínuas.

### 1.3.1 Variáveis aleatórias discretas

Uma variável aleatória discreta pode ser classificada como uma função  $X$ , definida no espaço amostral  $\Omega$  e assumindo valores em um conjunto enumerável de possibilidades; portanto, ela pode assumir valores que podem ser contados, ou seja, estarão associadas a um valor finito ou finito enumerável. A seguir, temos alguns exemplos que estão associados à variável aleatória discreta:

Considere o lançamento de dois dados honestos e que seja definida uma variável aleatória  $X$  como a soma das faces superiores. Nessa situação temos um exemplo de variável aleatória discreta (finita), pois as possibilidades para  $X$  se resumem a  $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 \text{ e } 12\}$ , vale observar que teremos um valor inteiro em todas as possíveis resultados para soma das duas faces, de modo que não existe a possibilidade da soma dar um valor decimal, como 6,3 por exemplo, portanto os resultados correspondem as possibilidades do espaço amostral  $\Omega$ . Já uma variável aleatória  $Y$  que está relacionada ao número pontos que pertencem a uma circunferência é um exemplo de variável aleatória discreta (infinita), pois existe uma infinidade de pontos que pertencem a circunferência, porém nunca terá a metade de um ponto sobre a circunferência, ou seja, não haverá frações no número do número de pontos, sendo que as possibilidades para  $Y$  poderão ser expressas por  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, \dots, 1000, \dots\}$ . A primeiro momento o resultado não é conhecido, mas é sempre possível de se determinar. Entre outros exemplos de situações que podem ser representadas variáveis aleatórias discretas, está o número de pessoas infectadas por um vírus, o número de coras em três lançamentos de uma moeda, o número de peças com defeito, etc. Temos algumas distribuições de probabilidade discretas bastante utilizadas, as que mais se destacam são a distribuição binomial, a distribuição geométrica, a distribuição de Bernoulli, a distribuição hipergeométrica e a distribuição de Poisson

### 1.3.2 Variáveis aleatórias contínuas

Uma variável aleatória contínua pode ser classificada como uma função  $X$ , definida no espaço amostral  $\Omega$  e pode assumir qualquer valor numérico em um determinado intervalo de números reais. Isto é, uma variável aleatória contínua nada mais é do que uma variável para a qual o conjunto de possibilidades que ela fornece é um conjunto infinito não enumerável. A seguir, temos alguns exemplos que estão associados à variável aleatória contínua:

O resultado da corrida dos 100m rasos nas Olimpíadas é um exemplo de variável aleatória contínua. Sabe-se que os valores esperados para o resultado poderão assumir uma infinidade de possibilidades, dentro no intervalo de tempo entre 7 segundos a 14 segundos (vale observar que, até a presente data, o recorde mundial dos 100m rasos pertence a Usain Bolt com a marca de 9,58s), pois sempre existirá uma fração ou decimal para medir a menor diferença possível entre os resultados obtidos, como, por exemplo, 10 segundos, 2 décimos de segundos, 5 centésimos de segundos e assim por diante. Então,  $X$  é uma variável aleatória contínua que assume valores no intervalo  $[7, 14]$ . Entre outros exemplos de variáveis aleatórias contínuas, estão valores de velocidade, peso, altura, temperatura, etc. Entre as distribuições de probabilidade contínuas mais conhecidas temos a distribuição Gaussiana (também chamada distribuição normal), distribuição uniforme contínua, distribuição exponencial e a distribuição Gama. Abordaremos de forma mais detalhada a Distribuição Gaussiana, pois ela será referência para aplicação do Filtro Kalman.

## 1.4 Distribuição Gaussiana ou Distribuição Normal

Quando se fala em análise de dados em probabilidade e estatística, a distribuição Gaussiana ou Normal possui um grande destaque por ser muito utilizada para modelar fenômenos naturais. Um vasto número desses fenômenos, apresentam comportamentos que podem ser aproximados ao da distribuição Gaussiana com um alto grau de sucesso, e, portanto podem ser consideradas como se de fato fosse. Um dos principais conceitos associados a essa distribuição é o de ruído, que trabalharemos de forma detalhada para aplicação do Filtro de Kalman.



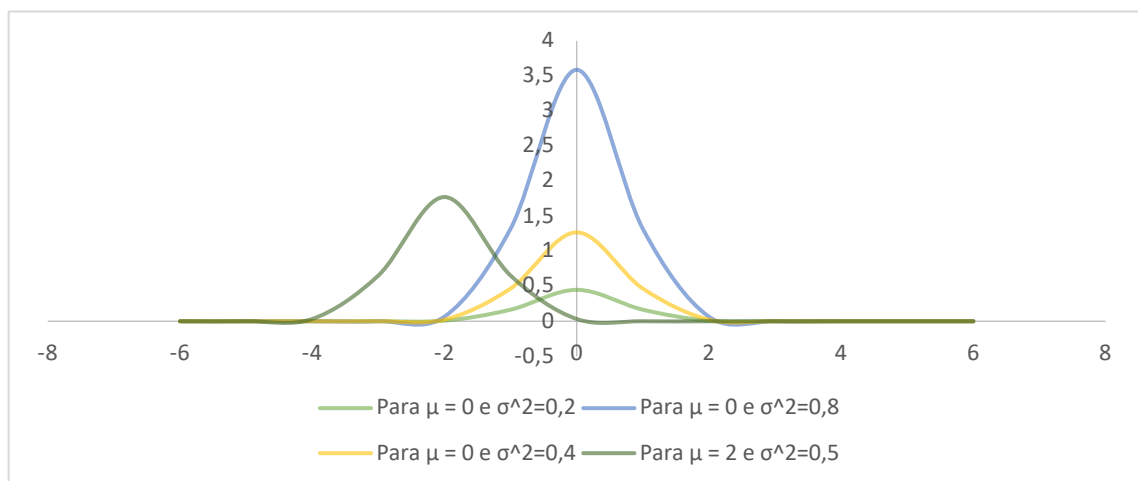
A distribuição Gaussiana foi estudada pela primeira vez no século XVII, quando se observou que os padrões em erros de medidas seguiam uma distribuição simétrica em forma de sino. Ela foi apresentada pela primeira vez em forma matemática em 1733, por DeMoivre, que a deduziu como forma-limite da distribuição binomial. A distribuição era, também, conhecida por Laplace antes de 1775. Por um erro histórico, tem sido atribuída a Gauss, cuja primeira referência publicada relativa a essa distribuição apareceu em 1809, e o termo *distribuição Gaussiana* tem sido usado com frequência. Várias tentativas foram feitas durante os séculos XVIII e XIX para estabelecer essa distribuição como a lei de probabilidade subjacente a todas as variáveis aleatórias contínuas; assim, o nome *normal* também passou a ser usado (William W. Hines, Douglas C. Montgomery, David M. Goldsman, Connie M. Borrer, 4ª edição, pág. 128).

A função de distribuição de probabilidade Gaussiana de uma variável aleatória  $X$  é definida da seguinte forma:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (1.8)$$

Com  $x \in \mathbb{R}$ , em que  $\mu$  representa a média ou esperança da distribuição normal e  $\sigma^2$  representa a variância (abordaremos esses dois pontos mais adiante). Observe, a seguir, alguns gráficos, no mesmo plano cartesiano, que representam função de distribuição Gaussiana de probabilidade.

Figura 1 – Distribuição de Probabilidade Gaussiana



Fonte: elaborado pelo autor.

Temos algumas características ao observar com relação a uma distribuição Gaussiana:

- a) O ponto máximo de  $f_X(x)$  ocorre quando  $x = \mu$ , o que nos leva ao seguinte valor máximo para a função:

$$f_{max} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$

- b) Os pontos de inflexão da função  $f$  são:

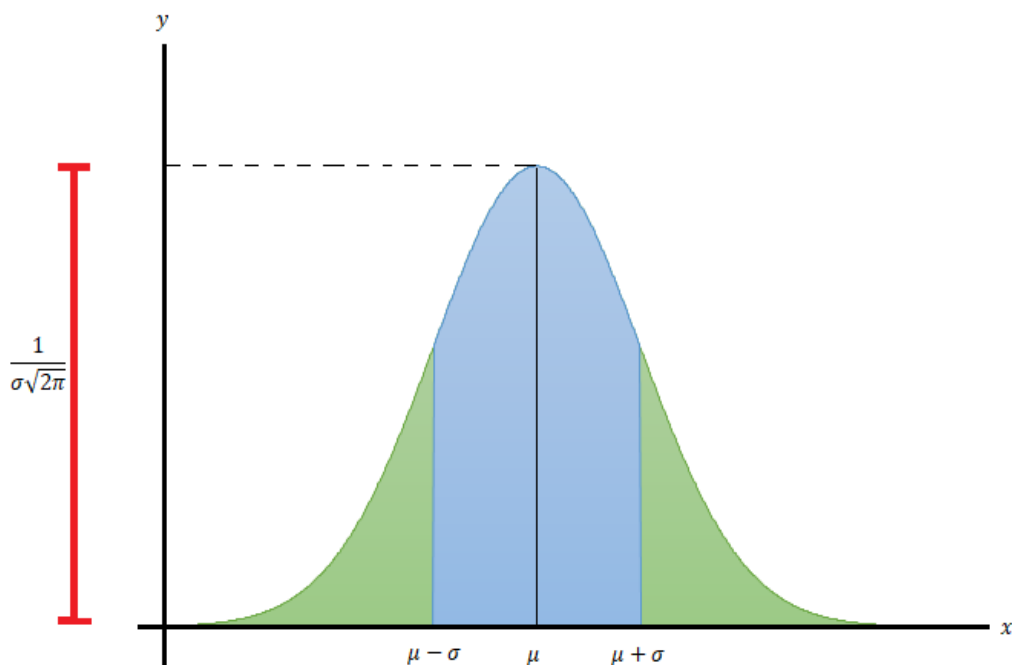
$$x = \mu + \sigma \quad \text{e} \quad x = \mu - \sigma$$

- c)  $f(\mu + x) = f(\mu - x)$ , o que nos leva à conclusão de que a densidade é simétrica em torno de  $\mu$ .

- d)  $E(X) = \mu$  e  $Var(X) = \sigma^2$  (mostraremos esses dois fatos a seguir)

- e)  $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) = 1$

Figura 2 – Elementos da Função de Distribuição Gaussiana



Fonte: elaborada pelo autor.

### 1.4.1 Média e Variância da Distribuição Gaussiana ou Normal

O valor esperado (também chamado de valor médio ou esperança), para uma variável aleatória  $X$ , é definido por

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x) dx, \quad (1.9)$$

como estamos nos referindo a uma distribuição Gaussiana, temos então que

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

o que nos leva à conclusão que, para encontrarmos a média ou esperança da referida distribuição, basta encontrarmos o resultado da seguinte expressão

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx, \quad (1.10)$$

para resolver essa integral faremos a seguinte mudança de variável  $z = (x - \mu)/\sigma$ , o que nos levará a  $x = \sigma \cdot z - \mu$  e  $dz = (1/\sigma)dx$ , portanto  $dx = \sigma dz$  e, assim, obtemos

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (\mu + \sigma z) e^{-\frac{z^2}{2}} dz \\ &= \mu \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz + \sigma \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} z e^{-\frac{z^2}{2}} dz. \end{aligned}$$

Como o integrando da primeira integral é a função de densidade Gaussiana, com  $\mu = 0$  e  $\sigma^2 = 1$ , o valor da primeira integral é 1 (Pela propriedade “e” da distribuição Gaussiana). A segunda integral tem valor zero, isto é,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} z e^{-\frac{z^2}{2}} dz = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \Bigg|_{-\infty}^{\infty} = 0$$

Assim,

$$E(X) = \mu \cdot 1 + \sigma \cdot 0$$

$$E(X) = \mu \quad (1.11)$$

Já a variância, é um parâmetro que define como os valores de uma variável aleatória são distribuídos com relação à média  $\mu$ . É definido da seguinte maneira:

$$\text{Var}(X) = E[(X - \mu)^2] \quad (1.12)$$

Para distribuição Gaussiana, temos que

$$\text{Var}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx,$$

Fazendo a mesma troca de variável realizada anteriormente  $z = (x - \mu)/\sigma$ , obtemos

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} \sigma^2 z^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \\ &= \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} z^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \end{aligned}$$

$$\text{Var}(X) = \sigma^2 \left( -z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \right)$$

$$\text{Var}(X) = \sigma^2(0 + 1)$$

$$\text{Var}(X) = \sigma^2. \quad (1.13)$$

Em resumo, a média e a variância da função de distribuição Gaussiana são  $\mu$  e  $\sigma^2$ , respectivamente. Os resultados obtidos nesta seção serão de grande utilidade para tratarmos matematicamente o conceito do “ruído” associado a um processo aleatório  $X_t$ . E para mais detalhes sobre o estudo das variáveis aleatórias e distribuição de probabilidade Gaussiana o leitor pode consultar a referência (HOEL; PORT; STONE, 1972) e (HINES; MONTGOMERY; GOLDSMAN; BORROR, 2006).

## 1.5 Vetores Aleatórios

Um vetor  $Z$  será considerado aleatório quando cada uma das suas componentes corresponderem a variáveis aleatórias, portanto ao trabalharmos com um vetor  $Z = (Z_1, Z_2, Z_3, \dots, Z_n)$  com  $n > 1$  e com componentes  $Z_i$  sendo variáveis aleatórias, em que  $i \leq n$ , teremos então que o vetor  $Z$  será um vetor aleatório com  $n$  dimensões e descrito por uma função de distribuição de probabilidade definida no espaço amostral  $\Omega$ , com  $P_i : \wp(\Omega) \rightarrow [0,1]$ , em que as funções  $P_1, \dots, P_n$  definem a distribuição conjunta para o dado vetor aleatório. Vejamos alguns exemplos:

Numa certa fábrica um analista de qualidade realiza uma contagem dos produtos defeituosos e bons, denotando por  $D$  os itens defeituosos e por  $B$  os itens bons. Então, teríamos:

$$\Omega = \{\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_{2n}) : \omega_i \in \{D, B\}, i = 1, 2, 3, \dots, n\}$$

Definindo,  $X$  como a quantidade de produtos defeituosos e  $Y$  como a quantidade produtos bons e utilizando a notação  $(X, Y)(\omega) = (X(\omega), Y(\omega))$ .

Para  $n = 2$ , teremos então  $\Omega = \{\omega_1; \omega_2; \omega_3; \omega_4\}$  com  $\omega_1 = (B, B)$ ,  $\omega_2 = (D, B)$ ,  $\omega_3 = (B, D)$  e  $\omega_4 = (D, D)$ . Com isso, os vetores aleatórios ficariam da seguinte forma:

$$(X, Y)(\omega_1) = (0, 2); (X, Y)(\omega_2) = (1, 1); (X, Y)(\omega_3) = (1, 1); (X, Y)(\omega_4) = (2, 0)$$

É importante observar que para  $n = 2$  temos um vetor aleatório bidimensional e o vetor pode ser caracterizado como discreto, pois todas as variáveis aleatórias que compõem o vetor, são discretas.

Um outro exemplo, analisado de forma menos aprofundada, seria numa partida de vôlei disputada entre as equipes  $A$  e  $B$ , verificarmos o número de sets vencidos por cada uma das equipes, em que definiremos as seguintes variáveis:

$X = \text{números de sets vencidos pela equipe } A$  e  $Y = \text{números de sets vencidos pela equipe } B$ .

Então teremos que o vetor  $Z = (X, Y)$  é aleatório e discreto.

### 1.5.1 Matriz de covariância

Considerando o vetor aleatório  $X = (X_1, X_2, X_3, \dots, X_n)$ , a matriz de covariância é uma matriz simétrica, formada pelas covariâncias das  $n$  variáveis aleatórias, em que cada elemento  $\sigma_{ij}$  da matriz terá a seguinte lei de formação:

$$COV(X_i, X_j) = E[(X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j)] = \sigma_{ij} \quad (1.14)$$

em que  $\mu_i = E[X_i]$  é o valor esperado (média) do  $i$  – ésimo elemento do vetor  $X$ . Portanto, a matriz de covariância de  $X$  é

$$\begin{bmatrix} E[(X_1 - \mu_1)(X_1 - \mu_1)] & E[(X_1 - \mu_1)(X_2 - \mu_2)] & \dots & E[(X_1 - \mu_1)(X_n - \mu_n)] \\ E[(X_2 - \mu_2)(X_1 - \mu_1)] & E[(X_2 - \mu_2)(X_2 - \mu_2)] & \dots & E[(X_2 - \mu_2)(X_n - \mu_n)] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E[(X_n - \mu_n)(X_1 - \mu_1)] & E[(X_n - \mu_n)(X_2 - \mu_2)] & \dots & E[(X_n - \mu_n)(X_n - \mu_n)] \end{bmatrix}$$

Sendo assim, também podemos escrever a matriz de covariância da seguinte forma:

$$COV(X) = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{1n} & \sigma_{2n} & \dots & \sigma_{nn} \end{bmatrix}$$

Vale lembrar que se trata de uma matriz simétrica, portanto  $\sigma_{12} = \sigma_{21}$ ,  $\sigma_{13} = \sigma_{31}$ ,  $\dots$ ,  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ .

Teremos então uma equivalência para a definição acima:

$$COV(X_i, X_j) = E[(X_i - E[X_i])(X_j - E[X_j])^T] \quad (1.15)$$

Note que os elementos da diagonal principal da matriz é formada pela  $COV(X_i, X_i)$ , que é igual a  $VAR(X_i)$ .

### 1.5.2 Matriz de Variância

A diagonal principal da matriz de covariância corresponde a variância do elemento  $X_i$  e ele mesmo, portanto a matriz de variância é uma extensão do conceito de matriz de covariância. Por esse fato, a matriz de variância é frequentemente chamada de matriz de covariância.

$$VAR(X) = COV(X_i, X_i) = E[(X_i - E[X_i])(X_i - E[X_i])^T] = [E(X_i - E[X_i])^2]^T = \sigma_{ii} = \sigma_i^2$$

Um ponto interessante a ser analisado é que a diagonal principal da matriz de covariância contém todas as variâncias das componentes  $X_i$ , para  $i = 1, 2, \dots, n$ . multiplicadas por ela mesma, ou seja, será  $\sigma^2$ , em que todos os outros elementos são covariâncias entre dois componentes diferentes  $X_i$  e  $X_j$ .

Por exemplo, ao se criar uma matriz de variância-covariância, hipotética, para três variáveis aleatórias X, Y e Z obtemos a Tabela 1, a seguir, e podemos observar as variações apresentadas em negrito ao longo da diagonal; a variância de X, Y, e Z são 1,5; 2,8; e 0,9 respectivamente. A covariância entre X e Y é  $-0,86$ , entre X e Z é  $-0,15$  e entre Y e Z é  $0,48$ .

Tabela 1 – Exemplo de matriz de variância-covariância para três variáveis

	<b>X</b>	<b>Y</b>	<b>Z</b>
<b>X</b>	<b>1,5</b>	$-0,86$	$-0,15$
<b>Y</b>	$-0,86$	<b>2,8</b>	$0,48$
<b>Z</b>	$-0,15$	$0,48$	<b>0,9</b>

Fonte: elaborado pelo autor.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1,5} & -0,86 & -0,15 \\ -0,86 & \mathbf{2,8} & 0,48 \\ -0,15 & 0,48 & \mathbf{0,9} \end{bmatrix}$$

Matriz de variância-covariância

Como se sabe que a matriz de variância-covariância é simétrica, pode-se verificar que de fato a covariância entre X e Y, X e Z e entre Y e Z é a mesma que a

covariância entre  $Y$  e  $X$ ,  $Z$  e  $X$  e entre  $Z$  e  $Y$ , respectivamente. Portanto, podemos verificar que a covariância para cada par de variáveis aleatórias aparecem duas vezes na matriz, o que nos faz concluir que de fato a covariância entre a  $i$  – ésima e a  $j$  – ésima variáveis aleatórias é apresentada nas posições  $(i, j)$  e  $(j, i)$ .

A matriz de variância-covariância é utilizada em várias aplicações estatísticas/probabilísticas com o intuito de estimar parâmetros, sendo que um dos principais objetivos é calcular erros padrão de estimadores ou funções de estimadores. Para mais detalhes sobre o estudo de vetor aleatório, matriz de variância e covariância, o leitor pode consultar a referência (SANTOS, 2001).

## 1.6 Sistema Dinâmico Linear

Os estudos em sistemas dinâmicos tiveram a sua origem através da mecânica Newtoniana. O intuito desta área da matemática é solucionar e entender problemas postos na forma de espaço-estado.

Um dos principais pesquisadores sobre sistemas dinâmicos é Jules Henri Poincaré (1854 – 1912), matemático francês, é um dos precursores dos estudos sobre sistemas dinâmicos (autônomos), tendo apresentado as descrições do que hoje é conhecido como plano de fase, bem como estudos sobre ponto crítico, estabilidade e também sobre a existência de ciclos limites para sistemas não lineares; porém, outros autores também contribuíram para esses resultados, como, por exemplo, os matemáticos Bendixon, Dulac, Hartann e Grobman. (FERREIRA, 2016, pág. 1)

Sistemas dinâmicos são os sistemas fora do equilíbrio, compostos por equações dependentes do tempo, caracterizados por estados que mudam com o transcorrer do tempo. São usados com muita frequência para modelar e fazer previsões de estados futuros e até mesmo de estados passados ou presente, que recaiam em sistemas biomatemáticos, com vasta aplicação em contextos físicos, biológicos, financeiros, etc. Uma análise qualitativa de sistemas dinâmicos, diz respeito a uma estabilidade do sistema nas proximidades ou vizinhança de um ou mais pontos críticos do sistema.



Um sistema dinâmico é composto por equações diferenciais ordinárias (EDO's), de ordem  $n$ , e servem para o melhor entendimento de fenômenos no que diz respeito à natureza das observações, sendo que poderá ser necessário fazer uma modelagem matemática para representar a situação problema. Neste trabalho teremos que nos empoderar dos conhecimentos que permeiam um sistema dinâmico linear e ter a noção de que os problemas recairão em EDO's de primeira ordem.

Seguindo o modelo proposto por (FERREIRA, 2016), em seu trabalho Sistemas Dinâmicos Lineares no  $\mathbb{R}^2$ , teremos que matematicamente, um sistema dinâmico linear contínuo será definido pela equação abaixo:

$$\dot{X} = A \cdot X \quad (1.16)$$

Vale salientar que a notação  $\dot{X}$  é comumente usada na física e engenharias, por exemplo, como abreviação da derivada de  $X$  em relação a variável temporal  $t$ , isto é,  $\dot{X} = dX/dt$ . Além disso, tem-se que

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

é a matriz dos coeficientes reais constantes.

Sendo assim, um sistema dinâmico linear no  $\mathbb{R}^n$ , poderá ser representado na sua forma matricial conforme a seguir:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

o que na forma de sistema linear seria equivalente a:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11} \cdot x_1 + \dots + a_{1n} \cdot x_n \\ \vdots \\ \dot{x}_n = a_{n1} \cdot x_1 + \dots + a_{nn} \cdot x_n \end{cases}$$

Com isso, o vetor  $n$ -dimensional  $X \in \mathbb{R}^n$  especifica o estado do processo em estudo, e  $A$  é a matriz  $n \times n$  do sistema dinâmico. Ao realizarmos uma análise algébrica um pouco mais aprofundada, se pode observar que o sinal e a relação das raízes do polinômio característico associado a matriz  $A$ , serão  $\det(A - \lambda I) = 0$ ,

portanto teremos os autovalores de  $A$ , sendo que isso determina a estabilidade do sistema dinâmico, ou seja, o estado converge para um “certo valor esperado”.

Vejamos o exemplo da situação a seguir:

Um radar de identificação de velocidade, em um certo ponto de uma estrada, identifica um veículo que se move ao longo de uma linha reta. A localização do automóvel é descrita pela coordenada  $x$  (nesta linha), sendo que o movimento descrito possui velocidade  $v$  e aceleração constante  $a$ . Não consideramos o início ou o fim deste movimento. O estado do processo é caracterizado pelo vetor  $X = (x, v, a)^T$  e temos que  $\dot{X} = (v, a, 0)^T$  pois

$$\dot{x} = v, \dot{v} = a \text{ e } \dot{a} = 0$$

Teremos então que

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} v \\ a \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ v \\ a \end{bmatrix} = A \cdot X$$

Isso define a matriz  $A$  do sistema, com tipo  $3 \times 3$ .

## CAPÍTULO 2

### FILTRO DISCRETO

Com uma sequência de observações/medições ruidosas  $y_0, y_1, \dots, y_{t-1}$  para uma sistema dinâmico linear, o objetivo do filtro de Kalman será estimar o estado  $X_t = (x_{1,t}, x_{2,t}, x_{3,t}, \dots, x_{n,t})$  do sistema de modo que o erro de estimativa seja minimizado; portanto, visa-se à aplicação de um estimador, de forma recursiva, para que a posição estimada seja a mais próxima possível da posição real. Para o detalhamento da aplicação e análise das equações associadas ao filtro de Kalman, após um levantamento bibliográfico, é chegado o momento de aprofundar a pesquisa de forma propriamente dita e para isso utilizaremos o modelo proposto por GERIG (2006) com o objetivo de trabalhar da forma mais clara possível com os conceitos e equações envolvidas na aplicação do filtro.

#### 2.1 Modelo padrão para aplicação da Filtragem Discreta

Nós assumiremos alguns pontos relevantes para aplicação do filtro de forma a esclarecer alguns significados importantes:

- $F_t$  é a *matriz de transição de estado*, ela é aplicada ao estado anterior  $X_{t-1}$  (que é conhecido);
- $B_t$  é a *matriz de controle*, ela é aplicada a um *vetor de controle*  $u_t$ , e a um *vetor de ruído do processo*  $W_t$  cuja distribuição conjunta é uma distribuição Gaussiana com matriz de variância  $Q_t$  e

$$\mu_{i,t} = E[W_{i,t}] = 0, \text{ para } i = 1, 2, 3, \dots, n$$

- $Y_t$  é o vetor de observação do estado  $X_t$ ;
- $H_t$  é a matriz de observação  $H_t$ ;
- $V_t$  é o vetor que corresponde ao ruído de observação, cuja distribuição conjunta também é uma distribuição Gaussiana com matriz de variância

$$R_t \text{ e } \mu_{i,t} = E[V_{i,t}] = 0 \text{ para } i = 1, 2, 3, \dots, n$$

É importante observar que tanto o ruído do processo quanto o de observação, possuem comportamentos Gaussiano, o que nos possibilitará realizar uma análise probabilística bem detalhada quanto ao comportamento do erro.

## 2.2 Equações do Filtro de Kalman

Vamos agora descrever matematicamente o Filtro Kalman, pensando num melhor entendimento para sua colocação em prática da forma mais eficaz possível, para isso, utilizaremos o embasamento teórico consolidado na seção 1.6 (Sistema Dinâmico Linear) como norteador na construção das suas equações.

O filtro de Kalman é um mecanismo iterativo para filtrar uma sequências de variáveis de estado  $\{X_0, X_1, X_2, \dots\}$ , em tempo discreto, que evoluem de forma ruidosa baseado em algum sistema dinâmico linear conhecido. De forma mais específica, a hipótese feita sobre o comportamento dinâmico das variáveis de estado são:

$$X_t = F_t \cdot X_{t-1} + B_t \cdot u_t + W_t, \quad (2.1)$$

em que  $F_t = e^{\Delta t \cdot A}$  é uma matriz conhecida, possivelmente dependente do tempo, chamada de matriz de transição,  $B_t$  é conhecida como matriz de controle,  $u_t$  é chamado de vetor de controle e  $W_t$  é o termo de ruído do processo. Vale observar que a matriz  $F_t = e^{\Delta t \cdot A} = I + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\Delta t^i \cdot A^i}{i!}$  está associada à solução do sistema dinâmico linear e mais informações podem ser obtidas na referência (FERREIRA, 2016).

Além da hipótese inicial, também consideramos que são feitas medições ruidosas da variável de estado  $X$  a cada passo de tempo. No contexto do filtro de Kalman, iremos considerar que serão feitas medidas ruidosa  $Y_t$  no tempo  $t$  que estão relacionada com a variável de estado  $X_t$  por meio de uma transformação linear e a possível adição de mais ruído  $V_t$ :

$$Y_t = H_t \cdot X_t + V_t, \quad (2.2)$$

aqui  $H_t$  é também uma matriz conhecida e chamada de matriz de observação.

Para explicitar melhor todas as partes das equações (2.1) e (2.2), vamos dar continuidade ao exemplo trabalhado ao final da seção 1.6. Continuaremos a

considerar um movimento linear e com aceleração constante. Desta forma, temos que o estado futuro da posição, velocidade e aceleração do movimento do veículo no exemplo são dadas pelas seguintes equações horárias para o movimento retilíneo e uniforme:

$$\begin{aligned}x_{t+1} &= x_t + \Delta t \cdot v_t + \frac{\Delta t^2}{2} a, \\v_{t+1} &= v_t + \Delta t \cdot a, \\a_{t+1} &= a_t.\end{aligned}$$

Teremos então, que o vetor de estados futuros  $X_{t+1} = [x_{t+1} \quad v_{t+1} \quad a_{t+1}]^T$  (note que:  $a_t = a$ ) será dada pela seguinte equação:

$$X_{t+1} = \begin{bmatrix} x_t + \Delta t \cdot v_t + \frac{\Delta t^2}{2} \\ v_t + \Delta t \cdot a \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t & \Delta t^2/2 \\ 0 & 1 & \Delta t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot X_t = F_t \cdot X_t, \quad (2.3)$$

em que  $F_t$  é a matriz de transição de estados. Observe que a equação (2.3) acima equivale a uma versão discreta do sistema dinâmico apresentado no capítulo anterior pela equação (1.16). Importante observar que o tempo  $t$  aqui considerado equivale ao instante de tempo  $t_0 + t \cdot \Delta t$ , em que  $\Delta t$  representa a diferença entre os instantes  $t$  e  $t + 1$ .

Com relação a observação que será feita pelo radar  $Y_t = (X_t, 0, 0)^T$ , verifica-se que apenas a localização no referido instante está sendo medida e assim podemos obter a matriz de observação  $H_t$ , através da seguinte equação:

$$Y_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot X_t = H_t \cdot X_t$$

Neste exemplo teremos que os vetores de ruído  $W_t$  e  $V_t$  não foram levados em conta, portanto os consideramos nulos sob as premissas de comportamentos ideais fornecidas. A *matriz de controle*  $B_t$  e o *vetor de controle*  $u_t$  também não foram usados neste exemplo e foram representados pela matriz nula e vetor nulo, respectivamente.

Com isso teremos as seguintes equações representando a situação problema proposta:

$$X_t = F_t \cdot X_{t-1} \quad (2.4)$$

$$Y_t = H_t \cdot X_t \quad (2.5)$$

É importante observar que a *matriz de controle*  $B_t$  e o *vetor de controle*  $u_t$  definem algum tipo de interferência ou influência no momento  $t$  que não é inerente ao próprio processo. Com isso o exemplo precisa ser remodelado para a introdução dos ruídos tanto no processo, quanto na medição, para assim recairmos nas equações (2.1) e (2.2), tornando pertinente a aplicação e uso do Filtro de Kalman. Sendo assim, aprimoraremos a modelagem do exemplo para que a aplicação dos conceitos do filtro que já foram detalhados e de alguns que vamos trabalhar nas próximas seções, tragam uma estimativa mais precisa possível, portanto quando construirmos todo o embasamento teórico retornaremos a ele.

### 2.3 Equações de Previsão – Atualização

A partir desta seção, utilizaremos as seguintes notações especiais para representarmos os pontos que trataremos ao longo da construção das equações envolvidas no Filtro de Kalman.

Teremos então as seguintes representações:

$\hat{X}$ : *Estado estimado.*

$F$ : *Matriz de transição de estados.*

$u$ : *Variáveis de controle.*

$B$ : *Matriz de controle (isto é, mapeamento de controle para variáveis de estado).*

$P$ : *Matriz de variância do estado (ou seja, erro de estimativa).*

$Q$ : *Matriz de variância do processo (ou seja, erro devido ao processo).*

$Y$ : *Variáveis de medição.*

$H$ : *Matriz de medição (ou seja, mapeamento de medidas para o estado).*

$K$ : *Ganho de Kalman.*

$R$ : *Matriz de variação da medição (ou seja, erro das medições).*

Os subscritos que utilizaremos são os seguintes:

$t \mid t \rightarrow$  Representa o período ou instante atual.

$t - 1 \mid t - 1 \rightarrow$  Representa o período anterior.

$t \mid t - 1 \rightarrow$  Representa as etapas intermediárias ou transição.

A aplicação do Filtro de Kalman serão divididas em duas etapas, que chamaremos de *fase de previsão* e *fase de atualização*, em que cada uma delas será composta por algumas equações.

O filtro de Kalman opera de tal forma em que são aplicadas de forma sucessivas identidades sobre a distribuição Gaussiana para estimar a evolução do estado  $X$  de um objeto considerando uma sequência de observações  $\{Y_t\}$  deste mesmo objeto.

Para chegarmos as expressões desejadas para cada uma das duas fases, vamos considerar uma sequência de observações  $Y_t$  é feita. Além disso, será considerado que o sistema dinâmico linear tem comportamento Gaussiano, isto é, estamos considerando que o estado  $X_{t-1}$  transcorrido todas as observações até o instante  $t - 1$ , se comporte como uma função de distribuição de probabilidade Gaussiana multivariada:

$$\wp(X_{t-1}|Y_{t-1}) = \mathcal{N}(X_{t-1}; \hat{X}_{t-1|t-1}, P_{t-1|t-1}), \quad (2.6)$$

em que  $\wp(X_{t-1}|Y_{t-1}) = \wp(X_{t-1} \cap Y_{t-1})/\wp(Y_{t-1})$  representa a probabilidade condicional,  $\mathcal{N}(X_{t-1}; \hat{X}_{t-1|t-1}, P_{t-1|t-1})$  a distribuição de probabilidade normal dada pela equação (1.8) com  $\mu = \hat{X}_{t-1|t-1}$  e  $\sigma = P_{t-1|t-1}$ , e finalmente  $Y_{t-1}$  indica todas as observações até o instante  $t - 1$ . Além disso,  $\hat{X}_{t|t}$  denota a estimativa do estado  $X_t$  no tempo  $t$  e  $P_{t|t}$  a matriz de variância do erro  $X_t - \hat{X}_{t|t}$ .

Aqui será importante considerar que o ruído do processo  $W_t$  seja independente de  $X_t$  e que ele seja dado por uma distribuição Gaussiana com matriz de covariância conhecida  $Q_t$  e  $\mu_{i,t} = E[w_{i,t}] = 0$ , para  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ . Observe que nosso modelo dinâmico sobre a variável de estado é dado pela equação (2.1) e o mesmo pode ser simplificado considerando que a variável de controle  $u_t$  é nula. Neste caso obtemos:

$$X_t = F_t \cdot X_{t-1} + W_t, \quad (2.7)$$

Com isso podemos prever como se comporta o estado  $X_t$  (no instante  $t$ ) dada a informação  $Y_{t-1}$ . Neste caso, é imediato observar que  $X_t$  é obtido através de uma transformação linear em  $X_{t-1}$  e o acréscimo de ruído Gaussiano. Desta forma, através de resultados conhecidos sobre a distribuição Gaussiana pode-se provar que:

$$\wp(X_t|Y_{t-1}) = \mathcal{N}(X_t; \hat{X}_{t|t-1}, P_{t-1|t-1}), \quad (2.8)$$

em que

$$\hat{X}_{t|t-1} = F_t \cdot \hat{X}_{t-1|t-1}, \quad (2.9)$$

representa o estado de transição e

$$P_{t|t-1} = F_t \cdot P_{t-1|t-1} F_t^T + Q_t, \quad (2.10)$$

representa a matriz de variância do estado, ou seja, erro de estimativa da etapa de transição.

Esse processo pode ser repetido diversas vezes, de forma a condicionar o verdadeiro valor da observação  $Y_t$ . Como sabemos que o processo tem comportamento linear, podemos representar a observação da seguinte forma:

$$Y_t = H_t \cdot X_t + V_t, \quad (2.11)$$

em que o ruído  $V_t$  correspondente da observação possui distribuição conjunta também Gaussiana com matriz de variância  $R_t$  e  $\mu_{i,t} = E[V_{i,t}] = 0$  para  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ . Com isso é possível determinar a distribuição conjunta de probabilidade entre  $X_t$  e  $Y_t$ , dadas as observações anteriores  $Y_{t-1}$  ( $\wp(X_t, Y_t | Y_{t-1})$ ). Desta forma, chegaremos as equações para a fase de predição, tendo em vista o comportamento dinâmico, linear e Gaussiano de todo processo.

Para a fase de atualização, obtemos o valor  $Y_t$  e aplicamos a distribuição conjunta  $\wp(X_t | Y_t)$  na equação (2.6), com isso chegamos ao seguinte resultado:

$$\wp(X_t | Y_t) = \mathcal{N}(X_t; \hat{X}_{t|t}, P_{t|t}), \quad (2.12)$$

em que a covariância da medida  $Y_t$  dado um  $Y_{t-1}$  será:

$$S_t = H_t \cdot P_{t|t-1} \cdot H_t^T + R_t \quad (2.13)$$

Após a descrição dessas equações associadas as duas fases de implementação do Filtro Kalman, podemos agora, de forma mais direta, resumir a fase de *previsão* e de *atualização* da seguinte maneira:

**Fase de Previsão do filtro.** Nesta etapa de aplicação do Filtro Kalman, calculamos o estado previsto utilizando uma modelagem matemática para representação da situação problema e a matriz de variância prevista usando a matriz de transição de estado  $F_t$ , a matriz de controle  $B_t$  e matriz de variância do ruído do processo  $Q_t$ , como dado no modelo:

$$\hat{X}_{t|t-1} = F_t \cdot \hat{X}_{t-1|t-1} + B_t \cdot u_t \quad (2.14)$$

$$P_{t|t-1} = F_t \cdot P_{t-1|t-1} F_t^T + Q_t \quad (2.15)$$

É importante observar novamente que as expressões acima estão relacionadas a equação que representa um sistema dinâmico linear, a diferença é que agora



estamos nos referindo a estimativas de estado contabilizando ruídos relacionados ao processo

**Fase de atualização do filtro.** Nesta segunda etapa de aplicação do Filtro Kalman, calculamos o vetor residual de medição  $\tilde{Z}_t$  e a matriz de variância residual  $S_t$ , usando a matriz observação  $H_t$  e a variância do ruído de observação  $R_t$ , conforme obtido no modelo de medição, ou seja, é uma etapa voltada para se trabalhar com os dados relacionados ao processo de coleta da medição.

$$\tilde{Z}_t = Y_t - H_t \cdot \hat{X}_{t|t-1} \quad (2.16)$$

$$S_t = H_t \cdot P_{t|t-1} \cdot H_t^T + R_t \quad (2.17)$$

Após as duas etapas de implementação do Filtro de Kalman, chegamos ao objetivo final, que é a estimativa do estado. Agora basta calcular o vetor de estimativa de estado atualizado, ou seja, encontrar a solução da estimativa para o tempo  $t$ . Vale salientar que a estimativa será encontrada na fase de atualização e por meio da seguinte equação:

$$\hat{X}_{t|t} = \hat{X}_{t|t-1} + K_t \cdot \tilde{Z}_t, \quad (2.18)$$

em que  $K_t = P_{t|t-1} \cdot H_t^T \cdot S_t^{-1}$  é conhecido como ganho de Kalman e será detalhado na próxima seção.

Para mais detalhes sobre a dedução das equações referentes as fases de atualização e previsão do Filtro Kalman, veja (GREWAL; ANDREWS, 2001; MANKE, 2018).

## 2.4 Ganho de Kalman Ideal

Definiremos  $K_t$  como o *ganho de Kalman*, em que representará uma correção ao vetor de variáveis de estado após a observação da variável  $Y$ , o que nos leva a possibilidade de encará-lo como uma ponderação entre os erros associados ao processo de previsão e atualização, sendo visto como o ajuste necessário para potencializar o processo de estimação, que atualizado a cada iteração. Matematicamente teremos a seguinte representação para o *ganho de Kalman ideal*:

$$K_t = P_{t|t-1} \cdot H_t^T \cdot S_t^{-1} \quad (2.19)$$

Ao aplicarmos a equação do ganho de Kalman ( $K_t$ ) na equação de atualização do estado ( $\hat{X}_{t|t}$ ), teremos o impacto da minimização do erro quadrático médio  $E = [(X_t - X_{t|t})^2]$ , que é equivalente a minimizar o rastreio de  $P_{t|t}$  (equivalente a soma dos elementos na diagonal principal).

Desta forma, teremos que a matriz de variância da estimativa atualizada, será reescrita para:

$$P_{t|t} = (I - K_t \cdot H_t)P_{t|t-1} \quad (2.20)$$

Essa equação se mostra necessária para aplicação na fase de previsão, no tempo  $t + 1$ , em que ela precisa ser aplicada no início do processo de cada estimativa.

Agora sim, podemos aplicar o exemplo proposto na seção 2.2, pois já temos todo o embasamento teórico necessário para aplicação do Filtro Kalman em uma situação problema mais completa.

Vamos adaptar o exemplo a seguinte situação: O veículo está supostamente se movendo ao longo de uma linha reta, mas agora com aceleração aleatória  $a_t$  entre o tempo  $t - 1$  e tempo  $t$ , no qual assumimos que a distribuição é Gaussiana com média zero e variância  $\sigma_a^2$ . As medidas das posições do veículo também são supostamente ruidosas, portanto possuem algum erro referente às medições, ou seja, ruído Gaussiano com média zero e variância  $\sigma_y^2$ . O vetor de estado desse processo é dado por

$$X_t = (x_t, \dot{x}_t)^T, \text{ onde } \dot{x}_t \text{ indica a velocidade } v_t.$$

Da mesma forma que no exemplo inicial, não assumimos nenhum controle do processo (matriz de controle), ou seja,  $u_t$  é o vetor nulo. O que nos levará ao seguinte ponto:

Com  $F_t = e^{\Delta t \cdot A} = I_2 + \Delta t \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $X_{t-1} = \begin{bmatrix} x_{t-1} \\ v_{t-1} \end{bmatrix}$  e  $W_t = a_t \begin{bmatrix} \Delta t^2/2 \\ \Delta t \end{bmatrix}$  obtemos

$$X_t = F_t X_{t-1} + W_t$$

trazendo esta equação para forma matricial obteremos:

$$X_t = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{t-1} \\ v_{t-1} \end{bmatrix} + a_t \begin{bmatrix} \Delta t^2/2 \\ \Delta t \end{bmatrix}$$

com a matriz de variância

$$Q_t = W[W_t W_t^T] = G_t E[a_t^2] G_t^T = \sigma_a^2 \begin{bmatrix} \Delta t^4/4 & \Delta t^3/2 \\ \Delta t^3/2 & \Delta t^2 \end{bmatrix}$$

Isso nos mostra que de fato  $F_t$ ,  $Q_t$  e  $G_t$  são grandezas escalares e portanto independentes de  $t$ , e por esse motivo, em específico, poderão ser chamadas de  $F$ ,  $Q$  e  $G$ , respectivamente.

Para a medição da posição do objeto no tempo  $t$  utilizaremos a equação (2.2)

$$Y_t = H \cdot X_t + V_t$$

trazendo essa equação para forma matricial, obteremos:

$$Y_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} X_t + \begin{bmatrix} v_t \\ 0 \end{bmatrix}$$

em que  $V_t$  é o ruído de observação, com matriz de variância

$$R = E[V_t V_t^T] = \begin{bmatrix} \sigma_y^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vamos considerar que a posição inicial é igual a  $\hat{X}_{0|0} = (0,0)^T$ , em que esta posição é conhecida com um certo nível de precisão, portanto teremos a matriz de variância zero

$$P_{0|0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Caso tenhamos um nível significativo de imprecisão, teremos que

$$P_{0|0} = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}$$

com um  $c > 0$  real adequadamente grande.

Agora já podemos aplicar as equações do Filtro Kalman para estimar a posição do veículo em  $t = 1$ . Inicialmente, prevemos  $\hat{X}_{1|0}$  e calculamos sua matriz de variância  $P_{1|0}$ , seguindo as equações de previsão (2.14) e (2.15).

$$\hat{X}_{t|t-1} = F_t \hat{X}_{t-1|t-1} + B_t u_t$$

$$P_{t|t-1} = F_t P_{t-1|t-1} F_t^T + Q_t$$

Como consideramos  $B_t$  e  $u_t$  nulos e sabendo que  $F_t$  e  $Q_t$  são escalares, teremos:

$$\hat{X}_{t|t-1} = F \hat{X}_{t-1|t-1} \quad (2.21)$$

$$P_{t|t-1} = F P_{t-1|t-1} F^T + Q \quad (2.22)$$

Em seguida, calculamos os dados auxiliares  $\tilde{Z}_1$  e  $S_1$ , tomando como base as equações de atualização (2.16) e (2.17), lembrando que  $H_t$  e  $R_t$  são escalares e os representaremos por  $H$  e  $R$ , respectivamente:

$$\tilde{Z}_1 = Y_t - H \hat{X}_{t|t-1} \quad (2.23)$$

$$S_t = H P_{t|t-1} H^T + R \quad (2.24)$$

Isso nos permite calcular o ganho de Kalman ideal  $K_1$  e a atualização  $\hat{X}_{1|1}$ , levando em consideração todos os ruídos relacionados as duas etapas de aplicação do Filtro, seguindo as equações (2.16) e (2.17):

$$K_t = P_{t|t-1} H^T S_t^{-1} \quad (2.25)$$

$$\hat{X}_{t|t} = \hat{X}_{t|t-1} + K_t \tilde{Z}_t \quad (2.26)$$

Por fim, calculamos  $P_{1|1}$  para repetir todo o processo de aplicação em  $t = 2$ , seguindo a equação (2.20) e lembrando que  $H_t$  é escalar e representamos por  $H$ :

$$P_{t|t} = (I - K_t \cdot H) P_{t|t-1} \quad (2.27)$$

Todo o processo para os demais instantes  $t$ , poderá ser calculado da mesma forma, nos levando a um processo de iteração. É importante observar que esses cálculos passam por operações entre matrizes ou operações com álgebra vetorial, que quando analisados de maneira formal, nos aparenta algo com um certo grau de complexidade. Por outro lado, a implementação do Filtro de Kalman (fase de previsão e atualização) é bastante simples e que pode ser aplicado facilmente por um estudante do ensino médio por exemplo. Para mais um exemplo de aplicação, fica como sugestão (FRANCISCO, 2014).

Portanto, podemos concluir que o Filtro de Kalman pode ser apresentado em duas fases: previsão e atualização de dados. A fase de previsão usa a estimativa do estado no tempo anterior  $t - 1$  para chegar a uma estimativa no tempo atual  $t$  ou até mesmo em estados futuros, não incluindo, ainda, a informação vinda do estado atual, ou seja, utiliza mecanismos de recursão. Já na fase de atualização, a estimativa da fase de previsão é combinada com a observação atual e com o ganho de kalman, para melhorar a estimativa do estado e potencializar a medida para o estado estimado em análise. Vejamos a tabela abaixo que nos mostra as equações necessárias para implementação do Filtro de Kalman em situações que recaiam na forma *espaço-estado*.

Tabela 2 – Fases da estimativa

Previsão (Atualização de tempo/estado)	Atualização (Atualização de Medida)
Atualiza o estado no decorrer do tempo $\hat{X}_{t t-1} = F_t \cdot \hat{X}_{t-1 t-1} + B_t \cdot u_t$	Cálculo do ganho de Kalman $K_t = P_{t t-1} \cdot H_t^T \cdot S_t^{-1}$
Atualização da matriz de erro de covariância $P_{t t-1} = F_t \cdot P_{t-1 t-1} F_t^T + Q_t$	Estimativa do estado atualizado $\hat{X}_{t t} = \hat{X}_{t t-1} + K_t \cdot \tilde{Z}_t$
	Atualiza o sinal estimado com as novas medidas $\tilde{Z}_t = Y_t - H_t \cdot \hat{X}_{t t-1}$
	Atualiza a matriz erro de covariância $P_{t t} = (I - K_t \cdot H_t) P_{t t-1}$

Fonte: elaborada pelo autor.

A aplicação de forma recursiva do processo de previsão e atualização nos conduzirá ao melhor valor possível para estimação do estado de um sistema dinâmico, linear e modelado no espaço de estados. Para mais detalhes sobre a implementação do Filtro Kalman, o leitor pode consultar a referência (GREG; GARY, 2001) e (RHUDY; SALGUERO; HOLAPPA, 2017).

## 2.5 Ajustando o Filtro de Kalman

O ajuste do Filtro Kalman é um passo muito importante dentro do processo de estimativa, pois nem sempre a modelagem para a situação problema ou para as equações dos ruídos se mostrarão eficientes por algum equívoco cometido na modelagem como um todo, com isso, é muito importante que seja realizado um ajuste no filtro, caso não haja convergência dos valores estimados, (essa ação pode ser aplicada na modelagem da situação problema ou em uma verificação na modelagem do ruídos) com o intuito de fazer com que as estimativas se aproximem o mais rapidamente possível dos valores reais, ou seja, para que o filtro funcione de maneira mais eficiente e eficaz. A elaboração das matrizes de variância  $Q_t$  e  $R_t$ , ou da constante  $c \geq 0$  em  $P_{0|0}$ , influencia o número de intervalos de tempo aplicados no filtro de Kalman, de modo que os estados previstos convirjam para os estados verdadeiros o mais rápido possível, ou seja, potencializa a "convergência" do processo de estimação. Basicamente, quando assumimos uma maior incerteza, ou seja, maior valor para  $c \geq 0$ , ou valores maiores em  $Q_t$  e  $R_t$ , teremos a consequência de maiores valores de  $P_{t|t-1}$  ou  $S_t$ ; devido ao uso do inverso  $S_t^{-1}$  na definição do *ganho de Kalman*, isso diminui os valores em  $K_t$  e a contribuição do vetor residual de medição na equação de atualização do estado ( $\hat{X}_{t|t}$ ). Por exemplo, no caso extremo em que temos certeza absoluta sobre a correção do estado inicial  $Z_{0|0}$  (ou seja,  $c = 0$ ), então não se precisa assumir nenhum ruído no sistema e no processo de medição (como na aplicação do exemplo da seção 2.2), então as matrizes  $P_{t|t-1}$  e  $S_t$  se reduzirão a matrizes nulas, o que nos conduz a um estado previsto é igual ao estado atualizado.

## 2.6 Modelo alternativo para fase de previsão

Quando nos deparamos com um modelo contínuo para representar a situação problema a ser modelada, teremos a opção de trabalhar com uma matriz "A" para o processo dinâmico linear dado em (1.16)

$$\dot{X} = A \cdot X$$

Com isso, será mais simples usar as equações (2.6) e (2.7)

$$\begin{aligned}\dot{\hat{X}}_{t|t-1} &= A\hat{X}_{t-1|t-1} + B_t \cdot u_t \\ P_{t|t-1} &= AP_{t-1|t-1}A^T + Q_t\end{aligned}$$

em vez daqueles que usam matrizes discretas  $F_t$ . (Claro, isso também define matrizes modificadas  $B_t$ , agora definidas pelo impacto de controle sobre as derivadas de vetores de estado). Esta modificação, na fase de previsão, não tem nenhuma consequência formal sobre a fase de atualização. Portanto, temos todos os aparatos, ferramentas algébricas e aritméticas para a aplicação do Filtro de Kalman em modelagens contínuas ou discretas.

Antes de aplicarmos o filtro de maneira completa em uma situação problema, podemos estabelecer uma espécie de roteiro a ser seguido, a fim de proporcionar a minimização do ruído (erro), utilizaremos o modelo proposto por (FANDI, 2008), assumindo a construção de um modelo para o sistema de previsão do estado e fazendo com que o KF seja significativo:

**1º Entendendo a situação:** veja o problema, “quebre a cabeça”, tente entender o que de fato está acontecendo. Se for cometido algum erro nessa etapa, certamente o trabalho a ser realizado será totalmente comprometido.

**2º Modelando o problema do processo de estado:** comece com um modelo básico, o mais próximo possível da sua realidade e do seu entendimento da situação problema. Pode não funcionar efetivamente no início, mas isso pode ser refinado mais tarde ao longo do processo de estimativa.

**3º Modelando o processo de medição:** analise como você vai medir o processo e quais as melhores opções a seu alcance para serem utilizadas como aparelhos e/ou sensores para aferir as medições. Sempre trabalhe com o aparelho ou sensor de medição mais eficiente possível dentro do contexto a ser aplicado. O espaço de medição pode não estar no mesmo espaço que o objeto a ser analisado (por exemplo, usando um radar para estimar a localização de um automóvel, ou de um avião).

**4º Modelando o ruído (erro):** isso precisa ser feito tanto para a estimação do estado, quanto para o processo de medição. O Filtro de Kalman possui como base de implementação o ruído Gaussiano, por isso, faça a análise da variância e covariância, ou seja, dos erros associados ao processo, para verificar se o ruído é, ou não,

significativo. Portanto, verifique se o erro do seu modelo é adequado, ou não, para a situação.

**5º Testando o filtro:** muitas vezes, por descuido, se deixa de lado essa importante etapa. Use dados hipotéticos, se necessário (por exemplo, se o processo não for seguro para testar em tempo real ou no meio Ambiente). Veja se o filtro está se comportando como deveria.

**6. Refinando o filtro:** uma boa alternativa para corrigir a convergência do processo de estimativa é alterar os parâmetros de ruído, conforme for trabalhado, isso é o mais fácil de mudar. Caso a convergência da estimativa não seja corrigida adequadamente, volte mais, pode ser necessário repensar e remodelar a 2ª e 3ª etapa desse processo.



## CAPÍTULO 3

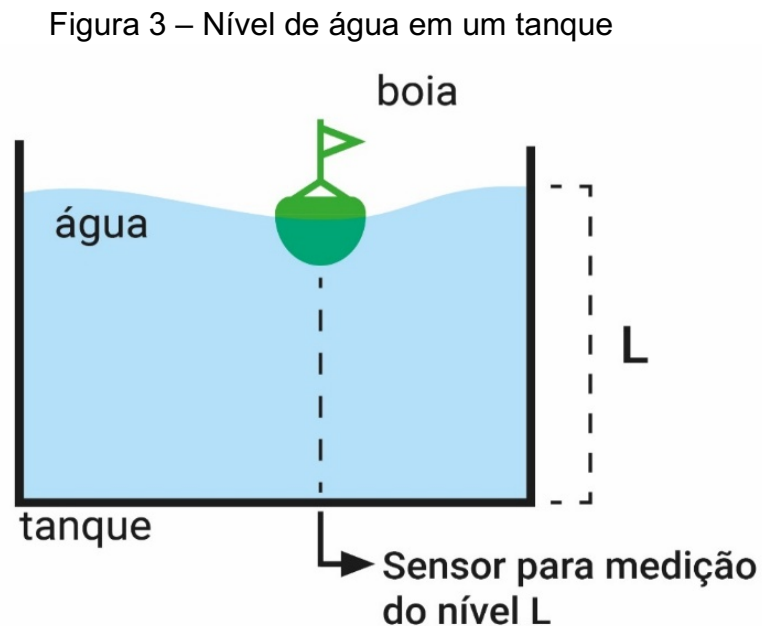
### APLICAÇÕES DO FILTRO DE KALMAN

Neste capítulo, seguindo as etapas de aplicação do filtro, propostas no capítulo anterior, mostraremos duas aplicações/modelagem do Filtro de Kalman com algumas variantes dentro da situação problema.

#### 3.1 Modelagem 1: Estimando o nível de água em um tanque

1º Entendendo a situação:

Vamos considerar uma situação simples, trabalhada em (FAN DI, 2008), que mostra uma maneira de medir o nível de água em um tanque. Isso é mostrado na Figura 3, a seguir:



**Nível (Linear)**

Fonte: elaborada pelo autor.

A ideia é estimar o nível de água no tanque; vale observar que este valor é desconhecido. As medições obtidas são do nível da "boia" (que pode ser um dispositivo eletrônico ou um simples dispositivo mecânico).

A água pode estar em um processo de:

- Enchimento constante, esvaziamento constante ou estático (ou seja, o nível médio do tanque está aumentando, diminuindo ou constante).
- Enchimento com uma taxa que muda a cada instante ou estagnado com uma instabilidade do sistema (ou seja, o nível relativo do flutuador para o nível médio do tanque está mudando ao longo do tempo ou estático).

### 3.1.1 Primeira opção: um modelo estático

#### 2º Modele o processo de estado

Vamos esboçar várias maneiras de modelar essa situação simples, mostrando o poder de eficiência do Filtro Kalman. O primeiro é o modelo mais básico, em que o tanque é nivelado (isto é, o verdadeiro nível é constante  $L = c$ ). Vale observar que o processo de estado, nesta situação, corresponde a um vetor de apenas uma componente. Usando as equações de previsão e atualização, apresentadas no capítulo 2 deste trabalho, a variável de estado pode ser reduzida a um escalar (ou seja,  $\hat{X} = x$  em que  $x$  é a estimativa de  $L$ ).

Neste primeiro momento, vamos assumir um modelo constante, portanto  $x_{t+1} = x_t$ , com isso  $A = 0$  e  $F_t = 1$ , para qualquer  $t \geq 0$ . As variáveis de controle  $B$  e  $u$  não são usadas (ou seja, vamos considerar ambas = 0).

#### 3º Modele o processo de medição

Nesta modelagem, já temos o nível do flutuador dado e com seu valor fixo. Isso é representado por  $Y = y$ . O valor que estamos medindo pode ser uma medida em escala (por exemplo, uma medição de 1 cm em um mostrador mecânico pode realmente ter cerca de 10 cm no nível "verdadeiro" do tanque).

Por uma questão de simplicidade, assumiremos que a medida exata estará na mesma escala que a nossa estimativa de estado  $x$  (isto é,  $H = 1$ )

#### 4º Modele o ruído

Para esse modelo, o processo é escalar, portanto  $P = p$  e vamos assumir que há ruído de medição (ou seja,  $R = r$ ). Se o processo não estiver bem definido, ajustaremos o ruído (ou seja,  $Q = q$ ). No desenrolar do processo de estimativa do nível da água, aplicaremos os efeitos da alteração desses parâmetros e ruídos, para ficar evidenciado o impacto na estimação do estado, portanto analisaremos as consequências que os ruídos podem trazer para o processo de estimativa.

#### 5º Teste o filtro

Nessa etapa é possível simplificar as equações de previsão e atualização do Filtro Kalman (é importante observar que ao invés de trabalharmos com equações na forma vetorial, vamos trabalhar na forma escalar, pois trata-se de uma situação unidimensional). Elas ficam da seguinte forma:

##### **Previsão:**

$$\begin{aligned}x_{t|t-1} &= x_{t-1|t-1} \\ p_{t|t-1} &= p_{t-1|t-1} + q_t\end{aligned}$$

##### **Atualização:**

$$\begin{aligned}K_t &= p_{t|t-1}(p_{t|t-1} + r)^{-1} \\ x_{t|t} &= x_{t|t-1} + K_t(y_t - x_{t|t-1}) \\ p_{t|t} &= (1 - K_t) p_{t|t-1}\end{aligned}$$

O filtro está agora completamente definido. Vamos substituir os valores nas equações de previsão e atualização. Para o primeiro teste, assumimos o nível de água no tanque é  $L = 1$ .

Inicializamos o estado com um valor arbitrário, com uma variância extremamente alta, pois é completamente desconhecido:  $x_0 = 0$  e  $p_0 = 1000$ . Se iniciarmos com um valor mais significativo, obteremos uma convergência mais

rápida. Para o ruído do sistema, vamos escolher  $q = 0,0001$ , pois achamos que temos um modelo com certa precisão. Vamos começar esse processo:

*Previsão:*

$$\begin{aligned}x_{1|0} &= 0 \\p_{1|0} &= 1000 + 0,0001\end{aligned}$$

A medida hipotética que obtemos para a medida do nível do tanque é  $y_1 = 0,9$  (devido ao ruído). Assumimos um ruído de medição de  $r = 0,1$ . Para a medição do nível da água pode-se utilizar uma trena ou algum outro sensor de medição.

*Atualização:*

$$\begin{aligned}K_1 &= 1000,0001(1000,0001 + 0,1)^{-1} = 0,9999 \\x_{1|1} &= 0 + 0,9999(0,9 - 0) = 0,8999 \\p_{1|1} &= (1 - 0,9999)1000,0001 = 0,1000\end{aligned}$$

Na Etapa 1, a inicialização de 0, aproximou-se do verdadeiro valor do sistema. Além disso, a variância (erro) foi reduzida a um valor razoável.

Prosseguindo para a próxima etapa de aplicação das equações, obtemos:

*Previsão:*

$$\begin{aligned}x_{2|1} &= 0,8999 \\p_{2|1} &= 0,1000 + 0,0001 = 0,1100\end{aligned}$$

A medida hipotética que obtemos neste momento para a medida do nível do tanque é  $y_2 = 0,8$  (devido ao ruído).

*Atualização:*

$$K_2 = 0,1001(0,1001 + 0,1)^{-1} = 0,5002$$

$$x_{2|2} = 0,8999 + 0,5002(0,8 - 0,8999) = 0,8499$$

$$p_{2|2} = (1 - 0,5002)0,1001 = 0,0500$$

Note que a variação está diminuindo a cada iteração. Se nós continuarmos, com valores hipotéticos  $y_t$ , iremos obter os seguintes resultados:

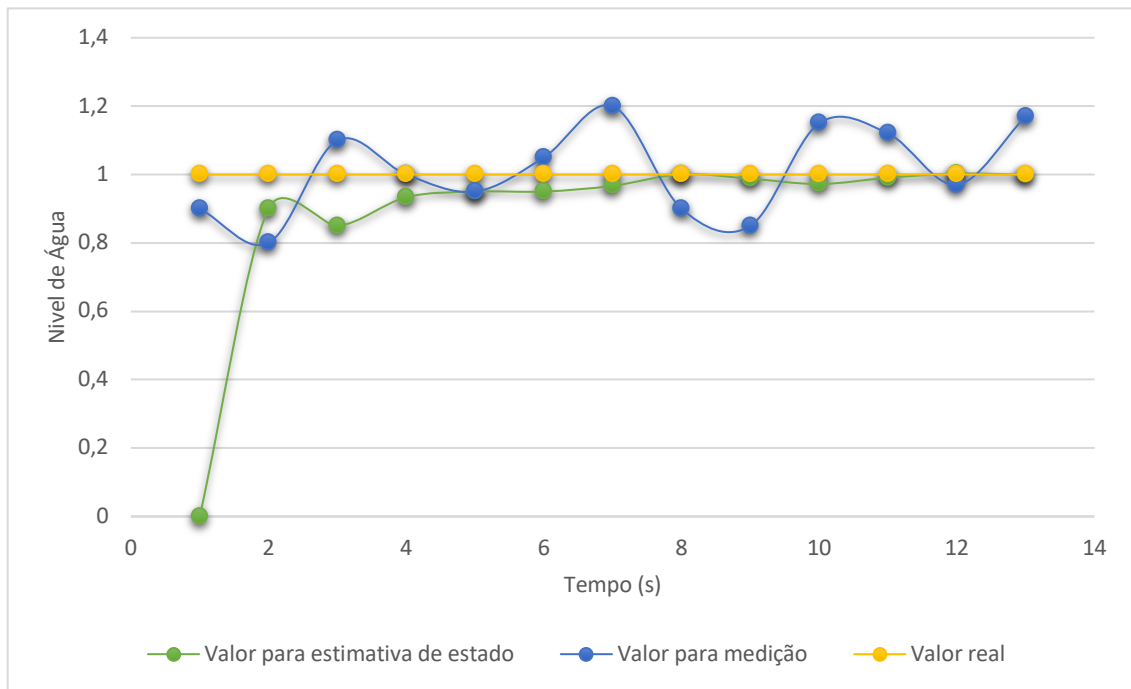
Tabela 3 – Valores obtidos para fase de Previsão e Atualização

PREVISÃO			ATUALIZAÇÃO			
$t$	$x_{t t-1}$	$p_{t t-1}$	$y_t$	$K_t$	$x_{t t}$	$p_{t t}$
3	0,8499	0,0501	1,1	0,3339	0,9334	0,0334
4	0,9334	0,0335	1	0,2509	0,9501	0,0251
5	0,9501	0,0252	0,95	0,2012	0,9501	0,0201
6	0,9501	0,0202	1,05	0,1682	0,9669	0,0168
7	0,9669	0,0169	1,2	0,1447	1,0006	0,0145
8	1,0006	0,0146	0,9	0,1272	0,9878	0,0127
9	0,9878	0,0128	0,85	0,1136	0,9722	0,0114
10	0,9722	0,0115	1,15	0,1028	0,9905	0,0103

Fonte: elaborada pelo autor.

É possível perceber, pela Tabela 3 acima, que o modelo funciona com sucesso e boa precisão. Depois da estabilização (cerca de  $t = 4$ ), o estado estimado possui um erro de, no máximo, 0,05, mesmo que as medições estejam entre 0,8 e 1,0 (ou seja, erro de no máximo 0,2). Com a continuidade do processo de aplicação e iteração das equações, obteremos o seguinte gráfico:

Gráfico 1 – Estimando o nível do tanque



Fonte: elaborado pelo autor.

Agora vejamos algumas conclusões que se pode chegar até o momento.

Se for criado um modelo baseado na situação real, a estimativa de estado estará próxima do valor verdadeiro, mesmo quando as medições são muito ruidosas (ou seja, um erro de 20%, produziu apenas uma Imprecisão de aproximadamente 5%). Esse é o principal objetivo do Filtro Kalman, ou seja, minimizar a imprecisão para que a estimativa seja potencializada.

Agora vamos alterar a situação problema para analisar o que vai acontecer: manteremos a mesma modelagem construída para um modelo estático, porém desta vez, a situação será a seguinte: o tanque está **enchendo** a uma taxa constante:

$$L_t = L_{t-1} + f$$

Vamos supor que o tanque esteja enchendo a uma taxa de  $f = 0,1$  frame por vez, e começamos com uma inicialização de  $L_0 = 0$ . Vamos assumir que a medição e o ruído do processo permanecem os mesmos (ou seja,  $q = 0,001$  e  $r = 0,1$ ).

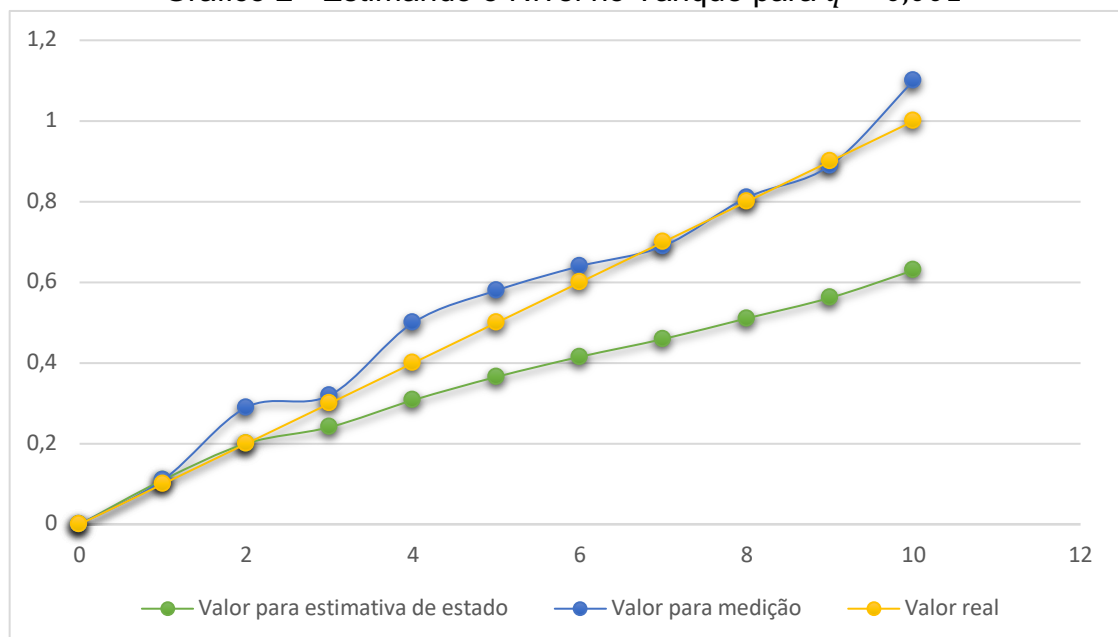
Vejamos o que irá acontecer:

Tabela 4 – Tanque enchendo a uma taxa constante

PREVISÃO			MEDIÇÃO E ATUALIZAÇÃO				
$t$	$x_{t t-1}$	$p_{t t-1}$	$y_t$	$K_t$	$x_{t t}$	$p_{t t}$	L
0	-	-	-	-	0	1000	0
1	0,0000	1000,0001	0,11	0,9999	0,1175	0,1000	0,1
2	0,1175	0,1001	0,29	0,5002	0,2048	0,0500	0,2
3	0,2048	0,0501	0,32	0,3339	0,2452	0,0334	0,3
4	0,2452	0,0335	0,50	0,2509	0,3096	0,0251	0,4
5	0,3096	0,0252	0,58	0,2012	0,3642	0,0201	0,5
6	0,3642	0,0202	0,54	0,1682	0,3945	0,0168	0,6

Fonte: elaborada pelo autor.

Agora, podemos ver que, com o tempo, o estado estimado se estabiliza (ou seja, a variação fica muito baixa). Podemos ver isso no Gráfico 2, a seguir:

Gráfico 2 - Estimando o Nível no Tanque para  $q = 0,001$ 

Fonte: elaborado pelo autor.

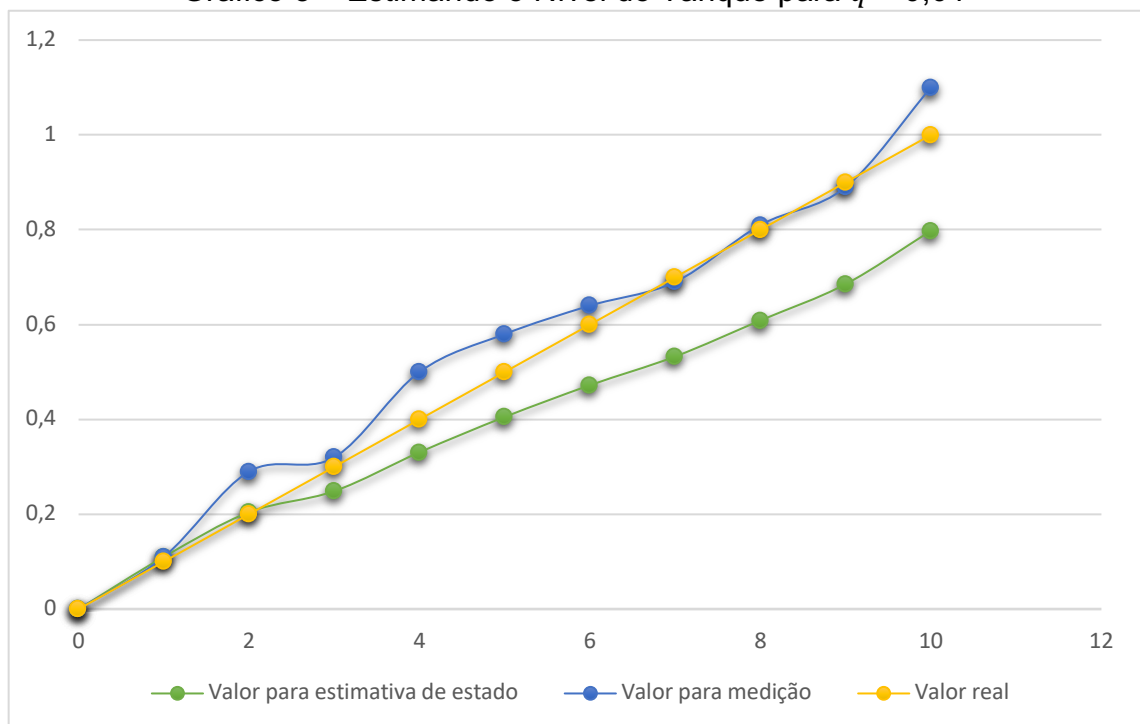
Observe que o estado estimado está abaixo do nível real. Este problema no processo de estimativa não é desejado, pois um filtro deve remover o ruído, não fazendo uma leitura imprecisa. Nesse caso, o estado estimado tem um erro muito maior (comparado à realidade) do que o ruído do processo de medição.

Existem dois itens que podem estar causando isso:

- O modelo que escolhemos.
- A confiabilidade do nosso modelo de processo (ou seja, nosso valor  $q$  escolhido).

Pode-se mudar o valor de  $q$ . A razão para a escolha  $q = 0,0001$  foi pensarmos que o modelo fornecia uma boa estimativa do verdadeiro processo. No entanto, neste caso, isso não acontece. Vamos supor que haja um erro maior com o modelo, dessa forma, vamos aumentar o valor de  $q$ . Agora vamos considerar  $q = 0,01$ :

Gráfico 3 – Estimando o Nível do Tanque para  $q = 0,01$



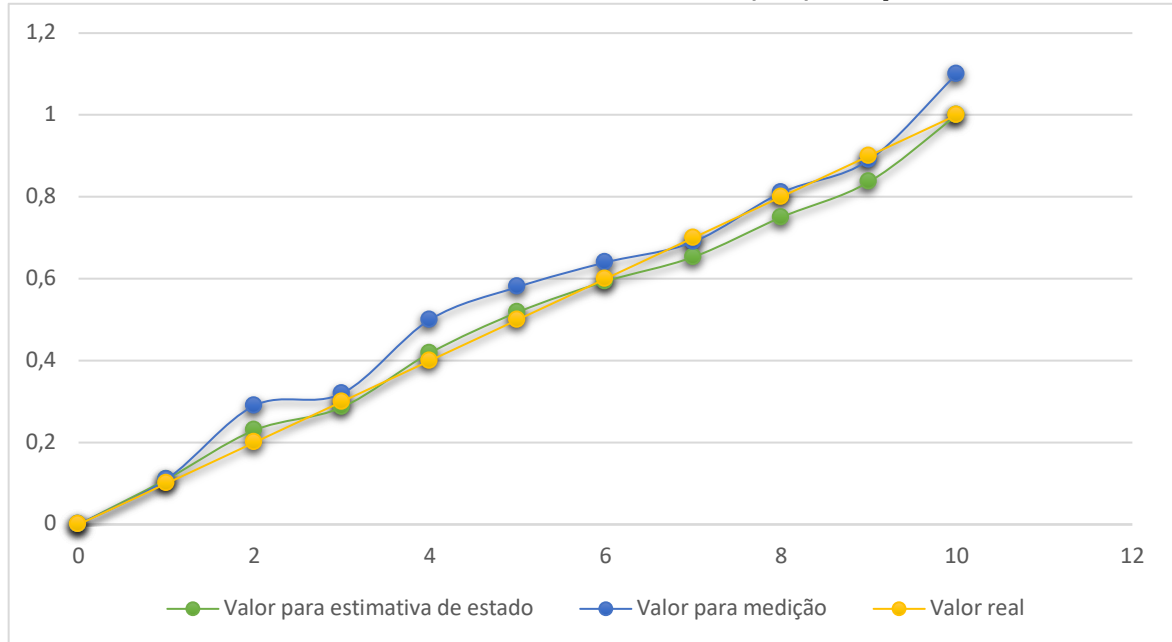
Fonte: elaborado pelo autor.

Portanto, os benefícios de aumentarmos o erro ficaram evidenciados por meio de um impacto positivo no processo de estimação. Contudo, o estado estimado ainda



apresenta mais erros do que o ruído real. Vamos aumentar esse valor novamente e considerar  $q = 0,1$  e observar a nova análise no gráfico abaixo:

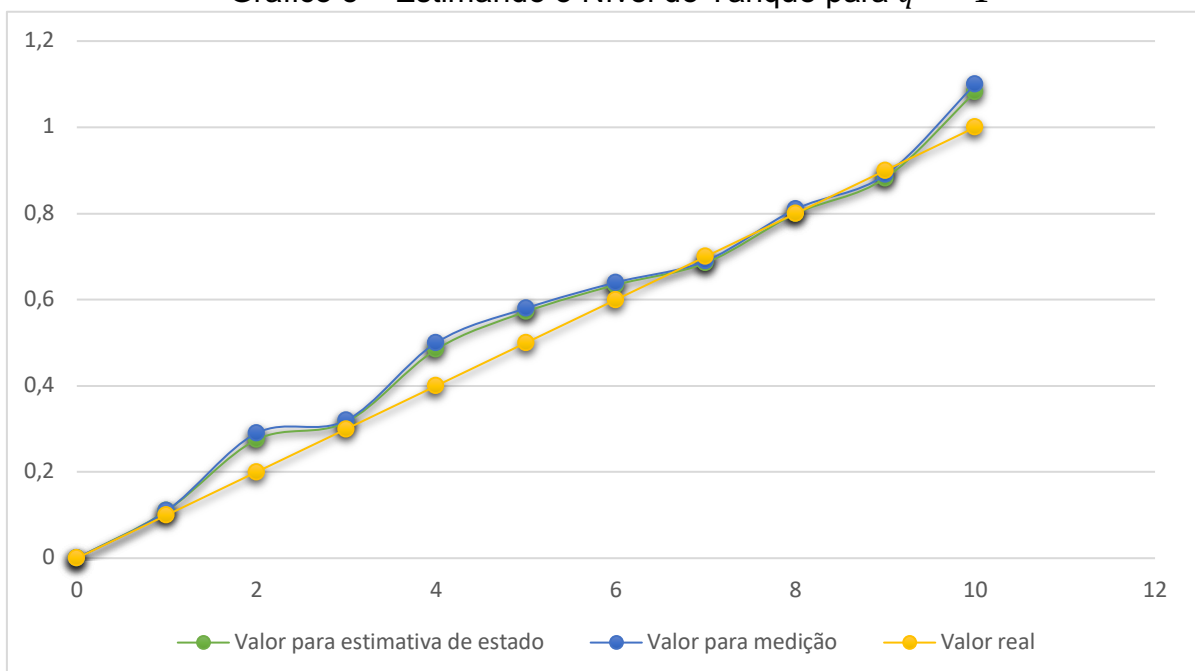
Gráfico 4 – Estimando o Nível do Tanque para  $q = 0,1$



Fonte: elaborado pelo autor.

Os valores para estimativa do estado estão se aproximando do valor real e há menos erros que o valor do ruído de medição. Vamos tentar  $q = 1$  para ver o que acontece:

Gráfico 5 – Estimando o Nível do Tanque para  $q = 1$



Fonte: elaborado pelo autor.

Agora quase não há diferença em relação ao valor medido. O que ocorreu foi uma remoção menor de ruído, mas não muito. Quase não há sentido em ter o filtro. Então, podemos chegar as seguintes conclusões:

Se temos um modelo mal definido, não teremos uma boa estimativa. Mas pode-se melhorar o modelo aumentando a ponderação do erro, ou seja, dando mais peso ao erro estimado. Isso permitirá que o Filtro Kalman confie mais nos valores de medição, mas ainda permite alguma remoção de ruído. Uma possibilidade é alterar o erro de medição e rever qual é o efeito dessa mudança, sendo que isso possibilita um ajuste no filtro sem ter que alterar a modelagem da situação problema.

Um ponto importante de se observar é que o ajuste do filtro, ao longo do processo, é uma cartada bastante viável para que o estado estimado se aproxime, ao máximo, dos valores reais e uma boa forma de realizar estes ajustes é dando mais ou menos peso, de acordo com a necessidade da situação problema, aos erros ou ruídos associados à aplicação do filtro, ou seja, o ponto chave é a média ponderada entre as duas informações. O que Kalman colocou em prática foi que quanto mais incerteza se tem na medida do sensor, mais peso nessa média ponderada se dará para a modelagem, ou vice-versa; portanto, quanto mais incerteza se tem com a modelagem, mais peso se dará para a medida do sensor. Esse processo continuará recursivamente até se obter a informação mais precisa que possa representar a situação problema.

### 3.1.2 Segunda opção: um modelo para enchimento do tanque

Nessa próxima etapa, vamos seguir o mesmo passo a passo realizado no caso anterior para que possamos nos familiarizar ainda mais com a etapas de modelagem e aplicação do Filtro Kalman.

#### 2º Modele o processo de estado

Para obter melhores resultados, precisamos alterar nossa modelagem construída para o problema anterior. Vamos redefinir isso, então.

Portanto, o modelo real é:

$$L_t = L_{t-1} + f \quad (3.1)$$

Isso se traduz em uma transição contínua de processo de:

$$X = (x_1, x_f)^T$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

onde  $x_1$  é o nível L e  $x_f = \frac{dx_1}{dt}$  é a taxa de enchimento estimada, e a matriz  $A$  representa o tanque enchendo continuamente na taxa  $x_f$  (definido por  $f$  na escala de tempo usada). No entanto, queremos um processo discreto. Então, a matriz  $A$  precisa ser discreta no tempo. Basta aplicar a soma infinita conforme indicado na equação (2.1) da página 36 deste trabalho:

$$X_t = F_t \cdot X_{t-1} + B_t \cdot u_t + w_t \text{ com } F_t = e^{\Delta t \cdot A} = I + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\Delta t^i \cdot A^i}{i!},$$

Observe que  $A^i$  é zero nas quatro componentes, para todos os  $i > 1$ :

$$F_t = \begin{pmatrix} 1 & \Delta t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

para todo  $t \geq 0$ . Iremos ignorar  $B$  e  $u$  novamente, ou seja, ambos são iguais a 0.

### 3º Modele o processo de medição

Nesse caso, não podemos medir diretamente a taxa de preenchimento, mas ainda assumirá uma medição ruidosa de L. Portanto, temos:

$$H = (1, 0)$$

$$Y = (y, 0)^T$$

Indicando que não há medição da taxa de enchimento e que  $y$  é a medida estimada de  $x_1$ .

#### 4º Modele o ruído

O processo de medição não mudou, o que significa que o ruído não mudou (ou seja,  $R = r$ ). O processo mudou, por isso precisamos redefinir o ruído. Agora, se assumirmos que o ruído está apenas na parte de enchimento do processo, isso nos daria um modelo de ruído contínuo com

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & q_f \end{pmatrix}$$

Em que  $q_f$  é o ruído de enchimento.

Agora, esse processo contínuo pode ser aproximado por um modelo discreto usando a seguinte integral:

$$Q(\Delta t) = \int_0^{\Delta t} e^{A\tau} Q e^{A^T \tau} d\tau$$

Usando essa tradução contínua para discreta, podemos usar o  $A$  e  $Q$  contínuos para aproximar o  $Q$  discreto. Isso nos dá (após alguns cálculos - a serem ignorados aqui; agora aplique a soma infinita da potência de  $e$ ):

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{\Delta t^3 q_f}{3} & \frac{\Delta t^2 q_f}{2} \\ \frac{\Delta t^2 q_f}{2} & \Delta t q_f \end{pmatrix}$$

Para simplificar, assumimos uma taxa de amostragem contínua de  $\Delta t = 1$ . Portanto,

$$F_t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } Q = \begin{pmatrix} \frac{q_f}{3} & \frac{q_f}{2} \\ \frac{q_f}{2} & q_f \end{pmatrix}$$

Além disso, como o processo não é mais escalar, a matriz de covariância é

$$P = \begin{pmatrix} p_l & p_{lf} \\ p_{lf} & p_f \end{pmatrix}$$

Em que o subscrito denota a variação relativa e  $p_{lf}$  é a covariância (que é simétrica, ou seja,  $p_{lf} = p_{fl}$ )

### 5º Teste o filtro

As equações de previsão e atualização, apresentadas na Tabela 3, mostrada anteriormente, podem ser um pouco simplificadas, mas, para nossos propósitos, é melhor apenas inserir as informações acima nas equações. Vale lembrar que lá na etapa 2, deste exemplo, consideramos  $B$  e  $u$  novamente nulos, ou seja, ambos iguais a 0 ( $K$  pode ser simplificado). Assim obtemos:

*Previsão:*

$$\begin{aligned} \hat{X}_{t|t-1} &= F_t \cdot \hat{X}_{t-1|t-1} \\ P_{t|t-1} &= F_t \cdot P_{t-1|t-1} F_t^T + Q_t \end{aligned}$$

*Atualização:*

$\hat{X}_{t|t} = \hat{X}_{t|t-1} + K_t \cdot \tilde{Z}_t$ , em que  $\tilde{Z}_t = Y_t - H_t \cdot \hat{X}_{t|t-1}$ , com isso obteremos:

$$\hat{X}_{t|t} = \hat{X}_{t|t-1} + K_t \cdot (Y_t - H_t \cdot \hat{X}_{t|t-1})$$

$K_t = P_{t|t-1} \cdot H_t^T \cdot S_t^{-1}$  em que  $S_t = H_t \cdot P_{t|t-1} \cdot H_t^T + R_t$ , com isso obteremos:

$$K_t = P_{t|t-1} \cdot H_t^T \cdot (H_t \cdot P_{t|t-1} \cdot H_t^T + R_t)^{-1}$$

$$P_{t|t} = (I - K_t \cdot H_t) P_{t|t-1}$$

Desta vez, temos um modelo preciso de uma taxa de preenchimento constante. Nós assumiremos que temos um ruído de  $r = 0,1$  e uma precisão do ruído

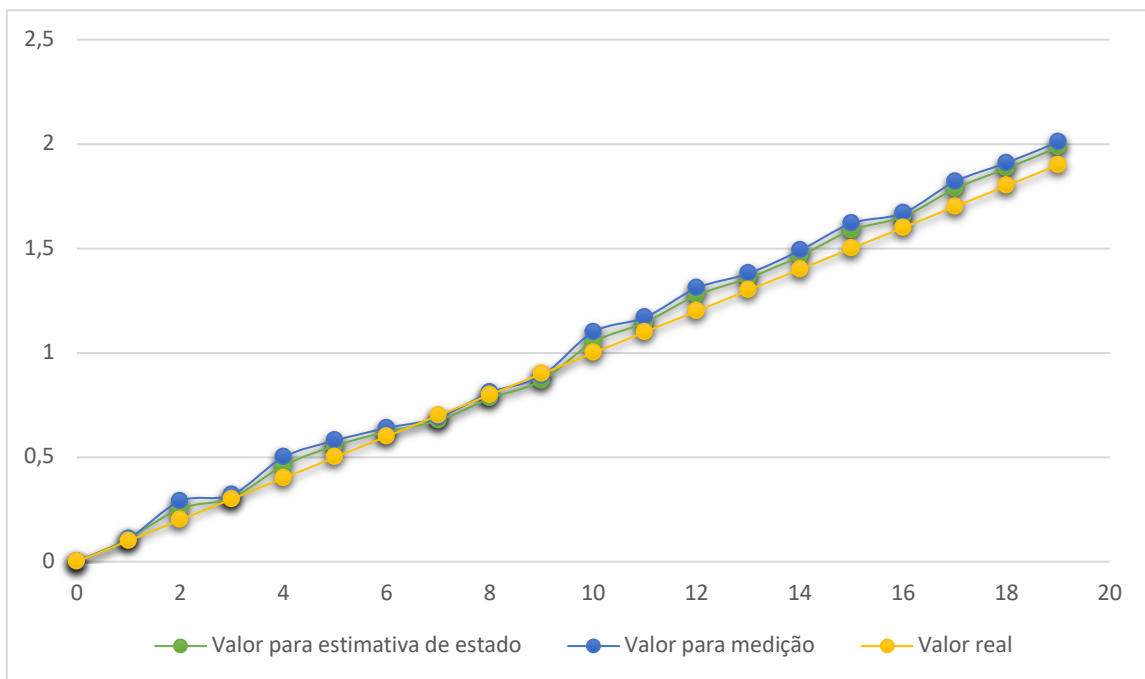
do processo de  $q_f = 0,00001$ . Não temos ideia do estado inicial ou da taxa de preenchimento; portanto, faremos  $X_0 = (0,0)^T$  com uma variação inicial de:

$$P_{0|0} = \begin{pmatrix} 1000 & 0 \\ 0 & 1000 \end{pmatrix}$$

Estamos assumindo que não temos ideia de nenhum dos valores e estamos assumindo que existe pouca ou nenhuma correlação entre eles.

Precisamos testar esses resultados sob diferentes condições. O primeiro teste será verificar se o modelo está sendo preenchido a uma taxa constante de 0,1 por período de tempo, com um ruído de medição real de  $\pm 0,3$ . Se traçarmos isso em um gráfico, teremos o seguinte:

Gráfico 6 – Ruído de medição real de  $\pm 0,3$

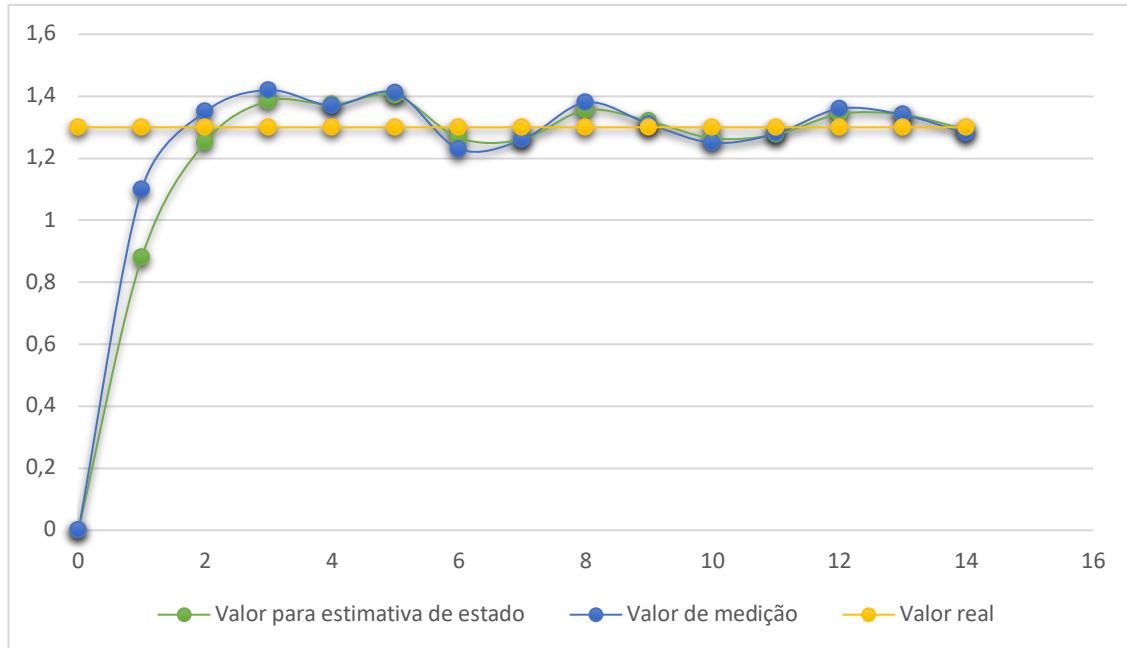


Fonte: elaborado pelo autor.

Observa-se que o filtro se adapta rapidamente ao valor verdadeiro. Em nenhum momento foi fornecido ao Filtro Kalman informações sobre a real taxa de enchimento, o próprio algoritmo descobriu tudo de forma automática, mesmo com uma inicialização com certa incerteza ou imprecisão. Na verdade, se dermos uma inicialização *ruim* ao Filtro Kalman, será necessário a primeira medida como uma inicialização *boa*.

Agora vamos ver o que acontece se tentarmos atrapalhar o funcionamento do Filtro Kalman usando um nível constante (ou seja, não há enchimento real):

Gráfico 7 – Filtro usando um nível constante



Fonte: elaborado pelo autor.

O filtro estabiliza exatamente no mesmo período de tempo que antes. Isto é porque o modelo estabiliza com uma taxa de preenchimento de 0.

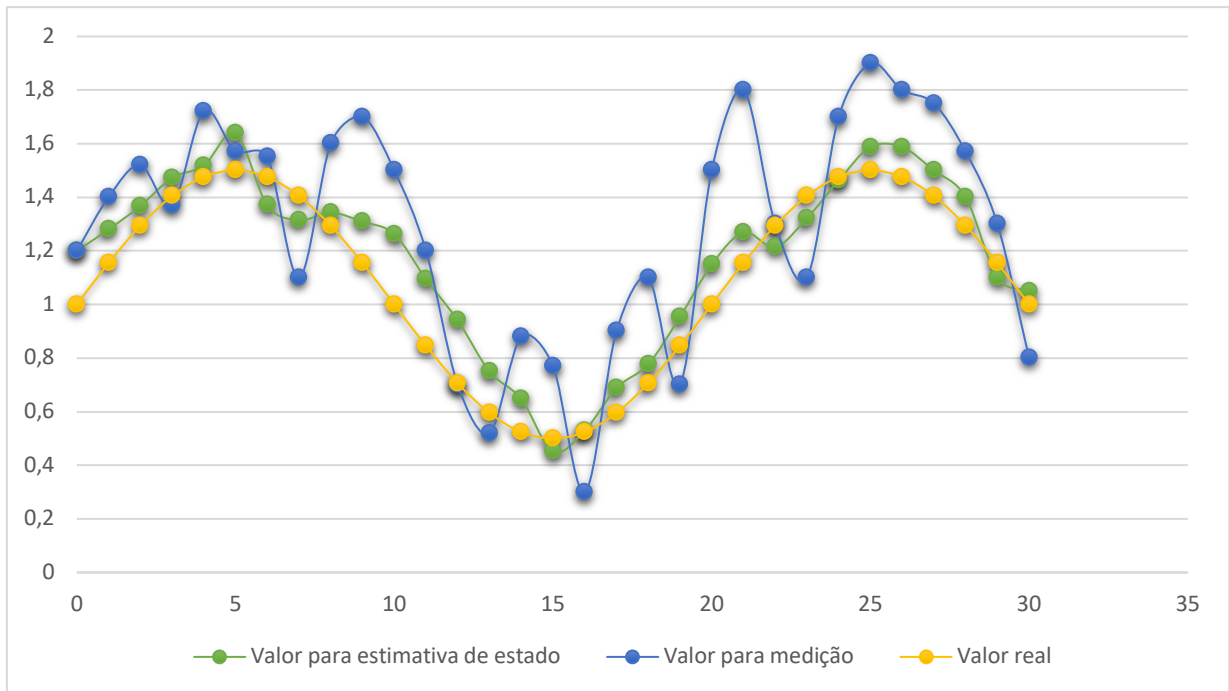
### 3.1.3 Terceira opção: Constante, mas instável (com ondulações)

Agora vamos testar um caso extremo. Assumiremos que a água está em um nível constante (não está passando por nenhum processo de enchimento ou esvaziamento, a quantidade de água é fixa), mas está variando no tanque por conta de alguma vibração ou instabilidade proposta. Esta situação problema pode ser modelada como uma onda senoidal, ou seja, uma função trigonométrica da seguinte forma:

$$L = c \cdot \text{sen}(2\pi \cdot r \cdot \Delta t) + l \quad (3.2)$$

onde  $c$  é um fator de escala de amplitude,  $r$  é a taxa de ciclo ou período e  $l$  é o nível médio (à medida que a instabilidade tende a zero ao longo do tempo).

Se usarmos  $c = 0,5$ ,  $r = 0,05$  e  $l = 1$ , obteremos o seguinte resultado:

Gráfico 8 – Resultado para  $c = 0,5$ ,  $r = 0,05$  e  $l = 1$ 

Fonte: elaborado pelo autor.

Há duas coisas que se deve observar sobre o Filtro Kalman:

1. O modelo é mais suave que a medição ruidosa, mas há um atraso em relação ao valor real. Isso é comum quando o filtro está atuando num sistema que não está modelado corretamente.

2. A amplitude do filtro está ficando cada vez menor. Isso ocorre porque o modelo está lentamente convergindo para o que pensa que é a verdade... um nível constante, que é preciso em relação ao tempo.

Caso seja útil modelar a instabilidade ou as ondulações corretamente, precisaremos usar o que é chamado de Filtro Kalman estendido, que levará em consideração a não linearidade do sistema e aplicará métodos de aproximação Gaussiana e técnicas de linearização. Como o objetivo deste trabalho está relacionado a situações lineares, não focaremos na resolução de situações em que seja necessário implementar métodos de linearização. Como já falado anteriormente, para aplicações que recaiam em restrições não lineares, o leitor pode consultar a referência (TEXEIRA; TÔRRES; AGUIRRE, 2019).

Na próxima aplicação do filtro, o foco será uma análise probabilística do resultado estimado em comparação com o valor real. Para isso, analisaremos a distribuição de probabilidade dos resultados obtidos.



### 3.2 Modelagem 2: Estimando a posição de um automóvel

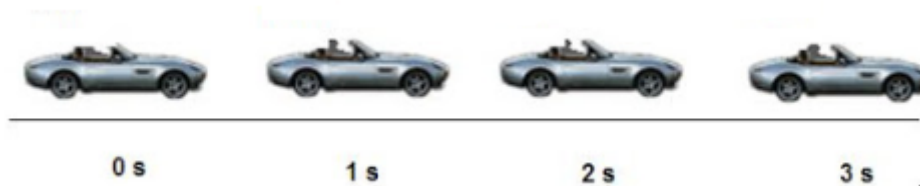
Neste exemplo, daremos uma atenção maior para as relações probabilísticas associadas à aplicação do Filtro de Kalman (comportamento Gaussiano, distribuição de probabilidade, etc.), já que, na modelagem da situação problema 1, trabalhamos a aplicação do filtro de forma “bruta”, sem fazer uma análise mais apurada do que temos por trás dos resultados.

Seguindo as etapas de aplicação do Filtro propostas no capítulo anterior, teremos:

#### 1º Entendendo a situação

Trabalharemos com uma situação em que um automóvel se desloca em linha reta e com velocidade constante. O nosso objetivo será estimar a posição do veículo, com a maior precisão possível, em instantes diferentes.

Figura 4 – Posições do veículo



Fonte: elaborada pelo autor.

As medições obtidas representarão a posição do automóvel partindo de um ponto inicial, que consideraremos 0, nos instantes 1s, 2s, 3s e assim por diante. Os resultados, para estimar a posição, poderão ser obtidos utilizando um radar, GPS ou até mesmo uma trena (a depender da distância a ser medida). Portanto, eles poderão ser verificados por um dispositivo eletrônico ou um simples dispositivo mecânico.

#### 2º Modele o processo de estado

Modelar essa situação é relativamente simples. Usando as equações de previsão e atualização, a variável de estado pode ser reduzida a um escalar (ou seja,  $\hat{X} = x$  onde  $x$  é a estimativa da posição  $P$ ). As variáveis de controle  $B$  e  $u$  não são usadas (ou seja, ambas = 0).

Portanto, o modelo real para qualquer  $t \geq 0$  é:

$$P_t = P_{t-1} + f \quad (3.3)$$

em que  $P_0 = 0$ , representa a posição inicial do veículo (como mencionado na etapa 1 desta modelagem),  $P_1$  a posição no instante  $1s$ ,  $P_2$  a posição no instante  $2s$  e assim por diante, em que  $P_t$  representa a posição no instante  $t$  em segundos e  $f$  representa o deslocamento entre dois segundos consecutivos.

### 3º Modele o processo de medição

Em nosso modelo, temos a medida do deslocamento percorrido pelo automóvel. Isso é representado por  $Y = y$ . O valor que estamos aferindo pode ser uma medida em escala ou, de fato, representar a unidade de medida correspondente no dispositivo de medição.

Por uma questão de simplificação, assumiremos que tanto a medida exata, quanto a estimativa do estado  $x$ , estarão na mesma escala, portanto,  $H = 1$ )

### 4º Modele o ruído

Para este modelo, vamos assumir que há ruído de medição (ou seja,  $R = r$ ). O processo é escalar, portanto  $P = p$ . Se o processo não estiver bem definido, ajustaremos o ruído (ou seja,  $Q = q$ ). Agora, aplicaremos os efeitos da alteração desses parâmetros e ruídos.

### 5º Teste o filtro

As equações de previsão e atualização, apresentadas na Tabela 2, apresentada anteriormente neste trabalho, podem ser simplificadas. Vale lembrar que lá na etapa 2 deste exemplo, decidimos ignorar  $B$  e  $u$  novamente, ou seja, ambos iguais a 0 ( $K$  pode ser simplificado). Assim temos,

*Previsão:*

$$\begin{aligned} \hat{X}_{t|t-1} &= F_t \cdot \hat{X}_{t-1|t-1} \\ P_{t|t-1} &= F_t \cdot P_{t-1|t-1} F_t^T + Q_t \end{aligned}$$

Atualização:

$\hat{X}_{t|t} = \hat{X}_{t|t-1} + K_t \cdot \tilde{Z}_t$ , em que  $\tilde{Z}_t = Y_t - H_t \cdot \hat{X}_{t|t-1}$ , com isso obteremos:

$$\hat{X}_{t|t} = \hat{X}_{t|t-1} + K_t \cdot (Y_t - H_t \cdot \hat{X}_{t|t-1})$$

$K_t = P_{t|t-1} \cdot H_t^T \cdot S_t^{-1}$  em que  $S_t = H_t \cdot P_{t|t-1} \cdot H_t^T + R_t$ , com isso obteremos

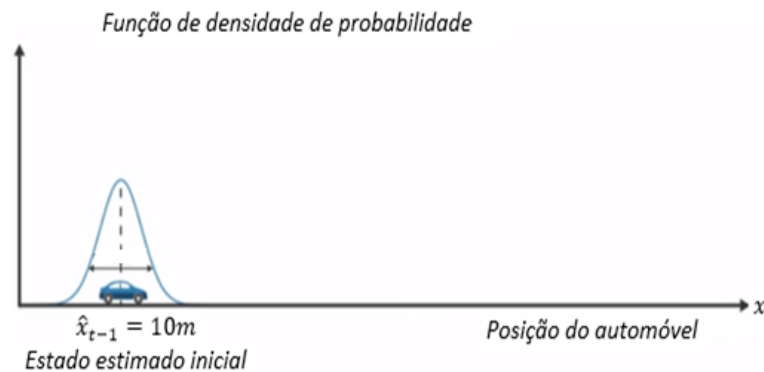
$$K_t = P_{t|t-1} \cdot H_t^T \cdot (H_t \cdot P_{t|t-1} \cdot H_t^T + R_t)^{-1}$$

$$P_{t|t} = (1 - K_t \cdot H_t) P_{t|t-1}$$

Temos um modelo aparentemente preciso para realizar a estimativa da posição do automóvel; agora, é só aplicar o filtro de forma recursiva.

Inicializamos o estado na posição estimada de 10m, há uma certa imprecisão nessa medida devido a um ruído referente ao aparelho de medição (que pode ser um sensor digital, analógico ou até mesmo uma trena); portanto, o valor está em torno de 10m. Podemos fazer essa análise por meio de uma curva Gaussiana para verificar que o automóvel se encontra por volta dos 10m, ou seja, essa é a maior probabilidade para a posição, sendo possível estar um pouco à frente ou atrás.

Figura 5 – Posição provável do automóvel



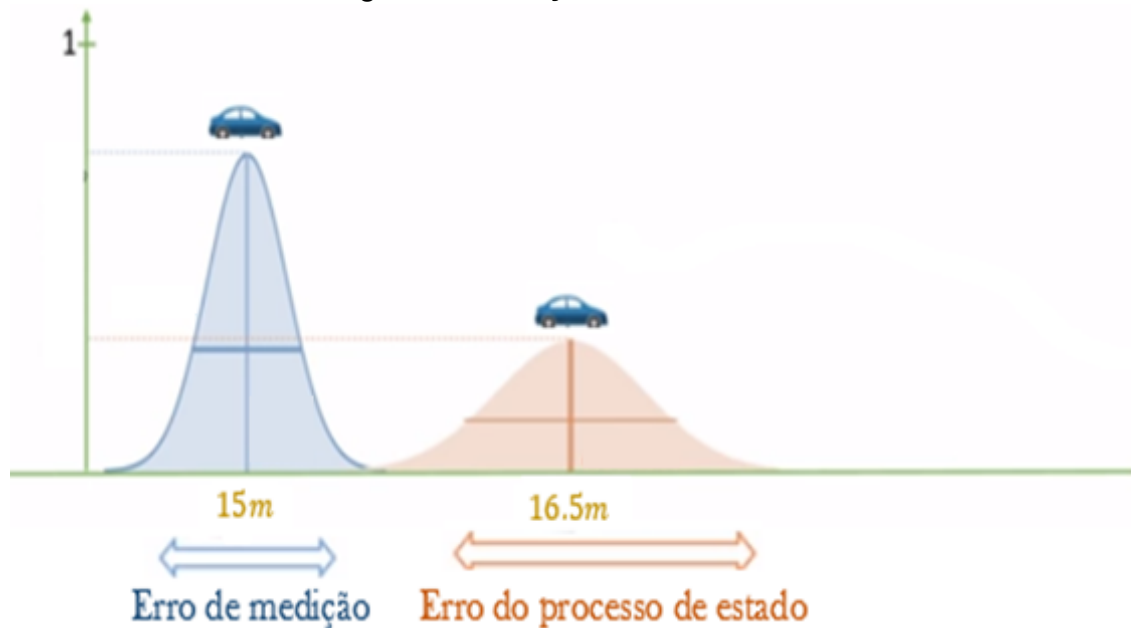
Fonte: elaborada pelo autor.

Dando continuidade, suponha que no instante 1s a medida obtida pelo radar ou trena foi de 15m (vale lembrar que se sabe a posição inicial e as equações para o espaço e velocidade). Também suponha que, ao aplicarmos as equações para o espaço e velocidade mencionadas anteriormente, o estado estimado obtido foi de

16,5m. Então, vamos encontrar uma estimativa calculando a média entre os dois valores encontrados,  $\frac{15+16,5}{2} = 15,75m$ , surge um questionamento: será que a média entre os valores obtidos com a medição e com as equações de posição será a melhor estimativa?

Outra possibilidade e uma resposta para esta pergunta será pegar a variação média, variância, entre as medidas obtidas e aí encontrar a estimativa ótima entre 15m e 16,5m, utilizando a função de densidade de probabilidade, aliada com o Filtro de Kalman, pois já nos certificamos de que essa relação sempre nos fornece estimativas com uma boa precisão.

Figura 6 – Posições do automóvel



Fonte: elaborada pelo autor.

Podemos observar que esta medida de 15m possui uma probabilidade maior e uma variância menor, já o valor de 16,5m possui uma probabilidade menor e uma variância maior, o que nos leva a constatar um ruído associado ao processo de medição e outro relacionado ao estado. Portanto, temos os dados para calcularmos o *ganho de Kalman* ( $K_t$ ), em que representaremos o erro associado ao processo de medição por  $E_{med}$  e o erro decorrente ao processo de estado por  $E_{est}$ .

$$K_t = \frac{E_{est}}{E_{est} + E_{med}}$$

Ao analisarmos essa expressão, podemos concluir que se o denominador for muito grande e os valores para o estado estimado forem estáveis, o *ganho de Kalman* se aproximará de 0 (para que isto aconteça, basta que o ruído da medição seja muito grande) e, quando as medidas são acuradas e os valores para o estado estimado forem instáveis, o *ganho de Kalman* se aproximará de 1 (para que isto aconteça, basta que o ruído da medição seja “muito pequeno” e se aproxime de 0).

Figura 7 – Ganho de Kalman



Fonte: elaborada pelo autor.

Agora, vamos partir para a equação de atualização com o intuito de obtermos a melhor estimativa. Para isso, aplicaremos os valores na referida equação de atualização:

$$\hat{X}_{t|t} = \hat{X}_{t|t-1} + K_t \cdot (Y_t - H_t \cdot \hat{X}_{t|t-1})$$

Vale observar que, como estamos trabalhando com somente 1 aparelho de medição, adotaremos  $H_t = 1$ , obtendo, assim, a seguinte equação para atualização de estado:

$$\hat{X}_{t|t} = \hat{X}_{t|t-1} + K_t \cdot (Y_t - \hat{X}_{t|t-1})$$

A próxima etapa é tentar minimizar o erro aplicado e, para isso, utilizaremos a seguinte equação:

$$P_{t|t} = (1 - K_t \cdot H_t)P_{t|t-1}$$

Como já sabemos que foi adotado  $H_t = 1$ , a equação para o erro pode ser simplificada:

$$P_{t|t} = (1 - K_t)P_{t|t-1}$$

Podemos perceber que a equação acima é uma recorrência que nos possibilita determinar o erro em um determinado instante  $t$ , a partir do instante anterior  $t - 1$ .

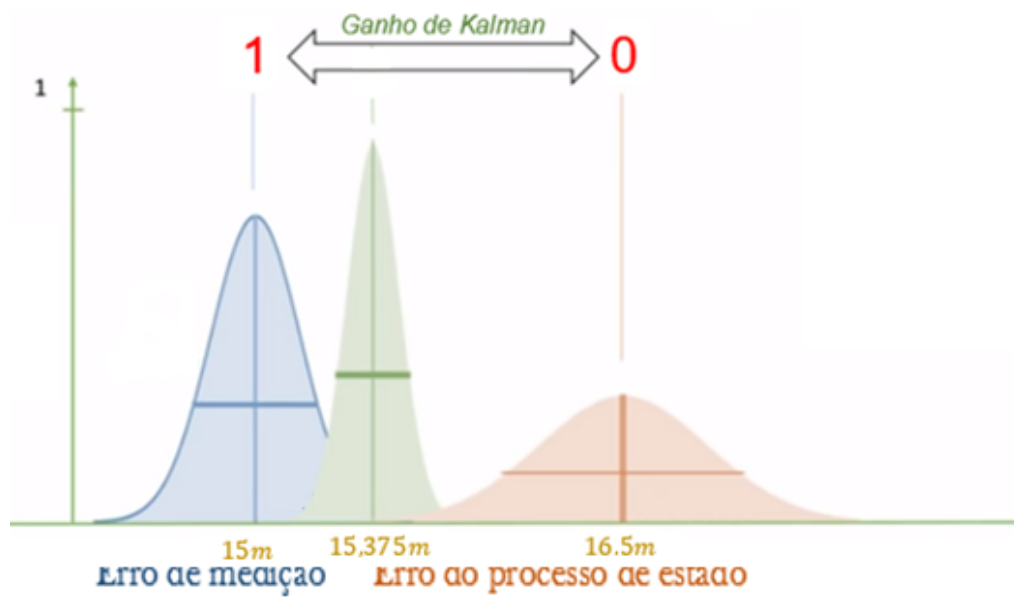
Como o objetivo deste exemplo não é detalhar todos os termos das equações envolvidas no KF, pois isso já foi feito anteriormente, iremos supor  $K_1 = 0,75$  e faremos as devidas substituições nas equações da fase de atualização.

$$\hat{X}_{t|t} = \hat{X}_{t|t-1} + K_t \cdot (Y_t - \hat{X}_{t|t-1})$$

$$\hat{X}_{1|1} = 16,5 + 0,75(15 - 16,5)$$

$$\hat{X}_{1|1} = 15,375m$$

Figura 8 – Comparando o Ganho de Kalman e Estimando a Posição do Automóvel



Ao analisarmos a distribuição de probabilidade ou curva Gaussiana, podemos verificar que, após aplicarmos o filtro de Kalman, potencializamos a probabilidade para o valor estimado da posição do automóvel e diminuímos a variância ou erro associado à estimativa.

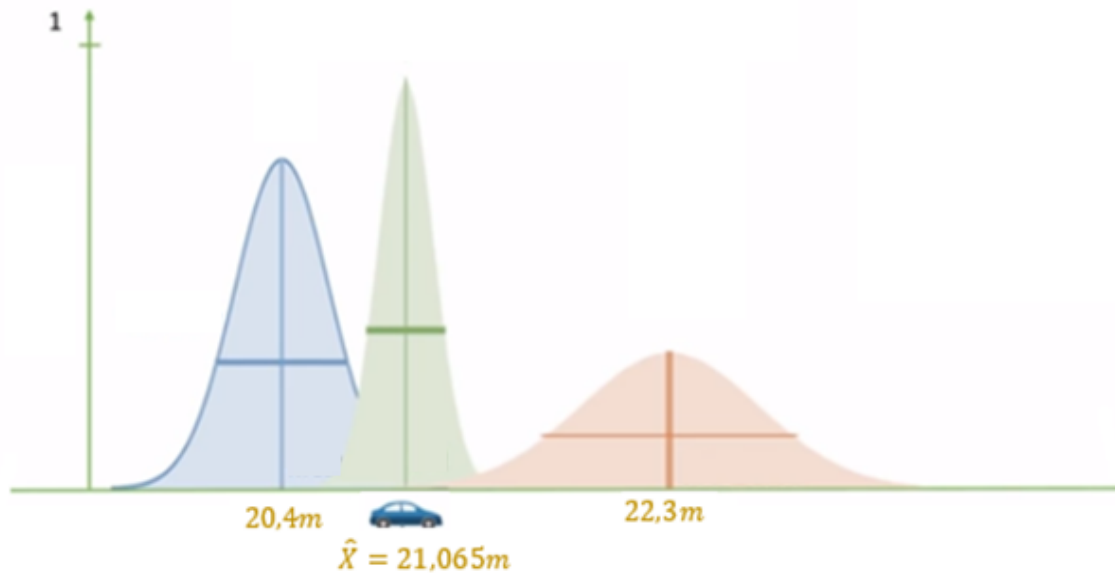
Agora, para a estimativa da posição para o instante  $t = 2$ , vamos incrementar um ruído externo (algum obstáculo que possibilite uma interferência na medição, como uma placa, animal, outro veículo, etc.). Esse fato faz com que o valor obtido pelo radar tenha uma imprecisão maior que na situação proposta para  $t = 1$ .

Vamos supor, de forma hipotética, que agora o estado estimado, por meio das equações horárias da velocidade e espaço, seja de  $22,3m$ , que a posição estimada pelo radar corresponda a  $20,4m$  e que o *ganho de Kalman* seja  $K_2 = 0,65$  (é necessário observar que o ganho de Kalman diminuiu com relação a  $t = 1$ , pois a variância/erro do estado estimado pelo radar aumentou e, com isso, o denominador da fração relacionada a  $K_t$  diminuirá).

Substituindo os referidos valores nas equações de atualização, obteremos o seguinte resultado:

$$\begin{aligned}\hat{X}_{t|t} &= \hat{X}_{t|t-1} + K_t \cdot (Y_t - \hat{X}_{t|t-1}) \\ \hat{X}_{2|2} &= 22,3 + 0,65(20,4 - 22,3) \\ \hat{X}_{2|2} &= 21,065m\end{aligned}$$

Figura 9 – Posição do automóvel para  $t = 2$



Fonte: elaborada pelo autor.

Há algumas coisas que devemos observar sobre esta situação proposta:

1. Fazer uma análise probabilística para a estimativa do estado é de suma importância para entender que à medida que aplicamos o filtro de Kalman, estaremos aumentando a probabilidade ou precisão para o estado estimado, utilizando uma ponderação dos resultados obtidos na fase de previsão e atualização. Para mais detalhes sobre uma análise probabilística do Filtro de Kalman, o leitor pode consultar a referência (MAYBECK, 1979)

2. À medida que aumentamos os ruídos, também aumentamos a imprecisão dos resultados obtidos. Então, combinar mais de um mecanismo de medição não será uma má ideia.

3. Agora, podemos responder à pergunta proposta na 5ª etapa dessa modelagem (Será que a média entre os valores obtidos com a medição e com as equações de posição será a melhor estimativa?). A média entre os valores

encontrados foi de  $15,75m$  e o estado estimado de maior probabilidade, utilizando o Filtro de Kalman, para  $t = 1$  foi de  $15,375m$ , ou seja, se tivermos que apostar em qual das duas medidas o automóvel estará mais próximo, certamente a chance maior de ganhar será ao apostarmos no resultado obtido por meio do KF, pois ele nos fornece a maior probabilidade de acordo com a distribuição Gaussiana construída para essa situação.



## CAPÍTULO 4

### SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA APLICAÇÃO DO FILTRO KALMAN NO ENSINO MÉDIO

Neste capítulo, apresentaremos conceitualmente um modelo de sequência didática, como proposto por Zabala (2007), que será considerado como a base para o desenvolvimento e a aplicação do KF no ensino médio. Na sequência didática que apresentaremos na sequência deste trabalho, serão propostas duas aplicações em situações problemas.

#### 4.1 Sequência didática como um recurso pedagógico

Sequência didática é um conjunto de atividades ligadas entre si, pensadas, planejadas e executadas com o objetivo de consolidar um determinado conteúdo dentro de uma habilidade ou competência. As sequências didáticas são organizadas de acordo com o alvo que o professor quer alcançar para aprendizagem de seus alunos e envolvem atividades e ações que podem levar várias aulas para se chegar ao ponto desejado.

Uma sequência didática também pode ser uma maneira de encaixar os conteúdos em um tema e, por sua vez, a outro, podendo tornar o conhecimento em um processo interdisciplinar, associado ao trabalho pedagógico e acompanhado de um desenvolvimento lógico. Assim, temos que a sequência didática é “um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelo professor como pelos alunos” (ZABALA, 2007, p. 18). Nesse sentido:

Para que exista uma sequência didática é necessário apresentar ao aluno atividades práticas, lúdicas com material concreto e diferenciado apresentando desafios cada vez maiores aos alunos permitindo a construção do conhecimento. Segundo a Revista Escola, um dos pioneiros em pesquisas sobre como os alunos aprendem Matemática, o francês Guy Brousseau desenvolveu a Teoria das Situações Didáticas, que se baseia no princípio de que "cada conhecimento ou saber pode ser determinado por uma situação, entendida como uma

ação entre duas ou mais pessoas (PERETTI; TONIN DA COSTA, 2013, p.6).

O estudante, ao iniciar seu processo de construção e consolidação da aprendizagem matemática na escola, precisa envolver-se com atividades que o motivem e o auxiliem, de forma a conduzi-lo a uma aprendizagem significativa, na qual, ao manipular certos recursos pedagógicos, ele potencializará a construção e a reconstrução do conhecimento, dando um novo significado ao processo de ensino e aprendizagem.

A aplicação de uma sequência didática tem como objetivo tornar o processo de aprendizagem mais atraente e motivador, tanto para o aluno quanto para o professor, pois as trocas de experiência entre todos os envolvidos no processo potencializam a relação professor-aluno e, inclusive, entre os pares, deixando evidenciar que as relações intra e inter-pessoais devem ser consideradas dentro do ambiente escolar. Isso estimula uma aprendizagem colaborativa e significativa, em que a realidade e o contexto em que o estudante está inserido serão levados em conta para a elaboração das atividades que nortearão o trabalho pedagógico que será desenvolvido, sem deixar de lado a intencionalidade em toda e qualquer ação proposta.

A aprendizagem significativa não é medida pela quantidade de erros e acertos, mas, sim, pelas trocas vivenciadas e compartilhadas entre os envolvidos. Por isso, uma sequência didática bem conduzida, com intencionalidade, proporcionando compartilhamento de experiências entre todos os participantes, inserida dentro da realidade dos estudantes, proporciona reflexões sobre a temática abordada e levará facilmente os alunos a uma consolidação eficiente e eficaz das habilidades e competências envolvidas na ação proposta, dando, assim, um significado concreto à temática abordada. Nesse sentido, os autores pontuam que:

Além de termos o domínio de técnicas de memorização, no processo de aprendizagem devemos adquirir a capacidade de atuar criticamente de forma autônoma, ativa e participativa diante de novas situações. Muitos sabem que a matemática desenvolve o raciocínio lógico e contribui para a compreensão de outras matérias incluídas no currículo escolar. As atividades matemáticas sendo propostas de forma contextualizada contribuirão positivamente em muitos aspectos da vida escolar, atingindo os objetivos no processo ensino-aprendizagem. Conforme os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática: As necessidades cotidianas fazem com que os alunos desenvolvam uma inteligência essencialmente prática, que permite reconhecer problemas, buscar e selecionar informações, tomar decisões e portanto, desenvolver uma ampla capacidade para lidar

com a atividade matemática. Quando essa capacidade é potencializada pela escola, a aprendizagem apresenta melhor resultado (PERETTI; TONIN DA COSTA, 2013, p.2).

Ao aplicar uma sequência didática, se faz necessário efetuar uma investigação prévia dos conhecimentos e pré-requisitos dos alunos e, a partir desses, planejar uma variedade de aulas com desafios e/ou problemas diferenciados, podendo ter como base jogos (gamificação associada à aprendizagem), análise e reflexão ou algum tipo de experimentação. É importante que à medida que se avance no planejamento, se aumente a complexidade dos desafios e orientações, permitindo um aprofundamento do tema proposto.

O professor, ao pensar na configuração e aplicação das sequências didáticas, estará trilhando um dos caminhos mais acertados para melhorar a sua prática pedagógica. Assim, ele estimula a formação de sujeitos ativos capazes de transformar o meio em que vive, de forma consciente e intencional.

De acordo com Zabala (2007), uma sequência didática deve conter início, meio e fim, com apresentação, desenvolvimento e finalização com uma avaliação. O autor pontua que há diferentes modelos de aula, em que se pode ter uma mais conceitual, outra mais procedimental, ou ainda outra mais atitudinal.

Para esta sequência didática que propomos aqui, seguiremos o modelo proposto por Zabala (2007) para a implementação da sequência didática que vamos sugerir com o objetivo de realizar a aplicação do Filtro Kalman no ensino médio.

#### *4.1.1 A sequência*

##### Apresentação

O professor apresenta uma situação problema. Em seguida, expõe aos alunos uma situação conflitante que pode ser solucionada por meios matemáticos, linguísticos, físicos ou de qualquer outra área.

##### Busca por soluções

O professor pede aos alunos que exponham diferentes formas de resolver o problema ou situação.

### Exposição do conceito e o algoritmo

O professor aproveita as propostas dos alunos para elaborar o novo conceito e ensinar o modelo de algoritmo, o problema ou a situação.

### Generalização

O professor demonstra a função do modelo conceitual e o algoritmo em todas aquelas situações que cumprem determinadas condições.

### Aplicação

Os alunos, individualmente, aplicam o modelo a diversas situações.

### Exercitação

Os alunos realizam exercícios em que fazem uso do algoritmo.

### Prova ou exame

Em classe, todos os alunos respondem às perguntas e fazem os exercícios do exame durante uma hora.

### Avaliação

O professor comunica aos alunos os resultados obtidos.

## **4.2 Uma sequência didática para aplicação do Filtro de Kalman**

A seguir, detalharemos uma sequência didática para aplicação do Filtro de Kalman no ensino médio, que pode ser aplicada de forma interdisciplinar com outras disciplinas, como física, robótica, entre outras. É importante salientar que, previamente, o professor deverá ter trabalhado os conteúdos, habilidades e competências associadas à estatística e probabilidade com abordagem da distribuição Gaussiana. Se o professor já tiver trabalhado os tópicos mencionados anteriormente, é importante destinar algumas aulas de revisão e retomada das habilidades necessárias para a implementação da sequência didática proposta.

<i>Disciplina:</i> Matemática
<i>Professor:</i>
<i>Série:</i> 3ª Série do Ensino Médio
<p><i>Conteúdos trabalhados (factual, conceitual, procedimental e atitudinal):</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Estatística,</li> <li>• Probabilidade,</li> <li>• Funções,</li> <li>• Movimento Retilíneo Uniforme (MRU),</li> <li>• Movimento Retilíneo Uniformemente Variado (MRUV).</li> </ul>
<p><i>Habilidades (BNCC):</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• <b>(EM13MAT102)</b> Analisar tabelas, gráficos e amostras de pesquisas estatísticas apresentadas em relatórios divulgados por diferentes meios de comunicação, identificando, quando for o caso, inadequações que possam induzir a erros de interpretação, como escalas e amostras não apropriadas.</li> <li>• <b>(EM13MAT202)</b> Planejar e executar pesquisa amostral sobre questões relevantes, usando dados coletados diretamente ou em diferentes fontes, e comunicar os resultados por meio de relatório contendo gráficos e interpretação das medidas de tendência central e das medidas de dispersão (amplitude e desvio padrão), utilizando ou não recursos tecnológicos.</li> <li>• <b>(EM13MAT203)</b> Aplicar conceitos matemáticos no planejamento, na execução e na análise de ações envolvendo a utilização de aplicativos e a criação de planilhas (para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros simples e compostos, entre outros), para tomar decisões.</li> <li>• <b>(EM13MAT301)</b> Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.</li> <li>• <b>(EM13MAT302)</b> Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º grau, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.</li> <li>• <b>(EM13MAT311)</b> Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade.</li> <li>• <b>(EM13MAT312)</b> Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos.</li> </ul>

- **(EM13MAT313)** Utilizar, quando necessário, a notação científica para expressar uma medida, compreendendo as noções de algarismos significativos e algarismos duvidosos, e reconhecendo que toda medida é inevitavelmente acompanhada de erro.
- **(EM13MAT315)** Investigar e registrar, por meio de um fluxograma, quando possível, um algoritmo que resolve um problema.
- **(EM13MAT316)** Resolver e elaborar problemas, em diferentes contextos, que envolvem cálculo e interpretação das medidas de tendência central (média, moda, mediana) e das medidas de dispersão (amplitude, variância e desvio padrão).
- **(EM13MAT406)** Construir e interpretar tabelas e gráficos de frequências com base em dados obtidos em pesquisas por amostras estatísticas, incluindo ou não o uso de *softwares* que inter-relacionem estatística, geometria e álgebra.
- **(EM13MAT501)** Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau.
- **(EM13MAT511)** Reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, e de eventos, equiprováveis ou não, e investigar implicações no cálculo de probabilidades.

*Tempo da Sequência Didática:*

5 a 7 aulas de 50 minutos

*Materiais necessários para a sequência didática:*

Lápis, borracha, caneta, régua, Datashow, fita métrica/trena, cronômetro, 5 galões de água de 20 litros, calculadora, torneira e mangueira para enchimento do galões, carrinho com controle remoto, arduino com módulo GPS (poderá ser substituído por uma trena a laser ou algum outro sensor de posição).

**Aula 1 e 2:**

- *Organização da turma:* Separar os alunos em grupos com 4 ou 5 componentes, se possível em um ambiente amplo como por exemplo uma sala de vídeo.
- *Introdução:* O professor trabalhará o primeiro tópico proposto por Zabala (Apresentação). Nesse momento o professor apresentará aos seus estudantes um breve histórico do trabalho de Kalman com

estimativas de estado e a importância que essa técnica possui em diversas áreas do conhecimento. Em seguida o professor irá expor duas situações problemas, a primeira será a do enchimento do vasilhame com água (mostrado neste trabalho na modelagem 1: estimando o nível de água no tanque, utilizando o modelo de preenchimento). A segunda situação será a estimativa para a posição de um automóvel em deslocamento (mostrado neste trabalho na modelagem 2: estimando a posição de um automóvel).

- *Desenvolvimento:*

- 1) O professor promoverá uma discussão coletiva com seus alunos com relação à importância e aplicação da estimativa de estado no contexto em que os participantes estão inseridos (como sugestão, poderá ser apresentado algum vídeo de aplicação do Filtro de Kalman).
- 2) O professor irá mostrar a importância de uma análise probabilística para a obtenção de uma estimativa coerente.
- 3) Apresentar a importância de minimizar o erro no processo de obtenção do estado estimado.
- 4) Apresentar aos alunos a modelagem 1 e 2 mostradas neste trabalho (estimativa do nível da água no tanque e da posição de um automóvel).
- 5) Discutir com os alunos outras possibilidades de aplicação do Filtro de Kalman.
- 6) Apresentar dois problemas: Estimar o nível de água dentro de um galão com enchimento constante e estimar a posição de um automóvel, ambos os casos em vários instantes diferentes.

- *Conclusão:*

A aula será finalizada com a seguinte demanda: solicitar aos grupos para que apresentem ao menos uma forma de resolver os problemas propostos.

**Aula 3:**

- *Organização da turma:* Manter os alunos nos mesmos grupos da última aula.
- *Introdução:* O professor trabalhará o segundo tópico proposto por Zabala (Busca por soluções). É importante que o professor sempre estimule e instigue os grupos com questionamentos direcionados, motivando-os a novas respostas.
- *Desenvolvimento:* Durante esse encontro cada grupo irá expor a sua ideia para a resolução dos problemas propostos na aula anterior. O professor vai atuar como mediador e sempre tomando o cuidado para não “podar” as ideias trazidas pelos alunos. Vale lembrar que certos questionamentos por parte do professor poderão estimular os grupos a irem reformulando seus conceitos idealizados.
- *Conclusão:* A aula será finalizada com os seguintes questionamentos:
  - 1) Será que existem fórmulas e ou equações que facilitem o processo de estimativa de estado?
  - 2) Como podemos fazer para potencializar a precisão do estado estimado?

**Aula 4:**

- *Organização da turma:* manter os alunos nos mesmos grupos da última aula.
- *Introdução:* O professor trabalhará o terceiro e quarto tópicos proposto por Zabala (Exposição do conceito e o algoritmo e Generalização). Nesse encontro o professor aproveitará as propostas dos alunos, apresentadas e modeladas na aula anterior, para elaborar e formalizar o conceito e ensinar o modelo de algoritmo para resolução do problema por meio do Filtro de Kalman.



- *Desenvolvimento:* Durante essa aula o professor apresentará todas as equações envolvidas na fase de previsão e atualização, incluindo as expressões para o erro e ganho de Kalman, sem deixar de lado a análise probabilística associada para obtenção da melhor estimativa para o estado.
- *Conclusão:* A aula será finalizada com o seguinte questionamento:
  - 1) Será que o modelo proposto por Kalman é suficiente para estimar o estado em qualquer instante utilizando a ideia de recursividade?

***Aulas 5 e 6:***

- *Organização da turma:* Manter os alunos nos mesmos grupos da última aula.
- *Introdução:* O professor trabalhará o quinto e sexto tópicos proposto por Zabala (Aplicação e Exercitação). Nesse encontro os estudantes, em seus grupos, aplicarão o filtro de Kalman nas duas situações propostas e irão estimar o estado nos dois problemas. O professor poderá aplicar as duas situações problemas ou escolher uma das duas para aplicação.
- *Desenvolvimento:*

***Procedimentos para aplicação 1 (Preenchimento de um galão):***

→ *Passo 1: O professor entregará 1 galão de 20 litros vazio, 1 trena e 1 cronômetro para cada grupo.*



→ *Passo 2: Os grupos serão conduzidos a um ambiente que possua uma mangueira ligada a uma torneira ou diretamente à torneira, desde que o galão esteja apoiado em uma superfície plana.*

→ *Passo 3: O professor deverá fixar os intervalos de tempo para que os alunos possam fazer as medições do nível da água no galão. Como sugestão, o intervalo de tempo para as medições poderá ser estabelecido de 5 em 5 segundos.*

→ *Passo 4: O professor poderá limitar o processo de medição a 3 ou 4 instantes, porém cada grupo deverá realizar a mesma quantidade de aferições.*

→ *Passo 5: Ao final de cada instante o preenchimento do galão será pausado imediatamente para a realização da medida referente ao nível da água. Esse processo deverá ser repetido de acordo com a quantidade de medições estipuladas pelo professor.*

→ *Passo 6: O grupo poderá ser dividido de forma que cada componente tenha uma atuação durante o procedimento de medição. É importante que o professor estimule os grupos a promoverem suas próprias escolhas com o intuito de potencializar as relações intra e interpessoais. Como sugestão, cada grupo poderá deixar 1 componente para ficar responsável pela marcação do tempo com o cronômetro, 1 componente responsável pelo controle do enchimento, 1 componente responsável pela utilização da trena na medida do nível da água e mais 1 ou 2 componentes responsável (eis) pela anotação dos valores de níveis obtidos e observando todo o processo, com o objetivo de identificar possíveis falhas durante o processo de medição.*

→ *Passo 7: Se for observado algum erro durante o processo de medição, pode-se reiniciar todo o procedimento de enchimento.*

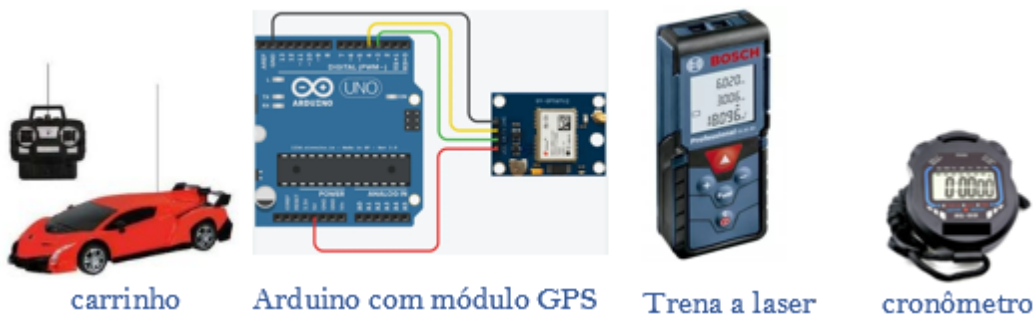
*Observação: durante todo o processo de medição a vazão da água deverá ser a mesma para todos os instantes e para todos os grupos.*

→ *Passo 8: Após o grupo finalizar o processo de medição, poderá retornar à sala de aula para discutir os valores obtidos.*

→ *Passo 9: Agora os grupos irão aplicar as equações de previsão e atualização do filtro de Kalman para estimar o nível de água em cada instante, estabelecido no passo 4.*

*Procedimentos para aplicação 2 (posição de um carrinho):*

→ *Passo 1: O professor entregará 1 carrinho com controle remoto, 1 sensor para aferição da posição (pode ser um arduino com módulo GPS, uma trena a laser, ou outro sensor a escolha do professor) e 1 cronômetro para cada grupo.*



→ *Passo 2: Os grupos serão conduzidos a um ambiente aberto, como por exemplo a quadra de esportes ou pátio da escola.*

→ *Passo 3: O professor deverá fixar os intervalos de tempo para que os alunos possam fazer as medições da posição encontrada para o carrinho. Como sugestão, o intervalo de tempo para as medições poderá ser estabelecido de 5 em 5 segundos.*

→ *Passo 4: O professor poderá limitar o processo de medição a 3 ou 4 instantes, porém cada grupo deverá realizar a mesma quantidade de aferições.*

→ *Passo 5: Ao final de cada instante a posição do carrinho deverá ser registrada. Esse processo deverá ser repetido de acordo com a quantidade de medições estipuladas pelo professor.*

→ *Passo 6: O professor deverá orientar aos grupos que o movimento do carrinho será em linha reta e com velocidade constante e que a posição inicial será considerada 0.*

→ *Passo 7: O grupo poderá ser dividido de forma que cada componente tenha uma atuação durante o procedimento de medição. É importante que o professor estimule os grupos a promoverem suas próprias escolhas com o intuito de potencializar as relações intra e interpessoais. Como sugestão, cada grupo poderá deixar 1 componente para ficar responsável pela marcação do tempo com o cronômetro, 1 componente responsável pelo controle e movimento do carrinho, 1 componente responsável pela utilização do sensor de medição da posição (arduino, trena ou outros dispositivos) e mais 1 ou 2 componentes responsável (eis) pela anotação dos valores das posições obtidas e observando todo o processo, com o objetivo de identificar possíveis falhas durante o processo de medição.*

→ *Passo 8: Se for observado algum erro durante o processo de medição, pode-se reiniciar todo o procedimento novamente.*

→ *Passo 9: Após o grupo finalizar o processo de medição, poderá retornar à sala de aula para discutir os valores obtidos.*

→ *Passo 10: Agora os grupos irão aplicar as equações de previsão e atualização do filtro de Kalman para estimar a posição do carrinho em cada instante, estabelecido no passo 4.*

OBS: É importante salientar que o professor deverá mediar toda a situação problema utilizando a técnica e as etapas de aplicação do filtro de Kalman apresentadas na seção 2.6 deste trabalho

#### **Aula 7:**

- *Organização da turma:* Manter os alunos nos mesmos grupos da última aula.
- *Introdução:* O professor trabalhará o sétimo e oitavo tópicos proposto por Zabala (Prova ou Exame e Avaliação). Nesse encontro ocorrerá um grande debate e exposição das conclusões obtidas com a aplicação do filtro de Kalman.

- *Desenvolvimento:* Durante essa aula o professor mediará uma discussão entre os grupos, para comparar os estados estimados com os valores obtidos no processo de medição. Para fechar esse momento, o professor poderá destacar que o filtro de Kalman é uma ótima ferramenta para estimar estado e que os aparelhos de medição possuem uma imprecisão na obtenção dos valores, sendo que este erro será minimizado com aplicação do filtro, aproximando assim, os valores obtidos com a aplicação do filtro de Kalman aos valores reais. A aula deverá ser finalizada com a resposta à pergunta feita ao final da aula 4 (Será que o modelo proposto por Kalman é suficiente para estimar o estado em qualquer instante utilizando a ideia de recursividade?).
- *Avaliação:* Cada grupo realizará, de forma ativa e colaborativa, um mapa mental abrangendo o máximo de conceitos, ações e habilidades trabalhadas durante a sequência didática proposta.

### **Aula 8**

- *Organização da turma:* Manter os alunos nos mesmos grupos da última aula.
- *Introdução:* O professor trabalhará o oitavo tópico proposto por Zabala (Avaliação). Nesse encontro o professor promoverá uma avaliação relacionada às abordagens da sequência didática proposta.
- *Avaliação:* Cada grupo construirá, de forma ativa e colaborativa, um mapa mental abrangendo o máximo de conceitos, ações e habilidades trabalhadas durante a sequência didática proposta.
- *Devolutiva:* Após cada grupo finalizar a demanda proposta, o professor passará em equipe por equipe para debater os itens abordados no mapa mental e fazer um fechamento do trabalho com um compartilhamento de *feedback* entre aluno com aluno e professor aluno.

## CAPÍTULO 5

### CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesta dissertação, foi apresentado o Filtro de Kalman como uma ferramenta para estimativas de estado, passando por uma análise probabilística e algébrica, com destaque para a distribuição de probabilidade e sistemas dinâmicos lineares. Foram apresentadas as equações associadas à aplicação do KF (equações de previsão e atualização). Não podemos deixar de mencionar as duas aplicações, citadas neste trabalho, que serviram como base para a construção de uma sequência didática para ser aplicada no ensino médio, tendo como base o modelo proposto por Zabala (2007).

À primeira vista, esta temática associada ao problema de filtragem parece ser rebuscada o suficiente para tornar a aplicação no ensino básico bastante improvável; porém, ao analisar as aplicações e as situações do cotidiano em que a temática aparece, a aplicação se apresentou de forma extremamente palpável para a etapa final do ensino médio. Ela se mostrou, inclusive, propícia para ser desenvolvida em uma prática interdisciplinar com outras áreas do conhecimento, como física, química, biologia, robótica, entre outras. Portanto, o que parecia tão distante do contexto da educação básica, agora se tornou viável e como um agente potencializador da interação entre diversas áreas do saber, dando um robusto embasamento para a construção e a consolidação do conhecimento por meio de uma interação entre a prática e a teoria.

## REFERÊNCIAS

- BRASIL, Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/> Acesso em: 01 set. 2020.
- FERNANDES, Marcos Rogério. *Filtragem Estocástica: variação da Estimativa como Fonte de Incerteza*. 2019. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica)- Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, Unicamp, 2019. Disponível em: [http://repositorio.unicamp.br/jspui/bitstream/REPOSIP/334481/1/Fernandes\\_Marcos\\_Rogério\\_M.pdf](http://repositorio.unicamp.br/jspui/bitstream/REPOSIP/334481/1/Fernandes_Marcos_Rogério_M.pdf). Acesso em: 01 set. 2020.
- FERREIRA, João Socorro Pinheiro. *Sistemas Dinâmicos Lineares no  $R^2$* . In: COLÓQUIOS DE MATEMÁTICA DAS REGIÕES, REGIÃO NORTE, 1. 2016, Macapá: Editora SBM, Unifap, 2016.
- FRANCISCO, Fernando da Luz; BARRETO, Gilmar. Aplicação didática do filtro de kalman usando uma câmera digital. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE EDUCAÇÃO EM ENGENHARIA. 2014, Juiz de Fora, MG. *Anais [...]*. Juiz de Fora, 16 a 19 de setembro, 2014. Disponível em: <http://www.abenge.org.br/cobenge/arquivos/5/Artigos/128947.pdf> . Acesso em: 01 set. 2020.
- GONÇALVES, Dimas J. *Aspectos Matemáticos do Filtro de Kalman Discreto*. 2005. 61 fl. Dissertação (Mestrado em Matemática)- Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Unicamp, Campinas, SP, 2005.
- KALMAN, Rudolf Emil. A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems. *ASME, Journal of Basic Engineering*, Baltimore, v. 82 (series D), p. 35-45, 1960.
- MAYBECK, Peter S. *Stochastic models, estimation and control*. Volume 1. New York: Academic Press, 1979.
- PEREIRA, G. A. S. *Filtro de Kalman: teoria e aplicações*. 1999. Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso em Engenharia Elétrica)- Centro de Pesquisa e Desenvolvimento em Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Minas Gerais, 1999.
- PERETTI, Lisiane; TONIN DA COSTA, Gisele Maria. Sequência Didática na matemática, *Rei – Revista de Educação do Ideau*, Uruguai, v. 8, n.17, p. 1-15, jun. 2013.
- TEIXEIRA, Bruno O. S.; TÔRRES, Leonardo A. B.; AGUIRRE, Luis A. Filtragem de Kalman com restrições para sistemas não lineares: revisão e novos resultados. *Sba: Controle & Automação*, Campinas, SP, v. 21, n.2, mar./ apr. 2010. Disponível em: [https://www.scielo.br/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S0103-17592010000200003](https://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0103-17592010000200003). Acesso em: 01 set. 2020.

WELCH, Greg; BISHOP, Gary. An Introduction to the Kalman Filter. *UNC-Chapel Hill*, tr 95-041, jul. 2006. Disponível em: <http://www.sci.utah.edu/~gerig/CS6320-S2013/Materials/MI37slides-Kalman.pdf>. Acesso em: 01 set. 2020.

FAN DI, *Kalman Filter Tank Filling*, Universidade de Hong Kong, set.2008, disponível em: <https://www.cs.cornell.edu/courses/cs4758/2012sp/materials/MI63slides.pdf>

RHUDY, Matthew B., SALGUERO, Roger A., HOLAPPA, Keaton. *A Kalman Filtering Tutorial For Undergraduate Students*, International Journal of Computer Science & Engineering Survey, 08(01):01-18, 2017.

ZABALA, Antoni. *A Prática Educativa: como ensinar*. Tradução Ernani F. da F. Rosa. Porto Alegre: Artmed, 2007.

SANTOS, Reginaldo. *Matriz de Variância e Covariância e o Teorema de Gauss-Markov*, set. 2001, Departamento de Matemática, UFMG.

HOEL Paul Gerhard; PORT, Sidney; STONE, Charles, *Introduction to Probability Theory*, Editora Houghton Mifflin, 1972.

HINES, Willian W., MONTGOMERY, Douglas C., GOLDSMAN, David M., BORROR, Connie M.. *Probabilidade e estatística na Engenharia*, Editora LTC, 4ª edição, 2006.

MANKE, João Victor. *Estimação de Sistemas Através de Filtros Kalman*, 2018, Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso em Engenharia Elétrica)-Departamento de Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Santa Catarina, Julho de 2018

GREWAL, Mohinder; ANDREWS, Angus, *Kalman Filtering: Theory and Practice Using MATLAB*, Editora Wiley-Interscience, 2001.