Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
Programa de Mestrado Profissional
em Matemática em Rede Nacional

PROFMAT

Garimpando o número de ouro em minas triangulares

Diego Dema Almeida Rosselló Souza

Brasília

2020

Diego Dema Almeida Rosselló Souza

Garimpando o número de ouro em minas triangulares

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos do “Programa” de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, para obtenção do grau de Mestre.

Universidade de Brasília - UnB

Departamento de Matemática - MAT

PROFMAT - SBM

Orientador: Prof. Dr. Rogério César dos Santos

Brasília

2020

Ficha catalográfica elaborada automaticamente,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

SR828dd
g

Souza, Diego Dema Almeida Rosselló
Garimpando o número de ouro em minas triangulares / Diego Dema Almeida Rosselló Souza; orientador Rogério César dos Santos. -- Brasília, 2020.
81 p.

Dissertação (Mestrado - Mestrado Profissional em Matemática) -- Universidade de Brasília, 2020.

1. Razão áurea. 2. Triângulos. 3. Construção geométrica. I. dos Santos, Rogério César, orient. II. Título.

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Garimpando o Número de Ouro em Minas Triangulares

por

DIEGO DEMA ALMEIDA ROSSELLÓ SOUZA

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos "Programa" de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, para obtenção do grau de

MESTRE EM MATEMÁTICA

Brasília, 10 de setembro de 2020.

Comissão Examinadora:

____

Prof. Rogério César dos Santos (Orientador)

____

Prof. Wescley Well Vicente Bezerra – FUP/UnB

____

Prof. Jhone Caldeira Silva - UFG

À minha esposa Alana, pelo amor a mim dedicado e pela compreensão com minhas horas de ausência. Ao meu filho Gael, pela alegria do dia a dia. Aos meus pais, Norival e Maria Fátima, por acreditarem no poder da educação.

Agradecimentos

Primeiramente gostaria de agradecer a Deus por me manter com saúde, por me dar força para ir atrás dos meus sonhos e por estar sempre comigo.

Aos meus pais, Maria Fátima e Norival, por me amarem, por sempre acreditarem em mim e por me incentivarem a estudar. Amo vocês!

À minha esposa Alana e ao meu filho Gael, meus amores, minha família, minha alegria e conforto diário. Agradeço pelo amor, pela paciência nas minhas horas de ausência e pela compreensão em todos os momentos que precisei. Obrigado por estarem sempre comigo.

Ao meu irmão Daniel, por me ter como referência e por sempre acreditar em mim. Isso me ajudou a ser melhor.

A todos os professores, pelos conhecimentos compartilhados e pela dedicação. Vocês foram fundamentais na minha formação. Muito obrigado.

Ao meu orientador Prof Rogério. Obrigado pela paciência, pela orientação precisa e pela dedicação em todas as etapas deste trabalho.

Ao meu grande amigo Rodrigo, por me apresentar o PROFMAT e ter sido o grande incentivador para que eu realizasse o ENA.

Aos colegas do PROFMAT, pelo apoio nos exercícios, nas provas e pela camaradagem em sala de aula e fora dela. Em especial aos amigos Camargo, Kellem e Lucas: obrigado pela companhia em sala de aula e nos intervalos, pelas risadas, pelas ajudas nas madrugadas de véspera de provas, pelas caronas, por não me deixarem desistir e pelos conselhos precisos. Vou levar a amizade de vocês para a vida.

À UnB e especialmente ao Departamento de Matemática e à coordenação do PROFMAT-UnB, obrigado pela oportunidade do estudo e aprofundamento em um programa e com uma equipe de nível tão elevado.

Aos colegas de trabalho, em especial ao Sr Fábio Rebêlo e ao Sr Nilber Cruz, agradeço a compreensão e o apoio, vocês foram fundamentais para a realização desse curso de mestrado.

“Descobrir consiste em olhar para o que todo mundo está vendo e pensar uma coisa diferente ”

Roger Von Oech

Resumo

Neste trabalho estudamos casos não famosos de número de ouro, ou razão áurea, em triângulos, realizando suas demonstrações de maneira detalhada por geometria plana. Para melhor compreensão, identificamos, como conceitos preliminares, a definição de razão áurea e definições e teoremas de geometria plana. Sugerimos uma sequência didática para aplicação em sala de aula. Apresentamos sugestões visando o aprofundamento do assunto e trabalhos futuros. Finalmente, mostramos como realizar construções geométricas com régua e compasso.

Palavras-chaves: Razão áurea. Triângulos. Construção geométrica.

Abstract

In this work we study not famous cases of gold number, or golden ratio, in triangles, carrying out their demonstrations in a detailed way by plane geometry. For better understanding, we identified, as preliminary concepts, the definition of golden ratio and definitions and theorems of plane geometry. We suggest a didactic sequence for application in the classroom. We present suggestions aimed at deepening the subject and future work. Finally, we show how to make geometric constructions with a ruler and compass.

Key-words: Golden ratio. Triangles. Geometric construction.

Lista de ilustrações

Lista de símbolos

α	Letra grega alfa
β	Letra grega beta
θ	Letra grega teta
ϕ	Letra grega phi
ΔABC	Triângulo de vértices A, B e C
$L\left(A, r_A\right)$	Circunferência L, de centro A e raio de comprimento r_A
$\angle ABC$	Ângulo formado pelos segmentos BA e BC
AB	Segmento AB
$\sin \angle A$	Seno do ângulo A
$\cos \angle A$	Cosseno do ângulo A
$\equiv$	Congruente
$\sim$	Semelhante
$\approx$	Aproximandamente
(ALA)	Caso Ângulo, Lado, Ângulo
(LAL)	Caso Lado, Ângulo, Lado
(LLL)	Caso Lado, Lado, Lado
(AA)	Caso Ângulo, Ângulo
$\parallel$	Paralelo
$\perp$	Perpendicular
$\in$	Pertence
$\neq$	Diferente
$P \Rightarrow Q$	se P, então Q
$P \Leftrightarrow Q$	P se e somente se Q
m_{AB}	Mediatriz de AB

Sumário

Introdução

O número de ouro ou a razão áurea, termo mais utilizado neste trabalho, é uma constante real irracional que surge ao dividirmos um segmento de modo que o todo está para o maior assim como o maior para o menor. Conforme consta na obra de Junior (2014), essa constante, representada pela letra grega ϕ (phi), é encontrada em obras de arte, como na de Mona Lisa de Leonardo da Vinci; no corpo humano, como na medida dos ossos da mão e na orelha; na natureza, como nos girassóis e nas pinhas; em construções, como na pirâmide de Quéops e no Parthenon; e na geometria, como no pentagrama e no retângulo áureo.

De acordo com Pavanello (1989) e Pavanello (1993), o ensino da geometria, principalmente no ensino fundamental e no ensino médio, tem sido deixado de lado por diversos motivos. Este fato pode comprometer o aprendizado da razão áurea e a exploração de casos relacionados à geometria.

Conforme pesquisa realizada em trabalhos acadêmicos acerca da razão áurea e seus casos na geometria, ficou evidente que existem diversos casos que se repetem, podendo assim ser chamados de casos famosos. Esses casos constam nas obras Anastácio; Ferreira (2015); Junior (2014); Landim (2014) e Linck (2017), são eles: o pentagrama, o retângulo áureo, o triângulo áureo e o decágono áureo. Porém o intuito deste estudo é mostrar casos não famosos de razão áurea na geometria.

Oai (2016) mostra 5 (cinco) casos de razão áurea em triângulos. Ele demonstra, de maneira sucinta, 4 (quatro) deles, 3 (três) por geometria plana e 1 (um) por geometria analítica.

Este trabalho visa apresentar e demonstrar de maneira detalhada, por geometria plana, cada um dos 5 (cinco) casos de Oai (2016), sugerir uma sequência didática para aplicação em sala, bem como realizar as construções geométricas, com régua e compasso, das figuras relativas aos casos apresentados. No final, aos que se interessarem no assunto e quiserem dar continuidade ao estudo, são feitas sugestões de trabalhos futuros.

Para tanto, no primeiro capítulo é apresentado o conceito de razão áurea, assim como conceitos básicos de geometria plana julgados importantes para o bom entendimento do trabalho.

Em seguida, o segundo capítulo apresenta e demonstra 2 (dois) casos não famosos de razão áurea em triângulos equiláteros.

O terceiro capítulo aborda 3 (três) casos não famosos de razão áurea em triângulos isósceles, apresentando e demonstrando cada um deles.

O quarto capítulo traz, como produto do trabalho, uma sequência didática, para aplicação em sala de aula, explorando um dos casos apresentados bem como a construção geométrica com régua e compasso da figura correspondente.

No último capítulo é feita uma revisão dos pontos abordados, além de sugestões para trabalhos futuros.

Por fim, no apêndice, consta um pouco sobre construções geométricas com régua e compasso, suas regras, construções básicas e métodos para divisão de segmentos em partes iguais. Neste apêndice, também estão descritas as construções geométricas das principais figuras relativas aos 5 (cinco) casos apresentados.

Definição do Problema

A partir do contexto apresentado na Introdução, a necessidade de promover o resgate da geometria à sala de aula ficou evidente. Dentre os diversos motivos para o abandono do ensino da geometria apresentados por Pavanello (1989), a dificuldade que alguns professores encontram na matéria tende a ser um dos fatores mais preocupantes. Sendo assim, é necessário encontrar formas de fazer com que esses professores se aproximem da matéria e passem a encará-la para relembrar/aprender e ensiná-la de maneira didática e criativa.

Objetivos

Considerando o problema apresentado, o trabalho tem como objetivo geral explorar os conceitos de razão áurea por meio dos 5 (cinco) casos de Oai (2016), bem como promover a revisão/aprendizado de conceitos de geometria plana. Para alcançar este objetivo geral, os seguintes objetivos específicos são elencados:

a. revisar conceitos de razão áurea e geometria plana;

b. demonstrar de maneira detalhada os 5 (cinco) casos de Oai (2016);

c. apresentar uma sequência didática para aplicação em sala de aula;

d. revisar os conceitos de construção geométrica; e

e. construir as figuras geométricas dos 5 (cinco) casos de Oai (2016).

Justificativa

O tema escolhido se justifica pelo fato de as demonstrações dos casos de Oai (2016) abordarem muitos conceitos. Esses conceitos aliados à criatividade das construções geométricas permitem aos professores ou interessados uma boa revisão ou aprendizado. Podendo, assim, os interessados estudá-los e aplicá-los em sala de aula, auxiliados pela sequência didática a ser apresentada.

Metodologia

A partir dos objetivos elencados, vamos classificar este trabalho quanto aos tipos de pesquisa, destacando-os a seguir.

Quanto à abordagem, foi realizada uma pesquisa qualitativa, pois foi possível analisar os casos de Oai (2016) e verificar que a quantidade de conceitos envolvidos nas suas demonstrações podem ser usados para promover uma revisão de conteúdo e ajudar a solucionar o problema do abandono do ensino da geometria, estudando e aplicando os casos em sala de aula.

Quanto à epistemologia, foi realizada uma pesquisa interpretativista, pois esse tipo de pesquisa consiste em enxergar um certo dado de uma outra maneira. Olhando um dos casos de Oai (2016), em um primeiro momento, é possível perceber que se trata somente da demonstração de uma proposição, mas analisando de uma melhor forma, verifica-se que ele pode ser explorado para promover melhoria no ensino.

Quanto à natureza, foi realizada uma pesquisa aplicada, pois o estudo deste trabalho e a aplicação em sala de aula podem ajudar a diminuir o abandono do ensino da geometria relatado por Pavenello (1989).

Quanto à análise de dados, foi realizada uma pesquisa exploratória, pois os casos de razão áurea em triângulos abordados por Oai (2016) são assuntos pouco estudados e relativamente novos, não sendo encontrados em livros acadêmicos, mas somente em artigos científicos.

Quanto aos procedimentos, foi realizada uma pesquisa bibliográfica, pois para compôr o embasamento teórico para realizar as demonstrações dos casos apresentados, bem como para estruturar o capítulo de Conceitos Preliminares e o Apêndice A, foi necessária a pesquisa em livros, artigos científicos e dissertações.

Para estruturar e fundamentar o trabalho, foi realizada uma coleta de dados em trabalhos acadêmicos e artigos científicos no Google Scholar, no banco de dissertações do PROFMAT e em livros, onde foi possível extrair conhecimento e dados acerca da razão áurea, problemas relacionados ao ensino e conceitos de geometria plana, com destaque para construção geométrica com régua e compasso.

De posse desses dados, primeiramente, foram realizadas a apresentação e demonstração de conceitos julgados preliminares para a condução deste estudo, tais como definições, teoremas e corolários.

Esses conceitos iluminaram o caminho para os capítulos seguintes e para o apêndice, assim como permitiram elucidar e facilitar as demonstrações dos casos de razão áurea em triângulos, bem como o entendimento dos métodos de construções geométricas.

As demonstrações dos 5 (cinco) casos de Oai (2016) foram feitas de maneira detalhada, todas por geometria plana e por meio de casos genéricos, um pouco diferente do que foi feito pelo autor, que demonstra, de maneira sucinta, 4 (quatro) deles, 3 (três) por geometria plana e 1 (um) por geometria analítica, se valendo de casos particulares.

Por fim, foi apresentada uma sequência didática como sugestão de aplicação em sala de aula, tanto para o ensino médio, quanto para o ensino fundamental. Com isso, busca-se resgatar o retorno do ensino da geometria às salas de aula.

1 Conceitos Preliminares

São apresentados neste capítulo alguns conceitos julgados necessários para o melhor entendimento deste trabalho. Estão relacionados o conceito de razão áurea, a mediatriz de um segmento, casos de potência de ponto em relação à uma circunferência, o circuncentro e círculo circunscrito.

Não são objetos de estudo neste capítulo conceitos corriqueiros, como fórmula de Bhaskara, teorema de Pitágoras, ângulos, tangência e ângulos no círculo, congruência e semelhança de triângulos, relações trigonométricas e teorema de Tales, devendo ser de conhecimento prévio para compreensão de alguns passos, principalmente nas demonstrações.

1.1 Razão Áurea

Proporção áurea, número de ouro, número áureo, secção áurea, proporção de ouro, razão de ouro, média e extrema razão, divina proporção, divina seção, proporção em extrema razão, divisão de extrema razão, áurea excelência e razão de Phidias. Esses são os diversos nomes dado à razão áurea, que vamos definir a seguir, e é representada pela letra grega ϕ (phi).

Essa representação passou a ser utilizada no século XX, por ser a primeira letra grega no nome de Fídias, um grande escultor que viveu entre 490 e 430 a.C., pois alguns historiadores da arte da época afirmavam que Fídias usava com frequência a razão áurea em suas obras. (LINCK, 2017)

Existem muitas curiosidades em torno da razão áurea. Ela está presente na natureza, no corpo humano, na geometria, em obras de artes e em construções. (JUNIOR, 2013)

Euclides de Alexandria apresentou um dos primeiros registros da razão áurea, definindo geometricamente o conceito de razão áurea no livro intitulado por "Elementos", que consta: “Para que um segmento seja dividido em Seção Áurea, a razão entre o segmento e a parte maior deve ser igual a razão entre a parte maior e a parte menor”. (LANDIM, 2014)

Existem duas definições para a razão áurea, a definição geométrica e a definição algébrica, apresentadas a seguir.

Definição 1.1.1. *(LANDIM, 2014) (Geométrica) Um ponto C divide o segmento AB na razão áurea, quando* $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB}$*, com* $AC > CB$*, conforme figura 1.*

Figura 1 – Segmento AB

Fonte: elaborado pelo autor

Definição 1.1.2. *(LANDIM, 2014) (Algébrica) Considerando a Definição 1.1.1,* $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB} = \phi$.

Teorema 1.1.3. *Um segmento AB é dividido na razão áurea por um ponto C, se, e somente se,* $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB} = \phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, *com $AC > BC$.*

Demonstração. Seja $AC = a$ e $CB = b$, substituímos os valores na Definição 1.1.1.

Suponha, primeiramente, que $\dfrac{a+b}{a} = \dfrac{a}{b}$. Daí:

$$(a+b) \cdot b = a^2 \Rightarrow$$

$$a^2 - ba - b^2 = 0.$$

Aplicando a fórmula de Bhaskara:

$$a = \frac{-(-b) \pm \sqrt{(-b)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-b^2)}}{2 \cdot 1} \Rightarrow$$

$$a = \frac{b \pm \sqrt{b^2 + 4b^2}}{2} \Rightarrow$$

$$a = \frac{b \pm b\sqrt{5}}{2} \Rightarrow$$

$$\frac{a}{b} = (\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}).$$

Como $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$, então:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

Por outro lado, se $\phi = \dfrac{a+b}{a} = \dfrac{a}{b}$, temos:

$$\phi = \frac{a}{b} \Rightarrow$$

$$a = b\phi. \tag{1.1}$$

Substituindo (1.1) em $\dfrac{a+b}{a} = \dfrac{a}{b}$:

$$\frac{b\phi + b}{b\phi} = \frac{b\phi}{b} \Rightarrow$$

$$\frac{\phi+1}{\phi} = \phi \Rightarrow$$
$$\phi^2 = \phi + 1.$$

□

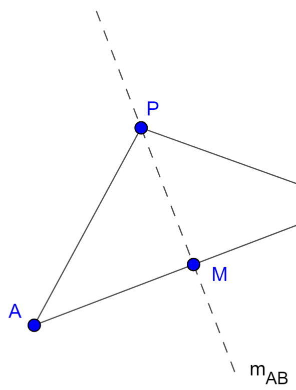
Dessa demonstração é possível extrair a seguinte relação: $\phi^2 = \phi + 1$, que será muito importante para as demonstrações dos capítulos principais.

1.2 Mediatriz

Definição 1.2.1. *(NETO, 2013) Dados os pontos A e B no plano, definimos a mediatriz do segmento AB como sendo a reta perperdicular a AB e que passa por seu ponto médio.*

Teorema 1.2.2. *(NETO, 2013) Dados os pontos A e B no plano, a mediatriz do segmento AB é o lugar geométrico (LG) dos pontos equidistantes de A e de B.*

Figura 2 – Mediatriz do segmento AB



Fonte: elaborado pelo autor

Demonstração. Seja M o ponto médio e m_{AB} a mediatriz de AB (veja Figura 2). Se $P \in m_{AB}$, então no ΔPAB, PM é mediana e altura e, daí, $\Delta AMP \equiv \Delta BMP$ (LAL), garante que o ΔPAB é isósceles de base AB. Logo, $PA = PB$. (NETO, 2013)

Por outro lado, seja P um ponto no plano tal que $PA = PB$ e também seja M o ponto médio de AB (veja Figura 2). Então, o ΔPAB é isósceles de base AB, de onde segue que a mediana e a altura relativas a AB coincidem. Mas como a mediana de PAB relativa a AB é o segmento PM, segue que $PM \perp AB$, que pela definição 1.2.1, é o mesmo que dizer que PM é a mediatriz de AB. (NETO, 2013). □

1.3 Potência de ponto em relação a uma circunferência

O conhecimento de potência de ponto em relação a uma circunferência é muito importante para o estudo da Geometria, pois existem muitas aplicações em problemas que tratam de relações métricas entre secantes e tangentes a uma circuferência. (WAGNER, 2001).

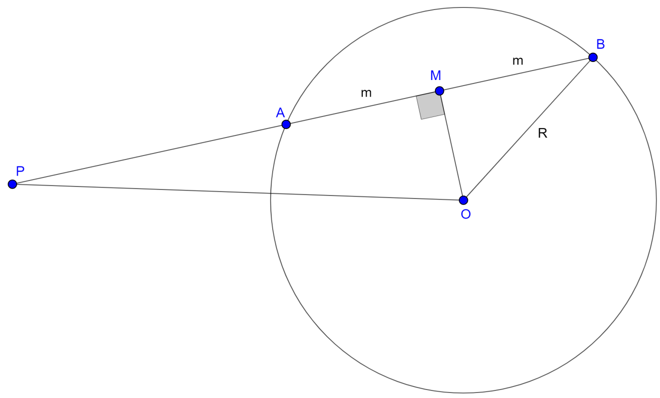
Definição 1.3.1. *Seja α uma circunferência de centro O e raio R. Se um ponto P está a uma distância d de O, definimos a potência do ponto P em relação à circunferência α por: $Pot(P) = d^2 - R^2$. (WAGNER, 2001).*

Teorema 1.3.2. *Dados uma circunferência α e um ponto P. Se uma reta passa por P e corta α nos pontos A e B, então o produto $PA \cdot PB$ é constante. (WAGNER, 2001).*

Demonstração. Será necessário dividir em 2 (dois) casos para realizar esta demonstração.

- 1º caso: P exterior a α

Figura 3 – Circunferência α com PB secante



Fonte: elaborado pelo autor

Conforme figura 3, seja O o centro de α e R o seu raio. Seja P um ponto não pertencente a α com $PO = d$ e PAB uma secante de α. Seja OM a mediatriz de AB, assim $MA = MB = m$.

Note que $PA = PM - m$ e $PB = PM + m$. Daí, aplicando o teorema de Pitágoras nos ΔMOP e ΔBMO, temos:

$$d^2 = PM^2 + OM^2 \tag{3.2}$$

$$R^2 = m^2 + OM^2. \tag{3.3}$$

Agora,

$$PA \cdot PB = (PM - m) \cdot (PM + m)$$

$$PA \cdot PB = PM^2 - m^2.$$

Somando e subtraíndo OM^2,

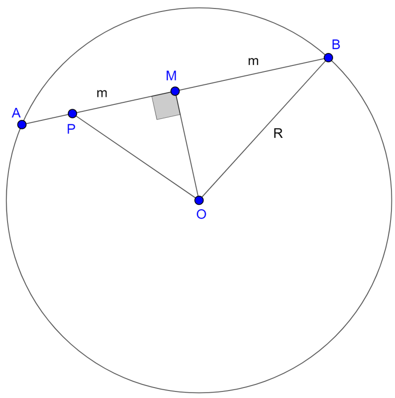
$$PA \cdot PB = PM^2 + OM^2 - (m^2 + OM^2).$$

Substituíndo (3.2) e (3.3) na equação, concluímos que:

$$PA \cdot PB = d^2 - R^2 = Pot(P).$$

- 2º caso: P interior a α

Figura 4 – Circunferência α com P interior



Fonte: elaborado pelo autor

Conforme figura 4, seja O o centro de α e R o seu raio. Seja P um ponto não pertencente a α com $PO = d$ e PAB uma secante de α. Seja OM a mediatriz de AB, assim $MA = MB = m$.

Note que $PA = m - PM$ e $PB = m + PM$. Daí, aplicando o teorema de Pitágoras nos ΔMOP e ΔBMO, temos:

$$d^2 = PM^2 + OM^2 \tag{3.4}$$

$$R^2 = m^2 + OM^2. \tag{3.5}$$

Agora,

$$PA \cdot PB = (m - PM) \cdot (m + PM)$$

$$PA \cdot PB = m^2 - PM^2.$$

Somando e subtraíndo OM^2,

$$PA \cdot PB = m^2 + OM^2 - (PM^2 + OM^2).$$

Substituíndo (3.4) e (3.5) na equação, concluímos que:

$$PA \cdot PB = R^2 - d^2 = d^2 - R^2 = Pot(P)$$

$$-PA \cdot PB = d^2 - R^2 = -Pot(P).$$

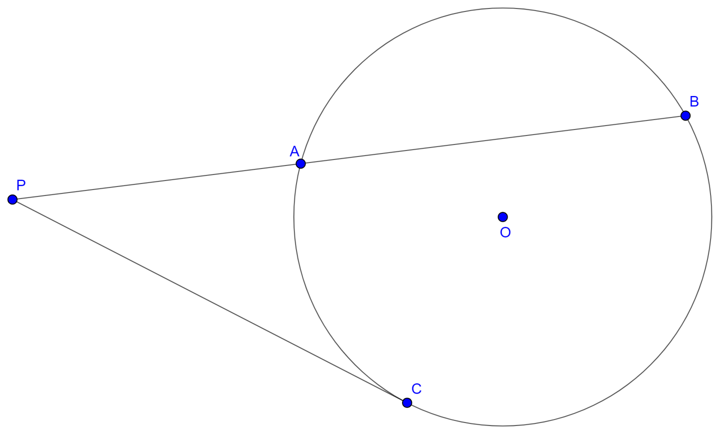
□

Desse teorema é possível chegar em 2 (dois) corolários importantes para relações métricas entre secantes e tangentes a uma circuferência.

Corolário 1.3.3. *Dados uma circunferência α e um ponto P. Se uma reta passa por P e corta α nos pontos A e B e outra reta passa pelo mesmo ponto P e corta α nos pontos C e D, então $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.*

Corolário 1.3.4. *Dados uma circunferência α e um ponto P exterior a α. Se uma reta passa por P e corta α nos pontos A e B e outra reta passa pelo mesmo ponto P e corta α no ponto C, então $PA \cdot PB = PC^2$.*

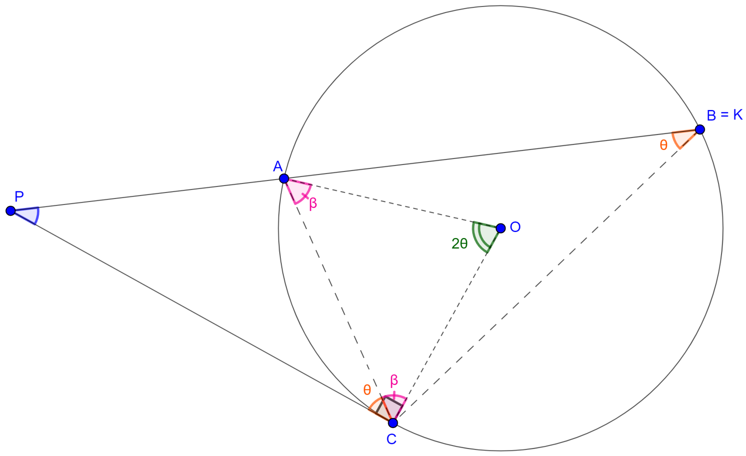
Figura 5 – Circunferência α com PB secante e PC tangente



Fonte: elaborado pelo autor

Demonstração. Conforme figura 5, sejam O, centro de α, P um ponto exterior a α, PAB uma secante a α com A e $B \in \alpha$ e PC uma tangente a α com $C \in \alpha$. Construa o segmento AC e o segmento BC.

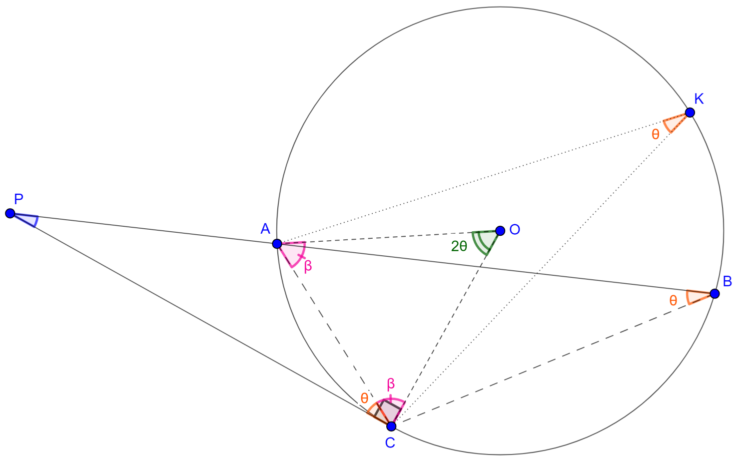
Figura 6 – Circunferência α com PB secante e PC tangente, com $B = K$



Fonte: elaborado pelo autor

Seja K um ponto $\in \alpha$, podendo K ser igual a B. Note que para qualquer secante PAB é possível construir um ângulo inscrito $\angle AKC \equiv \angle ABC$, em que O seja interior ao ΔAKC ou $\in$ ao segmento AB (veja as figuras 6, 7 e 8).

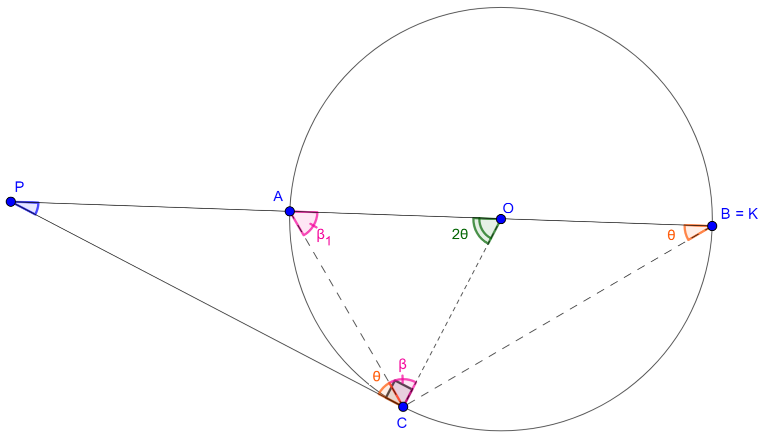
Figura 7 – Circunferência α com PB secante e PC tangente, com $B \neq K$



Fonte: elaborado pelo autor

Ainda, seja $\angle AKC = \theta$, assim, $\angle AOC = 2\theta$, pois é ângulo central de α. Como $OA = OC$, raios de α, ΔAOC é isósceles, então $\angle OAC = \angle OCA = \beta$. Portanto, $2\beta + 2\theta = 180^o \Rightarrow \beta = \angle OCA = 90^o - \theta$.

Figura 8 – Circunferência α com PB secante e PC tangente, com $B = K$ e $O \in AB$



Fonte: elaborado pelo autor

Segue que $OC \perp PC$, pois PC é tangente a α e OC é raio de α. Desta forma, $\angle PCA + \angle OCA = 90^{o} \Rightarrow \angle PCA = 90^{o} - \angle OCA = 90^{o} - (90^{o} - \theta) \Rightarrow \angle PCA = \theta = \angle AKC$, logo, $\Delta PAC \sim \Delta PCB$ pelo caso (AA).

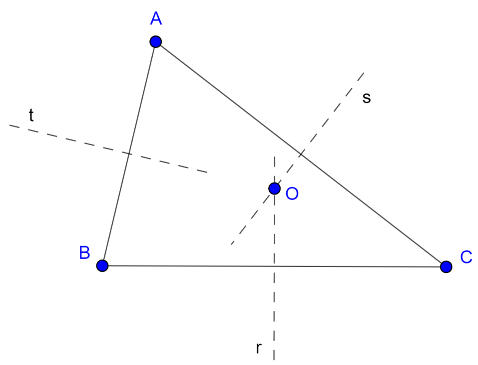
Agora, por semelhança de triângulos, temos:

$$\frac{PA}{PC} = \frac{PC}{PB} \Rightarrow$$
$$PA \cdot PB = PC^2.$$

□

1.4 Circuncentro e Círculo Circunscrito

Figura 9 – Circuncentro do triângulo ABC



Fonte: elaborado pelo autor

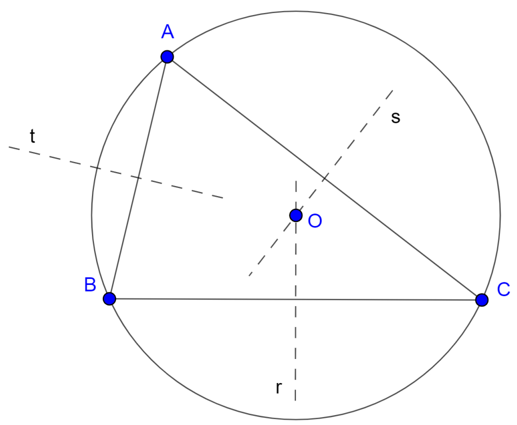
Teorema 1.4.1. *(NETO, 2013) Em todo triângulo, as mediatrizes dos lados passam todas por um mesmo ponto, o circuncentro do mesmo.*

Demonstração. Sejam ABC um triângulo qualquer, r, s e t, respectivamente, as mediatrizes dos lados BC, CA e AB, e O o ponto de interseção das retas r e s (veja Figura 9). Pela caracterização de mediatriz de um segmento como LG, temos $OC = OA$ e $OB = OC$. Desta forma, $OB = OA$. Logo, a mediatriz de AB passa por O. □

Teorema 1.4.2. *(NETO, 2013) Todo triângulo admite um único círculo passando por seus vértices. Tal círculo é dito circunscrito ao triângulo e seu centro é o circuncentro do mesmo.*

Demonstração. Seja ABC um triângulo de circuncentro O (Veja Figura 10). Como O é o ponto de interseção das mediatrizes dos lados do triângulo, temos $OA = OB = OC = R$. Segue que o círculo de centro O e raio R passa por A, B, C. Existe, desta forma, um círculo passando pelos vértices de ABC.

Figura 10 – Círculo circunscrito ao triângulo ABC



Fonte: elaborado pelo autor

Por outro lado, o centro de um círculo que passe pelos vértices de ABC deve ser equidistante dos mesmo. Portanto, o centro pertence às mediatrizes dos lados de ABC, de forma que coincide com o ponto de interseção das mesmas, isto é, com o circuncentro O de ABC. Finalmente, o raio do círculo, sendo a distância de O aos vértices, é igual a R. (NETO, 2013). □

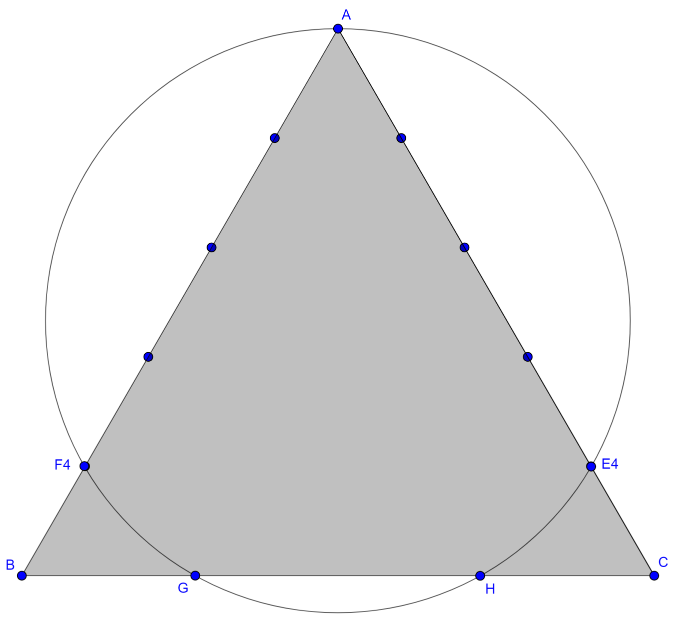
2 Razão áurea em triângulos equiláteros

São apresentadas neste capítulo as demonstrações de 2 (dois) casos não famosos de razão áurea em triângulos equiláteros. A construção geométrica da figura relativa a cada caso apresentado, pode ser verificada no Apêndice A.

2.1 1º Caso

Proposição 2.1.1. *(OAI, 2016) Considere um triângulo equilátero ABC com lados AC e AB divididos em 5 (cinco) partes iguais pelos pontos E_k, F_k, com $k = 1, 2, 3, 4$, então $AE_k = AF_k = \frac{k}{5} \cdot BC$. Se a circunferência (AE_4F_4) intersecta BC em G e H (veja a figura 11), então G divide HB na razão áurea.*

Figura 11 – Triângulo equilátero com circunferência (AE_4F_4)



Fonte: elaborada pelo autor

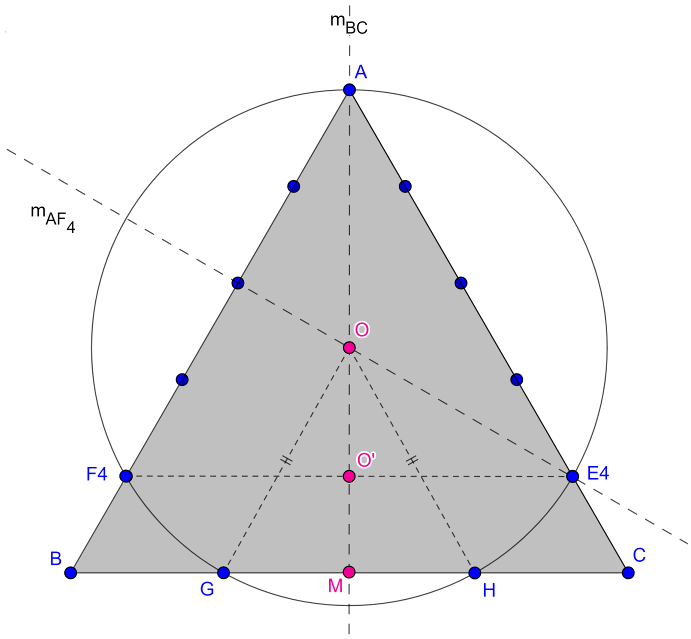
Demonstração. Queremos mostrar que $\frac{HB}{HG} = \frac{HG}{GB} = \phi$. Para isso, suponha que o ΔABC tenha lados de medida x.

Note que pelo teorema de Tales, $E_4F_4 \parallel BC$, pois $\dfrac{AB}{AF_4} = \dfrac{AC}{AE_4} = \dfrac{AC}{AC \cdot \dfrac{4}{5}} = \dfrac{5}{4}$.

Construa as mediatrizes m_{AF_4} e $m_{BC} = m_{E_4F_4}$. Perceba que pelo teorema do circuncentro, as mediatrizes de AF_4 e E_4F_4 se intersectam no ponto O, centro da circunferência (AE_4F_4). A m_{BC} contém os pontos O' e M, pontos médios dos segmentos E_4F_4 e BC, respectivamente.

Construa, ainda, o ΔOGH isósceles, pois $OG = OH =$ raio da circunferência (AE_4F_4) (veja a figura 12).

Figura 12 – Triângulo equilátero com circunferência (AE_4F_4) e mediatrizes



Fonte: elaborada pelo autor

Como a mediana e a altura do ΔOGH relativa ao lado GH são iguais, então OM é a altura do ΔOGH, assim, $OM \in m_{BC}$ e $GM = MH$.

Segue que $BM = MC$ e $GM = MH$, então $GB = CH = y$, desta forma $HB = x - y$.

Pelo corolário 1.3.3 temos:

$$GB \cdot HB = BF_4 \cdot BA.$$

Substituíndo os dados:

$$y \cdot (x - y) = \frac{x}{5} \cdot x \Rightarrow$$

$$5yx - 5y^2 = x^2 \Rightarrow$$

$$5y^2 - 5xy + x^2 = 0.$$

Aplicando a fórmula de Bhaskara:

$$y = \frac{-(-5x) \pm \sqrt{(-5x)^2 - 4 \cdot 5 \cdot x^2}}{2 \cdot 5} \Rightarrow$$

$$y = \frac{5x \pm \sqrt{5x^2}}{10} \Rightarrow$$

$$y = x \cdot \frac{5 \pm \sqrt{5}}{10}.$$

Como $2y = \dfrac{x(5+\sqrt{5})}{10} \cdot 2 \approx 1,4x > x$, então:

$$y = GB = \frac{x(5-\sqrt{5})}{10}. \tag{1.1}$$

Na equação: $HG = HB - GB$, substituíndo os dados:

$$HG = (x-y) - y \Rightarrow HG = x - 2y. \tag{1.2}$$

Substituíndo (1.1) em (1.2):

$$HG = x - 2 \cdot \frac{x(5-\sqrt{5})}{10} \Rightarrow$$

$$HG = \frac{5x - 5x + x\sqrt{5}}{5} \Rightarrow$$

$$HG = \frac{x\sqrt{5}}{5}.$$

Ainda, como $HB = x - y$, temos:

$$HB = x - \frac{x(5-\sqrt{5})}{10} \Rightarrow$$

$$HB = \frac{x(5+\sqrt{5})}{10}.$$

Agora, resta fazer $\dfrac{HB}{HG}$ e $\dfrac{HG}{GB}$. Assim:

1. $\dfrac{HB}{HG}$

$$\frac{HB}{HG} = \frac{\frac{x(5+\sqrt{5})}{10}}{\frac{x\sqrt{5}}{5}} \Rightarrow$$

$$\frac{HB}{HG} = \frac{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{5}} \Rightarrow$$

$$\frac{HB}{HG} = \frac{5+\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow$$

$$\frac{HB}{HG} = \frac{5+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}.$$

Racionalizando:

$$\frac{HB}{HG} = \frac{5+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \Rightarrow$$

$$\frac{HB}{HG} = \frac{5\sqrt{5}+5}{2\cdot 5} \Rightarrow$$
$$\frac{HB}{HG} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \phi.$$

2. $\dfrac{HG}{GB}$

$$\frac{HG}{GB} = \frac{\frac{x\sqrt{5}}{5}}{\frac{x(5-\sqrt{5})}{10}} \Rightarrow$$
$$\frac{HG}{GB} = \frac{\sqrt{5}}{\frac{5-\sqrt{5}}{2}} \Rightarrow$$
$$\frac{HG}{GB} = \sqrt{5}\cdot\frac{2}{5-\sqrt{5}} \Rightarrow$$
$$\frac{HG}{GB} = \frac{2\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}.$$

Racionalizando:

$$\frac{HG}{GB} = \frac{2\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}\cdot\frac{5+\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}} \Rightarrow$$
$$\frac{HG}{GB} = \frac{10\sqrt{5}+10}{25-5} \Rightarrow$$
$$\frac{HG}{GB} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \phi.$$

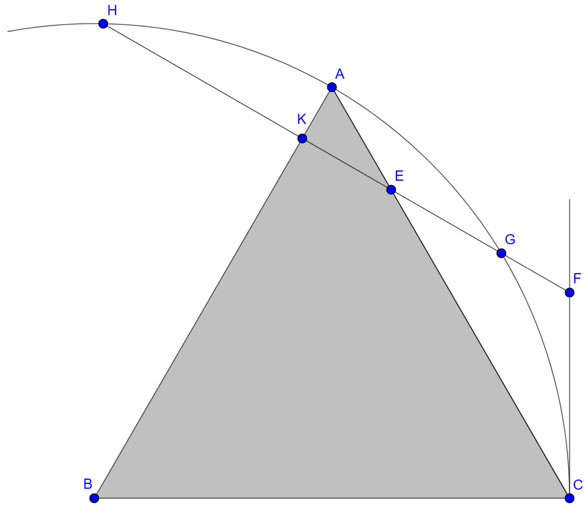
Portanto, $\dfrac{HB}{HG} = \dfrac{HG}{GB} = \phi$. □

2.2 2º Caso

Proposição 2.2.1. *(OAI, 2016) Seja E o ponto no lado AC de um triângulo equilátero ABC em que $AE = \frac{1}{4}\cdot AC$. A perpendicular de E para o lado AB intersecta:*

1. *a perpendicular de BC que parte de C em F, e*
2. *a circunferência com centro B e raio BC em G e H (ver figura 13).*
   a) *G divide EF na razão áurea.*
   b) *E divide HF na razão áurea.*

Figura 13 – Triângulo equilátero com arco de circunferência (CH)



Fonte: elaborada pelo autor

Demonstração. Queremos mostrar que $\frac{EF}{EG} = \frac{EG}{GF} = \phi$ e que $\frac{HF}{HE} = \frac{HE}{EF} = \phi$. Para isso, suponha que o ΔABC tenha lados de medida x. Como $\angle BAC = 60^o$ e $\angle EKA = 90^o$, então $\angle KEA = 30^o$. Segue que $\angle KEA$ e $\angle CEF$ são ângulos opostos pelo vértice, logo $\angle CEF = 30^o$. Ainda, $\angle BCF = 90^o$ e $\angle BCA = 60^o$, assim $\angle ECF = 30^o$. Daí, concluímos que o ΔCEF é isósceles com $CF = EF$.

Construa o segmento FM, altura do ΔCEF relativa ao lado CE, assim M é ponto médio de CE (veja figura 14) e $CM = \frac{CE}{2}$.

Note que $AC = AE + CE$, substituíndo os dados:

$$x = \frac{x}{4} + CE \Rightarrow$$

$$CE = x - \frac{x}{4} \Rightarrow$$

$$CE = \frac{3x}{4}. \tag{2.3}$$

Como $CM = \dfrac{CE}{2}$, substituíndo (2.3) na equação, temos:

$$CM = \frac{\frac{3x}{4}}{2} \Rightarrow$$

$$CM = \frac{3x}{8}.$$

Aplicando cosseno no ΔCMF:

$$\cos 30^o = \frac{CM}{CF}.$$

Substituíndo os dados:

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\frac{3x}{8}}{CF} \Rightarrow$$

$$CF = \frac{3x\sqrt{3}}{4 \cdot 3} \Rightarrow$$

$$CF = EF = \frac{x\sqrt{3}}{4}.$$

Aplicando seno e cosseno no ΔAEK:

- $\sin 30^{\text{o}} = \dfrac{AK}{AE}$, substituíndo os dados:

$$\frac{1}{2} = \frac{AK}{\frac{x}{4}} \Rightarrow$$

$$AK = \frac{x}{8}.$$

- $\cos 30^{\text{o}} = \dfrac{EK}{AE}$, substituíndo os dados:

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{EK}{\frac{x}{4}} \Rightarrow$$

$$2EK = \frac{x\sqrt{3}}{4} \Rightarrow$$

$$EK = \frac{x\sqrt{3}}{8}.$$

Construa os segmentos BG e BH, daí, perceba que o ΔBGH é isósceles pois $BG = BH = BC$, raio da circunferência de centro B (veja figura 14). Segue que BK é a altura relativa ao lado GH, logo K é ponto médio de GH e $GK = HK$. Ainda, seja $FG = y$. Como $EF = EG + FG \Rightarrow EG = EF - FG$ e $GK = EG + EK$, então $GK = EF - FG + EK$. Substituíndo os dados nesta última equação, obtemos:

$$GK = \frac{x\sqrt{3}}{4} - y + \frac{x\sqrt{3}}{8} \Rightarrow$$

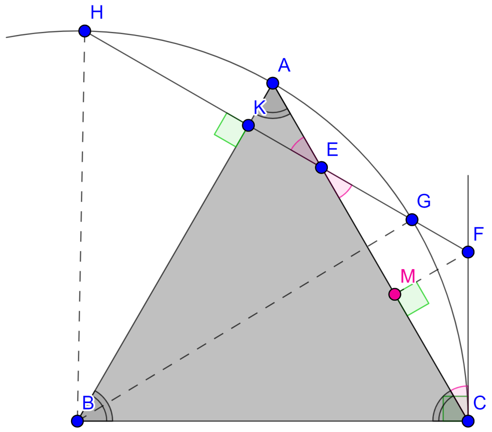
$$GK = \frac{2x\sqrt{3} + x\sqrt{3}}{8} - y \Rightarrow$$

$$GK = \frac{3x\sqrt{3}}{8} - y.$$

Veja que $GH = GK + HK = 2GK$. Como $HF = GF + GH$, então $HF = GF + 2GK$. Do exposto, pelo corolário 1.3.4, temos:

$$FC^2 = GF \cdot HF.$$

Figura 14 – Triângulo equilátero com arco de circunferência (CH) e com ângulos



Fonte: elaborada pelo autor

Substituíndo HF:

$$FC^2 = GF \cdot (GF + 2GK).$$

Substituíndo os dados:

$$(\frac{x\sqrt{3}}{4})^2 = y \cdot [y + 2 \cdot (\frac{3x\sqrt{3}}{8} - y)] \Rightarrow$$

$$\frac{3x^2}{16} = y \cdot (y + \frac{2.3x\sqrt{3}}{8} - 2y) \Rightarrow$$

$$\frac{3x^2}{16} = y \cdot (\frac{3x\sqrt{3}}{4} - y) \Rightarrow$$

$$\frac{3x^2}{16} = \frac{3xy\sqrt{3}}{4} - y^2 \Rightarrow$$

$$3x^2 = 12xy\sqrt{3} - 16y^2 \Rightarrow$$

$$16y^2 - 12xy\sqrt{3} + 3x^2 = 0.$$

Aplicando a fórmula de Bhaskara:

$$y = \frac{-(-12x\sqrt{3}) \pm \sqrt{(-12x\sqrt{3})^2 - 4 \cdot 16 \cdot 3x^2}}{2 \cdot 16} \Rightarrow$$

$$y = \frac{12x\sqrt{3} \pm \sqrt{432x^2 - 192x^2}}{32} \Rightarrow$$

$$y = \frac{12x\sqrt{3} \pm \sqrt{240x^2}}{32} \Rightarrow$$

$$y = \frac{12x\sqrt{3} \pm 4x\sqrt{15}}{32} \Rightarrow$$

$$y = \frac{3x\sqrt{3} \pm x\sqrt{15}}{8} \Rightarrow$$

$$y = \frac{x\sqrt{3}}{4}(\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}).$$

Como $\frac{3+\sqrt{5}}{2} > 1$, então $\frac{x\sqrt{3}}{4}(\frac{3+\sqrt{5}}{2}) > EF = \frac{x\sqrt{3}}{4}$. Logo:

$$y = \frac{x\sqrt{3}}{4}(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}).$$

Fazendo manipulação algébrica:

$$y = \frac{x\sqrt{3}}{4}(\frac{3 - \sqrt{5}}{2} \cdot \frac{2}{2}) \Rightarrow$$

$$y = \frac{x\sqrt{3}}{4}(\frac{6 - 2\sqrt{5}}{4}) \Rightarrow$$

$$y = \frac{x\sqrt{3}}{4}(\frac{5 - 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{5} + 1}{4}) \Rightarrow$$

$$y = \frac{x\sqrt{3}}{4}(\frac{\sqrt{5} - 1}{2})^2 \Rightarrow$$

$$y = \frac{x\sqrt{3}}{4}(\frac{\sqrt{5} - 1}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1})^2 \Rightarrow$$

$$y = \frac{x\sqrt{3}}{4}[\frac{5 - 1}{2(\sqrt{5}+1)}]^2 \Rightarrow$$

$$y = \frac{x\sqrt{3}}{4} \cdot [\frac{4}{2(\sqrt{5}+1)}]^2 \Rightarrow$$

$$y = \frac{x\sqrt{3}}{4}(\frac{2}{\sqrt{5}+1})^2 \Rightarrow$$

$$y = \frac{x\sqrt{3}}{4}[(\frac{\sqrt{5}+1}{2})^{-1}]^2.$$

Substituíndo $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ por ϕ:

$$y = \frac{x\sqrt{3}}{4}(\phi^{-1})^2 \Rightarrow$$

$$y = \frac{x\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{\phi^2} \Rightarrow$$

$$y = GF = \frac{x\sqrt{3}}{4\phi^2}.$$

Agora, basta substiuir os dados encontrados nas seguintes equações:

- $EG = EF - GF$

$$EG = \frac{x\sqrt{3}}{4} - \frac{x\sqrt{3}}{4\phi^2} \Rightarrow$$

$$EG = \frac{x\sqrt{3}}{4}(1 - \frac{1}{\phi^2}) \Rightarrow$$

$$EG = \frac{x\sqrt{3}}{4}(\frac{\phi^2 - 1}{\phi^2}).$$

Sabemos que $\phi^2 = \phi + 1 \Rightarrow \phi = \phi^2 - 1$, agora, substituímos esta relação na equação:

$$EG = \frac{x\sqrt{3}}{4}(\frac{\phi}{\phi^2}) \Rightarrow$$

$$EG = \frac{x\sqrt{3}}{4}(\frac{1}{\phi}) \Rightarrow$$

$$EG = \frac{x\sqrt{3}}{4\phi}.$$

- $GK = \frac{3x\sqrt{3}}{8} - y$

$$GK = \frac{3x\sqrt{3}}{8} - \frac{x\sqrt{3}}{4\phi^2} \Rightarrow$$

$$GK = HK = \frac{x\sqrt{3}}{4}(\frac{3}{2} - \frac{1}{\phi^2}).$$

- $HF = GF + 2GK$

$$HF = \frac{x\sqrt{3}}{4\phi^2} + 2 \cdot \frac{x\sqrt{3}}{4}(\frac{3}{2} - \frac{1}{\phi^2}) \Rightarrow$$

$$HF = \frac{x\sqrt{3}}{4}(\frac{1}{\phi^2} + \frac{2 \cdot 3}{2} - \frac{2}{\phi^2}) \Rightarrow$$

$$HF = \frac{x\sqrt{3}}{4}(3 - \frac{1}{\phi^2}).$$

- $HE = HK + EK$

$$HE = \frac{x\sqrt{3}}{4}(\frac{3}{2} - \frac{1}{\phi^2}) + \frac{x\sqrt{3}}{8} \Rightarrow$$

$$HE = \frac{x\sqrt{3}}{4}(\frac{3}{2} - \frac{1}{\phi^2} + \frac{1}{2}) \Rightarrow$$

$$HE = \frac{x\sqrt{3}}{4}(\frac{4}{2} - \frac{1}{\phi^2}) \Rightarrow$$

$$HE = \frac{x\sqrt{3}}{4}(2 - \frac{1}{\phi^2}).$$

Resta fazer $\frac{EF}{EG}$, $\frac{EG}{GF}$ e $\frac{HF}{HE}$, $\frac{HE}{EF}$. Assim:

1. $\frac{EF}{EG}$ e $\frac{EG}{GF}$

a) $\dfrac{EF}{EG}$

$$\frac{EF}{EG} = \frac{\frac{x\sqrt{3}}{4}}{\frac{x\sqrt{3}}{4\phi}} \Rightarrow$$

$$\frac{EF}{EG} = \frac{1}{\frac{1}{\phi}} \Rightarrow$$

$$\frac{EF}{EG} = \phi.$$

b) $\dfrac{EG}{GF}$

$$\frac{EG}{GF} = \frac{\frac{x\sqrt{3}}{4\phi}}{\frac{x\sqrt{3}}{4\phi^2}} \Rightarrow$$

$$\frac{EG}{GF} = \frac{1}{\frac{1}{\phi}} \Rightarrow$$

$$\frac{EG}{GF} = \phi.$$

2. $\dfrac{HF}{HE}$ e $\dfrac{HE}{EF}$

a) $\dfrac{HF}{HE}$

$$\frac{HF}{HE} = \frac{\frac{x\sqrt{3}}{4}(3 - \frac{1}{\phi^2})}{\frac{x\sqrt{3}}{4}(2 - \frac{1}{\phi^2})} \Rightarrow$$

$$\frac{HF}{HE} = \frac{\frac{3\phi^2 - 1}{\phi^2}}{\frac{2\phi^2 - 1}{\phi^2}} \Rightarrow$$

$$\frac{HF}{HE} = \frac{3\phi^2 - 1}{2\phi^2 - 1}.$$

Fazendo manipulação algébrica:

$$\frac{HF}{HE} = \frac{2\phi^2 + \phi^2 - 1}{2\phi^2 - 1}.$$

Sabemos que $\phi^2 = \phi + 1$, agora, substituímos esta relação na equação:

$$\frac{HF}{HE} = \frac{2\phi^2 + \phi + 1 - 1}{2(\phi + 1) - 1} \Rightarrow$$

$$\frac{HF}{HE} = \frac{2\phi^2 + \phi}{2\phi + 2 - 1} \Rightarrow$$
$$\frac{HF}{HE} = \frac{2\phi^2 + \phi}{2\phi + 1} \Rightarrow$$
$$\frac{HF}{HE} = \frac{\phi(2\phi + 1)}{2\phi + 1} \Rightarrow$$
$$\frac{HF}{HE} = \phi.$$

b) $\dfrac{HE}{EF}$

$$\frac{HE}{EF} = \frac{\frac{x\sqrt{3}}{4}(2 - \frac{1}{\phi^2})}{\frac{x\sqrt{3}}{4}} \Rightarrow$$
$$\frac{HE}{EF} = 2 - \frac{1}{\phi^2} \Rightarrow$$
$$\frac{HE}{EF} = \frac{2\phi^2 - 1}{\phi^2}.$$

Fazendo manipulação algébrica:

$$\frac{HE}{EF} = \frac{\phi^2 + \phi^2 - 1}{\phi^2}.$$

Sabemos que $\phi^2 = \phi + 1 \Rightarrow \phi = \phi^2 - 1$, agora, substituímos estas relações na equação:

$$\frac{HE}{EF} = \frac{\phi^2 + \phi}{\phi^2} \Rightarrow$$
$$\frac{HE}{EF} = \frac{\phi(\phi + 1)}{\phi^2} \Rightarrow$$
$$\frac{HE}{EF} = \frac{\phi + 1}{\phi} \Rightarrow$$
$$\frac{HE}{EF} = \frac{\phi^2}{\phi} \Rightarrow$$
$$\frac{HE}{EF} = \phi.$$

Portanto, $\dfrac{EF}{EG} = \dfrac{EG}{GF} = \phi$ e $\dfrac{HF}{HE} = \dfrac{HE}{EF} = \phi$. $\square$

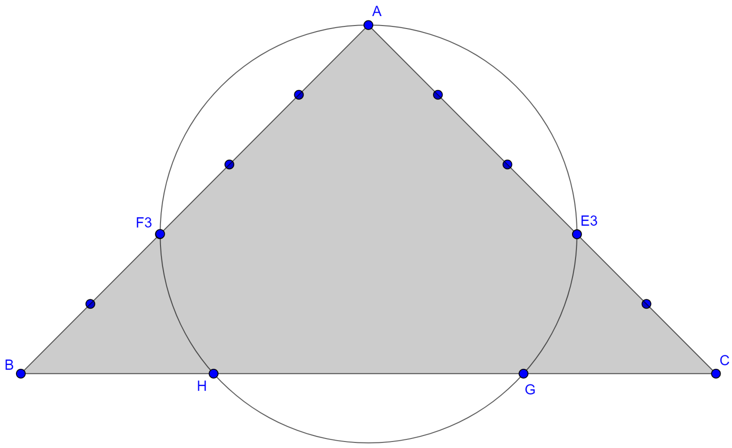
3 Razão áurea em triângulos isósceles

São apresentadas neste capítulo as demonstrações de 3 (três) casos não famosos de razão áurea em triângulos isósceles. A construção geométrica da figura, relativa a cada caso apresentado, pode ser verificada no Apêndice A.

3.1 1º Caso

Proposição 3.1.1. *(OAI, 2016) A figura mostra um triângulo retângulo isósceles com os lados iguais AC e AB divididos em 5 (cinco) partes iguais, E_k, F_k, com $k = 1, 2, 3, 4$, em que $AE_k = AF_k = \frac{k}{5} \cdot AB$. A circunferência (AE_3F_3) intersecta BC em H e G. Assim, G divide BC na razão áurea.*

Figura 15 – Triângulo retângulo isósceles com circunferência (AE_3F_3)



Fonte: elaborada pelo autor

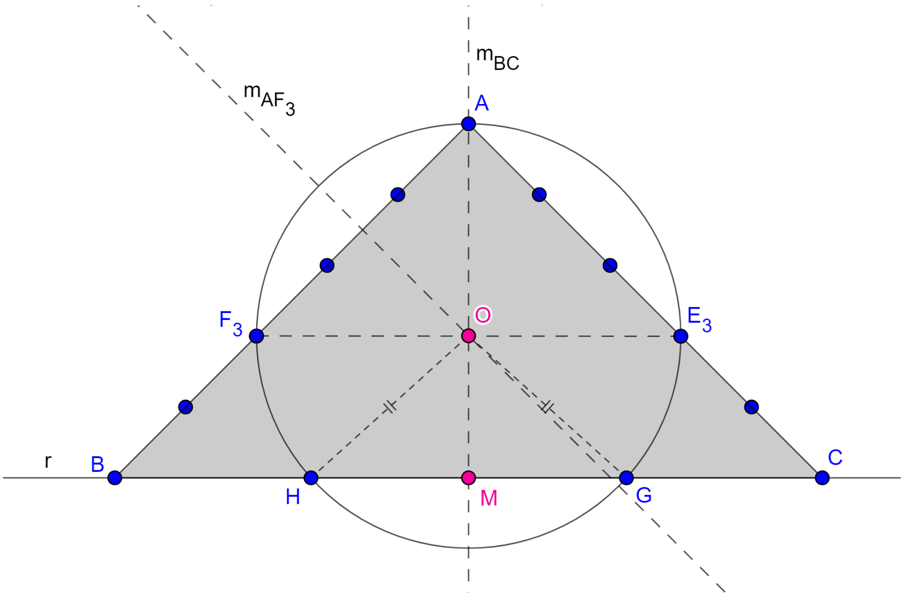
Demonstração. Queremos mostrar que $\frac{HC}{HG} = \frac{HG}{GC} = \phi$. Para isso, suponha que o lado BC do ΔABC meça x e o raio da circunferência (AE_3F_3) meça r.

Note que pelo teorema de Tales, $E_3F_3 \parallel BC$, pois $\dfrac{AB}{AF_3} = \dfrac{AC}{AE_3} = \dfrac{AC}{AC \cdot \dfrac{3}{5}} = \dfrac{5}{3}$.

Construa as mediatrizes m_{AF_3} e $m_{BC} = m_{E_3F_3}$. Perceba que pelo teorema do circuncentro, as mediatrizes de AF_3 e E_3F_3 se intersectam no ponto O, centro da circunferência (AE_3F_3). A m_{BC} contém os pontos O e M, pontos médios dos segmentos E_3F_3 e BC, respectivamente.

Construa, ainda, o ΔOGH isósceles, pois $OG = OH =$ raio da circunferência (AE_3F_3) (veja a figura 16).

Figura 16 – Triângulo retângulo isósceles com circunferência (AE_3F_3) e mediatrizes



Fonte: elaborada pelo autor

Como a mediana e a altura do ΔOGH relativa ao lado GH são iguais, então OM é a altura do ΔOGH, assim, $OM \in m_{BC}$ e $GM = MH$.

Segue que $BM = MC$ e $GM = MH$, então $GB = CH = y$, desta forma $HB = x - y$. Daí, aplicando o teorema de Pitágoras no ΔABC:

$$AB^2 + AC^2 = BC^2 \Rightarrow$$

$$2AB^2 = BC^2.$$

Substituíndo os dados:

$$2AB^2 = x^2 \Rightarrow$$
$$AB^2 = \frac{x^2}{2} \Rightarrow$$
$$AB = \frac{x}{\sqrt{2}}.$$

Racionalizando:

$$AB = \frac{x}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \Rightarrow$$
$$AB = AC = \frac{x\sqrt{2}}{2}.$$

Como $CE_3 = AC \cdot \frac{2}{5} = \frac{x\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{2}{5} \Rightarrow CE_3 = \frac{x\sqrt{2}}{5}$, então pelo corolário 1.3.3, temos:

$$CE_3 \cdot CA = GC \cdot HC.$$

Substituíndo os dados:

$$\frac{x\sqrt{2}}{5} \cdot \frac{x\sqrt{2}}{2} = y(x - y) \Rightarrow$$

$$\frac{2x^2}{2\cdot 5} = xy - y^2 \Rightarrow$$
$$\frac{x^2}{5} = xy - y^2 \Rightarrow$$
$$x^2 = 5xy - 5y^2 \Rightarrow$$
$$5y^2 - 5xy + x^2 = 0.$$

Aplicando a fórmula de Bhaskara:

$$y = \frac{-(-5x) \pm \sqrt{(-5x)^2 - 4\cdot 5\cdot x^2}}{2\cdot 5} \Rightarrow$$
$$y = \frac{5x \pm \sqrt{25x^2 - 20x^2}}{10} \Rightarrow$$
$$y = x\cdot\frac{5\pm\sqrt{5}}{10}.$$

Como $\frac{x(5+\sqrt{5})}{10}\cdot 2 \approx 1,4x > x = BC$, então:

$$y = GC = \frac{x(5-\sqrt{5})}{10}. \tag{1.1}$$

Segue que $HC = x - y$, substituíndo (1.1) nesta equação:

$$HC = x - \frac{x(5-\sqrt{5})}{10} \Rightarrow$$

$$HC = \frac{x(5+\sqrt{5})}{10}. \tag{1.2}$$

Ainda, note que $HC = HG + GC$, substituíndo (1.1) e (1.2) nesta equação:

$$\frac{x(5+\sqrt{5})}{10} = HG + \frac{x(5-\sqrt{5})}{10} \Rightarrow$$
$$x\sqrt{5} = 10HG - x\sqrt{5} \Rightarrow$$
$$HG = \frac{x\sqrt{5}}{5}.$$

Agora, resta fazer $\frac{HC}{HG}$ e $\frac{HG}{GC}$. Assim:

1. $\frac{HC}{HG}$

$$\frac{HC}{HG} = \frac{\frac{x(5+\sqrt{5})}{10}}{\frac{x\sqrt{5}}{5}} \Rightarrow$$

$$\frac{HC}{HG} = \frac{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{5}} \Rightarrow$$

$$\frac{HC}{HG} = \frac{5+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}.$$

Racionalizando:

$$\frac{HC}{HG} = \frac{5+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \Rightarrow$$

$$\frac{HC}{HG} = \frac{5\sqrt{5}+5}{2.5} \Rightarrow$$

$$\frac{HC}{HG} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \phi.$$

2. $\frac{HG}{GC}$

$$\frac{HG}{GC} = \frac{\frac{x\sqrt{5}}{5}}{\frac{x(5-\sqrt{5})}{10}} \Rightarrow$$

$$\frac{HG}{GC} = \frac{\sqrt{5}}{\frac{5-\sqrt{5}}{2}} \Rightarrow$$

$$\frac{HG}{GC} = \frac{2\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}.$$

Racionalizando:

$$\frac{HG}{GC} = \frac{2\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}} \cdot \frac{(5+\sqrt{5})}{(5+\sqrt{5})} \Rightarrow$$

$$\frac{HG}{GC} = \frac{10\sqrt{5}+10}{25-5} \Rightarrow$$

$$\frac{HG}{GC} = \frac{10\sqrt{5}+10}{20} \Rightarrow$$

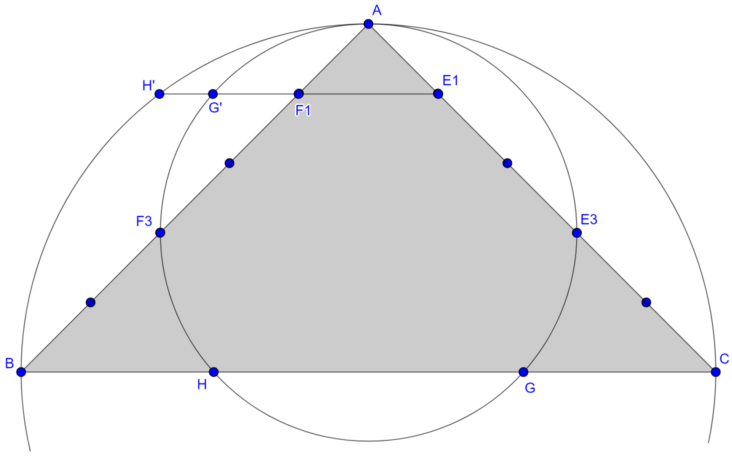
$$\frac{HG}{GC} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \phi.$$

Portanto, $\frac{HC}{HG} = \frac{HG}{GC} = \phi$. □

3.2 2º Caso

Proposição 3.2.1. *(OAI, 2016) Partindo da proposição 3.1.1, estendendo o segmento* E_1F_1*, ele intersecta as circunferências* (AE_3F_3) *e* (ABC) *em* G' *e* H'*, respectivamente (veja a figura 17). Assim, encontramos que* F_1 *divide* E_1G' *na razão áurea. Sendo verdade, também, que* G' *divide* F_1H' *na razão áurea.*

Figura 17 – Triângulo retângulo isósceles com as circunferências (AE_3F_3) e (ABC)



Fonte: elaborada pelo autor

Demonstração. Queremos mostrar que $\frac{E_1G'}{E_1F_1} = \frac{E_1F_1}{F_1G'} = \phi$ e que $\frac{F_1H'}{F_1G'} = \frac{F_1G'}{G'H'} = \phi$. Para isso, considere todos os dados e resultados da proposição 3.1.1. Dividiremos a demostração em duas partes, que são:

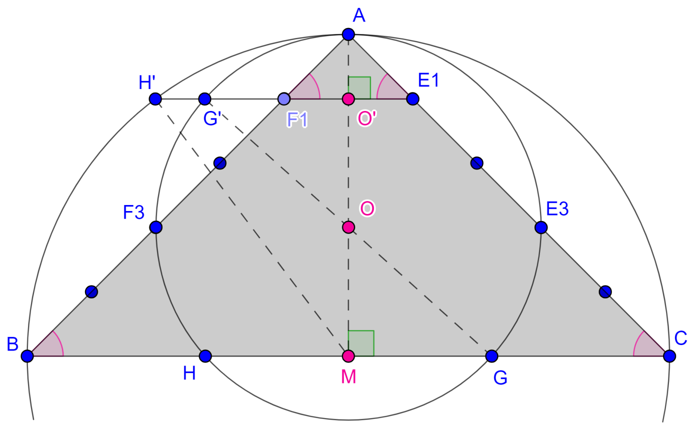
1. F_1 divide E_1G' na razão áurea.

2. G' divide F_1H' na razão áurea.

1. **Primeira parte:** F_1 divide E_1G' na razão áurea.

   Construa o segmento $AM \in m_{BC}$, mediatriz de BC, que contém os pontos O, O' e M, centro da circunferência (ABC), pontos médios dos segmentos E_1F_1 e BC, respectivamente, e os segmentos OG, OG' e MH' (veja figura 18).

Figura 18 – Triângulo retângulo isósceles com as circunferências (AE_3F_3) e (ABC) e com ângulos



Fonte: elaborada pelo autor

Note que pelo teorema de Tales, $E_1F_1 \parallel BC$, pois $\dfrac{AB}{AF_1} = \dfrac{AC}{AE_1} = \dfrac{AC}{AC \cdot \dfrac{1}{5}} = 5$, assim, $\angle F_1E_1A \equiv \angle BCA$. Daí, o $\Delta AE_1F_1 \sim \Delta ABC$ pelo caso (AA). Então, por semelhança de triângulos, temos:

$$\frac{AC}{AE_1} = \frac{BC}{E_1F_1}.$$

Substituíndo os dados:

$$5 = \frac{x}{E_1F_1} \Rightarrow$$

$$E_1F_1 = \frac{x}{5}. \tag{2.3}$$

Do exposto, temos que $O'F_1 = O'E_1 = \dfrac{x}{10}$, $BM = CM = \dfrac{x}{2}$, $HM = GM = \dfrac{x\sqrt{5}}{10}$. Desta forma, aplicando o teorema de Pitágoras no ΔACM:

$$AM^2 + CM^2 = AC^2.$$

Substituíndo os dados:

$$AM^2 + (\frac{x}{2})^2 = (\frac{x\sqrt{2}}{2})^2 \Rightarrow$$

$$AM^2 = (\frac{x\sqrt{2}}{2})^2 - (\frac{x}{2})^2 \Rightarrow$$

$$AM^2 = \frac{2x^2}{4} - \frac{x^2}{4} \Rightarrow$$

$$AM^2 = \frac{x^2}{4} \Rightarrow$$

$$AM = \frac{x}{2}. \tag{2.4}$$

Conforme exposto, $AM = \dfrac{x}{2}$ e $CM = \dfrac{x}{2}$, assim, $AM = CM$. O fato de AM ser igual a CM já era de se esperar, pelo fato de o triângulo ABC ser retângulo em A. Lembremos que, nos triângulos retângulos, a mediana relativa à hipotenusa tem comprimento igual à metade da mesma. Como $\Delta AE_1F_1 \sim \Delta ABC$ (AA), analogamente, $O'E_1 = AO' = \dfrac{x}{10}$.

Segue que $OM = AM - AO$, substituíndo (2.4) e os dados:

$$OM = \frac{x}{2} - r. \tag{2.5}$$

Desta forma, aplicando o teorema de Pitágoras no ΔGMO:

$$OG^2 = OM^2 + GM^2.$$

Substituíndo (2.5) e os dados:

$$r^2 = (\frac{x}{2} - r)^2 + (\frac{x\sqrt{5}}{10})^2 \Rightarrow$$

$$r^2 = \frac{x^2}{4} - 2 \cdot r \cdot \frac{x}{2} + r^2 + \frac{5x^2}{100} \Rightarrow$$

$$r = \frac{6x}{20} \Rightarrow$$

$$r = \frac{3x}{10}.$$

Como $AO - AO' = OO'$, substituíndo os dados:

$$\frac{3x}{10} - \frac{x}{10} = OO' \Rightarrow$$

$$OO' = \frac{2x}{10} \Rightarrow$$

$$OO' = \frac{x}{5}. \tag{2.6}$$

Então, aplicando o teorema de Pitágoras no $\Delta OO'G'$:

$$OG'^2 = OO'^2 + O'G'^2.$$

Substituíndo (2.6) e os dados:

$$(\frac{3x}{10})^2 = (\frac{x}{5})^2 + O'G'^2 \Rightarrow$$

$$\frac{9x^2}{100} = \frac{x^2}{25} + O'G'^2 \Rightarrow$$

$$O'G'^2 = \frac{9x^2}{100} - \frac{x^2}{25} \Rightarrow$$

$$O'G'^2 = \frac{9x^2 - 4x^2}{100} \Rightarrow$$

$$O'G'^2 = \frac{5x^2}{100} \Rightarrow$$

$$O'G = \frac{x\sqrt{5}}{10}.$$

Agora, basta substiuir os dados encontrados nas seguintes equações:

- $O'G' = F_1G' + O'F_1$

$$\frac{x\sqrt{5}}{10} = F_1G' + \frac{x}{10} \Rightarrow$$

$$F_1G' = \frac{x\sqrt{5}}{10} - \frac{x}{10} \Rightarrow$$

$$F_1G' = \frac{x(\sqrt{5}-1)}{10}. \tag{2.7}$$

Racionalizando:

$$F_1G' = \frac{x(\sqrt{5}-1)}{10} \cdot \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1} \Rightarrow$$

$$F_1G' = \frac{x(5-1)}{10(\sqrt{5}+1)} \Rightarrow$$

$$F_1G' = \frac{4x}{10(\sqrt{5}+1)} \Rightarrow$$

$$F_1G' = \frac{2x}{5(\sqrt{5}+1)} \Rightarrow$$

$$F_1G' = \frac{x}{5} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}+1} \Rightarrow$$

$$F_1G' = \frac{\frac{x}{5}}{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}.$$

Substituíndo $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ por ϕ:

$$F_1G' = \frac{\frac{x}{5}}{\phi} \Rightarrow$$

$$F_1G' = \frac{x}{5} \cdot \frac{1}{\phi} \Rightarrow$$

$$F_1G' = \frac{x}{5\phi}.$$

- $E_1'G' = E_1F_1 + F_1G'$

$$E_1'G' = \frac{x}{5} + \frac{x(\sqrt{5}-1)}{10} \Rightarrow$$

$$E_1'G' = \frac{2x + x\sqrt{5} - x}{10} \Rightarrow$$

$$E_1'G' = \frac{x + x\sqrt{5}}{10} \Rightarrow$$

$$E_1'G' = \frac{x(1+\sqrt{5})}{10}.$$

Resta fazer $\dfrac{E_1F_1}{F_1G'}$ e $\dfrac{E_1G'}{E_1F_1}$. Assim:

a) $\dfrac{E_1F_1}{F_1G'}$

$$\frac{E_1F_1}{F_1G'} = \frac{\frac{x}{5}}{\frac{x}{5\phi}} \Rightarrow$$

$$\frac{E_1F_1}{F_1G'} = \frac{1}{\frac{1}{\phi}} \Rightarrow$$

$$\frac{E_1F_1}{F_1G'} = \phi.$$

b) $\dfrac{E_1G'}{E_1F_1}$

$$\frac{E_1G'}{E_1F_1} = \frac{\frac{x(1+\sqrt{5})}{10}}{\frac{x}{5}} \Rightarrow$$

$$\frac{E_1G'}{E_1F_1} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \phi.$$

Portanto, $\dfrac{E_1F_1}{F_1G'} = \dfrac{E_1G'}{E_1F_1} = \phi$.

2. **Segunda parte:** G' divide F_1H' na razão áurea.

   Como $O'M = AM - AO'$, substituíndo os dados:

$$O'M = \frac{x}{2} - \frac{x}{10} \Rightarrow$$

$$O'M = \frac{5x - x}{10} \Rightarrow$$

$$O'M = \frac{4x}{10} \Rightarrow$$

$$O'M = \frac{2x}{5}. \tag{2.8}$$

   Então, aplicando o teorema de Pitágoras no $\Delta MO'H'$:

$$MH'^2 = O'M^2 + O'H'^2.$$

   Substituíndo (2.8) e os dados:

$$(\frac{x}{2})^2 = (\frac{2x}{5})^2 + O'H'^2 \Rightarrow$$

$$\frac{x^2}{4} = \frac{4x^2}{25} + O'H'^2 \Rightarrow$$

$$O'H'^2 = \frac{x^2}{4} - \frac{4x^2}{25} \Rightarrow$$

$$O'H'^2 = \frac{25x^2 - 16x^2}{100} \Rightarrow$$

$$O'H'^2 = \frac{9x^2}{100} \Rightarrow$$

$$O'H' = \frac{3x}{10}. \tag{2.9}$$

Observe que $O'H' = O'G' + G'H'$, substiuíndo (2.9) e os dados:

$$\frac{3x}{10} = \frac{x\sqrt{5}}{10} + G'H' \Rightarrow$$

$$G'H' = \frac{x(3-\sqrt{5})}{10}. \tag{2.10}$$

Fazendo manipulação algébrica:

$$G'H' = \frac{x(3-\sqrt{5})}{10} \cdot \frac{2}{2} \Rightarrow$$

$$G'H' = \frac{x(6-2\sqrt{5})}{20} \Rightarrow$$

$$G'H' = \frac{x(5-2\cdot 1\sqrt{5}+1)}{20} \Rightarrow$$

$$G'H' = \frac{x(\sqrt{5}-1)^2}{20} \Rightarrow$$

$$G'H' = \frac{x}{20}(\sqrt{5}-1\cdot\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1})^2 \Rightarrow$$

$$G'H' = \frac{x}{20}(\frac{5-1}{\sqrt{5}+1})^2 \Rightarrow$$

$$G'H' = \frac{x}{20}(\frac{4}{\sqrt{5}+1})^2 \Rightarrow$$

$$G'H' = \frac{x}{20}\cdot 4(\frac{2}{\sqrt{5}+1})^2 \Rightarrow$$

$$G'H' = \frac{x}{5}[(\frac{\sqrt{5}+1}{2})^{-1}]^2.$$

Substituíndo $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ por ϕ:

$$G'H' = \frac{x}{5}(\phi^{-1})^2 \Rightarrow$$

$$G'H' = \frac{x}{5}\cdot\frac{1}{\phi^2} \Rightarrow$$

$$G'H' = \frac{x}{5\phi^2}.$$

Ainda, segue que $F_1H' = F_1G' + G'H'$, substituíndo (2.7) e (2.10):

$$F_1H' = \frac{x(\sqrt{5}-1)}{10} + \frac{x(3-\sqrt{5})}{10} \Rightarrow$$

$$F_1H' = \frac{x\sqrt{5}-x+3x-x\sqrt{5}}{10} \Rightarrow$$

$$F_1H' = \frac{2x}{10} \Rightarrow$$

$$F_1H' = \frac{x}{5}.$$

Agora, resta fazer $\frac{F_1H'}{F_1G'}$ e $\frac{F_1G'}{G'H'}$. Assim:

a) $\dfrac{F_1H'}{F_1G'}$

$$\frac{F_1H'}{F_1G'} = \frac{\frac{x}{5}}{\frac{x}{5\phi}} \Rightarrow$$

$$\frac{F_1H'}{F_1G'} = \frac{1}{\frac{1}{\phi}} \Rightarrow$$

$$\frac{F_1H'}{F_1G'} = \phi.$$

b) $\dfrac{F_1G'}{G'H'}$

$$\frac{F_1G'}{G'H'} = \frac{\frac{x}{5\phi}}{\frac{x}{5\phi^2}} \Rightarrow$$

$$\frac{F_1G'}{G'H'} = \frac{1}{\frac{1}{\phi}} \Rightarrow$$

$$\frac{F_1G'}{G'H'} = \phi.$$

Portanto, $\dfrac{E_1F_1}{F_1G'} = \dfrac{E_1G'}{E_1F_1} = \phi$.

□

3.3 3º Caso

Proposição 3.3.1. *(OAI, 2016) A figura mostra um triângulo retângulo isósceles com $\angle ACB = 90^o$, e os lados iguais AC e AB divididos na terça parte em E e F, respectivamente. O segmento EF está estendido e intersecta o quadrante de circunferência (AB) em G e é perpendicular ao segmento BH em H. Assim, G divide FH na razão áurea.*

Demonstração. Queremos mostrar que $\frac{FH}{FG} = \frac{FG}{GH} = \phi$. Para isso, suponha que $AC = BC = x$, daí $AE = \frac{x}{3}$ e $CE = \frac{2x}{3}$.

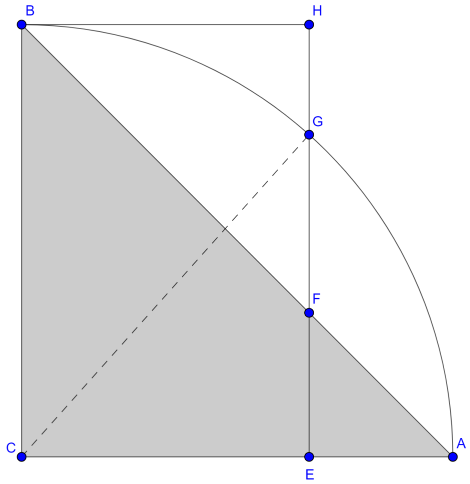
Note que os $\Delta AEF \sim \Delta ABC \sim \Delta BFH$ pelo caso (AA), pois $\angle AFE = \angle BFH$, ângulos opostos pelo vértice e $CE \parallel BH$. Então, por semelhança de triângulos:

$$\frac{BC}{EF} = \frac{AC}{AE}.$$

Substituíndo os dados:

$$\frac{x}{EF} = \frac{x}{\frac{x}{3}} \Rightarrow$$

Figura 19 – Triângulo retângulo isósceles com arco de circunferência (AGB)



Fonte: elaborada pelo autor

$$EF = \frac{x}{3}. \tag{3.11}$$

Do exposto, temos que $AE = EF = \dfrac{x}{3}$. Analogamente, $BH = FH = \dfrac{2x}{3}$. Ainda, aplicando o teorema de Pitágoras no ΔCEG, temos:

$$CG^2 = CE^2 + EG^2.$$

Substituíndo os dados:

$$x^2 = (\frac{2x}{3})^2 + EG^2 \Rightarrow$$

$$x^2 = \frac{4x^2}{9} + EG^2 \Rightarrow$$

$$EG^2 = x^2 - \frac{4x^2}{9} \Rightarrow$$

$$EG^2 = \frac{5x^2}{9} \Rightarrow$$

$$EG = \frac{x\sqrt{5}}{3}. \tag{3.12}$$

Segue que $EG = EF + FG$, substituíndo (3.11) e (3.12):

$$\frac{x\sqrt{5}}{3} = \frac{x}{3} + FG \Rightarrow$$

$$FG = \frac{x\sqrt{5}}{3} - \frac{x}{3} \Rightarrow$$

$$FG = \frac{x(\sqrt{5}-1)}{3} \tag{3.13}$$

Como $GH = FH - FG$. Substituíndo (3.13) e os dados:

$$GH = \frac{2x}{3} - \frac{x(\sqrt{5}-1)}{3} \Rightarrow$$

$$GH = \frac{2x - x\sqrt{5} + x}{3} \Rightarrow$$

$$GH = \frac{3x - x\sqrt{5}}{3} \Rightarrow$$

$$GH = \frac{x(3-\sqrt{5})}{3}.$$

Fazendo manipulação algébrica:

$$GH = \frac{x(3-\sqrt{5})}{3} \cdot \frac{2}{2} \Rightarrow$$

$$GH = \frac{x(6-2\sqrt{5})}{6} \Rightarrow$$

$$GH = \frac{x(5 - 2 \cdot 1\sqrt{5} + 1)}{6} \Rightarrow$$

$$GH = \frac{x(\sqrt{5}-1)^2}{6}.$$

Agora, resta fazer $\frac{FH}{FG}$ e $\frac{FG}{GH}$. Assim:

1. $\frac{FH}{FG}$

$$\frac{FH}{FG} = \frac{\frac{2x}{3}}{\frac{x(\sqrt{5}-1)}{3}} \Rightarrow$$

$$\frac{FH}{FG} = \frac{2}{\sqrt{5}-1}.$$

Racionalizando:

$$\frac{FH}{FG} = \frac{2(\sqrt{5}+1)}{5-1} \Rightarrow$$

$$\frac{FH}{FG} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \phi.$$

2. $\frac{FG}{GH}$

$$\frac{FG}{GH} = \frac{\frac{x(\sqrt{5}-1)}{3}}{\frac{x(\sqrt{5}-1)^2}{6}} \Rightarrow$$

$$\frac{FG}{GH} = \frac{1}{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \Rightarrow$$

$$\frac{FG}{GH} = \frac{2}{\sqrt{5} - 1}.$$

Racionalizando:

$$\frac{FG}{GH} = \frac{2(\sqrt{5} + 1)}{5 - 1} \Rightarrow$$
$$\frac{FG}{GH} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} = \phi.$$

Portanto, $\dfrac{FH}{FG} = \dfrac{FG}{GH} = \phi.$ $\square$

4 Sequência Didática

Com o apresentado neste estudo foi possível fazer uma boa revisão de alguns conceitos importantes como razão aúrea, pontência de pontos e construção de figuras geométricas. Foi possível, também, relembrar alguns conceitos que são usados na resolução de diversos problemas, mas às vezes deixam de ser encarados e enunciados como teoremas.

Como o objetivo desta pesquisa visa à aplicação, em sala de aula, por professores do ensino médio e do ensino fundamental, mais especificamente no 9º ano, é apresentada, neste capítulo, como produto deste trabalho, uma sequência didática que aborda a proposição 2.1.1, um dos casos apresentados, e a construção geométrica com régua e compasso da figura correspondente.

Cabe ressaltar que o professor pode adaptar essa sequência didática para explorar um dos outros 4 (quatro) casos restantes de Oai (2016).

Sequência didática

DISCIPLINA: Matemática

NOME DO PROFESSOR:

Turma/Série:

TEMA: Um caso de razão áurea em triângulo equilátero

CONTEÚDOS TRABALHADOS

- Razão áurea;
- Mediatriz;
- Potência de ponto;
- Circuncentro;
- Círculo circunscrito;
- Triângulo equilátero;
- Teorema de Tales;

- Equação do 2º grau;
- Paralelogramo;
- Losango; e
- Construção geométrica com régua e compasso.

HABILIDADES (BNCC)

- (EF06MA15) Resolver e elaborar problemas que envolvam a partilha de uma quantidade em duas partes desiguais, envolvendo relações aditivas e multiplicativas, bem como a razão entre as partes e entre uma das partes e o todo.
- (EF06MA19) Identificar características dos triângulos e classificá-los em relação às medidas dos lados e dos ângulos.
- (EF06MA20) Identificar características dos quadriláteros, classificá-los em relação a lados e a ângulos e reconhecer a inclusão e a intersecção de classes entre eles.
- (EF06MA22) Utilizar instrumentos, como réguas e esquadros, ou softwares para representações de retas paralelas e perpendiculares e construção de quadriláteros, entre outros.
- (EF07MA22) Construir circunferências, utilizando compasso, reconhecê-las como lugar geométrico e utilizá-las para fazer composições artísticas e resolver problemas que envolvam objetos equidistantes.
- (EF07MA24) Construir triângulos, usando régua e compasso, reconhecer a condição de existência do triângulo quanto à medida dos lados e verificar que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180º.
- (EF07MA26) Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um triângulo qualquer, conhecidas as medidas dos três lados.
- (EF07MA28) Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um polígono regular (como quadrado e triângulo equilátero), conhecida a medida de seu lado.
- (EF08MA15) Construir, utilizando instrumentos de desenho ou softwares de geometria dinâmica, mediatriz, bissetriz, ângulos de 90º, 60º, 45º e 30º e polígonos regulares.
- (EF08MA17) Aplicar os conceitos de mediatriz e bissetriz como lugares geométricos na resolução de problemas.

- (EF09MA01) Reconhecer que, uma vez fixada uma unidade de comprimento, existem segmentos de reta cujo comprimento não é expresso por número racional (como as medidas de diagonais de um polígono e alturas de um triângulo, quando se toma a medida de cada lado como unidade).
- (EF09MA09) Compreender os processos de fatoração de expressões algébricas, com base em suas relações com os produtos notáveis, para resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais do 2º grau.
- (EF09MA15) Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um polígono regular cuja medida do lado é conhecida, utilizando régua e compasso, como também softwares.
- (EF09MA14) Resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes.

Tempo da sequência didática

10 (dez) aulas

Materiais necessários para a sequência didática

- Para os alunos: régua de 30 cm, compasso, caneta esferográfica azul ou preta, lápis/lapiseira, borracha, caderno e folha sem pauta A4 ou A3.
- Para o professor: Quadro negro ou branco, projetor multimídia, giz/caneta para quadro, régua para quadro e compasso para quadro.

AULA 1

Organização da turma

Individual em fileiras na sala de aula.

Introdução

Explicar aos alunos que durante determinado período[1] será desenvolvida uma sequência didática que possui um total de 10 (dez) aulas, com o objetivo de resgatar o ensino da geometria à sala de aula por meio de um caso de razão áurea em triângulo equilátero.

[1] A ser definido pelo professor.

Cabe ressaltar que objetivo da aula é mostrar a importância do tema a ser desenvolvido, mostrando o que os alunos serão capazes de fazer ao final da sequência didática, e também apresentar a forma como transcorrerá essa sequência de maneira detalhada.

Desenvolvimento

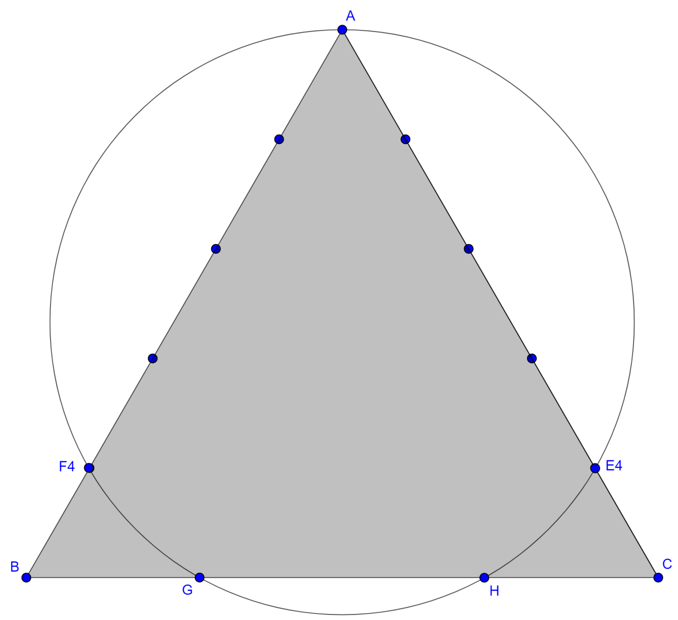
Atividade 1 – Falar da importância do tema.

Explorar um caso de razão áurea em triângulo equilátero é importante, pois por meio dele é possível fazer uma revisão/ensino de muitos conceitos de geometria, com o intuito de diminuir o abandono do ensino da geometria, relatado na obra de Pavanello (1989)[2], e despertar a curiosidade e interesse dos alunos à matemática.

Atividade 2 – Mostrar aos alunos do que eles serão capazes de fazer ao final da sequência didática.

O aluno, ao final dessa sequência didática, será capaz de resolver alguns problemas de geometria, construir figuras geométricas com régua e compasso e a seguinte figura, que é do caso apresentado[3]:

Figura 20 – Triângulo equilátero com circunferência (AE_4F_4)



Fonte: elaborada pelo autor

Atividade 3 – Apresentar como transcorrerá a sequência didática de maneira detalhada.

[2] PAVANELLO, R. M. *O abandono do ensino de geometria: uma visão histórica.* Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual de Campinas - Faculdade de Educação, 1989.

[3] É interessante que o professor já deixe a figura desenhada no quadro antes de iniciar a aula, ou, se preferir, apresentá-la em um projetor multimídia.

A sequência didática será desenvolvida ao longo de 10 (dez) aula, sendo estruturada da seguinte maneira:

- Aula 1: Apresentação do tema e avaliação formativa;
- Aula 2: Divisão dos alunos em grupos e revisão/ensino de razão áurea e mediatriz;
- Aula 3: Revisão/ensino de potência de ponto, circuncentro e círculo circunscrito;
- Aula 4: Revisão/ensino de triângulo equilátero, teorema de Tales e equação do 2º grau;
- Aula 5: Demonstração do caso apresentado;
- Aula 6: Revisão/ensino de paralelogramo e losango;
- Aula 7: Revisão/ensino das regras da construção geométrica com régua em compasso, bem como da construção da mediatriz e da reta paralela de um segmento de reta;
- Aula 8: Revisão/ensino de construção geométrica com régua em compasso da divisão de um segmento de reta em n partes iguais;
- Aula 9: Construção da figura do caso apresentado; e
- Aula 10: Avaliação somativa.

  Alertar aos alunos que as listas de exercícios irão compor 20% do grau.

Atividade 4 – Aplicar uma avaliação formativa.

Aplicar uma avaliação formativa para verificação do conhecimento prévio da turma. A avaliação deverá ser composta de conhecimentos básicos dos assuntos a serem revisados.

Conclusão

Como atividade para casa, oriente que os alunos pesquisem sobre razão áurea.

Avaliação

A avaliação da aula será realizada conforme o resultado da avaliação formativa.

Desta avaliação o professor poderá identificar onde ele deverá dar mais ênfase na revisão ou acrescentar novos pontos que julgar necessário.

Para a próxima aula, os alunos serão divididos em grupos, de maneira proporcional conforme resultado obtido na avaliação.

AULA 2

Organização da turma

Em grupos de no máximo 5 (cinco) alunos.

Introdução

Explicar aos alunos que a divisão dos grupos foi realizada conforme o resultado da avaliação formativa, de maneira que os alunos possam se ajudar, fazendo, assim, que o conhecimento seja nivelado.

Descrever aos alunos que esta aula tem por objetivo revisar/ensinar os conceitos de razão áurea e mediatriz.

Desenvolvimento

Atividade 1 – Apresentar a definição e o teorema de razão áurea.

Atividade 2 – Mostrar as curiosidades da razão áurea.

- Casos presentes na natureza, em obras de arte, no corpo humano e em construções;
- Casos famosos presentes na geometria, como o pentágono áureo e o retângulo áureo; e
- O caso de Oai (2016)[4] estudado.

Atividade 3 – Mostrar os cálculos do pentágono áureo.

Atividade 4 – Apresentar a definição e o teorema de mediatriz.

Conclusão

Lista de exercícios para que os alunos possam fazer em domicílio, entregar na próxima aula e retirar dúvidas.

Oriente aos alunos que pesquisem sobre potência de pontos, circuncentro e círculo circunscrito.

Avaliação

[4] OAI, D. T. *Some golden sections in the equilateral and right isosceles triangles.* Forum Geometricorum, v. 16, n. 269-272, jun 2016.

Observação e registro do professor em relação ao interesse e dúvidas dos alunos.

AULA 3

Organização da turma

Nos grupos da aula anterior.

Introdução

Fazer uma breve revisão da aula anterior, perguntando como foi a realização da lista de exercícios e se restaram dúvidas.

Descrever aos alunos que esta aula tem por objetivo revisar/ensinar os conceitos de potência de ponto, circuncentro e círculo circunscrito.

Desenvolvimento

Atividade 1 – Apresentar a definição, propriedades e desenvolver os casos de potência de pontos.

Atividade 2 – Resolver um exercício explorando um dos casos de potência de pontos.

Atividade 3 – Apresentar o teorema de circuncentro.

Atividade 4 – Apresentar o teorema de círculo circunscrito.

Conclusão

Lista de exercícios para que os alunos possam fazer em domicílio, entregar na próxima aula e retirar dúvidas.

Oriente aos alunos que pesquisem sobre triângulo equilátero, teorema de Tales e equação do 2º grau.

Avaliação

Observação e registro do professor em relação ao interesse e dúvidas dos alunos.

AULA 4

Organização da turma

Nos grupos da aula anterior.

Introdução

Fazer uma breve revisão da aula anterior, perguntando como foi a realização da lista de exercícios e se restaram dúvidas.

Descrever aos alunos que esta aula tem por objetivo revisar/ensinar os conceitos de triângulo equilátero, teorema de Tales e equação do 2º grau.

Desenvolvimento

Atividade 1 – Apresentar a definição de triângulo equilátero e suas particularidades quanto a mediana, altura e mediatriz.

Atividade 2 – Resolver um exercício que envolva triângulo equilátero e sua mediatriz.

Atividade 3 – Apresentar o teorema de Tales.

Atividade 4 – Resolver um exercício explorando o teorema de Tales.

Atividade 5 – Apresentar a definição de equação do 2º grau e mostrar a fórmula de Bhaskara.

Atividade 6 – Resolver uma equação do 2º grau por meio da fórmula de Bhaskara.

Conclusão

Lista de exercícios para que os alunos possam fazer em domicílio, entregar na próxima aula e retirar dúvidas.

Avaliação

Observação e registro do professor em relação ao interesse e dúvidas dos alunos.

AULA 5

Organização da turma

Nos grupos da aula anterior.

Introdução

Fazer uma breve revisão da aula anterior, perguntando como foi a realização da lista de exercícios e se restaram dúvidas.

Descrever aos alunos que esta aula tem por objetivo demonstrar o caso de razão áurea em triângulo equilátero de Aoi (2016) estudado[5].

Desenvolvimento

Atividade 1 – Enunciar o caso de razão áurea em triângulo equilátero de Aoi (2016)[6].

(OAI, 2016) Considere um triângulo equilátero ABC com lados AC e AB divididos em 5 (cinco) partes iguais pelos pontos E_k, F_k, com $k = 1, 2, 3, 4$, então $AE_k = AF_k = \frac{k}{5} \cdot BC$. Se a circunferência (AE_4F_4) intersecta BC em G e H (veja a figura do quadro), então G divide HB na razão áurea.

Atividade 2 – Demonstrar de maneira clara e detalhada o caso.

Atividade 3 – Substituir a variável usada na demostração por um número real qualquer.

Atividade 4 – Desenvolver os cálculos com o número substituído, para que os alunos possam verificar que o caso funciona para qualquer tamanho de lado do triângulo que eles venham a construir.

Conclusão

Lista de exercícios para que os alunos possam fazer em domicílio, entregar na próxima aula e retirar dúvidas.

Oriente aos alunos que pesquisem sobre paralelogramo e losango.

Avaliação

Observação e registro do professor em relação ao interesse e dúvidas dos alunos.

AULA 6

Organização da turma

Nos grupos da aula anterior.

[5] É interessante que o professor já deixe a figura desenhada no quadro antes de iniciar a aula.

[6] OAI, D. T. *Some golden sections in the equilateral and right isosceles triangles*. Forum Geometricorum, v. 16, n. 269-272, jun 2016.

Introdução

Fazer uma breve revisão da aula anterior, perguntando como foi a realização da lista de exercícios e se restaram dúvidas.

Descrever aos alunos que esta aula tem por objetivo revisar/ensinar os conceitos de paralelogramo e losango.

Desenvolvimento

Atividade 1 – Apresentar a definição e propriedades de paralelogramo.

Atividade 2 – Resolver um exercício que explore as propriedades de paralelogramo.

Atividade 3 – Apresentar a definição de losango.

Atividade 4 – Resolver um exercício que envolva losango e suas diagonais.

Conclusão

Lista de exercícios para que os alunos possam fazer em domicílio, entregar na próxima aula e retirar dúvidas.

Oriente aos alunos que pesquisem sobre construção geométrica com régua e compasso.

Avaliação

Avaliação

Observação e registro do professor em relação ao interesse e dúvidas dos alunos.

AULA 7

Organização da turma

Nos grupos da aula anterior.

Introdução

Fazer uma breve revisão da aula anterior, perguntando como foi a realização da lista de exercícios e se restaram dúvidas.

Descrever aos alunos que esta aula tem por objetivo revisar/ensinar as regras da construção geométrica com régua em compasso, bem como a construção da mediatriz e da reta paralela de um segmento de reta.

Desenvolvimento

Atividade 1 – Apresentar as regras das construções com régua e compasso.

Atividade 2 – Apresentar como realizar a construção geométrica da mediatriz de um segmento de reta.

Atividade 3 – Apresentar como realizar a construção geométrica da reta paralela a um segmento de reta que contém um ponto P.

Atividade 4 – Construir a mediatriz de um segmento de reta AB e uma reta paralela a este segmento.

Conclusão

Lista de exercícios para que os alunos possam fazer em domicílio, entregar na próxima aula e retirar dúvidas.

Oriente aos alunos que pesquisem sobre construção geométrica com régua e compasso.

Avaliação

Observação e registro do professor em relação ao interesse e dúvidas dos alunos.

AULA 8

Organização da turma

Nos grupos da aula anterior.

Introdução

Fazer uma breve revisão da aula anterior, perguntando como foi a realização da lista de exercícios e se restaram dúvidas.

Descrever aos alunos que esta aula tem por objetivo revisar/ensinar a construção geométrica com régua em compasso da divisão de um segmento de reta em n partes iguais.

Desenvolvimento

Atividade 1 – Apresentar como realizar a construção geométrica com régua em compasso da divisão de um segmento de reta em n partes.

Atividade 2 – Construir a divisão de um segmento de reta AB em 3 (três) partes iguais.

Conclusão

Lista de exercícios para que os alunos possam fazer em domicílio, entregar na próxima aula e retirar dúvidas.

Oriente aos alunos que pesquisem sobre construção geométrica com régua e compasso.

Avaliação

Observação e registro do professor em relação ao interesse e dúvidas dos alunos.

AULA 9

Organização da turma

Nos grupos da aula anterior.

Introdução

Fazer uma breve revisão da aula anterior, perguntando como foi a realização da lista de exercícios e se restaram dúvidas.

Descrever aos alunos que esta aula tem por objetivo realizar a construção da figura do caso apresentado.

Desenvolvimento

Atividade 1 – Enunciar o caso de razão áurea em triângulo equilátero de Aoi (2016)[7].

(OAI, 2016) Considere um triângulo equilátero ABC com lados AC e AB divididos em 5 (cinco) partes iguais pelos pontos E_k, F_k, com $k = 1, 2, 3, 4$, então $AE_k = AF_k = \frac{k}{5} \cdot BC$. Se a circunferência (AE_4F_4) intersecta BC em G e H, então G divide HB na razão áurea.

Atividade 2 – Construir a figura do caso enunciado.

[7] OAI, D. T. *Some golden sections in the equilateral and right isosceles triangles.* Forum Geometricorum, v. 16, n. 269-272, jun 2016.

Conclusão

Lista de exercícios para que os alunos possam fazer em domicílio, entregar na próxima aula e retirar dúvidas.

Oriente aos alunos que revisem todo conteúdo apresentado até a presente aula, bem como refaçam as listas de exercícios para que cheguem preparados para a realização da avaliação somativa.

Avaliação

Observação e registro do professor em relação ao interesse e dúvidas dos alunos.

AULA 10

Organização da turma

Individual em fileiras na sala de aula.

Introdução

Fazer uma breve revisão da aula anterior, perguntando como foi a realização da lista de exercícios e se restaram dúvidas.

Descrever aos alunos que esta aula tem por objetivo realizar a avaliação somativa referente a sequência didática desenvolvida.

Desenvolvimento

Atividade única – Aplicar a avaliação somativa.

Conclusão

Agradecer aos alunos a atenção dispendida na sequência didática desenvolvida e se colocar a disposição para eventuais dúvidas no aprofundamento do tema.

Avaliação

O grau referente à sequência didática é composto da entrega das listas de exercícios e da avaliação somativa, sendo 80% do grau atribuído ao resultado da avaliação somativa e 20% atribuído à entrega das litas de exercícios. A seguinte fórmula é usada no cálculo do grau.

Grau=$\dfrac{AS. \cdot 8 + LE \cdot 2}{10}$.

AS – Avaliação Somativa

LE – Listas de Exercícios

FINALIZAÇÃO DA SEQUÊNCIA

Procedimentos a serem tomados no decorrer da sequência didática:

- Verifique se tem algum aluno que não seja participativo na aula e se por ventura ele tenha dúvidas.
- Observe os alunos que estão deslocados nos grupos e tente fazer com que eles participem ou contribuam de alguma forma.
- Avalie as listas de exercícios entre uma aula e outra, para que algum aluno que apresente dificuldades recorrentes possa ser ajudado.

No encerramento da sequência didática:

Aplicar retificação de aprendizagem, por meio de entrega de trabalhos, aos alunos que porventura não alcançarem o grau 5,0.

Considerações Finais

Em relação ao estudo

O intuito de mostrar casos não famosos de razão áurea na geometria teve como motivação o resgate do ensino da geometria e o uso da construção geométrica com régua e compasso, método que auxilia, de maneira criativa, o ensino.

Assim, esse trabalho elencou conceitos preliminares que elucidaram as demonstrações dos 2 (dois) casos de razão áurea em triângulos equiláteros e dos 3 (três) casos de razão áurea em triângulos isósceles, bem como o entendimento das construções geométricas.

Como descrito no primeiro capítulo, houve necessidade de conhecimento prévio de alguns conceitos para o entendimento de alguns passos das demonstrações. Este fato, por si só, já promoveu uma sucinta revisão teórica do conteúdo necessário para o entendimento do conteúdo apresentado nesta pesquisa, e com o acompanhamento das demonstrações, foi possível verificar a importância deles, que às vezes nem são enunciados como teoremas ou definições em resoluções de problemas no dia a dia.

As demonstrações no segundo e no terceiro capítulos foram realizadas, por meio de geometria plana, trabalhando com casos genéricos, podendo ser usadas medidas quaisquer na substituição da váriável x, o que generaliza os resultados.

A confirmação das provas despertou o interesse em verificar as construções geométricas das figuras. Para tanto, foi realizado um apêndice sobre construções geométricas com régua e compasso, que contém uma revisão de conceitos e explicadas, de maneira objetiva, essas construções.

O apanhado dos conceitos apresentados neste estudo, dos 5 (cinco) casos apresentados, dos conhecimento prévios, bem como das construções geométricas, geraram, como produto do trabalho, uma sequência didática sugerida no quarto capítulo.

O desenvolvimento do trabalho me permitiu ampliar minha visão das figuras geométricas e melhorar minha criatividade para aplicação em sala de aula.

Sendo assim, os objetivos propostos foram atingidos, podendo, este trabalho, servir como fonte de consulta para trabalhos futuros.

Trabalhos futuros

Frente às considerações apontadas ao longo deste trabalho, foi possível verificar a revelância do tema, sendo importante dar continuidade e aprofundamento ao estudo. Apresentar e demonstrar de maneira detalhada, por geometria plana, cada um dos 5 (cinco) casos de Oai (2016), sugerir uma sequência didática para aplicação em sala, bem como realizar as contruções geométricas, com régua e compasso, das figuras relativas aos casos apresentados, foram os objetivos deste trabalho, porém espera-se que o que foi aqui exposto incentive a realização de pesquisas e trabalhos futuros. Nesse viés, como fruto dos achados desta pesquisa, são elencadas abaixo, as seguintes propostas para continuidade deste trabalho:

- apresentar e demonstrar de maneira detalhada, por geometria analítica, cada um dos 5 (cinco) casos de Oai (2016);
- apresentar e demonstrar novos casos de razão áurea na geometria; e
- desenvolver oficinas ou minicursos, relativos ao tema, para professores.

Referências

ANASTACIO, L. R.; FERREIRA, F. N. Razão áurea: um rico tesouro de surpresas. *Universidade Federal de São João del-Rei - UFSJ*, 2015.

JUNIOR, L. P. da S. *Construções Geométricas por Régua e Compasso e Números Construtíveis*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Campina Grande - UFCG, 2013.

LANDIM, N. P. *Razão Áurea: Expresando a beleza desse número para o ensino médio*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal Rural do Semiárido – UFERSA, 2014.

LINCK, L. A. *A História da Matemática no Ensino da Geometria: Uma contextualização pela Razão Áurea*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de São Carlos - UFSCar, 2017.

NETO, A. C. M. *Geometria - Coleção PROFMAT*. first. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática - SBM, 2013.

OAI, D. T. Some golden sections in the equilateral and right isosceles triangles. *Forum Geometricorum*, v. 16, n. 269-272, jun 2016.

PAVANELLO, R. M. *O abandono do ensino de geometria: uma visão histórica*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual de Campinas - Faculdade de Educação, 1989.

PAVANELLO, R. M. O abandono do ensino de geometria no brasil: causas e consequências. *Revista Zetetiké*, I, n. 1, p. 7–17, 1993.

WAGNER, E. *Potência de um ponto em relação a uma circunferência*. 2001. <http://rpm.org.br/cdrpm/45/5.htm>.

APÊNDICE A – Construção geométrica com régua e compasso

Este apêndice tem por objetivo apresentar de forma sucinta a respeito da famosa forma de construção geométrica, suas regras, algumas construções básicas que embassam outras, métodos para divisão de segmentos e as construções geométricas das figuras das proposições dos capítulos 2 e 3.

A.1 Breve histórico

A construção geométrica com régua e compasso tem sido a marca registrada da Geometria desde o aparecimento dos elementos de Euclides em torno de 300 a.C. Os matemáticos tinham um grande interesse por estas contruções, o traçado de construções era visto como um jogo, que tinha suas regras, e era considerado como um dos jogos mais fascinantes daquela época. (JUNIOR, 2013).

A.2 Regras das contruções

A construção geométrica com régua e compasso tem basicamente 3 (três) regras, são elas:

1. Utilizar régua não graduada para construir uma reta ou segmento de reta conhecendo dois pontos distintos.
2. Utilizar compasso para construir uma circunferência ou arco de circunferência com centro em um ponto conhecido e com um raio de medida qualquer, dada por um segmento.
3. Justificar porque a construção está correta.

A.3 Construções básicas

As construções básicas ensinadas nesta seção são: mediatriz, reta perpendicular, reta paralela e arco capaz de 90º.

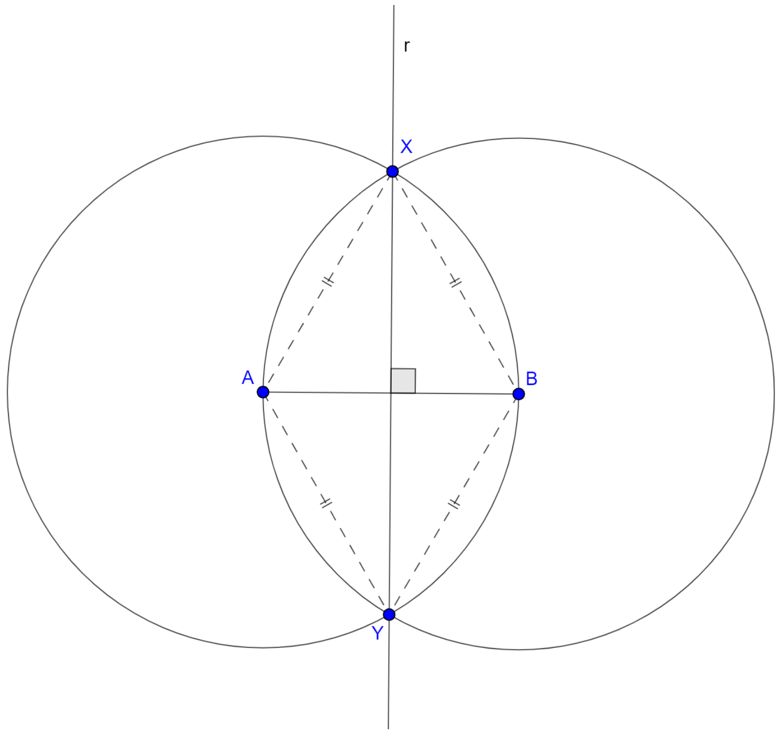
A.3.1 **Mediatriz**

Dado um segmento AB, construiremos a mediatriz de AB com os seguintes passos:

1. Trace uma circunferência com centro em A e raio AB.
2. Trace uma circunferência com centro em B e raio BA.
3. Marque os pontos X e Y, interseções das circunferências (veja Figura 21).
4. Trace uma reta r que contém os pontos X e Y.

A reta r é a mediatriz do segmento AB, pois, por construção, $AXBY$ forma um losango, desta forma $XA = XB = YA = YB$ e as diagonais AB e XY são perpendiculares e cortam-se ao meio.

Figura 21 – Mediatriz de AB e pontos X e Y



Fonte: elaborado pelo autor

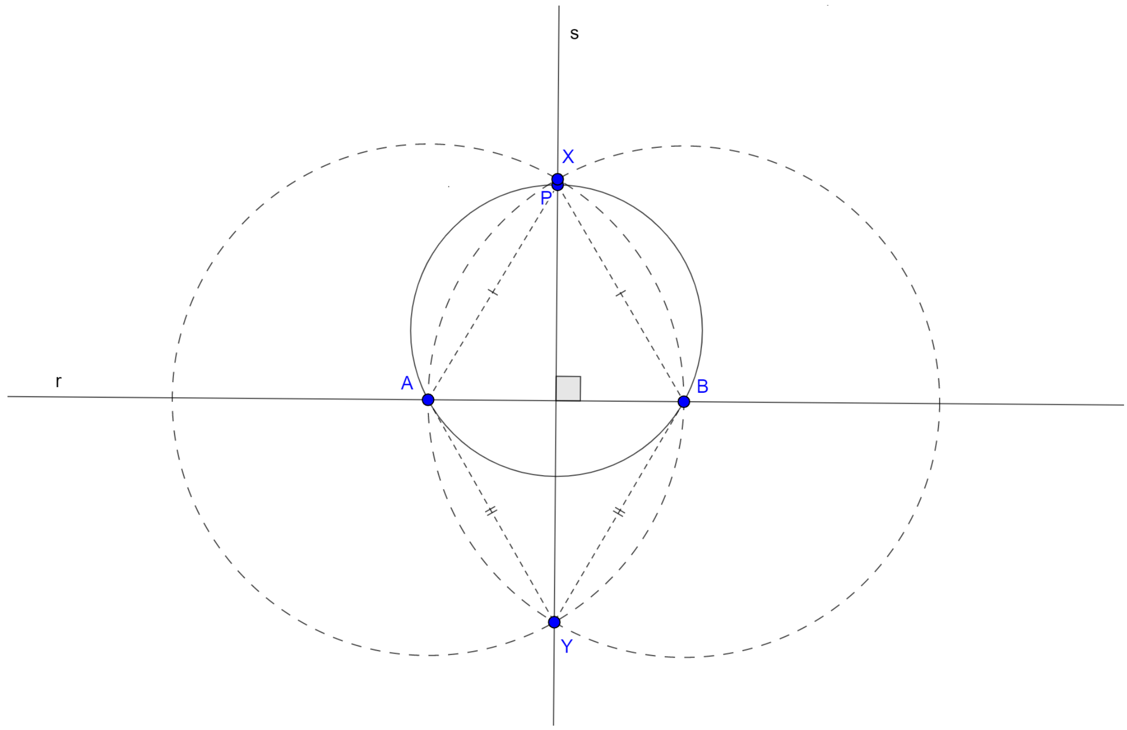
A.3.2 Reta perpendicular

Dados uma reta r e um ponto P não pertencente a r, construiremos a reta perpendicular a reta r que passa por P com os seguintes passos:

1. Trace uma circunferência com centro em P e raio de tamanho suficiente para que a circunferência intersecte a reta r em dois pontos.
2. Marque os pontos A e B, interseções da circunferência com a reta r.
3. Construa a reta s, mediatriz de AB, que contém os pontos P, X e Y (veja Figura 22).

A reta s é a reta perpendicular ao segmento AB, pois, por construção, $PA = PB$ e $YA = YB$, sendo PY a mediatriz de AB, logo, $r \perp s$.

Figura 22 – Reta perpendicular à reta r



Fonte: elaborado pelo autor

A.3.3 **Reta paralela**

Dados uma reta r e um ponto P não pertencente a r, construiremos a reta paralela a reta r que passa por P com os seguintes passos:

1. Trace um arco de circunferência, com centro em P e raio R, que intersecte a reta r em um ponto, que chamaremos de A.

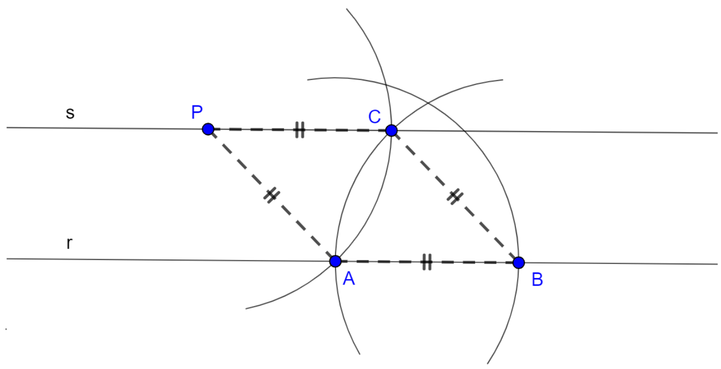
2. Trace um arco de circunferência, com centro em A e raio R, que intersecte a reta r em um ponto, que chamaremos de B.

3. Trace um arco de circunferência, com centro em B e raio R, que intersecte o arco de circunferência de centro P em um ponto, que chamaremos de C.

4. Trace uma reta s que contém os pontos P e C (veja Figura 23).

A reta s é a reta paralela ao segmento AB, pois, por construção, $PA = CB$ e $AB = PC$, sendo $ABCP$ um paralelogramo, logo, $r \parallel s$.

Figura 23 – Reta paralela à reta r



Fonte: elaborado pelo autor

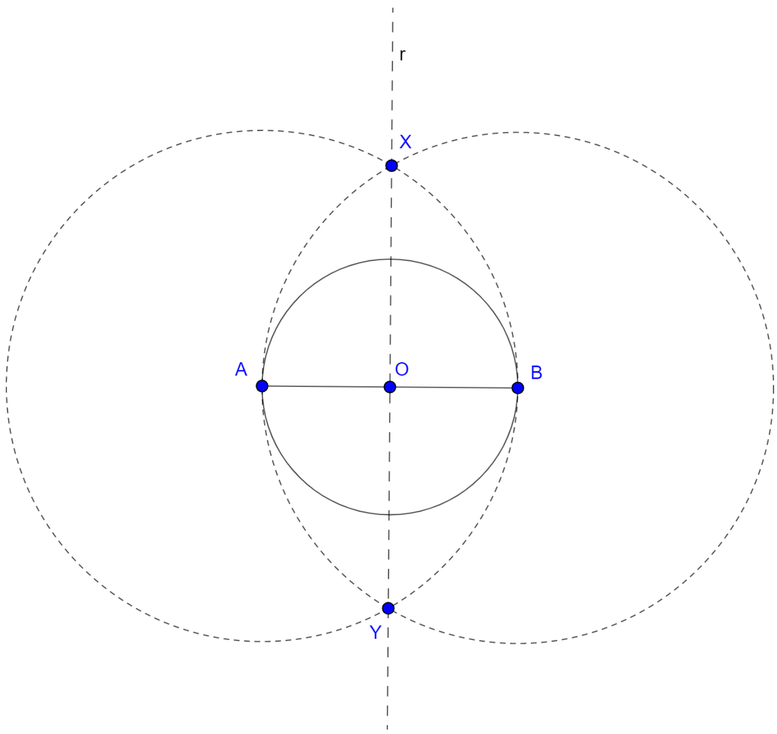
A.3.4 **Arco capaz de 90º**

Dado um segmento AB, construiremos um arco capaz de 90º do segmento AB com os seguintes passos:

1. Construa a reta r, mediatriz de AB, que contém os pontos O (ponto médio de AB), X e Y.

2. Trace uma circunferência, com centro em O e raio OA (veja Figura 24).

Figura 24 – Arco capaz de 90º de AB



Fonte: elaborado pelo autor

O arco AB é o arco capaz de 90º do segmento AB, pois, se P é qualquer ponto do arco AB, então $\angle APB = 90^o$. Isso se deve pelo fato de AB ser o diâmetro da circunferência de cento O, e pelo teorema do ângulo inscrito, o ângulo inscrito é metade do ângulo central, logo, $\angle APB = \dfrac{\angle AOB}{2} = \dfrac{180^o}{2} = 90^o$.

A.4 Divisão de segmentos

Nesta seção serão apresentados dois métodos para divisão de segmentos em partes iguais, são eles: divisão em n partes iguais e divisão em 2^n partes iguais.

A.4.1 Divisão em n partes

Dado um segmento AB, pertencente a reta r, queremos dividí-lo em n partes iguais. Para esta construção, seguiremos os seguintes passos:

1. Trace uma reta s que contém o ponto A e que não contém o ponto B.

2. Construa uma reta t paralela à reta s e que contém o ponto B.

3. Marque i pontos na reta s, nomeados de A_i, com $i = 1, 2, 3, ..., n$. Para isso, trace um arco de circunferência, com centro em A e raio R, que intersecte a reta s no ponto A_1. Faça o mesmo procedimento com centro em A_1, e assim sucessivamente até obter o ponto A_n.

4. Marque j pontos na reta t em sentido contrários aos pontos A_i, nomeados de B_j, com $j = 1, 2, 3, ..., n$. Para isso, trace um arco de circunferência, com centro em B e raio R, que intersecte a reta t no ponto B_1. Faça o mesmo procedimento com centro em B_1, e assim sucessivamente até obter o ponto B_n.

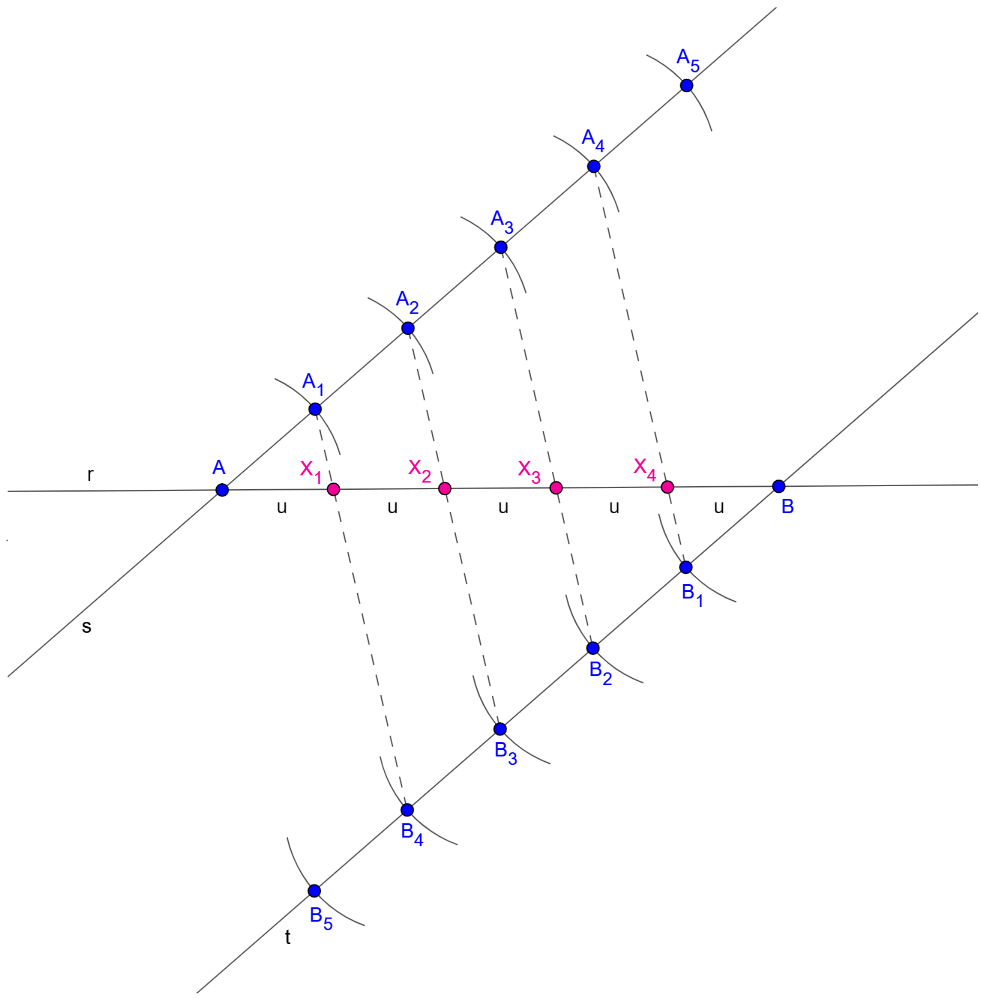
5. Trace segmentos de reta que contém A_i e B_j, de modo que $i + j = n$.

6. Maque os pontos X_k, com $k = 1, 2, 3, ..., n$ e $X_n = B$, da interseção dos segmentos A_iB_j com o segmento AB. Esses pontos dividem AB em n segmentos de tamanho u.

<u>Justificativa do método</u>: os segmentos A_iA_{i+1} e B_jB_{j+1} são iguais e paralelos, fazendo com que $A_iA_{i+1}B_jB_{j+1}$, com $i + j = n$, seja um paralelogramo, daí tiramos que os segmentos A_iB_j, com $i + j = n$, são paralelos entre si. Pelo teorema de Tales, concluímos que $AX_1 = X_1X_2 = ... = X_{n-2}X_{n-1} = X_{n-1}B = u$, pois feixes de segmentos paralelos cortadas por segmentos transversais formam segmentos de retas proporcionalmente correspondentes. Logo, como $AA_n = n.R$, então $AB = n.u$.

Segue um exemplo de divisão de um segmento AB em n partes iguais, com $n = 5$.

Figura 25 – Divisão do segmento AB em 5 (cinco) partes iguais



Fonte: elaborado pelo autor

A.4.2 Divisão em 2^n partes

Dado um segmento AB, pertencente a reta r, queremos dividí-lo em 2^n partes iguais. Para esta construção, seguiremos os seguintes passos:

1. Construa a mediatriz de AB que intersecta a reta r no ponto M_1. Se $n = 1$, pare neste passo.

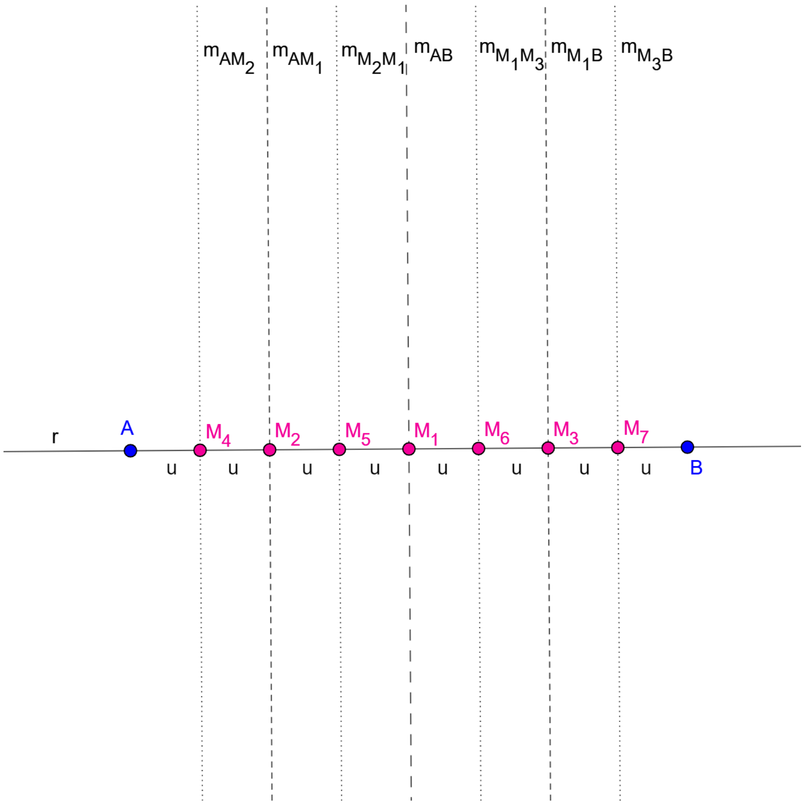
2. Construa as mediatrizes dos novos segmentos gerados com os pontos do passo anterior. Essas mediatrizes intersectam a reta r nos pontos M_{2^i-1}, com $i = 2, ..., n$. Se obter o ponto M_{2^n-1}, pare neste passo.

3. Repita o passo anterior até obter o ponto M_{2^n-1}.

Justificativa do método: as mediatrizes dividem um segmento em duas partes iguais, logo, como se trata de uma divisão em 2^n partes, é possível realizá-la com o uso de mediatrizes.

Segue um exemplo de divisão de um segmento AB em 2^n partes iguais, com $n = 3$, resultando em 8 (oito) partes iguais.

Figura 26 – Divisão do segmento AB em 8 (oito) partes iguais



Fonte: elaborado pelo autor

Este método é eficiente para divisões de segmentos em poucas partes iguais, como duas ou quarto partes, $n = 1$ e $n = 2$, respectivamente.

A.5 Construções do Capítulo 2

Nesta seção serão apresentadas as construções das figuras principais dos casos do Capítulo 2 - Razão áurea em triângulos equiláteros.

A.5.1 1º Caso

Dada uma reta suporte r, construiremos a figura com os seguintes passos:

1. Marque os pontos B e C na reta r.
2. Trace um arco de circunferência com centro em B e raio BC.
3. Trace um arco de circunferência com centro em C e raio CB.
4. Marque os pontos A e D, interseções dos arcos de circunferências.

5. Trace os segmentos AB e AC.

6. Construa a mediatriz de BC.

7. Construa a divisão do segmento AC em 5 (cinco) partes iguais. Gerando os pontos E_k, com $k = 1, 2, 3, 4$.

8. Construa a divisão do segmento AB em 5 (cinco) partes iguais. Gerando os pontos F_k, com $k = 1, 2, 3, 4$.

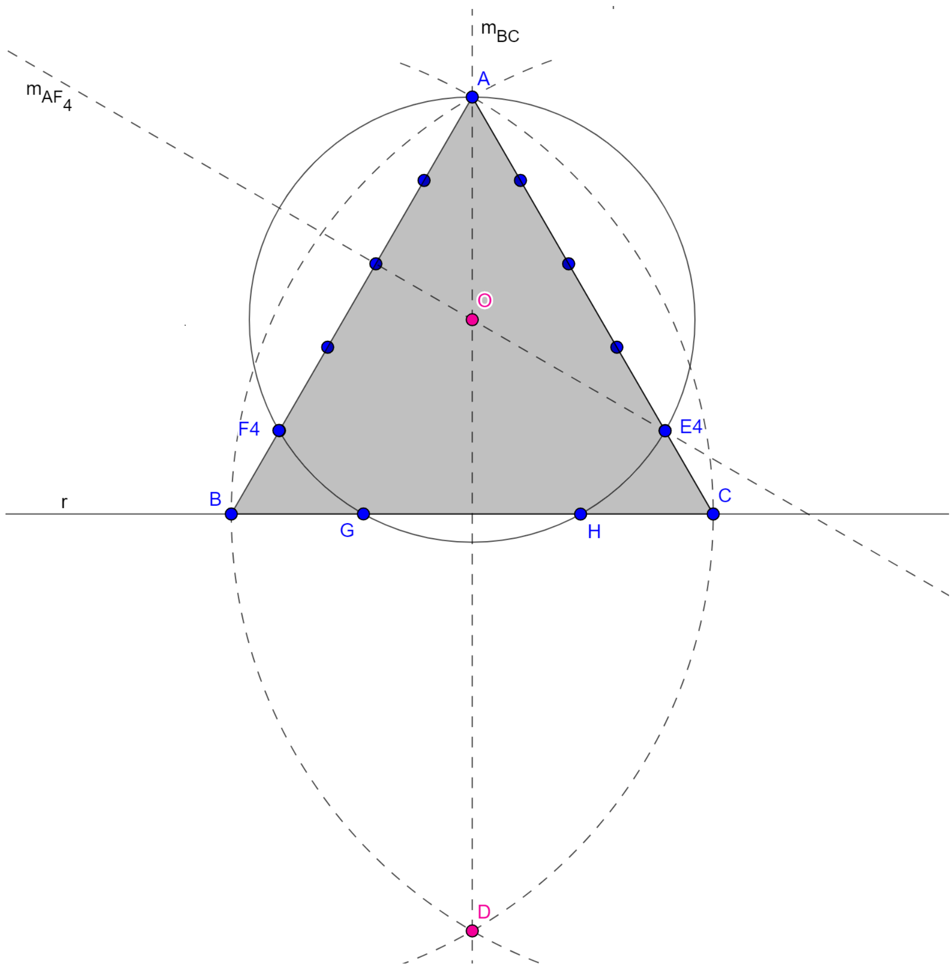
9. Construa a mediatriz de AF_4.

10. Marque o ponto O (circuncentro do ΔAF_4E_4), interseção de m_{BC} e m_{AF_4}.

11. Trace uma circunferência de centro O e raio OA.

12. Marque os pontos G e H, interseção da circunferência de centro O com o segmento BC.

Figura 27 – Construção da Figura 11

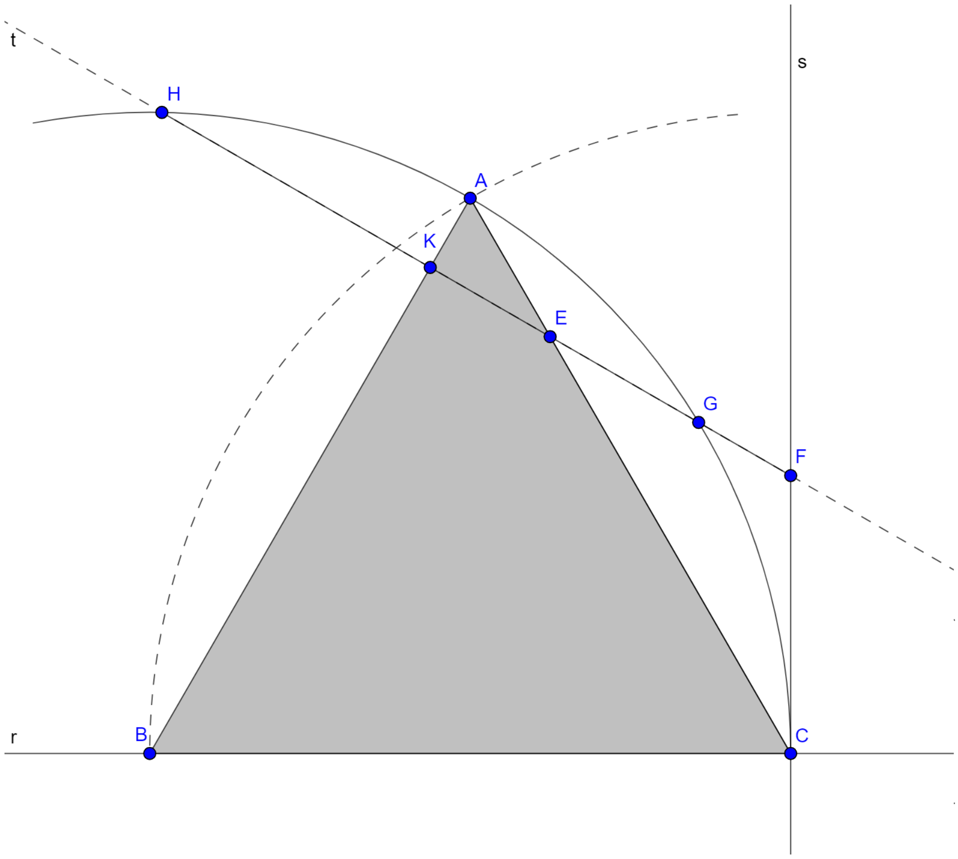


Fonte: elaborada pelo autor

A.5.2 2º Caso

Dada uma reta suporte r, construiremos a figura com os seguintes passos:

Figura 28 – Construção da Figura 13



Fonte: elaborada pelo autor

1. Marque os pontos B e C na reta r.
2. Trace um arco de circunferência com centro em B e raio BC.
3. Trace um arco de circunferência com centro em C e raio CB.
4. Marque o ponto A, interseções dos arcos de circunferências.
5. Trace os segmentos AB e AC.
6. Construa uma reta s perpendicular à reta r e que contém o ponto C.
7. Construa a divisão do segmento AC em 4 (quatro) partes iguais.
8. Marque o ponto E, quarta parte do segmento AC mais próximo do ponto A.
9. Construa uma reta t perpendicular ao segmento AB e que contém o ponto E.
10. Marque o ponto K, interseção da reta t com AB.

11. Marque o ponto F, interseção da reta t com a reta s.

12. Maque os pontos G e H, interseção da reta t com o arco de circunferência de centro B.

13. Trace o segmento FH.

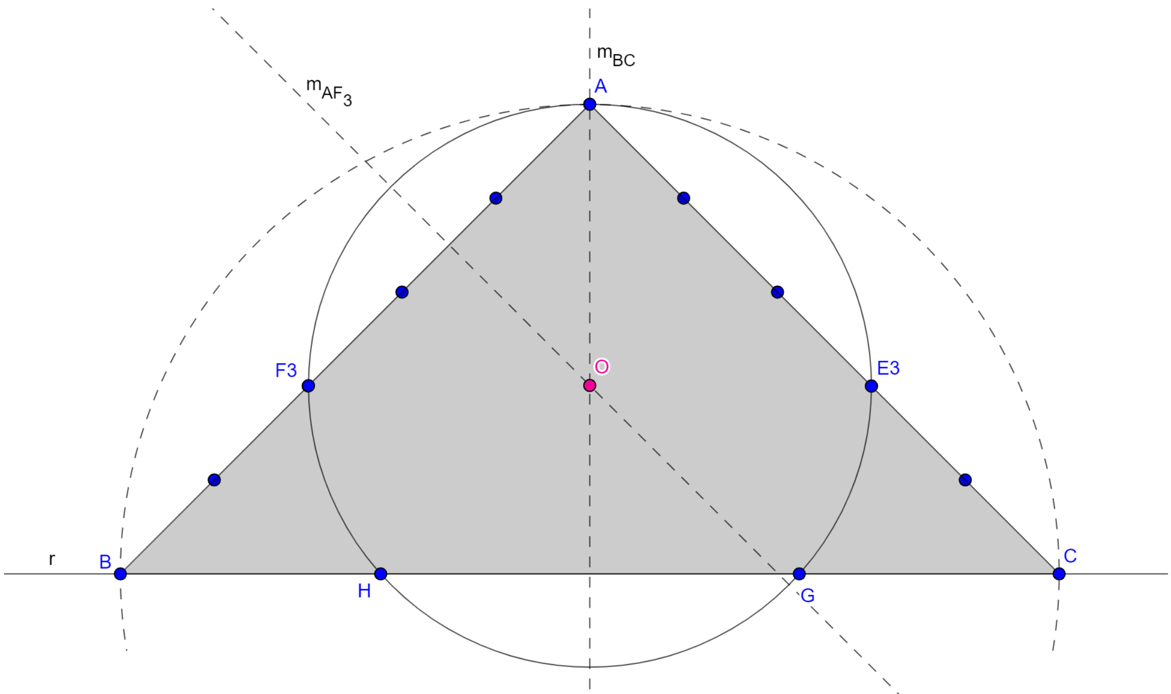
A.6 Construções do Capítulo 3

Nesta seção serão apresentadas as construções das figuras principais dos casos do Capítulo 3 - Razão áurea em triângulos isósceles.

A.6.1 1º Caso

Dada uma reta suporte r, construiremos a figura com os seguintes passos:

Figura 29 – Construção da Figura 15



Fonte: elaborada pelo autor

1. Marque os pontos B e C na reta r.

2. Construa a mediatriz do segmento BC.

3. Construa o arco capaz de 90º do segmento BC.

4. Marque o pontos A, interseção do arco capaz de 90º com a m_{BC}.

5. Trace os segmentos AB e AC.

6. Construa a divisão do segmento AC em 5 (cinco) partes iguais. Gerando os pontos E_k, com $k = 1, 2, 3, 4$.

7. Construa a divisão do segmento AB em 5 (cinco) partes iguais. Gerando os pontos F_k, com $k = 1, 2, 3, 4$.

8. Construa a mediatriz de AF_3.

9. Marque o ponto O (circuncentro do ΔAF_3E_3), interseção de m_{BC} e m_{AF_3}.

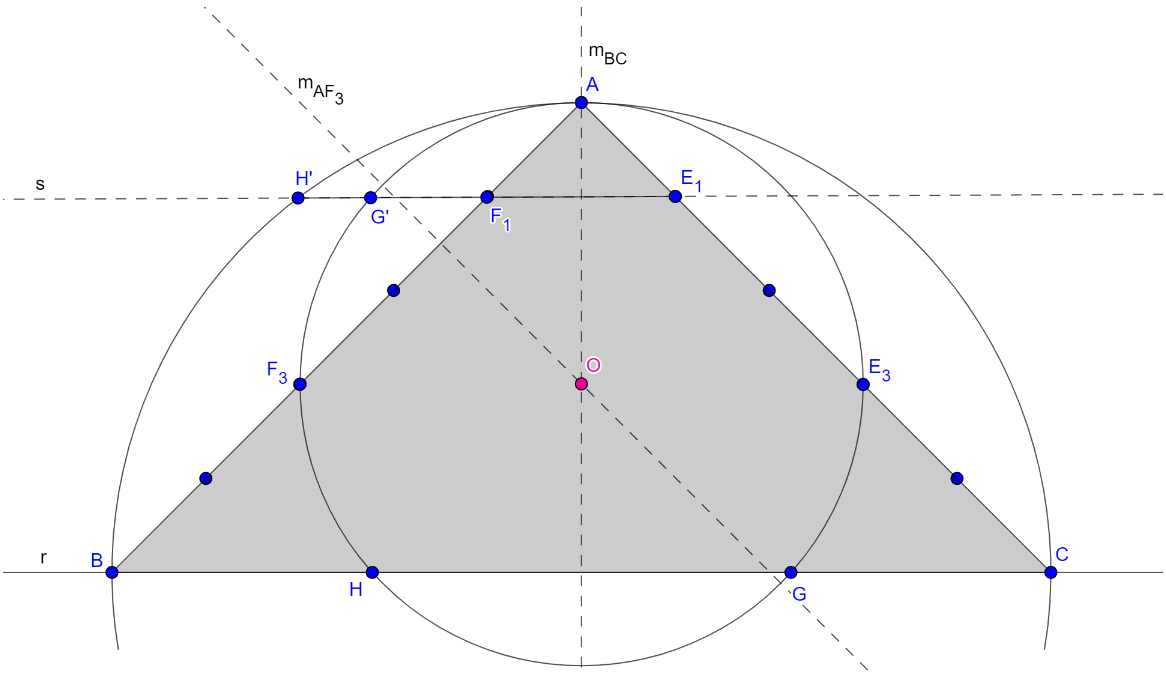
10. Trace uma circunferência de centro O e raio OA.

11. Marque os pontos G e H, interseção da circunferência de centro O com o segmento BC.

A.6.2 2º Caso

Dada uma reta suporte r, construiremos a figura com os seguintes passos:

Figura 30 – Construção da Figura 17



Fonte: elaborada pelo autor

1. Marque os pontos B e C na reta r.

2. Construa a mediatriz do segmento BC.

3. Construa um arco capaz de 90º do segmento BC.

4. Marque o pontos A, interseção do arco capaz de 90º com a m_{BC}.

5. Trace os segmentos AB e AC.
6. Construa a divisão do segmento AC em 5 (cinco) partes iguais. Gerando os pontos E_k, com $k = 1, 2, 3, 4$.
7. Construa a divisão do segmento AB em 5 (cinco) partes iguais. Gerando os pontos F_k, com $k = 1, 2, 3, 4$.
8. Construa a mediatriz de AF_3.
9. Marque o ponto O (circuncentro do ΔAF_3E_3), interseção de m_{BC} e m_{AF_3}.
10. Trace uma circunferência de centro O e raio OA.
11. Marque os pontos G e H, interseção da circunferência de centro O com o segmento BC.
12. Trace uma reta s que contém os pontos E_1 e F_1.
13. Marque o ponto G', interseção da reta s com a circunferência de centro O.
14. Marque o ponto H', interseção da reta s com o arco capaz de 90º.
15. Trace o segmento E_1H'.

A.6.3 3º Caso

Dada uma reta suporte r, construiremos a figura com os seguintes passos:

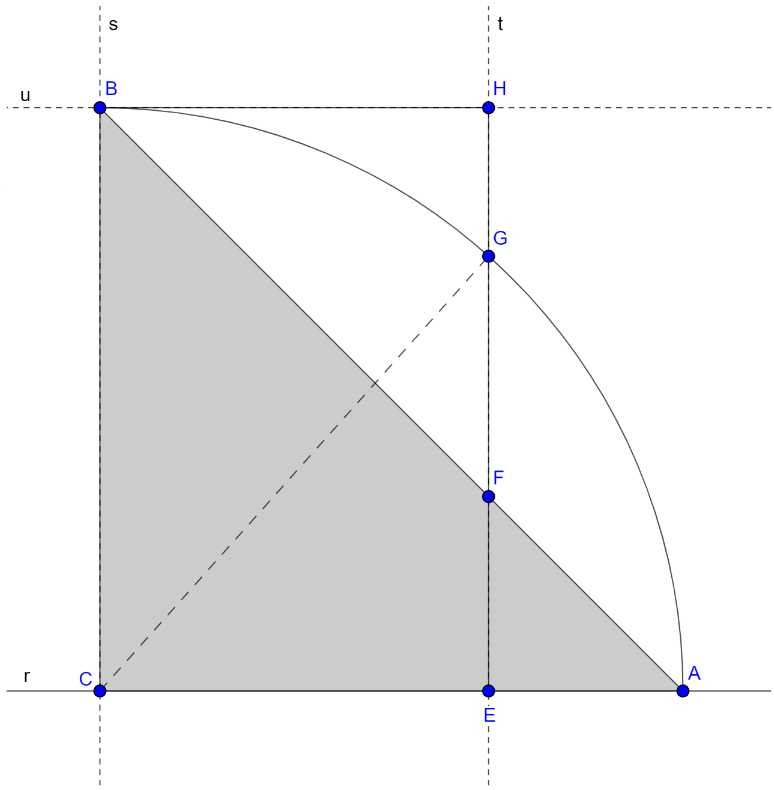
1. Marque os pontos C e A na reta r.
2. Construa uma reta s perpendicular à reta r e que contém o ponto C.
3. Trace um arco de circunferência com centro em C e raio CA.
4. Marque o ponto B, interseção do arco de circunferência com a reta s.
5. Trace os segmentos CB e AB.
6. Construa a divisão do segmento AC em 3 (três) partes iguais.
7. Marque o ponto E, terça parte do segmento AC mais próximo do ponto A.
8. Construa a divisão do segmento AB em 3 (três) partes iguais.
9. Marque o ponto F, terça parte do segmento AB mais próximo do ponto A.
10. Trace uma reta t que contém os pontos E e F.
11. Marque o ponto G, interseção da reta t com o arco de circunferência.

12. Construa uma reta u perpendicular à reta t e que contém o ponto B.

13. Marque o ponto H, interseção da reta t com a reta u.

14. Trace os segmentos BH e EH.

Figura 31 – Construção da Figura 19



Fonte: elaborada pelo autor