

**PROPOSTA DE ENTROPIA GRAVITACIONAL PARA
MÉTRICAS TIPO-GÖDEL NO TELEPARALELISMO
EQUIVALENTE À RELATIVIDADE GERAL**

RICARDO JENSEN DIDONET

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM FÍSICA

**INSTITUTO DE FÍSICA
Brasília, Fevereiro de 2020**



UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA
INSTITUTO DE FÍSICA

GRAVITATIONAL ENTROPY PROPOSAL FOR
GÖDEL-TYPE METRICS IN THE FRAMEWORK OF
TELEPARALLEL GRAVITY

PROPOSTA DE ENTROPIA GRAVITACIONAL PARA
MÉTRICAS TIPO-GÖDEL NO TELEPARALELISMO
EQUIVALENTE À RELATIVIDADE GERAL

RICARDO JENSEN DIDONET

ORIENTADOR: SÉRGIO COSTA ULHOA, DR.

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM FÍSICA

BRASÍLIA/DF: FEVEREIRO - 2020

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA
INSTITUTO DE FÍSICA

PROPOSTA DE ENTROPIA GRAVITACIONAL PARA
MÉTRICAS TIPO-GÖDEL NO TELEPARALELISMO
EQUIVALENTE À RELATIVIDADE GERAL

RICARDO JENSEN DIDONET

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO SUBMETIDA AO INSTITUTO DE FÍSICA DA
UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS
PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM FÍSICA.

APROVADA POR:

Prof. Dr. Sérgio Costa Ulhoa – IF/Universidade de Brasília
Orientador

Prof. Dr. Ronni G. G. Amorim – Universidade de Brasília
Membro Interno

Prof. Dr. Ednardo P. Spaniol – UniCEUB/UDF
Membro Externo

BRASÍLIA, 06 DE FEVEREIRO DE 2020.

FICHA CATALOGRÁFICA

DIDONET, RICARDO

Proposta de Entropia Gravitacional para métricas tipo-Gödel no Teleparalelismo Equivalente à Relatividade Geral [Distrito Federal] 2020.

ix, 42p., 210 x 297 mm (Mestre em Física/Instituto de Física/UnB, Mestre em Física, Física, 2020).

Dissertação de Mestrado – Universidade de Brasília, Programa de Pós-Graduação em Física.

Instituto de Física

1. Gravitação

2. TEGR

3. Termodinâmica Gravitacional

4. Gödel

I. Mestre em Física/Instituto de Física/UnB

II. Título (série)

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

DIDONET, RICARDO (2020). Proposta de Entropia Gravitacional para métricas tipo-Gödel no Teleparalelismo Equivalente à Relatividade Geral . Dissertação de Mestrado em Física, Publicação , Departamento de Física, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 42p.

CESSÃO DE DIREITOS

AUTOR: Ricardo Jensen Didonet

TÍTULO: Proposta de Entropia Gravitacional para métricas tipo-Gödel no Teleparalelismo Equivalente à Relatividade Geral .

GRAU: Mestre em Física

ANO: 2020

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta dissertação de mestrado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte dessa dissertação de mestrado pode ser reproduzida sem autorização por escrito do autor.

Ricardo Jensen Didonet

Instituto de Física (Mestre em Física) - Instituto de Física

Universidade de Brasília (UnB)

Campus Darcy Ribeiro

CEP 70919-970 - Brasília - DF - Brasil

AGRADECIMENTOS

Agradeço a agência CAPES pelo apoio financeiro e ao meu orientador, Professor Sérgio Ulhoa, pelas discussões, pelo tempo e paciência para os meus questionamentos. Agradeço também ao Professor Wiliam pelo apoio no início do mestrado e aos colegas que tive a oportunidade de conhecer ao longo deste tempo.

RESUMO

Título: Proposta de Entropia Gravitacional para métricas tipo-Gödel no Teleparalelismo Equivalente à Relatividade Geral

Autor: Ricardo Jensen Didonet

Orientador: Sérgio Costa Ulhoa, Dr.

Programa de Pós-Graduação em Física

Brasília, 06 de fevereiro de 2020

No Teleparalelismo Equivalente à Relatividade Geral (TEGR) é possível formular um tensor de energia-momento do campo gravitacional. Tal formulação nos permite obter expressões bem definidas para a energia e momento dos campos gravitacional e de matéria do espaço-tempo. Neste trabalho, utilizamos as expressões de energia e momento gravitacionais que surgem no contexto do TEGR para propor uma expressão para a entropia gravitacional para métricas tipo-Gödel.

Palavras-chave: Gravitação, Termodinâmica Gravitacional, métrica tipo-Gödel, TEGR.

ABSTRACT

Title: Gravitational Entropy Proposal for Gödel-type metrics in the Framework of Teleparallel Gravity

Author: Ricardo Jensen Didonet

Supervisor: Sérgio Costa Ulhoa, Dr.

Graduate Program in IF

Brasília, February 6th, 2020

In the framework of Teleparallel Gravity, it is possible to formulate a tensor for the energy-momentum of the gravitational field. Such formulation allows us to obtain well-defined expressions for the energy and momentum of the gravitational and matter fields of a given space-time. In this work, we use the expressions of energy and momentum for the gravitational field in order to propose an expression for gravitational entropy for Gödel-type metrics.

Keywords: Gravitation, Gravitational Thermodynamics, Gödel-type metrics, TEGR.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	FÍSICA E GEOMETRIA	3
1.2	VARIEDADES E O ESPAÇO-TEMPO	3
1.3	O CAMPO DE TÉTRADAS	4
1.4	CONEXÃO DE LORENTZ E EFEITOS DE REFERENCIAL	8
1.4.1	EQUAÇÃO DE MOVIMENTO DE UMA PARTÍCULA	10
1.4.2	TENSOR DE ACELERAÇÃO	11
1.5	REFERENCIAL EM ROTAÇÃO	12
1.6	CONEXÕES E GRAVITAÇÃO	14
1.6.1	INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA	16
1.6.2	TORÇÃO E CURVATURA	17
1.6.3	A CONEXÃO DE LEVI-CIVITA	19
1.6.4	A CONEXÃO DE WEITZENBÖCK	21
2	FORMULAÇÃO LAGRANGIANA E O TENSOR DE ENERGIA-MOMENTO GRAVITACIONAL NO TEGR	24
2.1	A LAGRANGIANA DO TEGR E AS EQUAÇÕES DE CAMPO	24
2.2	O TENSOR DE ENERGIA-MOMENTO GRAVITACIONAL	26
3	PRIMEIRA LEI DA TERMODINÂMICA NO UNIVERSO DE GÖDEL	29
3.1	O UNIVERSO DE GÖDEL	29
3.2	ENERGIA DOS CAMPOS GRAVITACIONAL E DE MATÉRIA	31
3.3	PRESSÃO DOS CAMPOS GRAVITACIONAL E DE MATÉRIA	32
3.3.1	DECOMPOSIÇÃO CANÔNICA COVARIANTE	33
3.3.2	PRESSÃO ISOTRÓPICA DOS CAMPOS GRAVITACIONAL E DE MATÉRIA	33
3.4	A EXPRESSÃO DA PRIMEIRA LEI DA TERMODINÂMICA NO UNIVERSO DE GÖDEL	35
3.4.1	CASO LIMITE: ROTAÇÃO SEM EXPANSÃO	36
3.4.2	CASO LIMITE: EXPANSÃO SEM ROTAÇÃO	38
4	CONCLUSÃO	40
	REFERENCES	40

LISTA DE FIGURAS

1.1	As cartas ϕ e ψ mapeiam os abertos V e U ao \mathbb{R}^n	3
1.2	Espaço Tangente T_pM a um ponto P da variedade M	4
1.3	Transporte paralelo ao longo de uma curva.	17
1.4	Significado geométrico da Torção. O paralelogramo definido pelos vetores u e v não "fecha".....	19
3.1	Volume de integração para obtenção da energia dos campos gravitacional e de matéria.	32
3.2	Densidade de entropia por constante cosmológica em função da temperatura. A temperatura $T = 0$ indica uma transição de fase no universo...	38

1 INTRODUÇÃO

Na Relatividade Geral, o espaço-tempo, em geral, não é plano, e apresenta curvatura devido à presença de matéria e energia no universo. A gravidade é atribuída à curvatura do espaço-tempo e os corpos massivos em movimento "livre" seguem as trajetórias "mais retas possíveis" dentro da geometria determinada pela distribuição de matéria e energia. A Relatividade Geral representa uma das teorias mais elegantes e bem sucedidas da ciência. Os testes experimentais realizados para testar sua validade, até então, tem apresentado resultados coerentes com as previsões da teoria com precisão impressionante [1]. No entanto, a história não termina aí. A estrutura teórica da Relatividade Geral difere de forma fundamental da estrutura teórica da Física Quântica, teoria que é igualmente bem sucedida na impressionante concordância entre suas previsões e resultados experimentais, mas responsável pela explicação dos fenômenos em pequenas escalas, onde a ação da gravidade é desprezível.

A Relatividade Geral teve seu ponto de partida com o Princípio da Equivalência enunciado por Einstein em 1907. Este princípio estabelece que, em regiões suficientemente pequenas do espaço ¹, é impossível distinguir a ação de um campo gravitacional de uma aceleração correspondente do sistema de referência [2]. Ou seja, um observador fechado dentro de um foguete no espaço que se move com aceleração g não é capaz de realizar qualquer experimento que diga se ele está sob a ação de uma aceleração ou de um campo gravitacional uniforme, como na superfície da terra. O princípio da equivalência implica que é sempre possível encontrar um referencial no qual os efeitos gravitacionais "desaparecem", o que tornaria, segundo alguns autores, a energia gravitacional não localizável [3]. Ou seja, não seria possível definir localmente a energia do campo que pode ser removido por uma escolha apropriada de coordenadas. A não localidade da energia gravitacional no contexto da Relatividade é refletida pela impossibilidade de se encontrar uma expressão independente do sistema de coordenadas para o tensor de energia-momento gravitacional [4]. A tentativa de superar esta dificuldade nos leva ao estudo do Teleparalelismo Equivalente à Relatividade Geral, assunto deste trabalho.

O Teleparalelismo Equivalente à Relatividade Geral (TEGR) é uma formulação geométrica alternativa da Relatividade Geral baseada no campo de tetradas. Historicamente, a teoria foi uma tentativa de Einstein de unificar a gravitação e o eletromagnetismo utilizando os graus de liberdade extra fornecidos pela tetrada [5]. No entanto, sua tentativa de unificação falhou e Einstein abandonou a ideia. Posteriormente, o

¹suficientemente pequenas para que os efeitos de maré sejam desprezíveis

Teleparalelismo foi revivido como uma teoria de gravitação apenas, atribuindo à torção da conexão de Weitzenböck o papel de campo gravitacional [5]. A formulação Hamiltoniana para o TEGR foi investigada por Maluf [6] e uma expressão covariante para a energia gravitacional foi proposta pela primeira vez no contexto do TEGR [7]. A possibilidade de formular tal expressão está relacionada ao fato de que a torção não pode ser anulada em um ponto do espaço-tempo por uma mudança de coordenadas. Na formulação métrica da Relatividade Geral, não existe uma densidade escalar formada a partir das segundas derivadas da métrica que possa ser interpretada como uma densidade de energia-momento gravitacional [5].

A existência de um tensor de energia-momento gravitacional no contexto do TEGR permite-nos obter expressões bem definidas para a energia e pressão do campo gravitacional, fato que motiva uma formulação natural para a termodinâmica gravitacional. Uma expressão para a primeira lei da termodinâmica gravitacional no TEGR já foi investigada para a solução de Kerr [8] e de Sitter [9]. Neste trabalho, iremos propor uma expressão para a primeira lei da termodinâmica gravitacional para a solução tipo-Gödel, uma generalização da solução das equações de Einstein obtida pelo matemático austríaco Kurt Gödel em 1949 [10], a qual representa um modelo cosmológico anisotrópico, devido à rotação global do universo ².

A primeira lei da termodinâmica relaciona energia, pressão e entropia do sistema em consideração por meio da relação fundamental

$$TdS = dE + pdV. \tag{1.1}$$

Portanto, a formulação da primeira lei para o campo gravitacional permite-nos obter uma expressão para a entropia do campo gravitacional, o que é uma questão central para a cosmologia. Em situações em que a gravitação domina a dinâmica, espera-se que o aumento da entropia no tempo seja consistente com a formação espontânea de estruturas no universo [12]; isto é essencial à formação de estruturas complexas, tais como a vida. Para obter uma entropia gravitacional, nossa abordagem será calcular a energia e a pressão dos campos gravitacional e de matéria no universo tipo-Gödel utilizando as expressões do TEGR e, em seguida, utilizar a expressão (1.1) para formular a primeira lei da termodinâmica gravitacional e, conseqüentemente, obter uma expressão para a entropia gravitacional.

A dissertação está estruturada da seguinte forma: primeiramente apresentaremos uma introdução ao TEGR, seguida, no capítulo 2, das expressões de energia e momento gravitacionais que utilizaremos, no capítulo 3, para propor uma expressão para a entropia gravitacional através da Primeira Lei da Termodinâmica para universos

²Para uma discussão detalhada de modelos cosmológicos com rotação, ver [11]

tipo-Gödel.

No que se segue, utilizaremos **unidades naturais**, isto é, unidades em que a velocidade da luz, c , e a constante da gravitação de Newton, G , são iguais a 1, a menos que seja explicitamente dito o contrário.

1.1 FÍSICA E GEOMETRIA

As leis da Física devem ser formuladas de uma forma que independa do sistema de coordenadas e do sistema de referência em que essas leis são normalmente expressas. As entidades físicas são, portanto, naturalmente associadas a objetos geométricos e as leis físicas à relações geométricas entre esses objetos. A Geometria torna-se então uma linguagem natural para a Física. Apresentaremos a seguir, de forma breve, os conceitos chave de geometria que são utilizados para a formulação teórica de uma teoria de gravitação (para mais detalhes, ver por exemplo [13], [1], [14] e [3]).

1.2 VARIEDADES E O ESPAÇO-TEMPO

Uma variedade n -dimensional M é um espaço topológico coberto por conjuntos abertos $\{U_i\}$ e uma coleção de **cartas** $\{\psi_i\}$ tais que, para todo i e qualquer U , $\psi_i : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ (fig. 1.1). Dizemos que localmente a variedade é Euclidiana.³

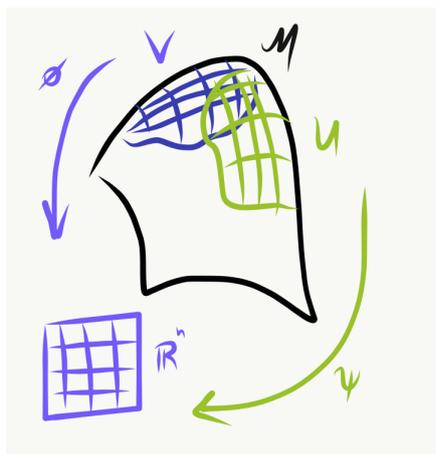


Figura 1.1 – As cartas ϕ e ψ mapeiam os abertos V e U ao \mathbb{R}^n .

A arena para o desenvolvimento dos fenômenos físicos na Relatividade Geral e no TEGR é o espaço-tempo quadridimensional, apropriadamente descrito por uma varie-

³Mais rigorosamente, uma variedade é um espaço topológico Hausdorff e as cartas são homeomorfismos dos abertos de M para um aberto de \mathbb{R}^n .

dade diferenciável em quatro dimensões. Os pontos do espaço-tempo são denominados **eventos** e as cartas representam os sistemas de coordenadas que podemos utilizar para mapear estes eventos. O conceito de variedade generaliza a noção de espaço da geometria euclidiana, e permite que estudemos espaços curvos sem a necessidade de um espaço ambiente no qual eles precisem estar imersos.

Além das cartas, utilizadas para mapear os eventos no espaço-tempo, precisamos definir vetores e operações com vetores, ampliando o cálculo vetorial do $\mathbb{R}^{3,1}$ para a variedade diferenciável M . No entanto, a variedade em geral é curva, e vetores são lineares, habitam espaços planos. Portanto, consideraremos uma estrutura adicional à variedade, a qual consiste no **espaço gerado** por todos os vetores tangentes a qualquer ponto P de uma variedade M , denominada **espaço tangente** a P em M , denotada por T_pM (fig. 1.2).

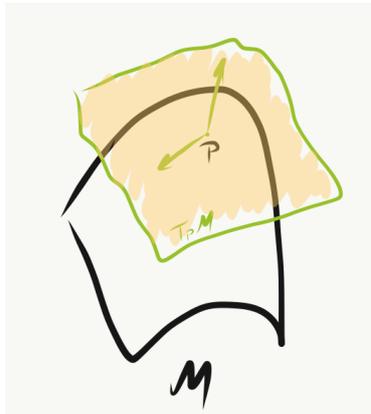


Figura 1.2 – Espaço Tangente T_pM a um ponto P da variedade M .

O espaço tangente é um espaço vetorial, portanto podemos definir nele as bases que servirão como nossos sistemas de referência locais.

1.3 O CAMPO DE TÉTRADAS

Certas grandezas de interesse para a Física (velocidade, aceleração, ...) são descritas por vetores no espaço tangente $T_p\mathbb{R}^{3,1}$ a cada ponto do espaço-tempo $\mathbb{R}^{3,1}$. Estes vetores podem ser expressos em termos da **base coordenada local** definida a seguir.

DEFINIÇÃO 1.1 (Base holônoma, ou base coordenada local.) Seja $\{x^0, x^1, x^2, x^3\}$ um sistema de coordenadas em uma carta U , então

$$e_\mu = \partial_\mu := \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad (1.2)$$

é denominada base holônoma ou base coordenada local em U . Os índices gregos denotam as componentes dos tensores referidos a esta base e assumem os valores $(0, 1, 2, 3)$. Os índices latinos (i, j, k, \dots) denotam as componentes espaciais dos tensores referidos a esta base, ou seja, assumem os valores $(1, 2, 3)$.

No estudo da física é essencial que sejamos capazes de calcular a norma de vetores, ângulos, comprimentos, áreas, volumes, etc. Isto é feito em uma variedade pela introdução do **tensor métrico**, ou métrica.

DEFINIÇÃO 1.2 (O Tensor Métrico) O produto escalar entre dois vetores u e v de T_pM , denotado por $g(u, v) = u \cdot v$, é uma aplicação *bilinear* simétrica, ou seja, valem as seguintes propriedades:

- 1) (bilinearidade) $g(au + bz, v + w) = ag(u, v) + ag(u, w) + bg(z, v) + bg(z, w)$.
- 2) (simetria) $g(u, v) = g(v, u)$.

O mapeamento definido por g é um tensor simétrico covariante de ordem 2.

Notamos que, como qualquer vetor pode ser expresso como a combinação linear de vetores da base, $\{e_\mu\}$, basta que especifiquemos o produto escalar entre os vetores $\{e_\mu\}$ e obteremos automaticamente uma forma de calcular o produto escalar para qualquer vetor no nosso espaço.

Utilizando a bilinearidade do tensor métrico, podemos escrever

$$g(u, v) = g(u^\mu e_\mu, v^\nu e_\nu) = u^\mu v^\nu g(e_\mu, e_\nu).$$

Definindo as componentes do tensor métrico na base coordenada como $g(e_\mu, e_\nu) = g_{\mu\nu}$, a expressão anterior fica

$$g(u, v) = g_{\mu\nu} u^\mu v^\nu. \tag{1.3}$$

Como mencionamos anteriormente, uma vez especificada a ação de g sobre os vetores da base, fica automaticamente especificado o produto escalar de quaisquer dois vetores do nosso espaço, de acordo com (1.3).

A base coordenada local não é a única base possível que dispomos, também podemos expressar os vetores no espaço tangente $T_p\mathbb{R}^{3,1}$ utilizando uma base local ortonormal, que também denominaremos de **tétrada**.

DEFINIÇÃO 1.3 (Referencial local ortonormal, ou t etra) Seja $g_{\mu\nu}$ a m etrica do espaço-tempo. Uma base ortonormal local, $\{\mathbf{e}_a\}$,   uma base na qual a m etrica do espaço-tempo se reduz   m etrica de Minkowski. Ou seja, quando expressa em termos de $\{\mathbf{e}_a\}$, a m etrica assume a forma

$$g_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1) := \eta_{ab}. \quad (1.4)$$

As letras latinas do in icio do alfabeto (a,b,c, ...) denotam os índices dos tensores referidos a esta base e assumem os valores ^a ((0), (1), (2), (3)). Os  ndices latinos entre parênteses ((i), (j), (k)) representam as componentes espaciais dos tensores referidos a esta base.

^aQuando os números são utilizados, estes são escritos entre parênteses para diferenciá-los da base coordenada.

Fisicamente, dizemos que, localmente, o espaço-tempo   aproximadamente plano, e, portanto, pode ser descrito pela m etrica de Minkowski.

Seja $\mathbf{u} \in T_p\mathbb{R}^{3,1}$. Em termos da base coordenada local, \mathbf{u} pode ser expresso como

$$\mathbf{u} = u^\mu \partial_\mu. \quad (1.5)$$

Em termos de uma base ortonormal de $T_p\mathbb{R}^{3,1}$, \mathbf{e}_a , o vetor   expresso como

$$\mathbf{u} = u^a \mathbf{e}_a. \quad (1.6)$$

A relação entre a base ortonormal e a base coordenada   dada por

$$\mathbf{e}_a = e_a^\mu \partial_\mu, \quad (1.7)$$

onde e_a^μ são as componentes da t etra expressas na base coordenada local. Sabemos que o vetor \mathbf{u}   invariante por transformações de coordenadas e de referenciais, logo, as expressões (1.5) e (1.6) devem ser iguais, o que nos fornece a relação entre as componentes do vetor na base coordenada e na base ortonormal

$$\mathbf{u} = u^a \mathbf{e}_a = e_a^\mu \partial_\mu = u^\mu \partial_\mu.$$

Portanto

$$u^\mu = u^a e_a{}^\mu. \quad (1.8)$$

De forma geral, quando queremos converter um tensor referido à base ortonormal para a base coordenada local utilizamos as componentes $e_a{}^\mu$, como em (1.8), para cada índice.

Também podemos escrever o vetor \mathbf{u} em termos da base de covetores do espaço cotangente $T_p^*\mathbb{R}^{3,1}$.

$$\mathbf{u} = u_\mu dx^\mu, \quad (1.9)$$

$$\mathbf{u} = u_a \mathbf{e}^a. \quad (1.10)$$

A tétrada dual é expressa na base coordenada como

$$\mathbf{e}^a = e^a{}_\mu dx^\mu. \quad (1.11)$$

A inversa da expressão (1.8), expressando as componentes do vetor na base ortonormal em função das componentes na base coordenada, pode ser obtida de forma análoga utilizando as equações (1.9).

Notamos a relação de ortonormalidade entre vetores e covetores,

$$\mathbf{e}^a \cdot \mathbf{e}_b = \delta_b^a.$$

Em termos de suas componentes, temos

$$e^a{}_\mu e_b{}^\nu = \delta_b^a. \quad (1.12)$$

Os vetores da base, $\mathbf{e}_a = e_a{}^\mu \partial_\mu$, devem, por definição, satisfazer

$$\mathbf{e}_a \cdot \mathbf{e}_b = e_a{}^\mu e_b{}^\nu \partial_\mu \cdot \partial_\nu = e_a{}^\mu e_b{}^\nu g_{\mu\nu} = \eta_{ab}. \quad (1.13)$$

Na qual usamos a relação $g_{\mu\nu} = \partial_\mu \cdot \partial_\nu$. Reescrevendo (1.13), temos a expressão de ortogonalidade das tétradas

$$\eta_{ab} = e_a{}^\mu e_b{}^\nu g_{\mu\nu}. \quad (1.14)$$

Em geral, as t etras satisfazem uma rela o de comuta o, que d  origem aos coeficientes de estrutura, definidos a seguir.

DEFINI O 1.4 (Coeficientes de Estrutura)

$$[\mathbf{e}_a, \mathbf{e}_b] = c^c{}_{ab} \mathbf{e}_c. \quad (1.15)$$

$c^c{}_{ab}$ são denominados coeficientes de estrutura, ou coeficientes de anolonomia.

O caso particular em que os coeficientes $c^c{}_{ab}$ se anulam representa uma base holônoma, ou coordenada. Veremos nas próximas se es a rela o entre os coeficientes de estrutura e os efeitos de referencial e gravita o.

1.4 CONEXÃO DE LORENTZ E EFEITOS DE REFERENCIAL

A métrica de um espaço-tempo qualquer possui $4 \times 4 = 16$ elementos. Porém, devido a sua simetria, possui apenas 10 graus de liberdade. Por outro lado, uma tétrada possui 16 graus de liberdade e, portanto, a rela o entre tétrada e métrica do espaço-tempo não   única; existem infinitas tétradas que geram a mesma métrica, por meio da rela o (1.13). Consideremos a transforma o entre duas tétradas, utilizando agora a base dual.

$$\mathbf{e}^a = \Lambda^a{}_b \mathbf{e}'^b. \quad (1.16)$$

Sabemos que, no novo referencial, devemos ter

$$\mathbf{e}'^a \cdot \mathbf{e}'^b = \eta'^{ab}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^a \cdot \mathbf{e}^b &= \eta^{ab} \\ (\Lambda^a{}_c \mathbf{e}'^c) \cdot (\Lambda^b{}_d \mathbf{e}'^d) &= \eta^{ab}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\Lambda^a{}_c \eta'^{cd} \Lambda^b{}_d = \eta^{ab}. \quad (1.17)$$

A transformação Λ entre tetradas preserva a métrica de Minkowski, sendo reconhecida, portanto, como a transformação de Lorentz entre referenciais.

Consideremos, agora, como uma conexão de Lorentz surge em uma mudança de referencial. Seja x'^b um referencial inercial e x^a o referencial obtido a partir desse por uma transformação de Lorentz local,

$$x^a = \Lambda^a_b(x)x'^b. \quad (1.18)$$

A tetrada holônoma correspondente ao referencial inercial é obtida por

$$e'^a{}_\mu = \partial_\mu x'^a. \quad (1.19)$$

A métrica do espaço-tempo,

$$\eta'_{\mu\nu} = e'^a{}_\mu e'^b{}_\nu \eta_{ab}, \quad (1.20)$$

ainda representa a métrica de Minkowski, porém em um sistema de coordenadas geral. No caso particular em que o sistema de coordenadas é cartesiano, a tetrada assume a forma

$$e'^a{}_\mu = \delta_\mu^a. \quad (1.21)$$

Por meio da transformação de Lorentz (1.18), a tetrada holônoma (1.19) se transforma de acordo com

$$e^a{}_\mu = \Lambda^a_b(x)e'^b{}_\mu. \quad (1.22)$$

Substituindo nesta a equação (1.19) juntamente com a inversa da expressão (1.18), obtemos

$$e^a{}_\mu = \Lambda^a_c(x)e'^c{}_\mu = \Lambda^a_c(x)\partial_\mu[\Lambda_b{}^c(x)x^b],$$

a qual pode ser reescrita como

$$e^a{}_\mu = \partial_\mu x^a + \omega^a{}_{b\mu} x^b, \quad (1.23)$$

onde

$$\omega^a{}_{b\mu} = \Lambda^a{}_c(x) \partial_\mu \Lambda_b{}^c(x), \quad (1.24)$$

é a conexão de Lorentz, ou conexão de spin, que representa os efeitos de referencial. Devido à sua presença, a tétrada transformada, $e^a{}_\mu$, não é mais holônoma, com coeficiente de anolonomia dado por

$$c^c{}_{ab} = -(\omega^c{}_{ba} - \omega^c{}_{ab}). \quad (1.25)$$

Na qual usamos a relação $\omega^a{}_{bc} = e_c{}^\mu \omega^a{}_{b\mu}$.

1.4.1 Equação de Movimento de uma Partícula

Na classe de referenciais inerciais $e'^b{}_\mu$, uma partícula livre possui a equação de movimento

$$\frac{du'^a}{d\tau} = 0, \quad (1.26)$$

onde u'^a é a quadrivelocidade da partícula e τ o tempo próprio. No referencial anolônomo, $e^a{}_\mu$, obtido de $e'^b{}_\mu$ por meio da transformação de Lorentz (1.18), a equação de movimento assume a forma covariante

$$\frac{du^a}{d\tau} + \omega^a{}_{b\mu} u^b u^\mu = 0, \quad (1.27)$$

onde

$$u^a = \Lambda^a{}_b u'^b \quad (1.28)$$

é a quadrivelocidade transformada, e

$$u^\mu = u^a e_a{}^\mu \quad (1.29)$$

é a quadrivelocidade com índice espaço-temporal, ou seja, referida à base coordenada local.

Notamos como, na equação (1.27), o termo $\omega^a{}_{b\mu}$ de fato faz o papel de conexão, tornando a equação de movimento da partícula covariante na mudança do referencial inercial para o não-inercial.

1.4.2 Tensor de aceleração

A quadri-velocidade de uma partícula no espaço-tempo, como vimos, é dada por

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}. \quad (1.30)$$

Para definir a quadri-aceleração correspondente, é necessária a introdução de uma conexão ⁴, e cada conexão define uma aceleração diferente [4]. No entanto, para manter o significado de medida da variação de velocidade no tempo, sendo este o tempo próprio definido pela métrica $g_{\mu\nu}$, é necessário que a mesma métrica seja considerada ao longo da curva. Ou seja, é necessário que a derivada covariante definida pela conexão preserve a métrica, isto é,

$$\nabla_\rho g_{\mu\nu} = 0. \quad (1.31)$$

Definimos, então, a quadri-aceleração ao longo de uma curva γ como

$$a^\mu = u^\rho \nabla_\rho u^\mu \quad (1.32)$$

$$a^\mu = u^\rho \nabla_\rho e_{(0)}^\mu. \quad (1.33)$$

O vetor $e_{(0)}^\mu$ determina a velocidade e a aceleração ao longo da linha-mundo de um observador adaptado a este referencial [15]. Definimos o **tensor de aceleração** Φ_a^b como

$$\Phi_a^b = e^b_\mu u^\alpha \nabla_\alpha e_a^\mu. \quad (1.34)$$

A quadri-aceleração pode então ser reescrita em termos do tensor de aceleração como

$$\Phi_0^b = e^b_\mu u^\alpha \nabla_\alpha e_{(0)}^\mu = e^b_\mu a^\mu.$$

Portanto,

$$a^b = \Phi_0^b. \quad (1.35)$$

O tensor de aceleração (1.34) é identificado com a aceleração translacional e rotacional do referencial [15].

⁴Ver seção 1.6.

Se $a^\mu = 0$, u^μ sofre transporte paralelo ao longo da curva γ , a qual é uma geodésica. Partículas livres seguem geodésicas no espaço-tempo.

1.5 REFERENCIAL EM ROTAÇÃO

Veremos, nesta seção, a aplicação das ideias apresentadas nas seções anteriores por meio de um exemplo: um referencial em rotação. Mostraremos que, apesar de ser um referencial não inercial, o referencial em rotação pode ser obtido de um referencial inercial por meio de uma transformação de Lorentz.

Seja S' um referencial inercial em coordenadas cilíndricas (t', r', θ', z') . Neste referencial, a métrica de Minkowski assume a forma

$$ds^2 = -dt'^2 + dr'^2 + r'^2 d\theta'^2 + dz'^2. \quad (1.36)$$

Um referencial S , com coordenadas (t, r, θ, z) , rotaciona em torno do eixo z com velocidade angular constante ω . As equações transformação entre os referenciais S' e S são dadas por

$$t = t', \quad r = r', \quad \theta = \theta' - \omega t', \quad z = z'. \quad (1.37)$$

O elemento de linha expresso nas novas coordenadas é dado por

$$ds^2 = -\gamma^{-2} dt^2 + dr^2 + 2r^2 \omega dt d\theta + r^2 d\theta^2 + dz^2, \quad (1.38)$$

onde

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - r^2 \omega^2}}$$

Uma possível escolha referencial ortonormal para S é dada por

$$\begin{aligned} e^{(0)} &= \gamma^{-1} dt - \omega \gamma r^2 d\theta, \\ e^{(1)} &= dr, \\ e^{(2)} &= \gamma r d\theta, \\ e^{(3)} &= dz. \end{aligned} \quad (1.39)$$

Observamos que esta escolha de referencial de fato transforma a métrica na métrica de Minkowski. Ou seja,

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu = \eta_{ab} e^a \otimes e^b. \quad (1.40)$$

Podemos realizar uma mudança de coordenadas na tétrada (1.39), voltando às coordenadas (t', r', θ', z') ,

$$\begin{aligned} e^{(0)} &= \gamma dt' - \omega \gamma r'^2 d\theta', \\ e^{(1)} &= dr', \\ e^{(2)} &= -\omega \gamma r' dt' + \gamma r' d\theta', \\ e^{(3)} &= dz'. \end{aligned} \quad (1.41)$$

A tétrada (1.41) é ainda adaptada ao referencial não-inercial S , no entanto agora expressa no sistema de coordenadas (t', r', θ', z') . O formalismo de tétradas faz distinção, portanto, entre uma mudança de coordenadas e uma mudança de referencial. Para deixar isto ainda mais claro, obteremos a relação entre as tétradas adaptadas ao referencial S' e ao referencial S .

A tétrada para o referencial inercial S' é obtida por meio da relação (1.19), utilizando as equações de transformação entre coordenadas cartesianas e cilíndricas,

$$e'^a{}_\mu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.42)$$

Na qual utilizamos a representação matricial para as componentes da tétrada. A tétrada para o referencial não-inercial S em coordenadas (t', r', θ', z') expressa na forma matricial é

$$e_a{}^\mu = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & -\omega \gamma r'^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\omega \gamma r' & 0 & \gamma r' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.43)$$

De acordo com a equação (1.22), para que a transformação entre S e S' seja a transformação de Lorentz, devemos ter

$$e^a{}_\mu = \Lambda^a{}_b(x)e'^b{}_\mu.$$

Logo,

$$e^a{}_\mu e'^\mu{}_b = \Lambda^a{}_b(x).$$

Ou seja, devemos multiplicar a t etraza (1.43) pela inversa da t etraza (1.42), que   facilmente identificada com

$$e'^\mu{}_b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r'^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.44)$$

Realizando a multiplicação matricial, obtemos

$$\Lambda_a{}^c(x) = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & -\omega\gamma r' & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\omega\gamma r' & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.45)$$

A qual já pode ser identificada como a transformação de Lorentz para a rotação com velocidade angular constante em torno de z . Portanto, ao passar da t etraza adaptada ao referencial S' para a t etraza adaptada ao referencial S ,   realizada uma transformação de Lorentz.   fácil verificar que (1.45) de fato satisfaz a relação (1.17).

1.6 CONEXÕES E GRAVITAÇÃO

Em uma variedade, cada ponto possui um espaço tangente associado a si, e cada espaço tangente   um espaço vetorial distinto. Portanto, para diferenciar vetores (ou tensores, em geral) de uma forma independente do sistema de coordenadas, torna-se necessária a introdução de uma estrutura adicional que permita comparar vetores em espaços tangentes de pontos distintos da variedade. Este papel   feito pela conexão.

Em Relatividade Geral, a conexão utilizada   a conexão de Levi-Civita, que possui torção nula e curvatura em geral não nula [1]. A curvatura da conexão codifica os efeitos

gravitacionais do espaço-tempo, entrando no lado esquerdo da equação de Einstein, expressa em termos do tensor de Ricci, $R_{\mu\nu}$, do escalar de curvatura, R , da métrica do espaço-tempo, $g_{\mu\nu}$, e do tensor de energia-momento dos campos de matéria, $T_{\mu\nu}$,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}. \quad (1.46)$$

A conexão de Levi-Civita, no entanto, não é a única conexão possível em uma variedade. Na realidade, existe uma infinidade de conexões possíveis, sendo algumas de especial interesse físico. Em geral, podemos definir uma conexão generalizada no que se segue.

DEFINIÇÃO 1.5 Sejam T, S campos tensoriais, X, Y campos vetoriais e f, g funções escalares. Uma Conexão (linear) $\nabla : TM \times TM \rightarrow TM$ mapeia dois vetores em um novo vetor, e possui as seguintes propriedades:

1. (linearidade) $\nabla_X(S + T) = \nabla_X S + \nabla_X T$.
2. (regra de Leibniz) $\nabla_X(fT) = f\nabla_X T + (Xf)T$.
3. (linearidade no subscrito) $\nabla_{fX+gY}T = f\nabla_X T + g\nabla_Y T$.

Uma vez tendo definido a conexão generalizada, podemos encontrar a expressão de sua ação em um campo vetorial \mathbf{V} na direção de um vetor \mathbf{u} dados por $\mathbf{V} = v^\nu e_\nu$ e $\mathbf{u} = u^\mu e_\mu$ utilizando as propriedades enumeradas acima.

$$\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{V} = \nabla_{u^\mu e_\mu}(v^\nu e_\nu).$$

A linearidade e a regra de Leibniz nos permitem escrever

$$\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{V} = u^\mu [e_\mu(v^\nu)e_\nu + v^\nu \nabla_{e_\mu} e_\nu]. \quad (1.47)$$

Notamos que $\{e_\mu\}$ são os vetores da base coordenada local, portanto, podemos substituí-los pelos operadores $\{\partial_\mu\}$. Além disso, definimos a ação da conexão sobre os vetores de base como a seguir.

DEFINIÇÃO 1.6 (Coeficientes de Conexão) Seja $\{e_\mu\}$ uma base arbitrária. Então,

$$\nabla_\mu e_\nu \equiv \nabla_{e_\mu} e_\nu = \Gamma_{\mu\nu}^\lambda e_\lambda, \quad (1.48)$$

onde $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ são os **Coefficientes de Conexão** na base arbitrária.

Enfim, aplicando esta última definição para a base coordenada local, podemos reescrever a expressão (1.47) como

$$\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{V} = u^\mu [\partial_\mu (v^\nu) e_\nu + v^\nu \Gamma_{\mu\nu}^\lambda e_\lambda] \quad (1.49)$$

$$\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{V} = u^\mu (\partial_\mu v^\nu + \Gamma_{\mu\lambda}^\nu v^\lambda) e_\nu. \quad (1.50)$$

Na última linha realizamos uma troca de índice mudo.

A eq. (1.50) é a expressão da conexão, ou derivada covariante, na base coordenada local. É comum designar os termos dentro do parêntese na eq. (1.50) por

$$\nabla_\mu v^\nu = \partial_\mu v^\nu + \Gamma_{\mu\lambda}^\nu v^\lambda, \quad (1.51)$$

a qual é a componente ν do vetor $\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{V} = u^\mu \nabla_\mu v^\nu e_\nu$ e não deve ser confundida com a derivada covariante das componentes v^μ .

1.6.1 Interpretação Geométrica

Consideremos a figura 1.3 que ilustra um campo vetorial \mathbf{A} avaliado ao longo de uma curva $\gamma(\lambda)$ com vetor tangente $\mathbf{u} = (dx^\mu/d\lambda)e_\mu$. A *derivada direcional covariante* de $\mathbf{A} = A^\mu e_\mu$ ao longo da curva é definida por $u^\nu \nabla_\nu A^\mu$. Dizemos que os vetores do campo são transportados paralelamente se

$$u^\nu \nabla_\nu A^\mu = u^\nu \partial_\nu A^\mu + u^\nu \Gamma_{\nu\alpha}^\mu A^\alpha = 0. \quad (1.52)$$

De acordo com a regra da cadeia, podemos escrever

$$u^\nu \partial_\nu A^\mu = \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = \frac{dA^\mu}{d\lambda}. \quad (1.53)$$

Usando isto, podemos reescrever a equação (1.52) como

$$\frac{dA^\mu}{d\lambda} + \Gamma_{\nu\alpha}^\mu A^\alpha \frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0. \quad (1.54)$$

Como os vetores em λ e $\lambda + \delta\lambda$ pertencem a planos tangentes distintos, o vetor em

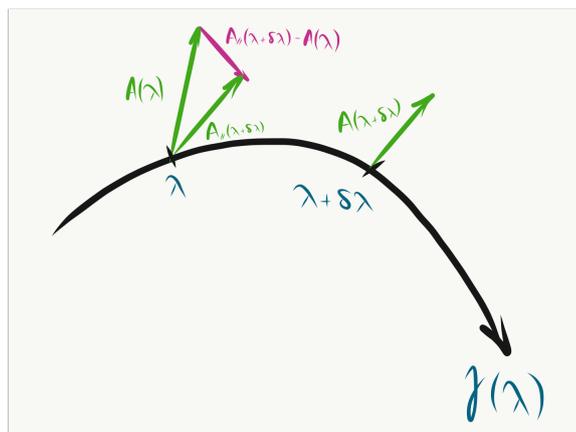


Figura 1.3 – Transporte paralelo ao longo de uma curva.

$\lambda + \delta\lambda$ deve ser transportado paralelamente a λ para que eles possam ser subtraídos (fig. 1.3).

1.6.2 Torção e Curvatura

Como Γ não é um tensor, ele não possui um significado intrínseco como uma medida de curvatura da variedade. Por exemplo, no espaço \mathbb{R}^3 em coordenadas cartesianas, Γ é nulo, mas no mesmo espaço em coordenadas esféricas, possui componentes não nulos. Portanto, para caracterizar a geometria da variedade de uma forma intrínseca, independente do sistema de coordenadas, definimos os tensores de **curvatura** e **torção**.

DEFINIÇÃO 1.7 Sejam X, Y e Z campos vetoriais em M , Defina-se o Tensor de Curvatura de Riemann $R(X, Y)Z$ por

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z, \quad (1.55)$$

e o Tensor de Torção $T(X, Y)$,

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]. \quad (1.56)$$

Utilizando a definição do tensor de torção e substituindo $X = X^\mu e_\mu$ e $Y = Y^\nu e_\nu$, temos

$$T(X, Y) = X^\mu \nabla_\mu (Y^\nu e_\nu) - Y^\nu \nabla_\nu (X^\mu e_\mu) - X^\mu Y^\nu [e_\mu, e_\nu].$$

Utilizando as propriedades da conexão e realizando um pouco de álgebra, obtemos

$$T(X, Y) = [X, Y] + X^\mu Y^\nu T(e_\mu, e_\nu), \quad (1.57)$$

onde $T(e_\mu, e_\nu)$ é a torção dos vetores da base. A expressão (1.57) é a expressão da torção de X e Y em uma base arbitrária. Se fizermos $X = e_\mu$ e $Y = e_\nu$, a (1.56) fica

$$T(e_\mu, e_\nu) = \nabla_\mu e_\nu - \nabla_\nu e_\mu - [e_\mu, e_\nu].$$

Portanto,

$$T(e_\mu, e_\nu) = (\Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \Gamma_{\nu\mu}^\lambda - c^\lambda_{\mu\nu}) e_\lambda. \quad (1.58)$$

Na última linha utilizamos a expressão (1.15). Portanto, os coeficientes do tensor de torção expressos na base geral são

$$T^\lambda_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \Gamma_{\nu\mu}^\lambda - c^\lambda_{\mu\nu}. \quad (1.59)$$

Duas bases merecem destaque. Na base coordenada local, o comutador dos vetores da base se anula e a (1.59) fica

$$T^\lambda_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \Gamma_{\nu\mu}^\lambda. \quad (1.60)$$

Numa base ortonormal $\{e_a\}$, mostraremos a seguir que os símbolos de Christoffel se anulam, e a expressão (1.59) se torna

$$T^a_{bc} = -c^a_{bc}. \quad (1.61)$$

O significado geométrico da torção é ilustrado na figura 1.4.

O tensor de curvatura de Riemann é amplamente discutido em livros de Relatividade Geral ⁵ e, ao contrário do tensor de torção, não possui um papel tão importante na formulação do TEGR. Portanto, apenas apresentaremos a sua expressão na base coordenada local. Pode-se mostrar, utilizando a expressão (1.55) que as componentes

⁵Ver, por exemplo, [1], [13] e [3]

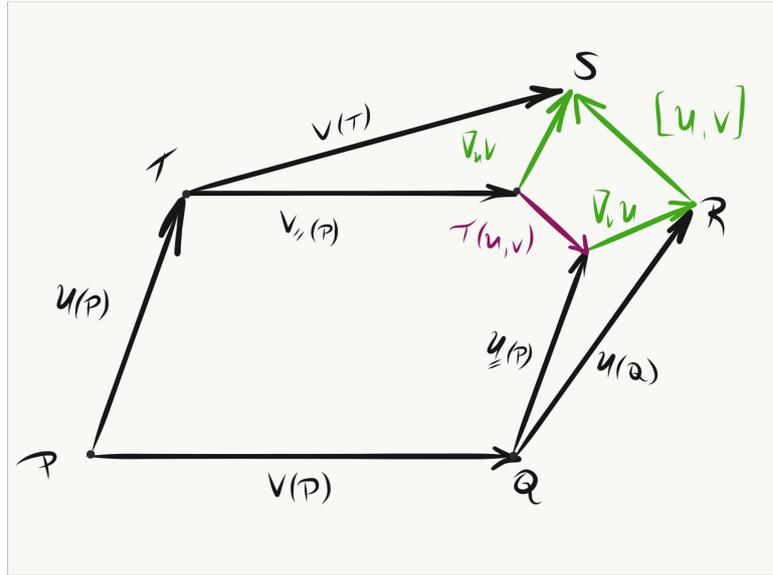


Figura 1.4 – Significado geométrico da Torção. O paralelogramo definido pelos vetores u e v não "fecha".

do tensor de curvatura são dadas por [1]

$$R^{\kappa}_{\lambda\mu\nu} = \partial_{\mu}\Gamma^{\kappa}_{\nu\lambda} - \partial_{\nu}\Gamma^{\kappa}_{\mu\lambda} + \Gamma^{\eta}_{\nu\lambda}\Gamma^{\kappa}_{\mu\eta} - \Gamma^{\eta}_{\mu\lambda}\Gamma^{\kappa}_{\nu\eta}. \quad (1.62)$$

1.6.3 A Conexão de Levi-Civita

Exploraremos um pouco mais a generalidade da conexão definida em 1.5 mostrando uma relação importante entre as conexões utilizadas em Relatividade Geral e no TEGR. Para isto, apresentamos o seguinte teorema.

Teorema 1.1

Uma Conexão satisfazendo as propriedades 1.5 e a compatibilidade métrica também satisfaz

$$\begin{aligned} Xg(Y, Z) + Yg(X, Z) - Zg(X, Y) = & 2g(\nabla_X Y, Z) + g(T(X, Y), Z) \\ & + g(T(Y, Z), X) + g(T(X, Z), Y) \\ & + g([X, Y]Z) + g([Y, Z], X) + g([X, Z], Y). \end{aligned} \quad (1.63)$$

prova.

Pela compatibilidade métrica, podemos escrever

$$\begin{aligned} Xg(Y, Z) &= g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z), \\ Yg(X, Z) &= g(\nabla_Y X, Z) + g(X, \nabla_Y Z), \\ -Zg(X, Y) &= -g(\nabla_Z X, Y) - g(X, \nabla_Z Y). \end{aligned}$$

Somando as três equações e usando a multilinearidade da métrica, temos

$$\begin{aligned} Xg(Y, Z) + Yg(X, Z) - Zg(X, Y) &= g(\nabla_X Y + \nabla_Y X, Z) \\ &+ g(\nabla_Y Z - \nabla_Z Y, X) + g(\nabla_X Z - \nabla_Z X, Y). \end{aligned}$$

Pela definição do tensor de torção (1.56), podemos substituir

$$\nabla_Y X = \nabla_X Y - [X, Y] - T(X, Y). \quad (1.64)$$

Fazemos o análogo para o restante dos termos do lado direito e obtemos o teorema 1.1. ■

Fazendo a substituição $\{(X, Y, Z) = (e_\mu, e_\nu, e_\lambda)\}$ na expressão (1.63), onde $\{e_\mu\}$ é uma base arbitrária, nos fornece imediatamente

$$\Gamma_{\lambda\mu\nu} = K_{\lambda\mu\nu} + \tilde{\omega}_{\lambda\mu\nu} + \tilde{\Gamma}_{\lambda\mu\nu}, \quad (1.65)$$

onde

$$K_{\lambda\mu\nu} = \frac{1}{2}(T_{\nu\lambda\mu} + T_{\mu\lambda\nu} - T_{\lambda\mu\nu}) \quad (1.66)$$

é o **tensor de contorção**,

$$\tilde{\omega}_{\lambda\mu\nu} = \frac{1}{2}(c_{\nu\lambda\mu} + c_{\mu\lambda\nu} - c_{\lambda\mu\nu}) \quad (1.67)$$

é a conexão de spin da Relatividade Geral em termos dos coeficientes de estrutura e

$$\tilde{\Gamma}_{\lambda\mu\nu} = \frac{1}{2}(e_\mu g_{\nu\lambda} + e_\nu g_{\mu\lambda} - e_\lambda g_{\mu\nu}) \quad (1.68)$$

são os símbolos de Christoffel.

Se a base escolhida for a base coordenada, a conexão (1.67) se anula e a equação (1.65) se torna

$$\Gamma_{\lambda\mu\nu} = K_{\lambda\mu\nu} + \tilde{\Gamma}_{\lambda\mu\nu}, \quad (1.69)$$

com

$$\tilde{\Gamma}_{\lambda\mu\nu} = \frac{1}{2}(\partial_\mu g_{\nu\lambda} + \partial_\nu g_{\mu\lambda} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}). \quad (1.70)$$

Por outro lado, se a base escolhida for ortonormal, os símbolos de Christoffel (1.68) se anulam e a equação (1.65) se torna

$$\Gamma_{abc} = K_{abc} + \tilde{\omega}_{abc}. \quad (1.71)$$

Além das propriedades apresentadas na definição 1.5, podemos restringir mais a escolha da conexão impondo a condição de **torção nula** na expressão (1.63), o que dá origem à conexão de **Levi-Civita** utilizada em Relatividade Geral.

Teorema 1.2

Há uma única conexão em TM com torção nula que satisfaz as propriedades da definição 1.5, denominada conexão de **Levi-Civita**.

Quando a conexão adotada é a conexão de Levi-Civita, as expressões (1.65), (1.70) e (1.71) ainda serão válidas se fizermos o **tensor de contorção nulo**.

1.6.4 A Conexão de Weitzenböck

A conexão utilizada no Teleparalelismo é a conexão de Weitzenböck, ou conexão de paralelização. A definição dessa conexão pressupõe que a variedade (no nosso caso, o espaço-tempo quadridimensional) seja paralelizável, ou seja, existem campos vetoriais $\{e_{(1)}, \dots, e_{(n)}\}$, onde n é a dimensão da variedade M , tais que, para cada $p \in M$, o conjunto $\{e_{(1)}(p), \dots, e_{(n)}(p)\}$ é base de $T_p M$ [16]. Equivalentemente, dizemos que o **fibrado tangente é trivial**.

DEFINIÇÃO 1.8 A Conexão de **Weitzenböck**, ou Conexão de Paralelização, é

conexão linear ∇ em M que satisfaz

$$\nabla_V(f^a e_a) = V(f^a)e_a(p), \quad (1.72)$$

onde $V \in T_p M$, f^a são funções globais em M e os vetores $\{e_a\}$ são tomados como uma base ortonormal.

Vejamos as implicações dessa definição. Notemos, primeiramente, que a segunda propriedade em 1.5 permite-nos escrever o lado esquerdo da equação (1.72) da seguinte forma

$$\nabla_V(f^a e_a) = V(f^a)e_a + f^a \nabla_V e_a. \quad (1.73)$$

O que implica imediatamente

$$\begin{aligned} f^a \nabla_V e_a &= 0 \\ V^b \nabla_{e_b} e_a &= 0. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\nabla_{e_b} e_a = 0, \quad (1.74)$$

onde usamos $V = V^b e_b$. A equação (1.74) é simplesmente a equação do transporte paralelo. A conexão de Weitzenböck é, portanto, a conexão que realiza o transporte paralelo da tétrada em relação a si mesma; daí o nome paralelismo distante, ou Teleparalelismo.

Para obter os coeficientes desta conexão na base coordenada, façamos as correspondentes mudanças de base, $e_b = e_b^\mu \partial_\mu$ e apliquemos as propriedades da conexão 1.5.

$$\begin{aligned} \nabla_{e_b} e_a &= e_b^\mu \nabla_{\partial_\mu} (e_a^\nu \partial_\nu) = 0 \\ e_b^\mu (\partial_\mu e_a^\nu + \nabla_\mu \partial_\nu) &= 0 \\ e_b^\mu (\partial_\mu e_a^\nu + \Gamma_{\mu\alpha}^\nu) \partial_\nu &= 0. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\Gamma_{\mu\beta}^{\nu} = -e^a{}_{\beta}\partial_{\mu}e_a{}^{\nu}. \quad (1.75)$$

Utilizando a ortonormalidade das tétradas podemos escrever a seguinte identidade,

$$\partial_{\mu}(e^a{}_{\beta} \cdot e_a{}^{\nu}) = e_a{}^{\nu}\partial_{\mu}e^a{}_{\beta} + e^a{}_{\beta}\partial_{\mu}e_a{}^{\nu} = \partial_{\mu}\delta_{\beta}^{\nu} = 0.$$

Portanto,

$$-e^a{}_{\beta}\partial_{\mu}e_a{}^{\nu} = e_a{}^{\nu}\partial_{\mu}e^a{}_{\beta}. \quad (1.76)$$

Por fim, substituindo a última linha em (1.75), obtemos

$$\Gamma_{\mu\beta}^{\nu} = e_a{}^{\nu}\partial_{\mu}e^a{}_{\beta}, \quad (1.77)$$

os quais são os coeficientes da conexão de Weitzenböck na base coordenada.

2 FORMULAÇÃO LAGRANGIANA E O TENSOR DE ENERGIA-MOMENTO GRAVITACIONAL NO TEGR

A Lagrangiana do TEGR é equivalente à Lagrangiana de Einstein-Hilbert e, portanto, dá origem às mesmas equações de movimento da Relatividade Geral. No entanto, no contexto do TEGR, é possível escrever uma expressão covariante para o tensor de energia-momento gravitacional.

2.1 A LAGRANGIANA DO TEGR E AS EQUAÇÕES DE CAMPO

A Lagrangiana do TEGR é construída a partir do tensor de torção e do campo de tétradas. É quadrática na intensidade do campo, aqui representada pela torção.

Para mostrar a equivalência com a Lagrangiana de Einstein-Hilbert, utilizamos a identidade (1.69) para escrever os símbolos de Christoffel em termos do tensor de contorção e da conexão de Weitzenböck e, em seguida, realizamos as contrações a seguir para obter o escalar de Ricci,

$$\sqrt{-g}R = \sqrt{-g}g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}R_{\mu\nu\alpha\beta}. \quad (2.1)$$

Utilizando a expressão (1.62), obtemos

$$\sqrt{-g}R = \sqrt{-g}g^{\mu\alpha}(\partial_\mu\Gamma_{\nu\lambda}^\mu - \partial_\nu\Gamma_{\mu\lambda}^\mu + \Gamma_{\mu\eta}^\mu\Gamma_{\nu\lambda}^\eta - \Gamma_{\nu\eta}^\mu\Gamma_{\mu\lambda}^\eta).$$

Substituindo nesta a relação (1.69),

$$eR(e) = -e \left(\frac{1}{4}T^{abc}T_{abc} + \frac{1}{2}T^{abc}T_{bac} - T^a T_a \right) + 2\partial_\mu(eT^\mu), \quad (2.2)$$

onde $e = \sqrt{-g}$ é a raiz do determinante da métrica.

Seguindo Maluf [5], definimos o tensor

$$\Sigma^{abc} = \frac{1}{4}(T^{abc} + T^{bac} - T^{cab}) + \frac{1}{2}(\eta^{ac}T^b - \eta^{ab}T^c), \quad (2.3)$$

com o qual podemos obter uma expressão quadrática em termos do tensor de torção,

$$\Sigma^{abc}T_{abc} = \frac{1}{4}T^{abc}T_{abc} + \frac{1}{2}T^{abc}T_{bac} - T^aT_a. \quad (2.4)$$

Utilizando esta, a expressão (2.2) pode ser escrita como

$$eR(e) = -e\Sigma^{abc}T_{abc} + 2\partial_\mu(\epsilon T^\mu). \quad (2.5)$$

A densidade Lagrangiana do TEGR é definida, então, por

$$\mathcal{L}(e) = -\frac{1}{16\pi}e\Sigma^{abc}T_{abc} - \mathcal{L}_m, \quad (2.6)$$

onde \mathcal{L}_m representa a densidade Lagrangiana dos campos de matéria.

As equações de campo são obtidas através de variações arbitrárias de (2.6) em relação ao campo de tetradas, $e^{a\mu}$, e são dadas por [5]

$$e_{a\lambda}e_{b\mu}\partial_\nu(e\Sigma^{b\lambda\nu}) - e(\Sigma_a^{b\nu}T_{b\nu\mu} - \frac{1}{4}e_{a\mu}T_{bcd}\Sigma^{bcd}) = 4\pi eT_{a\mu}, \quad (2.7)$$

onde $T_{a\mu} = \frac{\delta\mathcal{L}_m}{\delta e^{a\mu}}$ é o tensor de energia-momento dos campos de matéria. Pode-se mostrar que as equações (2.7) são equivalentes às equações de Einstein (1.46), conforme esperado [5]. Portanto, uma métrica $g_{\mu\nu}$ que satisfaz as equações de Einstein também é uma solução das equações (2.7), através de uma infinidade de tetradas possíveis, que representam referenciais distintos [5].

Podemos reescrever a equação de campo (2.7) da seguinte forma

$$\partial_\nu(e\Sigma^{a\lambda\nu}) = 4\pi e e^a{}_\mu (t^{\lambda\mu} + T^{\lambda\mu}), \quad (2.8)$$

onde $T^{\lambda\mu} = e_a{}^\lambda T^{a\mu}$ e $t^{\lambda\mu}$ é definido por [5]

$$t^{\lambda\mu} = \frac{1}{16\pi}(4\Sigma^{bc\lambda}T_{bc}{}^\mu - g^{\lambda\mu}\Sigma^{bcd}T_{bcd}). \quad (2.9)$$

2.2 O TENSOR DE ENERGIA-MOMENTO GRAVITACIONAL

O tensor $\Sigma^{a\mu\nu}$ é antissimétrico nos dois últimos índices, $\Sigma^{a\mu\nu} = -\Sigma^{a\nu\mu}$, segue que

$$\begin{aligned} e\Sigma^{a\mu\nu} &= -e\Sigma^{a\nu\mu} \\ e\Sigma^{a\mu\nu} + e\Sigma^{a\nu\mu} &= 0 \\ \partial_\mu\partial_\nu(e\Sigma^{a\mu\nu}) + \partial_\mu\partial_\nu(e\Sigma^{a\nu\mu}) &= 0. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\partial_\mu\partial_\nu(e\Sigma^{a\mu\nu}) = 0. \quad (2.10)$$

Na última linha utilizamos a comutatividade das derivadas parciais e realizamos uma troca de índice mudo para obter o resultado, que reescrevemos, utilizando a eq. (2.8), como

$$\partial_\lambda[ee^a{}_\mu(t^{\lambda\mu} + T^{\lambda\mu})] = 0. \quad (2.11)$$

Esta última nos permite escrever a equação de continuidade

$$\frac{d}{dt} \int_V d^3x ee^a{}_\mu(t^{0\mu} + T^{0\mu}) = - \oint_S dS_j [ee^a{}_\mu(t^{j\mu} + T^{j\mu})]. \quad (2.12)$$

A integração é realizada num volume tridimensional V , delimitado por uma superfície S .

Os tensores $t^{\lambda\mu}$ e $T^{\lambda\mu}$ são tratados de forma análoga na equação (2.12), com $T^{\lambda\mu}$ representando o tensor de energia-momento dos campos de matéria e $t^{\lambda\mu}$ relacionando parâmetros gravitacionais apenas. Portanto, somos levados a interpretar este último tensor como o **tensor de energia-momento gravitacional**. Além disso, interpretamos o integrando do lado esquerdo de (2.12) como a **energia-momento total** contida dentro do volume V [5],

$$P^a = \int_V d^3x ee^a{}_\mu(t^{0\mu} + T^{0\mu}). \quad (2.13)$$

Esta expressão é dependente da escolha de referencial, pois P^a é um vetor sobre transformações de Lorentz. O vetor de energia momento também é invariante por transformações de coordenadas, levando às mesmas previsões físicas, independentemente do sistema de coordenadas utilizado [17].

Utilizando a equação de campo (2.8), a expressão (2.13) pode ser reescrita como

$$P^a = \frac{1}{4\pi} \int_V d^3x \partial_j (e \Sigma^{a0j}). \quad (2.14)$$

O Teorema de Stokes nos permite reescrever esta última como

$$P^a = \frac{1}{4\pi} \oint_S dS_j (e \Sigma^{a0j}). \quad (2.15)$$

Definamos o fluxo de energia-momento gravitacional como [17]

$$\Phi_g^a = \oint_S dS_j [e e^a{}_\mu (t^{j\mu})] \quad (2.16)$$

e

$$\Phi_m^a = \oint_S dS_j [e e^a{}_\mu (T^{j\mu})] \quad (2.17)$$

como o fluxo de energia-momento dos campos de matéria [17]. Portanto,

$$\frac{dP^a}{dt} = -(\Phi_g^a + \Phi_m^a) \quad (2.18)$$

$$= -\frac{1}{4\pi} \oint_S dS_j \partial_\nu (e \Sigma^{aj\nu}). \quad (2.19)$$

Na última linha utilizamos novamente as equações de campo (2.8) para reescrever a expressão em termos do tensor sigma.

A equação (2.19) permite-nos escrever

$$\frac{dP^{(0)}}{dt} = -\frac{1}{4\pi} \oint_S dS_j \partial_\nu (e \Sigma^{(0)j\nu}), \quad (2.20)$$

a qual é interpretada como o fluxo de energia total e, se nos restringirmos às componentes espaciais, obtemos

$$\frac{dP^{(i)}}{dt} = -\frac{1}{4\pi} \oint_S dS_j \phi^{(i)j}, \quad (2.21)$$

onde

$$\phi^{(i)j} = \frac{1}{4\pi} \partial_\nu (e \Sigma^{(i)j\nu}). \quad (2.22)$$

A expressão (2.21) representa o fluxo total de momento, ou seja, a força atuando no sistema. Notamos que dS_j é um elemento de área e, logo, $\phi^{(i)j}$ possui dimensão de pressão. Portanto, $-\phi^{(i)j}$ é interpretada como a pressão na direção i , sobre um elemento de área orientado na direção j [17].

3 PRIMEIRA LEI DA TERMODINÂMICA NO UNIVERSO DE GÖDEL

A definição do tensor de energia-momento gravitacional no contexto do TEGR permite-nos obter expressões para a energia e pressão associadas a um dado campo gravitacional.

Neste capítulo, aplicaremos as expressões de energia e pressão gravitacionais obtidas anteriormente para formular a primeira lei da termodinâmica no universo de Gödel.

3.1 O UNIVERSO DE GÖDEL

Em 1949, o matemático austríaco Kurt Gödel encontrou uma solução das equações de Einstein representando um modelo de um universo que apresenta rotação global e a possibilidade de viajar no tempo através curvas fechadas do tipo tempo (CTCs) [10]. No entanto, foi mostrado [18] que com uma escolha adequada dos parâmetros da métrica é possível eliminar as CTCs da solução, tornando-a completamente causal.

Posteriormente, a solução de Gödel foi expandida para incluir a expansão do universo, e o modelo passou a ser conhecido como solução de Gödel-Obhukov ou solução tipo-Gödel e representa um modelo cosmológico anisotrópico [19].

Utilizaremos a métrica de Gödel-Obhukov, com elemento de linha dado por [11]

$$ds^2 = -dt^2 + 2\alpha(t)\sqrt{\sigma}e^{mx} dt dy + \alpha^2(t)(dx^2 + ke^{2mx} dy^2 + dz^2), \quad (3.1)$$

onde m, σ e k são parâmetros constantes e $\alpha(t)$ é o fator de escala dependente do tempo. A métrica possui assinatura $(-+++)$. Uma análise cinemática detalhada do elemento de linha (3.1) revela que não existem CTCs para $k > 0$ [11]. Fazendo $k = -1/2, m = \sigma = 1$ e $\alpha(t) = 1$ obtemos a solução original de Gödel [19]. Neste sistema, o campo de matéria é modelado por um fluido perfeito, com tensor de energia-momento dado por

$$T^{\mu\nu} = (\epsilon + p)u^\mu u^\nu + pg^{\mu\nu}, \quad (3.2)$$

onde ϵ , p e u^μ são a densidade de energia, a pressão e a quadrivelocidade do fluido, respectivamente.

Escolheremos um observador em repouso em relação ao fluido, com vetor quadrivelocidade dado por $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$. As componentes da tétrada adaptada a este observador são dadas por [19]

$$e_a{}^\mu = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\alpha(t)} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{\sigma}}{\sqrt{\sigma+k}} & 0 & \frac{e^{-mx}}{\alpha(t)\sqrt{\sigma+k}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\alpha(t)} \end{vmatrix}, \quad (3.3)$$

com dual

$$e^a{}_\mu = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -\alpha(t)\sqrt{\sigma}e^{mx} & 0 \\ 0 & \alpha(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha(t)e^{mx}\sqrt{k+\sigma} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha(t) \end{vmatrix}. \quad (3.4)$$

É imediato verificar que, de fato, a tétrada escolhida satisfaz a condição de ortogonalidade

$$g_{\mu\nu}e_a{}^\mu e_b{}^\nu = \eta_{ab}. \quad (3.5)$$

Portanto, temos um referencial ortonormal adaptado a um observador em repouso em relação ao fluido. Utilizaremos, agora, a tétrada (3.3) para calcular o tensor de torção. Com auxílio de (1.77), a expressão (1.60) se torna

$$T^\lambda{}_{\mu\nu} = e_a{}^\lambda \partial_\mu e^a{}_\nu - e_a{}^\lambda \partial_\nu e^a{}_\mu. \quad (3.6)$$

Substituindo a tétrada (3.3) na equação anterior, obtemos as componentes não nulas

$$T_{002} = \dot{\alpha}(t)\sqrt{\sigma}e^{mx}, \quad T_{012} = \alpha(t)\sqrt{(\sigma)}me^{mx}, \quad (3.7)$$

$$T_{101} = \alpha(t)\dot{\alpha}(t), \quad T_{202} = ke^{2mx}\alpha(t)\dot{\alpha}(t), \quad (3.8)$$

$$T_{212} = \alpha^2(t)kme^{2mx}, \quad T_{303} = \alpha(t)\dot{\alpha}(t). \quad (3.9)$$

No que se segue, será útil, também, obtermos as componentes relevantes do tensor sigma (2.3), a saber

$$e\Sigma^{(0)01} = -\frac{1}{4} \left[\frac{\alpha(t)e^{mx}m(\sigma + 2k)}{\sqrt{k + \sigma}} \right], \quad (3.10)$$

$$e\Sigma^{(0)02} = -\left(\frac{\sqrt{\sigma}}{\sqrt{\sigma + k}} \right) \alpha(t)\dot{\alpha}(t). \quad (3.11)$$

Nas quais já foram feitas as multiplicações pelo determinante da tétroda, $e = \sqrt{-g} = \alpha^3(t)e^{mx}\sqrt{k + \sigma}$.

Por fim, apresentamos também as componentes de $\phi_{(i)}^j$ (eq. (2.22)) que serão utilizadas posteriormente

$$\phi_{(1)}^1 = \frac{-ke^{mx}(\dot{\alpha}^2 + \alpha\ddot{\alpha})}{4\pi\sqrt{k + \sigma}}, \quad (3.12)$$

$$\phi_{(2)}^2 = \frac{-(\dot{\alpha}^2 + \alpha\ddot{\alpha})}{4\pi}, \quad (3.13)$$

$$\phi_{(3)}^3 = \frac{-e^{mx}[2k(\dot{\alpha}^2 + \alpha\ddot{\alpha}) - m^2(k + \sigma)]}{8\pi\sqrt{k + \sigma}}. \quad (3.14)$$

3.2 ENERGIA DOS CAMPOS GRAVITACIONAL E DE MATÉRIA

Consideremos, primeiramente, a expressão para a energia dos campos gravitacional e de matéria (2.15), com $a = 0$,

$$P^{(0)} = \frac{1}{4\pi} \oint_S dS_j e\Sigma^{(0)0j}.$$

A integral será calculada sobre a superfície de integração mostrada na figura 3.1. Utilizando as expressões (3.10), vemos que a integral se reduz a

$$P^{(0)} = \frac{1}{4\pi} \oint_S dS_1 e\Sigma^{(0)01} + \frac{1}{4\pi} \oint_S dS_2 e\Sigma^{(0)02}.$$

No entanto, observamos que o termo $\Sigma^{(0)02}$ não possui dependência das coordenadas espaciais e, portanto, possui fluxo de mesmo módulo e sinais contrários nas duas faces $y = cte$ do volume de integração. Logo, a integral se reduz às contribuições nas faces localizadas nas coordenadas x e $x + L$,

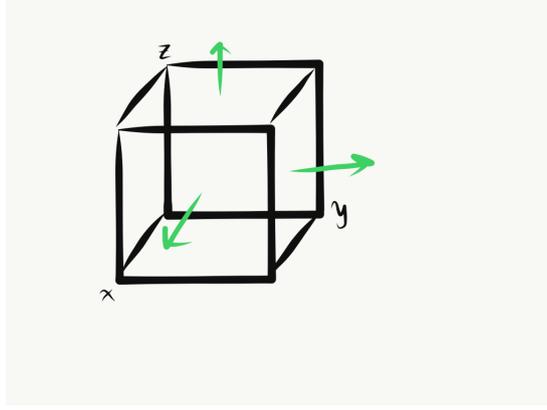


Figura 3.1 – Volume de integração para obtenção da energia dos campos gravitacional e de matéria.

$$P^{(0)} = \frac{1}{4\pi} \int_I dydz(e\Sigma^{(0)01}) + \frac{1}{4\pi} \int_{II} dydz(e\Sigma^{(0)01}).$$

Os subscritos I e II se referem às faces localizadas em x e $x + L$, respectivamente. Substituindo a expressão para o tensor sigma e realizando a integração, obtemos

$$P^{(0)} = \frac{L^2}{16\pi} \frac{\alpha(t)m(\sigma + 2k)}{\sqrt{k + \sigma}} (e^{mx} - e^{m(x+L)}).$$

Por fim, dividimos a expressão acima por L^3 e tomamos o limite $L \rightarrow 0$ para obter a densidade de energia

$$\varepsilon(x, t) = -\frac{\alpha(t)m^2(\sigma + 2k)}{16\pi\sqrt{k + \sigma}} e^{mx}. \quad (3.15)$$

Notamos que a expressão (3.15) já foi obtida anteriormente [19].

3.3 PRESSÃO DOS CAMPOS GRAVITACIONAL E DE MATÉRIA

A princípio não há uma identificação imediata que se possa fazer entre a pressão que entra na primeira lei da termodinâmica e o tensor de energia momento dos campos gravitacional e de matéria. A primeira é um escalar, o segundo, um tensor de segunda ordem. No entanto, motivados pela teoria clássica de elasticidade e fluidos proporemos uma expressão para uma pressão escalar obtida a partir do tensor de tensão dos campos gravitacional e de matéria nesta seção.

3.3.1 Decomposição Canônica Covariante

É bem sabido que um tensor de segunda ordem pode ser decomposto em termos de suas partes tensoriais irredutíveis [14]. Ou seja, podemos escrever

$$W_{\mu\nu} = \frac{1}{3}\theta g_{\mu\nu} + \xi_{\mu\nu} + \zeta_{\mu\nu}, \quad (3.16)$$

onde

$$\theta = Tr(\mathbf{W}) = W^\mu{}_\mu \quad (3.17)$$

é o traço do tensor \mathbf{W} . O tensor ξ é a parte antissimétrica de \mathbf{W} , isto é,

$$\xi_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(W_{\mu\nu} - W_{\nu\mu}). \quad (3.18)$$

O tensor ζ é a parte simétrica sem traço do tensor \mathbf{W} ,

$$\zeta_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(W_{\mu\nu} + W_{\nu\mu}) - \frac{1}{3}g_{\mu\nu}W^\delta{}_\delta. \quad (3.19)$$

Na teoria clássica de elasticidade, o tensor de tensão pode ser decomposto em termos de suas partes irredutíveis, como

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^{cis} + p\mathbf{g}, \quad (3.20)$$

onde \mathbf{T}^{cis} é o tensor de tensão de cisalhamento sem traço e

$$p = \frac{1}{3}Tr(\mathbf{T}) = \frac{1}{3}T^i{}_i \quad (3.21)$$

é interpretada como a **pressão** (isotrópica) [14] no material (fluido).

Vejamos a seguir como podemos aplicar esse procedimento ao caso gravitacional.

3.3.2 Pressão Isotrópica dos campos gravitacional e de matéria

Primeiramente, utilizando a equação de campo do TEGR (2.8), podemos escrever

$$\partial_\nu(e\Sigma^{a\lambda\nu}) = 4\pi e e^a{}_\mu \Theta^{\lambda\mu}, \quad (3.22)$$

na qual $\Theta^{\lambda\mu}$ do lado direito da eq. (3.22) representa o tensor de energia-momento

dos campos gravitacional e de matéria. Restringindo-nos apenas às componentes espaciais deste último, temos

$$\frac{1}{4\pi}\partial_\nu(e\Sigma^{(i)j\nu}) = ee^{(i)}{}_k\Theta^{jk} = \phi^{(i)j}, \quad (3.23)$$

onde utilizamos a definição (2.22) do tensor ϕ , o qual é interpretado como a componente $\{(i), j\}$ do tensor de energia-momento,

$$e\Theta^{(i)j} = \phi^{(i)j}. \quad (3.24)$$

Seria natural, em analogia com (3.21), definir a pressão isotrópica dos campos gravitacional e de matéria como um terço do traço do tensor de energia-momento total (lado esquerdo da 3.24). No entanto, lembramos que anteriormente já fizemos a associação de $\phi^{(i)j}$ como o *negativo* da pressão na direção i sobre um elemento de área orientado na direção j . Portanto, para manter a consistência com esta interpretação, definiremos a pressão isotrópica total como o seguinte escalar.

DEFINIÇÃO 3.1 A Pressão Isotrópica dos campos Gravitacional e de Matéria é definida como

$$p = -\frac{1}{3}\Theta^i{}_i = -\frac{1}{3e}\phi^i{}_i, \quad (3.25)$$

onde $e = \sqrt{-g}$.

Pela linearidade do traço, podemos escrever

$$Tr(\Theta) = Tr(t) + Tr(T)p_{total} = -(p_g + p_m). \quad (3.26)$$

A pressão total é o *negativo* da pressão devida ao campo gravitacional, p_g , somada com a pressão devida ao campo de matéria, p_m , onde t e T são os tensores de energia-momento dos campos gravitacional e de matéria, respectivamente.

Considerando o tensor de energia-momento do fluido perfeito (no referencial deste próprio), temos

$$p_m = \frac{1}{3}T^i{}_i = \frac{1}{3}[(\epsilon_f + p_f)u^i u_i + p_f \delta_i^i]. \quad (3.27)$$

Ou seja,

$$p_m = p_f.$$

ϵ_f e p_f são a densidade de energia e a pressão do fluido, respectivamente. Como era esperado, a pressão isotrópica do fluido perfeito é a pressão p_f .

3.4 A EXPRESSÃO DA PRIMEIRA LEI DA TERMODINÂMICA NO UNIVERSO DE GÖDEL

Tendo em vista o que foi desenvolvido nas seções anteriores, temos enfim condições de formular a expressão da primeira lei da termodinâmica para o universo de Gödel. A primeira lei é dada por

$$TdS = dE + pdV, \quad (3.28)$$

ou,

$$TdS = (\epsilon + p)dV. \quad (3.29)$$

Utilizamos $dE = \epsilon dV$, com ϵ a densidade de energia (3.15). A pressão é obtida por meio das expressões (3.25), (3.4) e (3.12). Avaliando os termos não nulos, temos

$$\begin{aligned} p(x) &= -\frac{1}{3e} e^{(i)}{}_j \phi_{(i)}{}^j = -\frac{1}{3e} (e^{(1)}{}_j \phi_{(1)}{}^j + e^{(2)}{}_j \phi_{(2)}{}^j + e^{(3)}{}_j \phi_{(3)}{}^j) \\ &= -\frac{1}{3e} (e^{(1)}{}_1 \phi_{(1)}{}^1 + e^{(2)}{}_2 \phi_{(2)}{}^2 + e^{(3)}{}_3 \phi_{(3)}{}^3). \end{aligned}$$

Obtemos, após alguns cálculos simples,

$$p(t) = \frac{(\dot{\alpha}^2(t) + \alpha(t)\ddot{\alpha}(t))(3k + \sigma)}{12\pi\alpha^2(t)(k + \sigma)} - \frac{m^2}{24\pi\alpha^2(t)}. \quad (3.30)$$

Substituindo as expressões (3.15) e (3.30) na expressão da primeira lei (3.29) e realizando um pouco de álgebra, obtemos

$$TdS = \left[-\frac{\alpha(t)m^2(\sigma + 2k)}{16\pi\sqrt{k + \sigma}} e^{mx} + \frac{(\dot{\alpha}^2(t) + \alpha(t)\ddot{\alpha}(t))(3k + \sigma)}{12\pi\alpha^2(t)(k + \sigma)} - \frac{m^2}{24\pi\alpha^2(t)} \right] dV. \quad (3.31)$$

A integral desta expressão fornece a entropia em um volume \mathcal{V} ,

$$S = \int_{\mathcal{V}} \frac{1}{T} \left[-\frac{\alpha(t)m^2(\sigma + 2k)}{16\pi\sqrt{k + \sigma}} e^{mx} + \frac{(\dot{\alpha}^2(t) + \alpha(t)\ddot{\alpha}(t))(3k + \sigma)}{12\pi\alpha^2(t)(k + \sigma)} - \frac{m^2}{24\pi\alpha^2(t)} \right] dV. \quad (3.32)$$

Podemos definir a **densidade de entropia** como o integrando na expressão (3.32). Ou seja,

$$s(x, t) = -\frac{\alpha(t)m^2(\sigma + 2k)}{16\pi T\sqrt{k + \sigma}} e^{mx} + \frac{(\dot{\alpha}^2(t) + \alpha(t)\ddot{\alpha}(t))(3k + \sigma)}{12\pi T\alpha^2(t)(k + \sigma)} - \frac{m^2}{24\pi T\alpha^2(t)}. \quad (3.33)$$

Podemos restaurar unidades na expressão (3.33), que se torna

$$s(x, t) = -\frac{c^4\alpha(t)m^2(\sigma + 2k)}{16\pi GT\sqrt{k + \sigma}} e^{mx} + \frac{c^2(\dot{\alpha}^2(t) + \alpha(t)\ddot{\alpha}(t))(3k + \sigma)}{12\pi GT\alpha^2(t)(k + \sigma)} - \frac{m^2 c^4}{24\pi GT\alpha^2(t)}. \quad (3.34)$$

É fácil verificar que esta expressão tem de fato unidade de energia por volume por temperatura, ou entropia por volume. A seguir apresentaremos interpretações para a expressão da entropia obtida por meio de dois casos limite; rotação sem expansão e expansão sem rotação.

3.4.1 Caso limite: rotação sem expansão

Mencionamos na seção 3.1 que escolhendo $k = -1/2, m = \sigma = 1$ na métrica (3.1) recuperamos a solução original obtida por Gödel. No entanto, é possível mostrar que a escolha $m^2 = 4\omega^2$ exclui regiões não causais [18]. Com esta escolha, a métrica (3.1) se torna

$$ds^2 = -dt^2 + 2e^{2\omega x} dt dy + dx^2 - \frac{1}{2}e^{4\omega x} dy^2 + dz^2, \quad (3.35)$$

e a densidade de entropia (3.33) se reduz a

$$s = -\frac{\omega^2}{6\pi T}. \quad (3.36)$$

É conhecido na literatura [20] que em um sistema hidrodinâmico composto por n vórtices é possível que existam temperaturas negativas, fato que está relacionado à

dependência entre as coordenadas generalizadas e os momentos conjugados no espaço de fase do sistema em questão. Neste caso, os vórtices de mesmo sinal se atraem, formando *clusters*, enquanto que, no caso de temperaturas positivas, os vórtices de sinais opostos se atraem [20].

No contexto gravitacional, é esperado que haja formação de conglomerados de estruturas, devido à natureza atrativa da força gravitacional [12], o que não contraria a segunda lei da termodinâmica. O universo de Gödel com rotação é um caso de vórtice gravitacional, o que pode estar relacionado ao aparecimento do sinal negativo na expressão (3.36).

Ainda para este caso, as equações de Einstein (1.46) para o tensor de energia-momento da poeira, $T_{\mu\nu} = \epsilon_f u_\mu u_\nu$, fornecem

$$\begin{aligned} 2\omega^2 - \Lambda &= 8\pi\epsilon_f, \\ 2\omega^2 + \Lambda &= 0. \end{aligned}$$

Desta última obtemos $\omega^2 = -\frac{\Lambda}{2}$. Substituindo na expressão (3.36), obtemos a densidade de entropia em termos da constante cosmológica,

$$s = \frac{\Lambda}{12\pi T}.$$

O gráfico desta expressão é apresentado na fig. 3.2, na qual o eixo horizontal representa a temperatura (T) e o eixo vertical a densidade de entropia dividida pela constante cosmológica (s/Λ). Notamos que uma transição de fase é esperada no universo para $T = 0$, onde a capacidade térmica a volume constante (C_v) diverge.

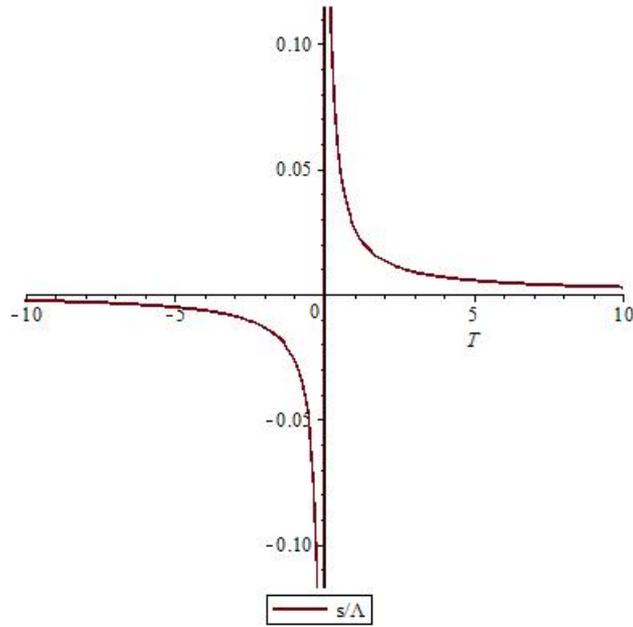


Figura 3.2 – Densidade de entropia por constante cosmológica em função da temperatura. A temperatura $T = 0$ indica uma transição de fase no universo.

3.4.2 Caso limite: expansão sem rotação

Fazendo $m = \sigma = 0$ e $k = 1$ na métrica (3.1), obtemos uma solução FLRW para o universo plano com expansão,

$$ds^2 = -dt^2 + \alpha^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (3.37)$$

Com esta escolha dos parâmetros, a expressão para a densidade de entropia (3.33) se reduz a

$$s = \frac{\dot{\alpha}^2(t) + \alpha(t)\ddot{\alpha}(t)}{4\pi T\alpha^2(t)}. \quad (3.38)$$

As equações de Friedmann para a métrica FLRW plana são dadas por [13]

$$3\left(\frac{\dot{\alpha}}{\alpha}\right)^2 - \Lambda = 8\pi\epsilon_f, \quad (3.39)$$

$$2\left(\frac{\ddot{\alpha}}{\alpha}\right) + \left(\frac{\dot{\alpha}}{\alpha}\right)^2 - \Lambda = -8\pi p_f. \quad (3.40)$$

Onde Λ é a constante cosmológica e ϵ_f e p_f são a densidade de energia e a pressão do fluido perfeito, respectivamente. Combinando as eqs. (3.39) e substituindo em (3.38),

obtemos

$$s = \frac{\dot{\alpha}^2 \alpha}{2\pi T} - \frac{(p_f + \epsilon_f)}{T}, \quad (3.41)$$

a qual pode ser reescrita como

$$(s\alpha^3) = \frac{1}{6\pi T} \frac{d}{dt}(\alpha^3) - \frac{(p_f + \epsilon_f)\alpha^3}{T}. \quad (3.42)$$

O lado esquerdo da eq. (3.42) é a entropia total em um volume α^3 , o segundo termo do lado direito da equação é a contribuição da entropia do fluido no volume e o primeiro termo do lado direito da equação é uma contribuição geométrica à entropia que depende do **volume**. A dependência da entropia com o volume no contexto do TEGR já foi sugerida anteriormente [21], e está de acordo com o nosso resultado. Apesar de ser comumente aceito na literatura de que a entropia gravitacional dependa apenas da área [22], o surgimento natural de expressões como a (3.42) e também a obtida em [21] para a solução de de Sitter sugerem que não há razão *a priori* para descartar que a entropia gravitacional possa depender do volume. Seria inclusive razoável de se supor do ponto de vista físico que os graus de liberdade internos ao volume contribuíssem para a entropia total.

Ainda para o caso em questão, utilizando as equações de Friedmann (3.39) para o universo plano e utilizando a poeira como fluido ($p_f = 0$), obtemos a seguinte expressão para a pressão total,

$$p = \frac{\epsilon_f}{3} + \frac{\Lambda}{6\pi}. \quad (3.43)$$

Esta expressão foi obtida no contexto do TEGR mas de forma alternativa em [23], onde argumenta-se que a pressão do próprio campo gravitacional (3.43) pode ser responsável pela expansão acelerada do universo. Em Relatividade Geral, onde a pressão do campo gravitacional não é considerada, há necessidade de introduzir-se um fator externo à teoria para explicar a expansão acelerada do universo, tal como a energia escura. No TEGR, por outro lado, surge naturalmente da consideração da pressão do campo gravitacional uma explicação sem a necessidade de recorrer à estruturas adicionais. Além disso, ressaltamos que o campo eletromagnético é dotado de pressão e que, portanto, não há razão *a priori* para considerar que o mesmo não se aplique ao campo gravitacional.

4 CONCLUSÃO

O Teleparalelismo Equivalente à Relatividade Geral permite a definição de um tensor de energia-momento gravitacional e, conseqüentemente, de expressões bem definidas para a energia e momento dos campos gravitacional e de matéria. A formulação covariante destas expressões fornece muitas vantagens em relação à abordagem da Relatividade Geral, na qual não existe um tensor para a energia-momento do campo gravitacional.

Na seção 3.2, utilizando a expressão para a energia dos campos gravitacional e de matéria, calculamos a densidade de energia para a solução tipo-Gödel, confirmando um resultado já obtido na literatura [19]. Em seguida, na seção 3.3, propusemos uma expressão para o cálculo da pressão isotrópica utilizada na seção 3.4 para obter a expressão da primeira lei da termodinâmica no Universo tipo-Gödel. Analisamos a expressão obtida para dois casos limite: i) Universo em rotação sem expansão; ii) Universo em expansão sem rotação.

No primeiro caso (i), obtivemos uma expressão negativa e sugerimos que este resultado pode estar ligado à natureza atrativa do campo gravitacional e a uma dependência entre as variáveis no espaço de fase, a qual permite a emergência de *clusters* e temperaturas negativas num sistema de vórtices [20].

No segundo caso (ii), identificamos uma relação (eq.(3.42)) termodinâmica entre a entropia total do sistema, a entropia do fluido (perfeito) e uma grandeza dependente do *volume*, fornecendo suporte para a ideia de que a entropia dependa do volume, conforme já foi sugerido [21].

Em trabalhos futuros, desejaríamos analisar uma possível associação entre temperatura e o tempo, que é tradicionalmente utilizada para a termalização de um campo. No entanto, tal associação é apenas especulativa, tendo em vista que a métrica não foi termalizada em princípio. Adicionalmente, gostaríamos de estender as análises da entropia obtida, possivelmente testando fluidos que permitam simultaneamente a rotação e a expansão do universo.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- 1 CARROLL, S. *Spacetime and Geometry, An Introduction to General Relativity*. University of Chicago: Addison-Wesley, 2004.
- 2 EINSTEIN, A. *The meaning of relativity*. 5th ed., incl. the relativistic theory of the non-symmetric field. ed. Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1988. OCLC: 257193567. ISBN 9780691023526 9780691080079.
- 3 MISNER KIP S. THORNE, J. A. W. C. W. *Gravitation*. [S.l.]: W. H. Freeman and Company, 1970.
- 4 ALDROVANDI, J. G. P. R. *Teleparallel Gravity, An Introduction*. [S.l.]: Springer, 2013. (Fundamental Theories of Physics).
- 5 MALUF, J. W. The teleparallel equivalent to general relativity. *arXiv:1303.3897 [gr-qc]*, mar. 2013.
- 6 MALUF, J. W. Hamiltonian formulation of the teleparallel description of general relativity. *Journal of Mathematical Physics*, American Institute of Physics, v. 35, n. 1, p. 335–343, 1994.
- 7 MALUF, J. W. Localization of energy in general relativity. *Journal of Mathematical Physics*, American Institute of Physics, v. 36, n. 8, p. 4242–4247, 1995.
- 8 MALUF, J.; ULHOA, S.; ROCHA-NETO, J. da. Gravitational pressure on event horizons and thermodynamics in the teleparallel framework. *Physical Review D*, APS, v. 85, n. 4, p. 044050, 2012.
- 9 ULHOA, S.; SPANIOL, E. On gravitational entropy of de sitter universe. *Journal of Gravity*, Hindawi, v. 2016, 2016.
- 10 GÖDEL, K. An example of a new type of cosmological solutions of einstein’s field equations of gravitation. *Reviews of Modern Physics*, v. 21, p. 447, jul. 1949.
- 11 OBUKHOV, Y. N. On physical foundations and observational effects of cosmic rotation. In: *Published in Colloquium on Cosmic Rotation: Proceedings. Edited by M. Scherfner, T. Chrobok and M. Shefaat (Wissenschaft und Technik Verlag: Berlin, 2000) pp. 23-96*. [S.l.: s.n.], 2000. p. 23–96.
- 12 PENROSE, R. *Cycles of Time*. [S.l.]: Vintage Books, 2010.
- 13 GRON, S. H. O. *Einstein’s Theory of Relativity*. [S.l.]: Gron and Hervik, 2004.
- 14 THORNE, R. B. K. *Modern Classical Physics*. Princeton: Princeton University Press, 2017.
- 15 MALUF, J. W.; FARIA, F. F.; ULHOA, S. C. On reference frames in spacetime and gravitational energy in freely falling frames. *Classical and Quantum Gravity*, IOP Publishing, v. 24, n. 10, p. 2743–2753, Apr 2007. ISSN 1361-6382. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1088/0264-9381/24/10/017>>.

- 16 BLOCH, A. M. Nonholonomic mechanics. In: *Nonholonomic mechanics and control*. [S.l.]: Springer, 2003. p. 207–276.
- 17 ULHOA A.F. SANTOS, R. A. S. C. On the energy-momentum flux in gödel-type models. *Modern Physics Letters A*, v. 28, mar. 2013.
- 18 REBOUÇAS, M. J.; TIOMNO, J. Homogeneity of riemannian space-times of gödel type. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 28, p. 1251–1264, Sep 1983. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.28.1251>>.
- 19 SOUSA, A. A.; PEREIRA, R. B.; SILVA, A. C. Energy and angular momentum densities in a gödel-type universe in teleparallel geometry. *Gravitation and Cosmology*, Pleiades Publishing Ltd, v. 16, n. 1, p. 25–33, Jan 2010. ISSN 1995-0721. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1134/S0202289310010044>>.
- 20 ONSAGER, L. Statistical hydrodynamics. *Nuovo Cimento*, v. 6, p. 279–287, mar. 1949.
- 21 ULHOA, S. C.; SPANIOL, E. P. On Gravitational Entropy of de Sitter Universe. *Journal of Gravity*, v. 2016, p. 1–7, 2016. ISSN 2356-7422, 2314-6907. Disponível em: <<https://www.hindawi.com/archive/2016/4504817/>>.
- 22 BARDEEN, J. M.; CARTER, B.; HAWKING, S. W. The four laws of black hole mechanics. *Communications in mathematical physics*, Springer, v. 31, n. 2, p. 161–170, 1973.
- 23 CASTELLO-BRANCO, K.; ROCHA-NETO, J. da. Gravitational pressure and the accelerating universe. *arXiv preprint arXiv:1311.1590*, 2013.