**Universidade de Brasília**

**Instituto de Ciências Exatas**

**Departamento de Matemática**

**Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional**

# ANATOCISMO: UMA PROVA DA SUA INEXISTÊNCIA NO SISTEMA DE AMORTIZAÇÃO FRANCÊS (TABELA PRICE)

**ORIVAM IBIAPINA DA SILVA**

**Brasília – 2020**

Orivam Ibiapina da Silva

# ANATOCISMO: UMA PROVA DA SUA INEXISTÊNCIA NO SISTEMA DE AMORTIZAÇÃO FRANCÊS (TABELA PRICE)

**Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília - UnB, como parte dos requisitos para a obtenção do grau de Mestre.**

**Dissertação de Mestrado**

**Orientador: Prof. Dr. Antonio Luiz de Melo**

**Brasília – 2020**

Ficha catalográfica elaborada automaticamente,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

I69a

Ibiapina da Silva, Orivam

ANATOCISMO: UMA PROVA DA SUA INEXISTÊNCIA NO SISTEMA DE AMORTIZAÇÃO FRANCÊS (TABELA PRICE) / Orivam Ibiapina da Silva; orientador Antonio Luiz de Melo. -- Brasília, 2020.
94 p.

Dissertação (Mestrado - Mestrado Profissional em Matemática) -- Universidade de Brasília, 2020.

1. Anatocismo. 2. Sistema de Amortização Francês. 3. Tabela Price. 4. Juros Compostos. 5. Juros Simples. I. Luiz de Melo, Antonio, orient. II. Título.

Universidade de Brasília

Instituto de Ciências Exatas

Departamento de Matemática

# Anatocismo: uma prova da sua inexistência no sistema de amortização francês (Tabela Price)

por

**Orivam Ibiapina da Silva**

*Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos do "Programa" de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, para obtenção do grau de*

**MESTRE EM MATEMATICA**

Brasília, 27 de agosto de 2020.

Comissão Examinadora:

________________________________________

Prof. Dr. Antônio Luiz de Melo – FUB/UnB (Orientador)

________________________________________

Prof. Dr. José Eduardo Castilho - FUB/UnB

________________________________________

Prof. Dr. Eudes Antônio da Costa – UFT

# DEDICATÓRIA

**Dedico este trabalho a minha família e aos meus amigos do Tribunal de Contas do Distrito Federal, os quais foram fonte constante de incentivos para a conclusão desta dissertação.**

# AGRADECIMENTOS

Meus agradecimentos vão para as instituições que alicerçam este mestrado, no caso o Instituto de Matemática Pura e Aplicada – IMPA e a Universidade de Brasília – UnB, mais especificamente o Departamento de Matemática, seus professores e funcionários.

Não poderia deixar de saudar fraternalmente meus colegas da Turma PROFMAT/2018 da UnB, marcante na solidariedade em todos os momentos desta jornada de capacitação.

# RESUMO

Anatocismo é definido como a cobrança de juros sobre juros, ou ainda capitalização de juros, o que está ligado à aplicação dos juros compostos. O poder Judiciário debate há algum tempo a presença ou ausência de anatocismo no Sistema de Amortização Francês - SAF, conhecido como tabela Price. Nas discussões jurídicas acerca do tema, faltava prova matemática formal que pudesse estabelecer base sólida para as tomadas de decisões. Nesta dissertação, apresentamos uma demonstração formal da não ocorrência de anatocismo no SAF.

**Palavras chaves:** Anatocismo, tabela Price, juros compostos, juros simples, amortização, sistema francês.

# ABSTRACT

Anatocism is defined as the charging of interest on interest, or even capitalization of interest, which is linked to the application of compound interest. The Judicial Branch has been debating for some time the presence or absence of anatocism in the French Amortization System - SAF, known as the Price table. Legal discussions on the topic lacked formal mathematical proof that could establish a solid basis for decision making. In this dissertation, we present a formal demonstration of the non-occurrence of anatocism in the SAF.



**Keywords:** Anatocism, Price table, compound interest, simple interest, amortization, French system.

# LISTA DE FIGURAS

# LISTA DE TABELAS

# LISTA DE GRÁFICOS

## SUMÁRIO

## 1 - INTRODUÇÃO

Anatocismo é a cobrança de juros sobre juros, ou seja, a incidência de juros cumulativamente. Ocorre sempre que uma taxa de juros incide sobre um valor em cuja composição já existam juros gerados em momento anterior.

Segundo dicionário jurídico *on line* DireitoNet, há uma identidade entre o termo e os juros compostos:

> **Anatocismo**
>
> É a incidência de juros sobre juros, juros compostos e capitalização de juros, sobre o juro vencido e não pago, cujo montante se incorporará ao débito principal. É expressamente proibido em nosso ordenamento jurídico, mesmo que expressamente previsto...[1]

Jackson Ciro Sandrini faz um apanhado do significado do conceito que referenda a ideia de associação com juros compostos (SANDRINI, 2007, p. 32-33):

> O conceito lexicográfico de anatocismo é apresentado por Ferreira (2001), no Dicionário Aurélio – Século XXI, como "anatocismo é a capitalização dos juros de uma importância emprestada"; Houaiss (2001), no Dicionário Houaiss da Língua Portuguesa, como "anatocismo provém do latim anatocismus, de origem grega, e significa usura, prêmio composto ou capitalizado"; Cunha (1997), no Dicionário Etimológico, como "anatocismo é a capitalização dos juros de uma importância emprestada. (...) De Plácido e Silva (2002), no Vocabulário Jurídico, ensina: "anatocismo é vocábulo que nos vem do latim anatocismus, de origem grega, significando usura, prêmio composto ou capitalização. Desse modo, vem significar a contagem ou cobrança de juros sobre juros" e Naufel (2002), no 33 Novo Dicionário Jurídico Brasileiro, que "anatocismo é a capitalização de juros, vencendo novos juros. É a contagem de juros sobre juros já produzidos pelo capital empregado".

Essa sinonímia é identificada, ainda, entre as principais línguas ocidentais (NOGUEIRA, 2013, p. 21/22):

[1] Disponível em https://www.direitonet.com.br/dicionario/busca?palavras=anatocismo. Acesso em 31 de mar 2020.

- **Em Inglês**
  *Anatocism*[5] *. [L. anatocismos, Gr.; to lend on interest.] (law) Compound interest. [R.] – Bouvier Compound interest* significa Juro Composto.

- **Em Espanhol**
  *Anatocismo*[6] *Es la capitalización de los interesses, de modo que sumándos tales intereses al Capital originario pasan a redituar nuevos intereses. Es denominado también interés compuesto.*

- **Em italiano**
  *Analocismo*[7] *(dal grego anà – di nuovo, e tokòs – interesse) L'interesse dell'interesse, cioè la produzione d'interesse dall'interesse scaduto di una somma di denaro* (interesse composto).
  *Interesse composto* significa Juro Composto.

- **Em Francês**
  *Anatocisme*[8] *nom masculin (latin anatocismus, intérêt composé, du grec anatokismos).*
  *Intérêt composé* significa Juro Composto.

E, ainda, nos principais idiomas do mundo ocidental, conforme se observa na versão do *Webster's Online Dicitionary with Multilingual Thesaurus Translation*, com ênfase dada na forma e ao uso atual do termo linguístico.

| **Germânico Ocidental** (predominante nos países baixos - Holanda) | **anatocisme** *(compound interest).* |
|---|---|
| Finlandês | **koronkorko** *(compound interest, compounded interest)* . **korkoa korolle** *(compound interest)* |
| Alemão | **Kapitalisierung der Zinsen, Zinsenverzinsung** *(compound interest)* |
| Sueco | ränta på ränta *(compound interest)* |

**Quadro 1 –** *Modem Translation: anatocismo* (Moderna Tradução: anatocismo).

[5] *Webster's Revised Unabridged Dictionary* (1913), Easton's 1987, *Bible Dictionary, The Elements* (20 jan 99), WordNet (r) 1.6, *The Free On-line Dictionary of* Computing (07 Oct 99), Jargon File (4.0.0/24 July 1996).
[6] *Diccionario Juridico Abeledo* – Perrot.
[7] Enciclopedia Italiana TRECCANI.
[8] http://www.trader-finance.fr/lexique-finance/definition-lettre-A/Anatocisme.html

Há, portanto, referências contemporâneas de que o conceito de anatocismo é sinônimo de juro composto, ou capitalização de juros sobre juros.

Existe idêntica constatação em textos mais antigos:

- Michael Grant, autor de *Cícero: Selected Works*, em 1840, reproduziu texto da obra *Epistolarum ad Atticum* (Carta a *Atticus*), de Marcus Tulius Cícero (106 a.c. – 43 a.C), na qual anatocismo é tratado como sinônimo de juros compostos (GRANT, Michael 1960, *apud* Nogueira, 2013, p. 23);
- Henry Briggs, autor de *Arithmética Logarithmica,* 1624, matemático que se correspondeu e contribuiu com a obra de Naipier (descobridor do logaritmo natural), foi o primeiro a publicar uma tábua de logaritmos decimais para encontrar a quantidade de pagamentos em um empréstimo e, em sua obra, usava o termo anatocismo ao invés de juros compostos (BRIGGS, Henry 1624, *apud* Nogueira, 2013, p. 24);
- John Newton, autor de *Scale for Interest*, 1668, estabeleceu os termos anatocismo e juros compostos como sinônimos (NEWTON, John, 1968, *apud* Nogueira, 2013, p. 24);
- William Jacob e Langley Curtis publicaram tabelas de anuidades, em 1678, em cujos cabeçalhos é dito: "Anatocisme (commonly called Compound Interest)" (JACOB, William & CURTIS, Langley *apud* Nogueira, 2013, p. 25/26).

Essa identidade semântica não pode ser confirmada sem o estudo da expressão matemática dos juros compostos. A fórmula para o montante, $D_n$, ou valor futuro, de um empréstimo de um capital $D_0$, a ser quitado em uma única parcela, após $n$ períodos, a uma taxa de juros $i$ (capitalizados na mesma unidade de tempo de $n$, é dada pela expressão $D_n = D_0(1+i)^n$, para $D_n \in \mathfrak{R}_+^*, D_0 \in \mathfrak{R}_+^*,\ i \in \mathfrak{R}_+^*$ e $n,\ k \in \mathbb{Z}_+^*$ (essa restrição será válida ao longo de todo o texto para essas variáveis)[2].

Ilustramos, abaixo, um exemplo do uso dessa fórmula.

**Exemplo 1:** se, por um empréstimo de $R\$\ 1.000{,}00$, pagamos, após três meses, o valor de $R\$\ 1.331{,}00$, a uma taxa de juros de $10\%$ ao mês[3], ocorre o anatocismo pois, após o primeiro mês, deve-se $R\$\ 100$ reais de juros que, somados ao valor emprestado de $R\$\ 1.000{,}00$, servirá de base de cálculo para os juros do segundo mês. Assim, o juro gerado ao final do segundo período será de $0{,}1x(1.000 + 100) = 0{,}1x1.000 + 0{,}1x100 = 110$. O fato de termos $0{,}1\ x\ 100$ demonstra a ocorrência

[2] Em que $\mathfrak{R}_+^*$ representa o conjunto dos números reais positivos e $\mathbb{Z}_+^*$ o conjunto dos números inteiros positivos.
[3] $1.000(1 + 0{,}1)^3$.

de juros sobre juros, já que $100$ são juros gerados pelo decurso de $1$ mês sem pagar a dívida.

Nesse caso, ficou demonstrado a ocorrência do anatocismo, fato que se repetiria após o terceiro mês.

Assim, ocorreria anatocismo sempre que utilizássemos a fórmula de juros compostos, $D_n = D_0(1 + i)^n$, para $n > 1$.

Em contrapartida, os juros simples, representados por $D_n = D_0(1 + in)$, não embutiriam juros sobre juros, pois a taxa incidiria sempre sobre o capital inicialmente emprestado. No exemplo dado, os juros gerados seriam constantes e iguais a $0,1x1.000 = 100$ em cada mês, obtendo-se um montante final $D_n = R\$\ 1.300,00.$

A justiça tem debatido o anatocismo em várias ocasiões. Recentemente, o Supremo Tribunal Federal veio a discutir esse tema a partir de uma demanda das unidades da federação, conforme MS nº 34023-DF[4]. Esse julgado acabou sem discussão de mérito, pois se homologou acordo entre União e Estados impetrantes. A petição inicial dos Estados reivindicava que seus débitos com a União fossem cobrados pelo regime de juros simples, com base em um Decreto Federal de 1933 que proibia a cobrança de juros sobre juros.

O Decreto citado é o de nº 22.626, de 7 de abril de 1933, que ficou conhecido como Lei da Usura. Embora a súmula 597 do Supremo Tribunal Federal - STF[5], já tenha decidido pela não aplicação deste Decreto nas operações financeiras[6], persistem ações judiciais que apelam para seu texto, sempre no argumento da proibição de cobrança de juros sobre juros, segundo a prescrição do seu art. 4º: "Art. 4º. É proibido contar juros dos juros: esta proibição

[4] Disponível em http://portal.stf.jus.br/processos/downloadPeca.asp?id=311985238&ext=.pdf. Acesso em 5 de abr 2020.

[5] "As disposições do Decreto 22.626/1933 não se aplicam às taxas de juros e aos outros encargos cobrados nas operações realizadas por instituições públicas ou privadas, que integram o Sistema Financeiro Nacional.", Disponível em http://www.stf.jus.br/portal/jurisprudencia/menuSumarioSumulas.asp?sumula=2017. Acesso em 24 de abr 2020.

[6] *Vide*, ainda, o art. 15-a da Lei nº 4.380/64: "É permitida a pactuação de capitalização de juros com periodicidade mensal nas operações realizadas pelas entidades integrantes do Sistema Financeiro da Habitação - SFH." Disponível em http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/LEIS/L4380.htm. Acesso em 24 de abr 2020.

não compreende a acumulação de juros vencidos aos saldos líquidos em conta corrente de ano a ano."[7]

A Lei da Usura parece refletir uma prática da época, na qual não era comum a acumulação de juros em período inferior a um ano. É o que se conclui do trecho de obra da época, de Rodolpho Baptista de S. Thiago (THIAGO, 1937, p. 359):

> **192.** Diz-se que um capital está colocado a juros compostos, quando no fim de cada período de tempo considerado, anno, semestre, etc, a esse capital se reunem os juros correspondentes a fim de se constituir novo capital, o qual renderá novos juros no período de tempo seguinte(*).
>
> (*) É geralmente nos empréstimos a longo prazo que se dá a capitalização dos juros. Não é corrente o uso da capitalização dos juros nos empréstimos a prazo menor que um anno. Grifo nosso.

Em épocas atuais, o mais comum são as ações judiciais que pedem a revisão de prestações advindas de inadimplência em financiamentos imobiliários realizado pelo sistema de amortização francês – SAF, também conhecido como tabela Price, cuja principal característica é o fato das prestações serem de igual valor.

Reproduziremos, a seguir, alguns desses debates:

- **Acórdão nº 70002065662, de 23/10/2002, do Tribunal de Justiça do Estado do Rio grande do Sul** (NOGUEIRA, 2013, p. 225-226)**:**

> **A Tabela Price I (Realidade Matemática)**
>
> Note-se que os juros de 10% ao mês, aplicados pela Tabela Price, na realidade , são mais altos, e quanto maior o prazo, maior é a diferença entre a Tabela Price e os juros simples: 10% em 6 meses, a juros simples ou lineares, correspondem a 60%, enquanto que, pela Tabela Price, ascendem a 77,15%(uma diferença a maior de 17,15%. Estendendo-se o prazo par a12 meses, tem-se 120% a juros simples ou lineares e 213,84% pelo Sistema Price (uma diferença a maior de 93,84%). Essa situação mostra que, na verdade, o que é relevante não é propriamente a taxa de juros contratada (10%), mas sim **o prazo**, pois, quanto maior o prazo, **maior será a quantidade de vezes que os juros se multiplicarão por eles mesmos** {(10%)6(10%)12}, o que demonstra e configura **o anatocismo** como traço **inerente** e **imanente** à Tabela Price.

[7] Decreto nº 22626/1933. Disponível em: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/decreto/D22626.htm. Acesso em 24 de abr 2020.

> [...] É que, como dito, é próprio da Tabela Price que, na fórmula de cálculo, não se adicione juros ao saldo devedor **porque o mutuário já paga mais juros em cada prestação em prejuízo da amortização**, que é menor exatamente porque os juros cobrados são maiores, superiores aos contratados, daí o **'truque'** de o saldo devedor funcionar como conta de diferença que **'encobre'** a cobrança abusiva **por taxas superiores às contratadas e com anatocismo.**

- **Recurso Especial nº 668.795 – Rs (2004/123972 – 0), do Superior Tribunal de Justiça** (NOGUEIRA, 2013, p. 234)**:**

> (...)
> Ocorre que os juros compostos, do mesmo modo que a amortização negativa, que se destacou não comprovada, configuram o anatocismo.
> Aliás, conceitua, o Dicionário Houaiss como juro composto aquele calculado sobre um montante principal acrescido de seus próprios juros.
> Note-se que aqui não se está a investigar se há juros compostos ou capitalizados pela adoção da tabela price, pois o tribunal as reconhece, afirmando a possibilidade de uma e a ilegalidade de outra, que, todavia, no caso concreto não vislumbrou.
> Incidência, aliás, que se mostra notória, no sentir desse relator, conclusão apoiada pela doutrina sobre o tema.
> Na obra intitulada *Juros Taxas e Capitalização: uma visão jurídica*, André Zanetti Batista (Ed. Saraiva, São Paulo: 2008, pp. 58/59), ao analisar a tabela price, pontifica: "O objetivo de Richard Price foi elaborar um sistema de amortização em que os juros sejam aplicados de forma composta capitalizando-os mensalmente (período/período), como forma de remuneração do capital, pois sua finalidade era estabelecer um método de pagamento para seguro de vida e aposentadorias. Em outras palavras, a Tabela Price foi criada exatamente para inserir os juros compostos nos sistemas de amortização. (...)
> Constata-se na transcrita fórmula a expressão $(1 + i)^n$, denominada fator de capitalização ou fator de acumulação de capital, a qual gera comportamento exponencial em função do tempo, característico dos juros compostos, evidenciando o êxito matemático inglês na inserção da teoria dos juros compostos nos sistemas de amortização.

- **Apelação Civel nº 0240089-7, do Tribunal de Justiça do Estado do Paraná** (NOGUEIRA, 2013, p. 242)**:**

> Segundo entendimento desta Corte, o uso da Tabela Price gera a exponenciaçao da dívida, causando onerosidade excessiva ao devedor, a qual deve ser afastada. Nesse escopo, adequado se mostra a substituição da Tabela Price pelo Método de **Gauss**, o qual nada mais é do que um sistema que permite o cálculo de juros simples, sem capitalização intrínseca.

- **Apelação Cível nº 7.070.775-0, do Tribunal de Justiça do Estado de São Paulo** (NOGUEIRA, 2013, p. 245-246)**:**

> No Sistema francês, os juros crescem em progressão geométrica, pois somente a amortização é que se deduz do saldo devedor; os juros são abatidos, acarretando amortização menor e pagamento de juros maiores em cada prestação, calculados e cobrados sobre saldo devedor maior em decorrência da função exponencial contida na Tabela, o que configura juros compostos ou capitalização – Nulidade decretada da cláusula que prevê a aplicação de tal Tabela, nos termos do art. 51, IV, da Lei nº 8.078/90 – Recálculo do saldo devedor determinado, desde a sua origem pelo método de "GAUSS".

- **Processo nº ARE 717.643 / RJ:**

> Destarte, a uma, que não há que se cogitar de anatocismo, dado o permissivo legal de capitalização, com expressa previsão legal (STJ, mutatis AgRg REsp 988.718, DJ 5/5/08); e a duas, que a Tabela Price nos moldes colocados, se mostra legítima, de forma a manter constante o valor das prestações, a permitir a operacionalização do sistema.[8]

- **Processo nº 0007548-38.2012.8.16.0001, do Tribunal de Justiça do Estado do Paraná**

> O método composto de formação de juros não implica anatocismo e, ademais, o consumidor celebrou o contrato atraído pela parcela cujo valor, além de fixo, era de seu prévio conhecimento. - Em síntese, perfeitamente legítimo o método composto de formação dos juros, o qual, aliás, não deve ser compreendido como capitalização, conforme restou decidido pelo STJ no julgamento do caso paradigma.[9]

A Decisão do Superior Tribunal de Justiça - STJ no processo 951.894/DF, de 22/10/15, trecho transcrito a seguir, resume a variação da jurisprudência acerca do tema[10]:

---

[8] Disponível em: http://www.stf.jus.br/portal/processo/verProcessoPeca.asp?id=111565804&tipoApp=.pdf. Acesso em 20 de mai 2020.

[9] Disponível em: https://portal.tjpr.jus.br/jurisprudencia/j/4100000007185172/Decis%C3%A3o%20monocr%C3%A1tica-0007548-38.2012.8.16.0001;jsessionid=9fbc4b8eb71a0d3a877ff668eca4. Acesso em 23 de mai 2020.

[10] Disponível em: https://www.jusbrasil.com.br/diarios/documentos/247611777/andamento-do-processo-n-2007-0108079-4-recurso-especial-26-10-2015-do-stj?ref=topic-lawsuit. Acesso em 9 de mai 2020.

> A título de exemplo, observo que os TRFs da 1ª, 2ª, 3ª, 4ª e 5ª Regiões e o Tribunal de Justiça de Alagoas afirmam a legalidade da fórmula da Tabela Price. Por outro lado, os Tribunais de Justiça de Goiás, Rio Grande do Norte, Ceará, Sergipe e Santa Catarina entendem ilegal a utilização da referida tabela, tendo este último editado enunciado com o seguinte teor "É ilegal o emprego da Tabela Price nos contratos de mútuo firmados sob o regime do SFH, na medida em que implica capitalização de juros". Anoto que os outros tribunais do País apresentam divergências internas, na medida em que alguns de seus órgãos fracionários consideram ilegal a fórmula da Tabela Price e outros a julgam válida.

As decisões relatadas são lastreadas em perícias contratadas pelas cortes que, baseadas mais em impressões e interpretações, não formulam uma prova sólida, sistemática, formal, com os recursos de matemática disponíveis.

Nesse contexto, caberia a seguinte indagação: Existe uma prova matemática formal da inexistência do anatocismo no Sistema de Amortização Francês?

O objetivo principal deste trabalho acadêmico é prover de veracidade a seguinte hipótese: existe uma prova matemática formal da ausência de anatocismo em financiamentos com prestações iguais, ou seja, no Sistema de Amortização Francês.

Trata-se assim, de uma pesquisa aplicada, no sentido de auxiliar as decisões do Poder Judiciário acerca do tema.

## 2 - DA NATUREZA DOS JUROS

Embora seja elemento intrínseco da sociedade contemporânea, o termo juros vem carregado de uma certa carga negativa, como algo condenável. Haveria sempre uma vantagem desleal por parte do emprestador.

Ao longo da história, esse pensamento de antinaturalidade da cobrança de juros fez parte da fala de autores renomados. Aristóteles, por exemplo, criticou o fenômeno, alegando que o dinheiro, por ser inanimado, não poderia gerar frutos (os gregos usavam a palavra **TÓKOS**, que significa fruto, para qualificar juros ou usura). Moisés e os Romanos o proibiram entre seus povos. Na idade média, a igreja católica perseguiu com veemência essa prática, tendo um de seus maiores teóricos, São Tomás de Aquino, argumentado que o juro equivaleria ao pagamento pelo tempo e, sendo este uma *dádiva* de Deus, todos teriam o direito ao seu usufruto natural, logo, não poderia ser cobrado (FISHER, 1984).

Não podemos dissociar um debate ético, conforme relatado no parágrafo anterior, à época em que foi travado. Na antiguidade e na idade média, juros eram cobrados, geralmente, para consumo e concedidos para indivíduos menos favorecidos, daí que foi associado a reprodutor de miséria (CASSEL, 1946, p. 159).

Diferentemente de hoje, no qual um mercado desenvolvido de crédito fomenta e é peça chave da economia, o preconceito confunde-se com o tamanho da taxa de juros, ou seja, criticam-se os juros pelo seu montante, o que acaba trazendo uma reminiscência de crítica passada em relação a sua própria natureza[11].

Vamos desenvolver nessa parte do texto a forma como esse fenômeno pode ser compreendido na sociedade presente.

Os juros na era capitalista foram melhor estudados pelos economistas. Inving Fisher, em sua obra *A Teoria dos Juros*, na qual resumiu

---

[11] Um resquício do preconceito em relação aos juros pode ser verificado no preâmbulo da chamada Lei de Usura: “Considerando que todas as legislações modernas adotam normas severas para regular, impedir e reprimir os excessos praticados pela usura;” Decreto nº 22.626/1933. Disponível em http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/decreto/D22626.htm. Acesso em 24 de abr 2020.

toda a discussão até então sobre a sua natureza, apresentou-nos a relação entre a posse do dinheiro e o prazer que ele proporciona por intermédio do consumo (FISHER, 1984, p. 14):

> O dinheiro não tem uso para nós até que seja gasto. Os salários finais não são pagos em termos de dinheiro, mas de prazer que eles compram. O cheque do dividendo torna-se renda, em última instância, quando comemos o alimento, usamos roupas ou dirigimos o automóvel que com ele é comprado.

E alerta Fisher que, embora sejam sofisticadas as relações de troca já na economia de sua época (seu livro é de 1930), mostra-se inerte o paradigma de que renda, ao final, resume-se ao prazer que proporciona no consumo (FISHER, 1984, p. 23):

> Em nossa atual e complicada vida econômica é provável que fiquemos confusos com as muitas operações industriais e transações monetárias. Mas a renda líquida ainda permanece exatamente o que era para o primitivo Robinson Crusoé em sua ilha – o prazer de comer frutas que colhemos, por assim dizer, menos o desconforto ou o trabalho de colhê-las. A única diferença é que hoje a coleta da fruta não é exatamente da mão-para-a-boca, mas é feita por meio de aparatos complicados e após frequentes trocas de dinheiro; isto é, uma longa cadeia de intermediários, capital e transações monetárias intervêm entre o trabalho da colheita, no início, e a satisfação de comer, no final.

O autor expressa, ainda, que a taxa de juros é o prêmio por se abrir mão do prazer hoje para usufruto de maior prazer no futuro (FISHER, 1984, p. 26):

> O problema da taxa de juros é inteiramente um problema de gasto e investimento, de decisão entre vários prazeres possíveis que constituem renda, em especial entre prazeres relativamente pequenos, mas imediatos, e prazeres relativamente grandes, mas adiados. Há um eterno conflito entre o impulso de gastar e o impulso de investir. O impulso de um indivíduo para gastar é causado por sua impaciência em obter prazeres sem demora e seu impulso para investir é causado pelas oportunidades de obter, pela demora, relativamente **mais prazer** para si ou para outros. [Grifo nosso].

Um dos maiores economistas brasileiros contemporâneos, Eduardo Gianetti, em sua obra *O Valor do Amanhã*, embora tenha discutido o aspecto dos juros para diversos elementos da vida, inicia seu texto reconhecendo qual o aspecto universal inerente ao conceito (GIANNETTI, 2005, p. 10):

> (...) O termo de troca entre esses dois valores separados no tempo define a essência dos juros. O fenômeno dos juros é, portanto, inerente a toda e qualquer forma de troca intertemporal. Os juros são o *prêmio da espera* na ponta credora – os ganhos decorrentes da transferência ou cessão temporária de valores do presente para o futuro; são o *preço da impaciência* na ponta devedora – o custo de antecipar ou importar valores do futuro para o presente.

Dessa feita, embora o fenômeno já tenha sido objeto de estudo em profundidade pela literatura econômica, é possível, de forma intuitiva (mas confirmada pela teoria), perceber que o indivíduo, ou instituição[12], que empresta recursos financeiros está abrindo mão do benefício da posse do dinheiro: a possibilidade do consumo.

E este ato de adquirir um bem, de consumir, proporciona prazer, de forma diversa para os envolvidos. Mas é inegável que na sociedade como um todo, aceita-se pagar um prêmio pela oportunidade do consumo imediato, para os desprovidos do recurso monetário: os tomadores de empréstimo.

Exemplifiquemos. Imaginemos um trabalhador que ganha *R$ 1.000,00* por mês e quer adquirir uma nova TV, que custa *R$ 3.500,00*. Impossível a aquisição à vista, pois o trabalhador, neste caso, é desprovido de poupança. Mas existe a opção de aquisição em *24* prestações mensais de *R$ 175,00*, as quais subentendem uma taxa de juros de *1,5%* ao mês[13].

O trabalhador vê-se então num dilema: consumir hoje pagando um prêmio de *1,5%* ao mês à loja; ou poupar uma quantia mensal para o consumo futuro, evitando o pagamento dos juros.

As motivações são subjetivas (pode ser véspera de uma copa do mundo, por exemplo) e vão determinar de forma diferente a reação de cada indivíduo para a situação. Mas seja qual for a decisão tomada, a questão do

---

[12] Uma instituição, ou empresa, é formada por trabalhadores, diretores, acionistas e uma cadeia de custos que, em última instância, transformam-se em numerário e, desta forma, estão sujeitos ao ato de consumir, ou renuncia a ele.

[13] Se somadas, as 24 prestações de *R$ 175,00* alcançam o valor de *R$ 4.200,00*, superior aos *R$ 3.500,00* da compra à vista, demonstrando o pagamento de juros pela oportunidade de consumo imediato.

pagamento dos juros é *inconteste*, motivando a escolha: ter prazer hoje, ao custo de um prêmio; ou deixar o usufruto do prazer para o futuro, evitando-se o desembolso dos juros.

De outro lado, os possuidores do dinheiro podem abrir mão do gasto em bens e do prazer correlato, mas não de forma gratuita. O prêmio pago pelo tomador é usufruído pelo emprestador, pois este se sacrificou ao abrir mão do consumo imediato.

Podemos entender o fenômeno de outra forma: quem financia não deve receber apenas o que emprestou (sem juros), pois estaria retardando o prazer de hoje pelo de amanhã sem receber nada em troca. Um prêmio é necessário, haja vista que a ideia do juro zero não faz parte da realidade do mercado[14], pois desmotivaria ou até inviabilizaria o empréstimo.

Enfim, como bem descreveu Fisher (FISHER, 1984), retardar o prazer de hoje deve ser premiado com mais prazer, superior ao que teria direito no consumo imediato.

O prêmio é expresso pela taxa de juros, uma percentagem do capital emprestado, ou financiado. Essa taxa é definida pelo mercado e é influenciada por outros fatores, como a inflação (uma taxa nominal, superior à real, sem inflação), o risco de não pagamento etc. Mas supondo uma sociedade, sem inflação, e risco zero de não pagamento da dívida, ainda assim, restaria o prêmio pela subtração do prazer momentâneo proporcionado pelo consumo.

Podemos definir, assim, os juros, como o prêmio por se abrir mão do consumo imediato.

### 2.1 - Do falso dilema entre juros simples e compostos

O principal aspecto, senão o único, pelo qual o anatocismo é criticado, reside na sua identidade com a prática dos juros compostos, expressão

---

[14] Evidente que podemos imaginar situações de desembolso monetário sem usufruto de nenhum bem material, dissociado de prêmio correspondente, quando doamos para a caridade. Poderíamos sugerir que, nesse caso, o prazer de ajudar substitui o prazer de gozo do consumo, daí porque não haveria necessidade de recompensa monetária. Mas esse é um tema que não faz parte do nosso estudo, nem subtrai a ideia que queremos apresentar neste tópico.

que carrega um certo preconceito, principalmente, no meio jurídico, como demonstramos nas citações do tópico I.

Em função disso, boa parte das decisões e discussões travadas pelo Poder Judiciário apregoam o uso dos juros simples nas relações contratuais.

Para continuarmos, apresentamos duas definições para uso ao longo dessa dissertação:

**DEFINIÇÃO 1: REGIME DE JUROS SIMPLES – ocorre quando os juros são calculados sempre com a aplicação da taxa $i$ sobre o capital inicial $D_0$ .**

**DEFINIÇÃO 2: REGIME DE JUROS COMPOSTOS – ocorre quando os juros são calculados sempre com a aplicação da taxa $i$ sobre o capital do período anterior, acrescido dos juros acumulados.**

Por essas definições, os juros compostos apresentam juros sobre juros, ao contrário do simples.

Mas segundo a definição de juros exposta no tópico anterior, demonstraremos que os juros compostos representam o modo adequado de se representar o prêmio por se abrir mão da liquidez, quando se traduz no consumo imediato.

A Figura 1 expõe os juros simples gerados à taxa de $10\%$ ao mês em quatro meses, sobre um capital de $R\$\ 1.000,00$.

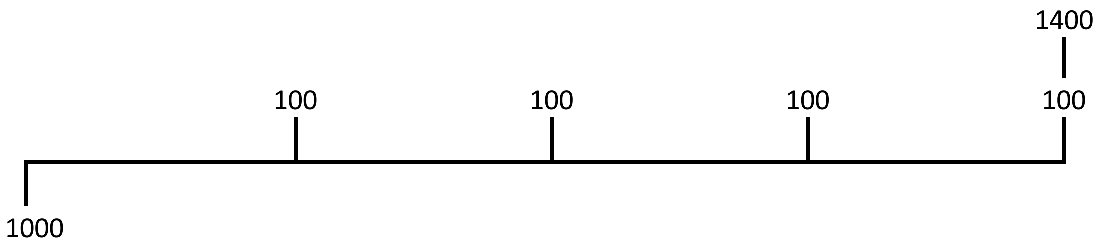


**Figura 1 - Geração de juros simples**
**Fonte: autor.**

A forma de pagamento seria em uma prestação única ao final do 4ª mês, ou seja, pagar-se-ia $R\$\ 1.400,00$, sendo os juros representados por R$ $400,00$. O cálculo advém da fórmula de juros simples, demonstrada a seguir:

**PROPOSIÇÃO 1: No regime de juros simples, a uma taxa i, um capital inicial $\boldsymbol{D_0}$, após n períodos, transforma-se em $\boldsymbol{D_n = D_0(1+in)}$.**

**Demonstração:**

*Para cada* $k \leq n$, *seja* $D_k$ *a dívida após cada período k. Pela definição de juros simples,* $D_k = D_{k-1} + iD_0$. *Como* $iD_0$ *é constante, então* $D_k$ *é uma progressão aritmética - PA de razão* $iD_0$ *, primeiro termo igual a* $D_0$ *e* $(k+1)$ *termos. Assim, pela fórmula do termo geral de uma PA (MORGADO, 2015, p. 3),* $D_k = D_0 + (k+1-1)iD_0 = D_0(1+ik)$. *Assim,* $D_n = D_0(1+in)$. ■

Como definido, os juros simples tem origem sempre sobre o capital inicial emprestado, ou seja, a taxa de *10%* ao mês incide em cada período sobre o mesmo valor, *R$ 1.000,00*, gerando valores fixos de *R$ 100,00* de prêmio.

Analisemos a situação a partir do conceito de juros desenvolvido do tópico anterior, no qual sua geração estaria associada ao prêmio pela abstinência ao consumo. Ao final do primeiro mês, o credor sofreu por não ter usufruído dos gastos de um mês e deveria receber *R$ 100,00* de compensação[15]. Então, decorrido esse período, ele deveria ter *R$ 1.100,00* disponível para compras, mas como não recebeu, teria mais um mês desprovido do prazer de consumir esta quantia.

Observemos que, entre o primeiro mês e o segundo mês, o credor deveria ter *R$ 1.100,00* aptos ao gasto, ou seja, seu desprazer em não consumir referia-se a esse valor. Apesar disso, os juros foram gerados ao final do segundo período são de apenas *R$ 100,00*. A juros simples, portanto, há um prejuízo para quem empresta pois, apesar de deixar de consumir *R$ 1.100*, seu prêmio de *R$ 100,00* corresponde ao desprazer gerado apenas por *R$ 1.000,00*.

E com o passar do tempo, o déficit do emprestador só aumenta. Segundo a regra dos juros simples, entre o segundo e o terceiro mês, a abstinência pelo consumo de *R$ 1.200,00* é recompensada apenas pelos mesmos R$ 100,00. No último período, temos um consumo não satisfeito de *R$ 1.300,00*, mas nosso prêmio continua de apenas *R$ 100,00*.

[15] Os economistas diriam que o credor perdeu a oportunidade de consumo ou de investir os *R$ 1.000,00* em algum projeto ou no mercado financeiro onde receberiam a remuneração adequada. Por simplificação vamos deixar a oportunidade apenas para o consumo, considerando que nesta está inclusa a possibilidade de investimento.

Há, portanto, uma diferença crescente entre prêmio pela abstinência do consumo, como podemos ver no gráfico a seguir:

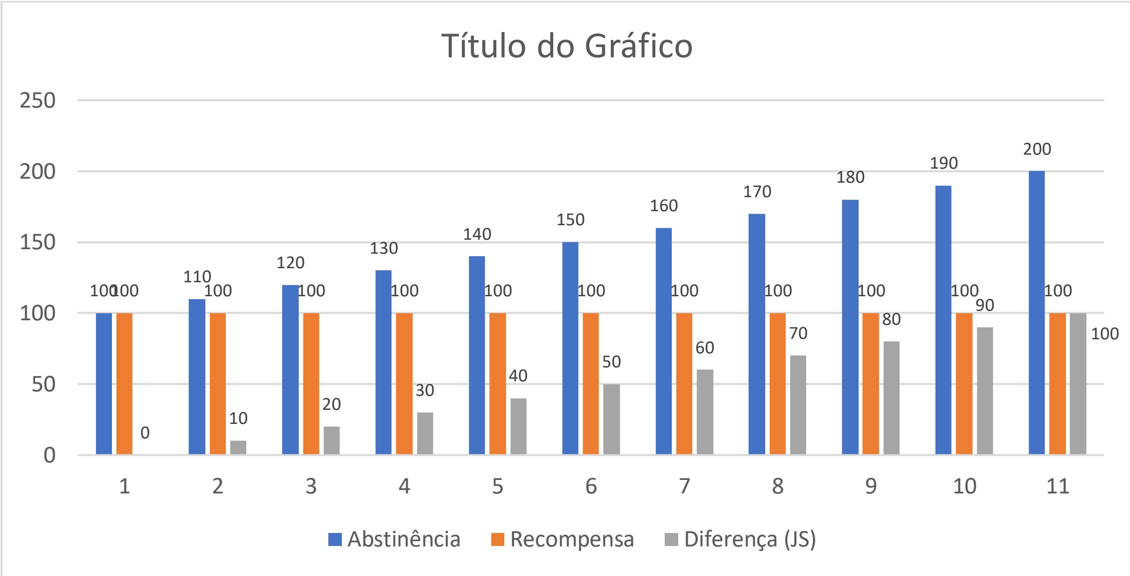


**Gráfico 1 - Abstinência ao consumo (juros simples) x Recompensa**
**Fonte: autor**

O prejuízo é ainda maior se considerarmos a correlação exata dos juros: entre o segundo e terceiro mês, o sacrifício deveria corresponder à quantia de *R$ 1.210,00* (*1.000 + 100 + 110*). Ou seja, se fosse seguida a regra da vinculação dos juros ao desprazer proporcional ocasionado pela ausência dos recursos monetários para o consumo, após o segundo mês teríamos *R$ 110,00* (*10%x1.100*), e após o terceiro, *R$ 121,00* (*10%x1210*), e assim sucessivamente, conforme Figura 2:

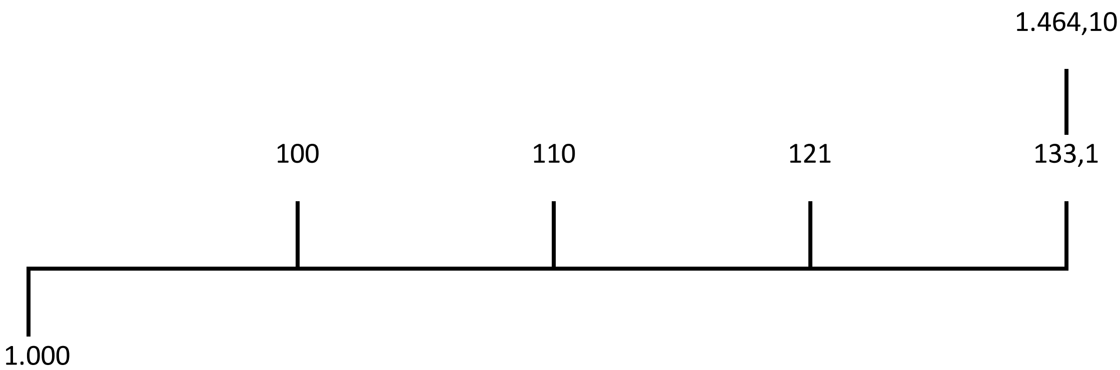


**Figura 2 - Geração de juros compostos**
**Fonte: autor.**

A Figura 2 corresponde à geração dos juros compostos, que expressa a identidade entre juros e prêmio pela abstinência do consumo, conforme desenvolvido pela teoria econômica. Essa relação fica melhor evidenciada no gráfico 2:

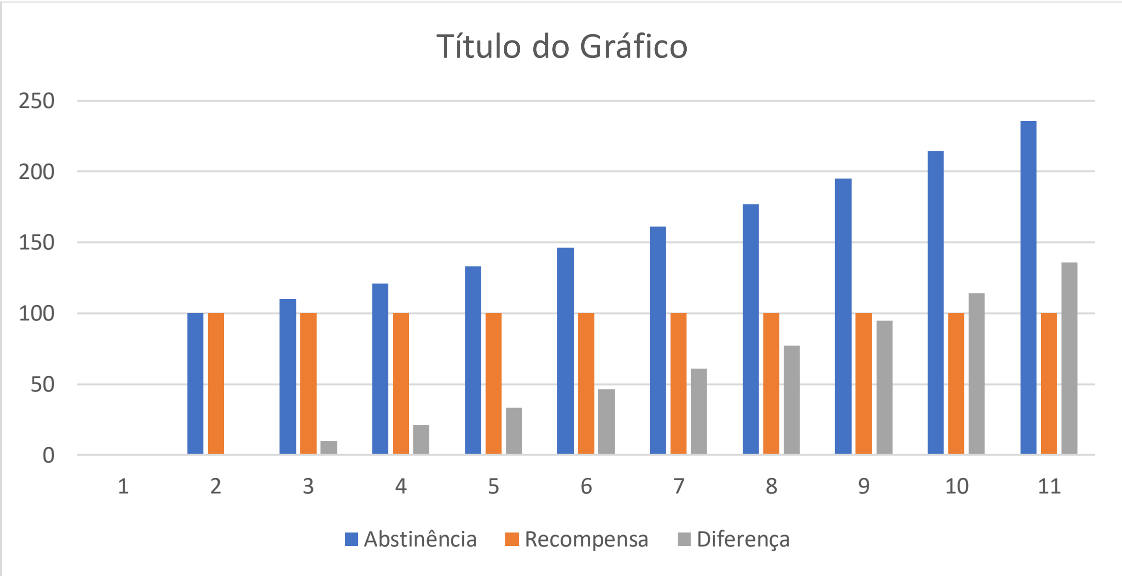


**Gráfico 2 - Abstinência (juros compostos) x Recompensa**
**Fonte: autor**

Enquanto no primeiro gráfico a diferença iguala os juros no período 11, no segundo ela o ultrapassa já no instante 9. Isso é reflexo do consagrado efeito do crescimento exponencial dos juros compostos, conforme gráfico 3:

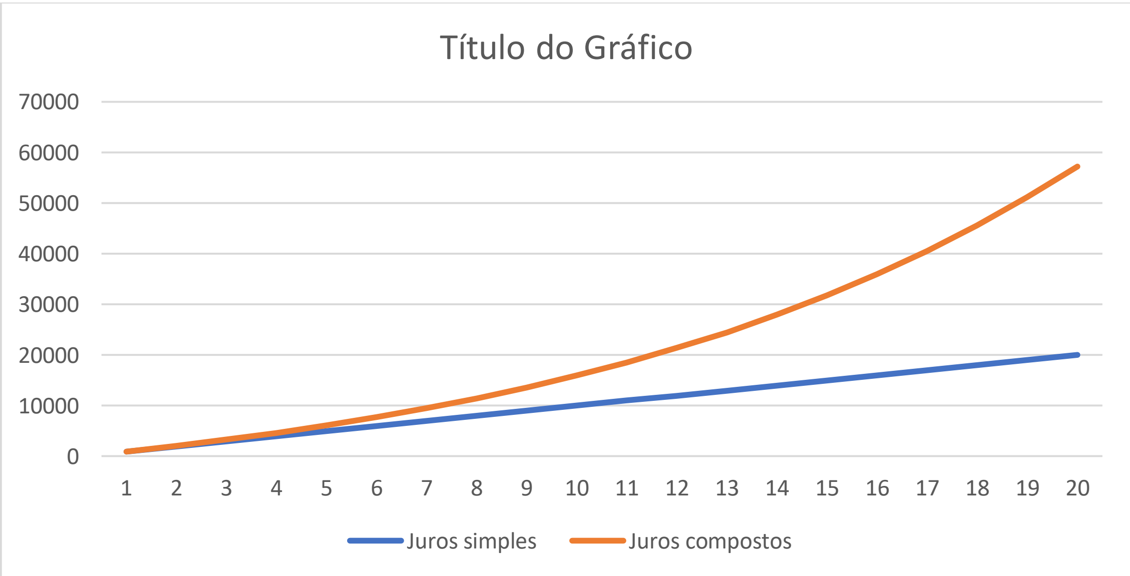


**Gráfico 3 - Juros simples x Juros compostos**
**Fonte: autor**

O prejuízo estende-se ao poupador que fosse remunerado a juros simples. Abrir mão do consumo não lhe traria a devida compensação.

Neste instante, adequado apresentarmos a demonstração da fórmula dos juros compostos, a qual pode ser encontrada na obra de Augusto César Morgado e outros (MORGADO, 2015):

**PROPOSIÇÃO 2: No regime de juros compostos, a uma taxa i, um capital inicial $\boldsymbol{D_0}$, após n períodos, transforma-se em $\boldsymbol{D_n = D_0(1+i)^n}$.**

**Demonstração:**

*Para cada* $k \leq n$, *seja* $D_k$ *a dívida após cada período k. Pela definição de juros compostos,* $D_k = D_{k-1} + iD_{k-1}$. *Logo,* $D_k = D_{k-1}(1+i)$. *Como* $(1+i)$ *é uma constante, então* $D_k$ *é uma progressão geométrica - PG de razão (1 + i) , primeiro termo igual a* $D_0$ *e (k + 1) termos. Assim, pela fórmula do termo geral de uma PG (MORGADO, 2015, p. 25),* $D_k = D_0(1+i)^{k+1-1} = D_0(1+i)^k$. *Assim,* $D_n = D_0(1+i)^n$. ■

Essa fórmula dos juros compostos, não por acaso, lastreia todos os contratos de empréstimos e financiamentos do mercado. Não se trata assim de mera opção pelo ganho maior, haja vista que os juros compostos são maiores que os simples a partir do 2º período; porém, uma escolha pela real significância do prêmio que se deve pagar ou receber pelo sacrifício que a ausência do consumo provoca.

Argumentar, então, pela injustiça dos juros compostos não sobrevive ao conteúdo intrínseco ao seu conceito. Evidente que o valor da taxa de juros pode ser discutida, representando um montante maior do prêmio. Essa parece ser a realidade do mercado brasileiro, cujas taxas são consideradas uma das maiores do mundo. Mas esse debate entre taxa baixa e alta não se confunde com a opção entre juros simples e compostos.

Segue que, como já operado na prática do mercado, os juros compostos refletem a correta pertinência do significado da palavra juros e expressam a naturalidade das relações de consumo.[16]

[16] Instituições bancárias adotam os juros simples em operação de desconto simples, o denominado desconto comercial ou *por fora*, no qual aplicam a fórmula de juros simples para valores futuros, como na antecipação de imposto de renda. Nesse caso o desconto é maior e favorece o banco financiador (DE FRANCISCO, 2009, p. 16 a 23). Essa forma de uso de juros simples justifica-se, apenas, por favorecer ao emprestador.

## 3 – DO SISTEMA DE AMORTIZAÇÃO FRANCÊS – TABELA PRICE

O Sistema de Amortização Francês - SAF se caracteriza por proporcionar prestações de idêntico valor em um financiamento de recursos. Ou como depósitos de igual valor para constituir um capital. No Brasil é conhecido como tabela Price por ter sido popularizado pelo inglês Richard Price.

A denominação de francês deve-se ao fato do método ter sido mais utilizado na França a partir do século XIX (PEREIRA, 1966).

A literatura contemporânea denomina o SAF como aquele que apresenta prestações iguais, mas sempre associado ao cálculo dos juros, contido em cada prestação, como resultado da taxa aplicada sobre o saldo devedor do período anterior, logo decrescente e, em consequência, amortização residual crescente.

Entretanto, encontramos definição mais antiga que emprega apenas o conceito de prestações iguais, sem dar ênfase à repartição entre juros e amortização nas parcelas constantes. É o que vemos em Guido Santacrose, *apud* Pereira (PEREIRA, 1966, p. 6):

> Um processo de amortização, muito difundido na prática, é aquêle em que à prestação do mutuante corresponde uma contra-prestação do mutuário, constituída de uma sucessão de anuidades constantes, que, em valor atual, computado à taxa de empréstimo, equivalem ao capital que será reembolsado.
>
> Nisto consiste o chamado sistema francês de amortização.

Mas já na obra de Rodolpho Baptista de S. Thiago, de 1937, há menção ao sistema de amortização progressiva, ou Francês, associado aos juros decrescentes a partir das parcelas iniciais (THIAGO, 1937, p. 424):

> **223. –** Os systemas de amortização dos empréstimos podem ser classificados em :
>
> **1.º** - *Systema de amortização progressiva dos empréstimos por obrigações ou systema francez.*

O autor não explica a origem do termo francês. Nem justifica a adoção da amortização crescente, obtida pela diferença entre a prestação e os juros de cada mês, como discriminado às fls. 409 (THIAGO, 1937).

Essa definição também é adotada por outra obra de referência (CAVALHEIRO, 1985, p. 137, grifo nosso):

> *14.1 Método francês ou de amortização progressiva*
>
> Por esse método, pelo qual as prestações destinadas à amortização da dívida são periódicas e constantes, os juros incidem somente sobre o saldo devedor, no final de cada período. A prestação empregada na amortização gradual da dívida compreende duas parcelas variáveis, **segundo lei conhecida**, cujas somas porém são: uma **constante** [17], crescente, destinada à amortização do capital, e a outra, decrescente, destinada à cobertura dos juros.

Gostaríamos de enfatizar que a característica essencial do SAF é a existência de prestações iguais, o que não o vincula à repartição entre juros e amortização progressiva, como consagrado na literatura e na prática do mercado.

Na própria obra de Richard Price não há registro dessa distribuição (PRICE, 1783)[18], nem na de David Wilkie (WILKIE, 1794).

Nossa pesquisa bibliográfica não teve êxito em encontrar o momento em que se passou a adotar essa repartição. Luiz A. F. Cavalheiro a justifica com a expressão “segundo lei conhecida” (CAVALHEIRO, 1985, p. 137), mas não dá mais informações a respeito. Abelardo de Lima Puccini vai defendê-la por se tratar de um princípio, porém deixa de elucidar a origem desse postulado teórico.

Voltaremos a essa discussão ainda neste texto, mas por enquanto vamos desenvolver o cálculo da prestação no SAF apenas com a ideia de que se trata de um método de financiamento com parcelas de idêntico valor.

---

[17] Não encontramos justificativa para o emprego desse termo pois as amortizações são variáveis, explicitamente definida na mesma frase do texto, razão pela qual acreditamos tratar-se de erro.
[18] Jackson Ciro Sandrini já havia chamado a atenção sobre esse fato (SANDRINI, 2007).

### 3.1 - Do cálculo da prestação

A característica significativa do SAF é a presença de prestações constantes para o financiamento de um capital. Descrevemos, a seguir, como se obter uma fórmula para o valor da prestação para um empréstimo de valor $D_0$, em $n$ prestações iguais, a uma taxa de juros $i$, com $D_0$ e $i$ elementos do conjunto dos números reais positivos; $n$ e $k$ elementos do conjunto dos naturais, $k \leq n$.

Definiremos $D_0$ como o valor a ser financiado, ou dívida, no instante $0$, ou seja, como se fosse no dia de hoje. A dívida deverá ser paga em $n$ prestações iguais, a primeira vencendo após um intervalo de tempo que será fixo entre uma prestação e outra (o mercado consagrou o intervalo de 1 mês).

A equivalência entre o valor emprestado e as prestações será estabelecida por uma taxa de juros $i$, aplicada em cada período em que se dará o pagamento, isto é, a geração dos juros ocorrerá no mesmo interstício temporal que separa as prestações.

A parcela é definida na literatura como anuidade, ou renda certa, ou como um dos termos de uma série uniforme de pagamentos, como a seguir (MORGADO, 2015):

**DEFINIÇÃO 3: RENDAS CERTAS, ANUIDADES OU SÉRIES UNIFORMES DE PAGAMENTOS – são pagamentos, prestações ou termos, de idêntico valor, e distribuídos igualmente no tempo, utilizadas para pagar um financiamento, ou constituir um capital. Em financiamentos, se a primeira parcela é paga após o primeiro período de tempo, é dita *postecipada*. Se paga no instante *0*, é dita *antecipada*.**

Neste texto trataremos apenas das anuidades postecipadas e para quitar um empréstimo. As demais situações estão fartamente explicitadas e demonstradas na literatura.

Passemos à demonstração do cálculo da prestação, presente em todos os livros de matemática financeira, com uso da fórmula da soma dos termos de uma Progressão Geométrica(PG) finita, como em Walter de Francisco (FRANCISCO, 2009, p. 96). Destacaremos, no entanto, os pontos que fomentarão as conclusões de nossa dissertação.

A demonstração parte da premissa que queremos $n$ prestações $P$, equivalentes ao capital emprestado $D_0$.

O conceito de equivalência é definido como a igualdade, em uma data preestabelecida, entre capitais que vencem em datas distintas.

Rodolpho Baptista de S. Thiago o explicita (THIAGO, 1937, p. 384):

> **206. Capitaes equivalentes.** – Varios capitaes se dizem *equivalentes* quando os *seus valores actuaes*, calculados com a mesma taxa, são iguaes.
>
> Sejam $C'$ e $C''$ dois capitais pagáveis respectivamente em $t'$ e $t''$ annos. Estes dois capitaes serão equivalentes, quando, á mesma taxa *r*, os seus valores actaues *v'* e *v''* forem iguais, isto é,
>
> $$\frac{C'}{(1+r)^{t'}} = \frac{C''}{(1+r)^{t''}}$$
>
> $$C'(1+r)^{-t'} = C''(1+r)^{-t''}$$

Será utilizado, ainda, a proposição de que, em juros compostos, se capitais são equivalentes em um determinado período, eles são equivalentes em qualquer época, desde que se use a mesma taxa de juros (THIAGO, 1937, p. 385):

> ***Proposição.*** – No desconto composto, si dois capitaes são equivalentes em uma certa época, eles são constantemente equivalentes.
>
> Suppondo $v$ o valor acutal presente commum aos dois capitaes, a formula $v_p = v(1+r)^p$ nos mostra que eles continuarão a ter valor actual commum em uma epoca qualquer $p$.
>
> Um capital $C$ se diz *equivalente ao conjuncto de tres outros capitaes* $C', C''$ *e* $C'''$, quando o valor actual daquelle é a somma dos valores actuaes destes, considerando a mesma taxa para o desconto de todos os capitaes.
>
> Chamando $v$, $v'$, $v''$ e $v'''$ respectivamente os valores actuaes dos capitaes $C$, $C'$, $C''$ e $C'''$, descontados á mesma taxa $r$, esses capitaes serão equivalentes, si tiver
>
> $$v = v' + v'' + v'''$$
>
> ou
>
> $$\frac{C}{(1+r)^t} = \frac{C'}{(1+r)^{t'}} + \frac{C''}{(1+r)^{t''}} + \frac{C'''}{(1+r)^{t'''}}$$

> Dada a equivalência em uma época, ella se verifica em uma época qualquer.

Essa propriedade também está registrada na obra de Clodomiro Furquim de Almeida (ALMEIDA, 1957, p. 83):

> Podemos então concluir que no regime de capitalização composta, se dois capitais são equivalentes em uma determinada época de referência, o serão em qualquer época.

Lastreada nessas premissas, a Proposição 3, a seguir, estabelece a equivalência no instante 0.

A Figura 3 ilustra o processo matemático de equivalência.

$$D_0 = \frac{P}{(1+i)} + \frac{P}{(1+i)^2} + \frac{P}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{P}{(1+i)^k} + \cdots + \frac{P}{(1+i)^n}$$

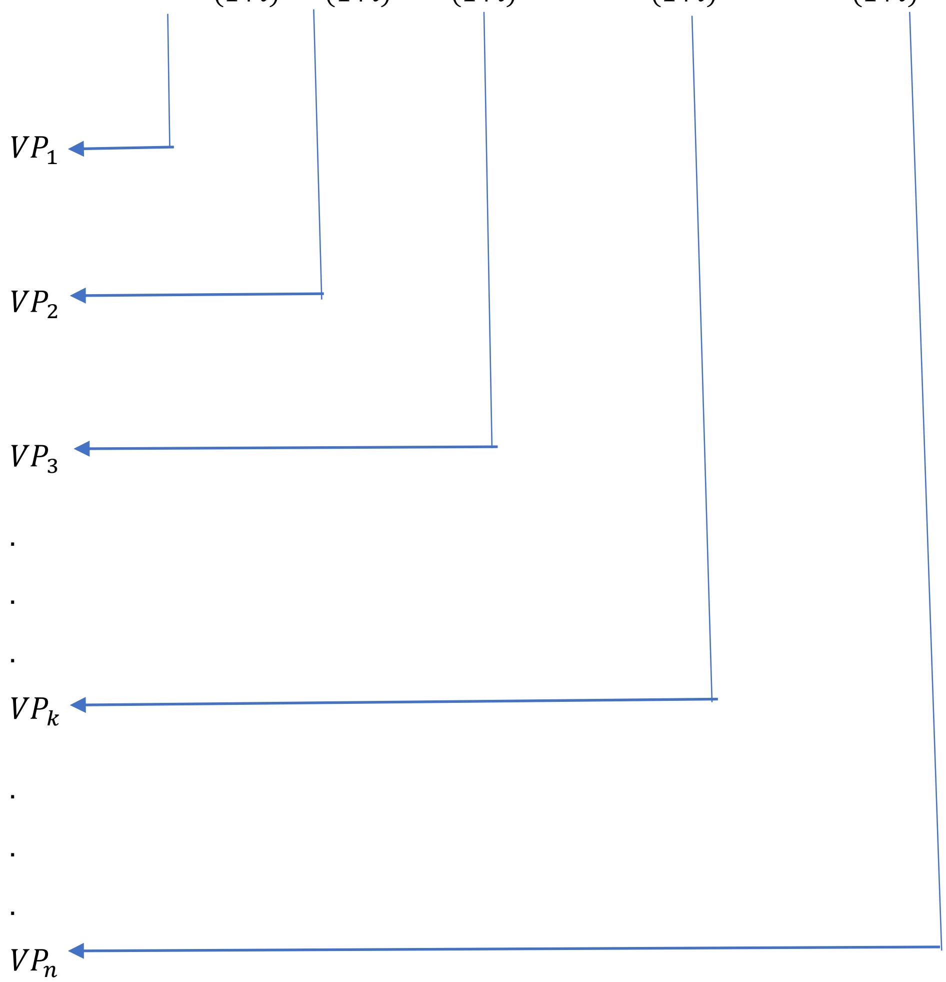


**Figura 3 - Equivalência entre capital emprestado e prestações iguais**
**Fonte: autor.**

**PROPOSIÇÃO 3: O valor $P$ de uma anuidade postecipada, em um financiamento de capital $D_0$, em $n$ períodos, a uma taxa de juros i, é dado por $\boldsymbol{P = D_0\left[\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n-1}\right]}$ .**

**Demonstração:**

*Vamos chamar atenção para o fato de os* $VP_k$ *serem números reais positivos e representarem os valores presentes de cada prestação no momento* $k$, $1 \leq k \leq n$ . *Assim:*

$$D_0 = VP_1 + VP_2 + VP_3 + \cdots + VP_k + \cdots + VP_n$$

*Consideremos, assim, a seguinte equação, que representa a equivalência, no momento 0, entre o capital emprestado,* $D_0$, *e prestações P:*

$$D_0 = \frac{P}{(1+i)} + \frac{P}{(1+i)^2} + \frac{P}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{P}{(1+i)^k} + \cdots + \frac{P}{(1+i)^n} \qquad (\mathbf{1})$$

*Colocando P em evidência, obtemos:*

$$D_0 = P\left(\frac{1}{(1+i)} + \frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{1}{(1+i)^k} + \cdots + \frac{1}{(1+i)^n}\right)$$

*A expressão entre parênteses equivale à soma dos termos de uma progressão geométrica com n termos, que denotaremos por* $S_n$ , *isto é:*

$$S_n = \frac{1}{(1+i)} + \frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{1}{(1+i)^k} + \cdots + \frac{1}{(1+i)^n}$$

*A equação* $(\mathbf{1})$ *torna-se, então:*

$$D_0 = P.S_n \qquad (\mathbf{2})$$

*A fórmula desse resultado está demonstrada na literatura (MORGADO, 2015, p. 27/28), de modo que a aplicaremos de forma direta, como a seguir:*

$$S_n = a_1 \frac{(q^n - 1)}{q - 1} \qquad (\mathbf{3})$$

*Em que:*

$S_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \cdots + a_1 q^{n-1}$

*Sendo* $a_1$ *o primeiro termo da sequência e* $q$ *a razão.*

*Na expressão entre parênteses de* $(\mathbf{1})$ *, temos:*

$$a_1 = \frac{1}{1+i}$$

*e*

$$q = \frac{1}{1+i}$$

*Substituindo esses valores em* $(\mathbf{3})$*, obtemos:*

$$S_n = \frac{\left(\frac{1}{(1+i)}\right)\left[\left(\frac{1}{(1+i)}\right)^n - 1\right]}{\frac{1}{(1+i)} - 1} = \frac{\left(\frac{1}{(1+i)}\right)\left[\frac{1^n}{(1+i)^n} - 1\right]}{\frac{1-1-i}{1+i}} =$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{(1+i)}\right)\left[\frac{1}{(1+i)^n} - 1\right]}{\frac{-i}{1+i}} = \left(\frac{\cancel{1+i}}{-i}\right)\left(\frac{1}{\cancel{1+i}}\right)\left(\frac{1}{(1+i)^n} - 1\right)$$

$$= \frac{1}{i} - \frac{1}{(1+i)^n i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}$$

*Substituindo* $S_n$ *em* $(\mathbf{2})$*:*

$$D_0 = P\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}\right] \qquad (\mathbf{4})$$

*Ou, evidenciando P :*

$$P = D_0 \left[\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}\right] \qquad (\mathbf{5})$$

Por intermédio dessa fórmula, podemos obter o valor da prestação, a partir de um capital $D_0$ que se deseja financiar, definidos a quantidade de pagamentos iguais $(\mathrm{n})$ e a taxa de juros $(\mathrm{i})$.

A estrutura entre colchetes era, nos livros de matemática financeira mais antigos, antes da popularização das calculadoras financeiras HP12C e planilhas eletrônicas, representada pela expressão $a_{\overline{n}|i}$ , denominada *a,n cantoneira i* , ficando a seguinte formulação para $(\mathbf{5})$ (MATHIAS & GOMES, 2008):

$$P = D_0 . a_{\overline{n}|i}$$

Os resultados de $a_{\overline{n}|i}$ eram fornecidos em tabelas financeiras para diversos valores de $n$ e $i$, de maneira que o número encontrado na tabela era multiplicado pelo valor à vista para se obter a prestação fixa mensal a se pagar. No passado, era comum vermos os vendedores em lojas de eletrodomésticos utilizando uma tabelinha colada em uma calculadora simples com valores de $a_{\overline{n}|i}$ para fornecer essa informação ao cliente.

Definida a forma de como se encontrar a prestação em um financiamento em prestações iguais, passemos a descrever como são construídos os planos de amortização, os quais permitem evidenciar o que se paga de juros e amortização em cada parcela paga.

## 3.2 - Do plano de amortização tradicional no SAF

Amortizar significa diminuir a dívida principal contraída. Em cada pagamento de um empréstimo, o fator tempo leva à necessidade de pagar os juros correspondentes. Logo, há de se avaliar em cada pagamento o que se está amortizando do principal e o que se de desembolsa com juros.

Abelardo de Lima Puccini (PUCINNI, 2014) chama a atenção para uma convenção internacional segundo a qual se deve priorizar o pagamento dos juros a cada desembolso. Assim, calculada a prestação por $(\mathbf{5})$**,** subtraímos os juros devidos sobre o saldo devedor do mês anterior e o restante constitui a parcela de amortização. Observem que, nesse formato, **os juros pagos correspondem aos juros devidos.**

Os livros de matemática financeira no Brasil consultados reproduzem este método para construir os planos de amortização pelo SAF.

Vejamos um exemplo: $R\$\ 10.000{,}00$, financiados em $4$ prestações mensais a uma taxa de juros compostos de $10\%$ ao mês. Por $(\mathbf{5})$, teríamos:

$$P = 10.000{,}00.\left[\frac{0{,}1(1+0{,}1)^4}{(1+0{,}1)^4-1}\right]$$

$$P = 3.154{,}71$$

As $4$ prestações terão o valor de $R\$\ 3.154{,}71$. Após $1$ mês, o tomador soma $R\$\ 1.000{,}00$ de juros a sua dívida ($10\%$ x $R\$\ 10.000{,}00$)*.* Logo, adotando o critério de priorizar os juros, $R\$\ 2.154{,}71$ correspondem à amortização do principal ($R\$\ 3.154{,}71$ - $R\$\ 1.000{,}00$). Para o segundo pagamento, a taxa de juros vai incidir sobre um saldo devedor menor, de $R\$\ 7.845{,}29$, resultado da amortização ocorrida no primeiro desembolso ($10.000{,}00 - 2.154{,}71$). A partir dessa explanação é possível representar o plano de amortização conforme tabela $1$:

| n | Prestação | Amortização | Juros | Saldo amortizado | Saldo Devedor |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | | 10.000,00 |
| 1 | 3.154,71 | 2.154,71 | 1.000,00 | 2.154,71 | 7.845,29 |
| 2 | 3.154,71 | 2.370,18 | 784,52 | 4.524,89 | 5.475,11 |
| 3 | 3.154,71 | 2.607,20 | 547,52 | 7.132,09 | 2.867,91 |
| 4 | 3.154,71 | 2.867,91 | 286,79 | 10.000,00 | 0,00 |

**Tabela 1 - Plano de Amortização Tradicional**
**Fonte: autor**

Esse é o plano tradicional presente nas publicações acerca do tema. Na primeira coluna temos o valor da prestação obtida por meio de $(\mathbf{5})$; na segunda coluna está demonstrado a amortização de cada período, obtida pela subtração dos juros da prestação; na terceira coluna temos os juros obtidos em cada mês, resultado da aplicação da taxa pelo saldo devedor do mês anterior; a quarta coluna evidencia o saldo amortizado, cumulativamente, obtido pela soma do saldo amortizado do mês anterior com a amortização do mês[19] . Finalmente, a quinta coluna vai destacar o saldo devedor a cada mês, obtido pela subtração do saldo devedor do mês anterior pela amortização do período.

Como já alertara Abelardo de Lima Puccini (PUCCINI, 2014), prevalece a técnica convencionada de que os juros contidos na prestação são os calculados sobre o saldo devedor do mês anterior. Inclusive a bibliografia acerca do tema apresenta a seguinte fórmula para o seu cálculo (MORGADO, 2015, p. 71):

$$J_k = iD_{k-1}$$

Logo, $J_k$ corresponde aos juros pagos no período $k$ e $D_k$ o saldo devedor no instante $k$. Logo, $D_{k-1}$ equivale ao saldo devedor do período anterior.

**OBSERVAÇÃO 1: Ao aplicar essa formulação e calcular a amortização do período como a subtração dos juros da prestação, $\boldsymbol{A_k = P - J_k}$ , transformam-se automaticamente os juros devidos em juros pagos.**

Logo, pelo plano tradicional, como todo os juros gerados em cada período são pagos, não haveria anatocismo. Essa constatação é fundamental para a conclusão dessa dissertação.

## 4 – DA EXISTÊNCIA DE ANATOCISMO NA TABELA PRICE

---

[19] Pode ser obtido também pela subtração do saldo devedor inicial, fixo, menos o saldo devedor do mês.

### 4.1 - Da defesa de Jorge Meschiatti Nogueira

Parte dos que proclamam a existência do anatocismo na tabela Price discorrem que o simples uso da fórmula de juros compostos na construção da prestação do SAF já se constitui em uma prova da ocorrência do fenômeno.

Um dos mais enfáticos defensores desta tese é Jorge Meschiatti Nogueira, segundo o qual juros compostos são sinônimos de anatocismo (NOGUEIRA, 2013). Logo, pelo fato de o próprio Richard Price, em sua obra principal, apresentar suas tabelas como construídas por juros compostos, estaria demonstrada a existência do anatocismo no SAF.

De fato, as tabelas de fatores de Price são enfáticas quanto ao uso de juros compostos. Basta ver o cabeçalho de uma delas (PRICE, 1783, p. 18):

> TABLE I.
>
> The presente Value of 1l to be received at the End of any Number of Years, not exceeding 100; discounting at the Rate of 3, $3^{1/2}$ , 4, $4^{1/2}$, 5, and 6 *per cent*. Compound Interest. Grifo nosso.

O que pode ser comprovado na própria tabela, parte reproduzida a seguir :

| Yrs | 3 per Ct. | $3^{1/2}$ per Ct. | 4 per Ct. | $4^{1/2}$ per Ct. | 5 per Ct. | 6 per Ct. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | ,970874 | ,966184 | ,961538 | ,956938 | ,952381 | ,943396 |
| 2 | ,942590 | ,933511 | ,924556 | 915730 | ,907029 | ,889996 |
| 3 | ,915142 | ,901943 | ,888996 | ,876297 | ,863838 | ,839619 |

**Tabela 2 - Valor presente de 1 Libra em 1,2,3 anos, a diferentes taxas**
**Fonte:** (PRICE, 1783, p. 18).

A tabela original contém valores até 100 anos, os quais correspondem ao valor presente de 1 libra recebida, digamos, em um ano, dois anos etc., descontadas às taxas de $3\%, 3{,}5\%, 4\%, 4{,}5\%, 5\%$ e $6\%$.

Usando a fórmula de juros compostos, $D_0 = D_n/(1+i)^n$ , obtemos, para $1$ libra a ser recebida em $2$ anos, com juros de $3{,}5\%$:

$$\frac{1}{(1+0{,}035)^2}=\frac{1}{1{,}071225}=0{,}933511$$

O resultado corresponde ao evidenciado na tabela 2. Procede, assim, a argumentação de Nogueira segundo a qual a tabela I do livro de Richard Price usa de juros compostos para seu resultado (NOGUEIRA, 2013, p. 60).

Mas esse não é um bom exemplo, tendo em vista que o SAF, objeto do nosso estudo, usa de anuidades, ou seja, várias prestações para se equivaler a um capital emprestado. Ao passar para a análise da tabela II de Price, Nogueira encontra resultados mais adequados para sua defesa.

Vejamos como essa tabela é apresentada (PRICE, 1783, p. 21):

TABLE II.

The present Value of an Annuity of one Pound for any Number of Years, not exceeding 100, at the several Rates of 3, $3^{1/2}$, 4, 5, and 6 *per cent*.

Abaixo apresentamos parte da tabela II de Price:

| Yrs | 3 per Ct. | $3^{1/2}$ per Ct. | 4 per Ct. | 5 per Ct. | 6 per Ct. |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | ,9708 | ,9662 | ,9615 | ,9523 | ,9433 |
| 2 | ,9133 | 1,8997 | 1,8860 | 1,8594 | 1,8333 |
| 3 | 2,8286 | 2,8016 | 2,7750 | 2,7232 | 2,6730 |
| 4 | 3,7170 | 3,6731 | 3,6298 | 3,5459 | 3,4651 |
| 5 | 4,5797 | 4,5151 | 4,4518 | 4,3294 | 4,2123 |
| 6 | 5,4971 | 8,3286 | 5,2421 | 5,0756 | 4,9173 |
| 7 | 6,2302 | 6,1145 | 6,0020 | 5,7863 | 5,5823 |
| 8 | 7,0196 | 6,8740 | 6,7327 | 6,4632 | 6,2097 |
| 9 | 7,7861 | 7,6077 | 7,4353 | 7,1078 | 6,8016 |
| 10 | 8,5302 | 8,3166 | 8,1108 | 7,7212 | 7,3600 |

**Tabela 3 – Valor presente de anuidades de 1 Pound**
**Fonte: (PRICE, 1783, p. 21).**

Essa tabela representa fatores resultantes da fórmula a seguir, já demonstrada *(4)*:

$$D_0=P.\left[\frac{(1+i)^n-1}{i(1+i)^n}\right]$$

Assim, três prestações de *1* Pound corresponderiam, a uma taxa de *3,5%* ao período, a:

$$D_0 = 1.\left[\frac{(1+0{,}035)^3 - 1}{0{,}035(1+0{,}035)^3}\right]$$

$$D_0 = 2{,}801637$$

Este valor corresponde ao destacado na tabela. Ou seja, Price utiliza a fórmula para encontrar o valor da prestação. Ou, tendo o valor das prestações, obtém o seu valor presente, ou capital emprestado, ou valor à vista.

Walter De Francisco, reproduz [20], em parte, uma das tabelas de Price, como a seguir (FRANCISCO, 2009, p. 312):

**TÁBUA V**

VALOR ATUAL – Valores de $a_{n\,i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}$

| n | 2,5% | 3% | 3,5% | 4% |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,975610 | 0,970874 | 0,966184 | 0,961538 |
| 2 | 1,927424 | 1,913469 | 1,899694 | 1,886094 |
| 3 | 2,856024 | 2,828611 | 2,801637 | 2,775091 |
| 4 | 3,761974 | 3,717098 | 3,673079 | 3,629895 |
| 5 | 4,645829 | 4,579707 | 4,515052 | 4,451822 |
| 6 | 5,508125 | 5,417191 | 5,328553 | 5,242137 |
| 7 | 6,349391 | 6,230283 | 6,114544 | 6,002054 |
| 8 | 7,170137 | 7,019692 | 6,873956 | 6,732745 |
| 9 | 7,970866 | 7,786109 | 7,607687 | 7,435331 |
| 10 | 8,752064 | 8,530203 | 8,316605 | 8,110896 |

**Tabela 4 – Valor presente de anuidades de 1 unidade monetária.**
**Fonte: (FRANCISCO, 2009, p. 312).**

Voltando a Nogueira, o autor vai usar a “table II” de Price para assegurar que os juros compostos são usados na sua composição, conforme reproduzimos a seguir (NOGUEIRA, 2013, p. 61):

[20] Podemos encontrar tabelas de idêntica natureza em Leland Blank & Anthony Tarquin (BLANK, 2008, ps. 714 a 742), Luiz A. F. Cavalheiro (CAVALHEIRO, 1985, ps. 251 a 262) e Rodolpho Baptista de S. Thiago (THIAGO, 1937, p. 580).

Anatocismo ou Juros Compostos:

$(1 + 2\%)^{10} = 1{,}218994 \leftrightarrow 1{,}218994 - 1 = 21{,}8994\%$

**Produzindo a fração ou parcela a ser paga com Juro Composto,** ou *Juro sobre Juro*.

**Numerador =** 1,218994 – 1 = 21,8994%

**Denominador = Índice do numerador, multiplicado pela razão da progressão geométrica** 1,218994%x2% = 0,02438

$$\frac{21{,}8994\%}{0{,}02438} = 8{,}982585$$

Dessa forma, um Capital financiado (ou saldo devedor) de 8,9825... corresponde a 10 parcelas de "1" uma unidade monetária a 2% por período (ao mês é mais comum).

Observamos que Nogueira simplesmente está a usar, passo a passo, a expressão $\frac{(1+i)^n-1}{i(1+i)^n}$, ao que credita como prova da existência de anatocismo na tabela Price.

Em sua defesa, cita ainda texto do Banco Central do Brasil – BCB, em que a fórmula de anuidade utilizada é qualificada como equivalente ao uso de juros compostos (NOGUEIRA, 2013). De fato, consultando o site do BCB, comprovamos a afirmação do autor (BANCO CENTRAL DO BRASIL, 2020, p. 1):

**Metodologia do Financiamento com Prestações Fixas**

Cálculo com juros compostos e capitalização mensal.

$$q_0 = \frac{1-(1+j)^{-n}}{j}\, p$$

Onde:
*n* = Nº de Meses
*j* = Taxa de Juros Mensal
*p* = Valor da Prestação
$q_0$ = Valor Financiado

Nogueira destacou, ainda, que, a despeito das demonstrações evidenciadas anteriormente, a apresentação de um caso concreto confirmaria sua tese. Como ocorreria a presença de juro composto em cada parcela de financiamento, bastaria trazê-las a valor presente: como os saldos restantes, obtidos pelo desconto pela fórmula de juros compostos, se somados, equivalem ao capital inicial, ficaria provado o anatocismo.

Simula, então, um financiamento de *R$ 10.000,00*, a juros de *3%* ao mês, a ser pago em *4* prestações de *R$ 2.690,27*, encontrado pela fórmula de anuidade, equação **(5).** Descontando cada parcela, temos (NOGUEIRA, 2013, p. 66)[21]:

$2690{,}27/(1 + 1\%)^4 = 2390{,}27$

$2690{,}27/(1 + 3\%)^3 = 2461{,}98$

$2690{,}27/(1 + 3\%)^2 = 2533{,}84$

$2690{,}27/(1 + 3\%)^1 = 2611{,}91$

Soma Total sem Juros:

2390,27 + 2461,98 + 2533,84 + 2611,91 = 10.000,00

Pelas explanações anteriores, podemos sintetizar a tese de Nogueira para justificar a presença do anatocismo na tabela Price, conforme observação 2.

**OBSERVAÇÃO 2**: **ocorre anatocismo na tabela Price por ser construída com o uso da fórmula dos juros compostos, $D_n = D_0(1 + i)^n$, e pela de anuidade, $D_0 = P.\left[\frac{(1+i)^n-1}{i(1+i)^n}\right]$, sendo esta derivada daquela.**

Mas Nogueira ainda vai apresentar o que ele denomina de prova "pelo método matemático que a tabela Price (Sistema Francês de Amortização) é construída por Juro Composto" (NOGUEIRA, 2013, p. 81).

Para tanto, sugere a hipótese de que, desconhecendo-se a fórmula que gera a parcela da tabela Price (PMT), o valor futuro (VF) seria igual ao somatório das prestações, capitalizadas para o momento $n$, como a seguir:

$$VF = PMT \sum_{n=0}^{n-1} (1 + i)^n$$

[21] Na primeira linha da citação há um equívoco do texto de JosJorge Meschiatti Nogueira ao usar a taxa de 1%. O correto seria $(1 + 3\%)^4$.

$$PMT = \frac{VF}{\sum_{n=0}^{n-1}(1+i)^n}$$

Adaptamos o formato do exposto por Nogueira, tendo em vista que sua apresentação, apesar de estar bem organizada, não tem o rigor da linguagem matemática formal: mistura símbolos com texto[22].

Em seguida, supondo o capital inicial de $R\$\ 10.000{,}00$, a $10\%$ ao mês, Nogueira calcula o valor futuro após 4 meses:

$$VF = 10.000{,}00(1+0{,}1)^4 = 14.641{,}00$$

Em seguida, para encontrar PMT, o autor retorna a sua hipótese:

$$PMT = \frac{14641{,}00}{[(1+0{,}1)^0 + (1+0{,}1)^1 + (1+0{,}1)^2 + (1+0{,}1)^3]}$$

Como o denominador representa a soma dos termos de uma PG de $4$ termos, com $a_1 = 1$ e $q = 1{,}1$, temos:

$$PMT = \frac{14.641{,}00}{\frac{1((1{,}1)^4-1)}{1{,}1-1}} = \frac{14.641{,}00}{4{,}641} = 3.154{,}71$$

Mas Nogueira faz questão de detalhar essa operação, prestação a prestação (NOGUEIRA, 2013, p. 85):

$$VF_1 = PMT\text{x}(1+0{,}1)^3 = PMT\text{x}1{,}3310$$

$$VF_2 = PMT\text{x}(1+0{,}1)^2 = PMT\text{x}1{,}2100$$

$$VF_3 = PMT\text{x}(1+0{,}1)^1 = PMT\text{x}1{,}1000$$

$$VF_4 = PMT\text{x}(1+0{,}1)^0 = PMT\text{x}1{,}0000$$

Assim:

$$VF_1 + VF_2 + VF_3 + VF_4 = PMT.(1{,}331 + 1{,}21 + 1{,}1 + 1)$$

$$VF = PMT.4{,}941$$

Utilizando-se o valor futuro já calculado das 4 parcelas:

---

[22] “FV (M) = PMT x ∑ índice de i até a última parcela PMT” (NOGUEIRA, 2013, p. 83).

$$PMT = \frac{14.641,00}{4,941}$$

$$PMT = 3.154,71$$

Nogueira finaliza afirmando que esse resultado, comprovadamente obtido pela equação de juros compostos, é idêntico ao obtido pela fórmula de anuidade constante da tabela Price (NOGUEIRA, 2013, p. 85):

$$10.000,00 \text{ x} \left[\frac{((1+0,1)^4 - 1)x0,1}{(1+0,1)^4}\right] = 3.154,71$$

Sua explanação final, sobre o que considera sua demonstração com recursos matemáticos, é reproduzida a seguir (NOGUEIRA, 2013, p. 86):

> Conclusão: A parcela da Tabela Price é construída em Juro Composto (juro sobre juro), pois é igual à aplicação de juro sobre juro demonstrada em nossa hipótese.

Comentaremos suas conclusões em tópico próprio.

### 4.2 - Da defesa de Demétrio Antunes Bassili

Segundo Demétrio Antunes Bassili, a negativa da existência de juros sobre juros na tabela Price é alicerçada no uso dos juros com base no saldo devedor nos demonstrativos de financiamentos (BASSILI, 2014).

Exemplificando: um financiamento de *R$ 15.000,00* pelo SAF, a *5%* ao mês e em 36 parcelas, apresenta a prestação de *R$ 906,52*. Após um mês, são gerados *R$ 750,00* de juros (*0,05x15.000*), levando a um saldo devedor de *R$ 15.750,00* que, após paga a primeira prestação, resulta em *R$ 14.843,48*. Logo, todos os juros gerados no período são pagos (*R$ 156,52* são amortizados). Bassili denomina essa interpretação dos juros como forma **operacional**.

Há, entretanto, outro modo, **original**, no qual os juros não subtraem o saldo devedor, “pelo simples fato de que ele não retrata a realidade matemática que deu origem ao financiamento, a essência do mesmo” (BASSILI, 2014, p. 14).

O autor enfatiza, assim, que a construção matemática das parcelas do financiamento pelo SFA indica que cada uma delas resulta da aplicação de juros sobre um valor presente. A soma dos valores presentes corresponderia ao total da dívida, ou do valor emprestado, no momento $n = 0$.

Desse modo, no mesmo exemplo citado, teríamos, na primeira prestação paga, não *R$ 750,00* de juros e *R$ 156,52* de amortização, mas sim R$ 863,35 amortizados[23] (valor presente da prestação) e R$ 43,17 de juros (R$ 906,52 – R$ 863,35). Ou seja (BASSILI, 2014, p. 16/17):

> Apesar de operacionalmente ser coerente, originalmente não é adequado dizer que a primeira prestação do exemplo em R$ 906,52 é formada por R$ 156,52 para amortização do principal e R$ 750,00 de juros, uma vez que estes valores não foram os responsáveis pela formação da mesma.

Segundo o autor, há uma diferença entre os *R$ 750,00* de juros gerados e os *R$ 43,17* originalmente pagos, que se junta ao saldo devedor. Logo, no período entre a primeira e a segunda prestação incidirão juros sobre *R$ 706,83* (diferença entre *R$ 750,00* e *R$ 43,17*), no caso, *R$ 35,34* (*0,05x706,83*). Ora, como *R$ 706,83* são juros, fica evidenciado o anatocismo no pagamento da segunda prestação. É como conclui Bassili (BASSILI, 2014, p. 17):

> Observe também que os R$ 35,34 de juros não foram gerados a partir do principal devido, mas sim, a partir dos juros restantes, provando a capitalização de juros no sistema que utiliza a tabela Price e por analogia em qualquer sistema que aplique juros sobre o saldo devedor.

Ao final, o autor alerta que o total de juros pagos originalmente é igual ao total dos juros operacionais desembolsados (BASSILI, 2014, p. 13):

> Antes de prosseguir, deve-se deixar claro que sob qualquer uma das duas óticas, o financiamento é quitado através dos pagamentos das mesmas prestações ocorridos nas mesmas datas e a totalização final dos juros pagos operacionalmente é igual ao total dos juros pagos originalmente.

---

[23] $906{,}53/(1 + 0{,}05)^1$

# 5 - DA INEXISTÊNCIA DE ANATOCISMO NA TABELA PRICE

A tese principal dos que defendem a ausência de anatocismo na tabela Price enfatiza que, como em cada prestação está embutido o juro sobre o saldo devedor do mês anterior, nunca existe saldo de juros para o período posterior, logo, impossível se pagar juros sobre juros.

## 5.1 - Da defesa de Abelardo de Lima Puccini

Como visto, a literatura adota a convenção de, em cada prestação do SAF, priorizar o pagamento dos juros devidos, deixando como resíduo a amortização.

Abelardo de Lima Puccini faz defesa dessa tese em artigo para advogados e magistrados. Publicado inicialmente em dez/14 (PUCCINI, 2014), foi atualizado em nov/19 (PUCCINI, 2019).

Preliminarmente, o autor afirmou que juros compostos não geram necessariamente juros sobre juros (PUCCINI, 2019) :

> Conclui-se, dessa forma, que o anatocismo somente ocorre no regime de juros compostos quando os juros de cada período não são integralmente pagos no final dos respectivos períodos. Podemos, assim, afirmar que “juro composto” não é sinônimo de “juros sobre juros”. Esse é, possivelmente, um dos principais pontos que gera controvérsias.

Em seguida, o autor defendeu que o pagamento de juros devidos devem ser priorizados em cada prestação (a amortização seria o resíduo), com base em:

- convenção adotada em todos os países;
- na literatura relacionada a matemática financeira, nacional e estrangeira;
- uso da convenção nas calculadoras HP12C e Planilha Excel;
- art. 354 do Código Civil brasileiro.

Finalmente, Abelardo de Lima Puccini critica aqueles que defendem a geração de juros em cada prestação, a partir da atualização do valor presente, como defendido por Bassili (BASSILI, 2012). Ao priorizar a amortização, infringir-se-ia o art. 354 do Código Civil. Por essas razões o modelo não tradicional é definido pelo autor como distorcido (PUCCINI, 2019):

> De acordo com esse método de cálculo, do qual, com a devida vênia, discordamos veementemente, o pagamento das amortizações tem preferência sobre o pagamento dos juros. Em primeiro lugar, são pagas as amortizações; o restante é, posteriormente, usado para liquidação dos juros. Essa prioridade pelas amortizações contraria os critérios adotados nos livros de matemática financeira e calculadoras financeiras, e só é válida se prevista em contrato, sob pena de violar o artigo 354 do CC.
>
> O Quadro 2, a seguir, mostra os valores dessa Tabela Price "Distorcida", utilizada na liquidação de um financiamento com os mesmos dados do exemplo anterior - Quadro 1. No exemplo a seguir, a prestação mensal, também obtida pela HP-12C, tem o valor de R$31.547,08.

**Quadro 2 - Tabela Price "Distorcida" a Juros Compostos com Suposto Anatocismo**

| Mês (n) | Fator Desc. Composto $1/(1+i)^n$ (A) | Juros Devidos (B) | Pagamentos no Final do Mês: Prestação (PMT) (C) | Amortização VP de PMT (D)=(C) x (A) | Juros Pagos (E)=(C)-(D) | Juros Não Pagos (F)=(B)-(E) | Saldo Devedor Principal (+) Juros (G) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | | | | 100.000,00 |
| 1 | 0,90909 | 10.000,00 | 31.547,08 | 28.679,16 | 2.867,92 | 7.132,08 | 78.452,92 |
| 2 | 0,82645 | | 31.547,08 | 26.071,97 | 5.475,11 | | 54.751,13 |
| 3 | 0,75131 | | 31.547,08 | 23.701,79 | 7.845,29 | | 28.679,16 |
| 4 | 0,68301 | | 31.547,08 | 21.547,08 | 10.000,00 | | 0,00 |
| | | | Soma | 100.000,00 | | | |

> (...)
>
> Sob a ótica da Tabela Price "Distorcida", na medida em que o valor do principal foi subdividido criando multi financiamentos, cada prestação liquida a parte do principal a ela atribuída e também os respectivos juros devidos desde o início até a data de pagamento da respectiva prestação. Assim, por essa dinâmica, a 1ª. prestação paga apenas os juros que cabem a ela, apesar do seu montante ser suficiente para liquidar os juros das prestações subsequentes, que acabam sendo capitalizados por falta de pagamento, descumprindo a lei.
>
> Não à toa, o art. 354 do CC determina a priorização do pagamento dos juros com o objetivo de impedir sistemáticas como a da Tabela Price "Distorcida" que instalam o anatocismo. E, dito isso, entendemos que: considerar as prestações do financiamento como a soma de vários financiamentos independentes é uma mera construção teórica que não faz sentido financeiro e que não atende dispositivos legais.

# 6 - DAS NOSSAS CONSIDERAÇÕES SOBRE ANATOCISMO NO SAF

Preliminarmente, é preciso dizer que a chamada prova matemática apresentadas por José Jorge Meschiatti Nogueira (tópico 4.1) não merece esta denominação, pois apenas apresentou exemplos que tão só evidenciaram o uso da fórmula do juro composto no cálculo da prestação.

## 6.1 - Dos juros compostos na construção da prestação no SAF

Como bem defendeu José Jorge Meschiatti Nogueira, é incontestável que a fórmula de juros compostos faz parte da construção da prestação, ou anuidade, no SAF. E, ao contrário da narrativa de Puccini (PUCCINI, 2014), não há como subtrair a sinonímia entre juros compostos e capitalização de juros, como debateremos em tópicos seguintes.

Da mesma forma, como também já observado, na medida em que aplicamos a fórmula dos juros compostos, temos anatocismo.

Mas duas considerações relevantes devem ser feitas a respeito. Em primeiro lugar, a fórmula de juros compostos no SAF não é aplicada sobre o capital emprestado $D_0$, mas sobre parcelas dele.

Em segundo lugar, os juros gerados em um financiamento $D_0$ em $n$ parcelas, segundo tabela Price, são inferiores aos existentes sobre $D_0$ em um único pagamento no periodo $n$. Essas conclusões serão discutidas a seguir.

### 6.1.1 - Da unicidade do anatocismo

Defendemos que, se o anatocismo decorre da fórmula de juros composto, então um capital $D_0$, a um prazo $n$ e taxa $i$, geraria montante $D_n$ único. Ou seja, pela fórmula $D_0(1+i)^n$, um determinado capital, em um prazo prefixado, bem como a uma taxa de juros específica, proporciona unicidade da cobrança de juros sobre juros.

De forma intuitiva, difícil imaginar um empréstimo, nas mesmas condições, gerar dois anatocismos, representado pelo pagamento do principal e juros em $n$. Para tanto, é preciso reconhecer que o fenômeno se realiza com o desembolso financeiro correspondente.

Como os juros sobre juros gerados, expresso na fórmula $J = D_0[(1+i)^n - 1]$, são a expressão do fenômeno, podemos demonstrar a sua unicidade, para o mesmo $i$ e $n$, o que será feito no capítulo 7.

### 6.1.2 – Da constatação de que os juros pagos no SAF serem inferiores aos gerados em um pagamento único ao final do prazo.

Diferentemente de um pagamento único sobre um saldo devedor, após um prazo $n > 1$, em se tratando de anuidades (SAF), os juros compostos incidem sobre parcelas do saldo devedor inicial. Ou seja, não temos $D_n = D_0(1+i)^n$ , mas $P = VP_1(1+i)^1, P = VP_2(1+i)^2, .....,$ $P = VP_n(1+i)^n$ e $D_0 = VP_1 + VP_2 + VP_3 + \cdots + VP_n$.

Nessa comparação, os juros gerados e pagos pelo SAF, no plano tradicional, parecem ser sempre menores que os juros em função de pagamento único. Intuitivamente, podemos perceber essa conjectura imaginando que um pagamento unitário representa a capitalização ocorrendo sobre o valor inicial a cada período. Mas se financiarmos com pagamentos periódicos e idênticos, podemos intuir menos juros já que o saldo devedor vai diminuindo a cada parcela quitada.

Se tomamos emprestado *R$ 10.000,00* por *5* meses para quitação em uma prestação única a juros de *10%* ao mês, pagaremos o total de *R$ 16.105,10*, como resultado da expressão $\mathrm{D}_5 = 10.000(1+0{,}1)^5$. Observamos que, nesse caso, os juros pagos foram de *R$ 6.105,10 (16.105,10 – 10.000,00).*

Mas se financiássemos o mesmo valor em 5 prestações mensais iguais, a primeira com 30 dias, a mesma taxa de juros, pagaríamos parcelas de *R$ 2.637,97*. A seguir, o plano de amortização tradicional:

| | Prestação | Amortização | Juros | Saldo Amortizado | Saldo Devedor |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | | 10.000,00 |
| 1 | 2.637,97 | 1.637,97 | 1.000,00 | 1.637,97 | 8.362,03 |
| 2 | 2.637,97 | 1.801,77 | 836,20 | 3.439,75 | 6.560,25 |
| 3 | 2.637,97 | 1.981,95 | 656,03 | 5.421,70 | 4.578,30 |
| 4 | 2.637,97 | 2.180,14 | 457,83 | 7.601,84 | 2.398,16 |
| 5 | 2.637,97 | 2.398,16 | 239,82 | 10.000,00 | 0,00 |

**Tabela 5 – Plano de amortização tradicional (10.000 em 5 vezes a 10%)**
**Fonte: autor**

Para fazer uma comparação adequada com a hipótese de pagamento único (equivalência), temos que levar cada parcela de juros para o período $n$:

$$1.000(1+0{,}1)^4 = 1.464{,}10$$

$$836{,}2(1+0{,}1)^3 = 1.112{,}98$$

$$656{,}03(1+0{,}1)^2 = 793{,}79$$

$$457{,}83(1+0{,}1)^1 = 503{,}61$$

$$239{,}82(1+0{,}1)^0 = 239{,}82$$

No SAF, então, foram pagos de juros ao final do financiamento, $R\$\ 4.114{,}30$[24], quantia inferior aos $R\$\ 6.105{,}10$ decorrente do pagamento único.

O exemplo parece indicar que ao usar o Sistema de Amortização Francês, o financiamento proporciona menos juros que se fôssemos pagar em uma única parcela ao final do prazo.

No capítulo 7 provaremos que isso ocorre para todo $n$.

[24] 1.464,10 + 1.112,98 + 793,79 + 503,61 + 239,82 = 4.114,30.

### 6.2 – Dos Juros compostos não serem necessariamente juros sobre juros

Como dito no tópico 5.1, Abelardo de Lima Puccini considerou que juros compostos não geram necessariamente juros sobre juros (PUCCINI 2019).

Mas olhando a fórmula de juros compostos, $D_n = D_0(1+i)^n$ , o único momento em que isso não ocorre é quando $n = 1$, pois nesse momento foram gerados os primeiros juros, incidindo a taxa sobre o capital inicial que, necessariamente, não tem juros em sua composição. A literatura a respeito é unânime em dizer que, neste instante, os juros simples são iguais aos compostos, facilmente demonstrado ao se fazer $n = 1$.

Seja a fórmula de juros composto para $n = 1$:

$$D_n = D_0(1+i)^1$$

Desenvolvendo:

$$D_n = D_0(1+i)^1 = D_0(1+1.i)^1 = D_0(1+1.i)$$

Como $D_n = D_0(1+1.i)$ é a fórmula do juros simples para $n = 1$, fica demonstrada a observação acima.

Mas para $n > 1$, basta pegar o desenvolvimento do Binômio de Newton para $(1+i)^n$ que constatemos os juros sobre juros:

$$D_0(1+i)^n = D_0\left[1^n + \binom{n}{1}1^{n-1}i + \binom{n}{2}1^{n-2}i^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}1i^{n-1} + i^n\right]$$

$$D_0(1+i)^n = D_0 1^n + D_0\binom{n}{1}1^{n-1}i + D_0\binom{n}{2}1^{n-2}i^2 + \cdots + D_0\binom{n}{n-1}1i^{n-1} + D_0 i^n$$

Como todos os termos da expressão são positivos, a presença de $D_0 i^n$ garante a ocorrência de juros sobre juros na fórmula de juros compostos para $n > 1$.

Portanto, a afirmação de PUCCINI não corrobora com a fórmula matemática dos juros compostos pois sempre ocorre a soma dos juros gerados ao saldo devedor a partir de $n > 1$.

Ocorre que sua tese é defendida no contexto da tabela Price e subsiste na convenção dos juros devidos sempre serem pagos em cada prestação (PUCCINI, 2019, p. 2):

> Entretanto, se os juros do período forem integralmente pagos no final do respectivo período - como ocorre em diversas situações, inclusive na Tabela Price “Tradicional” - não existe a possibilidade fática de serem capitalizados e, nesses casos, o regime de juros compostos não implica incidência de “juros sobre juros” e, portanto, não há anatocismo.

Mas temos que observar que o plano de amortização é mais analítico e não alcança os efeitos imediatos do uso da fórmula.

Puccini referiu-se ao saldo devedor do plano de amortização, gerado após a subtração da amortização do período (*vide* tabela 1). Segundo a técnica empreendida no plano, os juros devidos são calculados pela aplicação direta de $i$ vezes o saldo devedor do período anterior. E como o saldo devedor não tem juros embutidos, não há pagamento de juros sobre juros.

De fato, não há juros sobre juros, mas também não há aplicação da fórmula de juros compostos, $D_n = D_0(1+i)^n$ , de modo que não há como vincular a ausência da capitalização com a presença de juros compostos.

Como visto na Figura 3, a fórmula dos juros compostos incide sobre parte da dívida inicial, ou valores presentes de cada prestação e, a partir da segunda, não há como evitar a geração de juros sobre juros.

Assim, a situação narrada por Puccini na tabela Price não se coaduna com o uso da fórmula de juros compostos, de modo que, ao contrário do autor, afirmamos: **para $\boldsymbol{n > 1}$ , juro composto é sempre sinônimo de juros sobre juros.**

## 6.3 - Da prioridade do pagamento dos juros em cada prestação

No tópico 5.1, Abelardo de Lima Puccini também defendeu que, em cada prestação, como tradicionalmente é feito, deveríamos pagar primeiro os juros, prática fundamentada em:

- convenção adotada em todos os países;
- na literatura relacionada a matemática financeira, nacional e estrangeira;
- uso da convenção nas calculadoras HP12C e Planilha Excel;
- art. 354 do Código Civil brasileiro.

Em relação à norma indicada, a reproduzimos a seguir num contexto mais extenso (BRASIL, 2002):

> CAPÍTULO IV
> Da Imputação do Pagamento
>
> Art. 352. A pessoa obrigada por dois ou mais débitos da mesma natureza, a um só credor, tem o direito de indicar a qual deles oferece pagamento, se todos forem líquidos e vencidos.
>
> Art. 353. Não tendo o devedor declarado em qual das dívidas líquidas e vencidas quer imputar o pagamento, se aceitar a quitação de uma delas, não terá direito a reclamar contra a imputação feita pelo credor, salvo provando haver ele cometido violência ou dolo.
>
> Art. 354. Havendo capital e juros, o pagamento imputar-se-á primeiro nos juros vencidos, e depois no capital, salvo estipulação em contrário, ou se o credor passar a quitação por conta do capital.
>
> Art. 355. Se o devedor não fizer a indicação do art. 352 , e a quitação for omissa quanto à imputação, esta se fará nas dívidas líquidas e vencidas em primeiro lugar. Se as dívidas forem todas líquidas e vencidas ao mesmo tempo, a imputação far-se-á na mais onerosa.

Acreditamos que a referência legal não se aplica, pois o contexto da norma é o tratamento de débitos vencidos, em litígio. Não é o caso do plano relativo ao SAF cuja constituição se dá com sua contratação. Logo, não identificamos na norma a obrigatoriedade de construir uma prestação de financiamento composta com pagamento prioritário de juros.

Quanto à planilha Excel e HP 12C, assiste razão ao autor:

- Na planilha eletrônica Excel, a função IPGTO fornece o valor dos juros devidos em cada prestação, e a função PPGTO, a amortização periódica, ambas reproduzindo os valores segundo o modelo do plano tradicional;
- Na calculadora HP 12C, suas teclas *f* e *AMORT* permitem a apresentação dos juros pagos até determinado pagamento, considerando os juros devidos pagos em cada prestação, bem como o respectivo saldo amortizado (tecla $x \gtrless y$), nos termos do plano tradicional, conforme apresentado em seu manual (HP 12C PLATINUM, 2003, p. 55/56).

Finalmente, PUCCINI acerta quanto aos autores na área de matemática financeira, os quais acatam, incondicionalmente, a primazia do pagamento dos juros devidos em cada prestação.

É como se pronuncia Frank Ayres Jr (AYRES, 1981, p. 133):

> Seja A a dívida que vence juros a ser amortizada por uma sequência de n pagamentos de R cada um, como no exemplo 1. Cada pagamento de R é usado primeiro para pagar o juro devido nessa época. O restante é, então, destinado a reduzir a dívida.

Da mesma forma Carlos Patrício Samanez (SAMANEZ, 2002, p. 208):

> **8.1.1 Sistema de Amortização Francês – Tabela Price**
>
> (...)
>
> Para um determinado período, os juros são calculados sobre o saldo devedor do empréstimo ao início desse período; a amortização é a diferença entre o valor da prestação e o valor dos juros respectivos; e o saldo devedor é igual ao saldo devedor do período anterior menos a amortização do respectivo período.

E Washington Franco Mathias e José Maria Gomes (MATHIAS & GOMES, 2008, p. 291-292):

> ***2.2 Sistema Francês (SF)***
>
> (...)
>
> O procedimento, portanto, é o seguinte:
>
> a) Calcula-se a prestação R.
> b) Calculam-se para cada período (k) os juros sobre o saldo devedor do período anterior:
>
> $$\boxed{J_k = i.Sd_{k-1}}$$

c) Faz-se para cada período (k) a diferença entre a prestação e o juro, obtendo-se o valor da amortização:

$$\boxed{A_k = R - J_k}$$

d) A diferença em cada período (k), entre o saldo devedor do período anterior e a amortização do período dá o saldo devedor do período:

$$\boxed{Sd_k = Sd_{k-1} - A_k}$$

Portanto, a defesa do ponto de vista de Puccini está consubstanciada na prática financeira e na literatura, embora todos partam de uma premissa fundamentada em uma convenção: os juros devidos devem ser integralmente pagos em cada prestação.

## 6.4 - Da crítica de PUCCINI aos juros gerados pelo Valor Presente

Alicerçado pelos argumentos expostos no tópico anterior, Puccini critica aqueles que defendem a geração de juros em cada prestação a partir da atualização do Valor Presente, contrariando o art. 354 do Código Civil.

Como já comentado, discordamos que o regramento legal citado determine a primazia dos juros devidos na constituição da prestação no SAF. Há mera escolha, baseada em convenção, enquanto os juros gerados pelo VP advém de uma formulação matemática: $P = VP_k\,(1+i)^k$ .

Assim, ao contrário do que afirma Puccini, a amortização como primazia não deriva de uma seleção, de uma preferência, mas de um resultado matemático. Denominar essa forma de *distorcida* (PUCCINI, 2019) é ir de encontro à própria ciência.

Na verdade, o que está mais próximo de distorção é a priorização de juros pois, como dito pelo autor, decorre de mera "convenção" (PUCCINI, 2014).

Da mesma forma, desmembrar a dívida em várias partes não desnatura o capital. Pelo contrário, a prestação, usada pelo plano tradicional, tem essa particularidade como premissa, basta observar a Figura 3.

No tópico seguinte aprofundamos essa discussão.

**6.5 – Da contestação da convenção da primazia do pagamento dos juros devidos em cada prestação**

No plano de amortização tradicional, a parcela de pagamento periódica é obtida pela fórmula:

$$P = D_0 . \left[ \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \right]$$

Mas após identificada a prestação, por convenção (PUCCINI, 2014), ela é repartida entre juros e amortização, sendo aquele calculado sobre o saldo devedor, e este tratado como o resíduo da prestação.

O uso dessa convenção faz esquecer que a demonstração da fórmula matemática da prestação decorreu da aplicação dos juros compostos sobre uma parcela do saldo devedor inicial, conforme Figura 3. Ou seja:

$$P = VP_1(1+i) = VP_2(1+i)^2 = VP_3(1+i)^3 = \cdots = VP_k(1+i)^k = \cdots = VP_n(1+i)^n$$

Com:

$$D_0 = VP_1 + VP_2 + VP_3 + \cdots VP_k + \cdots + VP_n$$

O cálculo matemático originador de $P$ evidencia que temos, em cada período, $VP_k$ de amortização e, consequentemente, $JP_k = P$ - $VP_k$ de juros realmente pagos. Há, portanto, uma distinção entre $J_k$, juros devidos, e $JP_k$, juros pagos. O primeiro, resultado de uma convenção universal (PUCCINI, 2014), enquanto o segundo decorre da demonstração da fórmula da prestação.

Tomemos como exemplo a primeira prestação do plano de amortização da Tabela 1:

$VP_1 = \frac{3.154,71}{1+0,1} = 2.867,92;$ e

$JP_1$ = 3154,71 - 2.867,92 = $\mathbf{286,79}$

A amortização correspondente é o próprio valor presente. Possível, assim, construir um plano de amortização não tradicional, ou pelo Valor Presente, conforme Tabela 6:

| n | Prestação | Amortização | Juros | Saldo amortizado | Saldo Devedor |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | | 10.000,00 |
| 1 | 3.154,71 | 2.867,92 | 286,79 | 2.867,92 | 7.132,08 |
| 2 | 3.154,71 | 2.607,19 | 547,52 | 5.475,12 | 4.524,89 |
| 3 | 3.154,71 | 2.370,18 | 784,52 | 7.845,30 | 2.154,71 |
| 4 | 3.154,71 | 2.154,71 | 1.000,00 | 10.000,00 | 0,00 |

**Tabela 6 - Plano de Amortização não tradicional**
**Fonte: autor**

Ao contrário do tradicional, prioriza-se, em cada prestação, o pagamento da amortização, ficando os juros como resíduo.

É possível construir uma fórmula para o saldo devedor para esse modelo de plano de amortização, conforme proposição a seguir:

**PROPOSIÇÃO 4: No plano de amortização não tradicional, ou pelo valor presente, sendo $\mathrm{n}$ o número de pagamentos, $\mathrm{i}$ a taxa de juros, e $\mathrm{k} \leq \boldsymbol{n}$, então o saldo devedor no momento k é encontrado por**

$$\boldsymbol{d_k = D_0\left[\frac{(1+i)^{n-k}-1}{(1+i)^n-1}\right]}$$

**Demonstração[25]:**

*Vamos considerar a definição de saldo devedor do plano não-tradicional ou pelo valor presente, $d_k = d_{k-1} - VP_k$:*

$$D_0 = D_0$$

[25] Indicaremos o saldo devedor pelo valor presente por $d_k$ para diferenciá-lo do saldo devedor tradicional. Mas mantivemos a expressão original para $D_0$ por ser a mesma em ambos os casos (dívida inicial).

$$d_1 = D_0 - \frac{P}{(1+i)^1}$$

$$d_2 = d_1 - \frac{P}{(1+i)^2}$$

$$d_3 = d_2 - \frac{P}{(1+i)^3}$$

.

.

.

$$d_k = d_{k-1} - \frac{P}{(1+i)^k}$$

*Somando-se membro a membro as equações:*

$$\cancel{D_0} + \cancel{d_1} + \cancel{d_2} + \cancel{d_3} + \cdots + \cancel{d_{k-1}} + d_k$$

$$= D_0 + \cancel{D_0} + \cancel{d_1} + \cancel{d_2} + \cancel{d_3} + \cdots + \cancel{d_{k-1}}$$

$$-\left(\frac{P}{(1+i)^1} + \frac{P}{(1+i)^2} + \frac{P}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{P}{(1+i)^k}\right)$$

$$d_k = D_0 - P\left(\frac{1}{(1+i)^1} + \frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{1}{(1+i)^k}\right)$$

*De **(2)**, **(3)**, **(4)** e **(5)**, temos:*

$$d_k = D_0 - \frac{D_0 \cancel{i}(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}\left[\frac{(1+i)^k - 1}{\cancel{i}(1+i)^k}\right]$$

$$d_k = D_0\left[1 - \frac{(1+i)^{n-k}}{(1+i)^n - 1}\left[(1+i)^k - 1\right]\right]$$

$$d = D_0\left[1 - \frac{(1+i)^n - (1+i)^{n-k}}{(1+i)^n - 1}\right]$$

$$d_k = D_0\left[\frac{\cancel{(1+i)^n} - 1 - \cancel{(1+i)^n} + (1+i)^{n-k}}{(1+i)^n - 1}\right]$$

$$\boldsymbol{d_k = D_0 \left[\frac{(1+i)^{n-k}-1}{(1+i)^{n}-1}\right]} \qquad \blacksquare$$

Por essa fórmula, podemos encontrar o saldo devedor no plano não tradicional em qualquer instante $k \leq$ n. Calculemos, assim, da Tabela 6, o saldo devedor após se pagar a 3ª prestação:

$$D_3 = 10.000\left[\frac{(1+0{,}1)^{4-3}-1}{(1+0{,}1)^{4}-1}\right]$$

$$D_3 = 10.000\ x\ \left[\frac{0{,}1}{0{,}4641}\right]$$

$$D_3 = 2.154{,}71$$

Esse resultado corresponde ao saldo devedor da Tabela 6.

Voltando à Tabela 6, ao observar a primeira prestação, vemos que os juros de *R$ 286, 79* são muito inferiores aos devidos após um mês de financiamento que, conforme Tabela 1, correspondem a *R$ 1.000,00*. Mais especificamente, há uma diferença de *R$ 713,21.*

Isso parece ocorrer sempre para as primeiras prestações (juros devidos maior que juros pagos). Mas não podemos garantir a veracidade dessa desigualdade para todas as prestações, pois $J_k$ depende do saldo devedor do mês anterior.

Vejamos o que acontece num financiamento de prazo maior, no qual destacamos a diferença entre juros devidos e juros pagos, bem como entre as amortizações, nos dois tipos de planos. Para tanto, tratemos de um financiamento de idêntico valor ao representado na Tabela 1, mas em 12 prestações, à mesma taxa de juros:

| n | Prestação | Juros | Amortização | Saldo Amortizado | Saldo Devedor |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | | 10.000,00 |
| 1 | 1.467,63 | 1.000,00 | 467,63 | 467,63 | 9.532,37 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 1.467,63 | 953,24 | 514,39 | 982,02 | 9.017,98 |
| 3 | 1.467,63 | 901,79 | 565,83 | 1.547,85 | 8.452,14 |
| 4 | 1.467,63 | 845,21 | 622,42 | 2.170,27 | 7.829,73 |
| 5 | 1.467,63 | 782,97 | 684,66 | 2.854,92 | 7.145,07 |
| 6 | 1.467,63 | 714,51 | 753,12 | 3.608,05 | 6.391,95 |
| 7 | 1.467,63 | 639,19 | 828,44 | 4.436,48 | 5.563,51 |
| 8 | 1.467,63 | 556,34 | 911,28 | 5.347,76 | 4.652,24 |
| 9 | 1.467,63 | 465,22 | 1.002,41 | 6.350,17 | 3.649,83 |
| 10 | 1.467,63 | 364,97 | 1.102,65 | 7.452,81 | 2.547,18 |
| 11 | 1.467,63 | 254,72 | 1.212,91 | 8.665,72 | 1.334,27 |
| 12 | 1.467,63 | 133,42 | 1.334,20 | 9.999,93 | 0,07 |
| TOTAL | | **7.611,58** | | | |

**Tabela 7- Plano de amortização tradicional (10.000 em 12 vezes a 10%)**
**Fonte: autor**

| n | Prestação | Juros | Amortização | Saldo Amortizado | Saldo Devedor | $J - JP$ | $A - A_{VP}$[26] |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | | 10.000,00 | | |
| 1 | 1.467,63 | 133,42 | 1.334,21 | 1.334,21 | 8.665,79 | 866,58 | -866,58 |
| 2 | 1.467,63 | 254,71 | 1.212,92 | 2.547,13 | 7.452,87 | 698,52 | -698,52 |
| 3 | 1.467,63 | 364,98 | 1.102,65 | 3.649,78 | 6.350,22 | 536,82 | -536,82 |
| 4 | 1.467,63 | 465,22 | 1.002,41 | 4.652,19 | 5.347,81 | 380,00 | -380,00 |
| 5 | 1.467,63 | 556,35 | 911,28 | 5.563,47 | 4.436,53 | 226,63 | -226,63 |
| 6 | 1.467,63 | 639,19 | 828,44 | 6.391,91 | 3.608,09 | 75,32 | -75,32 |
| 7 | 1.467,63 | 714,50 | 753,13 | 7.145,04 | 2.854,96 | -75,31 | 75,31 |
| 8 | 1.467,63 | 782,97 | 684,66 | 7.829,70 | 2.170,30 | -226,62 | 226,62 |
| 9 | 1.467,63 | 845,21 | 622,42 | 8.452,12 | 1.547,88 | -379,99 | 379,99 |
| 10 | 1.467,63 | 901,80 | 565,83 | 9.017,95 | 982,05 | -536,81 | 536,81 |
| 11 | 1.467,63 | 953,23 | 514,40 | 9.532,35 | 467,65 | -698,52 | 698,52 |
| 12 | 1.467,63 | 1.000,00 | 467,63 | 9.999,98 | 0,02 | -866,57 | 866,57 |
| TOTAL | | **7.611,58** | | | | 0,05 | -0,05 |

**Tabela 8 - Amortização não tradicional (10.000 em 12 vezes a 10%)**
**Fonte: autor**

As Tabelas 7 e 8 sugerem que a partir de $k = n/2$ ou $k = (n + 1)/2$, o sinal da desigualdade se inverte para $J - JP$ e $A - A_{VP}$. Ou seja, que, a partir da metade do número de períodos do financiamento, os juros devidos

[26] $A - A_{vp}$ corresponde à diferença entre a amortização pelo modelo tradicional e pelo valor presente.

passam a ser menores que os pagos. Ao contrário, a amortização tradicional, inicialmente menor, supera a não tradicional a partir de $n = 7$. Ao final, a diferença entre juros devidos e pagos, assim como entres as amortizações dos dois modelos, são nulas (Tabela 11).

O gráfico 4 nos dão uma visão geométrica dessa constatação:

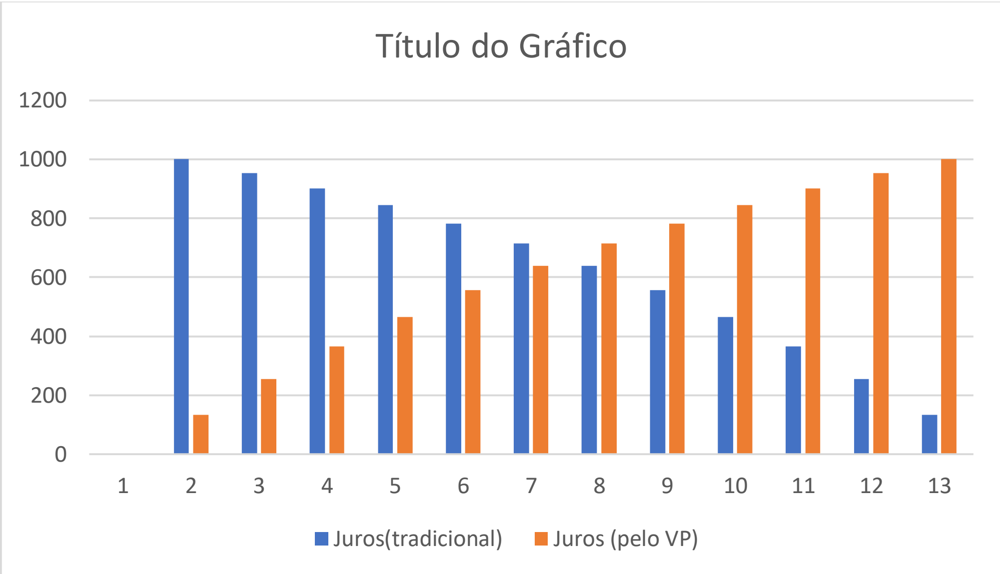


**Gráfico 4 - Juros (tradicional) x Juros (pelo VP)**
**Fonte: autor**

Ainda, nos dois tipos de plano, o somatório dos juros pagos, ao final, é idêntico: *R$ 7.611,58.* Demonstraremos, no capítulo 7, que essa constatação é válida para todo $n$, de modo que seria indiferente usar um ou outro plano.

Voltando à diferença entre os juros devidos e pagos, ela é de R$ 866,58 para a primeira prestação (Tabela 8). No tópico 4.2, apresentamos a defesa do anatocismo feita por Demétrio Antunes Bassili, segundo a qual os juros devidos que não foram pagos, devem ser somados ao saldo devedor. A partir da segunda prestação, então, haveria incidência de juros sobre juros, pois o saldo devedor teria embutido juros não pagos do mês anterior (BASSILI, 2014).

Generalizando a posição de Demétrio Antunes Bassili, existe uma diferença entre juros devidos e juros pagos, $J_k - JP_k$ , que devem ser somados ao saldo devedor que chamaremos de $SJ_k$.

Evidentemente, se $SJ_k$ é somado ao saldo devedor, no período seguinte haverá incidência de juros sobre juros, ou capitalização de juros, configurando o anatocismo.

Com essa constatação, é possível constituir o saldo devedor de outra maneira. Ou seja, podemos formá-lo a partir do saldo devedor do mês anterior, subtraído da amortização do período (correspondente ao valor presente da prestação) e somado com o saldo de juros (diferença entre juros devidos e juros pagos):

$$D_k = D_{k-1} - VP_k + \left(J_k - JP_k\right)$$

É possível mostrar, dessa forma, o plano de amortização da Tabela 6 em nova conformação, com juros e amortização com base no valor presente, mas com saldo devedor que considera os juros tradicionais. Em função disso o chamaremos de misto. É como se apresenta a Tabela 9:

| n | Prestação (A) | Amortização (B) | Juros | | Saldo amortizado | Saldo Devedor[27] E=E*-B+C-D |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | Devidos (c) | Pagos (D=A-B) | | |
| 0 | | | | | | 10.000,00 |
| 1 | 3.154,71 | 2.867,92 | 1.000,00 | 286,79 | 2.867,92 | 7.845,29 |
| 2 | 3.154,71 | 2.607,19 | 784,53 | 547,52 | 5.475,12 | 5.475,11 |
| 3 | 3.154,71 | 2.370,18 | 547,51 | 784,52 | 7.845,30 | 2.867,91 |
| 4 | 3.154,71 | 2.154,71 | 286,79 | 1.000,00 | 10.000,00 | 0,00 |

**Tabela 9- Plano de Amortização misto**
**Fonte: autor**

Observemos que o saldo devedor do plano misto é idêntico ao do tradicional.

Este é o plano apresentado e criticado por Abelardo de Lima Puccini ao qual, como já visto, denominou de distorcido (tópico 5.1).

---

[27] E* representa o saldo devedor do mês anterior.

Nos parágrafos anteriores, discordando da crítica de Abelardo de Lima Puccini por entendermos que o juro e amortização corretos seriam os que advém da prestação, segundo o cálculo matemático correspondente, o qual é imprescindível considerar.

O sistema misto, entretanto, apresenta problemas de outra natureza. Demétrio Bassili desconsiderou dois aspectos na sua abordagem.

Em primeiro lugar, não observou que, a partir da segunda metade do financiamento, os juros devidos ficam inferiores aos pagos, de modo que o saldo devedor passa a ser diminuído a partir deste momento por $SJ_k$. Isso vai anular todo o acréscimo ocorrido no período de $k = 0$ a $k = n/2$ ou $k = (n + 1)/2$. O somatório de $SJ_k$ seria nulo para todo $n$, como provaremos no capítulo 7.

Intuitivamente, isso indicaria que a partir da metade do financiamento, estaríamos pagando mais juros que o devido e essa diferença estaria sendo subtraída do saldo devedor, acarretando maior amortização do que a contida na prestação, o que representaria economia de juros a partir deste período. Com outras palavras, os juros sobre juros gerados na primeira metade do financiamento são compensados pelos juros economizados na segunda parte.

Em segundo lugar, Demétrio Bassili omite a diferença de amortização existente em cada pagamento, a qual anula a subtração entre juros pagos e devidos. Ou seja, da mesma forma que $SJ_k$ seria somado ao saldo devedor, o saldo de amortização de cada período, $SA_k = A_k - A_{VPk}$, também o deveria.

Tratar-se-ia de uma constatação natural pois, se é verdade que há um saldo de juros devidos não pagos no início do financiamento, simultaneamente, há uma amortização maior no início ($A_{VPk} > A_k$), que gerariam menos juros no mês seguinte em comparação com a metodologia tradicional. Essa economia anula os juros sobre juros indicados por Bassili, logo, o anatocismo, de modo que o plano de amortização misto naturalmente retorna ao modelo não tradicional.

Essa narrativa pode ser melhor evidenciada na Tabela 10:

| n | Prestação (A) | Amortização | | | Juros | | | SA | Saldo Devedor | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Tradicional (B=A-E) | Pelo VP (C) | Saldo (D= B – C) | Devidos (E) | Pagos (F=A-C) | Saldo (G = E – F) | | Misto ($H=H^*$-C+G) | NT ($I=I^*$-C+G+D) |
| 0 | | | | | | | | | 10.000,00 | 10.000,00 |
| 1 | 3.154,71 | 2.154,71 | 2.867,92 | -713,21 | 1.000,00 | 286,79 | 713,21 | 2.867,92 | 7.845,29 | 7.132,08 |
| 2 | 3.154,71 | 2.370,18 | 2.607,20 | -237,02 | 784,53 | 547,51 | 237,02 | 5.475,12 | 5.475,11 | 4.524,88 |
| 3 | 3.154,71 | 2.607,20 | 2.370,18 | 237,02 | 547,51 | 784,53 | -237,01 | 7.845,30 | 2.867,92 | 2.154,71 |
| 4 | 3.154,71 | 2867,92 | 2.154,71 | 713,21 | 286,79 | 1.000,00 | -713,21 | 10.000,00 | 0,00 | 0,00 |
| TOTAL | | | | 0,00 | 2.618,83 | 2618,83 | 0,00 | | | |

**Tabela 10 – Amortização misto detalhado (10.000 em 4 vezes a 10%)**
**Fonte: autor**

A coluna G indica o resultado nulo para a soma dos saldos de juros periódicos, assim como as colunas E e F aponta a igualdade, ao final do financiamento, dos juros pagos e dos devidos. Uma indicação, neste exemplo, de que não importa qual modelo de plano de amortização, tradicional ou pelo valor presente, teremos sempre idêntico montante de juros pagos ao final do financiamento pelo SAF.

No gráfico seguinte é possível verificar a simetria entre o saldo de juros e a diferença de amortizações:

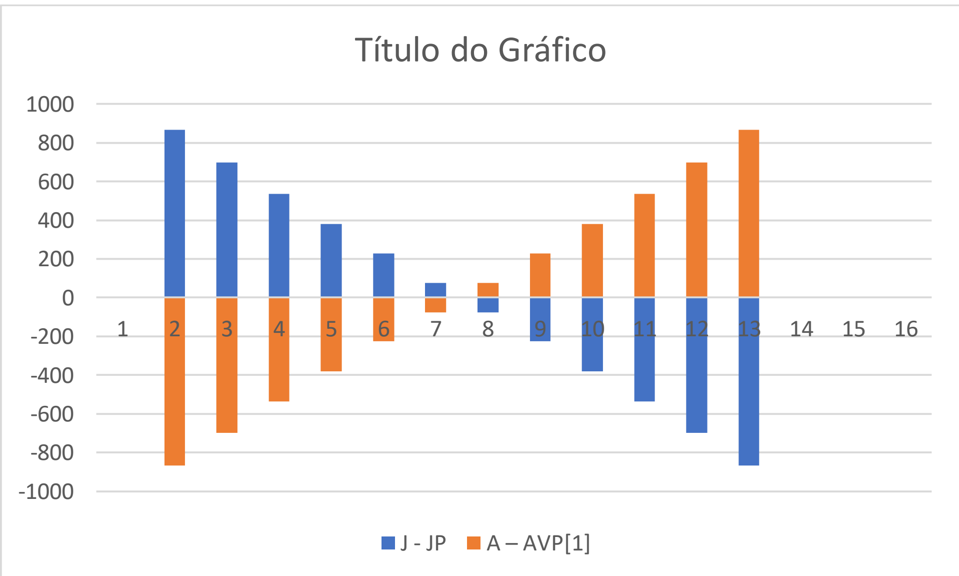


**Gráfico 5 - Simetria entre (J-JP) e (A-AVP)**
**Fonte:** autor

No capítulo 7, faremos a demonstração que essas constatações são válidas para todo $n$.

É fácil chegar a uma fórmula para o saldo devedor do plano de amortização misto, para qualquer $k$, que, como será visto na demonstração da Proposição 6, terá idêntico resultado que a forma tradicional *(9)*. Vejamos:

$$D_k = D_{k-1} - VP_k + \left(J_k - JP_k\right)$$

Substituindo $J_k \, e \, JP_k$

$$D_k = D_{k-1} - VP_k + \left[ iD_{k-1} - \left(P - VP_k\right)\right]$$

$$D_k = D_{k-1} - \cancel{VP_k} + iD_{k-1} - P + \cancel{VP_k}$$

$$D_k = D_{k-1}(1+i) - P$$

Assim, identificamos que o saldo devedor de qualquer financiamento pelo SFA, em qualquer período $k \leq n$, pode ser constituído de três maneiras distintas, a saber:

- **Tradicional -** saldo devedor do mês anterior menos a amortização do período, obtida pela diferença entre valor da prestação e juros calculados sobre o saldo devedor do período anterior (tradicional);

$$D_k = D_{k-1} - \left(P - J_k\right)$$

- **Não tradicional ou pelo valor presente -** saldo devedor do mês anterior menos a amortização do período, calculada como o valor presente da prestação;

$$d_k = D_{k-1} - \left(\frac{P}{(1+i)^k}\right)$$

- **Misto -** saldo devedor do mês anterior menos a amortização do período (calculada como o valor presente da prestação) mais o saldo de juros do mês, resultado da diferença entre juros pagos (pelo valor presente) e juros devidos (tradicional);

$$D_k = D_{k-1} - VP_k + \left(J_k - JP_k\right)$$

- Apesar de poder ser composto com elementos de natureza distinta, o saldo devedor do plano misto e tradicional apresentam idêntico resultado financeiro.

## 6.6 – Das considerações finais sobre o anatocismo

Vimos que domina a literatura de matemática financeira, inclusive os programas de calculadoras e planilhas eletrônicas, a prática de priorizar o pagamento dos juros (calculados sobre o saldo devedor do período anterior) em cada prestação de um financiamento pelo SFA. Em cada parcela paga, o resíduo é a amortização.

Com essa metodologia, não haveria anatocismo pois, em cada período, todos os juros gerados são pagos. Os planos de amortização desse modelo são conhecidos como tradicionais (tópico 3.2).

O problema dessa concepção é que ela ignora o fato de a prestação do empréstimo pela tabela Price ser obtida por uma equação matemática de equivalência, na qual as amortizações são geradas a partir do valor presente de cada parcela (a soma dos valores presentes corresponde ao valor financiado). Os juros são o resíduo.

Assim, um outro plano de amortização pode ser criado, que preferimos chamar de não tradicional, ou pelo valor presente (Tabela 6), pois é obtido de uma relação matemática que não pode ser contestada (tópico 6.5).

Ou seja, ao querer prestações iguais, eliminou-se a possibilidade matemática de pagar todos os juros gerados em cada período. Esses juros não são eliminados, mas seu pagamento é diluído ao longo do financiamento.

Entretanto, o que queremos demonstrar nessa dissertação é que **não importa qual plano de amortização utilizamos, tradicional ou não tradicional.** Como visto, ao longo do prazo de financiamento, o somatório dos juros pagos ao final são idênticos nos dois modelos.

Para ilustrar essa constatação, vejamos um exemplo:

**EXEMPLO 2:** B propõe tomar emprestado *R$ 10.000,00* a A, mas quer pagar em quatro prestações mensais iguais, a primeira com *30* dias, a juros de *10%* ao mês. A aceita e calcula as parcelas pela fórmula de anuidade conhecida: *R$ 3.154,71*. A constrói um plano de amortização não tradicional e se surpreende com os juros recebidos na primeira prestação. Procura B e diz não mais querer fazer o negócio e argumenta. Estou sendo prejudicado nesse contrato pois, na primeira prestação, deveria receber *R$ 1.000,00* de juros *(0,1*10.000,00)*, entretanto consta apenas *R$ 286,79*. B contra-argumenta que o contrato era para pagar em prestações iguais, e não prometia desembolsar todo o juro gerado a cada período. B reconhece que tem uma dívida de *R$ 1.000,00* de juros ao fim do primeiro mês, mais irá quitar essas diferença de juros ao longo do prazo restante. B apresenta, então, um plano de amortização tradicional e o compara ao de A, mostrando que, em ambos, os juros finais pagos são os mesmos: no modelo não tradicional, paga-se menos juros no início mas se desembolsa mais ao final. A se convence e fecham negócio.

Portanto, se os dois planos de amortização pagam o mesmo total de juros, então se pode utilizar um ou outro. Como no tradicional, todos os juros gerados a cada período são pagos, não há juros somado ao saldo devedor, logo, não ocorre anatocismo. Consequentemente, não há também no modelo pelo valor presente, de modo que o fenômeno não existe na tabela Price.

Restaria a defesa, com base nos argumentos de Demétrio Bassili, de que, no modo não tradicional, a diferença entre juros devidos e juros pagos é somada ao saldo devedor. Mas no tópico 6.5, destacamos que esse saldo de juros é anulado, em cada período, pela subtração entre as amortizações de cada modelo.

Finalmente, os defensores do anatocismo diriam que não há como negar o fenômeno, pois a fórmula de juros compostos, usada no cálculo da prestação, embute juros sobre juros. De fato, não há como negar esse fato, mas, conforme discorrido no tópico 6.1, o juro sobre juro não ocorre sobre a dívida inicial do financiamento.

Em função disso, os juros gerados pela tabela Price são sempre inferiores aos gerados com pagamento único ao final do prazo, como será demonstrado no capítulo 7, bem como que, para qualquer prazo $n$, o somatório dos juros pagos, nos dois modelos do plano de amortização da tabela Price, são idênticos.

# 7 - DA PROVA DA AUSÊNCIA DO ANATOCISMO DA TABELA PRICE

Neste tópico apresentamos as demonstrações que provam a ausência de anatocismo no SAF.

## 7.1 – Da prova da unicidade do anatocismo

Como abordado no tópico 6.1.1, faremos, a seguir, a prova da unicidade dos juros sobre juros gerados sobre um determinado capital, a uma taxa e prazo específicos, em pagamento único ao final do prazo.

Nessas circunstâncias, queremos demonstrar que o fenômeno do anatocismo, do ponto de vista do valor, é único.

**PROPOSIÇÃO 5: Dados $\boldsymbol{D_n = D_0(1+i)^n}$ então $\boldsymbol{J = D_0(1+i)^n - D_0}$ é único.**

**Demonstração:**

*Como* $J = D_n - D_0$ *. Então:*

$$J = D_0(1+i)^n - D_0$$

$$J = D_0[(1+i)^n - 1] \tag{8}$$

*Vamos supor que exista JN, JN* $\neq J$ *, com JN obtido pela fórmula* $JN = D_0[(1+i_,)^{n\prime} - 1]$ *, para* $n_, = n$ *e* $i_, = i$ *. Logo:*

$$JN \neq J$$

$$D_0[(1+i_,)^{n\prime} - 1] \neq J$$

*Substituindo* $n_, = n, i_, = i$ *, temos:*

$$D_0(1+i)^n - D_0 \neq J$$

*Mas isso é um absurdo pois* $J = D_0(1+i)^n - D_0$ *. Logo,* $J$ *é único.* ■

Assim, pela Proposição 4, o anatocismo sobre um determinado capital, taxa e prazo, é único. No tópico seguinte, tiraremos as conclusões desse resultado em relação ao SAF.

### 7.2 – Da prova de que os juros pagos no SAF é sempre inferior aos gerados em um pagamento único ao final do prazo

No tópico 6.1.2 apresentamos um exemplo em que os juros pagos ao final do financiamento pelo SAF são menores que os juros pagos em um desembolso único, no mesmo prazo e taxa.

Faremos agora a demonstração de que isso se verifica para todo $n$ natural e maior que $1$.

**PROPOSIÇÃO 6 : os juros pagos em um financiamento de capital $\boldsymbol{D_0}$, pelo prazo $\boldsymbol{n > 1}$ e taxa $\boldsymbol{i}$, pelo SAF, são sempre inferiores aos juros desembolsados em um pagamento único, $\boldsymbol{J = D_0[(1+i)^n - 1]}$, feito ao final do idêntico prazo.**

**Demonstração:**

Apresentamos, inicialmente, a equação (8) que representa os juros compostos pagos em uma única parcela, a taxa i, ao final do prazo n. Como, visto, há o pagamento de juros sobre juros nesta fórmula, logo, anatocismo, sendo este valor único para o valor $D_0$:

$$J = D_0[(1+i)^n - 1]$$

**1ª parte: pelo plano tradicional:**

A expressão para os juros pagos ao final no SAF é mais complexa. Nessa primeira parte a desenvolveremos pelo plano tradicional, no qual os juros de cada período são pagos em cada período, deduzidos da taxa aplicada ao saldo devedor do mês anterior. Assim:

$$J_k = iD_{k-1}$$

Precisaremos desenvolver a fórmula para $D_k$. Considerando o plano de amortização tradicional, a literatura correlata construiu uma expressão para se obter o saldo devedor em qualquer mês, após o pagamento da prestação respectiva. Generalizando, denominaremos $D_k$ o saldo devedor no mês $k$, $k \leq n$; bem como $A_k$, a amortização também no período k. Como visto, o saldo devedor é obtido pela diferença entre o do mês anterior menos a amortização do período. Formulando:

$$D_k = D_{k-1} - A_k$$

Mas a amortização é obtida pela diferença entre a prestação e os juros. Assim:

$$D_k = D_{k-1} - (P - J_k)$$

$$D_k = D_{k-1} - P + iD_{k-1}$$

$$D_k = D_{k-1}(1+i) - P \qquad \textbf{(9)}$$

Esse último resultado, equação **(9)**, também encontrado por Rodrigo De Losso (DE LOSSO, 2013), será útil para conclusões futuras. O usaremos, no entanto, para continuar a busca de uma fórmula para $D_k$. Apresentaremos, a seguir, a demonstração de Débora Borges Ferreira para $D_k$ (FERREIRA, 2014), com maior detalhamento:

$$\boldsymbol{D_1 = D_0(1+\ i) -\ P}$$

$$D_2 = D_1(1+\ i) - P$$

$$D_2 = [D_0(1+\ i) -\ P](1+i) -\ P$$

$$\boldsymbol{D_2 = D_0(1+i)^2 -\ P(1+i) - P}$$

$$D_3 = D_2(1+\ i) - P$$

$$D_3 = \ [D_0(1+i)^2 -\ P(1+i) - P](1+i)\ -\ P$$

$$\boldsymbol{D_3 = \ D_0(1+i)^3 -\ P(1+i)^2 - P(1+i) - P}$$

Generalizando:

$$D_k = D_0(1+i)^k - P[(1+i)^{k-1} + (1+i)^{k-2} + \cdots + (1+i) + 1]$$

A expressão entre colchetes corresponde à soma de uma PG de $k$ termos com $a_1 = 1$ e $q = (1 + i)$, ou seja, $S_k$, já definida anteriormente. Assim:

$$D_k = D_0(1+i)^k - P.S_k$$

$$D_k = D_0(1+i)^k - P.1.\left[\frac{(1+i)^k - 1}{(1+i) - 1}\right]$$

$$D_k = D_0(1+i)^k - P.\left[\frac{(1+i)^k - 1}{i}\right]$$

Substituindo P de **(5)**:

$$D_k = D_0(1+i)^k - \frac{D_0\cancel{i}(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}\left[\frac{(1+i)^k - 1}{\cancel{i}}\right]$$

$$D_k = D_0\left[(1+i)^k - \frac{(1+i)^{n+k} - (1+i)^n}{(1+i)^n - 1}\right]$$

$$D_k = D_0\left[\frac{\cancel{(1+i)^{n+k}} - (1+i)^k - \cancel{(1+i)^{n+k}} + (1+i)^n}{(1+i)^n - 1}\right]$$

$$D_k = D_0\left[\frac{(1+i)^n - (1+i)^k}{(1+i)^n - 1}\right] \qquad \textbf{(10)}$$

Por essa fórmula, **(10)**, é possível encontrar o saldo devedor após o pagamento da $k$-ésima prestação.

Voltando aos juros e substituindo $D_{k-1}$ pela equação **(10)** temos:

$$J_k = iD_0\left[\frac{(1+i)^n - (1+i)^{k-1}}{(1+i)^n - 1}\right]$$

Como cada parcela de juros deve ser levada ao momento $n$ (os juros foram pagos em instantes diferentes do pagamento único), teremos:

$$J_1(1+i)^{n-1} = iD_0\left[\frac{(1+i)^n - (1+i)^{1-1}}{(1+i)^n - 1}\right](1+i)^{n-1} =$$

$$= \boldsymbol{iD_0\left[\frac{(1+i)^{2n-1} - (1+i)^{n-1}}{(1+i)^n - 1}\right]}$$

$$J_2(1+i)^{n-2} = iD_0\left[\frac{(1+i)^n - (1+i)^{2-1}}{(1+i)^n - 1}\right](1+i)^{n-2} =$$

$$= \boldsymbol{iD_0\left[\frac{(1+i)^{2n-2} - (1+i)^{n-1}}{(1+i)^n - 1}\right]}$$

$$J_3(1+i)^{n-3} = iD_0\left[\frac{(1+i)^n - (1+i)^{3-1}}{(1+i)^n - 1}\right](1+i)^{n-3} =$$

$$= \boldsymbol{iD_0\left[\frac{(1+i)^{2n-3} - (1+i)^{n-1}}{(1+i)^n - 1}\right]}$$

.

.

.

$$J_n(1+i)^{n-n} = iD_0\left[\frac{(1+i)^n - (1+i)^{n-1}}{(1+i)^n - 1}\right](1+i)^{n-n} =$$

$$= \boldsymbol{iD_0\left[\frac{(1+i)^{n} - (1+i)^{n-1}}{(1+i)^n - 1}\right]}$$

Somando-se membro a membro as equações, obtemos:

$$\sum_{k=1}^{n} J_k(1+i)^{n-k} = iD_0\left[\frac{(1+i)^{2n-1}}{(1+i)^n-1} - \frac{(1+i)^{n-1}}{(1+i)^n-1} + \frac{(1+i)^{2n-2}}{(1+i)^n-1} - \frac{(1+i)^{n-1}}{(1+i)^n-1} + \frac{(1+i)^{2n-3}}{(1+i)^n-1} - \frac{(1+i)^{n-1}}{(1+i)^n-1} + \cdots + \frac{(1+i)^{n}}{(1+i)^n-1} - \frac{(1+i)^{n-1}}{(1+i)^n-1}\right]$$

$$\sum_{k=1}^{n} J_k(1+i)^{n-k} = iD_0\left[\left(\frac{(1+i)^{2n-1}}{(1+i)^n-1} + \frac{(1+i)^{2n-2}}{(1+i)^n-1} + \frac{(1+i)^{2n-3}}{(1+i)^n-1} \ldots + \frac{(1+i)^n}{(1+i)^n-1}\right) - n\,\frac{(1+i)^{n-1}}{(1+i)^n-1}\right]$$

A expressão entre parênteses corresponde a soma dos termos de uma PG de $n$ termos, com $a_1 = \frac{(1+i)^{2n-1}}{(1+i)^n-1}$ e $q = (1+i)^{-1}$. Usaremos, então, a equação **(3)**:

$$\sum_{k=1}^{n} J_k(1+i)^{n-k} = iD_0\left[\frac{(1+i)^{2n-1}}{(1+i)^n-1}\left(\frac{(1+i)^{-n}-1}{(1+i)^{-1}-1}\right) - n\,\frac{(1+i)^{n-1}}{(1+i)^n-1}\right]$$

$$\sum_{k=1}^{n} J_k(1+i)^{n-k} = iD_0\left[\frac{(1+i)^{2n-1}}{(1+i)^n-1}\left(\frac{\frac{1}{(1+i)^n}-1}{\frac{1-(1+i)}{1+i}}\right) - n\,\frac{(1+i)^{n-1}}{(1+i)^n-1}\right]$$

$$\sum_{k=1}^{n} J_k(1+i)^{n-k} = iD_0\left[\frac{(1+i)^{2n-1}}{(1+i)^n-1}\left(\frac{\frac{1-(1+i)^n}{(1+i)^n}}{\frac{-i}{1+i}}\right) - n\,\frac{(1+i)^{n-1}}{(1+i)^n-1}\right]$$

$$\sum_{k=1}^{n} J_k(1+i)^{n-k} = iD_0\left[\frac{(1+i)^{2n-1}(\cancel{(1+i)^n-1})(1+i)}{(\cancel{(1+i)^n-1})(1+i)^n i} - n\,\frac{(1+i)^{n-1}}{(1+i)^n-1}\right]$$

$$\sum_{k=1}^{n} J_k(1+i)^{n-k} = D_0\left[\frac{\cancel{i}(1+i)^{2n-1}(1+i)}{(1+i)^n\cancel{i}} - in\,\frac{(1+i)^{n-1}}{(1+i)^n-1}\right]$$

$$\sum_{k=1}^{n} J_k(1+i)^{n-k} = D_0\left[(1+i)^n - in\,\frac{(1+i)^{n-1}}{(1+i)^n-1}\right] \qquad \textbf{(11)}$$

Comparemos as equações **(8)** e **(11):**

- $J = D_0[(1+i)^n - 1]$ e
- $\sum_{k=1}^{n} J_k(1+i)^{n-k} = D_0\left[(1+i)^n - in\,\frac{(1+i)^{n-1}}{(1+i)^n-1}\right]$

Em relação à equação **(11)**, se provarmos que $in \frac{(1+i)^{n-1}}{(1+i)^n-1} > 1$, teremos $\sum_{k=1}^{n} J_k(1+i)^{n-k} < J$, qualquer que seja $n$ natural e $i$ real positivo.

Façamos a prova por indução já que $n$ é natural. Naturalmente a desigualdade não é válida para $n = 1$, caso já excluído no enunciado da proposição, pois o financiamento seria em uma única prestação, o que levaria à identidade dos juros em ambos os casos:

$$i.1 \frac{(1+i)^{1-1}}{(1+i)^1 - 1} = \frac{i(1+i)^0}{1+i-1} = \frac{i}{i} = 1$$

Vejamos se é válida para $n = 2$ ($\mathrm{i} \neq 0, conforme\ nota\ de\ redap$é 2):

$$\mathrm{i}.2 \frac{(1+\mathrm{i})^{2-1}}{(1+\mathrm{i})^2-1} = \frac{2\mathrm{i}(1+\mathrm{i})^1}{1+2\mathrm{i}+\mathrm{i}^2-1} = \frac{2\mathrm{i}+2\mathrm{i}^2}{2\mathrm{i}+\mathrm{i}^2} = \frac{\mathrm{i}(2+2i)}{\mathrm{i}(2+i)} = \frac{2+2\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}$$

Como $2 + 2i > 2 + i$, então $\frac{2i+2i^2}{2i+i^2} > 1$, de modo que a desigualdade é válida para $n = 2$.

Vamos demonstrar que, supondo válida para $n$, a desigualdade se verifica para $n+1$, ou seja, dado $in\frac{(1+i)^{n-1}}{(1+i)^n-1} > 1$, então $i(n+1)\frac{(1+i)^n}{(1+i)^{n+1}-1} > 1$ é verdadeiro.

Partindo da hipótese para n :

$$in\frac{(1+i)^{n-1}}{(1+i)^n - 1} > 1$$

Multiplicando por (1+i):

$$in\frac{(1+i)^{n-1}(1+i)}{(1+i)^n - 1} > 1(1+i)$$

$$in\frac{(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} > (1+i)$$

Adicionando $\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n-1}$:

$$\frac{ni(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} + \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} > (1+i) + \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$$

$$\frac{i(1+i)^n(n+1)}{(1+i)^n-1} > (1+i) + \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n-1}$$

Observamos que:

$$\frac{i(1+i)^n(n+1)}{\cancel{(1+i)^n-1}}\left[\frac{\cancel{(1+i)^n-1}}{(1+i)^{n+1}-1}\right] > \left[(1+i) + \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n-1}\right]\left[\frac{(1+i)^n-1}{(1+i)^{n+1}-1}\right]$$

$$\frac{i(1+i)^n(n+1)}{(1+i)^{n+1}-1} > \left[(1+i) + \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n-1}\right]\left[\frac{(1+i)^n-1}{(1+i)^{n+1}-1}\right]$$

$$\frac{i(1+i)^n(n+1)}{(1+i)^{n+1}-1} > \left[\frac{(1+i)[(1+i)^n-1]+i(1+i)^n}{\cancel{(1+i)^n-1}}\right]\left[\frac{\cancel{(1+i)^n-1}}{(1+i)^{n+1}-1}\right]$$

$$\frac{i(1+i)^n(n+1)}{(1+i)^{n+1}-1} > \left[\frac{(1+i)[(1+i)^n-1]+i(1+i)^n}{(1+i)^{n+1}-1}\right]$$

$$\frac{i(1+i)^n(n+1)}{(1+i)^{n+1}-1} > \left[\frac{(1+i)^{n+1}-1-i+i(1+i)^n}{(1+i)^{n+1}-1}\right]$$

$$\frac{i(1+i)^n(n+1)}{(1+i)^{n+1}-1} > \left[\frac{(1+i)^{n+1}-1+i[-1+(1+i)^n]}{(1+i)^{n+1}-1}\right]$$

Observemos que $(1+i)^{n+1}-1+i[-1+(1+i)^n] > (1+i)^{n+1}-1$, pois $i(1+i)^n > i$, logo $i[-1+(1+i)^n] > 0$.

Dessa forma:

$$\left[\frac{(1+i)^{n+1}-1+i[-1+(1+i)^n]}{(1+i)^{n+1}-1}\right] > 1$$

Logo:

$$\frac{i(1+i)^n(n+1)}{(1+i)^{n+1}-1} > \left[\frac{(1+i)^{n+1}-1+i[-1+(1+i)^n]}{(1+i)^{n+1}-1}\right] > 1$$

e:

$$\frac{i(1+i)^n(n+1)}{(1+i)^{n+1}-1} > 1$$

Provamos, assim, por indução, que $in\frac{(1+i)^{n-1}}{(1+i)^n-1} > 1$, qualquer que seja $n > 1$. Em consequência, ficou demonstrado que $\sum_{k=1}^{n} J_k(1+i)^{n-k} < J$ ($vide$ equações *(8)* e *(11)*, qualquer que seja $n$ natural e $i$ real positivo.

**2ª parte: pelo plano não tradicional ou pelo valor presente**

- $K_k$

Se provarmos que $\frac{1+(1+i)^n}{2+i} > 1$, demonstraremos que J > $\sum_{k=1}^{n} JP_k(1+i)^{n-k}$. Para tanto, basta ver se $1+\ (1+i)^n\ > 2+i$:

$$1+\ (1+i)^n\ > 2+i$$
$$1+\ (1+i)^n\ > 1+(1+i)$$

Como $1+i>\ 1$ e $n$ é natural, então $(1+i)^n > 1+i$ $e, consequentemente$:

$$1+\ (1+i)^n\ > 1+(1+i)$$
$$1+\ (1+i)^n\ > 2+i$$
$$\frac{1+(1+i)^n}{2+i} > 1$$

Dessa feita, provamos que J > $\sum_{k=1}^{n} JP_k(1+i)^{n-k}$. ■

Isso significa que, no financiamento pelo SFA, determinados um prazo e uma taxa de juros positiva, sempre se pagará menos juros compostos que um pagamento único ao final do prazo, tanto pelo plano de amortização tradicional (juros calculados sobre o saldo devedor do mês anterior), como pelo plano pelo valor presente (juros calculados como resíduo da prestação após retirar a amortização).

Consequentemente, das proposições 5 e 6, não há anatocismo na tabela Price, pois $\sum_{k=1}^{n} J_k(1+i)^{n-k} < J$ e $\sum_{k=1}^{n} JP_k(1+i)^{n-k} < J$.

### 7.3 – Da prova da igualdade dos somatórios de juros pagos e juros devidos para todo n

Faremos aqui a demonstração de que, no SAF, a soma dos juros pagos no plano pelo valor presente ao final do financiamento é igual ao somatório dos juros devidos no plano tradicional.

**PROPOSIÇÃO 7: Dados $J_l = iD_{l-1}$ e $JP_l = P - \frac{P}{(1+i)^l}$ , então $\sum_{l=1}^{n} J_l$ = $\sum_{l=1}^{n} JP_l$ para todo n natural.**

**Demonstração:**

Comecemos por desenvolver $JP_l$ lembrando que os juros pagos são definidos como a diferença entre a prestação e o valor presente respectivo. Logo:

$$JP_l = P - \frac{P}{(1+i)^l}$$

Desenvolvendo para $l = 1, l = 2, l = 3, \ldots, l = n$ :

$$JP_1 = P - \frac{P}{(1+i)^1}$$

$$JP_2 = P - \frac{P}{(1+i)^2}$$

$$JP_3 = P - \frac{P}{(1+i)^3}$$

.

.

.

$$JP_n = P - \frac{P}{(1+i)^n}$$

Somando-se membro a membro, temos:

$$\sum_{l=1}^{n} JP_l = nP - P\left(\frac{1}{(1+i)} + \frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{1}{(1+i)^k} + \cdots + \frac{1}{(1+i)^n}\right)$$

De **(1)**:

$$D_0 = P\left(\frac{1}{(1+i)} + \frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{1}{(1+i)^k} + \cdots + \frac{1}{(1+i)^n}\right)$$

Assim:

$$\sum_{l=1}^{n} JP_l = nP - D_0 \qquad (\mathbf{13})$$

Desenvolvendo $J_l$:

$$J_1 = iD_0$$

$$J_2 = iD_1$$

$$J_3 = iD_2$$

.

.

.

$$J_n = iD_{n-1}$$

Somando-se membro a membro, obtemos:

$\sum_{l=1}^{n} J_l = i(D_0 + D_1 + D_2 \ldots + D_{n-1})$

Substituindo pela fórmula do saldo devedor tradicional **(10)**:

$$\sum_{l=1}^{n} J_l = i\left\{D_0 + D_0\left[\frac{(1+i)^n - (1+i)^1}{(1+i)^n - 1}\right] + D_0\left[\frac{(1+i)^n - (1+i)^2}{(1+i)^n - 1}\right] + \cdots + D_0\left[\frac{(1+i)^n - (1+i)^{n-1}}{(1+i)^n - 1}\right]\right\}$$

$$\sum_{l=1}^{n} J_l = iD_0 \left[1 + \frac{(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} - \frac{(1+i)^1}{(1+i)^n - 1} + \frac{(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} - \frac{(1+i)^2}{(1+i)^n - 1} + \ldots + \frac{(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} - \frac{(1+i)^{n-1}}{(1+i)^n - 1}\right]$$

$$\sum_{l=1}^{n} J_l = iD_0 \left\{1 + \frac{(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} + \frac{(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} + \frac{(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} + \cdots + \frac{(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} - \left[\frac{(1+i)^1}{(1+i)^n - 1} + \frac{(1+i)^2}{(1+i)^n - 1} + \ldots + \frac{(1+i)^{n-1}}{(1+i)^n - 1}\right]\right\}$$

$$\sum_{l=1}^{n} J_l = iD_0 \left\{1 + (n-1)\frac{(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} - \frac{1}{(1+i)^n - 1}\left[(1+i)^1 + (1+i)^2 + (1+i)^{n-1}\right]\right\}$$

A expressão entre colchetes corresponde à soma de uma PG finita de primeiro termo *(1 + i)*, razão *(1 + i)* e *n - 1* termos. Assim:

$$\sum_{l=1}^{n} J_l = iD_0 \left\{1 + (n-1)\frac{(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} - \frac{1}{(1+i)^n - 1}\left[\frac{(1+i)((1+i)^{n-1} - 1)}{\cancel{1} + i - \cancel{1}}\right]\right\}$$

$$\sum_{l=1}^{n} J_l = iD_0 \left\{1 + (n-1)\frac{(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} - \frac{1}{(1+i)^n - 1}\left[\frac{(1+i)^n - (1+i))}{i}\right]\right\}$$

$$\sum_{l=1}^{n} J_l = iD_0 \left\{1 + (n-1)\frac{(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} - \frac{(1+i)^n}{i[(1+i)^n - 1]} + \frac{1+i}{i[(1+i)^n - 1]}\right\}$$

$$\sum_{l=1}^{n} J_l = iD_0 \left\{(n-1)\frac{(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} - \frac{(1+i)^n}{i[(1+i)^n - 1]} + 1 + \frac{1+i}{i[(1+i)^n - 1]}\right\}$$

$$\sum_{l=1}^{n} J_l = iD_0 \left\{(n-1)\frac{(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} - \frac{(1+i)^n}{i[(1+i)^n - 1]} + \frac{i(1+i)^n - i + 1 + i}{i[(1+i)^n - 1]}\right\}$$

$$\sum_{l=1}^{n} J_l = iD_0 \left\{ (n-1)\frac{(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} - \frac{(1+i)^n}{i[(1+i)^n - 1]} + \frac{i(1+i)^n + 1}{i[(1+i)^n - 1]} \right\}$$

$$\sum_{l=1}^{n} J_l = iD_0 \left\{ (n-1)\frac{(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} - \frac{(1+i)^n}{i[(1+i)^n - 1]} + \frac{i(1+i)^n}{i[(1+i)^n - 1]} + \frac{1}{i[(1+i)^n - 1]} \right\}$$

$$\sum_{l=1}^{n} J_l = (n-1)iD_0\frac{(1+i)^n}{(1+i)^n-1} - \frac{\cancel{i}D_0(1+i)^n}{\cancel{i}[(1+i)^n-1]} + \frac{\cancel{i}D_0 i(1+i)^n}{\cancel{i}[(1+i)^n-1]} + \frac{\cancel{i}D_0}{\cancel{i}[(1+i)^n-1]}$$

$$\sum_{l=1}^{n} J_l = niD_0\frac{(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \cancel{- iD_0\frac{(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}} - \frac{D_0(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \cancel{+ \frac{D_0 i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}} + \frac{D_0}{(1+i)^n - 1}$$

$$\sum_{l=1}^{n} J_l = niD_0\frac{(1+i)^n}{(1+i)^n-1} - \frac{D_0(1+i)^n}{(1+i)^n-1} + \frac{D_0}{(1+i)^n-1}$$

$$\sum_{l=1}^{n} J_l = niD_0\frac{(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} - \frac{D_0\,\cancel{[(1+i)^n - 1]}}{\cancel{(1+i)^n - 1}}$$

$$\sum_{l=1}^{n} J_l = niD_0\frac{(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} - D_0$$

Neste instante, fazemos a seguinte substituição:

$$P = D_0.\left[\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}\right]$$

Logo:

$$\sum_{l=1}^{n} J_l = nP - D_0 \qquad \textbf{(14)}$$

Assim, de **(13)** e **(14)**, concluímos que:

$$\sum_{l=1}^{n} \boldsymbol{J_l} = \sum_{l=1}^{n} \boldsymbol{JP_l} \qquad \blacksquare$$

Para todo $n$ natural, então, temos que os juros pagos a cada período no SAF, calculados pelo plano do valor presente, quando somados, têm valor igual ao somatório dos juros devidos, também calculados período a período, pelo plano tradicional.

Isso evidencia que, pelos dois métodos, ao final, os juros gerados, embora distintos período a período, tem seus montantes se igualando ao final do financiamento.

**Corolário 1:** $\sum_{l=1}^{n}(\boldsymbol{J_l} - \boldsymbol{JP_l}) = \mathbf{0}$, $\forall\, \boldsymbol{n}$ **natural.**

**Demonstração:**

Iniciaremos a demonstração com o último resultado:

$$\sum_{l=1}^{n} J_l = \sum_{l=1}^{n} JP_l$$

$$\sum_{l=1}^{n} J_l - \sum_{l=1}^{n} JP_l = 0$$

$$(J_1 + J_2 + J_3 + \ldots + J_n) - (JP_1 + JP_2 + JP_3 + \ldots + JP_n) = 0$$

$$(J_1 - JP_1) + (J_2 - JP_2) + (J_3 - JP_3) + \ldots + (J_n - JP_n) = 0$$

$$\sum_{l=1}^{n}(\boldsymbol{J_l} - \boldsymbol{JP_l}) = \mathbf{0} \qquad \blacksquare$$

## 7.4 - Dos valores simétricos entre SJk e SAk

Como observado em 6.5, ao debater a tese de Demétrio Bassili, o saldo de juros, diferença entre juros devidos e juros pagos, seria anulado pela diferença entre as respectivas amortizações do período, caracterizadas pelos dois modelos de planos de amortização. Como ambas as diferenças seriam somadas ao saldo devedor no plano de amortização não tradicional, seu efeito seria nulo, não existindo o chamado plano de amortização misto, ou distorcido, na concepção de Abelardo de Lima Puccini (PUCCINI, 2014).

Vamos provar que isso ocorre para todo $n$.

**PROPOSIÇÃO 8: Se $\boldsymbol{SJ_k = J_k - JP_k}$ e $\boldsymbol{SA_k = A_k - A_{VPk}}$, então $\boldsymbol{SJ_k = -SA_k,\ \forall\, k \leq n}$.**

**Demonstração:**

$$SJ_k = J_k - JP_k$$

Como $JP_k = P - A_{VPk}$, substituímos:

$$SJ_k = J_k - (P - A_{VPk})$$

$$SJ_k = J_k - P + A_{VPk}$$

$$SJ_k = -(P - J_k) + A_{VPk}$$

Como $A_k = P - J_k$, substituímos:

$$SJ_k = -A_k + A_{VPk}$$

$$SJ_k = -(A_k - A_{VPk})$$

$$SJ_k = -SA_k$$

Pode-se demonstrar pelo caminho inverso:

$$SA_k = A_k - A_{VPk}$$

$$SA_k = P - J_k - A_{VPk}$$

$$SA_k = P - A_{VPk} - J_k$$

$$SA_k = JP_k - J_k$$

$$SA_k = -(J_k - JP_k)$$

$$SA_k = -SJ_k$$

$$SJ_k = -SA_k \qquad \blacksquare$$

### 7.5 – Da inferioridade, em qualquer instante $k < n$, do saldo devedor pelo Valor Presente em relação ao tradicional

Apresentamos, a seguir, uma demonstração de que o saldo devedor do plano de amortização pelo valor presente é sempre inferior ao do modelo tradicional, para todo $k < n$ . Usaremos os resultados de *(10)* e Proposição 4.

**PROPOSIÇÃO 9: Dados $D_k = D_0 \left[ \frac{(1+i)^n-(1+i)^k}{(1+i)^n-1} \right]$ , saldo devedor pelo plano de amortização tradicional, e $d_k = D_0 \left[\frac{(1+i)^{n-k}-1}{(1+i)^n-1}\right]$, saldo devedor pelo valor presente, então $d_k < D_k$ , $\forall\, k < n$ .**

**Demonstração:**

*A hipótese de k = n foi excluída porque, nesse caso, ambos os saldos devedores são iguais a 0. Observemos que* $D_0 > 0$ e $(1+i)^n - 1 > 0$.

$$d_k < D_k \textit{ se, e somente se,}$$

$$\cancel{D_0} \left[\frac{(1+i)^{n-k}-1}{\cancel{(1+i)^n-1}}\right] < \cancel{D_0} \left[ \frac{(1+i)^n-(1+i)^k}{\cancel{(1+i)^n-1}} \right] \quad \textit{se, e somente se,}$$

$$(1+i)^{n-k} - 1 < (1+i)^n - (1+i)^k \textit{ se e somente se,}$$

$$\frac{(1+i)^n}{(1+i)^k} - 1 < (1+i)^n - (1+i)^k \textit{ se, e somente se,}$$

$$\frac{(1+i)^n - (1+i)^k}{(1+i)^k} < (1+i)^n - (1+i)^k$$

*A expressão é obviamente verdadeira* $\forall\, k < n$, *pois* $1 + i > 0$ *e* $n > k$. *Logo* $d_k < D_k$ ***para todo*** $k < n$, *como queríamos demonstrar.* ■

## 8. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A presença do anatocismo no Sistema de Amortização Francês (tabela Price) foi tratada em discussões processuais no Poder Judiciário por décadas. Nesse debate, supostas provas matemáticas foram apresentadas sem o correspondente rigor que esta ciência exige.

Sobre Richard Price, constante referência da literatura para o SAF, discorremos que suas tabelas usam, de fato, a fórmula de juros compostos, o que, como vimos, também é a forma natural de lidarmos com financiamento ou constituição de capital (capítulo 2).

Mas discorremos que a fórmula de juros composto não incide sobre o capital emprestado, mas sobre parcelas dele, o que desmonta a tese do anatocismo na tabela Price, conforme demonstramos nas proposições 5 e 6. Transformar o uso da tabela Price em anatocismo seria, portanto, mera retórica, pois desprovida de prova consistente.

Nossa proposta principal foi apresentar uma demonstração formal da inexistência do anatocismo no SAF. Para tanto chegamos a algumas conclusões preliminares.

Como propagam os defensores da presença do fenômeno em discussão, a fórmula de juros compostos é a base do cálculo da prestação no SAF. Mas é aplicada sobre parcelas do capital financiado e não sobre o seu total. Isso representa uma diferença significativa, a qual fomentou nossa prova de que os juros pagos pela tabela Price são sempre inferiores ao pagamento único ao final do prazo $n$ (Proposição 6). Consistente com nossa demonstração de unicidade do anatocismo (Proposição 5), para um mesmo capital, prazo e taxa de juros, pudemos concluir sua inexistência na tabela Price.

O cálculo da prestação no SAF pressupõe a equivalência entre n prestações iguais, a intervalos constantes, logo, os juros e amortizações presentes em cada parcela, relacionam-se com os respectivos valores presentes. Com esses pressupostos, constrói-se um plano de amortização que denominamos de não tradicional ou a valor presente.

A remuneração pelo capital não tradicional é distinta do juro devido, calculado sobre o saldo devedor do mês anterior e que corresponde ao que é consagrado no mercado como plano de amortização tradicional.

A literatura de matemática financeira desprezou e, como visto, desqualificou o plano pelo valor presente, como se contradissesse o tradicional. Essa postura em parte se explica porque os defensores do anatocismo o usaram, o plano pelo valor presente, para dizer que havia sempre um saldo de juros a cada período, devido menos o pago, a serem somados ao saldo devedor, o que geraria juros sobre juros no período seguinte (BASSILI, 2014).

Mas contestamos essa última tese de duas formas. Primeiro observamos que, a partir da segunda metade do financiamento, os juros devidos passam a ser inferiores aos pagos pelo valor presente. Assim, o saldo de juros positivo da primeira metade do empréstimo passa a ser negativo na segunda, transformando-se em uma amortização a maior. Logo, economia de juros em cada parcela seguinte, a qual compensa os juros sobre juros pagos no período anterior.

Concluímos, então, que o somatório do saldo de juros (juros pagos menos juros devidos a cada período) ao final do financiamento é sempre nulo. Esse fato provamos no tópico 7.3, conforme Corolário 1.

Em segundo lugar, chamamos a atenção para o seguinte: o saldo de juros somado ao saldo devedor do período anterior não poderia ser realizado sem a correspondente adição do saldo de amortização, simétrico em cada parcela. Com isso, o suposto anatocismo é anulado pelos juros economizados pela amortização a maior no plano não tradicional. Isso ocorre na primeira metade do financiamento e se inverte na segunda (Gráfico 5).

Na Proposição 8, demonstramos a simetria entre saldo de juros e saldo de amortização. Os defensores do anatocismo omitem esse fato, que torna sem sentido o plano de amortização misto.

Nesse ponto, vale destacar que, como no final do financiamento, seja pelo plano de amortização tradicional, ou pelo de valor presente, os juros totais pagos são idênticos, equivalente a dizer que o somatório das diferenças entre juros pagos e juros devidos em cada período se anulam (Proposição 7 e Corolário 1).

Não há, portanto, equívoco em se utilizar o plano tradicional, permitindo concluir que não há anatocismo na tabela Price, corroborando as proposições 5 e 6.

Dessa feita, esperamos ter trazido esclarecimentos necessários ao tema proposto, de utilidade para o Poder Judiciário, com potencial de resolver controvérsias de ordem jurídica, mas calcada na ciência matemática, cerne basilar ao qual se deve recorrer neste tema em última instância.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALMEIDA, Clodomiro, Furquim de Almeida. **Cálculo operatório na matemática financeira.** Tese apresentada para doutoramento em Ciências (Matemática) a Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de São Bento, da Pontíficia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo: 1957.

ALMEIDA, Clodomiro, Furquim de Almeida. **Rendas discretas de termos variáveis em progressão aritmética de ordem superior.** Faculdade de Ciências Econômicas e Administrativas da Universidade de São Paulo. Boletim nº 8. São Paulo: 1959.

AYRES, Frank Jr. **Matemática financeira**. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil, 1981.

BASSILI, Demétrio Antunes. **Retirando os juros sobre os juros da tabela price**. 4ª ed. São Paulo: Scortecci Editora, 2014.

BLANK, Leland & TARQUIN, Anthony. **Engenharia econômica**. 6 ed. Porto Alegre: AMGH, 2008.

BANCO CENTRAL DO BRASIL . **Metodologia de cálculo de financiamento a prestações fixas.** Disponível em https://www.bcb.gov.br/pec/calculo/calc_financiamento/metodologia.asp?idpai=&frame=1. Acesso em 21 de mar 2020.

BRASIL. Lei nº 10.406 de 10 de janeiro de 2002. Institui o Código Civil. D.O.U. **Diário Oficial da União**, Brasília, 11 de janeiro de 2002. Poder Executivo.

BUENO, Rodrigo De Losso da Silveira; SANTOS, José Carlos de Souza; FILHO, Elias Cavalcante. **As inconsistências do método de Gauss-Nogueira**. Informações Fipe, nº 474, p. 8-21, jan.2020. Disponível em https://downloads.fipe.org.br/publicacoes/bif/bif472-8-21.pdf. Acesso em: 20 abr. de 2020.

CASSEL, Gustav. **Economía social teórica**. Tercera edición, Revisada. Madrid: M. Aguilar editor, 1946.

CAVALHEIRO, Luiz A. F. **Elementos de matemática financeira**. 8ª ed. Rio de Janeiro: Editora da Fundação Getúlio Vargas, 1985.

DE LOSSO, Rodrigo; GIOVANNETTI, Bruno Cara; RANGEL, Armênio de Sousa. **Sistema de amortização por múltiplos contratos**: a falácia do sistema francês. EALR, V. 4, nº 1, p. 160-180, Jan-Jun, 2013. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/272500896_Sistema_de_Amortizacao_por_Multiplos_Contratos_A_Falacia_do_Sistema_Frances. Acesso em: 23 abr. de 2020.

FARO, Clovis de. **Uma nota sobre amortização de dívidas e prestações constantes**. RBE. Rio de Janeiro, v. 68, n. 3, p. 363–371, Jul-Set 2014. Disponivel em http://www.scielo.br/pdf/rbe/v68n3/0034-7140-rbe-68-03-0363.pdf. Acesso em: 22 abr. 2020.

FERREIRA, Débora Borges. Sac ou price? **Revista do Professor de Matemática**, Rio de Janeiro, n. 85, p. 42-45, 2014.

FISHER, Irving. **A teoria do juro**: Determinada pela impaciência por gastar renda e pela oportunidade de investi-la. São Paulo: Abril Cultural, 1984.

FORGER, Frank Michael. **Saldo capitalizável e saldo não capitalizável:** novos algoritmos para o regime de juros simples. Disponível em https://www.ime.usp.br/~forger/pdffiles/Saldos.pdf. Acesso em: 21 mai. 2020.

FRANCISCO, Walter de. **Matemática financeira**. 7 ed. 10 reimpr. São Paulo: Atlas, 2009.

GIANNETTI, Eduardo. **O valor do amanhã**. São Paulo: Companhia das Letras, 2005.

HP 12C PLATINUM. **Manual do usuário e Guia de Resolução de Problemas.** Hewlett-Packard Development Company, L.P. 2003.

GOMES, Pedro Afonso; SCAVONE JÚNIOR, Luiz Antonio*. A tabela Price é ilegal?.* **Revista Jus Navigandi**, ISSN 1518-4862, Teresina, ano 6, n. 49, 1 fev. 2001. Disponível em: https://jus.com.br/artigos/736. Acesso em: 30 abr. 2020.

MATHIAS, Washington Franco; GOMES, José Maria. **Matematica financeira**. 5 ed. São Paulo: Atlas, 2008.

MORGADO, Augusto César; WAGNER, Eduardo; ZANI, Sheila C. **Progressões e matemática financeira**. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2015.

NETO, Alexandre Assaf. **Matemática financeira e suas aplicações**. 2 ed. São Paulo: Atlas, 1994

NOGUEIRA, Jorge Meschiatti. ***Tabela Price:*** *mitos e* paradigmas. 3ª ed. Campinas, SP: Millennium Editora, 2013.

PENNA, Edson de Queiroz. **Tabela Price e a inexistência de capitalização**. Porto Alegre: Ed. AGE, 2007.

PEREIRA, Antônio Luiz. Os juros simples são mesmo simples? **Revista do Professor de Matemática**. Rio de janeiro, n. 91, p. 20-25, 2016.

PEREIRA, Mário Geraldo. **Plano básico de amortização pelo sistema francês e respectivo fator de conversão**. Tese de doutorado apresentada à Faculdade de Ciências Econômicas e Administrativas da Universidade de São Paulo em 15.06.66. Disponível *em* http://periciajudicial.adm.br/pdfs/PEREIRA_Plano%20basico%20de%20amortizacao.pdf. Acesso em: 15 mar. 2020.

PRICE, Richard. **Observations on reversionary payments:** on aschemes for providing annuities for widows, and for persons in old age. 4º ed. London, T. Cadill, 1783.

PUCCINI, Abelardo de Lima. *Tabela price sem anatocismo para magistrados e advogados*. **Revista Conjuntura Econômica**, Rio de Janeiro, n. 68. v. 12, 2014.

PUCCINI, Abelardo de Lima. **Tabela price sem anatocismo para magistrados e advogados.** 21 de novembro de 2019. Disponível em: https://www.migalhas.com.br/depeso/315562/tabela-price-sem-anatocismo-para-magistrados-e-advogados. Acesso em 26 de fev 2020.

SAMANEZ, Carlos Patrício. **Matemática financeira**. 3 ed. São Paulo: Prentice Hall, 2002.

SANDRINI, Jackson Ciro. **Sistemas de amortização de empréstimos e a capitalização de juros**: análise dos impactos financeiros e patrimoniais. Dissertação de mestrado apresentada à Universidade Federal do Paraná em 2007. Disponível em https://acervodigital.ufpr.br/bitstream/handle/1884/13709/Microsoft%20Word%20-%20SISTEMAS%20DE%20AMORTIZA%c3%87%c3%83O%20DE%20EMPR%c3%89STIMOS%20E%20A%20CAPITALIZA%c3%87%c3%83O%20DE%20JUROS%20-%20AN%c3%81LISE%20DOS%20.pdf?sequence=1&isAllowed=y. Acesso em: 5 mai. 2020.

SHINODA, Carlos. **Matemática financeira para usuários do excel**. 2 ed. São Paulo: Atlas, 1998.

THIAGO, Rodolpho Baptista de S. **Mathematica commercial e financeira**. São Paulo: Escolas Profissionais Salesianas, 1937.

WILKIE, David. **Theory of interest, simple and compound**. Edinburgh, 1794.