Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional

VISUALIZAÇÕES DINÂMICAS NA GEOMETRIA PLANA DO PROFMAT

Mayco Sabóia Silva

Brasília
2020

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

VISUALIZAÇÕES DINÂMICAS NA GEOMETRIA PLANA DO PROFMAT

por

Mayco Sabóia

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, para obtenção do grau de

MESTRE EM MATEMÁTICA

Brasília, 2020.

Comissão Examinadora:

Profa. Dra. Tatiane da Silva Evangelista – FGA/UnB (Orientadora)

Prof. Dr. Rogério César dos Santos – MAT/UNB

Prof. Dr. João Paulo dos Santos – MAT/UNB

Ficha catalográfica elaborada automaticamente,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

SS117v Sabóia Silva, Mayco
VISUALIZAÇÕES DINÂMICAS NA GEOMETRIA PLANA DO PROFMAT / Mayco Sabóia Silva; orientador Tatiane da Silva Evangelista. -- Brasília, 2020.
67 p.

Dissertação (Mestrado - Mestrado Profissional em Matemática) -- Universidade de Brasília, 2020.

1. Geometria Dinâmica. 2. GeoGebra. 3. Geometria MA13. I. da Silva Evangelista, Tatiane, orient. II. Título.

Dedico este trabalho a Deus, a toda minha família, especialmente a minha mãe Ana Maria de Sabóia Silva (in memorian), aos meus amigos do PROFMAT, em especial aos queridos Francisco Wagner, Douglas, Sérgio, Clébia, Cláudio, Rodrigo, Fabiano e Sidney, com os quais desfrutei grandes momentos de estudo e crescimento intelectual e pessoal, e a minha gentil orientadora Tatiane.

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus, por tornar meu SONHO uma realidade, por não me deixar desanimar e por me mostrar que com ELE no comando, tudo dará certo.

À minha mãe, Ana Maria de Sabóia Silva, por me ensinar que a maior herança deixada a um filho é o conhecimento.

Aos amigos do curso, com certeza não teria chegado aqui sem eles.

À professora Dra. Tatiane da Silva Evangelista, por aceitar o convite para me orientar, e pelas palavras de incentivo e entusiasmo que me motivaram durante toda a pesquisa.

Agradeço a todos os professores da UnB pelas contribuições que deram à minha fundamentação teórica como professor de Matemática.

E, por fim, agradeço a todos que direta ou indiretamente fizeram o meu sonho se realizar.

“O início da sabedoria é a admissão da própria ignorância. Todo o meu saber consiste em saber que nada sei.”

Sócrates

RESUMO

O principal objetivo desta dissertação é a criação do *e-book* digital utilizando o *software GeoGebra* para fazer algumas demonstrações de teoremas fundamentais estudados na disciplina de Geometria plana MA13 - Geometria do Programa Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT). Dentro do contexto das Visualizações Dinâmicas, é possível ver, interagir e compreender as formas geométricas. O presente trabalho apresenta a utilização do *software GeoGebra* na criação de um livro digital para interação e percepções dos estudantes com essa nova forma de apresentar as demonstrações de teoremas. Para a parte da pesquisa, optou - se pela análise de conteúdo, onde foram verificadas as percepções de 47 egressos da disciplina de Geometria do PROFMAT que tiveram acesso ao livro digital e as visualizações de alguns teoremas. Os resultados mostram que as Visualizações Dinâmicas contribuíram para a compreensão das representações, de forma a facilitar o entendimento dos estudante sobre axiomas e teoremas, além de apoiar o trabalho do professor em disciplinas não presenciais.

Palavras-Chave: Geometria Dinâmica. *GeoGebra*. Geometria MA13.

ABSTRACT

The main goal of this dissertation is to create a digital e-book, using the GeoGebra software to make some fundamental theoretical analyzes which are studied in the discipline of plane geometry MA13 - Geometry of the Professional Master's Program in Mathematics (PROFMAT). Within the context of Dynamic Visualizations, it is possible to see, interact and understand the geometric shapes. The present work presents the use of the GeoGebra software in the creation of a digital book for interaction and perceptions of students with this new form of presentation the changes in theorems. For part of the research, it was decided for content analysis, where it was detected the perceptions of 47 graduates of the PROFMAT Geometry discipline who had access to the digital book and the visualizations of some theorems. The results shown the Dynamic Views contributed to the understanding of representations in order to facilitate the student's understanding of axioms and theorems, in addition to supporting the work of teachers in remote activities.

Key-words: Dynamic geometry. GeoGebra. MA13 Geometry.

Índice de Figuras

Figura 1 - Capa do livro digital: Visualizações Dinâmicas na Geometria Plana do PROFMAT. 13
Figura 2 - Teorema da Bissetriz Interna....14
Figura 3 - Demonstração do Teorema da Bissetriz Interna. 15
Figura 4 - Construção Dinâmica do Teorema da Bissetriz Interna (Etapa=0). 15
Figura 5 - Construção Dinâmica do Teorema da Bissetriz Interna (Etapa=1). 16
Figura 6 - Construção Dinâmica do Teorema da Bissetriz Interna (Etapa=2). 16
Figura 7 - Construção Dinâmica do Teorema da Bissetriz Interna (Etapa=3). 16
Figura 8 - Construção Dinâmica do Teorema da Bissetriz Interna (Etapa=4). 17
Figura 9 - Construção Dinâmica do Teorema da Bissetriz Interna (Etapa=5). 17
Figura 10 - Construção Dinâmica do Teorema da Bissetriz Interna (Etapa=6). 17
Figura 11 - Construção Dinâmica do Teorema da Bissetriz Interna (Etapa=7). 18
Figura 12 - Construção Dinâmica do Teorema da Bissetriz Interna (Etapa=8). 18
Figura 13 - Construção Dinâmica do Teorema da Bissetriz Interna (Etapa=9). 19
Figura 14 - Construção Dinâmica do Teorema da Bissetriz Interna (Etapa=10). 19
Figura 15 - Protocolo de Construção Teorema da Bissetriz Interna. 20
Figura 16 - Teorema de Menelaus....21
Figura 17 - Construção Dinâmica do Teorema de Menelaus (Etapa=0). 21
Figura 18 - Construção Dinâmica do Teorema de Menelaus (Etapa=1). 22
Figura 19 - Construção Dinâmica do Teorema de Menelaus (Etapa=2). 22
Figura 20 - Construção Dinâmica do Teorema de Menelaus (Etapa=3). 23
Figura 21 - Construção Dinâmica do Teorema de Menelaus (Etapa=4). 23
Figura 22 - Construção Dinâmica do Teorema de Menelaus (Etapa=5). 23
Figura 23 - Construção Dinâmica do Teorema de Menelaus (Etapa=6). 24
Figura 24 - Construção Dinâmica do Teorema de Menelaus (Etapa=7). 24
Figura 25 - Construção Dinâmica do Teorema de Menelaus (Etapa=8). 25
Figura 26 - Construção Dinâmica do Teorema de Menelaus (Etapa=8.1). 25
Figura 27 - Construção Dinâmica do Teorema de Menelaus (Etapa=8.2). 26
Figura 28 - Protocolo de Construção Teorema de Menelaus. 26
Figura 29 - Teorema de Ceva. 27
Figura 30 - Demonstração Algébrica do Teorema de Cevas. 28
Figura 31 - Construção Dinâmica do Teorema de Ceva (Etapa=0). 28
Figura 32 - Construção Dinâmica do Teorema de Ceva (Etapa=1). 29

Figura 33 - Construção Dinâmica do Teorema de Ceva (Etapa=2). 29
Figura 34 - Construção Dinâmica do Teorema de Ceva (Etapa=3). 30
Figura 35 - Construção Dinâmica do Teorema de Ceva (Etapa=4). 30
Figura 36 - Construção Dinâmica do Teorema de Ceva (Etapa=5). 31
Figura 37 - Construção Dinâmica do Teorema de Ceva (Etapa=6). 31
Figura 38 - Construção Dinâmica do Teorema de Ceva (Etapa=7). 32
Figura 39 - Construção Dinâmica do Teorema de Ceva (Etapa=8). 32
Figura 40 - Construção Dinâmica do Teorema de Ceva (Etapa=9). 33
Figura 41 - Construção Dinâmica do Teorema de Ceva (Etapa=10). 33
Figura 42 - Visualização Dinâmica do Teorema de Ceva (Etapa=11.1). 34
Figura 43 - Visualização Dinâmica do Teorema de Ceva (Etapa=11.2). 34
Figura 44 - Visualização Dinâmica do Teorema de Ceva (Etapa=11.3). 35
Figura 45 - Protocolo de Construção Teorema de Ceva..35
Figura 46 - Mapa do Brasil - Polos Pesquisados. 37
Figura 47 - Questão 04 do ENQ 2019.1 46
Figura 48 - Questão 02 do ENQ 2017.1 47
Figura 49 - Questão 02 do ENQ 2016.1 48
Figura 50 - Questão 02 do ENQ 2019.2 49
Figura 51 - Teorema de Van Aubel..50
Figura 52 - Variação no Teorema de Van Aubel feita por Mayco Sabóia. 50
Figura 53 - Tela Inicial do Software GeoGebra 6.0.377.0..54
Figura 54 - Interface Padrão do GeoGebra 54
Figura 55 - Ícone de Opções de Visualização 55
Figura 56 - Divisões da Barra de Menus do GeoGebra..56
Figura 57 - Opções da Barra de Ferramentas do GeoGebra..56
Figura 58 - Ferramentas Círculo..57
Figura 59 - Comando Círculo dados Centro e Um de seus Pontos 58
Figura 60 - Comando Círculo dados Centro e Raio 58
Figura 61 - Comando Compasso...58
Figura 62 - Comando Círculo definido por Três Pontos..58
Figura 63 - Construindo o Círculo usando o Campo de Entrada 58
Figura 64 - Botão Ajuda do Campo de Entrada 59
Figura 65 - Vários Objetos...60
Figura 66 - Ocultar e Exibir Objetos...60
Figura 67 - Protocolo de Construção 61

Índice de Gráficos

Gráfico 1 - Ao iniciar o curso do PROFMAT, você:..38
Gráfico 2 - Durante o curso PROFMAT, você...39
Gráfico 3 - Dos fatores a seguir, quais você considera que foram decisivos para sua decisão por fazer o PROFMAT: 39
Gráfico 4 - Os livros da coleção PROFMAT são adequados e, de forma geral, suficientes como fonte de pesquisa durante o curso. 40
Gráfico 5 - A metodologia utilizada pelos professores do curso é adequada. 41
Gráfico 6 - Durante a disciplina de Geometria do PROFMAT, você teve acesso a alguma demonstração dinâmica?...42
Gráfico 7 - Na sua opinião as demonstrações Dinâmicas facilitariam os entendimentos dos Teoremas aplicados na disciplina de Geometria do PROFMAT?......................................42
Gráfico 8 - Na sua opinião as Demonstrações Dinâmicas facilitariam os entendimentos das Construções Geométricas? 43
Gráfico 9 - Na sua opinião as Demonstrações Dinâmicas podem ser usadas como ferramentas para facilitar a Educação a Distância?..44

Índice de Tabelas

Tabela 1 - Atualmente, você: 37
Tabela 2 - Você conseguiria fazer uma construção? 43
Tabela 3 - Quais as maiores dificuldades em usar as Demonstrações Dinâmicas? 44

Lista de Abreviaturas e Siglas

App Store e ***Google Play*** Serviços de distribuição digital de aplicativos

CAPES Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior.

COVID-19 Do inglês Coronavirus Disease 2019, é uma doença infeciosa causada pelo coronavírus da síndrome respiratória aguda grave 2 (SARS-CoV-2).

Download Ato de fazer cópia de um ou mais arquivos de um servidor remoto para um computador local.

E-book Livro em formato digital.

ENQ Exame Nacional de Qualificação.

GD Geometria Dinâmica.

GeoGebra Aplicativo de matemática dinâmica que combina conceitos de geometria e álgebra em uma única GUI.

GGBOOK Plataforma que integra o software com editor de texto e equações a fim de permitir a construção de narrativas matemáticas dinâmicas.

Internet Rede de computadores dispersos por todo o planeta que trocam dados e mensagens utilizando um protocolo comum.

MA13 Disciplina de Geometria.

PROFMAT Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

Tablet Tipo de computador portátil, de tamanho pequeno, fina espessura e com tela sensível ao toque.

Smartphone Celular que combina recursos de computadores.

SBM Sociedade Brasileira de Matemática.

Site Constituído por uma ou mais páginas de hipertexto, que podem conter textos, gráficos e informações em multimídia.

Software Todo programa armazenado em discos ou circuitos integrados de computador, especificamente destinado a uso com equipamento audiovisual.

Sumário

Introdução 6

1. Referencial Teórico 7

1.1 Geometria Dinâmica 7

1.2 Geometria do PROFMAT (MA13) 10

2. Disciplina MA13 em dois contextos: Algébrica & Dinâmica 13

2.1. Teorema da Bissetriz Interna 14

2.2. Teorema de Menelaus 20

2.3. Teorema de Ceva 27

3. Pesquisa e Análises dos Resultados 36

4. Atividades propostas: treinando a Geometria Dinâmica 46

Considerações Finais 51

Referências 52

Apêndice A – Manual do *GeoGebra* 53

Apêndice B – Questionário Descomplicando a Geometria do PROFMAT 62

Introdução

Este trabalho tem como objetivo mostrar as aplicações do *software GeoGebra* nas Demonstrações Dinâmicas como contribuição para estudantes do Programa Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT).

A ideia para a construção desta pesquisa surgiu das dificuldades de compreender algumas demonstrações algébricas de teoremas do livro de Geometria da coleção do PROFMAT. Como resultado, foi percebido que a interatividade do *software GeoGebra* traz maior compreensão ao estudante no que diz respeito às Demonstrações Dinâmicas, pois é uma ferramenta que possibilita maior dinamicidade ao discente quanto à visualização de imagens.

Com os avanços dos estudos semióticos no que dizemos respeito ao ensino, é notável que os recursos digitais multimodais se fazem eficazes para maior compreensão dos conteúdos. No atual momento de pandemia por COVID–19 e isolamento social, as aulas presenciais tiveram que ser remodeladas para ensino à distância, e ferramentas digitais são os principais recursos para uma educação mais eficaz. Para o docente, é preciso sempre estar atento às mudanças no mundo, que refletem no modo de ensino-aprendizagem. Com a tecnologia cada vez mais presente na vida cotidiana, essa pode e deve ser utilizada a favor do ensino.

A metodologia empregada neste trabalho foi uma análise de obras que abordam o assunto e, a partir disso, foi mostrado o passo a passo de algumas atividades voltadas para a construção de Demonstrações Dinâmicas da Geometria plana da disciplina MA13 em seguida foi feito uma pesquisa qualitativa com 47 egressos, para levantamento de informações do perfil do participante e das motivações, sobre a disciplina de Geometria MA13 e as percepções referente a temática de Geometria Dinâmica.

1. Referencial Teórico

Os modos de ensino devem acompanhar as mudanças no mundo, que está constantemente passando por transformações. Assim, no que diz respeito à educação, os discentes devem buscar formas de acompanhar tais transições. No momento em que vivemos, em que a tecnologia está cada vez mais presente em nossas vidas, os recursos digitais tornam-se ferramentas úteis para o ensino.

No que diz respeito à compreensão de figuras geométricas, os recursos digitais (aqui, utilizado o software *GeoGebra*) cumprem um papel importante.

Matemáticos como Lourenço (2002), Gravina (1996) e Nóbriga (2019) trazem à tona tais questões. Para eles, a visualização imagética das formas geométricas contribuem para maior aprendizado dos discentes, pois o que antes era uma demonstração abstrata acaba tomando forma dinâmica e, com o auxílio do *software GeoGebra*, permite, também, maior interatividade do aprendiz.

1.1 Geometria Dinâmica

Os programas de Geometria Dinâmica são *softwares* que, como o nome sugere, permitem maior dinamicidade no que diz respeito ao estudo da Geometria. Tais programas são uma evolução da estaticidade de livros e quadros de sala de aula, pois permitem aos discentes mais interatividade e maleabilidade das formas geométricas.

A Matemática é uma ciência construída por meio de demonstrações baseadas em seus axiomas. Segundo Ferreira et al (2008), é de extrema importância para o processo de ensino e aprendizagem que as práticas de demonstrações sejam realizadas por professores e alunos. Villiers (2002) afirma que são as demonstrações que constituem o conhecimento matemático, e não os teoremas, o que é de fato significativo é o caminho de construção, bem mais do que o resultado alcançado.

> Em certo sentido, os teoremas são apenas etiquetas, legendas de demonstrações, sumários de informações, títulos de notícias, esquemas editoriais. O arsenal completo de métodos matemáticos, conceitos, estratégias e técnicas de resoluções de problemas, o estabelecimento de interconexões entre teorias, a sistematização dos resultados – todo o saber matemático está imbuído nas demonstrações. Pense nas demonstrações como uma rede de estradas num sistema de transportes públicos, e olhe para os enunciados dos teoremas como sendo as paragens de autocarro; o local das paragens é só uma questão de conveniência (Villiers 2002).

Nesse sentido, observa-se que as demonstrações podem ser usadas como ferramentas para desenvolver o espírito investigativo em nossos alunos, e os teoremas deduzidos por elas são as recompensas de um trabalho de pesquisa e desenvolvimento do conhecimento matemático.

Quando passamos para a área da Geometria, o desafio em compreender algumas demonstrações podem ser ainda maiores, pois existe um componente figural, ou seja, uma imagem mental associada aos conceitos e axiomas. Na Matemática é fundamental que se associem duas ou mais formas de representação a um só conceito.

> Na formação da imagem mental, o desenho associado ao objeto geométrico desempenha papel fundamental. Para o aluno nem sempre é de todo claro que o desenho é apenas uma instância física de representação do objeto. O desenho é um suporte concreto de expressão e entendimento do objeto geométrico - o que fica transparente na nossa atitude frente à um problema: a primeira coisa que fazemos é desenhar a situação (Gravina 1996).

Lourenço (2002), a respeito do ensino de Geometria, sugere então que se comece oferecendo aos estudantes a oportunidade de manipular e construir as figuras geométricas. Dessa forma é fácil aprender as propriedades significativas dessas figuras.

Lourenço afirma que:

> A demonstração de uma proposição adquire grande credibilidade quando é apoiada em fatores visuais. Uma imagem ou uma sequência de imagens é capaz de convencer até mesmo observadores que não têm grande habilidade em Matemática e pouca familiaridade com artifícios e sutilezas de demonstrações formais. Entre aqueles que possuem uma tendência para a Matemática, a observação de imagens que sugerem resultados torna o trabalho muito mais interessante e, em geral, incentiva o estudante para as realizações de novas investigações (Lourenço, 2002).

Existe, entretanto, uma abordagem diferente para introduzir as demonstrações na vida acadêmica de nossos estudantes, trata-se da Geometria Dinâmica (GD). Nóbriga (2015) afirma “com o auxílio de *softwares* de GD, é possível tornar manipuláveis as representações semióticas como se fossem objetos concretos.” Para esse autor, é isso o que torna essa abordagem diferente, justamente o fato de poder manipular as representações matemáticas de diversas formas.

Gravina (1996) define Geometria Dinâmica como “Ferramentas de construção: desenhos de objetos e configurações geométricas são feitos a partir das propriedades que os definem. Através de deslocamentos aplicados aos elementos que compõe o desenho, este se transforma”. Dessa forma, ela afirma que teremos uma coleção de “desenhos em movimento” que representam as propriedades geométricas.

Utilizando a Geometria Dinâmica, Nóbriga (2019) nos traz a proposta da Demonstração Matemática Dinâmica, que, segundo ele, é caracterizada não como uma nova forma de demonstrar teoremas, mas como demonstrá-los usando outras ferramentas, na intenção de viabilizar a melhor compreensão dos estudantes utilizando o lúdico.

Dentro das Demonstrações Dinâmicas, aparecem ao mesmo tempo todas as formas de representações, como explica Nóbriga no trecho a seguir:

> Numa demonstração dinâmica de uma propriedade ou teorema, as diferentes representações desse objeto aparecem concomitantemente e estão conectadas. Usam-se registros linguísticos, simbólicos e visuais dinâmicos, além de tratamentos e conversões dinâmicas (Nóbriga, 2019).

Ao trabalhar dessa forma, o estudante consegue associar a imagem mental aos conceitos que a representam, tornando, assim, concreto o que antes era abstrato. Ao usar, por exemplo, o *GeoGebra* para construir uma função trigonométrica, o aluno pode alterar os parâmetros e observar o que acontece com o gráfico da função, relacionando diretamente as duas formas de representação desse conceito.

A respeito das demonstrações matemáticas por meio de *softwares* de Geometria Dinâmica, Villiers enfatiza:

> Deve-se utilizar inicialmente a função mais fundamental de explicação e descoberta para introduzir a demonstração como uma atividade significativa para os alunos. Isto requer que os alunos sejam iniciados bem cedo à arte de formular problemas e que lhes tenham sido proporcionadas oportunidades suficientes para explorar, conjecturar, refutar, reformular, explicar, etc. Os programas de Geometria Dinâmica encorajam fortemente este tipo de pensamento na medida em que não só são meios poderosos de verificação de conjecturas verdadeiras, como também são extremamente úteis na construção de contra-exemplos para falsas conjecturas (Villiers 2002).

Como as definições e as demonstrações matemáticas dinâmicas estão diretamente ligadas ao movimento, Nóbriga (2015) nos diz que é preciso um ambiente que permita essa movimentação, integre os diferentes tipos de representação, e, ainda, seja intuitivo. Para isso, as plataformas indicadas por ele são o *GeoGebra* e o *GGBOOK*.

Sobre a plataforma *GGBOOK*, Nóbriga explica que é uma plataforma que integra o *software* com editor de texto e equações a fim de permitir a construção de narrativas matemáticas dinâmicas.

> O *GGBOOK* é uma plataforma educativa para o ensino de matemática. O nome *GGBOOK* é uma integração dos termos “GGB” e “*BOOK*”. GGB vem das extensões dos arquivos do *software* educativo *GeoGebra* e *BOOK* é a palavra “livro”, em inglês. A ideia é que a plataforma sirva como um livro digital dinâmico que integra múltiplas representações. Para que possamos validar a ferramenta, é necessária a experimentação com estudantes. Isso fornecerá dados para as análises (Nóbriga 2015).

Sobre a plataforma *GeoGebra*, Silveira et al afirmam.

> O *GeoGebra*, *software* de cariz predominantemente construtivista, constitui, assim, um excelente recurso para o estudo da Geometria, pois possibilita ao aluno visualizar, explorar, conjeturar, validar, compreender e comunicar os conceitos geométricos de uma forma interativa e atrativa (Silveira et al 2013).

Por ser uma ferramenta em que se constroem imagens a partir das suas definições, o *GeoGebra* permite que movimente os objetos da figura, sem alterar seus conceitos, o que ajuda a construir um raciocínio geométrico concreto e verificar a validade para outras dimensões.

Contudo, Nóbriga (2019) relata que se deve tomar cuidado ao utilizar o computador como um meio “dinâmico” pois ele também pode ser estático, isso acontece quando ele apenas reproduz aquilo que pode ser escrito no quadro ou papel.

> A formação do professor é ponto estratégico dentro de um projeto educacional de melhoria da qualidade de ensino. E, essa formação no contexto da Informática na Educação, necessita ser mais sólida e mais ampla, tanto no domínio do currículo escolar como dos aspectos computacionais. (Ferreira et al, 2008).

Assim como o aluno, o professor e a sua formação também contribuem para que o uso de ambientes de Geometria Dinâmica sejam aproveitados da melhor maneira possível, afinal, o professor é de extrema importância no processo de ensino aprendizagem, como mediador entre aluno e seu objeto de estudo.

1.2 Geometria do PROFMAT (MA13)

Nesta seção, será explicado o funcionamento da disciplina de Geometria do PROFMAT, assim como as implicações do estudo dessa disciplina para a elaboração do livro digital Visualizações Dinâmicas na Geometria Plana do PROFMAT, o livro ainda não contempla todos os teoremas e exercícios da disciplina MA13, mas, uns dos objetivos será a constante atualização e ampliação de novas teoremas ainda não abordados na disciplina, como o Teorema de Van Aubel.

O Mestrado Profissional em Matemática em rede nacional (PROFMAT) é um mestrado formado em conjunto pela universidade, coordenação de aperfeiçoamento pessoal de nível superior (CAPES) e coordenado pela Sociedade Brasileira de Matemática – SBM tem o intuito de aprimorar profissionalmente professores de matemática, principalmente os atuantes na rede pública de ensino, aprofundando os conhecimentos matemáticos essências para a sua docência.

A SBM descreve os objetivos do PROFMAT da seguinte maneira:

> O principal objetivo do PROFMAT é oferecer formação profissional sólida em Matemática, que contemple as necessidades do trabalho cotidiano dos professores no espaço da escola, assim como suas necessidades de desenvolvimento e de valorização profissional. Visa, ainda, o desenvolvimento de uma postura crítica acerca do trabalho nas aulas de Matemática, na Educação Básica. São diretrizes do PROFMAT: a) executar um processo de formação complementar em Matemática, baseado nos conteúdos curriculares do Ensino Básico, que promova o domínio dos conteúdos apropriados, da forma de pensar e das estratégias de resolução de problemas característicos da Matemática; b) promover uma articulação eficaz entre conhecimentos e práticas das Ciências Matemáticas e do Ensino Básico, direcionada aos objetivos da Educação Básica; c) estimular e promover a independência do professor, fornecendo-lhe instrumentos para busca por conhecimento e desenvolvimento profissional, de forma autônoma e permanente; d) incentivar a pesquisa e a produção de materiais e práticas pedagógicas inovadoras para o enriquecimento do processo de ensino e aprendizagem de Matemática na escola (textos, atividades, *softwares*, simulações, práticas pedagógicas inovadoras e diferenciadas em ambientes de aprendizagem etc), Sociedade Brasileira de Matemática, 2017.

Observamos, então, nas diretrizes, que o programa vai além de um aprimoramento que auxilia o ensino e a aprendizagem da matemática, busca, também a qualificação do professor, aperfeiçoando o egresso para desenvolver conhecimentos didáticos que auxilie o ensino e aprendizagem da Matemática, estimulando-o a prosseguir na busca do conhecimento de forma independente.

Como forma de incentivo à pesquisa, o programa conta com uma dissertação no trabalho de conclusão de curso que, segundo a SBM (2017), aborda temas específicos pertinentes ao currículo de Matemática na Educação Básica nesse sentido afirma:

> Os produtos gerados pelo Programa devem guardar uma estreita relação com as atividades realizadas no PROFMAT: Uma reflexão e alguns resultados nas

> salas de aula, de forma a possibilitar que os discentes do curso possam melhorar suas práticas educacionais (Sociedade Brasileira de Matemática, 2017).

Por esse motivo, os trabalhos desenvolvidos no programa estão disponíveis para pesquisa e reflexão das práticas educacionais dos alunos e egressos do PROFMAT, por meio do *site* do programa.

Além das dissertações, os discentes do PROFMAT passam por um exame de qualificação, que é uma prova cujo objetivo é avaliar os conhecimentos obtidos pelos alunos no decorrer do curso, além de indicar a uniformidade do programa em todas as instituições em que este é oferecido.

Para manter o controle do padrão de qualidade do mestrado, a SBM (2017) busca manter contato com egressos, docentes e gestores dos sistemas educacionais em que os discentes do PROFMAT ministram suas aulas, analisando, assim, os resultados do programa na prática educacional.

> A pesquisa com os egressos é de fundamental importância, na medida em que eles enfrentam diferentes situações no seu cotidiano, que os levam a utilizar as competências desenvolvidas durante o curso, além de outras necessárias ao seu exercício profissional. Sua vivência permite, portanto, que façam uma melhor avaliação da adequação da estrutura pedagógica do curso, fornecendo elementos para seu aprimoramento (Sociedade Brasileira de Matemática, 2017).

Conforme informações da SBM (2017), a maioria dos dados satisfatórios para o desenvolvimento dos profissionais de ensino que já passaram pelo programa, quando questionados sobre sua conduta como professor antes e depois do PROFMAT, 98% dos egressos relataram que houve uma melhora em sua capacidade de ensinar seus alunos.

Em relação ao crescimento na carreira, 96% dos egressos entrevistados responderam que o programa foi importante para o seu avanço.

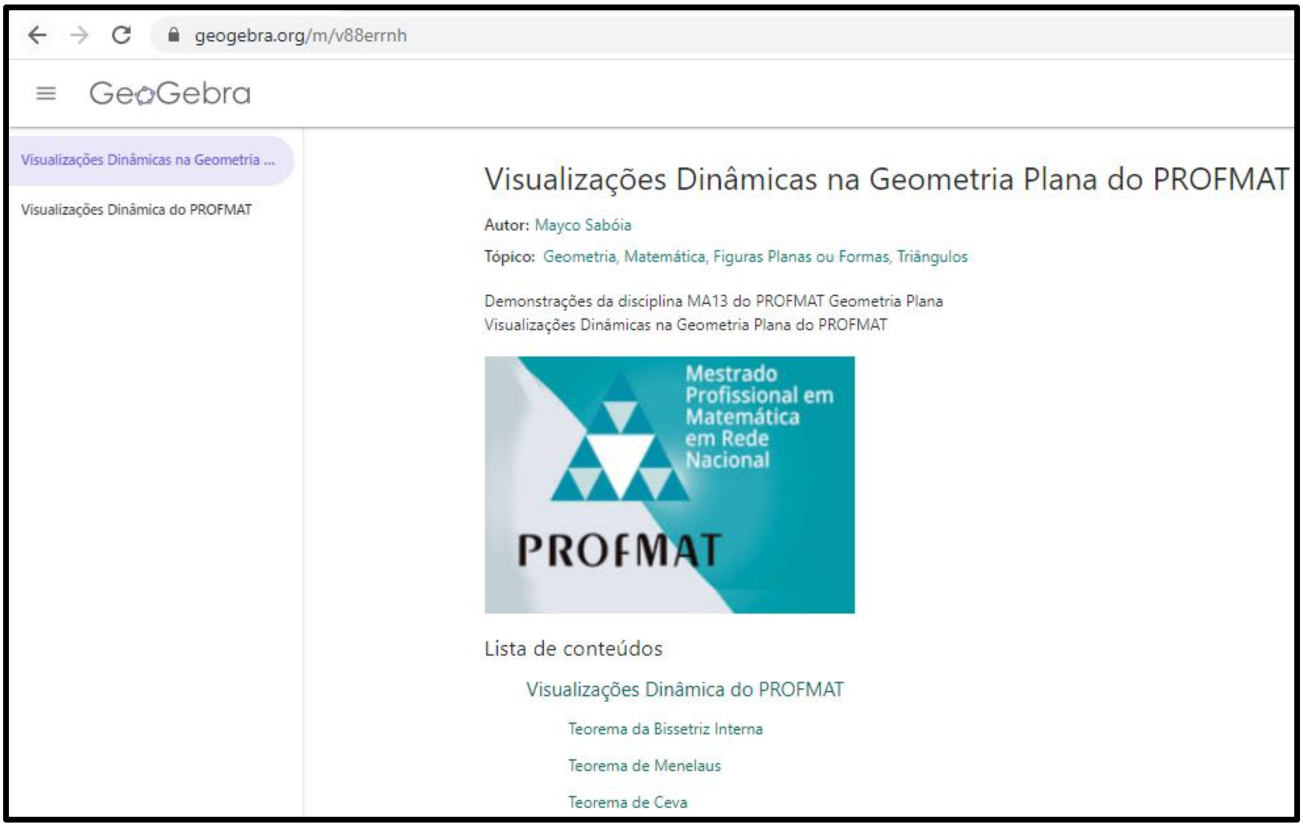
Também foram feitas perguntas para os coordenadores institucionais, estas também obtiveram, em sua maioria, respostas positivas para a importância do curso: 94% dos coordenadores consideraram a formação dos discentes de excelente a adequada e todos os coordenadores que passaram pela avaliação concordaram que o curso teve uma boa contribuição na formação dos discentes e para a sua atuação como profissionais.

2. Disciplina MA13 em dois contextos: Algébrica & Dinâmica

Neste capítulo, apresentamos o *e-book* Visualizações Dinâmicas na Geometria Plana do PROFMAT (https://www.GeoGebra.org/m/v88errnh), a etapa de elaboração pelo autor Mayco Sabóia Silva se deu ainda quando discente da disciplina de MA13 com o intuito de preparação para o Exame Nacional de Qualificação – ENQ o que despertou o desejo de ampliar o estudo sobre essa temática para desenvolvimento dessa dissertação, o e-book pretende acompanhar o desenvolvimento da disciplina MA13 com a construção gradual de todos os teoremas e exercícios do material didático adotado.

A proposta desse livro digital é trazer dinamicidade nas apresentações de teoremas importantes da Disciplina de Geometria Plana do Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT em dois contextos de apresentação Algébrica e Dinâmica e, ainda, o passo a passo de como fazer a Construção Dinâmica. O e-book está em fase de construção e como proposta de futuras atualizações, com outros teoremas que não constam na disciplina MA13, mas que podem enriquecer a obra.

Figura 1 - Capa do livro digital: Visualizações Dinâmicas na Geometria Plana do PROFMAT.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Primeiro Capítulo do Livro Digital: Teorema da Bissetriz Interna.

O primeiro capítulo trata dos Triângulos e do Teorema da Bissetriz Interna. A investigação desse polígono levou à descoberta de várias propriedades e teoremas, dentre eles, talvez o mais famoso, o teorema de Pitágoras relacionado aos triângulos retângulos. Diante da observação dos elementos de um triângulo, outros teoremas foram elaborados, ampliando as características e descobertas desta figura tão fascinante.

Segundo e Terceiro Capítulo do Livro Digital: Teorema de Menelaus e Teorema de Ceva.

Exercícios envolvendo colinearidade e concorrência em Geometria na matemática normalmente são difíceis, longos e, consequentemente, impopulares entre os alunos. Com a ajuda de dois famosos teoremas, elas podem ser simplificadas. O primeiro foi descoberto por Menelaus de Alexandria (aproximadamente 100 A.C.). Em 1678, Giovanni Ceva, um matemático italiano, publicou o Teorema de Menelaus e um segundo teorema de sua própria autoria, relacionado com o primeiro.

2.1. Teorema da Bissetriz Interna

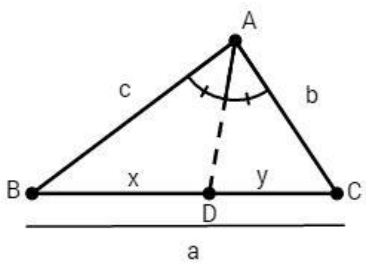
O teorema da bissetriz interna é um importante teorema da Geometria plana, o qual conseguimos determinar segmentos proporcionais em um triângulo.

Teorema: Em um triângulo, a bissetriz de um ângulo interno divide o lado oposto em partes proporcionais aos lados adjacentes.

O enunciado acima deve ser entendido como segue.

Sendo ABC o triângulo de lados a, b e c, $\overline{AD}$ uma bissetriz interna (Figura 2) $DB = x \ e \ DC = y$, teremos: $\frac{x}{c} = \frac{y}{b}$.

Figura 2 - Teorema da Bissetriz Interna



Fonte: Elaborado pelo autor.

O lado $BC = a$ é dividido em dois segmentos aditivos, pois $\overline{DB} + \overline{DC} = \overline{BC}$, ou seja, $x + y = a$.

a) Demonstração Algébrica Teorema da Bissetriz Interna.

Conduzimos por C uma paralela à bissetriz $\overline{AD}$, determinando um ponto E na reta $\overleftrightarrow{AB}$ ($\overleftrightarrow{CE} \ // \ \overleftrightarrow{AD}$) (Figura 3).

Fazendo $B\hat{A}D = \hat{1},\ D\hat{A}C = \hat{2},\ A\hat{E}C = \hat{3}, e\ A\hat{C}E = \hat{4}$, temos:

$\overleftrightarrow{CE} \; // \; \overleftrightarrow{AD} \implies \hat{1} \equiv \hat{3}$ (Correspondentes).

$\overleftrightarrow{CE} \; // \; \overleftrightarrow{AD} \implies \hat{2} \equiv \hat{4}$ (Alternos internos).

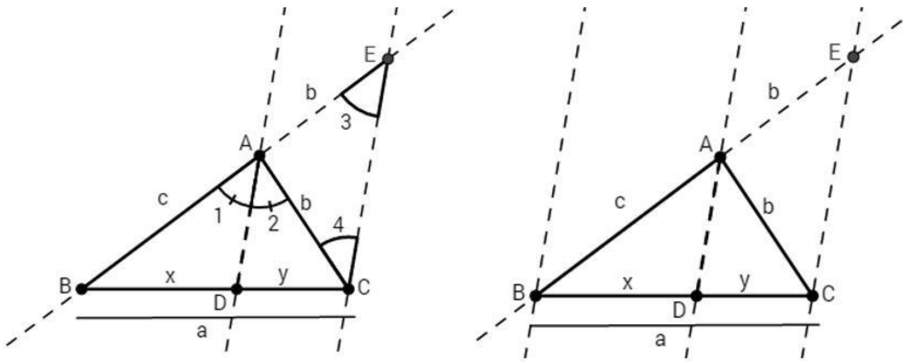
Como por hipótese $\hat{1} \equiv \hat{2}$, decorre que $\hat{3} \equiv \hat{4}$.

$\hat{3} \equiv \hat{4} \implies \Delta ABC$ é isósceles de base $\overline{CE} \implies \overline{AE} \equiv \overline{AC} \implies AE = b$.

Considerando $\overleftrightarrow{BC}\; e \;\overleftrightarrow{BE}$ como transversais de um feixe de retas paralelas (identificado $\overleftrightarrow{CE} \; // \; \overleftrightarrow{AD}$) e aplicando o teorema de Tales, vem:

$\frac{x}{y} = \frac{c}{b}$, ou seja, $\frac{x}{c} = \frac{y}{b}$.

Figura 3 - Demonstração do Teorema da Bissetriz Interna.



Fonte: Elaborado pelo autor.

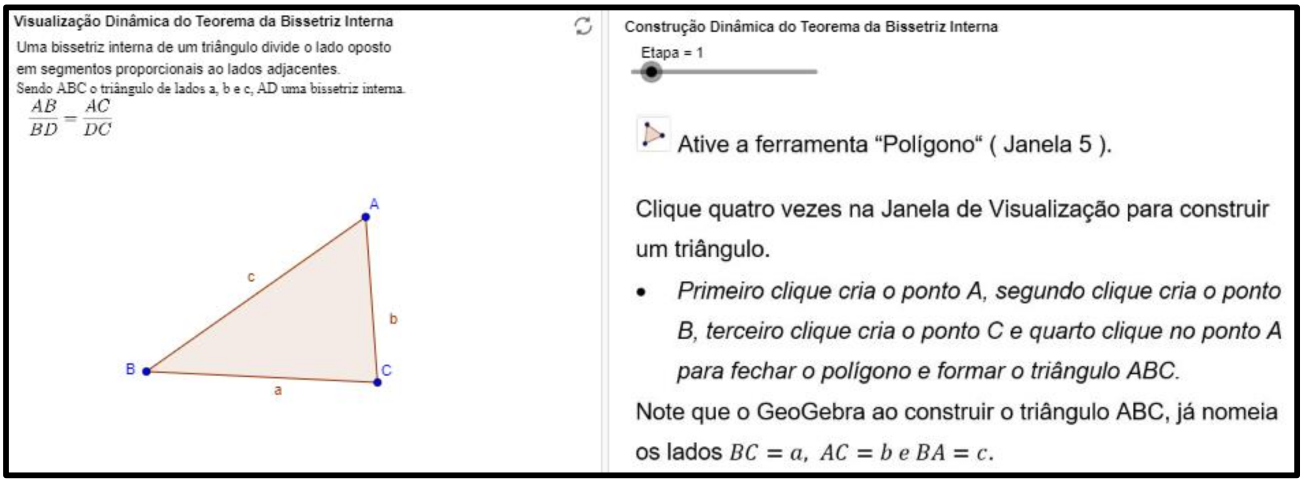
b) Demonstração Dinâmica Teorema da Bissetriz Interna.

O capítulo 1 do *GGbook* se refere ao famoso Teorema da Bissetriz Interna, onde é possível acompanhar as etapas da Construção Dinâmica e, ao mesmo tempo, sua Visualização Dinâmica (conforme as Figuras de 4 a 14). Sendo assim, em qualquer processo da construção, é possível alterar a posição dos objetos, facilitando a visualização e a compreensão da demonstração do teorema.

Figura 4 - Construção Dinâmica do Teorema da Bissetriz Interna (Etapa=0).

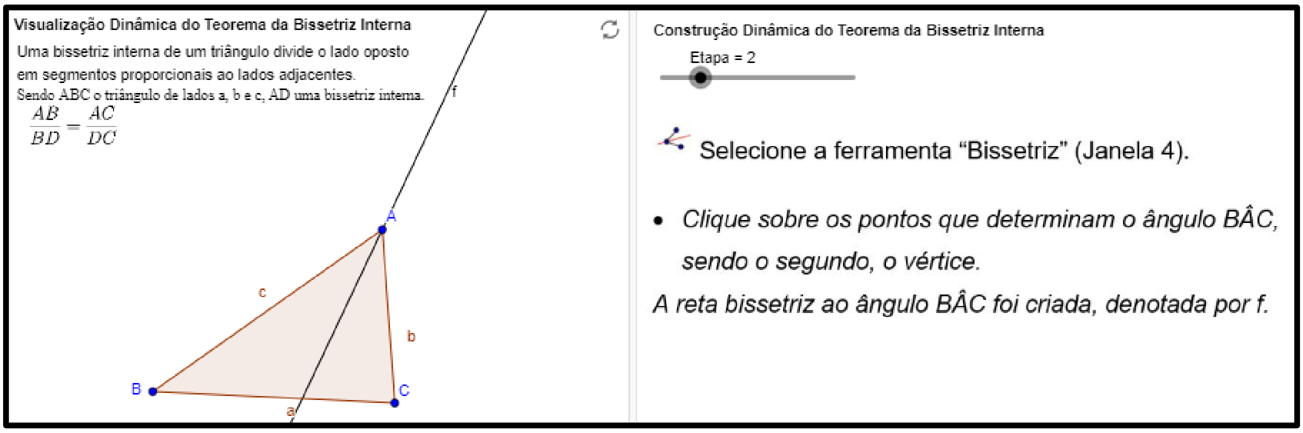
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 5 - Construção Dinâmica do Teorema da Bissetriz Interna (Etapa=1).



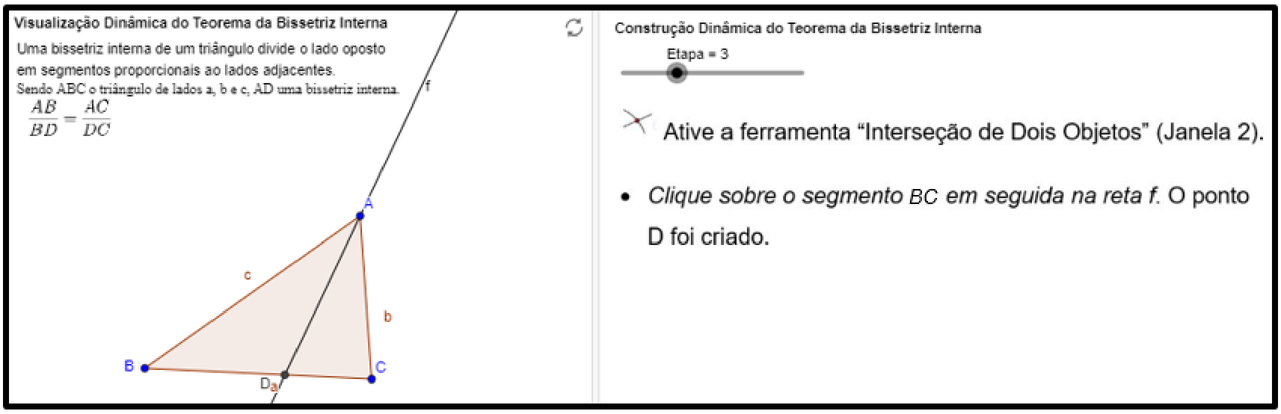
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 6 - Construção Dinâmica do Teorema da Bissetriz Interna (Etapa=2).



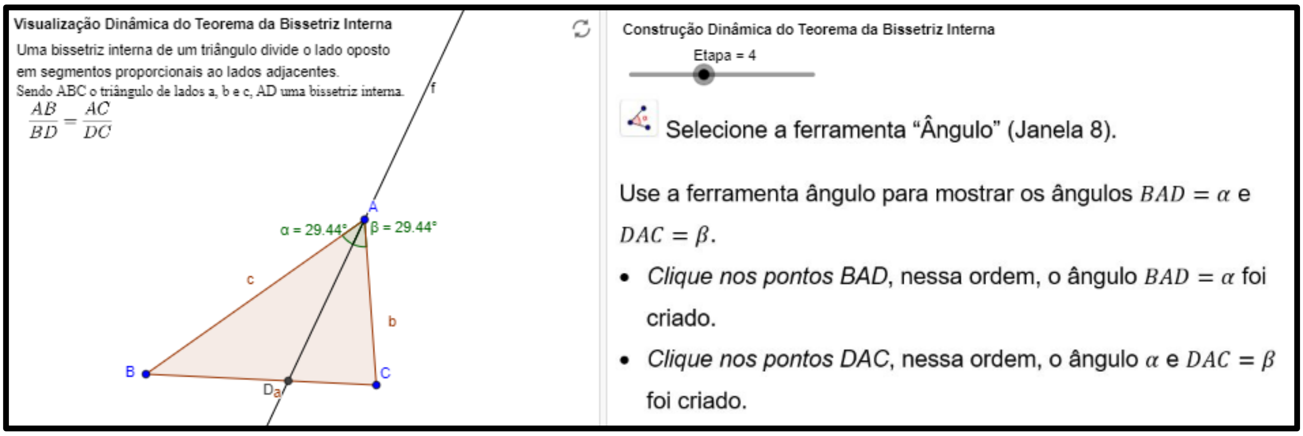
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 7 - Construção Dinâmica do Teorema da Bissetriz Interna (Etapa=3).



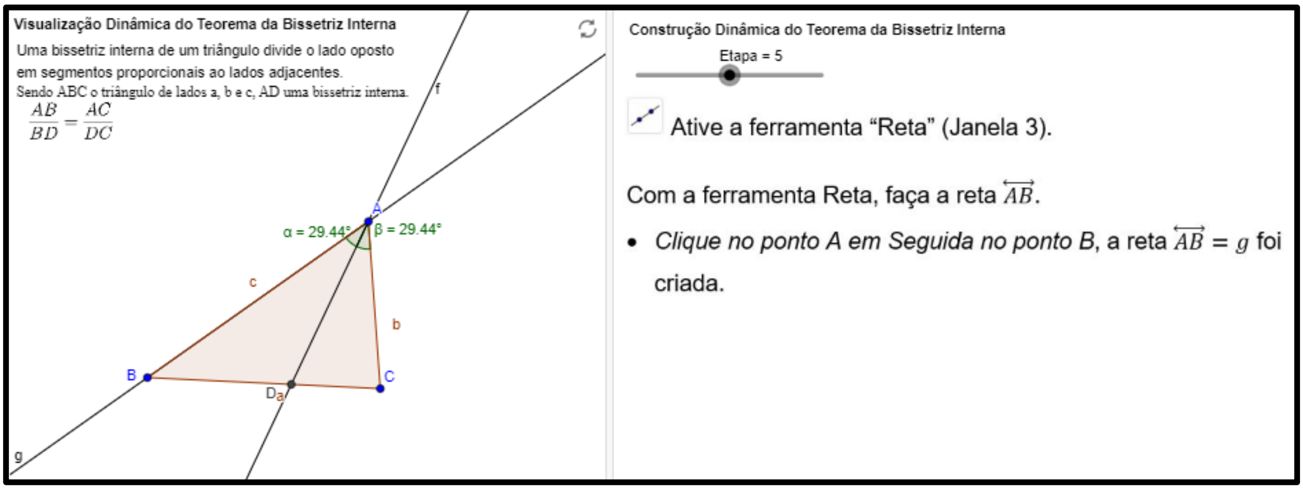
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 8 - Construção Dinâmica do Teorema da Bissetriz Interna (Etapa=4).



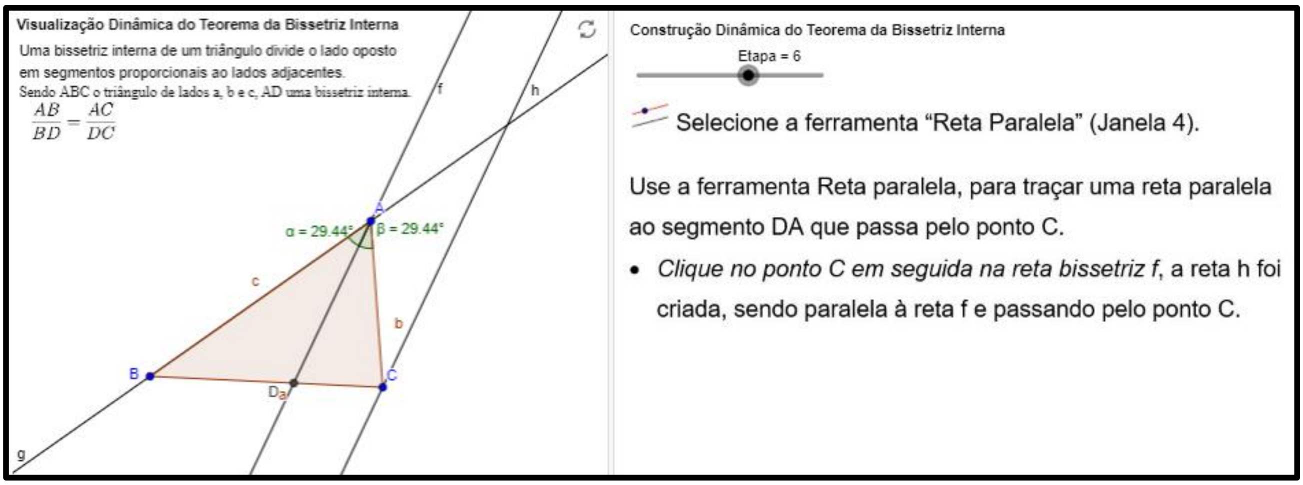
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 9 - Construção Dinâmica do Teorema da Bissetriz Interna (Etapa=5).



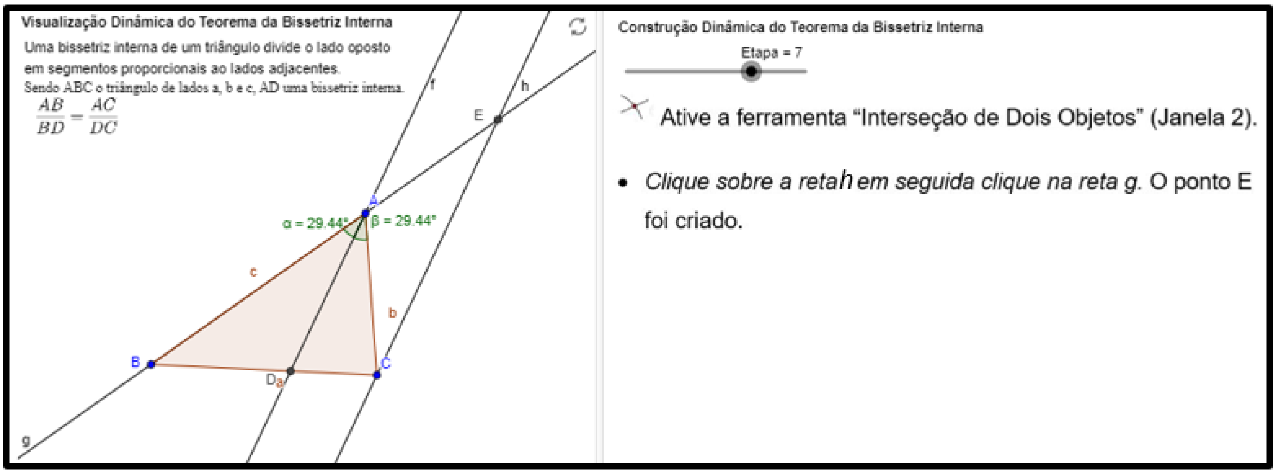
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 10 - Construção Dinâmica do Teorema da Bissetriz Interna (Etapa=6).



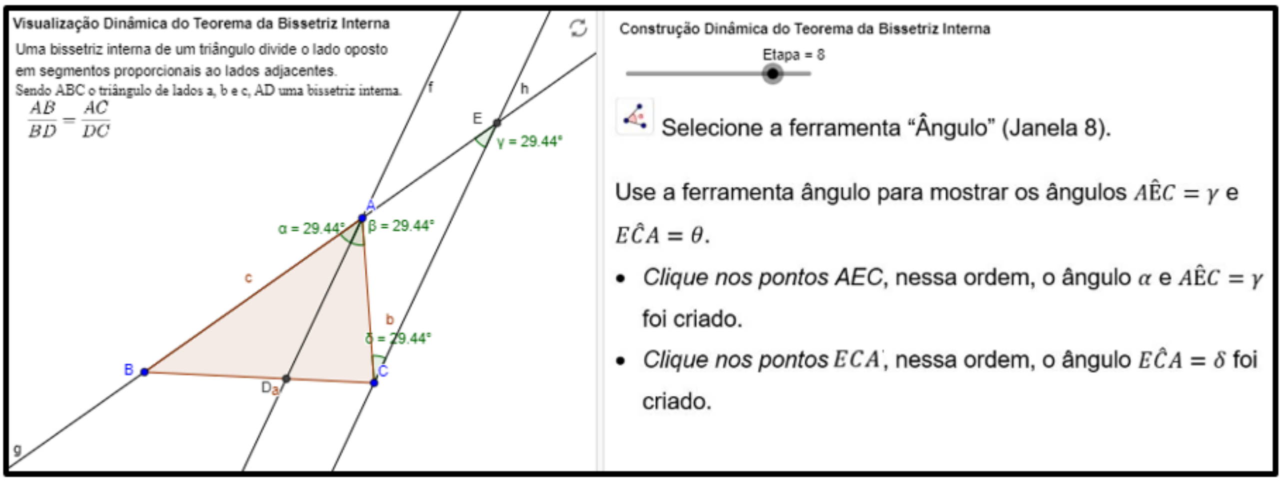
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 11 - Construção Dinâmica do Teorema da Bissetriz Interna (Etapa=7).



Fonte: Elaborado pelo autor.

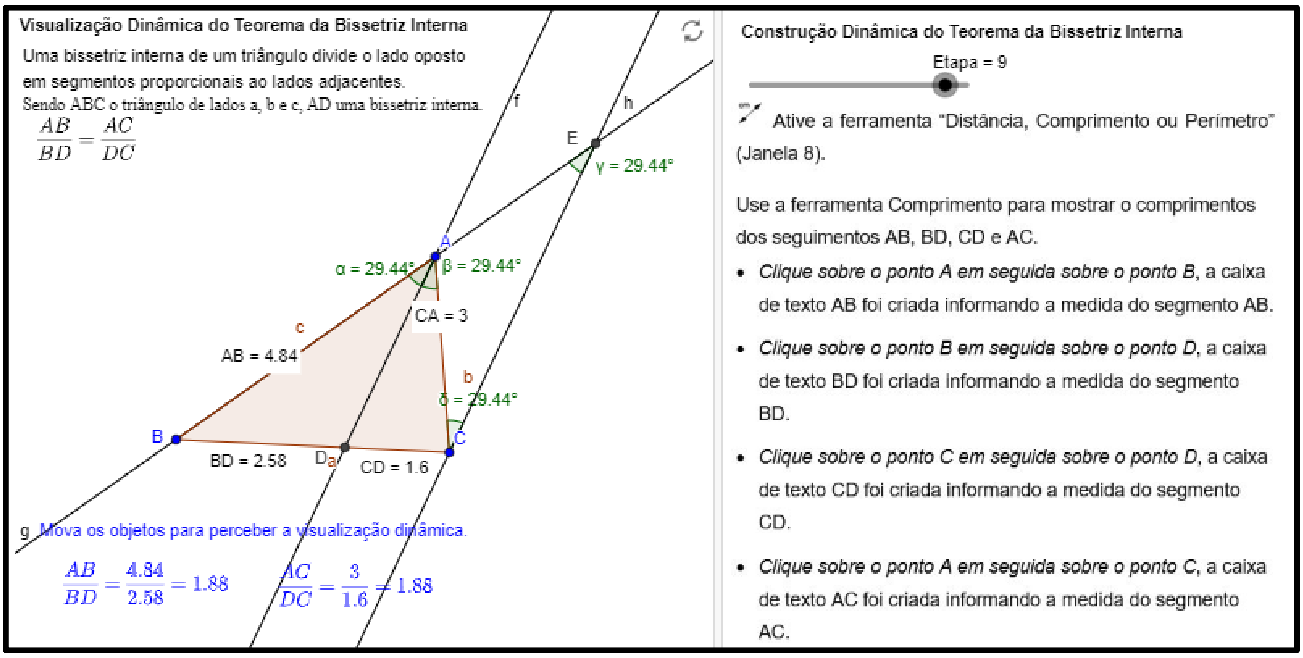
Figura 12 - Construção Dinâmica do Teorema da Bissetriz Interna (Etapa=8).



Fonte: Elaborado pelo autor.

Para facilitar a compreensão das razões de proporcionalidade, foi acrescentado uma caixa de texto no qual aparece os valores dinâmicos dos segmentos conforme mostra a Figura 13. Esse recurso é bem simples de fazer no GeoGebra, para isso selecione a ferramenta caixa de texto e dentro do modo edição selecione o objeto que deseja mostrar o valor, dessa forma sempre que movimentar o objeto o texto apresentará o valor atualizado.

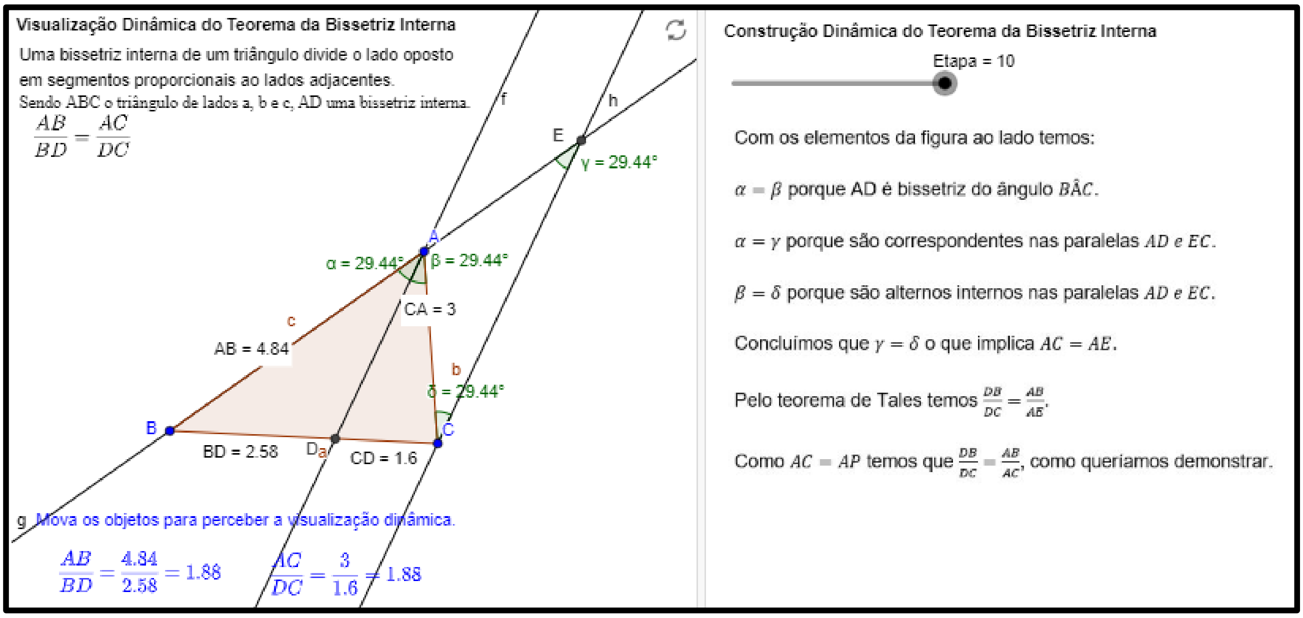
Figura 13 - Construção Dinâmica do Teorema da Bissetriz Interna (Etapa=9).



Fonte: Elaborado pelo autor.

A Figura 14 apresenta a última etapa da demonstração do Teorema. É possível perceber que, mesmo movimentando os objetos da Visualiza Dinâmica, as relações do Teorema se mantêm.

Figura 14 - Construção Dinâmica do Teorema da Bissetriz Interna (Etapa=10).



Fonte: Elaborado pelo autor.

c) Protocolo de Construção Teorema da Bissetriz Interna.

O protocolo de Construção (Figura 15) é um recurso do *GeoGebra* que gerar automaticamente o passo a passo que os objetos foram construídos, enfatizando a ordem e a dependência dos objetos. Assim é possível acompanhar o raciocínio da construção e replicar a atividade de forma padronizada.

Figura 15 - Protocolo de Construção Teorema da Bissetriz Interna.

⋮	Nome	Ícone	Descrição
1	Ponto A		
2	Ponto B		Interseção de EixoX, EixoY
3	Ponto C		
4	Triângulo pol1		Polígono A, B, C
4	Segmento c		Segmento [A, B] de Triângulo pol1
4	Segmento a		Segmento [B, C] de Triângulo pol1
4	Segmento b		Segmento [C, A] de Triângulo pol1
5	Reta f		Bissetriz de B, A, C
6	Ponto D		Interseção de a, f
7	Ângulo α		Ângulo entre B, A, D
8	Ângulo β		Ângulo entre D, A, C
9	Reta g		Reta BA
10	Reta h		Reta passando por C e paralela a f
11	Ponto E		Interseção de g, h
12	Ângulo γ		Ângulo entre A, E, C
13	Ângulo δ		Ângulo entre E, C, A
14	Número distânciaAB		Distância de A a B
15	Texto TextoAB	ABC	Nome(A) + (Nome(B)) + " = " + distânciaAB
16	Número distânciaBD		Distância de B a D
17	Texto TextoBD	ABC	Nome(B) + (Nome(D)) + " = " + distânciaBD
18	Número distânciaAC		Distância de A a C
19	Texto TextoAC	ABC	Nome(A) + (Nome(C)) + " = " + distânciaAC
20	Número distânciaCD		Distância de C a D
21	Texto TextoCD	ABC	Nome(C) + (Nome(D)) + " = " + distânciaCD

Fonte: Elaborado pelo autor.

2.2. Teorema de Menelaus

O teorema de Menelaus é útil na resolução de problemas envolvendo triângulos e está relacionado com conjuntos de determinados pontos que são colineares, ou com conjuntos de segmentos que são concorrentes.

Seja ABC um triângulo e A’, B’ e C’ pontos sobre as retas suportes dos lados BC, CA e AB, respectivamente, todos distintos dos vértices de ABC, então

$$\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}\cdot\frac{AC'}{C'B} = 1.$$

Se, e só se, os pontos A’, B’ e C’ forem colineares.

a) Demonstração Algébrica Teorema de Menelaus.

Inicialmente, suponha (Figura 16) que $A' \in \overleftrightarrow{CB} \setminus \overline{BC}\,, B' \in AC, C' \in AB$ e que os pontos A’, B’ e C’ são colineares (os demais casos são totalmente análogos). Marque o ponto $P \in \overleftrightarrow{A'B'}$, tal que $\overleftrightarrow{BP}$ seja paralela ao segmento $\overline{AC}$.

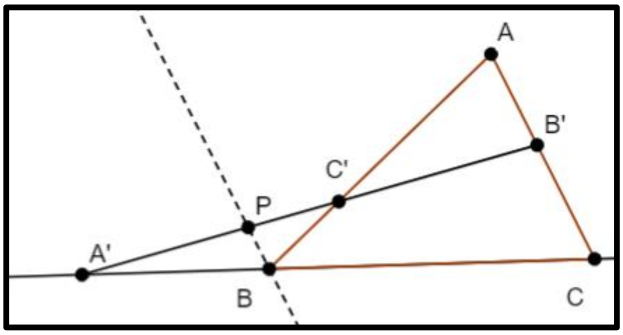
Então, $A'BP \sim A'CB' e\ PBC' \sim B'AC'$, de sorte que $\frac{BA'}{A'C} = \frac{\overline{BP}}{\overline{CB'}}$ e $\frac{AC'}{C'B} = \frac{\overline{AB'}}{\overline{BP}}$.

Logo, $\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}\cdot\frac{AC'}{C'B} = \frac{\overline{BP}}{\overline{CB'}}\cdot\frac{\overline{CB'}}{\overline{B'A}}\cdot\frac{\overline{AB'}}{\overline{BP}} = 1.$

Reciprocamente, sejam A’, B’ e C’ pontos situados sobre as retas suportes de lados BC, CA e AB, respectivamente, todos distintos dos vértices de ABC. Marque o ponto de interseção B’’ das retas $\overleftrightarrow{A'C'}$ e $\overleftrightarrow{AC}$. Como A’, B’’ e C’ são colineares, a primeira parte acima garante que $\frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB''}{B''A} \cdot \frac{AC'}{B'C} = 1$.

Concluímos que $\frac{CB'}{B'A} = \frac{CB''}{C'B}$; a partir daí, por semelhanças de triângulos, é fácil concluir que $B' = B''$. Logo, A’, B’ e C’ são colineares.

Figura 16 - Teorema de Menelaus

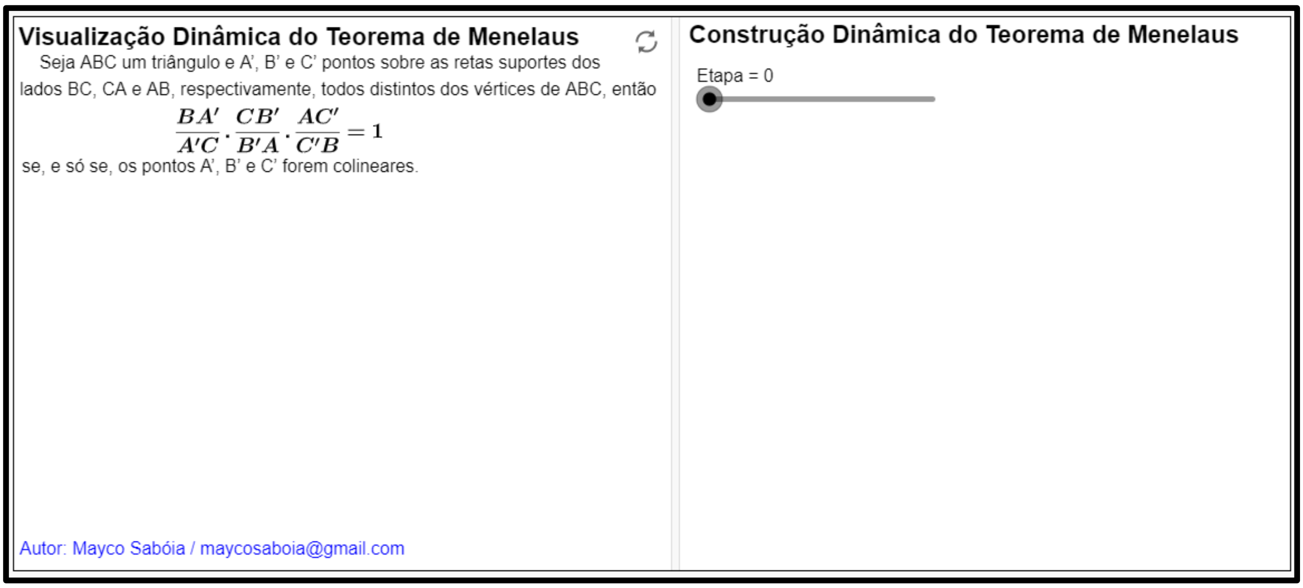


Fonte: Elaborado pelo autor.

b) Demonstração Dinâmica Teorema de Menelaus

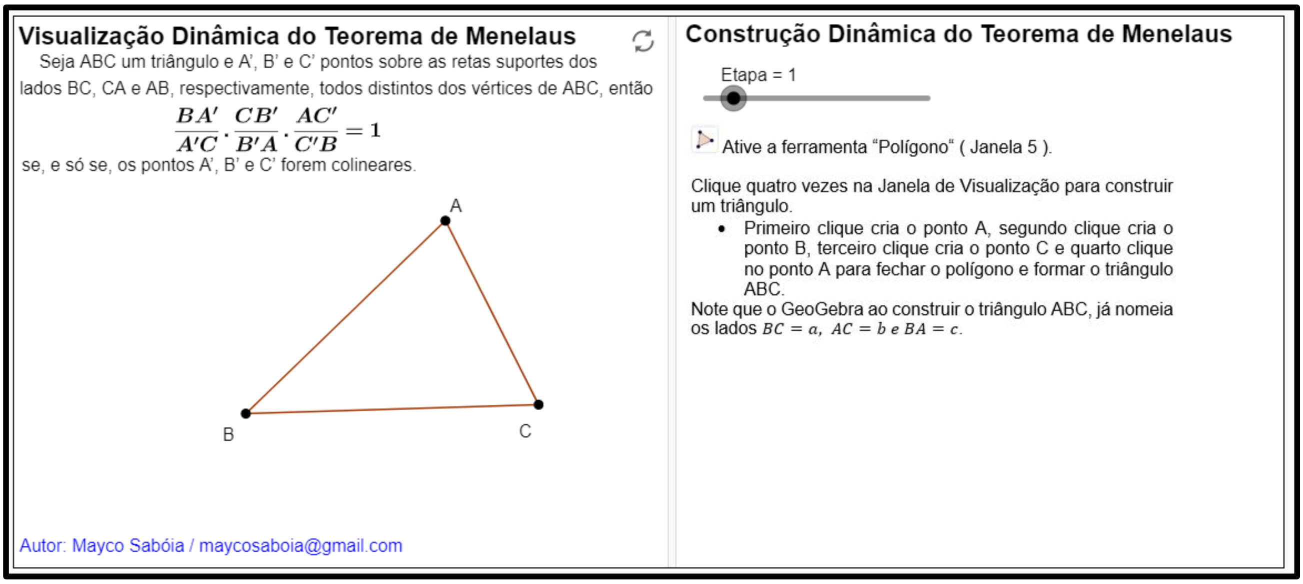
Nas etapas da Construção Dinâmica do Teorema de Menelaus referente ao capítulo 2 do livro digital (Figuras de 17 a 27), é possível alterar a posição dos pontos de maneira a perceber que o teorema ainda continua verdadeiro, independente da perspectiva de uma visualização diferente.

Figura 17 - Construção Dinâmica do Teorema de Menelaus (Etapa=0).



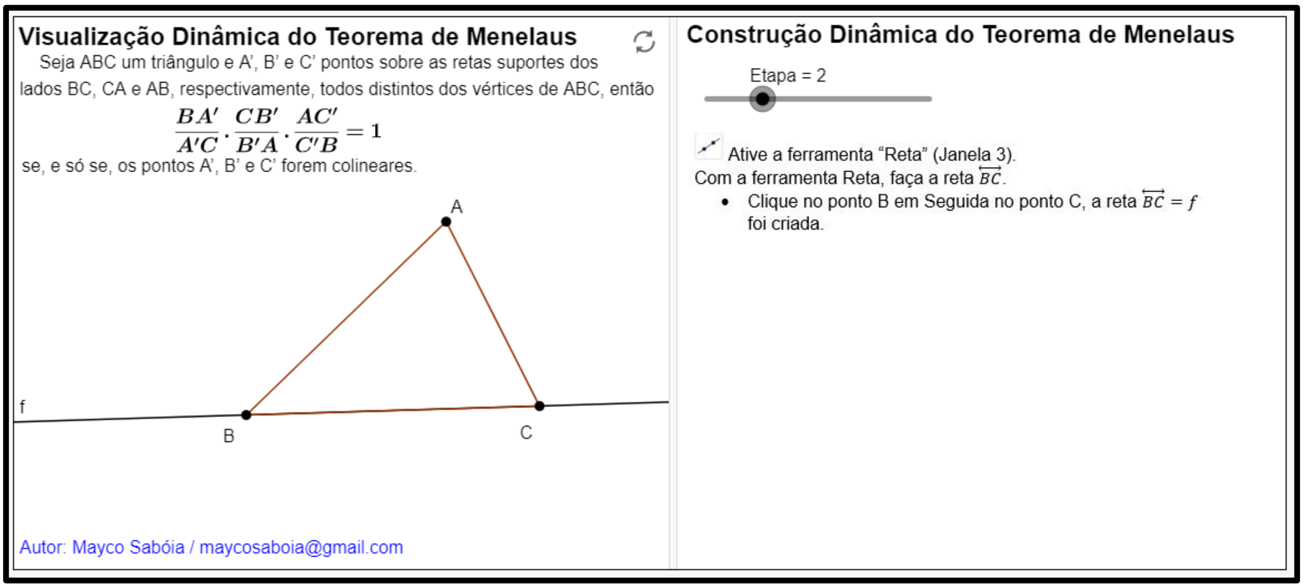
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 18 - Construção Dinâmica do Teorema de Menelaus (Etapa=1).



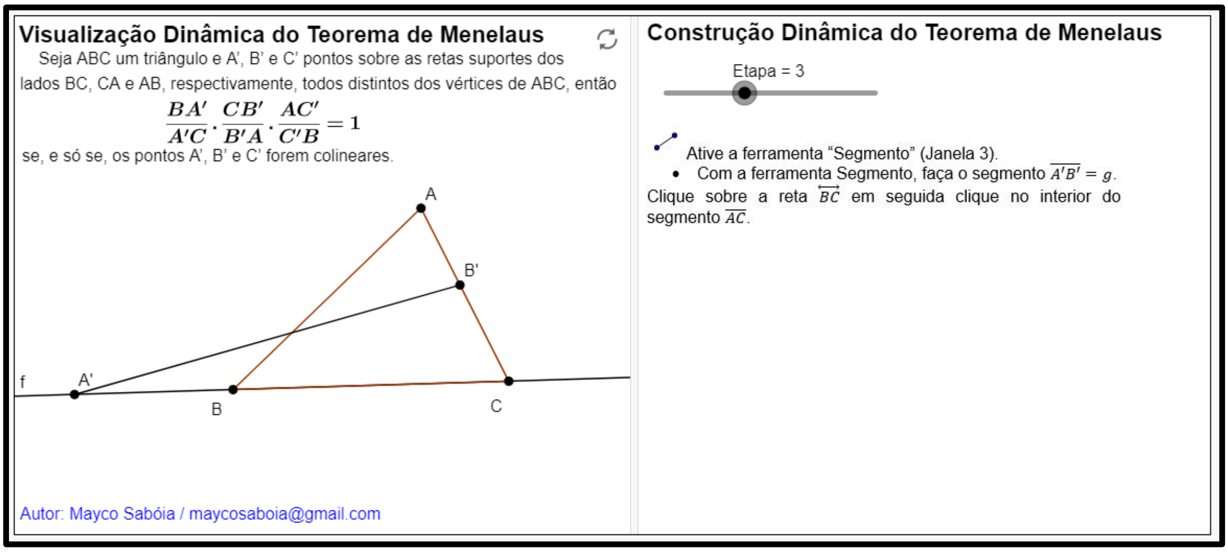
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 19 - Construção Dinâmica do Teorema de Menelaus (Etapa=2).



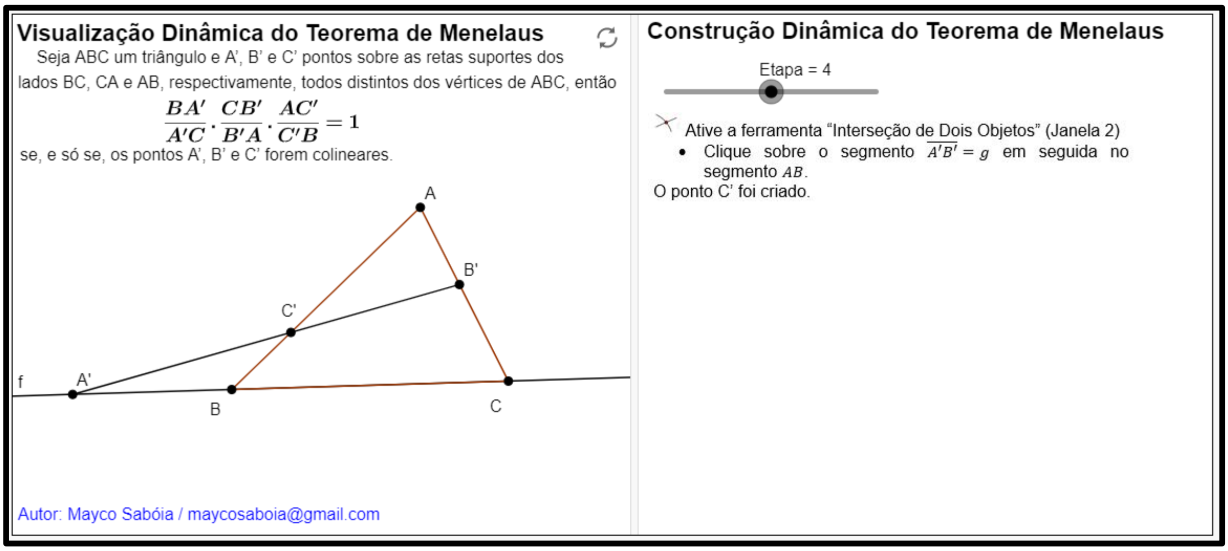
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 20 - Construção Dinâmica do Teorema de Menelaus (Etapa=3).



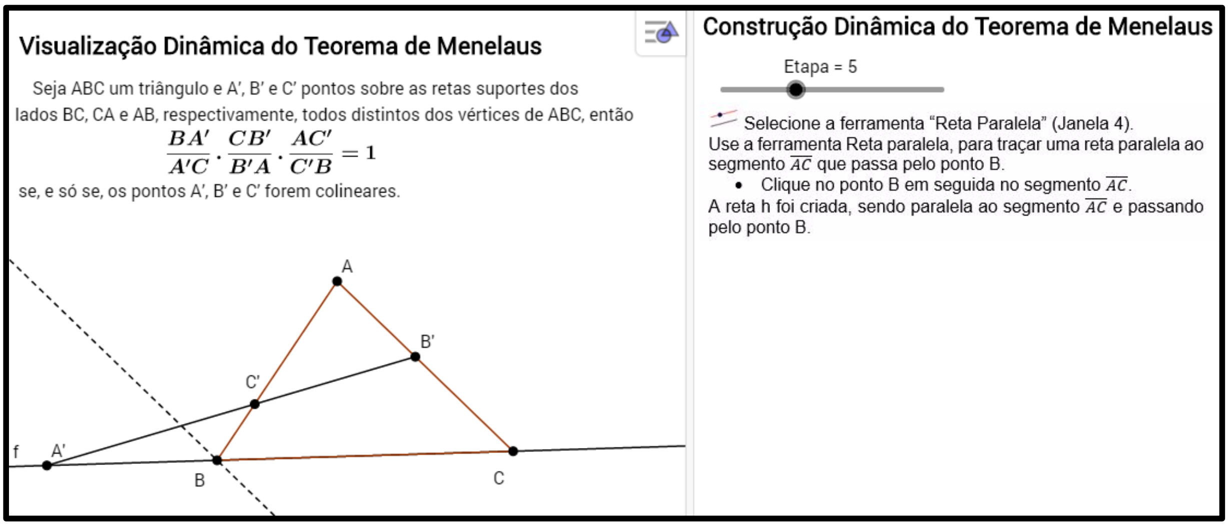
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 21 - Construção Dinâmica do Teorema de Menelaus (Etapa=4).



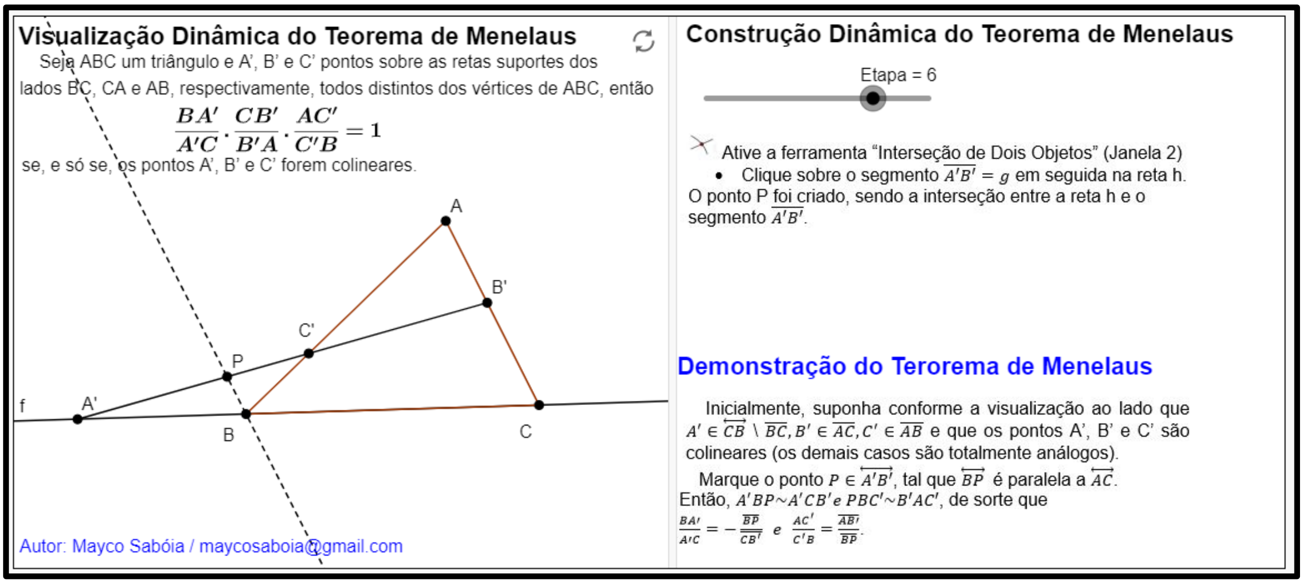
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 22 - Construção Dinâmica do Teorema de Menelaus (Etapa=5).



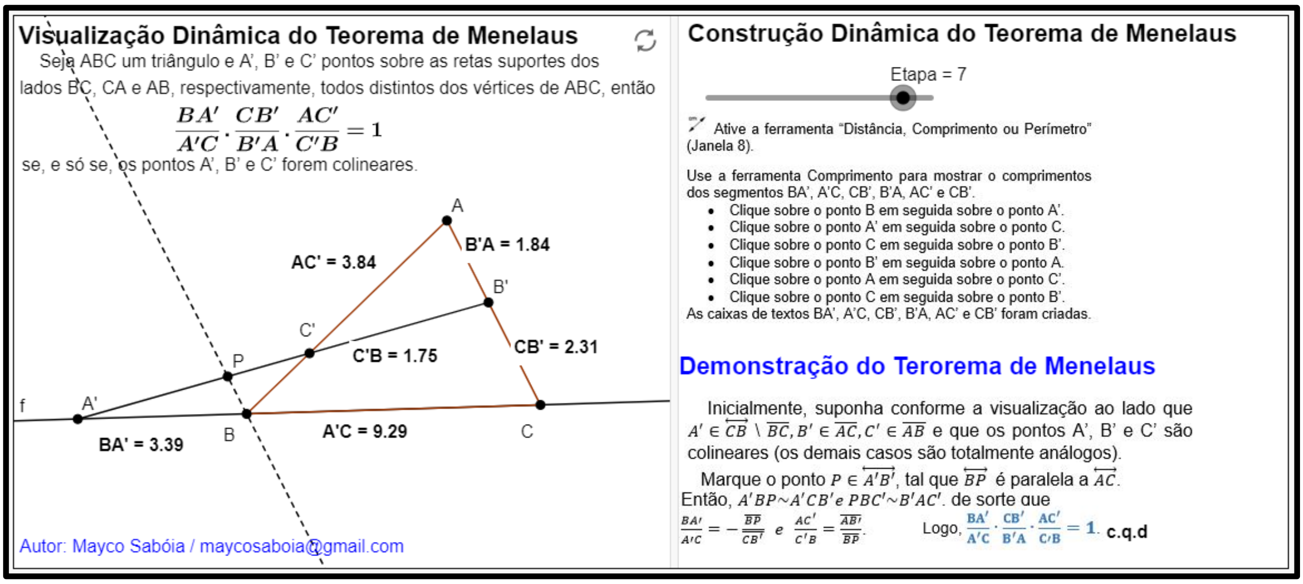
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 23 - Construção Dinâmica do Teorema de Menelaus (Etapa=6).



Fonte: Elaborado pelo autor.

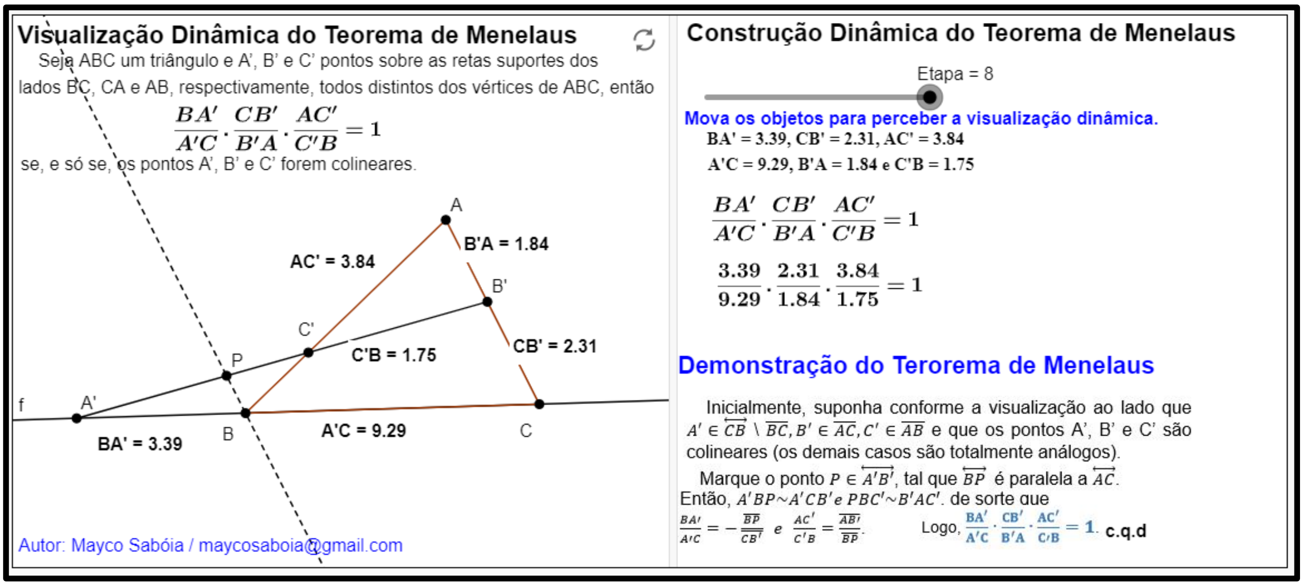
Figura 24 - Construção Dinâmica do Teorema de Menelaus (Etapa=7).



Fonte: Elaborado pelo autor.

Para deixar a Demonstração Dinâmica do Teorema de Menelaus mais intuitiva, foram inseridos caixas de Texto Dinâmicos (Figura 25), de tal forma a evidenciar os valores dos valores dinâmicos dos segmento.

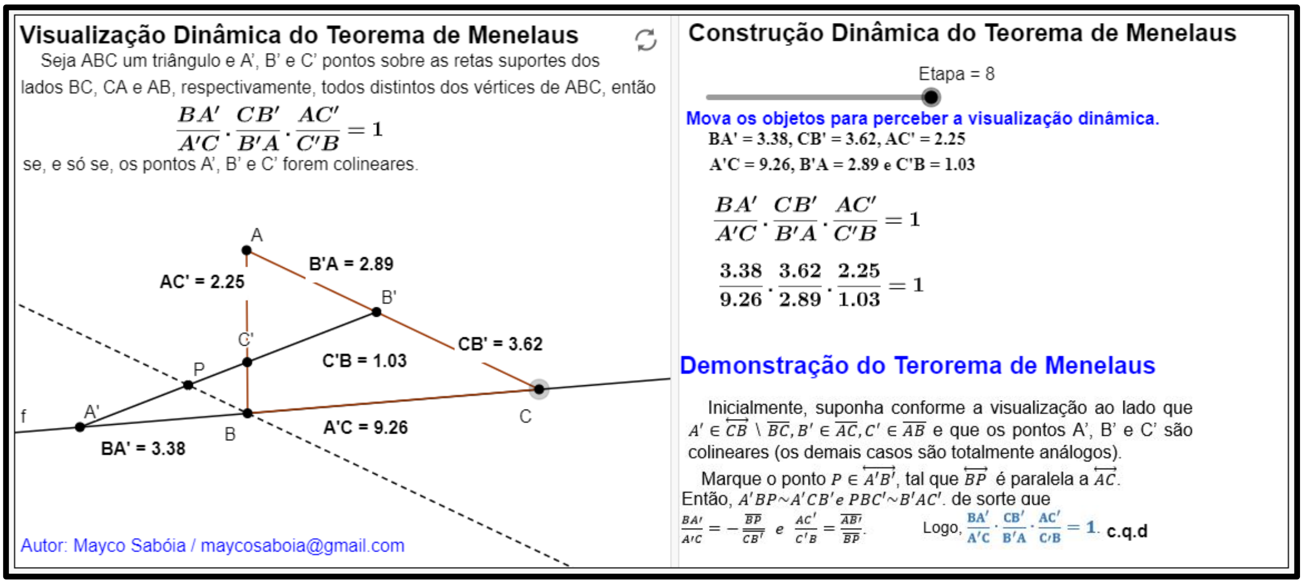
Figura 25 - Construção Dinâmica do Teorema de Menelaus (Etapa=8).



Fonte: Elaborado pelo autor.

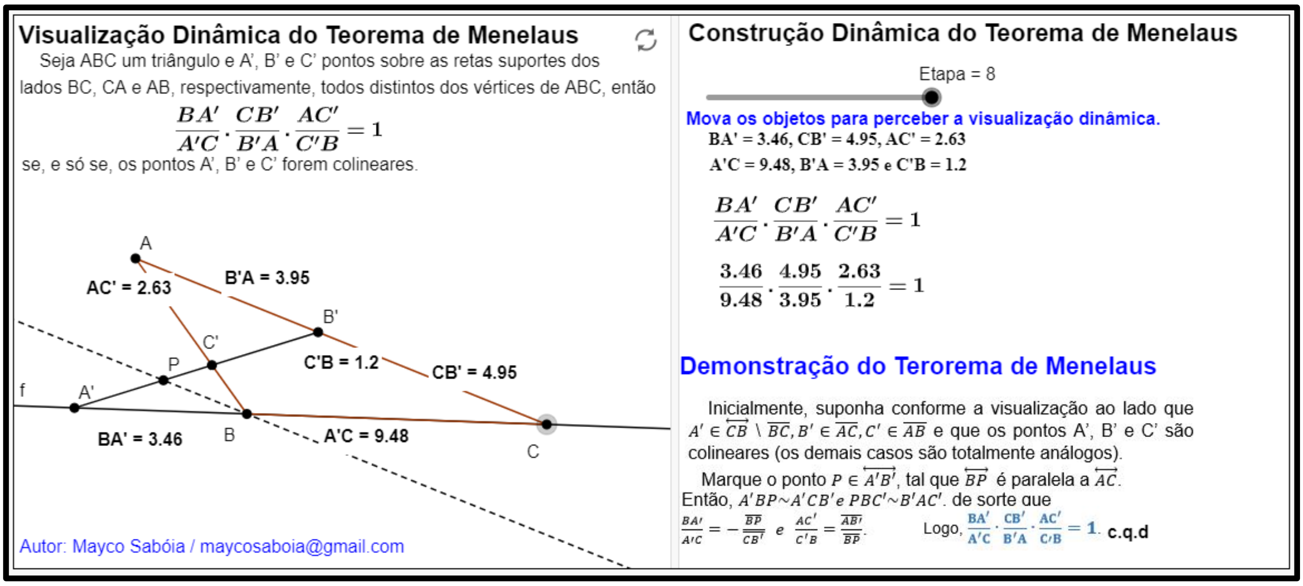
O principal ganho da construção dinâmica para os estudantes é poder perceber que, mesmo movimentando os objetos, o teorema descrito continua valendo, conforme mostra as Figuras 26 e 27.

Figura 26 - Construção Dinâmica do Teorema de Menelaus (Etapa=8.1).



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 27 - Construção Dinâmica do Teorema de Menelaus (Etapa=8.2).



Fonte: Elaborado pelo autor.

c) Protocolo de Construção Teorema de Menelaus.

A construção da demonstração do Teorema de Menelaus pode ser facilmente elaborada por qualquer pessoa utilizando o *software GeoGebra*, apenas seguindo a sequência de comandos apresentado no protocolo de construção (Figura 28).

Observe que as etapas de 18 à 23 são textos Dinâmicos que ilustram os valores dos segmentos, razões Dinâmicas, tal processo ressalta os resultados das razões e facilita a compreensão do teorema, desde que se bem utilizados e embasados na construção algébrica.

Figura 28 - Protocolo de Construção Teorema de Menelaus.

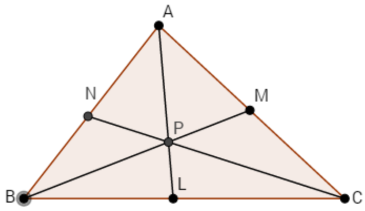
	Nome	Ícone	Descrição
1	Ponto A		
2	Ponto B		
3	Ponto C		
4	Triângulo pol1		Polígono A, B, C
4	Segmento c		Segmento [A, B] de Triângulo pol1
4	Segmento a		Segmento [B, C] de Triângulo pol1
4	Segmento b		Segmento [C, A] de Triângulo pol1
5	Reta f		Reta BC
6	Ponto A'		Ponto sobre f
7	Ponto B'		Ponto sobre b
8	Segmento g		Segmento [A', B']
9	Ponto C'		Interseção de c, g
10	Reta h		Reta passando por B e paralela a b
11	Ponto P		Interseção de h, g
12	Número distânciaBA'	cm	Distância de B a A'
13	Número distânciaA'C	cm	Distância de A' a C
14	Número distânciaCB'	cm	Distância de C a B'
15	Número distânciaB'A	cm	Distância de B' a A
16	Número distânciaAC'	cm	Distância de A a C'
17	Número distânciaC'B	cm	Distância de C' a B
18	Texto TextoAC'	ABC	"" + (Nome(A) + (Nome(C'))) + " = " + distânciaAC' + ""
19	Texto TextoB'A	ABC	"" + (Nome(B') + (Nome(A))) + " = " + distânciaB'A + ""
20	Texto TextoCB'	ABC	"" + (Nome(C) + (Nome(B'))) + " = " + distânciaCB' + ""
21	Texto TextoA'C	ABC	"" + (Nome(A') + (Nome(C))) + " = " + distânciaA'C + ""
22	Texto TextoC'B	ABC	"" + (Nome(C') + (Nome(B))) + " = " + distânciaC'B + ""
23	Texto TextoBA'	ABC	"" + (Nome(B) + (Nome(A'))) + " = " + distânciaBA' + ""

Fonte: Elaborado pelo autor.

2.3. Teorema de Ceva

O teorema de Ceva (Figura 29) é um teorema de Geometria elementar, que estabelece uma condição necessária e suficiente para que três cevianas (segmento de reta compreendido entre o vértice e lado oposto) de um triângulo sejam concorrentes. Esse teorema, provado em 1678 por Giovanni Ceva, na sua obra *De lineis rectis*, afirma que três cevianas de um triângulo concorrem em um ponto se, e somente se, $\frac{NA}{NB} \cdot \frac{\mathrm{LB}}{\mathrm{LC}} \cdot \frac{MC}{\mathrm{MA}} = 1$.

Figura 29 - Teorema de Ceva.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Giovanni Ceva, um matemático italiano, publicou o teorema de Menelaus (descoberto por Menelaus de Alexandria em aproximadamente 100 a.C.) em 1678 e um segundo teorema de sua própria autoria, relacionado com o primeiro, o “Teorema de Ceva”. O teorema de Menelaus trata sobre alinhamentos dos pontos dados e o teorema de Ceva, sobre a concorrência das cevianas de um triângulo qualquer em um único ponto.

O Teorema de Ceva diz: Dados um triângulo ABC e pontos L, M e N situados respectivamente sobre as retas suportes dos lados BC, CA e AB, temos que

$$\boldsymbol{\frac{NA}{NB} \cdot \frac{LB}{LC} \cdot \frac{MC}{MA} = 1}$$

se, e só se, as retas $\overleftrightarrow{AL}, \overleftrightarrow{BM}\ e\ \overleftrightarrow{CN}$ forem concorrentes ou paralelas.

a) Demonstração Algébrica do Teorema de Cevas.

Suponhamos que as cevianas $\overline{AL}, \overline{BM}\ e\ \overline{CN}$ se intersectam no ponto P (Figura 29).

Note que podemos desmembrar a Figura 29 “Teorema da Ceva” em a) e b) conforme mostrado na Figura 30.

Ao aplicar o Teorema de Menelaus nos triângulos ΔABL e a transversal $\overleftrightarrow{NPC}$, conforme a Figura 30(a), teremos:

$$\frac{NA}{NB} \cdot \frac{CB}{CL} \cdot \frac{PL}{PA} = 1 \quad I)$$

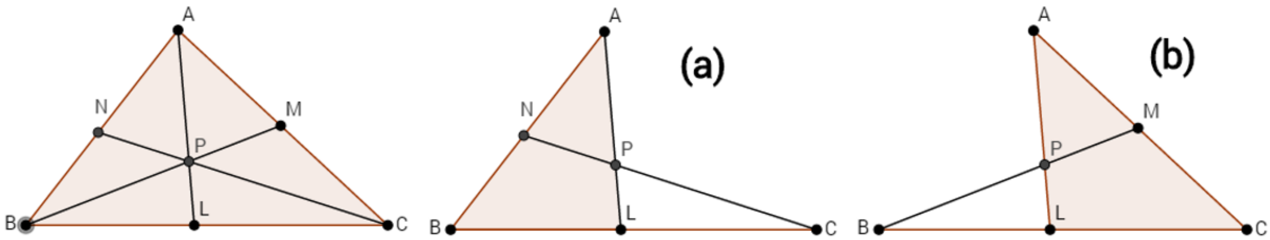
Agora, aplicando o Teorema de Menelaus no triângulo ΔALC e a transversal $\overleftrightarrow{BPM}$, conforme a Figura 30(b), teremos:

$$\frac{PA}{PL} \cdot \frac{BL}{BC} \cdot \frac{MC}{MA} = 1 \quad II)$$

Multiplicando I) e II), membro a membro, teremos:

$$\left(\frac{NA}{NB} \cdot \frac{CB}{CL} \cdot \frac{PL}{PA}\right) \cdot \left(\frac{PA}{PL} \cdot \frac{BL}{BC} \cdot \frac{MC}{MA}\right) = 1 \cdot 1 \Leftrightarrow \frac{NA}{NB} \cdot \frac{LB}{LC} \cdot \frac{MC}{MA} = 1 \quad \blacksquare$$

Figura 30 - Demonstração Algébrica do Teorema de Cevas.

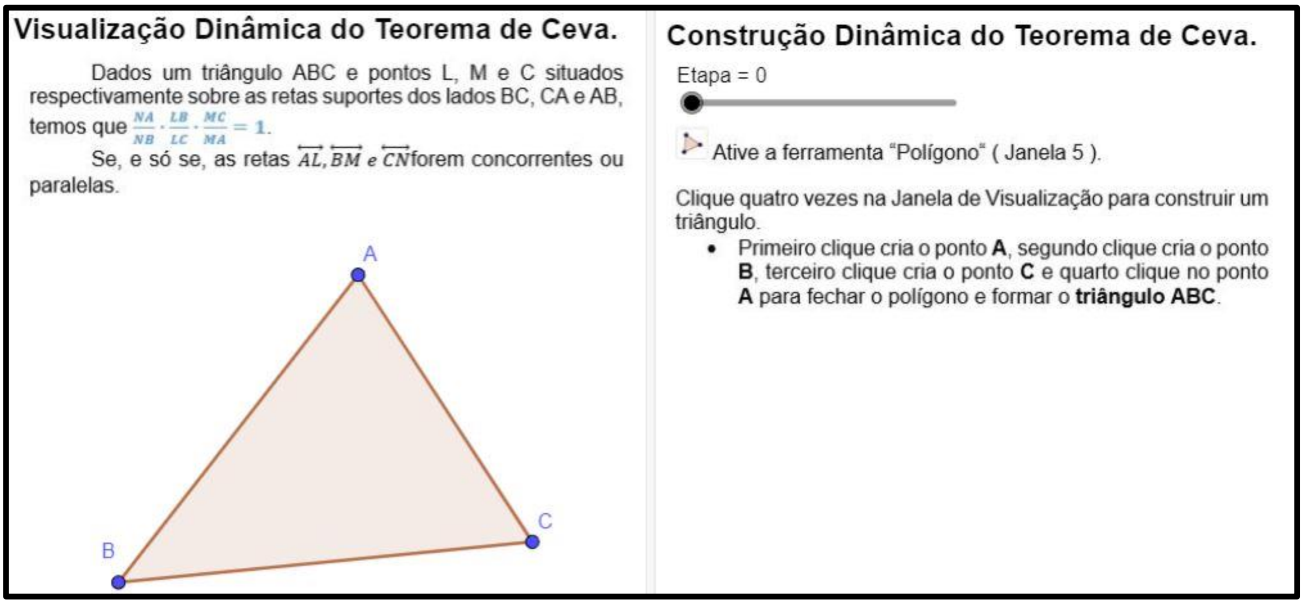


Fonte: Elaborado pelo autor.

b) Demonstração Dinâmica do Teorema de Cevas

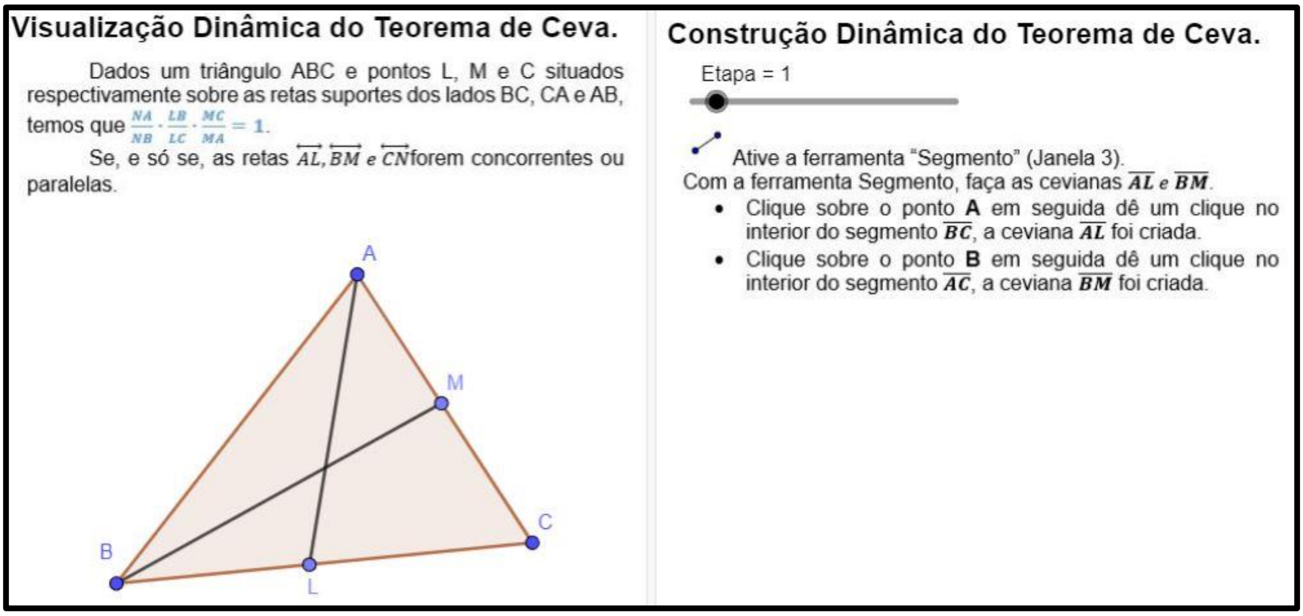
A Visualização Dinâmica do Teorema de Cevas apresentado no Capítulo 3 do livro digital (Figuras de 31 a 44) provoca o senso crítico ao leitor e facilita a compreensão do passo a passo da construção da demonstração do teorema.

Figura 31 - Construção Dinâmica do Teorema de Ceva (Etapa=0).



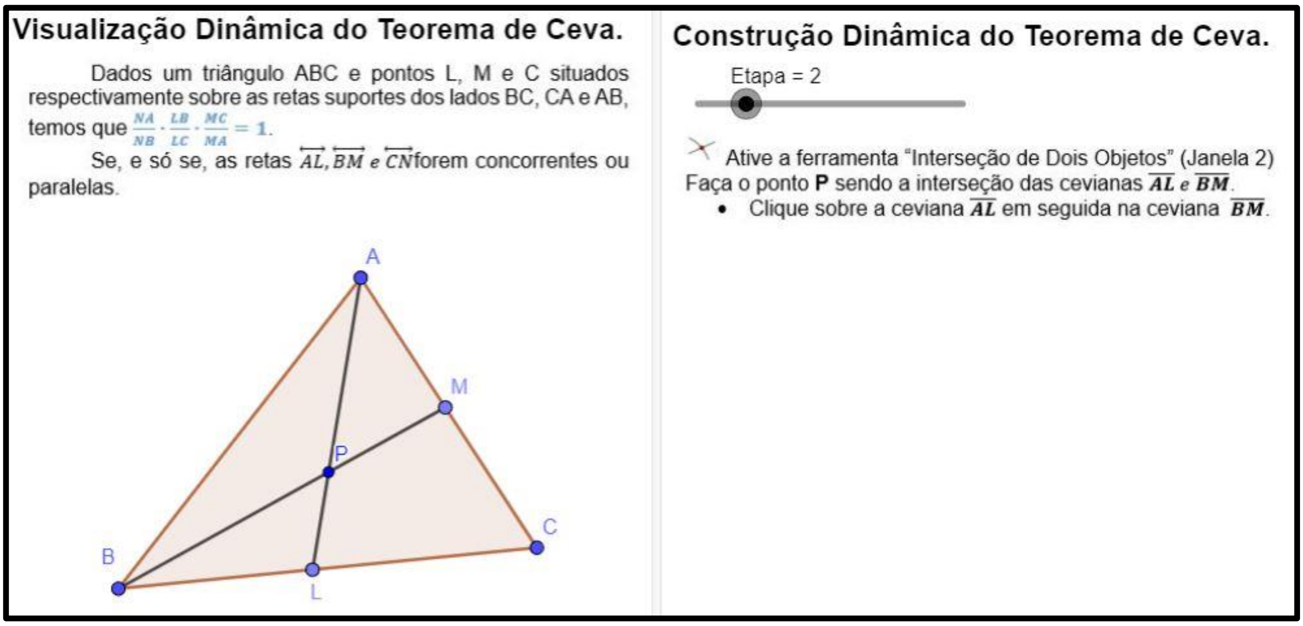
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 32 - Construção Dinâmica do Teorema de Ceva (Etapa=1).



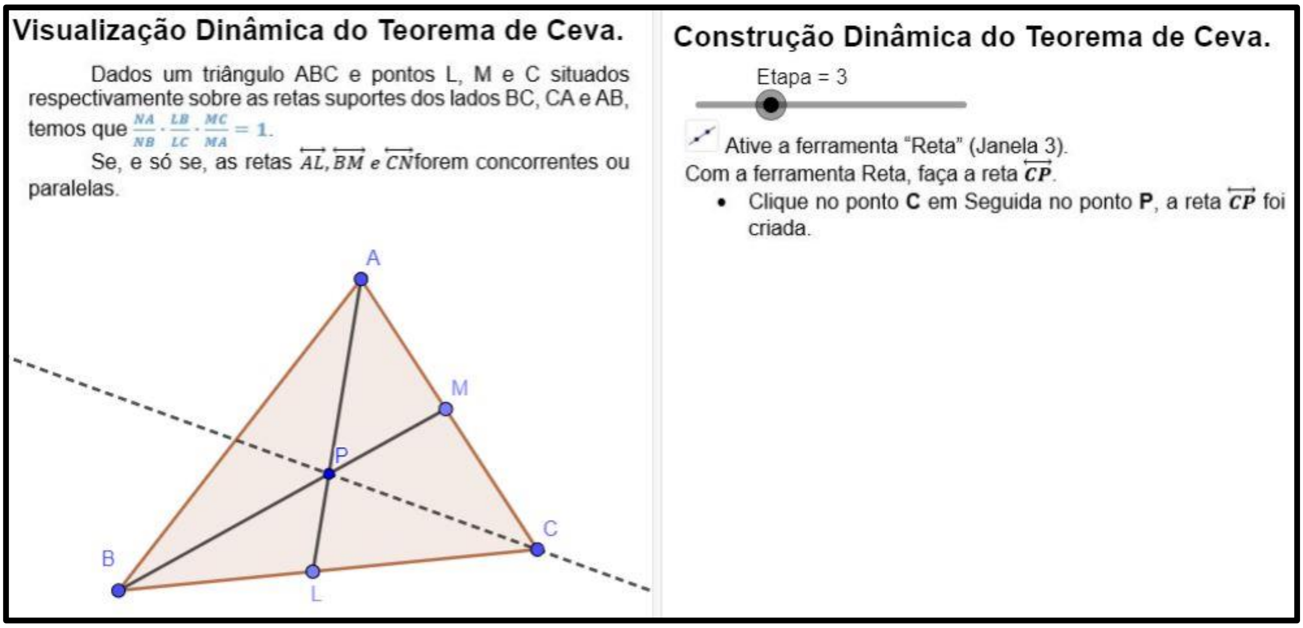
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 33 - Construção Dinâmica do Teorema de Ceva (Etapa=2).



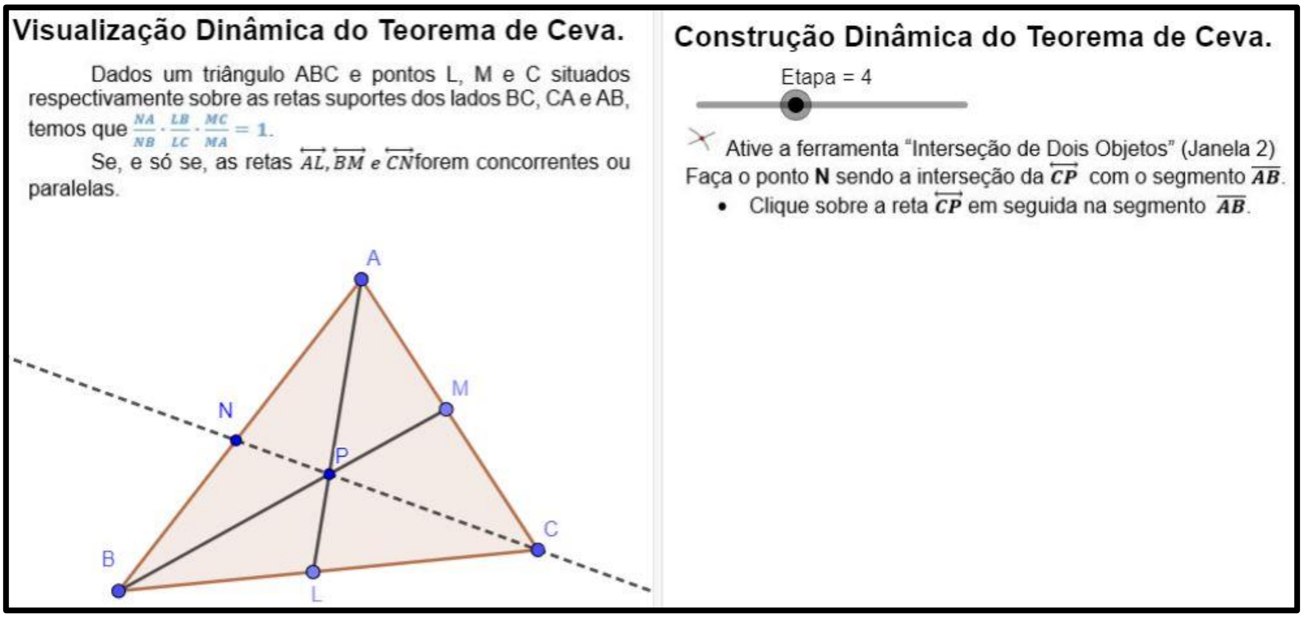
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 34 - Construção Dinâmica do Teorema de Ceva (Etapa=3).



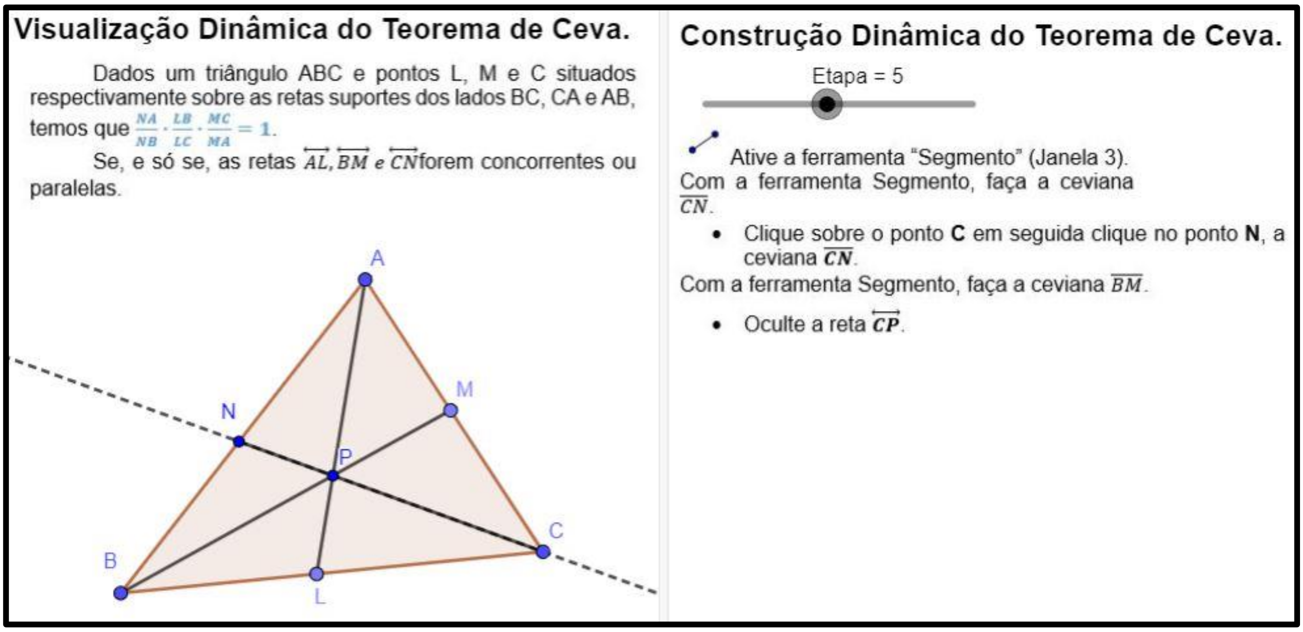
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 35 - Construção Dinâmica do Teorema de Ceva (Etapa=4).



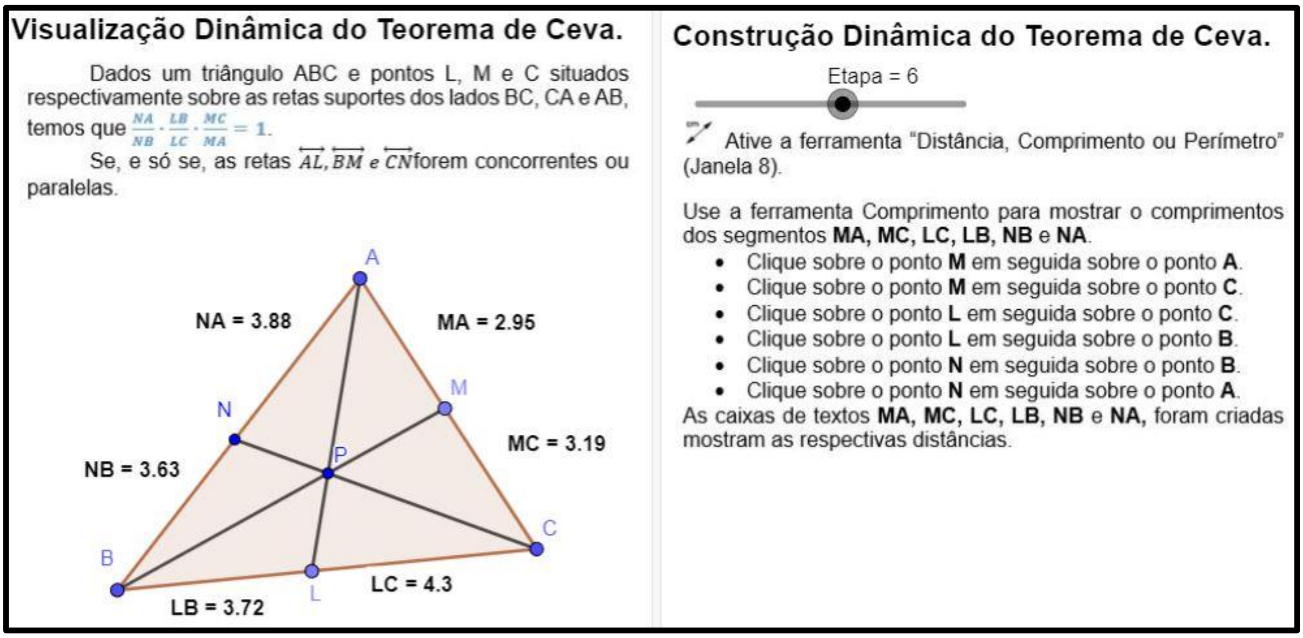
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 36 - Construção Dinâmica do Teorema de Ceva (Etapa=5).



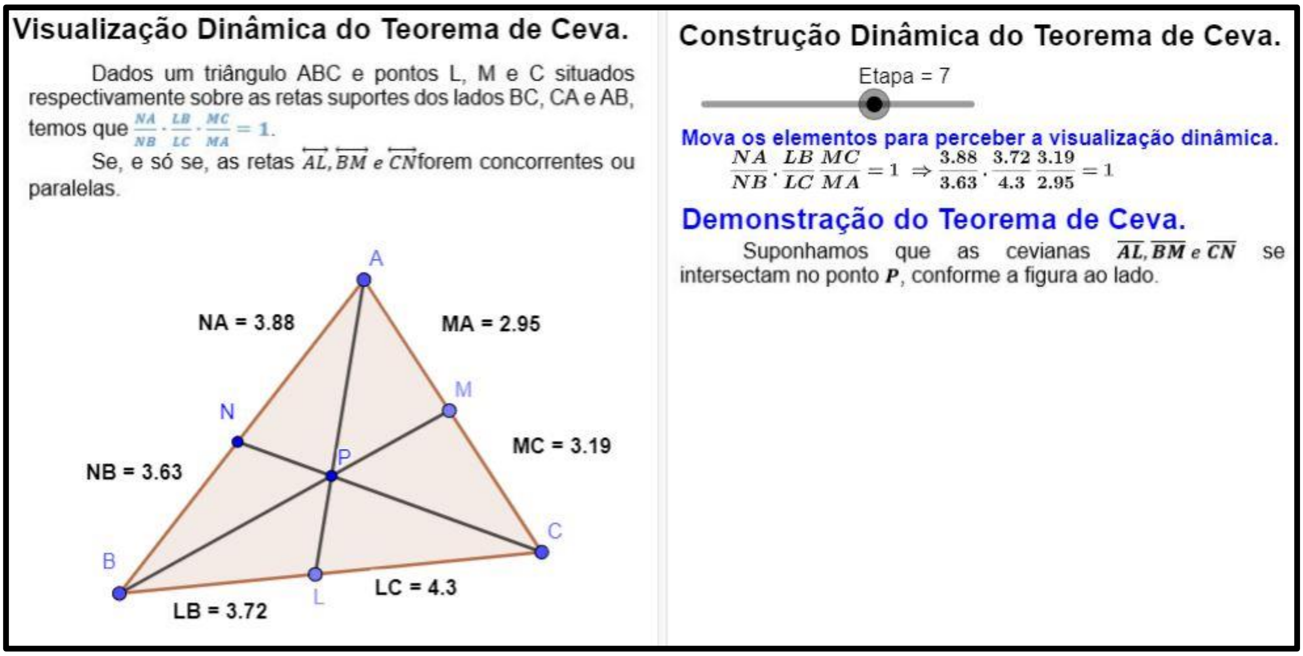
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 37 - Construção Dinâmica do Teorema de Ceva (Etapa=6).



Fonte: Elaborado pelo autor.

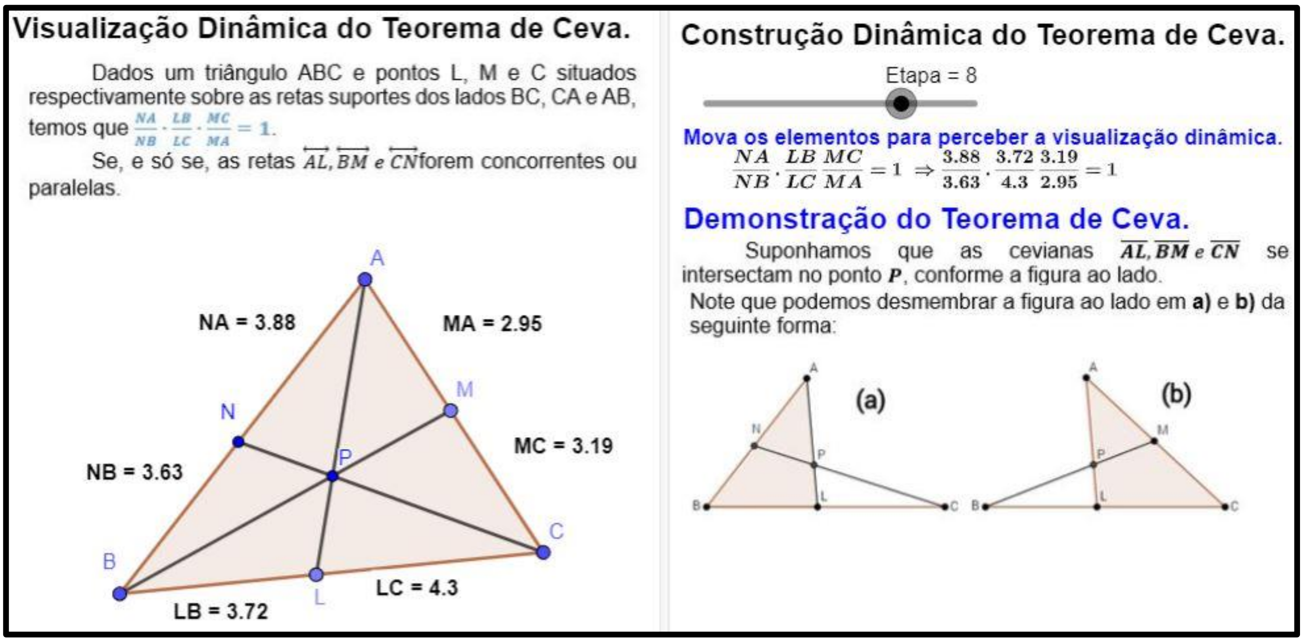
Figura 38 - Construção Dinâmica do Teorema de Ceva (Etapa=7).



Fonte: Elaborado pelo autor.

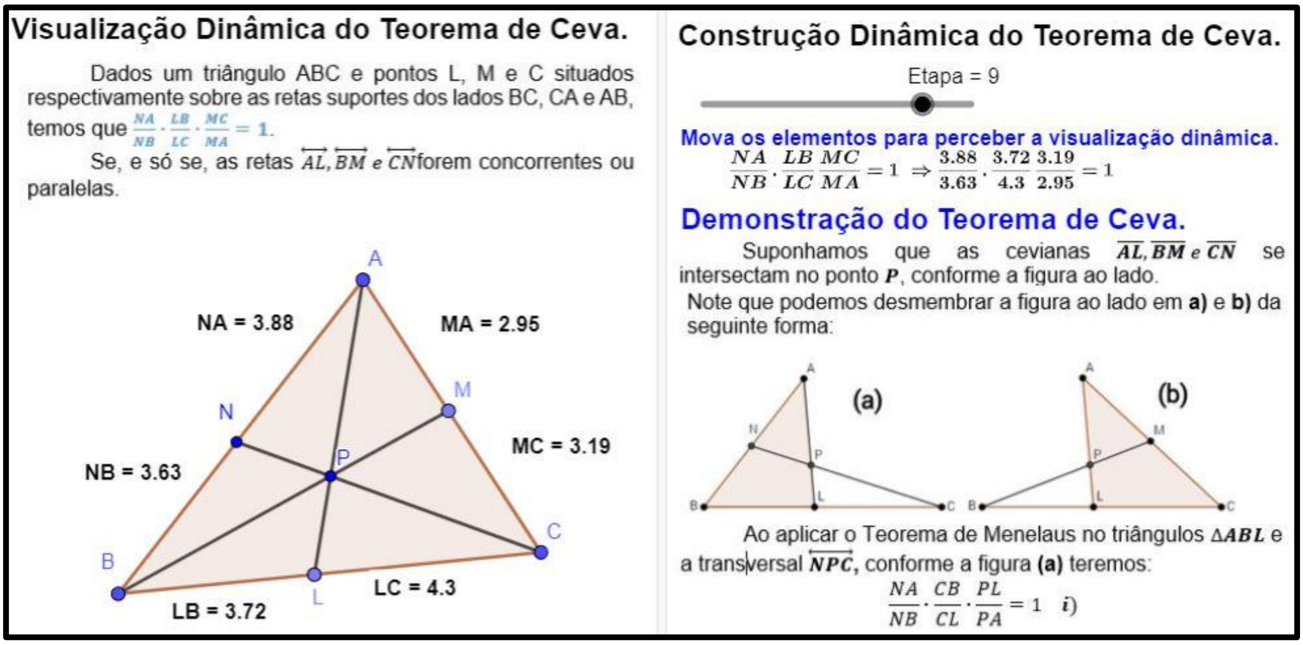
Para facilitar a visualização do Teorema da Ceva, a Figura 39 destaca partes separadas da figura principal na qual, mais adiante, fará a aplicação do Teorema de Menelaus em cada parte.

Figura 39 - Construção Dinâmica do Teorema de Ceva (Etapa=8).



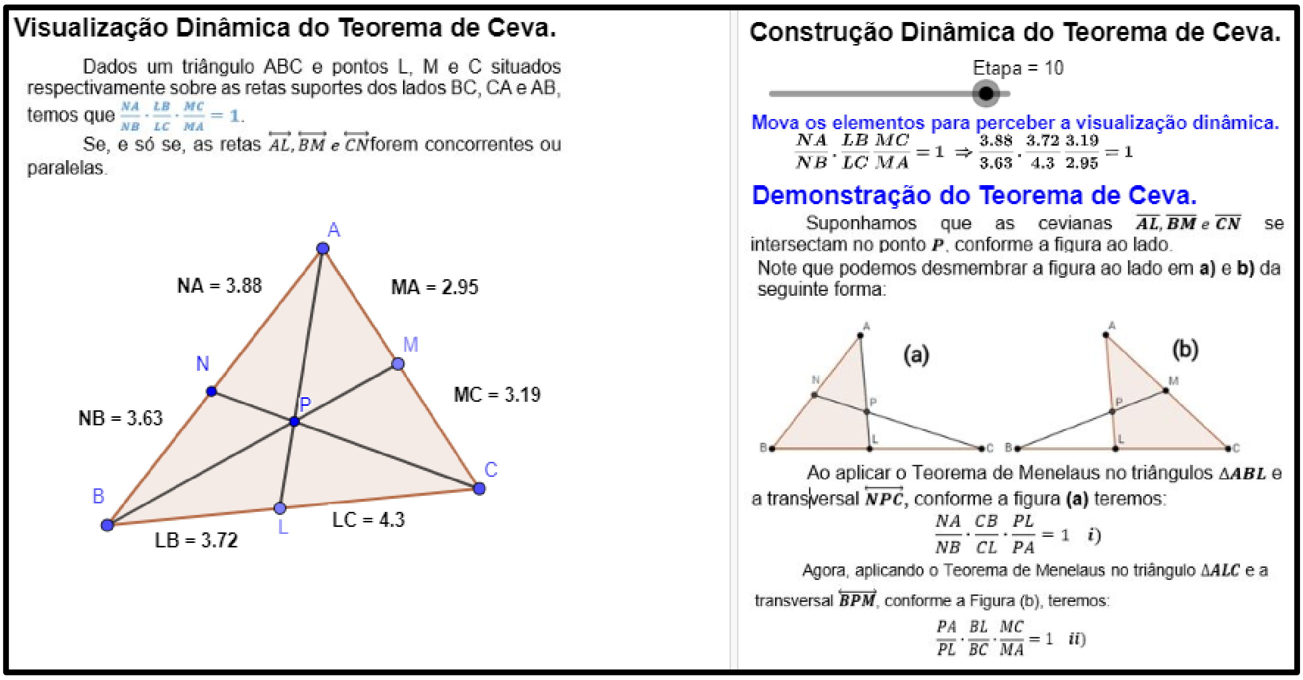
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 40 - Construção Dinâmica do Teorema de Ceva (Etapa=9).



Fonte: Elaborado pelo autor.

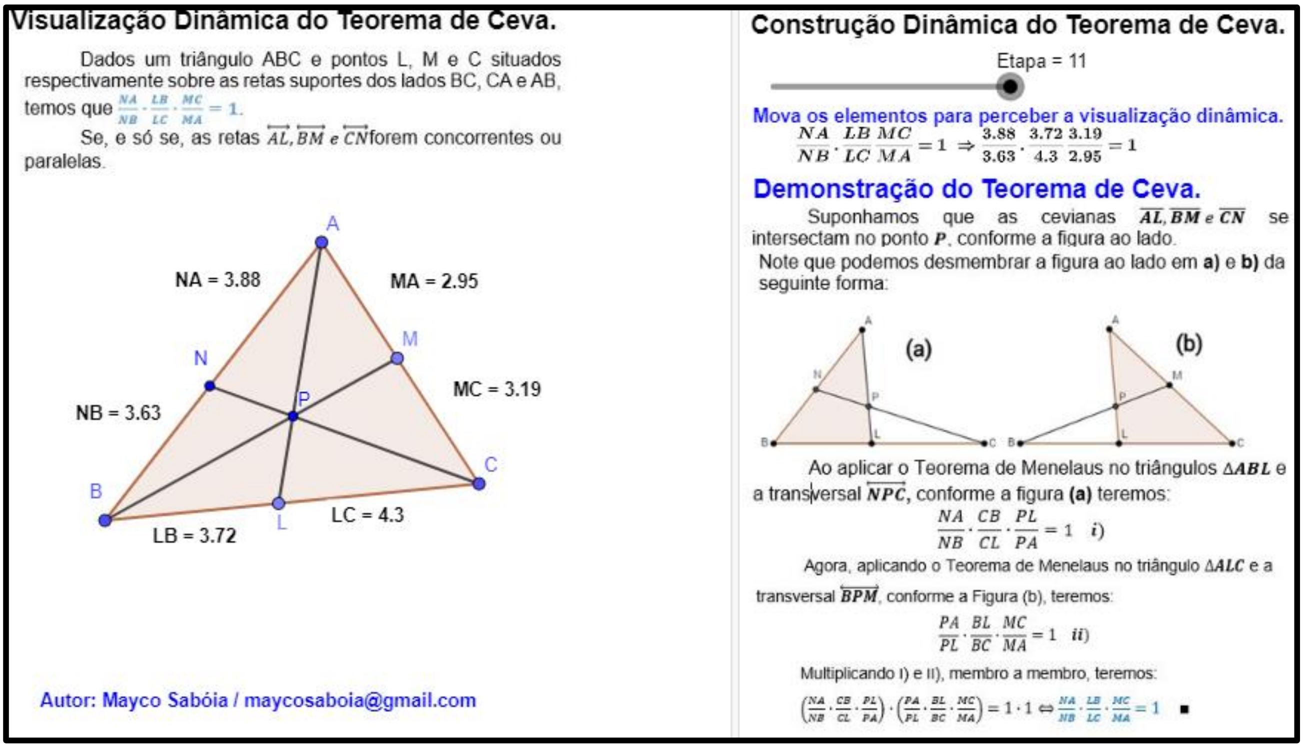
Figura 41 - Construção Dinâmica do Teorema de Ceva (Etapa=10).



Fonte: Elaborado pelo autor.

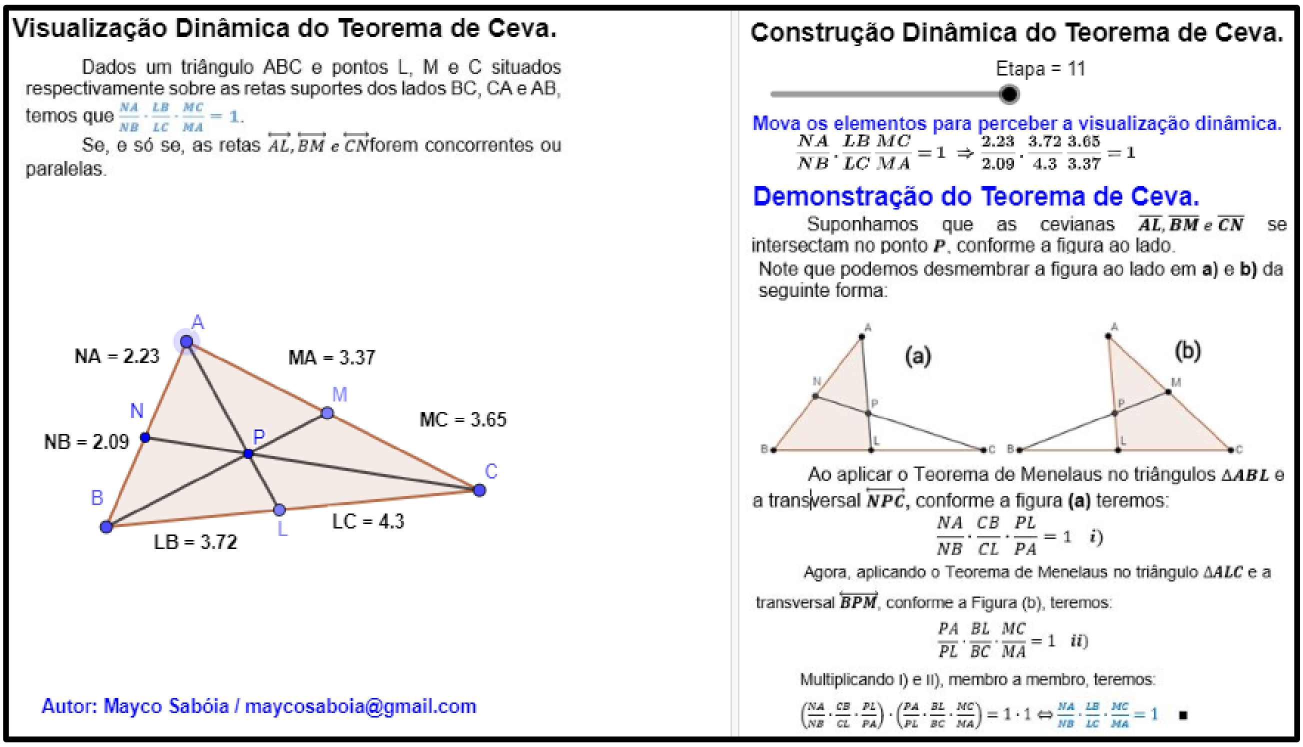
Movimentando os objetos para perceber a visualização dinâmica (Figuras 11.1 a 11.3).

Figura 42 - Visualização Dinâmica do Teorema de Ceva (Etapa=11.1).



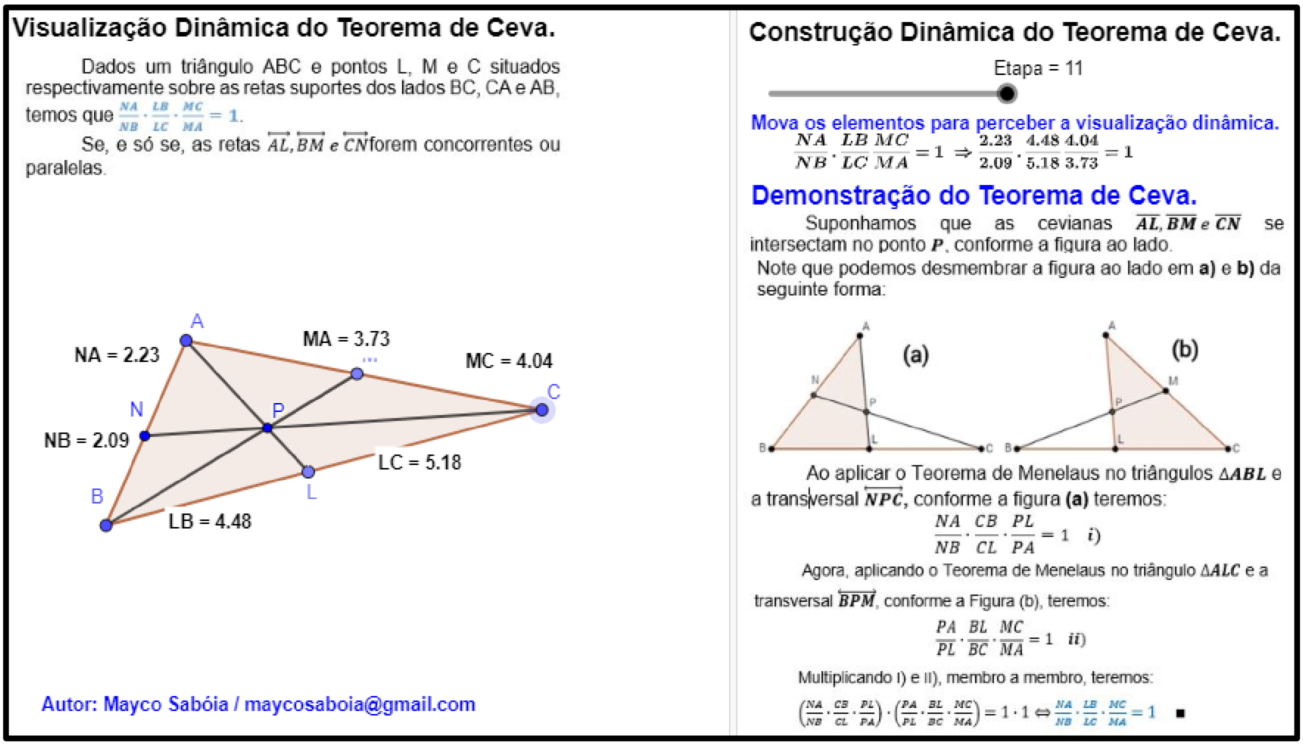
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 43 - Visualização Dinâmica do Teorema de Ceva (Etapa=11.2).



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 44 - Visualização Dinâmica do Teorema de Ceva (Etapa=11.3).



Fonte: Elaborado pelo autor.

c) Protocolo de Construção Teorema de Ceva.

A ordem de dependência dos objetos são facilmente percebidos pelo protocolo de construção (Figura 45), pois os passos realçados em vermelho indicam a dependência do objeto.

Figura 45 - Protocolo de Construção Teorema de Ceva.

	Nome	Ícone	Descrição
1	Ponto A		
2	Ponto B		
3	Ponto C		
4	Triângulo pol1		Polígono A, B, C
4	Segmento c		Segmento [A, B] de Triângulo pol1
4	Segmento a		Segmento [B, C] de Triângulo pol1
4	Segmento b		Segmento [C, A] de Triângulo pol1
5	Ponto L		Ponto sobre a
6	Segmento f		Segmento [A, L]
7	Ponto M		Ponto sobre b
8	Segmento g		Segmento [B, M]
9	Ponto P		Interseção de f, g
10	Reta h		Reta CP
11	Ponto N		Interseção de c, h
12	Segmento i		Segmento [C, N]

Fonte: Elaborado pelo autor.

3. Pesquisa e Análises dos Resultados

Este capítulo mostra a metodologia e os resultados da pesquisa do ponto de vista dos participantes. Tais resultados foram obtidos a partir das respostas dos participantes ao questionário, encaminhado por e-mail. Os resultados foram organizados de acordo com o perfil do participante e as motivações que o levaram a fazer o curso, a importância desse em sua atuação profissional, os obstáculos de aprendizagem enfrentados, os métodos avaliativos empregados, e por fim os objetivos da disciplina MA13 e as contribuições das Demonstrações Dinâmicas.

Sobre a pesquisa

A pesquisa de natureza qualitativa foi realizada entre os dias 30 de março de 2020 e 06 de abril de 2020 com discentes e egressos do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, tomando como amostra 47 alunos e ex-alunos que já concluíram a disciplina de Geometria – MA13, ofertada em uma das 76 Instituições de Ensino Superior que integram a Rede Nacional do PROFMAT (Polos), no qual receberam o convite para participar da pesquisa por meio do seu coordenador.

Todos os entrevistados responderam à pesquisa de forma anônima e, embora já tivessem cursado a disciplina MA13, foram bastante solícitos em relação à entrevista, se interessando bastante pelo tema da pesquisa, respondendo de forma imparcial ao questionário, sem intervenção do entrevistador.

Para coletar os dados da pesquisa, foi utilizado a plataforma Google Forms.

Análise dos dados e discussão dos resultados.

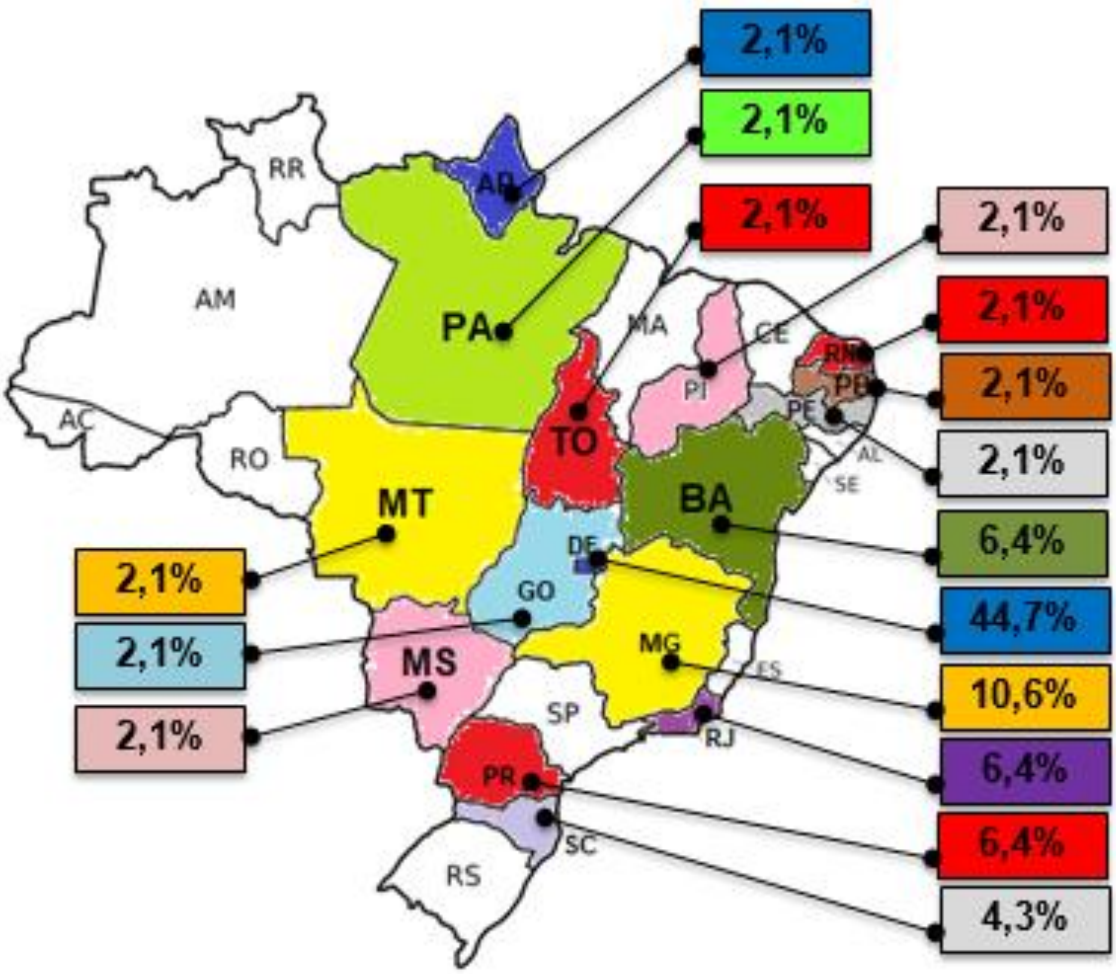
Dos 24 itens do questionário, apresento alguns para análise dos resultados, divididos em três partes de acordo com o objetivo. No apêndice se encontra o questionário completo.

Parte 1: Perfil do participante e as motivações que o levaram a fazer o curso.

A primeira parte do questionário teve como objetivo identificar o perfil profissional do participante. Essa etapa buscava colher informações referentes à formação em nível de graduação, bem como o campo de atuação profissional durante o período em que cursou a disciplina MA 13.

Dos 47 participantes da pesquisa, 21 são da Universidade de Brasília – UNB, o que correspondem a 44,7% dos entrevistados, conforme mostra a Figura 46. Tal fato se deve à facilidade de divulgação da Pesquisa nesse Polo no qual sou discente. Dessa forma, tive a cooperação do Coordenador do curso, da professora da disciplina e dos colegas de turma.

Figura 46 - Mapa do Brasil - Polos Pesquisados.



Fonte: Elaborado pelo autor.

No que se refere à atuação profissional, ao iniciar o curso, 87,2% dos participantes já eram professores das redes pública e/ou privada de Ensino Básico e da Educação Técnica e Superior, e apenas 12,8% não atuava como professor (Tabela 1). Dos 47 entrevistados, 33 pertenciam ao quadro da rede pública de ensino (Tabela 1).

Tabela 1 - Atualmente, você:

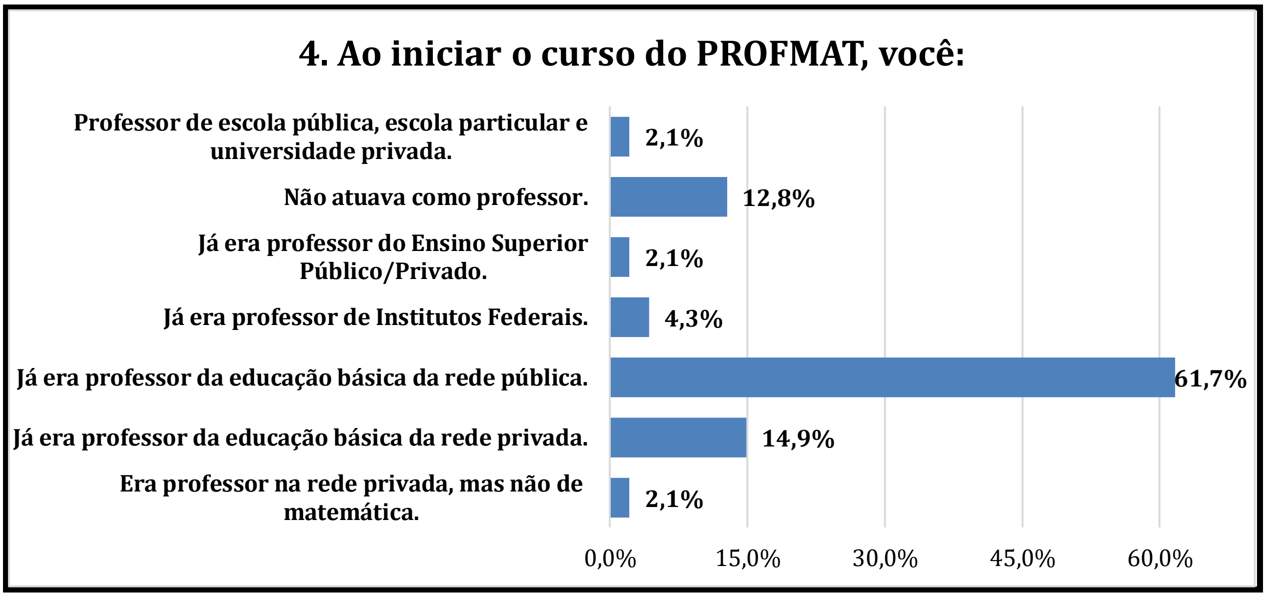
2. Atualmente, você:	Quantidade	%
É professor da educação básica da rede privada.	6	12,8%
É professor da educação básica da rede pública.	33	70,2%
É professor de Institutos Federais.	2	4,3%
É professor do Ensino Superior Público/Privado.	2	4,3%

Não atua como professor e não é licenciado em Matemática.	1	2,1%
Não atua como professor, mas é licenciado em Matemática.	2	4,3%
Professor educação básica da rede pública e privada	1	2,1%
Total	47	1

Fonte: Elaborado pelo autor.

Quanto à área de atuação dos participantes ao iniciar o curso do PROFMAT, a predominância foi de professores da rede pública de ensino, com 61,7% do total (Gráfico 2). Os demais professores atuam na rede privada de Educação Básica, no Ensino Superior e nos Institutos Federais, como pode ser visto no Gráfico 1.

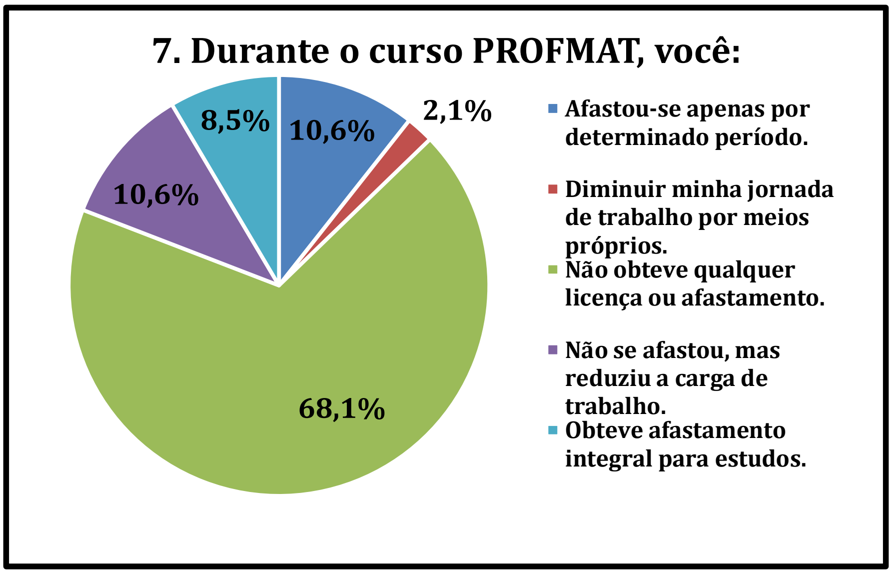
Gráfico 1 - Ao iniciar o curso do PROFMAT, você:



Fonte: Elaborado pelo autor.

Em relação ao afastamento das atividades laborais durante o curso, 68,1% não teve qualquer tipo de licença ou afastamento, apenas 8,5% obteve afastamento integral para estudos (proporcionado pela rede pública de ensino) e 2,1% diminuiu a jornada de trabalho por meios próprios (Gráfico 2).

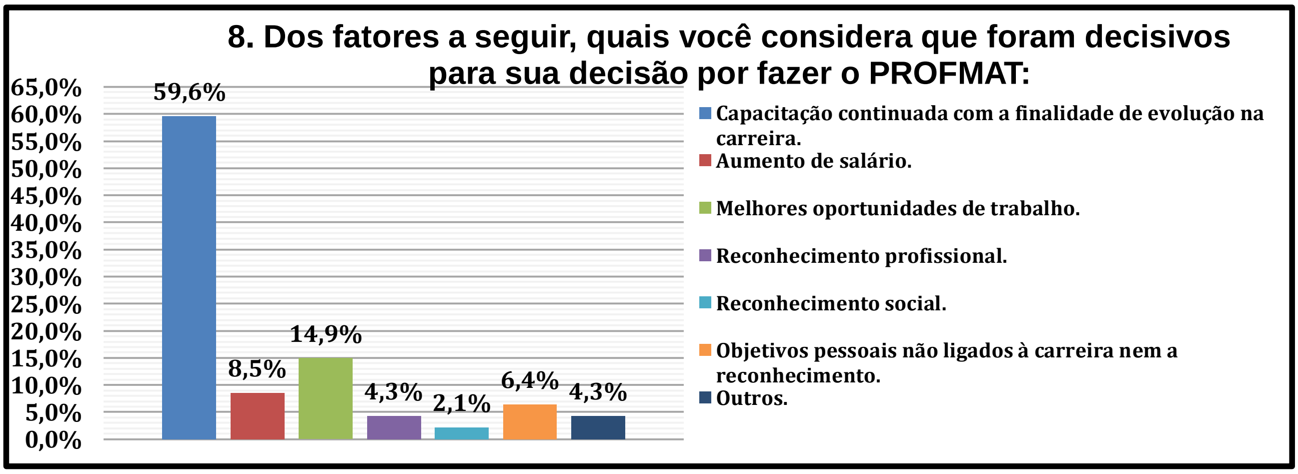
Gráfico 2 - Durante o curso PROFMAT, você.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Outra questão levantada no questionário se refere às motivações que levaram os entrevistados a ingressarem no curso. O maior incentivo para os entrevistados foi a capacitação continuada com a finalidade de evolução na carreira, com 59,6% das respostas (Gráfico 4). Além disso, 14,9% dos participantes acredita que o título de mestre possibilitará melhores oportunidades de trabalho, o que pode estar ligado à busca por evolução na carreira (Gráfico 3).

Gráfico 3 - Dos fatores a seguir, quais você considera que foram decisivos para sua decisão por fazer o PROFMAT:



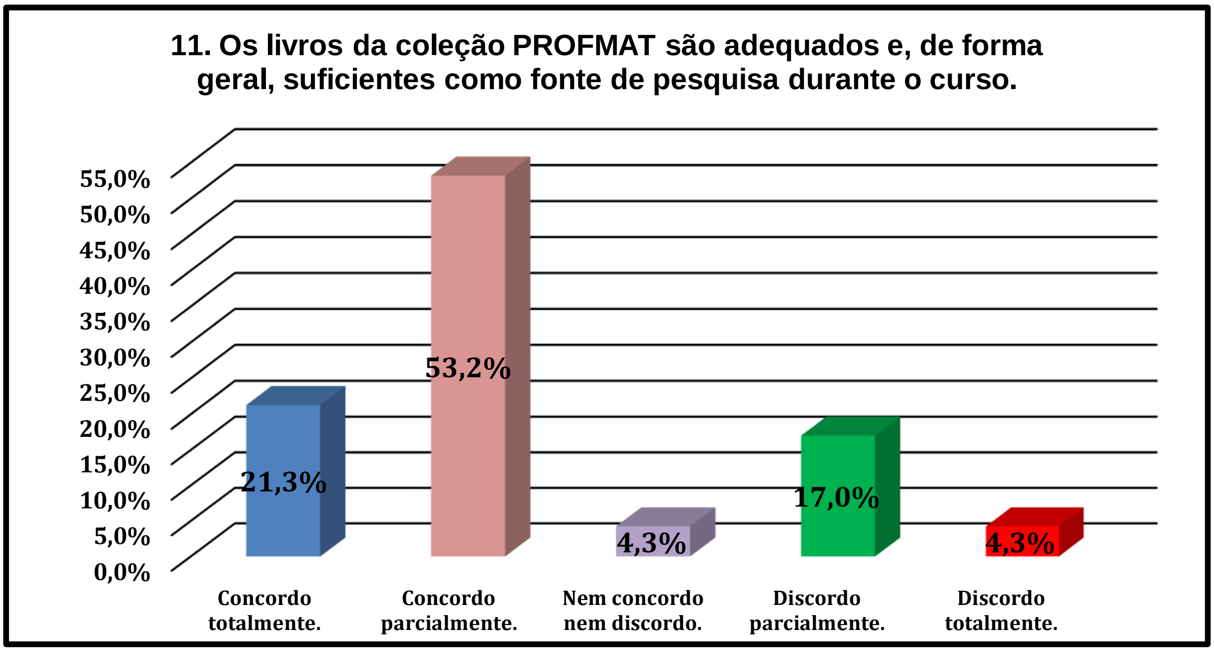
Fonte: Elaborado pelo autor.

Parte 2: Sobre a disciplina de Geometria MA13

A segunda parte da pesquisa teve como objetivo verificar o grau de satisfação dos entrevistados de acordo com o material didático e metodologia usada na disciplina de Geometria MA13.

Conforme a percepção dos entrevistados, 53,2% concorda parcialmente que os livros da coleção PROFMAT são adequados e, de forma geral, suficientes como fonte de pesquisa durante o curso e apenas 4,3% têm opinião contrária (Gráfico 4), o que mostra que o material da coleção PROFMAT atende à necessidade do programa.

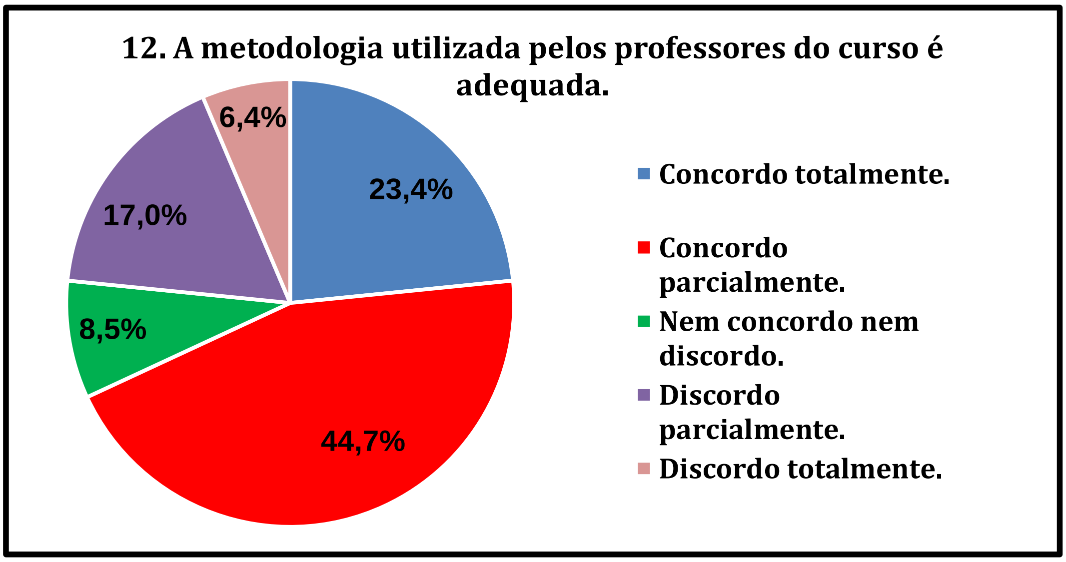
Gráfico 4 - Os livros da coleção PROFMAT são adequados e, de forma geral, suficientes como fonte de pesquisa durante o curso.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Sobre a metodologia utilizada pelos professores do curso serem adequadas, mais de 44% dos participantes disseram concordar parcialmente (Gráfico 5). Isso mostra que, após a formação, os egressos passaram a realizar uma reflexão crítica de sua prática docente, o que, sem dúvida, é um ponto importante na atuação profissional do professor que passa a avaliar a si mesmo e a suas estratégias didáticas. Levando-se em conta que 6,4% dos participantes não atuam na docência, o percentual de professores que, mesmo após a conclusão do curso, não reavaliou sua prática docente, é relativamente baixo.

Gráfico 5 - A metodologia utilizada pelos professores do curso é adequada.



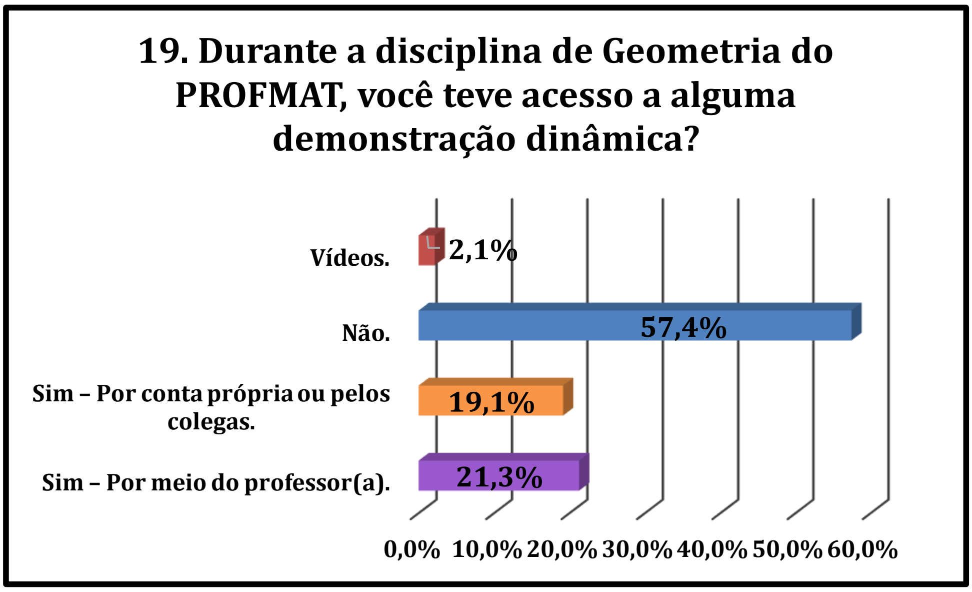
Fonte: Elaborado pelo autor.

Parte 3: Geometria Dinâmica

A terceira e última parte da pesquisa teve como objetivo verificar se os entrevistados durante a disciplina de Geometria MA 13 tiveram acesso a algum tipo de demonstração dinâmica dos teoremas ou exercícios, e também, verificar quais as contribuições do *GGbook* Visualizações Dinâmicas na Geometria Plana do PROFMAT para o entendimento das demonstrações matemáticas.

O Gráfico 6 mostra que 57,6% dos entrevistados responderam que durante a disciplina de Geometria MA 13 do PROFMAT, não tiveram acesso a demonstração dinâmica, fato que evidencia a necessidade de tal estudo. Ainda sobre o gráfico, os discentes tiveram acesso às demonstrações dinâmicas em 21,3% por meio do professor(a), o que evidencia que a metodologia usada pelo professor(a) da disciplina pode ser determinante para o uso de tecnologias.

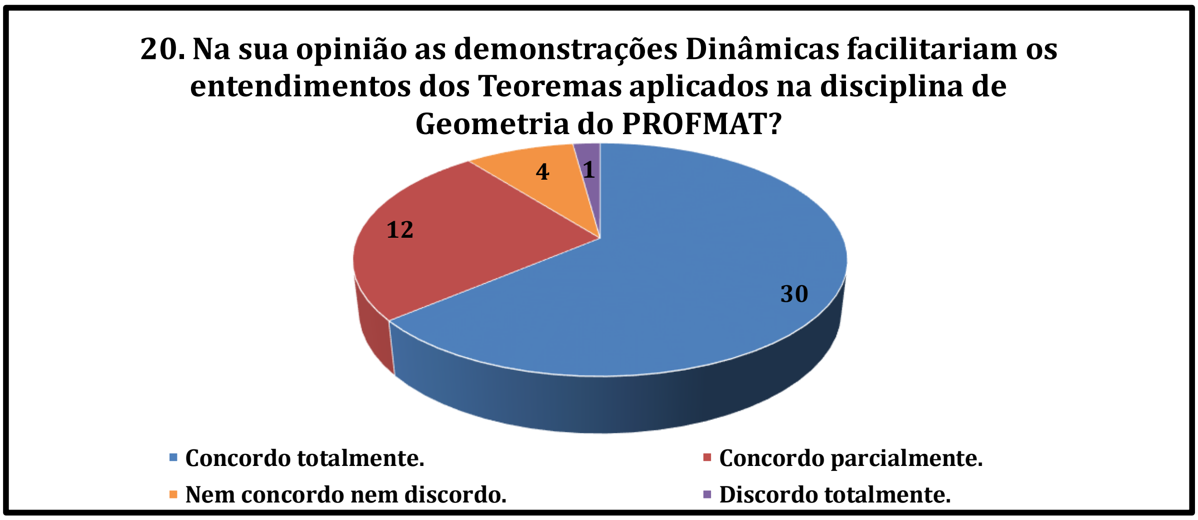
Gráfico 6 - Durante a disciplina de Geometria do PROFMAT, você teve acesso a alguma demonstração dinâmica?



Fonte: Elaborado pelo autor.

Dos 47 entrevistados, 42 afirmam que concordam totalmente ou parcialmente que as demonstrações dinâmicas facilitam os entendimentos dos Teoremas aplicados na disciplina de Geometria MA 13 do PROFMAT, 4 nem concordam nem discordam e apenas 1 discorda de tal afirmação (Gráfico 7).

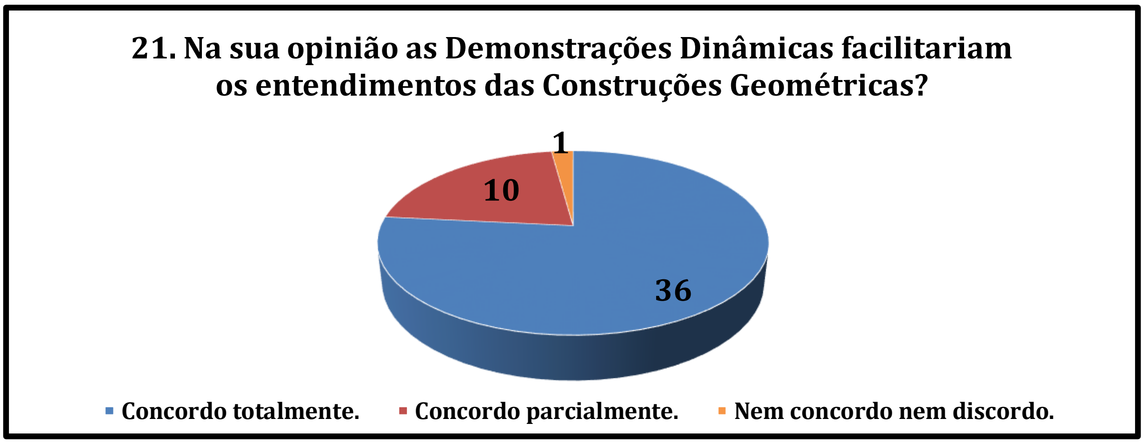
Gráfico 7 - Na sua opinião as demonstrações Dinâmicas facilitariam os entendimentos dos Teoremas aplicados na disciplina de Geometria do PROFMAT?



Fonte: Elaborado pelo autor.

Ao todo, 36 entrevistados (Gráfico 8) responderam que as Demonstrações Dinâmicas facilitariam os entendimentos das construções Geométricas, fato que precisa de mais estudos para área, uma vez que as demonstrações nem sempre são apresentadas aos estudantes e, as vezes, são apenas apresentados algoritmos e fórmulas para a resolução de problemas.

Gráfico 8 - Na sua opinião as Demonstrações Dinâmicas facilitariam os entendimentos das Construções Geométricas?



Fonte: Elaborado pelo autor.

Para promover o livro Visualizações Dinâmicas da Geometria Plana do PROFMAT, foi enviado um link de acesso no qual havia um vídeo de apresentação do ebook, assim como seu acesso. Aproximadamente 60% dos discentes que responderam à pesquisa, afirmaram que conseguiriam fazer as construções dinâmicas usando o passo a passo explicado no livro; quase 30% fariam, mas necessitariam buscar mais informações e apenas um percentual pequeno, de aproximadamente 5%, alegaram não ter habilidades com tecnologias, conforme dados da Tabela 2.

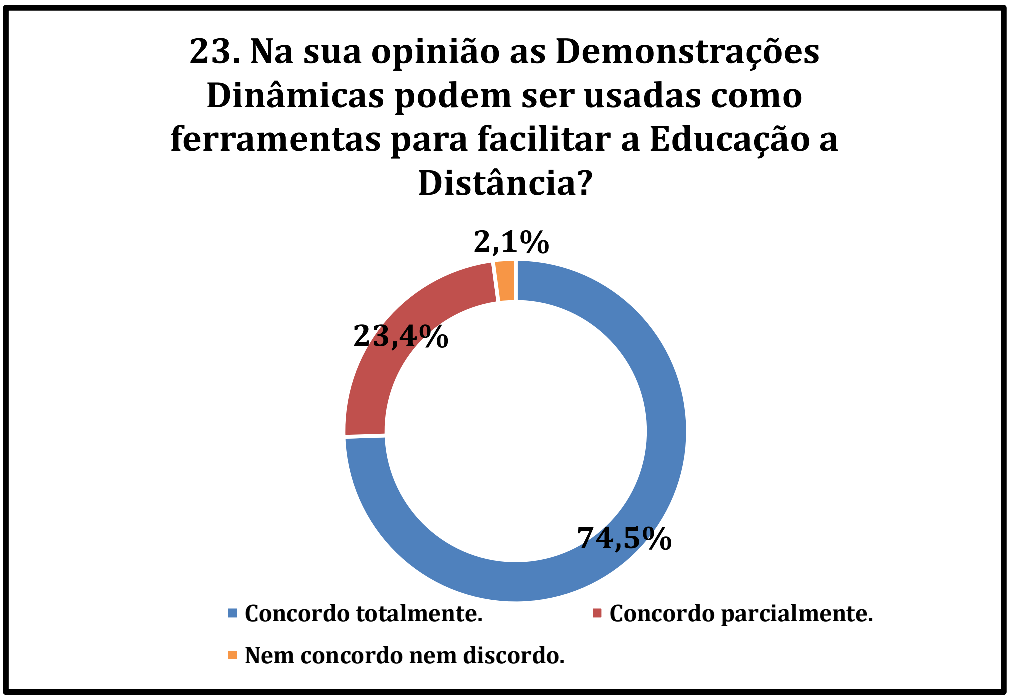
Tabela 2 - Você conseguiria fazer uma construção?

22. Com base no passo a passo para a Construção de uma Demonstração Dinâmica mostrada no livro Descomplicando a Matemática do PROFMAT "Vídeo" você conseguiria fazer uma construção?	**Quantidade**	**%**
Sim – Os exemplos do livro digital ficaram bem intuitivos.	**28**	**59,6%**
Sim – Não ficou bem claro o passo a passo no livro, porém se necessário procuro mais informações na *internet* ou outros meios.	**14**	**29,8%**
Não – Não tenho habilidades com tecnologias.	**2**	**4,3%**
Não li o livro,	**2**	**4,3%**
Não apto a responder.	**1**	**2,1%**
Total	**47**	**100%**

Fonte: Elaborado pelo autor.

Em relação ao uso das Demonstrações Dinâmicas como ferramentas para facilitar a Educação a Distância, um percentual de aproximadamente 98% concordam totalmente ou parcialmente com essa afirmativa (Gráfico 9). Em um cenário cada vez mais tecnológico e com a reclusão das pessoas em casa por causa do cenário mundial atual (Pandemia do CoronaVírus – COVID19), mais do que nunca se precisa avançar nos estudos de tecnologias eficientes para o ensino a distância.

Gráfico 9 - Na sua opinião as Demonstrações Dinâmicas podem ser usadas como ferramentas para facilitar a Educação a Distância?



Fonte: Elaborado pelo autor.

Quando questionados sobre as maiores dificuldades em usar as Demonstrações Dinâmicas, aproximadamente 79% dos entrevistados responderam que se deve à falta de recursos tecnológicos dos estudantes, professores ou escola e, 19% afirmaram que se deve à falta de interesse dos estudantes ou professores (Tabela 3). Tal fato evidencia que a falta de recursos financeiros, de um modo geral, é uma barreira para o avanço tecnológico e que talvez, a falta de interesse dos estudantes e professores esteja relacionado ao pouco uso dos equipamentos e meios tecnológicos, porém, se faz necessários mais estudos e pesquisas sobre a temática para chegar a uma conclusão mais concreta e objetiva.

Tabela 3 - Quais as maiores dificuldades em usar as Demonstrações Dinâmicas?

24. Quais as maiores dificuldades em usar as Demonstrações Dinâmicas?	**Quantidade**	**%**
Falta de recursos tecnológicos dos estudantes (Computador, *Tablet, Internet,* ...).	**16**	**34,0%**

Falta de recursos tecnológicos dos Professores (Computador, *Tablet, Internet,* ...).	**4**	**8,5%**
Falta de recursos tecnológicos nas Escola (Computador, *Tablet, Internet,* ...).	**17**	**36,2%**
Falta de interesse dos estudantes.	**4**	**8,5%**
Falta de interesse dos professores.	**5**	**10,6%**
Outros	**1**	**2,1%**
Total	**47**	**100%**

Fonte: Elaborado pelo autor.

A seguir temos as Observações/Dúvidas/Sugestões de todos os entrevistados que responderam a esse item opcional.

Gostaria de registrar outro ponto que não tenha sido abordado nas perguntas anteriores, elogios, críticas, sugestões, observações, etc (Campo Opcional).

- “Visualizei um trabalho relevante. E, você foi feliz pela escolha da unidade temática dessa disciplina, pois a mesma necessita das explorações dos recursos tecnológicos para facilitar as compreensões dos seus conteúdos”.
- “A tecnologia é uma grande ferramenta para o ensino, inclusive minha dissertação envolve tecnologia também, o mais importante que devemos destacar é se as escolas públicas terão materiais para utilizarmos, no mais é muito boa essa ideia. Parabéns”.
- “Parabéns pelo projeto”.
- “Tive a impressão de que gostaria de ter uma avaliação do livro”.
- “Ficou muito bom! Parabéns!”.

A maioria dos entrevistados concordam que o uso de novas tecnologias e as demonstrações dinâmicas são facilitadores do processo de ensino-aprendizagem, mas fica nítido que anseiam por recursos tecnológicos e financeiros para que todos tenham acesso.

Esse estudo é de grande importância para comunidade acadêmica, mas ainda se faz necessário mais estudos e pesquisas para fazer análises mais detalhadas.

4. Atividades propostas: treinando a Geometria Dinâmica

Como forma de aprofundamento de conteúdo, esse capítulo traz sugestões de atividades, como questões aplicadas nos Exames Nacional de Qualificação – ENQ (atividades de 1 a 4), o Teorema de Van Aubel (atividade 5) e uma variação desse teorema sugerida pelo autor (atividade 6), para que o leitor possa treinar as construções de Geometria Dinâmica, bem como os comandos e funções do *software GeoGebra* e, ainda, aprimorar os conhecimentos matemáticos.

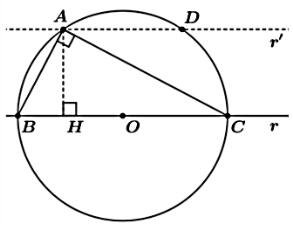
Atividade 1. (Questão 04 – ENQ 2019.1) Dados dois segmentos de comprimentos s e q, com s>q, indique a construção, com régua e compasso, de segmentos cujos comprimentos sejam iguais às raízes da equação do segundo grau x²-sx+q²=0 (Figura 47).

Figura 47 - Questão 04 do ENQ 2019.1

Questão 04 [1,25] **ENQ 2019-1**

Dados dois segmentos de comprimentos s e q, com $s > 2q$, indique a construção com régua e compasso, de segmentos cujos comprimentos sejam iguais às raízes da equação do segundo grau $x^2 - sx + q^2 = 0$.

Solução ENQ 2019-1



- Trace uma reta r e marque, sobre a mesma, pontos B e C tais que $BC = s$.
- Construa um círculo de diâmetro BC.
- Trace a reta r' paralela a reta r distando q dela, a qual intersecta o semicírculo superior nos pontos A e D, pois $q < \frac{s}{2}$.
- Temos que o triângulo ABC é retângulo em A.
- Considere H o pé da altura do triângulo ABC relativa ao vértice A, logo $AH = q$.
- Temos que $q^2 = (AH)^2 = (BH) \cdot (HC)$ e $BH + HC = s$.

Portanto, $\overline{BH}$ e $\overline{HC}$ são raízes da equação $x^2 - sx + q^2 = 0$.

Pauta de Correção ENQ 2019-1

- Construir um círculo de raio $\frac{s}{2}$. [0,25]
- Observar que o triângulo ABC é retângulo. [0,25]
- Usar a relação métrica $(AH)^2 = (BH) \cdot (HC)$. [0,5]
- Concluir que $\overline{BH}$ e $\overline{HC}$ são as raízes da equação. [0,25]

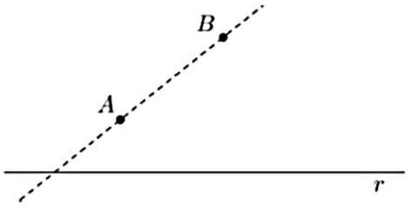
Fonte: PROFMAT - Sociedade Brasileira de Matemática.

Atividade 2. (Questão 02 – ENQ 2017.1) Descreva a construção, com régua e compasso, do círculo tangente à reta r e contento os pontos A e B da figura 48.

Figura 48 - Questão 02 do ENQ 2017.1

Questão 02 [1,25] **ENQ 2017-1**

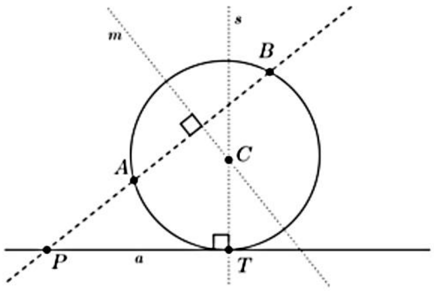
Descreva a construção, com régua e compasso, do círculo tangente à reta r e contendo os pontos A e B da figura abaixo.



Observação: Considere conhecidas as construções, com régua e compasso, da mediatriz de um segmento, da média geométrica de dois segmentos e da perpendicular a um segmento passando por um ponto dado. Estas construções podem ser utilizadas sem maiores detalhamentos.

Solução ENQ 2017-1

Vamos supor o problema resolvido:



Para construir o círculo, precisamos construir, primeiramente, seu centro C. Este centro estará na interseção da mediatriz do segmento AB com a reta perpendicular a r e passando pelo ponto T de tangência entre r e o círculo. Com isso, se soubermos determinar o ponto T, o problema poderá ser facilmente resolvido.

Sendo P o ponto de interseção entre r e a reta que passa por A e B, sabemos que

$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PT}^2,$$

logo, $\overline{PT}$ é a média geométrica dos segmentos $\overline{PA}$ e $\overline{PB}$. Com isso, podemos fazer a seguinte construção:

1. Marcamos o ponto P de interseção entre as retas da figura e construímos o círculo de centro P e raio a, onde a é a média geométrica dos segmentos $\overline{PA}$ e $\overline{PB}$ (esta construção pode, segundo o enunciado, ser feita sem maiores detalhes).
2. Tomamos o ponto T na interseção entre r e o círculo do passo anterior, de forma que TPA seja agudo.
3. Traçamos a reta s, perpendicular a r e passando por T (segundo o enunciado, esta construção pode ser feita sem maiores detalhes).
4. Traçamos a reta m, mediatriz de AB (esta construção pode ser feita sem maiores detalhes).
5. Marcamos o centro C do círculo na interseção entre m e s.
6. Construímos o círculo de centro C e raio CA.

Pauta de Correção ENQ 2017-1

- Indicar (mesmo que apenas em uma figura) que o centro do círculo está na mediatriz de AB e na reta perpendicular a r passando por T, ou seguir claramente uma estratégia que utiliza este fato. [0,25]
- Considerar a média geométrica entre os segmentos PA e PB. [0,25]
- Tomar o ponto T de forma que PT seja a média geométrica entre os segmentos PA e PB. [0,5]
- Finalizar a construção do círculo, tomando o centro na mediatriz de AB e na perpendicular a r passando por T. [0,25]

Fonte: PROFMAT - Sociedade Brasileira de Matemática.

Atividade 3. (Questão 04 – ENQ 2019.1) Dados dois segmentos de medidas a e b, descreva como construir, com régua e compasso, segmentos de medidas $\frac{a+b}{2}$ e $\sqrt{ab}$ (Figura 49).

Figura 49 - Questão 02 do ENQ 2016.1

Questão 02 [1,00]

ENQ 2016-1

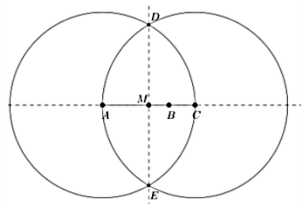
Dados dois segmentos de medidas distintas a e b, descreva como construir, com régua e compasso, segmentos de medidas $\frac{a+b}{2}$ e $\sqrt{ab}$.

Observação: Considere conhecida a construção de perpendiculares.

Solução ENQ 2016-1

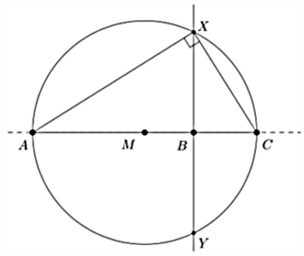
Consideramos três pontos colineares A, B e C, de maneira que B pertença ao segmento AC, $\overline{AB} = a$ e $\overline{BC} = b$.

Construção de $\frac{a+b}{2}$:



- Traçamos duas circunferências de raio $a+b$, uma com centro em A e outra com centro em B. Chamamos de D e E os pontos de interseção entre elas.
- Traçamos a reta por D e E. Chamamos de M a interseção dessa reta com o segmento AC.
- O segmento AM mede $\frac{a+b}{2}$, uma vez que DM é altura do triângulo equilátero ACD e portanto é mediana.

Construção de $\sqrt{ab}$:



- Traçamos uma circunferência de centro no ponto médio M e raio $\frac{a+b}{2}$.
- Traçamos uma perpendicular a AC passando por B. Chamamos de X e Y as interseções dessa perpendicular com a circunferência.
- O segmento BX mede $\sqrt{ab}$, pois é a altura do triângulo retângulo ACX e portanto $\overline{BX}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{BC}$.

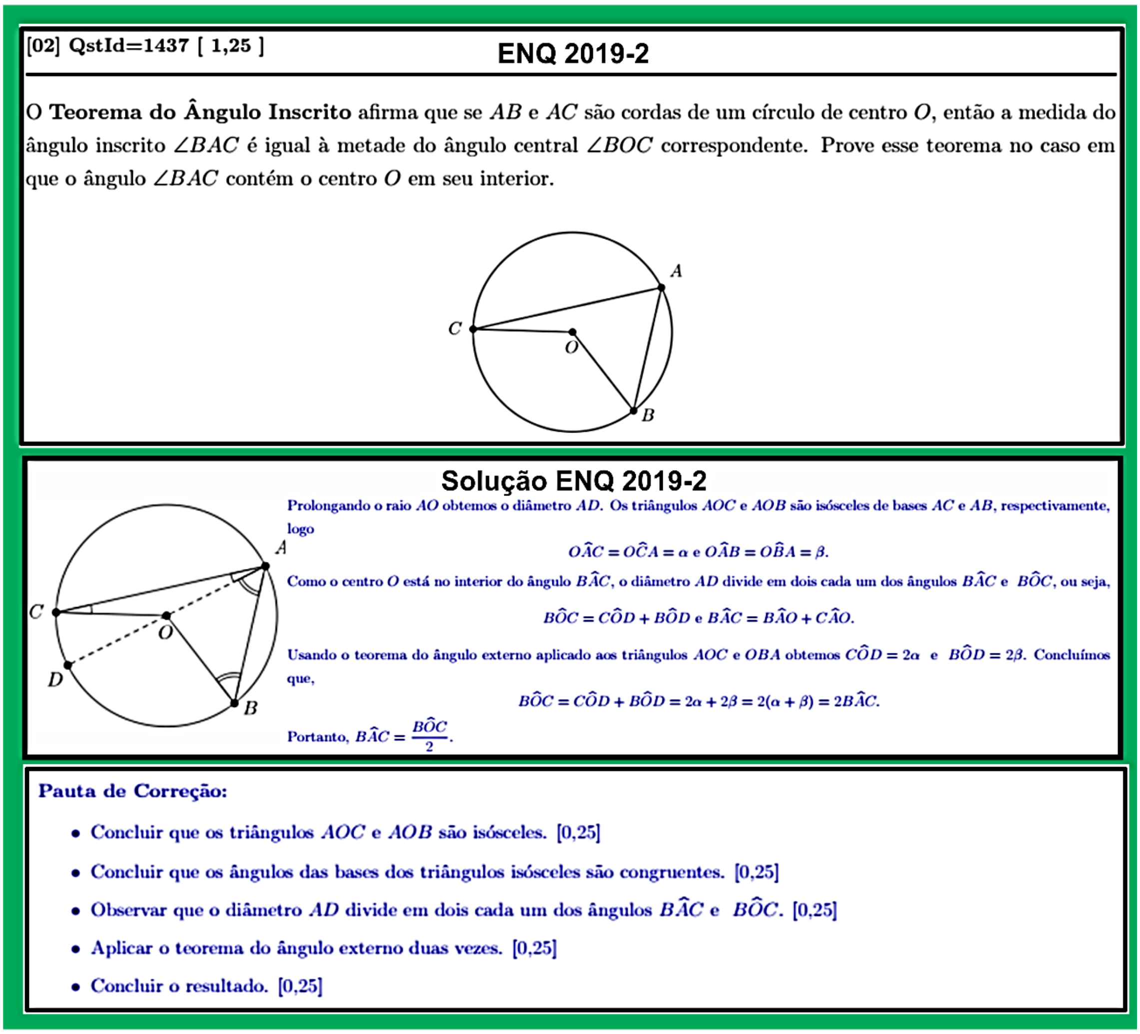
Pauta de Correção ENQ 2016-1

- Construir um segmento de tamanho $\frac{a+b}{2}$. [0,5]
- Construir um segmento de tamanho $\sqrt{ab}$. [0,5]

Fonte: PROFMAT - Sociedade Brasileira de Matemática.

Atividade 4. (Questão 02 – ENQ 2019.2) O Teorema do Ângulo Inscrito afirma que se AB e AC são cordas de um círculo de centro O, então a medida do ângulo inscrito $\angle BAC$ é igual à metade do ângulo central $\angle BOC$ correspondente. Prove esse teorema no caso em que o ângulo $\angle BAC$ contém o centro O em seu interior (Figura 50).

Figura 50 - Questão 02 do ENQ 2019.2



[02] QstId=1437 [1,25]

ENQ 2019-2

O **Teorema do Ângulo Inscrito** afirma que se AB e AC são cordas de um círculo de centro O, então a medida do ângulo inscrito $\angle BAC$ é igual à metade do ângulo central $\angle BOC$ correspondente. Prove esse teorema no caso em que o ângulo $\angle BAC$ contém o centro O em seu interior.

Solução ENQ 2019-2

Prolongando o raio AO obtemos o diâmetro AD. Os triângulos AOC e AOB são isósceles de bases AC e AB, respectivamente, logo

$$O\hat{A}C = O\hat{C}A = \alpha \text{ e } O\hat{A}B = O\hat{B}A = \beta.$$

Como o centro O está no interior do ângulo $B\hat{A}C$, o diâmetro AD divide em dois cada um dos ângulos $B\hat{A}C$ e $B\hat{O}C$, ou seja,

$$B\hat{O}C = C\hat{O}D + B\hat{O}D \text{ e } B\hat{A}C = B\hat{A}O + C\hat{A}O.$$

Usando o teorema do ângulo externo aplicado aos triângulos AOC e OBA obtemos $C\hat{O}D = 2\alpha$ e $B\hat{O}D = 2\beta$. Concluímos que,

$$B\hat{O}C = C\hat{O}D + B\hat{O}D = 2\alpha + 2\beta = 2(\alpha + \beta) = 2B\hat{A}C.$$

Portanto, $B\hat{A}C = \frac{B\hat{O}C}{2}$.

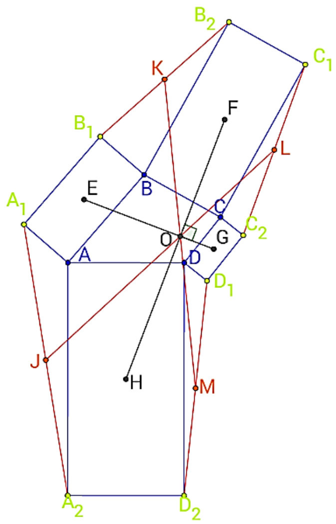
Pauta de Correção:

- Concluir que os triângulos AOC e AOB são isósceles. [0,25]
- Concluir que os ângulos das bases dos triângulos isósceles são congruentes. [0,25]
- Observar que o diâmetro AD divide em dois cada um dos ângulos $B\hat{A}C$ e $B\hat{O}C$. [0,25]
- Aplicar o teorema do ângulo externo duas vezes. [0,25]
- Concluir o resultado. [0,25]

Fonte: Sociedade Brasileira de Matemática - PROFMAT.

Atividade 5. (Teorema de Van Aubel) Se retângulos semelhantes com os centros E, F, G e H são erguidos externamente nos lados do quadrilátero ABCD, como mostrado na figura 51, os segmentos EG e FH ficam em linhas perpendiculares. Além disso, se J, K, L e M são os pontos médios dos segmentos tracejados mostrados, então JL e KM são segmentos concorrentes, simultaneamente com as outras duas linhas no ponto O.

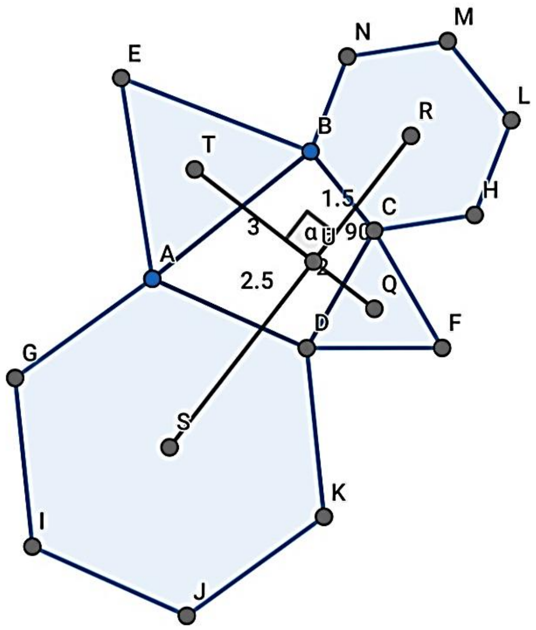
Figura 51 - Teorema de Van Aubel



Fonte: Elaborado pelo autor.

Atividade 6. (Variação do Teorema de Van Aubel) Se dois triângulos equiláteros com centros Te Q, e dois hexágonos com os centros R e S são erguidos externamente nos lados do quadrilátero ABCD de tal forma que figuras semelhantes não sejam consecutivas, como mostrado na figura 52, os segmentos TQ e RS ficam em linhas perpendiculares.

Figura 52 - Variação no Teorema de Van Aubel feita por Mayco Sabóia.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Considerações Finais

O trabalho teve como objetivo mostrar as possibilidades e benefícios do uso do *software GeoGebra* nas Demonstrações Dinâmicas como contribuição para estudantes do PROFMAT, de modo a explorar as características e particularidades de axiomas e teoremas com um olhar voltado para a Geometria Dinâmica. Para isso, foi realizado um levantamento de obras que abordam o assunto e, a partir disso, foi mostrado o passo a passo de algumas atividades voltadas para a construção de Demonstrações Dinâmicas.

Com a tendência de Educação a Distância cada vez mais presente na sociedade, se faz necessário que os estudantes sejam mais autônomos para isso é preciso modernizar a maneira de ensinar, com metodologias que empolguem e facilitem o entendimento do aluno, principalmente no que tange entender as demonstrações.

Entender uma demonstração matemática é de grande importância para a construção do conhecimento. Com isso, o *software* de Geometria Dinâmica contribui para uma metodologia mais ativa para o estudante, pois a dinâmica de movimentar objetos, modificando automaticamente a imagem, facilita a visualização e compreensão daquilo que se pretende demonstrar.

Ademais, com a pandemia de Covid – 19 observada nos últimos meses, empregar ferramentas, como o *software GeoGebra,* para realizar as Demonstrações Dinâmicas é um importante instrumento para a realização de aulas a distância que facilitem a aprendizagem dos educandos. Assim, a observação e construção de imagens geométricas tornam o aprendizado de Geometria mais significativo. Dessa forma, as aulas presenciais não teriam seu curso prejudicado pela necessidade de afastamento social e suspensão das aulas, pois utilizariam o *software* como recurso de apoio para a aprendizagem dos teoremas, uma vez que as atividades demonstrativas corroborariam com a construção do conhecimento matemático.

Com esse trabalho, foi possível verificar que as Demonstrações Dinâmicas são recursos valiosos para o processo de ensino-aprendizado e que o *software GeoGebra* é uma excelente ferramenta para essa função, desde que seus recursos e possibilidades sejam explorados adequadamente, uma vez que permite uma articulação do conteúdo e leva o próprio aluno a perceber as propriedades e chegar a conclusões, aumentando, assim, a compreensão e o poder de argumentação. E que teoremas como de Van Aubel precisam de mais estudos, pois trazem muitas contribuições para o desenvolvimento da Geometria euclidiana.

Referências

Ferreira, E., Soares, A., & Lima, J. (2008). *O resgate das demonstrações: Uma contribuição da informática à formação do professor de matemática. Informática e demonstrações na formação do professor de Matemática.*

Gravina, M. A. (1996). Geometria dinâmica uma nova abordagem para o aprendizado da geometria. *Artigo publicado nos Anais do VII Simpósio Brasileiro de Informática*.

Lourenço, M. L. (2002). A demonstração com informática aplicada à educação. *ISBN 978-85-89082-23-5*.

Nóbriga, J. (2015). GGBOOK: Uma plataforma que integra o software de geometria dinâmica GeoGebra com editor de texto e equações a fim de pemitir a construção de narrativas matemática.

Nóbriga, J. C. (2019). Demonstrações matemáticas dinâmicas. 15.

Silva, M. S. (s.d.). *Visualizações Dinâmicas na Geometria Plana do PROFMAT*. Fonte: GeoGebra Online: https://www.geogebra.org/m/v88errnh

Silveira, A., & Cabrita, I. (2013). *O GeoGebra como ferramenta de apoio à aprendizagem significativa das Transformações Geométricas Isométricas.*

Sociedade Brasileira de Matemática. (2017). PROFMAT: UMA REFLEXÃO E ALGUNS RESULTADOS. *Sociedade Brasileira de Matemática*.

Villiers, M. (1998). Dual Generalizations of Van Aubel's theorem. *The Mathematical Gazette*.

Villiers, M. d. (2002). Para uma compreensão dos diferentes papeis da demonstração em geometria dinâmica. *Philosophae Mathematicae, Yehuda Rav*.

Apêndice A – Manual do *GeoGebra*

Esse manual foi elaborado pelo próprio autor dessa dissertação, tendo como fonte de pesquisa o manual do *GeoGebra* disponível em *www.geogrebra.org*.

O que é o *GeoGebra*?

O *GeoGebra* é um *software* de matemática dinâmica para todos os níveis de ensino que reúne Geometria, Álgebra, Planilha de Cálculo, Gráficos, Probabilidade, Estatística e Cálculos Simbólicos em um único pacote fácil de se usar. O *GeoGebra* possui uma comunidade de milhões de usuários em praticamente todos os países. O *GeoGebra* se tornou um líder na área de *softwares* de matemática dinâmica, apoiando o ensino e a aprendizagem em Ciência, Tecnologia, Engenharia e Matemática.

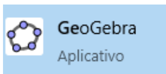
Fatos Rápidos

- Geometria, Álgebra e Planilha de Cálculo estão interconectadas e são totalmente dinâmicas.
- Interface fácil de se usar e, ainda assim, com muitos recursos poderosos.
- Ferramentas de desenvolvimento para a criação de materiais didáticos como páginas *web* interativas.
- Disponível em vários idiomas para nossos milhões de usuários ao redor do mundo.
- *Software* de Código Aberto disponível gratuitamente para usuários não comerciais.

O *GeoGebra* pode ser encontrado para *download* em *smartphones* ou *tablets* nas lojas *App Store* e *Google Play* assim como pode ser jogado diretamente pelo site https://www.GeoGebra.org.

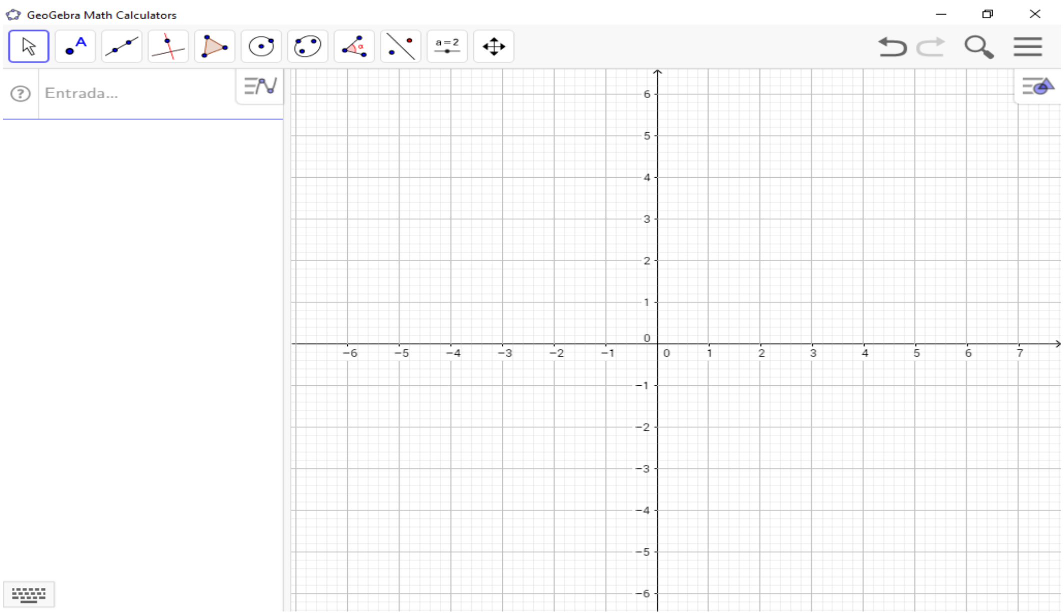
Iniciando o *GeoGebra*.

Para instalar o *GeoGebra* no computador basta acessar o site https://www.GeoGebra.org e seguir o passo a passo da instalação.

Após a instalação do *GeoGebra* dê um duplo clique no ícone 

, ao abrir o *GeoGebra*, nos depararmos com a tela inicial, conforme a figura abaixo.

Figura 53 - Tela Inicial do Software GeoGebra 6.0.377.0



Fonte: Elaborado pelo autor.

Interface Padrão do *GeoGebra*.

Figura 54 - Interface Padrão do GeoGebra

Fonte: Elaborado pelo autor.

Na parte superior da janela temos a Barra de Ferramentas, que será utilizada para executar os diversos comandos, inclusive para criar e modificar objetos. Em cada botão da Barra de Ferramentas, existe uma seta para baixo no canto inferior direito. Esta seta permite visualizar e selecionar todas as opções relacionadas com aquele botão.

Logo abaixo da Barra de Ferramentas, na parte superior esquerda da janela, o Campo de Entrada, onde pode-se digitar entradas para criar objetos. Na parte superior da janela temos a Barra de Menus e a Barra.

Na Janela de Geométrica serão exibidas as representações gráficas dos objetos criados; na Janela de Álgebra serão exibidas as representações algébricas desses objetos.

Modificando a Interface padrão.

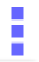
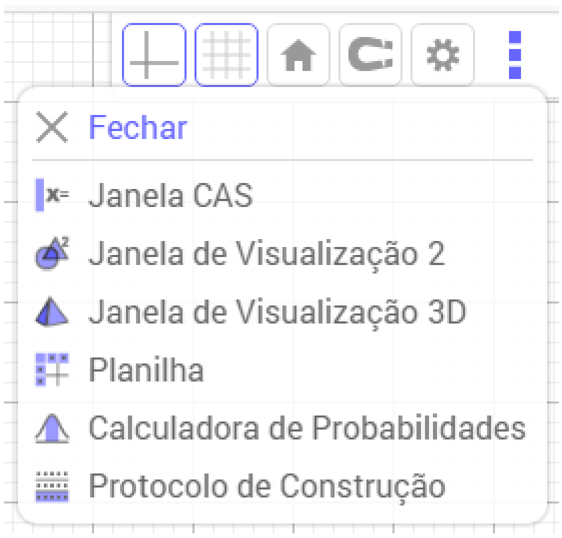
No ícone de opções de visualização  , localizado no canto superior esquerdo podemos alterar a Interface Padrão do *GeoGebra* adicionando ou removendo janelas.

Figura 55 - Ícone de Opções de Visualização



Fonte: Elaborado pelo autor.

Janela CAS são feitos cálculos numéricos e simbólicos, cálculos de raízes de funções, solução de sistema de equações, cálculo de determinantes, dentre outros.

Construções dinâmicas no *GeoGebra*

As construções no *GeoGebra* consistem em objetos matemáticos de vários tipos que podem ser criados usando ferramentas ou comandos.

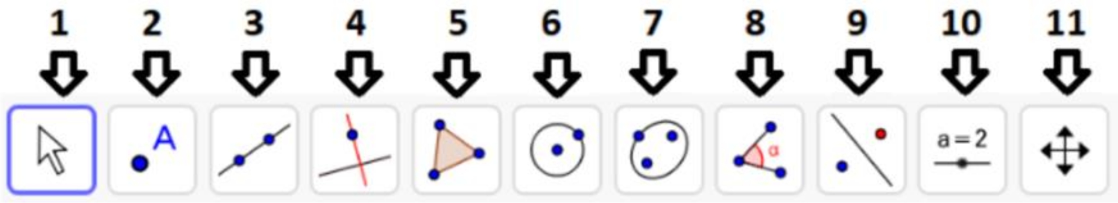
Processo de construção de demonstrações Dinâmicas.

Siga as instruções para construir o objeto geométrico na área de trabalho do *GeoGebra*.

A barra de menus do *GeoGebra* está dividida em 11 janelas e cada janela possui um conjunto de ferramentas. Para poder visualizá-las, basta selecionar o menu e, em seguida abrirá uma nova janela com as opções de ferramentas.

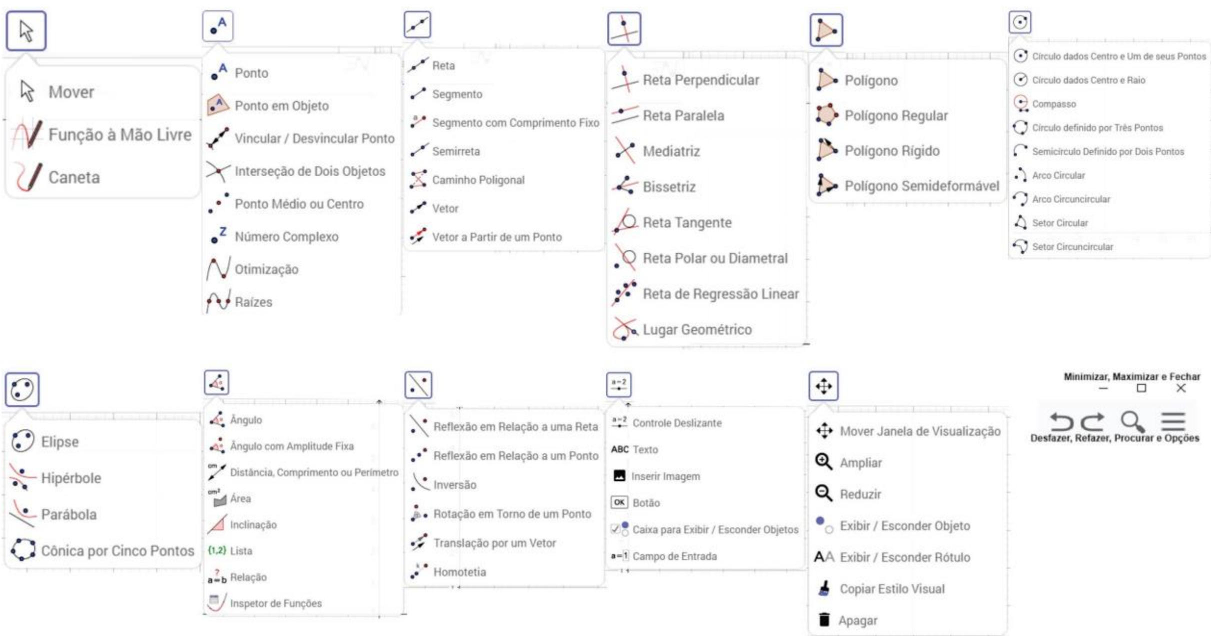
Explorando os comandos da Barra de Ferramentas

Figura 56 - Divisões da Barra de Menus do GeoGebra



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 57 - Opções da Barra de Ferramentas do GeoGebra



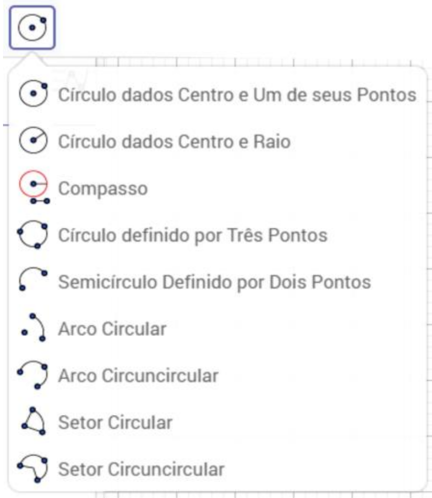
Fonte: Elaborado pelo autor.

Construindo um Círculo no *GeoGebra*

Para construir o objeto Círculo no *GeoGebra,* temos a opção de usar a barra de comandos e escolher a entre as opções de construções de Círculo desejada ou temos a opção de Inserir no Campo de entrada a equação do Círculo.

Usando os comandos de construção de Círculo na Barra de Ferramentas.

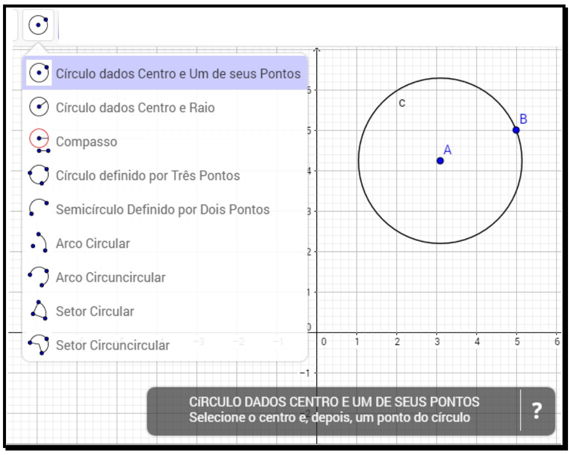
Figura 58 - Ferramentas Círculo



Fonte: Elaborado pelo autor.

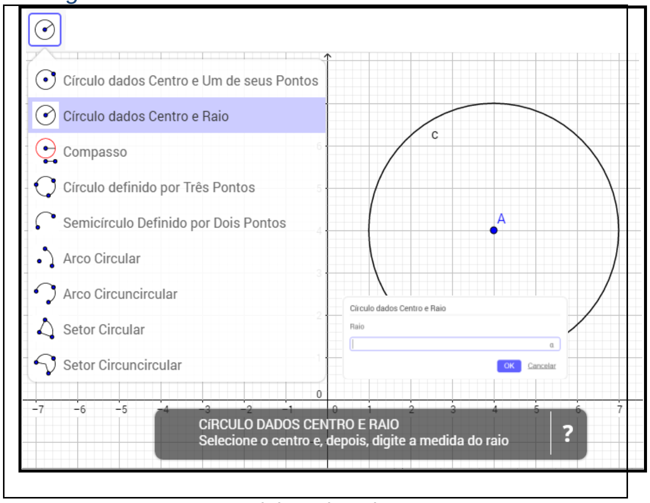
Ao colocar o cursor do Mouse em cima de um Botão de Comando, aparece uma mensagem indicando qual a função do botão e um ponto de interrogação que, significa ajuda de como usar aquele comando.

Figura 59 - Comando Círculo dados Centro e Um de seus Pontos



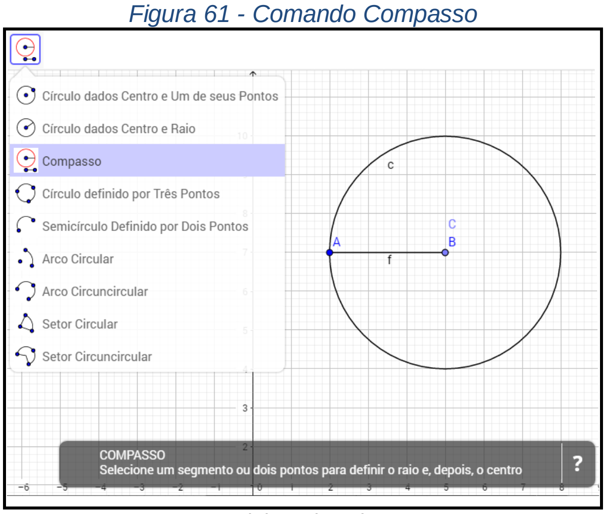
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 60 - Comando Círculo dados Centro e Raio



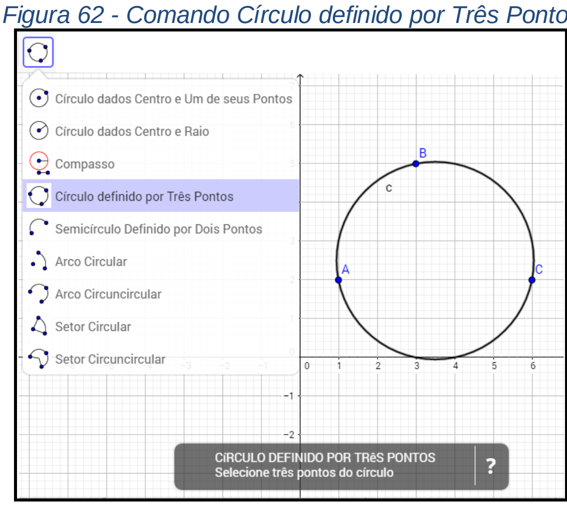
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 61 - Comando Compasso



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 62 - Comando Círculo definido por Três Pontos

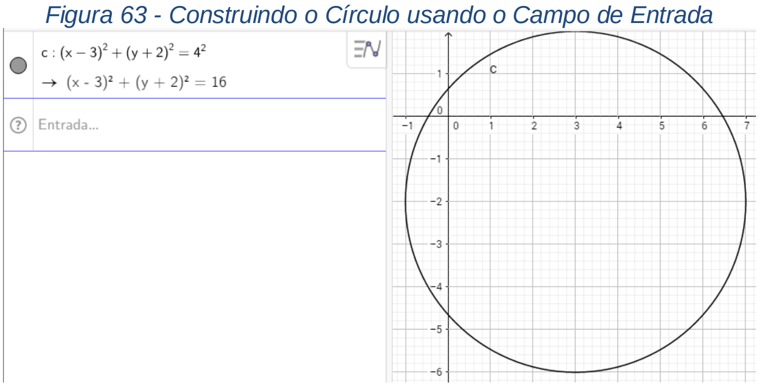


Fonte: Elaborado pelo autor.

Usando o Campo de Entrada para construir um Círculo

No Campo de Entrada, basta digitar a equação do Círculo e teclar Enter, automaticamente, o Círculo será construído na Janela Geométrica.

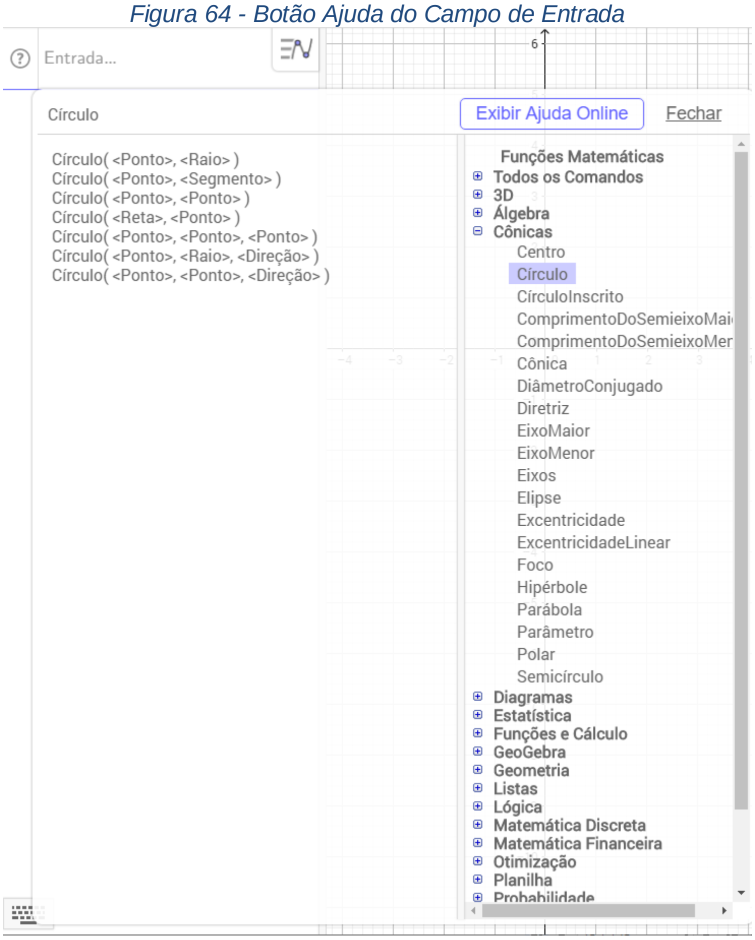
Figura 63 - Construindo o Círculo usando o Campo de Entrada



Fonte: Elaborado pelo autor.

Ao lado do Campo de Entrada, temos um ponto de interrogação, que serve para orientar a escrita correta de cada comando e, também, mostrar várias opções de construção.

Figura 64 - Botão Ajuda do Campo de Entrada

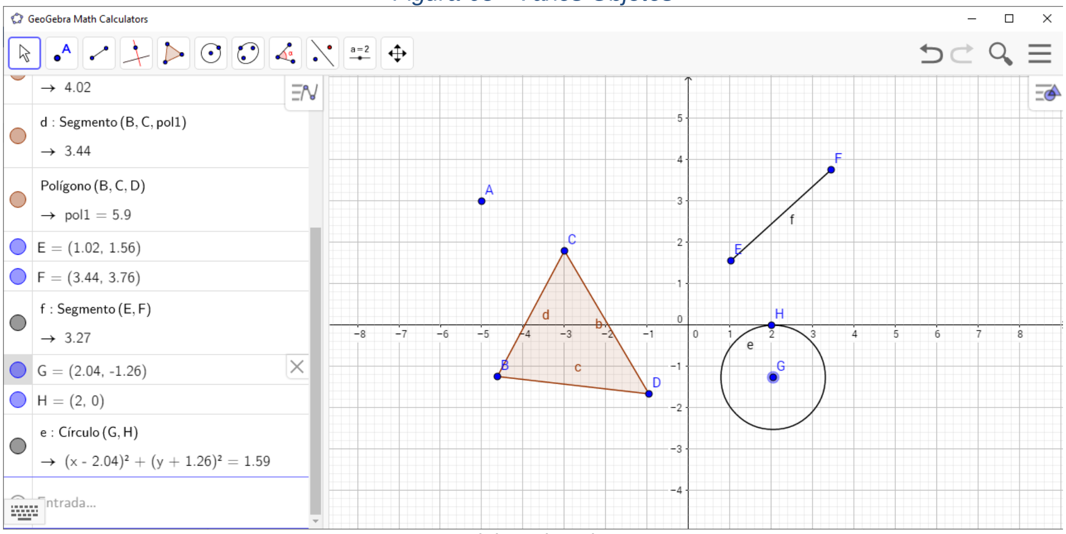


Fonte: Elaborado pelo autor.

Vários Objetos

Cada objeto construído aparecerá na Janela de Álgebra como sua definição matemática e, também, aparecerá na Janela Geométrica como sua representação gráfica.

Figura 65 - Vários Objetos

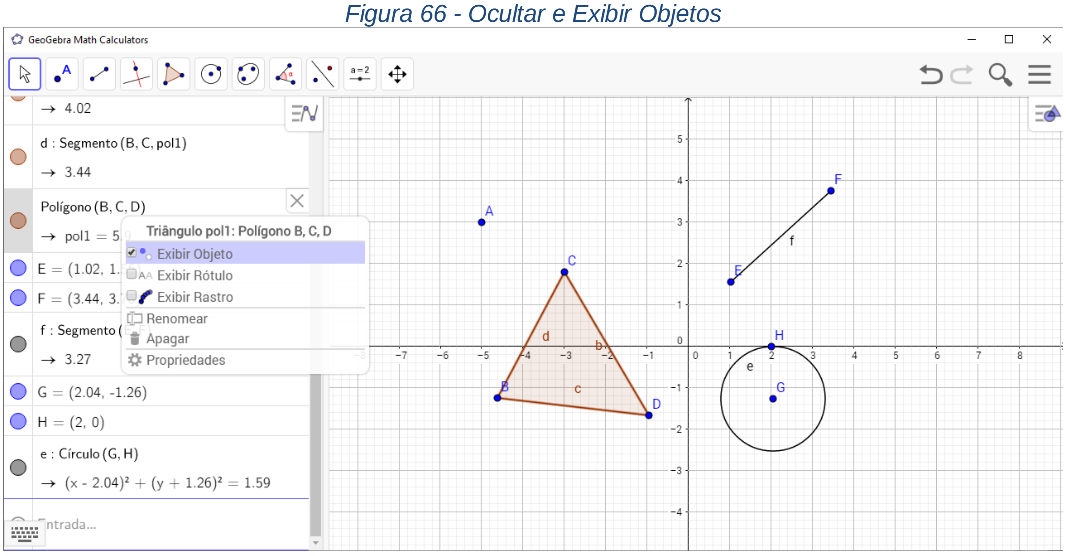


Fonte: Elaborado pelo autor.

Ocultar e Exibir Objetos

Para ocultar ou exibir objetos basta clicar com o botão auxiliar do Mouse em cima do objeto, tanto faz se é na sua representação algébrica ou geométrica, que irá aparecer um Menu Suspenso com algumas opções, entre elas Ocultar e Exibir.

Figura 66 - Ocultar e Exibir Objetos



Fonte: Elaborado pelo autor.

Protocolo de Construção

O Protocolo de Construção é uma opção que mostra uma Janela de Construção com a ordem em que foi construído cada objeto, bem como o nome, o ícone de comando utilizado, a descrição, a definição, o valor e a legenda de cada objeto construído.

Para ativar o Protocolo de Construção basta ir ao ícone  localizado no canto superior esquerdo e marcar a opção Protocolo de Construção.

Figura 67 - Protocolo de Construção

	Nome	Ícone	Descrição	Definição	Valor	Legenda
1	Ponto A				A = (-5, 3)	
2	Ponto B				B = (-4.62, -1.24)	
3	Ponto C				C = (-3, 1.8)	
4	Ponto D				D = (-0.96, -1.66)	
5	Triângulo pol1		Polígono B, C, D	Polígono(B, C, D)	pol1 = 5.9	
5	Segmento d		Segmento [B, C] de Triângulo pol1	Segmento(B, C, pol1)	d = 3.44	
5	Segmento b		Segmento [C, D] de Triângulo pol1	Segmento(C, D, pol1)	b = 4.02	
5	Segmento c		Segmento [D, B] de Triângulo pol1	Segmento(D, B, pol1)	c = 3.68	
6	Ponto E				E = (1.02, 1.56)	
7	Ponto F				F = (3.44, 3.76)	
8	Segmento f		Segmento [E, F]	Segmento(E, F)	f = 3.27	
9	Ponto G				G = (2.04, -1.26)	
10	Ponto H				H = (2, 0)	
11	Círculo e		Círculo por H com centro G	Círculo(G, H)	e: $(x - 2.04)^2 + (y + 1.26)^2 = 1.59$	

Fonte: Elaborado pelo autor.

Apêndice B – Questionário Descomplicando a Geometria do PROFMAT

Formulário online disponível em: https://docs.google.com/forms/d/e/1FAIpQLScxZk-v3ndKUfpTt2qaaLlfyuGdRxB2lJUMQNjE53ColUdxZw/viewform

Olá, meu nome é Mayco Sabóia, discente do PROFMAT UnB da turma de 2018, conclusão prevista para julho de 2020.

Preciso da ajuda dos nobres colegas Discentes/Mestres do PROFMAT para responder ao questionário online de forma voluntária, onde todas as informações são anônimas, com a finalidade de estudos e pesquisa para minha dissertação do programa PROFMAT.

SOBRE SEU PERFIL

1. Qual o Polo do PROFMAT você cursou a disciplina de Geometria - MA 13:

SOBRE SUA ATUAÇÃO PROFISSIONAL

Das opções a seguir, marque a que se enquadrar.

2. Atualmente, você:

- o É professor da educação básica da rede pública.
- o É professor da educação básica da rede privada.
- o É professor do Ensino Superior Público/Privado.
- o É professor de Institutos Federais.
- o Não atua como professor, mas é licenciado em Matemática.
- o Não atua como professor e não é licenciado em Matemática.
- o Outro:

3. Ano de formação da licenciatura/graduação:

4. Ao iniciar o curso do , você:

- o Já era professor da educação básica da rede pública.
- o Já era professor da educação básica da rede privada.
- o Já era professor do Ensino Superior Público/Privado.
- o Já era professor de Institutos Federais.
- o Não atuava como professor.

- Outro:

5. Em que escola trabalha atualmente? (Caso esteja afastado para estudos, colocar essa informação).

6. Já trabalhava na Escola em que leciona antes de começar o curso PROFMAT?

- Sim.
- Não.
- Não sou/era professor.
- Outro:

7. Durante o curso PROFMAT, você:

- Obteve afastamento integral para estudos.
- Afastou-se apenas por determinado período.
- Não se afastou, mas reduziu a carga de trabalho.
- Não obteve qualquer licença ou afastamento.
- Não estava trabalhando.
- Outro:

SOBRE AS MOTIVAÇÕES

8. Dos fatores a seguir, quais você considera que foram decisivos para sua decisão por fazer o PROFMAT:

- Capacitação continuada com a finalidade de evolução na carreira.
- Aumento de salário.
- Melhores oportunidades de trabalho.
- Reconhecimento profissional.
- Reconhecimento social.
- Objetivos pessoais não ligados à carreira nem a reconhecimento.
- Outro:

SOBRE O CURRÍCULO

Sobre a disciplina de Geometria-MA13, marque a SOMENTE UMA alternativa que mais se aproxima da sua opinião

9. A disciplina de Geometria foi importante para sua atuação profissional.

- Concordo totalmente.
- Concordo parcialmente.
- Nem concordo nem discordo.
- Discordo parcialmente.
- Discordo totalmente.

SOBRE O MATERIAL DE REFERÊNCIA

Marque todas que se aplicam.

10. Em relação ao material de referência, você usou durante o curso: *

- Os livros da coleção PROFMAT.
- As videoaulas do PROFMAT.
- Outro:

11. Os livros da coleção PROFMAT são adequados e, de forma geral, suficientes como fonte de pesquisa durante o curso.

- Concordo totalmente.
- Concordo parcialmente.
- Nem concordo nem discordo.
- Discordo parcialmente.
- Discordo totalmente.

SOBRE A METODOLOGIA

12. A metodologia utilizada pelos professores do curso é adequada.

- Concordo totalmente.
- Concordo parcialmente.
- Nem concordo nem discordo.
- Discordo parcialmente.
- Discordo totalmente.

13. Os professores do curso possibilitaram oportunidades de compartilhamento de experiências ou conhecimentos que permitiram o desenvolvimento da criatividade e a realização de pesquisa ou que, de alguma forma, inseriram os discentes no contexto de ensino-aprendizado de modo mais prático.

- Concordo totalmente.
- Concordo parcialmente.
- Nem concordo nem discordo.
- Discordo parcialmente.
- Discordo totalmente.

DOS OBSTÁCULOS DE APRENDIZAGEM

14. Durante a disciplina, você encontrou alguma dificuldade?

- Falta de tempo para se dedicar aos estudos.
- Falta de organização.
- Falta de material didático.
- Dificuldades com os conteúdos ministrados.
- Problemas de saúde.
- Dificuldade de adaptação à metodologia de algum professor do curso.
- Outros tipos de dificuldades.
- Não teve nenhuma dificuldade.
- Outro:

15. Você obteve ajuda para superar alguma dificuldade durante a disciplina de Geometria?

- Sim, dos colegas de turma.
- Sim, dos professores.
- Não obteve ajuda quando precisou.
- Não precisou de ajuda durante o curso.

16. Você participou de algum grupo de estudos durante a disciplina de Geometria? *

- Sim
- Não

17. Qual método de estudo você considera que foi eficiente para ser aprovado na disciplina de Geometria e aproveitar melhor os conteúdos ministrados na disciplina?

18. O que você considera que poderia ter feito para aproveitar melhor a disciplina de Geometria?

DO OBJETO DESSA PESQUISA

Neste vídeo apresento o livro digital Descomplicando a Geometria do PROFMAT, disponível na plataforma *GGbook* – *GeoGebra* online. https://www.youtube.com/watch?v=xMCUsA2Eg2E

Disciplina MA13 em dois contextos: Algébrica & Dinâmica

GGbook: Visualizações Dinâmicas na Geometria Plana do PROFMAT
Disponível em: www.https://www.GeoGebra.org/m/v88errnh

19. Durante a disciplina de Geometria do PROFMAT, você teve acesso a alguma demonstração dinâmica?

- Sim – Por meio do professor(a).
- Sim – Por conta própria ou pelos colegas.
- Não.
- Outro:

20. Na sua opinião, as demonstrações Dinâmicas facilitariam os entendimentos dos Teoremas aplicados na disciplina de Geometria do PROFMAT? *

- Concordo totalmente.
- Concordo parcialmente.
- Nem concordo nem discordo.
- Discordo parcialmente.
- Discordo totalmente.

21. Na sua opinião, as Demonstrações Dinâmicas facilitariam os entendimentos da Construções Geométricas?

- Concordo totalmente.
- Concordo parcialmente.
- Nem concordo nem discordo.
- Discordo parcialmente.
- Discordo totalmente.

22. Com base no passo a passo para a Construção de uma Demonstração Dinâmica mostrada no livro Visualizações Dinâmicas na Geometria Plana do PROFMAT "Vídeo", você conseguiria fazer uma construção?

- Sim – Os exemplos do livro digital ficaram bem intuitivos.
- Sim – Não ficou bem claro o passo a passo no livro, porém se necessário procuro mais informações na internet ou outros meios.
- Não – Não tenho habilidades com tecnologias.
- Não – Pois não vou aplicar em lugar nenhum.
- Outro:

23. Na sua opinião, as Demonstrações Dinâmicas podem ser usadas como ferramentas para facilitar a Educação a Distância? *

- Concordo totalmente.
- Concordo parcialmente.
- Nem concordo nem discordo.
- Discordo parcialmente.
- Discordo totalmente.

Sobre o livro digital Visualizações Dinâmicas na Geometria Plana do PROFMAT, disponível na plataforma *GGbook – GeoGebra* Online que apresentei no vídeo.

24. Quais as maiores dificuldades em usar as Demonstrações Dinâmicas? *

- Falta de recursos tecnológicos dos estudantes (Computador, *Tablet, Internet*...).
- Falta de recursos tecnológicos dos Professores (Computador, *Tablet, Internet*...).
- Falta de recursos tecnológicos nas Escola (Computador, *Tablet, Internet...).*
- Falta de interesse dos estudantes.
- Falta de interesse dos professores.
- Não se faz necessário para a compreensão das aulas.
- Outro:

Gostaria de registrar outro ponto que não tenha sido abordado nas perguntas anteriores, elogios, críticas, sugestões, observações, etc?