



Igor Ferreira do Nascimento

**Modelo *Asset, Liability and Management*  
para Previdência Complementar do  
Servidor Público Federal**

Brasília/DF

2020

Igor Ferreira do Nascimento

**Modelo *Asset, Liability and Management* para  
Previdência Complementar do Servidor Público  
Federal**

Tese de doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Administração da Universidade de Brasília - UnB, para obtenção do título de Doutor em Administração na área de concentração de Métodos Quantitativos em Finanças.

Universidade de Brasília

Faculdade de Administração, Contabilidade e Economia

Programa de Pós-Graduação em Administração

Orientador: Dr. Pedro Henrique Melo Albuquerque

Brasília/DF

2020

---

Igor Ferreira do Nascimento

Modelo *Asset, Liability and Management* para Previdência Complementar do Servidor Público Federal/Igor Ferreira do Nascimento. – Brasília/DF, 2020

111 p. : il. (algumas color.) ; 30 cm.

Orientador: Dr. Pedro Henrique Melo Albuquerque

TESE – Universidade de Brasília

Faculdade de Administração, Contabilidade e Economia

Programa de Pós-Graduação em Administração , 2020.

1. ALM 2. Plano de Previdência Complementar 3. Alocação ótima 4. Alíquota de contribuição atuarial I.Orientador: Dr. Pedro Henrique Melo AlbuquerqueII. Universidade de Brasília III. Faculdade de Administração, Contabilidade e Economia IV. Modelo *Asset, Liability and Management* para Previdência Complementar do Servidor Público Federal

CDU 02:141:005.7

---

Igor Ferreira do Nascimento

# **Modelo *Asset, Liability and Management* para Previdência Complementar do Servidor Público Federal**

Tese de doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Administração da Universidade de Brasília - UnB, para obtenção do título de Doutor em Administração na área de concentração de Métodos Quantitativos em Finanças.

Trabalho aprovado pela banca examinadora:

---

**Dr. Pedro Henrique Melo Albuquerque**  
Orientador

---

**Dr. Herbert Kimura**  
Universidade de Brasília

---

**Dr. Daniel Oliveira Cajueiro**  
Universidade de Brasília

---

**Dr. Cássio Maldonado Turra**  
Universidade Federal de Minas Gerais

---

**Dr. Heglshynton Valério Marçal**  
Caixa Econômica Federal

Brasília/DF

2020

# DEDICATÓRIA

A Mavik e Rafaela que fazem de mim alguém melhor a cada dia.

A Joana D'arc, por me ensinar a generosidade, e Noé, pela inspiração como homem.

A Maria Madelena, Leôncio, Gilmar e Lunalva pelo imenso amor de criação.

# AGRADECIMENTOS

Sou grato pela seletividade das oportunidades proporcionadas pela aleatoriedade divina.

Agradecimento ao professor e orientador Dr. Pedro Henrique Melo Albuquerque.

Agradecimentos ao amigo Dr. Yaohao Peng pela parceria e colaborações nas produções científicas.

Agradecimentos aos excelentes professores do Programa de Pós-Graduação em Administração (PPGA) da Universidade de Brasília (UnB).

Agradecimentos aos inúmeros amigos e colegas dos locais onde trabalhei que compartilharam momentos de crescimento pessoal e profissional.

Agradecimentos ao Instituto Federal do Piauí (IFPI) por oportunizar a conclusão desse trabalho.

# EPÍGRAFE

*“Esses casos de família e de dinheiro eu nunca entendi bem  
Veloso o sol não é tão bonito pra quem vem  
Do norte e vai viver na rua  
A noite fria me ensinou a amar mais o meu dia  
E pela dor eu descobri o poder da alegria  
E a certeza de que tenho coisas novas  
Coisas novas pra dizer*

*A minha história é talvez  
É talvez igual a tua, jovem que desceu do Norte  
Que no sul viveu na rua  
E ficou desnorteado, como é comum no seu tempo  
E que ficou desapontado, como é comum no seu tempo  
E que ficou apaixonado e violento como eu como você”*

Belchior

# RESUMO

O trabalho propõe um modelo de compatibilização dos fluxos de ativos financeiros e passivo atuariais inspirado na legislação do regime de previdência complementar e no regulamento da Fundação de Previdência Complementar do Servidor Público Federal do Poder Executivo. As obrigações atuariais são modeladas por meio do cálculo das alíquotas justas e equilíbrio para os custos dos benefícios do tipo benefício definido. O modelo mensura a sensibilidade das alíquotas em caso de alterações no perfil atuarial de idade, sexo e ocupação dos servidores e em mudança nas tábuas biométricas de mortalidade. Os resultados sugerem o aumento do esforço coletivo para o custeio caso haja aumento na idade média de entrada no serviço público e redução do custeio com o aumento da expectativa de sobrevivência do servidor. A alocação dos recursos financeiros é feita de maneira individual ao longo de todo período de contribuição até a expectativa de vida, considerando diferentes perfis de investimento, múltiplas funções objetivo, decisões em múltiplos estágios, incerteza em cenários em árvore e diferentes ativos em múltiplas classes de investimento.

**Palavras-chave:** ALM, plano de previdência complementar, alocação ótima, alíquota de contribuição atuarial

# ABSTRACT

The work proposes a model for harmonizing the flows of financial assets and actuarial liabilities inspired by the legislation of the supplementary pension scheme and the regulation of the Federal Public Servants' Supplementary Pension Foundation of the Executive Branch. Actuarial obligations are modeled by calculating fair rates and balancing the costs of defined-benefit type benefits. The model measures the sensitivity of the rates in the event of changes in the actuarial profile of age, sex and occupation of employees and changes in the mortality tables. The results suggest an increase in the collective effort for the cost if there is an increase in the average age of entry into the public service and a reduction in the cost with the increase in the expectation of the server's survival. The allocation of financial resources is made individually over the entire contribution period up to life expectancy, considering different investment profiles, multiple objective functions, decisions in multiple stages, uncertainty in tree scenarios and different assets in multiple classes of investment.

**Keywords: ALM, supplementary pension plans, optimal allocation, actuarial contribution rate**

# LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Esquema resumo modularizado do trabalho proposto. O módulo do participante (região verde) individualiza o perfil de investimento e atuarial do participante. O módulo do passivo (região vermelha) utiliza as informações individuais e coletivas dos perfis atuariais para determinar as alíquotas justas e de equilíbrio, além do cálculo do fluxo atuarial. O módulo do ativo (região azul) permite a geração do cenário em árvore das opções de investimento. O módulo em amarelo consolida o fluxo atuarial e cenário para determinar a alocação ótima dos recursos do participante. . . . .	3
Figura 2 – Representação esquemática das transições entre os estados possíveis do participante e as premissas atuariais/biométricas do plano de previdência. . . . .	21
Figura 3 – Probabilidade de mortalidade para cada gênero utilizando a tábua RP-2000 em 2015 e com redutor de 20 anos. . . . .	23
Figura 4 – Probabilidade de entrada em invalidez por idade para diferentes tábuas adotadas pelo mercado. . . . .	24
Figura 5 – Probabilidade de morte em inválidos com diferentes entradas em invalidez. . . . .	25
Figura 6 – Distribuição por idade por perfil atuarial para os anos 2006 e 2017 considerando servidores que entraram após 2003, terceira e quarta gerações previdenciárias de servidores. . . . .	28
Figura 7 – Média de salários para os perfis atuariais. A linha representa o modelo linear do salário em função do ano para os registros com tempo de serviço compatível com entrada em 2006. . . . .	29
Figura 8 – Taxa de crescimento de salários para os perfis atuariais. A linha representa o comportamento exponencial da taxa de crescimento salarial em função do ano. Os pontos indicam o valores médios observados nos dados. . . . .	31

Figura 9 – Net atuarial do benefício de Aposentadoria Normal para os diferentes perfis atuariais. . . . .	40
Figura 10 – Alíquota atuarialmente justa para o custeio do benefício associado à AEAi para os diferentes perfis atuariais formados pela combinação de idade, sexo e ocupação. . . . .	42
Figura 11 – Alíquota atuarialmente justa para o custeio do benefício associado à pensão por morte do participante ativo (AEMAt) para os diferentes perfis atuariais formados pela combinação de idade, sexo e ocupação. . . . .	44
Figura 12 – Alíquota atuarialmente justa para o custeio do benefício associado à pensão por morte do participante assistido em aposentadoria normal (AEMAsm) para os diferentes perfis atuariais. . . . .	47
Figura 13 – Alíquota atuarialmente justa para o custeio do benefício associado à pensão por morte do participante assistido em aposentadoria por invalidez (AEAMAsi) para os diferentes perfis atuariais. . . . .	49
Figura 14 – Alíquota atuarialmente justa para o custeio do benefício de sobrevivência do participante assistido em aposentadoria normal (BSA) para os diferentes perfis atuariais. . . . .	51
Figura 15 – Alíquota atuarialmente justa para o custeio do benefício de aporte extraordinário para aposentadoria normal (AEAN) para os diferentes perfis atuariais. . . . .	55
Figura 16 – Distribuição de servidores elegíveis por idade e perfil atuarial que estão na RAIS 2015. . . . .	57
Figura 17 – Distribuição média de servidores elegíveis à FUNPRESP-Exe por idade e perfil atuarial que entram no serviço público entre 2015 e 2017. . . . .	57
Figura 18 – (a) Série histórica do retorno e estimativas do modelo de volatilidade estocástica utilizando $M = 100000$ partículas para os índices setoriais de energia (IEE), consumo (ICON), financeiro (IFN), indústria (INDX), imobiliário (IMOB) e IBOVESPA (IBOV). . . . .	70
Figura 19 – Representação do cenário em árvore pelo método FSCA ( $t_1 = 3, t_2 = 2, t_3 = 3$ ). . . . .	72
Figura 20 – Estrutura recursiva antecipativa e adaptativa. . . . .	79
Figura 21 – Alocação ótima em percentual (%) em todos os ativos de renda fixa e variável para diferentes perfis atuarias e de investimento. . . . .	89

Figura 22 – Alocação ótima em R\$ em todos os ativos de renda fixa e variável para diferentes perfis atuarias e de investimento. . . . .	90
Figura 23 – Alocação ótima nos ativos de renda variável em R\$ para diferentes perfis atuarias e de investimento. . . . .	91
Figura 24 – Comparação do retorno acumulado para a alocação ótima e indicadores de referência e meta atuarial entre janeiro de 2015 e maio de 2017. As curvas descontínuas próximas ao ano de 2016 representam a análise exclusiva para o período de 2016 a 2017. . . . .	93
Figura 25 – Resultados do modelo ALM agregando os perfis atuariais. O gráfico (a) apresenta a alocação em percentual e (b) em R\$. O gráfico (c) apresenta o valor em R\$ para alocação nos ativos de renda variável e em (d) apresenta a performance da carteira arriscada entre janeiro de 2015 e maio de 2017. . . . .	95

# LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Resumo com descrição das principais mudanças na legislação para a aposentadoria por invalidez e pensão por morte do participante ativo no RPPS. . . . .	19
Tabela 2 – Aumento do tempo de sobrevivência, em 2015, utilizando a tábua RP2000 com redução de mortalidade de 20 anos avaliado na idade de 65 anos para homens não professores e 60 anos para mulheres não professoras. Para os servidores da área de educação básica as idades de referência são 60 anos para homens 55 para mulheres. . . . .	23
Tabela 3 – Salário inicial médio calculado em 2006 e crescimento médio real bruto por perfil atuarial. . . . .	30
Tabela 4 – Resumo com as hipóteses biométricas, econômicas e demográficas. . . . .	37
Tabela 5 – Valor esperado para o saldo de conta individual segundo perfis atuariais dos participantes com idade de entrada no serviço público com 30 anos de idade, considerando crescimento salarial e idade de aposentadoria na data de aposentadoria. . . . .	38
Tabela 6 – Distribuição de custo de AEAN associado ao Aposentadoria Normal (AN), Benefício de Aposentadoria por Sobrevivência (BSA) e Pensão por morte do participante assistido de aposentadoria normal (AEAMAs). . . . .	54
Tabela 7 – Distribuição dos registros elegíveis por perfil atuarial que estão na RAIS 2015. Os registros do estoque são aqueles estavam na base no início de 2015 e que permaneceram até o final de 2015. A base de entrada considera os registros que entraram entre 2015 e 2017 e permaneceram até o final de cada período. . . . .	56
Tabela 8 – Alíquota de equilíbrio e net atuarial médio mensal dos custeio para os benefícios do plano, segregados por fluxo e estoque de servidores. . . . .	58
Tabela 9 – Net atuarial para a alíquota de equilíbrio considerando fluxo de entrada e estoque RAIS. . . . .	59
Tabela 10 – Parâmetros aproximação de erros por mistura de normais. . . . .	69

Tabela 11 – Tabela com estatísticas descritivas do retorno nominal dos índices setoriais de energia (IEE), consumo (ICON), financeiro (IFN), indústria (INDX) e imobiliário (IMOB) para o histórico diário, simulação padrão e simulação em árvore. . . . .	73
Tabela 12 – Estatística da solução ótima do modelo para os períodos de acumulação e desacumulação de acordo com o perfil de investimento e atuarial.	92
Tabela 13 – Estatística de retorno excesso com relação à meta atuarial da solução ótima do modelo para a janela fora da amostra, janeiro de 2015 a maio de 2017, para os diferentes perfis de investimento e atuarial. . .	94
Tabela 14 – Probabilidade de mortalidade adotada desagregada por sexo. . . . .	109
Tabela 15 – Tábuas de entrada em invalidez desagregada por sexo e método. . . .	111

# LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

**INSS** Instituto Nacional de Seguridade Social

**RGPS** Regime Geral de Previdência Social

**RPPS** Regime Próprio de Previdência Social

**EC** Emenda Constitucional

**RPC** Regime de Previdência Complementar

**EPC** Entidade de Previdência Complementar

**EFPC** Entidade Fechada de Previdência Complementar

**EAPC** Entidade Aberta de Previdência Complementar

**FUNPRESP-Exec** Fundação de Previdência Complementar do Servidor Público Federal do Poder executivo

**CD** Contribuição Definida

**BD** Benefício Definido

**ALM** *Asset Liability Management*

**SV** *Stochastic Volatility*

**FP** Filtro de Partículas

**IPCA** Índice de Preços ao Consumidor Amplo

**IBOVESPA** Índice da Bolsa de Valores de São Paulo

**RAIS** Relação Anual de Informações Sociais

**AEAN** Aporte Extraordinário de Aposentadoria Normal

**AN** Aposentadoria Normal

**BSA** Benefício de Sobrevida do Participante assistido em Aposentadoria Normal

**PMA<sub>t</sub>** Pensão por Morte do Participante Ativo

**PMA<sub>s</sub>** Pensão por Morte do Participante assistido em aposentadoria Normal

**AI** Aposentadoria por Invalidez

**PMA<sub>si</sub>** Pensão por Morte do Participante assistido em aposentadoria por Invalidez

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
1.1	Fundos de Pensão	3
1.2	Estudos em <i>Asset, Liability and Management</i>	8
1.3	Estudos em modelagem do passivo	10
1.4	Objetivos e contribuições da tese	12
<b>2</b>	<b>MODELAGEM DO PASSIVO</b>	<b>14</b>
2.1	O passivo atuarial da EPFC	16
2.2	Decrementos de mortalidade e invalidez	20
2.3	Multidecrementos	25
2.4	Fonte dos dados	26
2.5	Alíquota Justa e de Equilíbrio	31
2.5.1	Aposentadoria normal (AN)	38
2.5.2	Aposentadoria por invalidez (AEAI)	40
2.5.3	Pensão por morte do ativo (AEMAt)	43
2.5.4	Pensão por morte do assistido (AEMAs)	45
2.5.4.1	Assistido em aposentadoria normal (AEMAsm)	45
2.5.4.2	Assistido em invalidez (AEMAsi)	47
2.5.5	Benefício de sobrevivência (BSA)	49
2.5.6	Aporte Extraordinário Aposentadoria Normal (AEAN)	51
2.6	Alíquotas de equilíbrio	54
<b>3</b>	<b>MODELAGEM DO ATIVO</b>	<b>61</b>
3.1	Ativos financeiros	61
3.2	Ativos de renda fixa	63
3.3	Ativos de renda variável	63
3.3.1	Modelos de Espaços de Estados	64
3.3.2	Filtro de Partículas	66

3.3.3	Modelo de Volatilidade Estocástica . . . . .	68
3.3.4	Cenário em árvore . . . . .	71
<b>4</b>	<b>GERENCIAMENTO DE ATIVO E PASSIVO . . . . .</b>	<b>74</b>
<b>4.1</b>	<b>Introdução . . . . .</b>	<b>74</b>
<b>4.2</b>	<b>Programação Dinâmica Estocástica . . . . .</b>	<b>78</b>
<b>4.3</b>	<b><i>Particle Swarm Optimization</i> . . . . .</b>	<b>80</b>
<b>4.4</b>	<b>Modelo ALM proposto . . . . .</b>	<b>82</b>
<b>4.5</b>	<b>Análise dos resultados . . . . .</b>	<b>87</b>
<b>5</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS . . . . .</b>	<b>96</b>
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>99</b>
	<b>APÊNDICE A – PROBABILIDADE DE MORTALIDADE . . . .</b>	<b>108</b>
	<b>APÊNDICE B – PROBABILIDADE ENTRADA EM INVALIDEZ</b>	<b>110</b>

# 1 Introdução

As instituições financeiras alocam seus recursos ou de terceiros com o intuito de obter rendimentos, pelo menos, superiores às suas obrigações. Bancos, Fundos de Investimento, Fundos de Pensão, Cooperativas de crédito e Seguradoras são alguns dos agentes do mercado financeiro que se expõe menos ou mais aos riscos existentes no gerenciamento dos recursos a depender da missão e objetivos de cada entidade e seus investidores. Em qualquer uma dessas instituições, são estabelecidas relações de direito e obrigações específicas, que demandam uma gestão perfilada com a natureza da instituição.

Os fundos de pensão são entidades financeiras que têm como principal objetivo garantir ao investidor/participante uma renda ou pecúlio de caráter previdenciário a ser recebido após o período de atividade laboral ou em caso de perda dessa condição. Para isso, são realizados aportes contínuos, normalmente mensais, que garantem o recebimento futuro, por período determinado ou indeterminado desses benefícios. A legislação vigente no Brasil impõe para esse tipo de instituição a necessidade de modelos de gerenciamento e alocação de recursos, conhecidos pela expressão em inglês *Asset Liability Management* (ALM), de modo a garantir o pagamento futuro de direitos previdenciários.

Distinguindo-se dos trabalhos da literatura, essa tese propõe um modelo detalhado para todas as etapas do gerenciamento de ativos e passivos previdenciários inspirados no regulamento do fundo de pensão dos servidores públicos federais do Poder Executivo que estão sob o Regime de Previdência Complementar (RPC). O ALM da tese propõe um modelo que considera os objetivos de maximizar a rentabilidade durante a fase de contribuição e maximizar a segurança financeira no período de inatividade, determinando a alocação ótima dos recursos ao longo desses períodos. A incerteza do ativo é modelada e discretiza em cenário em árvore e o passivo é modelado com o cálculo das alíquotas justas e de equilíbrio para o custeio dos benefícios previdenciários da modalidade Benefícios Definido.

A figura 1 apresenta um esquema resumo da modularização do ativo, passivo e

gerenciamento de ativo e passivo proposto nessa tese. O módulo do participante (região verde) garante ao participante individualização do perfil de investimento e do perfil atuarial, por meio da combinação do tipo de ocupação, sexo, idade do servidor e aversão a risco. O perfil atuarial do servidor determina, de maneira também individual, a alíquota justa para cada benefício previdenciário, presente no módulo passivo (região vermelha). Por meio de tais alíquotas e tendo em vista o objetivo coletivo de custeio dos benefícios previdenciários são determinadas as alíquotas de equilíbrio de cada benefício. Por fim, a carga geral do custeio previdenciário é determinada pela soma de todas as alíquotas de equilíbrio. O módulo na região azul representa o processo de modelagem das opções de investimento, composta por ativos de renda fixa e renda variável, o que permite a simulação de cenário em árvore. O fluxo atuarial e o cenário em árvore são utilizados como parâmetros de entrada para o modelo ALM proposto (região amarela) que tem estratégia de investimento determinada pelo perfil de investimento do participante, considerando múltiplos objetivos e múltiplos estágios ao longo do processo de acumulação e desacumulação do participante.

Os resultados sugerem que os benefícios de aposentadoria por invalidez e pensão por morte do participante ativo exigem alíquotas de custeio maiores à medida que se aumenta a idade de entrada no serviço público, sugerindo a necessidade de considerar o tempo de contribuição para determinação do benefício. O custeio dos benefícios de pensão do participante assistido e de aporte extraordinário são sensíveis às mudanças nos perfis atuariais. Por outro lado, o aumento da expectativa de vida do participante reduz a alíquota de custeio para a pensão por morte do participante assistido, pensão por morte do participante ativo e benefício de sobrevida.

Tendo em vista as condições econômicas de 2015 e um servidor com entrada no serviço público aos 30 anos de idade, o modelo ALM proposto sugere alocação acima de 90% em ativos de renda fixa para o participante com alta aversão a risco e de 60% em renda fixa para o participante menos avesso. O modelo proposto adota uma estratégia de alocação em múltiplos estágios, que considera a maximização do saldo de conta na data de aposentadoria e minimização de problemas de liquidez para o pagamento de aposentadoria normal até a expectativa de vida do participante, diminuindo a exposição em ativos de renda variável e aumentando a liquidez com alocação em ativos de renda fixa de curto prazo.

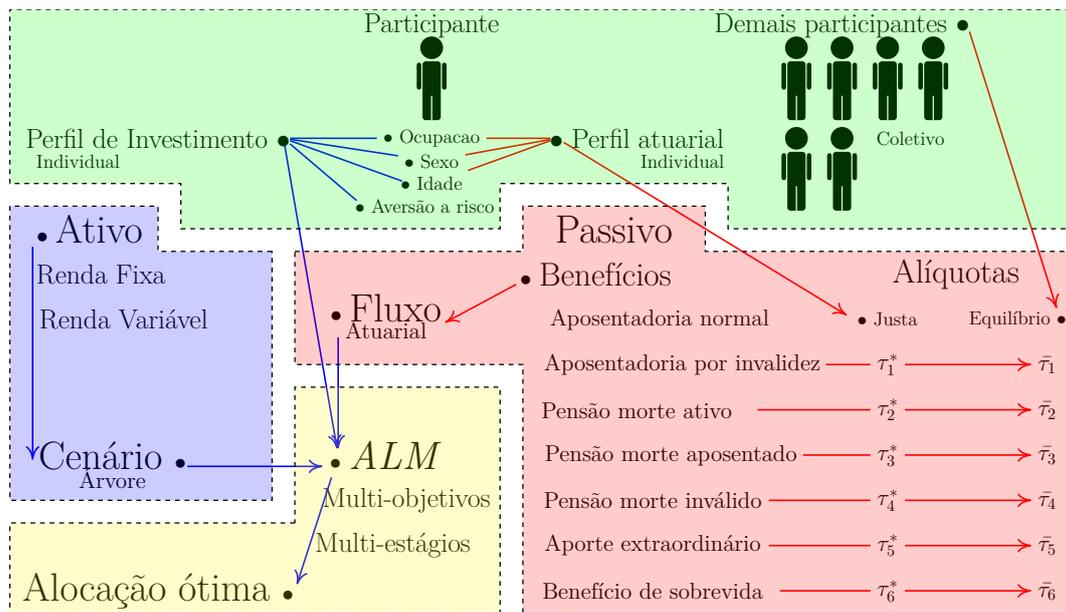


Figura 1: Esquema resumo modularizado do trabalho proposto. O módulo do participante (região verde) individualiza o perfil de investimento e atuarial do participante. O módulo do passivo (região vermelha) utiliza as informações individuais e coletivas dos perfis atuariais para determinar as alíquotas justas e de equilíbrio, além do cálculo do fluxo atuarial. O módulo do ativo (região azul) permite a geração do cenário em árvore das opções de investimento. O módulo em amarelo consolida o fluxo atuarial e cenário para determinar a alocação ótima dos recursos do participante.

**Fonte:** Elaborado pelo autor.

Dessa forma, essa tese discute e sugere a condução de um planejamento previdenciário geral para o Regime de Previdência Complementar dos servidores públicos federais.

## 1.1 Fundos de Pensão

No Brasil, os planos de previdência são mencionados na Constituição Federal (CF) de 1988, estabelecendo no Art. 6º que a previdência social pública é um direito de todos e delegando ao Estado a responsabilidade de gerir os recursos necessários para oferecer à população benefícios previdenciários. Esses direitos garantem o pagamento de benefício para o indivíduo, ou seus dependentes, caso: esteja em idade avançada;

tenha contribuído por tempo suficiente; seja acometido por doenças grave; entre em invalidez; venha a óbito; esteja desempregado; esteja em período de maternidade; cumpra pena no Sistema Penitenciário. Sendo assim, a previdência social, de maneira geral, é responsável por preservar, minimamente, a qualidade de vida aos contribuintes e seus dependentes em situações de vulnerabilidade. Com algumas exceções, esse direito está condicionado ao pagamento de contribuições ao Instituto Nacional de Seguridade Social (INSS), normalmente calculado proporcionalmente ao salário ou remuneração recebida.

As regras previdenciárias que estabelecem os direitos e deveres para os trabalhadores da iniciativa privada são determinadas pelo Regime Geral de Previdência Social (RGPS), já a servidores públicos estão sob regulamento do Regime Próprio de Previdência Social (RPPS), ambos vinculados ao INSS.

Especificamente sobre o RGPS, de acordo com os dados oficiais da previdência de 2018<sup>1</sup>, 97.8% dos benefícios são do tipo previdenciários e, dentre esses, 93.59% são aposentadorias (64.07%) ou pensão por morte (24.52%). Isso evidencia que, além da aposentadoria normal por idade ou tempo de contribuição, a maior parte dos gastos previdenciários do RGPS está associada aos riscos de entrada em invalidez e morte do participante.

Paralelamente ao sistema oficial de previdência do RGPS e do RPPS, existe o Regime de Previdência Complementar (RPC), formado pelas Entidades de Previdência Complementar (EPC), também conhecidos como fundos de pensão, que administram recursos financeiros com objetivo de garantir a proteção financeira nos casos de invalidez, morte ou devido a idade avançada dos participantes (SILVA et al., 2013). As EPCs foram criadas por meio da Lei Nº 6.435 em 15 de julho de 1977, pelo então presidente Ernesto Geisel, permitindo a criação de planos privados de concessão de pecúlios ou de renda, custeadas por meio de contribuições financeiras. Nessa ocasião, foi estabelecida por lei os sinônimos de participantes, associados e segurados para aqueles que contribuem para o plano. Essa Lei, em seu Art. 4º, estabelece que as Entidades Fechadas de Previdência Complementar (EFPC) são fundos de pensão sem fins lucrativos, sendo os participantes os empregados de uma única empresa, chamada de patrocinadora. As EPC abertas (EAPC) são todos os demais fundos de pensão integrados ao órgão normativo dos Seguros Privados, e que podem ou não ter fins lucrativos.

<sup>1</sup> <http://sa.previdencia.gov.br/site/2019/03/berps19.01.pdf>

As mudanças demográficas, percebida pelo envelhecimento da população e aumento da expectativa de vida, são constantemente discutidas pela sociedade brasileira e seus representantes, nos poderes legislativo, judiciário e executivo. Desde a promulgação da CF em 1988, inúmeras alterações foram feitas nas legislações do RPPS e do RGPS com a finalidade de adequá-las às mudanças demográficas e econômicas brasileiras e, assim, garantir o equilíbrio atuarial e o pagamento dos benefícios. Uma das principais alterações na legislação previdenciária brasileira foi proporcionada pela Emenda Constitucional (EC) Nº41 de 2003, que estabelece a necessidade da criação do RPC para os servidores públicos.

Após isso, apenas em 2012, por meio da Lei Nº 12.618, foi instituído o regime de previdência complementar para os servidores públicos federais, sendo autorizado a criação de três EFPC: Fundação de Previdência Complementar do Servidor Público Federal do Poder Executivo (FUNPRESP-Exe), Fundação de Previdência Complementar do Servidor Público Federal do Poder Legislativo (FUNPRESP-Leg) e Fundação de Previdência Complementar do Servidor Público Federal do Poder Judiciário (FUNPRESP-Jud). A lei previu que o funcionário público teria benefício previdenciário obtido pela composição de uma parte compulsória oriundo do RPPS e outra facultativa administrado por sua EFPC (SCHETTINI; PIRES; SANTOS, 2018).

Os aprovados em concurso público após 2013 não mais se aposentariam com benefício igual a média dos salários da ativa, tendo, então, benefícios limitados ao teto do RGPS de R\$ 5.189,82, na época. Os servidores que desejassem benefícios previdenciários superiores ao teto do RGPS poderiam, facultativamente, aderir à EFPC, que no caso do servidor público federal do executivo é a FUNPRESP-Exe. A criação de tais EFPCs reduziu a disparidade entre as regras de aposentadoria da iniciativa privada e pública (FUNPRESP, 2013) e fomentam o crescimento número de planos de previdência complementar para a parcela da sociedade que deseja uma segurança financeira acima do teto do RGPS após o período laborativo.

O último boletim sobre previdência complementar no site da Previdência Social<sup>2</sup> informa que entre 2010 e 2017 a população de participantes desses fundos de previdência aumentou de 11,655,005 para 16,529,279, representando um aumento de 41.8%. Esse número indica um intenso aumento da demanda pela previdência comple-

<sup>2</sup> <http://www.previdencia.gov.br/dados-abertos/dados-abertos-previdencia-complementar>

mentar, pois, nesse mesmo período, o crescimento da população brasileira foi, segundo o IBGE<sup>3</sup>, de 8.8%.

Os fundos de pensão são regulados pelo Conselho Nacional de Previdência Complementar (CNPCC) e fiscalizados pela Superintendência Nacional de Previdência Complementar (PREVIC), sendo ao todo 292 EFPC, em agosto de 2019.

Dentre os principais EFPC, destaca-se o fundo de pensão patrocinado pelo Banco do Brasil, Previdência dos Funcionários do Banco do Brasil (PREVI), que é o maior fundo do país em patrimônio, com mais de R\$ 180 bilhões de reais e mais de 200 mil beneficiários entre ativos e aposentados em dezembro de 2016. A POSTALIS é fundo de pensão dos funcionários dos Correios e possui o maior número de associados, cerca de 160 mil. Apesar disso, possui patrimônio total de cerca de R\$ 10 bilhões. Além desses, merece destaque o fundo de pensão dos funcionários da Caixa Econômica Federal (FUNCEF) e da Petrobras (PETROS) com R\$ 58 e R\$ 72 bilhões, respectivamente. Já na realidade dos servidores públicos federais do executivo, a FUNPRESP-Exe é patrocinada por mais de 200 órgãos federais e possui patrimônio de R\$ 628 milhões, além de contar com mais 48 mil participantes. Apesar de ainda pequeno, a expectativa é em poucos anos a FUNPRESP-Exe seja o maior EFPC no Brasil.

Ao todo, as EFPC têm patrimônio que representava 13.62% do valor PIB (Produto Interno Bruto) do país em agosto de 2019<sup>4</sup>. Isso faz com que esses fundos de pensão desempenhem, além das obrigações previdenciárias com os participantes, um importante papel para o investimento e desenvolvimento do país.

Semelhante à previdência oficial obrigatória, nos planos de previdência complementar o investidor/participante realiza aportes, normalmente mensais, para a instituição financeira responsável pela administração do fundo, que tem obrigação do pagamento futuro, normalmente mensal, do benefício de aposentadoria. A EFPC, então, realiza a alocação do recurso investido com o objetivo de obter rentabilidade suficiente para honrar o compromisso dos benefícios. Dessa forma, essas instituições devem gerenciar os ativos, obtidos por meio das contribuições, de modo a garantir a cobertura dos passivos, benefícios previdenciários, normalmente por meio de modelos ALM.

<sup>3</sup> <https://www.ibge.gov.br/estatisticas/sociais/populacao/>

<sup>4</sup> Fontes: PREVIC/SUSEP Elaboração: COINF/CGEAC/SURPC (extração: 27/11/2019)

A resolução CGPC N° 12 de 1° de outubro de 2003 estabelece princípios e regras de controle interno para garantir a liquidez, solvência e equilíbrios dos planos de previdência das EFPC. Em seu Art. 12° estabelece que todo e qualquer risco deve ser identificado, avaliado, controlado e monitorado, exigindo, assim, o estudo sobre a incerteza. Mais adiante, a resolução CGPC N° 16 de 22 de novembro de 2005 estabelece os tipos de benefícios que podem ser oferecidos pelas EPC, a saber: Benefício Definido (BD), Contribuição Definida (CD) e Contribuição Variável (CV). A modalidade de BD oferece ao participante um valor do benefício estabelecido previamente, sendo um valor fixado ou um percentual do salário, e, para que esse benefício seja pago, não há garantias das contribuições necessárias para tal custeio (BHERING, 2005). Na modalidade CD o valor a ser pago para o contribuinte depende do saldo de conta acumulado individualmente, formado pelas contribuições pré-definidas para esse fim. Já a modalidade de contribuição variável possui características mistas de BD e CD. Em setembro de 2019, o patrimônio total das EFPC no Brasil era de cerca de R\$ 941 bilhões, sendo 62.1% de planos BD, 12.6% CD e 25.3% CV.

Outra importante distinção entre os tipos de planos de previdência diz respeito ao tipo de regime de investimento. O regime de repartição simples se dá quando os contribuintes ativos são responsáveis financeiramente pelo pagamento do benefício no período corrente, não sendo formado reservas. Já o regime de repartição de Capitais de Cobertura as contribuições devem ser suficientes para constituir as provisões matemáticas de benefícios concedidos. De maneira geral, os regimes de repartição são adotados pela previdência oficial no Brasil, RGPS e RPPS. Nesse tipo de regime as variações na estrutura da força de trabalho e na estrutura da pirâmide etária podem provocar descasamento dos fluxos de contribuição e pagamento de benefício, ocasionando os déficits, como na atual situação previdenciária brasileira.

Já no regime de capitalização são criadas contas individuais para os contribuintes e o benefício depende do valor acumulado no saldo de conta exclusivo do participante, isto é, cada contribuinte é responsável pelo financiamento de sua previdência. Tal regime pode ser considerado, então, um tipo de investimento, em que o capital investido pelo participante é rentabilizado a fim de garantir os benefícios previdenciários futuros. A forma como as entidades podem rentabilizar o fluxo de contribuição recebida é determinado por um conjunto de regras estabelecido no RPC.

A resolução CMN N° 4.661 de 25 de maio de 2018, estabelece as diretrizes de aplicação de recursos, controles internos, avaliação e monitoramento de risco das EFPC. No Art. 5º, a resolução explicita a necessidade da gestão e compatibilidade dos fluxos dos ativos e as obrigações atuariais, garantindo o equilíbrio econômico-financeiro do plano. Essa é a resolução vigente, até o presente momento, e classifica os tipos de investimento como ativos de renda fixa (RF), composto principalmente por títulos de dívida mobiliária, e de renda variável (RV), formado principalmente pelo mercado de ações de companhias abertas e fundos de índice de ações. As demais classes são investimentos estruturados, imóveis, operações com participantes e investimento no exterior. Além disso, a resolução estabelece limites de alocação de cada classe, determinando que a EFPC pode estar comprometida em até 100% na classe de renda fixa, no máximo 70% em renda variável, 20% estruturado, 20% imobiliário, 15% operações com participantes e 10% investimentos no exterior.

Dessa forma, espera-se que pessoas físicas ou jurídicas, de interesse público ou privado, estejam interessadas no aprimoramento e desenvolvimento de estudos relacionados à alocação e gerenciamento de recursos e passivos. Novas metodologias de ALM advindas de pesquisas no âmbito acadêmico podem promover a disseminação do conhecimento científico na área, atendendo aos interesses da sociedade e dos agentes financeiros.

Diante da importância econômica e social dos EFPC, que tem regulação que exige o desenvolvimento contínuo de metodologia para garantir o equilíbrio atuarial e financeiro, essa tese propõe um modelo de ALM individual para o servidor público federal do poder executivo que estão sob o RPC inspirado no regulamento da FUNPRESP-Exe.

## 1.2 Estudos em *Asset, Liability and Management*

Os fundos de pensão são importantes usuários dos modelos ALM (CHONG, 2007; KLEIN; STREUTKER; VLERK, 2006). O trabalho de Marçal (2011) compara a implementação de um modelo ALM para a FUNCEF baseado em programação estocástica e via Algoritmo Genético, percebendo melhor tempo de processamento e solução

ótima com melhor relação risco/retorno na segunda abordagem. Ainda no estudo ALM para FUNCEF, o trabalho de [Marques \(2011\)](#) utiliza o modelo estocástico considerando um único estágio e com simulação Monte Carlo para o fluxo de passivo e ativo. Tais trabalhos indicam a importância do desenvolvimento de modelos ALM de propriedade das EFPC e deixam em aberto o desenvolvimento de modelos ALM em múltiplos estágios e com detalhamento da modelagem do passivo dos benefícios previdenciários, como proposto nessa tese.

Em uma perspectiva específica, outros trabalhos em ALM são direcionados para perfis individuais de investidores como no trabalho de [Consigli et al. \(2012\)](#), permitindo o direcionamento para educação, controle e planejamento de finanças familiares ([DEMPSTER; MEDOVA, 2011](#)). Apesar da natureza coletiva das EFPC, percebe-se a necessidade de modelos ALM individuais capazes de considerar objetivos financeiros específicos dos participantes. Nesse sentido, essa tese propõe um modelo ALM para uma EFPC que permite incorporar os objetivos financeiros individuais dos participantes.

Para as EAPC, os trabalhos de [Bhering \(2005\)](#) e [Ribeiro \(2015\)](#) propõem modelo ALM com decisão em múltiplos estágios, o primeiro para 2 ativos (com e sem risco) e o segundo apenas para ativos de renda fixa. No entanto, nos dois trabalhos são utilizadas tábuas de mortalidade genéricas, AT-83 e BR-EMS, respectivamente. Utilizando a tábua AT-2000, [Dias \(2006\)](#) simula o processo de acumulação de contribuição previdenciária, porém a estratégia de investimento é fixa. Nesse sentido, percebe-se que os estudos em ALM com um maior detalhamento do processo de otimização utilizam tábuas biométricas genéricas, além de não quantificar o custo dos benefícios previdenciários em um fundo de pensão. Nesse sentido, essa tese adota tábuas biométricas específicas para os servidores federais e detalha o nível do comprometimento coletivo necessário para o custeio de benefícios previdenciários.

Os modelos de ALM encontrados na literatura são modularizados em cenário econômico/financeiro e estratégia de investimento, avaliando alocações estáticas em diferentes cenários, analisando a incerteza sistêmica e validando estratégias de investimento ([SILVA et al., 2013](#)). Nesse sentido, o trabalho de [Leão, Martins e Locatelli \(2012\)](#) analisa os riscos em diferentes cenários macroeconômicos para um banco de fomento do estado de Minas Gerais. Na literatura internacional, o modelo decisório

de [Consigli e Dempster \(1998\)](#) e [Kouwenberg e Zenios \(2008\)](#) são semelhantes e estão sujeitos a incertezas, discretizadas por meio da geração de cenário para os ativos e passivos. Há, então, a indicação de que a modularização em cenários é a chave do sucesso para o modelo ALM ([KOUWENBERG; ZENIOS, 2008](#)). Como apresentado anteriormente, o modelo proposto nessa tese está modularizado, permitindo incorporar a precificação de ativos por meio de cenários em árvore e avaliar variações nas tábuas de mortalidade dos participantes.

Outro desafios em ALM são investigados por [Ferstl e Weissensteiner \(2011\)](#) e [Gulpinar e Pachamanova \(2013\)](#), que concentram esforços para lidar com a complexidade em modelos ALM resultante do aumento do número dos cenários e dos períodos decisórios. Nesse sentido, o modelo proposto nessa tese utiliza o método heurístico para contornar o problema de complexidade e permitir múltiplos períodos decisórios.

É importante destacar que os trabalhos citados acima estão direcionados para modelagem do ativo e alocação de recursos, utilizando hipóteses genéricas ou fluxos de terceiros para a modelagem do passivo. No entanto, o termo ALM supõe que o ativo e o passivo são estudados para que possa ser determinado a alocação ótima dos recursos.

Nesse sentido, na ausência de trabalhos que lidam com os dois problemas simultaneamente, a revisão da literatura foi direcionada para referências exclusivas à estimação de tábuas de atuariais específicas e cálculo de alíquotas previdenciárias, atendendo às necessidades de modelagem de passivos em ALM.

### 1.3 Estudos em modelagem do passivo

O estudo de obrigações atuariais em regimes de previdência está direcionado para cálculo de tábuas biométricas específicas e cálculo de alíquotas de contribuição. Além disso, a determinação do fluxo de arrecadação de contribuições depende da taxa de crescimento salarial.

O trabalho de [Ribeiro \(2006\)](#) apresentou um estudo completo sobre mortalidade de inválidos no RGPS, sendo utilizado como premissa atuarial da FUNPRESP-Exe ([FUNPRESP, 2015](#)). Em trabalho similar, [Gomes, Fígoli e Ribeiro \(2010\)](#) apresenta a

probabilidade de entrada em invalidez para o RGPS. O trabalho de [Beltrão e Sugahara \(2015\)](#) propõe uma metodologia para cálculos de tábuas atuariais para morte dos funcionários federais utilizando os registros administrativos do Sistema Integrado de Administração de Pessoal (SIAPE). No contexto do mercado, a PREVI realizou, recentemente, a atualização da tábua de mortalidade dos associados<sup>5</sup>.

O trabalho de [Rangel e Saboia \(2013\)](#) faz simulações para determinar as alíquotas de contribuição necessárias para a manutenção de poder de compra dos funcionários federais, ambos direcionados para o RPPS. Para a iniciativa privada, o trabalho de [\(FREIRE; AFONSO, 2015\)](#) verifica a alíquota de contribuição de equilíbrio atuarial do RGPS para alguns perfis de gênero e idade em diferentes arranjos familiares.

Em outra perspectiva no estudo de passivos, as alíquotas de contribuição necessárias para o custeio das obrigações previdenciárias são determinadas considerando crescimento salarial fixo ([RANGEL; SABOIA, 2013](#)), em cenários ([GOUVEIA, 2017](#)) ou estimadas por meio de dados do IBGE ([GIAMBIAGI; AFONSO, 2009](#)).

De maneira geral, nas produções acadêmicas ou devido o interesse do mercado, as tábuas biométricas são utilizadas para a determinação de alíquotas justas (perspectiva individual) ou de equilíbrio atuarial (perspectiva coletiva). Nesse sentido, o trabalho proposto por [Gouveia \(2017\)](#) determina as alíquotas de equilíbrio para a aposentadoria programada, pensão de aposentadoria programa, aposentadoria por invalidez, pensão para aposentadoria e invalidez e as pensões por morte para o RGPS.

Nessa tese, custeios associados aos benefícios previdenciários do tipo BD e o fluxo de contribuições e expectativa de benefício do tipo CD, inspiradas no regulamento da FUNPRESP-Exe, são modeladas utilizando tábuas de mortalidade específicas para os servidores públicos federais. A metodologia proposta permite calcular as alíquotas atuarialmente justas e de equilíbrio para benefícios considerando diferentes perfis atuariais de servidores, com diferentes taxas de crescimento salarial e analisando o impacto de mudanças nas tábuas biométricas.

Tal modelagem do passivo permite a construção de um modelo ALM que otimiza a alocação de recursos tendo em vista as especificidades das obrigações atuariais associadas ao regime de previdência complementar dos servidores públicos federais.

---

<sup>5</sup> [www.previ.com.br](http://www.previ.com.br)

## 1.4 Objetivos e contribuições da tese

Diante da breve introdução e revisão realizada, o objetivo geral da tese é elaborar um modelo ALM individual para o servidor público federal do executivo elegível ao RPC, baseado no regulamento da FUNPRESP-Exe, considerando as particularidades do ativo e passivo dessa população.

Os objetivos específicos são:

1. modelar ativos que fazem parte do portfólio da EFPC;
2. calcular alíquotas atuarialmente justas para diferentes perfis atuariais para benefícios do tipo benefício definido inspirados no regulamento da FUNPRESP-Exe.
3. propor alíquotas de equilíbrio para cada um dos benefícios do tipo benefício definido.
4. analisar a sensibilidade das alíquotas de equilíbrio às mudanças da probabilidade de morte e da distribuição demográfica dos perfis atuariais dos servidores federais elegíveis à FUNPRESP-Exe;
5. propor um modelo de ALM individual para a aposentadoria normal que considere diferentes perfis atuariais e de investimento;

O método proposto vai além dos trabalhos encontrados na literatura pela modelagem detalhada do passivo, ativo e o gerenciamento ótimo individual de cada perfil de participante. Do ponto de vista do ativo, a tese propõe uma técnica de atualização *on-line* da precificação e construção de cenário dos ativos arriscados. No passivo, são calculadas as alíquotas de contribuição atuarialmente justas e de equilíbrio de cada benefício e em todos os perfis atuariais, permitindo uma gestão adequada das obrigações atuariais. A sensibilidade dessas alíquotas é avaliada por meio de mudanças nas tábuas biométricas e na composição dos perfis de servidores. Por fim, o modelo ALM é individual, o que permite a configuração de um parâmetro de aversão a risco, além de incorporar restrições específicas do RPC do servidor público federal do executivo, sendo proposto uma otimização da alocação de recursos financeiros com o intuito de garantir a rentabilidade e o pagamento futuro do fluxo de obrigações previdenciárias.

Utilizando diferentes ativos em múltiplas classes de investimento, são incorporadas: restrições realísticas, múltiplas funções objetivo (período ativo e inativo), decisões em múltiplos estágios e incerteza, ajustada por meio de cenário em árvore.

Diante da inexistência de trabalhos que lidem com ativo, passivo e otimização simultaneamente, como sugere os modelos ALM para fundos de pensão, e com o intuito de facilitar a apresentação do modelo proposto, o referencial teórico foi modularizado de acordo com o conteúdo de cada capítulo, como está descrito a seguir.

No capítulo 2 é apresentado a modelagem do passivo atuarial, com o cálculo das alíquotas justas e de equilíbrio, além de avaliar a sensibilidade das alíquotas às mudanças biométricas e demográficas. O capítulo 3 apresenta os modelos de predição e estimação dos ativos financeiros arriscados e faz simulações de cenários em árvore para serem utilizadas pelo modelo ALM proposto, que é apresentado no capítulo 4. O capítulo 5 apresenta as considerações finais, limitações e propostas de pesquisas futuras sobre o tema.

## 2 Modelagem do passivo

O estudo sobre previdência é uma demanda da sociedade brasileira e de seus representantes, pois a expectativa de vida do brasileiro, o tempo e a alíquota de contribuição previdenciária fazem parte da realidade da população de maneira geral.

Nesse sentido, a investigação de mortalidade e invalidez em subgrupos população são alvo de estudo para responder de maneira mais precisa à dinâmica demográfica, reduzindo possíveis riscos atuariais nas entidades de previdência. O trabalho de [Lego, Turra e Cesar \(2017\)](#) investiga a mortalidade em militares das forças armadas brasileiros e encontram indícios de maior longevidade desse grupo comparada com o restante da população, sendo padrão semelhante ao encontrado em países de baixa mortalidade. Utilizando dados do RGPS de 1999 a 2002, [Gomes, Fígoli e Ribeiro \(2010\)](#) estima as probabilidades de entrada em invalidez para os participantes do RGPS. Os registros do RGPS também são utilizados nos trabalhos de [Ribeiro \(2006\)](#) para o cálculo das taxas de mortalidade específicas entre inválidos e a mortalidade em aposentados em [Souza \(2009\)](#).

Os trabalhos de [Beltrão e Sugahara \(2002\)](#), [Beltrão e Sugahara \(2015\)](#) estimam a probabilidade de mortalidade entre servidores públicos federais utilizando o SIAPE e comparam com estimativas do mercado. Os autores estimam as probabilidades de mortalidade desagregadas por sexo e nível de escolaridade, encontrando probabilidade maior para os servidores homens em ambos níveis de formação. O trabalho de [Gosmann e Avozani \(2014\)](#) apresenta uma revisão da teoria sobre os modelos de evolução da mortalidade em populações e alertam para os riscos do aumento da longevidade dos participantes para o equilíbrio da FUNPRESP-Exe. Além disso, estudo sobre o fluxo de entrada e saída dos servidores é feito por [Schettini, Pires e Santos \(2018\)](#), determinando a taxa de reposição de servidores utilizando dados da RAIS.

A própria FUNPRESP-Exe utiliza resultados específicos para a probabilidade de entrada em invalidez. Apesar dos detalhes do estimativas serem desconhecidas pelo autor desse trabalho, os valores podem ser encontrados nas publicações [Cardoso \(2013\)](#) da FUNPRESP-Leg.

Tendo em vista o direcionamento dos trabalhos da literatura para o estudo de tábuas biométricas, nessa tese são avaliados dois cenários para as probabilidades de mortalidade dos servidores públicos sob o RPC com o intuito de analisar o impacto no equilíbrio atuarial previdenciário. Nesse sentido, os resultados encontrados estão em linha com [Gosmann e Avozani \(2014\)](#), que indicam a necessidade de busca por soluções que permitam o planejamento do custeio dos benefícios previdenciários em situações de mudanças demográficas para o fundo de pensão FUNPRESP.

Além do estudo de tábuas biométricas, outros trabalhos, como o de [Rangel e Saboia \(2013\)](#), simulam o percentual de contribuição para conservação do poder de compra dos funcionários federais vinculados à nova previdência do RPC, indicando que a minimização da ruptura do padrão de vida está condicionado ao aumento do percentual de contribuição, esforço de poupar e a boa gestão dos funcionários da FUNPRESP. O último tópico é muito importante, sobretudo com os constantes casos de corrupção envolvendo os fundos de pensão no Brasil. No entanto, o principal objetivo no estudo de alíquotas de contribuição é garantir o pagamento de obrigações atuariais e, assim, obter o equilíbrio das instituições previdenciária.

Nesse sentido, o trabalho de [Giambiagi e Afonso \(2009\)](#) calcula a alíquota atuarialmente justa equalizando o valor presente das contribuições (VPC) e o valor presente dos benefícios (VPB) para o RGPS baseado no crescimento salarial desagregado por variáveis socioeconômicas, como nível de escolaridade, raça e tipo de ocupação utilizando a PNAD. No entanto, desconsideram as probabilidades de mortalidade e entrada em invalidez. Mais recentemente, [Gouveia \(2017\)](#) determina as alíquotas de contribuição para aposentadoria normal, pensão de aposentadoria normal, aposentadoria por invalidez e pensão para aposentadoria em invalidez para o RGPS. Os autores distinguem justiça e equilíbrio atuarial, tendo primeiro uma perspectiva individual e o segundo coletivo.

Nesse sentido, para alguns participantes é possível que a alíquota atuarialmente justa seja inferior à alíquota de equilíbrio, enquanto para outros a alíquota justa é superior. Diferenças entre o individual e o coletivo em fundos de pensão são investigados por [Donnelly \(2015\)](#). Nessa tese, os participantes são divididos em perfis atuariais para que se possa compreender os custos previdenciários. No entanto, a diferença entre essas alíquotas é inevitável em sistema previdenciários com natureza coletiva de custeio, e não faz parte dos objetivos dessa pesquisa.

Essa tese vai além dos trabalhos encontrados na literatura ao calcular as alíquotas de equilíbrio para os perfis atuariais inspirados no regulamento da FUNPRESP-Exe, que, para o autor, exige a segregação segundo sexo, ocupação e idade. Além disso, são feitas análises de sensibilidade dessas alíquotas em situações de mudanças do perfil demográfico dos servidores elegíveis ao RPC. A data de referência utilizada para a análise dos resultados é janeiro de 2015 e coincide com período de início de atividades do fundo. Além disso, a modelagem é feita considerando o intervalo anual entre os instantes de análise.

Esse trabalho, assim como apontado por [Gosmann e Avozani \(2014\)](#), propõe soluções para o planejamento e o gerenciamento das obrigações atuariais inspiradas no regulamento da FUNPRESP-Exe. Na seção a seguir são apresentadas as obrigações previdenciárias consideradas por essa tese, sendo detalhada as características, bem como a legislação vigente.

## 2.1 O passivo atuarial da EPFC

O principal benefício de responsabilidade da EPFC, é o pagamento da Aposentadoria Normal (AN), ocasião em que o participante tem direito ao recebimento de uma renda mensal pelo período correspondente a tempo de sobrevivência na data da aposentadoria. Tem direito a requisitar a AN o participante que atende aos critérios de aposentadoria do RPPS, que exige uma idade mínima e um determinado tempo de contribuição. Dessa forma, para o benefício de AN, as alterações nesses parâmetros previdenciários no RPPS também afetam a aposentadoria complementar do servidor. Por se tratar de um benefício CD o equilíbrio atuarial não é afetado por mudanças de distribuição demográficas da força de trabalho, pois o valor do benefício é calculado em função do saldo de conta acumulado e da expectativa de vida do participante.

O segundo benefício considerado nessa tese é o de Aporte Extraordinário de Aposentadoria Normal (AEAN) que tem características exclusivas para o RPC, não havendo relativo no RPPS. O AEAN aumenta, para algumas carreiras de servidores, na data do cálculo do valor da aposentadoria, o valor do saldo de conta individual de maneira inversamente proporcional ao tempo de contribuição necessário para a aposen-

tadoria. Isto é, o AEAN foi estabelecido para compensar os participantes que possuem menor período para a acumulação de recursos. De maneira geral, o tempo de contribuição necessário para aposentadoria é determinado pela combinação do tipo de ocupação e o gênero do participante, e proporciona aos professores do ensino básico e às servidoras mulheres um aumento do benefício de aposentadoria. Esse é o principal motivo para essa tese propor a criação dos perfis atuariais baseado na ocupação (ensino básico ou não) e sexo.

Além da AN, existem outras situações, assim como no RPPS, em que o servidor está segurado pela entidade de previdência complementar. Caso o servidor já esteja recebendo a AN e venha a falecer antes da expectativa de vida, os dependentes terão direito a uma pensão por morte do participante assistido em aposentadoria normal (PMAs) por um período fixo, determinado pela expectativa de vida caso o participante não tivesse falecido e pelo valor do benefício recebido na data da morte.

Caso o servidor venha a óbito antes do direito a AN, os dependentes têm direito ao recebimento da pensão por morte do participante ativo (PMA<sub>t</sub>), por um período pré determinado pela expectativa de vida caso o participante não tivesse falecido. Por outro lado, como veremos em capítulos seguintes, esse benefício é determinado em função do valor pago pelo RPPS.

Além da morte, o servidor também está exposto ao risco da invalidez. Para esse propósito, caso o servidor se torne inválido durante o período contributivo, ele terá direito ao recebimento da aposentadoria por invalidez (AI), também por um período estabelecido no momento do início do benefício. Assim como o PMA<sub>t</sub>, o AI também depende dos critérios e do valor recebido pelo RPPS, estando, então, sujeito às alterações de outra legislação.

Também está previsto para os dependentes do servidor que recebe o benefício de AI, o direito a uma pensão por morte do participante assistido em invalidez (PMA<sub>si</sub>) por um período fixo, determinado pela expectativa de vida caso o assistido não tivesse falecido e o valor do benefício recebido na data da morte.

Além desses, o Benefício de Sobrevida do Assistido (BSA) no regulamento da EFPC garante a todos os benefícios mencionados o pagamento vitalício de um percentual do benefício recebido caso a idade do servidor ultrapasse o período previsto. Nessa

tese, o BSA foi estudado apenas para a aposentadoria normal. Isso foi necessário para simplificar a modelagem do passivo e evitar suposições sobre a composição familiar do participante para o cálculo das pensões. Essa simplificação abre espaço para a continuidade do assunto a ser estudado em trabalhos futuros. Dessa forma, o BSA é o Benefício de Sobrevida do Participante Assistido em aposentadoria normal.

Para que todos esses benefícios possam ser horados pela entidade, está vinculada a cada um deles uma alíquota específica, que é paga por todos os contribuintes do plano durante a fase de acumulação. Essas alíquotas formam um fundo comum de recursos e é o que caracteriza tais benefícios como benefício definido com regime de repartição de capitais de cobertura. Esses benefícios são custeados, inicialmente, pelo montante acumulado na reserva do participante e, caso não seja suficiente, custeado pelo fundo comum. Dessa forma, esses benefícios estão sujeitos a déficit em situações de desequilíbrio atuarial, mudanças da legislação do RPPS ou alíquota insuficiente para custeio.

Conforme exposto acima, apesar dos benefícios AN, PMA<sub>t</sub> e AI serem de responsabilidade da EFPC, eles dependem de parâmetros estabelecidos pelo RPPS. Nesse sentido, embora não seja considerado por esse trabalho, a EC N° 103 de 2019, por exemplo, altera a idade de aposentadoria, cálculo do benefício de invalidez e de pensão por morte do participante ativo.

O quadro 1 resume as alterações da legislação para regras dos benefícios do RPPS, por meio de Emendas Constitucionais (EC), que afetam o RPC. As análises são feitas apenas para PMA<sub>t</sub> e AI, em razão do valor desses benefícios no RPC dependerem, diretamente, do valor recebido pelo servidor no RPPS.

Diante das alterações das regras de previdência dos servidores públicos, é possível dividi-los em 4 gerações de aposentados. A primeira geração é composta pelos servidores que tinha os requisitos necessários para a aposentadoria antes da EC N° 41, em dezembro de 2003, mesmo que ainda não tivesse solicitado. Classifica-se na segunda geração, o servidor que entrou antes dessa data, mas não atingiu os requisitos. Para as duas primeiras gerações, a aposentadoria é integral e paritária.

A terceira geração são os servidores que entraram após a EC N° 41 e têm a aposentadoria determinada pela média das remunerações. A quarta e última geração

Ano	Marco	Principais alterações	Idade mínima	Invalidez	Morte ativo
1998	EC Nº 20	Idades mínimas de 48 anos para mulheres e 53 para homens.	48 anos mulheres e 53 anos homens.		
2003	EC Nº 41	Prevê a criação do regime de previdência complementar, limitando o RPPS para o teto do RGPS. Média das remunerações.	60 mulher e 65 homem	80% das maiores contribuições	100% do teto + 70% do excedente.
2012	EC Nº 70			Último salário limitado ao teto do RGPS.	Último salário limitado ao teto do RGPS.
2012	Lei Nº 12.618	Institui o regime de previdência complementar para os servidores públicos federais titulares de cargo efetivo.			
2012	Decreto Nº 7.808	Cria a Fundação de Previdência Complementar do Servidor Público Federal do Poder Executivo (FUNPRESP-Exe)			
2015	EC Nº 88	Compulsória de 70 para 75 anos.			
2019	EC Nº 103		62 anos para mulheres e 65 anos para homens	Fator gerador em trabalho 100% ou 60% + 2% a cada ano acima de 20 anos de contribuição.	Fator gerador em trabalho 100% ou 60% + 2% a cada ano acima de 20 anos de contribuição.

Tabela 1: Resumo com descrição das principais mudanças na legislação para a aposentadoria por invalidez e pensão por morte do participante ativo no RPPS.

**Fonte:** Elaborado pelo autor.

de aposentadoria para os servidores são aqueles que ingressaram após a vigência da Lei Nº 12.618, que criou a Previdência Complementar dos Servidores Públicos. Como veremos em sessões futuras, as análises dessa tese estão restritas para a terceira e a quarta gerações, isto é, os servidores que ingressaram após 2003.

Essa tese utiliza os parâmetros previdenciários do RPPS definidos antes da EC Nº 103, publicada em Diário Oficial da União, em 13 de novembro de 2019. Dessa forma os critérios de idade para AN são de 65 anos para homem, 60 anos para mulher e 5 anos a menos para cada gênero caso o servidor seja professor do ensino básico. As demais condições de elegibilidade: tempo de contribuição de 35 e 30 anos de contribuição para homens e mulheres, respectivamente, e 10 anos de serviço são considerados, conservadoramente, atendidas na data em que é atingido a idade de aposentadoria. A exigência de 5 anos no cargo é respeitada, e, dessa forma, são considerados aptos à aposentadoria apenas aqueles que entram pelo menos 5 anos antes da idade de referência. Para a PMA<sub>t</sub> e o AI, o benefício é determinado pelo último salário em atividade, limitado pelo teto do RGPS. Além disso, supõe-se que o servidor solicita a aposentadoria quando atinge a idade de aposentadoria.

## 2.2 Decrementos de mortalidade e invalidez

Os “estados” do servidor público no plano de previdência estão representados pela figura 2 e as transições entre dois “estados” estão diretamente ligados aos benefícios apresentados na seção 2.1, isto é, para cada ligação entre estados há um benefício da EFPC associado.

A compreensão dos possíveis estados para o participante tem início com o estado de “Entrada”, que caracteriza o participante que está apto para o ingresso no serviço público. Como veremos em seções futuras, esse estado é modelado de forma determinística, por meio do fluxo médio de ingressantes no serviço público.

Após ter entrado no sistema apresentado acima, o participante se torna “Ativo”, indicando a fase acumulativa do plano. O regulamento do plano prevê que o período de acumulação é finalizado, sem intercorrência, quando o participante se torna aposentado, isto é, quando atinge a idade de referência para seu perfil. Dessa forma, a aposentadoria normal é obtida deterministicamente e é representada pela condição de “Inativo”, indicando o início do período de desacumulação, quando o participante passa a receber a aposentadoria.

A representação de recorrência para o estado de “Ativo” indica a sobrevivência

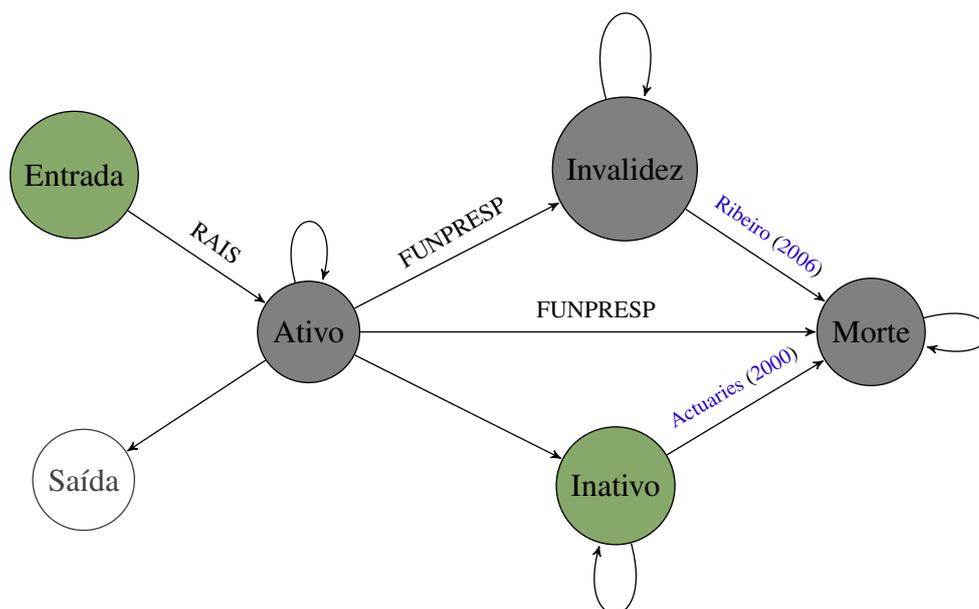


Figura 2: Representação esquemática das transições entre os estados possíveis do participante e as premissas atuariais/biométricas do plano de previdência. O esquema permite compreender os benefícios previdenciários existentes, bem como a natureza multidecremental do plano. Estados em cinza são tratados probabilisticamente, verdes deterministicamente e transparente não modelado.

**Fonte:** Elaborado pelo autor.

do servidor ativo aos estados de “Saída”, “Invalidez” e “Morte”. Nessas situações é necessário adotar um modelo multidecremental, detalhado em seções futuras.

O primeiro estado é o de “Saída”, que indica a situação em que o participante deixa de ter o vínculo com a órgão público e com a FUNPRESP-Exe. Nesses casos, o regulamento prevê que o participante pode se tornar um autopatrocinado, optar pela portabilidade ou sacar o saldo de conta e, apesar do impacto na liquidez, essa situação de saída não será considerada nesse trabalho. No entanto, é importante que esse estado seja considerado em trabalhos futuros. O impacto dessa hipótese simplificadora é, por um lado atenuado, pois os benefícios do tipo BD são superavitários, e por outro lado são agravados, pois a redução do número de servidores homem, por exemplo, aumenta, relativamente, o percentual dos demais perfis, o que exige maior esforço coletivo para

cobertura dos benefícios previdenciários, como veremos a seguir em seções futuras.

Outra situação possível é quando o participante não sobrevive à invalidez durante o período de contribuição. Nessa situação, modelado probabilisticamente, o participante recebe da previdência complementar um benefício de aposentadoria por invalidez, que está condicionado à sobrevivência do participante inválido ao estado de morte, que também é modelado probabilisticamente por [Ribeiro \(2006\)](#). Nessa situação ainda mais crítica, invalidez seguida de morte, a aposentadoria por invalidez é transformada em pensão por morte de participante assistido em invalidez, e é paga para os dependentes até a expectativa de vida caso não tivesse morrido. Por outro lado, a permanência na condição de assistido em invalidez é representada pela seta de recorrência.

De maneira análoga, tanto em situação de “Ativo” quanto em “Inativo”, o participante está sujeito ao decréscimo, modelado probabilisticamente, de morte. Para o primeiro caso, o benefício seria a pensão por morte de participante ativo e para o segundo a pensão por morte do participante assistido em aposentadoria normal. Como pode ser percebida, após entrar no estado de morte o participante não pode migrar para nenhum outro estado.

Para o decréscimo de mortalidade, a FUNPRESP-Exe utiliza a tábua de vida RP-2000, com aplicação da redução AA que corrige a evolução temporal na probabilidade de morte ([FUNPRESP, 2015](#)). A metodologia, bem como os dados de correção temporal, podem ser encontrados em [Actuaries \(2000\)](#).

Serão comparadas duas tábuas de mortalidade, a primeira na data de 2015 (RP2000), data de referência das análises, e a segunda 20 anos depois (RP2000+20), isto é, com projeção de probabilidades de mortalidade na data de 2035. As duas tábuas serão utilizadas para avaliar a sensibilidade de mudanças nas probabilidades de mortalidade para o cálculo das alíquotas de equilíbrio.

A tabela 2 indica que a diferença em 20 anos na redução da mortalidade provoca um ganho de sobrevivência em todos os perfis atuariais no ano de 2015. Para os homens o aumento é de 1.61 ano, na idade de 60 anos, para os profissionais da educação básica e 1.46 ano, na idade de 65 anos, para os demais servidores. No caso das mulheres, o aumento é de 0.95 ano, na idade de 55 anos, para as servidoras da educação básica e 0.92 ano, na idade de 60 anos, para as demais funcionárias públicas.

Sexo	Homem		Mulher	
	RP2000+20	RP2000	RP2000+20	RP2000
Ocupação				
Educação Básica	24.66	23.05	30.59	29.64
Demais	20.25	18.79	26.00	25.08

Tabela 2: Aumento do tempo de sobrevivência, em 2015, utilizando a tábua RP2000 com redução de mortalidade de 20 anos avaliado na idade de 65 anos para homens não professores e 60 anos para mulheres não professoras. Para os servidores da área de educação básica as idades de referência são 60 anos para homens 55 para mulheres.

**Fonte:** Elaborado pelo autor.

A figura 3 apresenta a comparação das estimativas do modelo para as probabilidades de morte, com os valores apresentados em tabela 14 no apêndice.

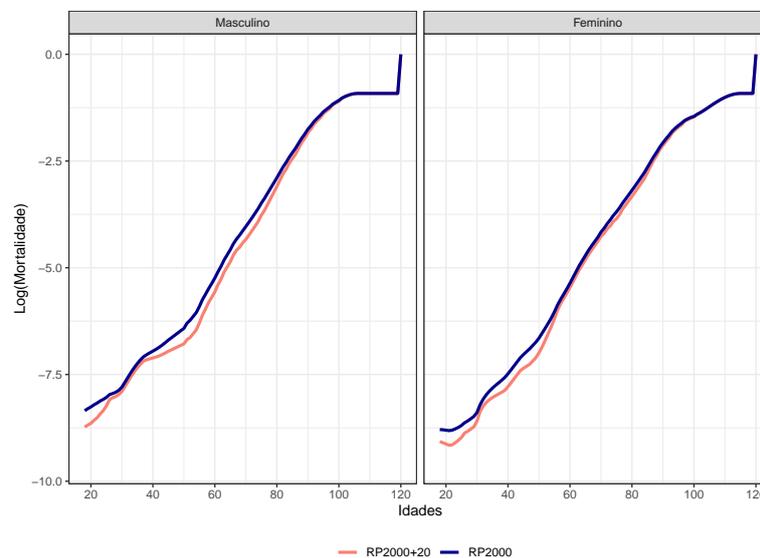


Figura 3: Probabilidade de mortalidade para cada gênero utilizando a tábua RP-2000 em 2015 e com redutor de 20 anos.

**Fonte:** Elaborado pelo autor.

O gráfico 4 compara as diferentes tábuas de entrada em invalidez propostos pela literatura e a adotada pela FUNPRESP (CARDOSO, 2013). As estimativas de probabilidade de entrada em invalidez são apresentadas na tabela 15 apresentada no apêndice.

Como pode ser visto, as estimativas de entrada em invalidez adotadas são próximas das estimativas de Álvaro Vindas, com exceção das idades entre 20 e 35 anos. Além

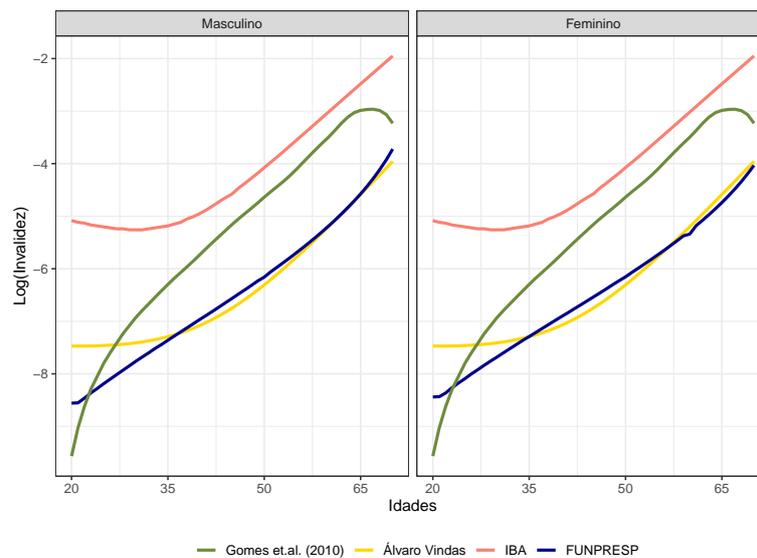


Figura 4: Probabilidade de entrada em invalidez por idade para diferentes tábuas adotadas pelo mercado.

**Fonte:** Elaborado pelo autor utilizando [Cardoso \(2013\)](#) e Instituto Brasileiro de Atuária.

disso, as estimativas de probabilidade de invalidez são consideravelmente menores do que nas demais tábuas do mercado.

Além de mortalidade e entrada em invalidez, é necessário utilizar uma base de dados para a mortalidade entre os inválidos. O gráfico 5 mostra a probabilidade de mortalidade dentre os inválidos para diferentes idades de entrada em invalidez apresentadas por [Ribeiro \(2006\)](#). Como pode ser visto, há estimativas de mortalidade para cada idade em que o servidor se tornou inválido. No entanto, foi utilizada a tábua de mortalidade entre os inválidos adotado pela FUNPRESP e apresentada em [Cardoso \(2013\)](#), que consolida a probabilidade em uma única estimativa por idade.

As tábuas de mortalidade e invalidez modelam a probabilidade de transição do estágio “ativo” de forma independente. Essa é uma abordagem denominada unidcremental, em que há apenas um decremento experimentando a situação “ativo” do participante. No entanto, com base figura 2, percebe-se que tais fatores agem de forma concomitante, isto é, há mais de um fator tentando impedir que o servidor permaneça na situação de “Ativo”. Dessa forma, a permanência na situação de contribuição possui múltiplos decrementos. Detalhes do modelo multidecremental são apresentados na

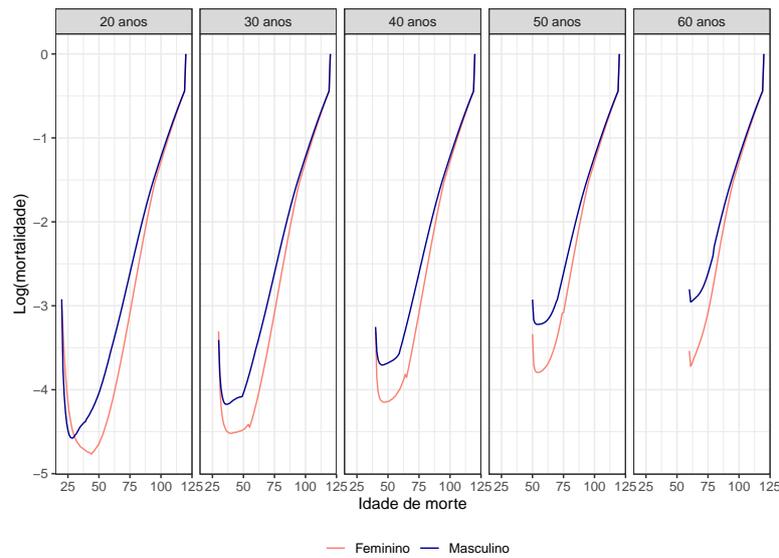


Figura 5: Probabilidade de morte em inválidos com diferentes entradas em invalidez.  
**Fonte:** Elaborado pelo autor utilizando dados de [Ribeiro \(2006\)](#).

seção a seguir.

## 2.3 Multidecrementos

Diante da eventual inexistência ou indisponibilidade de acesso a dados, o cálculo de tábuas com múltiplos decrementos, com etapas detalhadas por [Castro \(1997\)](#), pode-se ser realizado utilizando probabilidades unidecrementais ([PINHEIRO, 2005](#)). A probabilidade de que um indivíduo na situação ativa em  $x$  permaneça ativo em  $x + 1$  é dada pela sobrevivência simultânea à morte ( $q_x^m$ ) e à invalidez ( $q_x^i$ ) ([GOUVEIA, 2017](#)), que pode ser expressa por:

$$p_x^T = (1 - q_x^m)(1 - q_x^i) \quad (2.1)$$

Consequentemente, a probabilidade de que o indivíduo não sobreviva é dada pela relação complementar de  $q_x^T = 1 - p_x^T$ . Além disso, a probabilidade da ocorrência

de pelo menos um decremento é dado pela soma dos decrementos individuais no modelo unidimensional  $q_x^T = q_x^m + q_x^i$  (GOUVEIA, 2017).

Utilizando a hipótese de ocorrência uniforme dos decrementos (PINHEIRO, 2005), a probabilidade de sobrevivência de cada decremento no modelo multidecremental é dada por:

$$q_x^m = q_x^{i,m} \left(1 - \frac{1}{2} q_x^i\right) \quad (2.2)$$

$$q_x^i = q_x^{i,m} \left(1 - \frac{1}{2} q_x^m\right) \quad (2.3)$$

Dessa forma, essa tese utiliza tábuas biométricas segmentadas por sexo adotadas pela FUNPRESP-Exe e modeladas de forma multidecremental. Diante disso, a seção a seguir detalha os procedimentos utilizando registros administrativos de órgãos oficiais para as estimativas de crescimento salarial e a distribuição dos perfis atuariais.

## 2.4 Fonte dos dados

Com o intuito de compreender a estrutura demográfica e a evolução dos salários dos servidores públicos federais, foram analisados os registros administrativos disponíveis na Relação Anual de Informações Sociais (RAIS), responsáveis por consolidar os dados do trabalho formal. Essa base é disponibilizada, de maneira não identificada, pelo Ministério do Trabalho e Previdência (MTP) em formato de [microdados](#)<sup>1</sup>, detalhando, indivíduo por indivíduo, informações sobre o vínculo e variáveis demográficas do trabalhador.

Apesar da possibilidade de inconsistência, o uso dos dados de forma agregada não é comprometido (MTPS, 2016). Um exemplo das limitações encontradas é apresentado pelo MTP (MTPS, 2015), quando foi identificado troca no vínculo de registros celetistas e estatutários em alguns estabelecimentos da Administração Pública. Além disso, é possível que haja sub notificação de algumas ocorrências. No entanto, devido

<sup>1</sup> O Programa de Disseminação das Estatísticas do Trabalho (PDET) é responsável pela divulgação das informações da Relação Anual de Informações Sociais (RAIS) e do Cadastro Geral de Empregados e Desempregados, à sociedade civil (CAGED).

a não identificação dos registros, não é possível investigar e corrigir eventuais incongruências. Para além disso, o autor se coloca à disposição, mediante solicitação, para maiores esclarecimento sobre os dados e as programações para a análise da comunidade interessada.

Os registros administrativos estão disponíveis no site separados por ano e unidade da federação, sendo considerados os dados entre 2006 e 2017. Para as análises foram filtrados os registros de servidores que entraram no serviço público partir de 2004, terceira e quarta gerações de aposentados. Os servidores foram classificados segundo tipo de regime, sendo RPPS aqueles com salário inferior ao teto INSS e RPC os demais. Foram selecionados para as análises os registros de servidores vinculados aos órgãos de nível federal, do regime estatutário e que se enquadram na legislação da previdência complementar. Desses, foram excluídos os registros vinculados às corporações de Bombeiros, Policiais Militares e das Forças Armadas, existentes na base de dados.

Para as características do plano de previdência do RPC dos servidores federais é importante distinguir o perfil de educação entre profissionais da educação básica e demais. Para isso, foram considerados servidores da educação básica os registros, na grande maioria, com códigos 231,232 e 233 para o subgrupo na Classificação Brasileira de Ocupações<sup>2</sup> (CBO).

Os gráficos na figura 6 apresentam a distribuição relativa de pessoas por perfil atuarial para os anos de 2006 e 2017. Em 2006 nota-se que a diferença entre quantidade de servidores segregados por sexo é maior para aqueles ligados à educação, sendo tal diferença reduzida em 2017. Além disso, percebe o envelhecimento da força de trabalho dos servidores que não são professores, tanto no RPPS quanto no RPC. Já para os professores, o padrão do envelhecimento é mais sutil, principalmente entre os professores do RPPS.

Além da distribuição por perfil, o crescimento salarial também é uma premissa atuarial, pois permite projetar o salário do participante e, conseqüentemente, o saldo de conta no momento da aposentadoria. Esse parâmetro é utilizado tanto para o cálculo de alíquotas atuarialmente justas (GIAMBIAGI; AFONSO, 2009) quanto para modelos ALM (BHERING, 2005).

<sup>2</sup> A CBO faz a nomeação e da codificação das ocupações do mercado de trabalho no Brasil

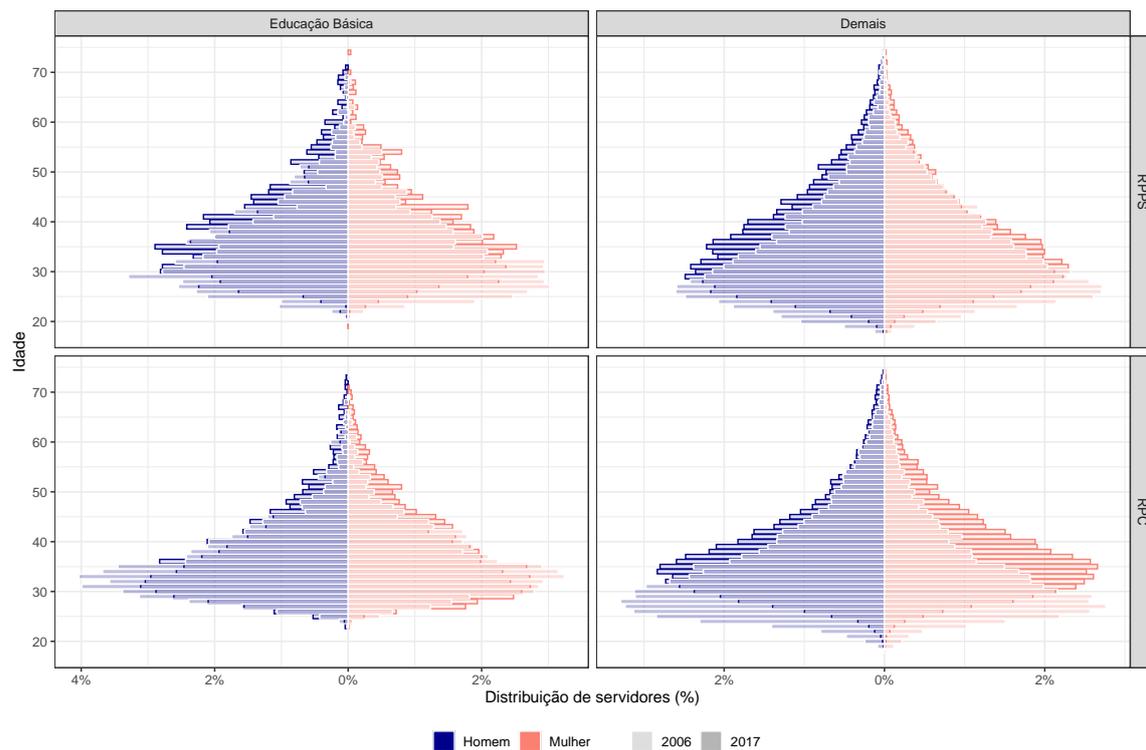


Figura 6: Distribuição por idade por perfil atuarial para os anos 2006 e 2017 considerando servidores que entraram após 2003, terceira e quarta gerações previdenciárias de servidores.

**Fonte:** Elaborado pelo autor utilizando dados da RAIS.

Gouveia (2017) analisa o impacto em uma taxa atuarialmente justa para o RGPS com crescimento salarial entre 1% e 4%, e adota a taxa de 2%. O trabalho de Giambiagi e Afonso (2009) calcula a taxa de crescimento salarial utilizando um modelo com inúmeras variáveis, e encontra taxas médias por gênero de 1.29% para mulheres e 1.97% para homens. Esses resultados também são citados no trabalho de (FREIRE; AFONSO, 2015), que considera o crescimento salarial de 2%. Também fixa, o trabalho de Rangel e Saboia (2013) considera uma taxa de 1.5% ao ano. No caso da FUNPRESP-Exe, é adotado taxa de 1.0% para crescimento salarial dos participantes de todos os perfis (FUNPRESP, 2015).

Diante da necessidade, a base de dados da RAIS também foi utilizada para calcular as taxas de crescimento salarial por perfil atuarial. Para isso, foram considerados

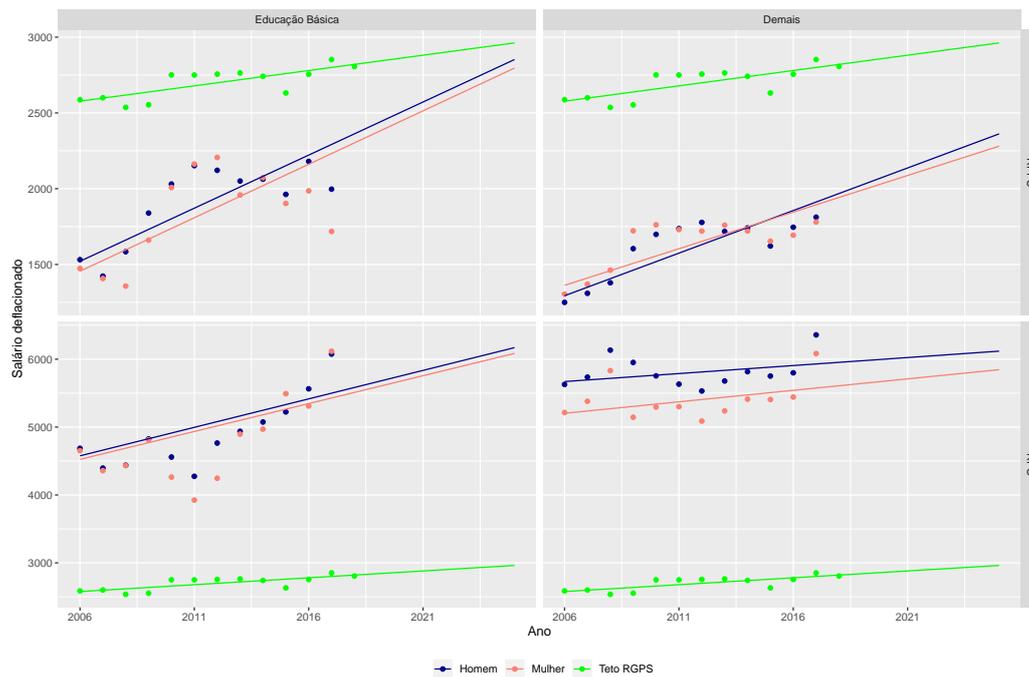


Figura 7: Média de salários para os perfis atuariais. A linha representa o modelo linear do salário em função do ano para os registros com tempo de serviço compatível com entrada em 2006. Os pontos indicam os valores médios observados nos dados.

**Fonte:** Elaborado pelo autor utilizando dados da RAIS.

os registros de servidores federais estatutários que se mantiveram em seus cargos até o fim de cada ano analisado e com tempo de serviço compatível a entrada em 2006. Isso é feito, por exemplo, filtrando registros de 2006 que tenham menos de 1 ano de tempo de serviço. Para o ano de 2007, os registros devem ter entre 1 e 2 anos e assim sucessivamente até o ano de 2017, ficando com pouco mais de 90.000 registros. Dessa forma, foi verificado o crescimento salarial de cada perfil no momento de entrada no serviço público.

Os valores foram deflacionados com data de referência de 2006 e são apresentados no gráfico 7, ajustado por uma curva linear em função do ano.

Os resultados mostram que os servidores da educação básica, tanto no RPPS quanto no RPC, possuem maior igualdade salarial para os sexos. A disparidade maior entre os salários é percebida apenas para os servidores do RPC dentre aqueles que não

são professores. Esse resultado não pode ser interpretado como desigualdade entre salários por sexo em uma mesma carreira, pois a ocupação “Demais” consolida todas as carreiras dos servidores que não são professores do ensino básico.

Também é possível notar que no RPC os profissionais da área da educação têm salário inicial menor, porém um crescimento maior. Por meio do coeficiente angular, calculado para cada perfil, é possível estimar a taxa anual de crescimento salarial. Com isso, percebe-se que, em média, os professores da educação básica do RPPS tendem a atingir mais rapidamente o teto previdenciário do que os demais servidores.

A tabela 3 apresenta os coeficiente de crescimento salarial bruto.

		Salário inicial ( $W_0$ )		Aumento ( $w$ )	
Ocupação	Regime	Homem	Mulher	Homem	Mulher
Educação	RPPS	1521.02	1455.51	70.08	70.56
Educação	RPC	4576.85	4524.39	83.86	82.16
Demais	RPPS	1293.67	1362.26	56.22	48.33
Demais	RPC	5670.53	5203.16	23.57	33.79
Teto		2577.54		20.23	

Tabela 3: Salário inicial médio calculado em 2006 e crescimento médio real bruto por perfil atuarial.

**Fonte:** Elaborado pelo autor utilizando dados da RAIS.

A taxa de crescimento salarial é determinada por  $\delta_t = \frac{w}{W_0 + w \times p}$ , sendo o  $t$  o instante de análise,  $W_0$  o salário inicial e  $w$  o crescimento bruto real por ano. Para o mesmo período e data de referência, o teto previdenciário tem valor inicial estimado de R\$2577.54 e crescimento de R\$20.23. Em 2006, teto previdenciário deflacionado observado foi de R\$2586.92. É importante ressaltar que esses dados precisam ser constantemente monitorados tendo em vista eventuais mudanças nas carreiras profissionais. Além disso, como veremos a seguir, o descasamento entre a taxa de crescimento dos salários e a taxa de crescimento do teto pode impactar o equilíbrio atuarial de alguns benefícios.

O gráfico 8 mostra que, diante do exercício feito com os dados observados e diferentemente do encontrado na literatura, o crescimento salarial será adotado com comportamento aproximadamente exponencial.

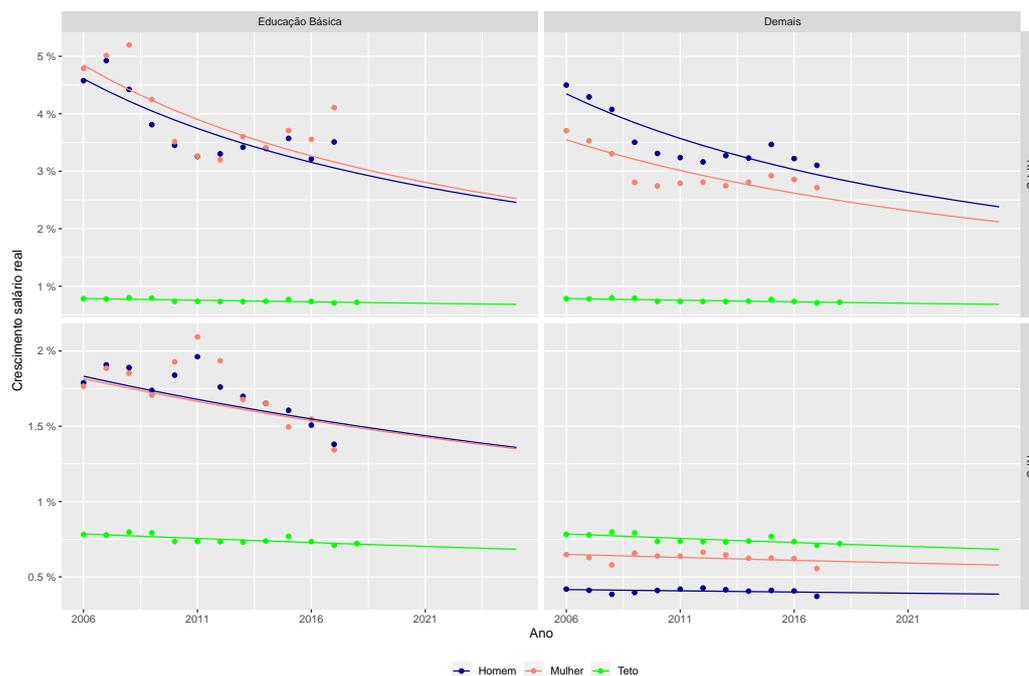


Figura 8: Taxa de crescimento de salários para os perfis atuariais. A linha representa o comportamento exponencial da taxa de crescimento salarial em função do ano. Os pontos indicam os valores médios observados nos dados e a aderência com a metodologia proposta.

**Fonte:** Elaborado pelo autor utilizando dados da RAIS.

Os resultados encontrados tornam possível a modelagem do passivo, com determinação mais realística para os fluxos de recebimento das contribuições. Nas seções a seguir serão calculadas as alíquotas atuarialmente justa para os tipos de benefícios BD, segundo perfis atuariais, e para as diferentes idades de entrada no plano.

## 2.5 Alíquota Justa e de Equilíbrio

Todo o período de participação em um plano de previdência pode ser dividido em período de acumulação e período de distribuição. Isso é identificado mais facilmente na aposentadoria normal do participante de um plano de contribuição definida (CD). No primeiro período são acumuladas as contribuições mensais que, capitalizadas a uma taxa

de juros específicas até o fim do período, determinam o saldo de conta do participante. No segundo momento, o saldo de conta é distribuído ao longo da expectativa de vida do participante no momento da aposentadoria.

A taxa de juros, a taxa de crescimento salarial, o percentual de contribuição e as taxas de administração e custeio são os parâmetros para determinação do montante acumulado. O montante, acumulado ao longo de  $T$  períodos, pode ser determinado pela seguinte soma:

$$W_T = cS_0(1+j)^0(1+i)^{(T-1)} + c \left[ S_0(1+j)^1 \right] (1+i)^{(T-2)} + \dots + c \left[ S_0(1+j)^{(T-1)} \right] (1+i)^0 \quad (2.4)$$

sendo  $c$  a taxa de contribuição,  $S_0$  o salário inicial,  $j$  a taxa de crescimento salarial,  $i$  a taxa de juros básica e  $W_T$  o montante acumulado no instante  $T$ . Dessa forma, o montante final é obtido pela soma de uma progressão geométrica, expressa por:

$$W_T = \left[ \frac{cS_0}{(i-j)} \right] \left[ (1+i)^T - (1+j)^T \right] \quad (2.5)$$

O valor presente das contribuições (VPC) é obtido descontando a taxa de juros  $i$  adotada e em função, principalmente, da alíquota de contribuição  $c$ :

$$VPC(c) = \left[ \frac{cS_0}{(i-j)} \right] \frac{\left[ (1+i)^T - (1+j)^T \right]}{(1+i)^T} \quad (2.6)$$

É importante destacar que para o caso do RPC, alíquota de contribuição  $c$  incide sobre o salário de participação  $S_0$  que é o valor do salário do participante que excede o teto do RGPS. Por exemplo, caso o teto seja R\$ 6.000 e o participante receba R\$ 10.000, o valor de contribuição é  $c \times 4.000$ , com valores possíveis de 7.5%, 8.0% e 8.5%. Esses percentuais são definidos pela legislação, e representam os limites para a contribuição paritária do patrocinador<sup>3</sup>.

No entanto, existem benefícios do tipo benefício definido (BD), que também são custeados pelo valor de contribuição por meio de uma alíquota  $\tau$  adicional. Dessa

<sup>3</sup> A contribuição do patrocinador garante o pagamento da União de R\$ 1 para cada R\$ 1 pago pelo servidor.

forma, o valor de contribuição destinado para o custeio dos benefícios do tipo BD é  $\tau \times c \times 4.000$ , restando para o acúmulo em saldo de conta individual do participante e pagamento do benefício CD o valor de  $(1 - \tau) \times c \times 4.000$ .

O grande interesse dos fundos de pensão está na determinação da alíquota  $\tau$  suficiente para honrar os compromissos previdenciários. Nessa tese o estudo de alíquotas de contribuição é feito para  $\tau$ , fazendo o VPC como:

$$VPC(\tau) = \left[ \frac{\tau c S_0}{(i - j)} \right] \frac{[(1 + i)^T - (1 + j)^T]}{(1 + i)^T} \quad (2.7)$$

De maneira análoga, o valor presente dos benefícios pagos por  $N$  períodos, representados pelo valor  $A$ , é expresso por:

$$VPB = \sum_{k=T+1}^{T+N} \frac{A}{(1 + i)^k} = \left[ \frac{A}{(1 + i)^T} \right] \frac{1}{i} \frac{[(1 + i)^N - 1]}{(1 + i)^N} \quad (2.8)$$

No entanto, para o caso previdenciário, o pagamento de  $A$  está, normalmente, condicionado à sobrevivência do beneficiário. Isto é, não há certeza do pagamento futuro de benefícios. Para incorporar tal incerteza, considere  ${}_h p_x$  a probabilidade do beneficiário sobreviver entre  $x$  e  $x + h$ . Nesse caso VPB é calculado por:

$$VPB = \sum_{k=T+1}^{T+N} \frac{{}_k p_T A}{(1 + i)^k} = \left[ \frac{A}{(1 + i)^T} \right] \frac{1}{i} \frac{[(1 + i)^N - 1]}{(1 + i)^N} \quad (2.9)$$

Se o pagamento de  $A$  for feito enquanto o beneficiário estiver vivo, caracteriza-se por perpetuidade. Caso contrário, isto é, se o pagamento é feito até um período  $N$  estabelecido, tais pagamentos são ditos anuidades. Como veremos a seguir, todos os cálculos previdenciários dependem da equação 2.9 e do tempo de pagamento  $N$ .

A diferença entre  $VPC(\tau)$  e  $VPB$  é denominada net atuarial e é apresentada na equação 2.10. A situação de déficit é caracterizada quando o fluxo futuro de pagamento de benefício é maior do que o montante contribuído. Caso contrário, o resultado é dito superavitário, isto é, o montante acumulado pelo recebimento das contribuições é suficiente para o pagamento dos benefícios. A alíquota atuarialmente justa  $\tau^*$  é determinada

entre as duas situações. Isto é, o valor de  $\tau^*$  para que o net atuarial em 2.10 seja igual a zero,  $NET(\tau^*) = 0$ .

$$NET(\tau) = VPC(\tau) - VPB \quad (2.10)$$

Na literatura, o cálculo da alíquota  $\tau^*$  atuarialmente justa é feito desconsiderando os fatores probabilísticos de mortalidade e invalidez (GIAMBIAGI; AFONSO, 2009; FERNANDES; GREMAUD, 2003), utilizando média de fluxos futuros e tempo de recebimento de benefício (OLIVEIRA; BELTRÃO; MANIERO, 1997) ou limitando o perfil do participante do fundo (GOUVEIA, 2017). A metodologia proposta nessa tese considera fatores probabilísticos de mortalidade e invalidez, por meio de tábuas biométricas, fluxos de contribuição e recebimento de benefícios individuais em todas as idades de entrada e separando os participantes segundo perfis atuariais. Esses fatores tornam o cálculo de  $\tau^*$  impossível analiticamente, sendo contornado com uso força bruta com busca em grelha.

Conforme apresentado nas seções anteriores, a distinção dos professores do ensino básico e os demais servidores, bem como sexo, é necessária para o cálculo de alíquotas inspiradas nas regras de benefício da FUNPRESP-Exe, pois a legislação do RPC estabelece diferentes fluxos de recebimento de benefícios de acordo com esses perfis atuariais. Os perfis atuariais adotados nessa tese são: servidor professor do ensino básico, demais servidores, servidora professora do ensino básico e demais servidoras. Para simplificar as análises, a denominação de homem é similar ao de servidor, assim como educação para educação básica. Assim, tem-se professores, servidores, professoras e servidoras.

Os benefícios previdenciários considerados nesse trabalho e as alíquotas de custeio são: aposentadoria por invalidez ( $\tau_1$ ), pensão por morte do participante ativo ( $\tau_2$ ), pensão por morte do participante assistido em aposentadoria normal ( $\tau_3$ ), pensão por morte do participante assistido em invalidez ( $\tau_4$ ), aporte extraordinário de aposentadoria normal ( $\tau_5$ ) e benefício de sobrevivência de aposentadoria normal ( $\tau_6$ ). Todos esses benefícios são custeados pelo regime financeiro de repartição de capitais de cobertura quando o saldo de conta do participante não é suficiente, isto é, a responsabilidade do custeio é dividida entre os participantes. Dessa forma, a segregação em perfis atuariais proposta

nesse trabalho não tem como objetivo sugerir alíquotas diferentes para os servidores baseado na idade de entrada, sexo ou ocupação. O cálculo de alíquotas atuarialmente justas por perfil tem como objetivo compreender as fontes dos custos previdenciários e determinar o equilíbrio atuarial do plano por meio das alíquotas médias, denominadas alíquotas de equilíbrio atuarial para cada benefício  $(\bar{\tau}_i, i \in 1, 2, 3, 4, 5, 6)$ .

O cálculo das alíquotas de equilíbrio  $\bar{\tau}_i$  utiliza os resultados da busca em grade para a equação 2.10, que tem natureza individual, e é definida de modo independente entre os benefícios por meio da equação 2.11. O valor das alíquotas de equilíbrio para cada custeio será determinado de modo a garantir, minimamente, o custeio integral dos benefícios futuros relacionadas. Nessa estratégia, a natureza atuarial específica de cada benefício é respeitada, além de garantir maior transparência e gestão das obrigações futuras.

A alíquota de equilíbrio é determinada pela menor alíquota com que se tenha net atuarial maior ou igual a zero, dada a distribuição de participantes. Isto é, a alíquota de equilíbrio para o benefício  $i$  é aquela que garante que a soma do net atuarial  $\text{NET}_j(\bar{\tau}_i)$  de todos os participantes ( $j = 1, \dots, N$ ) seja maior ou igual a zero.

$$\begin{aligned} \operatorname{argmin}_{\bar{\tau}_i} f(\bar{\tau}_i) &= \{f(\bar{\tau}_i) \mid 0 \leq f(\bar{\tau}_i) < f(\tau_i), \quad \forall 0 \leq \tau_i \leq 1, \quad i \in 1, 2, \dots, 6\} \\ f(\bar{\tau}_i) &= \sum_{j=1}^N \text{NET}_j(\bar{\tau}_i) \end{aligned} \quad (2.11)$$

Sendo  $N$  o número total de participantes. Com isso, o equilíbrio atuarial em cada benefício garante o equilíbrio atuarial total do plano. É possível considerar situações em que o superávit de uma alíquota compense o déficit de outra, porém essa estratégia não será considerada nesse trabalho.

Dessa forma, tendo em vista a natureza dos benefícios, a diferença entre a alíquota adotada e a alíquota atuarialmente justa, assim como em [Donnelly \(2015\)](#), é abordada nesse trabalho como solidariedade entre os membros.

Para os cálculos realizados a seguir, considera-se a taxa de juros básica do plano em  $i = 4\%$  ao ano e o IPCA como índice de inflação para correção dos benefícios. No entanto, não será necessário o parâmetro de inflação, pois todos os ativos também

estão ajustados em relação ao IPCA, facilitando a análise dos resultados. O quadro 4 consolida o conjunto de premissas atuariais composta pelas hipóteses biométricas, demográficas e econômica adotadas nesse trabalho para o cálculo das alíquotas de custeio dos benefícios.

Diferente da literatura, esse trabalho propõe a adoção das hipóteses de distribuição por perfil atuarial e crescimento do teto do RGPS, pois são parâmetros que impactam o cálculo do custeio, principalmente para pensão por morte do participante ativo e aposentadoria por invalidez, detalhados a seguir.

Tipo	Hipótese	Descrição	Valor
Biométrica	Mortalidade	Tábua de mortalidade adotada para o participante ativo e em aposentadoria normal.	Tábua <a href="#">Actuaries (2000)</a> adotada pela FUNPRESP segmentada por sexo.
Biométrica	Mortalidade de inválidos	Tábua de mortalidade adotada para o participante aposentado por invalidez.	Tábua <a href="#">Ribeiro (2006)</a> adotada pela FUNPRESP segmentada por sexo.
Biométrica	Invalidez	Tábua de entrada em invalidez adotada pela FUNPRESP segmentada por sexo.	Tábua adotada pela FUNPRESP segmentada por sexo <a href="#">Cardoso (2013)</a> .
Biométrica	Multidecremental	Modelagem da exposição a múltiplos decrementos sobre o participante	Ocorrência uniforme dos decrementos ( <a href="#">PINHEIRO, 2005</a> )
Demográfica	Distribuição por perfil atuarial	Distribuição dos participantes do plano segundo sexo e ocupação determinam o perfil atuarial.	Distribuição dos perfis atuariais encontrada nos registros administrativos da RAIS.
Demográfica	Novos entrantes	Fluxo de entrada de participantes	Fluxo médio de entrada de servidores observado nos registros administrativos da RAIS.
Demográfica	Participantes elegíveis	Quantidade de participantes elegíveis ao RPC.	Quantidade de participantes com remuneração acima do teto do RGPS observado nos registros administrativos da RAIS em 2015.
Econômico	Taxa de juros	Expectativa de rentabilidade de longo prazo.	4%
Econômico	Crescimento salarial	Expectativa de crescimento real dos salários dos participantes.	Taxas específicas por sexo e ocupação em função do tempo de serviço utilizando os dados da RAIS apresentados em <a href="#">3</a> .
Econômico	Indexador	Correção monetária	Correção de benefício e investimentos considera Índice de Preços ao Consumidor Amplo.
Econômico	Crescimento do teto RGPS	Taxa de crescimento real do teto do RGPS.	Taxas de crescimento real, deflacionado pelo IPCA, do valor adotado para o teto do RGPS, apresentados em <a href="#">3</a> .
Financeira	Pagamento de aposentadoria	Periodicidade de pagamento do benefício de aposentadoria	Pagamento anual sob a forma de renda anual temporária antecipada;

Tabela 4: Resumo com as hipóteses biométricas, econômicas, financeira e demográficas.

**Fonte:** Elaborado pelo autor.

### 2.5.1 Aposentadoria normal (AN)

O benefício de aposentadoria normal (BAN) para o indivíduo  $j$ , calculada no instante  $h$ , é determinado pela soma da reserva individual (RAP) e pela expectativa de vida do participante na data de aposentadoria. O valor depende de um fator que transforma a reserva em benefício, utilizando o cálculo de anuidade 2.9, isto é, pagamentos sequenciais durante um período estabelecido. Esse período é a expectativa de sobrevivência no instante da aposentadoria  $e_h^{(m)}$ . Dessa forma, a fórmula 2.12 apresenta o cálculo do benefício de aposentadoria normal no instante  $h$ :

$$BAN^j = \frac{RAP^j}{Fator(i, e_h^{(m)})} \quad (2.12)$$

As premissas atuariais de crescimento salarial, taxa de juros e expectativa de vida apresentadas na tabela 4 permitem determinar o  $RAP^j$  e o  $BAP^j$  esperados para cada um dos perfis atuariais, apresentado na tabela 5.

Contribuição	Sexo Variável	Homem		Mulher	
		Educação	Outros	Educação	Outros
7.5	$RAP^j$	18276.96	25350.31	12806.48	17427.96
7.5	$BAP^j$	1344.50	2178.22	792.07	1217.55
8.0	$RAP^j$	19495.43	27040.33	13660.24	18589.82
8.0	$BAP^j$	1434.13	2323.43	844.87	1298.72
8.5	$RAP^j$	20713.89	28730.36	14514.01	19751.69
8.5	$BAP^j$	1523.76	2468.65	897.68	1379.89

Tabela 5: Valor esperado para o saldo de conta individual segundo perfis atuariais dos participantes com idade de entrada no serviço público com 30 anos de idade, considerando crescimento salarial e idade de aposentadoria na data de aposentadoria.

**Fonte:** Elaborado pelo autor.

Dessa forma, a Net Atuarial da Aposentadoria Normal (NAAN) será, por defi-

nição, sempre igual a zero, isto é, todo o montante é, em média, pago ao participante.

$$NAAN_x^j = v^{x_a-x} \left[ RAP^j - \sum_{h=x_a}^{\overset{\circ}{e}_{x_a}^{(m)}} v^{h-x_a} \times {}_{h-1}p_x^{(m)} \times BAN_h^j \right] \quad (2.13)$$

$x_a$  idade de aposentadoria

$x$  instante de avaliação

$NAAN_x^j$  net atuarial da aposentadoria normal no instante  $x$  do indivíduo  $j$

$BAN_h^j$  valor do benefício do indivíduo  $j$  no instante momento da aposentadoria,

${}_h p_x^{(m)}$  probabilidade de sobreviver entre  $x$  e  $x + h$  em um modelo unidcremental,

$RAP^j$  reserva individual do participante  $j$  na data da aposentadoria,

$v^h$  fator financeiro  $(1 + i)^{-h}$ ,

$\overset{\circ}{e}_{x_a}^{(m)}$  tempo de sobrevivência participante na data da aposentadoria,

$i$  taxa de juros de referência do plano

O gráfico 9 apresenta o valor do net para cada perfil atuarial e, evidentemente, o net é sempre zero, independentemente da idade de entrada ou do perfil atuarial.

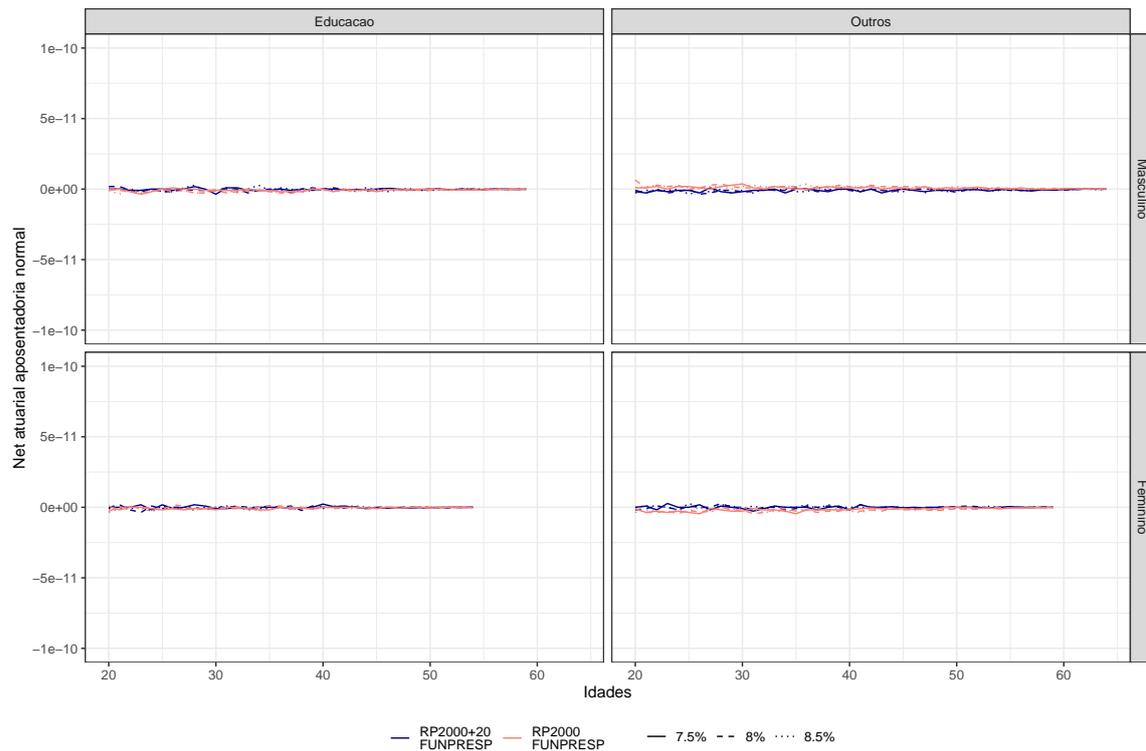


Figura 9: Net atuarial do benefício de Aposentadoria Normal para os diferentes perfis atuariais. Valor é sempre igual a zero, pois o benefício é do tipo contribuição definida e, conseqüentemente, atuarialmente justo.

**Fonte:** Elaborado pelo autor.

### 2.5.2 Aposentadoria por invalidez (AEAI)

O benefício de aposentadoria por invalidez tem regime financeiro de repartição de capital de cobertura, em que o valor do benefício é inicialmente de responsabilidade do montante acumulado na conta individual e, caso não seja suficiente, é honrado pelo regime de repartição, oriundo da contribuição  $\tau_1$  para o Aporte Extraordinário para Aposentadoria por Invalidez (AEAI). O valor de benefício é determinado por:

$$BAI_h = \max \left\{ \left[ \text{Média}(BC_{80\%}) - RPPS \right] \times \frac{\%MC}{8.5\%}; 2 \times URP \right\} \quad (2.14)$$

sendo Média( $BC_{80\%}$ ) a média aritmética das 80% maiores remunerações, RPPS é o benefício recebido pelo RPPS (teto RGPS),  $MC$  é a média das alíquotas de contribuições, que pode variar entre 7.5%, 8.0% e 8.5%, e URP é a Unidade de Referência do Plano. O valor considerado nessa tese para URP é de R\$ 100.

O net atuarial da aposentadoria por invalidez ( $NAAI_x^j$ ) para o indivíduo  $j$ , no instante  $x$ , que tem idade de aposentadoria por idade prevista em  $m$  períodos a frente, é definido por:

$$NAAI_x^j(\tau_1) = \text{mín} \left\{ RAP_h^j + CAI_h(\tau_1) - \right. \quad (2.15)$$

$$\left. \sum_{h=x}^{x+m} v^h \times {}_{h-1}p_x^{(\tau)} \times q_{(x+h)}^{(i)} \times BAI_h \times {}_{\hat{e}_h^{(i)}}|a_{n:h}^{(i)}; CAI_h(\tau_1) \right.$$

(2.16)

$x$  instante de avaliação

$NAAI_x^j$  valor presente net atuarial indivíduo  $j$  no instante  $x$ ,

$v^h$  fator de financeiro  $(1+i)^{-h}$ ,

${}_h p_x^{(\tau)}$  probabilidade de sobreviver entre  $x$  e  $x+h$  em um modelo multidecremental,

$q_{(x)}^{(i)}$  probabilidade de invalidez entre  $x$  e  $x+1$  em um modelo multidecremental,

$BAI_h$  valor do benefício de aposentadoria por invalidez em  $h$ ,

$CAI_h(\tau_1)$  valor acumulado da contribuição de aposentadoria por invalidez para o Aporte Extraordinário de Aposentadoria por Invalidez (AEAI) em  $h$  com alíquota  $\tau_1$ ,

$\hat{e}_h^{(i)}$  tempo de sobrevida do inválido no instante  $h$ ,

${}_{\hat{e}_h^{(i)}}|a_{n:h}^{(i)}$  valor atuarial unitário pago para um aposentado por invalidez em  $h$  com prazo até a expectativa de vida na data da morte.

$\tau_1$  alíquota adotada para o benefício,

A próxima etapa do processo de modelagem do passivo é investigar a sensibilidade do  $NAAI_x^j$  nas mudanças de  $\tau_1$  para os diferentes perfis atuariais.

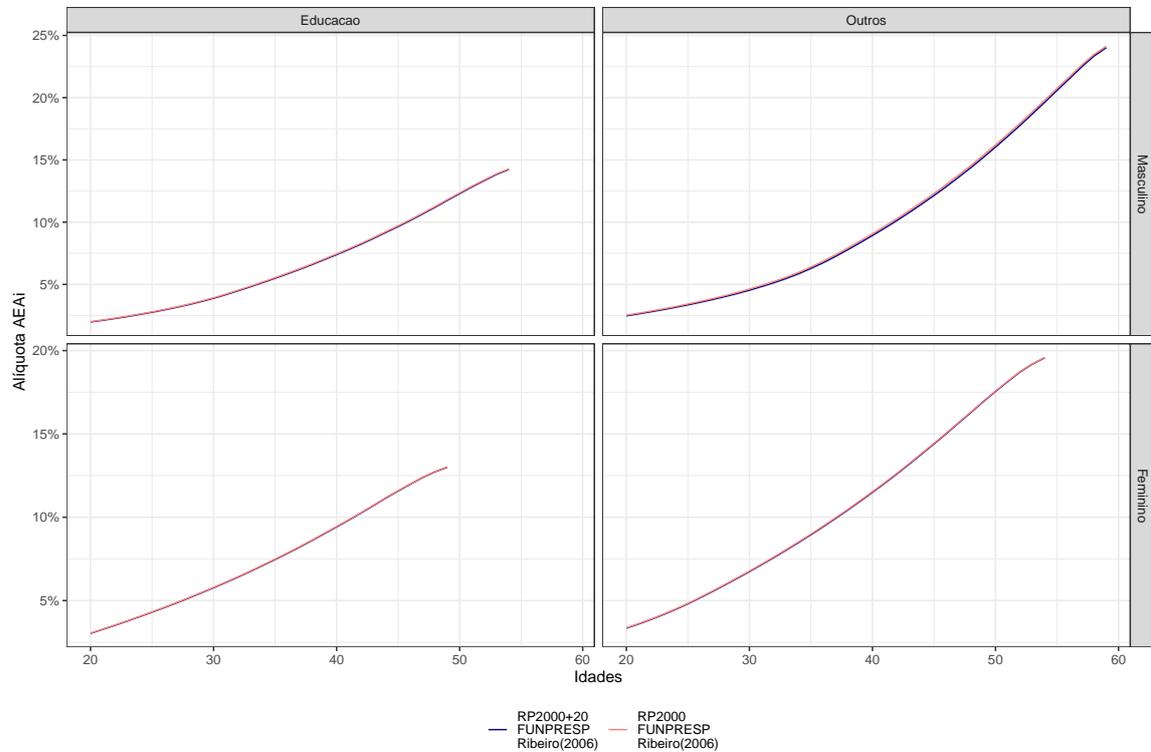


Figura 10: Alíquota atuarialmente justa para o custeio do benefício associado à AEAi para os diferentes perfis atuariais formados pela combinação de idade, sexo e ocupação. **Fonte:** Elaborado pelo autor.

O gráfico 10 destaca a diferença entre as alíquotas atuarialmente justas, com aumento gradativo de acordo com a data de entrada. Isso é resultado de uma combinação de fatores como o aumento da probabilidade de invalidez nos servidores com maiores idades e os baixos níveis de reserva, de natureza individual, para o e custeio AEAi. O valor do benefício de aposentadoria previsto em 2.14 não considera o tempo de contribuição. Dessa forma, os servidores que entram com idades elevadas exigem maior esforço coletivo para cobertura dos eventuais benefícios.

### 2.5.3 Pensão por morte do ativo (AEMAt)

Assim como no RPPS, o RPC garante ao servidor o benefício de pensão aos dependentes em caso de morte do participante. O valor, assim como o de aposentadoria por invalidez, é determinado em função do valor que falta para atingir a média dos 80% salários a partir do teto do RGPS. No entanto, para esse benefício há um redutor de 70%, além de depender do salário de participação.

$$BPAMAt_h = \max \left\{ [\text{Média}(BC_{80\%}) - RPPS] \times \frac{\%MC}{8.5\%} \times 70\%; 2 \times URP \right\} \quad (2.17)$$

O Net Atuarial da Pensão por Morte do participante Ativo (NAPMAT) também é custeado, inicialmente, pelo saldo do participante e, caso seja insuficiente, pago pelo saldo coletivo, formado em função da alíquota  $\tau_2$ .

$$NAPMAT_x^j(\tau_2) = \min \left\{ RAP_h^j + CPMAt_h(\tau_2) - \right. \quad (2.18)$$

$$\left. \sum_{h=x}^{x+m} v^h \times {}_{h-1}p_x^{(\tau)} \times q_{(x+h)}^{(m)} \times BPAMAt_h \times \ddot{e}_h^{(i)} | a_{n:h}^{(m)}; CPMAt_h(\tau_2) \right\} \quad (2.19)$$

$x$  instante de avaliação

$NAPMAT_x^j$  valor presente net atuarial indivíduo  $j$  no instante  $x$ ,

$v^h$  fator de financeiro  $(1+i)^{-h}$ ,

${}_h p_x^{(\tau)}$  probabilidade de sobreviver entre  $x$  e  $x+h$  em um modelo multidecremental,

$q_{(x)}^{(i)}$  probabilidade de morte entre  $x$  e  $x+1$  em um modelo multidecremental,

$CPMAt_h$  valor da contribuição para o aporte extraordinário de morte do participante ativo em  $h$ ,

$BPAMAt_h$  valor do benefício de aposentadoria por morte de participante ativo em  $h$ ,

$e_h^{(m)}$  tempo de sobrevivência do participante na data da morte no instante  $h$ ,

$e_h^{(i)} | a_{n:h}^{(i)}$  valor atuarial unitário pago para o pensionista em  $h$  até a expectativa de sobrevivência do participante na data da morte,

$\tau_2$  alíquota adotada para o benefício,

A próxima etapa é investigar a sensibilidade do  $NAPMA t_x^j$  às mudanças de  $\tau_2$  para os diferentes perfis atuariais. Por meio do gráfico 11, assim como para a aposentadoria por invalidez, percebe-se que a alíquota para o benefício NAPMA é maior para os servidores que entram no serviço público com idades maiores. Também é possível perceber que a redução do valor da alíquota  $\tau_2$  quando há um aumento da expectativa de vida.

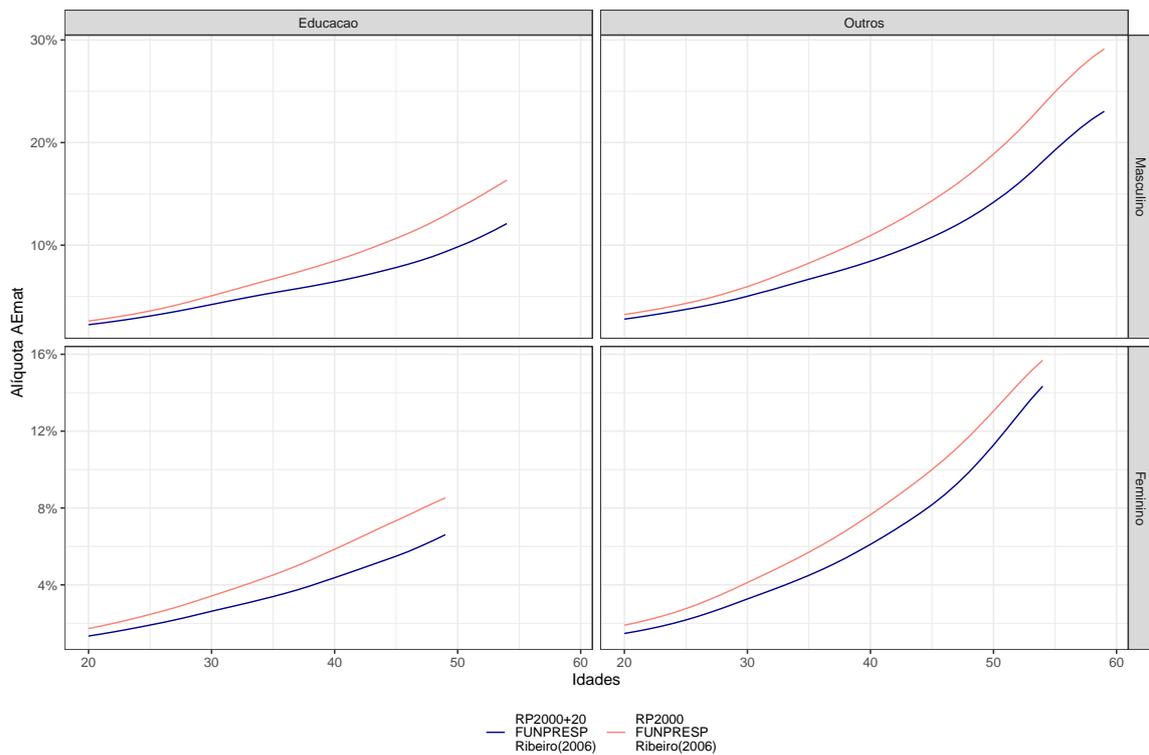


Figura 11: Alíquota atuarialmente justa para o custeio do benefício associado à pensão por morte do participante ativo (AEMat) para os diferentes perfis atuariais formados pela combinação de idade, sexo e ocupação.

**Fonte:** Elaborado pelo autor.

## 2.5.4 Pensão por morte do assistido (AEMAs)

O benefício por morte do participante assistido garante o pagamento de uma pensão no prazo igual à expectativa de vida do participante na data do falecimento, estando associado aos benefícios de aposentadoria normal (AEMAsm) e aposentadoria por invalidez (AEMAsi).

### 2.5.4.1 Assistido em aposentadoria normal (AEMAsm)

O valor pago para os dependentes do servidor que é assistido em aposentadoria normal que falece antes do período estabelecido pelo benefício é determinado por um percentual do valor do benefício recebido e é pago até a expectativa de vida do servidor na data da morte:

$$PMA_{s_h} = BAP_h \times TX_{AEAMAs} \quad (2.20)$$

sendo  $TX_{AEAMAs}$  o redutor para a pensão, que, atualmente, é de 70%. O net Atuarial da Pensão por Morte do Participante assistido em aposentadoria Normal (NAMAs) é calculado por:

$$NAMAs_x^j(\tau_3) = \min \left\{ RAP_h + CPMAs_h(\tau_3) - \sum_{h=x}^{\epsilon_h^{(i)}} {}_{h-1}p_x^{(\tau)} \times v^h \times q_{(x+h)}^{(i)} \times PMA_{s_h} \times \epsilon_h^{(i)} a_{n:h}^{(i)}; CPMAs_h(\tau_3) \right\} \quad (2.21)$$

$x$  instante de avaliação

$NAMAs_x^j$  valor presente net atuarial indivíduo  $j$  no instante  $x$ ,

$v^h$  fator de financeiro  $(1+i)^{-h}$ ,

$CPMA_{s_h}$  valor de contribuição para o aporte extraordinário por pensão por morte do participante assistido em aposentadoria normal em  $h$ ,

${}_h p_x^{(\tau)}$  probabilidade de sobreviver entre  $x$  e  $x+h$  em um modelo unidecremental,

$q_{(x)}^{(i)}$  probabilidade de morte entre  $x$  e  $x+1$  tábua de vida dividida por gênero,

$BAP_h$  valor do benefício de aposentadoria normal na data de aposentadoria  $h$ ,

$e_h^{(i)}$  tempo de sobrevivência do instante  $h$ ,

$e_h^{(i)} a_{n:h}^{(i)}$  valor atuarial unitário pago como pensão para a morte do participante assistido por aposentadoria normal em  $h$  com prazo igual a expectativa de vida na data da morte,

$\tau_3$  alíquota adotada para o benefício,

$TX_{AEAMAs}$  fator para cálculo da pensão por morte do participante assistido em aposentadoria normal,

É interessante notar, por meio do gráfico 12, que a parte do custeio associado ao benefício de pensão por morte do participante assistido em aposentadoria normal é independentemente a entrada do participante. Isso se deve ao fato de o benefício estar em função do valor do benefício de aposentadoria normal, que é, como pode ser visto em no gráfico 9, atuarialmente justo. No entanto, é um benefício que tem alíquota sensível às mudanças das tábuas biométricas e varia para cada perfil devido a diferença entre as idades de aposentadoria.

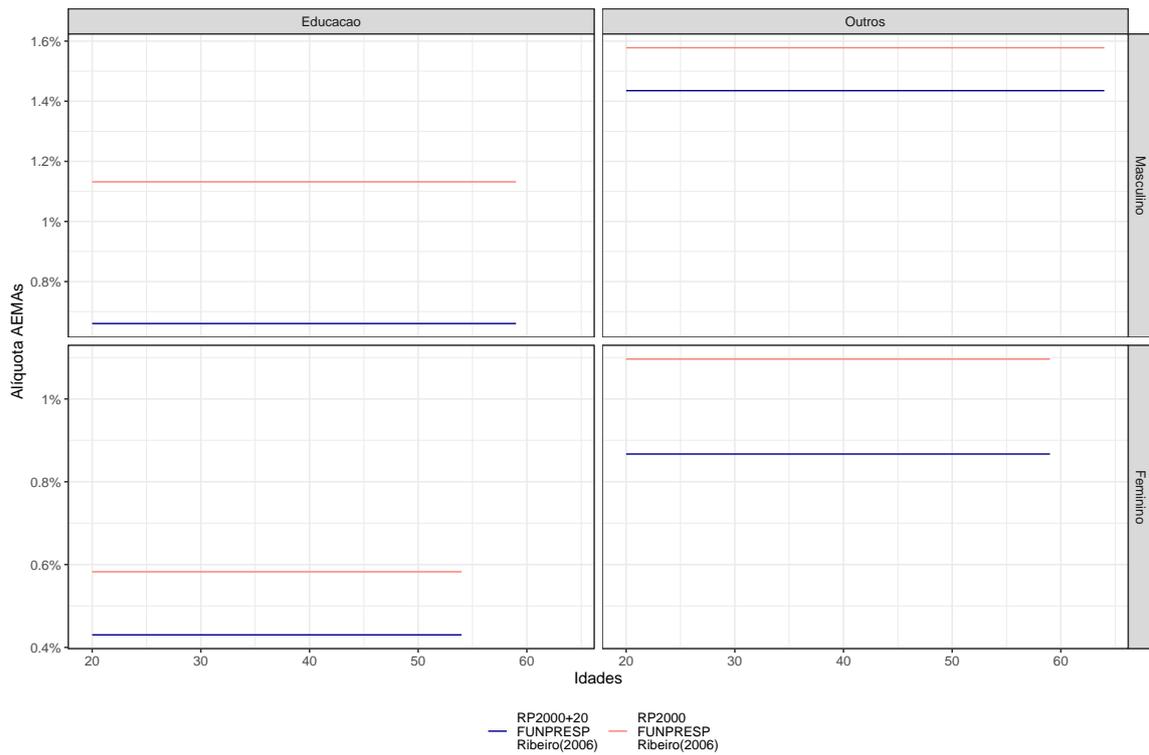


Figura 12: Alíquota atuarialmente justa para o custeio do benefício associado à pensão por morte do participante assistido em aposentadoria normal (AEMAsm) para os diferentes perfis atuariais formados pela combinação dos atributos de idade, sexo e ocupação do participante.

**Fonte:** Elaborado pelo autor.

#### 2.5.4.2 Assistido em invalidez (AEMAsi)

O valor pago aos dependentes do servidor que é assistido em aposentadoria por invalidez e que falece antes do período estabelecido pelo benefício é determinado por um percentual da aposentadoria por invalidez e é pago até a expectativa de vida do servidor na data da morte:

$$PMA_{si_h} = BAI_h \times TX_{AEAMAsi} \tag{2.22}$$

sendo  $TX_{AEAMAsi}$  o redutor para a pensão, que, atualmente, é de 70%.

Dessa forma, o Net Atuarial da Pensão por Morte do Participante assistido em aposentadoria por invalidez (NAMAsi) é calculado por:

$$NAMAsi_x^j(\tau_4) = \text{mín} \left\{ CPMAsi_h(\tau_4) - \sum_{h=x}^{\hat{e}_h^{(i)}} {}_{h-1}p_x^{(\tau)} \times v^h \times q_{(x+h)}^{(i)} \times PMAsi_h \times {}_{\hat{e}_h^{(i)}}|a_{n:h}^{(i)}; CPMAsi_h(\tau_4) \right\} \quad (2.23)$$

$x$  instante de avaliação

$NAMAsi_x^j$  valor presente net atuarial indivíduo  $j$  no instante  $x$ ,

$v^h$  fator de financeiro  $(1+i)^{-h}$ ,

$CPMAsi_h$  valor de contribuição para o aporte extraordinário por pensão por morte do participante assistido em aposentadoria por invalidez em  $h$ ,

${}_h p_x^{(\tau)}$  probabilidade de sobreviver entre  $x$  e  $x+h$  utilizando a tábua de vida de inválidos,

$q_{(x)}^{(i)}$  probabilidade de morte para inválidos entre  $x$  e  $x+1$ ,

$BAI_h$  valor do benefício de aposentadoria por invalidez na data de aposentadoria  $h$ ,

$\hat{e}_h^{(i)}$  tempo de sobrevida do inválido no instante  $h$ ,

${}_{\hat{e}_h^{(i)}}|a_{n:h}^{(i)}$  valor atuarial unitário pago como pensão para a morte do participante assistido por aposentadoria de invalidez em  $h$  com prazo igual a expectativa de vida na data da morte com base na tábua de morte de inválidos,

$\tau_4$  alíquota adotada para o benefício,

$TX_{AEAMAsi}$  fator para cálculo da pensão por morte do participante assistido em aposentadoria por invalidez,

O valor pago por esse benefício é determinado em função do benefício de aposentadoria por invalidez. Diferentemente da aposentadoria normal, o valor do benefício de aposentadoria por invalidez não é em função do saldo de conta, e, por isso, nota-se na

figura 13 um crescimento da alíquota  $\tau_4$  a medida em que a idade de entrada no servidor aumenta.

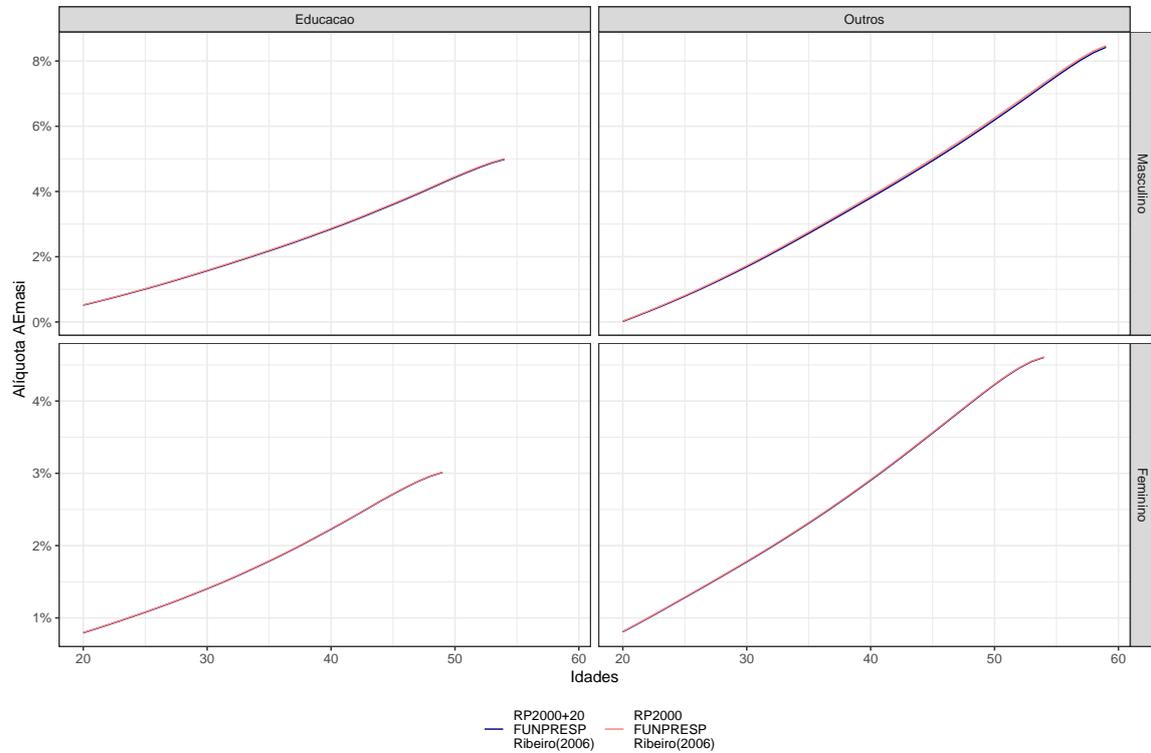


Figura 13: Alíquota atuarialmente justa para o custeio do benefício associado à pensão por morte do participante assistido em aposentadoria por invalidez (AEAMAsi) para os diferentes perfis atuariais.

Fonte: Elaborado pelo autor.

### 2.5.5 Benefício de sobrevivida (BSA)

O valor pago para o servidor que supera a expectativa de vida, determinada na data do início de aposentadoria, é calculado por um percentual do valor do benefício recebido em aposentadoria normal e é pago enquanto o servidor estiver vivo. É importante destacar, que essa tese restringiu a análise do BSA para a aposentadoria normal,

por simplificação. O valor do benefício de sobrevivida é determinado por:

$$BSA_h = BAP_h \times TX_{BSA} \quad (2.24)$$

sendo  $TX_{AEAMAsi}$  o redutor para a pensão, que, atualmente, é de 80%. Dessa forma, o Net Atuarial do Benefício por Sobrevida do Assistido em aposentadoria normal (NABSA) é calculado por:

$$NABSA_x^j(\tau_6) = \text{mín} \left\{ CBSA_h(\tau_6) - \sum_{h > \underset{\varepsilon_h^{(i)}}{\infty}} \left\{ {}_h p_x^{(\tau)} \times v^h \times BSA_{h\infty} a_{n:h}^{(i)} \right\}; CBAS_h(\tau_6) \right\} \quad (2.25)$$

$x$  instante de avaliação

$NABSA_x^j$  valor presente do net atuarial indivíduo  $j$  no instante  $x$ ,

$CBAS_h$  valor de contribuição para o aporte extraordinário por benefício de sobrevivida do participante assistido em aposentadoria normal em  $h$ ,

$v^h$  fator de financeiro  $(1 + i)^{-h}$ ,

${}_h p_x^{(\tau)}$  probabilidade de sobreviver entre  $x$  e  $x + h$  em um modelo unidcremental,

$q_{(x)}^{(i)}$  probabilidade de morte entre  $x$  e  $x + 1$  em um modelo unidcremental,

$AP_h$  valor do benefício de aposentadoria normal na data de aposentadoria  $h$ ,

$\underset{\varepsilon_h^{(i)}}{\infty}$  expectativa de vida do assistido no instante  $h$ ,

$\infty a_{n:h}^{(i)}$  valor atuarial unitário pago como benefício para a sobrevivida do participante assistido por aposentadoria normal em  $h$  com prazo igual ao tempo de vida,

$\tau_6$  alíquota adotada para o benefício,

$TX_{BSA}$  fator para cálculo do benefício por sobrevivida do participante assistido em aposentadoria normal,

A figura 14 indica que a alíquota necessária para cobrir a demanda atuarial relativa ao benefício de sobrevivência não dependem da idade de entrada do participante, pois, assim como para a pensão do participante assistido em aposentadoria normal, esse benefício é determinado em função de um benefício atuarialmente justo, apresentado na figura 9.

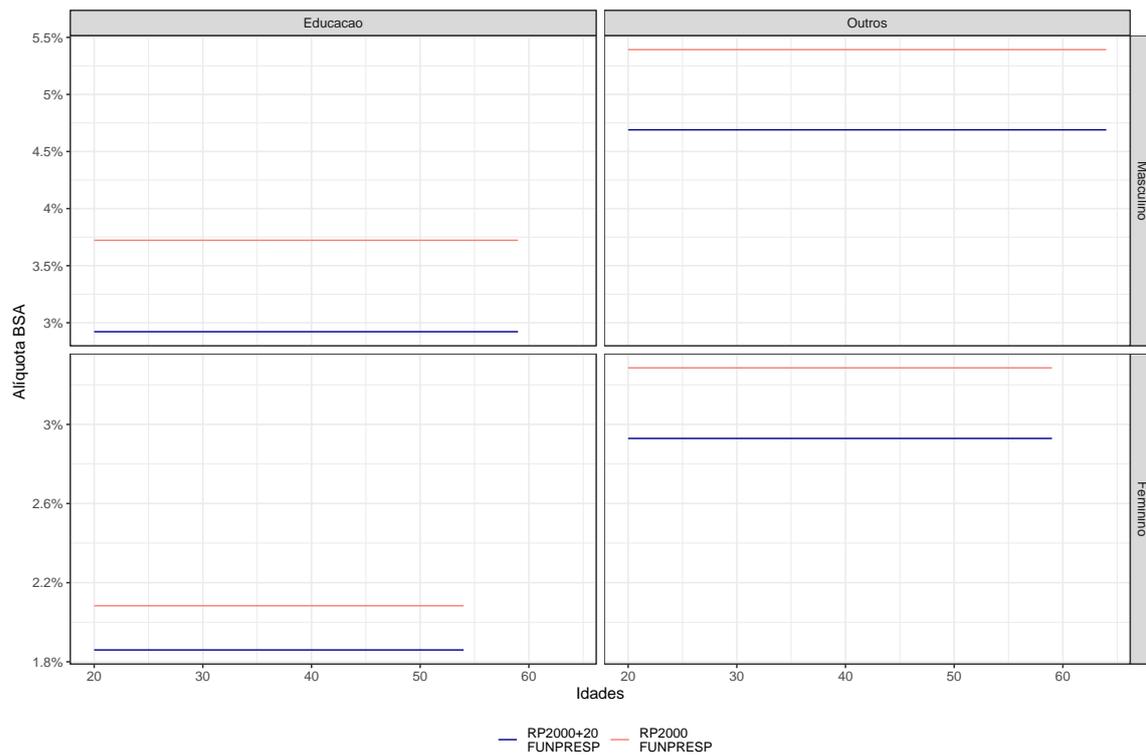


Figura 14: Alíquota atuarialmente justa para o custeio do benefício de sobrevivência do participante assistido em aposentadoria normal (BSA) para os diferentes perfis atuariais. **Fonte:** Elaborado pelo autor.

## 2.5.6 Aporte Extraordinário Aposentadoria Normal (AEAN)

O benefício de aposentadoria normal (BAP), calculado no instante  $h$ , é determinado pela reserva individual (RAP) e uma reserva obtida pelo aporte extraordinário, que é determinado pela razão entre  $35/T$ , sendo  $T$  o tempo de serviço necessário para aposentadoria no RPPS. Para esse benefício, os participantes que têm menor tempo

de contribuição (professores, professoras e servidoras) são beneficiados. O valor do benefício é definido por:

$$BAEAP^j = \frac{RAP^j \times \left(\frac{35}{T^j}\right)}{Fator(i, \dot{e}_h^{(m)})} \quad (2.26)$$

O net atuarial do aporte extraordinário ( $NAAE_x^j$ ) para o indivíduo  $j$ , no instante  $x$ , que tem idade de aposentadoria por idade prevista em  $m$  períodos a frente, é definido por:

$$\begin{aligned} NAAE_x^j(\tau_5) = \min \{ & CBAE_h(\tau_5) - \\ & \sum_{h=x}^{\dot{e}_h^{(m)}|} \{ {}_h p_x^{(\tau)} \times v^h \times AEAN_h \} - \\ & \sum_{h=x}^{\dot{e}_h^{(m)}|} \{ {}_{h-1} p_x^{(\tau)} \times v^h \times AEAN_h \times q_{(x+h)}^{(m)} \times a_{n:h}^{(m)} \times TX_{AEAMAs} \} - \\ & \sum_{h > \dot{e}_h^{(m)}|}^{\infty} \{ {}_h p_x^{(\tau)} \times v^h \times AEAN_h \times TX_{BSA \dot{i}_h^{(i)}|} a_{n:h}^{(m)} \}; CBAE_h(\tau_5) \} \end{aligned} \quad (2.27)$$

$x$  instante de avaliação

$NAAE_x^j$  valor presente net atuarial indivíduo  $j$  no instante  $x$ ,

$RAP_h$  reserva do participante do participante,

$CBAE_h$  valor de contribuição para o aporte extraordinário por aposentadoria normal em  $h$ ,

$v^h$  fator de financeiro  $(1+i)^{-h}$ ,

${}_h p_x^{(\tau)}$  probabilidade de sobreviver entre  $x$  e  $x+h$  em um modelo unidcremental,

$q_{(x)}^{(m)}$  probabilidade de morte entre  $x$  e  $x+1$  em um modelo unidcremental,

$AEAN_h$  valor do benefício de aposentadoria normal na data de aposentadoria  $h$ ,

$\dot{e}_h^{(m)}$  tempo de sobrevivência do participante no instante  $h$ ,

$\ddot{e}_h^{(m)} | a_{n:h}^{(m)}$  valor atuarial unitário pago como pensão para a morte do participante assistido por aposentadoria normal em  $h$  com prazo igual a expectativa de vida na data da morte,

$T^j$  tempo de serviço no RPPS para aposentadoria do indivíduo  $j$ ,

$\tau_5$  alíquota adotada para o benefício,

$TX_{AEAMAs}$  fator para cálculo da pensão por morte do participante assistido em aposentadoria normal,

$TX_{BSA}$  fator para cálculo do benefício por sobrevivência do participante assistido em aposentadoria normal,

A próxima etapa do processo de modelagem do passivo é investigar a sensibilidade do  $NAAI_x^j$  às mudanças de  $\tau_5$  para os diferentes perfis atuariais.

Conforme apresentado na equação 2.27, o benefício AEAN impacta a Aposentadoria Normal (AN), Benefício de Aposentadoria por Sobrevivência (BSA) e Pensão por morte do participante assistido de aposentadoria Normal (AEAMAs). Isto é, o principal objetivo do AEAN é aumentar o valor do benefício de aposentadoria normal, aumentando o saldo de conta individual acumulado de acordo com o perfil atuarial. No entanto, após a definição do valor do benefício de aposentadoria, há mais fontes de custo associado ao BAS, caso o participante supere a expectativa de vida, e ao AEAMAs, caso o participante faleça antes da expectativa.

Para evidenciar as diferentes fontes para custeio, a tabela 6 apresenta o percentual que cada fonte de custo para a composição do benefício AEAN para as diferentes tábuas.

Percebe-se, como esperado, que os custos associados ao benefício AEAN em todos os perfis é proveniente, majoritariamente, pela aposentadoria normal, com mais de 80%. Os demais benefícios representam um percentual inferior, mas não desprezível de fonte de custo para o plano.

É interessante destacar que tal percentual é invariante à idade de entrada e ao percentual de contribuição, isto é, a composição dos custos depende exclusivamente da ocupação e o sexo do participante, e suas respectivas tábuas biométricas.

Sexo	Custeio	Educação Básica		Demais	
		RP2000+20	RP2000	RP2000+20	RP2000
Homem	AN	80.52%	78.33%	-	-
Homem	BSA	10.3%	11.33%	-	-
Homem	AEAMAs	9.18%	10.33%	-	-
Mulher	AN	83.04%	82.34%	79.87%	78.96%
Mulher	BSA	8.92%	9.21%	10.45%	10.85%
Mulher	AEAMAs	8.04%	8.45%	9.68%	10.19%

Tabela 6: Distribuição de custo de AEAN associado ao Aposentadoria Normal (AN), Benefício de Aposentadoria por Sobrevivência (BSA) e Pensão por morte do participante assistido de aposentadoria normal (AEAMAs).

**Fonte:** Elaborado pelo autor.

A figura 15 apresenta as alíquotas atuarialmente justas para cada perfil. É possível notar que, como esperado, o perfil com maior alíquota é o de professoras do ensino básico, com cerca de 25% para as duas tábuas utilizadas. As demais servidoras e os professores do ensino básico possuem alíquota de aproximadamente 15%. Como os servidores homens não professores não têm direito ao benefício, a alíquotas justa seria de 0% para o custeio.

Apesar da diferença entre os perfis, esse e os demais benefícios tem carácter coletivo, sendo o custeio responsabilidade de todos. Por isso, é importante conhecer a distribuição dos participantes. Como exemplo, um aumento no número de profissionais da educação básica exigirá maior comprometimento de todos, refletindo-se no aumento da alíquota  $\tau_5$ .

Baseado em tais alíquotas atuarialmente justas obtidas por perfil atuarial, é possível calcular as alíquotas de equilíbrio para o custeio de cada benefícios e, assim, determinar a carga total de custeio para o plano.

## 2.6 Alíquotas de equilíbrio

O cálculo das alíquotas de equilíbrio é feito considerando duas configurações de participantes. A primeira distribuição, denominada de base de estoque, é formada

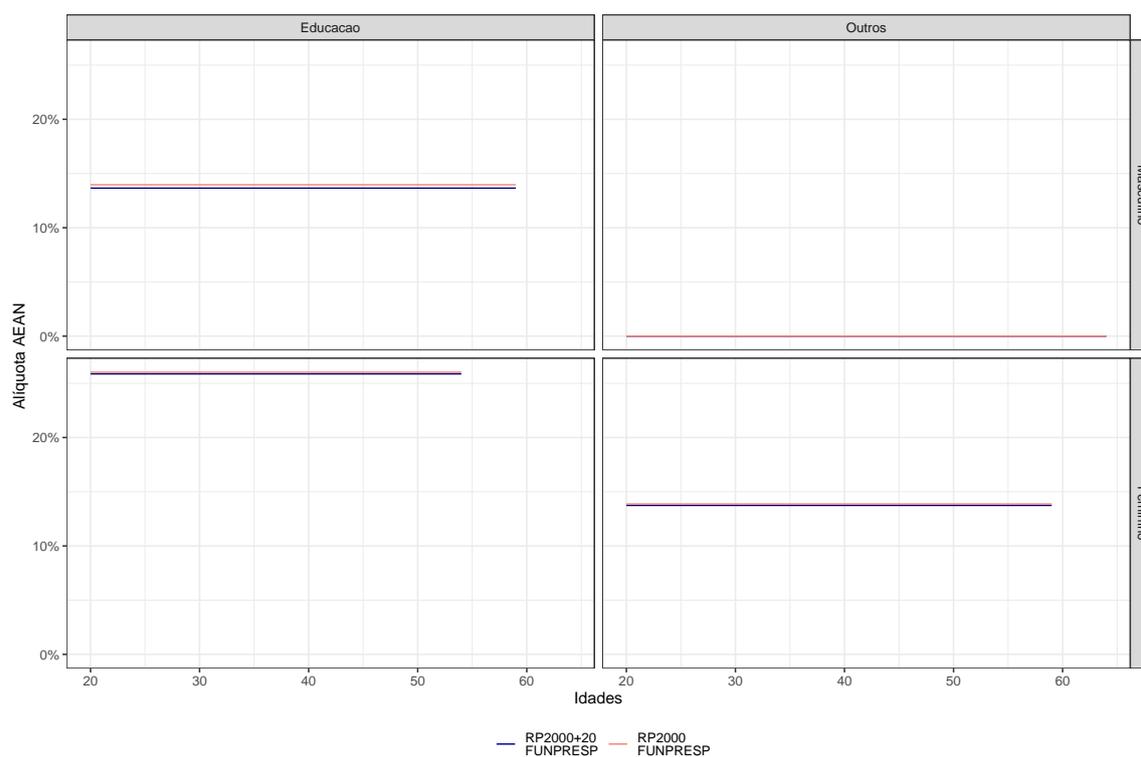


Figura 15: Alíquota atuarialmente justa para o custeio do benefício de aporte extraordinário para aposentadoria normal (AEAN) para os diferentes perfis atuariais.

**Fonte:** Elaborado pelo autor.

pela quantidade de servidores elegíveis para o plano da FUNPRESP-Exe na RAIS em 2015 que entraram após 2004, isto é, após a EC N° 41. A segunda configuração será formada pela distribuição de participantes obtida pelo comportamento médio de novos entrantes na condição de servidor elegíveis à FUNPRESP-Exe entre os anos de 2015 e 2017, denominada base de entrada.

É importante destacar que os dois cenários utilizados permitem a simulação do cálculo das alíquotas de equilíbrio utilizando a metodologia proposta. A diferença entre os cenários, base de entrada e base de estoque, representam mudanças demográfica na massa de participantes do plano e permitem a análise de sensibilidade das alíquotas de custeio.

A tabela 7 apresenta a distribuição relativa dos servidores considerados por perfil em cada uma das bases.

Perfil	Estoque		Entrada	
	Média de idade	(%)	Média de idade	(%)
Professor	37.0	3.88%	34.1	7.40%
Servidor	36.7	48.13%	36.1	48.05%
Professora	37.7	3.77%	34.5	5.89%
Servidora	37.0	44.23%	35.5	38.66%

Tabela 7: Distribuição dos registros elegíveis por perfil atuarial que estão na RAIS 2015. Os registros do estoque são aqueles estavam na base no início de 2015 e que permaneceram até o final de 2015. A base de entrada considera os registros que entraram entre 2015 e 2017 e permaneceram até o final de cada período.

**Fonte:** Elaborado pelo autor utilizando dados RAIS.

O gráfico 16 apresenta a quantidade de servidores que estão no serviço público segregados por idade em cada perfil atuarial. É possível notar uma distribuição modal próxima a idade de 35 anos, com média próximo a 37 anos. Além disso, percebe-se que os servidores da educação básica representam em torno de 7.65% da força de trabalho na base de estoque e 13.29% na base de entrada. Essa diferença entre as bases permitirá fazer a análise de sensibilidade do custeio previdenciário com a mudança do perfil dos participantes do plano.

O gráfico 17 apresenta a distribuição média por idade de cada perfil de servidores que entram no serviço público e que são elegíveis ao RPC. É possível notar uma distribuição assimétrica a direita com moda próxima a idades de 30 anos.

É importante notar que, para essa análise, foi desconsiderado os servidores que entraram no serviço público abaixo do teto previdenciário e se tornaram elegível após alguns anos. Considerando o crescimento real de salários em relação ao teto do RGPS, esse grupo não pode ser desconsiderado em análises futuras.

A tabela 8 apresenta as alíquotas de equilíbrio para as duas distribuições de participantes, as duas tábuas de mortalidade e diferentes percentuais de contribuições  $c = \{7.5\%, 8\%, 8.5\%\}$ . Percebe-se que alíquotas de equilíbrio são indiferentes à escolha do percentual de contribuição ( $c$ ) que incide sobre o salário de participação do servidor. Dessa forma, a decisão do participante não afeta o equilíbrio do plano, isto é, os participantes recebem os benefícios previdenciários proporcionalmente ao percentual de contribuição escolhido.

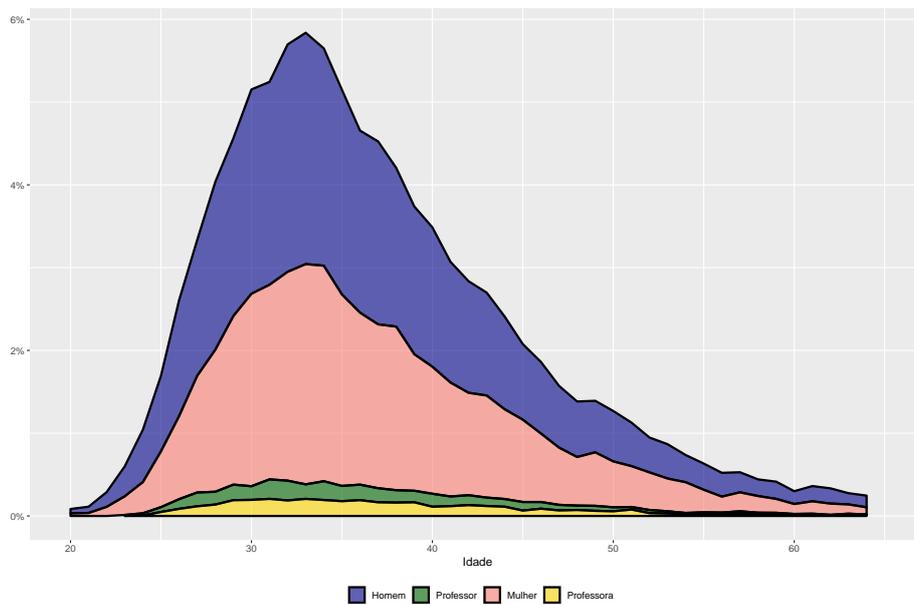


Figura 16: Distribuição de servidores elegíveis por idade e perfil atuarial que estão na RAIS 2015.

**Fonte:** Elaborado pelo autor utilizando dados RAIS.

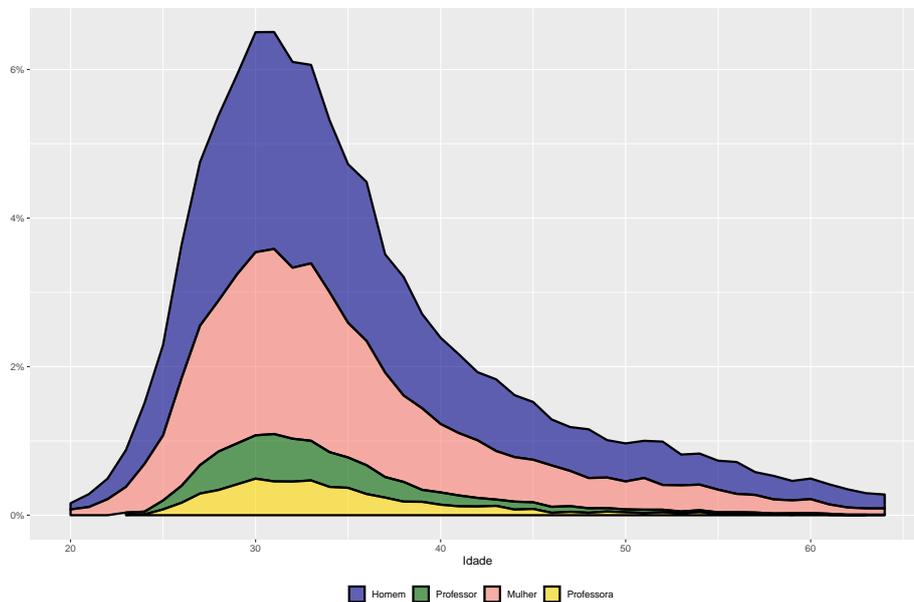


Figura 17: Distribuição média de servidores elegíveis à FUNPRESP-Exe por idade e perfil atuarial que entram no serviço público entre 2015 e 2017.

**Fonte:** Elaborado pelo autor utilizando dados RAIS.

$c$ (%)	Custeio	Base de entrada				Base de estoque			
		Alíquota (%)		Net (R\$)		Alíquota (%)		Net (R\$)	
		RP+20	RP	RP+20	RP	RP+20	RP	RP+20	RP
7.5	AEAi ( $\bar{\tau}_1$ )	7.1	7.2	2.0	3.3	7.8	7.9	1.8	2.6
7.5	AEAMAt ( $\bar{\tau}_2$ )	5.6	6.9	5.9	2.6	6.0	7.5	4.8	5.7
7.5	AEAMAsm ( $\bar{\tau}_3$ )	1.2	1.4	4.6	4.8	1.2	1.4	2.8	3.7
7.5	AEAMAsi ( $\bar{\tau}_4$ )	2.4	2.4	5.2	3.7	2.6	2.6	3.6	2.1
7.5	AEAN ( $\bar{\tau}_5$ )	8.0	8.0	7.4	0.2	7.4	7.5	1.9	3.3
7.5	BSA ( $\bar{\tau}_6$ )	3.9	4.4	5.3	0.1	3.9	4.5	2.1	4.9
8.0	AEAi ( $\bar{\tau}_1$ )	7.1	7.2	2.1	3.5	7.8	7.9	1.9	2.8
8.0	AEAMAt ( $\bar{\tau}_2$ )	5.6	6.9	6.3	2.7	6.0	7.5	5.1	6.1
8.0	AEAMAsm ( $\bar{\tau}_3$ )	1.2	1.4	4.9	5.1	1.2	1.4	3.0	3.9
8.0	AEAMAsi ( $\bar{\tau}_4$ )	2.4	2.4	5.6	3.9	2.6	2.6	3.9	2.2
8.0	AEAN ( $\bar{\tau}_5$ )	8.0	8.0	7.9	0.2	7.4	7.5	2.0	3.5
8.0	BSA ( $\bar{\tau}_6$ )	3.9	4.4	5.6	0.1	3.9	4.5	2.2	5.2
8.5	AEAi ( $\bar{\tau}_1$ )	7.1	7.2	2.3	3.7	7.8	7.9	2.0	3.0
8.5	AEAMAt ( $\bar{\tau}_2$ )	5.6	6.9	6.7	2.9	6.0	7.5	5.5	6.5
8.5	AEAMAsm ( $\bar{\tau}_3$ )	1.2	1.4	5.2	5.5	1.2	1.4	3.2	4.1
8.5	AEAMAsi ( $\bar{\tau}_4$ )	2.4	2.4	5.9	4.2	2.6	2.6	4.1	2.3
8.5	AEAN ( $\bar{\tau}_5$ )	8.0	8.0	8.4	0.3	7.4	7.5	2.1	3.7
8.5	BSA ( $\bar{\tau}_6$ )	3.9	4.4	6.0	0.1	3.9	4.5	2.4	5.5

Tabela 8: Alíquota de equilíbrio e net atuarial médio mensal dos custeio para os benefícios do plano, segregados por fluxo e estoque de servidores. Descrição RP+20 refere-se à tábua RP2000+20 e a RP para RP-2000.

**Fonte:** Elaborado pelo autor.

O modelo sugere que o custeio de AEAi ( $\bar{\tau}_1$ ) utilizando as tábuas adotadas pela EFPC seja de 7.1% para a distribuição de servidores observadas na entrada e de 7.8% no padrão do estoque. Como apresentado na seção específica desse benefício, os servidores com entrada tardia exigem maior esforço de custeio, permitindo analisar que o aumento médio de 3 anos na idade do participante significou o aumento de 0.7% na alíquota. Percebe-se que essa alíquota é pouco afetada pela mudança na tábua de mortalidade, com a diferença de apenas 0.1%. A mesma análise é feita para a alíquota de AEAMAsi ( $\bar{\tau}_4$ ), com aumento de 2.4% e 2.6% para a base de entrada e base estoque, respectivamente.

Para o AEAN ( $\bar{\tau}_5$ ), considerando a tábua adotada, a alíquota deve aumentar de 7.4% na base de estoque para 8% na base de entrada. Como foi analisado que esse be-

nefício é indiferente à data de entrada, esse aumento se deve a maior representatividade dos professores do ensino básico na base de entrada, demonstrando ser sensível às mudanças na força de trabalho. Esses valores são menos sensíveis às mudanças de tábuas de mortalidade, pois o AEAN é determinado após a idade de aposentadoria.

O benefício de pensão por morte do participante ativo AEAMAt ( $\bar{\tau}_2$ ) exige, considerando a tábua RP-2000 adotada, 6.9% para a configuração de entrada e 7.5% para a configuração de estoque. Dessa forma, esse benefício é sensível às mudanças na configuração dos participantes. Já a pensão por morte do participante em aposentadoria normal é o mesmo entre as configurações (1.2%), caracterizando-o como indiferentes à configuração de participantes das bases. Além disso, ele reduz em 0.2% com o aumento da expectativa de vida do participante. A mesma análise pode ser feita para o BSA, com redução da alíquota de 3.9% para 4.4% com o aumento da expectativa de vida.

É importante destacar que os valores do net atuarial das alíquotas de equilíbrio não são iguais a zero em razão da precisão 0.1% da busca em grela para as alíquotas ótimas. O valor exato da alíquota de equilíbrio pode ser determinado por aproximação.

A tabela 9 apresenta, de forma agregada, a alíquota de equilíbrio total para as duas bases de dados e com as diferentes tábuas biométricas. No padrão de entrada, a alíquota com a tábua biométrica da RP-2000 é de 30.3% e com o aumento da expectativa de vida a alíquota é reduzida para 28.2%. Considerando a base de estoque, a análise é a mesma, com redução de 2.5% para o custeio total considerando a tábua com maior expectativa.

Além disso, a configuração de participantes apresentada na base de estoque faz com que a alíquota aumente em 1.1% com a tábua RP2000 e em 0.7% com a tábua RP2000+20.

(%)	Entrada		Estoque	
	RP2000+20	RP2000	RP2000+20	RP2000
7.5	28.2%(R\$30.4)	30.3%(R\$14.6)	28.9%(R\$17.1)	31.4%(R\$22.2)
8.0	28.2%(R\$32.4)	30.3%(R\$15.6)	28.9%(R\$18.2)	31.4%(R\$23.7)
8.5	28.2%(R\$34.4)	30.3%(R\$16.6)	28.9%(R\$19.3)	31.4%(R\$25.1)

Tabela 9: Net atuarial para a alíquota de equilíbrio considerando fluxo de entrada e estoque RAIS.

**Fonte:** Elaborado pelo autor.

A base de estoque é fundamental para compreender o que poderia acontecer caso todos os servidores da ativa que estavam no regime RPPS migrassem para o RPC. Apesar de ser um cenário excessivamente conservador, a maneira como foi feita os cálculos e as análises permitem a compreensão da sensibilidade do custeio dos benefícios previdenciários às mudanças do perfil da força de trabalho.

A base de novos entrantes fornece condições para o gerenciamento instantâneo do equilíbrio atuarial, possibilitando que as mudanças demográficas dos perfis atuariais que entram no serviço público sejam ajustadas de maneira dinâmica. Por exemplo, caso a média de idade dos entrantes mude ou haja um aumento no número de profissionais da educação, as alíquotas de equilíbrio para o custeio dos benefícios BD podem ser calculadas instantaneamente.

De todo modo, as análises do passivo realizadas nessa tese permitem a gestão do passivo hipotético proposto.

## 3 Modelagem do ativo

Este capítulo discorre sobre os métodos para modelagem dos tipos de ativos arriscados utilizados pelo modelo ALM proposto, baseado na teoria Bayesiana e em estimação dinâmica. Como veremos a seguir, a estimação dos parâmetros do modelo permite discretizar a incerteza por meio de cenários em árvores.

### 3.1 Ativos financeiros

O montante de contribuições recebidas dos participantes é alocado pela EPFC em opções de investimento de diferentes características e risco. Como mencionado anteriormente a legislação para as EFPCs estabelece as classes de renda fixa, renda variável, estruturado, imobiliário, operações com participantes e investimentos no exterior. Dessa forma, cada uma dessas classes possui opções de investimento que serão denominados, genericamente, nesse trabalho como “ativos”. Esse estudo considera como opções de investimento ativos da classe de renda fixa e de renda variável.

Os ativos de renda fixa são formados, em linhas gerais, por títulos públicos federais, debêntures e os títulos de emissão bancária. Em linha com o que é utilizado nos trabalhos da literatura e diante das especificidades dos demais ativos, os ativos de renda fixa serão exclusivamente títulos da dívida pública mobiliária federal interna. Esses títulos são divididos em prefixados, com taxa de juros predefinido, e pós-fixados, formado por títulos indexados à inflação ou taxa de juros básica da economia, taxa Selic. Para essa tese serão considerados os títulos de renda fixa indexados ao Índice de Preços do Consumidor Amplo (IPCA), denominados Notas do Tesouro Nacional Série B (NTN-B). Isso é feito em razão da taxa de juros adotada pelo plano também ser indexada ao IPCA, o que simplifica o cálculo da rentabilidade real.

Ainda assim, existem variações dos ativos NTN-B com relação ao tempo de maturação, que nessa tese terá como sinônimo o termo “vértices”. O tempo de maturação, como o nome sugere, indica o período limite para o recebimento de todos os fluxos

periódicos de pagamento (cupom) e o principal. As opções de vértices dependem do período analisado, no entanto, são comuns títulos de 252 dias (1 ano) até mais de 8820 dias (35 anos).

Apesar longo período de maturação, esses títulos possuem liquidez diária e podem ser negociados, estando sujeito às variações do mercado e, nesse caso, considera-se que o título é dito marcado a mercado. Por outro lado, caso o título seja levado até a data final do contrato, ele é dito marcado a vencimento. O regulamento das EFPCs exige que a entidade defina a marcação ou método de precificação na data da compra da NTN-B. Nesse sentido, a CNPC nº 29, de 13 de abril de 2018, estabelece a impossibilidade de venda dos títulos públicos marcados a vencimento. Tais títulos quando comprados têm o fluxo de pagamento estabelecido deterministicamente composto por cupons e principal até o vencimento. Maiores detalhes sobre o fluxo de recebimento e o título de marcação podem ser encontrados no site do Tesouro Nacional <sup>1</sup>.

Dessa forma, os ativos de renda fixa considerados nessa tese são títulos públicos do tipo NTN-B de curta, média e longa maturação, com tempo de vencimento de 252, 2520 e 7560 dias, marcados à vencimento.

Já a classe de renda variável é composta por diversos tipos de ativos. Dentre eles o que mais caracteriza a classe, e que será considerado nessa tese, são as ações de empresas listadas na bolsa de valores do Brasil, BOVESPA. Atualmente, para esse tipo de ativo, existem mais de 300 opções de empresas. Por isso, serão considerados os indicadores setoriais<sup>2</sup> desses ativos, que são carteiras teóricas vinculadas aos principais setores<sup>3</sup> da economia. Nessa tese, são utilizados como opções para os ativos de renda variável o índice do setor Financeiro, composto por ativos com negociação relevante nos setores de intermediários financeiros, serviços financeiros diversos, previdência e seguros (IFN), índice do setor Imobiliário, composto por empresas relevantes com atividade imobiliária compreendidos por exploração de imóveis e construção civil (IMOB), índice do setor de Consumo, formado por ativos relacionados ao consumo cíclico, consumo não cíclico e saúde (ICON), índice do setor de Energia, formado por empresas do setor energético (IEE) e índice do setor Industrial, atividade industrial compreendidos por

<sup>1</sup> [Método para o cálculo do fluxo de recebimento associados aos títulos públicos do tipo NTN-B](#)

<sup>2</sup> [Regras e critérios para elaboração das carteiras teóricas.](#)

<sup>3</sup> [Lista de índices setoriais: IFN, IMOB, IEE, ICON E INDX](#)

materiais básicos, bens industriais entre outros (INDX). Diante da heterogeneidade dos índices setoriais acima, supomos ser capazes de captar, de maneira geral, as mudanças do retorno e volatilidade no mercado financeiro brasileiro.

Nas seções a seguir são apresentados os métodos para precificação do retorno dos ativos considerados nessa tese.

## 3.2 Ativos de renda fixa

A classe de ativos de renda fixa, formado pelos vértices de títulos públicos do tipo NTN-B, tem expectativa de rentabilidade determinada por diversos fatores econômicos. A precificação do título, Preço unitário (PU), segue metodologia expressa no manual de precificação Anbima e, de forma simplificada, é determinada pelo vencimento e taxa de rentabilidade. As taxas, por sua vez, são dadas por fatores estruturais da economia e utilizadas para estimar a estrutura a termo da taxa de juros (ETTJ), semelhante ao procedimento adotado por [Ribeiro \(2015\)](#), que segue metodologia proposta pela SUSEP e ANBIMA<sup>4</sup>. A metodologia é detalhada pelo BACEN em [Leite, Filho e Vicente \(2009\)](#) e utiliza método de interpolação para determinar a curva das taxas de juros segundo tempo de maturação (vértices).

Para essa tese, as taxas de juros dos títulos públicos serão determinadas pelos valores estimados pela ETTJ em janeiro de 2015. É importante destacar que os títulos públicos ficam livres da projeção de inflação, pois a rentabilidade é real com relação ao IPCA.

## 3.3 Ativos de renda variável

A seção a seguir apresenta o método dinâmico utilizado para modelagem dos ativos de renda variável, iniciada com uma revisão da teoria sobre o tema e em seguida o modelo proposto.

---

<sup>4</sup> Metodologia ANBIMA: <http://www.anbima.com.br>.

### 3.3.1 Modelos de Espaços de Estados

Um processo Markoviano é um tipo de processo estocástico em tempo discreto em as informações  $y_t$  sequenciais em  $t = 1, \dots, T$  violam os pressupostos a independência e permutabilidade, mas tem dependência limitada entre instantes imediatamente subsequentes, modeladas por meio do estados latentes (não observável)  $\theta_t$ . Essa característica permite que  $y_t$  e  $y_{t-1}$  sejam condicionalmente independente [West e Harrison \(1997\)](#).

$$\pi(y_t | \theta_t, y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_1) = \pi(y_t | \theta_t) \quad (3.1)$$

Os pressupostos para esse tipo de modelo de espaços de estado são:

P1  $\theta_t, t = 1, \dots, T$  segue um processo Markoviano;

P2 O vetor  $y_{1:t}$  são condicionalmente independentes dado  $\theta_t$ .

Tais pressupostos permitem que a estrutura de dependência condicional entre as observações  $y_{1:t}$  e os estados latentes  $\theta_{1:t}$  sejam representadas por meio da Equação de Observação e Equação de Evolução, respectivamente, expressa nas equações [3.2a](#) e [3.2b](#).

$$y_t \sim F(y_t | \theta_t, \Theta) + v_t \quad (3.2a)$$

$$\theta_t \sim G(\theta_t | \theta_{t-1}, \Theta) + w_t \quad (3.2b)$$

Sendo  $\Theta$  o vetor de parâmetros das equações de observações,  $F(\cdot)$ , e evolução,  $G(\cdot)$ , e  $v_t$  e  $w_t$  as perturbações aleatórias, denominadas sinal e o ruído ([PETRIS; PETRONE; CAMPAGNOLI, 2009](#)).

Uma importante classe de modelos são os que possuem erros aditivos e com distribuição Gaussiana, chamados de Modelos Dinâmicos Lineares Gaussianos, da sigla em inglês GLDM (*Gaussian Linear Dynamic Models*). Nesses casos, o processo de estimação pode seguir os passos do Filtro de Kalman ([WEST; HARRISON, 1997](#)).

Por meio do KF obtém-se estimativas de forma *on-line*, isto é, a cada nova informação são atualizadas as distribuições *a posteriori* dos estados latentes. Diferentemente do processo de estimação tradicional em que as inferências são feitas após todos os dados terem sido coletados. Para mais detalhes sobre expectância e variância condicional e processo de filtragem e suavização das estimativas dos modelos dinâmicos podem ser encontrados em [West e Harrison \(1997\)](#) e [Petris, Petrone e Campagnoli \(2009\)](#).

Os desafios do KF são (1) a complexidade e não-linearidade das equações 3.2a e 3.2b, (2) as distribuições de probabilidade associadas às perturbações  $v_t$  e  $w_t$  e (3) a complexidade de vetor de parâmetros  $\Theta$ .

Para o primeiro desafio, relacionado a não-linearidade das equações 3.2a e 3.2a, uma saída possível é o uso de *Extended Kalman Filter* (EKF) que aproxima o processo de filtragem em sistemas não lineares baseado na linearização local de primeira ordem ([LJUNG, 1979](#)). Tal filtragem modificada é utilizada para ajuste de séries temporais financeiras e econômicas. Por exemplo, em finanças é utilizado para modelagem de preços de ações ([SLIM, 2006](#)) e para economia em índices macro econômicos, como no hiato do produto ([OZBEK; OZLALE, 2005](#)).

Outro processo de estimação utilizando filtragem em casos de não-linearidade é o chamado *Unscented Kalman Filter* (UKF). O UKF se baseia na propagação através do sistema não-linear de pontos discretizados da distribuição Gaussiana e aproxima a distribuição *a posteriori* de forma mais precisa do que EKF ([HUANG, 2008](#)). Para EKF e UKF é assumido a distribuição Gaussiana e em casos de violação desse pressuposto, conforme [Huang \(2008\)](#), tais métodos implicam em estimação sub-ótima.

A metodologia utilizada nessa tese para superar as limitações do KF é o Filtro de Partículas (FP). As principais características do FP é 1) proporcionar um processo de estimação *on-line* dos parâmetros, sem que seja necessário a reestimação utilizando os dados anteriores; 2) aprimorar as equações de evolução 3.2a e observação 3.2b, permitindo incorporar as relações de não linearidade e erros não aditivos; 3) permitir que o ruído e o sinal possuam distribuições não-Gaussiana; e 4) discretização do espaço paramétrico do vetor de estados latentes e parâmetros.

Na seção a seguir é definido o modelo utilizando FP para ajuste das séries temporais de preços de ações.

### 3.3.2 Filtro de Partículas

O Filtro de Partículas (FP) foi inicialmente proposto por [Gordon, Salmond e Smith \(1993\)](#) e tem como objetivo utilizar o processo sequencial de estimação dos modelos Bayesianos diante de situações de não linearidade ou com complexidade que inviabilizariam os resultados analiticamente. Nesse tipo de situação, as soluções baseadas em Monte Carlo, tais como MCMC, Gibbs Sampler e Metropolis-Hasting são utilizadas para estimação das distribuições a posteriores dos parâmetros.

Nesse contexto, o trabalho de [Pitt e Shephard \(1999\)](#) propôs melhorias para as equações de transições do modelo para estimação dos estados latentes. Os resultados de [Liu e West \(2001\)](#) e de [Storvik \(2002\)](#) apresentam soluções para estimação dos parâmetros dos modelos nos casos em que não se tenha forma fechada, seja devido a complexidade ou não linearidade das equações de evolução de observação e a distribuição não gaussiana para os ruídos e sinais ([NASCIMENTO, 2014](#)).

Mais recentemente, a técnica foi aperfeiçoada na área de séries temporais com os trabalhos de [Carvalho et al. \(2010\)](#), [Lopes e Tsay \(2011\)](#), [Virbickaite et al. \(2016\)](#) e [Jacquier e Polson \(2011\)](#). Recentemente, trabalhos como o de [Li e Coates \(2017\)](#) e [Bunch e Godsill \(2016\)](#) lidam com modelos não lineares Gaussianos utilizando FP com a nomenclatura de *particle flow*, no entanto, o objetivo de simplificar a obtenção da distribuição a *posteriori* dos estados latentes é o mesmo.

Uma das principais características da técnica é, ao longo do processo *on-line* de estimação, utilizar ações de amostragem e reamostragem no processo de propagação entre as equações de observação e do sistema. Dessa forma, o FP pode ser utilizado para aproximar o processo de filtragem por meio da seguinte aproximação:

$$\pi(\theta_t|y_t) \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{(\theta_t, \Theta)^{(i)}}$$

sendo  $(\theta_t, \Theta)^{(i)}$  a partícula  $i$  do vetor de parâmetros e estados latentes e  $\delta$ , a função de Dirac ([CARVALHO et al., 2010](#)). Dessa forma, as partículas são a discretização paramétrica da distribuição de interesse.

Tal discretização, permite que o conjunto de partículas  $(\theta_{t-1}, \Theta)^{(i)}$  atravessem

a equação de evolução (3.2b) com probabilidade associada a distribuição  $(\theta_t, \Theta)^{(i)} \sim \pi(\theta_t | (\theta_{t-1}, \Theta)^{(i)*})$  gerando novas partículas candidatas em  $t$  que são avaliadas pela parte observável do processo  $y_t$  por meio da equação de observação (3.2a), obtendo, por fim, a distribuição a posteriori  $\pi(y_t | (\theta_t, \Theta)^{(i)*})$ .

Há um peso associado a cada partícula, representado por  $w_t^{(i)} \propto \pi(y_t | (\theta_t, \Theta)^{(i)*})$ , que, por meio do processo de reamostragem, são utilizados para obter a aproximação para a distribuição a posterior  $\hat{\pi}(\theta_t | y_t)$  (CARVALHO et al., 2010). Os pesos são determinados por:

$$w_t^{(i)} \propto \frac{\pi(y_t | (\theta_t, \Theta)^{(i)*}) \pi(\theta_t | (\theta_{t-1}, \Theta)^{(i)*})}{g(\theta_t^{(i)} | \theta_{t-1}^{(i)}, y_t)}$$

A função  $g(\theta_t^{(i)} | \theta_{t-1}^{(i)}, y_t)$  é chamada de Função de Transição de Importância (FTI). Variações na FTI determinam os diferentes tipos de Filtro de Partículas (PETRIS; PETRONE; CAMPAGNOLI, 2009).

A principal diferença entre os filtros de Gordon, Salmond e Smith (1993) e Pitt e Shephard (1999) é a sequência de propagação e reamostragem. No primeiro deles, as partículas são inicialmente propagadas, para só então serem reamostradas com a supervisão das observações. No segundo, o processo é invertido, garantindo que as melhores partículas sejam utilizadas para os passos seguintes (CARVALHO et al., 2010).

Considere  $\Theta$  o conjunto de parâmetros que fazem parte das equações observação e de sistema. O processo de estimação desses parâmetros é abordado por Liu e West (2001) por meio de aproximações de mistura de normais multivariadas, enquanto Storvik (2002) utiliza estatísticas suficientes para amostrar sequencialmente a distribuição para  $\Theta$ . Mais recentemente, o trabalho de Carvalho et al. (2010) propõe uma metodologia denominada *Particle Learning*, que utiliza estatísticas suficientes combinada com a abordagem de reamostragem-propagação.

Um dos principais desafios associado ao FP é problema de degeneração das partículas, fazendo com que os pesos associados às partículas estejam concentrados em poucas candidatas, reduzindo o número efetivo de partículas e comprometendo o processo de estimação. No entanto, esse problema é evitado aumentando do número de partículas, utilizando estatísticas suficientes e usando o processo de reamostragem-

propagação (VIRBICKAITE et al., 2016).

Essa tese utiliza o Filtro de Partículas com a abordagem proposta *Particle Learning* para modelar a volatilidade das séries temporais dos ativos arriscados.

### 3.3.3 Modelo de Volatilidade Estocástica

A volatilidade de séries temporais é fundamental para a análise de investimento e gerenciamento de risco. Estudos sobre o parâmetro de incertezas associadas ao apreçamento de ativos é utilizado em diversas áreas de finanças, entre eles, precificação de opções (HULL; WHITE, 1987), seleção de portfólio (MARKOWITZ, 1952), *Asset Pricing Theory* (LINTNER, ), CAPM (FAMA; MACBETH, ) e compreensão de retornos de ativos de alta volatilidade Omori et al. (2007).

Apesar da dificuldade para se obter o mesmo desempenho do modelo *Generalized Auto Regressive Conditionally Heteroskedastic* (GARCH), modelos que incorporem memória longa *Fractionally Integrated* (FI) GARCH e mudança de regime (*Markov-Switching*) melhoram as previsões *out-of-sample* (LUX; MORALES-ARIAS, 2013). Dentre os modelos desenvolvidos destaca-se os de *Stochastic Volatility* (SV), inicialmente proposto por Hull e White (1987).

Assim como a maioria das modelagens probabilísticas em finanças, os modelos de SV foram inicialmente formulados com variáveis de ruído e perturbação com distribuição gaussiana, tais como em Hull e White (1987). Recentemente, o trabalho de Virbickaite et al. (2016) lidou de maneira menos analítica para tratar das fontes de variações sistêmicas e distribuições de caudas pesadas em séries financeiras e, para isso, utilizou misturas de normais para modelar SV.

Uma possível formulação para o modelo SV é:

$$\begin{aligned} y_t &= \exp\left(\frac{x_t}{2}\right) \varepsilon_t \\ x_t &= \alpha + \beta x_{t-1} + w_t \end{aligned} \tag{3.3}$$

É possível realizar a linearização proposta por Kim, Shepherd e Chib (1998)  $r_t = \log(y_t^2)$ . Nesse caso, o modelo seria formado pelas seguintes equações de observação e de sistema:

$$\begin{aligned} r_t &= x_t + v_t \\ x_t &= \alpha + \beta x_{t-1} + w_t \end{aligned} \quad (3.4)$$

É importante destacar que a distribuição de  $v_t$  não é gaussiana. Caso  $\varepsilon_t \sim N(0, 1)$  a distribuição exata é  $\log(\chi^2)$ , sendo  $\chi^2$  uma variável com distribuição Qui-Quadrado que pode ser aproximada pela mistura de 7 normais com os seguintes parâmetros (KIM; SHEPHERD; CHIB, 1998):

$$v_t \sim \log(\chi^2) \approx \sum_{i=1}^7 \pi_i f_N(\mu_i, \sigma^2) \quad (3.5)$$

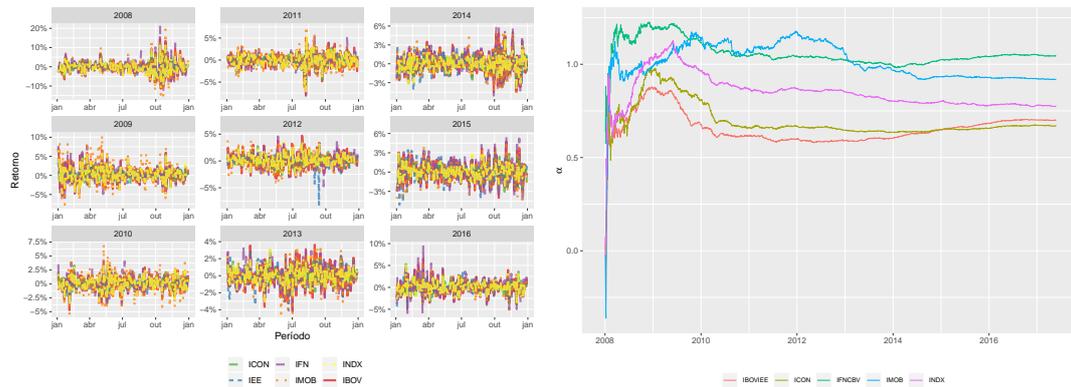
$\pi_i$	$\mu_i$	$\sigma_i$
0.00730	-11.40039	2.40748
0.10556	-5.24321	1.61669
0.00002	-9.83726	2.27585
0.04395	1.50746	0.40908
0.34001	-0.65098	0.80006
0.24566	0.52478	0.58329
0.25750	-2.35859	1.12366

Tabela 10: Parâmetros aproximação de erros por mistura de normais.

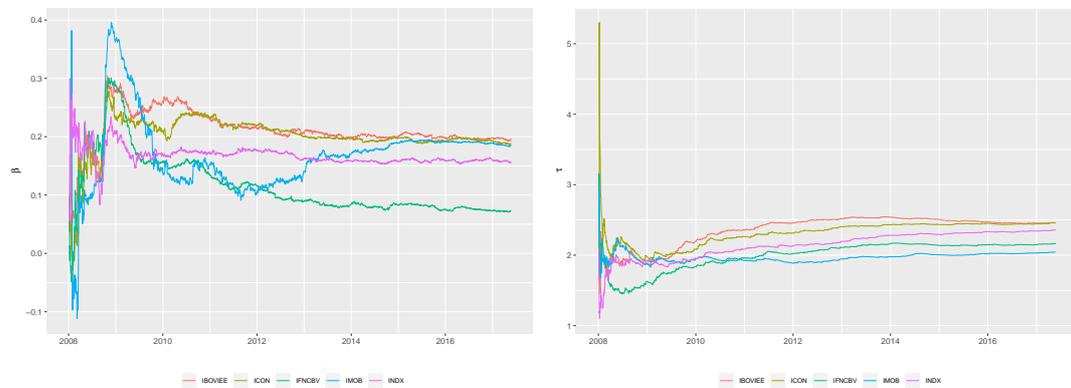
**Fonte:** Kim, Shepherd e Chib (1998)

Foi ajustado o modelo SV apresentado em 3.4 para dos 5 indicadores setoriais utilizados nessa tese considerando os dados diários tese dados entre 04/01/2008 e 30/06/2017 para a estimação.

A figura 18 apresenta as estimativas do modelo SV para cada série individual. Os resultados sugerem, por meio do parâmetro  $\alpha$ , que o indicador financeiro possui maior nível de volatilidade, acompanhado pelo indicador imobiliário que apresentou uma queda no nível médio nos últimos anos de análise. Por outro lado, os indicadores dos setores de consumo e energia possuem nível menor de volatilidade. De maneira análoga, o parâmetro  $\beta$ , que indicando a parte auto-regressiva do modelo, é similar para os índices de consumo e energia. O parâmetro  $\tau$  possui comportamento similar entre os indicadores.



(a) Série histórica do retorno dos índices setoriais. (b) Estimativas dinâmicas para o parâmetro  $\alpha$  de cada índice setorial.



(c) Estimativas dinâmicas para o parâmetro  $\beta$  de cada índice setorial. (d) Estimativas dinâmicas para o parâmetro  $\tau$  de cada índice setorial.

Figura 18: (a) Série histórica do retorno e estimativas do modelo de volatilidade estocástica utilizando  $M = 100000$  partículas para os índices setoriais de energia (IEE), consumo (ICON), financeiro (IFN), indústria (INDX), imobiliário (IMOB) e IBOVESPA (IBOV).

**Fonte:** Elaborado pelo autor.

Esses índices serão utilizados para a alocação dos recursos financeiros no modelo ALM. Dessa forma, com base nos parâmetros estimados, são simulados cenários ( $k$ ) para a trajetória ( $t$ ) dos retorno ( $\tilde{X}_t^k$ ) desses ativos utilizado a distribuição Normal Multivariada com correlação ( $\tilde{\rho}$ ) e média ( $\tilde{\mu}$ ) determinados pelos dados históricos:

$$\tilde{X}_t^k \sim N_5 \left( \tilde{\mu}^k, \Sigma_t^k \right), t = 1, \dots, T; k = 1, \dots, N \quad (3.6)$$

sendo  $\Sigma_t^k$  a matriz de covariância obtida por  $\Sigma_t^k = \tilde{\sigma}_t^k \tilde{\rho} (\tilde{\sigma}_t^k)^T$ , onde  $\tilde{\rho}$  é a matriz de correlação histórica e  $\tilde{\sigma}_t^k$  o desvio padrão estimado pelo modelo SV.

Apesar dos caminhos simulados pudessem refletir a incerteza, dependendo da quantidade de cenários seria inviável em problema de otimização com elevado número de parâmetros. Esse problema será contornado nessa tese utilizando a análise de agrupamento em cenários em árvore (XU; CHEN; YANG, 2012).

### 3.3.4 Cenário em árvore

A simulação do cenário é uma importante etapa para solução de problema de programação em múltiplos estágios (ALBEANU; GHICA; POPENTIU-VLADICESCU, 2008). Métodos de geração de cenário baseado na proximidade de estatísticas de momento tem sido estudado pela literatura (DUPAČOVÁ; CONSIGLI; WALLACE, 2000; HØYLAND; WALLACE, 2001; GÜLPINAR; RUSTEM; SETTERGREN, 2004). O trabalho de Xu, Chen e Yang (2012) utiliza o método propondo uma modificação ao processo de clusterização baseado na probabilidade dos eventos. Aspectos sobre a convergência do uso de cenários em árvore são apresentadas por Heitsch e Römisch (2011).

O trabalho de Dang et al. (2010) utiliza cenários em árvore para otimizar a riqueza sujeita a uma função utilidade em um horizonte com múltiplas decisões. Os autores utilizam o *Forward Sequential Clustering Algorithm* (FSCA), um algoritmo de clusterização sequencial.

A figura 19 representa um cenário em árvore com  $(t_1 = 3, t_2 = 2, t_3 = 3)$ .

Para essa tese, foram simulados 10000 cenários utilizando 3.6. Em seguida, essas simulações foram utilizadas para criar o cenário em árvore seguindo FSCA proposto por Dang et al. (2010), com número caminhos de nós igual  $(t_1 = 8, t_2 = 4, t_3 = 3)$ . Assim, a incerteza associada aos ativos considerados será representada por 96 cenários em árvore. A adoção de um número decrescente de ramificações garante melhor precisão e controle dos resultados de decisão (XU; CHEN; YANG, 2012).

O número de cenários é um parâmetro crítico em modelos de maior complexidade, tendo, dessa forma, limitação determinada pela capacidade de processamento disponível. Evidentemente para grandes entidades financeiras a disponibilidade de su-

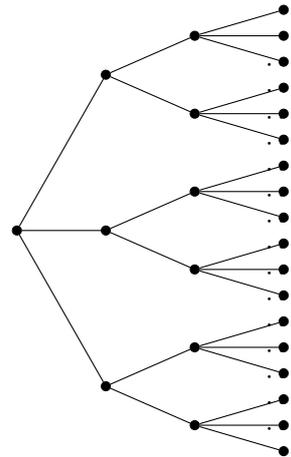


Figura 19: Representação do cenário em árvore pelo método *Forward Sequential Clustering Algorithm* ( $t_1 = 3, t_2 = 2, t_3 = 3$ ).

**Fonte:** Elaborado pelo autor.

percomputadores permite o aumento do número de nós e cenários.

Diante disso, a tabela 11 apresenta as estatísticas descritivas para o retorno dos ativos arriscados considerando a base de dados histórica, a simulação padrão de cenários, por meio da equação 3.6 e a simulação em árvore FSCA(8,4,3).

É possível perceber que, a correlação entre o cenário em árvore ficou mais próximo da correlação histórica, apesar da variabilidade com cenário em árvore ser menor do que a observada. Em média, as estatísticas históricas e simuladas são próximas.

Assim como a classe de renda fixa, formado pelos vértices de NTN-B, a retorno desses ativos é real com relação ao IPCA. Nessa tese, a projeção do IPCA seguiu a orientação encontrada no relatório Focus produzido pelo Banco Central do Brasil (BACEN), que, diante das condições econômicas na data de referência para as simulações, janeiro de 2015, manteve a projeção de inflação em a 6.5% (GERIN, 2014). Essa projeção foi mantida ao longo de todo período analisado. Por coincidir com o teto da meta de inflação do BACEN, tal premissa pode ser considerada conservadora.

Histórico (diário)									
Ativo	Média	Desvio	Q01	Q05	IEE	ICON	IFN	IMOB	INDX
IEE	0.031	1.297	-3.658	-1.890	1.000	0.728	0.675	0.628	0.703
ICON	0.059	1.447	-3.717	-2.097	0.728	1.000	0.787	0.765	0.905
IFN	0.057	2.104	-5.301	-2.894	0.675	0.787	1.000	0.754	0.818
IMOB	-0.004	2.419	-6.817	-3.386	0.628	0.765	0.754	1.000	0.803
INDX	0.024	1.703	-4.810	-2.517	0.703	0.905	0.818	0.803	1.000
Simulação (anual)									
Ativo	Média	Desvio	Q01	Q05	IEE	ICON	IFN	IMOB	INDX
IEE	8.236	32.387	-48.233	-36.118	1.000	0.480	0.467	0.441	0.475
ICON	16.069	33.860	-43.348	-30.519	0.480	1.000	0.552	0.545	0.621
IFN	15.320	32.942	-42.510	-30.107	0.467	0.552	1.000	0.565	0.589
IMOB	-1.084	27.700	-50.034	-39.480	0.441	0.545	0.565	1.000	0.587
INDX	6.249	30.542	-47.364	-35.886	0.475	0.621	0.589	0.587	1.000
Simulação em árvore (anual)									
Ativo	Média	Desvio	Q01	Q05	IEE	ICON	IFN	IMOB	INDX
IEE	8.327	20.452	-24.859	-18.036	1.000	0.725	0.724	0.705	0.754
ICON	16.557	24.071	-20.878	-17.173	0.725	1.000	0.812	0.812	0.872
IFN	15.139	22.984	-22.470	-17.028	0.724	0.812	1.000	0.846	0.830
IMOB	-1.224	19.039	-32.978	-29.142	0.705	0.812	0.846	1.000	0.835
INDX	6.858	22.112	-29.258	-21.291	0.754	0.872	0.830	0.835	1.000

Tabela 11: Tabela com estatísticas descritivas do retorno nominal dos índices setoriais de energia (IEE), consumo (ICON), financeiro (IFN), indústria (INDX) e imobiliário (IMOB) para o histórico diário, simulação padrão e simulação em árvore.

**Fonte:** Elaborado pelo autor.

## 4 Gerenciamento de Ativo e Passivo

Nessa seção são apresentadas as principais metodologias encontradas na literatura no estudo sobre alocação dinâmica de ativos, apresentada cronologicamente para melhor acompanhamento da evolução de métodos.

### 4.1 Introdução

O trabalho de [Samuelson \(1969\)](#) é considerado pela literatura analisada como o artigo seminal no estudo de alocação com decisão em múltiplos períodos, com um processo dinâmico de investimento. O autor define uma função utilidade, testando a possível diferença de postura entre um investidor com pouca ou muita aversão a risco e propõe uma função objetivo a ser maximizada de acordo com a riqueza e o consumo, ao longo de múltiplos períodos em tempo discretos, fazendo com que a decisão de consumo seja feita de acordo com as ocorrências estocásticas dos retornos dos ativos do portfólio. Isso é feito utilizando o problema de maximização para um simples período em cada instante no intervalo de análise. Ao final do artigo, é destacado a inexistência de risco adicional para o uso de múltiplos períodos, o que sugere o uso de cenários, amplamente adotado pelos trabalhos posteriores.

O trabalho de [Consigli e Dempster \(1998\)](#) modulariza o processo dinâmico decisório definindo recursivamente a tomada de decisão por meio da combinação entre a decisão no instante imediatamente anterior e um efeito aleatório contemporâneo. Assim, cada decisão deve considerar as consequências de tal decisão e de fatores aleatórios. O trabalho apresenta um problema de otimização solucionado por meios computacionais, dinâmicos e estocásticos, comparando os métodos e indicando o estado da arte na época.

[Barberis \(2000\)](#) apresenta uma solução analítica para precificação dinâmica de ativos. O trabalho avalia como a incerteza sobre a previsibilidade dos retornos dos ativos podem afetar a alocação ao longo prazo. Isso é feito analisando o impacto da incerteza nas estratégias *buy-and-hold* e com rebalanceamento dinâmico. Na primeira estratégia,

a decisão é tomada e está completamente está sujeita a um processo estocástico futuro. A segunda estratégia a decisão é tomada sabendo que a carteira será rebalanceada à medida que se tenha acesso a novas informações. Em ambas estratégias, o autor verifica que não se pode ignorar o fator de incerteza para alocação, nos investimentos de curto ou longo prazo.

Mais adiante, o artigo [Xia \(2001\)](#) se propõe a avaliar os impactos do tratamento dado para os efeitos de incerteza no horizonte de investimento. Para isso, discorre, principalmente, sobre o processo de atualização dos parâmetros das equações de previsão de preços, recorrendo a um modelo com coeficientes estocásticos e não observáveis. Nesse trabalho, o processo decisório dinâmico é dividido em atualização dos parâmetros do modelo de previsão e otimização da carteira utilizando os parâmetros atualizados e as incertezas futuras. Para isso, o autor sugere a utilização de modelos de espaços de estados, que é adotado nessa tese para modelagem da incerteza sobre os ativos financeiros.

O trabalho de [Hibiki \(2006\)](#) trata sobre alocação dinâmica de ativos em problemas estocásticos de otimização. Especificamente para problemas de fundos de pensão, o trabalho de [Hilli et al. \(2007\)](#) desenvolve um solução via programação estocástica para investimento a longo prazo com decisão dinâmica.

O modelo decisório de [Kouwenberg e Zenios \(2008\)](#) é semelhante ao de [Consigli e Dempster \(1998\)](#), com tomadas de decisão antes e depois de obtidas informações sujeitas a incertezas. Segundo o autor, a geração do cenário dos passivos, associados a questões específicas da instituição, e dos ativos, relacionado a fatores econômicos, é a chave do sucesso para o modelo ALM. Além disso o autor indica que não existiam, até o momento, modelos ALM, a tempos discreto ou contínuo, que incorporem custo de transação, previsão de retornos, incerteza paramétrica, mercados incompletos, restrições regulatórias, políticas corporativas de forma conjunta. Além disso, o autor sugere a adoção de cenários em árvore para problemas de otimização em múltiplos estágios.

Até esse instante, a literatura em otimização da alocação de recursos adota modelos de otimização em múltiplos estágios, com modularização da modelagem do ativo, incorporando os fluxos do passivo, e utilizando cenários em árvore. Nesse ponto, é possível perceber que as obrigações futuras dos passivos não são modeladas pelos trabalhos, sendo caracterizada apenas como um fluxo financeiro.

O artigo Wachter (2010) apresenta uma abordagem bayesiana para a modelagem da alocação de ativos frente a futura riqueza esperada. A autora menciona que, apesar do desconhecimento dos parâmetros, o investidor é bayesiano e tem *priori's* acerca dos parâmetros e que posteriormente, quando tiver acesso às observações, poderá fazer inferências baseado nas leis de probabilidade. O trabalho é dividido em modelos 1 passo a frente e múltiplos períodos a frente, e reforça o desafio de lidar com a dimensionalidade e possíveis formas não fechadas para tratar dos modelos abordados.

O artigo de Consigli et al. (2012) utiliza um modelo de otimização em múltiplos estágios para propor alocação ótima considerando diferentes perfis e exposição à risco. Além disso, Dempster e Medova (2011) analisa um software para o planejamento familiar baseado em objetivos financeiros futuros. Esses trabalhos sugerem vantagens para os modelos ALM individuais, que são incorporados no modelo proposto nessa tese por meio de perfis de investimento e perfis atuariais.

O artigo Ferstl e Weissensteiner (2011) discute métodos para tratar problemas de ALM por meio de programação estocástica linear (SLP) utilizando fluxos de caixa de passivos exógeno. A função objetivo é minimizar o *Conditional Value at Risk* (CVaR). O autor utiliza um modelo Vetor Auto regressivo de primeira ordem para estimar o valor esperado para índices de ações, dividendos e *commodities*. E a alocação se divide entre ações e *zero coupon bonds* (curto, médio e longo).

O artigo Gulpinar e Pachamano (2013) classifica as soluções para modelos ALM em: Programação Dinâmica, Simulação e Programação estocástica. Além disso, o autor considera que a programação estocástica tem como desafio o número de cenários que cresce exponencialmente conforme os períodos de análise. Nessa tese, os desafios apontados pelo autor são contornados pelo uso de aproximações para os estados de espaços ou relaxando o problema de otimização para torná-lo factível. Além disso, o autor sugere um problema específico para fundos de pensão: determinar a melhor taxa de contribuição. Nesse sentido, essa tese se distingue dos demais trabalhos ao modelar o custeio das obrigações previdenciárias, calculando as alíquotas de equilíbrio atuarial.

O artigo de Johannes, Korteweg e Polson (2014) é o mais próximo do estado da arte para modelagem dos ativos financeiros. O autor utiliza, explicitamente, modelos dinâmicos via Filtro de Partículas (FP) para incorporar a aprendizagem na estimação

dinâmica dos parâmetros utilizados para modelar as séries temporais de ações e dividendos da bolsa americana. Após isso, os autores utilizam uma função objetivo que maximiza a riqueza final do investidor.

No contexto brasileiro, [Dias \(2006\)](#) detalha os procedimentos financeiros para o acúmulo de contribuições e determinação do valor de benefício para uma pessoa em um plano CD, utilizando a tábua AT-2000. A autora utiliza indicadores financeiros como *proxy* de rentabilidade para classes de investimento, e utiliza um modelo econométrico Vetor Auto Regressivo (VAR) para simular cenários de rentabilidade. A estratégia de investimento para as contribuições não é otimizada, sendo determinada de forma fixa.

O trabalho de [Silva et al. \(2013\)](#) considera índices macroeconômicos de juros, inflação e mercado de capitais para simular retorno dos ativos baseado 4 cenários em um horizonte de 40 anos, modelados por meio de variações do vetor Auto Regressivo com Correção de Erros (VECM) e alocação do portfólio feita de maneira estática em 5 estratégia de investimento. Essas instituições também estão interessadas em analisar os riscos em diferentes cenários macroeconômico. O trabalho de [Leão, Martins e Locatelli \(2012\)](#) estuda o ALM no contexto do banco de fomento do estado de Minas Gerais e conceita 5 riscos relacionadas aos modelos ALM: juros de negociação, juros de desca-samento, mercado, câmbio e *commodities*. [Ribeiro \(2015\)](#) apresenta um modelo para entidades abertas de previdência complementar apresentando um modelo programação estocástica multiestágio considerando ativos de renda fixa e utilizando a tábua biométrica BR-EMS, utilizadas por seguradoras brasileiras.

Também voltado para um plano privado o trabalho de [Bhering \(2005\)](#) propõe um modelo ALM individual para um plano de CD por meio da programação dinâmica com decisão em múltiplos estágios para 2 ativos, mais e menos arriscado, com o uso de simulação estocástica. O autor se baseia no trabalho de [Haberman e Vigna \(2002\)](#), que analisa a sensibilidade desse modelo ALM nas medidas de risco para alterações de meta de montante acumulado, parâmetro de aversão a risco e correlação entre os ativos.

De maneira geral, a revisão indica que não se pode ignorar o impacto da incerteza nos modelos de previsões, principalmente para investimentos de longo prazo como em fundos de pensão. No entanto, a maior parte da literatura ignora o efeito de incerteza sobre os parâmetros. Nessa tese, o uso de modelos de precificação com atualização

dinâmica da volatilidade permite que lidar mais apropriadamente com a incerteza.

Além disso, é indicativo propor um modelo ALM que incorpore a incerteza paramétrica nos parâmetros dos modelos de previsão de ativos, principalmente para investimentos de longo prazo. Direcionado para os fundos de pensão, é necessária uma função objetivo que incorpore múltiplos estágios decisórios e aspectos realísticos para o processo de gerenciamento de ativos, por exemplo, restrições legais, fluxos de passivos e alíquotas de contribuição ótima. Para isso, diferentemente da literatura encontrada, é necessário a modelagem do passivo previdenciário.

## 4.2 Programação Dinâmica Estocástica

Como apresentado na seção 4.1, modelos de otimização em múltiplos estágios têm sido amplamente utilizados na área de finanças, com o trabalho seminal de [Samuelson \(1969\)](#) para formação de portfólio. Mais especificamente em ALM, o trabalho de [Consigli e Dempster \(1998\)](#) lida com um problema relacionado à formação de portfólios em múltiplos estágios considerando parâmetros de incerteza probabilísticos para a política de alocação.

Um problema de otimização em múltiplos estágios é um problema de programação estocástica com decisões  $d_t$ ,  $t = 1, \dots, T$  e parâmetros  $w_t$  aleatórios ([CONSIGLI; DEMPSTER, 1998](#)). Ao longo de todo o período  $t = 1, \dots, T$ , as decisões em  $d_t$  estão intercaladas pelo que foi observado no instante  $w_{t-1}$  e o que não se conhece sobre  $w_t$ . A relação entre a decisão tomada  $d_{t-1}$  e o parâmetro de incerteza  $w_{t-1}$  é antecipativa, pois a decisão é tomada sob condições de incerteza, enquanto a relação entre  $d_t$  e  $w_{t-1}$  é adaptativa, já que as decisões são tomadas em um ambiente de aprendizagem ([KOUWENBERG; ZENIOS, 2008](#)). Dessa forma, cada decisão tomada é a combinação de fatores antecipativos e adaptativos e a relação dinâmica do processo decisório conforme apresentado no esquema 20.

O problema de otimização tem o objetivo de minimizar, no instante  $t$ , a função  $f(d_t)$  de custo formada pelo estágio antecipativo a  $w_t$  e o valor da decisão adaptativa  $d_t^*$ , dependente de  $d_t$  e daquilo que não se sabe  $w_t$ . O termo relacionado à decisão adaptativa é representada pelo valor esperado da função custo  $q(d_t^*, w_t)$  associada ao que foi

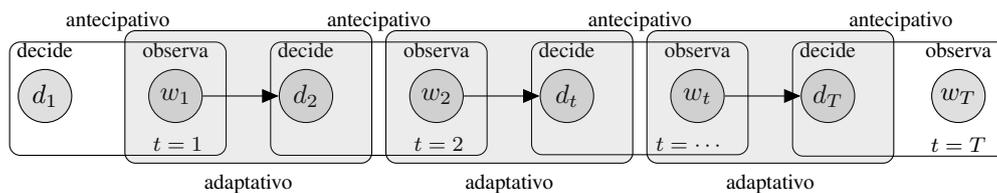


Figura 20: Estrutura recursiva antecipativa e adaptativa.

**Fonte:** Elaborado pelo autor.

observado de  $w_t$ . A função de otimização é restrita, com relação à decisão  $d_t$ , à matriz tecnológica  $A$  e o vetor de recursos  $b$ . Já a decisão  $d_t^*$  é restrita à matriz tecnológica  $T(w_t)$ , que transforma a decisão  $d_t$  em recursos para  $d_t^*$ , vetor  $h(w_t)$  de recursos e matriz de recursos  $W(w_t)$ .

$$\begin{aligned}
 \text{Minimize: } Z &= f(d_t) + E(q(d_t^*, w_t)) \\
 \text{Sujeito } Ad_t &= b \\
 W(w_t)d_t^* &= h(w_t) - T(w_t)d_t
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

O parâmetro de incerteza  $w_t$  do processo pode ser discretizado em cenários, formado pelo espaço de eventos  $\Omega = \{w_t^1, w_t^2, \dots, w_t^N\}$  (KOUWENBERG; ZENIOS, 2008). Para tal discretização considera-se que:

- $p^{(l)} = \pi(w_t = w_t^{(l)})$
- $\sum_{l=1}^N p^{(l)} = 1$

Essa formulação discretizada permite que a função de otimização 4.1 seja reescrita por:

$$\begin{aligned}
 \text{Minimize: } Z &= f(d_t) + \sum_{l=1}^N p^{(l)} q(d_t^{*(l)}, w_t^{(l)}) \\
 \text{Sujeito } Ad_t &= b \\
 W(w_t^{(l)})d_t^{*(l)} &= h(w_t^{(l)}) - T(w_t^{(l)})d_t
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

O processo de otimização se repete dinamicamente a medida em que se tenha acesso a novas informações sobre  $w_t$ . Devido esse carácter dinâmico, a decisão  $d_t^*$  no instante  $t$  é a decisão  $d_{t+1}$  do instante  $t + 1$ .

Os problemas de otimização com múltiplos estágios podem se tornar problemas de um único estágio, ao custo da complexidade e dimensionalidade (BHERING, 2005). Métodos Heurísticos são capazes de lidar com o problema de elevada dimensão e complexidade, e são amplamente utilizadas, como veremos a seguir.

### 4.3 Particle Swarm Optimization

O *Particle Swarm Optimization* (PSO) é baseado no interação social e comportamento coletivo de pássaros e peixes. Os indivíduos são representados por partículas que tem sua posição atualizada iterativamente. O processo de otimização combina mínimos locais, globais e gradiente iterativamente. O resultado da otimização é mapeado por candidatos (partículas), posicionados ao longo do espaço de possibilidades, que se movimentam por meio do conhecimento pessoal e global.

Diversos trabalhos utilizam PSO para gerenciamento de ativos (NENORTAITE; BUTLERIS, 2008; NI et al., 2017). O trabalho de Cura (2009) foi um dos primeiros trabalhos que utilizam PSO para determinação de portfólio ótimo. Os autores encontram evidências da superioridade do PSO comparado aos demais métodos heurísticos em um problema de programação com múltiplos objetivos.

O PSO também é utilizado para solução de problemas de múltiplos estágios Yu, Jewpanya e Kachitvichyanukul (2016). O trabalho de Golmakani e Fazel (2011) utiliza o PSO para resolver uma extensão do problema de viés média-variância de Markowitz adicionando restrições e obtendo ganhos de performance comparado com o algoritmo genético. Zhu et al. (2011) adiciona restrições não-lineares e múltiplas funções objetivos. Zhang e Zhao (2009) propõe um modelo de alocação para maximizar a riqueza final controlando os riscos. O trabalho de Fan e Chang (2010) faz uma revisão da técnica PSO, propondo uma variação da técnica com busca da solução local e global em paralelo e evidenciando a vantagem da técnica com o aumento da dimensão a ser otimizada. Liang e Qu (2013) utiliza PSO para obter performance ao lidar com a alocação de 500

ativos. [Dang et al. \(2010\)](#) utiliza o método para solucionar um problema de programação para maximização de função utilidade quadrática modificada com múltiplos estágios de decisão e obtém os melhores resultados adotando soluções híbridas com outros métodos. [Seidy \(2016\)](#) utiliza o método para precificação de ativos e trabalho de [Marinakis et al. \(2009\)](#) utiliza PSO para classificação de risco de crédito.

Mais recentemente, o trabalho de [Kaucic \(2019\)](#) utiliza o PSO para gerenciamento de ativos por meio de um problema de programação com múltiplos objetivos. Esse algoritmo também é utilizado por [Ray e Bhattacharyya \(2017\)](#) para otimizar carteiras segundo critérios de risco *Var*.

No método PSO, a solução ótima para  $X$  é encontrada por meio da busca de partículas candidatas  $x_{ij}$  divididas ao longo do espaço de procura. As partículas procuram a solução ótima estabelecendo contato entre si, em uma busca iterativa da melhor solução. A solução ótima de cada partícula, denominada  $pbest_{ij}$ , é comparada a solução ótima da população de partículas, denominada  $gbest_{ij}$ . Com base no conhecimento individual e coletivo, as partículas se movem com velocidade e sentido representado por  $v_{ij}$  ao longo do espaço de soluções possíveis procurando a solução ótima global para  $X$  entre as iteração  $x_{ij}^{k-1}$  e  $x_{ij}^k$ . O processo de atualização da posição das partículas é feito da seguinte maneira:

$$v_{ij}^{k+1} = w \times v_{ij}^k + c_1 \times U_1 \times (pbest_{ij} - x_{ij}^k) + c_2 \times U_2 \times (gbest_{ij} - x_{ij}^k) \quad (4.3)$$

$$x_{ij}^{k+1} = x_{ij}^k + v_{ij}^{k+1} \quad (4.4)$$

sendo  $w$  o peso de inércia,  $U_1$  e  $U_2$  valores aleatórios com distribuição Uniforme(0, 1),  $c_1$  e  $c_2$  são constantes de aceleração,  $pbest_{ij}$  e  $gbest_{ij}$  os máximos pessoais e sociais, respectivamente.

Essa técnica será utilizada nessa tese para resolver o modelo ALM proposto, que é um problema de alocação ótima de recursos com decisões tomadas em múltiplos estágios, considerando múltiplas funções objetivos e incerteza discretizada por meio de cenário em árvore.

## 4.4 Modelo ALM proposto

Esse trabalho utilizará o estudo em micro simulações individuais para propor um modelo de gerenciamento de ativos para a previdência complementar do servidor público federal.

O modelo está dividido em período de acumulação, em que são feitos pagamentos regulares e que coincidem com o período de ativa do servidor, e o período de desacumulação, que é caracterizado pelo momento da aposentadoria. Nesse momento, o benefício é calculado baseado no montante acumulado pelo participante e nos aspectos atuariais estimados nessa tese.

Além dos ativos de renda variável, que têm estoque determinado pelos indicadores do mercado, os ativos de renda fixa marcados a vencimento têm “estoque” determinado pelos fluxos futuros descontados à taxa de juros adotado pelo plano de previdência, isto é, 4%. Essa abordagem garante ao participante que o valor do benefício recebido durante a aposentadoria esteja impactado pela rentabilidade dos ativos ilíquidos, mas com rentabilidade livre risco em fluxos futuros, conforme regulamentado pela CNPC nº 30, de 10 de outubro de 2018, e a Instrução nº 10, de 30 de novembro de 2018.

O modelo ALM é configurado da seguinte maneira. Considere que o plano de previdência de um indivíduo está dividido em 2 períodos: (1) período de acumulação, compreendido entre os instantes  $t \in \{1, 2, \dots, T_1\}$ , e (2) distribuição, entre os instantes  $t \in \{T_1 + 1, T_1 + 2, \dots, T_1 + T_2\}$ . No primeiro período ( $T_1$ ) são efetuadas contribuições, pré-determinadas, que são acumuladas e rentabilizadas segundo uma expectativa de rentabilidade sujeita a incerteza ( $\xi$ ), equacionadas pela função  $U(\cdot)$ , que indica o montante acumulado no período contributivo. No segundo período, seguindo o regulamento da FUNPRESP-Exe, o montante acumulado é distribuído ao longo da expectativa de tempo de sobrevivência do investidor ( $T_2$ ), que é determinada por meio de tábuas biométricas.

Nos dois períodos estão disponíveis  $N$  ativos, sujeitos a risco, e o modelo otimiza o portfólio ao longo dos instantes  $t$  no período de investimento e desinvestimento, determinando decisões  $X_t^j$  associadas ao ativo  $j$ . Além disso, toda a incerteza relacionada à rentabilidade de cada ativo  $j$  é discretizada pelo cenários em árvore ( $\Xi$ ) ao longo dos múltiplos instantes  $t$ , denotada por  ${}_i\xi_t^j \in \Xi$ .

Propõem-se, então, resolver um problema com múltiplos objetivos, associado aos dois períodos. Durante o período de acumulação deseja-se maximizar o saldo final e minimizar a risco associado ao montante do participante. Já no segundo período deseja-se que as decisões tomadas assegurem o pagamento do benefício, minimizando a iliquidez do plano. Além disso, um problema de múltiplos objetivos será resolvido por meio de técnicas de soluções de 1 objetivo (ANAGNOSTOPOULOS; MAMANIS, 2011; CURA, 2009). Dessa forma, define-se um problema de otimização de múltiplos períodos e múltiplas funções objetivos, expresso pela equação 4.5.

$$\text{Max}_X E \left[ U \left( X_{1:T_1}^{1:N} \right) \right] - \lambda R \left[ U \left( X_{1:T_1}^{1:N} \right) \right] - \lambda_2 E \left[ IS \left( X_{(T_1+1):(T_1+T_2)}^{1:N} \right) \right] \quad (4.5)$$

sujeito a

$$\sum_{j=1}^N \theta_t^j X_t^j = 1, \quad (4.6)$$

$$\Upsilon_t = \sum_{k=1}^{k < t} \sum_{j=1}^{N_{rf}} \zeta_k^j, \quad (4.7)$$

$$Y_t^j = (\mathcal{L}_t + \Upsilon_t) X_t^j + \varepsilon_t^j, \quad (4.8)$$

$$M_t^j = (1 + \xi_t^j) M_{t-1}^j + Y_t^j, \quad (4.9)$$

$$M_t^j \geq 0, \quad li_i \leq X_t^j \leq ls_i, \quad 0 < \lambda \leq 1, \quad 0 < \lambda_2 \leq 1, \quad \delta \geq 0.$$

$\pi_i$  probabilidade associado ao cenário  $i$ ,

$\Xi$  número de cenários em árvore,

$U()$  função para determinar o montante em  $t = T_1$ ,

$N_{rf}$  número de ativos de renda fixa,

$\Upsilon_t$  fluxo de recebimento de títulos públicos no instante  $t$ ,

$\zeta_t$  fluxo de recebimento dos títulos públicos  $j$  com vértice  $k$  no instante  $t$ , instante  $t$  que foi comprado no instante  $k$ ,

$IS(.)$  função de iliquidez,

$R(\cdot)$  função de risco,

$E(\cdot)$  esperança matemática,

$X_t^j$  decisão de alocação para o ativo  $j$  no instante  $t$ ,

$li_i$  piso para a alocação no ativo  $j$ ,

$ls_i$  teto para a alocação no ativo  $j$ ,

$T_1$  janela de tomada de decisão no período acumulativo,

$T_2$  janela de tomada de decisão no período desacumulação,

$\lambda$  parâmetro de aversão a risco,

$\lambda_2$  parâmetro de penalização de iliquidez,

$\mathcal{L}_t$  fluxo atuarial no instante  $t$ ,

$\theta_t^j$  indicador de acumulação (+1) e distribuição (-1) do ativo  $j$  no instante  $t$ ,

$\varepsilon_t^j$  variável auxiliar para equações de estoque,

$Y_t^j$  decisão de alocação monetária para o ativo  $j$  no instante  $t$  e cenário  $i$

${}_i\xi_t^j$   $i$ -ésimo cenário para o ativo  $j$  e no instante  $t$ ,

$M_t^j$  saldo em conta do ativo  $j$  no instante  $t$ ,

Isto é, a função objetivo 4.5 é um problema de otimização para maximizar o valor esperado do saldo de conta final do participante, representado por  $U(\cdot)$ , para um determinado nível de risco ou minimizar a variabilidade de  $U(\cdot)$  para um determinado nível de retorno esperado. Além disso, deseja-se minimizar o indicador de iliquidez, que acumula o valor faltante nos períodos em que não havia recursos suficientes para pagar as obrigações atuariais.

O parâmetro  $\theta_t^j$  especifica se o ativo  $j$  no instante  $t$  pode ser acumulado ou distribuído. Durante o período de ativa do servidor, todos os ativos são acumulativos, pois

não há obrigações atuárias. Durante o período de inatividade do servidor, apenas o estoque dos ativos de renda variável e o fluxo de recebimento dos títulos públicos podem ser desacumulados, isto é, utilizados para o pagamento das obrigações atuárias. Isso é feito em razão da marcação a mercado dos títulos públicos, que impede que haja desinvestimento para essa classe, mesmo no período de pagamento de benefício. Por fim, em uma abordagem conservadora, os recursos excedentes do fluxo de recebimento do passivo são reinvestidos exclusivamente em ativos de renda fixa no período de desacumulação.

Quando  $\lambda = 0$  o investidor é totalmente indiferente a risco e  $\lambda = 1$  o investidor é totalmente avesso a risco. Para essa tese, adotaremos o parâmetro  $\lambda = 0.05$  para a menor aversão, compatível com a perspectiva mais conservadora de um investidor participante de um fundo de pensão. Essa tese considerou o servidor que entra no serviço públicos com 30 anos e, apesar do processo de acumulação de riqueza do participante no modelo depender, indiretamente, das variáveis idade, sexo e ocupação para determinar o tempo de contribuição restante até a aposentadoria, é importante que em trabalhos futuros seja incorporado, diretamente, a variável idade para determinação do perfil de investimento, indo ao encontro ao conceito de ciclos de vida adotada pela FUNPRESP-Exe em 2019 (FUNPRESP, 2019). Nesse sentido, o modelo proposto permite que isso seja feito limitando o intervalo de aversão a risco para  $\lambda^{ciclo} < \lambda \leq 1$ , sendo  $\lambda^{ciclo}$  o piso para aversão a risco em função da idade ou ciclo de vida do participante.

Denotamos o valor esperado de  $U()$  como:

$$E \left[ U \left( X_{1:T_1}^{1:N} \right) \right] = \sum_{i=1}^{\Xi} \pi_i U \left( X_{1:T_1}^{1:N}, i\xi_{1:T_1}^{1:N} \right) \quad (4.10)$$

De maneira análoga, o desvio-padrão de  $U()$  é calculada por:

$$R \left[ U \left( X_{1:T_1}^{1:N} \right) \right] = \sqrt{\sum_{i=1}^{\Xi} \pi_i \left\{ U \left( X_{1:T_1}^{1:N}, i\xi_{1:T_1}^{1:N} \right) - E \left[ U \left( X_{1:T_1}^{1:N} \right) \right] \right\}^2} \quad (4.11)$$

A parte da função relacionada à iliquidez é determinado por:

$$E \left[ IS \left( X_{(T_1+1):(T_1+T_2)}^{1:N} \right) \right] = \sum_{i=1}^{\Xi} \pi_i \mathbb{1}_{Iliquidez} U \left( X_{(T_1+1):(T_1+T_2)}^{1:N}, i\xi_{(T_1+1):(T_1+T_2)}^{1:N} \right). \quad (4.12)$$

Sendo  $\mathbb{1}_{Iliquidez}$  uma variável indicadora de problema de liquidez nos períodos de avaliação, isto é, o fluxo de recebimento de renda fixa ou estoque de renda variável não é

suficiente para o honrar o compromisso atuarial. O montante de obrigações dos períodos com problema de liquidez é levado ao final do período de pagamento de benefícios, considerando a taxa de juros adotada pelo plano e descontados no montante final em  $t = T_1 + T_2$ . O parâmetro  $\lambda_2$  determinar o nível de penalização para a iliquidez durante o período de desacumulação. Nessa tese, adotamos  $\lambda_2 = 1.0$  indicando uma alta penalidade para os períodos em que não há recursos suficientes para o pagamento dos benefícios.

As restrições 4.6 e 4.8 garantem que as decisões tomadas  $X_t^j$  em cada instante  $t$  sejam iguais ao fluxo do passivo  $\mathcal{L}_t$ , determinado pelos valores de contribuição ou benefício, e o fluxo de títulos públicos  $\Upsilon_t$ , determinado pela soma de todos os vértices com fluxo em  $t$ , especificado na equação 4.7. Isto é, estabelece que os valores decididos sejam iguais o fluxo no saldo de conta do participante/investidor e o recebimento dos valores da classe de renda fixa. A restrição 4.9 garante a evolução do saldo de conta dos ativos em cada instante  $t$ . Dessa forma, a primeira restrição 4.6 está associada à matriz de tecnologia  $A$  e vetor de recursos  $b$ , enquanto 4.9 está associada às matrizes de recursos  $W$  e tecnológicas  $T$ , apresentados na formulação geral do modelo em 4.1.

As manipulações de restrição para o modelo proposto são realizadas nas equações de balanço 4.9, para garantir saldo maior ou igual a zero. Dessa forma, o valor da decisão factível para o cenário  $i$  do ativo  $j$  no instante  $t$  ( ${}^*_i Y_t^j$ ) após os ajustes de restrição é dado por:

$${}^*_i Y_t^j = \begin{cases} Y_t^j, & \text{se } (M_t^j + \theta_{t-1}^j Y_t^j) \geq 0 \\ -M_t^j, & \text{c.c.} \end{cases} \quad (4.13)$$

A equação 4.13 garante que o estoque do ativo  $j$  seja positivo em cada instante  $t$ . Além disso, algumas restrições, como a de balanço de caixa, são ajustadas manualmente para garantir soluções viáveis. É importante destacar que os títulos públicos marcados a vencimento não podem ser vendidos e, assim, não violam 4.13

Após garantir que a variável de decisão esteja em uma região factível, o total do

fluxo de caixa é ajustado para ser igual ao fluxo do passivo por meio de 4.14.

$$\varepsilon_t^j = \left( \mathcal{L}_t + \Upsilon_t - \sum_j {}^*Y_t^j \right) \left[ \frac{(M_t^j + {}^*Y_t^j)}{\sum_j (M_t^j + {}^*Y_t^j)} \right] \quad (4.14)$$

Outras violações e especificidades do modelo, como limites legais, insolvência, que resultem no aumento da complexidade do modelo podem ser resolvidas por meio de penalizações à função objetivo (KAUCIC, 2019).

Evidentemente, o desafio do modelo proposto cresce com o número de períodos de tomada de decisão. Por isso, são tomadas decisões em  $T^*$  ( $T^* < (T_1 + T_2)$ ). Além disso, entre dois períodos decisórios  $t_1$  e  $t_2$ , a decisão  $X_t^j$  ( $t_1 \leq t \leq t_2$ ) é determinada de modo a criar uma trajetória linear entre  $X_{t_1}^j$  e  $X_{t_2}^j$ . Nesse caso, não há violação na equação 4.6, além suavizar as decisões entre os períodos.

O modelo proposto permite determinar a política de investimento e desinvestimento específica para diferentes perfis de investimento e perfis atuariais. Nessa abordagem, a solução ótima se ajusta a necessidade específica por meio da solução ótima antecipando políticas que, inevitavelmente, estão sujeitas à incerteza, e que, por meio da discretização de cenários em árvores, pode ser mais facilmente tratado computacionalmente.

## 4.5 Análise dos resultados

Nessa seção são apresentadas os resultados para o modelo 4.5 ALM proposto, considerando 6 períodos decisórios, 3 no período de acumulação e 3 no período de desacumulação e 9 ativos, sendo 5 de renda variável, 3 de renda fixa e 1 sendo o fluxo de recebimento de renda fixa. Foram considerados ativos de renda fixa, formado por vértices de títulos públicos com vencimento em 252, 2520 e 7560 dias, e títulos de renda variável, formado pelos índices da bolsa valores para empresas ligadas aos setores de energia (IEE), consumo (ICON), financeiro (IFN), indústria (INDX) e imobiliário (IMOB). Nessa configuração temos ao todo 54 variáveis decisórias.

O impacto do parâmetro de aversão a risco para o modelo foi avaliado compa-

rando 2 perfis de risco: baixa e alta aversão. No modelo 4.5 proposto, tais perfis são determinados pela configuração dos valores, respectivamente,  $\lambda = 0.05$  e  $\lambda = 1.00$ . Baseado na idade modal de entrada, apresentada no gráfico 17, o modelo ALM proposto será configurado para o participante com idade de entrada de 30 anos para todos os perfis atuariais: servidor, professor, servidora e professora. Além disso foi considerado o participante com percentual de contribuição de 8.5% e alíquotas total de custeio e taxa de carregamento de adotados pela FUNPRESP-Exe<sup>1</sup>, 17.95% e 7%, respectivamente. A data de referência para o modelo e para os valores gerados é janeiro de 2015.

O algoritmo foi implementado em um ambiente integrado de linguagem C++ no *software* R, por meio do pacote RCPP (EDELBUETTEL; FRANCOIS, 2011), executado em um computador com processador Intel Core i7 2.5 GHz com 8 GB RAM.

O gráfico 21 apresenta a alocação ótima para os perfis atuariais e de investimento. A alocação ótima encontrada pelo modelo para o perfil de baixa aversão a risco ( $\lambda = 0.05$ ) sugere maior exposição aos ativos arriscados quando comparada ao perfil com maior aversão ( $\lambda = 1.0$ ). Além disso, imediatamente após o início do período de desacumulação o modelo diminui a exposição em ativos arriscados e em ativos de renda fixa de longo prazo (7560), aumentando a exposição em ativos de renda fixa com maior liquidez (252). É importante destacar que o modelo proposto consegue, de maneira simultânea, otimizar a alocação e recurso no período de acumulação e garantir as obrigações no período de distribuição. Esses dois objetivos estão presentes na função objetivo 4.5.

O gráfico 22 apresenta o valor absoluto em reais para o saldo de conta do participante. Os montantes acumulados para cada perfil atuarial são ligeiramente maiores para os servidores menos avessos a risco. Também é possível perceber, nos dois perfis de investimento, que o saldo dos professores é menor do que os demais servidores. Esse resultado reforça a necessidade do Aporte Extraordinário de Aposentadoria Normal (AEAN), que, conforme analisado anteriormente, tem o objetivo compensar o menor tempo de contribuição.

Para os ativos de renda variável, a figura 23 apresenta o valor absoluto em reais, indicando que, conforme esperado, os servidores com menor aversão a risco possuem

<sup>1</sup> Alíquotas de custeio e taxa de carregamento Funpresp-Exec.

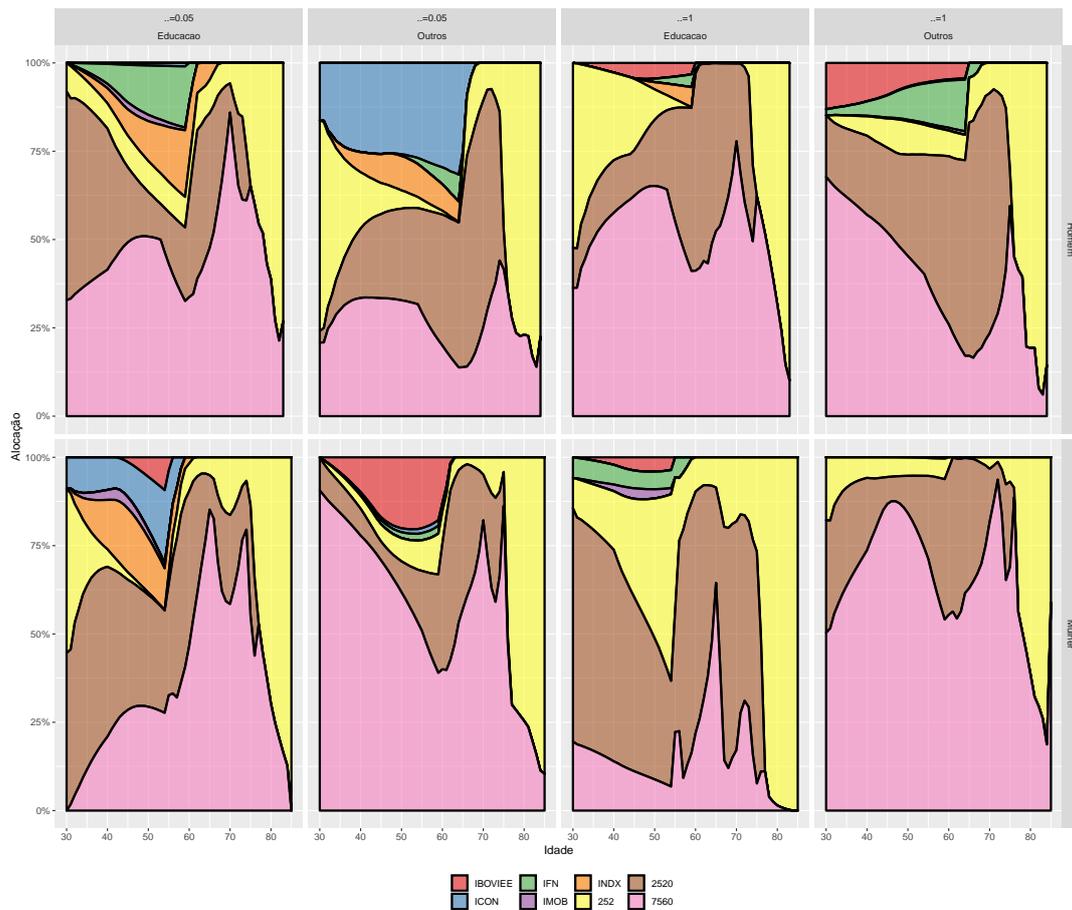


Figura 21: Alocação ótima em percentual (%) em todos os ativos de renda fixa e variável para diferentes perfis atuarias e de investimento.

**Fonte:** Elaborado pelo autor.

maior exposição aos ativos de renda variável.

A tabela 12 apresenta os indicadores da otimização para cada perfil atuarial e de investimento para o servidor que contribui com o teto, 8.5%, e com 30 anos em janeiro de 2015. Baseado na taxa de crescimento e na taxa de juros adotada no plano, 4%, é possível determinar o montante esperado (ME). Para cada cenário, a alocação proposta pelo modelo determina o montante médio observado (MMO) e o desvio do montante observado (DMO). Esses indicadores estão associados ao primeiro objetivo da função 4.5, que busca soluções que maximizem o saldo de conta do servidor, considerando a aversão a risco. Percebe-se que em todos os perfis, o modelo encontrou soluções com

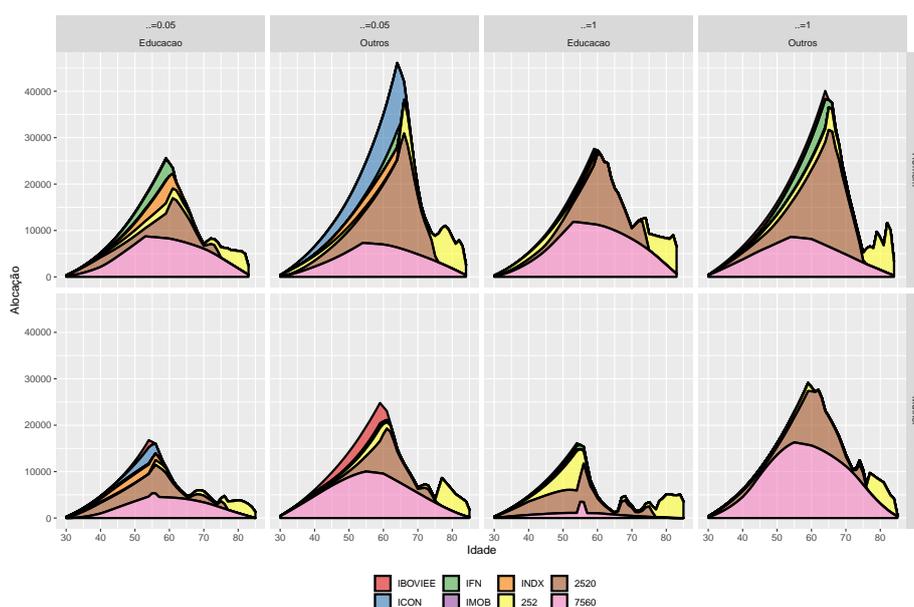


Figura 22: Alocação ótima em R\$ em todos os ativos de renda fixa e variável para diferentes perfis atuarias e de investimento.

**Fonte:** Elaborado pelo autor.

saldo de conta maior do que o esperado pelo plano. Além disso, a incerteza sobre o montante acumulado (DMO), é menor para os servidores com maior aversão.

A tabela também permite a análise o objetivo de minimizar os valores de iliquidez, caracterizado por períodos em que não há fluxo líquido suficiente para honrar os compromissos de aposentadoria. O primeiro indicador de liquidez (IL), determina o percentual de períodos com problema de liquidez. Percebe-se que a solução encontrada tem, para todos os perfis, IL inferior a 5.5%, isto é, em média apenas 5.5% dos períodos apresentaram algum nível de iliquidez. Aliado a esse indicador, a média da riqueza final (MRF) e o desvio da riqueza final (DRF), conjuntamente, representam um indicador de solvência, e indicam o saldo de conta após o pagamento do último compromisso de aposentadoria. Em todos os casos, o valor médio foi positivo, indicando que a estratégia foi suficiente para o pagamento das obrigações.

Como os títulos de renda fixa foram marcados a vencimento, apenas os títulos de renda variável foram analisados fora da amostra, pelo período mensal de janeiro de 2015 a maio de 2017. Esse período foi dividido para uma análise de curto prazo, feito

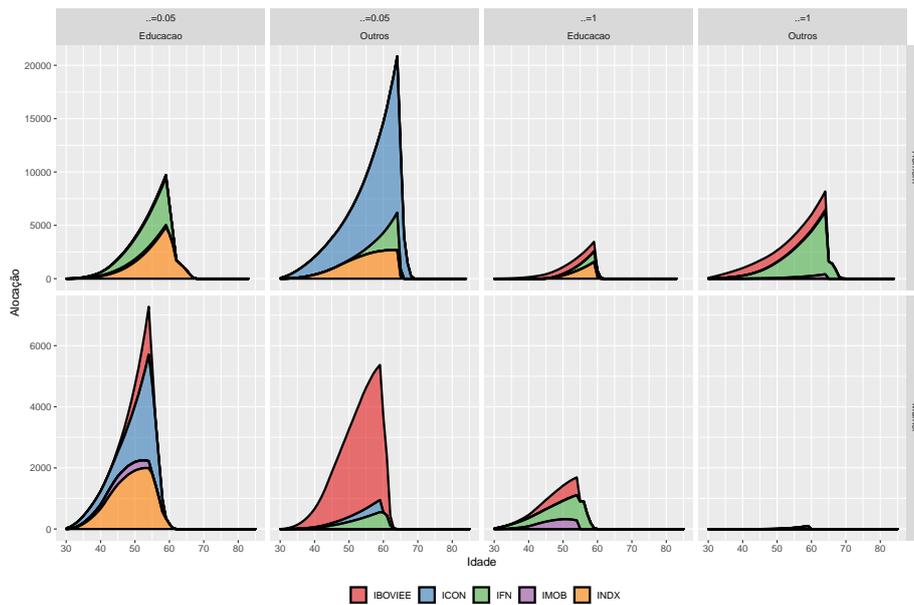


Figura 23: Alocação ótima nos ativos de renda variável em R\$ para diferentes perfis atuários e de investimento.

**Fonte:** Elaborado pelo autor.

em dezembro de 2015, e de médio prazo, em maio de 2017.

Foram utilizadas as estatísticas e indicadores para avaliar a performance da solução do modelo. O Retorno Anual Acumulado (RAA) é determinado por  $R_t = R_{t-1}(1 + r_t)$ , sendo  $r_t$  o retorno do ativo no instante  $t$ . Além disso, foi computado o *Sharpe Ratio* (SR), que avalia o ganho da carteira por unidade de risco, e é definida pela divisão entre a média e o desvio padrão dos retornos observados pela carteira. Além disso, a medida de *Value at Risk* (VaR) mensura o risco para as perdas observadas por meio dos percentis de 1% e 5%.

A alocação ótima setorial proposta pelos modelos de cada perfil foram comparados com a alocação naive dos indicadores, formada pela alocação em 20% em cada ativo da classe de renda variável, e o tradicional *benchmark* IBOVESPA. Além disso, tais indicadores foram comparados com a meta atuarial anual, composta por o IPCA + 4%.

O gráfico 24 compara o retorno acumulado da alocação ótima proposta pelo modelo e os indicadores de referência. Dentre os servidores com menor aversão, apenas

Perfil		Acumulação ( $T_1$ )			Desacumulação ( $T_2$ )		
Aversão	Atuarial	ME	MMO	DMO	MRF	DRF	IL (%)
0.05	Professor	20713.9	25573.9	598.7	3079.4	984.6	2.6
0.05	Servidor	28730.4	46084.6	2322.8	2806.1	2613.5	4.8
0.05	Professora	14514.0	16789.4	469.8	1267.2	497.5	3.6
0.05	Servidora	19751.7	24804.7	467.5	779.7	700.4	3.6
1	Professor	20713.9	27593.6	170.8	4662.6	1770.2	5.2
1	Servidor	28730.4	40078.7	761.7	4758.4	1930.7	3.8
1	Professora	14514.0	16156.3	149.0	2756.9	393.0	4.0
1	Servidora	19751.7	29152.8	4.4	5390.4	0.3	5.4

Tabela 12: Estatística da solução ótima do modelo para os períodos de acumulação ( $1 : T_1$ ) e desacumulação ( $(T_1 + 1) : (T_1 + T_2)$ ) de acordo com o perfil de investimento e atuarial.

**Fonte:** Elaborado pelo autor.

os perfis com investimento após de 2015 tiveram resultado acima dos indicadores de referência, professores e servidoras. Por outro lado, as estratégias de todos os demais perfis atuariais que optaram por um perfil conservador foram superiores aos indicadores de referência. Para as servidoras com maior aversão o modelo não alocou recursos em renda variável durante o período analisado.

A tabela 13 apresenta o resultado da alocação ótima dos ativos de renda variável no período fora da amostra para o retorno excesso com relação à meta atuarial.

É importante destacar que o período de curto prazo, dezembro de 2015, foi contemporâneo ao início do *impeachment* presidencial no Brasil, momento em que há maior incerteza dos investidores na economia e nos investimentos em geral. Essa incerteza ajuda explicar o desempenho de quase 25% abaixo da meta atuarial pelo IBOVESPA em 2015. No entanto, apesar do cenário ruim generalizado, as perdas para a alocações ótimas proposta foram menores.

Para o período de médio prazo, percebe-se a recuperação dos indicadores financeiros, no entanto, há maior incerteza com relação ao desempenho. Evidentemente ao longo do período analisado os fundos de pensão fazem constantes análises econômicas, que podem minimizar eventuais perdas. Nesse sentido, o modelo com estimação dinâmica permite o acompanhamento constante do comportamento das séries de retorno dos

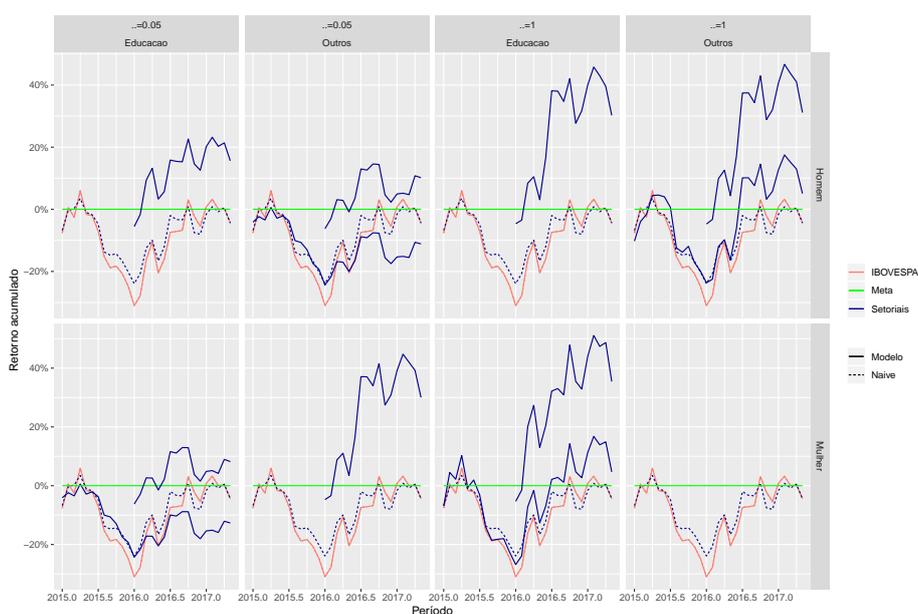


Figura 24: Comparação do retorno acumulado para a alocação ótima e indicadores de referência e meta atuarial entre janeiro de 2015 e maio de 2017. As curvas descontínuas próximas ao ano de 2016 representam a análise exclusiva para o período de 2016 a 2017. **Fonte:** Elaborado pelo autor.

ativos arriscados.

A figura 25 apresenta o modelo proposto agregando os resultados observados de todos os perfis atuariais. É possível perceber que a alocação agregada dos títulos públicos de longo e médio prazo são substituídos por ativos arriscados no perfil com menor aversão a risco. Em consequência, é possível perceber que o montante acumulado pelos servidores menos avessos a risco é maior quando comparada com os servidores mais conservadores. Além disso, percebe-se que nos dois perfis o modelo sugere a alocação em ativos de renda fixa de curto prazo nos últimos períodos, próximos ao fim do período previsto para o benefício de aposentadoria normal.

De acordo com o gráfico é possível perceber que o desempenho médio das estratégias para os perfis conservadores de investimento foi melhor, avaliando fora da amostra, do que a dos servidores com menor aversão a risco. De maneira análoga a análise desagregada, percebe-se que a estratégia ficou abaixo da meta considerando o período de curto prazo e, posteriormente, recuperação na análise de médio prazo.

Perfil		12/2015				05/2017			
		Retorno		VaR		Retorno		VaR	
Atuarial	Aversão	RAA	SR	1%	5%	RAA	SR	1%	5%
Professor	0.05	-	-	-	-	6.2%	0.14	8.4%	7%
Professor	1	-	-	-	-	11.6%	0.127	9.6%	7.4%
Professora	0.05	-19.3%	-0.566	6.4%	5.8%	-5.5%	-0.086	7.7%	6.4%
Professora	1	-22.7%	-0.187	11.1%	10.5%	1.9%	0.028	11.3%	10.7%
Servidor	0.05	-19.3%	-0.566	6.4%	5.8%	-4.8%	-0.069	8%	6.4%
Servidor	1	-19.9%	-0.282	12.7%	11.5%	2.1%	0.035	12.2%	10.1%
Servidora	0.05	-	-	-	-	11.5%	0.134	9.5%	7.5%
Servidora	1	-	-	-	-	-	-	-	-
IBOVESPA		-24.8%	-0.27	8.7%	8.2%	-1.8%	0.007	10.4%	8.6%

Tabela 13: Estatística de retorno excesso com relação à meta atuarial da solução ótima do modelo para a janela fora da amostra, janeiro de 2015 a maio de 2017, para os diferentes perfis de investimento e atuarial. RAA indica o retorno anual acumula acima da meta atuaria, SR é o índice *Sharpe Ratio* e VaR a medida de risco *Value at Risk*.

**Fonte:** Elaborado pelo autor.

Dessa forma, o modelo de ALM proposto permitiu o planejamento financeiro da alocação de recursos garantindo o pagamento dos fluxos de passivo da aposentadoria normal, além de individualizar o perfil atuarial e de investimento dos participantes.

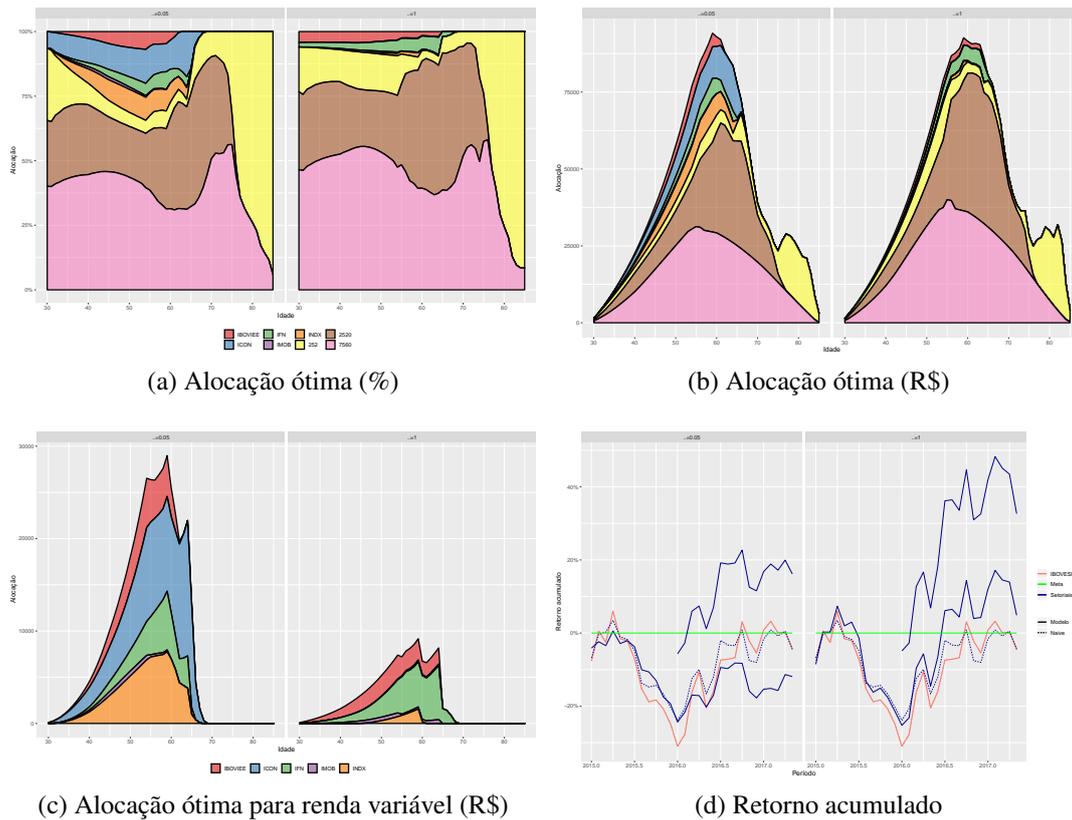


Figura 25: Resultados do modelo ALM agregando os perfis atuariais. O gráfico (a) apresenta a alocação em percentual e (b) em R\$. O gráfico (c) apresenta o valor em R\$ para alocação nos ativos de renda variável e em (d) apresenta a performance da carteira ariscada entre janeiro de 2015 e maio de 2017.

**Fonte:** Elaborado pelo autor.

## 5 Considerações finais

Esse trabalho formulou um modelo de gestão de ativos e passivos (ALM) com soluções de alocação de recursos para o benefício de aposentadoria normal em modalidade de contribuição definida da previdência complementar dos servidores públicos federais do executivo, baseado na legislação e inspirado no regulamento da FUNPRESP-Exe, considerando diferentes perfis atuariais e perfis de investimento.

A alocação de ativos foi realizada utilizando a classe de renda fixa, formada por títulos públicos marcados a vencimento, e a classe de renda variável, composta por indicadores setoriais da bolsa de valores de São Paulo. Os ativos arriscados, conforme sugere a literatura (XIA, 2001; JOHANNES; KORTEWEG; POLSON, 2014; VIRBIK-KAITE et al., 2016), são modelados utilizando um processo de estimação dinâmica da volatilidade, permitindo a simulação dos cenários em árvore.

Utilizando as tábuas biométrica adotadas pela FUNPRESP-Exe foram calculadas as alíquotas atuarialmente justas para benefícios previdenciários da modalidade de benefício definido de aposentadoria por invalidez, pensão de assistido em invalidez, pensão por morte de participante ativo, pensão por morte de participante assistido em aposentadoria normal, benefício de sobrevivência do assistido em aposentadoria normal e aporte extraordinário de aposentadoria normal. Considerando as alíquotas atuarialmente justas segregadas por perfil atuarial e a distribuição do perfil dos servidores que entram no serviço público, obtida por meio de registros administrativos da RAIS, a carga de contribuição calculada foi de 30.3%. Além disso, percebeu-se um aumento da alíquota total para 31.4% com o aumento no percentual de servidores com maior idade entre os novos entrantes. A alíquota se reduz para 28.2% com o aumento na expectativa de vida do participante. Os resultados encontrados destacam a contribuição dessa tese para a modelagem de passivos previdenciários, proporcionando gestão das obrigações atuariais.

O modelo ALM individual proposto considera múltiplos objetivos, adaptadas para uma única função objetivo, e em múltiplos estágios decisórios e, conforme sugere a literatura (GULPINAR; PACHAMANOVA, 2013; FERSTL; WEISSENSTEINER,

2011; KOUWENBERG; ZENIOS, 2008), permite a adoção de restrições realísticas para o regime complementar de previdência. Os desafios de lidar com a complexidade de modelos com elevado número de parâmetros e decisões em vários estágios foi superada, conforme sugere a literatura (GONDZIO; KOUWENBERG, 2001; HEITSCH; RÖMISCH, 2011), com o uso de cenários em árvore e método heurísticos de otimização. Os resultados da alocação ótima sugerem, dado às premissas econômicas adotadas, para os investidores mais arrojados quase de 40% em renda variável e para o participante totalmente avesso a risco o modelo sugere alocar quase 90% em ativos de renda fixa.

Alguns pontos nesse trabalho podem ser aprimorados em projetos futuros. Para modelagem de séries temporais é possível investigar, assim como em Virbickaite et al. (2016), a adoção de um modelo de volatilidade estocástica multivariada e parâmetros de mudança de regime. Aprimoramentos nos modelos de previsão permitem a simulação de cenários em árvore mais realísticos. Além disso, é possível, conforme trabalhado por Xu, Chen e Yang (2012), otimizar a simulação do cenário para que os momentos da distribuição observada e simulada coincidam.

Considerar cenários macroeconômicos para o comportamento das curvas da taxa de juros associadas aos títulos públicos, também fazem parte da agenda de trabalhos futuros, assim como adicionar outros ativos de renda fixa. O modelo proposto pode ser incrementado com a participação de especialistas em cada classe de investimento, permitindo que a incerteza seja tratada com a especificidade necessária. Isso é viável para a maioria dos fundos de pensão, que possuem gerências de investimento especializadas capazes de propiciar aos planos de previdência e para os participantes maior diversidade e rentabilidade para os investimentos.

Do ponto de vista do passivo, é possível incorporar, assim como em Pinheiro (2005), outros decrementos. A saída dos servidores, por exemplo, não foi modelada nesse trabalho. Apesar da possibilidade de o servidor sair do RPC, optando pela portabilidade ou saque, impactar a liquidez do plano, há menor prejuízos para o cálculo das alíquotas atuarialmente justas dos benefícios BD. No entanto, conforme apresentando no trabalho, o aumento considerável de um determinado perfil pode provocar significativas mudanças nas alíquotas de equilíbrio.

Além disso, é possível considerar outros tipos de entrada que não a nomeação de novo servidor, isto é, considerar a migração de servidores do RPPS para RPC. Essa situação é possível quando o servidor se torna elegível ao RPC tendo em vista o crescimento real dos salários e a progressão funcional. Nesse sentido, é necessário um estudo detalhado das carreiras do poder executivo.

Do ponto de vista da otimização do ALM, é possível considerar variações do método PSO (FAN; CHANG, 2010), aumentar o número de replicações, quantidade de partículas e número de iterações do modelo PSO, a fim de superar soluções ótimas locais. Nesse caso, é imprescindível o uso de computadores com maior capacidade de processamento. O modelo ALM para os benefícios BD pode ser feito por meio do cálculo do net atuarial individualizado e considerando os diferentes perfis atuariais e de investimento dos participantes.

Além disso, o modelo proposto permite avaliar a sensibilidade das alíquotas às mudanças na legislação. Nesse sentido, os benefícios de aposentadoria por invalidez e pensão por morte dependem, majoritariamente, da média de salários e do valor pago pelo RPPS, ignorando o tempo de contribuição. Caso haja redução do valor pago pelo RPPS ou um crescimento salarial superior ao do teto do RGPS, exigirá maior esforço coletivo para o custeio desses benefícios, que na configuração desse trabalho foi calculado acima de 14%.

Os resultados encontrados são potencializados pela importância, quantitativa e qualitativa, dos servidores federais do executivo. Os assuntos discutidos nessa tese podem, sem perda de generalidade, ser adaptados para o contexto de outros regimes de previdência. Assim, é desejo do autor que os resultados sejam utilizados para promover o debate qualificado de questões previdenciárias.

# Referências

- ACTUARIES, S. The RP-2000 Mortality Tables. *Actuaries Society*, 2000. Citado 3 vezes nas páginas 21, 22 e 37.
- ALBEANU, G.; GHICA, M.; POPENTIU-VLADICESCU, F. On using bootstrap scenario-generation for multi-period stochastic programming applications. *International Journal of Computers Communications & Control*, Citeseer, v. 3, p. 282–286, 2008. Citado na página 71.
- ANAGNOSTOPOULOS, K. P.; MAMANIS, G. The mean–variance cardinality constrained portfolio optimization problem: An experimental evaluation of five multiobjective evolutionary algorithms. *Expert Systems with Applications*, Elsevier, v. 38, n. 11, p. 14208–14217, 2011. Citado na página 83.
- BARBERIS, N. Investing for the Long Run When Returns Are Predictable. *Journal of Finance*, v. 55, n. 1, p. 225–264, 2000. ISSN 00221082. Citado na página 74.
- BELTRÃO, K.; SUGAHARA, S. Mortalidade dos funcionários públicos civis do Executivo por sexo e escolaridade 1993 a 2014. *Revista Contabilidade & Finanças*, v. 28, n. 75, p. 449–676, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 14.
- BELTRÃO, K. I.; SUGAHARA, S. Tábua de mortalidade para os funcionários públicos civis federais do poder executivo por sexo e escolaridade: comparação com tábuas do mercado. *TD 3, ENCE/IBGE, Rio de Janeiro*, 2002. Citado na página 14.
- BHERING, J. W. S. *Simulação estocástica aplicada em plano de contribuição definida*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2005. Citado 5 vezes nas páginas 7, 9, 27, 77 e 80.
- BUNCH, P.; GODSILL, S. Approximations of the Optimal Importance Density Using Gaussian Particle Flow Importance Sampling. *Journal of the American Statistical Association*, 2016. ISSN 1537274X. Citado na página 66.
- CARDOSO, S. C. de P. *Demonstração atuarial LegisPrev*. [S.l.], 2013. Disponível em: <[https://www.funpresp.com.br/portal/uploads/2013/09/Demonstracao\\_Atuarial\\_FUNPRESP\\_Legislativo\\_-\\_Versao\\_Final.pdf](https://www.funpresp.com.br/portal/uploads/2013/09/Demonstracao_Atuarial_FUNPRESP_Legislativo_-_Versao_Final.pdf)>. Citado 6 vezes nas páginas 14, 23, 24, 37, 109 e 111.
- CARVALHO, C. M. et al. Particle Learning and Smoothing. *Statistical Science*, v. 25, n. 1, p. 88–106, 2010. ISSN 0883-4237. Citado 2 vezes nas páginas 66 e 67.

- CASTRO, M. C. de. *Entradas e saídas no sistema previdenciário brasileiro: uma aplicação de tábuas de mortalidade*. Tese (Doutorado), 1997. Citado na página 25.
- CHONG, F. S. Building a simplified stochastic asset liability model (alm) for a malaysian participating annuity fund. In: *14th East Asian Actuarial Conference*. [S.l.: s.n.], 2007. v. 14. Citado na página 8.
- CONSIGLI, G.; DEMPSTER, M. a. H. Dynamic stochastic programming for asset-liability management. *Annals of Operations Research*, v. 81, n. October, p. 131 – 161, 1998. ISSN 15565068. Citado 4 vezes nas páginas 10, 74, 75 e 78.
- CONSIGLI, G. et al. Retirement planning in individual asset-liability management. *IMA Journal of Management Mathematics*, v. 23, n. 4, p. 365–396, 2012. ISSN 14716798. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 76.
- CURA, T. Particle swarm optimization approach to portfolio optimization. *Nonlinear analysis: Real world applications*, Elsevier, v. 10, n. 4, p. 2396–2406, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 80 e 83.
- DANG, J. et al. Swarm intelligence-based stochastic programming model for dynamic asset allocation. In: *2010 IEEE World Congress on Computational Intelligence, WCCI 2010 - 2010 IEEE Congress on Evolutionary Computation, CEC 2010*. [S.l.: s.n.], 2010. ISBN 9781424469109. Citado 2 vezes nas páginas 71 e 81.
- DEMPSTER, M. A. H.; MEDOVA, E. A. Planning for retirement: Asset liability management for individuals. *British Actuarial Journal*, v. 16, n. 2, p. 405–439, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 76.
- DIAS, C. J. *Um modelo estocástico para o fluxo de caixa de um plano de previdência de um indivíduo*. Tese (Doutorado) — PUC–Rio, 2006. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 77.
- DONNELLY, C. Actuarial fairness and solidarity in pooled annuity funds. *ASTIN Bulletin*, Cambridge University Press, v. 45, n. 1, p. 49–74, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 35.
- DUPAČOVÁ, J.; CONSIGLI, G.; WALLACE, S. W. Scenarios for multistage stochastic programs. *Annals of operations research*, Springer, v. 100, n. 1-4, p. 25–53, 2000. Citado na página 71.
- EDDELBUETTEL, D.; FRANCOIS, R. Rcpp: Seamless R and C++ integration. *Journal of Statistical Software*, v. 40, n. 8, p. 1–18, 2011. Citado na página 88.
- FAMA, E. F.; MACBETH, J. D. Risk, return, and equilibrium: Empirical tests. *Journal of political economy*, n. 3, p. 607–636. ISSN 00223808. Citado na página 68.

FAN, S.-K. S.; CHANG, J.-M. Dynamic multi-swarm particle swarm optimizer using parallel pc cluster systems for global optimization of large-scale multimodal functions. *Engineering Optimization*, Taylor & Francis, v. 42, n. 5, p. 431–451, 2010. Citado 2 vezes nas páginas 80 e 98.

FERNANDES, R.; GREMAUD, A. P. Texto para discussão 1: Regime de previdência dos servidores públicos: equilíbrio financeiro e justiça atuarial. 2003. Citado na página 34.

FERSTL, R.; WEISSENSTEINER, A. Asset-liability management under time-varying investment opportunities. *Journal of Banking and Finance*, v. 35, n. 1, p. 182–192, 2011. ISSN 03784266. Citado 4 vezes nas páginas 10, 76, 96 e 97.

FREIRE, D. R.; AFONSO, L. E. Are the contribution rates of the Social Security General Regime (RGPS) sufficient? An actuarial study for retirement by length of contribution and survivors benefits. *Revista Brasileira de Risco e Seguro*, v. 11, n. 19, p. 1–25, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 28.

FUNPRESP. *Diferenças entre RPPS, RGPS e RPC*. 2013. Disponível em: <<https://www.funpresp.com.br/portal/paginas/2013/02/16>>. Citado na página 5.

FUNPRESP. *Relatório de fundamentação das premissas atuariais atualizadas na avaliação atuarial de 2014*. [S.l.], 2015. Disponível em: <<https://www.funpresp.com.br/transparencia/transparencia/relatorio-anual/2014/>>. Citado 3 vezes nas páginas 10, 22 e 28.

FUNPRESP. *Manual técnico de Perfis de Investimento – EXECPREV*. [S.l.], 2019. Disponível em: <<https://www.funpresp.com.br/investimentos/>>. Citado na página 85.

GERIN. *Focus - Relatório de Mercado - 26 dezembro 2014*. [S.l.], 2014. Disponível em: <<https://www.bcb.gov.br/publicacoes/focus/26122014>>. Citado na página 72.

GIAMBIAGI, F.; AFONSO, L. A.-s. E. Cálculo da alíquota de contribuição previdenciária atuarialmente equilibrada: uma aplicação ao caso brasileiro. *Revista Brasileira de Economia*, scielo, v. 63, p. 153 – 179, 06 2009. ISSN 0034-7140. Citado 5 vezes nas páginas 11, 15, 27, 28 e 34.

GOLMAKANI, H. R.; FAZEL, M. Constrained portfolio selection using particle swarm optimization. *Expert Systems with Applications*, 2011. ISSN 09574174. Citado na página 80.

GOMES, M. M. F.; FÍGOLI, M. G. B.; RIBEIRO, A. J. F. Da atividade à invalidez permanente: um estudo utilizando dados do Regime Geral de Previdência Social (RGPS) do Brasil no período 1999-2002. *Revista Brasileira de Estudos de População*, v. 27, n. 2, p. 297–316, 2010. Citado 3 vezes nas páginas 10, 14 e 111.

GONDZIO, J.; KOUWENBERG, R. High-Performance Computing for Asset-Liability Management. *Operations Research*, v. 49, n. 6 (November-December 2001), p. 879—891, 2001. ISSN 0030364X. Citado na página 97.

GORDON, N.; SALMOND, D.; SMITH a.F.M. Novel approach to nonlinear/non-Gaussian Bayesian state estimation. *IEE Proceedings F Radar and Signal Processing*, v. 140, n. 2, p. 107, 1993. ISSN 0956375X. Citado 2 vezes nas páginas 66 e 67.

GOSMANN, M. C.; AVOZANI, C. L. Risco de longevidade na previdência dos servidores públicos federais no brasil. In: CENTRO DE ESTUDOS INTERNACIONAIS SOBRE GOVERNO (CEGOV). *Políticas de emprego, trabalho e previdência*. Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2014. Citado 3 vezes nas páginas 14, 15 e 16.

GOUVEIA, A. L. L. A. *Um modelo multidecremental para o cálculo da alíquota atuarialmente justa para aposentadoria programada no RGPS*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Pernambuco, 2017. Citado 6 vezes nas páginas 11, 15, 25, 26, 28 e 34.

GULPINAR, N.; PACHAMANOVA, D. A robust optimization approach to asset-liability management under time-varying investment opportunities. *Journal of Banking & Finance*, v. 37, n. 6, p. 2031–2041, 2013. ISSN 0378-4266. Citado 4 vezes nas páginas 10, 76, 96 e 97.

GÜLPINAR, N.; RUSTEM, B.; SETTERGREN, R. Simulation and optimization approaches to scenario tree generation. *Journal of economic dynamics and control*, Elsevier, v. 28, n. 7, p. 1291–1315, 2004. Citado na página 71.

HABERMAN, S.; VIGNA, E. Optimal investment strategies and risk measures in defined contribution pension schemes. *Insurance: Mathematics and Economics*, Elsevier, v. 31, n. 1, p. 35–69, 2002. Citado na página 77.

HEITSCH, H.; RÖMISCH, W. Scenario tree generation for multi-stage stochastic programs. In: *Stochastic optimization methods in finance and energy*. [S.l.]: Springer, 2011. p. 313–341. Citado 2 vezes nas páginas 71 e 97.

HIBIKI, N. Multi-period stochastic optimization models for dynamic asset allocation. *Journal of Banking & Finance*, v. 30, n. 2, p. 365–390, 2006. ISSN 03784266. Citado na página 75.

HILLI, P. et al. A stochastic programming model for asset liability management of a Finnish pension company. *Annals of Operations Research*, v. 152, n. 1, p. 115–139, 2007. ISSN 02545330. Citado na página 75.

HØYLAND, K.; WALLACE, S. W. Generating scenario trees for multistage decision problems. *Management science*, Informs, v. 47, n. 2, p. 295–307, 2001. Citado na página 71.

HUANG, S.-C. Online option price forecasting by using unscented kalman filters and support vector machines. *Expert Systems with Applications*, Elsevier, v. 34, n. 4, p. 2819–2825, 2008. Citado na página 65.

HULL, J.; WHITE, A. The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities. *The Journal of Finance*, 1987. ISSN 15406261. Citado na página 68.

JACQUIER, E.; POLSON, N. Bayesian methods in finance. In: *The Oxford Handbook of Bayesian Econometrics*. [S.l.]: Oxford University Press, 2011. p. 439–512. Citado na página 66.

JOHANNES, M.; KORTEWEG, A.; POLSON, N. Sequential Learning, Predictability, and Optimal Portfolio Returns. *The Journal of Finance*, v. 69, n. 2, p. 611–644, 2014. ISSN 1540-6261. Citado 2 vezes nas páginas 76 e 96.

KAUCIC, M. Equity portfolio management with cardinality constraints and risk parity control using multi-objective particle swarm optimization. *Computers & Operations Research*, Elsevier, v. 109, p. 300–316, 2019. Citado 2 vezes nas páginas 81 e 87.

KIM, S.; SHEPHERD, N.; CHIB, S. Stochastic Volatility: Likelihood Inference and Comparison with ARCH Models. *Review of Economic Studies*, v. 65, n. 3, p. 361–393, 1998. ISSN 0034-6527. Citado 2 vezes nas páginas 68 e 69.

KLEIN, H. W. K.; STREUTKER, M. H.; VLERK, M. H. V. D. Modeling alm for dutch pension funds. In: *WDS'06 Proceedings of Contributed Papers*. [S.l.: s.n.], 2006. I, 100-105. Citado na página 8.

KOUWENBERG, R.; ZENIOS, S. A. Stochastic Programming Models for Asset Liability Management. In: *Handbook of Asset and Liability Management - Set*. [S.l.: s.n.], 2008. v. 1, p. 253–303. ISBN 9780444532480. Citado 6 vezes nas páginas 10, 75, 78, 79, 96 e 97.

LEÃO, L. L.; MARTINS, P. S.; LOCATELLI, R. L. Gestão de ativos e passivos e controle de riscos: Um estudo aplicado ao banco de desenvolvimento de minas gerais s/a. *Revista Eletrônica de Ciência Administrativa*, v. 12, n. 3, p. 3–25, 2012. ISSN 2177-6652. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 77.

LEGO, V. di; TURRA, C. M.; CESAR, C. Mortality selection among adults in Brazil: The survival advantage of Air Force officers. *Demographic Research*, v. 37, p. 1339—1350, 2017. Citado na página 14.

- LEITE, A. L.; FILHO, R. B. P. G.; VICENTE, J. V. M. *Previsão da Curva de Juros: um modelo estatístico com variáveis macroeconômicas*. [S.l.], 2009. Disponível em: <<https://ideas.repec.org/p/bcb/wpaper/186.html>>. Citado na página 63.
- LI, Y.; COATES, M. Particle Filtering With Invertible Particle Flow. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2017. ISSN 1053587X. Citado na página 66.
- LIANG, J. J.; QU, B. Y. Large-scale portfolio optimization using multiobjective dynamic multi-swarm particle swarm optimizer. In: *Proceedings of the 2013 IEEE Symposium on Swarm Intelligence, SIS 2013 - 2013 IEEE Symposium Series on Computational Intelligence, SSCI 2013*. [S.l.: s.n.], 2013. ISBN 9781467360043. Citado na página 80.
- LINTNER, J. The Valuation of Risk Assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets. *The Review of Economics and Statistics*, The MIT Press, n. 1, p. 13–37. ISSN 00346535, 15309142. Citado na página 68.
- LIU, J.; WEST, M. Combined parameter and state estimation in simulation-based filtering. In: *Sequential Monte Carlo methods in practice*. [S.l.]: Springer, 2001. p. 197–223. ISBN 978-1-4757-3437-9. Citado 2 vezes nas páginas 66 e 67.
- LJUNG, L. Asymptotic behavior of the extended kalman filter as a parameter estimator for linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, IEEE, v. 24, n. 1, p. 36–50, 1979. Citado na página 65.
- LOPES, H. F.; TSAY, R. S. Particle filters and Bayesian inference in financial econometrics. *Journal of Forecasting*, v. 30, n. 1, p. 168–209, 2011. ISSN 02776693. Citado na página 66.
- LUX, T.; MORALES-ARIAS, L. Relative forecasting performance of volatility models: Monte Carlo evidence. *Quantitative Finance*, 2013. ISSN 14697688. Citado na página 68.
- MARÇAL, H. V. *Três ensaios sobre gerenciamento de ativos e passivos em fundos de pensão*. Tese (Doutorado) — Universidade Católica de Brasília, 2011. Citado na página 8.
- MARINAKIS, Y. et al. Ant colony and particle swarm optimization for financial classification problems. *Expert Systems with Applications*, Elsevier, v. 36, n. 7, p. 10604–10611, 2009. Citado na página 81.
- MARKOWITZ, H. Portfolio Selection. *The Journal of Finance*, 1952. ISSN 00221082. Citado na página 68.

MARQUES, D. *Asset and Liability Management (ALM) para entidades fechadas de previdência complementar no Brasil: Validação de um modelo de otimização com a aplicação a um caso prático*. Dissertação (Mestrado) — Universidade de Brasília, 2011. Citado na página 9.

MTPS. *Nota Técnica MTE (09/09/2015): Base de Dados RAIS/2014*. [S.l.], 2015. Disponível em: <<http://portalfat.mte.gov.br/wp-content/uploads/2016/02/Nota-Tecnica-MTE-2014.pdf>>. Citado na página 26.

MTPS. *Nota Técnica MTPS 088/12*. [S.l.], 2016. Disponível em: <[ftp://ftp.mtps.gov.br/pdet/microdados/NOTA\\_TECNICA\\_microdados.pdf](ftp://ftp.mtps.gov.br/pdet/microdados/NOTA_TECNICA_microdados.pdf)>. Citado na página 26.

NASCIMENTO, I. F. d. *Modelos Dinâmicos via Filtro de Partículas*. Dissertação (Mestrado) — Universidade de Brasília, 2014. Citado na página 66.

NENORTAITE, J.; BUTLERIS, R. Application of particle swarm optimization algorithm to decision making model incorporating cluster analysis. In: IEEE. *2008 Conference on Human System Interactions*. [S.l.], 2008. p. 88–93. Citado na página 80.

NI, Q. et al. Particle swarm optimization with dynamic random population topology strategies for a generalized portfolio selection problem. *Natural Computing*, Springer, v. 16, n. 1, p. 31–44, 2017. Citado na página 80.

OLIVEIRA, F. E. B. d.; BELTRÃO, K. I.; MANIERO, L. V. F. Alíquotas equânimes para um sistema de seguridade social. Instituto de Pesquisa Econômica Aplicada (Ipea), 1997. Citado na página 34.

OMORI, Y. et al. Stochastic volatility with leverage: Fast and efficient likelihood inference. *Journal of Econometrics*, 2007. ISSN 03044076. Citado na página 68.

OZBEK, L.; OZLALE, U. Employing the extended kalman filter in measuring the output gap. *Journal of Economic Dynamics and Control*, Elsevier, v. 29, n. 9, p. 1611–1622, 2005. Citado na página 65.

PETRIS, G.; PETRONE, S.; CAMPAGNOLI, P. *Dynamic Linear Models With R*. [S.l.: s.n.], 2009. 31–84 p. ISBN 0387772383. Citado 3 vezes nas páginas 64, 65 e 67.

PINHEIRO, R. P. *Riscos demograficos e atuariais nos planos de benefício definido e de contribuicao definida num fundo de pensão*. Tese (Doutorado) — CEDEPLAR – Centro de Desenvolvimento e Planejamento Regional, 2005. Citado 4 vezes nas páginas 25, 26, 37 e 97.

- PITT, M. K.; SHEPHARD, N. Filtering via Simulation: Auxiliary Particle Filters. *Journal of the American Statistical Association*, v. 94, n. 446, p. 590–599, 1999. ISSN 0162-1459. Citado 2 vezes nas páginas 66 e 67.
- RANGEL, L. A.; SABOIA, J. L. Criação da Previdência Complementar dos Servidores Federais: Motivações e Implicações na Taxa de Reposição das Futuras aposentadorias. 2013. Citado 3 vezes nas páginas 11, 15 e 28.
- RAY, J.; BHATTACHARYYA, S. Particle swarm optimization technique for optimizing conditional value-at-risk based portfolio. *International Journal of Computer Sciences and Engineering*, v. 5, 2017. Citado na página 81.
- RIBEIRO, A. J. F. *Um estudo sobre mortalidade dos aposentados por invalidez do regime geral da previdência social (RGPS)*. Tese (Doutorado) — Centro de Desenvolvimento e Planejamento Regional, 2006. Citado 7 vezes nas páginas 10, 14, 21, 22, 24, 25 e 37.
- RIBEIRO, G. X. K. *Asset Liability Management em um plano aberto de previdência complementar tradicional*. Tese (Doutorado) — Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2015. Citado 3 vezes nas páginas 9, 63 e 77.
- SAMUELSON, P. A. Lifetime Portfolio Selection by Dynamic Stochastic Programming. *Review of Economics and Statistics*, v. 51, n. 3, p. 239, 1969. ISSN 00346535. Citado 2 vezes nas páginas 74 e 78.
- SCHETTINI, B. P.; PIRES, G. M. V.; SANTOS, C. H. M. dos. Previdência e reposição no serviço público civil federal do poder executivo: microsimulações. 2018. Citado 2 vezes nas páginas 5 e 14.
- SEIDY, E. E. A New Particle Swarm Optimization Based Stock Market Prediction Technique. *IJACSA) International Journal of Advanced Computer Science and Applications*, 2016. Citado na página 81.
- SILVA, W. V. et al. Análise de cointegração e geração de cenários na alocação de investimentos em previdência complementar. *Revista Eletrônica de Ciência Administrativa*, v. 12, n. 3, p. 288–303, 2013. Citado 3 vezes nas páginas 4, 9 e 77.
- SLIM, C. Neuro-fuzzy network based on extended kalman filtering for financial time series. *World Academy of Science, Engineering and Technology*, v. 22, p. 134–139, 2006. Citado na página 65.
- SOUZA, M. C. M. *Um Estudo sobre a Mortalidade dos Aposentados Idosos do Regime Geral de Previdência Social do Brasil no período de 1998 a 2002*. Dissertação (Mestrado) — Centro de Desenvolvimento e Planejamento Regional, 2009. Citado na página 14.

- STORVIK, G. Particle filters for state-space models with the presence of unknown static parameters. *IEEE Transactions on Signal Processing*, v. 50, n. 2, p. 281–289, 2002. ISSN 1053587X. Citado 2 vezes nas páginas 66 e 67.
- VIRBICKAITE, A. et al. Particle Learning for Bayesian Non-Parametric Markov Switching Stochastic Volatility Model. *R&R Bayesian Analysis*, v. 2, n. 1, p. 1–28, 2016. Citado 4 vezes nas páginas 66, 68, 96 e 97.
- WACHTER, J. a. Asset Allocation. *Annual Review of Financial Economics*, v. 2, n. 1, p. 175–206, 2010. ISSN 1941-1367. Citado na página 76.
- WEST, M.; HARRISON, J. *Bayesian Forecasting and Dynamic Models (2Nd Ed.)*. New York, NY, USA: Springer-Verlag New York, Inc., 1997. ISBN 0-387-94725-6. Citado 2 vezes nas páginas 64 e 65.
- XIA, Y. H. Learning about predictability: The effects of parameter uncertainty on dynamic asset allocation. *Journal of Finance*, v. 56, n. 1, p. 205–246, 2001. ISSN 0022-1082. Citado 2 vezes nas páginas 75 e 96.
- XU, D.; CHEN, Z.; YANG, L. Scenario tree generation approaches using k-means and lp moment matching methods. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Elsevier, v. 236, n. 17, p. 4561–4579, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 71 e 97.
- YU, V. F.; JEWPNYA, P.; KACHITVICHYANUKUL, V. Particle swarm optimization for the multi-period cross-docking distribution problem with time windows. *International Journal of Production Research*, Taylor & Francis, v. 54, n. 2, p. 509–525, 2016. Citado na página 80.
- ZHANG, Z.; ZHAO, Q. The application of SVMs method on exchange rates fluctuation. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, Hindawi Publishing Corporation, v. 2009, p. 1–8, 2009. ISSN 1607-887X. Citado na página 80.
- ZHU, H. et al. Particle Swarm Optimization (PSO) for the constrained portfolio optimization problem. *Expert Systems with Applications*, 2011. ISSN 09574174. Citado na página 80.

# APÊNDICE A – Probabilidade de mortalidade

Idade	H RP200+20	H RP200	M RP200+20	M RP200	Idade	H RP200+20	H RP200	M RP200+20	M RP200
20	0.000176	0.000259	0.000109	0.000150	71	0.014477	0.019586	0.015050	0.016975
21	0.000189	0.000272	0.000105	0.000148	72	0.016074	0.021747	0.016740	0.018881
22	0.000201	0.000283	0.000106	0.000150	73	0.017904	0.024223	0.017963	0.020673
23	0.000220	0.000297	0.000112	0.000155	74	0.019974	0.027024	0.019909	0.022912
24	0.000238	0.000309	0.000118	0.000160	75	0.023098	0.030622	0.021218	0.024916
25	0.000264	0.000323	0.000126	0.000168	76	0.025745	0.034131	0.023377	0.027451
26	0.000306	0.000345	0.000140	0.000179	77	0.029671	0.038547	0.026671	0.030694
27	0.000321	0.000354	0.000146	0.000186	78	0.034160	0.043489	0.029400	0.033835
28	0.000330	0.000365	0.000154	0.000196	79	0.039332	0.049071	0.032459	0.037355
29	0.000346	0.000382	0.000163	0.000207	80	0.045280	0.055360	0.035879	0.041291
30	0.000373	0.000412	0.000186	0.000227	81	0.052500	0.062905	0.039712	0.045702
31	0.000419	0.000463	0.000232	0.000272	82	0.060762	0.071350	0.044024	0.050664
32	0.000472	0.000521	0.000264	0.000310	83	0.067731	0.079534	0.048882	0.056255
33	0.000529	0.000585	0.000287	0.000344	84	0.078030	0.089800	0.054364	0.062565
34	0.000589	0.000651	0.000306	0.000374	85	0.086615	0.099680	0.062737	0.070761
35	0.000649	0.000717	0.000323	0.000402	86	0.096031	0.110516	0.072477	0.080120
36	0.000706	0.000780	0.000337	0.000429	87	0.110205	0.124300	0.083728	0.090716
37	0.000759	0.000839	0.000350	0.000455	88	0.126358	0.139683	0.093259	0.101042
38	0.000781	0.000881	0.000365	0.000484	89	0.139641	0.154366	0.107260	0.113903
39	0.000798	0.000919	0.000382	0.000517	90	0.159402	0.172706	0.118538	0.125879
40	0.000815	0.000957	0.000416	0.000563	91	0.173622	0.188113	0.130170	0.138232
41	0.000832	0.000997	0.000456	0.000617	92	0.194984	0.207060	0.141885	0.150672
42	0.000855	0.001045	0.000502	0.000679	93	0.210338	0.223365	0.158900	0.165391
43	0.000882	0.001100	0.000552	0.000747	94	0.225669	0.239646	0.170429	0.177391
44	0.000916	0.001166	0.000606	0.000820	95	0.249389	0.259578	0.181346	0.188755
45	0.000954	0.001239	0.000639	0.000882	96	0.264693	0.275506	0.191481	0.199303
46	0.000987	0.001308	0.000671	0.000946	97	0.279561	0.290981	0.207833	0.212034
47	0.001022	0.001382	0.000702	0.001010	98	0.304446	0.310600	0.216241	0.220611
48	0.001058	0.001460	0.000759	0.001092	99	0.318844	0.325288	0.223425	0.227940
49	0.001095	0.001543	0.000821	0.001180	100	0.332699	0.339424	0.229295	0.233930
50	0.001132	0.001628	0.000920	0.001296	101	0.358628	0.358628	0.244834	0.244834
51	0.001251	0.001837	0.001053	0.001454	102	0.371685	0.371685	0.254498	0.254498
52	0.001315	0.001970	0.001232	0.001633	103	0.383040	0.383040	0.266044	0.266044
53	0.001438	0.002154	0.001446	0.001841	104	0.392003	0.392003	0.279055	0.279055
54	0.001576	0.002360	0.001705	0.002085	105	0.397886	0.397886	0.293116	0.293116
55	0.001852	0.002718	0.002051	0.002409	106	0.400000	0.400000	0.307811	0.307811
56	0.002224	0.003198	0.002503	0.002823	107	0.400000	0.400000	0.322725	0.322725
57	0.002575	0.003629	0.002918	0.003226	108	0.400000	0.400000	0.337441	0.337441
58	0.002998	0.004140	0.003292	0.003639	109	0.400000	0.400000	0.351544	0.351544
59	0.003380	0.004667	0.003726	0.004119	110	0.400000	0.400000	0.364617	0.364617
60	0.003837	0.005297	0.004242	0.004689	111	0.400000	0.400000	0.376246	0.376246
61	0.004523	0.006119	0.004878	0.005393	112	0.400000	0.400000	0.386015	0.386015
62	0.005160	0.006981	0.005586	0.006175	113	0.400000	0.400000	0.393507	0.393507
63	0.006112	0.008104	0.006417	0.007094	114	0.400000	0.400000	0.398308	0.398308
64	0.006887	0.009130	0.007232	0.007995	115	0.400000	0.400000	0.400000	0.400000
65	0.007776	0.010309	0.008144	0.009003	116	0.400000	0.400000	0.400000	0.400000
66	0.009115	0.011841	0.009191	0.010161	117	0.400000	0.400000	0.400000	0.400000
67	0.010168	0.013210	0.010206	0.011282	118	0.400000	0.400000	0.400000	0.400000
68	0.010910	0.014464	0.011282	0.012471	119	0.400000	0.400000	0.400000	0.400000
69	0.012089	0.016027	0.012469	0.013784	120	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
70	0.013084	0.017702	0.014048	0.015529					

Tabela 14: Probabilidade de mortalidade adotada desagregada por sexo.

Fonte: Cardoso (2013)

# APÊNDICE B – Probabilidade entrada em invalidez

Idades	Álvaro Vindas	FUNPRESP		(GOMES; FÍGOLI; RIBEIRO, 2010)	IBA
	Geral	Homem	Mulher	Geral	Geral
20	0.000569	0.000192	0.000216	0.000070	0.006200
21	0.000569	0.000193	0.000217	0.000120	0.006000
22	0.000569	0.000211	0.000233	0.000180	0.005900
23	0.000570	0.000233	0.000258	0.000250	0.005700
24	0.000572	0.000254	0.000282	0.000320	0.005600
25	0.000575	0.000278	0.000306	0.000410	0.005500
26	0.000579	0.000303	0.000335	0.000500	0.005400
27	0.000583	0.000330	0.000363	0.000600	0.005300
28	0.000589	0.000359	0.000395	0.000720	0.005300
29	0.000596	0.000391	0.000428	0.000840	0.005200
30	0.000605	0.000426	0.000462	0.000980	0.005200
31	0.000615	0.000462	0.000501	0.001120	0.005200
32	0.000628	0.000500	0.000542	0.001270	0.005300
33	0.000643	0.000544	0.000586	0.001440	0.005400
34	0.000660	0.000586	0.000634	0.001630	0.005500
35	0.000681	0.000636	0.000682	0.001840	0.005600
36	0.000704	0.000689	0.000736	0.002070	0.005800
37	0.000732	0.000746	0.000794	0.002310	0.006000
38	0.000764	0.000807	0.000856	0.002580	0.006400
39	0.000801	0.000874	0.000924	0.002890	0.006700
40	0.000844	0.000947	0.000996	0.003250	0.007100
41	0.000893	0.001023	0.001070	0.003660	0.007600
42	0.000949	0.001106	0.001155	0.004110	0.008200
43	0.001014	0.001199	0.001244	0.004600	0.008900
44	0.001088	0.001302	0.001342	0.005150	0.009600
45	0.001174	0.001410	0.001448	0.005760	0.010300
46	0.001271	0.001533	0.001563	0.006410	0.011500
47	0.001383	0.001662	0.001688	0.007090	0.012600
48	0.001511	0.001807	0.001828	0.007840	0.013900
49	0.001657	0.001967	0.001973	0.008690	0.015300
50	0.001823	0.002113	0.002125	0.009680	0.017000
51	0.002014	0.002336	0.002313	0.010730	0.018800
52	0.002231	0.002553	0.002507	0.011830	0.020800
53	0.002479	0.002792	0.002724	0.013080	0.023100
54	0.002762	0.003058	0.002961	0.014590	0.025700
55	0.003089	0.003362	0.003225	0.016440	0.028600
56	0.003452	0.003699	0.003517	0.018660	0.031800
57	0.003872	0.004080	0.003847	0.021170	0.035400
58	0.004350	0.004516	0.004212	0.023960	0.039400
59	0.004895	0.005013	0.004629	0.027010	0.043900
60	0.005516	0.005582	0.004796	0.030310	0.048900
61	0.006223	0.006244	0.005628	0.034460	0.054400
62	0.007029	0.007015	0.006240	0.039460	0.060600
63	0.007947	0.007926	0.006946	0.044390	0.067500
64	0.008993	0.009010	0.007768	0.048360	0.075100
65	0.010183	0.010302	0.008734	0.050480	0.083600

Tabela 15: Tábuas de entrada em invalidez desagregada por sexo e método.

Fonte: Cardoso (2013) e Instituto Brasileiro de Atuária.