

**DETECÇÃO DE DANO EM VIGAS TIMOSHENKO  
UTILIZANDO TÉCNICAS DE VARIAÇÃO DE  
FREQUÊNCIA POR *WAVELET***

**Juliana Cardoso Santos**

**Dissertação de Mestrado  
Integridade de Materiais da Engenharia**

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA**

**Faculdade do Gama/Faculdade de Tecnologia  
Programa de Pós-Graduação em Integridade de  
Materiais da Engenharia**

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
FACULDADE DO GAMA/FACULDADE DE TECNOLOGIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM INTEGRIDADE DE  
MATERIAIS DA ENGENHARIA

DETECÇÃO DE DANO EM VIGAS TIMOSHENKO  
UTILIZANDO TÉCNICAS DE VARIAÇÃO DE  
FREQUÊNCIA POR *WAVELET*

Juliana Cardoso Santos

Orientador: Marcus Vinicius Girão de Moraes, Dr. Univ (ENM/ UnB)

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

PUBLICAÇÃO: FGA.DM - 086A/2020

BRASÍLIA/DF, 04 DE MARÇO DE 2020.

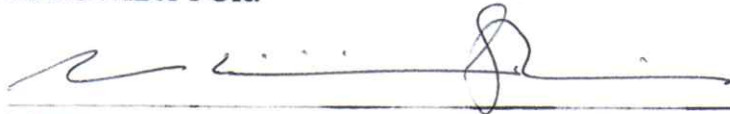
UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
FACULDADE DO GAMA/FACULDADE DE TECNOLOGIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM INTEGRIDADE DE  
MATERIAIS DA ENGENHARIA

Detecção de Dano em Vigas Timoshenko Utilizando Técnicas de  
Variação de Frequência por *Wavelet*


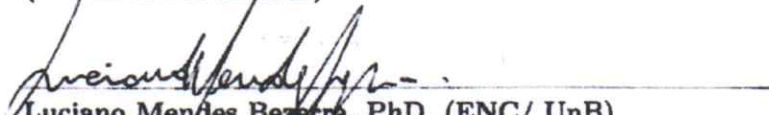
Juliana Cardoso Santos

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO SUBMETIDA AO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM INTEGRIDADE DE MATERIAIS DA ENGENHARIA DA FACULDADE DO GAMA/FACULDADE DE TECNOLOGIA DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA COMO PARTE DOS REQUISITOS PARCIAIS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM INTEGRIDADE DE MATERIAIS DA ENGENHARIA.

APROVADA POR:



Marcus Vinicius Girão de Moraes, Dr. Univ (ENM/ UnB)  
(Orientador)

  
Suzana Moreira Ávila, Dra. (FGA/ UnB)  
(Examinadora Interna)  
Luciano Mendes Bezerra, PhD. (ENC/ UnB)  
(Examinador Externo)

BRASÍLIA/DF, 04 DE MARÇO DE 2020.

## FICHA CATALOGRÁFICA

Juliana Cardoso Santos

Detecção de Dano em Vigas Timoshenko Utilizando Técnicas de Variação de Frequência por *Wavelet* [Distrito Federal] 2020.

120p. (FGA-FT/UnB, Mestre, Integridade de Materiais da Engenharia, 2020).

Dissertação de Mestrado - Universidade de Brasília.

Faculdade do Gama/Faculdade de Tecnologia.

Programa de Pós-Graduação em Integridade de Materiais da Engenharia.

Palavras-chave:

- |                            |                    |
|----------------------------|--------------------|
| 1. Detecção de Danos       | 2. Viga Timoshenko |
| 3. Variação de frequências | 4. <i>Wavelet</i>  |
| I. FGA-FT/UnB              | II. Título (série) |

## REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

Santos, J. C. (2020). Detecção de Dano em Vigas Timoshenko Utilizando Técnicas de Variação de Frequência por *Wavelet*. Dissertação de Mestrado, Publicação FGA.DM - 086A/2020, Programa de Pós-Graduação em Integridade de Materiais da Engenharia, Universidade de Brasília, Brasília, Distrito Federal, 120p.

## CESSÃO DE DIREITOS

**NOME DO AUTOR:** Juliana Cardoso Santos.

**TÍTULO DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO:** Detecção de Dano em Vigas Timoshenko Utilizando Técnicas de Variação de Frequência por *Wavelet*.

**GRAU / ANO:** MESTRE / 2020

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta dissertação de mestrado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desta dissertação de mestrado pode ser reproduzida sem a autorização por escrito do autor.



---

Juliana Cardoso Santos

*Aos meus pais, Josimar e Luzimaria, com todo o amor.*

# Agradecimentos

Primeiramente, a Deus pelo dom da vida, por escutar os desejos do meu coração e me dar forças para concluir com êxito mais uma etapa da minha vida.

Aos meus pais, Josimar e Luzimaria, que sempre acreditaram na minha capacidade e jamais mediram esforços para proporcionar os valores da vida que me possibilitaram chegar até aqui.

Aos meus irmãos, Soraya e Rafael, por acreditarem em mim e por todo amor dado a que muito me orgulho. Ao meu cunhado, Leonardo, pela amizade e incentivo.

Aos meus queridos avós por tantas histórias e conselhos. Agradeço por toda atenção, carinho e amor. Gratidão eterna.

Ao meu orientador, Marcus Vinicius Girão de Moraes, que acreditou na minha capacidade e me orientou com paciência, dedicação e competência ao longo do desenvolvimento deste trabalho.

Aos meus amigos e professores, Ramon Saleno e Erwin Ulises, pelo entusiasmo que sempre apresentaram e pela confiança que em mim depositaram desde a graduação.

Aos meus amigos do Grupo de Dinâmica de Sistemas (GDS) que sempre estiveram ao meu lado com doses a mais de incentivo e carinho.

A todos os professores do programa e GDS, pelo conhecimento e experiências transmitidas, que merecem todo respeito e reverência. A todos os funcionários do bloco G pelo zelo e atenção.

A CAPES, FAP e programa Integridade dos Materiais de Engenharia pelos recursos financeiros que foram fundamentais para a realização deste trabalho.

Aos meus familiares e amigos que direta ou indiretamente contribuíram para que esse sonho se tornasse realidade.

# Resumo

**Detecção de Dano em Vigas Timoshenko Utilizando Técnicas de Variação de Frequência por *Wavelet***

**Autor: Juliana Cardoso Santos**

**Orientador: Marcus Vinicius Girão de Moraes, Dr. Univ (ENM/ UnB)**

**Programa de Pós Graduação em Integridade de Materiais da Engenharia**

**Brasília, 04 de março de 2020.**

Danos estruturais podem custar por excessivos dispêndios, além de ensejar risco à vida humana. Dessa forma, para a manutenção segura e satisfatória da estrutura é requerida a detecção de danos, ainda em fase inicial de desenvolvimento. Não obstante à existência de diversos métodos de detecção de danos, urge ainda, encontrar métodos de maior eficácia e menor onerosidade. Logo, o presente trabalho tem por finalidade a investigação de técnicas que requerem somente a resposta da estrutura danificada. O estudo é baseado na variação das frequências naturais de vigas de Timoshenko danificada quando sujeita a aplicação de uma massa adicional ao longo do comprimento da viga. É observada a curva da variação de frequências (*frequency-shift*) e, em seguida, são aplicadas diferentes técnicas de identificação do dano: a Transformada Discreta de *Wavelet* e as derivadas da curva da *frequency-shift*. Além disso, é proposto o índice *Signal-to-Damage Ratio* – SDR para avaliar o nível de dano. Foi simulada uma descontinuidade por massa e um dano por rigidez usando uma mola rotacional. Os modelos foram comparados a fim de auxiliar em futuros testes experimentais. Além disso, foram avaliadas diferentes níveis e posições de dano na viga. Por fim, a metodologia proposta pode ser utilizada como uma ferramenta para estudo de detecção de danos em vigas de Timoshenko, possuindo baixo custo computacional e aplicação prática, uma vez que requer o uso de poucos acelerômetros que podem ser posicionados de maneira estratégica ao longo da estrutura.

**Palavras-chaves:** Detecção de Danos; Viga Timoshenko; Variação de frequências; *Wavelet*.

# Abstract

## DAMAGE DETECTION IN TIMOSHENKO BEAM USING FREQUENCY-SHIFT TECHNIQUES BY *WAVELET*

**Author:** Juliana Cardoso Santos

**Supervisor:** Marcus Vinicius Girão de Moraes, Dr. Univ (ENM/ UnB)

**Master-** Integrity of Engineering Materials

**Brasilia, 4th March 2020.**

Structural damages are responsible for excessive financial expenses, besides there is the risk of human life loss. Thus, for safe and satisfactory maintenance of the structure, it is necessary to detect damage in the initial stage of development. Despite the existence of several methods of damage detection, it is necessary to find methods that present higher effectiveness and minor cost. Hence, the present work aims to investigate techniques that use only damaged structure responses. The study centers on the variation of the natural frequencies of damaged Timoshenko beams when subjected to the application of an additional mass along their length. A frequency shift curve is observed and different damage identification techniques are applied: the Discrete Wavelet Transform and the derivatives of the frequency-shift curve. After, the concept of Signal to Damage Ratio - SDR is proposed to measure the damage levels. A mass discontinuity and stiffness damage using a rotational spring is modeled. A comparison is made between two models to future experimental tests since the use of the mass added to the structure is a non-destructive tool. Different levels and positions of damage were also evaluated. Finally, the proposed method can be used as an efficient tool for the study of damage in Timoshenko's beams concerning low computational cost and practical application because it requires the use of a few accelerometers that can be strategically positioned throughout the structure.

**Key-words:** Damage detection; Timoshenko beam; Frequency-shift; Wavelet.



# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
1.1	Contextualização	1
1.2	Motivação	2
1.3	Objetivo	3
1.4	Metodologia	3
1.5	Contribuições	4
1.6	Plano da Dissertação	4
<b>2</b>	<b>INTEGRIDADE DE ELEMENTOS ESTRUTURAIS</b>	<b>6</b>
2.1	Integridade Estrutural: Conceitos	6
2.1.1	Monitoração de Integridade Estrutural	7
2.2	Métodos de Detecção de Danos	8
2.2.1	Variação de Frequências utilizando Massa Adicional	9
2.3	Modelagem Numérica de Dano	11
2.3.1	Descontinuidade de Massa	13
2.3.2	Dano em Rigidez	15
2.4	Considerações Finais	17
<b>3</b>	<b>MODELO DINÂMICO DE VIGA DE TIMOSHENKO</b>	<b>18</b>
3.1	Viga de Timoshenko	18
3.1.1	Dinâmica da Viga de Timoshenko	18
3.1.2	Elementos Finitos da Viga de Timoshenko	19
3.2	Modelagem do Dano	22
3.2.1	Descontinuidade de Massa	23
3.2.2	Dano em Rigidez	23
3.3	Adimensionalização de Viga	24
3.3.1	Viga de Timoshenko	24
<b>4</b>	<b>TRANSFORMADAS DE WAVELETS</b>	<b>27</b>
4.1	Wavelets	27

4.2	<b>Propriedades</b>	28
4.3	<b>Transformada Contínua de <i>Wavelet</i> (TCW)</b>	29
4.4	<b>Transformada Discreta de <i>Wavelet</i> (TDW)</b>	29
4.5	<b>Famílias</b>	30
4.5.1	Haar	30
4.5.2	Daubechies	31
4.5.3	Biortogonal	31
4.5.4	Coiflets	32
4.5.5	Symlets	32
<b>5</b>	<b>METODOLOGIA</b>	<b>34</b>
5.1	<i>Frequency-shift</i>	34
5.2	Derivadas da <i>frequency-shift</i>	35
5.3	Transformada Discreta de <i>Wavelet</i> (TDW)	36
5.4	Definição do <i>Signal-to-Damage Ratio</i> (SDR)	37
5.5	Procedimentos	38
<b>6</b>	<b>RESULTADOS NUMÉRICOS</b>	<b>40</b>
6.1	<b>Descrição dos Ensaios</b>	<b>40</b>
6.1.1	Características da Viga	40
6.1.2	Casos Estudados	41
6.2	<b>Descontinuidade de Massa</b>	<b>41</b>
6.2.1	<i>Frequency-shift</i> e Derivadas da <i>Frequency-shift</i>	42
6.2.2	Transformada Discreta de <i>Wavelet</i> (TDW)	47
6.2.3	SDR - <i>Signal-to-Damage Ratio</i>	51
6.2.4	Relação massa móvel $m_a$ e massa de dano $m_d$	52
6.2.5	Mapa de Resposta	54
6.2.6	Influência dos Modos de Vibração	58
6.3	<b>Dano em Rigidez</b>	<b>59</b>
6.3.1	<i>Frequency-shift</i> e Derivadas da <i>Frequency-shift</i>	59
6.3.2	TDW e SDR	60
6.3.3	Comparação entre $\eta$ e $\mu$	61
6.3.4	Efeito do Ruído	63
<b>7</b>	<b>CONCLUSÃO</b>	<b>66</b>
7.1	<b>Sugestões para Trabalhos Futuros</b>	<b>68</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>69</b>

**APÊNDICES** **75**

<b>APÊNDICE A – . MATERIAIS E MEIOS . . . . .</b>	<b>76</b>
<b>A.1 Bancada Experimental . . . . .</b>	<b>76</b>
<b>A.2 Identificação de Parâmetros de Viga Intacta . . . . .</b>	<b>77</b>
<b>A.3 Validação Numérico - Experimental de Viga Intacta . . . . .</b>	<b>80</b>
<b>A.4 Identificação Experimental da Curva de Frequência . . . . .</b>	<b>83</b>
<b>APÊNDICE B – . SCRIPTS - MATLAB . . . . .</b>	<b>86</b>
<b>B.1 Descontinuidade de Massa . . . . .</b>	<b>86</b>
<b>B.2 Dano em Rigidez . . . . .</b>	<b>91</b>

**ANEXOS** **94**

<b>ANEXO A – . ELEMENTOS ISOPARAMÉTRICO E INTEGRAÇÃO NUMÉRICA . . . . .</b>	<b>95</b>
<b>A.1 Elementos Isoparamétrico . . . . .</b>	<b>95</b>
<b>A.2 Integração Numérica . . . . .</b>	<b>96</b>
A.2.1 Quadratura de Newton-Cotes . . . . .	97
A.2.2 Quadratura de Gauss-Legendre . . . . .	98

# Lista de Figuras

Figura 1.1 – Exemplos de colapsos estruturais em: (a) Viaduto da Galeria dos Estados, Brasília, Brasil (2018); (b) Ponte Morandi, Genova, Itália (2018). . . . .	1
Figura 2.1 – Zhong; Oyadiji; Ding (2008). . . . .	10
Figura 2.2 – Asa de avião sujeita a dois tipos de danos: massa adicional e corte de serra na placa. (Papatheou et al., 2010). . . . .	14
Figura 2.3 – Dois tipos de simulação de danos: (a) perda da seção transversal; (b) adição de massa. (Sampaio et al., 2016). . . . .	15
Figura 2.4 – Representação da viga cantilever: (a) geometria da viga danificada; (b) mola torcional como dano. (Moradi; Razi; Fatahi, 2015). . . . .	16
Figura 4.1 – Função <i>wavelet</i> Haar. . . . .	31
Figura 4.2 – Função <i>wavelet</i> Daubechies. . . . .	31
Figura 4.3 – Função <i>wavelet</i> Biortogonal. . . . .	32
Figura 4.4 – Função <i>wavelet</i> Coiflets. . . . .	32
Figura 4.5 – Função <i>wavelet</i> Symlets. . . . .	33
Figura 5.1 – Viga na condição livre-livre sujeita a uma massa móvel adicional $m_a$ e uma massa referente a dano $m_d$ . . . . .	34
Figura 5.2 – Variação da primeira frequência natural de viga livre-livre sujeita a diferentes níveis de dano localizado no meio do vão. . . . .	35
Figura 5.3 – Primeira frequência natural do exemplo: (a) primeira derivada, (b) segunda derivada e (c) terceira derivada. . . . .	36
Figura 5.4 – Aplicação da TWD (a)db5, (b)coif3, (c)sym6 e (d)bior68. . . . .	37
Figura 5.5 – Determinação do SDR (a)db5, (b)coif3, (c)sym6, (d)bior6.8. . . . .	38
Figura 5.6 – Fluxograma referente a estrutura do presente trabalho. . . . .	39
Figura 6.1 – Viga com descontinuidade de massa. . . . .	41
Figura 6.2 – Variação de frequência $f_n(x/L)/max(f_n(x/L))$ em função da posição de $m_a$ referente ao caso C1: (a) primeira frequência, (b) segunda frequência e (c) terceira frequência. . . . .	42
Figura 6.3 – Variação de frequência $f_n(x/L)/max(f_n(x/L))$ em função da posição de $m_a$ referente ao caso C2: (a) primeira frequência, (b) segunda frequência e (c) terceira frequência. . . . .	43

Figura 6.4 – Variação de frequência $f_n(x/L)/\max(f_n(x/L))$ em função da posição de $m_a$ referente ao caso C3: (a) primeira frequência, (b) segunda frequência e (c) terceira frequência. . . . .	43
Figura 6.5 – Variação de frequência $f_n(x/L)/\max(f_n(x/L))$ em função da posição de $m_a$ referente ao caso C4: (a) primeira frequência, (b) segunda frequência e (c) terceira frequência. . . . .	44
Figura 6.6 – Derivadas da variação de frequência $f_n$ em função da posição adimensional de $m_a$ para o caso C1: (a) $df_n(x)/dx$ , (b) $d^2 f_n(x)/dx^2$ e (c) $d^3 f_n(x)/dx^3$ . . . . .	45
Figura 6.7 – Derivadas da variação de frequência $f_n$ em função da posição adimensional de $m_a$ para o caso C2: (a) $df_n(x)/dx$ , (b) $d^2 f_n(x)/dx^2$ e (c) $d^3 f_n(x)/dx^3$ . . . . .	45
Figura 6.8 – Derivadas da variação de frequência $f_n$ em função da posição adimensional de $m_a$ para o caso C3: (a) $df_n(x)/dx$ , (b) $d^2 f_n(x)/dx^2$ e (c) $d^3 f_n(x)/dx^3$ . . . . .	46
Figura 6.9 – Derivadas da variação de frequência $f_n$ em função da posição adimensional de $m_a$ para o caso C4: (a) $df_n(x)/dx$ , (b) $d^2 f_n(x)/dx^2$ e (c) $d^3 f_n(x)/dx^3$ . . . . .	47
Figura 6.10–Variação do número de elementos - aplicação da TDW: (a) db5; (b) coif3; (c) sym6; (d) bior6.8 para o caso C1. . . . .	48
Figura 6.11–Variação do número de elementos - aplicação da TDW: (a) db5; (b) coif3; (c) sym6; (d) bior6.8 para o caso C2. . . . .	48
Figura 6.12–Variação do número de pontos - aplicação da TDW: (a) db5; (b) coif3; (c) sym6; (d) bior6.8 para o caso C1. . . . .	50
Figura 6.13–Variação do número de pontos - aplicação da TDW: (a) db5; (b) coif3; (c) sym6; (d) bior6.8 para o caso C2. . . . .	50
Figura 6.14–Aplicação da TDW e cálculo do SDR: (a)db5, (b)coif3, (c)sym6, (d)bior6.8 para o caso C1. . . . .	51
Figura 6.15–Aplicação da TDW e cálculo do SDR: (a)db5, (b)coif3, (c)sym6, (d)bior6.8 para o caso C2. . . . .	52
Figura 6.16–Relação das massas adicionais para $m_d$ : (a)1%, (b)5% e (c)10% para o caso C1. . . . .	53
Figura 6.17–Relação das massas adicionais para $m_d$ : (a)1%, (b)5% e (c)10% para o caso C2. . . . .	53
Figura 6.18–Mapa de resposta: primeira frequência natural da viga quando sujeita a $m_a$ na condição L-L: (a)1%, (b)2%, (c)3%, (d)4%, (e)5% e (f)10%. . . . .	54
Figura 6.19–Mapa de resposta: primeira frequência natural da viga quando sujeita a $m_a$ na condição A-A: (a)1%, (b)2%, (c)3%, (d)4%, (e)5% e (f)10%. . . . .	55
Figura 6.20–Mapa de resposta: segunda frequência natural da viga na condição L-L quando sujeita a $m_a$ : (a)1%, (b)2%, (c)3%, (d)4%, (e)5% e (f)10%. . . . .	56

Figura 6.21–Mapa de resposta: segunda frequência natural da viga na condição A-A quando sujeita a $m_a$ : (a)1%, (b)2%, (c)3%, (d)4%, (e)5% e (f)10%. . . . .	57
Figura 6.22–Aplicação da TDW para (a) modo 1, (b) modo 2 e (c) modo 3 para o caso C3. . . . .	58
Figura 6.23–Viga com dano em rigidez - mola rotacional. . . . .	59
Figura 6.24–Aplicação da técnica <i>frequency-shift</i> para C1: $f_{n_1}$ dano como uma mola para $\eta = 0.00, 0.04, 0.08, 0.10$ e $0.20$ . . . . .	59
Figura 6.25–Primeira frequência para $\eta = 0.1$ (C1): (a) segunda derivada e (b) terceira derivada. . . . .	60
Figura 6.26–Aplicação da TDW para a primeira frequência (C1): (a) $\eta = 0.1$ . . . . .	60
Figura 6.27–Influência da profundidade do dano $\eta$ no cálculo do SDR para C1. . . . .	61
Figura 6.28–Relação do SDR com a profundidade do dano $\eta$ e descontinuidade de massa $\mu$ . . . . .	61
Figura 6.29–Correlação da descontinuidade de massa $\mu$ e dano em rigidez $\eta$ . . . . .	62
Figura 6.30–Comparação do índice SDR para o caso C1 considerando: (a) $\mu = 0.06$ e (b) $\eta_{calc} = 0.049087$ . . . . .	63
Figura 6.31–Variação da primeira frequência natural de viga L-L dano localizado no meio do vão, $\eta$ variando de 0 a 0.3, com ruído (a) 1%, (b) 5% e (c) 10%. . . . .	64
Figura 6.32–Derivadas da curva <i>frequency-shift</i> em função da posição adimensional para o caso C1, $\eta$ igual a 0.3, com 1% de ruído: (a) $d^2 f_n(x)/dx^2$ e (b) $d^3 f_n(x)/dx^3$ . . . . .	64
Figura 6.33–Aplicação da TDW e cálculo do SDR para o caso C1, $\eta$ igual a 0.3, com 1% de ruído. . . . .	65
Figura A.1–Configuração do teste axial experimental. . . . .	77
Figura A.2–Função de Resposta em Frequência e Fase a partir do teste axial experimental. . . . .	78
Figura A.3–Função de Resposta em Frequência e Fase do teste experimental de vibração de flexão. . . . .	81
Figura A.4–Três primeiras frequências naturais da viga intacta: (a) Euler-Bernoulli, (b) MEF-Timoshenko, (c) ANSYS e (d) Experimental. . . . .	82
Figura A.5–Erro relativo em relação aos testes experimentais: (a) Analítico(+), (b) Modelo MEF(o), (c) ANSYS(x). . . . .	83
Figura A.1–Coordenada global $x$ , coordenada local $\bar{x}$ , coordenada local normalizada $\xi$ . . . . .	95

# Lista de Tabelas

Tabela 1 – Características da viga de alumínio. . . . .	41
Tabela 2 – Casos da viga com diferentes condições de contorno e posições de dano. . . . .	41
Tabela 3 – SDR em dB e dimensionais referentes a $\mu$ e $\eta$ . . . . .	62
Tabela 4 – Estimativa do módulo de elasticidade a partir do primeiro (T1) e segundo (T2) teste. . . . .	79
Tabela 5 – Comparação dos valores do módulo de elasticidade - ensaio sonelástico. . . . .	80
Tabela 6 – Características da viga de alumínio. . . . .	80
Tabela 7 – Comparação das frequências naturais da viga intacta $f_n[Hz]$ : (a) Analítico-Euler-Bernoulli, (b) Modelo MEF-Timoshenko, (c) ANSYS BEAM188 e (d) Experimental. . . . .	82
Tabela 8 – Coeficientes de ponderação para a fórmula de Newton Cotes . . . . .	98
Tabela 9 – Pesos e pontos de Gauss para quadratura de Gauss-Legendre . . . . .	99

# Lista de Abreviaturas e Siglas

<i>3D</i>	Três dimensões
<i>A – A</i>	Apoiada-Apoiada
<i>APDL</i>	<i>ANSYS Parametric Design Language</i>
<i>COMAC</i>	<i>Coordinate Modal Assurance Criterion</i>
<i>FRESH</i>	<i>Frequency-shift</i>
<i>FRF</i>	Função Resposta em Frequência
<i>L – L</i>	Livre-Livre
<i>MAC</i>	<i>Modal Assurance Criterion</i>
<i>MCOA</i>	<i>Modified Cuckoo Optimization Algorithm</i>
<i>MEC</i>	Método de Elementos de Contorno
<i>MEE</i>	Método de Elementos Espectrais
<i>MEF</i>	Método de Elementos Finitos
<i>NBR</i>	Norma Brasileira
<i>OAE</i>	Obra de Arte Especial
<i>RMQ</i>	Raíz Média Quadrática
<i>SDR</i>	<i>Signal-to-Damage Ratio</i>
<i>SHM</i>	<i>Structural Health Monitoring</i>
<i>TCW</i>	Transformada Contínua de <i>Wavelet</i>
<i>TDW</i>	Transformada Discreta de <i>Wavelet</i>
<i>UnB</i>	Universidade de Brasília



# Lista de Símbolos

## Símbolos Latinos

$a$	Parâmetro escala da <i>wavelet</i>
$b$	Base da seção transversal
$d$	Profundidade da trinca
$f_n$	Frequência natural
$h$	Altura da seção transversal
$k$	Fator de correção de cisalhamento
$m$	Massa da viga
$m_a$	Massa móvel adicional
$m_d$	Massa de dano
$u$	Deslocamento transversal
$\bar{u}, \bar{x}$	Parâmetros adimensionais
$A$	Área da seção transversal
$E$	Módulo de elasticidade do material
$G$	Módulo de cisalhamento do material
$I$	Momento de inércia da seção transversal
$K$	Rigidez equivalente de mola rotacional
$L$	Comprimento da viga
$L_e$	Comprimento do elemento da viga
$L_d$	Posição do dano
$M_f$	Momento de flexão à seção transversal

$N$	Funções de forma
$R^2$	Raio de giração da seção transversal
$T$	Energia cinética
$U$	Energia de deformação
$V$	Esforço cortante
$W$	Transformada de <i>wavelet</i>

## Símbolos Gregos

$\alpha$	Índice da posição da trinca adimensional
$\beta$	Termo referente a condição de contorno
$\gamma$	Deformação de cisalhamento
$\delta$	Termos virtuais
$\epsilon$	Deformação normal
$\eta$	Relação de profundidade da trinca adimensional
$\theta$	Rotação da seção transversal
$\iota$	Parâmetro translação da <i>wavelet</i>
$\lambda$	Frequência natural ao quadrado
$\nu$	Coefficiente de Poisson
$\xi$	Coordenadas nodais
$\rho$	Densidade do material
$\sigma$	Tensão normal
$\tau$	Tensão de cisalhamento transversal
$\phi$	<i>Wavelet</i>
$\phi^*$	Complexo conjugado da função <i>wavelet</i>
$\Phi$	Amplitude do tipo de deslocamento nos pontos de controle

## Matrizes

<b>M</b>	Matriz global de massa da estrutura
<b>M<sup>e</sup></b>	Matriz elementar de massa da estrutura
<b>N</b>	Matriz das funções de forma
<b>K</b>	Matriz global de rigidez da estrutura
<b>K<sup>e</sup></b>	Matriz elementar de rigidez da estrutura
<b>K<sub>d</sub><sup>e</sup></b>	Matriz elementar de rigidez da estrutura danificada

# 1 Introdução

## 1.1 Contextualização

No decorrer do tempo, o homem vem desafiando limites e trazendo a possibilidade de construção das mais diversas estruturas, com elevados padrões de construção. Entretanto, anormalidades e manifestações patológicas comprometem a durabilidade e resistência dos sistemas estruturais, reduzindo a vida útil das estruturas.

O surgimento de danos estruturais, muitas vezes, é responsável por custos excessivos, além de ensejar risco à vida humana. Danos em estruturas ocorrem por diversos motivos: vibrações excessivas, fadiga mecânica, corrosão de armaduras, oxidação de estruturas metálicas, entre outros.

Há diversos exemplos, nacionais e internacionais, de estruturas que entraram no estágio de colapso, afetando o conforto e saúde dos usuários. Na Figura 1.1, são apresentados dois casos de estruturas em condições críticas, onde acarretaram prejuízos para a sociedade.



Figura 1.1 – Exemplos de colapsos estruturais em: (a) Viaduto da Galeria dos Estados, Brasília, Brasil (2018); (b) Ponte Morandi, Genova, Itália (2018).

Um dos requisitos mais importantes para a manutenção estrutural é a detecção de danos, ainda em fase inicial de desenvolvimento. As fissuras em elementos estruturais podem causar variações locais de rigidez que podem afetar o comportamento dinâmico da estrutura. Em particular, as alterações das frequências naturais e modos de vibração podem ocorrer por causa da existência de fissuras (Palechor, 2018).

Com a finalidade de alcançar maiores índices de qualidade e durabilidade nas obras de forma ampliada, procedimentos de identificação de danos são de grande relevância para aumentar a garantia de segurança e confiabilidade. A decisão de gestão adequada é acompanhar possíveis falhas para reduzir as manutenções periódicas responsáveis pelo aumento de custos.

Rytter (1993) sugere que o diagnóstico de danos estruturais seja dividido em quatro níveis. O primeiro nível consiste em detectar a existência do dano na estrutura, o segundo nível em localizar o mesmo, o terceiro nível em quantificar este dano e, por fim, o quarto nível realizar a previsão de vida útil da estrutura como um todo.

Diversas vezes, se faz necessária uma análise dinâmica completa da estrutura na qual, geralmente, é realizada com base no Método de Elementos Finitos (MEF). Nos casos em que não há análise prévia da estrutura, anterior ao aparecimento do dano, e que, concomitantemente, torna apropriado a aplicação de métodos que detectam danos somente com a resposta danificada do sistema como proposto por Parloo et al. (2004), Duan et al. (2005) e Zhong; Oyadiji; Ding (2008). Não obstante à existência de diversos métodos de identificação de danos em estruturas urge ainda, encontrar métodos de maior eficácia e menor onerosidade.

## 1.2 Motivação

A presença de danos estruturais ocasiona principalmente variações locais de rigidez, bem como variações locais menores de massa, afetando o comportamento dinâmico da estrutura. A identificação destas variações é requisito imprescindível para realizar a manutenção satisfatória da estrutura.

As técnicas da área de monitoração da integridade de materiais (em inglês, *Structural Health Monitoring* - SHM) possui diversas técnicas não-destrutivas, principalmente, baseadas em análises dinâmicas. Algumas revisões recentes (Montalvão et al, 2006; Carden e Fanning, 2004; Sohn et al, 2004) apresentam técnicas de identificação de danos baseadas em: (a) a frequência natural, (b) a forma modal, (c) a curvatura da forma modal, (d) a medida da flexibilidade dinâmica, (e) ajuste de modelos (*updating*), (f) métodos heurísticos por redes especializadas, entre outros.

A presente pesquisa baseia-se no estudo de detecção de danos a partir da análise da variação das frequências naturais de uma viga quando sujeita a uma massa móvel adicional ao longo do comprimento com a finalidade de produzir um gráfico da evolução de uma das do sistema estrutural em função da posição da massa adicional, conhecido como gráfico de variação de frequência (*frequency-shift*). Este gráfico se mostra uma ferramenta útil para a identificação de danos em estruturas, pois é possível identificar a posição do dano sem a necessidade de comparar com o comportamento de um referencial intacto. Baseada em medidas de frequência natural, esta técnica foi desenvolvida por Zhong, Oyadiji and Ding

(2008).

A escolha desta técnica para detecção se deve ao fato de possuir baixo custo computacional e a alta praticidade, uma vez que as frequências naturais podem ser facilmente medidas, necessitando da leitura de poucos acelerômetros que serão posicionados estrategicamente ao longo da estrutura.

Além disso, o método a ser utilizado pode detectar singularidades presentes nos parâmetros modais ou deslocamentos causados pelo dano sem requerer a resposta da estrutura intacta, o que torna ainda mais apropriado uma vez que a análise prévia da estrutura, anterior ao dano, em muitos casos não pode ser realizada.

### 1.3 Objetivo

O presente trabalho possui o escopo em detectar e localizar danos em vigas de Timoshenko nas condições Livre-Livre e Apoiada-Apoiada, analisando a variação das primeiras frequências naturais da viga na condição danificada submetida à ação de uma massa móvel adicional em função do posicionamento ao longo do comprimento da estrutura.

Para alcançar o objetivo geral do trabalho, foram traçados alguns objetivos específicos, são eles:

- Estudar o comportamento das técnicas de detecção de danos em vigas em diferentes condições de contorno.
- Avaliar a influência da intensidade e posição de descontinuidade como massa adicional.
- Apresentar um índice de avaliação do nível de dano da estrutura (*Signal-to-Damage Ratio* - SDR).
- Parametrizar o dano com relação a adição de massa ou a profundidade de trinca (perda pontual de rigidez).

### 1.4 Metodologia

O modelo de viga de Timoshenko foi desenvolvido com base no MEF na plataforma do MATLAB com dois tipos de modelagem de dano: descontinuidade de massa adicional e perda de rigidez, dano como uma mola rotacional. As propriedades utilizadas no modelo numérico foram obtidas experimentalmente no Laboratório de Sistemas e Vibrações do Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade de Brasília, UnB. Foi realizada uma análise dos parâmetros de dano: razão de massa ( $\mu$  relação da massa de dano  $m_d$  e a massa total da viga  $m_T$ ), razão de profundidade do dano ( $\eta$  relação entre a profundidade da trinca  $d$  e a altura da seção transversal da viga  $h$ ) e a posição do dano ( $\delta$  relação da

posição do dano  $L_d$  e o comprimento total da viga  $L$ ). A viga foi investigada em duas condições de contorno: Livre-Livre e Apoiada-Apoiada.

No modelo, foi aplicada uma massa adicional concentrada  $m_a$  em cada nó da viga e os autovalores referentes a cada posição da  $m_a$  foram capturados viabilizando a plotagem da curva *frequency-shift*. Posteriormente, as técnicas propostas de detecção de danos foram aplicadas (derivadas da *frequency-shift* e TDW). Os valores de SDR foram calculados e analisados. E, por fim, foi feita uma comparação dos parâmetros  $\eta$  e  $\mu$ .

## 1.5 Contribuições

Os estudos realizados neste trabalho permitiram as seguintes contribuições:

Santos, J. C. et al. Damage detection in beams using an additional mobile mass: a numerical validation. *XXXIX Ibero-Latin American Congress on Computational Methods in Engineering*, Paris/Compiègne, França, 2018.

Santos, J. C. et al. Frequency-based damage detection in beams using an additional roving mass. *25th International Congress of Mechanical Engineering*, Uberlândia - MG, Brasil, 2019.

Santos, J. C. et al. Damage detection in beams using an additional roving mass based on the natural frequency shifting. *Dynamical Systems Theory and Applications*, Łódź, Poland, 2019.

## 1.6 Plano da Dissertação

O presente trabalho foi estruturado em seis capítulos.

O primeiro capítulo consiste na introdução do tema descrevendo as motivações que levaram à realização do trabalho, a metodologia proposta, os objetivos e suas principais contribuições.

No segundo capítulo, são apresentados conceitos fundamentais para o estudo de danos. Em adição, são apresentadas algumas técnicas utilizadas nas últimas décadas para a detecção de falhas nos mais variados tipos de estrutura, incluindo as técnicas exploradas no presente trabalho.

No capítulo três, são apresentadas as formulações matemáticas fundamentais de dinâmica de viga de Timoshenko, a modelagem do dano e a adimensionalização de viga.

O quarto capítulo apresenta as definições, as propriedades e as famílias de *wavelet*.

O capítulo cinco descreve a metodologia utilizada no estudo de detecção de danos na viga de Timoshenko. É apresentada a técnica baseada na variação das frequências

naturais (*frequency-shift*) e suas derivadas, a Transformada Discreta de *Wavelet*, e ainda, o conceito *Signal-to-Damage Ratio*.

Os resultados obtidos são discutidos no capítulo seis.

E, finalmente, no capítulo sete as considerações finais são apresentadas, assim como as perspectivas futuras do trabalho.



# 2 Integridade de Elementos Estruturais

O Capítulo 2 apresenta conceitos importantes para o estudo de danos. Além disso, são apresentadas algumas técnicas utilizadas nas últimas décadas para a detecção de danos nos mais variados tipos de estrutura.

## 2.1 Integridade Estrutural: Conceitos

Os danos estruturais podem ser definidos como qualquer alteração, pontual ou generalizada, nas propriedades dos materiais ou geométricas da estrutura que venha a afetar a durabilidade e vida útil da estrutura. Segundo a NBR 6118 (2014), durabilidade consiste na capacidade da estrutura resistir às influências ambientais previstas e definidas em conjunto pelo autor do projeto estrutural e pelo contratante, no início dos trabalhos de elaboração do projeto. Toda estrutura está sujeita a danos, seja por eventos extremos como terremotos e explosões, como por corrosão, fadiga, entre outros.

Os efeitos de danos estruturais podem ser classificados como lineares e não lineares. Uma situação de dano linear é definida como o caso em que a estrutura inicialmente elástica linear permanece elástica linear após a presença do dano. As mudanças na geometria e/ou propriedades do material resultam nas variações das propriedades dinâmicas das estruturas, mas a resposta estrutural ainda pode ser modelada a partir da equação linear do movimento. Os danos não-lineares podem ser definidos como o caso em que a estrutura linear-elástica apresenta comportamento não-linear após a introdução de dano, por exemplo, danos por fadiga, conexões soltas, entre outros.

A redução do momento de inércia da estrutura devido à perda da seção transversal e a variação do módulo de elasticidade, geralmente, em função da presença de agentes que deterioram o material da estrutura, caracterizam a redução da rigidez local da estrutura. À vista disso, é imprescindível o estudo de detecção de danos em estruturas a fim de prolongar sua vida útil.

Métodos modais operacionais de identificação e localização de danos estruturais que carecem somente da resposta danificada se tornam mais apropriadas. Técnicas não-

destrutivas, como inspeções visuais, são comumente aplicadas nas mais diversas estruturas, porém em muitos casos, essas técnicas se tornam impraticáveis, por exemplo, quando o dano se localiza em uma posição de difícil acesso. Outras desvantagens podem ser mencionadas, tais como: longo tempo de análise e a excessiva onerosidade.

Segundo Radzieński; Krawczuk; Palacz (2011), os métodos não-destrutivos e as técnicas de monitoramento têm recebido especial atenção, entre as quais a análise de vibração para a detecção de danos vem sendo aplicada por sua simplicidade de implementação e por apresentar parâmetros sensíveis ao dano. Mas, não obstante à existência dessas técnicas urge ainda a necessidade de encontrar métodos de maior eficácia e menor onerosidade.

### 2.1.1 Monitoração de Integridade Estrutural

A Monitoração de Integridade Estrutural, usualmente conhecida por *Structural Health Monitoring* (SHM), baseia-se na ideia estratégica de analisar periodicamente, em escala real, o comportamento dinâmico de estruturas por meio de sensores instalados no sistema estrutural com o propósito de detectar a propagação de patologias e determinar ações proativas de manutenção.

O SHM tem emergido como um tema de alta relevância dentro da engenharia e sua aplicação tem sido cada vez mais comum em estruturas do tipo: dutos de petróleo, túneis, fuselagens de aeronaves, arranha-céus e vias férreas. Dentre exemplos de aplicação de infraestrutura, pode-se citar o monitoramento em OAEs, pontes e viadutos.

Segundo Lovejoy (2013), pode-se realizar a medição simultânea de cargas e seus respectivos efeitos para análise de OAE. Costumeiramente, monitora-se o vento e o clima, o tráfego, a proteção de cabos, os postes e o solo, possibilitando a estimativa de estado de fadiga ou outro estado limite e a previsão de possível evolução de saúde do sistema estrutural.

Dentro do campo de monitoração estrutural, existem técnicas baseadas na propagação de ondas como proposto por Raghavan; Cesnik (2007), Su; Ye (2009) and Krawczuk (2002) e análise de vibrações por Carden; Fanning (2004) , Montalvão; Maia; Ribeiro (2006) e Fan; Qiao (2011).

Em termos gerais, a literatura para SHM baseada em vibrações pode ser dividida em dois aspectos, sendo eles: problema direto e inverso. Segundo Dixit; Hodges (2011), o problema direto significa determinar as características dinâmicas da estrutura. E, o problema inverso consiste em determinar as características de danos por meio das características dinâmicas do sistema (Dixit; Hanagud, 2012).

De forma sucinta, no estudo dinâmico, a estrutura sofre uma excitação a fim de se obter a resposta dinâmica. A variação dos parâmetros modais da estrutura intacta e danificada pode apresentar a localização e a intensidade de dano. Ocorre, todavia, que nem sempre a resposta da estrutura intacta é possível de se obter. Dessa maneira, técnicas

que necessitam somente da resposta danificada da estrutura são mais apropriadas.

## 2.2 Métodos de Detecção de Danos

A variação das propriedades estruturais devida ao surgimento de danos se manifesta como uma variação nas respostas estáticas e dinâmicas. As características das estruturas são definidas em termos de rigidez, de amortecimento e de massa.

Os métodos estáticos fazem o uso da decomposição do valor singular da mudança de deslocamentos estáticos da estrutura. Estes métodos possibilitam a identificação de danos pela medição de mudanças na resposta estrutural estática. Muitos autores têm explorado o estudo de identificação de danos em diferentes tipos de estruturas a partir de sua resposta estática, tais como: Ghrib et al. (2012), Silva; Bezerra (2014), Li; Yang (2014), Li; Yang (2014) e Abdo(2015). Os métodos estáticos possuem baixo custo computacional e apresentam simplicidade de implementação, uma vez que a equação de equilíbrio estático envolve apenas as propriedades de rigidez da estrutura. Em geral, os métodos estáticos atraem de forma significativa a indústria da engenharia, uma vez que os deslocamentos e deformações da estrutura, sujeita à aplicação de carregamentos ou até mesmo em sua condição de uso, podem ser obtidos de forma rápida e econômica.

Os métodos dinâmicos são considerados uma alternativa na área de detecção de danos. Estes consistem de medir as vibrações produzidas na estrutura quando excitada. A partir disso, as frequências naturais, formas modais de vibração e amortecimento são obtidos. Com essas informações, é possível determinar indiretamente as condições da estrutura.

O surgimento de danos nas estruturas causa alterações na rigidez e massa, dependendo da posição e da magnitude do mesmo. Logo, as frequências e os modos também sofrem variações, assim possibilitando a extração de informações que permitem identificar, localizar e quantificar a redução da rigidez estrutura. Vale ressaltar que, é preciso uma análise criteriosa para detecção do dano, porquanto, outros agentes, como temperatura, podem causar variação nas propriedades modais da estrutura.

Diversos métodos dinâmicos vêm sendo utilizados nos últimos anos para detecção de danos, tais como os baseados na variação de frequências naturais ou de formas modais, o método *Modal Assurance Criterion*-MAC, o método *Coordinate Modal Assurance Criterion*-COMAC, o método da curvatura e o método da mudança de flexibilidade.

Além destes citados, existem diversas metodologias na literatura para resolução de problemas de detecção de danos utilizando técnicas baseadas em energia: Cornwell; Doebling; Farrar (1999), Shi; Law; Zhang (2000), Shi; Law; Zhang (2002), Sazonov; Klinkhachorn (2005), Hu et al. (2006), Hu; Wu (2009), Yan; Huang; Ren (2010), Seyedpoor (2012), Zangeneh; Amiri (2015), Cha (2015), Ashory; Ghasemi-Ghalebahman; Kokabi

(2017), Dinh-Cong et al. (2018), Wang; Xu (2018), baseados em algoritmos genéticos: Hao; Asce; Xia(2002), K.; R.(2002), Laier; Morales(2009), Meruane; Heylen(2010), Meruane; Heylen(2011), Aktasoglu; Sahin(2012), M.; Laier(2015), Abdulhussein; Muhammad A.M.(2017), Sanjay; Dayal; Harish (2018), entre outros.

A seguir, é apresentada a técnica da variação de frequências utilizando massa adicional com maior ênfase pois é a técnica que o presente estudo se aprofunda.

### 2.2.1 Variação de Frequências utilizando Massa Adicional

Os métodos baseados na análise de vibrações visam avaliar as propriedades dinâmicas das estruturas (frequências naturais, modos de vibrar e amortecimento) para realizar a detecção de danos. As frequências naturais são facilmente obtidas e altamente sensíveis a presença de danos. Nos últimos anos, a análise frequencial vem tornando cada vez mais recorrente. Salawu (1997) apresentou uma revisão das técnicas de detecção de danos a partir da variação das frequências naturais e Fan; Qiao (2011) apresentaram uma versão atualizada de revisão posteriormente.

Na última década, a técnica utilizando uma massa adicional vem sendo explorada. Esta metodologia consiste em aplicar uma massa adicional ao longo com comprimento total a fim de ampliar o efeito das descontinuidades presentes na resposta dinâmica obtida, e conseqüentemente, identificar e localizar o dano na estrutura com maior facilidade. A presença de dano na estrutura diminui a rigidez local da viga que, por sua vez, causa uma redução acentuada na sua frequência natural quando a massa móvel está localizada nas proximidades do dano.

Segundo Palechor (2018), esta técnica consiste na obtenção das frequências naturais da estrutura quando é adicionada no sistema uma massa posicionada em diferentes nós definidos na discretização prévia.

A técnica foi proposta por Zhong; Oyadiji; Ding (2008) que propuseram a análise da resposta danificada de uma viga na condição simplesmente apoiada sujeita a aplicação de uma massa adicional ao longo de seu comprimento, conforme apresenta a Fig. 2.1. Foi feita a plotagem gráfica das frequências naturais identificadas a partir do método de correção do centro espectral em função da posição axial da massa adicional. No entanto, foi notada uma dificuldade de localizar o dano somente a partir da curva da frequência natural. Logo, um método simples a partir das derivadas da curva da frequência natural foi proposto. Assim, foram fornecidas informações relevantes para a detecção de danos na estrutura. A eficiência e praticabilidade do método proposto foram ilustradas por meio de simulações numéricas. Levando em consideração que ruído experimental pode corromper os dados de resposta, afetando os valores das frequências naturais, os dados da resposta danificada com um ruído aleatório foram estudados a fim de avaliar a robustez do método para casos reais. A partir dos resultados obtidos, os autores concluíram que o método

proposto apresenta baixo custo computacional e alta precisão.

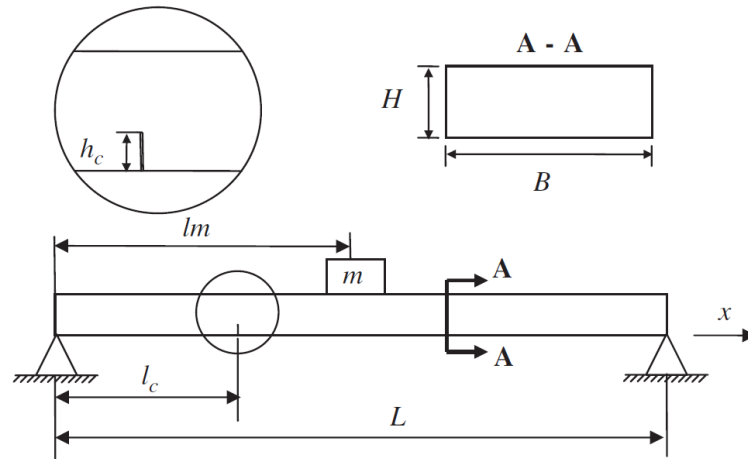


Figura 2.1 – Zhong; Oyadiji; Ding (2008).

Em outro trabalho, Zhong; Oyadiji (2008) apresentam o estudo analítico, numérico e experimental de uma viga de alumínio simplesmente apoiada de seção transversal retangular com diferentes profundidades de dano sujeita a uma massa móvel adicional ao longo do seu comprimento total. Com os resultados obtidos, concluíram que quanto maior a profundidade do dano, menores são os valores das frequências naturais, assim como, quanto mais próxima da trinca a massa adicional estiver, maior é a magnitude de efeito. Neste estudo, não foram levados em consideração os efeitos da inércia rotacional e deformação de cisalhamento (modelo da viga de Euler-Bernoulli).

Park; Kim; Eun (2013) apresentaram o método de detecção de danos utilizando a variação na Função Resposta em Frequência (FRF) que foi medida ao mover uma massa adicional na estrutura. Os resultados obtidos mostraram que o método baseado na curvatura das FRF pode ser utilizado sob a existência do ruído externo através de uma experiência numérica.

Solís et al. (2015) apresentaram a metodologia de detecção de danos a partir da análise de *wavelet* baseado na variação nos modos de vibração derivada da presença do dano. Uma massa móvel adicional foi utilizada para enfatizar o efeito do dano assim como reduzir o efeito de ruído experimental. A influência do ruído experimental, a dimensão do dano e o número de pontos de medição foram abordados neste trabalho. Os resultados obtidos mostram que a metodologia proposta é promissora para detecção de pequenos danos em vigas.

Wang; Lie; Zhang (2016) introduzem um novo caminho para descrever o comportamento dinâmico de estruturas com massa adicional que consiste na combinação dos efeitos de deslocamento de frequência e amplitude em uma curva de espaço, fornecendo uma ferramenta para analisar o estado e as propriedades da estrutura. Um índice de dano chamado curvatura FRESH (*frequency-shift*) é então proposto para detectar a redução da rigidez local. A curvatura FRESH pode ser facilmente adaptada para um determinado

problema, uma vez que a sensibilidade do índice pode ser ajustada alterando a massa adicional ou a potência de excitação. Além disso], propõe-se um algoritmo para ajustar automaticamente a contribuição de frequência e amplitude no método. O uso da técnica FRESH requer estimadores de frequência e amplitude altamente preciso. Portanto, um procedimento baseado na Transformada Discreta de Fourier é explorado para extrair frequência e amplitude precisas. Além disso, exemplos numéricos com diferentes tamanhos de danos, severidades e amortecimento são apresentados para demonstrar a validade do índice de danos proposto. Além disso, aplicações do caminho FRESH em duas vigas de aço com diferentes danos são apresentadas e os resultados mostram que o método proposto é válido e computacionalmente eficiente.

## 2.3 Modelagem Numérica de Dano

Diferentes métodos numéricos têm sido utilizados para modelagem de dano estrutural, tais como MEC - Método de Elementos de Contorno (Silva; Bezerra; Pena (2011), Zou; Aliabadi (2015), Zou; Aliabadi (2016), Silva et al. (2019)), MEE - Método de Elementos Espectrais (Krawczuk (2002), Ostachowicz (2008), Machado; Santos (2015), Sun et al. (2017), Palechor et al. (2018)) e o MEF - Método de Elementos Finitos.

O MEF recebe maior ênfase no presente trabalho pois foi o método utilizado ao longo de seu desenvolvimento. A identificação de danos estruturais com base no MEF tem sido uma direção de pesquisa de interesse crescente na última década nos campos da engenharia mecânica, civil, aeroespacial, etc.

Jaishi; Ren (2006) realizaram uma atualização do modelo de elemento finito baseado em sensibilidade para detecção de dano. A função objetivo que consiste no resíduo de flexibilidade modal é formulada e seu gradiente é derivado. O algoritmo de otimização usado para minimizar a função objetivo e os procedimentos de detecção de danos é apresentado. O procedimento proposto é primeiramente ilustrado com um exemplo simulado de viga simplesmente apoiada. O efeito do ruído no algoritmo de atualização é levado em consideração. Foi demonstrado que o comportamento do algoritmo sobre o ruído é satisfatório e os padrões de dano identificados são bons. Em seguida, o procedimento foi aplicado para uma viga de concreto armado, que foi danificada no laboratório. Com este estudo, concluíram que a flexibilidade modal é sensível a danos e o procedimento proposto de atualização de MEF utilizando o resíduo de flexibilidade modal é promissor para a detecção de elementos danificados.

Jafarkhani; Masri (2011) afirmam que algoritmos de otimização estocástica com desempenho promissor na solução de problemas de otimização global têm recebido atenção considerável para fins de atualização de modelo de elemento finito nos últimos anos. Neste estudo, o desempenho de uma estratégia evolucionária na abordagem de atualização de modelos de elementos finitos foi investigada para a detecção de danos em um sistema

de ponte de concreto armado que foi testado experimentalmente na Universidade de Nevada, Reno. A sequência de danos na estrutura foi induzida por uma gama de excitações progressivamente crescentes na direção transversal da amostra. Excitações de ruído branco não destrutivo intermediário e medições de resposta foram usadas para fins de identificação do sistema e detecção de danos. É demonstrado que, o algoritmo de atualização deste trabalho poderia detectar, localizar e quantificar com precisão os danos na ponte testadas ao longo das diferentes fases.

Xu et al. (2015) afirmam que o método de atualização de modelo de elemento finito baseado em sensibilidade tem recebido atenção crescente na detecção de danos de estruturas baseadas em parâmetros modais medidos. Um novo algoritmo de otimização simples e computacionalmente eficiente foi proposto e aplicado à detecção de danos usando a atualização do modelo de elementos finitos. O método proposto combina o método de Gauss-Newton com o truncamento da região de cada etapa iterativa, em que não apenas as restrições são introduzidas em vez das funções de penalidade, mas também as etapas de busca são restritas em uma região controlada. O algoritmo desenvolvido foi ilustrado por uma estrutura treliça de 25 barras simulada numericamente, e os resultados foram comparados e verificados com aqueles obtidos a partir do método da região de confiança. A fim de investigar a confiabilidade do método proposto na detecção de danos de estruturas, a influência das incertezas advindas dos parâmetros modais medidos nas características estatísticas do resultado da detecção foi investigada pela simulação de Monte-Carlo, e a probabilidade de detecção de dano foi estimada usando o método probabilístico.

Soe (2013) desenvolveu um procedimento para atualização de MEF usando dados modais incompletos identificados a partir de medições de vibração para desenvolver métodos de detecção de danos estruturais em tempo real usando diretamente medições de vibrações e identificar os danos no local detalhado e estender na estrutura com base no modelo numérico validado.

Akishin et al. (2018) realizaram um estudo do processo de detecção de dano em sensor piezoelétrico e viga cantilever. A viga foi acionada a partir de atuadores piezoelétricos e as diferenças de desempenho são avaliadas usando sensores de fluoreto de polivinilideno. A metodologia utilizada foi a análise de tensão/deformação da relação da viga na condição intacta e danificada. O modelo de elemento finito de piezoelétrico é simulado no *software* ANSYS. Uma viga tipo sanduíche de alumínio com comprimento de 800 mm, espessura do núcleo de 22,86 mm e espessura da pele de 0,3 mm é considerado. A redução na frequência fundamental da viga danificada foi considerada insignificante. Porém, a resposta de tensão do sensor sob excitação transitória apresenta uma mudança significativamente visível indicando a perda de aderência. Assim, concluíram que o sistema de detecção de danos a partir de piezoelétrico é uma ferramenta eficaz em sistemas estruturais aeroespacial e civil com locais inacessíveis/críticos e permite possibilidades de monitoramento *online*, uma vez que o requisito de energia é mínimo.

Ghahremani et al. (2018) ressaltam a importância da avaliação, detecção e quanti-

ficção da perda de seção estrutural devido à deterioração, por exemplo, da corrosão. Os autores apresentaram uma metodologia para a detecção e quantificação automática e sistemática de danos em componentes estruturais usando dados de nuvens de pontos 3D de alta fidelidade, seguidos por uma atualização local correspondente a um modelo de elementos finitos. O dano por perda de seção foi identificado e localizado através de técnicas de visão computacional e processamento de dados 3D. A fim de preservar a integridade dos dados e resolver detalhes de alta fidelidade localizados, foram realizadas comparações diretas de nuvem de pontos 3D. Um estudo experimental validando a abordagem desenvolvida foi apresentado também.

### 2.3.1 Descontinuidade de Massa

Danos em estruturas são refletidos na variação dos parâmetros, tais como massa, rigidez ou amortecimento. Pesquisas utilizando a adição de massa para a simulação da presença de danos em diferentes tipos de estruturas vêm sendo desenvolvidas.

Monaco; Franco; Lecce (2000) realizaram atividades experimentais e numéricas de detecção de danos em viga metálica  $150 \times 20 \times 2 \text{ mm}^3$  de aproximadamente 900g utilizando magnetostriativos e análise estatística. Três tipos de danos foram simulados em vigas: pequenas descontinuidades de massa, cortes parciais das seções da viga e restrição de rendimento. Massas de 3, 10, 15, 30 e 55g foram aplicados em diferentes posições da estrutura.

Liberatore; Carman (2003) sugerem um método para medir o dano a partir da deslocamento da frequência e energia RMQ (Raiz Média Quadrada) em uma banda espectral centralizada em um pico de ressonância não danificado. Foi analisada analítica e experimentalmente uma viga simplesmente apoiada de alumínio submetida a diferentes posições de danos. Para simular os danos, foram adicionadas 2 massas concentradas de 2 e 4g que correspondem a aproximadamente 1% e 2% da massa total da viga.

Papatheou et al. (2010) apresentaram uma abordagem diferente de adição de massas. O objetivo da aplicação da massa adicional foi simular a presença de dano em uma asa de avião, conforme mostra a Fig. 2.2, para posteriormente localizar as alterações provocadas.



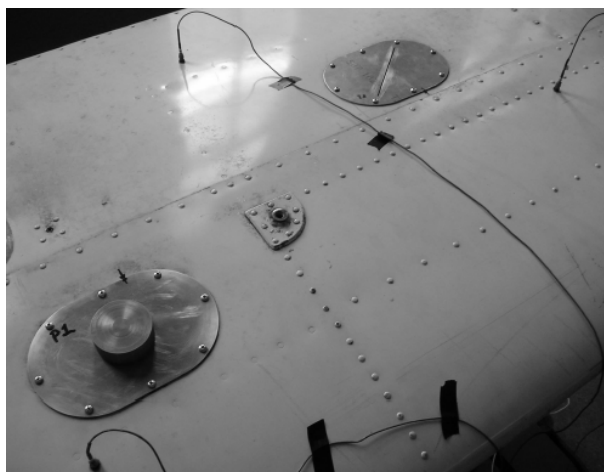


Figura 2.2 – Asa de avião sujeita a dois tipos de danos: massa adicional e corte de serra na placa. (Papatheou et al., 2010).

Panopoulou et al. (2011) apresentam um sistema de monitoramento baseado em fibras dinâmicas Bragg Gratings de estruturas aeroespaciais compósitas. O dano foi simulado como uma massa adicional conhecida em diferentes posições da estrutura. O comportamento dinâmico da estrutura foi analisado numérica e experimentalmente com testes modais.

Dackermann; Li; Samali (2013) apresentaram uma técnica de monitoramento de integridade estrutural que utiliza mudanças de padrões nas FRFs como parâmetros de entrada para um sistema de redes para avaliar as condições de uma estrutura de dois andares. Para verificar o método proposto, são realizados modelos numéricos e experimentais de estrutura em que o dano é induzido pela conectividade do membro e mudanças de massa em seis diferentes posições, respectivamente.

Corniani et al. (2015) demonstraram a viabilidade de um sensor ativo para a detecção de danos em estruturas metálicas ou compostas laminadas por meio de ondas guiadas por ultrassom. Para simular a presença de um dano, uma massa cilíndrica com um diâmetro de aproximadamente 2,5 cm foi colocada no centro de uma placa de alumínio.

Sampaio et al. (2016) analisaram duas vigas metálicas de aproximadamente 1 m de comprimento, na condição livre-livre, danificadas de duas maneiras: perda da seção transversal e adição de massa, como apresenta a Fig. 2.3.

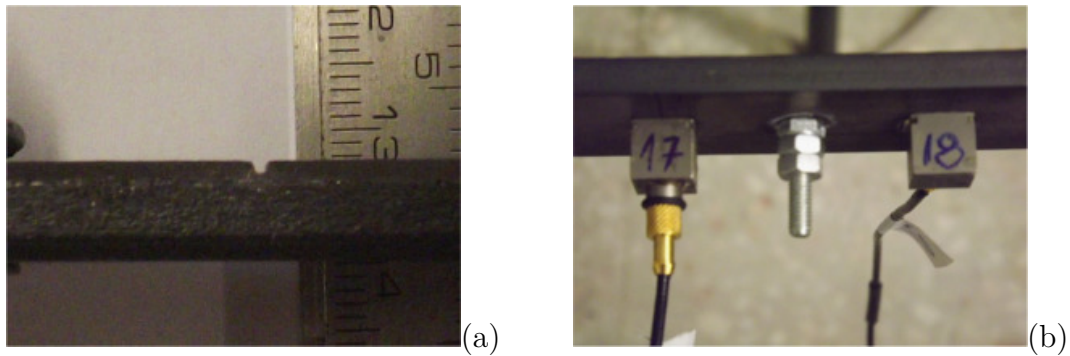


Figura 2.3 – Dois tipos de simulação de danos: (a) perda da seção transversal; (b) adição de massa. (Sampaio et al., 2016).

Tibaduiza et al. (2018) apresentaram uma metodologia de detecção e classificação de danos a partir de dados coletados de uma estrutura tipo sanduíche de polímero reforçado com fibra de carbono e uma placa. Foi utilizada uma massa adicional em diferentes posições para simulação de danos.

### 2.3.2 Dano em Rigidez

Ostachowicz e Krawczuk (1991) apresentaram um método de análise numérica do efeito de duas trincas abertas nas frequências naturais de uma viga engastada. Dois tipos de danos foram considerados: frente e verso (cargas cíclicas) e face única (cargas flutuantes). O dano foi modelado com uma mola. Além disso, foi feita investigação da relação da magnitude do dano com sua posição.

Moradi, Razi e Fatahi (2011) aplicaram o algoritmo de abelhas (*bees algorithm*) para o estudo numérico e experimental de uma trinca aberta em vigas cantilever. A trinca foi modelada a partir de uma mola rotacional, cuja rigidez pode ser determinada pelo tamanho da trinca. A soma ponderada dos erros ao quadrado entre as frequências naturais foram medidas e calculadas. Essa soma foi usada como função objetivo. Os resultados mostraram que o tamanho e a localização da fissura podem ser bem previstos através desse método.

Mehrjoo, Khaji e Ghafory-Ashtiany (2014) apresentaram uma abordagem para detectar a profundidade e a localização dos danos em vigas. Para isso, foi desenvolvido um novo elemento de viga com uma única trinca na borda transversal, em posição arbitrária do elemento de viga com qualquer profundidade. O desenvolvimento foi baseado em um modelo simplificado, onde cada trinca foi substituída por uma mola rotacional linear correspondente, conectando duas partes elásticas adjacentes. A mola localizada foi representada com base na teoria da mecânica da fratura linear. Os componentes da matriz de rigidez para o elemento trincado foram derivados usando o princípio de superposição, as relações de compatibilidade e o teorema de Betti, e finalmente representados em expressões de forma fechada. Para validar o elemento proposto, os resultados obtidos pelo novo

elemento são comparados com os resultados bidimensionais do elemento finito e com medidas experimentais. Além disso, ao conhecer as frequências naturais, foi estabelecido um problema inverso no qual a localização e a profundidade das trincas são identificadas. Na abordagem inversa, um problema de otimização baseado no novo elemento de viga e algoritmos genéticos foi resolvido para investigar a solução.

Sung et al. (2014) propõem o monitoramento da integridade estrutural de uma ponte a partir da medição da aceleração de toda a estrutura usando a deflexão estimada pela flexibilidade modal. Em seguida, é realizado o diagnóstico baseado na velocidade angular a fim de localizar o dano perdido pela abordagem baseada na aceleração perto do suporte articulado. Para validar a metodologia proposta, foi realizada uma série de estudos numéricos e experimentais em um modelo de viga apoiada com dano modelado como molas de torção.

Alireza et al. (2015) aplicaram o método MCOA (*Modified Cuckoo Optimization Algorithm*) para detecção de dano em uma viga cantilever de Euler-Bernoulli. A trinca foi modelada como uma mola de torção, cujo coeficiente é calculado usando as dimensões da trinca. A função objetivo é a diferença dos quadrados ponderados das frequências naturais medidas e calculadas. Os resultados das simulações numéricas e testes experimentais revelaram alta precisão na detecção da localização e profundidade da trinca.

Moradi, Razi e Fatahi (2015) aplicaram o algoritmo de abelhas ao problema de detecção de danos em vigas. Um estudo numérico e um experimental foram projetados para prever uma trinca em viga cantilever que foi modelada como uma mola rotacional, cuja rigidez pode ser determinada pelo seu tamanho. Os resultados mostraram que o tamanho e a localização da fissura podem ser bem previstos através desse método. A representação do modelo proposto é apresentado na Fig. 2.4.

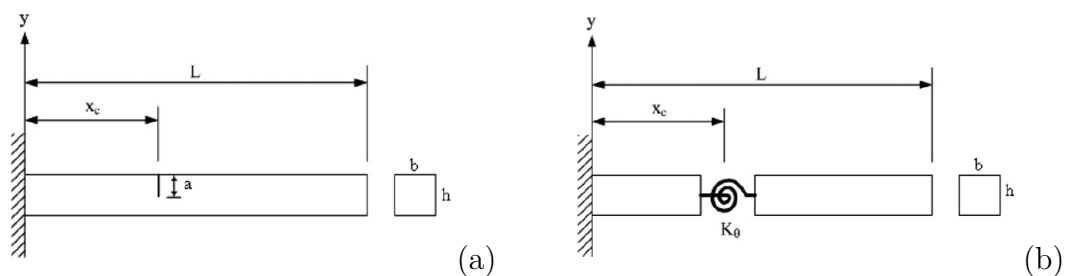


Figura 2.4 – Representação da viga cantilever: (a) geometria da viga danificada; (b) mola torcional como dano. (Moradi; Razi; Fatahi, 2015).

Mungla, Sharma e Trivedi (2016) mediram as frequências naturais de uma viga biengastada nas condições intacta e danificada a partir de testes experimentais. Posteriormente, o dano foi modelado como mola rotacional elástica equivalente em viga de Euler-Bernoulli. As frequências obtidas foram utilizadas para identificar a localização do dano e sua gravidade e, ainda, foi utilizado algoritmo genético que foi executado para encontrar mínimos globais de uma função das frequências teóricas e medidas da viga

danificada. Os resultados em ambas as abordagens foram obtidos e comparados de acordo com os parâmetros reais da fissura.

Ahmed et al. (2020) investigaram as interdependências da profundidade e localização do dano na resposta dinâmica de uma viga cantilever sob cargas termomecânicas. A temperatura pode influenciar a rigidez da estrutura, portanto, sua mudança pode resultar na variação da resposta em frequência, amortecimento e amplitude. Logo, essas variações foram usadas como parâmetros-chave para quantificar os danos que foram aplicados em diferentes posições. Os testes foram realizados em temperatura ambiente e elevada (50, 100, 150 e 200° C). Os resultados analíticos, numéricos e experimentais para todas as configurações apresentaram boa concordância, tornando possível o diagnóstico do crescimento da trinca a qualquer instante dentro da condição operacional sob cargas termomecânicas.

## 2.4 Considerações Finais

Grande parte das técnicas de detecção de danos carece da resposta intacta da estrutura. Ocorre, todavia, que nem sempre a resposta da estrutura antes da propagação do dano é possível de ser obtida. Dessa forma, a técnica da variação das frequências a partir da adição de massa móvel se torna uma alternativa para o estudo de danos por se tratar de uma aplicação simples que não necessita da resposta anterior ao dano.

O dano como acréscimo de massa foi aplicado no presente trabalho por ser uma ferramenta simples e, ainda, não necessitar da destruição da amostra em estudo. Assim, este tipo de aplicação é relacionado ao dano simulado como perda local de rigidez possibilitando a facilidade de procedimentos de aplicação de danos em futuros estudos experimentais de estruturas em condição danificada.

# 3 Modelo Dinâmico de Viga de Timoshenko

O Capítulo 3 apresenta as formulações matemáticas da dinâmica e elementos finitos de viga a partir da teoria de Timoshenko. Ainda, são mostrados dois modelos de dano (descontinuidade de massa e perda em rigidez) e a adimensionalização de viga.

## 3.1 Viga de Timoshenko

A viga é considerada como um dos principais elementos estruturais utilizados na engenharia, e apresenta a deflexão como peculiaridade. Dentre as teorias existentes, a de Euler-Bernoulli e de Timoshenko se destacam. A teoria de Euler-Bernoulli considera uma hipótese cinemática formulada apenas com flexão pura. Já a teoria de Timoshenko declara que as seções planas permanecem planas ao sofrer deformações porém deixam de ser ortogonais ao eixo, aproximando do comportamento real de vigas, o que torna sua aplicação mais ampla.

### 3.1.1 Dinâmica da Viga de Timoshenko

A distorção da seção se deve a deformação por esforço cortante. Logo, a deformação de cisalhamento do elemento de viga  $\gamma$  é dada por:

$$\gamma = \theta - \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (3.1)$$

onde  $\theta$  denota a inclinação da curva de deflexão e  $u$  o deslocamento transversal.

O momento fletor  $M_f$  e o esforço de cisalhamento  $V$  são descritos por:

$$M_f = EI \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad (3.2)$$

$$V = kGA\gamma = kGA \left( \theta - \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad (3.3)$$

onde,  $E$  é o módulo de elasticidade do material da viga,  $I$  o momento de inércia,  $A$  a área da seção transversal,  $k$  o fator de correção de cisalhamento ( $5/6$ , para casos estáticos em seções retangulares) e  $G$  o módulo de cisalhamento. O módulo de cisalhamento para materiais homogêneos e isotrópicos é dado pela expressão:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}, \quad (3.4)$$

em que,  $\nu$  corresponde ao coeficiente de Poisson.

O equacionamento do movimento da viga, considerando a inércia translacional, é descrito por:

$$- \left[ V(x, t) + \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} dx \right] + V(x, t) = \rho A dx \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(x, t), \quad (3.5)$$

onde,  $\rho$  é a densidade do material. Ao considerar a inércia rotacional da viga, tem-se:

$$\left[ M_f(x, t) + \frac{\partial M_f(x, t)}{\partial x} dx \right] + \left[ V(x, t) + \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} dx \right] - M_f(x, t) = \rho I dx \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}. \quad (3.6)$$

Logo, conhecendo as Eq. (3.2) e (3.3) e substituindo-as nas Equações (3.5) e (3.6), tem-se as seguintes expressões:

$$-kAG \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) = \rho A dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (3.7)$$

$$EI \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - kAG \left( \theta - \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \rho I \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}. \quad (3.8)$$

Resolvendo a Eq. (3.7) para  $\partial \theta / \partial x$  e substituindo da Eq. (3.8), obtém-se a equação do movimento de vibração livre para vigas uniformes, descrita por:

$$EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \rho I \left( 1 + \frac{E}{kG} \right) \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\rho^2 I}{kG} \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} = 0 \quad (3.9)$$

sabendo que,  $E$  é o módulo de elasticidade,  $I$  o momento de inércia,  $u$  o deslocamento transversal,  $\rho$  a densidade,  $A$  a área da seção transversal,  $k$  o fator de cisalhamento e  $G$  o módulo de cisalhamento.

### 3.1.2 Elementos Finitos da Viga de Timoshenko

O campo de deslocamento da viga é definido como:

$$\begin{aligned} v &= y\theta_z, \\ u &= u_0, \end{aligned} \quad (3.10)$$

onde  $\theta_z$  é a rotação do plano da seção transversal.

As deformações normal e de cisalhamento são dadas por:

$$\begin{aligned}\epsilon_x &= \frac{\partial v}{\partial x} = y \frac{\partial \theta_z}{\partial x}, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} = \theta_x + \frac{\partial u}{\partial x}.\end{aligned}\tag{3.11}$$

Assim, a energia de deformação  $U$ , considerando flexão e cisalhamento, é descrita da seguinte forma:

$$U = \frac{1}{2} \int_V \sigma_x \epsilon_x dV + \frac{1}{2} \int_V \tau_{x,y} \gamma_{xy} dV,\tag{3.12}$$

onde, a tensão normal  $\sigma_x = E\epsilon_x$ , segundo a lei de Hooke e a tensão de cisalhamento transversal  $\tau_{x,y} = kG\gamma_{xy}$ . Se  $dV = dAdx$  tem-se a energia de deformação em termos dos deslocamentos generalizados:

$$U = \frac{1}{2} \int_V E\epsilon_x^2 dV + \frac{1}{2} \int_V kG\gamma_{xy}^2 dV = \frac{1}{2} \int_{-a}^{+a} EI_z \left( \frac{\partial \theta_z}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_{-a}^{+a} kAG \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \theta_z \right)^2 dx.\tag{3.13}$$

É considerado um elemento de dois nós em que cada nó apresenta um deslocamento  $u$  e um rotacional  $\theta_z$ . Em oposição a teoria de Euler-Bernoulli, a interpolação dos deslocamentos é independente para  $u$  e  $\theta_z$ .

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \mathbf{N}\mathbf{u}^e, \\ \theta_z &= \mathbf{N}\theta_z^e,\end{aligned}\tag{3.14}$$

onde as funções de forma são definidas como:

$$\mathbf{N} = \left[ \frac{1}{2}(1 - \xi) \quad \frac{1}{2}(1 + \xi) \right],\tag{3.15}$$

nas coordenadas nodais  $\xi \in [-1, +1]$ .

A matriz de rigidez é dada por:

$$\mathbf{K}^e = \int_{-1}^{+1} \frac{EI_z}{a^2} \left( \frac{\partial N}{\partial \xi} \right)^T \left( \frac{\partial N}{\partial \xi} \right) ad\xi + \int_{-1}^{+1} kGA \left( \frac{1}{a} \frac{dN}{d\xi} + N \right)^T \left( \frac{1}{a} \frac{dN}{d\xi} + N \right) ad\xi.\tag{3.16}$$

As integrais são calculadas pela quadratura de Gauss-Legendre apresentada no Anexo (A). A rigidez de flexão é calculada por 2x2 pontos de Gauss e a rigidez de cisalhamento é calculada com 1 ponto de Gauss. Segundo Ferreira (2008), a seleção dessa

quadratura foi encontrada como uma possível solução para o bloqueio de cisalhamento em vigas delgadas.

Ao considerar vibração livre, a energia cinética  $T$  considera translações e rotações, conforme apresentado a seguir:

$$T = \frac{1}{2} \int_{-a}^{+a} \rho A \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_{-a}^{+a} \rho I_z \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 dx. \quad (3.17)$$

Por fim, a matriz de massa do elemento  $\mathbf{M}_e$  é descrita como:

$$\mathbf{M}^e = \int_{-1}^{+1} \rho A N^T N dx \xi + \int_{-1}^{+1} \rho I_z N^T N dx \xi \quad (3.18)$$

Lee; Park (2013) escreveu a equação de equilíbrio dinâmico baseada no princípio dos trabalhos virtuais em casos de vibração livre de viga de Timoshenko com a abordagem isogeométrica mostrada a seguir.

$$\begin{aligned} \int_0^L EI \frac{\partial \theta}{\partial x} \delta \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) dx + \int_0^L kGA \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \theta \right) \delta \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \theta \right) dx = \\ = \int_0^L \delta u \rho A \ddot{u} dx + \int_0^L \delta \theta \rho I \ddot{\theta} dx \end{aligned} \quad (3.19)$$

onde  $u$  representa o deslocamento transversal,  $\theta$  a rotação,  $E$  o módulo de elasticidade do material,  $I$  o momento de inércia da seção transversal,  $k$  o fator de correlação de cisalhamento,  $G$  o módulo de cisalhamento,  $A$  a área da seção transversal,  $\rho$  a densidade do material,  $L$  o comprimento da viga e  $\delta$  denota os termos virtuais. A equação do movimento no domínio da frequência em forma de matriz é apresentada:

$$|\mathbf{K} - f_n^2 \mathbf{M}| \Phi = 0 \quad (3.20)$$

onde  $\Phi$  é um conjunto de amplitude do tipo deslocamento nos pontos de controle,  $f_n$  é a frequência natural,  $\mathbf{K}$  é a matriz global de rigidez e  $\mathbf{M}$  a matriz global de massa.

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_{ab} = \int_0^L \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\partial N_{a,p}}{\partial x} \\ \frac{\partial N_{a,p}}{\partial x} & N_{a,p} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} EI & 0 \\ 0 & kGA \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\partial N_{b,p}}{\partial x} \\ \frac{\partial N_{b,p}}{\partial x} & N_{b,p} \end{bmatrix} dx \quad (3.21)$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_{ab} = \int_0^L N_{a,p} \rho A N_{a,p} dx + \int_0^L N_{a,p} \rho I N_{a,p} dx \quad (3.22)$$

onde  $\mathbf{K}_{ab}$  e  $\mathbf{M}_{ab}$  são as matrizes de rigidez e massa para controlar os pontos de ligação  $a$  e  $b$ . E  $N_{ab,p}$  é a função de forma.

Vale ressaltar que a matriz de massa  $\mathbf{M}^e$  pode ser definida de duas formas, sendo ela consistente ou concentrada. Na matriz de massa consistente leva-se em consideração os efeitos de aceleração em  $i$  e força de inércia em  $j$ , ou seja, os coeficientes de massa da matriz quando  $i \neq j$  não são nulos.



De forma resumida, para determinação de  $M_{ij}^e$  é aplicada uma aceleração unitária na direção  $j$  e assim, a força de inércia que surge em  $i$  é calculada, a fim de manter todas as acelerações em outras direções nulas. Logo, a matriz de massa consistente é dada por:

$$\mathbf{M}^e = \frac{\rho AL_e}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L_e & 54 & -13L_e \\ 22L_e & 4L_e & 13L_e & -3L_e^2 \\ 54 & 13L_e & 156 & -22L_e \\ -13L_e & -3L_e^2 & -22L_e & 4L_e^2 \end{bmatrix}, \quad (3.23)$$

em que  $L_e$  é o comprimento do elemento.

O procedimento mais simples para definir as propriedades de inércia de qualquer estrutura é assumir que toda a massa está concentrada nos pontos nodais onde as translações são definidas.

Para definir o ponto de concentração de massa, geralmente, é assumido que a estrutura é dividida em segmentos e os nós que servem como pontos de conexão. A massa de cada segmento é então concentrada em massas pontuais em cada um dos seus nós, a distribuição da massa do segmento a esses pontos é determinada por equilíbrio estático.

A massa total concentrada em qualquer nó da estrutura completa, então é a soma das contribuições nodais de todos os segmentos inerentes a esse nó. Considerando a massa concentrada em cada nó do elemento. Assim, a matriz de massa elementar é definida como:

$$\mathbf{M}^e = \frac{\rho AL_e}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.24)$$

Portanto, é notado que as matrizes diagonais são computacionalmente mais fáceis de manipular do que a matriz de massa consistente que é uma matriz cheia.

## 3.2 Modelagem do Dano

O dano é definido como variações locais de rigidez, bem como variações locais menores de massa, afetando o comportamento dinâmico da estrutura. Dessa forma, são apresentados dois tipos de modelagem de dano, comumente usados, acréscimo de massa e redução local de rigidez.

### 3.2.1 Descontinuidade de Massa

A Equação (3.19) o movimento da viga de Timoshenko com massa adicional referente ao dano  $m_d$ .

$$\begin{aligned} \int_0^L EI \frac{\partial \theta}{\partial x} \delta \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) dx + \int_0^L kGA \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \theta \right) \delta \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \theta \right) dx = \\ = \int_0^L \delta u \rho A \ddot{u} dx + \int_0^L \delta \theta \rho I \ddot{\theta} dx + \int_0^L \delta \theta m_d \ddot{u} \delta(x - L_d) dx, \end{aligned} \quad (3.25)$$

onde  $u$  e  $\theta$  são os deslocamentos transversal e de rotação,  $E$  o módulo de elasticidade,  $I$  o momento de inércia,  $k$  é um fator de correção de cisalhamento ( $k_S = 5/6$ , para seções retangulares),  $G$  o módulo de cisalhamento,  $A$  a área da seção transversal da viga,  $\ddot{u}$  e  $\ddot{\theta}$  correspondem a aceleração,  $\rho$  a densidade do material,  $L$  o comprimento da viga,  $\delta$  denota que os termos são virtuais e  $m_d$  a massa referente ao dano.

### 3.2.2 Dano em Rigidez

O dano de rigidez a ser apresentado, consiste em um modelo simplificado, representado por uma mola rotacional linear, como aplicado por Mehrjoo; Khaji; Ghafory-Ashtiany (2014), conectando duas partes elásticas adjacentes. Dessa forma, o efeitos do dano é introduzido a partir de modificações na matriz de rigidez do elemento.

A partir da teoria de mecânica da fratura linear, a rigidez equivalente da mola é dada por:

$$K = \frac{Ebh^2}{72\pi f(\eta)}, \quad (3.26)$$

em que  $b$  é a base da seção transversal da viga,  $h$  a altura,  $E$  o módulo de elasticidade e  $\eta$  representa uma relação de profundidade de trinca adimensional, descrita por:

$$\eta = \frac{d}{h} (0 \leq \eta \leq 0.6), \quad (3.27)$$

onde  $d$  corresponde a profundidade da trinca.

Logo, tem-se a seguinte função da profundidade da trinca:

$$f(\eta) = 0.6384\eta^2 - 1.035\eta^3 + 3.7201\eta^4 - 5.1773\eta^5 + 7.553\eta^6 - 7.332\eta^7 + 2.4909\eta^8. \quad (3.28)$$

Para a obtenção da matriz de rigidez do elemento  $K^e$ , Mehrjoo; Khaji; Ghafory-Ashtiany (2014) realiza o mapeamento dos graus de liberdade e forças atuantes do sistema e aplica o princípio de superposições. A matriz da viga danificada é dada por:

$$\mathbf{K}_d^e = \frac{1}{BB} \begin{bmatrix} 1 & AA & -1 & L - AA \\ & CCAA & -AA & AA(L - CC) \\ & & 1 & A - L \\ \text{Simétrica} & & & L^2 - 2AAL + AACC \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

em que,

$$AA = \frac{L^2K + 2EIL\alpha}{2LK + 2EI}, \quad (3.30)$$

$$BB = \frac{L^3}{3EI} + \frac{L}{GA} - \frac{AL^2}{2EI} + \frac{\alpha^2L^2}{K} - \frac{A\alpha L}{K}, \quad (3.31)$$

$$CC = \frac{2GAKL^2 + \alpha^26EIGAL + 6EIK}{\alpha3GALK + 6GAEI}, \quad (3.32)$$

onde  $L$  é o comprimento da viga,  $E$  o módulo de elasticidade do material,  $I$  o momento de inércia,  $G$  o módulo de cisalhamento,  $A$  a área da seção transversal e  $\alpha$  um índice da posição do dano adimensional ( $0 \leq \alpha \leq 1$ ).

### 3.3 Adimensionalização de Viga

A adimensionalização é realizada para determinar variáveis adimensionais e os parâmetros que governam o problema. Nesta seção, é apresentada a adimensionalização da viga de Timoshenko.

#### 3.3.1 Viga de Timoshenko

Como apresentado na Seção 3.1, a teoria de Timoshenko aplica uma hipótese incluindo o efeito cisalhante da viga. Considerando as expressões do momento e do cortante, temos a equação do movimento:

$$\begin{cases} \rho A \ddot{u} - kGA(u'' - \theta') = f \\ \rho I \ddot{\theta} - EI\theta'' - kGA(u' - \theta) = 0. \end{cases} \quad (3.33)$$

Derivando no espaço, tem-se:

$$\rho I (\ddot{\theta})' - EI\theta''' - \underbrace{kGA(u'' - \theta')}_{=f - \rho A \ddot{u}} = 0, \quad (3.34)$$

onde  $\rho$  é a densidade do material,  $A$  a área da seção transversal,  $u$  o deslocamento transversal,  $\theta$  a rotação,  $k$  o parâmetro de deformabilidade ao cisalhamento,  $G$  o módulo de cisalhamento,  $f$  a força externa,  $I$  o momento de inércia da seção e  $E$  o módulo de elasticidade do material.

Subtraindo a Eq. (3.34) pela Eq. (3.33a), tem-se:

$$\rho I (\theta) - EI\theta''' - \rho A \ddot{u} = -f, \quad (3.35)$$

ou seja,

$$(EI\theta')'' + \rho A\ddot{u} - f - (\rho I\ddot{\theta})' = 0, \quad (3.36)$$

onde,

$$\theta' = u'' - \alpha'. \quad (3.37)$$

Assim,

$$[EI(u'' - \alpha')]'' + \rho A\ddot{u} - f - (\rho I\ddot{\theta})' = 0 \quad (3.38)$$

em que  $EI$  e  $\rho A$  são constantes. Dessa forma, tem-se:

$$EIu^{IV} - EI\alpha''' + \rho A\ddot{u} - f - \rho I(\ddot{u}'' - \ddot{\alpha}') = 0 \quad (3.39)$$

(3.33 a)

$$\rho A\ddot{u} - kGA(\alpha') = f \quad (3.40)$$

assim, tem-se que:

$$\alpha' = \frac{\rho}{kG}\ddot{u} - \frac{f}{kGA} \quad (3.41)$$

Logo,

$$EIu^{IV} - \frac{EI\rho}{kG}\ddot{u}'' + \frac{EI}{kGA}f'' + \rho A\ddot{u} - f - \rho I\ddot{u}'' + \frac{\rho^2 I}{kG}\ddot{u} + \frac{\rho I}{kGA}\ddot{f} = 0 \quad (3.42)$$

ou ainda,

$$EIu^{IV} - \left(\frac{EI\rho}{kG} + \rho I\right)\ddot{u}'' + \rho A\ddot{u} + \frac{\rho^2 I}{kG}\ddot{u} = f - \frac{EI}{kGA}f'' - \frac{\rho I}{kGA}\ddot{f} \quad (3.43)$$

Considerando um problema de vibração livre e adição de massa como dano  $m_d$ , tem-se:

$$EIu^{IV} - \left(\frac{EI\rho}{kG} + \rho I\right)\ddot{u}'' + \rho A\ddot{u} + \frac{\rho^2 I}{kG}\ddot{u} + m_d\ddot{u}\delta(x - L_d) = 0 \quad (3.44)$$

Seja,  $u = \delta_x \bar{u}$ ,  $x = L\bar{x}$  e  $t = \frac{\bar{t}}{f_n} = \frac{\bar{t}}{f_n}$ , onde  $\bar{u}$ ,  $\bar{x}$  e  $\bar{t}$  são parâmetros adimensionais.

$$EI\frac{\delta_x}{L^4}\bar{u}^{IV} - \left(\frac{EI\rho}{kG} + \rho I\right)\frac{\delta_x}{L^2}f_n^2\bar{u}'' + \rho A\delta_x f_n^2\bar{u}'' + \frac{\rho^2 I}{kG}\delta_x f_n^4\bar{u} + m_d\delta_x f_n^2\bar{u}\delta\left(\frac{x}{L_d} - 1\right) = 0 \quad (3.45)$$

Dividindo tudo por  $\rho A \delta_x f_n^2$ , tem-se:

$$\frac{EI}{\rho AL^4 f_n^2} \bar{u}^{IV} - \left( \frac{E}{kG} + 1 \right) \frac{I}{A L^2} \bar{u}'' + \ddot{\bar{u}} + \frac{\rho^2 I}{kG} \frac{f_n^4}{\rho A f_n^2} \ddot{\bar{u}} + \frac{m_d}{\rho A} \ddot{\bar{u}} \delta \left( \frac{x}{L_d} - 1 \right) = 0 \quad (3.46)$$

Considerando:

$$\frac{4\pi^2}{\beta^4} = \frac{EI}{\rho AL^4 f_n^2} \quad (3.47)$$

e, ainda,

$$\frac{1}{\rho A f_n^2} = \frac{4\pi^2 L^4}{\beta^4 EI} \quad (3.48)$$

Logo,

$$\frac{4\pi^2}{\beta^4} \bar{u}^{IV} - \left( \frac{E}{kG} + 1 \right) \frac{I}{A L^2} \bar{u}'' + \ddot{\bar{u}} + \frac{\rho f_n^2 I}{kGA} \ddot{\bar{u}} + \frac{m_d}{\rho AL} \ddot{\bar{u}} \delta \left( \bar{x} - \frac{L_d}{L} \right) = 0 \quad (3.49)$$

Definindo  $\frac{E}{Gk} = \kappa$  e  $\frac{I}{A} = R^2$  (raio de giração da seção transversal), temos a equação do movimento adimensional da viga de Timoshenko:

$$\frac{4\pi^2}{\beta^4} \bar{u}^{IV} - \underbrace{(\kappa + 1) R^2 \frac{1}{L^2} \bar{u}''}_{\text{}} + \ddot{\bar{u}} + \underbrace{\frac{\rho f_n^2 R^2}{kG} \ddot{\bar{u}}}_{\text{}} + \frac{m_d}{\rho AL} \ddot{\bar{u}} \delta \left( \bar{x} - \frac{L_d}{L} \right) = 0 \quad (3.50)$$

em que  $\delta = \left[ \frac{1}{L} \right]$ .

Ao desconsiderar os termos destacados na Equação 3.50, temos a equação do movimento adimensional de viga com base na teoria de Euler-Bernoulli que considera uma hipótese cinemática formulada apenas com flexão pura, logo não são considerados os efeitos e cisalhamento e a inércia rotacional da viga. Na Equação 3.51, é descrito o movimento da viga de Euler-Bernoulli.

$$\frac{4\pi^2}{\beta^4} \bar{u}^{IV} + \ddot{\bar{u}} + \frac{m_d}{\rho AL} \ddot{\bar{u}} \delta \left( \bar{x} - \frac{L_d}{L} \right) = 0. \quad (3.51)$$

Logo, é notado que o comportamento da viga está em função da sua condição de contorno  $\beta$ , da intensidade da descontinuidade de massa  $m_d$  e a sua posição  $L_d$ .

## 4 Transformadas de *Wavelets*

No Capítulo 4, são apresentadas as definições, as propriedades e as famílias *wavelets*.

### 4.1 *Wavelets*

As transformadas matemáticas tem como finalidade a obtenção de informações adicionais que não é facilmente obtidos a partir de seu sinal bruto. Geralmente, os sinais brutos estão no domínio de tempo e essa representação nem sempre é melhor em casos de processamento. Há casos que as informações mais importantes estão escondidas no conteúdo de domínio na frequência,

A ideia geral da análise de *wavelet* é que o sinal pode ser dividido em várias funções básicas, "ondaletas". Esta ferramenta permite o janelamento com tamanho variável e a utilização de intervalos de tempo e espaços longos e curtos para captação de informações necessárias. A *wavelet* tem a capacidade de fornecer informações do tempo e frequência, simultaneamente, diferentemente da Transformada de Fourier.

As *wavelets* são capazes de realizar análises locais, tornando-as ainda mais apropriadas. Esta consiste em calcular um índice de semelhança entre o sinal e a função *wavelet*. Em outras palavras, quando o índice é alto tem-se uma forte semelhança.

A Transformada de *Wavelet* unidimensional, assim como a Transformada Janelada de Fourier, projeta um sinal em um espaço bidimensional. Considerando um sinal  $f(x)$ , a Transformada é definida da seguinte maneira:

$$W_f^\phi(a, \iota) = |a|^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \phi^* \left( \frac{x - \iota}{a} \right) dx \quad (4.1)$$

onde  $\phi^*(.)$  indica o complexo conjugado de  $\phi(.)$ ,  $a(> 0)$  é o parâmetro escala e  $\iota$  translação (localização da função *wavelet*).

O termo translação está relacionado com a localização da janela, como a janela é deslocada através do sinal. A escala como operação matemática dilata ou comprime o sinal. Para detecção de danos, usa-se grandes escalas a fim de garantir que os sinais fiquem dilatados facilitando a identificação de descontinuidades.

Considerando-se que o valor médio da função  $\phi(x)$  desaparece, tem-se:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) dx \quad (4.2)$$

A respectiva função para Transformada de *Wavelet* é dada por:

$$\phi^{a,t}(x) = |a|^{-\frac{1}{2}} \phi^* \left( \frac{x-t}{a} \right) \quad (4.3)$$

onde,  $\phi^{a,b}$  são as funções geradoras no domínio espacial  $x$  ou funções *wavelet*-mãe, da qual são gerados os coeficientes de *wavelet* por translação e dilatação.

Comumente, as funções da Transformada Janelada de Fourier oscilam e decaem rapidamente. Todavia, em comparação com as funções  $\phi^{a,t}(x)$ , o número de oscilações permanece constante com a mudança da largura da janela. Ou seja, uma *wavelet* é capaz de dilatar ou comprimir esta função ao longo do eixo, tempo ou espaço. Para a Transformada Janelada de Fourier, o tamanho das janelas permanece constante, enquanto o número de oscilações muda.

## 4.2 Propriedades

A escolha das funções *wavelets* depende da finalidade de cada caso uma vez que apresentam diferentes propriedades. Estrada (2008) considera que as principais propriedades de uma função são ortonormalidade e biortogonalidade, suporte compacto, momentos nulos e regularidade.

A ortogonalidade e biortogonalidade apresenta a garantia de cálculo rápido dos coeficientes de *wavelet*. O termo biortogonal se refere às duas bases diferentes que são ortogonais entre si porém não formam um conjunto ortogonal.

O suporte compacto garante que a função *wavelet* não assuma valor igual a zero em intervalos finitos, assim possibilitando a melhor representação dos sinais que possuem características localizadas.

A propriedade de momentos nulos determina o grau do polinômio que podem ser aproximados. Esta propriedade é utilizada para selecionar a *wavelet*-mãe mais adequada para estudo de detecção de danos uma vez que se caso o valor médio de  $x^k \Phi(x)$  for zero, para  $k = 0, 1, \dots, n$ , então a função possui  $n + 1$  momentos de fuga e os polinômios de grau  $n$  são suprimidos pela função *wavelet*.

A regularidade é o número de vezes que uma função é diferenciável no ponto  $x_0$ . Singularidades em uma função podem ser detectadas a partir dessa regularidade.

Ovanesova (2000) aponta as principais vantagens da aplicação das *wavelets* no estudo de identificação de danos, são elas:

- Capacidade de realizar análise local de um sinal no domínio do espaço ou no tempo. Assim, as *wavelets* são capazes de revelar aspectos que outras técnicas de análise de sinal não conseguem detectar;
- Capacidade de analisar o sinal em qualquer intervalo de espaço ou de tempo em que as mudanças de função são rápidas, o que causa problemas para a transformada rápida de Fourier. A análise de Fourier espalha uma mudança rápida em um pequeno intervalo de tempo ao longo do espectro de frequências. A transformada *wavelet*, no entanto, produz não só a informação de frequência, mas também informação de tempo;
- Eliminação dos problemas de *aliasing*, ruído, exibidas pela Transformada Rápida de Fourier;
- Oferecem uma redução potencial em recursos computacionais necessários para processar uma transformação do sinal;

### 4.3 Transformada Contínua de *Wavelet* (TCW)

A Transformada Contínua de *Wavelet* consiste na possibilidade de descrever  $\phi^{a,\iota}$  como uma função analítica dependente dos parâmetros escala e translação e esta é definida pela seguinte equação:

$$W_f^\phi(a, \iota) = |a|^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \phi\left(\frac{x - \iota}{a}\right) dx, \quad (4.4)$$

onde a *wavelet*  $\phi^{a,\iota}$  oscila na frequência  $a^{-1}$  e localiza-se no tempo ou espaço  $\iota$ .

As baixas escalas correlacionam com uma *wavelet* comprimida, os detalhes do sinal mudam rapidamente e possuem altas frequências. Já em casos de altas escalas, a *wavelet* está na condição esticada, os detalhes mudam de forma lenta e possui baixa frequência.

Na análise utilizando a TCW gera-se uma grande quantidade de coeficientes de *wavelets* o que desfavorece a sua aplicação. Ademais, muitas *wavelets* são definidas a partir de equações recursivas, não explícitas.

### 4.4 Transformada Discreta de *Wavelet* (TDW)

Ao invés de utilizar dilatações e translações contínuas, a TDW utiliza os valores discretos desses parâmetros. As *wavelets*  $\phi^{a,\iota}$  podem ser geradas de uma *wavelet*-mãe utilizando valores escalados de  $a$  e transladados de  $\iota$  baseados na potência de 2, conhecidas como escalas diáticas. Nesse sentido, minimiza-se o esforço computacional nos cálculos dos respectivos coeficientes.



O parâmetro escala é definido como  $2^a$  e a translação como  $\iota 2^a$ . Dessa maneira, as *wavelets* são obtidas a partir da seguinte equação:

$$TDW_{a,\iota} = 2^{\frac{-a}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\phi(2^{-a}x - \iota)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\phi_{a,\iota}(x)dx, \quad (4.5)$$

onde  $a$  e  $\iota$  refere-se aos índices de escala e translação, respectivamente.

Palechor et al. (2018) apresenta os passos para detecção de danos a partir da TDW, sendo eles:

1. Obtenção de um sinal associado à resposta da estrutura completa ou examinar apenas uma área específica da estrutura;
2. Cálculo dos coeficientes de *wavelet*, efetuando a TDW do sinal em níveis diferentes ou escalas diferentes.
3. Plotagem do gráfico dos coeficientes de *wavelet* para cada nível da decomposição.
4. Avaliação da distribuição dos coeficientes *wavelet* para cada nível. A mudança brusca, isto é, um pico na distribuição dos coeficientes *wavelet* significa uma perturbação local. Se a perturbação detectada não é causada por uma fonte conhecida, como a descontinuidade geométrica ou do material, então isso significa que existe um dano perto do local da perturbação.

## 4.5 Famílias

Considera-se a função geradora, *wavelet*-mãe, uma função que oscila, possui energia finita e possui valor médio nulo. Existem diferentes famílias de funções *wavelets*, tais como: Haar, Daubechies, Biortogonal, Coiflets e Symlets.

### 4.5.1 Haar

A *wavelet* Haar foi proposta por Alfred Haar em 1909, sendo a primeira a ser conhecida e utilizada. Haar usou essas funções para exemplificar um sistema ortonormal para espaço de funções integráveis quadradas no intervalo unitário  $[0,1]$ .

A *wavelet* Haar é uma função simples que se assemelha com uma função degrau. A desvantagem é que não se trata de uma função contínua e, portanto, não é diferenciável. A Fig. 4.1 apresenta a função *wavelet* Haar.

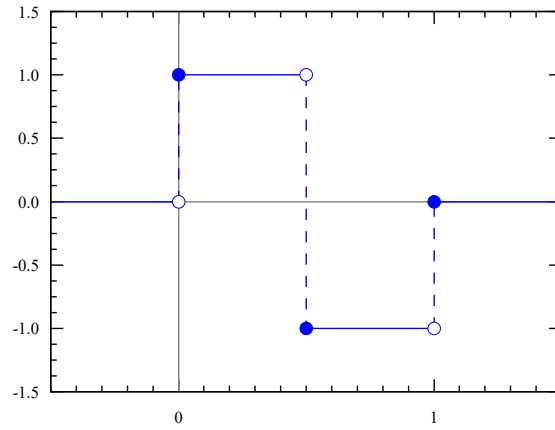


Figura 4.1 – Função *wavelet* Haar.

### 4.5.2 Daubechies

As *wavelets* Daubechies foram baseadas no trabalho de Ingrid Daubechies, pesquisadora de grande importância no estudo das *wavelets*. Ingrid propôs o que são chamadas de *wavelets* ortonormais, o que possibilitou a análise discreta de *wavelets*.

Os nomes das *wavelets* da família Daubechies são escritos  $dbN$ , onde  $N$  está a ordem e  $db$  é conhecido como o sobrenome da *wavelet*. Os nove principais membros da família Daubechies são apresentados na Fig. 4.2.

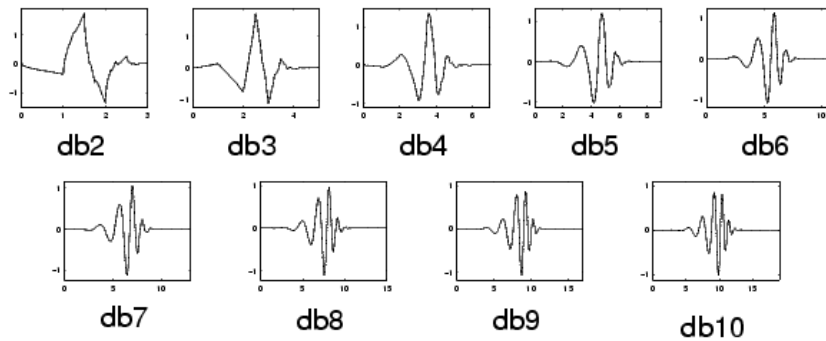


Figura 4.2 – Função *wavelet* Daubechies.

### 4.5.3 Biortogonal

A família Daubechies foram propostas em 1992 apresentando *wavelets* simétricas e de suporte compacto. A Figura 4.3 apresenta algumas *wavelets* biortogonais.

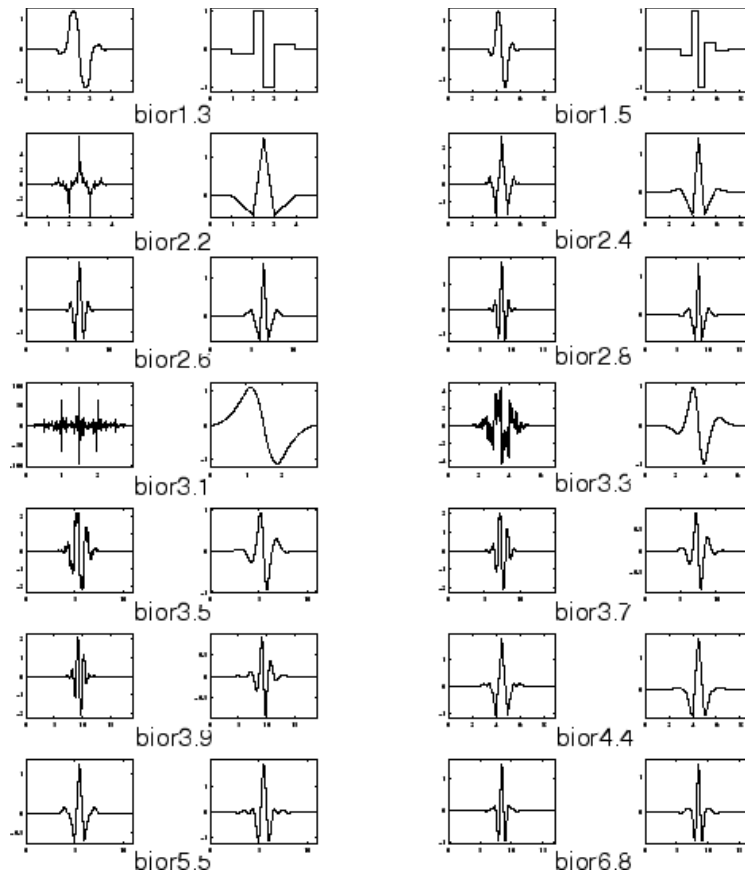


Figura 4.3 – Função *wavelet* Biortogonal.

#### 4.5.4 Coiflets

Coiflets são *wavelets* discretas introduzidas por Ingrid Daubechies, a pedido de Ronald Coifman. A função de onda tem  $2N$  momentos iguais a 0 e a função de escala tem  $2n - 1$  momentos iguais a 0. As duas funções têm um comprimento de apoio de  $6N - 1$ . Algumas *wavelets* Coiflets são apresentadas na Fig. 4.4.

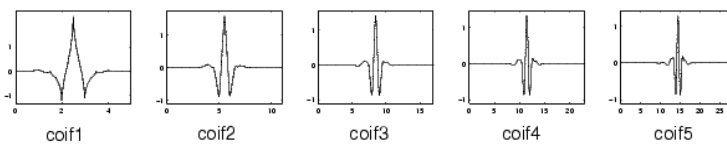


Figura 4.4 – Função *wavelet* Coiflets.

#### 4.5.5 Symlets

As *wavelets* Symlets são quase simétricas e foram propostas por Daubechies como modificações Db. Assim, suas propriedades são semelhantes, porém as funções symlets tendem a ser simétricas. A Figura 4.5 apresenta as principais funções *wavelets* Symlets.

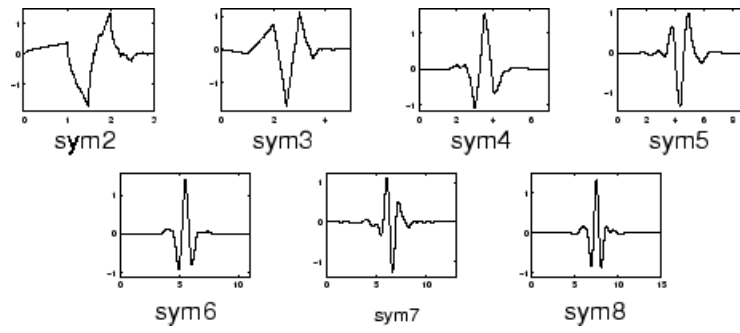


Figura 4.5 – Função *wavelet* Symlets.

# 5 Metodologia

O Capítulo 5 descreve a metodologia utilizada para o estudo de detecção de danos em vigas de Timoshenko. É apresentada a técnica *frequency-shift* baseada na variação das frequências naturais, as primeiras derivadas da curva *frequency-shift* e a Transformada Discreta de *Wavelet*. Além disso, é apresentado um índice de avaliação do nível de dano da estrutura, *Signal-to-Damage Ratio*.

## 5.1 *Frequency-shift*

Salawu (1997) mostra que existe uma variação das frequências naturais de vigas quando sujeitas a propagação de danos. Zhong, Oyadiji e Ding (2008) apresenta técnica baseada na aplicação de uma massa adicional ao longo do comprimento da viga a fim de produzir um gráfico da evolução de uma das frequências naturais do sistema estrutural em função da posição da massa adicional, conhecido como gráfico de variação de frequência (*frequency-shift*). Este gráfico se mostra uma ferramenta útil para a identificação da danos em estruturas, pois é possível identificar a posição do dano sem a necessidade de comparar com o comportamento de um referencial intacto.

A Figura 5.1 ilustra o procedimento da técnica de massa móvel adicional  $m_a$  disposta em uma viga com uma descontinuidade devido a massa  $m_d$ .

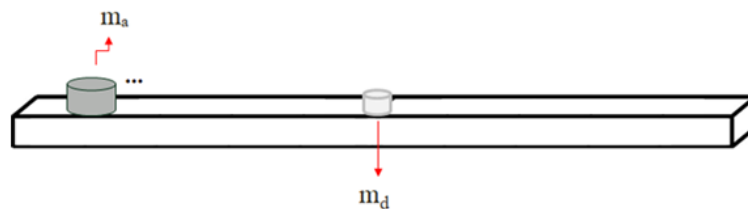


Figura 5.1 – Viga na condição livre-livre sujeita a uma massa móvel adicional  $m_a$  e uma massa referente a dano  $m_d$ .

A técnica proposta consiste em avaliar a curva da frequência natural *versus* localização da massa adicional  $m_a$ . A Fig. 5.2 apresenta um exemplo desta aplicação a partir da primeira frequência natural da viga sujeita a diferentes níveis de dano (1 a 5% da massa total da viga  $m_T$ ).

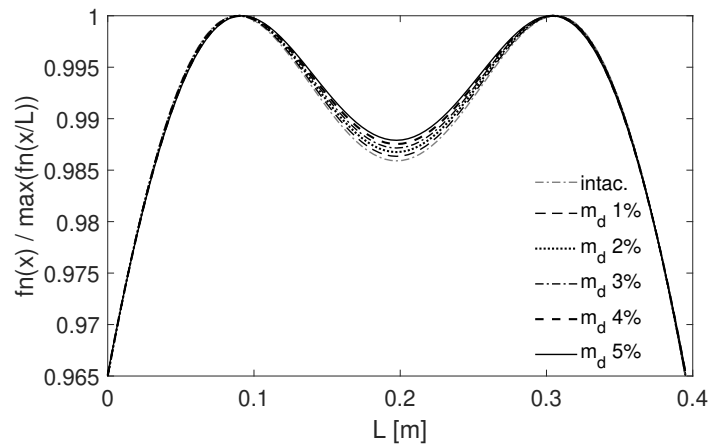


Figura 5.2 – Variação da primeira frequência natural de viga livre-livre sujeita a diferentes níveis de dano localizado no meio do vão.

Como mostrado na Fig. 5.2, a curva da frequência natural de uma viga danificada com uma massa adicional percorrendo ao longo de sua extensão apresenta variações na região danificada.

## 5.2 Derivadas da *frequency-shift*

A curva das frequências naturais apresenta descontinuidade na proximidade da região danificada da viga. A fim de ampliar os efeitos da presença do dano estrutural, (Zhong; Oyadiji; Ding, 2008) sugere a verificação das derivadas desta curva.

A Figura 5.3 apresenta as três primeiras derivadas da curva de frequência do exemplo apresentado na Fig. 5.2.

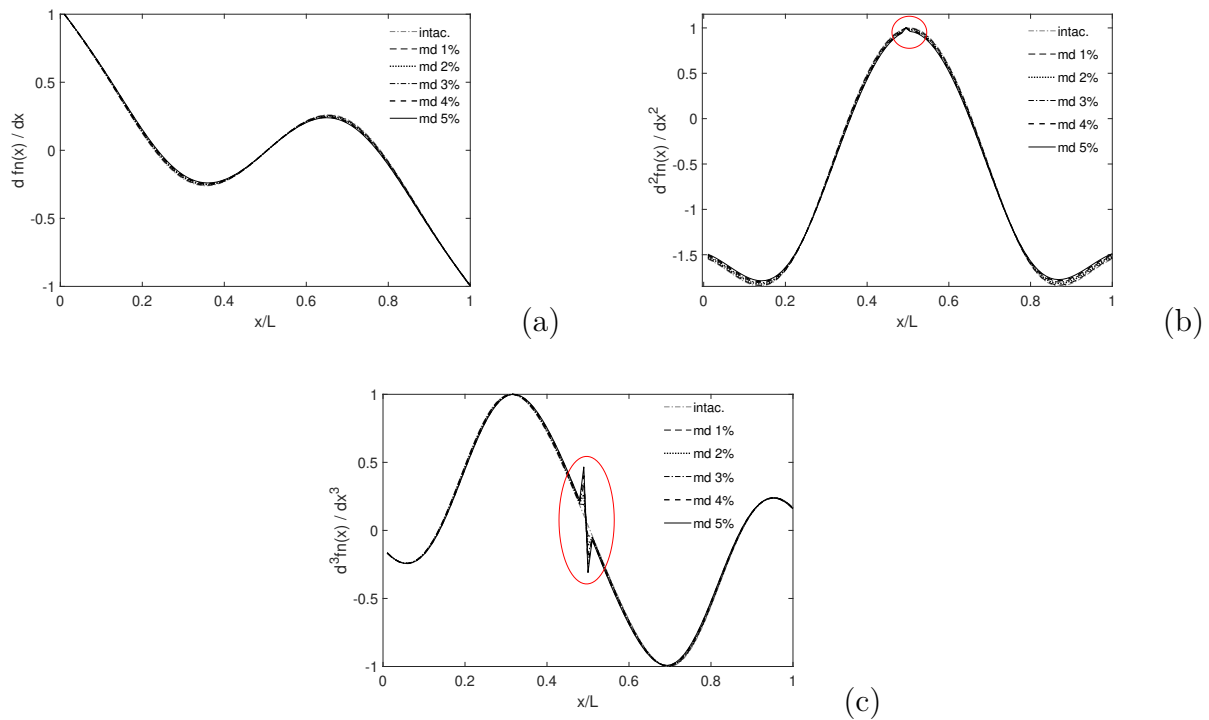


Figura 5.3 – Primeira frequência natural do exemplo: (a) primeira derivada, (b) segunda derivada e (c) terceira derivada.

A Figura 5.3 mostra que a partir da segunda derivada é possível pontuar a localização do dano. A ferramenta se faz eficaz, uma vez que amplia os efeitos do dano a partir da variação da frequência natural conforme a massa adicional é deslocada.

### 5.3 Transformada Discreta de *Wavelet* (TDW)

A Transformada Discreta de *Wavelet* também foi aplicada a fim de detectar a posição do dano. Foram aplicadas quatro diferentes famílias, sendo elas: Daubechies (db5), Coiflets (coif3), Symlets (sym6) e Biortogonal (bior6.8).

De acordo com Palechor (2013), as funções citadas anteriormente apresentaram bons resultados no estudo experimental de detecção de danos em vigas metálicas. A Figura 5.4 mostra resultados da aplicação dessas funções na curva de variação das frequências naturais da estrutura intacta e danificada, nas condições apresentadas no exemplo da Fig. 5.2. Ressalta-se que os gráficos foram plotados em escala semi-logarítmica *semilogy*, em que o eixo  $x$  é linear e o eixo  $y$  é  $\log_{10}$ .

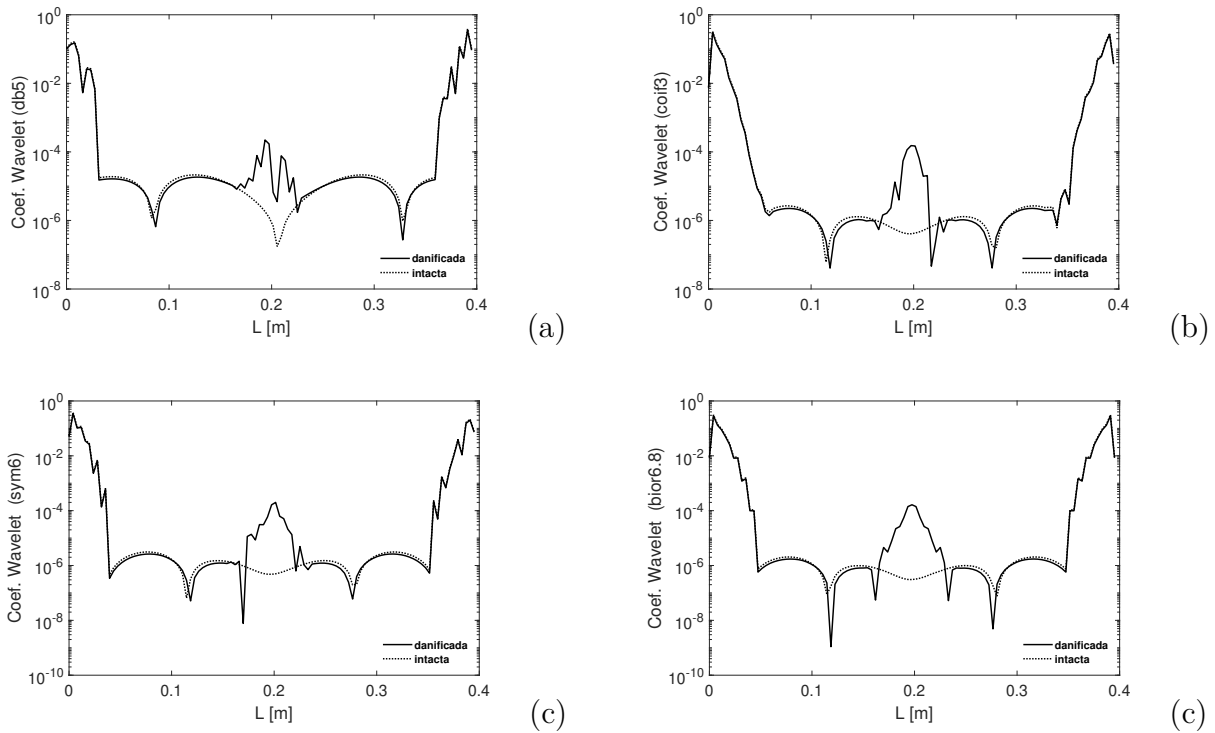


Figura 5.4 – Aplicação da TWD (a)db5, (b)coif3, (c)sym6 e (d)bior6.8.

Foi aplicada a TDW na resposta da estrutura intacta apenas para visualizar o comportamento da *wavelet* nas regiões sem dano da viga. Logo, foi notado que os coeficientes não apresentam grandes variações nas regiões intactas.

Os coeficientes de *wavelet* alcançam altos valores nas extremidades, devido às descontinuidades geométricas/condição de contorno da viga. Dessa forma, é possível localizar a posição do dano que corresponde ao máximo valor global, desconsiderando as extremidades.

## 5.4 Definição do *Signal-to-Damage Ratio* (SDR)

O presente trabalho o índice SDR -*Signal-to-Damage Ratio* para avaliação do nível de dano que relaciona o Sinal de Dano  $S_d$  e o Sinal de Base  $S_b$ , que se refere à região não danificada da viga, Figura 5.5, dado pela expressão:

$$SDR[dB] = 20 \log_{10} \left( \frac{S_d}{S_b} \right). \quad (5.1)$$



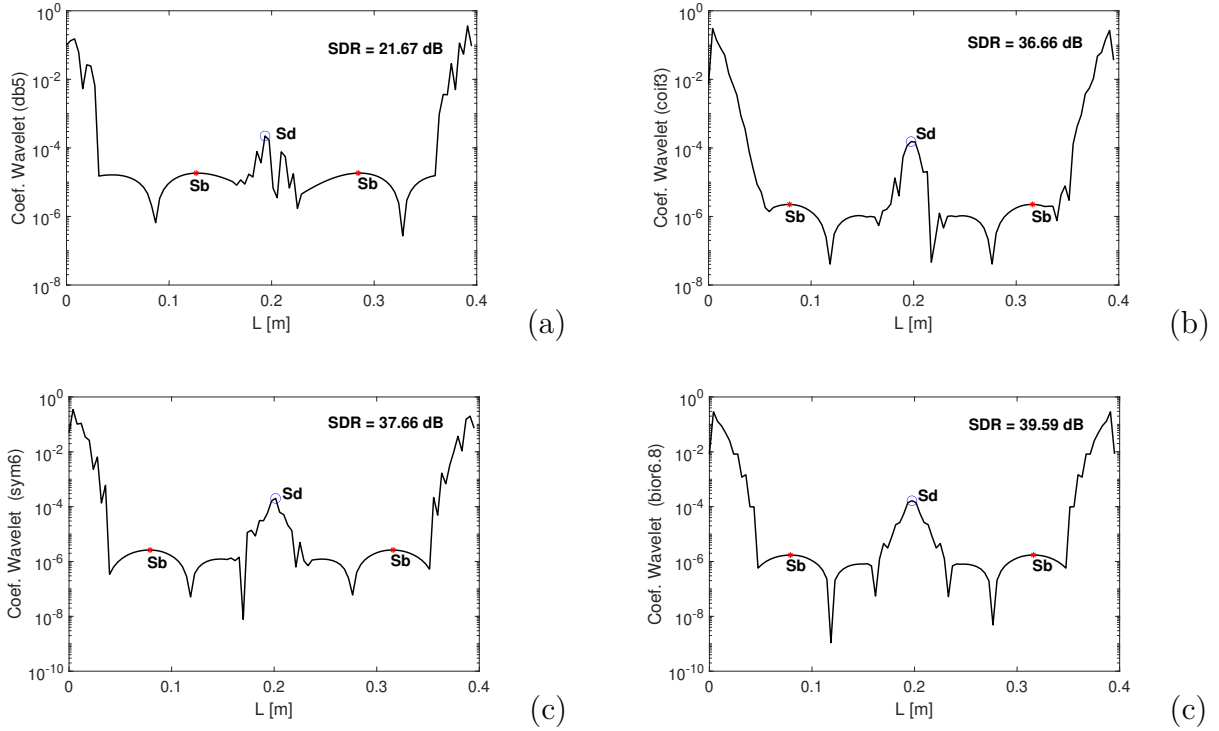


Figura 5.5 – Determinação do SDR (a)db5, (b)coif3, (c)sym6, (d)bior6.8.

Para pontuar a localização do dano, são desconsiderados os valores dos coeficientes de *wavelets* apresentados nas extremidades da viga, por se tratar de regiões de descontinuidades devido às condições de contorno do apoio. O *Sd* corresponde a posição do dano com o máximo valor absoluto e o *Sb* consiste no máximo valor local da região sem singularidades presentes no sinal.

## 5.5 Procedimentos

O modelo de viga de Timoshenko foi desenvolvido com base no MEF na plataforma do MATLAB com dois tipos de modelagem de dano: descontinuidade de massa adicional (Seção 3.2.1) e perda de rigidez, dano como uma mola rotacional, (Seção 3.2.2). As propriedades utilizadas no modelo numérico foram obtidas experimentalmente no Laboratório de Sistemas e Vibrações do Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade de Brasília, UnB (Apêndice A). Foi realizada uma análise dos parâmetros de dano: razão de massa ( $\mu = m_d/m_T$ ), razão de profundidade do dano ( $\eta = d/h$ ) e a posição do dano ( $\delta = L_d/L$ ). A viga foi investigada em duas condições de contorno: Livre-Livre e Apoiada-Apoiada.

No modelo, foi aplicada uma massa adicional concentrada  $m_a$  em cada nó da viga e os autovalores referentes a cada posição da  $m_a$  foram capturados viabilizando a plotagem da curva *frequency-shift*. Posteriormente, as técnicas propostas de detecção de danos foram aplicadas (derivadas da *frequency-shift* e TDW). Os valores de SDR foram calculados e analisados. E, por fim, foi feita uma comparação dos parâmetros  $\eta$  e  $\mu$ .

O fluxograma apresentado na Figura 5.6 mostra o roteiro seguido ao longo do desenvolvimento do presente trabalho.

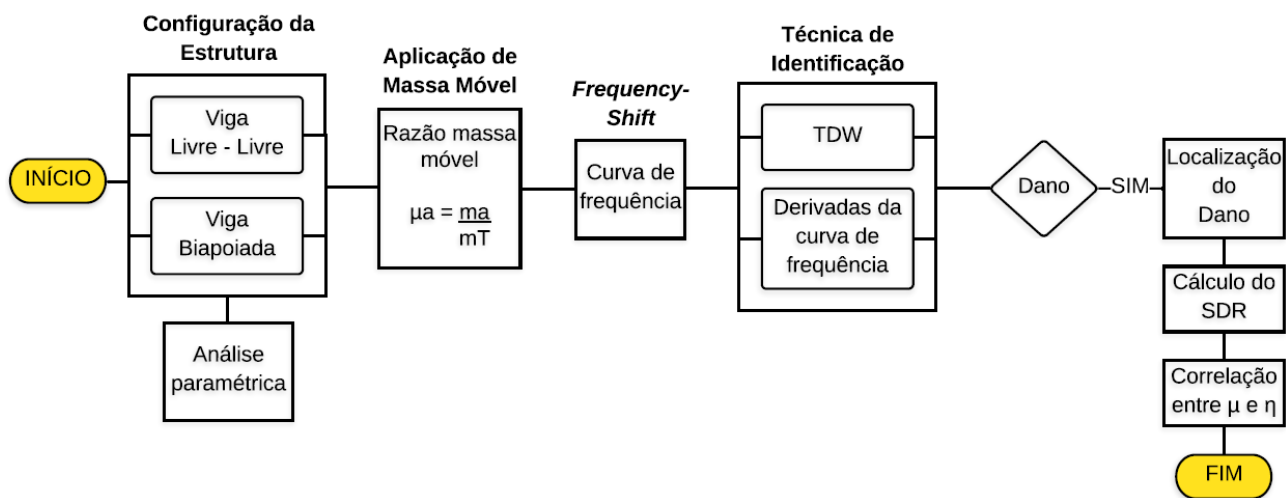


Figura 5.6 – Fluxograma referente a estrutura do presente trabalho.

## 6 Resultados Numéricos

O Capítulo 6 apresenta a descrição e os resultados dos ensaios realizados da aplicação de descontinuidade por adição de massa e dano por rigidez na viga. Para a descontinuidade de massa, é apresentada a curva da *frequency-shift* e suas derivadas. Além disso, é feita a aplicação da TDW variando o número de elementos da viga e o número de pontos de aplicação da massa adicional  $m_a$ . Os valores calculados do índice SDR são apresentados para todos os casos. É mostrada a relação da massa móvel adicional  $m_a$  e a descontinuidade de massa  $m_d$ . Mapas de resposta a fim de investigar a relação da magnitude do dano, a sua posição e o valor do SDR calculado são elaborados e apresentados neste capítulo. Além disso, foi abordada a influência das formas modais na aplicação das técnicas propostas. Para a viga com dano por rigidez, é apresentada a técnica de *frequency-shift* e suas derivadas, a aplicação da TDW e os valores de SDR. É feita uma comparação entre a razão de massa  $\mu$  e a razão de profundidade  $\eta$ . E, por fim, é mostrado o efeito do ruído para este tipo de estudo.

### 6.1 Descrição dos Ensaio

Foram realizadas análises numéricas de uma viga de alumínio utilizando os parâmetros estimados experimentalmente no laboratório de Sistemas e Vibrações do Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade de Brasília, UnB (Apêndice A). *Scripts* em MATLAB descrevem o comportamento de uma viga de Timoshenko sujeita a diferentes tipos, níveis e posições de dano (Apêndice B).

#### 6.1.1 Características da Viga

A Tabela 1 apresenta as propriedades geométricas e do material da viga de alumínio utilizadas como referência para o presente estudo.

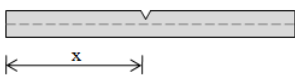
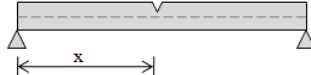
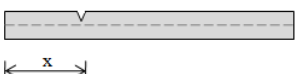
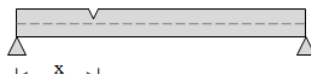
Tabela 1 – Características da viga de alumínio.

Massa [g]	385.33
$L \times b \times h$ [ $mm^3$ ]	395x19x19
Área da seção [ $mm^2$ ]	361.00
Momento de Inércia [ $mm^4$ ]	$1.086 \cdot 10^{-4}$
Módulo de Elasticidade [ $GPa$ ]	66.66
Módulo de Cisalhamento [ $GPa$ ]	24.18
Densidade [ $kg/m^3$ ]	2702.27
Coefficiente de Poisson	0.33

### 6.1.2 Casos Estudados

No presente trabalho, foram exploradas duas diferentes condições de contorno: Livre-Livre (L-L) e Apoiada-Apoiada (A-A) e duas posições de dano  $x$ :  $L/2$  e  $L/4$ . A Tabela 2 apresenta os casos a serem investigados.

Tabela 2 – Casos da viga com diferentes condições de contorno e posições de dano.

$x$	$L - L$	$A - A$
$L/2$	C1 	C2 
$L/4$	C3 	C4 

## 6.2 Descontinuidade de Massa

Primeiramente, o dano foi modelado como uma massa adicional, como mostra a Figura 6.1.

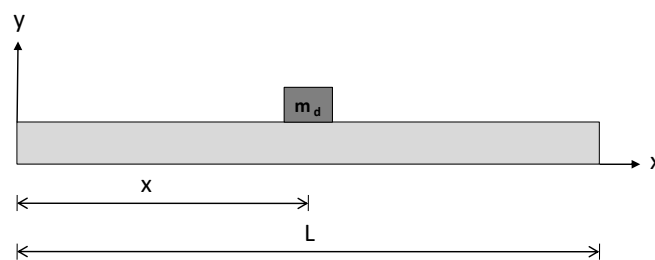


Figura 6.1 – Viga com descontinuidade de massa.

## 6.2.1 Frequency-shift e Derivadas da Frequency-shift

Foi utilizada a técnica de *frequency-shift* para os três primeiros modos de vibração dos casos. Foi aplicada uma massa móvel adicional  $m_a$  igual a 2% da massa total da viga  $m_t$ .

O dano foi modelado como uma massa adicional  $m_d$  que foi variada de 1% a 5% de  $m_t$ . A viga foi discretizada em 100 elementos para essa análise. A evolução espacial das três primeiras frequências para os quatro casos são apresentados nas Figuras 6.2 a 6.5.

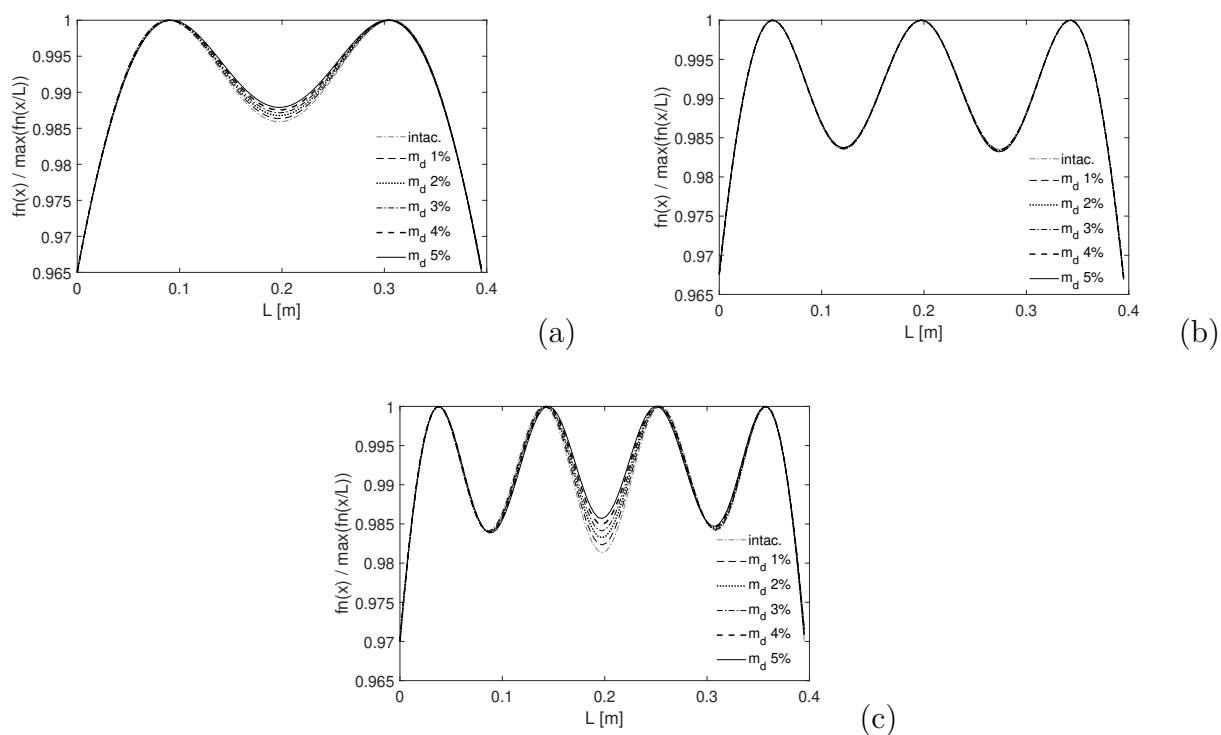


Figura 6.2 – Variação de frequência  $f_n(x/L)/\max(f_n(x/L))$  em função da posição de  $m_a$  referente ao caso C1: (a) primeira frequência, (b) segunda frequência e (c) terceira frequência.

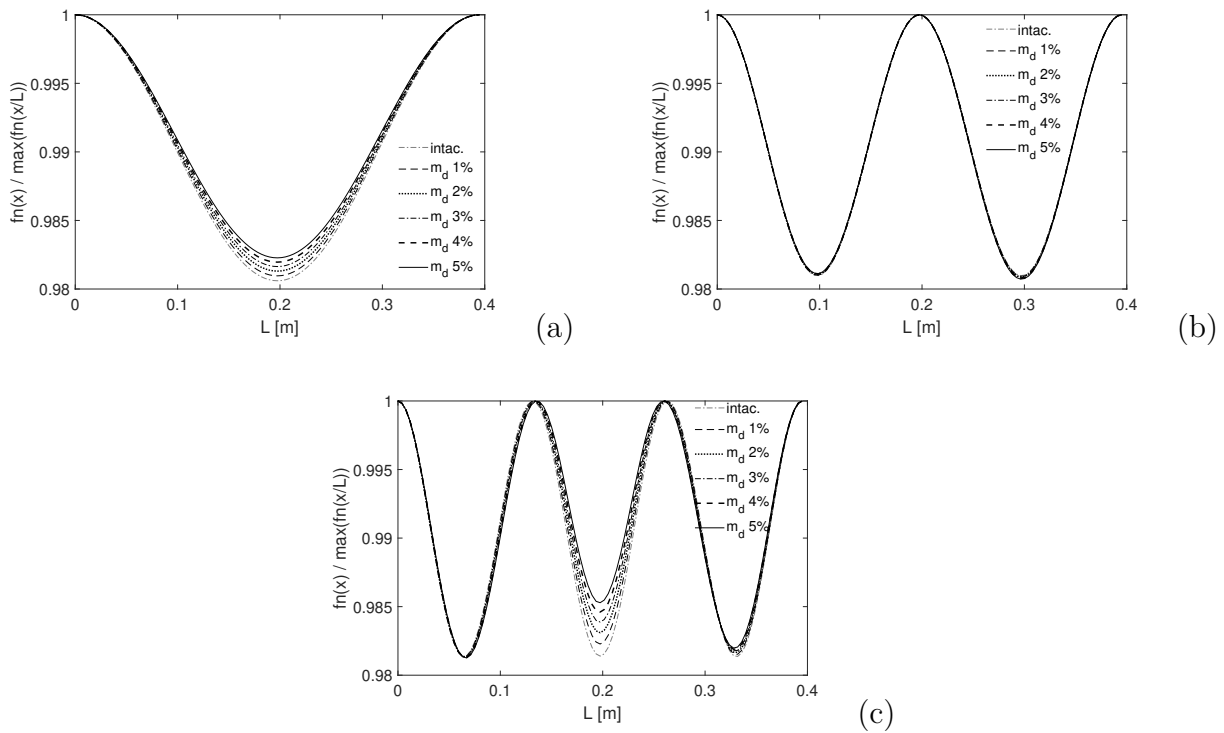


Figura 6.3 – Variação de frequência  $f_n(x/L)/\max(f_n(x/L))$  em função da posição de  $m_a$  referente ao caso C2: (a) primeira frequência, (b) segunda frequência e (c) terceira frequência.

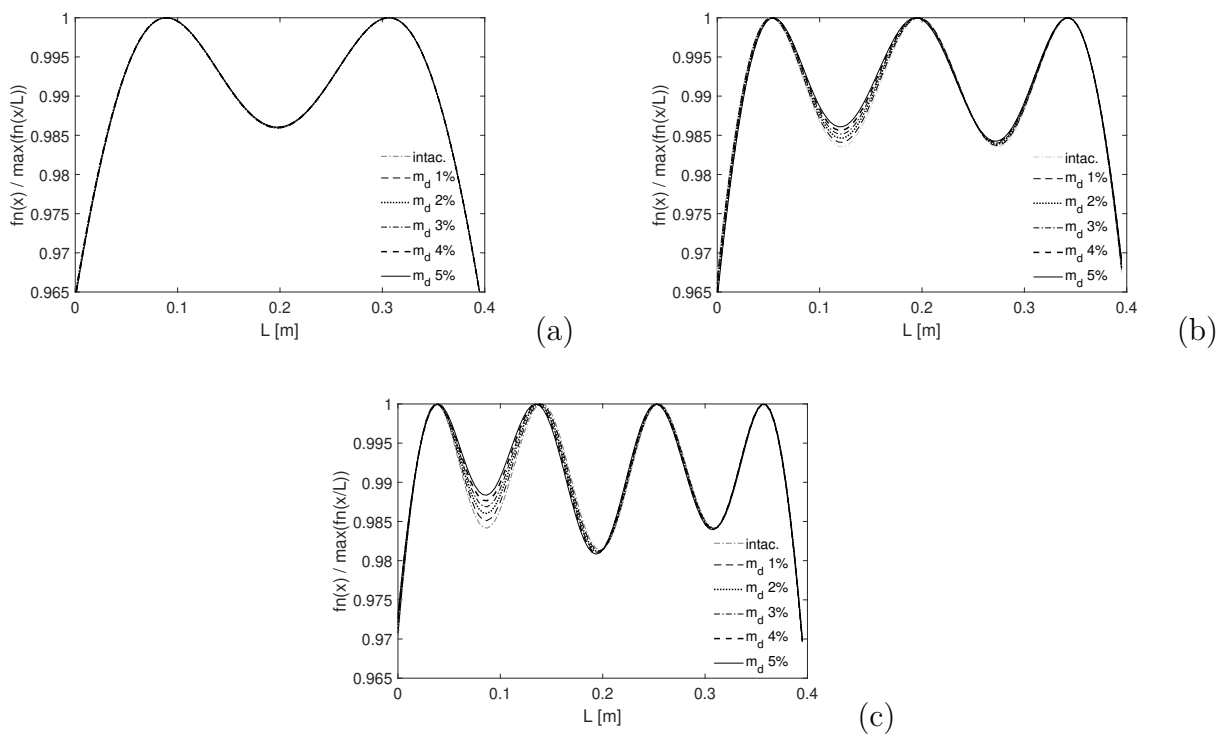


Figura 6.4 – Variação de frequência  $f_n(x/L)/\max(f_n(x/L))$  em função da posição de  $m_a$  referente ao caso C3: (a) primeira frequência, (b) segunda frequência e (c) terceira frequência.

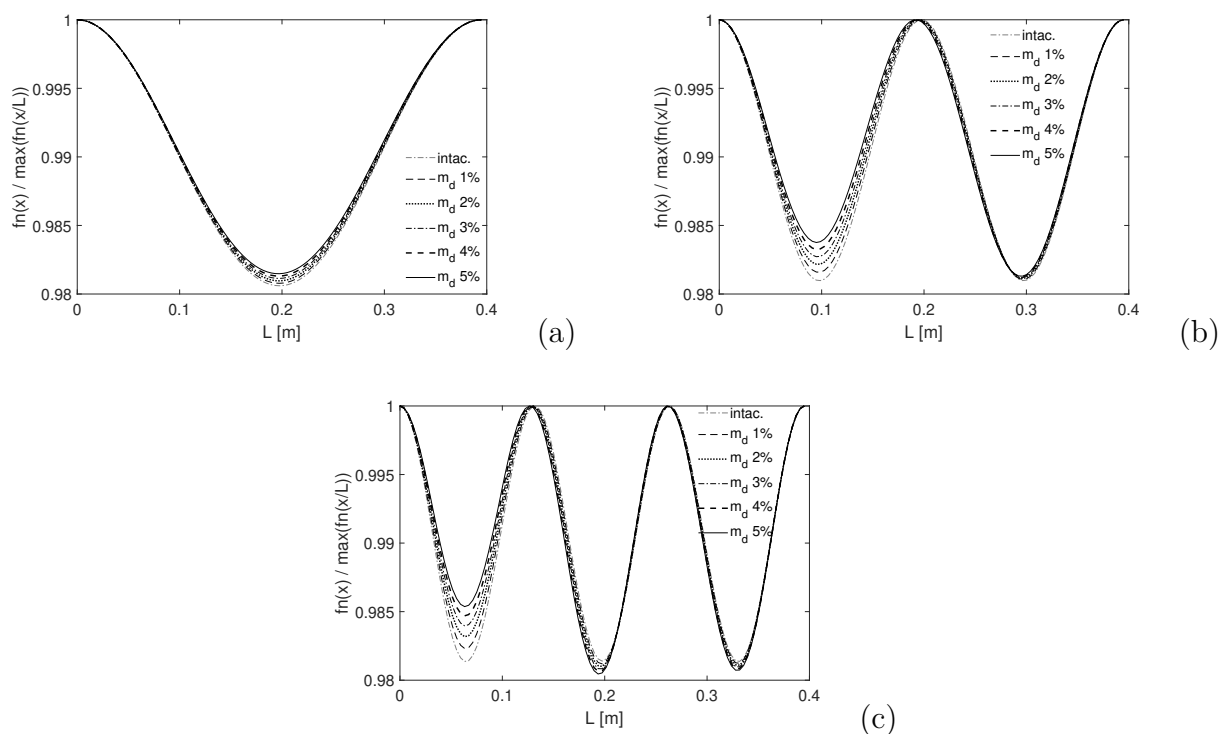


Figura 6.5 – Variação de frequência  $f_n(x/L)/\max(f_n(x/L))$  em função da posição de  $m_a$  referente ao caso C4: (a) primeira frequência, (b) segunda frequência e (c) terceira frequência.

Em todos os casos, foi percebida a sensibilidade das frequências naturais quando aplicada de uma massa adicional ao longo do comprimento da estrutura. Em adição, foi notada a influência do modo de vibrar da estrutura, uma vez que a curva da frequência natural sofre menores variações quando o dano estar localizado em um ponto nodal, como mostra as Fig. 6.2(b), 6.3(b) e 6.4(a). Na Seção (6.2.6), a influência dos modos é abordada com mais detalhes.

Além disso, foi aplicado um método baseado no uso das derivadas da curva de frequência, também apresentado por Zhong, Oyadiji e Ding (2008). Para os casos C1 e C2, foi aplicada a técnica para a primeira frequência natural, como mostra as Figuras 6.6 e 6.7.

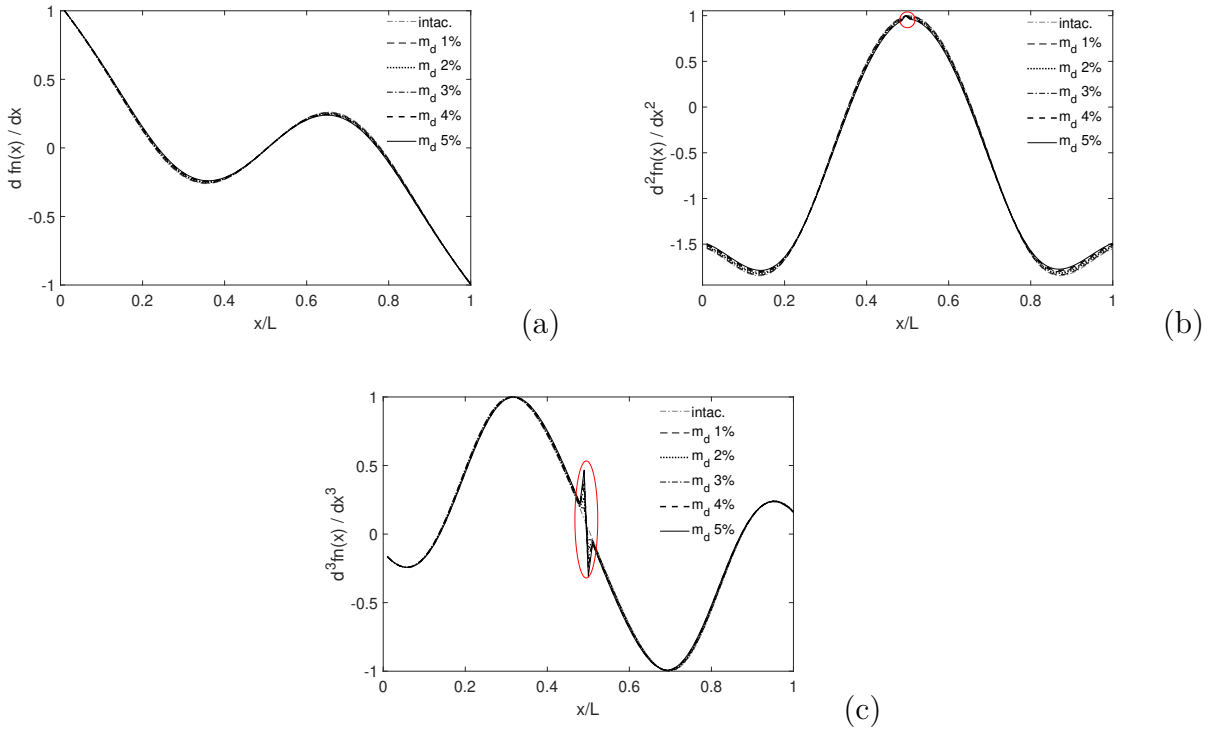


Figura 6.6 – Derivadas da variação de frequência  $f_n$  em função da posição adimensional de  $m_a$  para o caso C1: (a)  $df_n(x)/dx$ , (b)  $d^2f_n(x)/dx^2$  e (c)  $d^3f_n(x)/dx^3$ .

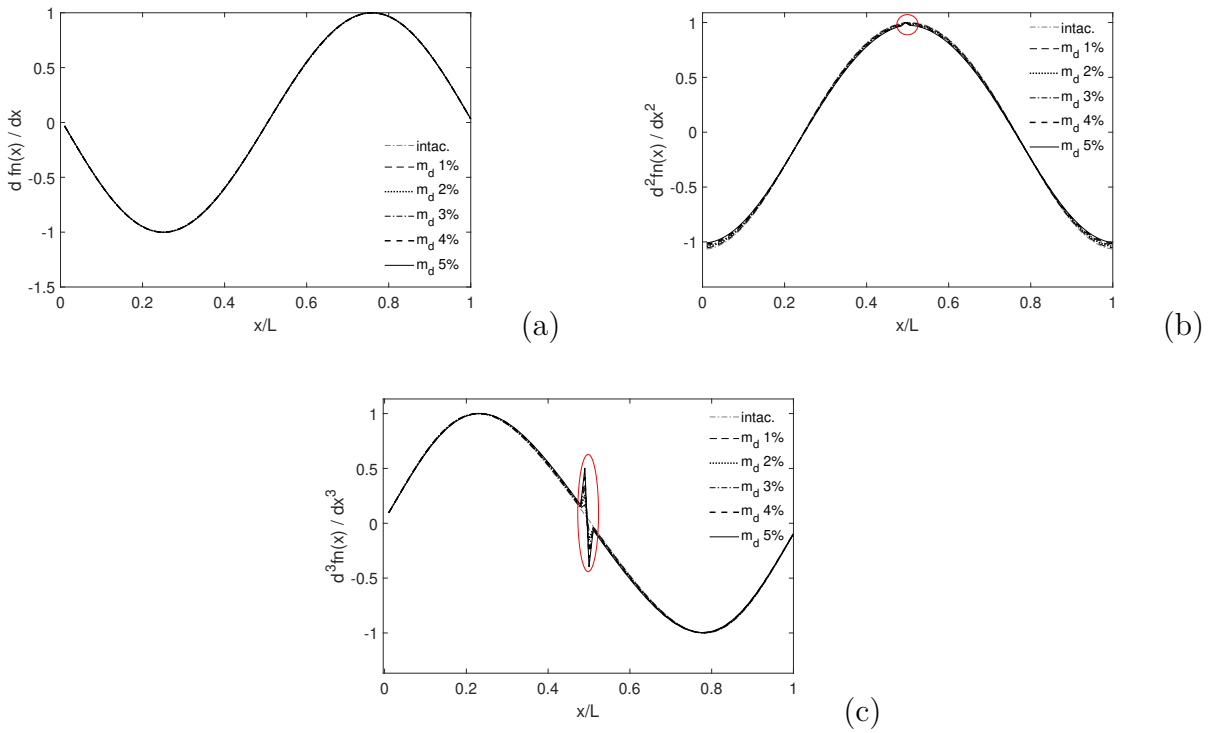


Figura 6.7 – Derivadas da variação de frequência  $f_n$  em função da posição adimensional de  $m_a$  para o caso C2: (a)  $df_n(x)/dx$ , (b)  $d^2f_n(x)/dx^2$  e (c)  $d^3f_n(x)/dx^3$ .



Como nos casos C3 e C4 a primeira forma modal não apresenta grande variação pelo fato do dano se localizar em um ponto nodal, a técnica das derivadas foi aplicada para a segunda frequência natural e os resultados obtidos são mostrados nas Figuras 6.8 e 6.9.

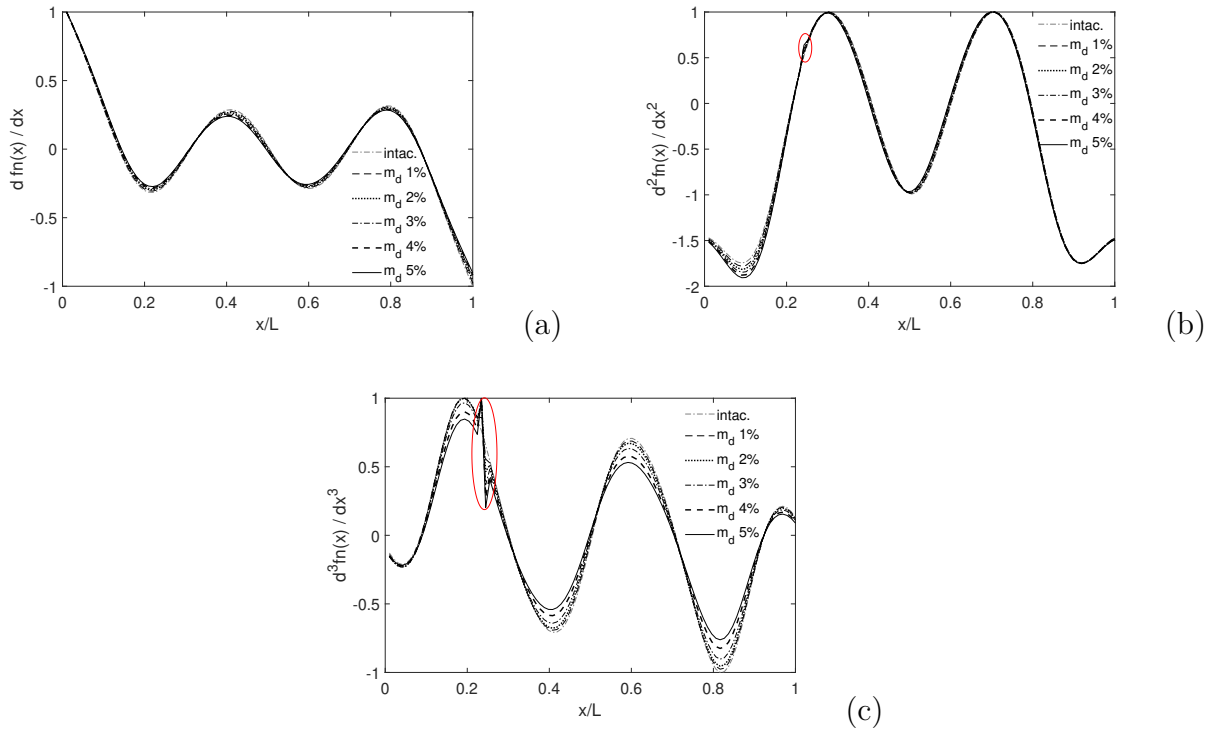


Figura 6.8 – Derivadas da variação de frequência  $f_n$  em função da posição adimensional de  $m_a$  para o caso C3: (a)  $df_n(x)/dx$ , (b)  $d^2f_n(x)/dx^2$  e (c)  $d^3f_n(x)/dx^3$ .

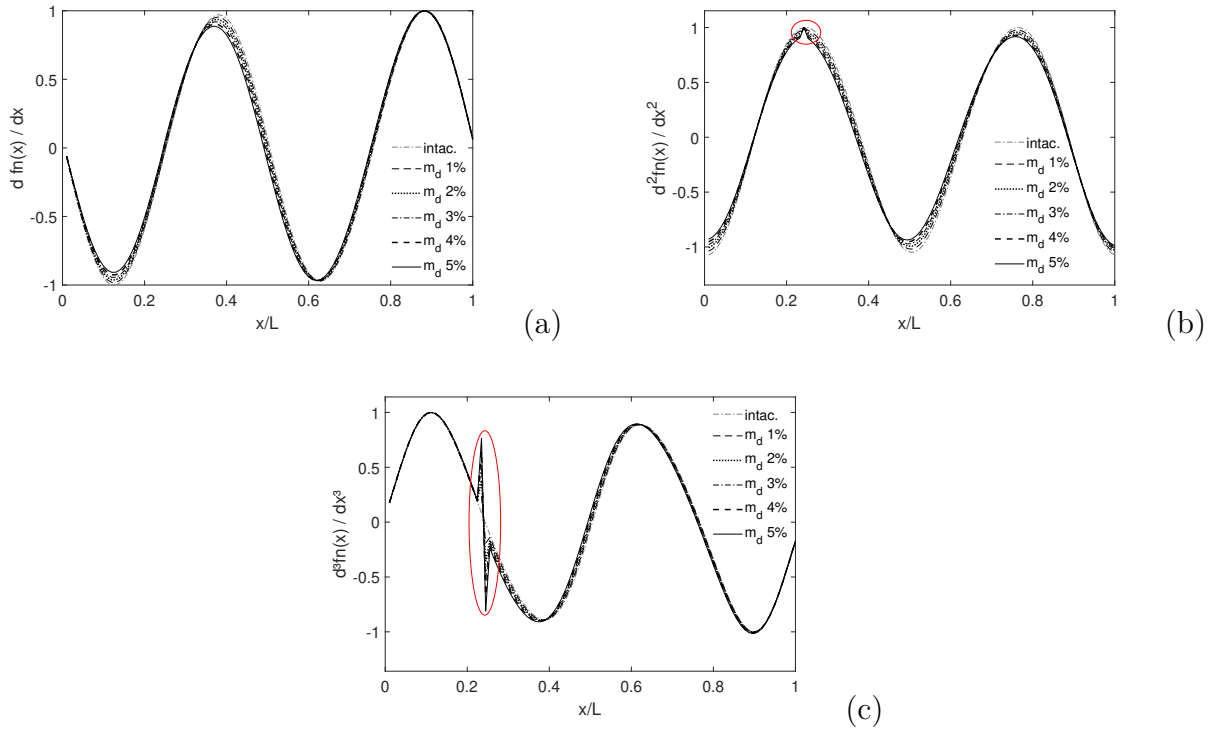


Figura 6.9 – Derivadas da variação de frequência  $f_n$  em função da posição adimensional de  $m_a$  para o caso C4: (a)  $df_n(x)/dx$ , (b)  $d^2f_n(x)/dx^2$  e (c)  $d^3f_n(x)/dx^3$ .

Observa-se, em todos os casos, que a partir da segunda derivada da curva de frequência é possível notar a presença de discontinuidades, referentes ao dano, de forma mais pontual, se tornando uma técnica eficiente no estudo de detecção de danos de vigas nas condições apresentadas.

## 6.2.2 Transformada Discreta de *Wavelet* (TDW)

Além da técnica das derivadas da curva de frequência, foi aplicada a Transformada Discreta de *Wavelet*. Foram utilizadas quatro funções *wavelet* mãe: Daubechies (db5), Coiflets (coif3), Symlets (sym6) e Biortogonal (bior6.8) que segundo Palechor (2013) apresentaram bons resultados obtidos experimentalmente.

### Variação do número de elementos

A viga com descontinuidade de massa foi discretizada em variados números de elementos (10, 50, 100 e 500) a fim de avaliar a quantidade necessária para detectar dano utilizando o MEF (análise de convergência) e, em seguida, foi aplicada a TDW.

Para melhor visualização, foi plotado somente o resultado da TDW para dano de maior intensidade, 5%. Vale salientar que foi possível fazer essa análise aplicando todos os níveis de dano.

As Figuras 6.10 e 6.11 apresentam a análise de convergência dos elementos para as diferentes condições de contorno (L-L e A-A) a partir dos casos C1 e C2.

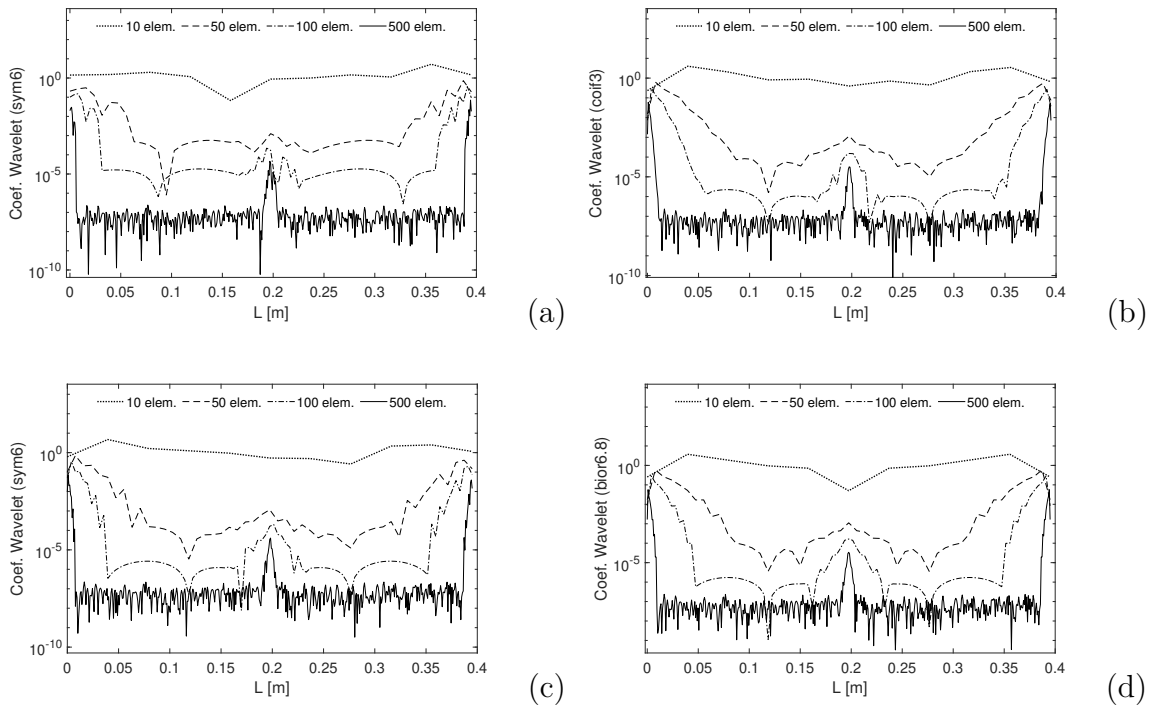


Figura 6.10 – Variação do número de elementos - aplicação da TDW: (a) db5; (b) coif3; (c) sym6; (d) bior6.8 para o caso C1.

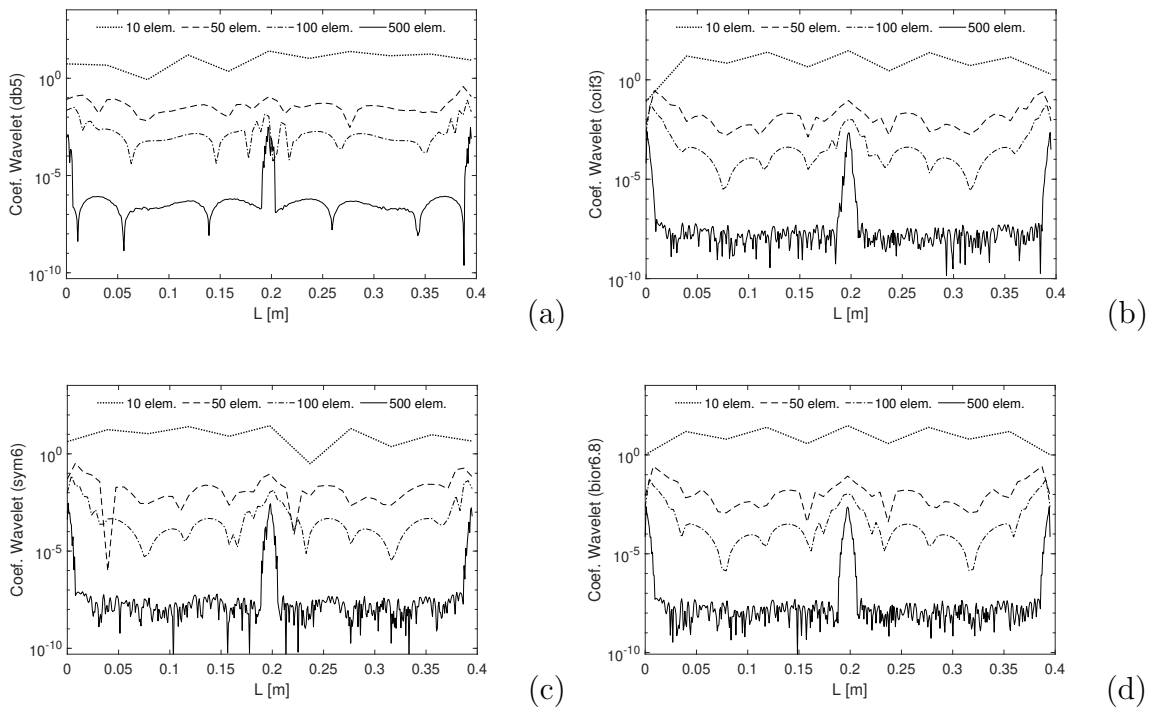


Figura 6.11 – Variação do número de elementos - aplicação da TDW: (a) db5; (b) coif3; (c) sym6; (d) bior6.8 para o caso C2.

É observado que em função da viga ter sido discretizada em 500 elementos os coeficientes de *wavelet* alcançam maiores amplitudes, ou seja, quanto maior o número de elementos a tendência é melhorar a visualização da posição do dano. Portanto, para as demais análises, a viga foi discretizada em 100 elementos visto que é suficiente para detectar a posição do dano assim reduzindo o esforço computacional.

Palechor et al. (2018) percebeu a necessidade de aplicar métodos de interpolação para aumentar o número de dados obtidos na análise experimental, numérica e analítica. A coleta dos dados experimentais é limitada ao número de pontos que podem ser medidos com a instrumentação disponível. Para aplicar a Transformada de *Wavelet*, tornou necessário aumentar os dados discretos, a fim de obter bons resultados na localização do dano. O método de interpolação utilizado foi o *Spline* Cúbica, que de acordo com (Palechor, 2013), apresentou os melhores resultados na identificação de danos em vigas metálicas sob ensaios estáticos e dinâmicos.

## Variação do número de pontos

Foram analisados diferentes números de pontos (10, 20, 50 e 100) a fim de avaliar a quantidade necessária para a aplicação da massa adicional  $m_a$  no estudo de detecção de danos. Para o modelo numérico, correspondem ao número de nós em que  $m_a$  é posicionada. Em seguida, foi feita a interpolação com *Spline* Cúbica e aplicação da Transformada Discreta de *Wavelet*. Os resultados para as duas condições de contorno obtidos são apresentados nas Figuras 6.12 e 6.13.

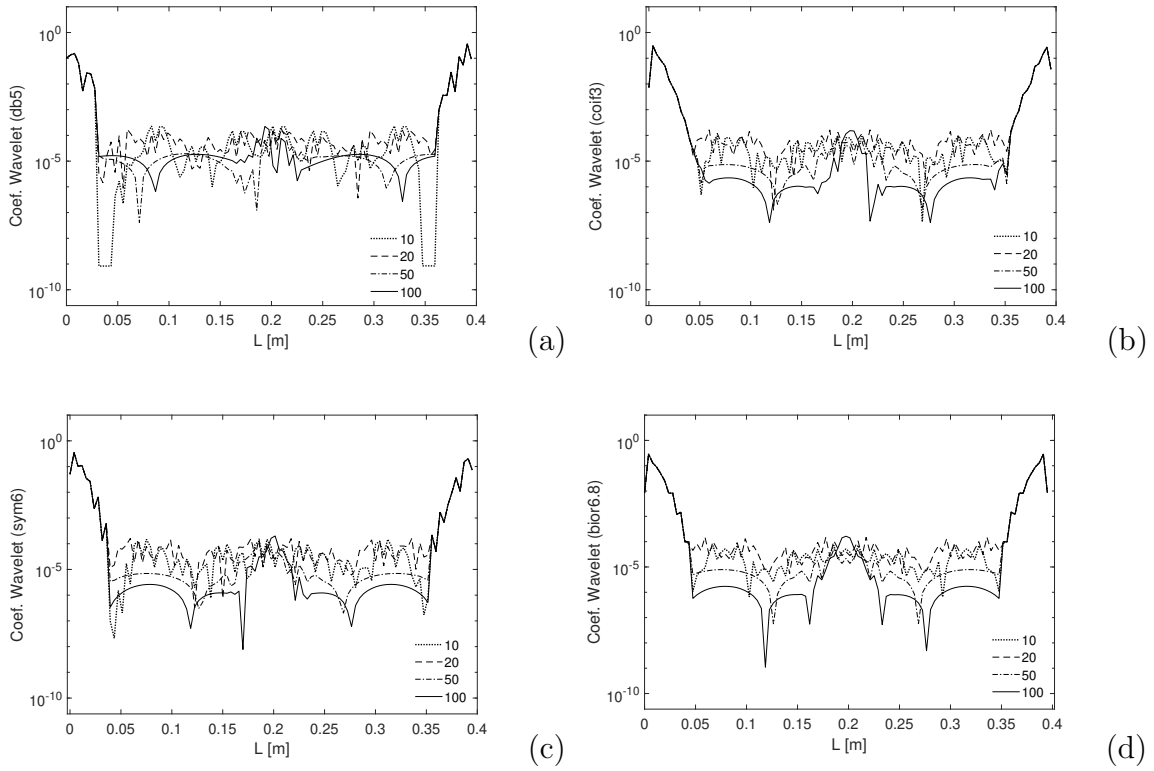


Figura 6.12 – Variação do número de pontos - aplicação da TDW: (a) db5; (b) coif3; (c) sym6; (d) bior6.8 para o caso C1.

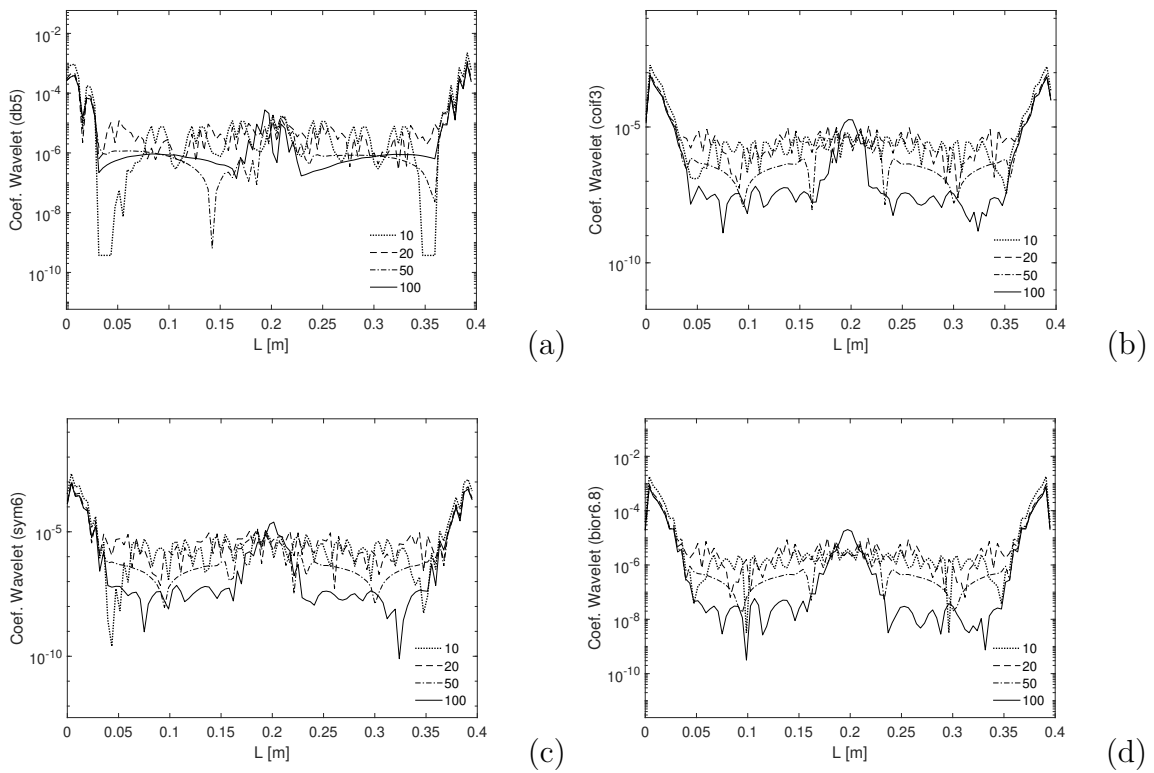


Figura 6.13 – Variação do número de pontos - aplicação da TDW: (a) db5; (b) coif3; (c) sym6; (d) bior6.8 para o caso C2.

Analisando as Figuras 6.12 e 6.13, percebe-se que a partir de 50 pontos de aplicação da  $m_a$  a posição do dano fica mais evidente.

### 6.2.3 SDR - *Signal-to-Damage Ratio*

Como apresentado anteriormente, foram aplicadas 4 diferentes funções: *db5*, *coif3*, *sym6* e *bior6.8*. Com a finalidade de determinar a melhor função *wavelet* para o caso de detecção de danos em viga, foi calculado o SDR - *Signal-to-Damage Ratio*. Os resultados para ambas condições de contorno são apresentados nas Figuras 6.14 e 6.15.

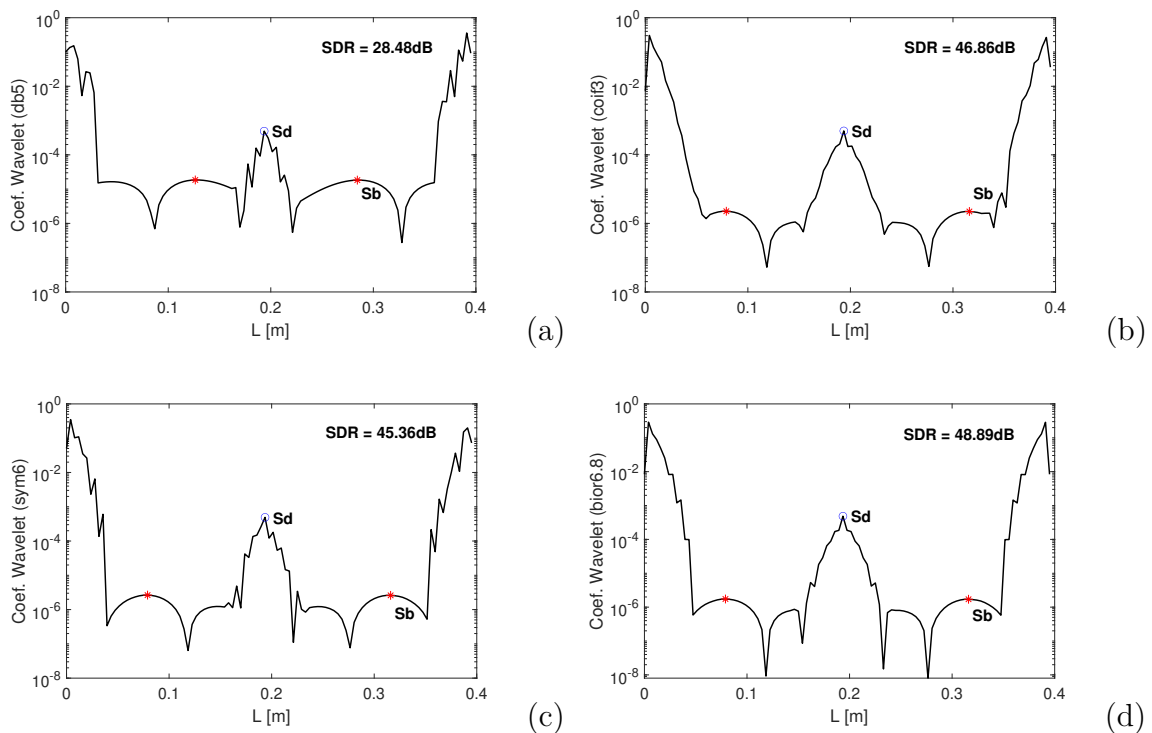


Figura 6.14 – Aplicação da TDW e cálculo do SDR: (a)db5, (b)coif3, (c)sym6, (d)bior6.8 para o caso C1.

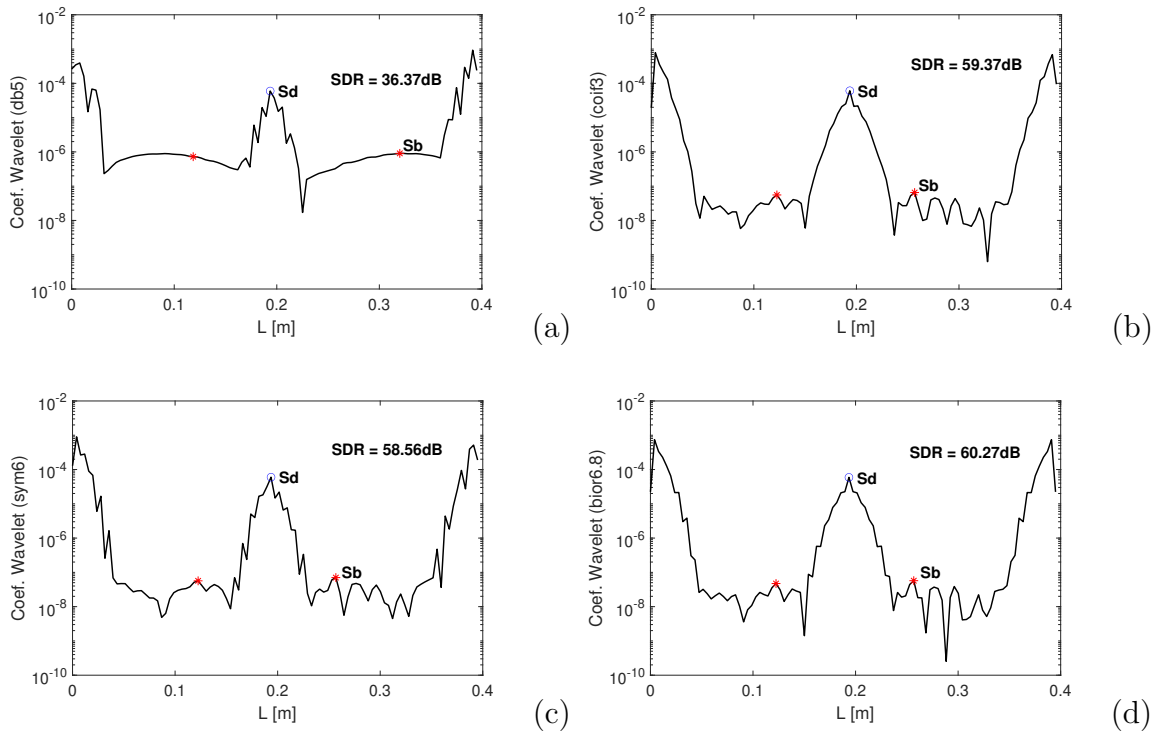


Figura 6.15 – Aplicação da TDW e cálculo do SDR: (a)db5, (b)coif3, (c)sym6, (d)bior6.8 para o caso C2.

Para pontuar a localização do dano, foram desconsiderados os elevados valores dos coeficientes de *wavelets* apresentados nas extremidades da viga devido às suas descontinuidades geométricas. A partir dos resultados apresentados nas Figuras 6.14 e 6.15, a função bior6.8 apresentou maior valor de SDR para as duas condições de contorno exploradas.

#### 6.2.4 Relação massa móvel $m_a$ e massa de dano $m_d$

Posteriormente, a função bior6.8 foi utilizada para o estudo da relação entre a massa adicional  $m_a$  e a massa referente ao dano  $m_d$ . As Figuras 6.16 e 6.17 apresentam situações de 1, 5 e 10% de dano com diferentes níveis de massa móvel adicional  $m_a$ .

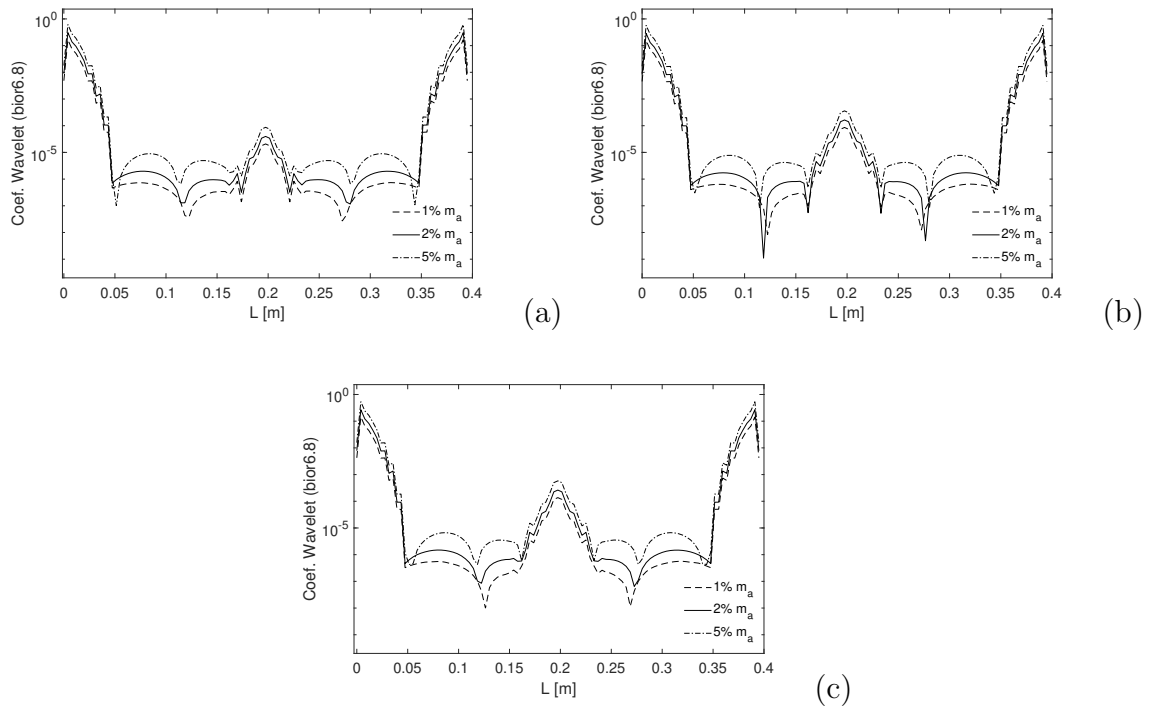


Figura 6.16 – Relação das massas adicionais para  $m_d$ : (a)1%, (b)5% e (c)10% para o caso C1.

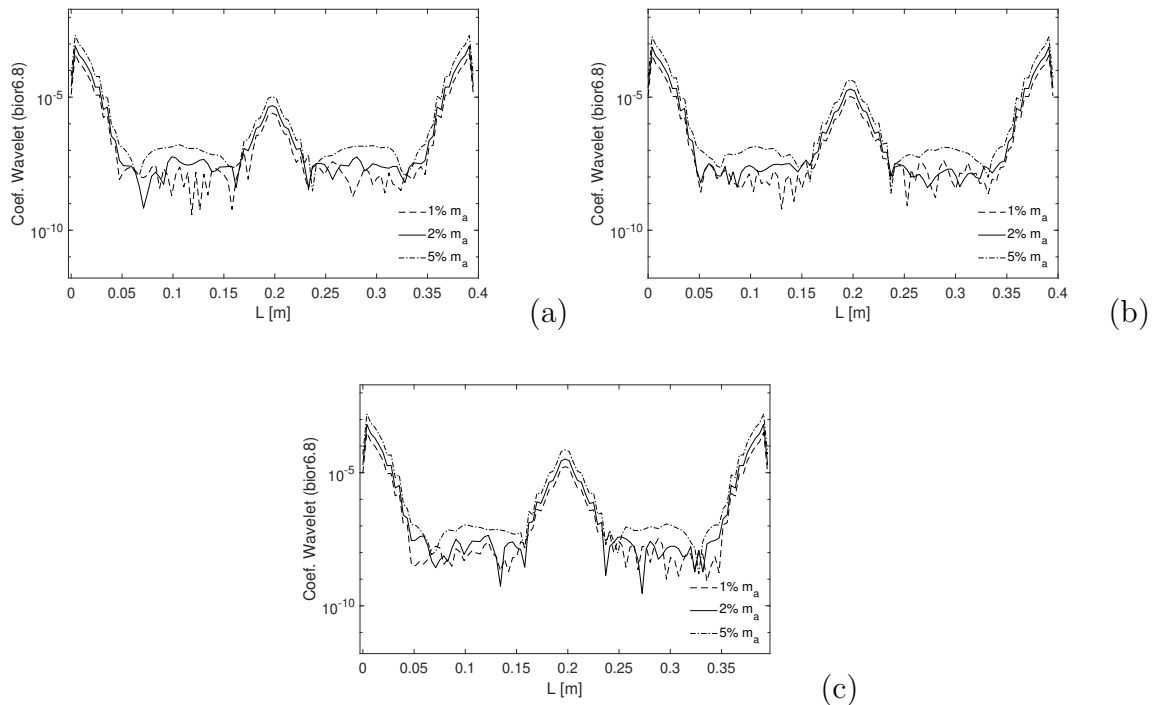


Figura 6.17 – Relação das massas adicionais para  $m_d$ : (a)1%, (b)5% e (c)10% para o caso C2.

É notado, a partir das Figuras 6.16 e 6.17, que mesmo com 1% da massa total da estrutura, a fim de simular o dano, a técnica proposta torna aplicável para a localização



da região danificada da viga e, ainda, percebe-se que os coeficientes de *wavelet* apresentam maiores amplitudes quando maior é a magnitude do dano.

### 6.2.5 Mapa de Resposta

A adimensionalização da viga de Timoshenko (Capítulo 3) resalta a existência de alguns números adimensionais: razão de massa móvel adicional  $m_a$ , razão de massa de dano  $m_d$  e a posição do dano  $x/L$ .

Foi investigada a relação entre essas variáveis e o valor de SDR. As Figuras 6.18 e 6.19 apresentam os resultados referentes a primeira frequência natural da viga na condição livre-livre (L-L) e apoiada-apoiada (A-A). Foi considerada somente a metade do comprimento devido a simetria do elemento de viga.

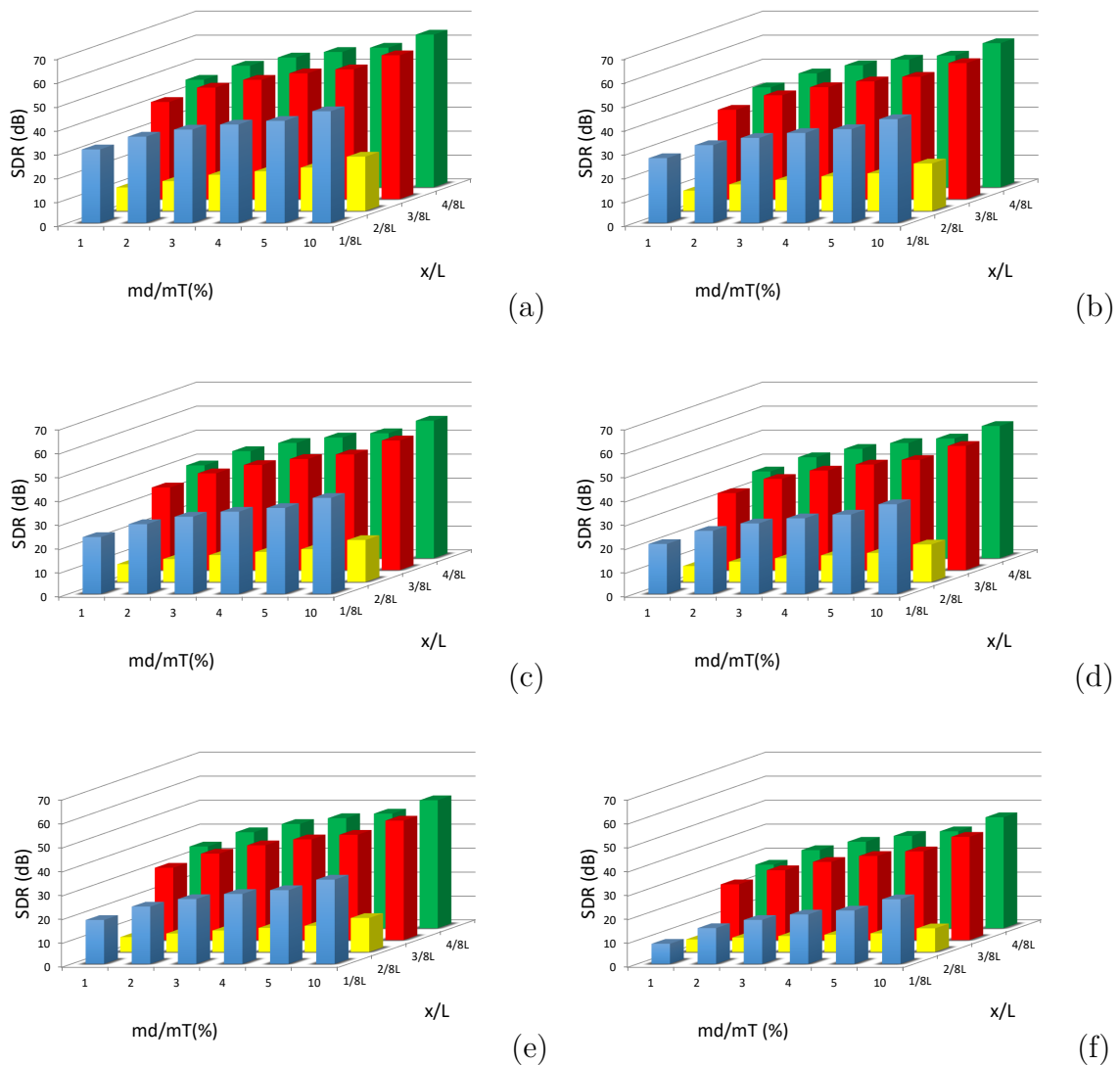


Figura 6.18 – Mapa de resposta: primeira frequência natural da viga quando sujeita a  $m_a$  na condição L-L: (a)1%, (b)2%, (c)3%, (d)4%, (e)5% e (f)10%.

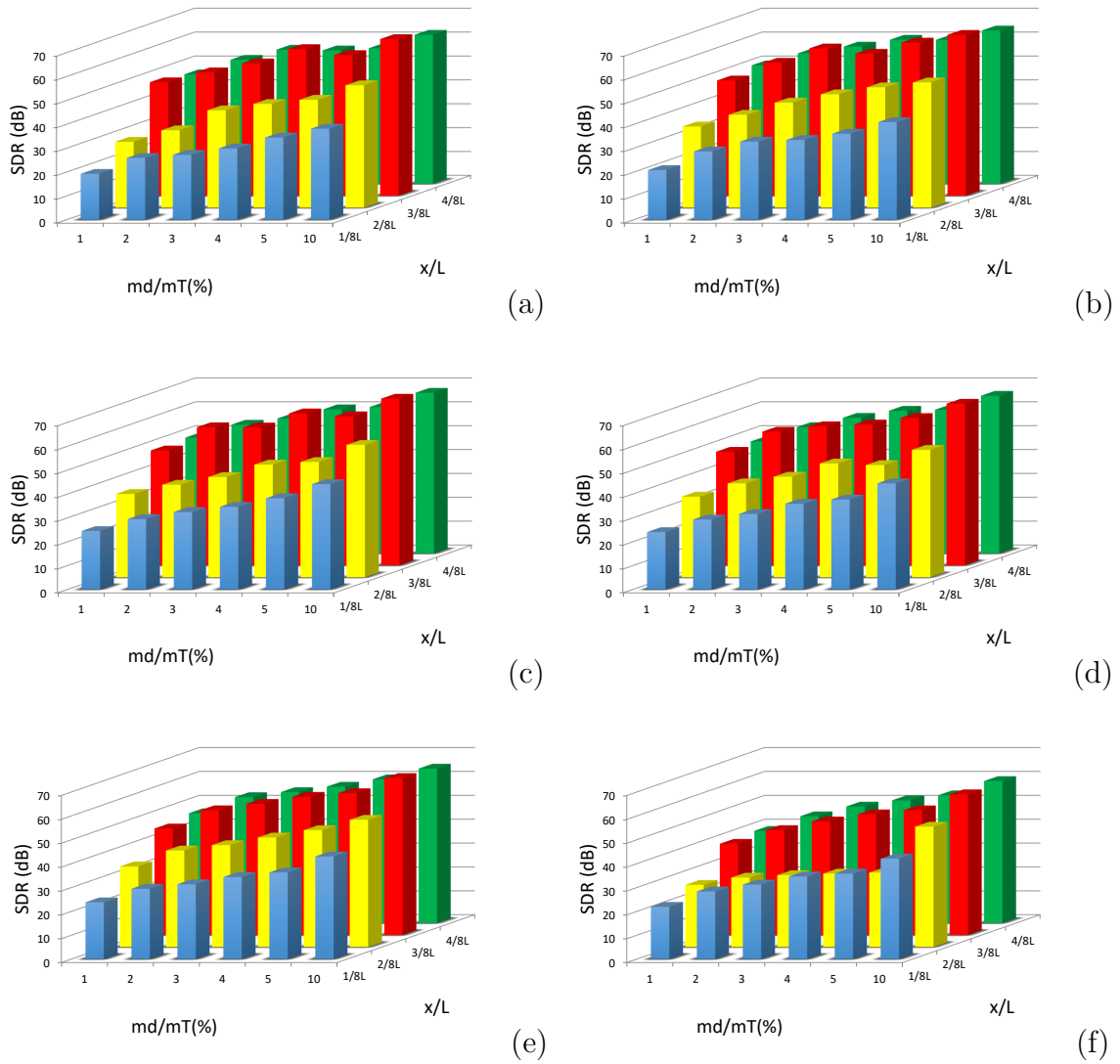


Figura 6.19 – Mapa de resposta: primeira frequência natural da viga quando sujeita a  $m_a$  na condição A-A: (a)1%, (b)2%, (c)3%, (d)4%, (e)5% e (f)10%.

As Fig. 6.18 e 6.19 mostram elevados SDRs para razões de massa móvel  $m_a/m_T$ . Logo, a viga é sensível a sua aplicação. Além disso, foi percebido que baixa magnitude de  $m_a$  é suficiente para a análise de danos. Quando aplicada  $m_a$  igual a 1% da massa da viga, foram apresentados bons resultados de SDR.

A Fig. 6.18 mostra que quanto mais próximo de um ponto nodal o dano estiver localizado, menores são os valores do SDR.

Dessa forma, a fim de melhor compreender o problema, foram criados o mapa de resposta para a segunda frequência natural da viga para ambas condições de contorno. Os resultados obtidos são apresentados nas Fig. 6.20 e 6.21.

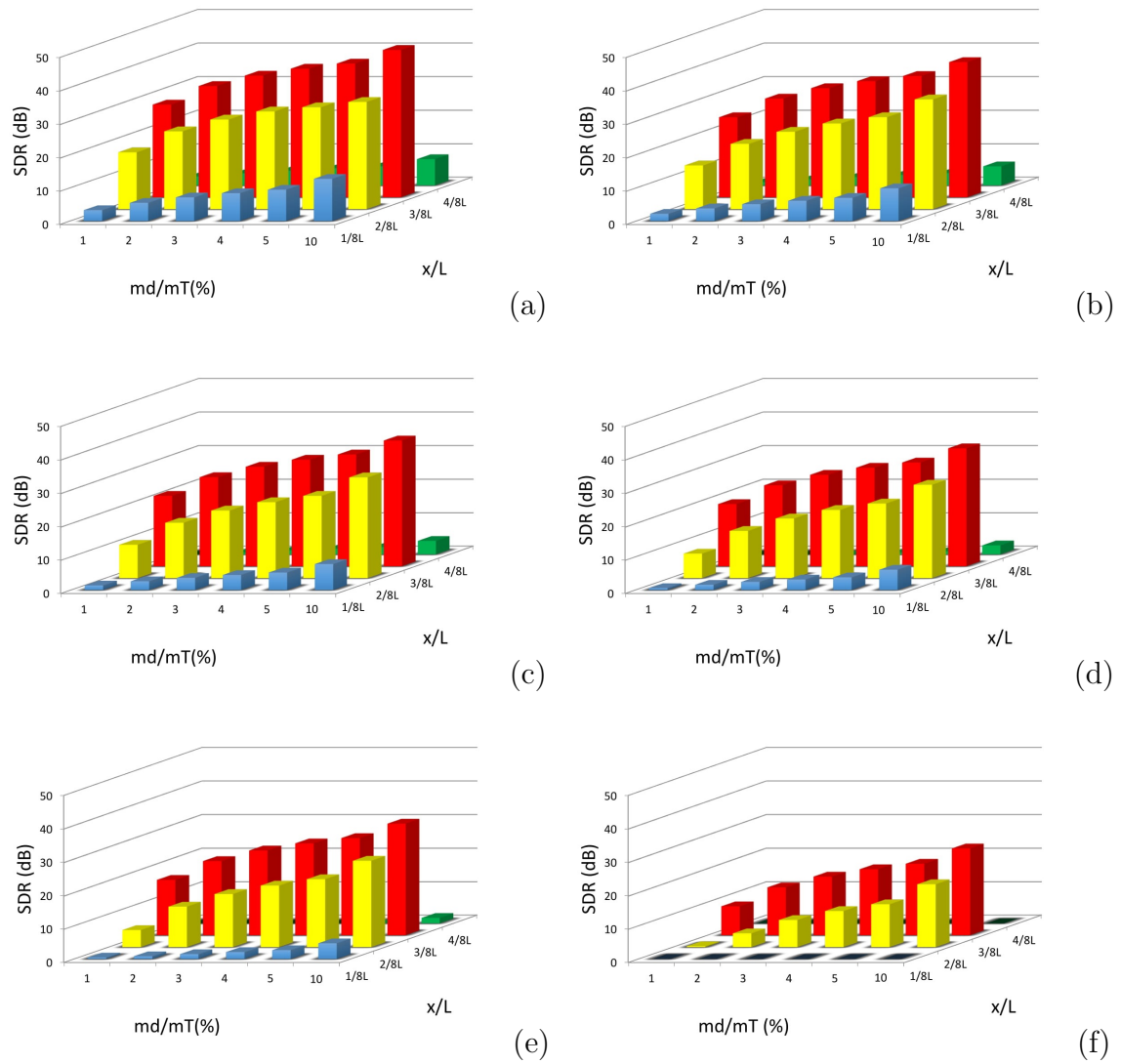


Figura 6.20 – Mapa de resposta: segunda frequência natural da viga na condição L-L quando sujeita a  $m_a$ : (a)1%, (b)2%, (c)3%, (d)4%, (e)5% e (f)10%.

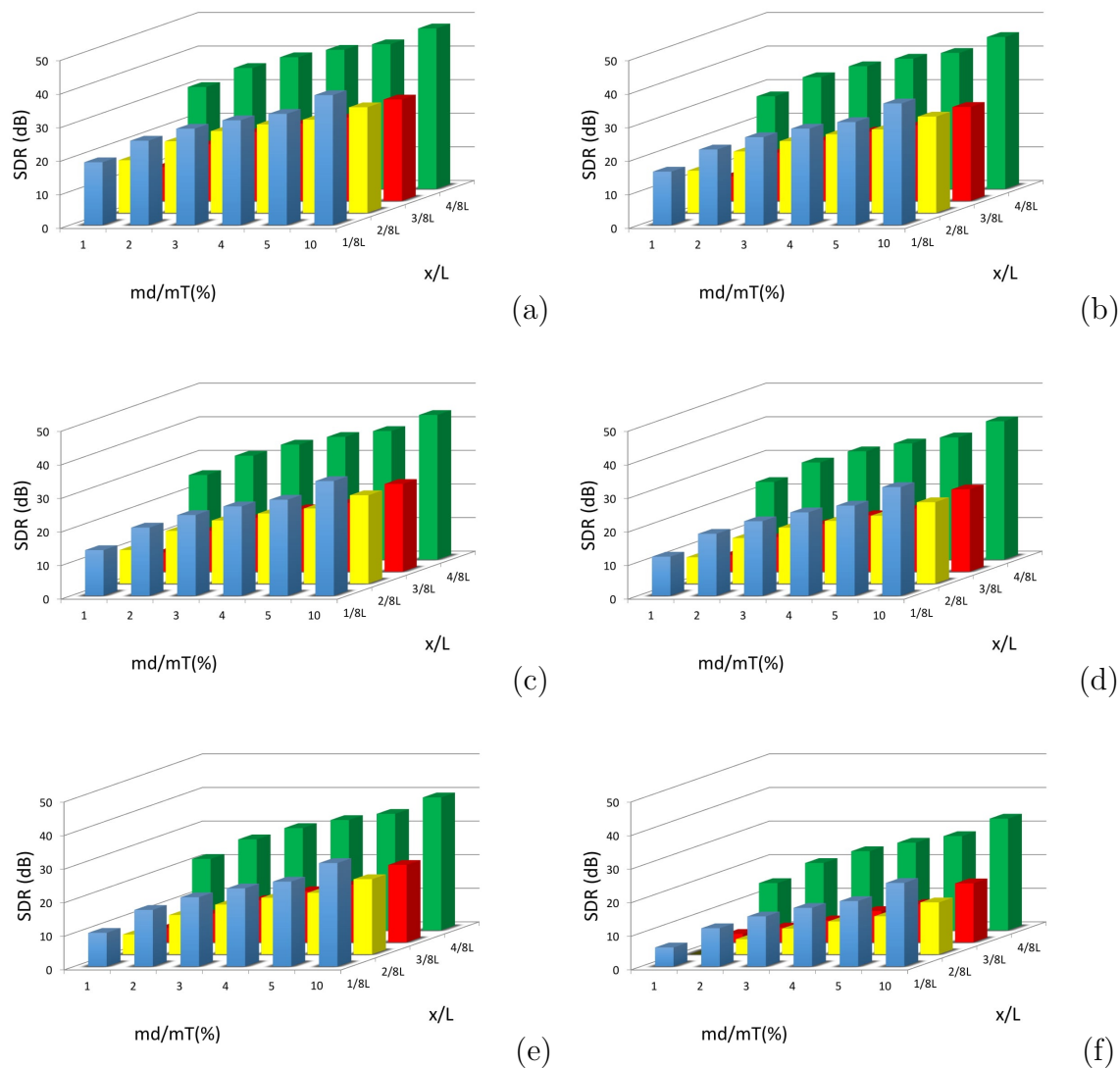


Figura 6.21 – Mapa de resposta: segunda frequência natural da viga na condição A-A quando sujeita a  $m_a$ : (a)1%, (b)2%, (c)3%, (d)4%, (e)5% e (f)10%.

A Fig. 6.20 realça a importância da forma modal no presente estudo. Nas posições 1/8L e 4/8L (pontos nodais), os valores de SDR são inferiores. Assim, é notado que o SDR atinge um grau de saturação conforme o aumento da magnitude da massa móvel adicional  $m_a$ , em outras palavras, aumenta a incerteza com massas maiores tornando-se menos sensível.

A partir dos mapas de respostas foi possível analisar a influência da magnitude das massas ( $m_a$  e  $m_d$ ) e da posição do dano para a aplicação da técnica de *frequency-shift* para estudo de detecção de danos em vigas na condições L-L e A-A.

De forma geral, as duas técnicas de de detecção de danos aqui apresentadas (derivada da *frequency-shift* e a TDW) possibilitaram a localização do dano na viga somente com sua resposta danificada de forma econômica.

## 6.2.6 Influência dos Modos de Vibração

Como observado, na Seção 6.2.1, os modos de vibrar da estrutura influenciam nos resultados das técnicas de detecção de danos propostas no presente trabalho. Nos casos C3 e C4, não foi possível perceber variações na curva de *frequency-shift* da primeira frequência natural, como mostrado nas Figuras 6.4(a) e 6.5(a).

A Figura 6.22 mostra os três primeiros modos de vibrar da viga e a aplicação da TDW na *frequency-shift* referente as três primeiras frequências naturais do terceiro caso (C3) com uma descontinuidade de massa  $m_d$  de 5%. Nos gráficos, estão em destaque (linhas vermelhas) a posição dos pontos nodais da viga.

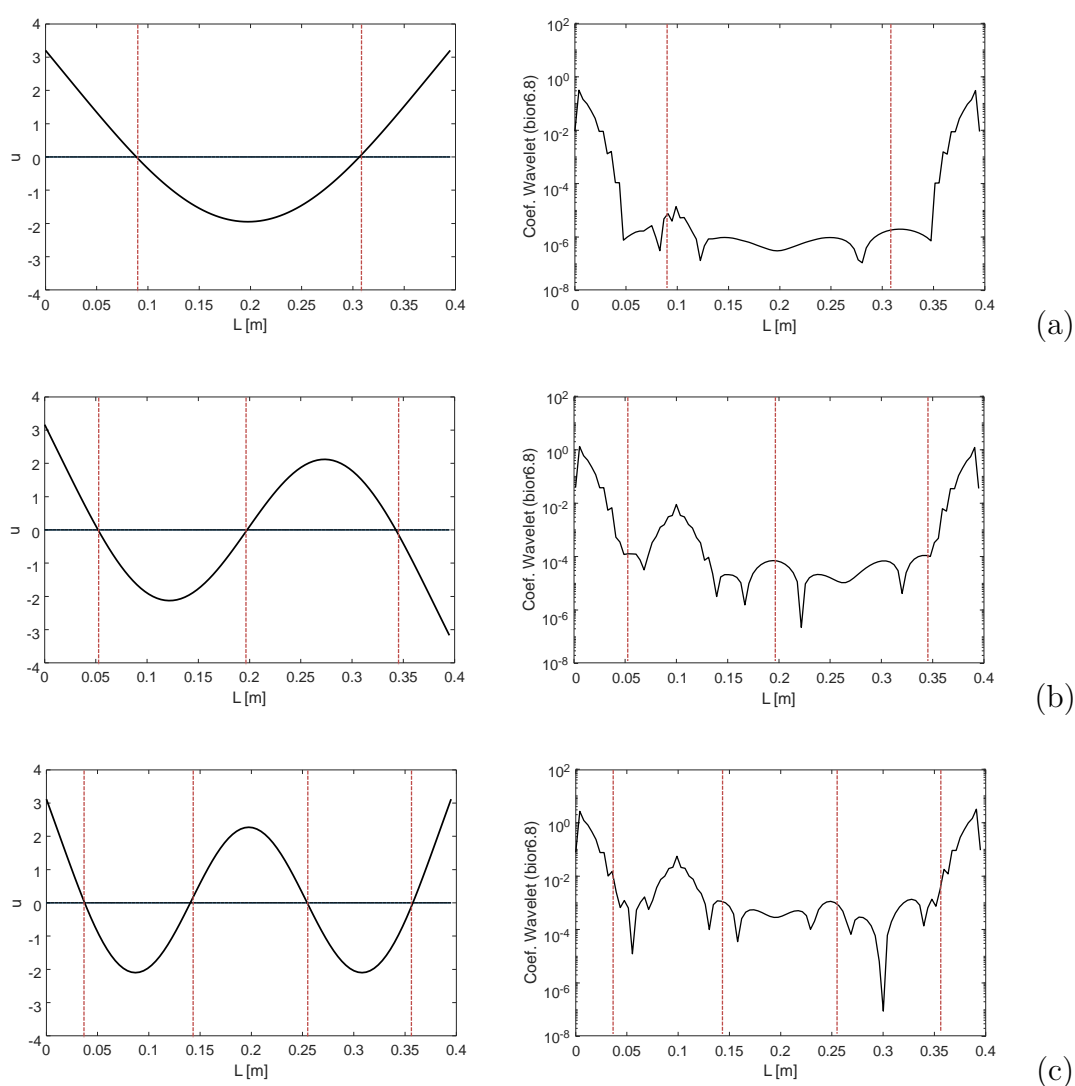


Figura 6.22 – Aplicação da TDW para (a) modo 1, (b) modo 2 e (c) modo 3 para o caso C3.

É percebido uma suave variação nos valores dos coeficientes de *wavelet* na posição do dano, como mostra a Fig. 6.22 (a). Porém, as descontinuidades não são muito aparentes e isso se dá devido a deformada da viga.

Vale salientar alguns conceitos de deformações à flexão de viga para melhor analisar os casos C3 e C4, onde não foi possível detectar a posição do dano a partir da frequência fundamental. A partir da teoria de linha elástica, entende-se que a forma modal tem influência sobre a apresentação do dano.

### 6.3 Dano em Rigidez

O dano foi modelado como uma mola rotacional, como mostra a Figura 6.23.

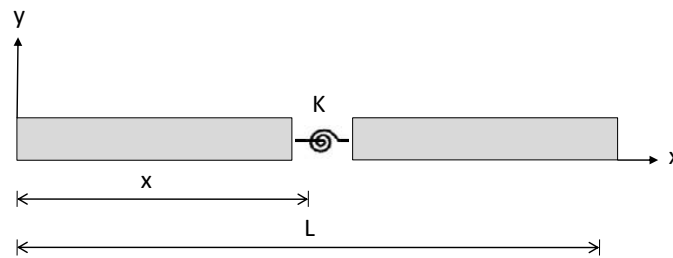


Figura 6.23 – Viga com dano em rigidez - mola rotacional.

#### 6.3.1 *Frequency-shift* e Derivadas da *Frequency-shift*

A seguir, é apresentada a análise do C1, em que a relação de profundidade da trica adimensional  $\eta$  foi variada (0.00, 0.04, 0.08, 0.10 e 0.20).

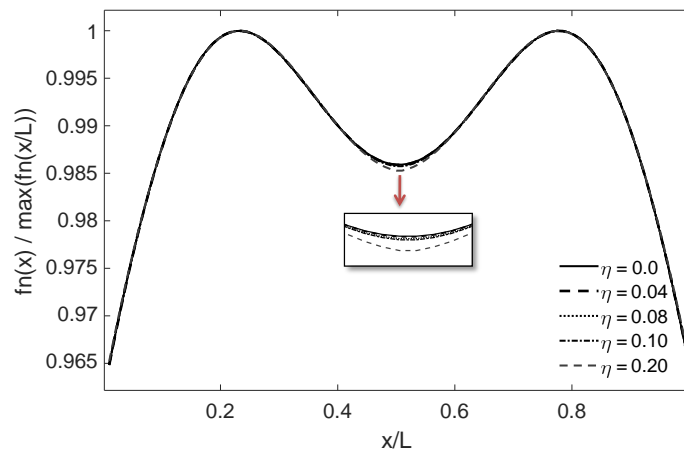


Figura 6.24 – Aplicação da técnica *frequency-shift* para C1:  $fn_1$  dano como uma mola para  $\eta = 0.00, 0.04, 0.08, 0.10$  e  $0.20$ .

A partir da Fig. 6.24, é observada uma variação nas frequências naturais na região do dano ( $L/2$ ). Além disso, é notado que quanto maior é a profundidade do dano a variação na posição do dano é mais perceptível.

Para melhor avaliar a localização do dano, foi aplicada a técnica das derivadas da *frequency-shift*. Na Figura 6.25, são apresentados os resultados obtidos para  $\eta = 0.1$ .

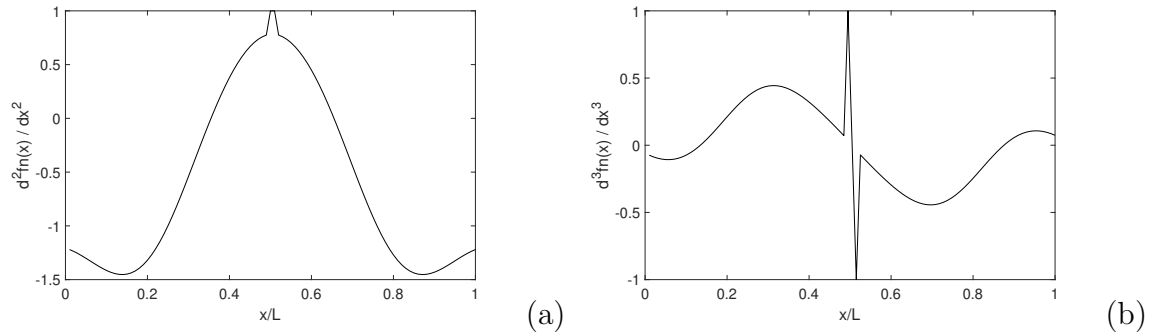


Figura 6.25 – Primeira frequência para  $\eta = 0.1$  (C1): (a) segunda derivada e (b) terceira derivada.

A técnica das derivadas da curva de frequência se mostrou eficaz e eficiente para o presente caso, uma vez que possibilitou a melhor visualização da posição do dano.

### 6.3.2 TDW e SDR

Foi aplicada a TDW, função *bior6.8*, na *frequency-shift* e, em seguida, foram calculados os valores do SDR. Os resultados obtidos são apresentados na Fig. 6.26.

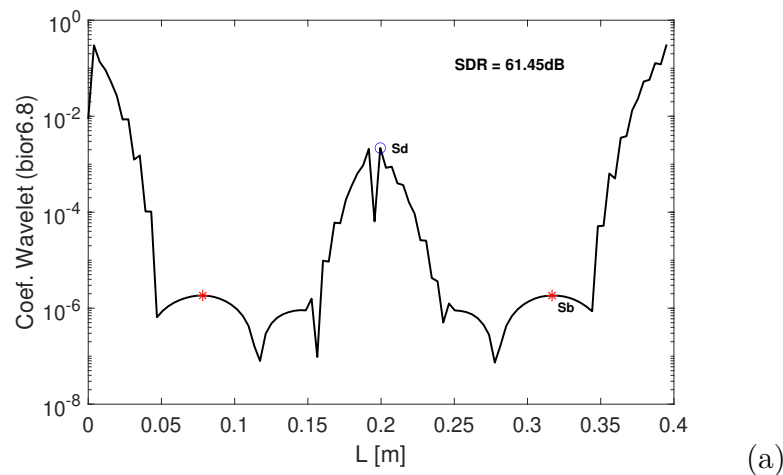


Figura 6.26 – Aplicação da TDW para a primeira frequência (C1): (a)  $\eta = 0.1$ .

É notado que os coeficientes de *wavelet* apresentam elevados valores na região do dano. Ainda, os valores mostram que quanto maior a profundidade do dano maior é o SDR.

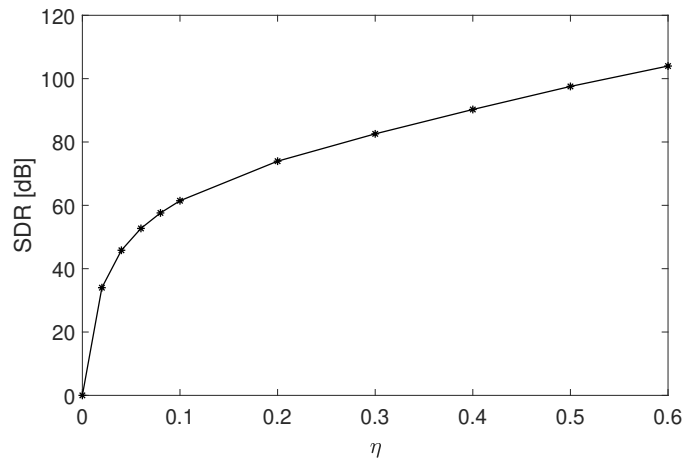


Figura 6.27 – Influência da profundidade do dano  $\eta$  no cálculo do SDR para C1.

É observado que mesmo para pequenos valores de  $\eta$ , os valores de SDR são altos. Logo, na seção posterior, é apresentada um estudo comparativo da descontinuidade por massa  $\mu$  e dano de rigidez  $\eta$ .

### 6.3.3 Comparação entre $\eta$ e $\mu$

A Fig. 6.28 apresenta os gráficos da relação da profundidade do dano  $\eta$  e a descontinuidade de massa  $\mu$  e os respectivos valores calculados de SDR.

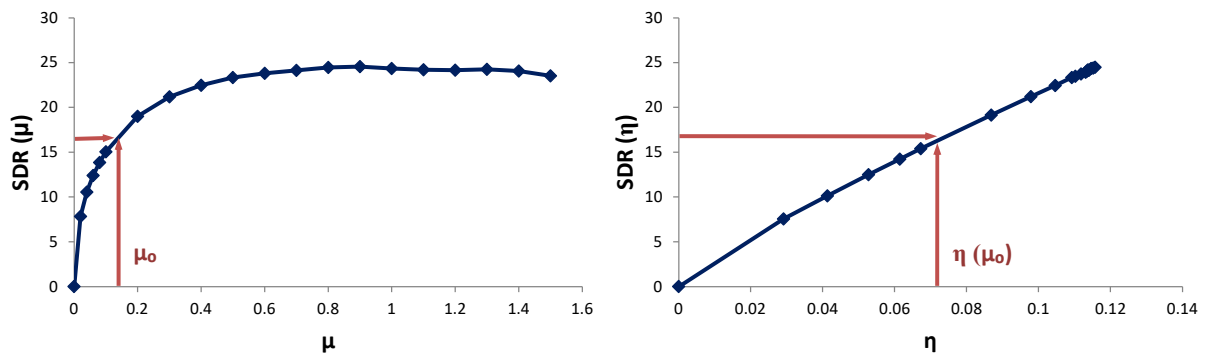


Figura 6.28 – Relação do SDR com a profundidade do dano  $\eta$  e descontinuidade de massa  $\mu$ .

A Fig. 6.28 mostra que para valores de  $\mu$  superiores a 0.5, não há variação significativa do SDR. A seguir, é apresentada uma tabela de valores resultantes de interpolação linear dos dados obtidos inicialmente.



Tabela 3 – SDR em dB e dimensionais referentes a  $\mu$  e  $\eta$ .

$\mu$	SDR_dB ( $\mu$ )	SDR ( $\mu$ )	$\eta$	SDR_dB ( $\eta$ )	SDR ( $\eta$ )
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,02	41,14	7,822467	0,029146	40,40	7,537891
0,04	47,10	10,53813	0,041322	46,32	10,13266
0,06	50,33	12,38517	0,052745	50,50	12,4914
0,08	52,57	13,85297	0,061445	53,10	14,22492
0,10	54,22	15,04431	0,067287	54,67	15,38449
0,20	58,88	18,99166	0,086844	59,03	19,1324
0,30	61,06	21,17879	0,097893	61,08	21,19881
0,40	62,24	22,46593	0,104645	62,21	22,43439
0,50	62,99	23,3244	0,109229	62,99	23,31874
0,60	63,40	23,80748	0,111808	63,33	23,72683
0,70	63,66	24,11900	0,113471	63,59	24,03872
0,80	63,93	24,44682	0,115221	63,88	24,38198
0,90	64,01	24,5448	0,115744	63,96	24,4839
1,00	63,84	24,33705	0,114635	63,84	24,33446
1,10	63,73	24,20357	0,113923	63,67	24,12794
1,20	63,69	24,15521	0,113664	63,70	24,16186
1,30	63,76	24,2399	0,114117	63,70	24,1722
1,40	63,60	24,04675	0,113085	63,48	23,90476
1,50	63,15	23,51174	0,110229	63,10	23,45884

É notado que a partir de 10% de dano de rigidez não é possível substituir o dano por descontinuidade de massa, ou seja, existem limitações para substituir um dano real.

Foi utilizada a ferramenta de regressão a fim de prever os valores futuros de uma série a partir de uma equação que correlaciona duas variáveis, razão da profundidade de dano ( $\eta = d/h$ ) e a razão de massa ( $\mu = m_d/m_t$ ), conforme apresenta a Figura 6.29.

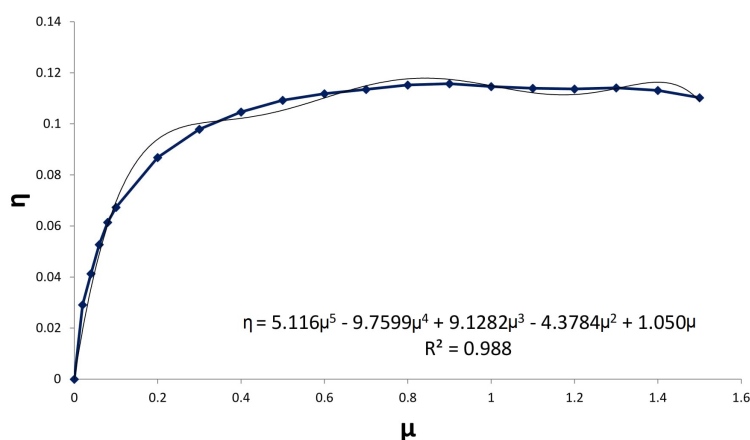


Figura 6.29 – Correlação da descontinuidade de massa  $\mu$  e dano em rigidez  $\eta$ .

Na Figura 6.29, é observada uma regressão polinomial de grau 5, com fator  $R^2$  maior do que 0,9. Assim, a partir da equação apresentada, prever resultados muito além daqueles que foram utilizados para obter os parâmetros de regressão.

Em adição, foi realizada uma comparação entre uma simulação de verificação entre  $\mu$  adotado e  $\eta$  calculado, a partir da equação mostrada na Fig. 6.29, e os resultados obtidos são apresentados na Fig. 6.30.

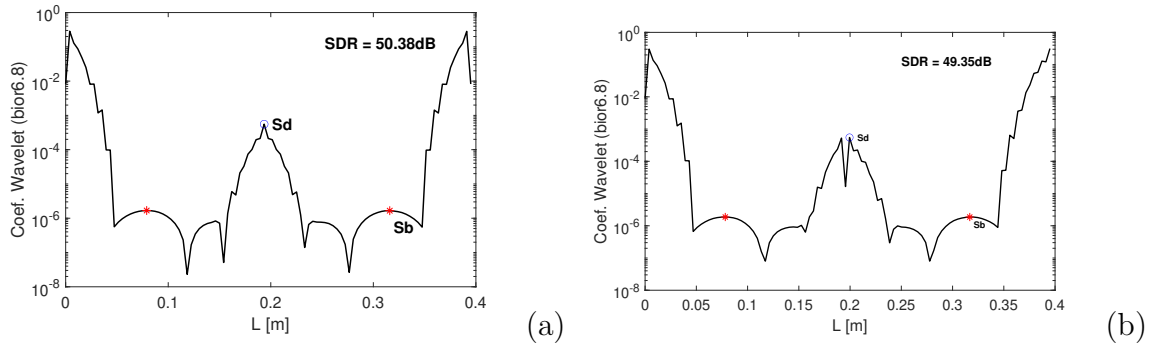


Figura 6.30 – Comparação do índice SDR para o caso C1 considerando: (a)  $\mu = 0.06$  e (b)  $\eta_{calc} = 0.049087$ .

Os valores do índice SDR obtidos apresentaram uma diferença de aproximadamente 1dB. Logo, é percebido que a função  $\eta = f(\mu)$  se torna útil para pequenos danos neste tipo de aplicação. Para pesquisas futuras, pode-se utilizar essa correlação proposta como uma referência inicial para definição da massa adicional a ser utilizada e a profundidade do dano.

#### 6.3.4 Efeito do Ruído

Levando em consideração que o ruído experimental pode corromper os dados de resposta, afetando os valores das frequências naturais, foi aplicado ruído na resposta da viga danificada. Para a inclusão do ruído no sinal, foi aplicada uma força unitária nos graus de liberdade do primeiro nó e, a partir do método direto com base na relação da matriz de rigidez dinâmica e o vetor de força, foram obtidas as FRFs da viga para cada posição da massa móvel adicional  $m_a$ .

Em seguida, foram acrescentados no sinal números aleatórios a fim de aproximar sequências de ruído utilizando a função *rand* do MATLAB. Foram capturados todos os primeiros picos das FRFs que correspondem a primeira frequência da viga. Por fim, foi plotado o gráfico da variação da primeira frequência natural em relação a posição da  $m_a$ .

A Figura 6.31 mostra a curva da *frequency-shift*, para o caso C1, variando o parâmetro  $\eta$  de 0 a 0.3, quando aplicado um ruído de 1, 5 e 10%.

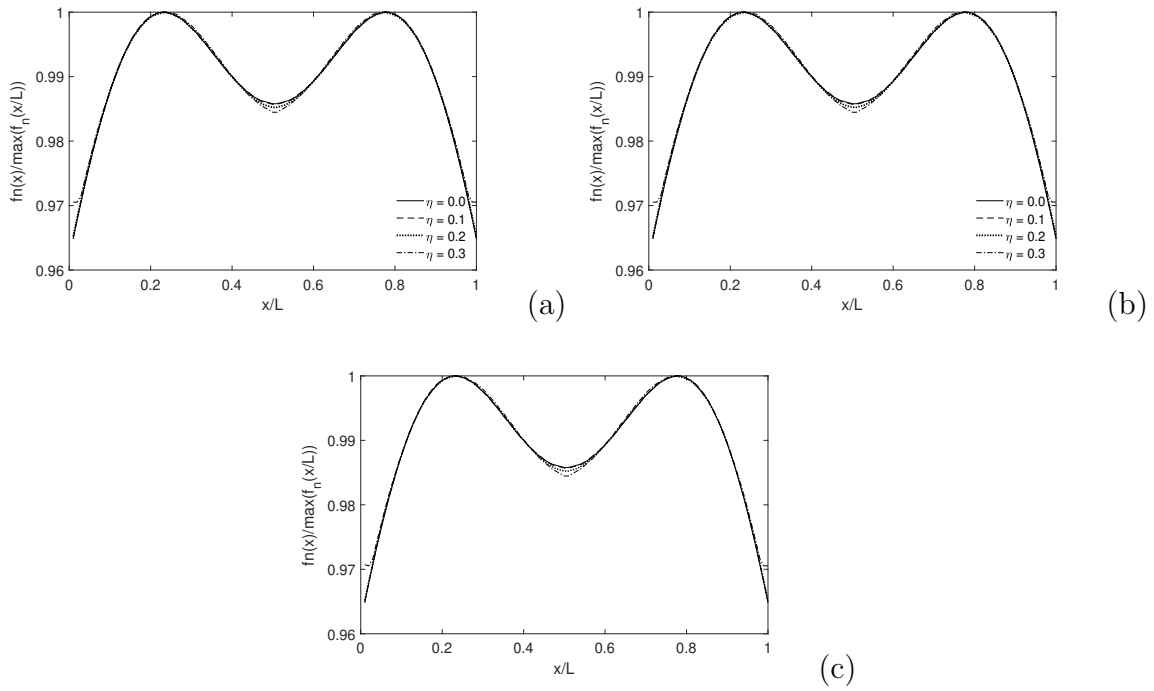


Figura 6.31 – Variação da primeira frequência natural de viga L-L dano localizado no meio do vão,  $\eta$  variando de 0 a 0.3, com ruído (a) 1%, (b) 5% e (c) 10%.

É percebido, a partir dos resultados apresentados, que mesmo considerando 10% de ruído no sinal, é notória a variação nas frequências naturais da viga na região de dano. Em seguida, foram aplicadas as técnicas de derivadas da curva *frequency-shift* e TDW sendo os resultados obtidos mostrados nas Figuras 6.32 e 6.33.

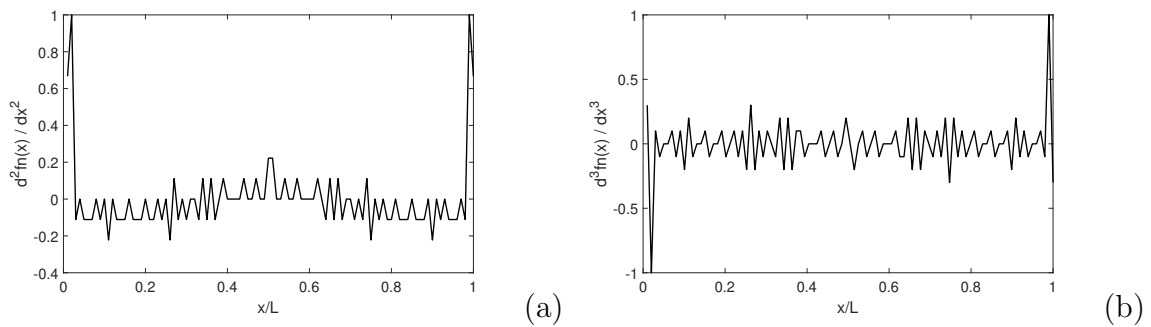


Figura 6.32 – Derivadas da curva *frequency-shift* em função da posição adimensional para o caso C1,  $\eta$  igual a 0.3, com 1% de ruído: (a)  $d^2 f_n(x)/dx^2$  e (b)  $d^3 f_n(x)/dx^3$ .

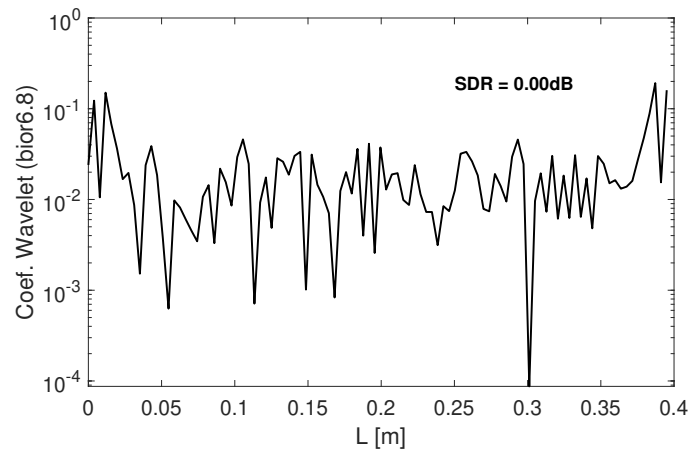


Figura 6.33 – Aplicação da TDW e cálculo do SDR para o caso C1,  $\eta$  igual a 0.3, com 1% de ruído.

Visto que os resultados obtidos não foram conclusivos, é sugerida uma análise mais detalhada da influência do ruído para trabalhos futuros.

## 7 Conclusões

Este trabalho apresentou a investigação do comportamento dinâmico de vigas de Timoshenko danificadas. Foi analisada a variação das frequências naturais da viga (*frequency-shift*) quando sujeita a aplicação de uma massa adicional ao longo de sua extensão e foram aplicadas duas técnicas de detecção do dano: a TDW e as derivadas da *frequency-shift*. Após a detecção do dano, é proposto o índice SDR a fim de avaliar o nível do dano. Foi modelada uma descontinuidade por massa e, ainda, dano por rigidez a partir de uma mola rotacional, visto que o dano é caracterizado como qualquer variação de massa ou rigidez da estrutura. Foram consideradas as condições de contorno Livre-Livre e Apoiada-Apoiada e o dano foi posicionado em  $L/2$  e  $L/4$  da viga.

Algumas das contribuições deste trabalho são: a possibilidade de detectar danos somente com a resposta danificada, dispensando a necessidade da resposta intacta; a proposta do índice SDR como ferramenta para análise do nível de dano; a correlação entre a profundidade de dano e o acréscimo de massa com efeitos equivalentes.

Ao analisar as curvas *frequency-shift*, foram observadas variações nas frequências naturais quando a massa adicional é posicionada na região do dano. Dessa forma, percebe-se que as frequências naturais são sensíveis a aplicação de uma massa ao longo do comprimento da viga. Em adição, foi notada a influência da forma de vibrar da estrutura, uma vez que a curva da frequência natural sofre menores variações quando o dano está localizado em um ponto nodal. Logo, as descontinuidades não são muito aparentes e isso se dá devido a deformada da viga.

Quando gerada as derivadas das curvas *frequency-shift*, foi observado em todos os casos que a partir da segunda derivada da curva de frequência é possível notar a presença de descontinuidades, referentes ao dano, de forma mais pontual, se tornando uma técnica eficiente no estudo de detecção de danos de vigas nas condições apresentadas.

Para a aplicação da TDW funções mÃes escolhidas foram db5, coif3, sym6 e bior6.8. A viga foi discretizada em diferentes nÃumeros de elementos a fim de realizar uma anÃlise de convergÃncia e foi notado que quanto maior o nÃumero de elementos a tendÃncia Ã melhorar a visualizaÃÃo da posiÃÃo do dano.

AlÃm disso, o nÃumero de pontos de aplicaÃÃo da massa adicional necessÃrios para a detecÃÃo de danos foi analisado, considerando que em ensaios experimentais o nÃumero de

pontos que podem ser medidos é limitado em função da instrumentação disponível. Foram avaliados diferentes números de pontos e uma interpolação com *spline* cúbica foi realizada.

O índice SDR foi calculado utilizando as quatro funções *wavelet* citadas anteriormente e a bior6.8 apresentou melhores valores para as duas condições de contorno aplicadas.

Foi realizada a análise da massa móvel adicional  $m_a$  e a descontinuidade de massa  $m_d$ . Foi notado que mesmo com  $m_d$  igual a 1% da massa total da viga, a técnica TDW é aplicável para detecção do dano. Porém, foi observado que os coeficientes de *wavelet* apresentam maiores amplitudes quando maior é a magnitude do dano, ou seja, melhores são os valores do índice SDR.

A partir da adimensionalização da viga, foram observados os parâmetros que influenciam no comportamento da viga, sendo eles, a massa móvel adicional  $m_a$ , a intensidade da descontinuidade de massa  $m_d$  e a posição do dano  $L_d/L$ . Logo, foram feitos alguns mapas de resposta avaliando esses parâmetros em relação ao índice SDR. A partir dos mapas, foi notada a sensibilidade da viga à aplicação de  $m_a$  e, ainda, deu para perceber que mesmo com baixa magnitude de  $m_a$  é possível localizar a posição do dano. Além disso, foi mostrado que quanto mais próximo de um ponto nodal o dano estiver localizado, menores são os valores do SDR, prejudicando a visualização da região danificada.

Para o dano em rigidez, como uma mola rotacional, foi observado que os valores de SDR são elevados mesmo para pequenos danos. Assim, foi feita uma comparação entre a profundidade do dano  $\eta$  e a descontinuidade de massa  $\mu$  em relação ao índice SDR. Esses parâmetros foram correlacionados a partir de uma interpolação linear e, além disso, foi obtida uma função  $\mu = f(\eta)$  que pode ser utilizada como uma referência inicial para a definição de uma massa adicional para determinada profundidade do dano.

Considerando que ruído experimental pode corromper os dados de resposta, foram analisados os dados da resposta danificada com o acréscimo de ruído aleatório distribuído a fim de avaliar a robustez dos métodos propostos para casos reais. Assim, foram notadas descontinuidades na curva *frequency-shift* na região do dano. Porém, os resultados obtidos da aplicação das derivadas da curva e a TDW não foram conclusivos. Dessa forma, uma análise mais detalhada da influência do ruído é sugerida para trabalhos futuros.

De forma geral, a metodologia do presente trabalho possui baixo custo computacional, sendo, portanto, recomendado para aplicações reais de maneira simples, uma vez que a mesma requer o uso de poucos acelerômetros que podem ser posicionados de maneira estratégica ao longo da estrutura. Porém, vale ressaltar que o estudo prévio da influência do ruído é indispensável em estudos futuros.

## 7.1 Sugestões para Trabalhos Futuros

- realizar estudo mais detalhado dos efeitos de ruído na viga;
- realizar testes dinâmicos experimentais;
- aplicar a metodologia proposta em outros tipos de estruturas, tais como, placas ou treliças.

# Referências

- Abdo, M. A. B. Damage detection of bridges using only static response. *2nd International Conference on Bridge Testing, Monitoring and Assessment*, 2015. Citado na página 8.
- Abdulhussein, R. T.; Muhammad A.M. Damage detection in composite plate based on vibration Measurements using Genetic Algorithm. *Al-Nahrain Journal for Engineering Sciences (NJES)*, v. 20, p. 709–718, 2017. Citado na página 9.
- Ahmed, B. et al. A novel approach for damage quantification using the dynamic response of a metallic beam under thermo- mechanical loads. *Journal of Sound and Vibration*, Elsevier Ltd, v. 469, 2020. Citado na página 17.
- Akishin, P. et al. Finite Element Modelling and Analysis of Damage Detection Methodology in Piezo Electric Sensor and Actuator Integrated Sandwich Cantilever Finite Element Modelling and Analysis of Damage Detection Methodology in Piezo Electric Sensor and Actuator Integrated. *Materials Science and Engineering*, 2018. Citado na página 12.
- Aktasoglu, S.; Sahin, M. Damage Detection in Beam Structures using a Combined Genetic Algorithm and Nonlinear Optimisation System. *Proceedings of the Eleventh International Conference on Computational Structures Technology*, p. 1–16, 2012. Citado na página 9.
- Alireza, S. et al. On the application of modified cuckoo optimization algorithm to the crack detection problem of cantilever Euler – Bernoulli beam. *Computers and Structures*, Elsevier Ltd, v. 157, p. 42–50, 2015. Citado na página 16.
- Ashory, M.-R. et al. An efficient modal strain energy-based damage detection for laminated composite plates. *Advanced Composite Materials*, v. 3046, p. 1–16, 2017. ISSN 0924-3046. Citado 2 vezes nas páginas 8 e 9.
- Blevins, B. D. Formulas for dynamics, acoustics and vibration. *John Wiley and Sons Ltd*, 2016. Citado na página 81.
- Burden, R. L.; Faires, J. D. Numerical analysis. *Cengage Learning, Ninth Edition*, 2010. Citado na página 83.
- Carden, E. P.; Fanning, P. Vibration Based Condition Monitoring: A Review. *Sage Publications*, 2004. Citado na página 7.
- Cha, Y.-j. Structural Damage Detection Using Modal Strain Energy and Hybrid Multiobjective Optimization. *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering*, p. 1–12, 2015. Citado na página 8.
- Corniani, A. et al. Autonomous wireless sensor network for structural health monitoring of aerostructures. *Applications in electronics pervading industry, environment and society*, 2015. Citado na página 14.



- Cornwell, P. et al. Application of the strain energy damage detection method to plate-like structures. *Journal of Sound and Vibration*, v. 224, 1999. Citado na página 8.
- Dackermann, U. et al. Identification of member connectivity and mass changes on a two-storey framed structure using frequency response functions and artificial neural networks. *Journal of Sound and Vibration, Elsevier*, 2013. Citado na página 14.
- Dinh-Cong, D. et al. Damage assessment in plate-like structures using a two-stage method based on modal strain energy change and Jaya algorithm. *Inverse Problems in Science and Engineering*, v. 5977, p. 1–24, 2018. Citado na página 9.
- Dixit, A.; Hanagud, S. Damage Localization by Isolating the Part of the Response Due to the Damage Only. *Journal of Applied Mechanics*, 2012. Citado na página 7.
- Dixit, A.; Hodges, D. H. A general damage theory: Solution of nth-order equations using unified framework. *Mechanics Research Communications, Elsevier Ltd.*, 2011. Citado na página 7.
- Duan, Z. et al. Damage localization in ambient vibration by constructing proportional flexibility matrix. *Journal of Sound and Vibration*, 2005. Citado na página 2.
- Estrada, R. S. Damage Detection Methods in Bridges through Vibration Monitoring : Evaluation and Application. 2008. Citado na página 28.
- Fan, W.; Qiao, P. Vibration-based damage identification methods: A review and comparative study. *Structural Health Monitoring*, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 7 e 9.
- Ferreira, A. J. M. Matlab codes for finite element analysis. solids and structures. *Solid Mechanics and Its Applications*, 2008. Citado na página 20.
- Ghahremani, K. et al. Damage Detection and Finite-Element Model Updating of Structural Components through Point Cloud Analysis. *Journal of Aerospace Engineering*, v. 31, p. 1–12, 2018. Citado na página 12.
- Ghrib, F. et al. Damage Identification of Euler – Bernoulli Beams Using Static Responses. *Journal of Engineering Mechanics*, p. 405–415, 2012. Citado na página 8.
- Hao, H. et al. Vibration-based Damage Detection of Structures by Genetic Algorithm. *Journal of Computing in Civil Engineering*, v. 16, p. 222–229, 2002. Citado na página 9.
- Hu, H. et al. Damage detection of surface cracks in composite laminates using modal analysis and strain energy method. *Composite Structures 74, Elsevier Ltd.*, v. 74, p. 399–405, 2006. Citado na página 8.
- Hu, H.; Wu, C. Development of scanning damage index for the damage detection of plate structures using modal strain energy method. *Mechanical Systems and Signal Processing 23, Elsevier Ltd.*, v. 23, p. 274–287, 2009. Citado na página 8.
- Jafarkhani, R.; Masri, S. F. Finite Element Model Updating Using Evolutionary Strategy for Damage Detection. *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering*, v. 26, p. 207–224, 2011. Citado na página 11.
- Jaishi, B.; Ren, W.-x. Damage detection by finite element model updating using modal flexibility residual. *Journal of Sound and Vibration, Elsevier*, v. 290, p. 369–387, 2006. Citado na página 11.

- K., M.; R., N. Structural Damage Detection by Genetic Algorithms. *AIAA Journal*, v. 40, 2002. Citado na página 9.
- Krawczuk, M. Application of spectral beam finite element with a crack and iterative search technique for damage detection. *Elsevier Science*, 2002. Citado 2 vezes nas páginas 7 e 11.
- Laier, J. E.; Morales, J. D. V. Improved Genetic Algorithm for Structural Damage Detection. *Computational Structural Engineering, Springer Science*, p. 833–834, 2009. Citado na página 9.
- Lee, S. J.; Park, K. S. Vibrations of timoshenko beams with isogeometric approach. *Elsevier Science.*, 2013. Citado na página 21.
- Li, C.; Yang, Q. Structural Damage Detection Using Static test data. *Applied Mechanics and Materials*, v. 504, p. 852–855, 2014. Citado na página 8.
- Liberatore, S.; Carman, G. Damage detection of structures based on spectral methods using piezoelectric materials. *In Structural Health Monitoring, FK Chang (ed.), DEStech, Lancaster.*, 2003. Citado na página 13.
- Lovejoy, S. C. Applications of structural health monitoring to highway bridges. *The Oregon Department of Transportation's Bridge Engineering Section*, 2013. Citado na página 7.
- M., J. D. V.; Laier, J. E. Estado da arte sobre a aplicação de algoritmos genéticos para detecção de dano em estruturas. *Revista Sul-Americana de Engenharia Estrutural*, p. 7–28, 2015. Citado na página 9.
- Machado, M. R.; Santos, J. M. C. D. Reliability analysis of damaged beam spectral element with parameter uncertainties. *Hindawi Publishing Corporation, Shock and Vibration*, v. 2015, 2015. Citado na página 11.
- Mehrjoo, M. et al. New timoshenko-cracked beam element and crack detection in beam-like structures using genetic algorithm. v. 5977, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 23.
- Meruane, V.; Heylen, W. Damage Detection with Parallel Genetic Algorithms and Operational Modes. *Structural Health Monitoring*, 2010. Citado na página 9.
- Meruane, V.; Heylen, W. An hybrid real genetic algorithm to detect structural damage using modal properties. *Mechanical Systems and Signal Processing*, Elsevier, v. 25, p. 1559–1573, 2011. Citado na página 9.
- Monaco, E. et al. Experimental and Numerical Activities on Damage Detection Using Magnetostrictive Actuators and Statistical Analysis. *Journal of Intelligent Material System and Structures, Vol. 11*, 2000. Citado na página 13.
- Montalvão, D. et al. A review of vibration-based structural health monitoring with special emphasis on composite materials. *Shock and Vibration Digest*, 2006. Citado na página 7.
- Moradi, S. et al. On the application of bees algorithm to the problem of crack detection of beam-type structures. *Computers and Structures, Elsevier*, v. 89, n. 23-24, p. 2169–2175, 2011. Citado na página 15.

- Moradi, S. et al. On the application of bees algorithm to the problem of crack detection of beam-type structures. *Computers and Structures*, Elsevier Ltd, 2015. Citado 2 vezes nas páginas xi e 16.
- Mungla, M. J. et al. Identification of a Crack in Clamped-Clamped Beam using Frequency-Based Method and Genetic Algorithm. *Procedia Engineering, Elsevier*, v. 144, 2016. Citado na página 16.
- NBR 6118. Projeto de estruturas de concreto — Procedimento. *Associação Brasileira de Normas Técnicas - ABNT*, 2014. Citado na página 6.
- Ostachowicz, W. M. Damage detection of structures using spectral finite element method. *Elsevier Ltd, Computers and Structures*, 2008. Citado na página 11.
- Ostachowicz, W. M.; Krawczuk, M. Analysis of the effect of cracks on the natural frequencies of a cantilever beam. *Journal of Sound and Vibration, Elsevier*, v. 150, p. 191–201, 1991. Citado na página 15.
- Ovanesova, A. V. Applications of wavelets to crack detection in frame structures. *University of Puerto Rico*, 2000. Citado na página 28.
- Palechor, E. U. et al. Dynamic analysis of a beam with additional auxiliary mass spatial via spectral element method. *Springer Proceedings in Mathematics and Statistics*, 2018. Citado 3 vezes nas páginas 11, 30 e 49.
- Palechor, E. U. L. Identificação de danos em vigas metálicas utilizando wavelets e dados numéricos e experimentais. *Dissertação de Mestrado em Estruturas e Construção Civil da Universidade de Brasília - UnB*, 2013. Citado 4 vezes nas páginas 36, 47, 49 e 83.
- Palechor, E. U. L. Método de identificação de danos em estruturas baseado na variação da frequência natural causada pela aplicação de uma massa móvel adicional. *Tese de Doutorado em Estruturas e Construção Civil da Universidade de Brasília - UnB*, 2018. Citado 2 vezes nas páginas 1 e 9.
- Panopoulou, A. et al. Dynamic fiber Bragg gratings based health monitoring system of composite aerospace structures. *Acta Astronautica, Elsevier*, 2011. Citado na página 14.
- Papatheou, E. et al. Damage location using added masses in a Piper Tomahawk aircraft wing. *Isma*, 2010. Citado 3 vezes nas páginas xi, 13 e 14.
- Park, S.-Y. et al. Damage detection of shear building structure based on FRF response variation. *Advanced Science and Technology Letters*, 2013. Citado na página 10.
- Parloo, E. et al. Increased reliability of reference-based damage identification techniques by using output-only data. *Journal of Sound and Vibration*, 2004. Citado na página 2.
- Radziński, M. et al. Improvement of damage detection methods based on experimental modal parameters. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2011. Citado na página 7.
- Raghavan, A.; Cesnik, C. E. S. The Shock and Vibration Digest Review of Guided-wave Structural Health Monitoring. *The Shock and Vibration Digest*, 2007. Citado na página 7.
- Rao, S. S. Mechanical vibrations. *[S.l.]: Addison-Wesley Longman*, 1986. Citado na página 78.
- Rytter, A. Vibrational based inspection of civil engineering structures. Dept. of Building Technology and Structural Engineering, Aalborg University, 1993. Citado na página 2.

- Salawu, O. S. Detection of structural damage through changes in frequency: review. *Engineering Structures*, 1997. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 34.
- Sampaio, R. P. C. et al. A simple damage detection indicator using operational deflection shapes. *Mechanical Systems and Signal Processing.*, 2016. Citado 3 vezes nas páginas xi, 14 e 15.
- Sanjay, K. B. et al. Application of genetic algorithm for crack diagnosis of a free-free aluminum beam with transverse crack subjected to axial and bending load. *Journal of Mechanical Engineering and Sciences*, v. 12, p. 3825–3851, 2018. Citado na página 9.
- Savi, M. A.; De Paula, A. S. *Vibrações mecânicas. 1. ed. - Rio de Janeiro: LTC*, 2017. Nenhuma citação no texto.
- Sazonov, E.; Klinkhachorn, P. Optimal spatial sampling interval for damage detection by curvature or strain energy mode shapes. *Journal of Sound and Vibration 285, Elsevier Ltd.*, v. 285, p. 783–801, 2005. Citado na página 8.
- Seyedpoor, S. M. International Journal of Non-Linear Mechanics A two stage method for structural damage detection using a modal strain energy based index and particle swarm optimization. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Elsevier, v. 47, p. 1–8, 2012. Citado na página 8.
- Shi, Z. Y. et al. Structural damage detection from modal strain energy change. *Journal of Engineering Mechanics*, v. 126, p. 1216–1223, 2000. Citado na página 8.
- Shi, Z. Y. et al. Improved damage quantification from elemental modal strain energy change. *Journal of Engineering Mechanics*, v. 128, p. 521–529, 2002. Citado na página 8.
- Silva, R. S. Y. C. et al. Damage Detection in Beams Using Boundary Elements and Wavelet Transform. *International Conference on Boundary Element and Meshless Techniques XII-Beteq*, 2011. Citado na página 11.
- Silva, R. S. Y. R. C.; Bezerra, L. M. Damage Identification in Beams Using Experimental Data. *Engineering Materials Vol 607*, 2014. Citado na página 8.
- Silva, R. S. Y. R. C. et al. International Journal for Computational Methods in Boundary element and wavelet transform methods for damage detection in 2D structures. *International Journal for Computational Methods in Engineering Science and Mechanics*, Taylor and Francis, v. 20, p. 242–255, 2019. Citado na página 11.
- Soe, M. T. Vibration-Based Finite Element Model Updating and Structural Damage Identification Maung Than Soe. *Thesis submitted for the degree of Doctor of Philosophy of the University of Greenwich*, 2013. Citado na página 12.
- Solís, M. et al. Analysis of stationary roving mass effect for damage detection in beams using wavelet analysis of mode shapes. *Journal of Physics: Conference Series*, 2015. Citado na página 10.
- Su, Z.; Ye, L. Identification of Damage Using Lamb Waves: From Fundamentals to Applications. *Springer*, 2009. Citado na página 7.
- Sun, H. et al. Spectral element method for modeling lamb wave interaction with open and closed crack. *JVE International Ltd, Journal of Vibroengineering*, 2017. Citado na página 11.

Sung, S.-h. et al. A multi-scale sensing and diagnosis system combining accelerometers and gyroscopes for bridge health monitoring. *Smart Materials and Structures*, 2014. Citado na página 16.

Tavares, A. D. Mecânica Física abordagem experimental e teórica. *Departamento de Física Teórica - Instituto de Física da Universidade do Estado do Rio de Janeiro*, 2004. Citado na página 79.

Tibaduiza, D. et al. A damage classification approach for structural health monitoring using machine learning. *Hindawi Complexity Volume 2018.*, 2018. Citado na página 15.

Wang, L. et al. Damage detection using frequency shift path. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2016. Citado na página 10.

Wang, S.; Xu, M. Modal Strain Energy-based Structural Damage Identification : A Review and Comparative Study. *Structural Engineering International*, v. 8664, 2018. Citado na página 9.

Xu, Y. et al. Damage detection using finite element model updating with an improved damage detection using finite element model updating with an improved optimization algorithm. *Steel and Composite Structures*, v. 19, 2015. Citado na página 12.

Yan, W.-j. et al. Damage Detection Method Based on Element Modal Strain Energy Sensitivity. *Advances in Structural Engineering*, v. 13, n. 6, p. 1075–1088, 2010. Citado na página 8.

Zangeneh, B. N.; Amiri, M. Structural damage detection using modal strain energy Structural Damage detection using Modal Strain Energy. *8th International Congress of Coasts, Ports and Marine Structures, Tehran, Iran*, 2015. Citado na página 8.

Zhong, S.; Oyadiji, S. O. Analytical predictions of natural frequencies of cracked simply supported beams with a stationary roving mass. *Journal of Sound and Vibration*, 2008. Citado na página 10.

Zhong, S. et al. Response-only method for damage detection of beam-like structures using high accuracy frequencies with auxiliary mass spatial probing. *Journal of Sound and Vibration*, 2008. Citado 7 vezes nas páginas xi, 2, 9, 10, 34, 35 e 44.

Zou, F.; Aliabadi, M. H. A boundary element method for detection of damages and self-diagnosis of transducers using electro-mechanical impedance A Technique for Detection and Sizing of Cracks on Plate Structures using Piezoelectric Transducer Networks. *Smart Materials and Structures*, 2015. Citado na página 11.

Zou, F.; Aliabadi, M. H. A Dual Boundary Element Model for Electromechanical Impedance based Damage Detection Applications. *Key Engineering Materials*, v. 665, 2016. Citado na página 11.

# Apêndices

# A . Materiais e Meios

O Apêndice A apresenta a descrição da configuração experimental dos testes realizados para a identificação dos parâmetros da viga, a validação numérico-experimental e a descrição do procedimento experimental.

## A.1 Bancada Experimental

A técnica experimental adotada para o estudo dinâmico do objeto de estudo, viga de alumínio, consiste em ensaio de impacto analisando o comportamento da estrutura após uma força de excitação aplicada em um período curto de tempo e a aceleração foi medida por acelerômetro fixado em pontos estratégicos da estrutura. Em cada um dos pontos de excitação foram feitas três medições para obter-se uma média destas.

Para a realização dos ensaios dinâmicos experimentais foram utilizados os seguintes equipamentos:

- (a) acelerômetro modelo PCB 353B03 com sensibilidade de 9.84 mV/g;
- (b) martelo de impacto PCB 086C01;
- (c) placa *Polytec* de aquisição de dados modelo VIB-E-220;
- (d) computador com o *VibSoft* para aquisição de dados.

Para a representação da condição de contorno livre-livre foram utilizadas espumas flexíveis. Toda a configuração do ensaio é mostrada na Figura A.1.



Figura A.1 – Configuração do teste axial experimental.

## A.2 Identificação de Parâmetros de Viga Intacta

Nesta etapa foram realizados testes de impacto experimentais em uma viga de alumínio na condição livre-livre no Laboratório de Sistemas e Vibrações do Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade de Brasília, UnB, a fim de avaliar o comportamento da viga após a aplicação de uma força unitária/delta de Dirac.

Preliminarmente, a viga de alumínio foi pesada e em seguida foi realizada a medição de suas dimensões a fim de determinar a área da seção transversal  $A$ , momento de inércia  $I$  e densidade  $\rho$ . O coeficiente de Poisson  $\nu$  do alumínio considerado nas análises foi obtido na literatura. O módulo de elasticidade  $E$  do material foi estimado de forma indireta a partir das frequências naturais  $f_n$  da estrutura intacta na condição livre-livre obtidas em um teste experimental axial e ensaio sonelástico. A Fig. A.2 apresenta os gráficos de Função de Resposta em Frequência e Fase obtidos no ensaio.



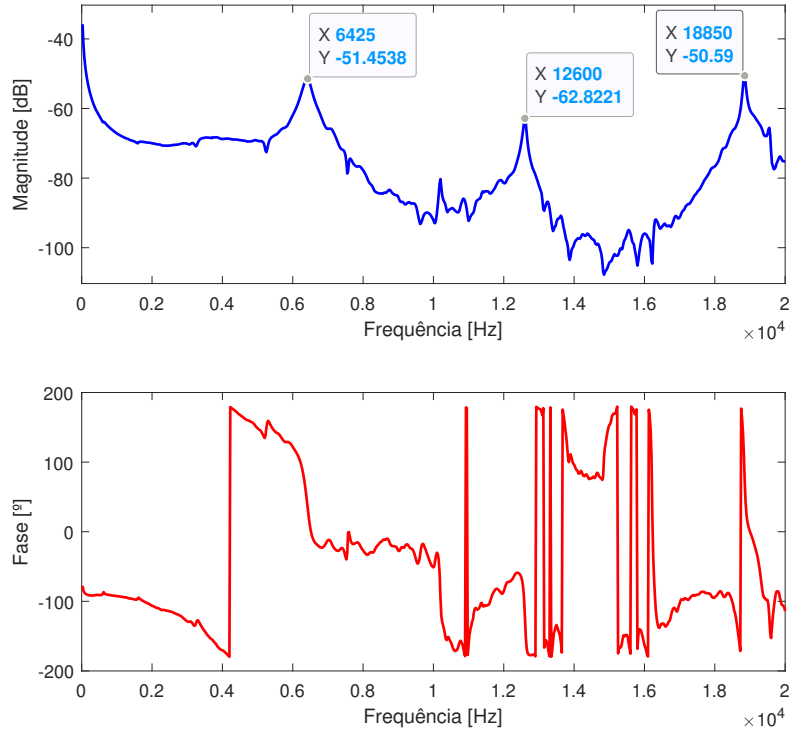


Figura A.2 – Função de Resposta em Frequência e Fase a partir do teste axial experimental.

É percebido que mesmo com a presença de ruído no sinal, os três primeiros picos de ressonância foram notados assim possibilitando a obtenção dos valores das primeiras frequências naturais do sistema a partir da função *findpeaks* do MATLAB. Essa ferramenta retorna um vetor com o máximo local (picos) a partir do sinal de entrada.

A Eq. (A.1) apresenta a relação das frequências naturais  $f_n$  com o módulo de elasticidade a partir da teoria de barras segundo Rao (1986).

$$f_n = \frac{n\pi c}{L}, \quad (\text{A.1})$$

onde,  $n$  é correspondente a frequência natural ( $n = 1,2,3,..$ ),  $c$  é a velocidade da onda e  $L$  o comprimento da estrutura.

A velocidade da onda  $c$  é dada por:

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad (\text{A.2})$$

sendo  $E$  o módulo de elasticidade e  $\rho$  a densidade do material.

Substituindo a Eq.(A.2) na Eq.(A.1), tem-se que:

$$f_n = \frac{n\pi\sqrt{\frac{E}{\rho}}}{L}. \quad (\text{A.3})$$

Invertendo a Equação (A.3) e sendo conhecido o valor da frequência natural, medida experimentalmente, é possível estimar o módulo de elasticidade do material  $E$ :

$$E = \frac{4f_n^2 L^2 \rho}{n^2}. \quad (\text{A.4})$$

A Tabela 4 apresenta os valores das frequências naturais da viga de alumínio obtidas nos testes experimentais, e ainda, os valores dos módulos de elasticidade calculados a partir da Eq. (A.4).

Tabela 4 – Estimativa do módulo de elasticidade a partir do primeiro (T1) e segundo (T2) teste.

$f_{n-T1}$ [Hz]	$E_{-T1}$ [GPa]	$f_{n-T2}$ [Hz]	$E_{-T2}$ [GPa]
6425	69.62	6046	61.65
12600	66.94	12690	67.90
18850	66.58	18950	67.29

Dados os seis valores de módulo de elasticidade a partir das respectivas frequências naturais, foi feita uma análise de erro com a finalidade de verificar a verossimilhança com a literatura.

No primeiro momento, calcula-se o valor médio representativo do módulo de elasticidade  $\bar{E}$ :

$$\bar{E} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N E_i, \quad (\text{A.5})$$

onde o valor médio obtido foi igual a  $\bar{E} = 66.662$  GPa.

As Equações (A.6) e (A.7) apresenta as formulações do resíduo ou desvio  $r_i$  e do erro médio quadrático  $\sigma_{dp}$ , também conhecido por desvio padrão .

$$r_i = E_i - \bar{E}, \quad (\text{A.6})$$

$$\sigma_{dp} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N r_i^2}, \quad (\text{A.7})$$

onde o erro médio quadrático calculado equivale a 2.679.

Segundo Tavares (2004), o erro tolerável equivale a três vezes ao erro médio quadrático. O autor afirma que toda medida cujo erro seja maior que o erro tolerável deve ser rejeitada ou, pelo menos, deve-se repetir a medição corretamente, pois será provável que tenha havido erro grosseiro na medição.

A partir disso, o erro tolerável foi calculado onde o valor encontrado foi 8.04, significando que a medida é confiável. Posteriormente, foi calculado o desvio padrão experimental da média  $\sigma_{\bar{x}}$  a partir da seguinte equação:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_{dp}}{\sqrt{N}}. \quad (\text{A.8})$$

Por conseguinte, a melhor estimativa para o módulo de elasticidade  $E$  da viga de alumínio em estudo é  $66.662 \pm 1.0937$  GPa. A literatura apresenta que o módulo de elasticidade nominal do alumínio equivale a 69 GPa. Dessa forma, o erro relativo percentual é menor que 5%.

A Tab. 5 apresenta os valores de  $E$  longitudinal e de flexão obtidos no ensaio sonelástico e o  $E$  estimado.

Tabela 5 – Comparação dos valores do módulo de elasticidade - ensaio sonelástico.

Módulo de Elasticidade [GPa]	
Estimado	66.66
Sonelástico - Long.	66.28
Sonelástico - Flex.	65.38

Os resultados do ensaio sonelástico ficou dentro da margem de erro tolerável calculado anteriormente. Após a estimativa do módulo de elasticidade  $E$ , calculou-se o módulo de cisalhamento  $G$  a partir da Eq. (3.4). Logo, a Tabela 6 apresenta as propriedades geométricas e do material da viga em estudo.

Tabela 6 – Características da viga de alumínio.

Massa [g]	385.33
$L \times b \times h$ [ $mm^3$ ]	395x19x19
Área da seção [ $mm^2$ ]	361.00
Momento de Inércia [ $mm^4$ ]	$1.086.10^{-4}$
Módulo de Elasticidade [GPa]	66.66
Módulo de Cisalhamento [GPa]	24.18
Densidade [ $kg/m^3$ ]	2702.27
Coefficiente de Poisson	0.33

### A.3 Validação Numérico - Experimental de Viga Intacta

Foram realizadas análises numéricas utilizando os parâmetros obtidos e apresentados anteriormente. Um *script* no *software* MATLAB foi desenvolvido para um modelo de viga

Timoshenko, considerando os efeitos de cisalhamento e a inércia rotacional, baseando-se no Método dos Elementos Finitos.

Preliminarmente, foi realizado um teste modal experimental da viga intacta cuja finalidade foi obter as primeiras frequências naturais experimentais a fim de comparação em relação aos resultados numéricos. A Figura A.3 mostra a FRF e Fase da viga obtidos no teste modal de vibração de flexão.

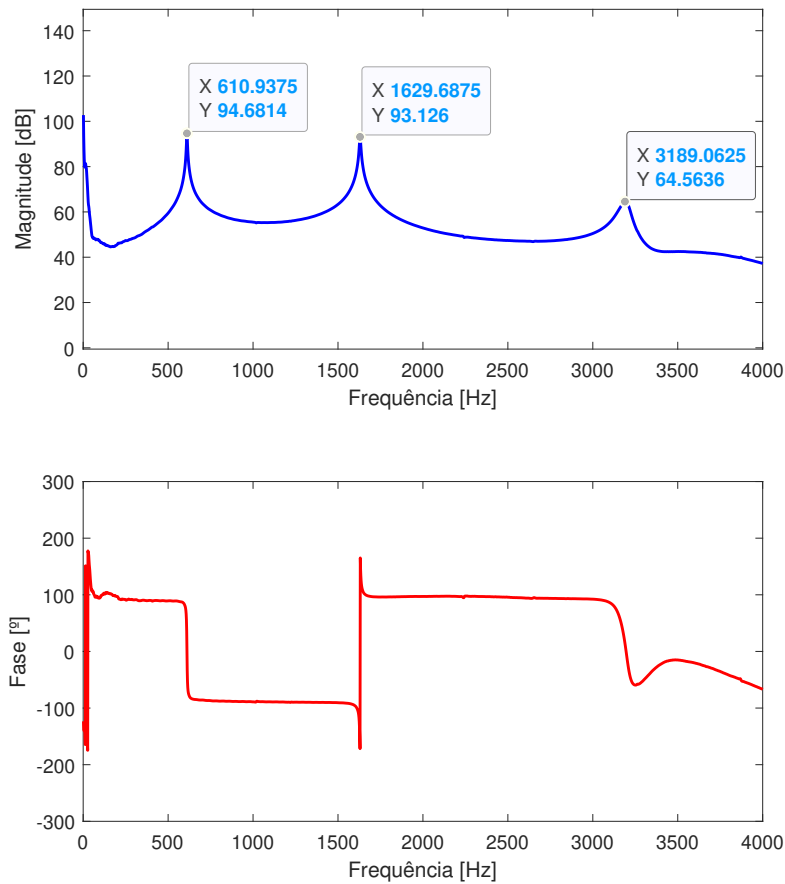


Figura A.3 – Função de Resposta em Frequência e Fase do teste experimental de vibração de flexão.

É notado que os picos foram obtidos e os respectivos valores das frequências naturais da viga intacta foram capturados. Posteriormente, as três primeiras frequências naturais da viga foram calculadas analiticamente a partir da teoria de Euler Bernoulli, a partir da formulação apresentada por Blevins (2016):

$$f_{ni} = \frac{\lambda_i^2}{2\pi L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}, i = 1, 2, \dots \quad (\text{A.9})$$

Onde  $\lambda_i$  depende da condição de contorno. Para a condição livre-livre, os três primeiros  $\lambda$  equivalem a 4.73, 7.85 e 10.95.

Em seguida, a viga foi modelada com as mesmas propriedades apresentadas na Tab. 1 no ANSYS APDL, *software* comercial de Elementos Finitos a fim de obter as primeiras frequências naturais para verificar os dados obtidos a partir modelo implementado. Foi utilizado o elemento BEAM188 que é baseado na teoria de viga de Timoshenko. Este elemento de viga possui dois nós linear, quadrático ou cúbico em 3D e seis ou sete graus de liberdade em cada nó.

A Tabela 7 apresenta os valores referentes das frequências naturais da viga intacta obtidas analiticamente, pelo modelo desenvolvido no MATLAB, no ANSYS e testes experimentais.

Tabela 7 – Comparação das frequências naturais da viga intacta  $f_n[Hz]$ : (a) Analítico-Euler-Bernoulli, (b) Modelo MEF-Timoshenko, (c) ANSYS BEAM188 e (d) Experimental.

Modo	Analítico	Modelo MEF	ANSYS	Experimental
1	621.70	616.60	616.60	610.94
2	1713.80	1674.30	1674.50	1629.69
3	3359.70	3214.00	3214.60	3189.06

As frequências mostradas anteriormente foram plotadas a fim de melhor visualização e são apresentadas a seguir na Fig. A.4.

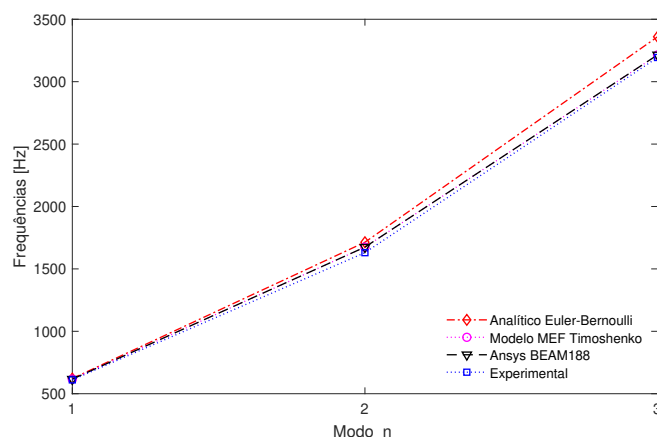


Figura A.4 – Três primeiras frequências naturais da viga intacta: (a) Euler-Bernoulli, (b) MEF-Timoshenko, (c) ANSYS e (d) Experimental.

Observa-se que mesmo apresentando resultados próximos, as frequências analíticas baseadas na teoria de Euler Bernoulli apresentaram maior diferença em relação aos modelos baseados na teoria de Timoshenko.

O erro relativo percentual dos autovalores numéricos (presente modelo e ANSYS) e analíticos foram calculados em relação as frequências obtidas nos testes experimentais e são apresentados no gráfico da Figura A.5.

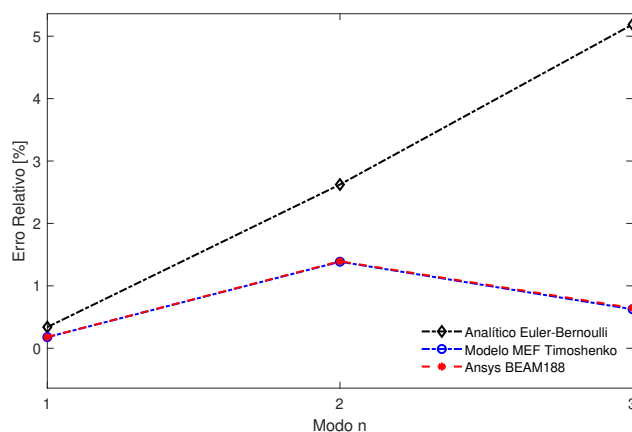


Figura A.5 – Erro relativo em relação aos testes experimentais: (a) Analítico(+), (b) Modelo MEF(o), (c) ANSYS(x).

Observa-se que os resultados numéricos das três primeiras frequências naturais apresentam boa concordância em relação aos ensaios experimentais apresentando erro relativo inferior a 2%.

## A.4 Identificação Experimental da Curva de Frequência

Primeiramente, a viga metálica é discretizada em 10 elementos. Em seguida, é definida e aplicada uma massa adicional em cada nó da estrutura. Os ensaios modais são realizados e as FRF são obtidas para estrutura com a massa em cada nó. Como se trata de uma estrutura de pequeno comprimento, a coleta dos dados experimentais limita-se ao número de pontos que podem ser medidos com a instrumentação disponível.

No método de identificação de danos proposto é utilizada a Transformada Discreta de *Wavelet* (TDW) e para sua aplicação é necessário aumentar o número de dados em relação aos obtidos na análise experimental. Por isso, foi necessário aplicar método de interpolação na curva Frequências e Posição da Massa, conhecido por *spline* cúbica. De acordo com Palechor (2013), este método apresenta melhores resultados quando se trata de detecção de danos.

Um polinômio cúbico geral envolve quatro constantes, portanto, há flexibilidade suficiente no procedimento de *spline* cúbica para assegurar que o interpolante seja não apenas continuamente diferenciável no intervalo, mas também tenha uma segunda derivada contínua. A construção da *spline* cúbica, no entanto, não pressupõe que as derivadas do interpolante concordem com as da função que é aproximação, mesmo nos nós (Burden; Faires, 2010).

Em outras palavras, se uma função tem grau 3 então existem 4 constantes a determinar. Isto permite que possamos garantir continuidade da função e até de sua derivada de segunda ordem, mesmo quando especificamos a derivada primeira da função a

ser interpolada nos extremos do intervalo. Como desvantagem, as derivadas primeiras do *spline* não coincidem com a função original, mesmo nos nós.

Se  $f:[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função e é dado um conjunto de nós  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ , um *spline* cúbico interpolador é um função  $S:[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  satisfazendo.  $S(x)$  é um polinômio cúbico, indicado por  $S_j(x)$  no intervalo  $[x_j, x_{j+1}]$ , para cada  $0 \leq j \leq n - 1$ ;

$$S(x_j) = f(x_j), \text{ para cada } 0 \leq j \leq n ;$$

$$S_{j+1}(x_{j+1}) = S_j(x_{j+1}), \text{ para cada } 0 \leq j \leq n - 2;$$

$$S'_{j+1}(x_{j+1}) = S'_j(x_{j+1}), \text{ para cada } 0 \leq j \leq n - 2;$$

$$S''_{j+1}(x_{j+1}) = S''_j(x_{j+1}), \text{ para cada } 0 \leq j \leq n - 2.$$

Cada secção do *spline*  $S_j$  para  $0 \leq j \leq n - 1$ , tem a seguinte forma:

$$S_j(x) = a_j + b_j(x - x_j) + c_j(x - x_j)^2 + d_j(x - x_j)^3 \quad (\text{A.10})$$





# B . *Scripts* - MATLAB

## B.1 Descontinuidade de Massa

```
clear all
close all
clc
%% Dados de entrada
E = 66.662e9;
poisson = 0.33;
L = 0.3950;
b = .019;
h = .019;
m = .38533;
I = (b*h^3/12);
EI = E*I;
kapa = 5/6;
rho = m/(L*b*h);
A = b*h;
P = -1;

% Matriz Constitutiva
G = E/(2*(1+poisson));
C = [EI 0; 0 kapa*A*G];

% Malha
nEle = 100;

nCoord = linspace(0,L,nEle+1);
xx = nCoord';
x = xx';

for i = 1:size(nCoord,2)-1
elementNodes(i,1) = i;
elementNodes(i,2) = i+1;
end

% Coordenadas e Conectividades
nNodes = size(xx,1);

% Graus de liberdade
GDof = 2*nNodes;

%% Computation of the System Stiffness, Force and Mass
[stiffness,force,mass] =
stiffnessmass(GDof,nEle,elementNodes,nNodes,xx,C,P,rho,I,h);

% boundary conditions A-A
% fixedNodeW = [1 ; nNodes]; % A-A
fixedNodeW = []; % L-L
fixedNodeTX = [];
prescribedDof = [fixedNodeW; fixedNodeTX+nNodes];

% Mapa de Resposta

pos_x = 0:L/nEle:L ;
pos = 1:nNodes;
per_m = (1:1:10)./100*m ;
```

```

% massa adicional de teste
m_a = 2/100*m;

% massa dano
m_d = (5/100)*m ;
pos_d = round(1*nEle/2) ;

% posição do dano
mass(pos_d,pos_d) = mass(pos_d,pos_d) + m_d;

for i = 1:length(pos)
    i_pos = pos(i);
    activeDof = setdiff([1:GDof]',[prescribedDof]);
    mass(i_pos,i_pos) = mass(i_pos,i_pos) + m_a ;
    [V,D] =
eig(stiffness(activeDof,activeDof),mass(activeDof,activeDof));
    mass(i_pos,i_pos) = mass(i_pos,i_pos) - m_a ;
    fn(:,i) = diag(sqrt(D)/(2*pi));

    modeNumber = 3;
    Modes{i} = zeros(GDof,modeNumber);
    Modes{i}(:,1:modeNumber) = V(:,1:modeNumber);
end

% Wavelets
[ D ] = wavelet_index(s , 5 , false, L , nEle );

% SDR - Signal Damage Ratio
[sd_sb] = SDR_index(pos_x, abs(D),true, pos_d)

function [stiffness,force,mass] =
stiffnessmass(GDof,nEle,elementNodes,nNodes,xx,C,P,rho,I,h)
% Computation of stiffness matrix and force vector
stiffness = zeros(GDof);
mass = zeros(GDof);
force = zeros(GDof,1);

% stiffness matrix
gaussLocations = [0.577350269189626;-0.577350269189626];
gaussWeights = ones(2,1);

% bending contribution for stiffness matrix
for e = 1:nEle
    indice = elementNodes(e,:);
    elementDof = [indice indice+nNodes];
    indiceMass = indice+nNodes;
    ndof = length(indice);
    length_element = xx(indice(2))-xx(indice(1));
    detJacobian = length_element/2;
    invJacobian = 1/detJacobian;

    for q = 1:size(gaussWeights,1);

```

```

[shape,naturalDerivatives] = funcaodeforma(pt(1));
Xderivatives = naturalDerivatives*invJacobian;

% B matrix
B = zeros(2,2*ndof);
B(1,ndof+1:2*ndof) = Xderivatives(:)';

% K
A = 3.6100e-04;
stiffness(elementDof,elementDof) =
stiffness(elementDof,elementDof)+B'*B*gaussWeights(q)*detJacobian*C(1,1);
force(indice) = force(indice)+shape*P*detJacobian*gaussWeights(q);
mass(indiceMass,indiceMass) =
mass(indiceMass,indiceMass)+shape*shape'*gaussWeights(q)*I*rho*detJacobia
n;
mass(indice,indice) =
mass(indice,indice)+shape*shape'*gaussWeights(q)*A*rho*detJacobian;
end
end

% shear contribution for stiffness matrix
gaussLocations = [0.];
gaussWeights = [2.];
for e = 1:nEle
indice = elementNodes(e,:);
elementDof = [ indice indice+nNodes];
ndof = length(indice);
length_element = xx(indice(2))-xx(indice(1));
detJ0 = length_element/2;
invJ0 = 1/detJ0;

for q = 1:size(gaussWeights,1);
pt = gaussLocations(q,:);
[shape,naturalDerivatives] = funcaodeforma(pt(1));
Xderivatives = naturalDerivatives*invJacobian;

% B
B = zeros(2,2*ndof);
B(2,1:ndof) = Xderivatives(:)';
B(2,ndof+1:2*ndof) = shape;

% K
stiffness(elementDof,elementDof)=
stiffness(elementDof,elementDof)+B'*B*gaussWeights(q)*detJacobian*C(2,2);
end
end

function [ D ] = wavelet_index( s, typ, plt, L, nEle )

l_f = length(s);

% Wavelet Functions
if (typ == 1)

```

```

        D = upcoef('d',cD,'db5',1,1_f);
elseif (typ == 2)
    [cA,cD] = dwt(s,'coif3');
    D = upcoef('d',cD,'coif3',1,1_f);
elseif (typ == 3)
    [cA,cD] = dwt(s,'sym6');
    D = upcoef('d',cD,'sym6',1,1_f);
elseif (typ == 4)
    [cA,cD] = dwt(s,'rbio2.6');
    D = upcoef('d',cD,'rbio2.6',1,1_f);
else
    [cA,cD] = dwt(s,'bior6.8');
    D = upcoef('d',cD,'bior6.8',1,1_f);
end

if plt == 1
    figure
    semilogy(0:L/nEle:L,abs(D),'b','linewidth',1.5);
    xlabel('Comprimento da viga [m]')
    ylabel('Coeficientes de Wavelet')
end
end

function [ sd_sb ] = SDR_index(X,Y,plt,pos_d)

%SDR_index Summary of this function goes here
% Detailed explanation goes here
% Sinal Dano / Sinal de Base

XIndexd = find(Y == max(Y:(, (13:end-13))), 1, 'first');
XIndexr1 = find(Y == max(Y:(, (20:35))), 1, 'first');
XIndexr2 = find(Y == max(Y:(, (end-39:end-20))), 1, 'first');

s_d = Y(XIndexd);
s_b1 = Y(XIndexr1);
s_b2 = Y(XIndexr2);

s_b = max(s_b1,s_b2);
sd_sb = 20*log10(s_d/s_b) ;

if plt
    figure
    semilogy(X,Y,'k-','linewidth',1.5);
    hold on
    semilogy(X(XIndexd),Y(XIndexd),'bo','MarkerSize',8)
    semilogy(X(XIndexr1),Y(XIndexr1),'r*','MarkerSize',8)
    semilogy(X(XIndexr2),Y(XIndexr2),'r*','MarkerSize',8)

    txt = ['SDR = ' num2str(sprintf('%.2f',sd_sb)) 'dB'];
    text(X(65),Y(end-2),txt, 'Color','k','LineWidth',1.5,'FontWeight',
'Bold')

    tx = ['Sd'];

```

```
'Color','k','LineWidth',1.5,'FontWeight','Bold')

    txx = ['Sb'];
    text(X(XIndexr2+1),Y(XIndexr2+8),txx,
'Color','k','LineWidth',1.5,'FontWeight','Bold')
    hold off

    xlabel('L [m]')
    ylabel('Coef. Wavelet')
    set(gca,'FontSize',16)
end

end
```

## B.2 Dano em Rigidez

```
clc
close all
clear all
% Dados de entrada
E = 66.662e9;
poisson = 0.33;
L = 0.3950;
bb = .019;
h = .019;
m = .38533;
I = (bb*h^3/12);
EI = E*I;
kapa = 5/6;
rho = m/(L*bb*h);
A = bb*h;

% Matriz Constitutiva
G = E/(2*(1+poisson));
% C = [EI 0; 0 kapa*A*G];

% Malha
nEle = 100+1;
dx = L/nEle;

nCoord = linspace(0,L,nEle+1);
xx = nCoord';
x = xx';

for i = 1:size(nCoord,2)-1
elementNodes(i,1) = i;
elementNodes(i,2) = i+1;
elementNodes(i,3) = 0.000000000000000001; % no damage
end

et = 1e-100:0.1:0.6;
et_u = et(4)
ds = et_u*h;

elementNodes(round(size(elementNodes,1)/2),3) = ds;

% Coordenadas e Conectividades
nNodes = size(xx,1);

% Graus de liberdade
GDof = 2*nNodes;

% Condição de Contorno
% transl = [1 ; nNodes]; % A-A
transl = []; % L-L
rotat = [];
Boun_Cond = [transl; rotat+nNodes];
```

```

matrizes(GDof,nEle,elementNodes,dx,rho,A,E,I,kapa,G,h,bb);
K = Kglob;
M = Mglob;

% Posições
pos_x = 0:L/nEle:L;
pos = 1:nNodes;

% Massa Adicional
m_a = 2/100*m;

% Autovalores
for i = 1:length(pos)
    i_pos = 2*pos(i)-1;
    DeslAtivos = setdiff([1:GDof]',[Boun_Cond]);
    M(i_pos,i_pos) = M(i_pos,i_pos) + m_a ;
    [V,D] = eig(K(DeslAtivos,DeslAtivos),M(DeslAtivos,DeslAtivos));
    M(i_pos,i_pos) = M(i_pos,i_pos) - m_a ;
    fn(:,i) = diag(sqrt(D)/(2*pi));
end

freq = fn(3,:);
s = freq
ds = diff(s);
dds = diff(ds);
dddd = diff(dds);

% Wavelets
[ D ] = wavelet_index(s , 5 , false, L , nEle );

% SDR - Signal Damage Ratio
[sd_sb] = SDR_index(pos_x, abs(D),true)

function [Kglob,Mglob] =
matrizes(GDof,nEle,elementNodes,dx,rho,A,E,I,kapa,G,h,b);
    Kglob = zeros(GDof);
    Mglob = zeros(GDof);

    % Montagem das Matrizes
    for e = 1:nEle
        indice = elementNodes(e,:);
        elementDof(e,:) = [(indice(1)*2-1) (indice(1)*2) (indice(2)*2-1)
(indice(2)*2)];
    end

%Petyt
a = dx/2;
beta = E*I / (kapa*A*G*a^2);

m1 = 156 + 882*beta + 1260*beta^2;
m2 = (44+231*beta+315*beta^2)*a;
m3 = 54 +378*beta+630*beta^2;
m4 = (-26-189*beta-315*beta^2)*a;
m5 = (16+84*beta+126*beta^2)*a^2;

```

```

m7 = 18;
m8 = (3-45*beta)*a;
m9 = (8+30*beta+180*beta^2)*a^2;
m10 = (-2-30*beta+90*beta^2)*a^2;

Mt= rho*A*a/(210*(1+3*beta)^2).* ...
    [m1 m2 m3 m4;
     m2 m5 -m4 m6;
     m3 -m4 m1 -m2;
     m4 m6 -m2 m5];

Mr = rho*I/(30*a*(1+3*beta)^2).* ...
    [m7 m8 -m7 m8;
     m8 m9 -m8 m10;
     -m7 -m8 m7 -m8;
     m8 m10 -m8 m9];

Mele = Mt + Mr;

alpha = 0.5;
% índice da posição do dano adimensional (0<alpha<1)
d = elementNodes(e,3);
% profundidade do dano (0<d<0.6)
eta = d/h;
% relação de profundidade de trinca adimensional
As = A;

% Mehrjoo
f_eta = 0.6384*eta^2-1.035*eta^3+3.7201*eta^4-5.1773*eta^5
...
+7.553*eta^6-7.332*eta^7+2.4909*eta^8;
k = E*b*h^2/(72*pi*f_eta);

AA = (dx^2*k + 2*E*I*dx*alpha)/(2*dx*k + 2*E*I);
BB = (dx^3/(3*E*I))+(dx/(G*As))- (As*dx^2/(2*E*I)) ...
+ (alpha^2*dx^2/k) - (As*alpha*dx/k);
CC =
(2*G*As*k*dx^2+6*E*I*G*As*dx*alpha^2+6*E*I*k)/(3*G*As*dx*k+6*G*As*E*I*alp
ha);

% rigidez
Kele = 1/BB * [1 AA -1 dx-AA ;
              AA CC*AA -AA AA*(dx-CC) ;
              -1 -AA 1 AA-dx ;
              dx-AA AA*(dx-CC) AA-dx (dx^2-2*AA*dx+AA*CC)] ;
Kglob(elementDof(e,:),elementDof(e,:)) =
Kglob(elementDof(e,:),elementDof(e,:)) + Kele;
Mglob(elementDof(e,:),elementDof(e,:)) =
Mglob(elementDof(e,:),elementDof(e,:)) + Mele;

end
end

```



# Anexos

# A . Elementos Isoparamétrico e Integração Numérica

## A.1 Elementos Isoparamétrico

Coordenadas Naturais ou Normais ( $\xi$ )

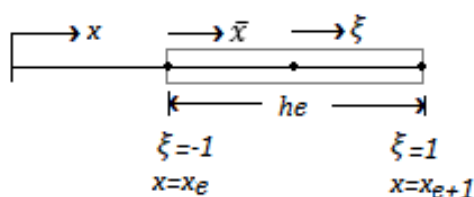


Figura A.1 – Coordenada global  $x$ , coordenada local  $\bar{x}$ , coordenada local normalizada  $\xi$ .

$$\xi = \frac{x - x_e + x - x_{e+1}}{h_e} = \frac{2x - (x_e + x_{e+1})}{h_e} \quad (\text{A.1})$$

onde,  $x_e$  e  $x_{e+1}$  são as coordenadas globais dos nós nas extremidades direita e esquerda de elemento finito 1D, respectivamente, de comprimento  $h_e$ . A coordenada  $\xi$  é denominada de coordenada normal (ou coordenada natural), a fim de implicar que esta coordenada é uma coordenada normalizada, não-dimensional, cujos valores são sempre  $\xi \in [-1;1]$ .

A transformação descrita na Eq. (A.1) mapeia os pontos  $x$  ( $x_e \leq x \leq x_{e+1}$ ) para os pontos ( $-1 \leq \xi \leq 1$ ). De forma que:

$$\begin{cases} x & (\xi = -1) = x_e \\ x & (\xi = +1) = x_{e+1} \end{cases}$$

O sistema de coordenada normal possui as seguintes vantagens:

- é conveniente para a construção das funções interpoladoras;
- é conveniente para a integração dos coeficientes matriciais da quadratura de Gauss-Legende.

Pode-se criar uma relação entre as coordenadas globais  $x$  e normais  $\xi$ :

$$\xi = g(x) = \frac{2x - (x_e + x_{e+1})}{h_e} \quad \text{e} \quad x = f(\xi) = \frac{\xi h_e + x_e + x_{e+1}}{2} \quad (\text{A.2})$$

onde,  $f(\xi)$  e  $g(x)$  são funções lineares de  $\xi$  e  $x$ , respectivamente.

Discute-se a transformação do sistema de coordenada global  $x$  para o sistema de coordenada local  $\xi$  que tem a origem no centro do elemento e escalado no intervalo  $\xi \in [-1;1]$ . A transformação é obtida da dada transformações lineares:

A transformação (2) pode ser reescrita em forma de funções interpoladoras:

$$x = f(x) = \frac{(1 + \xi)}{2} x_{e+1} + \frac{(1 - \xi)}{2} x_e = \frac{1}{2} [((+1) - \xi) \quad (\xi - (-1))] \begin{pmatrix} x_e \\ x_{e+1} \end{pmatrix} \quad (\text{A.3})$$

ou seja,

$$x = \sum_{i=1}^r x_i \psi_i(\xi) \quad (\text{A.4})$$

onde  $\psi_i$  é a função interpoladora de Lagrange de grau  $r - 1$ . A Equação (4) descreve a forma do elemento. Logo,  $\psi_i$  é conhecido como função de forma.

A derivada da Eq. (4) é dada por:

$$dx = \left( \sum_{i=1}^r x_i \frac{d\psi_i}{d\xi} \right) d\xi = J d\xi \quad (\text{A.5})$$

onde  $J$  é a jacobiana da transformação,

$$J = \frac{dx}{d\xi} = \left( \sum_{i=1}^r x_i \frac{d\psi_i}{d\xi} \right) \quad (\text{A.6})$$

A derivada de  $\psi_i$  com relação a  $x$  é dada por:

$$\frac{d\psi_i}{dx} = \frac{d\psi_i}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{d\xi}} \frac{d\psi_i}{d\xi} = J^{-1} \frac{d\psi_i}{d\xi} \quad (\text{A.7})$$

## A.2 Integração Numérica

A avaliação da integral de forma

$$\int_a^b F(x) dx \quad (\text{A.8})$$

por técnicas clássicas de integração exata é, por vezes, difíceis ou até mesmo impossível devido à complexidade do integrando  $F(x)$ . A integração numérica é também requerida quando o integrando é avaliado aproximadamente, como um método de penalidade, e quando o integrando depende de uma quantidade conhecida apenas em pontos discretos, por exemplo, em problemas não-lineares.

A ideia básica por trás da técnica de integração numérica, também conhecida como quadratura, é encontrar a função  $P(x)$  que seja uma aproximação razoável de  $F(x)$  e fácil de ser integrada. O polinômio de interpolação de grau  $n$ , denotado por  $P_n$  que interpola o integrando em  $n + 1$  pontos no intervalo  $[a; b]$  frequentemente produz uma aproximação razoável e possui a propriedade desejável de integração simples. Uma ilustração da aproximação da função  $F(x)$  por um polinômio  $P_n(x)$  que corresponde exatamente a função  $F(x)$  nos pontos discretos, conforme indicado na Fig. A.1.

A solução exata da (48) é dada pela área abaixo da curva sólida e a aproximação é dada por:

$$\int_a^b F(x)dx \cong \int_a^b P_n(x)dx \quad (\text{A.9})$$

é dada pela área sobre a curva tracejada. Nota-se que a diferença, erro na aproximação,  $E = F(x) - P_n(x)$ . Os métodos de integração comumente usados podem ser classificados em dois grupos:

- Newton-Cotes: fórmula que emprega valores de funções igualmente espaçados pontos de amostra;
- Quadratura de Gauss: fórmula que aplica pontos de amostra não igualmente espaçados.

### A.2.1 Quadratura de Newton-Cotes

Para  $n + 1$  igualmente espaçada, a fórmula Newton-Cotes de integração é dada por:

$$\int_a^b F(x)dx = (b - a) \sum_{i=1}^{n+1} w_i F(x_i) \quad (\text{A.10})$$

onde  $w_i$  são os coeficientes de ponderação e  $x_i$  são os pontos base igualmente espaçados. Para  $n = 1$ , a Eq. A.10 resulta na regra do trapézio, na qual corresponde a área sobre uma função polinomial linear  $P_1(x)$ :

$$\int_{a=x_1}^{b=x_2} F(x)dx = \frac{h}{2}[F(x_1) + F(x_2)] \quad (\text{A.11})$$

onde  $E$  denota o erro de aproximação e  $h$  é o espaçamento entre dois pontos bases ( $h = x_2 - x_1$ ).

Para  $n = 2$ , a Eq. A.11 resulta na regra de Simpson. Os coeficientes de ponderação  $w_i$  ( $i=1, \dots, n$ ), para  $n = 1, 2, \dots, 6$  é dada na Tabela ???. Nota que  $w_1 = 1$ .

$$\int_{a=x_1}^{b=x_3} F(x)dx = \frac{h}{3}[F(x_1) + 4F(x_2) + F(x_3)] \quad (\text{A.12})$$

Os coeficientes de ponderação  $w_i$  ( $i=1, \dots, n$ ), para  $n=1,2, \dots, 6$  é dada na Tab.8. Nota-se que:

$$\sum_{i=1}^{n+1} w_i = 1 \quad (\text{A.13})$$

Tabela 8 – Coeficientes de ponderação para a fórmula de Newton Cotes

n	w1	w2	w3	w4	w5	w6	w7
1	1/2	1/2					
2	1/6	4/6	1/6				
3	1/8	3/8	3/8	1/8			
4	7/90	32/90	12/90	32/90	7/90		
5	19/288	75/288	50/288	50/288	75/288	19/288	
6	41/840	216/840	27/840	272/840	27/840	216/840	41/840

Quando  $n$  for par, por exemplo, quando existir um número de intervalos pares e um número ímpar de pontos base, a fórmula é exata para  $F(x)$  descrita por polinômios de ordem  $n$  ou menor. E quando  $n$  é ímpar, a fórmula é exata para um polinômio de ordem  $n$  ou menor.

## A.2.2 Quadratura de Gauss-Legendre

Na quadratura de Newton-Cotes, os pontos pela escolha de  $n + 1$  pontos base foram especificados, para ser igualmente espaçados. Se  $x_i$  não é especificado, então existe  $2n + 2$  parâmetros indefinidos, os pesos  $w_i$  e os pontos base  $x_i$ , que define um polinômio de grau  $2n + 1$ . A quadratura de Gauss-Legendre baseia-se nesta ideal. O ponto base  $x_i$  e o peso  $w_i$  são escolhidos de tal forma que a soma de  $n + 1$  apropriadamente valores ponderados da função resulte na integral exata quando  $F(x)$  é um polinômio do grau  $2n+1$  ou menor. A fórmula da quadratura de Gauss-Legendre é dada por:

$$\int_a^b F(x)dx = \int_{-1}^1 F(\xi)d(\xi) = \sum_{i=1}^r w_i F(\xi_i) \quad (\text{A.14})$$

onde,  $w_i$  são os valores de ponderação,  $\xi_i$  são os pontos de base (raízes do polinômio Legendre  $P_{n+1}(\xi)$  e  $F$  é o integrando transformado para coordenadas naturais:

$$F(\xi) = F(x(\xi))J(\xi) \quad (\text{A.15})$$

Os valores de ponderação  $w_i$ , também conhecidos como pontos de Gauss, para a quadratura de Gauss-Legendre são dados, para  $i=1,2,\dots,6$ , na Tabela 2.

A quadratura de Gauss-Legendre é mais utilizada uma vez que requer menor quantidade de pontos que a quadratura de Newton-Cotes, assim economizando esforço computacional para alcançar a mesma precisão. O erro na aproximação é nulo se a  $(2n + 1)$ -éssima derivada integrando anular-se. Em outras palavras, o polinômio de grau  $n$  é integrado exatamente empregando  $(2n + 1)/2$  pontos de Gauss. Quando  $n + 1$  for ímpar, deverá escolher o inteiro maior mais próximo.

**Exemplo I.** Considere a avaliação numérica das seguintes equações integrais:

$$K_{11} = \int_{x_e}^{x_{e+1}} \frac{d\psi_1}{dx} \frac{d\psi_1}{dx} dx \quad ; \quad G_{11} = \int_{x_e}^{x_{e+1}} \psi_1 \psi_1 dx \quad (\text{A.16})$$

Tabela 9 – Pesos e pontos de Gauss para quadratura de Gauss-Legendre

Pontos $\xi_i$	n	Pesos $w_i$
0.000000	Um	2.000000
$\pm 0.5735026927$	Dois	1.000000
0.000000	Três	-
$\pm 0.7745966692$	Quatro	-
$\pm 0.3399810435$	Cinco	-
$\pm 0.8611363116$	Seis	-

onde,  $\psi_1$  é o polinômio quadrático de Lagrange associado ao nó 1 do elemento de 3 nós Lagrange (Fig. 2).

$$\psi_1(\xi) = \frac{-1}{2}\xi(1 - \xi) \quad (\text{A.17})$$

Se escolhermos a transformação linear (1), temos  $J = \frac{h_e}{2}$ .

$$dx = \frac{h_e}{2}d\xi \quad ; \quad \frac{d\psi_1}{dx} = \frac{d\psi_1}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \frac{2}{h_e} \frac{d\psi_1}{d\xi} \quad (\text{A.18})$$

e as expressões  $K_{11}$  e  $G_{11}$  tornam-se:

$$K_{11} = \frac{2}{h_e} \int_{-1}^1 \frac{d\psi_1}{d\xi} \frac{d\psi_1}{d\xi} d\xi \quad ; \quad G_{11} = \frac{h_e}{2} \int_{-1}^1 \psi_1 \psi_1 d\xi \quad (\text{A.19})$$

onde  $h_e = x_{e+1} - x_e$ . Nota-se que o integrando em  $K_{11}$  é um polinômio de grau 2 e que em  $G_{11}$  é um polinômio de grau 4:

$$\frac{d\psi_1}{d\xi} = \frac{-1}{2} + \xi \quad (\text{A.20})$$

$$\left(\frac{d\psi_1}{d\xi}\right)^2 = \frac{1}{4} + \xi^2 - \xi \quad (\text{A.21})$$

$$\psi_1^2 = \frac{1}{4}\xi^2(1 - 2\xi + \xi^2) = \frac{1}{4}(\xi^2 - 2\xi^3 + \xi^4) \quad (\text{A.22})$$

Usa-se ambos os tipos de quadratura para avaliar as integrais. Quando o elemento isoparamétrico é usado, a avaliação de  $K_{11}$  e  $G_{11}$  toma-se bastante tempo. Contudo, para um computador digital tal cálculo é trivial. Deve-se apontar que o cálculo do jacobiano é o mesmo ( $J_e = \frac{h_e}{2}$ ) quando o elemento é retilíneo, mesmo se a transformação de coordenada envolva elementos quadráticos e cúbicos. Contudo, quando o elemento é curvo a jacobiana é função do  $\xi$  quando a transformação envolve outros elementos que a função linear de interpolação. Por exemplo, quando o elemento isoparamétrico quadrático é usado, temos:

$$J_e = \sum_{i=1}^3 x_i^e \frac{d\psi_i}{d\xi} = x_e \left(\frac{-1}{2} + \xi\right) + \left(x_e + \frac{h_e}{2}\right) (-2\xi) + (x_e + h_e) \left(\frac{1}{2} + \xi\right) = \frac{h_e}{2} \quad (\text{A.23})$$

onde  $x_e$  é a coordenada global no nó  $i$ . Para um elemento retilíneo, temos  $x_1^e = x_e$ ;  $x_2^e = x_e + \frac{h_e}{2}$  e  $x_3^e = x_e + h_e = x_{e+1}$ :

A quadratura de Gauss-Legendre de uma matriz de elemento finito:

$$K_{ij} = \int_{x_e}^{x_{e+1}} \frac{d\psi_i}{dx} \frac{d\psi_j}{dx} dx \quad ; \quad G_{ij} = \int_{x_e}^{x_{e+1}} \psi_i \psi_j dx \quad ; \quad F_i = \int_{x_e}^{x_{e+1}} \psi_i dx \quad (\text{A.24})$$

para funções de interpolação quadrática e cúbica produz os seguintes valores, acima do 5º ponto decimal:

### Quadrático (fórmula - 3 pontos)

$$[K] = \frac{1}{h_e} \begin{bmatrix} 2.33333 & -2.66667 & 0.33333 \\ -2.66667 & 5.33333 & -2.66667 \\ 0.33333 & -2.66667 & 2.33333 \end{bmatrix}$$

$$[G] = \frac{h_e}{10} \begin{bmatrix} 1.33333 & -0.66667 & -0.33333 \\ 0.66667 & 5.33333 & 0.66667 \\ -0.33333 & 0.66667 & 1.33333 \end{bmatrix}$$

$$[F] = h_e \begin{Bmatrix} 0.166667 \\ 0.666667 \\ 0.166667 \end{Bmatrix}$$

### Cúbico (fórmula - 4 pontos)

$$[K] = \frac{1}{h_e} \begin{bmatrix} 3.7 & -4.725 & 1.35 & -0.325 \\ -4.725 & 10.8 & -7.425 & 1.35 \\ 1.35 & -7.425 & 10.8 & -4.725 \\ -0.325 & 1.35 & -4.725 & 3.7 \end{bmatrix}$$

$$[G] = \frac{h_e}{10} \begin{bmatrix} 0.761905 & 0.589286 & -0.214286 & 0.113095 \\ 0.589286 & 3.85714 & -0.482143 & -0.214286 \\ -0.214286 & -0.482143 & 3.85714 & 0.589286 \\ 0.113095 & -0.214286 & 0.589286 & 0.761905 \end{bmatrix}$$

$$[F] = h_e \begin{Bmatrix} 0.125 \\ 0.375 \\ 0.375 \\ 0.125 \end{Bmatrix}$$

- Quadratura de Newton-Cotes:

Seja  $K_n^m$  o resultado obtido usando  $m$  pontos da fórmula de Newton-Cotes. Temos  $b - a = 2$ , e:

$$K_{11}^{(2)} = \frac{4}{2h_e} \left[ \left( \frac{1}{4} + 1 + 1 \right) + \left( \frac{1}{4} \right) + 1 - 1 \right] = \frac{5}{h_e}$$

$$K_{11}^{(3)} = \frac{4}{6h_e} \left[ \left( \frac{5}{2} + 4 \left( \frac{1}{4} \right) \right) \right] = \frac{7}{3h_e}$$

$$K_{11}^{(4)} = \frac{4}{8h_e} \left[ \frac{5}{2} + 3 \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{9} \right) 2 \right] = \frac{7}{3h_e}$$

$$G_{11}^{(2)} = \frac{h_e}{4} \frac{1}{2} \left[ (1 + 2 + 1) + (1 - 2 + 1) \right] = \frac{h_e}{2}$$

$$G_{11}^{(3)} = \frac{h_e}{4} \frac{1}{6} [4 + 4(0)] = \frac{h_e}{6}$$

$$G_{11}^{(4)} = \frac{h_e}{4} \frac{1}{8} \left[ 4 + 3 \left( \frac{1}{9} + \frac{1}{81} \right) 2 \right] = \frac{4h_e}{27}$$

$$G_{11}^{(5)} = \frac{h_e}{4} \frac{1}{90} \left[ 7(4) + 32 \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{16} \right) 2 \right] = \frac{2h_e}{15}$$

$$G_{11}^{(6)} = \frac{h_e}{4} \frac{1}{288} \left[ 19(4) + 75 \left( \frac{9}{25} + \frac{81}{625} \right) 2 + 50 \left( \frac{1}{25} + \frac{1}{625} \right) 2 \right] = \frac{2h_e}{15}$$

Assim  $K_{11}$  é integrado exatamente pela fórmula de 3 pontos, enquanto  $G_{11}$  é integrado exatamente pela fórmula de 5 pontos, conforme apresentado anteriormente.

- Quadratura de Gauss-Legendre Temos que:

$$K_{11}^{(1)} = \frac{2}{h_e} \left( \frac{1}{4} \right) 2 = \frac{1}{h_e}$$

$$K_{11}^{(2)} = \frac{2}{h_e} \left[ \frac{1}{4} + (-0.57735)^2 \right] 2 = \frac{2.33333}{h_e} = \frac{7}{3h_e}$$

$$K_{11}^{(3)} = \frac{2}{h_e} \left[ \frac{1}{4} (0.88889) + 2 \left( \frac{1}{4} + 0.77459^2 \right) (0.55555) \right] = \frac{2.33333}{h_e} = \frac{7}{3h_e}$$

$$G_{11}^{(2)} = \frac{h_e}{2} \frac{1}{4} \left[ (0.57735)^2 + (0.57735)^4 \right] 2 = 0.11111h_e = \frac{h_e}{9}$$

$$G_{11}^{(3)} = \frac{h_e}{2} \frac{1}{4} \left[ (0.77459)^2 + (0.77459)^4 \right] (0.55555) 2 = 0.13333h_e = \frac{2h_e}{15}$$

Nota-se que a quadratura de Gauss-Legendre resulta na mesma precisão para poucos pontos de integração. Como é descrito, o polinômio de segundo grau ( $n = 2$ ) é integrado exatamente por  $\left( \frac{n+1}{2} = \frac{3}{2} \right)$ , dois pontos de Gauss, e o polinômio de quarto grau é descrito por 3 pontos de Gauss.