

Tese de Doutorado

**PREVISÃO DE VIDA EM FADIGA BASEADA
NA MECÂNICA DO DANO CONTÍNUO**

Guilherme Vaz Ferreira

Brasília, março de 2020

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

FACULDADE DE TECNOLOGIA

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
Faculdade de Tecnologia

Tese de Doutorado

**PREVISÃO DE VIDA EM FADIGA BASEADA
NA MECÂNICA DO DANO CONTÍNUO**

Guilherme Vaz Ferreira

*Tese de doutorado submetida ao Departamento de Engenharia Mecânica
da Faculdade de Tecnologia da Universidade de Brasília como parte dos
requisitos para obtenção do grau de Doutor em Ciências Mecânicas*

Banca Examinadora

Prof. Lucival Malcher, D.Sc. (ENM-UnB)

Orientador

Prof. Fábio Comes Castro, D.Sc. (ENM-UnB)

Examinador interno ao programa

Prof. Francisco Evangelista Júnior, PhD. (ENC-UnB)

Examinador externo ao programa

Prof. Luis Filipe Galvão dos Reis, PhD. (DEM-IST)

Examinador externo

Prof. José Alexander Araújo, PhD. (ENM-UnB)

Suplente

FICHA CATALOGRÁFICA

FERREIRA, GUILHERME VAZ

Previsão de Vida em Fadiga Baseada na Mecânica do Dano Contínuo

xvi, 94p., 210 x 297 mm (ENM/FT/UnB, Doutor, Ciências Mecânicas, 2020).

Tese de Doutorado - Universidade de Brasília, Faculdade de Tecnologia

Departamento de Engenharia Mecânica.

- | | |
|---------------------------------------|--|
| <i>1. Mecânica do dano contínuo</i> | <i>2. Fadiga multiaxial</i> |
| <i>3. Função denominadora de dano</i> | <i>4. Encruamento cinemático de Desmorat</i> |
| <i>5. Flexão fora do plano</i> | <i>6. Amarra offshore</i> |
| <i>I. ENM/FT/UnB</i> | <i>II. Título (série)</i> |

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

FERREIRA, G. V. (2020). Previsão de Vida em Fadiga Baseada na Mecânica do Dano Contínuo. Tese de Doutorado em Ciências Mecânicas. Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 94p.

CESSÃO DE DIREITOS

AUTOR: Guilherme Vaz Ferreira.

TÍTULO: Previsão de Vida em Fadiga Baseada na Mecânica do Dano Contínuo.

GRAU: Doutor ANO: 2020

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta tese de doutorado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desta tese de doutorado pode ser reproduzida sem autorização por escrito do autor.

Guilherme Vaz Ferreira

Colônia Agrícola Águas Claras, Chácara 52, Casa 06 - Guará I

CEP: 71.090-625, Brasília - DF - Brasil

guilhermedf@gmail.com

Dedicatória

Dedico esta tese de doutorado aos meus amados pais, Ariday e Valtuir.

Guilherme Vaz Ferreira

Agradecimentos

Aos pilares da minha vida, Ariday e Valtuir, por sempre me apoiarem e estarem comigo nos momentos de alegria e tristeza.

Aos meus irmãos, Rafael, Jaqueline e Juliana, por fazerem a minha vida mais feliz.

À minha namorada, Renata, por nunca desistir do nosso amor, estando sempre ao meu lado, mesmo nos momentos mais difíceis.

Ao meu orientador, Lucival Malcher, por ter me aceitado de braços abertos como seu aluno de doutorado e sempre ter me incentivado nesta longa e árdua caminhada. Além disso, agradeço também por sua agradável companhia nos eventos científicos e momentos de diversão.

Ao professor Edgar Nobuo Mamiya, que, além de ter me ensinado conceitos fundamentais para a minha tese de doutorado durante as suas aulas de Plasticidade Cíclica, foi a pedra angular no projeto de pesquisa realizado em parceria com a Petrogal Brasil SA.

Ao professor Fábio Comes Castro pelas suas excelentes aulas de Fadiga Multiaxial e também por estar sempre disponível para me ajudar.

Aos professores Francisco Evangelista Júnior, Luis Filipe Galvão dos Reis e José Alexander Araújo por terem aceitado compor a banca de defesa da minha tese de doutorado.

Aos professores Cosme da Silva, Daniel Rosa, Flaminio Levy Neto, Jorge Ferreira, Luís Veloso, Palloma Muterlle e Thiago Doca.

Ao Estarle Campos, que, não só durante o breve período que estive em Cachan, sempre me ajudou a compreender ainda mais o universo da mecânica do dano contínuo.

Aos meus amigos Eduardo Nunes Filho, Felipe Canut e Raniere Neves pela parceria na realização das atividades relacionadas ao projeto e também pelos momentos de descontração fora do ambiente acadêmico.

Aos outros amigos que fiz na Universidade de Brasília, Adriano Possebon, Cainã Bemfica, Carolina Burbano, Gustavo Reinke, João Cavalheiro, Leonel Morales, Lucas Araújo, Lucas Machado, Marcus Sá, Maycol Coutinho, Pedro Rocha, Raphael Cardoso, Remy Badibanga, Thiago Miranda, Vinícius Rodrigues e Vítor Caixeta.

Aos meus amigos de longa data, Dalmo Costa, Gabriel Carvalho, Gabriel Manso e Guilherme Stanzani.

Aos técnicos de laboratório, Adriano, Arthur, Cláudio, Edson, Ivan, Marcos, Rafael, Ricardo, Tarsis, Wesley e Xavier.

Ao Centro Universitário do Distrito Federal e ao técnico Fabricio Queiroz pela primordial ajuda na confecção dos corpos de prova.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior pelo apoio financeiro durante o desenvolvimento deste trabalho.

À Petrogal Brasil SA e ao ISPG-Centro Tecnológico SA pelo financiamento do projeto de pesquisa.

Guilherme Vaz Ferreira

Este trabalho propõe a aplicação da Mecânica do Dano Contínuo em problemas de fadiga de baixo e alto número de ciclos na presença de carregamentos multiaxiais, bem como o estudo do problema de fadiga em sistemas de amarração de plataformas tipo FPSO. Para isso, a lei de evolução de dano de Lemaitre foi utilizada, tendo o seu denominador de dano alterado por uma função denominadora de dano dependente da razão de triaxialidade e de dois parâmetros de calibração, um em tração-compressão e outro em torção alternada. Em condições de baixo número de ciclos, em que a deformação plástica macroscópica não podia ser desprezada, o dano no material evoluía de acordo com o campo de deformação plástica macroscópico, e a vida era determinada no instante em que o nível de dano no material atingia o nível de dano crítico, que é uma propriedade do material. Em condições de alto número de ciclos, em que se observava pouca ou nenhuma deformação plástica em nível macroscópico, o problema era tratado através de uma modelagem em duas escalas, em que se assumia a existência de uma inclusão microscópica na matriz do material, com propriedades inferiores àquelas observadas macroscopicamente. Nessa condição, a presença da inclusão induz a um problema de plasticidade localizada e o dano evolui de acordo com o campo de deformação plástica na microescala. Adotou-se a lei de localização de Eshelby-Kröner, que relaciona o campo de deformação total na microescala com o campo de deformação total na macroescala e, novamente, a vida era calculada no instante em que o dano na microescala atingia o nível de dano crítico. Para modelar o encruamento cinemático, adotou-se a proposta de Desmorat, que considera a não saturação das tensões cinemáticas e o controle do colapso incremental. Assim, considerando dados da literatura, a modelagem em uma escala foi testada nos aços SAE 1045 e S460N em carregamentos axiais, torcionais, multiaxiais proporcionais e multiaxiais não proporcionais. Por outro lado, a modelagem em duas escalas foi avaliada em um conjunto de dados experimentais realizados em aço *offshore* de alta resistência de grau R4, utilizado em sistemas de amarração de FPSOs. Os corpos de prova padrão fabricados em aço grau R4 apresentavam uma condição superficial oxidada semelhante àquela encontrada nos elos das amarras. Ensaios sob carregamentos axiais, torcionais, multiaxiais proporcionais e multiaxiais não proporcionais foram realizados, bem como ensaios uniaxiais de tração monotônica, com o intuito de se obter as propriedades do aço grau R4. Em ambas as modelagens, em uma e duas escalas, observa-se que mais de 95% das vidas calculadas para os ensaios axiais, torcionais e multiaxiais proporcionais estavam dentro de uma banda de dispersão de fator 3 e, para os ensaios multiaxiais não proporcionais, mais de 65% das vidas estimadas estavam dentro de uma banda de dispersão de fator 3. Por fim, um aparato experimental capaz de reproduzir o efeito da fadiga por flexão fora do plano em amarras sob escala reduzida foi utilizado para realização de oito ensaios experimentais em trechos de correntes com nove elos com malhete. Nesse caso, como o comportamento das amarras na escala macroscópica era elástico ou elastoplástico, sendo estabilizado no regime elástico nos primeiros ciclos de carga, utilizou-se o modelo em duas escalas para previsão de vida em fadiga, que foi capaz de estimar 75% das vidas em uma banda de dispersão de fator 3.

Palavras-chave: Mecânica do dano contínuo, Fadiga multiaxial, Função denominadora de dano, Encruamento cinemático de Desmorat, Flexão fora do plano, Amarra *offshore*

ABSTRACT

This work proposes the application of Continuous Damage Mechanics in fatigue problems of low and high number of cycles in the presence of multiaxial loads, as well as the study of the fatigue problem in FPSO platform mooring systems. For this purpose, Lemaitre's damage evolution law was used, having its damage denominator changed by a denominator of damage function dependent on the stress triaxiality and two calibration parameters, one in tension-compression and another in alternating torsion. In conditions of low number of cycles, where the macroscopic plastic strain could not be neglected, the damage variable evolved according to the macroscopic plastic strain field, and the life was determined at the instant when the damage variable reached the critical damage, which is a material property. In conditions with a high number of cycles, where small or no plastic strain was observed at the macroscopic level, the problem was treated by a two-scale damage model, in which was assumed the existence of a microscopic inclusion in the material matrix, with lower properties than those observed macroscopically. In this condition, the presence of the inclusion induces a problem of localized plasticity and the damage evolves according to the plastic strain field at the microscale. The Eshelby-Kröner localization law was adopted, which relates the total strain field at the microscale with the total strain field at the macroscale and, again, life was calculated at the instant when the damage on the microscale reached the critical damage. To model the kinematic hardening, Desmorat's law was adopted, which considers the non-saturation of kinematic back stresses and the control of ratcheting. Thus, considering data from the literature, modeling at macroscale was tested on SAE 1045 and S460N steels in axial, torsional, proportional and non-proportional loadings. On the other hand, the two-scale modeling was evaluated in a set of experimental data made of high-strength offshore steel grade R4, used in FPSO mooring systems. The standard specimens manufactured in grade R4 steel had an oxidized surface condition similar to that found in the mooring chain links. Tests under axial, torsional, proportional and non-proportional loadings were performed, as well as monotonic uniaxial tension tests, in order to obtain the properties of grade R4 steel. In both models, in one and two scales, it is observed that more than 95% of the lives calculated for axial, torsional and proportional loading were within factor-of-three boundaries and, for non-proportional loadings, over 65% of the estimated lives were within factor-of-three boundaries. Finally, an experimental apparatus capable of reproducing the effect of out-of-plane bending fatigue on reduced scale mooring chains was used to carry out eight experimental tests on chains with nine stud links. In this case, as the behavior of the chains on the macroscopic scale was elastic or elastoplastic, being stabilized in the elastic regime in the first loading cycles, the model was used in two scales to predict fatigue life, which was able to estimate 75% of lives within a factor-of-three boundaries.

Keywords: Continuous damage mechanics, Multiaxial fatigue, Denominator of damage function, Desmorat Kinematic Hardening, Out-of-plane bending, Offshore mooring chain

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	CONTEXTUALIZAÇÃO E MOTIVAÇÃO	1
1.2	ESTADO DA ARTE	4
1.3	DEFINIÇÃO DO PROBLEMA E OBJETIVOS DA TESE	6
1.4	CONTRIBUIÇÕES DA TESE	6
1.5	PUBLICAÇÕES E EVENTOS CIENTÍFICOS	7
1.6	APRESENTAÇÃO DO MANUSCRITO	8
2	ABORDAGEM DE DANO INCREMENTAL PARA PREVISÃO DE VIDA EM FADIGA	9
2.1	CONCEITOS BÁSICOS DA MECÂNICA DO DANO CONTÍNUO DE LEMAITRE	9
2.2	LEI DE ENCRUAMENTO CINEMÁTICO DE DESMORAT	11
2.3	FUNÇÕES DENOMINADORAS DE DANO	14
2.3.1	CARACTERIZAÇÃO DO ESTADO DE TENSÃO	14
2.3.2	FUNÇÕES DENOMINADORAS DE DANO EXISTENTES	15
2.3.3	FUNÇÃO DENOMINADORA DE DANO PROPOSTA	17
2.3.4	COMPARAÇÕES ENTRE AS FUNÇÕES DENOMINADORAS DE DANO	17
2.4	MODELO MATEMÁTICO	20
2.4.1	CONSISTÊNCIA TERMODINÂMICA	25
2.5	MODELO NUMÉRICO	27
2.5.1	INTRODUÇÃO	27
2.5.2	PREDITOR ELÁSTICO	28
2.5.3	CORRETOR PLÁSTICO	29
2.5.4	MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON	31
2.5.5	CARREGAMENTOS AXIAIS-TORCIONAIS	34
2.5.6	PREVISÃO DA VIDA EM FADIGA	36
2.6	PARÂMETROS DOS MATERIAIS E TRAJETÓRIAS DE CARREGAMENTO	36
2.7	RESULTADOS E DISCUSSÕES	42
2.7.1	AÇO SAE 1045	42
2.7.2	AÇO S460N	46
2.7.3	COMPILAÇÃO DAS VIDAS PREVISTAS	48
2.8	CONCLUSÕES	49
3	ABORDAGEM DE DANO INCREMENTAL EM DUAS ESCALAS PARA PREVISÃO DE	

VIDA EM FADIGA	51
3.1 MODELO DE DUAS ESCALAS.....	51
3.1.1 CONCEITOS BÁSICOS	51
3.1.2 LEI DE LOCALIZAÇÃO	52
3.1.3 CONSIDERAÇÃO SOBRE O ESTADO DE TENSÃO.....	53
3.1.4 FUNÇÃO DENOMINADORA DE DANO NA MICROESCALA.....	54
3.2 MODELO MATEMÁTICO	54
3.3 MODELO NUMÉRICO	57
3.3.1 PREDITOR ELÁSTICO.....	57
3.3.2 CORRETOR PLÁSTICO.....	58
3.3.3 MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON.....	58
3.3.4 CONTROLE DE TENSÃO	60
3.4 ENSAIOS EM CORPOS DE PROVA PADRÃO	62
3.5 ENSAIOS EM AMARRAS	68
3.5.1 DESCRIÇÃO DO PROBLEMA	68
3.5.2 ESTADO DA ARTE SOBRE MECANISMO OPB	70
3.5.3 PROCEDIMENTO EXPERIMENTAL	75
3.5.4 CÁLCULO DAS TENSÕES CRÍTICAS.....	76
3.5.5 DADOS EXPERIMENTAIS	77
3.6 RESULTADOS E DISCUSSÕES.....	78
3.7 CONCLUSÕES	82
4 CONSIDERAÇÕES FINAIS E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	84
4.1 CONSIDERAÇÕES FINAIS	84
4.2 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....	87
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	88

LISTA DE FIGURAS

2.1	Evolução do dano em um material metálico. Adaptado de [56].....	9
2.2	(a) Curvas tensão-deformação monotônicas; e (b) Efeito do colapso incremental para os modelo de Prager, Armstrong-Frederick e Desmorat. Adaptado de [60].	13
2.3	Representação do estado de tensão inicial em diversos corpos de prova. Adaptado de [61].....	15
2.4	Comportamento das funções denominadoras de dano (Malcher e Mamiya [29], Castro e Bemfica [30] e proposta) sob 4 condições distintas.....	20
2.5	Resumo do modelo matemático descrito na Seção 2.4.....	24
2.6	Quadro-resumo das equações necessárias para a atualização das tensões e variáveis internas associadas ao modelo estudado na Seção. 2.5.	33
2.7	Quadro-resumo do método de Newton-Raphson aplicado ao modelo estudado na Seção 2.5.	34
2.8	Esquema do processo de previsão da vida em fadiga descrito no Capítulo 2.	36
2.9	Curvas de encruamento, segundo o modelo de Desmorat, para os aços SAE 1045 e S460N.	37
2.10	Trajетórias de carregamento utilizadas: (a) tração-compressão, (b) torção, (c) multi-axial proporcional, (d) multi-axial não proporcional circular e (e) multi-axial não proporcional retangular.	38
2.11	Vidas previstas para o aço SAE 1045 nos ensaios tipo tração-compressão.	43
2.12	Vidas previstas para o aço SAE 1045 nos ensaios torcionais.	44
2.13	Vidas previstas para o aço SAE 1045 nos ensaios multi-axiais proporcionais.	44
2.14	Vidas previstas para o aço SAE 1045 nos ensaios multi-axiais não proporcionais.....	45
2.15	Vidas previstas para o aço S460N nos ensaios tipo tração-compressão.	46
2.16	Vidas previstas para o aço S460N nos ensaios torcionais.	47
2.17	Vidas previstas para o aço S460N nos ensaios multi-axiais proporcionais.	47
2.18	Vidas previstas para o aço S460N nos ensaios multi-axiais não proporcionais.	48
3.1	Modelo de duas escalas. Adaptado de [32].	53
3.2	Resumo do modelo matemático da microescala.....	56
3.3	Quadro-resumo das equações necessárias para a atualização das tensões e variáveis internas associadas à microescala.....	59
3.4	Quadro-resumo do método de Newton-Raphson aplicado à microescala.	60
3.5	Geometrias dos corpos de prova padrão utilizados nos ensaios: (a) monotônicos e (b) de fadiga. Dimensões nominais em mm.....	62

3.6	Exemplo de corpo de prova padrão utilizado em um dos ensaios de fadiga.....	63
3.7	Curva tensão-deformação de engenharia monotônica do aço <i>offshore</i> grau R4.....	63
3.8	Curva de encruamento, segundo o modelo de Desmorat, para o aço grau R4.....	64
3.9	Trajatórias de carregamento utilizadas nos ensaios do aço grau R4: (a) tração-compressão, (b) torção, (c) multiaxial proporcional, e (d) multiaxial não proporcional circular.	65
3.10	Tensões equivalentes <i>versus</i> vidas observadas para o aço grau R4.	67
3.11	Representação do escovém da boia Girassol. Adaptado de [12].	68
3.12	Trecho de amarra dentro do escovém: (a) elo com falha e (b) movimento do 5° elo. Adaptado de [12].	68
3.13	Fadiga dos elos por: (a) tração e (b) OPB. Adaptado de [13].	69
3.14	<i>Fairleads</i> do FPSO P-50 da Petrobras.	70
3.15	Locais de iniciação das trincas no elo devido à fadiga por: (a) tração e (b) OPB. Adaptado de [13].	70
3.16	Esquema do dispositivo utilizado por Melis, Jean e Vargas [14]: (a) escovém parado e (b) escovém em movimento. Adaptado de [14].	71
3.17	Desenho do RCA utilizado na boia da FPSO Girassol [12].	72
3.18	Aparato experimental utilizado por Lassen, Storvoll e Bech [81].	72
3.19	Máquinas usadas no JIP: (a) amarras menores e (b) amarras maiores [13].	74
3.20	Esquema do aparato experimental desenvolvido na Universidade de Brasília para a realização de ensaios de fadiga por flexão fora do plano em amarras.	75
3.21	(a) Exemplo de amarra utilizada nos ensaios e (b) geometria típica dos elos.	75
3.22	Esquema do ensaio de fadiga por flexão fora do plano das amarras.	76
3.23	(a) Falha de uma amarra por OPB e (b) posição do ponto crítico.	76
3.24	Diagrama de corpo livre de uma amarra ensaiada em fadiga por flexão fora do plano.	76
3.25	Vidas previstas para o aço grau R4 nos ensaios tipo tração-compressão.	78
3.26	Vidas previstas para o aço grau R4 nos ensaios torcionais.	79
3.27	Vidas previstas para o aço grau R4 nos ensaios multiaxiais proporcionais.	80
3.28	Vidas previstas para o aço grau R4 nos ensaios multiaxiais não proporcionais circulares.	80
3.29	Vidas previstas para as amarras fabricadas em aço grau R4.	81
4.1	Gráficos do tipo vida estimada <i>versus</i> vida observada para todos os espécimes fabricados em aço: (a) SAE1045 e (b) S460N.	85
4.2	Gráfico da vida estimada <i>versus</i> vida observada para todos os espécimes fabricados em aço grau R4.	86

LISTA DE TABELAS

2.1	Corpos de prova clássicos em plasticidade e na calibração da fratura. Adaptado de [61].	14
2.2	Composições químicas dos aços SAE 1045 [66] e S460N [67].	37
2.3	Propriedades mecânicas dos aços SAE 1045 [66] e S460N [67].	37
2.4	Parâmetros para o modelo de Desmorat dos aços SAE 1045 e S460N.	37
2.5	Aço SAE 1045 - Dados experimentais do relatório preparado por Leese e Socie [66] e resultados numéricos obtidos.	38
2.6	Aço S460N - Dados experimentais do relatório preparado por Hoffmeyer [67] e resultados numéricos obtidos.	40
2.7	Parâmetros de dano utilizados para os aços SAE 1045 e S460N.	42
2.8	Compilação das vidas previstas em relação às bandas de fator 2 e 3 dos aços SAE 1045 e S460N.	49
3.1	Propriedades monotônicas do aço grau R4.	63
3.2	Parâmetros do aço grau R4 calculados com a formulação descrita por Li, Zhang e Li [78].	64
3.3	Parâmetros do aço grau R4 relativos ao modelo de encruamento cinemático de Desmorat.	65
3.4	Dados experimentais e resultados numéricos obtidos para os ensaios de fadiga sob controle de tensão em corpos de prova padrão fabricados em aço grau R4.	65
3.5	Parâmetros de dano utilizados na microescala e na macroescala para o aço grau R4.	67
3.6	Dados experimentais e vidas estimadas para as amarras ensaiadas.	77
3.7	Compilação das vidas previstas em relação às bandas de fator 2 e 3 dos corpos de prova em aço grau R4.	81

LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolos Latinos

a	Constante definida por Eshelby	
a^k	Constante do material associada ao encruamento cinemático	
b	Constante de endurecimento cinemático	
b^k	Variável de substituição do modelo de Desmorat usada na consistência termodinâmica	
\mathbf{C}^e	Tensor de flexibilidade elástica de 4 ^a ordem	GPa ⁻¹
C_α	Fator de correção geométrico utilizado para calcular σ_{Axial} nos ensaios das amarras	
d	Diâmetro dos elos utilizados nos ensaios das amarras	mm
D	Variável de dano, escalar	
D_c	Dano crítico	
\mathcal{D}_{mec}	Dissipação mecânica	
\mathbf{D}^e	Tensor constitutivo elástico de 4 ^a ordem	GPa
E	Módulo de elasticidade	GPa
$Erro$	Erro associado ao método de Newton-Raphson	
f	Frequência do ensaio de fadiga	Hz
F_H	Força axial observada nos ensaios das amarras	kN
F_{H0}	Pré-carga aplicada nos ensaios das amarras	kN
F_V	Força transversal observada nos ensaios das amarras	kN
g	Função objetivo	
G	Módulo de cisalhamento	GPa
H^k	Módulo de encruamento cinemático	MPa
I	Invariante do tensor tensão de Cauchy	
\mathbf{I}	Tensor identidade de 2 ^a ordem	
\mathbf{II}	Tensor identidade de 4 ^a ordem	
J	Invariante do tensor tensão desviadora	
k	Quantidade de ensaios utilizados na calibração	
K	Módulo volumétrico	MPa
K'	Coefficiente de encruamento cíclico axial	MPa
L	Braço de alavanca para cálculo da σ_{OPB} nos ensaios das amarras	mm

M	Expoente do modelo de Desmorat	
M_F	Momento fletor nos elos adjacentes ao elo central	kN.mm
n	Número de variáveis do problema	
n'	Expoente de encruamento cíclico axial	
N	Vida	Ciclos
\mathbf{N}	Vetor de fluxo, tensor de 2 ^a ordem	
$\bar{\mathbf{N}}$	Vetor de fluxo não danificado, tensor de 2 ^a ordem	
p	Tensão hidrostática	MPa
\mathbf{p}	Conjunto de parâmetros a serem calibrados	
q	Tensão equivalente de von Mises	MPa
\bar{q}	Tensão equivalente de von Mises sem o β	MPa
R	Razão de carregamento	
R_i	Equação residual i	
s	Expoente de dano	
S	Denominador de dano	MPa
$S(\eta)$	Função denominadora de dano dependente de η	MPa
$S(\eta, \xi)$	Função denominadora de dano dependente de η e ξ	MPa
<i>Tolerância</i>	Tolerância adotada no método de Newton-Raphson	
V	Deslocamento transversal aplicado nos ensaios das amarras	mm
\mathcal{X}	Força termodinâmica associada ao endurecimento cinemático	
Y	Taxa da densidade de energia liberada	MPa

Símbolos Gregos

α_i	Variável associada à equação residual i	
β	Tensão de encruamento cinemático, escalar	MPa
$\boldsymbol{\beta}$	Tensor de encruamento cinemático, tensor de 2 ^a ordem	MPa
γ	Deformação cisalhante de engenharia, escalar	
$\dot{\gamma}$	Multiplicador plástico	
Γ	Parâmetro do modelo de Desmorat	
δ	Incremento	
Δ	Variação	
$\frac{\Delta}{2}$	Amplitude	
ϵ	Deformação normal, escalar	
$\boldsymbol{\epsilon}$	Tensor de deformação, tensor de 2 ^a ordem	
$\bar{\epsilon}^p$	Deformação plástica acumulada	
η	Razão de triaxialidade	
$\boldsymbol{\eta}$	Tensor relativo, tensor de 2 ^a ordem	MPa
λ	Constante de Lamé	GPa
λ_ϵ	Razão entre $\frac{\Delta\gamma}{2}$ e $\frac{\Delta\epsilon}{2}$ nos ensaios controlados por deformação	
λ_σ	Razão entre $\frac{\sqrt{3}\Delta\tau}{2}$ e $\frac{\Delta\sigma}{2}$ nos ensaios controlados por tensão	
μ	Constante de Lamé	GPa

ν	Coefficiente de Poisson	
ξ	Terceiro invariante normalizado	
σ	Tensão, escalar	MPa
$\boldsymbol{\sigma}$	Tensor tensão de Cauchy, tensor de 2 ^a ordem	MPa
σ_{Axial}	Tensão axial nos elos adjacentes ao elo central nos ensaios das amarras devida à força axial	MPa
σ_f	Limite de resistência à fadiga	MPa
σ_{OPB}	Tensão normal nos elos adjacentes ao elo central nos ensaios das amarras devida ao momento fletor	MPa
$\sigma_{Resultante}$	Tensão normal resultante nos elos adjacentes ao elo central nos ensaios das amarras	MPa
τ	Tensão de cisalhamento, escalar	MPa
Φ	Função de escoamento segundo von Mises	MPa
ψ^p	Potencial de estado plástico	

Subscritos

0	Cisalhamento, $\eta = 0$
$\frac{1}{3}$	Tração, $\eta = \frac{1}{3}$
$-\frac{1}{3}$	Compressão, $\eta = -\frac{1}{3}$
<i>CB</i>	Castro e Bemfica
<i>eq</i>	Equivalente
<i>Est.</i>	Estimada
<i>max</i>	Máximo
<i>min</i>	Mínimo
<i>MM</i>	Malcher e Mamiya
<i>n</i>	Pseudotempo n
<i>n+1</i>	Pseudotempo n+1
<i>Obs.</i>	Observada
<i>Orig.</i>	Original
<i>Prop.</i>	Proposta
<i>r</i>	Ruptura
<i>u</i>	Última
<i>x</i>	Direção x no sistema (x,y,z)
<i>xy</i>	Plano xy no sistema (x,y,z)
<i>xz</i>	Plano xz no sistema (x,y,z)
<i>y</i>	Direção y no sistema (x,y,z)
<i>y0</i>	Escoamento inicial
<i>yz</i>	Plano yz no sistema (x,y,z)
<i>z</i>	Direção z no sistema (x,y,z)

Sobrescritos

'	Cíclico
~	Efetivo
^	Resposta do modelo elastoplástico
·	Taxa
<i>D</i>	Desviador
<i>e</i>	Elástico
<i>E</i>	Engenharia
<i>p</i>	Plástico
<i>k</i>	Iteração <i>k</i>
<i>k+1</i>	Iteração <i>k+1</i>
<i>T</i>	Estado tentativa
<i>V</i>	Verdadeira
μ	Microescala

Siglas

CALM	<i>Catenary Anchor Leg Mooring</i>
CDM	<i>Continuous Damage Model</i>
DNV GL	<i>Det Norske Veritas Germanischer Lloyd</i>
FPS	<i>Floating Production System</i>
FPU	<i>Floating Production Unit</i>
FPSO	<i>Floating, Production, Storage and Offloading</i>
IPB	<i>In-Plane Bending</i>
JIP	<i>Joint Industry Project</i>
LDA	Lâmina D'Água
MBL	<i>Minimum Breaking Load</i>
OPB	<i>Out-of-Plane Bending</i>
RCA	<i>Rod Connecting Arm</i>
SWT	Smith-Watson-Topper
VER	Volume Elementar Representativo

Capítulo 1

Introdução

Neste capítulo, são apresentadas a motivação e a contextualização para a escolha do tema desta tese, bem como um breve histórico do estado da arte sobre os desenvolvimentos da Mecânica do Dano Contínuo e áreas de aplicação. Além disso, é exibida a definição do problema, são estabelecidos os objetivos gerais e específicos desta pesquisa, são destacadas as maiores contribuições desta tese para o estado da arte, são citadas as principais publicações e participações em eventos científicos relacionadas ao desenvolvimento do presente trabalho, e, por fim, é feita uma descrição resumida acerca da estrutura deste relatório.

1.1 Contextualização e Motivação

A extração de óleo e gás no pré-sal apresenta uma série de desafios de ordem técnica, tais como: **i)** grandes distâncias entre a superfície do mar e os reservatórios abaixo da camada de sal, podendo chegar a 7 km; **ii)** concentração elevada de contaminantes; **iii)** locais remotos e sem infraestrutura de produção pré-instalada; e **iv)** reservatórios com pressões mais elevadas que os encontrados na região do pós-sal [1] [2] [3]. A alta complexidade envolvida nesse tipo de operação demanda que estudos complexos acerca dos projetos de estruturas e componentes empregados na indústria *offshore* moderna sejam realizados.

Nas atividades de perfuração, produção, armazenamento e outras atividades auxiliares na produção de petróleo *offshore*, são utilizadas plataformas fixas, autoelevatórias ou flutuantes [4]. De forma simplificada, pode-se dizer que a seleção do tipo de plataforma a ser empregada está diretamente associada à lâmina d'água (distância vertical entre a superfície do mar e o solo marinho - LDA): plataformas fixas (≤ 300 m), autoelevatórias (≤ 150 m) e flutuantes para os demais casos [3]. Somente dois tipos de plataformas flutuantes foram utilizadas no Brasil em 2012: **i)** as FPSOs (*Floating, Production, Storage and Offloading*), que concentram as atividades de produção, armazenamento e transferência do petróleo; e **ii)** as plataformas semissubmersíveis FPS/FPU (*Floating Production System/Floating Production Unit*), que são formadas por um ou mais conveses, apoiados por colunas em flutuadores submersos [4] [3].

Para garantir que as plataformas flutuantes se mantenham em uma posição desejada, faz-

se necessário o uso de um dos 2 tipos de sistemas posicionadores existentes: **i)** posicionamento dinâmico, aquele em que um conjunto de propulsores move a plataforma baseado em informações de um sistema de posicionamento global e outros sensores (e.g., anemômetro e agulha giroscópica); e **ii)** ancoragem, na qual as plataformas estão fisicamente ligadas ao solo marinho com o uso de âncoras (ou estacas, em alguns casos) e linhas de amarração, que, por sua vez, são formadas por correntes, cabos de poliéster e/ou cabos de aço [4] [3] [5].

O sistema de ancoragem de uma plataforma flutuante deve ser capaz de lidar com as mais adversas condições climáticas por vários anos consecutivos em operação [6]. No entanto, as quebras e falhas (eventos que impedem o componente de desempenhar sua função adequadamente, podem contemplar uma ou mais quebras) ocorrem com certa frequência [7]. Os incidentes em uma linha de ancoragem podem causar, por exemplo, a ruptura dos *risers* (dutos que servem para conduzir óleo cru e gás natural até as plataformas), a geração de custos adicionais, a derivação das plataformas, o interrompimento da produção e o vazamento de hidrocarbonetos [4] [8]. Dependendo do tipo de FPSO utilizada, a falha de uma única linha de ancoragem pode causar um prejuízo da ordem de £ 10,5 milhões [6]. As falhas nas linhas de ancoragem podem ocorrer por diversos motivos, tais como desgaste, corrosão, fadiga por tração, fadiga por flexão fora do plano (em inglês - *Out-of-Plane Bending* - OPB), sobrecarga, defeitos de fabricação, montagem inadequada, dimensionamento incorreto e manutenção imprópria [6] [8] [9] [10] [11].

A fadiga por OPB tornou-se relevante na indústria *offshore* a partir de 2002, ano em que foram observadas 4 falhas prematuras de correntes de linhas de ancoragem de uma boia de transferência de uma FPSO chamada Girassol, que estava localizada em Angola [8] [10] [12] [13] [14] [15]. Mesmo tendo sido projetadas de acordo com a norma vigente à época, que levava em conta um fator de segurança igual a 3, essas linhas de ancoragem falharam de forma prematura por estarem submetidas ao severo efeito da fadiga por OPB [13] [14] [16]. Sendo assim, o desenvolvimento de estudos e ferramentas capazes de serem aplicadas no aprimoramento de projetos de sistemas de amarração de FPSOs é de extrema relevância, visto que mesmo as normas específicas para o projeto e para o desenvolvimento desse tipo de sistema podem não contemplar efeitos importantes no processo de degradação progressiva do material, como foi o caso da fadiga por flexão fora do plano observado nas amarras da FPSO Girassol.

Procedimentos analíticos, experimentais e/ou numéricos foram discutidos em trabalhos distintos a fim de prever o estado de tensão nos elos submetidos à flexão fora do plano, sendo que a determinação apropriada desse item é fundamental no cálculo coerente da vida em fadiga de uma amarra [13] [14] [17] [18] [19]. Destaca-se que enquanto os estados de tensão apresentados por [14], [17] e [19] são uniaxiais, os observados por [13] e [18] são multiaxiais. As metodologias empregadas na previsão da vida em fadiga de componentes variam conforme os estados de tensão e deformação encontrados.

Tradicionalmente, as teorias para previsão da vida em fadiga multiaxial são divididas em dois grupos: modelos de plano crítico e modelos baseados nos invariantes de tensão. Como exemplos de modelos pertencentes ao primeiro grupo, pode-se citar Smith-Watson-Topper (SWT) [20], Brown-Miller [21], Matake [22] e Fatemi-Socie [23]. Já como exemplos para o segundo tipo de modelo,

destacam-se Crossland [24], Dang Van [25], Mamiya-Araújo [26] e Mamiya-Araújo-Castro [27].

Uma outra ferramenta que pode ser aplicada na previsão da vida em fadiga de componentes mecânicos sujeitos a carregamentos complexos é o Modelo de Dano Contínuo desenvolvido por Lemaitre [28] (em inglês - *Continuous Damage Model* - CDM). Tal modelo é capaz de avaliar a evolução da degradação de um dado componente ao longo do tempo. Para isso, variáveis internas associadas (variáveis de dano) são definidas de forma a medirem a quantidade de defeitos dentro de um Volume Elementar Representativo (VER) [28].

Normalmente, em casos de carregamentos complexos (e.g., amplitude variável), os modelos tradicionais de fadiga utilizam regras de acúmulo de dano lineares (e.g., Regra de Miner) e métodos simplificados para contagem de ciclos (e.g., Método Rainflow), podendo tornar as previsões de vida em fadiga menos precisas. Nesses casos, em contrapartida, a mecânica do dano contínuo não requer a utilização desse tipo de formulação adicional, o que acaba se tornando uma expressiva vantagem em relação aos modelos tradicionais. Por fim, os modelos do tipo CDM requerem, obrigatoriamente, o uso de modelos constitutivos para a previsão da vida em fadiga. Entretanto, destaca-se que, muitas vezes, as tensões e deformações utilizadas nos modelos tradicionais de fadiga também são obtidas através desse tipo de relação constitutiva.

A calibração dos parâmetros de dano é um fator decisivo na obtenção de resultados precisos quando análises usando o CDM são efetuadas. Malcher e Mamiya [29] mostraram que, para carregamentos monotônicos, as simulações numéricas de corpos de prova sujeitos a cisalhamento apresentavam resultados destoantes daqueles observados experimentalmente quando seus parâmetros de dano eram calibrados apenas com ensaios axiais. Para solucionar essa falha, os autores apresentaram uma função denominadora de dano dependente da razão de triaxialidade, do terceiro invariante normalizado e de dois pontos de calibração (um ensaio monotônico de tração e outro em cisalhamento). No contexto da estimativa da vida em fadiga, Castro e Bemfica [30] propuseram uma função denominadora de dano linear dependente apenas da razão de triaxialidade e de 2 pontos de calibração cíclicos (ensaios tipo tensão-compressão e torcionais).

No Modelo de Dano Contínuo de Lemaitre, a evolução do dano está diretamente associada com a evolução da deformação plástica acumulada, ou seja, se a deformação plástica acumulada não evoluir, o dano também não irá. No entanto, em diversas situações reais, componentes sujeitos a carregamentos no regime elástico (portanto, sem evolução da deformação plástica acumulada) também podem sofrer falhas por fadiga. Para contornar esse tipo de problema, Lemaitre, Sermage e Desmorat [31] apresentaram uma metodologia baseada em duas escalas: a macroescala e a microescala. A macroescala seria a escala clássica da mecânica do contínuo [32]. A microescala, no entanto, seria uma escala dos microdefeitos, uma inclusão dentro do VER e com uma tensão de escoamento inicial menor que a da macroescala [32]. Nesse tipo de abordagem proposta por Lemaitre e Desmorat [32], as variáveis elastoplásticas são calculadas na macroescala e, posteriormente, a partir da lei de localização, as variáveis elastoplásticas da microescala podem ser calculadas. Diversas leis de localização podem ser encontradas na literatura [33].

1.2 Estado da Arte

No ano de 1985, Lemaitre [28] apresentou seu modelo de dano contínuo para fratura dúctil. Os pilares dessa teoria estão baseados no uso: **i)** de uma variável de dano contínuo; **ii)** do conceito da tensão efetiva; e **iii)** das leis da termodinâmica dos sólidos. Além de mostrar as equações que regem o modelo, o artigo também traz um método de identificação dos parâmetros de dano baseado na variação do módulo de elasticidade do material. Ao final do documento, a fim de verificar a influência da razão de triaxialidade, são realizadas comparações dos resultados obtidos com esse modelo em relação aos gerados pela teoria desenvolvida por McClintock, Rice e Tracey [34] [35] e também com resultados experimentais.

Do ponto de vista da mecânica do contínuo clássica, o modelo desenvolvido por Lemaitre [28] somente pode ser empregado em situações em que deformações plásticas são observadas na macroescala (e.g., fratura dúctil, fadiga de baixo ciclo e fluência) [32]. Para modelar o comportamento de componentes sujeitos à fadiga de alto ciclo, cujas tensões aplicadas são menores que a tensão de escoamento do material, pode-se empregar a abordagem da multiescala, pois, com o seu uso, o dano pode ser calculado em uma escala muito menor que a do VER [32]. Sendo assim, Lemaitre [36] apresentou uma teoria de duas escalas baseada na hipótese de compatibilidade de deformações de Lin-Taylor [37], que postula que a deformação na microescala é igual àquela observada na macroescala.

Lemaitre [38] aplicou os conceitos apresentados em [36] em um pós processador chamado DAMAGE 90, que é um código computacional *user-friendly* programado em linguagem FORTRAN. O programa era capaz de lidar com situações de fratura dúctil, fratura frágil, fadiga de baixo ciclo, fadiga de alto ciclo, fadiga multiaxial, etc. São expostos no artigo diversos exemplos de resultados obtidos com o código.

Nos anos de 1997 e 1999, Lemaitre e Sermage [39] e Lemaitre, Sermage e Desmorat [31], respectivamente, realizaram uma mudança na lei de localização do modelo de multiescala descrito por Lemaitre [31]. De modo a melhorar o efeito da razão de triaxialidade [31], a hipótese de compatibilidade de deformações de Lin-Taylor [37] foi substituída pelo esquema autoconsistente de Kröner [40]. Adicionalmente, os autores sugerem a utilização das constantes do material calculadas por Eshelby [41] para o caso de uma inclusão esférica na lei proposta por Kröner [40]. O artigo publicado por Lemaitre, Sermage e Desmorat [31] apresenta resultados obtidos com o auxílio do código computacional DAMAGE_97 (uma atualização do DAMAGE 90) para diversas situações (e.g., fratura semifrágil, fadiga de alto ciclo, carregamento biaxial). Os resultados de fadiga mostrados são consistentes com aqueles calculados com o critério de Dang Van [25].

Malcher e Mamiya [29] identificaram que a evolução do dano prevista pelo modelo original de Lemaitre [28] apresentou resultados imprecisos quando condições de carregamentos distantes do ponto de calibração foram empregadas, ou seja, como os parâmetros para evolução do dano no modelo original de Lemaitre são calibrados a partir de resultados obtidos em tração, quando carregamentos cisalhantes foram empregados, os resultados previstos pelo modelo original de Lemaitre mostraram-se inconsistentes com os resultados experimentais. Dessa forma, Malcher e Mamiya [29]

propuseram a utilização de uma função denominadora de dano, dependente tanto da razão de triaxialidade quanto do terceiro invariante normalizado. A função sugerida deve ser calibrada com ensaios de tração e de cisalhamento. Os resultados encontrados por Malcher e Mamiya [29] demonstraram que o uso de tal função melhorou de forma significativa as previsões do modelo e, dessa forma, esses autores deram o nome de Modelo Aperfeiçoado de Lemaitre ao modelo apresentado.

Lopes e Malcher [42] publicaram um artigo com a previsão da vida em fadiga de 3 materiais distintos: **i)** aço 304; **ii)** aço S460N; e **iii)** liga de alumínio 6061-T6. O modelo constitutivo apresentava as equações do modelo de dano original de Lemaitre [28] (sem a função denominadora de dano) em conjunto com uma lei de encruamento cinemático de Chaboche [43] com 2 termos não lineares e 1 termo linear. O método de Euler implícito foi empregado no problema em questão, e o método de Newton-Raphson foi utilizado na resolução do sistema de equações não lineares. Para calibrar os parâmetros de dano, o expoente de dano (s) e o dano crítico (D_c) foram mantidos iguais a 1, restando apenas o denominador de dano (S) a ser determinado. Em relação ao conjunto de dados analisado, destaca-se: **i)** todos os ensaios eram sob controle de deformação; **ii)** o único material a apresentar testes em cisalhamento é o aço S460N (apenas 3); e **iii)** ensaios multiaxiais proporcionais e não proporcionais foram realizados em todos os materiais avaliados. Em termos das previsões de vida em fadiga, os melhores resultados obtidos foram aqueles em que as amplitudes de deformação eram mais elevadas (i.e., vidas menores), o que é bastante natural, visto que o modelo abordado não apresenta nenhuma modificação (e.g., modelo de multiescala) capaz de melhorar sua eficiência na previsão em condições sob baixa amplitude de deformação.

O artigo publicado por Castro e Bemfica [30] no ano de 2018 mostra, a partir de um modelo de dano desacoplado de Lemaitre, as previsões de vida em fadiga realizadas em 5 metais distintos: **i)** aço SAE 1045; **ii)** aço 16MnR; **iii)** liga de alumínio 7075-T651; **iv)** liga de magnésio AZ61A extrudada; e **v)** liga de magnésio AZ31B extrudada. Obtida a partir da integração da equação de evolução do dano de Lemaitre ao longo de um ciclo, uma fórmula fechada capaz de prever a vida em fadiga de cada ensaio é apresentada no documento. Além disso, os autores fizeram a calibração dos 3 parâmetros de dano (s , S e D_c) através de um código computacional capaz de minimizar o erro associado a uma dada função objetivo. Partindo-se da premissa de uma análise desacoplada, o modelo de plasticidade cíclica de Jiang e Sehitoglu [44] foi utilizado para fazer as análises das tensões e deformações dos corpos de prova. Os dados experimentais retirados da literatura foram obtidos a partir de ensaios sob controle de deformação em trajetórias axiais, cisalhantes, multiaxiais proporcionais e multiaxiais não proporcionais. Após verificarem que os resultados em cisalhamento para as ligas de magnésio AZ61A e AZ31B não ficaram adequados, os autores decidiram implementar uma função denominadora de dano linear dependente da razão de triaxialidade e de 2 pontos de calibração obtidos a partir de ensaios cíclicos (ensaio tipo tensão-compressão e torcionais). Usando tal função denominadora de dano, uma melhora nas previsões das vidas em fadiga das ligas de magnésio foi observada.

No ano de 2018, Souza [45] apresentou em sua dissertação de mestrado uma comparação entre as previsões de fadiga usando o modelo clássico de Lemaitre [28] e o modelo apresentado por Malcher e Mamiya [29]. Ensaio sob controle de deformação em trajetórias axiais, cisalhantes, multiaxiais proporcionais e multiaxiais não proporcionais do aço S460N foram avaliados. Ao final do trabalho,

esse autor conclui que, quando comparadas com as previsões do modelo original de Lemaitre, as vidas previstas pelo modelo apresentado por Malcher e Mamiya [29] foram mais compatíveis com aquelas observadas experimentalmente, principalmente em carregamentos cisalhantes e multiaxiais não proporcionais.

Araújo *et al.* [46] publicaram um artigo que apresenta uma metodologia baseada na Mecânica do Dano Contínuo de Lemaitre para previsão da vida em fadiga de corpos de prova fabricados em liga de alumínio 7050-T7451 ensaiados sob controle de força e/ou torque em condições axiais, torcionais e proporcionais. O modelo empregado estava pautado nos seguintes tópicos: **i)** Modelo Aperfeiçoado de Lemaitre criado por Malcher e Mamiya [29]; **ii)** modelo de multiescala apresentado por Lemaitre [31]; e **iii)** lei de localização descrita por Lemaitre e Sermage [39] e Lemaitre, Sermage e Desmorat [31]. As previsões obtidas com o modelo utilizado manifestaram resultados próximos aos obtidos com aqueles calculados com o tradicional modelo de SWT.

1.3 Definição do Problema e Objetivos da Tese

O problema estudado por esta tese está voltado ao fenômeno da fadiga, principalmente no desenvolvimento de uma ferramenta capaz de auxiliar no projeto mecânico de componentes utilizados pela indústria *offshore*. A ferramenta é baseada no cálculo de vida à fadiga utilizando o dano incremental como variável da degradação progressiva do material em regimes de alto e baixo número de ciclos. Adicionalmente, a questão da fadiga por flexão fora do plano em sistemas de amarração de plataformas tipo FPSO é abordada do ponto de vista experimental, com a realização de ensaios em escala reduzida, e do ponto de vista numérico, com a utilização da ferramenta desenvolvida para estimar as vidas observadas experimentalmente.

O objetivo principal desta tese foi o desenvolvimento de modelagem baseada na Mecânica do Dano Contínuo de Lemaitre que seja capaz de ser aplicada em problemas de fadiga multiaxial em regimes de alto e baixo número de ciclos. Para isso, os seguintes objetivos secundários foram traçados: **a)** aprimoramento da lei de evolução do dano de Lemaitre assumindo uma função denominadora de dano dependente da razão de triaxialidade; **b)** desenvolvimento e implementação de modelagem na escala macroscópica capaz de prever vidas em problemas de fadiga de baixo número de ciclos; **c)** desenvolvimento e implementação de modelagem em duas escalas, capaz de prever vidas em problemas de fadiga de alto número de ciclos; **d)** realização de ensaios experimentais em corpos de prova padrão fabricados em aço de alta resistência *offshore* de grau R4 com a mesma condição superficial dos elos das amarras; **e)** realização de ensaios experimentais em amarras sob escala reduzida considerando o efeito da flexão fora do plano (OPB); e **f)** aplicação da modelagem desenvolvida e implementada.

1.4 Contribuições da Tese

Dentre as mais importantes contribuições geradas por esta tese, destacam-se:

1. Concepção de uma nova função denominadora de dano consistente termodinamicamente, que, baseada nos resultados obtidos neste trabalho, ainda foi capaz de melhorar as previsões das vidas em fadiga em ensaios torcionais e multiaxiais proporcionais;
2. Utilização pioneira do modelo de encruamento cinemático de Desmorat em problemas de fadiga considerando um método de integração numérica baseado no método de Euler implícito;
3. Estabelecimento de uma abordagem para a previsão de vida em fadiga de ensaios controlados por deformação considerando o Modelo Aperfeiçoado de Lemaitre proposto;
4. Com base em um modelo de duas escalas, caracterização de uma abordagem capaz de prever a vida em fadiga de ensaios controlados por tensão, mesmo em situações em que não há evolução da deformação plástica acumulada na escala macroscópica;
5. Considerando os corpos de prova padrão fabricados em aço *offshore* grau R4 com superfície oxidada, realização de ensaios de fadiga multiaxial com diferentes razões de carregamento (λ_σ); e
6. Levando em consideração o efeito do mecanismo da flexão fora do plano sob condições diversas de carregamento, execução de ensaios de fadiga em escala reduzida de amarras produzidas em aço *offshore* grau R4.

1.5 Publicações e Eventos Científicos

A seguir, são apresentadas as principais publicações (aceitas ou em submissão) e participações em eventos científicos no contexto desta tese:

FERREIRA, G. V.; MALCHER, L.; NEVES, R. S. Multiaxial Fatigue Life Estimation Using an Improved Lemaitre's Continuous Damage Model. In: . Barcelona, Espanha: XIV International Conference on Computational Plasticity. Fundamentals and Applications, 2017.

MAMIYA, E. N.; MALCHER, L.; CASTRO, F. C.; NUNES FILHO, E. L. S. A.; FERREIRA, G. V.; NEVES, R. S.; CANUT, F. A.; RIBEIRO, M.; AUGUSTO, C.; TEIXEIRA, P. Fatigue analysis of reduced-scale FPSO mooring chains subjected to out-of-plane bending load. In: . Rio de Janeiro, Brasil: Rio Oil & Gas Expo and Conference 2018, 2018.

CASTRO, F. C.; MALCHER, L.; MAMIYA, E. N.; FERREIRA, G. V.; NEVES, R. S.; RIBEIRO, M.; AUGUSTO, C.; TEIXEIRA, P. Fatigue of a high strength steel used in a reduced-scale mooring chain testing device. In: . Rio de Janeiro, Brasil: Rio Oil & Gas Expo and Conference 2018, 2018.

FERREIRA, G. V.; MALCHER, L.; NEVES, R. S. Multiaxial Fatigue Life Estimation Using an Improved Lemaitre's Continuous Damage Model. In: . Nova Iorque, Estados Unidos: 13th World Congress on Computational Mechanics (WCCM XIII), 2018.

MAMIYA, E. N.; CASTRO, F. C.; FERREIRA, G. V.; NUNES FILHO, E. L. S. A.; CANUT, F. A.; NEVES, R. S.; MALCHER, L. A study on the fatigue of mooring chains under out-of-plane bending. In: . São Carlos, Brasil: 7th International Symposium on Solid Mechanics - MECSOL 2019), 2019.

MAMIYA, E. N.; CASTRO, F. C.; FERREIRA, G. V.; NUNES FILHO, E. L. S. de A.; CANUT, F. A.; NEVES, R. S.; MALCHER, L. Fatigue of mooring chain links subjected to out-of-plane bending: Experiments and modeling. *Engineering Failure Analysis*, v. 100, n. 1, p. 206–213, 2019. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.engfailanal.2019.02.055>>.

CASTRO, F. C.; MAMIYA, E. N.; MALCHER, L.; CANUT, F. A.; FERREIRA, G. V.; NEVES, R. S. Multiaxial fatigue of quenched and tempered u2 steel: Testing and fatigue life prediction. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, Wiley, v. 42, n. 11, p. 2487–2495, jul. 2019. Disponível em: <<https://doi.org/10.1111/ffe.13047>>.

ARAÚJO, L.; FERREIRA, G.; NEVES, R.; MALCHER, L. Fatigue analysis for the aluminum alloy 7050-t7451 performed by a two scale continuum damage mechanics model. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, Elsevier BV, v. 105, p. 102439, fev. 2020. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2019.102439>>.

FERREIRA, G. V.; CAMPOS, E. R. F. S.; NEVES, R. S.; MALCHER, L. An Improved Lemaitre’s Continuous Damage Model to Estimate Fatigue Life in Strain Control Problems. **(Em submissão)**.

FERREIRA, G. V.; NEVES, R. S.; MALCHER, L. An Improved Lemaitre’s Continuous Damage Model to Estimate Fatigue Life Applying a Multiscale Approach. **(Em submissão)**.

1.6 Apresentação do Manuscrito

O capítulo 1 contém a contextualização e a motivação, o estado da arte, a definição do problema, os objetivos do presente trabalho, as contribuições da tese e as principais publicações e participações em eventos científicos. No capítulo 2, uma nova função denominadora de dano é proposta, o modelo de encruamento cinemático de Desmorat é mostrado, os modelos matemático e numérico de uma abordagem baseada na Mecânica do Dano Contínuo de Lemaitre capaz de estimar a vida em fadiga de materiais sujeitos a carregamentos cíclicos controlados por deformação são descritos, e, por fim, os resultados obtidos para os aços SAE 1045 e S460N são apresentados. O capítulo 3 descreve uma modelagem de dano capaz de prever a vida em fadiga de componentes sob controle de tensão baseada em um modelo de duas escalas e, a partir dela, exhibe os resultados calculados para corpos de prova padrão e amarras, todos fabricados em aço *offshore* grau R4. O Capítulo 4 apresenta as considerações finais e as sugestões para trabalhos futuros.

Capítulo 2

Abordagem de Dano Incremental para Previsão de Vida em Fadiga

2.1 Conceitos Básicos da Mecânica do Dano Contínuo de Lemaitre

O dano está diretamente relacionado à criação e ao crescimento de trincas e vazios microscópicos, que são descontinuidades em um meio considerado como contínuo [32]. Dentro da mecânica do contínuo, define-se a existência de um volume elementar representativo, que corresponde ao menor volume cujas propriedades correspondem àsquelas do todo [55]. O tamanho do VER em materiais metálicos e cerâmicos é de $(0,1\text{ mm})^3$, aproximadamente [32]. A Figura 2.1 apresenta uma ilustração esquemática da evolução do dano em um material metálico dividida em 3 etapas: **i)** material virgem; **ii)** nucleação de trincas e vazios microscópicos; e **iii)** crescimento e coalescência dos vazios, ocasionando a fratura macroscópica do material.

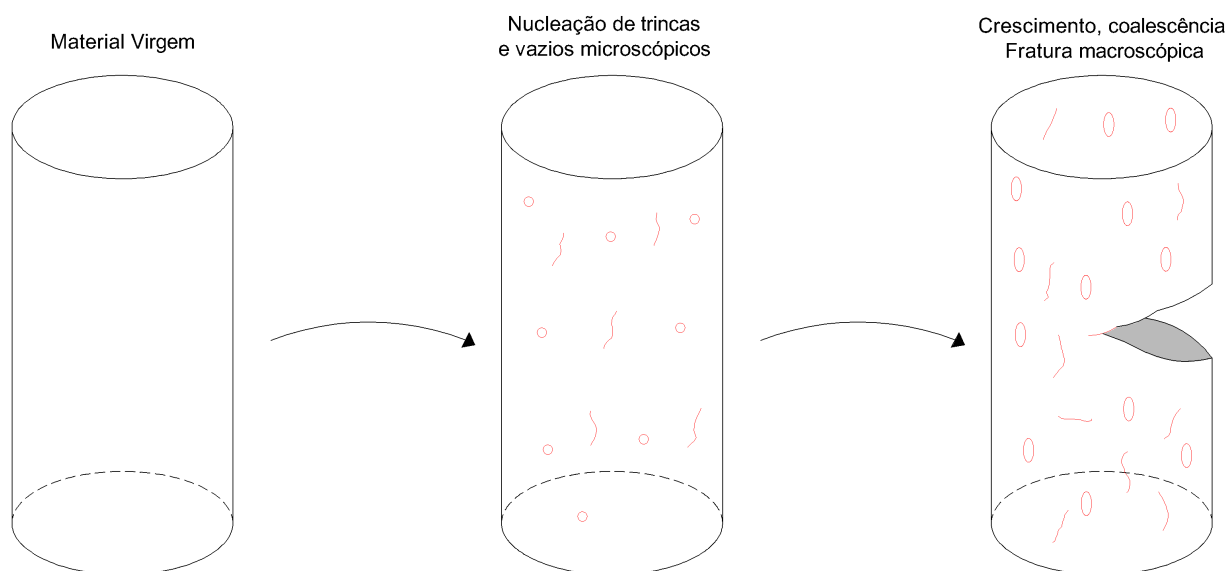


Figura 2.1: Evolução do dano em um material metálico. Adaptado de [56].

Segundo o conceito da mecânica do dano contínuo, a variável de dano isotrópica está fisicamente relacionada com a densidade superficial de microtrincas e microvazios situados em um plano da seção transversal que corta um VER [32]. De acordo com Rabotnov [57], a variável escalar que representa o dano é dada por:

$$D = \frac{\delta S_D}{\delta S} \quad (2.1)$$

em que D é a variável de dano isotrópico (escalar), δS_D é a área da superfície danificada de um dado VER e δS é a área total do VER.

O modelo de Dano Contínuo de Lemaitre [28] baseia-se no conceito da tensão efetiva apresentado por Rabotnov [57], que diz que, para o caso do dano isotrópico, todas as componentes de tensão agem sobre uma mesma área resistente. Nesse conceito, a variável de dano está associada com a área resistente do material, ou seja, quando o dano aumenta, essa área resistente do material diminui. Ainda de acordo com Rabotnov [57], o conceito da tensão efetiva no caso do dano isotrópico aplicado ao tensor tensão de Cauchy é apresentado pela equação a seguir:

$$\tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{1 - D} \quad (2.2)$$

na qual $\tilde{\sigma}$ é o tensor tensão efetiva e σ é o tensor tensão de Cauchy.

De acordo com o modelo de Lemaitre [28], a lei de Hooke generalizada é descrita como:

$$\tilde{\sigma} = \mathbb{D}^e : \epsilon^e \quad (2.3)$$

em que \mathbb{D}^e é o tensor constitutivo elástico de 4ª ordem e ϵ^e é o tensor de deformações elásticas.

Para materiais isotrópicos, o tensor constitutivo pode ser expresso de acordo com a equação seguinte:

$$\mathbb{D}^e = \lambda \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{I} \quad (2.4)$$

sendo que \mathbf{I} é o tensor identidade de 2ª ordem e \mathbf{I} é o tensor identidade de 4ª ordem. Além disso, os termos λ e μ são chamados de constantes de Lamé, que podem ser escritos, respectivamente, pelas Equações 2.5-2.6. Destaca-se também que o parâmetro μ é igual ao módulo de cisalhamento do material (G).

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (2.5)$$

$$\mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.6)$$

Nas Equações 2.5-2.6, para um dado material, E é o módulo de elasticidade e ν é o coeficiente

de Poisson. Conforme as Equações 2.2-2.3, o tensor tensão de Cauchy é dado pela Equação 2.7.

$$\boldsymbol{\sigma} = (1 - D) \mathbb{D}^e : \boldsymbol{\epsilon}^e \quad (2.7)$$

De acordo com Lemaitre [28], a evolução do dano isotrópico é dada por:

$$\dot{D} = \dot{\epsilon}^p \left(\frac{-Y}{S} \right)^s = \frac{\dot{\gamma}}{1 - D} \left(\frac{-Y}{S} \right)^s \quad (2.8)$$

em que $\dot{\epsilon}^p$ é a taxa de evolução da deformação plástica acumulada, Y é a taxa da densidade de energia liberada, S é o denominador de dano, s é o expoente de dano e $\dot{\gamma}$ é o multiplicador plástico.

Por fim, ainda se tratando do dano isotrópico, a falha de um dado componente ocorre quando a variável atinge um determinado valor de dano crítico (D_c), que, de forma teórica, pode se encontrar entre 0 (fratura frágil) e 1 (fratura dúctil). Entretanto, para muitos materiais, os danos críticos encontrados experimentalmente estão no seguinte intervalo: $0,2 \leq D_c \leq 0,5$ [32]. A partir de um ensaio monotônico de tração, o dano crítico para condições monotônicas de um dado material pode ser estimado com o auxílio da Equação 2.9 [32]. Para condições cíclicas, o ideal é utilizar algum método de calibração de parâmetros para determinar o dano crítico de forma mais precisa.

$$D_c = 1 - \frac{\sigma_r^E}{\sigma_u^E} \quad (2.9)$$

Na Equação 2.9, σ_r^E é a tensão de ruptura de engenharia e σ_u^E é a tensão última de engenharia.

2.2 Lei de Encruamento Cinemático de Desmorat

Dentre as leis de encruamento cinemático mais utilizadas, podem-se citar as leis de Prager [58], Armstrong-Frederick [59] e Chaboche [43]. A lei de encruamento cinemático linear proposta por Prager [58] é descrita por:

$$\dot{\boldsymbol{\beta}} = \frac{2}{3} H^k \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p \quad (2.10)$$

em que $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ é a taxa de evolução do tensor de encruamento cinemático, H^k é o módulo de encruamento cinemático e $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p$ é a taxa de evolução da deformação plástica.

Armstrong e Frederick [59] propuseram uma lei de encruamento cinemático não linear. Para isso, eles acrescentaram um segundo termo na lei de Prager [58], que é responsável por gerar uma saturação no modelo, ou seja, limitar os valores máximos e mínimos de $\boldsymbol{\beta}$, que é o próprio tensor de encruamento cinemático. [59]. A seguir, é apresentada a lei proposta por Armstrong e Frederick [59]:

$$\dot{\boldsymbol{\beta}} = \frac{2}{3} H^k \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p - \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p b \boldsymbol{\beta} \quad (2.11)$$

na qual b é uma constante material de encruamento cinemático.

Em relação ao modelo de Prager [58], o modelo de Armstrong-Frederick [59] além de aperfeiçoar a previsão das tensões e deformações, ainda foi capaz de melhorar a forma dos laços de histerese obtidos [43]. Apesar dos progressos alcançados, o modelo ainda não era capaz de prever adequadamente o fenômeno do colapso incremental (em inglês - *ratchetting*) [43]. Sendo assim, Chaboche [43] propôs uma nova lei baseada na superposição de diversos tensores de encruamento cinemático do modelo de Armstrong-Frederick [59]. A lei proposta por Chaboche [43] pode ser expressa pela Equação 2.12, em que m é o número de termos do somatório. Uma prática comumente adotada consiste na utilização do modelo de Chaboche com 3 termos, sendo 2 não lineares e 1 linear.

$$\dot{\boldsymbol{\beta}} = \sum_{i=1}^m \dot{\boldsymbol{\beta}}_i = \sum_{i=1}^m \left(\frac{2}{3} H_i^k \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p - \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p b_i \boldsymbol{\beta}_i \right) \quad (2.12)$$

No ano de 2010, Desmorat [60] apresentou a sua lei de encruamento cinemático não linear, que é descrita por:

$$\dot{\boldsymbol{\beta}} = \frac{2}{3} H^k \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p - \frac{H^k \Gamma \beta_{eq}^{M-3}}{1 + \Gamma \beta_{eq}^{M-1}} \langle \boldsymbol{\beta} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p \rangle \boldsymbol{\beta} \quad (2.13)$$

em que Γ é um parâmetro de Desmorat, M é um expoente de Desmorat e o termo β_{eq} é a tensão de encruamento cinemática equivalente, calculada pela Equação 2.14.

$$\beta_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2} \boldsymbol{\beta} : \boldsymbol{\beta}} \quad (2.14)$$

Por fim, no modelo, a não linearidade é controlada por um símbolo de Föppl (também chamado de Macaulay *brackets*), cuja definição é apresentada na Equação 2.15.

$$\langle x \rangle = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x, & x > 0 \end{cases} \quad (2.15)$$

Para evitar a saturação das tensões de encruamento cinemáticas observadas no modelo de encruamento cinemático de Armstrong-Frederick [59], a lei de encruamento cinemático proposta por Desmorat [60] substituiu a taxa de evolução da deformação plástica acumulada da parcela não linear por uma taxa relacionada com o próprio tensor de encruamento cinemático (vide efeito na Figura 2.2(a)) [60]. Além disso, o símbolo de Föppl força uma resposta linear do modelo quando $\boldsymbol{\beta} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p \leq 0$. A Figura 2.2(b) aborda a questão do colapso incremental ou *ratchetting*, sendo possível observar que o modelo de Desmorat possui um comportamento intermediário entre os modelos de Prager, que não é capaz de modelar o fenômeno, e Armstrong-Frederick, que, usualmente,

superestima o *ratcheting* [60]. Esse fenômeno é importante de ser modelado para materiais que apresentam amolecimento cíclico, ou seja, para materiais cuja amplitude de tensão diminui com a aplicação de uma amplitude constante de deformação ou para materiais que, mesmo sob condições de amplitude de tensão constante, apresentem uma evolução no nível de deformação plástica. Sendo assim, o modelo de Desmorat é mais hábil em controlar a taxa de evolução da deformação plástica em situações nas quais ocorrem o fenômeno do colapso incremental do que os outros modelos mencionados.

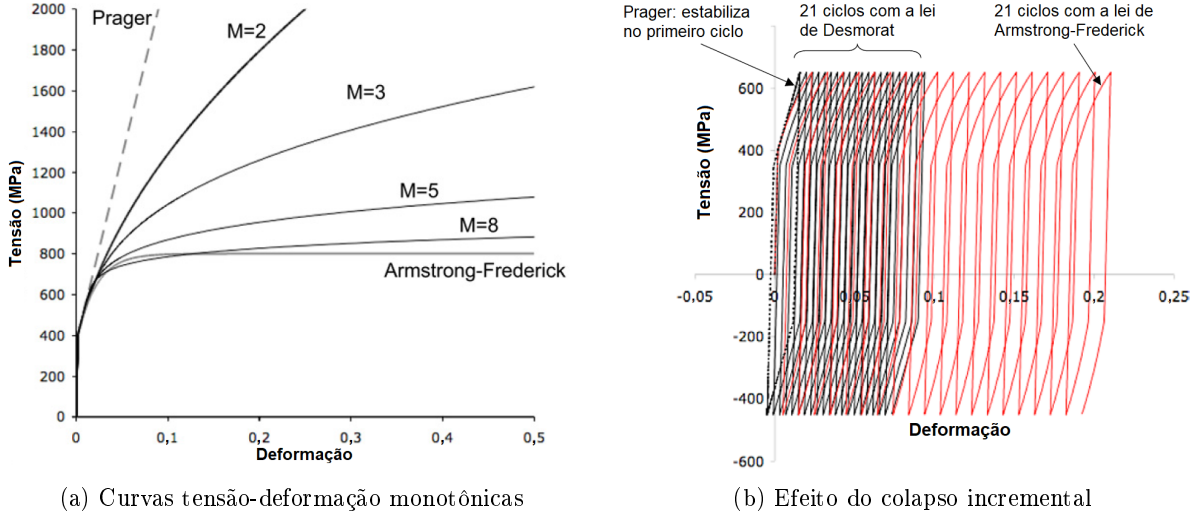


Figura 2.2: (a) Curvas tensão-deformação monotônicas; e (b) Efeito do colapso incremental para os modelo de Prager, Armstrong-Frederick e Desmorat. Adaptado de [60].

O modelo proposto por Desmorat apresenta vantagens computacionais quando comparado à abordagem para evolução das tensões cinemáticas segundo Chaboche. Para Desmorat, o efeito do encruamento cinemático é descrito apenas por uma equação tensorial, ao passo que para Chaboche são recomendadas três equações tensoriais: duas não lineares e uma linear. Essa menor quantidade de equações tensoriais reduz significativamente o tempo computacional na resolução de sistemas não lineares através do método de Newton-Raphson, que é comumente empregado em problemas de plasticidade cíclica.

Em [60], Desmorat apresenta a integração do seu modelo de encruamento cinemático no caso de um carregamento monotônico de tração (vide Equação 2.16). De modo a calibrar os parâmetros necessários ao modelo, a Equação 2.16 pode ser reescrita na forma mostrada na Equação 2.17.

$$H^k \epsilon^p = \beta + \frac{1}{M} \Gamma \beta^M \quad (2.16)$$

$$\epsilon^p = \frac{\left[(\sigma - \sigma_{y0}) + \frac{1}{M} \Gamma (\sigma - \sigma_{y0})^M \right]}{H^k} \quad (2.17)$$

Nas Equações 2.16-2.17, ϵ^p é a deformação plástica axial, σ é a tensão axial e σ_{y0} é a tensão de escoamento monotônica inicial.

2.3 Funções Denominadoras de Dano

O objetivo principal desta seção é o de descrever a função denominadora de dano proposta na presente tese (Subseção 2.3.3). Entretanto, antes disso, faz-se necessário apresentar os parâmetros relacionados à caracterização do estado de tensão (Subseção 2.3.1) e mostrar as funções denominadoras de dano encontradas na literatura (Subseção 2.3.2). Por fim, para finalizar a presente seção, comparações entre as funções denominadoras abordadas são realizadas (Subseção 2.3.4).

2.3.1 Caracterização do Estado de Tensão

Os parâmetros mais utilizados na caracterização do estado de tensão de um dado componente são: **i)** razão de triaxialidade, η , que é calculada através da Equação 2.18, e é interpretada como sendo a razão entre o primeiro invariante do tensor tensão, $I_1 = tr(\boldsymbol{\sigma})$, e o segundo invariante do tensor desviador, $J_2 = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^D : \boldsymbol{\sigma}^D$; e **ii)** terceiro invariante normalizado, ξ , que é calculado através da equação 2.19, e é interpretado como sendo a razão entre o terceiro invariante do tensor desviador, $J_3 = det(\boldsymbol{\sigma}^D)$, e o segundo invariante do tensor desviador.

$$\eta = \frac{I_1}{3\sqrt{3}J_2} \quad (2.18)$$

$$\xi = \frac{\frac{27}{2}J_3}{(3J_2)^{\frac{3}{2}}} \quad (2.19)$$

Em 2008, Bai [61] apresentou a Figura 2.3 e a Tabela 2.1 em seu artigo. A figura e a tabela são muito importantes, pois mostram os valores da razão de triaxialidade e do terceiro invariante normalizado em diversos corpos de prova normalmente utilizados em plasticidade e na calibração da fratura.

Tabela 2.1: Corpos de prova clássicos em plasticidade e na calibração da fratura. Adaptado de [61].

Número	Tipo de corpo de prova	η analítico ¹	ξ
1	Cilíndrico liso, tração	$\frac{1}{3}$	1
2	Barra cilíndrica entalhada, tração [62]	$\frac{1}{3} + \sqrt{2} \ln\left(1 + \frac{a}{2R}\right)$	1
3	Estado plano de deformação plástica, tração	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
4	Placa plana entalhada, tração [63]	$\frac{\sqrt{3}}{3} \left[1 + 2 \ln\left(1 + \frac{t}{4R}\right)\right]$	0
5	Torção ou cisalhamento	0	0
6	Cilíndrico, compressão	$-\frac{1}{3}$	-1
7	Tração equibiaxial	$\frac{2}{3}$	-1
8	Compressão equibiaxial	$\frac{2}{3}$	1
9	Estado plano de deformação plástica, compressão	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
10	Barra cilíndrica entalhada, compressão	$-\frac{1}{3} + \sqrt{2} \ln\left(1 + \frac{a}{2R}\right)$	-1

Nota ¹: R é o raio do entalhe, a é o raio da barra cilíndrica no entalhe e t é a espessura da placa no entalhe.

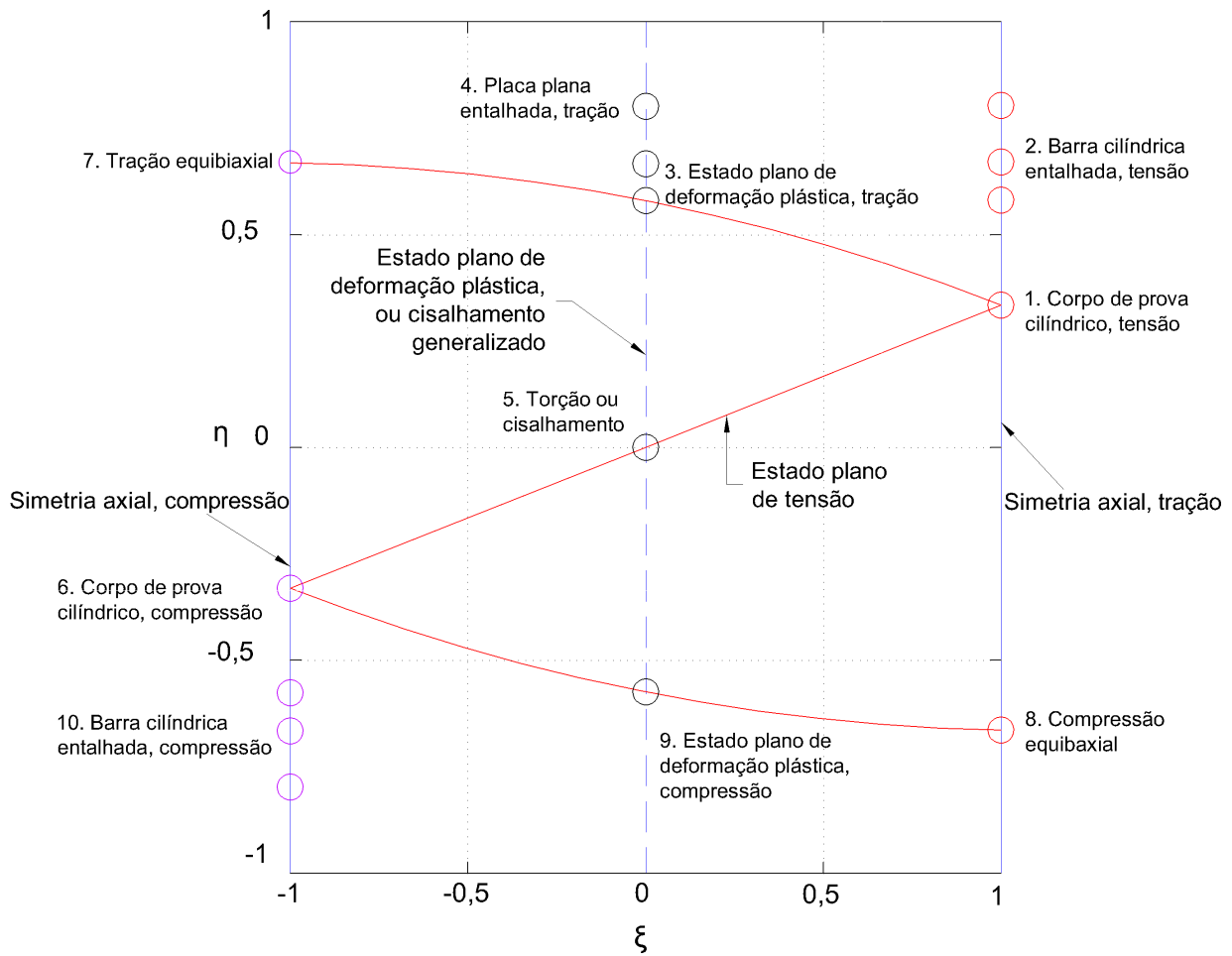


Figura 2.3: Representação do estado de tensão inicial em diversos corpos de prova. Adaptado de [61].

Baseado nas informações da Figura 2.3 e da Tabela 2.1, pode-se verificar que a maioria dos ensaios de fadiga encontrados na literatura está sob o estado plano de tensão (corpos de prova 1, 3, 5, 6, 7, 8 e 9). No caso do estado plano de tensão, a Equação 2.20, que foi proposta por Wierzbicki e Xue [64], é capaz de relacionar o terceiro invariante normalizado com a razão de triaxialidade. Sendo assim, nota-se que, em um estado plano de tensão, a razão de triaxialidade é suficientemente capaz de caracterizar o tipo de carregamento em um dado componente. Por fim, destaca-se que o estado plano de tensão foi observado em todos os ensaios de fadiga encontrados no presente trabalho.

$$\xi = -\frac{27}{2} \eta \left(\eta^2 - \frac{1}{3} \right) \quad (2.20)$$

2.3.2 Funções Denominadoras de Dano Existentes

No modelo original de Lemaitre [28], o denominador de dano (S) é uma constante do material que, dependendo da aplicação, pode ser calibrada a partir de um ensaio monotônico de tração ou a partir de um ensaio de fadiga do tipo tração-compressão. No artigo publicado por Malcher e

Mamiya [29], as previsões feitas com base no modelo original de Lemaitre acerca do deslocamento na fratura de corpos de prova cilíndricos lisos submetidos a ensaios monotônicos de tração eram bem próximas daquelas encontradas experimentalmente. Entretanto, o mesmo já não pode ser dito a respeito dos espécimes submetidos a cisalhamento puro ou que continham entalhes. Na presença de carregamentos cisalhantes, o modelo de Lemaitre foi capaz de prever prematuramente a falha do material, enquanto que, na presença de entalhes, o modelo superestimou o início da fratura. Sendo assim, os autores propuseram uma função denominadora de dano (vide Equação 2.21) dependente da razão de triaxialidade (η), do terceiro invariante normalizado (ξ), de um denominador de dano calibrado para um corpo cilíndrico liso em tração pura ($S_{\frac{1}{3}}$) e de um denominador de dano calibrado em cisalhamento puro (S_0). Utilizando a função apresentada no artigo, os autores foram capazes de melhorar as previsões dos corpos de prova submetidos a cisalhamento puro e também daqueles que eram entalhados.

$$S_{MM}(\eta, \xi) = \frac{S_{\frac{1}{3}}}{3 |\eta| + \frac{S_{\frac{1}{3}}}{S_0} (1 - \xi^2)} \quad (2.21)$$

Substituindo a Equação 2.20 na Equação 2.21, pode-se reescrever a função denominadora de dano proposta por Malcher e Mamiya [29] para o caso do estado plano de tensão, e, dessa forma, a função passa a ser dependente somente da razão de triaxialidade. Além disso, no contexto do presente trabalho, é importante também apresentar a função estabelecida por Malcher e Mamiya [29] para condições cíclicas de carregamento e, para que isso seja possível, é importante destacar que, em um ensaio de fadiga do tipo tração-compressão, a razão de triaxialidade de um corpo de prova cilíndrico liso assume os valores de $\frac{1}{3}$ (tração) e $-\frac{1}{3}$ (compressão). Por isso, o denominador de dano calibrado nessa condição passa a ser chamado de $S_{\pm\frac{1}{3}}$, e não mais de $S_{\frac{1}{3}}$, como era no caso monotônico. Por fim, a função proposta por Malcher e Mamiya [29] para condições cíclicas em que o estado plano de tensão é observado é dada pela Equação 2.22.

$$S_{MM}(\eta) = \frac{S_{\pm\frac{1}{3}}}{3 |\eta| + \frac{S_{\pm\frac{1}{3}}}{S_0} \left[1 - \frac{729}{4} \eta^2 \left(\eta^2 - \frac{1}{3} \right)^2 \right]} \quad (2.22)$$

Por outro lado, a Equação 2.23 apresenta uma função denominadora de dano dependente apenas da razão de triaxialidade. Essa função foi proposta por Castro e Bemfica [30] como modo de melhorar os resultados dos ensaios de fadiga torcionais estudados no artigo.

$$S_{CB}(\eta) = 3 \left(S_{\pm\frac{1}{3}} - S_0 \right) |\eta| + S_0 \quad (2.23)$$

O conceito fundamental das funções propostas por Malcher e Mamiya [29] e Castro e Bemfica [30] consiste na obtenção de denominadores de dano otimizados para cada estado de tensão e que possam ajustar o comportamento da lei de evolução de dano de forma a se atingir o nível de dano crítico em vidas próximas às observadas experimentalmente. Além disso, as funções fornecem: **i**) $S_{\pm\frac{1}{3}}$ quando um corpo cilíndrico liso é tracionado ($\eta = \frac{1}{3}$ e $\xi = 1$) ou comprimido ($\eta = -\frac{1}{3}$ e

$\xi = -1$); e **ii**) S_0 no caso de um corpo de prova em cisalhamento puro ($\eta = 0$ e $\xi = 0$).

Uma vantagem na utilização da Equação 2.22 acoplada à lei de evolução do dano de Lemaitre está no fato de a mesma manter a consistência termodinâmica exigida aos modelos baseados na abordagem da Mecânica do Dano Contínuo (MDC). Fato que não pode ser observado quando se acopla a Equação 2.23, pois ela pode assumir valores negativos para certos materiais e estados de tensão.

2.3.3 Função Denominadora de Dano Proposta

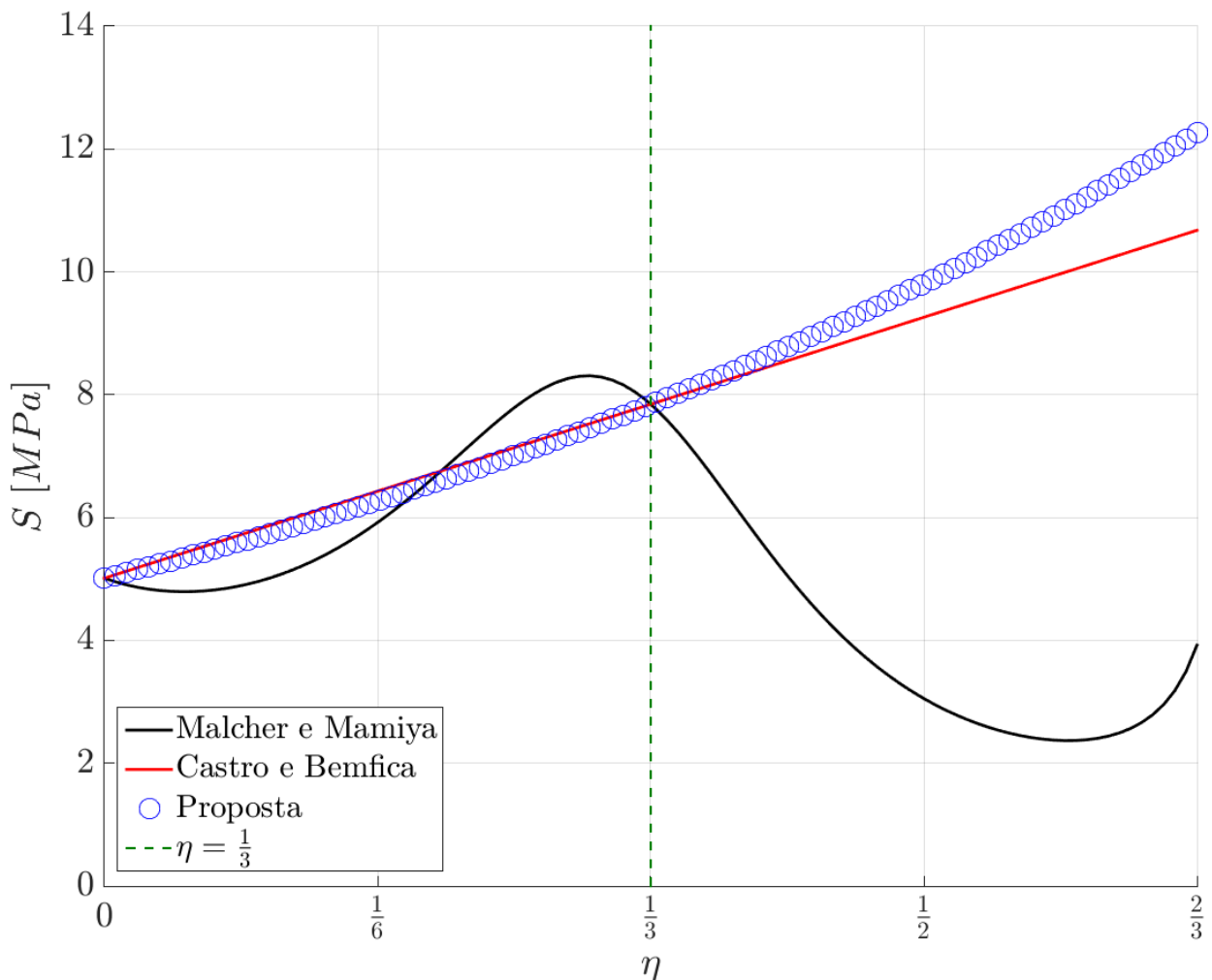
Um dos objetivos delimitados nesta tese consiste em propor uma nova função denominadora de dano para condições cíclicas de carregamento em componentes que estejam submetidos ao estado plano de tensão. Primeiramente, estabeleceu-se que a nova função denominadora de dano deveria ser consistente termodinamicamente, ou seja, ela deve, independente do material ou da condição de carregamento, sempre fornecer valores positivos. Definiu-se que a razão de triaxialidade seria a variável responsável por caracterizar o estado de tensão do componente avaliado, haja vista que, como mostrado na Subseção 2.3.1, somente esse parâmetro é necessário para distinguir os diversos tipos de carregamentos que um componente pode estar sujeito em um estado plano de tensão. Além disso, definiu-se que a nova função denominadora de dano seria dependente apenas dos dois pontos de calibração normalmente utilizados em fadiga, ou seja, a função deveria ser calibrada a partir de 2 conjuntos de ensaios em fadiga: **i**) do tipo tração-compressão com $R = -1$ em corpos de prova cilíndricos lisos ($\eta = \pm \frac{1}{3}$); e **ii**) torcionais com $R = -1$ ($\eta = 0$). Uma outra hipótese estabelecida foi a de que o comportamento da função denominadora de dano observado na região de triaxialidade positiva deveria ser o mesmo daquele verificado na região de triaxialidade negativa, ou seja, $S(\eta) = S(-\eta)$. Ainda considerando a questão dos pontos de calibração, estipulou-se que a função denominadora de dano deve retornar os valores calibrados quando o carregamento aplicado for igual ao da condição de calibração, ou seja, $S(\frac{1}{3}) = S(-\frac{1}{3}) = S_{\pm \frac{1}{3}}$ e $S(0) = S_0$. Em relação ao comportamento da função, ela deveria ser estritamente crescente quando $S_0 < S_{\pm \frac{1}{3}}$ e estritamente decrescente quando $S_0 > S_{\pm \frac{1}{3}}$. Por fim, o último requisito imposto foi o de que a função deveria ser capaz de retomar o modelo original de Lemaitre quando $S_0 = S_{\pm \frac{1}{3}}$, ou seja, apresentar um denominador de dano constante, independentemente da razão de triaxialidade calculada para um dado componente. De modo a atender todos as condições explicitadas anteriormente, a nova função denominadora de dano é dada por:

$$S(\eta) = S_0 \left(\frac{S_{\pm \frac{1}{3}}}{S_0} \right)^{3|\eta|} \quad (2.24)$$

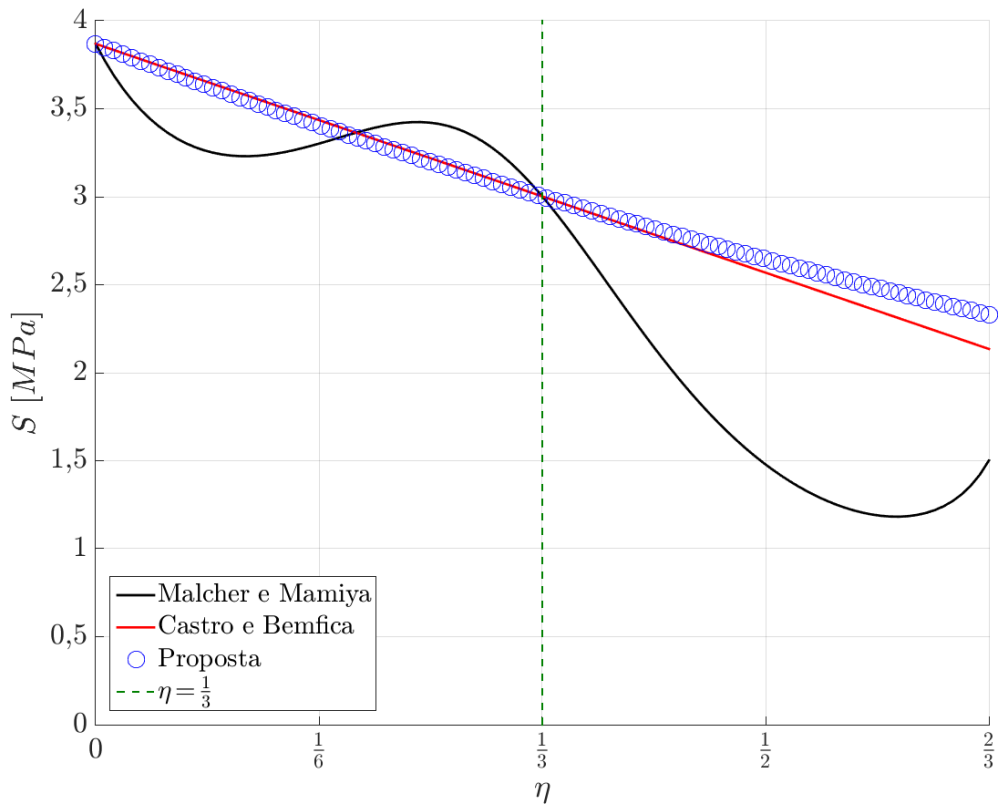
2.3.4 Comparações Entre as Funções Denominadoras de Dano

Após descrever as funções denominadoras de dano propostas por Malcher e Mamiya [29], Castro e Bemfica [30] e a função proposta no presente trabalho, torna-se importante verificar o compor-

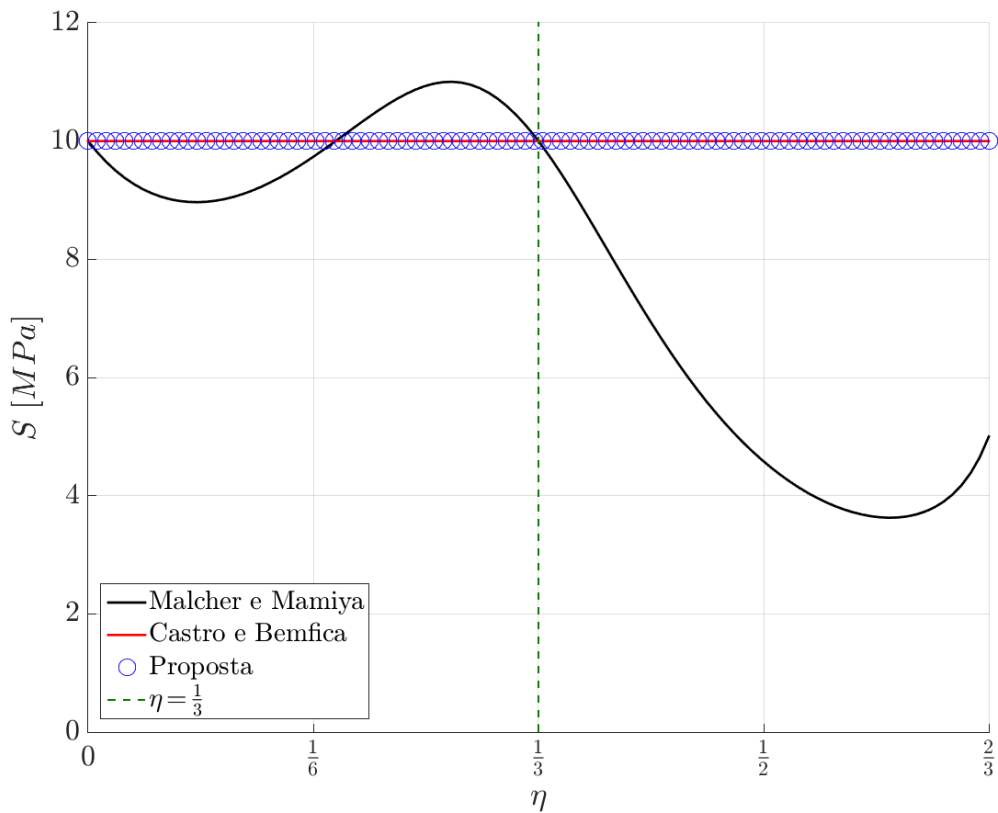
tamento de cada uma delas em condições distintas dos pontos de calibração. Nesse sentido, as seguintes condições são abordadas na Figura 2.4: a) $S_0 = 5,013$ MPa e $S_{\pm\frac{1}{3}} = 7,845$ MPa, que são os denominadores de dano calibrados para o aço SAE 1045 apresentados na Seção 2.6; b) $S_0 = 3,869$ MPa e $S_{\pm\frac{1}{3}} = 3,002$ MPa, que correspondem aos valores calibrados para o aço S460N expostos na Seção 2.6; c) $S_0 = 10$ MPa e $S_{\pm\frac{1}{3}} = 10$ MPa, valores hipotéticos utilizados para verificar se as funções conseguem retomar o modelo original de Lemaitre; e d) $S_0 = 10$ MPa e $S_{\pm\frac{1}{3}} = 1$ MPa, valores hipotéticos utilizados para mostrar que a função proposta por Castro e Bemfica [30] apresenta valores negativos quando $S_{\pm\frac{1}{3}} \leq \frac{S_0}{2}$. Para todas as funções, os resultados obtidos na região de triaxialidade negativa ($\eta < 0$) se comportam como um espelho em relação ao da região de triaxialidade positiva ($\eta > 0$). Sendo assim, os gráficos abaixo foram gerados no seguinte intervalo: $0 \leq \eta \leq \frac{2}{3}$, em que $\frac{2}{3}$ é o valor máximo possível que η pode assumir no caso do estado plano de tensão (ensaio de tração equibiaxial). De modo a facilitar a compreensão dos gráficos abaixo, foram traçadas linhas verdes pontilhadas em $\eta = \frac{1}{3}$. Além disso, como S deve ser sempre positivo (condição para atender a consistência termodinâmica), uma linha pontilhada de cor laranja em $S=0$ é delineada na Figura 2.4(d).



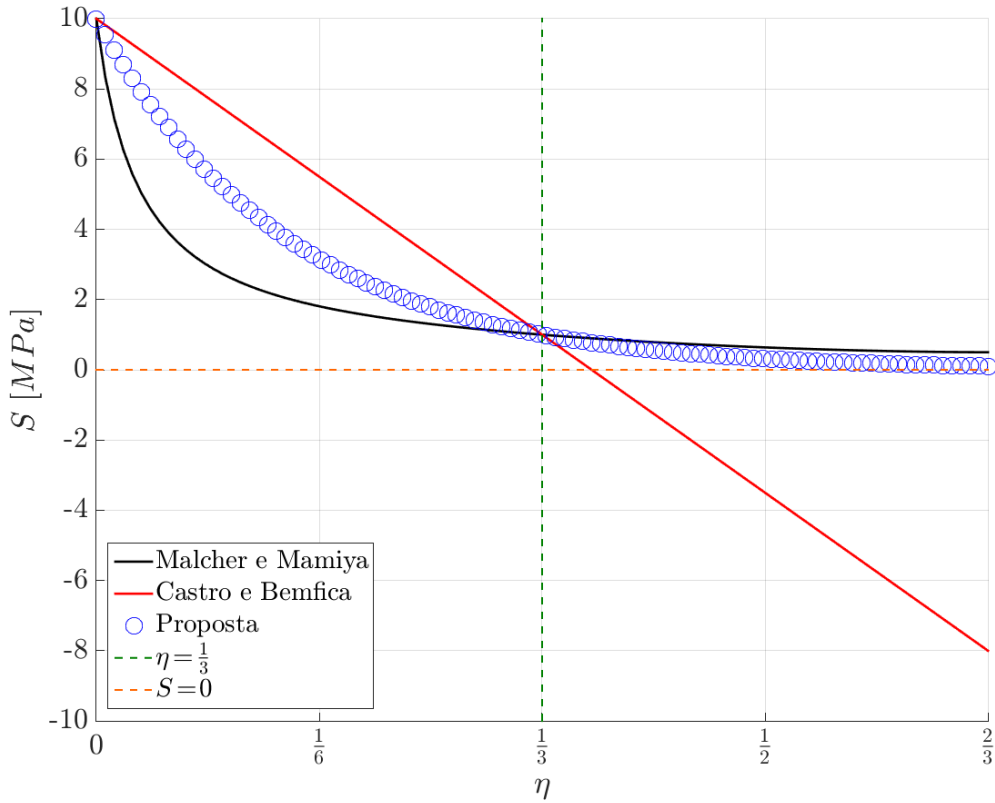
(a) $S_0 = 5,013$ MPa e $S_{\pm\frac{1}{3}} = 7,845$ MPa (dados calibrados para o aço SAE 1045 analisado)



(b) $S_0 = 3,869$ MPa e $S_{\pm\frac{1}{3}} = 3,002$ MPa (dados calibrados para o aço S460N analisado)



(c) $S_0 = 10$ MPa e $S_{\pm\frac{1}{3}} = 10$ MPa (valores hipotéticos)



(d) $S_0 = 10$ MPa e $S_{\pm\frac{1}{3}} = 1$ MPa (valores hipotéticos)

Figura 2.4: Comportamento das funções denominadoras de dano (Malcher e Mamiya [29], Castro e Bemfica [30] e proposta) sob 4 condições distintas.

Analisando a Figura 2.4, percebe-se que a função de Malcher e Mamiya [29] não apresenta um comportamento estritamente crescente quando $S_0 < S_{\pm\frac{1}{3}}$ (Figura 2.4(a)) e que também não é capaz de prever o mesmo denominador de dano quando $S_0 = S_{\pm\frac{1}{3}}$ (Figura 2.4(c)). Ainda de acordo com a Figura 2.4, nota-se que a função de Castro e Bemfica [30] pode assumir valores negativos quando $S_{\pm\frac{1}{3}} \leq \frac{S_0}{2}$ (Figura 2.4(d)). Por fim, conclui-se que a função proposta nesta pesquisa comportou-se adequadamente sob todas as condições avaliadas, e, por isso, foi empregada ao longo da presente tese.

2.4 Modelo Matemático

Considerando que o modelo elastoplástico estudado somente é empregado no contexto das pequenas deformações, pode-se utilizar a decomposição aditiva da deformação (vide Equação 2.25), na qual o tensor de deformação total (ϵ) pode ser decomposto em uma parcela elástica (ϵ^e) e em uma parcela plástica (ϵ^p).

$$\epsilon = \epsilon^e + \epsilon^p \quad (2.25)$$

Para o caso tridimensional, a função de escoamento (Φ), segundo o critério de falha de von

Mises com encruamento cinemático de Desmorat, é dada de acordo com:

$$\Phi = q - \sigma'_{y0} \quad (2.26)$$

em que q é a tensão equivalente de von Mises em relação ao tensor relativo ($\boldsymbol{\eta}$) e σ'_{y0} é a tensão de escoamento cíclica inicial do material.

O tensor relativo ($\boldsymbol{\eta}$) é dado pela Equação 2.27.

$$\boldsymbol{\eta} = \frac{\boldsymbol{\sigma}^D}{1 - D} - \boldsymbol{\beta} \quad (2.27)$$

Na equação anterior, $\boldsymbol{\sigma}^D$ é o tensor tensão desviadora, que pode ser calculado através da seguinte equação:

$$\boldsymbol{\sigma}^D = 2\mu \boldsymbol{\epsilon}^{eD} = 2\mu \left(\boldsymbol{\epsilon}^e - \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\epsilon}^e) \mathbf{I} \right) \quad (2.28)$$

sendo $\boldsymbol{\epsilon}^{eD}$ é o tensor de deformação elástica desviadora.

A tensão equivalente de von Mises em relação ao tensor relativo pode ser escrita como apresentado na Equação 2.29.

$$q = \sqrt{3 J_2(\boldsymbol{\eta})} = \sqrt{\frac{3}{2} \boldsymbol{\eta} : \boldsymbol{\eta}} \quad (2.29)$$

Inserindo o resultado obtido na Equação 2.29 na Equação 2.26, pode-se obter a Equação 2.30.

$$\Phi = \sqrt{\frac{3}{2} \boldsymbol{\eta} : \boldsymbol{\eta}} - \sigma'_{y0} \quad (2.30)$$

Considerando a plasticidade associativa, o vetor de fluxo (\mathbf{N}) é obtido de acordo com a Equação 2.31.

$$\mathbf{N} \equiv \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{1 - D} \frac{3 \boldsymbol{\eta}}{2 q} \quad (2.31)$$

A partir do vetor de fluxo, pode-se definir também o vetor de fluxo não danificado ($\bar{\mathbf{N}}$), que é dado pela Equação 2.32.

$$\bar{\mathbf{N}} = \mathbf{N} (1 - D) = \frac{3 \boldsymbol{\eta}}{2 q} \quad (2.32)$$

A taxa de evolução da deformação plástica é dependente da taxa de evolução do multiplicador plástico ($\dot{\gamma}$) e do vetor de fluxo (\mathbf{N}), como mostrado na Equação 2.33.

$$\dot{\epsilon}^p = \dot{\gamma} \mathbf{N} = \frac{\dot{\gamma}}{1-D} \frac{3\boldsymbol{\eta}}{2q} \quad (2.33)$$

A taxa de evolução da deformação plástica acumulada ($\dot{\epsilon}^p$) é dada pela equação 2.34.

$$\dot{\epsilon}^p = \sqrt{\frac{2}{3}} \dot{\epsilon}^p : \dot{\epsilon}^p = \frac{\dot{\gamma}}{1-D} \quad (2.34)$$

A Equação 2.35 apresenta a evolução de encruamento cinemático de Desmorat após as substituições necessárias.

$$\dot{\beta} = \frac{2}{3} H^k \dot{\gamma} \bar{\mathbf{N}} - \frac{H^k \Gamma \beta_{eq}^{M-3}}{1 + \Gamma \beta_{eq}^{M-1}} \langle \beta : \dot{\gamma} \bar{\mathbf{N}} \rangle \beta \quad (2.35)$$

Aplicando a função denominadora de dano proposta no presente trabalho (vide Equação 2.24) na lei de evolução do dano para o modelo original de Lemaitre (vide Equação 2.8), pode-se obter a Equação 2.36.

$$\dot{D} = \frac{\dot{\gamma}}{1-D} \left(\frac{-Y}{S_0 \left(\frac{S_{\pm \frac{1}{3}}}{S_0} \right)^{3|\eta|}} \right)^s \quad (2.36)$$

A taxa da densidade de energia liberada ($-Y$) é definida por:

$$-Y = \frac{\bar{q}^2}{6G(1-D)^2} + \frac{p^2}{2K(1-D)^2} = \frac{1}{2} \mathbf{D}^e : \epsilon^e : \epsilon^e \quad (2.37)$$

em que \bar{q} é a tensão equivalente de von Mises independente do encruamento cinemático (vide Equação 2.38), G é o módulo de cisalhamento, K é o módulo volumétrico e p é a tensão hidrostática ($\frac{I_1}{3}$).

$$\bar{q} = \sqrt{\frac{3}{2} \boldsymbol{\sigma}^D : \boldsymbol{\sigma}^D} \quad (2.38)$$

A Equação 2.39 apresenta a condição de complementaridade (Kuhn-Tucker), que é responsável por garantir que: **i)** quando a tensão está no domínio elástico ($\Phi < 0$), não há evolução da deformação plástica ($\dot{\gamma} = 0$); e **ii)** caso haja evolução da deformação plástica ($\dot{\gamma} > 0$), a tensão permanecerá no contorno do domínio elástico ($\Phi = 0$).

$$\dot{\gamma} \geq 0, \quad \Phi \leq 0, \quad \dot{\gamma} \Phi = 0. \quad (2.39)$$

Por fim, também é importante apresentar a condição de consistência (ou persistência), que é definida na Equação 2.40. Quando a tensão encontra-se no contorno do regime elástico, essa condição assegura que: **i)** no caso de um descarregamento do material ($\dot{\Phi} < 0$), não há evolução

da deformação plástica ($\dot{\gamma} = 0$); e **ii**) para haver evolução da deformação plástica ($\dot{\gamma} > 0$), a tensão deverá se manter no contorno do domínio elástico ($\dot{\Phi} = 0$).

$$\dot{\gamma} \geq 0, \quad \dot{\Phi} \leq 0, \quad \dot{\gamma} \dot{\Phi} = 0. \quad (2.40)$$

A Figura 2.5 apresenta um quadro contendo um resumo do modelo matemático elastoplástico tridimensional baseado em: **a**) função de escoamento de von Mises; **b**) lei de encruamento cinemático de Desmorat; **c**) mecânica do dano de Lemaitre; e **d**) função denominadora de dano proposta.

i) Decomposição aditiva da deformação:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\epsilon}^e + \boldsymbol{\epsilon}^p$$

ii) Lei de Hooke generalizada danificada:

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbb{D}^e : \boldsymbol{\epsilon}^e$$

iii) Tensor tensão de Cauchy:

$$\boldsymbol{\sigma} = (1 - D) \mathbb{D}^e : \boldsymbol{\epsilon}^e$$

iv) Função de escoamento:

$$\Phi = \sqrt{\frac{3}{2} \left(\frac{\boldsymbol{\sigma}^D}{1 - D} - \boldsymbol{\beta} \right) : \left(\frac{\boldsymbol{\sigma}^D}{1 - D} - \boldsymbol{\beta} \right)} - \sigma'_{y0}$$

v) Lei de fluxo plástico:

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = \frac{\dot{\gamma}}{1 - D} \frac{3 \boldsymbol{\eta}}{2 q}$$

vi) Lei de evolução da deformação plástica acumulada:

$$\dot{\epsilon}^p = \frac{\dot{\gamma}}{1 - D}$$

vii) Lei de evolução do tensor de encruamento cinemático:

$$\dot{\boldsymbol{\beta}} = \frac{2}{3} H^k \dot{\gamma} \bar{\mathbf{N}} - \frac{H^k \Gamma \beta_{eq}^{M-3}}{1 + \Gamma \beta_{eq}^{M-1}} \langle \boldsymbol{\beta} : \dot{\gamma} \bar{\mathbf{N}} \rangle \boldsymbol{\beta}$$

$$\beta_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2} \boldsymbol{\beta} : \boldsymbol{\beta}}$$

viii) Lei de evolução do dano:

$$\dot{D} = \frac{\dot{\gamma}}{1 - D} \left(\frac{-Y}{S_0 \left(\frac{S \pm \frac{1}{2}}{S_0} \right)^{3|\eta|}} \right)^s$$

$$-Y = \frac{\bar{q}^2}{6G(1 - D)^2} + \frac{p^2}{2K(1 - D)^2}$$

ix) Condição de complementaridade (Kuhn-Tucker):

$$\dot{\gamma} \geq 0, \quad \Phi \leq 0, \quad \dot{\gamma} \Phi = 0.$$

x) Condição de consistência (ou persistência):

$$\dot{\gamma} \geq 0, \quad \dot{\Phi} \leq 0, \quad \dot{\gamma} \dot{\Phi} = 0.$$

Figura 2.5: Resumo do modelo matemático descrito na Seção 2.4.

2.4.1 Consistência Termodinâmica

Uma formulação matemática baseada na MDC deve obedecer aos princípios da segunda lei da termodinâmica. Sendo assim, levando-se em consideração todas as forças termodinâmicas e suas variáveis internas associadas, a dissipação mecânica intrínseca devido à plasticidade e ao dano são obrigatoriamente positivas. Desse modo, para demonstrar a consistência termodinâmica da modelagem proposta, foi demonstrada a dissipação mecânica através de dois casos: um caso elastoplástico com encruamento cinemático e outro com dano isotrópico acoplado.

2.4.1.1 Caso Puramente Elastoplástico

Neste caso, pode-se definir a dissipação mecânica como sendo:

$$\mathcal{D}_{mec} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p - \boldsymbol{\chi} : \dot{\boldsymbol{\beta}} \geq 0 \quad (2.41)$$

em que o termo $\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p$ representa o trabalho plástico e pode ser também escrito como uma função da tensão equivalente de von Mises e a taxa de evolução da deformação plástica acumulada, $\boldsymbol{\chi}$ representa a força termodinâmica associada ao encruamento cinemático, tendo $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ como sendo a taxa de evolução de sua variável interna. Assumindo que o potencial de estado plástico associado ao encruamento cinemático ($\psi^p(\boldsymbol{\beta})$) possa ser escrito na forma:

$$\bar{\rho} \psi^p(\boldsymbol{\beta}) = \frac{a^k}{2} \boldsymbol{\beta} : \boldsymbol{\beta} \quad (2.42)$$

na qual a^k é uma constante do material associada ao encruamento cinemático, que, no caso tridimensional, é definida como $a^k = \frac{2}{3} H^k$. Assim, $\boldsymbol{\chi}$ pode ser determinada como sendo a derivada do potencial de estado em função da variável interna $\boldsymbol{\beta}$ associada:

$$\boldsymbol{\chi} = \bar{\rho} \frac{\partial \psi^p(\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}} = a^k \boldsymbol{\beta} \quad (2.43)$$

Por fim, a Equação 2.42 pode ser reescrita como sendo:

$$\mathcal{D}_{mec} = q \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p - a^k \boldsymbol{\beta} : \dot{\boldsymbol{\beta}} \geq 0 \quad (2.44)$$

A desigualdade da Equação 2.44 pode ser analisada de duas formas: **a)** quando $\langle \boldsymbol{\beta} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p \rangle \leq 0$; e **b)** quando $\langle \boldsymbol{\beta} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p \rangle > 0$, levando-se em conta, de acordo com Desmorat, o comportamento da lei de evolução do tensor de encruamento cinemático.

a) Quando $\langle \boldsymbol{\beta} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p \rangle \leq 0$

Neste caso, de acordo com Desmorat, a taxa de evolução do tensor de encruamento cinemático se reduz a:

$$\dot{\boldsymbol{\beta}} = \frac{2}{3} H^k \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p \quad (2.45)$$

Substituindo a taxa de evolução da deformação plástica acumulada, definida como sendo igual a $\dot{\gamma}$, para o caso elastoplástico, e mais a Equação 2.45 na desigualdade da Equação 2.44, tem-se:

$$\mathcal{D}_{mec} = \dot{\gamma} \left[q - \left(a^k \right)^2 (\boldsymbol{\beta} : \mathbf{N}) \right] \geq 0 \quad (2.46)$$

Para o caso elástico, $\dot{\gamma} = 0$, e, conseqüentemente, $\mathcal{D}_{mec} = 0$. Já no caso elastoplástico, $\dot{\gamma} > 0$, o termo $[q - a^2 (\boldsymbol{\beta} : \mathbf{N})] > 0$, visto que $(\boldsymbol{\beta} : \mathbf{N}) < 0$, e, conseqüentemente, $\mathcal{D}_{mec} > 0$.

b) Quando $\langle \boldsymbol{\beta} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p \rangle > 0$

Neste caso, de acordo com Desmorat, a taxa de evolução do tensor de encruamento cinemático é definida pela Equação 2.35, podendo ser reescrita na forma:

$$\dot{\boldsymbol{\beta}} = a^k \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p - b^k (\boldsymbol{\beta} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p) \boldsymbol{\beta} \quad (2.47)$$

em que $b^k = \frac{H^k \Gamma \beta_{eq}^{M-3}}{1 + \Gamma \beta_{eq}^{M-1}}$. Novamente, substituindo a taxa de evolução da deformação plástica acumulada e mais a Equação 2.47 na desigualdade da Equação 2.44, tem-se:

$$\mathcal{D}_{mec} = \dot{\gamma} \left\{ q - \left[\left(a^k \right)^2 (\boldsymbol{\beta} : \mathbf{N}) - a^k b^k \boldsymbol{\beta} : (\boldsymbol{\beta} : \mathbf{N}) \boldsymbol{\beta} \right] \right\} \geq 0 \quad (2.48)$$

No caso elástico, $\dot{\gamma} = 0$ e $\mathcal{D}_{mec} = 0$. Já no caso elastoplástico, $\dot{\gamma} > 0$ e, por definição (vide Seção 2.2), o termo $(a^k)^2 (\boldsymbol{\beta} : \mathbf{N}) > a^k b^k \boldsymbol{\beta} : (\boldsymbol{\beta} : \mathbf{N}) \boldsymbol{\beta}$, visto que não há saturação das tensões cinemáticas para a abordagem de Desmorat. Assim, $\left[(a^k)^2 (\boldsymbol{\beta} : \mathbf{N}) - a^k b^k \boldsymbol{\beta} : (\boldsymbol{\beta} : \mathbf{N}) \boldsymbol{\beta} \right] > 0$, e, para que haja consistência termodinâmica ao modelo elastoplástico com encruamento cinemático de Desmorat, o termo $0 < \left[(a^k)^2 (\boldsymbol{\beta} : \mathbf{N}) - a^k b^k \boldsymbol{\beta} : (\boldsymbol{\beta} : \mathbf{N}) \boldsymbol{\beta} \right] < \sigma'_{y0}$. Sendo assim, $\mathcal{D}_{mec} > 0$.

2.4.1.2 Caso Lemaitre com a Função Denominadora de Dano Proposta

Neste caso, a dissipação mecânica é definida como sendo:

$$\mathcal{D}_{mec} = q \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p - a^k \boldsymbol{\beta} : \dot{\boldsymbol{\beta}} - Y \dot{D} \geq 0 \quad (2.49)$$

na qual, $-Y$ é a força termodinâmica associada ao dano, ou, ainda, a energia liberada devido ao dano, e \dot{D} é a taxa de evolução da variável interna associada, ou variável de dano. Pode-se reescrever a desigualdade acima assumindo que a mesma pode ser decomposta em dois termos: dissipação plástica e dissipação do dano, dados por, respectivamente:

$$\begin{aligned} q \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p - a^k \boldsymbol{\beta} : \dot{\boldsymbol{\beta}} &\geq 0 \\ -Y \dot{D} &\geq 0 \end{aligned} \quad (2.50)$$

Como já foi demonstrado que a dissipação plástica é sempre positiva, neste caso, terá que se demonstrar apenas que a dissipação do dano também é sempre positiva. Assim, como $-Y$ é uma função quadrática positiva (vide Equação 2.80), a taxa do dano \dot{D} também deve ser uma função não negativa. Isso significa que a variável de dano somente leva em consideração a degradação progressiva de materiais, não sendo possível nenhum tipo de recuperação de energia. Substituindo a Equação 2.36 na segunda parte da desigualdade da Equação 2.50, tem-se que:

$$(-Y) \frac{\dot{\gamma}}{1-D} \left[\frac{-Y}{S_0 \left(\frac{S_{\pm \frac{1}{3}}}{S_0} \right)^{3|\eta|}} \right]^s \geq 0 \quad (2.51)$$

Aqui, como a função denominadora de dano proposta somente resulta em valores positivos (como mostrado na Seção 2.3), ou $-Y \dot{D} = 0$, para o caso elástico, ou $-Y \dot{D} > 0$, para um caso elastoplástico com dano acoplado.

2.5 Modelo Numérico

2.5.1 Introdução

Como o modelo apresentado na Seção 2.4 é dependente da trajetória de carregamento, faz-se necessário o uso de um recurso de integração numérica para a obtenção das variáveis associadas ao problema, visto que soluções analíticas não são encontradas nesses casos [29]. O método de integração empregado no presente trabalho baseia-se no método de Euler implícito, cujas variáveis no pseudotempo t_{n+1} podem ser obtidas através do conhecimento das mesmas variáveis no pseudotempo t_n e da resolução de um sistema de equações não lineares estabelecidas no pseudotempo t_{n+1} [65].

O método da decomposição do operador (consulte [56] e [65]) é largamente utilizado no campo da plasticidade computacional para atualizar as tensões e as variáveis internas associadas aos problemas elastoplásticos. O problema passa a ser dividido em 2 partes: **i)** preditor elástico: em que um dado incremento de deformação é tomado como puramente elástico e, caso a suposição seja verdadeira, os valores das variáveis dependentes da evolução plástica no instante t_{n+1} são mantidos iguais aos encontrados em t_n ; e **ii)** corretor plástico: caso a suposição feita anteriormente seja falsa, torna-se necessário resolver um sistema de equações não lineares responsáveis por atualizar as variáveis internas do problema. Nesta pesquisa, o sistema de equações não lineares foi resolvido através do método iterativo de Newton-Raphson, que normalmente é empregado nessas situações devido às suas taxas quadráticas de convergência assintótica [56].

2.5.2 Preditor Elástico

Conhecendo-se as variáveis internas no instante t_n e o incremento de deformação ($\Delta\epsilon$) em t_{n+1} , pode-se estabelecer as Equações 2.52-2.59, que se referem ao estado tentativa (denotado pelo sobrescrito T), em que há a suposição da não evolução da deformação plástica.

$$\epsilon_{n+1}^{eT} = \epsilon_n^e + \Delta\epsilon \quad (2.52)$$

$$\epsilon_{n+1}^{pT} = \epsilon_n^p \quad (2.53)$$

$$D_{n+1}^T = D_n \quad (2.54)$$

$$\bar{\epsilon}_{n+1}^{pT} = \bar{\epsilon}_n^p \quad (2.55)$$

$$\beta_{n+1}^T = \beta_n \quad (2.56)$$

$$\tilde{\sigma}_{n+1}^T = \mathbf{D}^e : \epsilon_{n+1}^{eT} \quad (2.57)$$

$$\sigma_{n+1}^T = (1 - D_{n+1}^T) \mathbf{D}^e : \epsilon_{n+1}^{eT} \quad (2.58)$$

$$\eta_{n+1}^T = \frac{\sigma_{n+1}^T}{1 - D_{n+1}^T} - \beta_{n+1}^T \quad (2.59)$$

O próximo passo consiste na verificação da admissibilidade plástica do estado tentativa, ou seja, verificar se o suposto estado tentativa encontra-se no domínio elástico ou plástico. Para isso, cria-se a função de escoamento tentativa, como apresentado pela Equação 2.60.

$$\Phi_{n+1}^T = \sqrt{\frac{3}{2} \eta_{n+1}^T : \eta_{n+1}^T - \sigma'_{y0}} \quad (2.60)$$

Se $\Phi_{n+1}^T \leq 0 \Rightarrow$ Passo elástico: Estado real em t_{n+1} é igual ao estado tentativa em t_{n+1} , ou seja, $(*)_{n+1} = (*)^T_{n+1}$. Sendo assim, as Equações 2.61-2.67 podem ser definidas.

$$\epsilon_{n+1}^e = \epsilon_{n+1}^{eT} \quad (2.61)$$

$$\epsilon_{n+1}^p = \epsilon_{n+1}^{pT} \quad (2.62)$$

$$D_{n+1} = D_{n+1}^T \quad (2.63)$$

$$\bar{\epsilon}_{n+1}^p = \bar{\epsilon}_{n+1}^{pT} \quad (2.64)$$

$$\beta_{n+1} = \beta_{n+1}^T \quad (2.65)$$

$$\tilde{\sigma}_{n+1} = \tilde{\sigma}_{n+1}^T \quad (2.66)$$

$$\sigma_{n+1} = \sigma_{n+1}^T \quad (2.67)$$

Se $\Phi_{n+1}^T > 0 \Rightarrow$ Passo plástico: ir para o corretor plástico (Subseção 2.5.3).

2.5.3 Corretor Plástico

A consideração de que o passo era completamente elástico foi equivocada e, por isso, deverá ser corrigida. Dessa forma, a metodologia a seguir trata do cálculo das variáveis no instante t_{n+1} .

O vetor de fluxo em t_{n+1} (\mathbf{N}_{n+1}) é mostrado na Equação 2.68.

$$\mathbf{N}_{n+1} = \frac{1}{1 - D_{n+1}} \frac{3\boldsymbol{\eta}_{n+1}}{2q_{n+1}} \quad (2.68)$$

A Equação 2.69 apresenta $\bar{\mathbf{N}}_{n+1}$, que é o vetor de fluxo não danificado em t_{n+1} .

$$\bar{\mathbf{N}}_{n+1} = \frac{3\boldsymbol{\eta}_{n+1}}{2q_{n+1}} \quad (2.69)$$

O cálculo do incremento de deformação plástica em t_{n+1} ($\Delta\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^p$) pode ser encontrado de acordo com a Equação 2.70, sendo que ela foi estabelecida com o auxílio das equações 2.33 e 2.68.

$$\Delta\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^p = \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^p - \boldsymbol{\epsilon}_n^p = \Delta\gamma \mathbf{N}_{n+1} = \frac{\Delta\gamma}{1 - D_{n+1}} \frac{3\boldsymbol{\eta}_{n+1}}{2q_{n+1}} \quad (2.70)$$

A deformação elástica no instante t_{n+1} ($\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^e$) pode ser obtida com a remoção do incremento de deformação plástica ($\Delta\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^p$) da deformação elástica tentativa ($\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^{eT}$), como apresentado na Equação 2.71.

$$\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^e = \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^{eT} - \Delta\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^p = \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^{eT} - \Delta\gamma \mathbf{N}_{n+1} = \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^{eT} - \frac{\Delta\gamma}{1 - D_{n+1}} \frac{3\boldsymbol{\eta}_{n+1}}{2q_{n+1}} \quad (2.71)$$

O tensor tensão efetiva no passo t_{n+1} ($\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}$) é dado pela Equação 2.72.

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} = \mathbb{D}^e : \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^e \quad (2.72)$$

A Equação 2.73 mostra o cálculo do tensor tensão de Cauchy no instante t_{n+1} ($\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$).

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = (1 - D_{n+1}) \mathbb{D}^e : \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^e = (1 - D_{n+1}) \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} \quad (2.73)$$

A deformação plástica acumulada em t_{n+1} ($\bar{\boldsymbol{\epsilon}}_{n+1}^p$) é corrigida pela Equação 2.74.

$$\bar{\boldsymbol{\epsilon}}_{n+1}^p = \bar{\boldsymbol{\epsilon}}_n^p + \frac{\Delta\gamma}{1 - D_{n+1}} \quad (2.74)$$

A atualização do tensor de encruamento cinemático no instante t_{n+1} ($\boldsymbol{\beta}_{n+1}$) é mostrada na Equação 2.75.

$$\beta_{n+1} = \beta_n + \frac{2}{3} H^k \Delta\gamma \bar{N}_{n+1} - \frac{H^k \Gamma \beta_{eq\ n+1}^{M-3}}{1 + \Gamma \beta_{eq\ n+1}^{M-1}} \langle \beta_{n+1} : \Delta\gamma \bar{N}_{n+1} \rangle \beta_{n+1} \quad (2.75)$$

O termo $\beta_{eq\ n+1}$ pode ser calculado de acordo com a Equação 2.76.

$$\beta_{eq\ n+1} = \sqrt{\frac{3}{2} \beta_{n+1} : \beta_{n+1}} \quad (2.76)$$

A tensão equivalente de von Mises considerando apenas o tensor tensão desviadora no passo t_{n+1} (\bar{q}_{n+1}) é mostrada na Equação 2.77.

$$\bar{q}_{n+1} = \sqrt{\frac{3}{2} \sigma^D_{n+1} : \sigma^D_{n+1}} \quad (2.77)$$

A Equação 2.78 apresenta a tensão hidrostática em t_{n+1} (p_{n+1}).

$$p_{n+1} = \frac{1}{3} tr(\sigma_{n+1}) \quad (2.78)$$

A razão de triaxialidade no instante t_{n+1} (η_{n+1}) é dada pela Equação 2.79.

$$\eta_{n+1} = \frac{p_{n+1}}{\bar{q}_{n+1}} \quad (2.79)$$

A taxa da densidade de energia liberada no instante t_{n+1} ($-Y_{n+1}$) pode ser calculada de acordo com a Equação 2.80.

$$-Y_{n+1} = \left(\frac{\bar{q}_{n+1}^2}{6G(1-D_{n+1})^2} + \frac{p_{n+1}^2}{2K(1-D_{n+1})^2} \right) \quad (2.80)$$

A Equação 2.81 apresenta a função denominadora de dano proposta no presente trabalho no passo t_{n+1} ($S(\eta)_{n+1}$).

$$S(\eta_{n+1})_{n+1} = S_0 \left(\frac{S_{\pm\frac{1}{3}}}{S_0} \right)^{3|\eta_{n+1}|} \quad (2.81)$$

O dano no instante de tempo t_{n+1} (D_{n+1}) é dado pela Equação 2.82.

$$D_{n+1} = D_n + \frac{\Delta\gamma}{1-D_{n+1}} \left(\frac{-Y_{n+1}}{S(\eta_{n+1})_{n+1}} \right)^s \quad (2.82)$$

A função de escoamento em t_{n+1} (Φ_{n+1}) pode ser calculada de acordo com a Equação 2.83.

$$\Phi_{n+1} = \sqrt{\frac{3}{2} \eta_{n+1} : \eta_{n+1} - \sigma'_{y0}} \quad (2.83)$$

Por fim, após a apresentação das equações pertinentes à etapa do corretor plástico, sugere-se o sistema de equações não lineares a ser solucionado apresentado na Equação 2.84, cujas variáveis são: $\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^e$, D_{n+1} , $\Delta\gamma$ e $\boldsymbol{\beta}_{n+1}$.

$$\begin{cases} \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^e = \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^{eT} - \Delta\gamma \mathbf{N}_{n+1} \\ D_{n+1} = D_n + \frac{\Delta\gamma}{1-D_{n+1}} \left(\frac{-Y_{n+1}}{S(\eta_{n+1})_{n+1}} \right)^s \\ \Phi_{n+1} = \sqrt{\frac{3}{2}} \boldsymbol{\eta}_{n+1} : \boldsymbol{\eta}_{n+1} - \sigma'_{y0} \\ \boldsymbol{\beta}_{n+1} = \boldsymbol{\beta}_n + \frac{2}{3} H^k \Delta\gamma \bar{\mathbf{N}}_{n+1} - \frac{H^k \Gamma \beta_{eq\ n+1}^{M-3}}{1+\Gamma \beta_{eq\ n+1}^{M-1}} \langle \boldsymbol{\beta}_{n+1} : \Delta\gamma \bar{\mathbf{N}}_{n+1} \rangle \boldsymbol{\beta}_{n+1} \end{cases} \quad (2.84)$$

2.5.4 Método de Newton-Raphson

Como mencionado na introdução desta seção, no presente trabalho, o método de Newton-Raphson foi utilizado na solução do sistema de equações não lineares proposto anteriormente. Para isso, inicialmente, deve-se criar um sistema de equações residuais (vide Equação 2.85) a partir do sistema apresentado na Equação 2.84.

$$\begin{cases} \mathbf{R}\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^e = \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^e - \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^{eT} + \Delta\gamma \mathbf{N}_{n+1} \\ R_{D_{n+1}} = D_{n+1} - D_n - \frac{\Delta\gamma}{1-D_{n+1}} \left(\frac{-Y_{n+1}}{S(\eta_{n+1})_{n+1}} \right)^s \\ R_{\Delta\gamma} = \sqrt{\frac{3}{2}} \boldsymbol{\eta}_{n+1} : \boldsymbol{\eta}_{n+1} - \sigma'_{y0} \\ \mathbf{R}\boldsymbol{\beta}_{n+1} = \boldsymbol{\beta}_{n+1} - \boldsymbol{\beta}_n - \frac{2}{3} H^k \Delta\gamma \bar{\mathbf{N}}_{n+1} + \frac{H^k \Gamma \beta_{eq\ n+1}^{M-3}}{1+\Gamma \beta_{eq\ n+1}^{M-1}} \langle \boldsymbol{\beta}_{n+1} : \Delta\gamma \bar{\mathbf{N}}_{n+1} \rangle \boldsymbol{\beta}_{n+1} \end{cases} \quad (2.85)$$

O próximo passo necessário para a aplicação do método de Newton-Raphson consiste na linearização do sistema de equações residuais, que, de forma genérica, é descrito pela Equação 2.86.

$$\frac{\partial R^k}{\partial * } \delta_*^{k+1} = -R^k \quad (2.86)$$

Sendo assim, para o sistema de equações residuais mostrado na Equação 2.85, a linearização do problema, segundo o método de Newton-Raphson, é dada a seguir:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{R}\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^e}{\partial \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^e} & \frac{\partial \mathbf{R}\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^e}{\partial D_{n+1}} & \frac{\partial \mathbf{R}\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^e}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial \mathbf{R}\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^e}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}} \\ \frac{\partial R_{D_{n+1}}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^e} & \frac{\partial R_{D_{n+1}}}{\partial D_{n+1}} & \frac{\partial R_{D_{n+1}}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial R_{D_{n+1}}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}} \\ \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^e} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial D_{n+1}} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}} \\ \frac{\partial \mathbf{R}\boldsymbol{\beta}_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^e} & \frac{\partial \mathbf{R}\boldsymbol{\beta}_{n+1}}{\partial D_{n+1}} & \frac{\partial \mathbf{R}\boldsymbol{\beta}_{n+1}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial \mathbf{R}\boldsymbol{\beta}_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}} \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} \boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^e} \\ \delta_{D_{n+1}} \\ \delta_{\Delta\gamma} \\ \boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}} \end{bmatrix}^{k+1} = - \begin{bmatrix} \mathbf{R}\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^e \\ R_{D_{n+1}} \\ R_{\Delta\gamma} \\ \mathbf{R}\boldsymbol{\beta}_{n+1} \end{bmatrix}^k \quad (2.87)$$

Para dar início ao processo iterativo, como mostrado a seguir, assume-se que o estado tentativa corresponda ao instante $k = 0$:

$$\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^{e(0)} = \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^{eT} \quad (2.88)$$

$$D_{n+1}^{(0)} = D_{n+1}^T \quad (2.89)$$

$$\Delta\gamma^{(0)} = 0 \quad (2.90)$$

$$\boldsymbol{\beta}_{n+1}^{(0)} = \boldsymbol{\beta}_{n+1}^T \quad (2.91)$$

Depois de resolvido o sistema linearizado apresentado na Equação 2.87, as variáveis são atualizadas de acordo com as Equações 2.92-2.95.

$$\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^{e(k+1)} = \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^{e(k)} + \boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^e}^{(k+1)} \quad (2.92)$$

$$D_{n+1}^{(k+1)} = D_{n+1}^{(k)} + \delta_{D_{n+1}}^{(k+1)} \quad (2.93)$$

$$\Delta\gamma^{(k+1)} = \Delta\gamma^{(k)} + \delta_{\Delta\gamma}^{(k+1)} \quad (2.94)$$

$$\boldsymbol{\beta}_{n+1}^{(k+1)} = \boldsymbol{\beta}_{n+1}^{(k)} + \boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}}^{(k+1)} \quad (2.95)$$

A convergência do método deve ser então determinada. Para isso, calcula-se o erro associado à iteração, que é dado por:

$$Erro = \sum_{i=1}^n \left| \frac{R_i}{\alpha_i} \right| \quad (2.96)$$

em que R_i é a equação residual i , α_i é a variável associada à equação residual i e n é o número de variáveis do problema. Se o erro calculado for menor ou igual a uma dada tolerância ($Erro \leq Tolerância$), o processo iterativo é encerrado. Caso contrário, outra iteração deve ser iniciada. A Figura 2.6 apresenta um quadro-resumo das equações necessárias para a atualização das tensões e variáveis internas associadas ao modelo estudado nesta seção. Um quadro-resumo do método de Newton-Raphson aplicado ao modelo estudado nesta seção é exibido na Figura 2.7.

i) Preditor elástico: formado a partir das variáveis internas em t_n e do $\Delta\epsilon$

$$\begin{aligned}
\epsilon_{n+1}^{eT} &= \epsilon_n^e + \Delta\epsilon \\
\epsilon_{n+1}^{pT} &= \epsilon_n^p \\
D_{n+1}^T &= D_n \\
\bar{\epsilon}_{n+1}^{pT} &= \bar{\epsilon}_n^p \\
\beta_{n+1}^T &= \beta_n \\
\tilde{\sigma}_{n+1}^T &= \mathbb{D}^e : \epsilon_{n+1}^{eT} \\
\sigma_{n+1}^T &= (1 - D_{n+1}^T) \mathbb{D}^e : \epsilon_{n+1}^{eT} \\
\eta_{n+1}^T &= \frac{\sigma_{n+1}^{DT}}{1 - D_{n+1}^T} - \beta_{n+1}^T
\end{aligned}$$

ii) Verificação da admissibilidade plástica:

$$\Phi_{n+1}^T = \sqrt{\frac{3}{2} \eta_{n+1}^T : \eta_{n+1}^T} - \sigma'_{y0}$$

Se $\Phi_{n+1}^T \leq 0 \Rightarrow$ Passo elástico: $(*)_{n+1} = (*)_{n+1}^T \Rightarrow v$

Se $\Phi_{n+1}^T > 0 \Rightarrow$ Passo plástico \Rightarrow iii

iii) Corretor plástico:

O sistema de equações não lineares com variáveis ϵ_{n+1}^e , D_{n+1} , $\Delta\gamma$ e β_{n+1} deve ser solucionado através do método de Newton-Raphson.

$$\begin{cases}
\epsilon_{n+1}^e = \epsilon_{n+1}^{eT} - \Delta\gamma \mathbf{N}_{n+1} \\
D_{n+1} = D_n + \frac{\Delta\gamma}{1 - D_{n+1}} \left(\frac{-Y_{n+1}}{S(\eta_{n+1})_{n+1}} \right)^s \\
\Phi_{n+1} = \sqrt{\frac{3}{2} \eta_{n+1} : \eta_{n+1}} - \sigma'_{y0} \\
\beta_{n+1} = \beta_n + \frac{2}{3} H^k \Delta\gamma \bar{\mathbf{N}}_{n+1} - \frac{H^k \Gamma \beta_{eq,n+1}^{M-3}}{1 + \Gamma \beta_{eq,n+1}^{M-1}} \langle \beta_{n+1} : \Delta\gamma \bar{\mathbf{N}}_{n+1} \rangle \beta_{n+1}
\end{cases}$$

iv) Atualização das outras variáveis internas e tensões:

$$\begin{aligned}
\epsilon_{n+1}^p &= \epsilon_n^p + \Delta\gamma \mathbf{N}_{n+1} \\
\bar{\epsilon}_{n+1}^p &= \bar{\epsilon}_n^p + \frac{\Delta\gamma}{1 - D_{n+1}} \\
\tilde{\sigma}_{n+1} &= \mathbb{D}^e : \epsilon_{n+1}^e \\
\sigma_{n+1} &= (1 - D_{n+1}) \tilde{\sigma}_{n+1}
\end{aligned}$$

v) Fim

Figura 2.6: Quadro-resumo das equações necessárias para a atualização das tensões e variáveis internas associadas ao modelo estudado na Seção. 2.5.

i) Estado tentativa é usado para iniciar o processo iterativo ($k = 0$):

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^e(0) &= \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^{eT} \\ D_{n+1}(0) &= D_{n+1}^T \\ \Delta\gamma(0) &= 0 \\ \boldsymbol{\beta}_{n+1}(0) &= \boldsymbol{\beta}_{n+1}^T\end{aligned}$$

ii) Resolução do problema linearizado:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{R}_{\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^e}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^e} & \frac{\partial \mathbf{R}_{\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^e}}{\partial D_{n+1}} & \frac{\partial \mathbf{R}_{\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^e}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial \mathbf{R}_{\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^e}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}} \\ \frac{\partial R_{D_{n+1}}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^e} & \frac{\partial R_{D_{n+1}}}{\partial D_{n+1}} & \frac{\partial R_{D_{n+1}}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial R_{D_{n+1}}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}} \\ \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^e} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial D_{n+1}} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}} \\ \frac{\partial \mathbf{R}_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^e} & \frac{\partial \mathbf{R}_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}}}{\partial D_{n+1}} & \frac{\partial \mathbf{R}_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial \mathbf{R}_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}} \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} \boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^e} \\ \delta_{D_{n+1}} \\ \delta_{\Delta\gamma} \\ \boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}} \end{bmatrix}^{k+1} = - \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^e} \\ R_{D_{n+1}} \\ R_{\Delta\gamma} \\ \mathbf{R}_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}} \end{bmatrix}^k$$

iii) Atualização das variáveis $\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^e$, D_{n+1} , $\Delta\gamma$ e $\boldsymbol{\beta}_{n+1}$:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^e(k+1) &= \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^e(k) + \boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^e}(k+1) \\ D_{n+1}(k+1) &= D_{n+1}(k) + \delta_{D_{n+1}}(k+1) \\ \Delta\gamma(k+1) &= \Delta\gamma(k) + \delta_{\Delta\gamma}(k+1) \\ \boldsymbol{\beta}_{n+1}(k+1) &= \boldsymbol{\beta}_{n+1}(k) + \boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}}(k+1)\end{aligned}$$

iv) Verificação da convergência:

$$Erro = \sum_{i=1}^n \left| \frac{R_i}{\alpha_i} \right|$$

Se $Erro \leq Tolerância \Rightarrow$ v

Se $Erro > Tolerância \Rightarrow$ ii

v) Fim

Figura 2.7: Quadro-resumo do método de Newton-Raphson aplicado ao modelo estudado na Seção 2.5.

2.5.5 Carregamentos Axiais-Torcionais

Quando componentes são submetidos a carregamentos axiais-torcionais em simulações em um ponto de Gauss, somente os históricos de ϵ_x e γ_{xy} são conhecidos. Entretanto, no caso de uma formulação tridimensional, também é necessário conhecer os históricos de ϵ_y e ϵ_z . O primeiro passo para a obtenção dessas deformações consiste em escrever a lei de Hooke generalizada não danificada em sua forma inversa, como mostrado a seguir:

$$\boldsymbol{\epsilon}^e = \mathbf{C}^e : \boldsymbol{\sigma} \quad (2.97)$$

em que \mathbf{C}^e é o tensor de flexibilidade elástica de 4ª ordem, que, para materiais isotrópicos, pode ser expresso pela Equação 2.98.

$$\mathbf{C}^e = -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + \frac{1}{2\mu} \mathbf{I} \quad (2.98)$$

Em carregamentos axiais-torcionais, o seguinte tensor tensão de Cauchy não danificado pode ser estabelecido:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.99)$$

Considerando as Equações 2.97-2.99, as seguintes relações podem ser definidas:

$$\epsilon_x^e = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z)] = \frac{\sigma_x}{E} \quad (2.100)$$

$$\epsilon_y^e = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu (\sigma_x + \sigma_z)] = -\nu \frac{\sigma_x}{E} = -\nu \epsilon_x^e \quad (2.101)$$

$$\epsilon_z^e = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_y)] = -\nu \frac{\sigma_x}{E} = -\nu \epsilon_x^e \quad (2.102)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad (2.103)$$

$$\gamma_{xz} = 0 \quad (2.104)$$

$$\gamma_{yz} = 0 \quad (2.105)$$

De acordo com o exposto anteriormente, durante a etapa do preditor elástico, as seguintes relações devem ser consideradas para as componentes axiais:

$$\epsilon_{x_{n+1}}^{eT} = \epsilon_{x_n}^e + \Delta \epsilon_x \quad (2.106)$$

$$\epsilon_{y_{n+1}}^{eT} = \epsilon_{z_{n+1}}^{eT} = -\nu \epsilon_{x_{n+1}}^{eT} \quad (2.107)$$

Durante a fase do corretor plástico, como uma das equações não lineares foi escrita em termos da variável $\boldsymbol{\epsilon}^e$ (vide Equação 2.84), as próximas equações podem ser utilizadas nas componentes axiais para assegurar que o carregamento axial-torcional seja mantido:

$$\epsilon_{x_{n+1}}^e = \epsilon_{x_{n+1}}^{eT} - \Delta \gamma N_{x_{n+1}} \quad (2.108)$$

$$\epsilon_{y_{n+1}}^e = \epsilon_{z_{n+1}}^e = -\nu \epsilon_{x_{n+1}}^e = -\nu (\epsilon_{x_{n+1}}^{eT} - \Delta \gamma N_{x_{n+1}}) \quad (2.109)$$

2.5.6 Previsão da Vida em Fadiga

A previsão da vida em fadiga de um dado componente mecânico começa com a definição do histórico de deformação total em cada uma das componentes de deformação. Após isso, as variáveis internas e tensões são obtidas através do modelo de dano descrito neste capítulo. Ao final de cada ciclo, o dano obtido no último incremento de deformação é comparado com o dano crítico do material e, caso seja igual ou maior do que esse valor, a simulação é encerrada e a vida em fadiga é encontrada. Caso contrário, mais um ciclo de carregamento é iniciado. A Figura 2.8 mostra um esquema do processo de previsão da vida em fadiga descrito neste capítulo. Destaca-se que, no presente trabalho, as simulações foram realizadas em um ponto de Gauss.

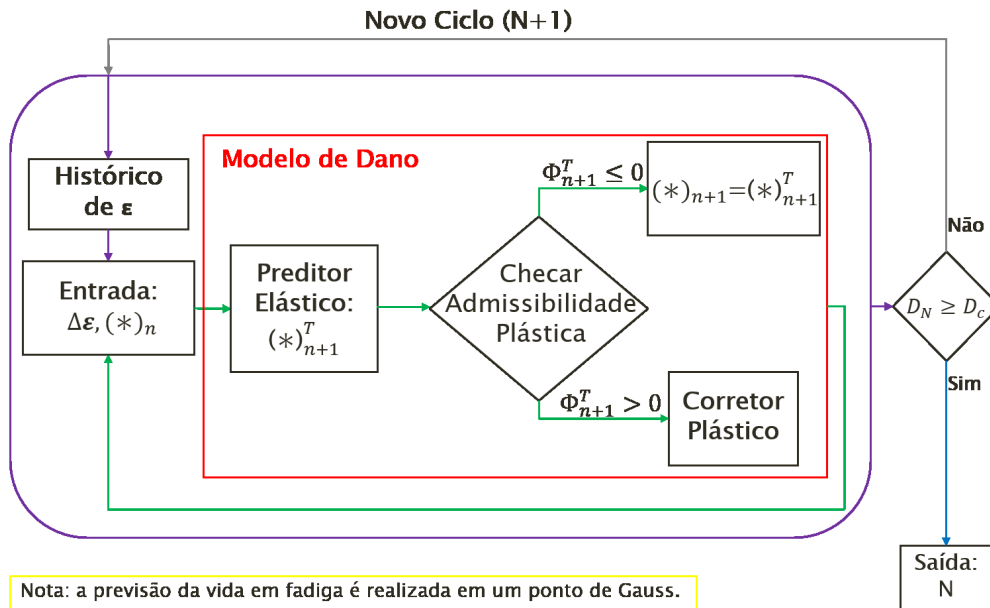


Figura 2.8: Esquema do processo de previsão da vida em fadiga descrito no Capítulo 2.

2.6 Parâmetros dos Materiais e Trajetórias de Carregamento

Com base em resultados disponíveis na literatura, decidiu-se verificar a eficácia do modelo apresentado neste capítulo a partir de ensaios de fadiga em corpos de prova padrão fabricados em dois tipos de aços distintos: i) SAE 1045 laminado a quente e normalizado [66]; e ii) S460N [67]. O aço SAE 1045 é um aço de médio carbono que há muitos anos vem sendo estudado no meio científico, pois possui vasta aplicação na confecção de diversos componentes mecânicos, tais como eixos, virabrequins, parafusos e suportes [66] [68] [69] [70] [71]. Já o aço S460N é um aço estrutural comumente utilizado na construção civil, principalmente em estruturas metálicas com tensões elevadas e em componentes estruturais fabricados em concreto armado [72]. Esses aços foram selecionados para serem analisados no presente trabalho, pois, além de muito relevantes nos setores em que são aplicados, também apresentam notórias diferenças em suas composições químicas (vide Tabela 2.2) e em suas propriedades mecânicas (vide Tabela 2.3), permitindo avaliar o modelo em materiais com comportamentos mecânicos diferentes.

Tabela 2.2: Composições químicas dos aços SAE 1045 [66] e S460N [67].

Material	C	Al	B	Cr	Cu	Mn	Mo	N	Nb + Ta	Ni	P	Pb	S	Si	Ti	V
SAE 1045	0,44	0,05	0,0002	0,05	0,03	0,70	-	-	0,008	0,03	0,019	0,005	0,046	0,23	0,002	0,002
S460N	0,18	0,013	-	0,022	0,009	1,54	0,004	0,019	-	0,27	0,016	-	0,001	0,44	-	0,17

Notas: O restante da composição de cada material é constituído por ferro (Fe). Todos os valores estão em %p.

Tabela 2.3: Propriedades mecânicas dos aços SAE 1045 [66] e S460N [67].

Símbolo	Descrição	Valor	
		SAE 1045	S460N
E	Módulo de elasticidade, GPa	204,0	208,5
G	Módulo de cisalhamento, GPa	80,3	80,2
ν	Coefficiente de Poisson	0,27	0,3
K'	Coefficiente de encruamento cíclico axial, MPa	1.258	1.115
n'	Expoente de encruamento cíclico axial	0,208	0,161

A partir das constantes K' e n' , relacionadas ao modelo de Ramberg-Osgood, pode-se calibrar, de acordo com o modelo de Desmorat, os parâmetros necessários para a evolução das tensões cinemáticas, os quais são listados na Tabela 2.4. Através da Figura 2.9, comparam-se as curvas de encruamento obtidas com os parâmetros calibrados para o modelo de Desmorat e as de Ramberg-Osgood, fornecidas por Leese e Socie [66] e Hoffmeyer [67].

Tabela 2.4: Parâmetros para o modelo de Desmorat dos aços SAE 1045 e S460N.

Símbolo	Descrição	Valor	
		SAE 1045	S460N
σ'_{y0}	Tensão de escoamento cíclica inicial, MPa	160	190
H^k	Módulo de encruamento cinemático, MPa	148.026	1.002.546
Γ	Parâmetro de Desmorat	$4,17 \times 10^{-7}$	$2,88 \times 10^{-6}$
M	Expoente de Desmorat	4	4

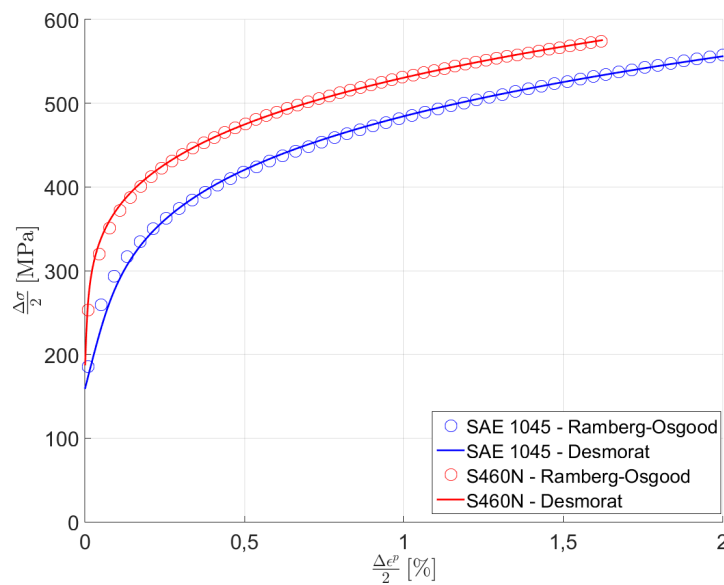


Figura 2.9: Curvas de encruamento, segundo o modelo de Desmorat, para os aços SAE 1045 e S460N.

Os testes foram conduzidos sob controle de deformação em condições axiais, torcionais, multiaxiais proporcionais e multiaxiais não proporcionais. De forma esquemática, as trajetórias de carregamento são representadas na Figura 2.10. As Tabelas 2.5 e 2.6, respectivamente, apresentam os dados experimentais, os resultados numéricos obtidos para as vidas em fadiga e as razões entre as vidas previstas e as vidas observadas para os aços SAE 1045 e S460N (as tabelas também foram utilizadas para discussão dos resultados). Nas referidas tabelas, destacam-se os seguintes termos: **i)** I.D. C.P., que se refere à identificação do corpo de prova; **ii)** $\frac{\Delta\epsilon}{2}$, que é a amplitude de deformação normal; **iii)** $\frac{\Delta\gamma}{2}$, que é a amplitude de deformação cisalhante; **iv)** parâmetro λ_ϵ (vide Equação 2.110), que expressa a influência da deformação cisalhante em cada ensaio; **v)** $N_{Obs.}$, que corresponde à vida observada experimentalmente; **vi)** $N_{Orig.}$, que representa a vida prevista pelo modelo original de Lemaitre, (i.e., $S_0 = S_{\pm\frac{1}{3}}$); e **vii)** $N_{Prop.}$, que diz respeito à vida estimada pelo modelo com a função proposta no presente documento (i.e., $S_{\pm\frac{1}{3}} \neq S_0$). Para os ensaios considerados, no presente trabalho, relativos ao aço SAE 1045, foram usados dois tipos de corpos de prova: **i)** cilíndricos lisos para os ensaios axiais; e **ii)** tubulares de parede fina para os ensaios torcionais, multiaxiais proporcionais e multiaxiais não proporcionais. Somente corpos de prova tubulares de parede fina foram utilizados nos testes em corpos de prova fabricados em aço S460N.

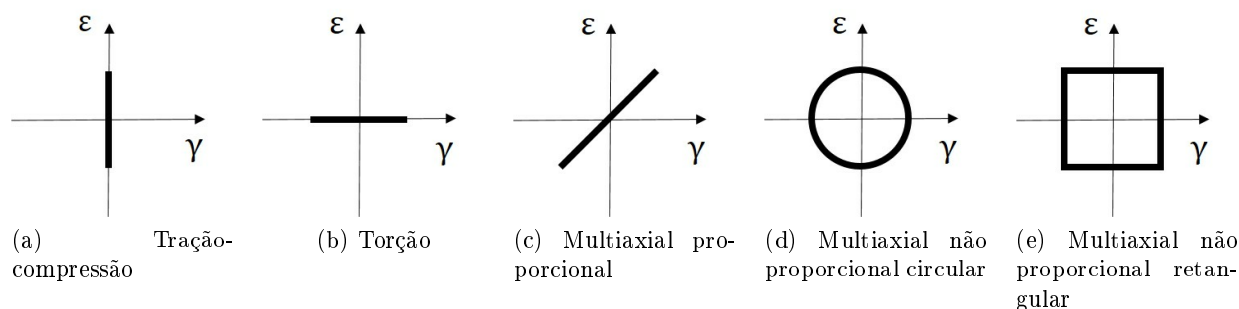


Figura 2.10: Trajetórias de carregamento utilizadas: (a) tração-compressão, (b) torção, (c) multiaxial proporcional, (d) multiaxial não proporcional circular e (e) multiaxial não proporcional retangular.

$$\lambda_\epsilon = \frac{\frac{\Delta\gamma}{2}}{\frac{\Delta\epsilon}{2}} \quad (2.110)$$

Tabela 2.5: Aço SAE 1045 - Dados experimentais do relatório preparado por Leese e Socie [66] e resultados numéricos obtidos.

Trajétória	I.D. C.P.	$\frac{\Delta\epsilon}{2}$ [%]	$\frac{\Delta\gamma}{2}$ [%]	λ_ϵ	$N_{Obs.}$ [ciclos]	$N_{Orig.}$ [ciclos]	$N_{Prop.}$ [ciclos]	$\frac{N_{Orig.}}{N_{Obs.}}$	$\frac{N_{Prop.}}{N_{Obs.}}$
Tração-compressão R=-1	JD-01	2	0	257	372	372	1,45	1,45	
	JD-02	1,5	0	385	694	694	1,80	1,80	
	JD-04	1	0	1.527	1.789	1.789	1,17	1,17	
	JD-03	1	0	1.461	1.789	1.789	1,22	1,22	
	JD-06	0,8	0	3.044	3.168	3.168	1,04	1,04	
	JD-05	0,8	0	2.046	3.168	3.168	1,55	1,55	
	JD-07	0,6	0	6.825	7.110	7.110	1,04	1,04	
	JD-08	0,6	0	6.670	7.110	7.110	1,07	1,07	

Continua na próxima página

Tabela 2.5 – Continuação da página anterior

I.D. C.P.	$\frac{\Delta\epsilon}{2}$ [%]	$\frac{\Delta\gamma}{2}$ [%]	λ_ϵ	N _{Obs.} [ciclos]	N _{Orig.} [ciclos]	N _{Prop.} [ciclos]	$\frac{N_{Orig.}}{N_{Obs.}}$	$\frac{N_{Prop.}}{N_{Obs.}}$
JD-09	0,5		0	12.920	12.494	12.494	0,97	0,97
JD-10	0,4		0	20.200	26.470	26.470	1,31	1,31
BC-03	0,4		0	19.880	26.470	26.470	1,33	1,33
JD-11	0,4		0	17.990	26.470	26.470	1,47	1,47
JD-12	0,3		0	36.940	75.443	75.443	2,04	2,04
IW-12	0,25		0	122.200	147.422	147.422	1,21	1,21
JD-13	0,25		0	117.150	147.422	147.422	1,26	1,26
BC-02	0,2		0	749.300	317.177	317.177	0,42	0,42
BC-16	0,2		0	387.500	317.177	317.177	0,82	0,82
JD-14	0,2		0	381.450	317.177	317.177	0,83	0,83
JD-15	0,2		0	261.600	317.177	317.177	1,21	1,21
JD-16	0,15		0	2.451.000	762.790	762.790	0,31	0,31
Torção								
JD4518		2,51	∞	495	957	419	1,93	0,85
R=-1								
JD4516		2,5	∞	541	965	422	1,78	0,78
JD4520		2,5	∞	470	965	422	2,05	0,90
IL4549		1,73	∞	890	2.230	975	2,51	1,10
IL4537		1,73	∞	889	2.230	975	2,51	1,10
JD4513		1,5	∞	1.467	3.152	1.378	2,15	0,94
JD4506		1,5	∞	1.379	3.152	1.378	2,29	1,00
JD4501		1,5	∞	1.269	3.152	1.378	2,48	1,09
JD4504		0,82	∞	8.360	16.647	7.276	1,99	0,87
JD4503		0,82	∞	7.130	16.647	7.276	2,33	1,02
JD4512		0,82	∞	5.505	16.647	7.276	3,02	1,32
IL4506		0,718	∞	8.710	25.346	11.079	2,91	1,27
IL4511		0,5	∞	60.750	87.697	38.331	1,44	0,63
JD4515		0,5	∞	36.120	87.697	38.331	2,43	1,06
JD4514		0,5	∞	35.020	87.697	38.331	2,50	1,09
JD4507		0,41	∞	41.840	177.054	77.387	4,23	1,85
JD4510		0,4	∞	72.950	192.918	84.321	2,64	1,16
JD4509		0,39	∞	95.250	210.521	92.014	2,21	0,97
IL4531		0,378	∞	93.050	234.235	102.380	2,52	1,10
IL4551		0,378	∞	57.370	234.235	102.380	4,08	1,78
IL4512		0,377	∞	102.100	236.351	103.304	2,31	1,01
JD4508		0,3	∞	546.000	492.966	215.465	0,90	0,39
Multiaxial								
IL4516	0,211	0,104	0,5	115.500	232.970	224.273	2,02	1,94
Proporcional								
IL4528	0,214	0,104	0,5	80.000	222.788	214.695	2,78	2,68
R=-1								
IL4523	0,415	0,205	0,5	11.780	20.484	19.751	1,74	1,68
IL4524	0,943	0,472	0,5	1.258	1.904	1.839	1,51	1,46

Continua na próxima página

Tabela 2.5 – Continuação da página anterior

I.D. C.P.	$\frac{\Delta\epsilon}{2}$ [%]	$\frac{\Delta\gamma}{2}$ [%]	λ_ϵ	N _{Obs.} [ciclos]	N _{Orig.} [ciclos]	N _{Prop.} [ciclos]	$\frac{N_{Orig.}}{N_{Obs.}}$	$\frac{N_{Prop.}}{N_{Obs.}}$	
IL4519	0,144	0,144	1	611.800	562.067	491.732	0,92	0,80	
IL4517	0,140	0,138	1	595.600	617.574	541.563	1,04	0,91	
IL4514	0,191	0,188	1	123.500	231.336	203.871	1,87	1,65	
IL4550	0,191	0,187	1	90.000	232.368	204.993	2,58	2,28	
IL4515	0,374	0,372	1	11.610	20.838	18.415	1,79	1,59	
IL4520	0,374	0,370	1	10.380	20.927	18.513	2,02	1,78	
IL4525	0,868	0,867	1	1.616	1.876	1.669	1,16	1,03	
IL4533	0,869	0,868	1	1.229	1.871	1.664	1,52	1,35	
IL4554	0,131	0,198	1,5	393.600	490.690	387.659	1,25	0,98	
IL4521	0,098	0,193	2	545.800	781.175	566.958	1,43	1,04	
IL4522	0,145	0,285	2	98.780	231.662	169.790	2,35	1,72	
IL4548	0,145	0,286	2	87.500	230.100	168.465	2,63	1,93	
IL4501	0,264	0,518	2	20.030	27.801	20.524	1,39	1,02	
IL4503	0,261	0,516	2	16.890	28.492	20.983	1,69	1,24	
IL4526	0,643	1,290	2	1.758	2.102	1.561	1,20	0,89	
IL4509	0,144	0,563	4	19.770	41.938	25.080	2,12	1,27	
IL4530	0,037	0,372	10	66.810	235.419	116.945	3,52	1,75	
Multiaxial	IW-4583	0,212	0,106	0,5	58.530	197.965	186.601	3,38	3,19
Não Proporcional	IW-45A3	0,41	0,193	0,5	5.260	17.756	16.923	3,38	3,22
Circular, R=-1	IW-45A5	0,137	0,135	1	1.392.000	443.211	368.600	0,32	0,26
	IW-4586	0,192	0,189	1	64.650	159.323	134.874	2,46	2,09
	IW-45B2	0,192	0,185	1	49.140	162.349	138.087	3,30	2,81
	IW-4580	0,371	0,374	1	5.119	14.574	12.265	2,85	2,40
	IW-4588	0,1	0,195	2	613.600	478.469	329.443	0,78	0,54
	ID-45B5	0,146	0,281	2	38.930	166.093	114.535	4,27	2,94
	IW-45D1	0,147	0,279	2	34.720	166.601	115.442	4,80	3,32
	IW-45D4	0,264	0,511	2	5.262	21.808	15.202	4,14	2,89
Multiaxial	IW-4584	0,096	0,193	2	91.455	344.391	246.414	3,77	2,69
Não Proporcional	IW-45D2	0,146	0,285	2	18.330	98.409	71.203	5,37	3,88
Retangular, R=-1	IW-45A4	0,268	0,526	2	4.350	9.183	6.771	2,11	1,56

Tabela 2.6: Aço S460N - Dados experimentais do relatório preparado por Hoffmeyer [67] e resultados numéricos obtidos.

Carregamento	I.D. C.P.	$\frac{\Delta\epsilon}{2}$ [%]	$\frac{\Delta\gamma}{2}$ [%]	λ_ϵ	N _{Obs.} [ciclos]	N _{Orig.} [ciclos]	N _{Prop.} [ciclos]	$\frac{N_{Orig.}}{N_{Obs.}}$	$\frac{N_{Prop.}}{N_{Obs.}}$
Tração-compressão	1	0,5		0	1.630	1.625	1.625	1,00	1,00
R=-1	102	0,5		0	1.600	1.625	1.625	1,02	1,02

Continua na próxima página

Tabela 2.6 – Continuação da página anterior

I.D.	C.P.	$\frac{\Delta\epsilon}{2}$ [%]	$\frac{\Delta\gamma}{2}$ [%]	λ_ϵ	$N_{Obs.}$ [ciclos]	$N_{Orig.}$ [ciclos]	$N_{Prop.}$ [ciclos]	$\frac{N_{Orig.}}{N_{Obs.}}$	$\frac{N_{Prop.}}{N_{Obs.}}$
	2	0,33		0	7.690	5.987	5.987	0,78	0,78
	4	0,22		0	50.100	34.851	34.851	0,70	0,70
	47	0,22		0	33.100	34.851	34.851	1,05	1,05
Torção	9		1	∞	1.820	1.320	2.327	0,73	1,28
R=-1	11		0,45	∞	30.000	14.402	25.388	0,48	0,85
	10		0,45	∞	23.000	14.402	25.388	0,63	1,10
	8		0,43	∞	38.250	17.196	30.314	0,45	0,79
Multiaxial	28	0,104	0,18	$\sqrt{3}$	521.000	362.554	439.975	0,70	0,84
Proporcional	81	0,144	0,25	$\sqrt{3}$	130.300	45.714	55.401	0,35	0,43
R=-1	20	0,173	0,3	$\sqrt{3}$	31.100	19.077	23.074	0,61	0,74
Multiaxial	24	0,173	0,3	$\sqrt{3}$	39.670	27.104	33.316	0,68	0,84
Não Proporcional	25	0,173	0,3	$\sqrt{3}$	22.800	27.104	33.316	1,19	1,46
Circular, R=-1	26	0,231	0,4	$\sqrt{3}$	6.570	4.837	5.942	0,74	0,90
	27	0,144	0,25	$\sqrt{3}$	47.140	75.612	92.867	1,60	1,97
	29	0,144	0,25	$\sqrt{3}$	51.900	75.612	92.867	1,46	1,79
	48	0,144	0,25	$\sqrt{3}$	30.000	75.612	92.867	2,52	3,10
	30	0,115	0,2	$\sqrt{3}$	90.700	264.557	324.963	2,92	3,58
	48	0,104	0,18	$\sqrt{3}$	574.600	494.999	607.430	0,86	1,06
	31	0,404	0,7	$\sqrt{3}$	540	163	194	0,30	0,36
Multiaxial	141	0,173	0,3	$\sqrt{3}$	6.730	8.766	10.570	1,30	1,57
Não Proporcional	142	0,173	0,3	$\sqrt{3}$	4.565	8.766	10.570	1,92	2,32
Retangular, R=-1	143	0,144	0,25	$\sqrt{3}$	18.000	27.061	32.747	1,50	1,82
	144	0,144	0,25	$\sqrt{3}$	18.300	27.061	32.747	1,48	1,79

O modelo aperfeiçoado de Lemaitre requer a calibração de quatro parâmetros de dano (i.e., D_c , s , $S_{\pm\frac{1}{3}}$ e S_0). Nesta pesquisa, esse conjunto de parâmetros (\mathbf{p}) foi encontrado através de uma ferramenta de otimização implementada computacionalmente. Inicialmente, uma função objetivo baseada no método dos mínimos quadrados foi estabelecida:

$$g(\mathbf{p}) = \sqrt{\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \left(\frac{N_{Est.}^{(i)} - N_{Obs.}^{(i)}}{\left[\frac{1 + \text{sgn}(N_{Est.}^{(i)} - N_{Obs.}^{(i)})}{2} \right] N_{Obs.}^{(i)} + \left[\frac{1 + \text{sgn}(N_{Obs.}^{(i)} - N_{Est.}^{(i)})}{2} \right] N_{Est.}^{(i)}} \right)^2} \quad (2.111)$$

em que $g(\mathbf{p})$ é a função objetivo dependente do conjunto de parâmetros \mathbf{p} , k denota a quantidade de ensaios utilizados na calibração, o sobrescrito (i) refere-se ao i -ésimo ensaio, $N_{Est.}$ é a vida estimada, $N_{Obs.}$ representa a vida observada experimentalmente e sgn é a função sinal. O objetivo principal do processo de otimização utilizado é o de encontrar, de forma simultânea, um conjunto de parâmetros de dano que seja capaz de minimizar a diferença entre as vidas estimadas e observadas

dos ensaios tipo tração-compressão e torcionais para cada um dos materiais analisados. Para isso, um método baseado no gradiente da função objetivo foi aplicado para obter os valores otimizados do conjunto de parâmetros \mathbf{p} . Por fim, a Tabela 2.7 apresenta os parâmetros de dano encontrados ao final do processo.

Tabela 2.7: Parâmetros de dano utilizados para os aços SAE 1045 e S460N.

Símbolo	Descrição	Valor	
		SAE 1045	S460N
D_c	Dano crítico	0,220	0,207
s	Expoente de dano	1,848	2,234
$S_{\pm\frac{1}{3}}$	Denominador de dano axial, MPa	7,845	3,002
S_0	Denominador de dano torcional, MPa	5,013	3,869

2.7 Resultados e Discussões

2.7.1 Aço SAE 1045

Em uma primeira análise, são apresentados os resultados das vidas calculadas para o aço SAE 1045. A análise é feita de maneira a estimar as vidas para cada trajetória de carregamento apresentada anteriormente, segundo a formulação proposta, que leva em consideração a função denominadora de dano (usando $S_{\pm\frac{1}{3}} = 7,845$ MPa e $S_0 = 5,013$ MPa), e segundo a formulação original de Lemaitre (considerando $S_{\pm\frac{1}{3}} = S_0 = 7,845$ MPa). A Figura 2.11 apresenta um gráfico de vidas previstas *versus* vidas observadas para os ensaios tipo tração-compressão para o aço SAE 1045. Como esperado nos casos axiais, as vidas estimadas segundo as duas formulações de dano são iguais, pois a nova formulação retoma o modelo original de Lemaitre nos ensaios tipo tração-compressão (i.e., $\eta = \pm\frac{1}{3}$). Adicionalmente, verifica-se que, dentre as 20 condições testadas, 85,00% encontram-se dentro da banda de fator 2 e 95,00% situam-se no interior da banda de fator 3. Destaca-se também que apenas o resultado previsto para o ensaio com maior vida (JD-16) localiza-se fora da banda de fator 3. O comportamento desse último ponto, fora da banda de fator 3, pode ser explicado pelo fato de o processo de calibração ter sido realizado para vidas, na sua grande maioria, menores que 10^6 ciclos e também pelo fato de que, para grandes vidas, o nível de deformação plástica acumulada ser pequeno, o que pode prejudicar a aplicação do dano incremental em uma escala macroscópica, visto que o mesmo depende fortemente do nível de deformação plástica acumulada para evoluir.

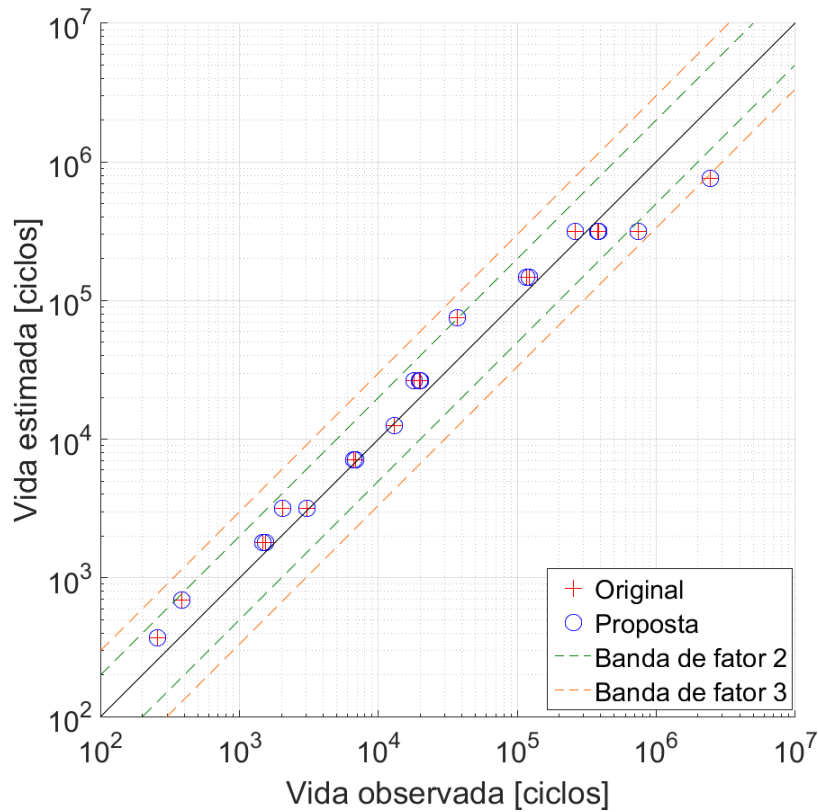


Figura 2.11: Vidas previstas para o aço SAE 1045 nos ensaios tipo tração-compressão.

A Figura 2.12 exibe as vidas previstas *versus* vidas observadas para os 22 ensaios torcionais do aço SAE 1045. De acordo com a formulação original, 22,73% dos resultados encontram-se dentro banda de fator 2 e 86,36%, situam-se no interior da banda de fator 3. Tratando-se dos resultados alcançados com o uso da função proposta, 95,45% pertencem à banda de fator 2 e 100% estão localizados dentro da banda de fator 3, mostrando a eficácia da formulação proposta para a trajetória em questão. Nesse caso, a função denominadora de dano assume o valor calibrado para os ensaios em cisalhamento puro (i.e., $\eta = 0$), fazendo com que o nível de dano crítico seja alcançado em vidas próximas às observadas experimentalmente. Para essa trajetória, não foram observados pontos fora da banda de fator 3, pois todas as vidas analisadas estavam abaixo de 10^6 ciclos, e, conseqüentemente, o nível de deformação plástica acumulada foi adequado para o uso do dano incremental na escala macroscópica.

As previsões das vidas em fadiga do aço SAE 1045 para os 21 casos multiaxiais proporcionais são apresentadas na Figura 2.13, em que os dados foram separados de acordo com o parâmetro λ_ϵ . Para a formulação original, 61,90% e 95,24% dos resultados previstos estão, respectivamente, no interior das bandas de fator 2 e 3. Em relação à formulação proposta, percebe-se que 90,48% e 100% das vidas estimadas encontram-se, respectivamente, dentro das bandas de fator 2 e 3. Novamente, observa-se a eficácia da formulação proposta, principalmente para trajetórias de carregamento com λ_ϵ elevados. É possível verificar que, para trajetórias com $\lambda_\epsilon = 0,5$, $\lambda_\epsilon = 1$ e $\lambda_\epsilon = 1,5$, as vidas calculadas pelas duas formulações (proposta e original) são próximas. Contudo, para trajetórias com $\lambda_\epsilon > 1,5$, a correção na Lei de evolução do dano através da função proposta foi significativa.

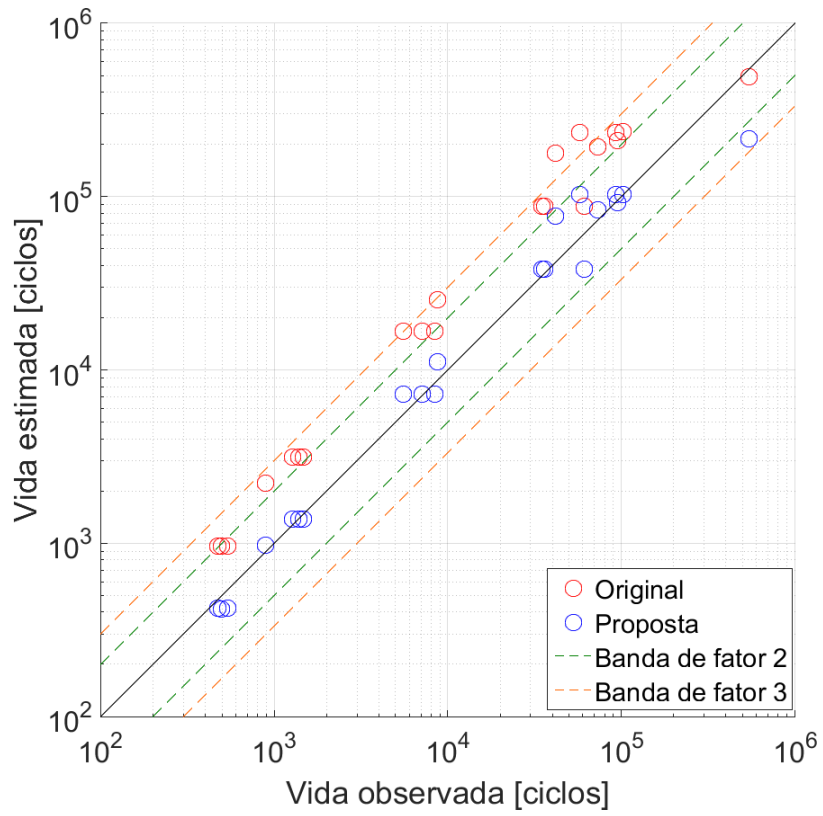


Figura 2.12: Vidas previstas para o aço SAE 1045 nos ensaios torcionais.

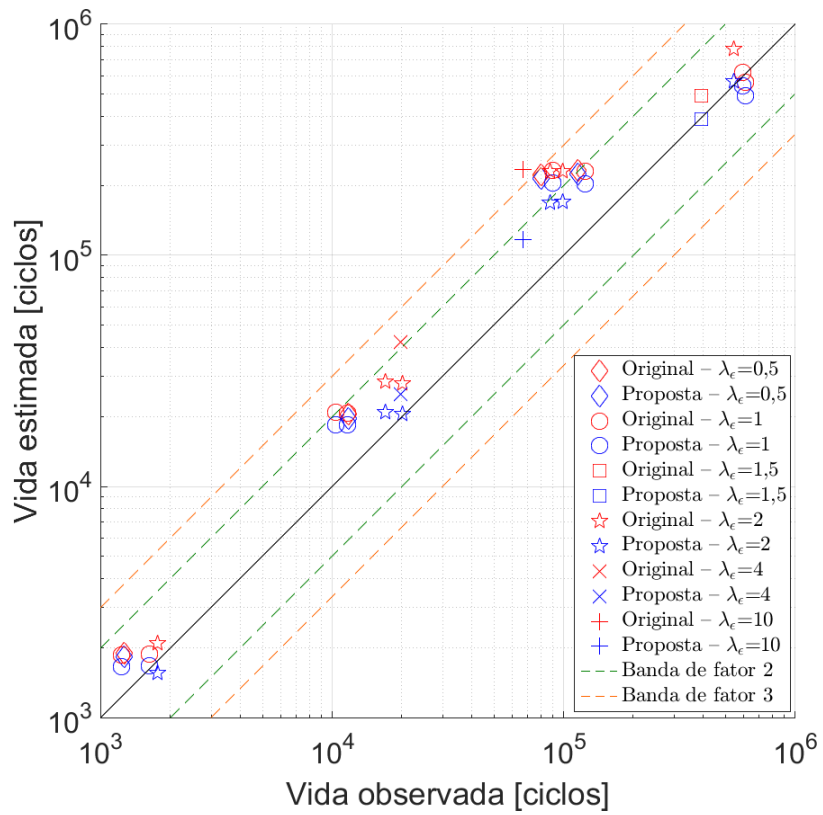


Figura 2.13: Vidas previstas para o aço SAE 1045 nos ensaios multiaxiais proporcionais.

A Figura 2.14 exibe as vidas estimadas para os ensaios multiaxiais não proporcionais do aço SAE 1045, sendo 10 com trajetórias circulares e 3 com trajetórias retangulares. Para os históricos circulares, a formulação original consegue incorporar, respectivamente, 10% e 30% das vidas estimadas dentro das bandas de fator 2 e fator 3, enquanto 10% e 60% dos resultados calculados pela formulação proposta se encontram dentro das bandas de fator 2 e 3, respectivamente. Já para as trajetórias retangulares, a formulação original apresenta 33,33% dos resultados dentro da banda de fator 3, ao passo que a formulação proposta é capaz de incluir 33,33% e 66,67% das vidas previstas dentro das bandas de fator 2 e 3, respectivamente. No caso das trajetórias multiaxiais não proporcionais, observa-se uma melhora relativa no cálculo das vidas, contudo, sem um ganho significativo, como observado nos casos anteriores. Pode-se justificar esse comportamento por: **i)** as trajetórias apresentam λ_ϵ baixo ($\lambda_\epsilon \leq 2$), não tendo uma contribuição cisalhante significativa e que ative adequadamente a função denominadora de dano na regularização da taxa de evolução do dano; e **ii)** o modelo de encruamento cinemático de Desmorat pode não ser o mais adequado para capturar o comportamento não proporcional do material em questão.

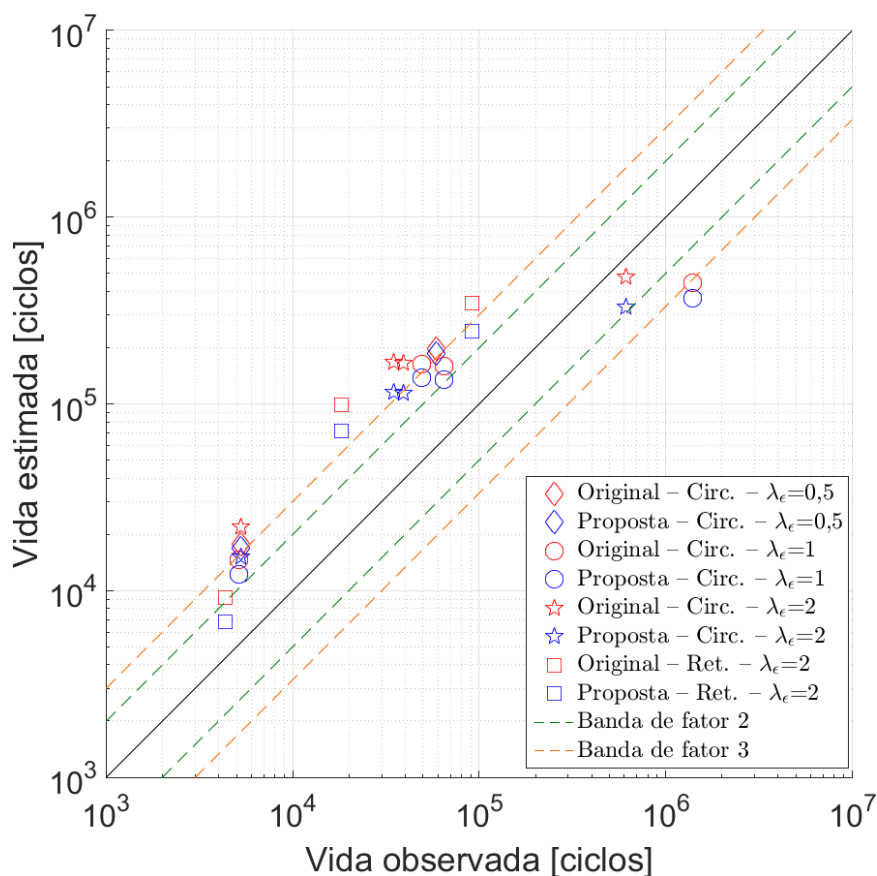


Figura 2.14: Vidas previstas para o aço SAE 1045 nos ensaios multiaxiais não proporcionais.

2.7.2 Aço S460N

Considerando os resultados obtidos para o aço S460N em relação aos ensaios tipo tração-compressão, a Figura 2.15 apresenta as vidas estimadas de acordo com a formulação original de Lemaitre (i.e., $S_{\pm\frac{1}{3}} = S_0 = 3,002 \text{ MPa}$) e com a formulação proposta (usando $S_{\pm\frac{1}{3}} = 3,002 \text{ MPa}$ e $S_0 = 3,869 \text{ MPa}$). Observa-se que 100% dos resultados encontrados pelas duas formulações encontram-se dentro da banda de fator 2. Recordando que, nessa condição de carregamento, a formulação proposta recupera o comportamento da formulação original de Lemaitre.

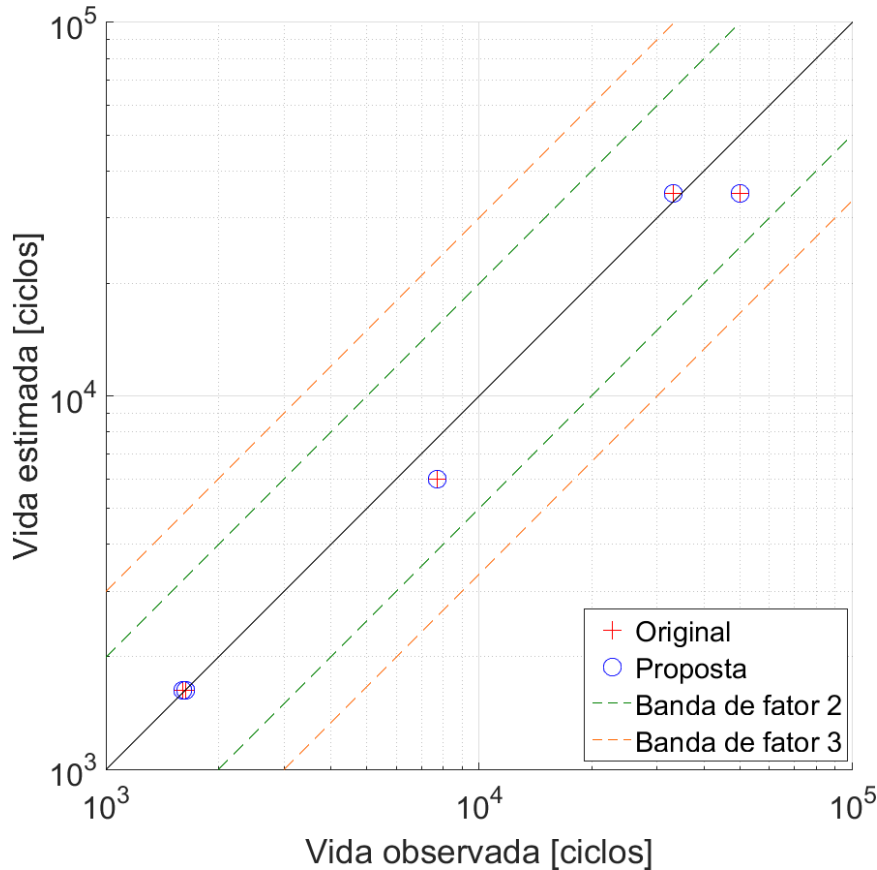


Figura 2.15: Vidas previstas para o aço S460N nos ensaios tipo tração-compressão.

Os resultados relativos aos ensaios torcionais para o aço S460N são apresentados na Figura 2.16. Para a formulação original, 50% e 100% dos resultados encontram-se dentro das bandas de fator 2 e 3, respectivamente. Por outro lado, 100% das vidas estimadas pela função proposta estão no interior da banda de fator 2, evidenciando, novamente, uma melhora na previsão da vida utilizando-se a nova formulação.

A Figura 2.17 apresenta as previsões para os casos multiaxiais proporcionais do aço S460N. Para ambas as formulações, 66,67% e 100%, respectivamente, das vidas estimadas encontram-se no interior das bandas de fator 2 e 3. Nesse caso, observa-se uma melhora relativa no cálculo das vidas, entretanto, devido aos baixos valores de λ_e considerados, as vidas estimadas de acordo com a função proposta foram próximas às encontradas pela formulação original de Lemaitre.

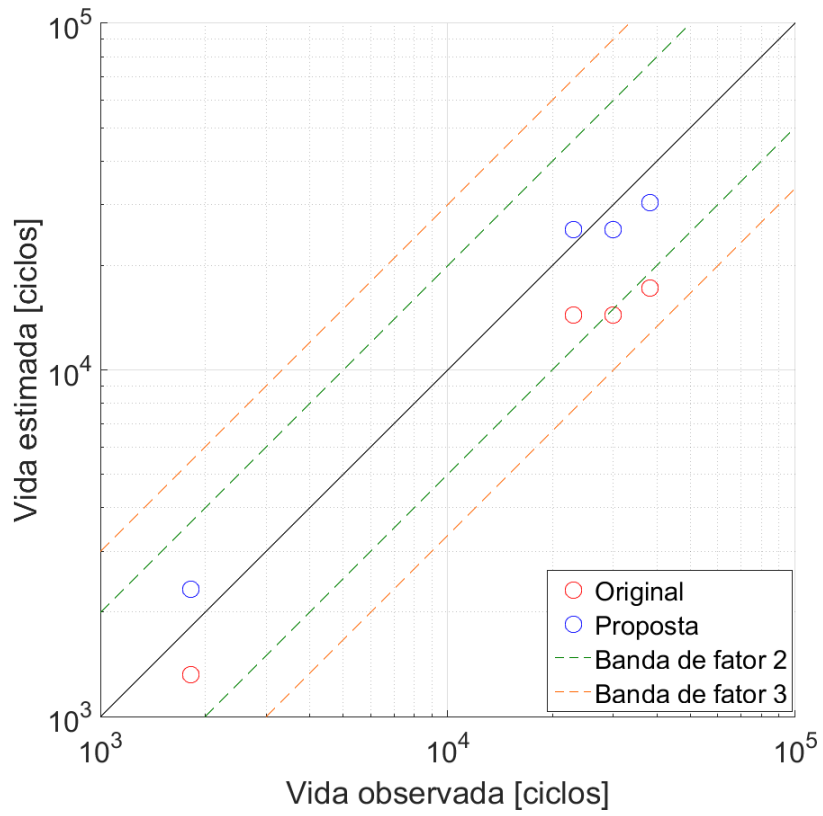


Figura 2.16: Vidas previstas para o aço S460N nos ensaios torcionais.

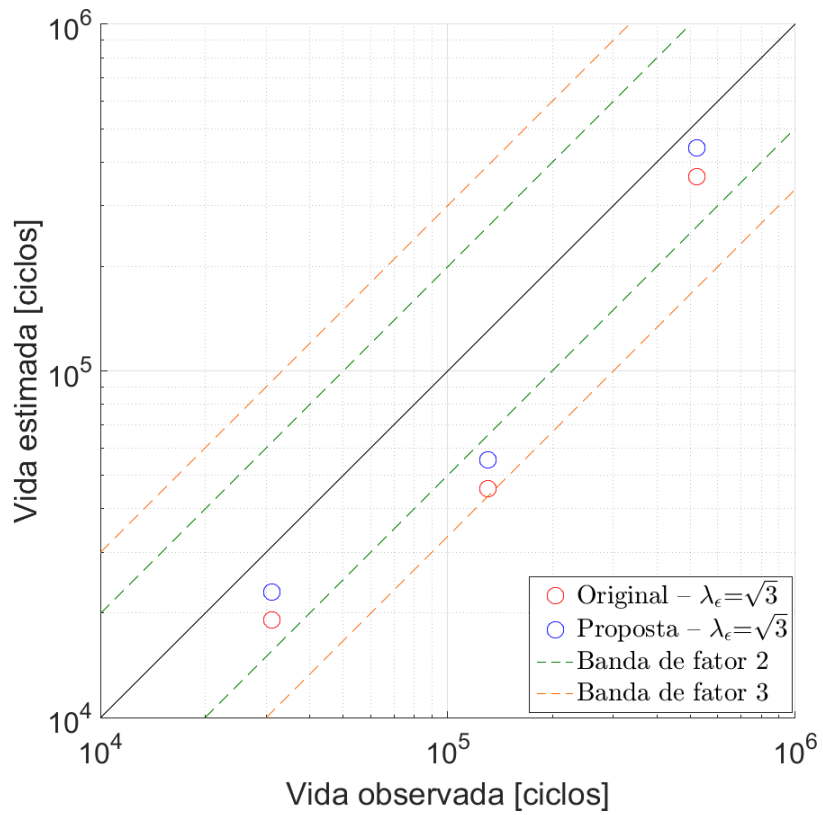


Figura 2.17: Vidas previstas para o aço S460N nos ensaios multiaxiais proporcionais.

Por fim, as previsões para os ensaios multiaxiais não proporcionais com trajetórias circulares e retangulares do aço S460N são apresentadas na Figura 2.18. Para os casos circulares, a formulação original foi capaz de abranger, respectivamente, 66,67% e 88,89% dos resultados dentro das bandas de fator 2 e 3, enquanto a formulação proposta obteve, respectivamente, 66,67% e 77,78% das vidas estimadas dentro das bandas de fator 2 e 3. Para as trajetórias retangulares, a formulação original apresentou 100% das vidas previstas dentro da banda de fator 2, já a formulação proposta, respectivamente, 75% e 100% das vidas estimadas dentro das bandas de fator 2 e 3. Novamente, para as trajetórias não proporcionais, devido aos baixos valores de λ_ϵ , as diferenças entre as vidas estimadas pelas duas formulações foram pequenas. Por fim, destaca-se que o modelo de encruamento cinemático de Desmorat pode não ter sido hábil em capturar um eventual efeito de não proporcionalidade no encruamento do material em análise.

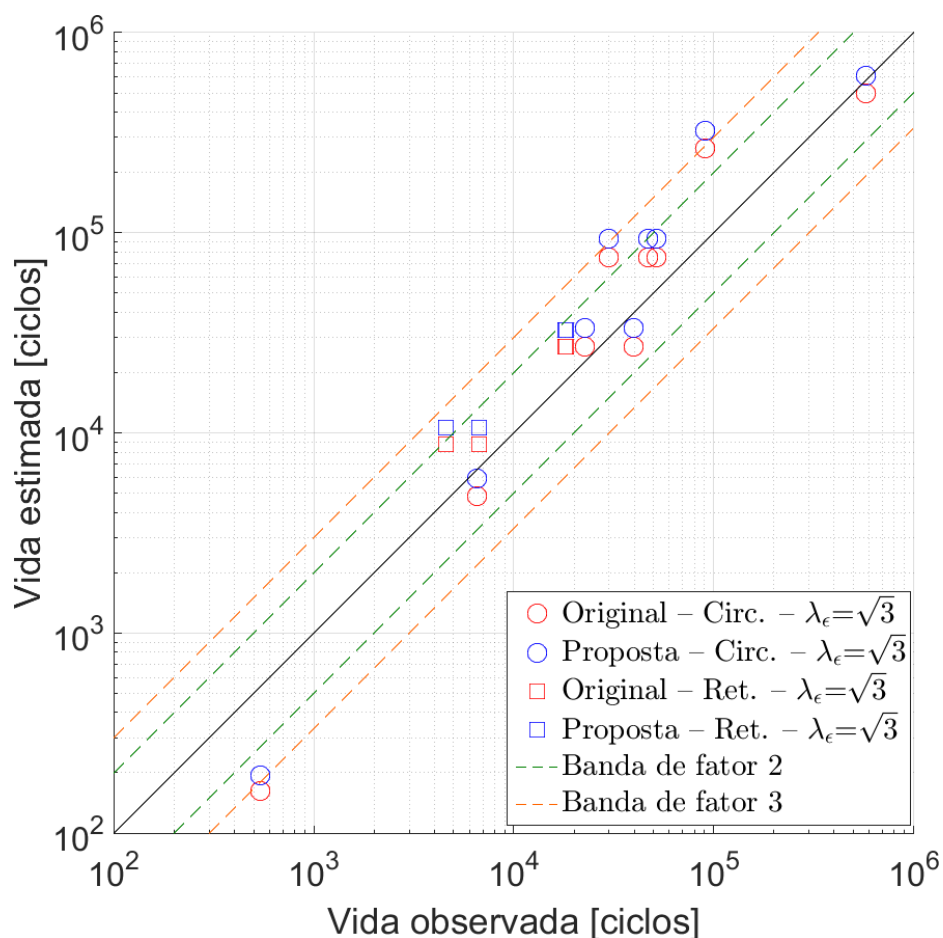


Figura 2.18: Vidas previstas para o aço S460N nos ensaios multiaxiais não proporcionais.

2.7.3 Compilação das Vidas Previstas

A Tabela 2.8 apresenta a compilação das vidas estimadas em relação às bandas de fator 2 e 3 dos aços SAE 1045 e S460N.

Tabela 2.8: Compilação das vidas previstas em relação às bandas de fator 2 e 3 dos aços SAE 1045 e S460N.

Carregamento	Banda de fator	SAE 1045		S460N	
		Original	Proposta	Original	Proposta
Tração-compressão	2	85,00%	85,00%	100,00%	100,00%
	3	95,00%	95,00%	100,00%	100,00%
Torção	2	22,73%	95,45%	50,00%	100,00%
	3	86,36%	100,00%	100,00%	100,00%
Proporcional	2	61,90%	90,48%	66,76%	66,76%
	3	95,24%	100,00%	100,00%	100,00%
Não proporcional - circular	2	10,00%	10,00%	66,76%	66,76%
	3	30,00%	60,00%	88,89%	77,78%
Não proporcional - retangular	2	0,00%	33,33%	100,00%	75,00%
	3	33,33%	66,67%	100,00%	100,00%

2.8 Conclusões

Neste trabalho, foi proposto o uso do dano incremental através de uma formulação baseada na Mecânica do Dano Contínuo (MDC) em problemas de fadiga sob controle de deformação, ou seja, em problemas em que a deformação plástica macroscópica não pode ser negligenciada. Para isso, adotou-se a lei de evolução de dano proposta por Lemaitre e adicionou-se a abordagem da função denominadora de dano para regularização da taxa de evolução do dano, principalmente em trajetórias nas quais há uma forte influência do carregamento cisalhante. Demonstrou-se a consistência termodinâmica da nova proposta e feita uma comparação com as abordagens estipuladas por Malcher e Mamiya [29] e por Castro e Bemfica [30] sob 4 condições distintas. Ao final da análise, concluiu-se que a função proposta comportou-se adequadamente em todas as situações avaliadas.

Juntamente a essa proposta, a lei de encruamento cinemático de Desmorat foi apresentada, e a Figura 2.2 a comparou em relação aos modelos de Prager e Armstrong-Frederick. Além disso, afirma-se que, segundo a modelagem numérica utilizada, o uso do modelo de encruamento cinemático de Desmorat proporciona uma redução no custo computacional quando comparado ao modelo de Chaboche, visto que o primeiro utiliza apenas 1 termo de encruamento cinemático, enquanto que o último, de forma geral, necessita de 3 termos em sua formulação. No primeiro caso, o sistema de equações residuais apresentaria 14 variáveis, já o segundo possuiria 26. Além disso, a proposta de Desmorat é capaz de capturar o colapso incremental plástico, um importante efeito em materiais que possuem um amolecimento cíclico.

Os resultados obtidos para o aço SAE 1045 demonstraram que a formulação proposta apresentou bons resultados na previsão da vida em fadiga, principalmente para trajetórias de carregamento em que a contribuição cisalhante era significativa, ou seja, para trajetórias com valores elevados de λ_ϵ . Entretanto, nas trajetórias multiaxiais não proporcionais, observou-se um ganho relativamente pequeno no cálculo das vidas, visto que, presumidamente, o efeito da não proporcionalidade no encruamento cinemático do material não pôde ser fortemente capturado pelo modelo de Desmorat.

No caso do aço S460N, a formulação proposta apresentou um ganho expressivo em relação à formulação original no caso dos ensaios torcionais, mas não foi capaz de superar as previsões do modelo original nos casos multiaxiais não proporcionais. Destaca-se também que, como o denominador de dano calibrado em cisalhamento puro ($S_0 = 3,869$ MPa) era maior do que aquele obtido com o ensaio do tipo tração-compressão ($S_{\pm\frac{1}{3}} = 3,002$ MPa), as previsões usando a função proposta foram mais otimistas do que aquelas estimadas pelo modelo original, exceto para os ensaios tipo tração-compressão, que foram iguais. De forma geral, em ensaios controlados por deformação, o endurecimento não proporcional de um dado material provoca, quando comparado com ensaios multiaxiais proporcionais equivalentes, um aumento nas tensões observadas experimentalmente e também uma redução nas vidas experimentais [23] [72]. Sendo assim, o fato das previsões das vidas em fadiga obtidas com a formulação original de Lemaitre para esse material serem mais conservativas pode ter acabado compensando o efeito de um eventual encruamento não proporcional do aço S460N, gerando, então, estimativas melhores do que aquelas realizadas com a formulação proposta.

Por fim, destaca-se que o modelo de dano descrito no presente capítulo necessita da calibração de quatro parâmetros relativos ao modelo de encruamento cinemático de Desmorat (σ'_{y0} , H^k , M e Γ) e de quatro parâmetros de dano (D_c , $S_{\pm\frac{1}{3}}$, S_0 e s), totalizando oito parâmetros para a viabilização da utilização da formulação em condições de carregamentos cíclicos. Em termos de tipos de ensaios necessários, a calibração dos parâmetros de dano mencionados anteriormente requer que ensaios de fadiga sob controle de deformação do tipo tração-compressão com $R=-1$ e torcionais com $R=-1$ sejam realizados.

Capítulo 3

Abordagem de Dano Incremental em Duas Escalas para Previsão de Vida em Fadiga

3.1 Modelo de Duas Escalas

3.1.1 Conceitos Básicos

No modelo de dano apresentado no Capítulo 2, a variável de dano é responsável por quantificar a degradação do material, que está diretamente relacionada com a redução da área resistente de um VER, sendo que sua evolução está diretamente relacionada com a evolução da deformação plástica acumulada. Esse tipo de modelo é usualmente empregado em fadiga de baixo e médio ciclos, na fratura dúctil e em fluência, por exemplo [32]. Em situações em que pouca ou nenhuma deformação plástica acumulada é observada na macroescala (e.g., fadiga de alto ciclo e fratura frágil), tal tipo de modelagem não consegue prever corretamente o comportamento mecânico do componente analisado, haja vista que a variável de dano é incapaz de evoluir de forma adequada (vide Equação 2.8), ou seja, o dano calculado não representa a degradação encontrada no componente [32]. Nessas situações, apesar do dano calculado na macroescala ser nulo ou próximo de zero, a falha do material é ainda assim observada.

Para contornar as limitações do dano incremental descritas anteriormente, uma solução é a utilização de modelos em duas escalas, em que se considera que, de forma geral, o material tem um comportamento elástico na macroescala e um comportamento elastoplástico na microescala. O modelo considera que o comportamento do material na microescala é descrito por uma inclusão, da ordem de microdefeitos e dentro de um volume elementar representativo, VER, que possui uma tensão de escoamento inicial menor do que aquela observada na macroescala [32]. A abordagem apresentada nesta pesquisa segue a proposta descrita por Lemaitre e Desmorat [32], na qual, primeiramente, as variáveis internas e tensões da macroescala são calculadas e, com o auxílio de uma lei de localização, o problema elastoplástico na microescala pode, em seguida, ser resolvido. Nesse

tipo de modelo, destaca-se que a macroescala, com exceção do momento da falha, é independente da microescala, ou seja, as variáveis internas e tensões encontradas na microescala não alteram o problema elástico/elastoplástico da macroescala. Nesse sentido, o problema de fadiga de alto número de ciclos é resolvido através de um problema de plasticidade localizada. Sendo assim, o uso da microescala nessas situações é uma solução de engenharia capaz de prever a falha de um dado componente, mesmo que as suas variáveis internas e tensões não influenciem diretamente a macroescala [32].

3.1.2 Lei de Localização

Para modelar o problema de fadiga de alto número de ciclos em duas escalas, deve-se adotar uma lei de localização, que é responsável pela transição entre o campo de deformação na macroescala e o campo de deformação na microescala, ou seja, pela transição entre o campo de deformação total na matriz do material e o campo de deformação total na inclusão. De modo a situar o leitor no contexto das leis de localização existentes, algumas delas serão brevemente citadas nos próximos parágrafos.

A primeira lei de localização utilizada por Lemaitre [36] estava baseada na hipótese de compatibilidade de deformações de Lin-Taylor [37], que assume a igualdade entre as deformações totais da microescala (ϵ^μ) e da macroescala (ϵ), ou seja, $\epsilon^\mu = \epsilon$. Lemaitre e Sermage [39] e Lemaitre, Sermage e Desmorat [31] optaram por utilizar a lei de localização proposta por Eshelby-Kröner ([41] e [40]), que é apresentada na Equação 3.1, em que a variável a é uma constante definida por Eshelby [41] para inclusões esféricas (vide Equação 3.2). Quando comparada com a lei de localização utilizada por Lemaitre [36], a lei que apresenta o esquema autoconsistente de Kröner consegue modelar melhor o efeito da razão de triaxialidade.

$$\epsilon^\mu = \epsilon + a(\epsilon^{p\mu} - \epsilon^p) \quad (3.1)$$

$$a = \frac{2}{15} \frac{4 - 5\nu}{1 - \nu} \quad (3.2)$$

Na Equação 3.1, $\epsilon^{p\mu}$ é o tensor de deformações plásticas na microescala e ϵ^p é o tensor de deformações plásticas na macroescala. Já na Equação 3.2, o termo a representa a constante de Eshelby e ν é o coeficiente de Poisson do material. Destaca-se que a formulação apresentada por Eshelby-Kröner ([41] e [40]) não é indicada em situações nas quais são observados elevados níveis de deformações plásticas na macroescala, como, por exemplo, em casos de fadiga de baixo ciclo [33].

No ano de 1965, Hill [73] propôs a substituição do tensor constitutivo elástico por um módulo tangente elastoplástico instantâneo e a utilização das leis constitutivas em forma de taxa [74]. Quando comparadas com as situações reais, as estimativas obtidas por esse método são bastante rígidas em processos de homogeneização, sendo que a anisotropia do módulo tangente é apontada como sendo a fonte desse problema [33] [74].

Para contornar a questão da anisotropia do módulo tangente proposto por Hill [73], Berveiller e Zaoui [75] apresentaram uma aproximação isotrópica do módulo tangente que somente pode ser utilizada em carregamentos monotônicos. Em 2000, González e LLorca [76] consideraram também uma versão isotrópica do módulo tangente, mas agora obtido através da projeção da lei de localização na superfície de escoamento [33] [74].

No presente trabalho, a lei de localização proposta por Eshelby-Kröner ([41] e [40]) foi empregada, pois é uma lei de fácil implementação que apresenta bons resultados em ensaios de fadiga de alto ciclo [46] [77]. De forma geral, a tensão de escoamento cíclica inicial da microescala ($\sigma'_{y0}{}^\mu$) é considerada como sendo igual ao limite de resistência à fadiga (σ_f) do material. A Figura 3.1 apresenta um esquema do modelo de duas escalas citado, em que o VER representa a matriz do material, com todas as suas propriedades macroscópicas preservadas, e a inclusão, com propriedades mecânicas inferiores àquelas observadas na matriz, $\sigma'_{y0}{}^\mu > \sigma'_{y0}$. Dessa forma, a inclusão presente na microescala alcançará o regime plástico primeiro que a matriz do material e, para carregamentos cuja tensão equivalente máxima esteja entre o limite de resistência à fadiga, σ_f , e o limite de escoamento cíclico inicial do material, σ'_{y0} , haverá deformação plástica acumulada localizada e, por conseguinte, evolução do dano na microescala.

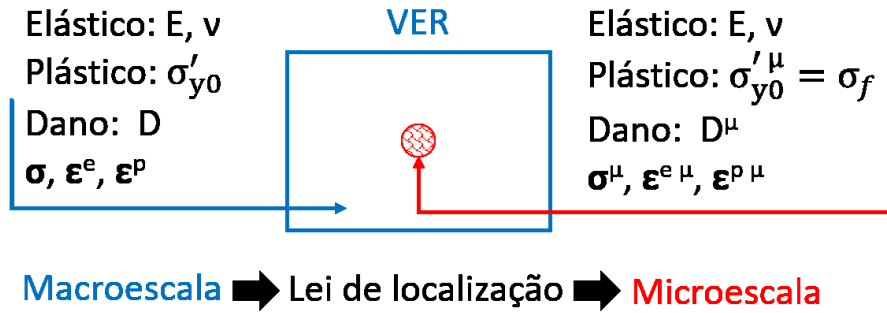


Figura 3.1: Modelo de duas escalas. Adaptado de [32].

Considerando que o problema de fadiga de alto ciclo possa ser modelado como sendo um problema em pequenas deformações, a decomposição aditiva da deformação (vide Equação 2.25) pode ser aplicada, e, conseqüentemente, a Equação 3.1 pode ser reescrita como sendo:

$$\epsilon^{e\mu} = \epsilon + (a - 1) \epsilon^{p\mu} - a \epsilon^p \quad (3.3)$$

em que $\epsilon^{e\mu}$ representa o tensor de deformações elásticas na microescala.

3.1.3 Consideração Sobre o Estado de Tensão

Na Subseção 2.5.5, foram apresentadas as condições para assegurar que o carregamento axial-torcional fosse garantido na macroescala. Na microescala, entretanto, essas condições não devem ser utilizadas, pois, segundo a Equação 3.3, o tensor de deformações elásticas na microescala ($\epsilon^{e\mu}$)

é unicamente dependente das seguintes variáveis: ϵ , a , $\epsilon^{p\mu}$ e ϵ^p . Sendo assim, por exemplo, um componente submetido a um carregamento monotônico poderá apresentar um estado de tensão triaxial na microescala ($\sigma_y^\mu = \sigma_z^\mu \neq 0$).

3.1.4 Função Denominadora de Dano na Microescala

Considerando a função denominadora de dano proposta e a lei de evolução do dano de Lemaitre, o dano incremental na microescala pode ser computado através de:

$$D_{n+1}^\mu = D_n^\mu + \frac{\Delta\gamma^\mu}{1 - D_{n+1}^\mu} \left(\frac{-Y_{n+1}^\mu}{S(\eta_{n+1}^\mu)_{n+1}^\mu} \right)^{s^\mu} \quad (3.4)$$

em que D_{n+1}^μ representa a variável de dano na microescala no pseudotempo t_{n+1} , D_n^μ é o dano na microescala no pseudotempo t_n , $\Delta\gamma^\mu$ é o multiplicador plástico na microescala, $-Y_{n+1}^\mu$ é a energia liberada devido ao dano na microescala no pseudotempo t_{n+1} , $S(\eta_{n+1}^\mu)_{n+1}^\mu$ é a função denominadora de dano na microescala no pseudotempo t_{n+1} (dependente de η_{n+1}^μ , que é a razão de triaxialidade na microescala no pseudotempo t_{n+1}) e s^μ representa o expoente de dano na microescala no pseudotempo t_{n+1} .

A consideração sobre o estado de tensão na microescala abordada na Subseção 3.1.3 permite concluir que a razão de triaxialidade na microescala no pseudotempo t_{n+1} (η_{n+1}^μ) pode ser completamente diferente daquela observada na macroescala η_{n+1} . A partir de uma breve análise conceitual acerca do propósito da função denominadora de dano, chega-se à conclusão que a razão de triaxialidade que de fato caracteriza o ensaio é aquela encontrada na macroescala. Portanto, no presente trabalho, considera-se que, para o pseudotempo t_{n+1} , a função denominadora de dano da microescala é igual àquela encontrada na macroescala. Tal consideração é exibida a seguir:

$$S(\eta_{n+1}^\mu)_{n+1}^\mu = S(\eta_{n+1})_{n+1} \quad (3.5)$$

em que $S(\eta_{n+1})_{n+1}$ é a função denominadora de dano na macroescala no pseudotempo t_{n+1} , que é uma função dependente da razão de triaxialidade na macroescala no pseudotempo t_{n+1} (η_{n+1}).

3.2 Modelo Matemático

Como o comportamento da macroescala não é afetado pela microescala, o modelo matemático da macroescala é exatamente igual ao apresentado no capítulo anterior (vide Seção 2.4). Contudo, na microescala, por causa da lei de localização (vide Equações 3.1 e 3.3), a lei de Hooke generalizada pode ser escrita como mostrado a seguir:

$$\tilde{\sigma}^\mu = \mathbb{D}^e : \epsilon^{e\mu} = \mathbb{D}^e : [\epsilon + (a - 1) \epsilon^{p\mu} - a \epsilon^p] \quad (3.6)$$

na qual $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^\mu$ é o tensor tensão efetiva na microescala e \mathbb{D}^e representa o tensor constitutivo elástico de 4ª ordem, que é um tensor dependente do coeficiente de Poisson e do módulo de elasticidade do material. O tensor tensão de Cauchy na microescala pode ser escrito como:

$$\boldsymbol{\sigma}^\mu = (1 - D^\mu) \mathbb{D}^e : \boldsymbol{\epsilon}^{e\mu} = (1 - D^\mu) \mathbb{D}^e : [\boldsymbol{\epsilon} + (a - 1) \boldsymbol{\epsilon}^{p\mu} - a \boldsymbol{\epsilon}^p] \quad (3.7)$$

em que $\boldsymbol{\sigma}^\mu$ representa o tensor tensão de Cauchy na microescala. É importante notar que a relação entre o tensor tensão efetiva na microescala e o tensor tensão de Cauchy na microescala é dada por $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^\mu = \frac{\boldsymbol{\sigma}^\mu}{(1 - D^\mu)}$. Neste capítulo, além de ser empregado na macroescala, o modelo de encruamento cinemático de Desmorat (vide Seção 2.2) foi utilizado também na microescala. As outras equações relativas ao modelo matemático da macroescala também foram mantidas na microescala. Assim sendo, apenas o resumo do modelo matemático da microescala é apresentado na Figura 3.2.

i) Decomposição aditiva da deformação:

$$\boldsymbol{\epsilon}^\mu = \boldsymbol{\epsilon} + a(\boldsymbol{\epsilon}^{p\mu} - \boldsymbol{\epsilon}^p) = \boldsymbol{\epsilon}^{e\mu} + \boldsymbol{\epsilon}^{p\mu}, \quad a = \frac{2}{15} \frac{4 - 5\nu}{1 - \nu}$$

ii) Lei de Hooke generalizada danificada:

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^\mu = \mathbb{D}^e : \boldsymbol{\epsilon}^{e\mu} = \mathbb{D}^e : [\boldsymbol{\epsilon} + (a - 1) \boldsymbol{\epsilon}^{p\mu} - a \boldsymbol{\epsilon}^p]$$

iii) Tensor tensão de Cauchy:

$$\boldsymbol{\sigma}^\mu = (1 - D^\mu) \mathbb{D}^e : \boldsymbol{\epsilon}^{e\mu} = (1 - D^\mu) \mathbb{D}^e : [\boldsymbol{\epsilon} + (a - 1) \boldsymbol{\epsilon}^{p\mu} - a \boldsymbol{\epsilon}^p]$$

iv) Função de escoamento:

$$\Phi^\mu = \sqrt{\frac{3}{2} \left(\frac{\mathbf{S}^\mu}{1 - D^\mu} - \boldsymbol{\beta}^\mu \right) : \left(\frac{\mathbf{S}^\mu}{1 - D^\mu} - \boldsymbol{\beta}^\mu \right)} - \sigma'_{y0}{}^\mu$$

v) Lei de fluxo plástico:

$$\boldsymbol{\epsilon}^{\dot{p}\mu} = \frac{\dot{\gamma}^\mu}{1 - D^\mu} \frac{3 \boldsymbol{\eta}^\mu}{2 q^\mu}$$

vi) Lei de evolução da deformação plástica acumulada:

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{p\mu} = \frac{\dot{\gamma}^\mu}{1 - D^\mu}$$

vii) Lei de evolução do tensor de encruamento cinemático:

$$\dot{\boldsymbol{\beta}}^\mu = \frac{2}{3} H^{k\mu} \dot{\gamma}^\mu \bar{\mathbf{N}}^\mu - \frac{H^{k\mu} \Gamma^\mu \beta_{eq}^{\mu M-3}}{1 + \Gamma^\mu \beta_{eq}^{\mu M-1}} \langle \boldsymbol{\beta}^\mu : \dot{\gamma}^\mu \bar{\mathbf{N}}^\mu \rangle \boldsymbol{\beta}^\mu$$

$$\beta_{eq}^\mu = \sqrt{\frac{3}{2} \boldsymbol{\beta}^\mu : \boldsymbol{\beta}^\mu}$$

viii) Lei de evolução do dano:

$$\dot{D}^\mu = \frac{\dot{\gamma}^\mu}{1 - D^\mu} \left(\frac{-Y^\mu}{S(\eta^\mu)^\mu} \right)^{s^\mu}, \quad S(\eta^\mu)^\mu = S(\eta)$$

$$-Y^\mu = \frac{\bar{q}^{\mu 2}}{6 G (1 - D^\mu)^2} + \frac{p^{\mu 2}}{2 K (1 - D^\mu)^2}$$

ix) Condição de complementaridade (Kuhn-Tucker):

$$\dot{\gamma} \geq 0, \quad \Phi \leq 0, \quad \dot{\gamma} \Phi = 0.$$

x) Condição de consistência (ou persistência):

$$\dot{\gamma} \geq 0, \quad \dot{\Phi} \leq 0, \quad \dot{\gamma} \dot{\Phi} = 0.$$

Figura 3.2: Resumo do modelo matemático da microescala.

3.3 Modelo Numérico

O modelo numérico utilizado na microescala segue os moldes daquele empregado na macroescala (vide Seção 2.5).

3.3.1 Preditor Elástico

Diferente do que ocorre na macroescala, segundo a Equação 3.3, o incremento de deformação na microescala não é, a princípio, conhecido, pois é dependente da deformação plástica da própria microescala ($\epsilon^{p\mu}$). Entretanto, se um passo elástico for assumido, a deformação plástica tentativa na microescala em t_{n+1} ($\epsilon_{n+1}^{pT\mu}$) será igual à deformação plástica no instante de tempo anterior ($\epsilon_n^{p\mu}$). A seguir, são apresentadas as equações referentes ao estado tentativa da microescala:

$$\epsilon_{n+1}^{eT\mu} = \epsilon_{n+1} + (a - 1) \epsilon_n^{p\mu} - a \epsilon_{n+1}^p \quad (3.8)$$

$$\epsilon_{n+1}^{pT\mu} = \epsilon_n^{p\mu} \quad (3.9)$$

$$D_{n+1}^{T\mu} = D_n^\mu \quad (3.10)$$

$$\bar{\epsilon}_{n+1}^{pT\mu} = \bar{\epsilon}_n^{p\mu} \quad (3.11)$$

$$\beta_{n+1}^{T\mu} = \beta_n^\mu \quad (3.12)$$

$$\tilde{\sigma}_{n+1}^{T\mu} = \mathbb{D}^e : \epsilon_{n+1}^{eT\mu} \quad (3.13)$$

$$\sigma_{n+1}^{T\mu} = \left(1 - D_{n+1}^{T\mu}\right) \mathbb{D}^e : \epsilon_{n+1}^{eT\mu} \quad (3.14)$$

$$\eta_{n+1}^{T\mu} = \frac{S_{n+1}^{T\mu}}{1 - D_{n+1}^{T\mu}} - \beta_{n+1}^{T\mu} \quad (3.15)$$

A admissibilidade plástica do estado tentativa é verificada de acordo com a Equação 3.16.

$$\Phi_{n+1}^{T\mu} = \sqrt{\frac{3}{2} \eta_{n+1}^{T\mu} : \eta_{n+1}^{T\mu}} - \sigma_{y0}' \quad (3.16)$$

Se $\Phi_{n+1}^{T\mu} \leq 0 \Rightarrow$ Passo elástico: $(*)_{n+1}^\mu = (*)_{n+1}^{T\mu}$:

$$\epsilon_{n+1}^{e\mu} = \epsilon_{n+1}^{eT\mu} \quad (3.17)$$

$$\epsilon_{n+1}^{p\mu} = \epsilon_{n+1}^{pT\mu} \quad (3.18)$$

$$D_{n+1}^\mu = D_{n+1}^{T\mu} \quad (3.19)$$

$$\bar{\epsilon}_{n+1}^{p\mu} = \bar{\epsilon}_{n+1}^{pT\mu} \quad (3.20)$$

$$\beta_{n+1}^\mu = \beta_{n+1}^{T\mu} \quad (3.21)$$

$$\tilde{\sigma}_{n+1}^\mu = \tilde{\sigma}_{n+1}^{T\mu} \quad (3.22)$$

$$\sigma_{n+1}^\mu = \sigma_{n+1}^{T\mu} \quad (3.23)$$

Se $\Phi_{n+1}^{T\mu} > 0 \Rightarrow$ Passo plástico: ir para o corretor plástico (Subseção 3.3.2).

3.3.2 Corretor Plástico

A metodologia pertinente ao corretor plástico da microescala é semelhante àquela da macroescala, excetuando-se os seguintes pontos: **i)** a correção da deformação elástica tentativa é feita de acordo com a Equação 3.24; e **ii)** como explicado na Subseção 3.1.4, o valor do denominador de dano usado na microescala é igual ao valor encontrado pela função denominadora de dano da macroescala.

$$\epsilon_{n+1}^{e\mu} = \epsilon_{n+1} + (a - 1) (\epsilon_n^{p\mu} + \Delta\gamma^\mu \mathbf{N}_{n+1}^\mu) - a\epsilon_{n+1}^p \quad (3.24)$$

Levando-se em conta as ressalvas feitas no parágrafo anterior, o sistema de equações não lineares mostrado na Equação 3.25 é proposto para a solução desta etapa. As variáveis do sistema são: $\epsilon_{n+1}^{e\mu}$, D_{n+1}^μ , $\Delta\gamma^\mu$ e β_{n+1}^μ .

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_{n+1}^{e\mu} = \epsilon_{n+1} + (a - 1) (\epsilon_n^{p\mu} + \Delta\gamma^\mu \mathbf{N}_{n+1}^\mu) - a\epsilon_{n+1}^p \\ D_{n+1}^\mu = D_n^\mu + \frac{\Delta\gamma^\mu}{1-D_{n+1}^\mu} \left(\frac{-Y_{n+1}^\mu}{S(\eta_{n+1})_{n+1}} \right)^{s^\mu} \\ \Phi_{n+1}^\mu = \sqrt{\frac{3}{2}} \boldsymbol{\eta}_{n+1}^\mu : \boldsymbol{\eta}_{n+1}^\mu - \sigma_{y0}^{\prime\mu} \\ \beta_{n+1}^\mu = \beta_n^\mu + \frac{2}{3} H^{k\mu} \Delta\gamma^\mu \bar{\mathbf{N}}_{n+1}^\mu - \frac{H^{k\mu} \Gamma^\mu \beta_{eq\ n+1}^{\mu\ M-3}}{1+\Gamma^\mu \beta_{eq\ n+1}^{\mu\ M-1}} \langle \beta_{n+1}^\mu : \Delta\gamma^\mu \bar{\mathbf{N}}_{n+1}^\mu \rangle \beta_{n+1}^\mu \end{array} \right. \quad (3.25)$$

3.3.3 Método de Newton-Raphson

Como na macroescala, o método de Newton-Raphson também foi empregado na solução do sistema de equações não lineares exibido na Equação 3.25. O sistema de equações residuais da microescala é apresentado na Equação 3.26.

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{R}_{\epsilon_{n+1}^{e\mu}} = \epsilon_{n+1}^{e\mu} - \epsilon_{n+1} - (a - 1) (\epsilon_n^{p\mu} - \Delta\gamma^\mu \mathbf{N}_{n+1}^\mu) + a\epsilon_{n+1}^p \\ \mathbf{R}_{D_{n+1}^\mu} = D_{n+1}^\mu - D_n^\mu - \frac{\Delta\gamma^\mu}{1-D_{n+1}^\mu} \left(\frac{-Y_{n+1}^\mu}{S(\eta_{n+1})_{n+1}} \right)^{s^\mu} \\ \mathbf{R}_{\Delta\gamma^\mu} = \sqrt{\frac{3}{2}} \boldsymbol{\eta}_{n+1}^\mu : \boldsymbol{\eta}_{n+1}^\mu - \sigma_{y0}^{\prime\mu} \\ \mathbf{R}_{\beta_{n+1}^\mu} = \beta_{n+1}^\mu - \beta_n^\mu - \frac{2}{3} H^{k\mu} \Delta\gamma^\mu \bar{\mathbf{N}}_{n+1}^\mu + \frac{H^{k\mu} \Gamma^\mu \beta_{eq\ n+1}^{\mu\ M-3}}{1+\Gamma^\mu \beta_{eq\ n+1}^{\mu\ M-1}} \langle \beta_{n+1}^\mu : \Delta\gamma^\mu \bar{\mathbf{N}}_{n+1}^\mu \rangle \beta_{n+1}^\mu \end{array} \right. \quad (3.26)$$

As equações restantes para implementação do método de Newton-Raphson são idênticas às mostradas na Subseção 2.5.4. Um quadro-resumo das equações necessárias para a atualização das tensões e variáveis internas associadas à microescala é mostrado na Figura 3.3. A Figura 3.4 apresenta um quadro contendo um resumo do método de Newton-Raphson aplicado à microescala.

i) Preditor elástico: formado a partir das variáveis internas em t_n , ϵ_{n+1} e ϵ_{n+1}^p

$$\begin{aligned}\epsilon_{n+1}^{eT\mu} &= \epsilon_{n+1} + (a-1)\epsilon_n^{p\mu} - a\epsilon_{n+1}^p \\ \epsilon_{n+1}^{pT\mu} &= \epsilon_n^{p\mu} \\ D_{n+1}^{T\mu} &= D_n^\mu \\ \bar{\epsilon}_{n+1}^{pT\mu} &= \bar{\epsilon}_n^{p\mu} \\ \beta_{n+1}^{T\mu} &= \beta_n^\mu \\ \tilde{\sigma}_{n+1}^{T\mu} &= \mathbb{D}^e : \epsilon_{n+1}^{eT\mu} \\ \sigma_{n+1}^{T\mu} &= (1 - D_{n+1}^{T\mu}) \mathbb{D}^e : \epsilon_{n+1}^{eT\mu} \\ \eta_{n+1}^{T\mu} &= \frac{\mathbf{S}_{n+1}^{T\mu}}{1 - D_{n+1}^{T\mu}} - \beta_{n+1}^{T\mu}\end{aligned}$$

ii) Verificação da admissibilidade plástica:

$$\Phi_{n+1}^{T\mu} = \sqrt{\frac{3}{2} \eta_{n+1}^{T\mu} : \eta_{n+1}^{T\mu} - \sigma_{y0}'^\mu}$$

Se $\Phi_{n+1}^{T\mu} \leq 0 \Rightarrow$ Passo elástico: $(*)_{n+1}^\mu = (*)_{n+1}^{T\mu} \Rightarrow v$

Se $\Phi_{n+1}^{T\mu} > 0 \Rightarrow$ Passo plástico \Rightarrow iii

iii) Corretor plástico:

O sistema de equações não lineares com variáveis $\epsilon_{n+1}^{e\mu}$, D_{n+1}^μ , $\Delta\gamma^\mu$ e β_{n+1}^μ deve ser solucionado através do método de Newton-Raphson.

$$\begin{cases} \epsilon_{n+1}^{e\mu} = \epsilon_{n+1} + (a-1)(\epsilon_n^{p\mu} + \Delta\gamma^\mu \mathbf{N}_{n+1}^\mu) - a\epsilon_{n+1}^p \\ D_{n+1}^\mu = D_n^\mu + \frac{\Delta\gamma^\mu}{1-D_{n+1}^\mu} \left(\frac{-Y_{n+1}^\mu}{S(\eta_{n+1})_{n+1}} \right)^{s^\mu} \\ \Phi_{n+1}^\mu = \sqrt{\frac{3}{2} \eta_{n+1}^\mu : \eta_{n+1}^\mu - \sigma_{y0}'^\mu} \\ \beta_{n+1}^\mu = \beta_n^\mu + \frac{2}{3} H^{k\mu} \Delta\gamma^\mu \bar{\mathbf{N}}_{n+1}^\mu - \frac{H^{k\mu} \Gamma^\mu \beta_{eq,n+1}^{\mu M-3}}{1+\Gamma^\mu \beta_{eq,n+1}^{\mu M-1}} \langle \beta_{n+1}^\mu : \Delta\gamma^\mu \bar{\mathbf{N}}_{n+1}^\mu \rangle \beta_{n+1}^\mu \end{cases}$$

iv) Atualização das outras variáveis internas e tensões:

$$\begin{aligned}\epsilon_{n+1}^{p\mu} &= \epsilon_n^{p\mu} + \Delta\gamma^\mu \mathbf{N}_{n+1}^\mu \\ \bar{\epsilon}_{n+1}^{p\mu} &= \bar{\epsilon}_n^{p\mu} + \frac{\Delta\gamma^\mu}{1 - D_{n+1}^\mu} \\ \tilde{\sigma}_{n+1}^\mu &= \mathbb{D}^e : \epsilon_{n+1}^{e\mu} \\ \sigma_{n+1}^\mu &= (1 - D_{n+1}^\mu) \tilde{\sigma}_{n+1}^\mu\end{aligned}$$

v) Fim

Figura 3.3: Quadro-resumo das equações necessárias para a atualização das tensões e variáveis internas associadas à microescala.

i) Estado tentativa é usado para iniciar o processo iterativo ($k = 0$):

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^{e\mu(0)} &= \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^{eT\mu} \\ D_{n+1}^{\mu(0)} &= D_{n+1}^{T\mu} \\ \Delta\gamma^{\mu(0)} &= 0 \\ \boldsymbol{\beta}_{n+1}^{\mu(0)} &= \boldsymbol{\beta}_{n+1}^{T\mu}\end{aligned}$$

ii) Resolução do problema linearizado:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{R}_{\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^{e\mu}}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^{e\mu}} & \frac{\partial \mathbf{R}_{\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^{e\mu}}}{\partial D_{n+1}^{\mu}} & \frac{\partial \mathbf{R}_{\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^{e\mu}}}{\partial \Delta\gamma^{\mu}} & \frac{\partial \mathbf{R}_{\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^{e\mu}}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^{\mu}} \\ \frac{\partial R_{D_{n+1}^{\mu}}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^{e\mu}} & \frac{\partial R_{D_{n+1}^{\mu}}}{\partial D_{n+1}^{\mu}} & \frac{\partial R_{D_{n+1}^{\mu}}}{\partial \Delta\gamma^{\mu}} & \frac{\partial R_{D_{n+1}^{\mu}}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^{\mu}} \\ \frac{\partial R_{\Delta\gamma^{\mu}}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^{e\mu}} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma^{\mu}}}{\partial D_{n+1}^{\mu}} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma^{\mu}}}{\partial \Delta\gamma^{\mu}} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma^{\mu}}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^{\mu}} \\ \frac{\partial \mathbf{R}_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^{\mu}}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^{e\mu}} & \frac{\partial \mathbf{R}_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^{\mu}}}{\partial D_{n+1}^{\mu}} & \frac{\partial \mathbf{R}_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^{\mu}}}{\partial \Delta\gamma^{\mu}} & \frac{\partial \mathbf{R}_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^{\mu}}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^{\mu}} \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} \boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^{e\mu}} \\ \delta_{D_{n+1}^{\mu}} \\ \delta_{\Delta\gamma^{\mu}} \\ \boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^{\mu}} \end{bmatrix}^{k+1} = - \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^{e\mu}} \\ R_{D_{n+1}^{\mu}} \\ R_{\Delta\gamma^{\mu}} \\ \mathbf{R}_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^{\mu}} \end{bmatrix}^k$$

iii) Atualização das variáveis $\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^{e\mu}$, D_{n+1}^{μ} , $\Delta\gamma^{\mu}$ e $\boldsymbol{\beta}_{n+1}^{\mu}$:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^{e\mu(k+1)} &= \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^{e\mu(k)} + \boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^{e\mu}}^{(k+1)} \\ D_{n+1}^{\mu(k+1)} &= D_{n+1}^{\mu(k)} + \delta_{D_{n+1}^{\mu}}^{(k+1)} \\ \Delta\gamma^{\mu(k+1)} &= \Delta\gamma^{\mu(k)} + \delta_{\Delta\gamma^{\mu}}^{(k+1)} \\ \boldsymbol{\beta}_{n+1}^{\mu(k+1)} &= \boldsymbol{\beta}_{n+1}^{\mu(k)} + \boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^{\mu}}^{(k+1)}\end{aligned}$$

iv) Verificação da convergência:

$$Erro = \sum_{i=1}^n \left| \frac{R_i}{\alpha_i} \right|$$

Se $Erro \leq Tolerância \Rightarrow$ v

Se $Erro > Tolerância \Rightarrow$ ii

v) Fim

Figura 3.4: Quadro-resumo do método de Newton-Raphson aplicado à microescala.

3.3.4 Controle de Tensão

No método da decomposição do operador utilizado anteriormente, as tensões são obtidas a partir de um dado incremento de deformação, ou seja, as tensões são dependentes do incremento de deformação. De forma geral, esse método é empregado para simular o comportamento mecânico de ensaios controlados por deformação, pois o incremento de deformação é conhecido em cada instante de tempo. Para utilizar esse método em ensaios controlados por tensão, faz-se necessário saber qual o incremento de deformação capaz de produzir o estado de tensão desejado. Uma

forma de determinar tal incremento é utilizando o método de Quase Newton. Como o objetivo deste capítulo consiste na concepção de um método capaz de prever a vida em fadiga de ensaios controlados por tensão, a formulação necessária para a aplicação do método Quase Newton em ensaios axiais-torcionais foi abordada. Por fim, destaca-se que o controle de tensão se dá somente na macroescala, e que os incrementos de deformação na microescala são fornecidos pela lei de localização.

As tensões $\sigma_{x n+1}$ e $\tau_{xy n+1}$ são dependentes do modelo elastoplástico da macroescala. Portanto, tais componentes de tensão podem ser escritas como:

$$\sigma_{x n+1} = \hat{\sigma}(\Delta\epsilon_x, \Delta\gamma_{xy}, \dots) \quad (3.27)$$

$$\tau_{xy n+1} = \hat{\tau}(\Delta\epsilon_x, \Delta\gamma_{xy}, \dots) \quad (3.28)$$

Nas Equações 3.27-3.28, $\hat{\sigma}(\Delta\epsilon_x, \Delta\gamma_{xy}, \dots)$ e $\hat{\tau}(\Delta\epsilon_x, \Delta\gamma_{xy}, \dots)$ representam, respectivamente, as respostas do modelo elastoplástico da macroescala em termos das tensões $\sigma_{x n+1}$ e $\tau_{xy n+1}$. As reticências servem para indicar que as respostas não dependem somente de $\Delta\epsilon_x$ e $\Delta\gamma_{xy}$, pois as outras variáveis internas como o β_{n+1} e D_{n+1} , por exemplo, também são fundamentais para a determinação dos resultados.

Sabendo-se que $\bar{\sigma}_{x n+1}$ e $\bar{\tau}_{xy n+1}$ são as tensões prescritas em t_{n+1} , as seguintes equações residuais podem ser estabelecidas:

$$R_{\bar{\sigma}_{x n+1}} = \bar{\sigma}_{x n+1} - \hat{\sigma}(\Delta\epsilon_x, \Delta\gamma_{xy}, \dots) \quad (3.29)$$

$$R_{\bar{\tau}_{xy n+1}} = \bar{\tau}_{xy n+1} - \hat{\tau}(\Delta\epsilon_x, \Delta\gamma_{xy}, \dots) \quad (3.30)$$

De acordo com o método de Newton-Raphson, esse problema pode ser resolvido da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial R_{\bar{\sigma}_{x n+1}}}{\partial \Delta\epsilon_x} & \frac{\partial R_{\bar{\sigma}_{x n+1}}}{\partial \Delta\gamma_{xy}} \\ \frac{\partial R_{\bar{\tau}_{xy n+1}}}{\partial \Delta\epsilon_x} & \frac{\partial R_{\bar{\tau}_{xy n+1}}}{\partial \Delta\gamma_{xy}} \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} \delta\Delta\epsilon_x \\ \delta\Delta\gamma_{xy} \end{bmatrix}^{k+1} = - \begin{Bmatrix} R_{\bar{\sigma}_{x n+1}} \\ R_{\bar{\tau}_{xy n+1}} \end{Bmatrix}^k \quad (3.31)$$

As derivadas presentes na Equação 3.31 são muito complexas para serem obtidas analiticamente. Logo, sugere-se o cálculo aproximado delas, utilizando-se o método das diferenças finitas, que é apresentado na Equação 3.32. A variável ϵ representa uma perturbação em $\Delta\epsilon_x$ ou em $\Delta\gamma_{xy}$, e o seu valor deve possuir ordem de grandeza inferior àquela observada nos incrementos de deformação.

$$\frac{\partial R}{\partial * } \approx \frac{1}{\epsilon} \begin{bmatrix} R_{\bar{\sigma}_{x n+1}}(\Delta\epsilon_x + \epsilon, \Delta\gamma_{xy}) - R_{\bar{\sigma}_{x n+1}}(\Delta\epsilon_x, \Delta\gamma_{xy}) & R_{\bar{\sigma}_{x n+1}}(\Delta\epsilon_x, \Delta\gamma_{xy} + \epsilon) - R_{\bar{\sigma}_{x n+1}}(\Delta\epsilon_x, \Delta\gamma_{xy}) \\ R_{\bar{\tau}_{xy n+1}}(\Delta\epsilon_x + \epsilon, \Delta\gamma_{xy}) - R_{\bar{\tau}_{xy n+1}}(\Delta\epsilon_x, \Delta\gamma_{xy}) & R_{\bar{\tau}_{xy n+1}}(\Delta\epsilon_x, \Delta\gamma_{xy} + \epsilon) - R_{\bar{\tau}_{xy n+1}}(\Delta\epsilon_x, \Delta\gamma_{xy}) \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

Quando esse tipo de aproximação é utilizada, o método passa a ser chamado de Quase Newton. Finalmente, a Equação 3.33 exibe o sistema linearizado final.

$$\frac{\partial R^k}{\partial * } \begin{bmatrix} \delta\Delta\epsilon_x \\ \delta\Delta\gamma_{xy} \end{bmatrix}^{k+1} = - \begin{Bmatrix} R_{\bar{\sigma}_{x n+1}} \\ R_{\bar{\tau}_{xy n+1}} \end{Bmatrix}^k \quad (3.33)$$

O método de controle de tensão exibido também pode ser utilizado para garantir o carregamento axial-torcional na macroescala, sendo, portanto, uma solução alternativa à metodologia apresentada na Subseção 2.5.5. Para isso, o método de controle de tensão pode ser empregado de modo a garantir: $\sigma_y = \sigma_z = 0$.

3.4 Ensaios em Corpos de Prova Padrão

Para testar a robustez do modelo em duas escalas proposto para problemas de fadiga de alto ciclo e controlados por tensão, foram realizadas simulações numéricas em um ponto de Gauss, considerando resultados experimentais para o aço de alta resistência *offshore* de grau R4, aplicado em sistemas de amarração de plataformas de petróleo do tipo FPSO. Os ensaios experimentais foram realizados considerando carregamentos axiais, torcionais, multiaxiais proporcionais e multiaxiais não proporcionais. Os corpos de prova passaram por uma sequência de tratamentos térmicos que consistiu em: **i)** normalização (temperatura de austenitização de 900°C por 1 hora e resfriamento ao ar); **ii)** têmpera (temperatura de austenitização de 890°C por 30 minutos e resfriamento em água); e **iii)** revenido (temperatura de 650°C por 1 hora e resfriamento em água). Essa sequência de tratamentos térmicos é frequentemente observada durante o processo de fabricação das amarras *offshore*. É importante destacar que, para todos os corpos de prova padrão, a superfície oxidada resultante da sequência de tratamento térmico descrita anteriormente foi mantida com o objetivo de reproduzir o mesmo acabamento superficial encontrado nas amarras das plataformas tipo FPSO. Essa condição garante que todas as propriedades elastoplásticas e de dano calibradas para o material, bem como as conclusões e observações com relação ao comportamento do material em corpos de prova padrão, poderão ser estendidas a ensaios e simulações em amarras.

A Figura 3.5 mostra as geometrias dos corpos de prova padrão utilizados nos ensaios: (a) monotônicos e (b) de fadiga. As dimensões nominais apresentadas abaixo estão em mm.

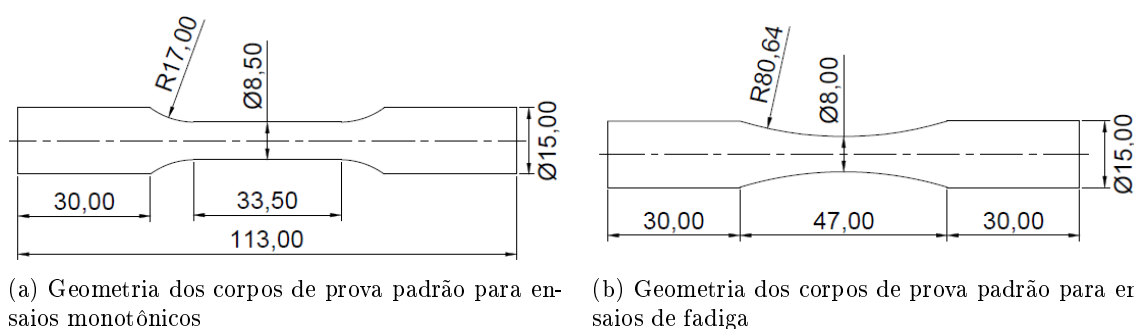


Figura 3.5: Geometrias dos corpos de prova padrão utilizados nos ensaios: (a) monotônicos e (b) de fadiga. Dimensões nominais em mm.

A Figura 3.6 apresenta um dos corpos de prova padrão utilizados nos ensaios de fadiga. Na imagem, é possível observar a superfície oxidada decorrente da sequência de tratamentos térmicos descrita anteriormente.



Figura 3.6: Exemplo de corpo de prova padrão utilizado em um dos ensaios de fadiga.

A curva tensão-deformação de engenharia monotônica do aço grau R4 é mostrada na Figura 3.7, sendo que a linha tracejada em vermelho corresponde à pré-deformação de 0,2%, utilizada para calcular a tensão de escoamento inicial monotônica. No presente trabalho, o coeficiente de Poisson (ν) do aço grau R4 foi adotado como sendo igual a 0,3. De posse do módulo de elasticidade calculado experimentalmente e do coeficiente de Poisson adotado, o módulo de cisalhamento (G) do aço grau R4 foi calculado através da Equação 2.6. As propriedades monotônicas desse aço são apresentadas na Tabela 3.1.

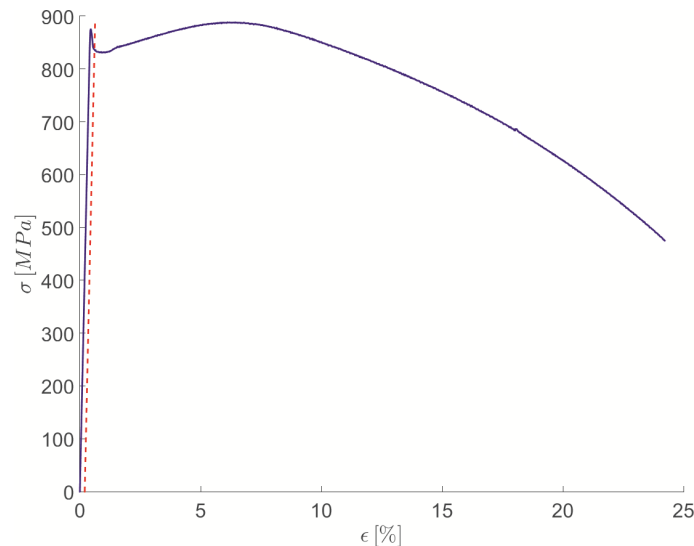


Figura 3.7: Curva tensão-deformação de engenharia monotônica do aço *offshore* grau R4.

Tabela 3.1: Propriedades monotônicas do aço grau R4.

Símbolo	Descrição	Valor
E	Módulo de elasticidade	207,4 GPa
ν	Coefficiente de Poisson	0,3
G	Módulo de cisalhamento	79,8 GPa
σ_{y0}	Tensão de escoamento inicial monotônica (0,2%)	836,6 MPa
σ_u^E	Tensão última de engenharia	888,7 MPa
σ_r^E	Tensão de ruptura de engenharia	475,1 MPa
RA	Redução na área	0,693

Para determinar a curva de encruamento cíclico, foi utilizada a formulação proposta por Li, Zhang e Li [78], que é capaz de obter os parâmetros da curva de Ramberg-Osgood (K' e n')

para aço a partir das propriedades monotônicas. As Equações 3.34-3.38 apresentam a formulação necessária para a obtenção desses parâmetros nos casos em que $-\ln(1 - RA) RA > 20\%$. A Tabela 3.2 apresenta os parâmetros cíclicos calculados do aço grau R4.

$$\epsilon_r^V = -\ln(1 - RA) \quad (3.34)$$

$$\sigma_r^V = \sigma_u^E (1 + RA) \quad (3.35)$$

$$n = \frac{\log \left[\frac{(\sigma_r^V)^2}{\sigma_{y0} \sigma_u^E} \right]}{2 \log(500 \epsilon_r^V)} \quad (3.36)$$

$$K' = 57 \left[\frac{\sigma_r^V \sigma_{y0}}{\sigma_u^E} (\epsilon_r^V)^{-n} \right]^{0,545} - 1220 \quad (3.37)$$

$$n' = \frac{\sigma_{y0}}{\sigma_r^V - \sigma_u^E} n \quad (3.38)$$

Tabela 3.2: Parâmetros do aço grau R4 calculados com a formulação descrita por Li, Zhang e Li [78].

Símbolo	Descrição	Valor
ϵ_r^V	Deformação na ruptura verdadeira	1,18
σ_r^V	Tensão na ruptura verdadeira	1.504,8 MPa
n	Expoente de encruamento monotônico axial	0,087
K'	Coefficiente de encruamento cíclico axial	1.730,21 MPa
n'	Expoente de encruamento cíclico axial	0,119

Com base nas constantes do modelo de Ramberg-Osgood calculados anteriormente, é possível determinar os parâmetros do aço grau R4 referentes ao modelo de encruamento cinemático de Desmorat, sendo que a Tabela 3.3 resume os dados computados, e a Figura 3.8 apresenta a curva de encruamento obtida.

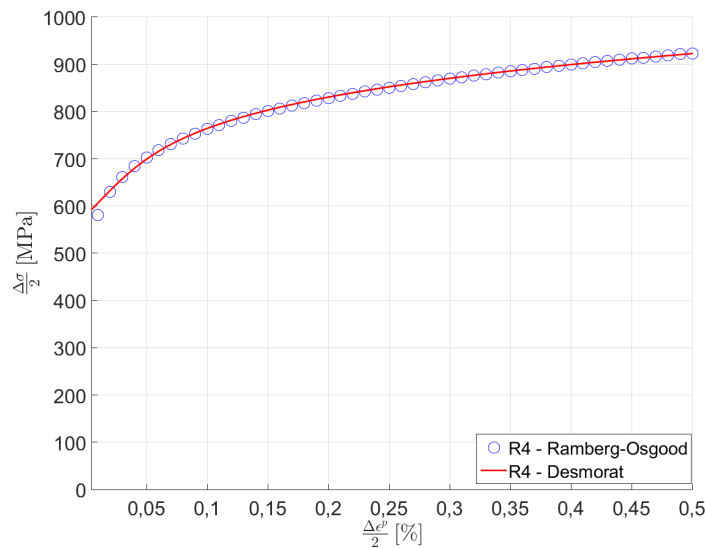


Figura 3.8: Curva de encruamento, segundo o modelo de Desmorat, para o aço grau R4.

Tabela 3.3: Parâmetros do aço grau R4 relativos ao modelo de encruamento cinemático de Desmorat.

Símbolo	Descrição	Valor
σ'_{y0}	Tensão de escoamento cíclica inicial	580 MPa
H^k	Módulo de encruamento cinemático	267.429 MPa
Γ	Parâmetro de Desmorat	$2,88 \times 10^{-7}$
M	Expoente de Desmorat	4

A Figura 3.9 apresenta as 4 trajetórias sob controle de tensão empregadas nos ensaios de fadiga do aço grau R4, são elas: **a)** Tração-compressão; **b)** Torção; **c)** Multiaxial proporcional; e **d)** Multiaxial não proporcional circular.

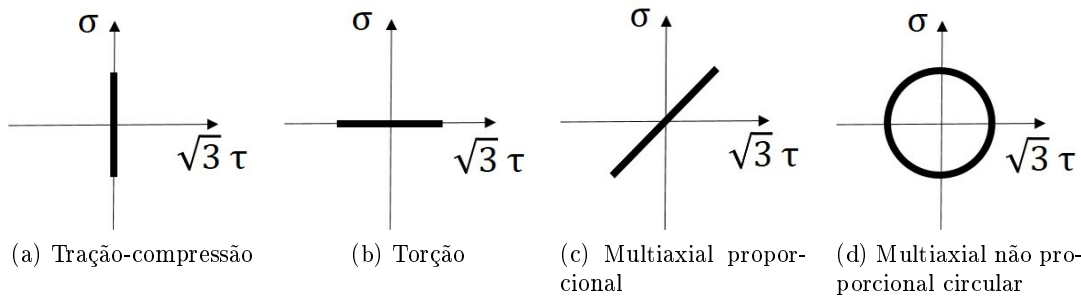


Figura 3.9: Trajetórias de carregamento utilizadas nos ensaios do aço grau R4: (a) tração-compressão, (b) torção, (c) multiaxial proporcional, e (d) multiaxial não proporcional circular.

Para auxiliar na caracterização dos ensaios, foram definidos os seguintes parâmetros: **i)** amplitude de tensão equivalente, $\frac{\Delta\sigma_{eq}}{2}$, definida como sendo o raio da menor circunferência capaz de circunscrever uma dada trajetória de carregamento no espaço das tensões σ versus $\sqrt{3}\tau$; e **ii)** razão de carregamento, λ_σ , que pode ser calculada por:

$$\lambda_\sigma = \frac{\frac{\sqrt{3}\Delta\tau}{2}}{\frac{\Delta\sigma}{2}} \quad (3.39)$$

em que $\frac{\Delta\tau}{2}$ e $\frac{\Delta\sigma}{2}$ representam, respectivamente, as amplitudes de tensão cisalhante e normal.

A Tabela 3.4 apresenta os dados experimentais e os resultados numéricos obtidos acerca dos ensaios de fadiga em corpos de prova padrão fabricados em aço grau R4 sob controle de tensão. Foi definido que a falha por fadiga ocorria quando houvesse uma fratura completa da amostra. Além disso, os espécimes que não falharam antes dos 10^6 ciclos foram classificados como *run-outs*.

Tabela 3.4: Dados experimentais e resultados numéricos obtidos para os ensaios de fadiga sob controle de tensão em corpos de prova padrão fabricados em aço grau R4.

Traj.	I.D. C.P.	$\frac{\Delta\sigma_{eq}}{2}$ [MPa]	$\frac{\Delta\sigma}{2}$ [MPa]	$\frac{\Delta\tau}{2}$ [MPa]	λ_σ [MPa]	f [Hz]	$N_{Obs.}$ [ciclos]	$N_{Orig.}$ [ciclos]	$N_{Prop.}$ [ciclos]	$\frac{N_{Orig.}}{N_{Obs.}}$	$\frac{N_{Prop.}}{N_{Obs.}}$
T-C	R4 OXU 01	500	500		0	8	74.354	50.498	50.498	0,68	0,68
R=-1	R4 OXU 02	500	500		0	10	50.673	50.498	50.498	1,00	1,00

Continua na próxima página

Tabela 3.4 – Continuação da página anterior

I.D. C.P.		$\frac{\Delta\sigma_{eq}}{2}$	$\frac{\Delta\sigma}{2}$	$\frac{\Delta\tau}{2}$	λ_σ	f	$N_{Obs.}$	$N_{Orig.}$	$N_{Prop.}$	$\frac{N_{Orig.}}{N_{Obs.}}$	$\frac{N_{Prop.}}{N_{Obs.}}$
		[MPa]	[MPa]	[MPa]	[MPa]	[Hz]	[ciclos]	[ciclos]	[ciclos]		
R4 OXU 03		475	475		0	7,5/8,5	99.475	65.376	65.376	0,66	0,66
R4 OXU 04		450	450		0	8,5/9,5	124.816	86.802	86.802	0,70	0,70
R4 OXU 05		450	450		0	15	66.051	86.802	86.802	1,31	1,31
R4 OXU 06		425	425		0	6/8	123.294	121.120	121.120	0,98	0,98
R4 OXU 07		410	410		0	8	101.451	154.561	154.561	1,52	1,52
R4 OXU 08		400	400		0	15	202.983	187.577	187.577	0,92	0,92
R4 OXU 09		390	390		0	6	171.840	236.711	236.711	1,38	1,38
R4 OXU 10		380	380		0	15	255.927	318.017	318.017	1,24	1,24
R4 OXU 11		350	350		0	7/9	$> 10^6$	$> 10^6$	$> 10^6$	1,00	1,00
R4 OXU 12		350	350		0	15	$> 10^6$	$> 10^6$	$> 10^6$	1,00	1,00
R4 OXU 13		300	300		0	15	$> 10^6$	$> 10^6$	$> 10^6$	1,00	1,00
Torção	R4 OXT 01	550		317,59	∞	8	139.142	43.156	148.541	0,31	1,07
R=-1	R4 OXT 02	525		303,14	∞	8	232.892	54.447	187.404	0,23	0,80
	R4 OXT 03	500		288,63	∞	7/10	202.156	69.226	238.270	0,34	1,18
	R4 OXT 04	475		274,25	∞	8	380.996	88.994	306.313	0,23	0,80
	R4 OXT 05	460		265,59	∞	10	262.230	104.692	360.344	0,40	1,37
Propor.	R4 OXP 01	500	485,11	70,00	0,25	8	59.138	51.359	53.289	0,87	0,90
R=-1	R4 OXP 02	500	447,23	129,15	0,50	8	77.266	53.552	61.021	0,69	0,79
	R4 OXP 03	500	353,56	204,12	1,00	8	115.816	58.750	84.377	0,51	0,73
	R4 OXP 04	500	223,57	258,23	2,00	8	251.512	64.680	128.103	0,26	0,51
	R4 OXP 05	500	121,18	280,10	4,00	8	281.426	67.777	172.903	0,24	0,61
N. Propor.	R4 OXC 01	500	499,91	288,63	1,00	6	9.738	8.646	12.103	0,89	1,24
R=-1	R4 OXC 02	485	485,14	69,96	0,25	8	75.848	57.005	58.540	0,75	0,77
	R4 OXC 03	485	121,18	280,09	4,00	8	97.632	75.907	206.767	0,78	2,12
	R4 OXC 04	447	447,21	129,17	0,50	8	84.489	80.110	88.563	0,95	1,05
	R4 OXC 05	447	223,50	258,24	2,00	8	44.984	98.621	209.497	2,19	4,66
	R4 OXC 06	354	353,50	204,11	1,00	8	60.930	142.133	201.080	2,33	3,30

Nota: Traj. é a trajetória de carregamento, I.D. C.P. é a identificação do corpo de prova, $\frac{\Delta\sigma_{eq}}{2}$ é a amplitude de tensão equivalente, $\frac{\Delta\sigma}{2}$ é a amplitude de tensão normal, $\frac{\Delta\tau}{2}$ é a amplitude de tensão cisalhante, λ_σ é a razão de carregamento, f é a frequência do ensaio, $N_{Obs.}$ é a vida observada experimentalmente, $N_{Orig.}$ é a vida estimada pela formulação original e $N_{Prop.}$ é a vida estimada pela função proposta.

A Figura 3.10 apresenta um gráfico das tensões equivalentes *versus* vidas observadas para os ensaios de fadiga sob controle de tensão conduzidos em corpos de prova padrão fabricados em aço grau R4. No gráfico mencionado anteriormente, a seta para a direita (\rightarrow) representa que o ensaio foi classificado como *run-out*.

Os parâmetros de encruamento utilizados na macroescala foram aqueles apresentados na Tabela 3.3. De forma geral, adota-se que a tensão de escoamento cíclica inicial da microescala é igual ao limite de resistência à fadiga do material [32]. Analisando-se os dados experimentais relativos

aos ensaios do tipo tração-compressão (vide Tabela 3.4), percebe-se que, dentre os 3 ensaios classificados como *run-outs* (R4 OXU 11, R4 OXU 12, R4 OXU 13), a maior amplitude de tensão observada foi de 350 MPa (R4 OXU 11 e R4 OXU 12). Sendo assim, o limite de resistência à fadiga do material foi considerado como sendo igual a essa amplitude de tensão ($\sigma_f = 350$ MPa), e, conseqüentemente, a tensão de escoamento cíclica inicial da microescala também foi tomada como sendo igual a esse valor de amplitude de tensão ($\sigma'_{y0} = \sigma_f = 350$ MPa). Os outros parâmetros de encruamento da microescala ($H^{k\mu}$, Γ^μ e M^μ) foram mantidos iguais aos descritos na Tabela 3.3.

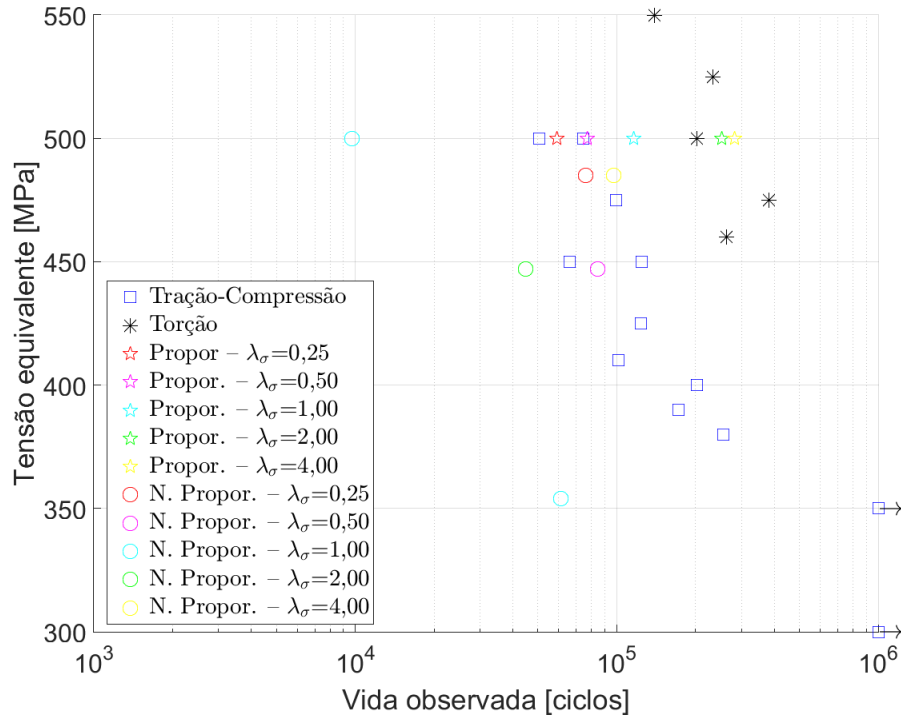


Figura 3.10: Tensões equivalentes *versus* vidas observadas para o aço grau R4.

A calibração dos parâmetros de dano utilizados na macroescala (D_c , s , $S_{\pm\frac{1}{3}}$ e S_0) e na microescala (D_c^μ , s^μ , $S_{\pm\frac{1}{3}}^\mu$ e S_0^μ) foi baseada no mesmo método de identificação de parâmetros descrito na Seção 2.6. Os resultados obtidos ao final do processo de otimização estão descritos na Tabela 3.5. Nota-se que os parâmetros de dano da macroescala e da microescala foram assumidos como sendo iguais uns aos outros, ou seja, $D_c = D_c^\mu$, $s = s^\mu$, $S_{\pm\frac{1}{3}} = S_{\pm\frac{1}{3}}^\mu$ e $S_0 = S_0^\mu$.

Tabela 3.5: Parâmetros de dano utilizados na microescala e na macroescala para o aço grau R4.

Símbolo	Descrição	Valor
D_c	Dano crítico na macroescala	0,16
D_c^μ	Dano crítico na microescala	0,16
s	Expoente de dano na macroescala	2,04
s^μ	Expoente de dano na microescala	2,04
$S_{\pm\frac{1}{3}}$	Denominador de dano axial na macroescala	7,08 MPa
$S_{\pm\frac{1}{3}}^\mu$	Denominador de dano axial na microescala	7,08 MPa
S_0	Denominador de dano torcional na macroescala	12,97 MPa
S_0^μ	Denominador de dano torcional na microescala	12,97 MPa

3.5 Ensaios em Amarras

Na presente seção, aplica-se a abordagem descrita anteriormente neste capítulo para estimar a vida em fadiga de amarras sujeitas ao mecanismo de flexão fora do plano. Para isso, foram realizados 8 ensaios experimentais em amarras fabricadas em aço *offshore* grau R4. As próximas subseções desta seção abordam os seguintes aspectos relacionados a esses ensaios: descrição do problema, estado da arte sobre mecanismo OPB, procedimento experimental, cálculo das tensões críticas e dados experimentais.

3.5.1 Descrição do Problema

No ano de 2002, foram observadas 4 falhas prematuras (3 com oito meses e 1 com dois anos de operação) de correntes de linhas de ancoragem de uma boia de transferência de petróleo do tipo CALM (*Catenary Anchor Leg Mooring* - terminal de ancoragem com amarração em catenária) de uma FPSO chamada Girassol, que estava localizada em Angola e possuía LDA de 1350 m [8] [10] [12] [13] [14] [15]. As amarras em questão haviam sido projetadas para uma vida de 20 anos com fator de segurança igual a 3 (portanto, equivalente a 60 anos), de acordo com os métodos convencionais utilizados na indústria *offshore* estabelecidos pela norma API RP 2SK [13] [14] [16]. Verificou-se que as falhas ocorreram no 1° elo livre dentro do escovém (vide Figura 3.11), que era, na verdade, o 5° elo dentro da parte curva do escovém (vide Figura 3.12).

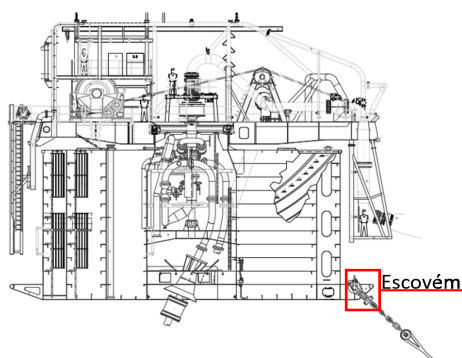


Figura 3.11: Representação do escovém da boia Girassol. Adaptado de [12].

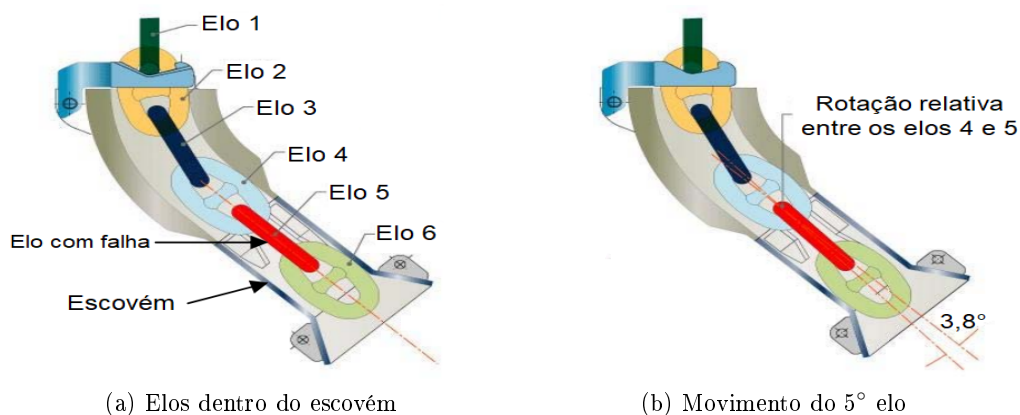
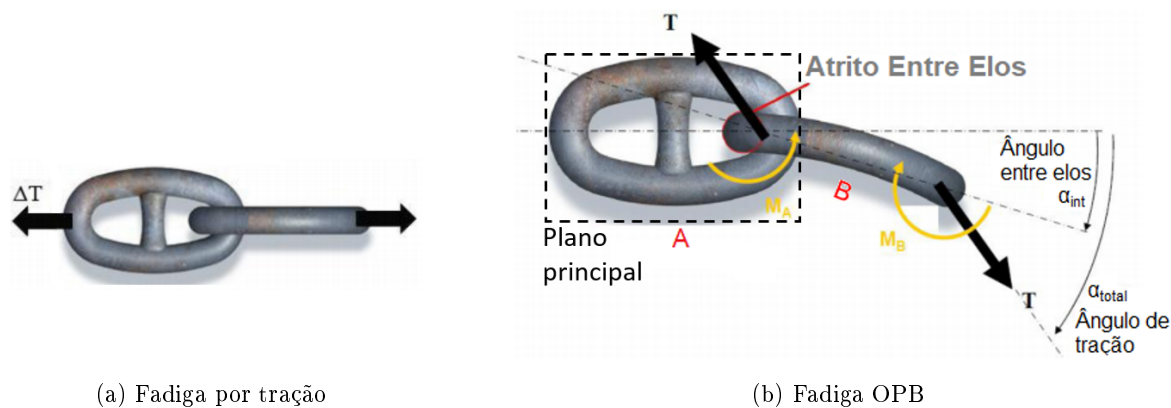


Figura 3.12: Trecho de amarra dentro do escovém: (a) elo com falha e (b) movimento do 5° elo. Adaptado de [12].

Destaca-se que o uso do tipo de boia mencionada anteriormente foi inovador no setor *offshore*, haja vista que ele nunca tinha sido empregado em águas tão profundas anteriormente (1350 m) [13]. As falhas dos elos da boia do Girassol foram atribuídas à fadiga por flexão fora do plano, mecanismo que, até aquele momento, nunca havia sido preponderante na vida em fadiga das amarras empregadas em outros sistemas [11] [12] [79] [13] [14] [16]. A Figura 3.13 compara a tradicional fadiga por tração com a provocada pelo mecanismo OPB, que é aquela causada pela flexão fora do plano. Na Figura 3.13(b), o elo B está fletindo fora do seu plano principal, aquele que contém a forma oval do elo [12] [13] [14] [16]. A flexão no plano (em inglês - *In-Plane Bending* - IPB) é menos severa que a fora do plano, pois, por causa do momento de inércia, as tensões nominais geradas são cerca de 7 vezes menores [13].



(a) Fadiga por tração

(b) Fadiga OPB

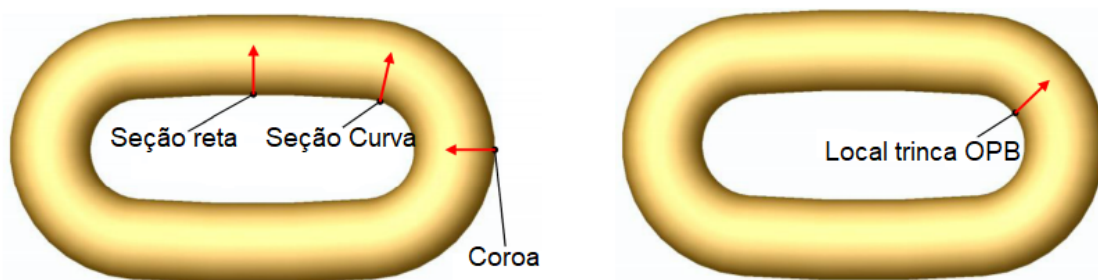
Figura 3.13: Fadiga dos elos por: (a) tração e (b) OPB. Adaptado de [13].

Um dos procedimentos obrigatórios na produção de uma amarra é a aplicação da carga de prova, que consiste em seu tracionamento com uma força que varia entre 65% e 80% da sua carga mínima de ruptura (em inglês - *Minimum Breaking Load* - MBL) [12] [80]. A aplicação da carga de prova provoca uma deformação plástica na superfície de contato entre os elos, criando uma região de formato elíptico com tamanho típico aproximado de 1/4 do diâmetro do elo [12]. A combinação de elevadas pré-tensões (tão altas como 15% da MBL) nas amarras utilizadas em águas profundas e ultraprofundas, a superfície de contato elíptica gerada na carga de prova e as deficientes articulações do *fairlead* (sistema responsável por direcionar a amarra, vide Figura 3.14) ou do escovém aumentam, de forma significativa, a força de atrito entre os elos, e, como consequência, eles ficam impedidos de rolares entre si quando rotações são impostas a um dos elos, forçando o elo livre a fletir [11] [12] [79] [13] [14] [16]. Consequentemente, nessas condições, as forças transversais e momentos fletores fora do plano aplicados são equilibrados pela força de atrito espalhada por toda a zona de contato entre os elos (vide Figura 3.13(b)) [11] [12] [79] [13] [14] [16].

As oscilações da embarcação promovidas pelas ondas do mar são responsáveis pela ativação do mecanismo da flexão fora do plano de forma cíclica, podendo levar à ruptura do 1º elo livre por fadiga OPB [12]. Como pode ser observado na Figura 3.15, as localizações das trincas por fadiga, provocadas por tração e por OPB, ocorrem em locais diferentes, fato que auxilia na distinção preliminar entre os dois tipos de mecanismos quando um elo falha por fadiga [13] [14] [16].



Figura 3.14: *Fairleads* do FPSO P-50 da Petrobras.



(a) Trincas iniciadas pela fadiga por tração

(b) Trincas iniciadas pela fadiga por OPB

Figura 3.15: Locais de iniciação das trincas no elo devido à fadiga por: (a) tração e (b) OPB. Adaptado de [13].

3.5.2 Estado da Arte Sobre Mecanismo OPB

No ano de 2005, Melis, Jean e Vargas [14], publicaram um artigo explicando o fenômeno da fadiga OPB nos elos e diferenciando-o da fadiga tradicional por tração. O manuscrito apresenta detalhes de um programa experimental utilizado para avaliar o fenômeno da flexão fora do plano em 4 tipos diferentes de amarras: **i)** 81 mm de diâmetro, com malhete e grau R3S; **ii)** 107 mm de diâmetro, sem malhete e grau R3; **iii)** 124 mm de diâmetro, sem malhete e grau R4; e **iv)** 146 mm de diâmetro, sem malhete e grau R4. Além dos diversos aspectos inerentes às amarras, diferentes níveis de pré-tensão nas correntes e de força na sapata foram utilizados nos ensaios. Por fim, as tensões e os ângulos entre elos causados pelo fenômeno OPB foram analisados. A Figura 3.16 mostra um esquema do dispositivo utilizado nos ensaios.

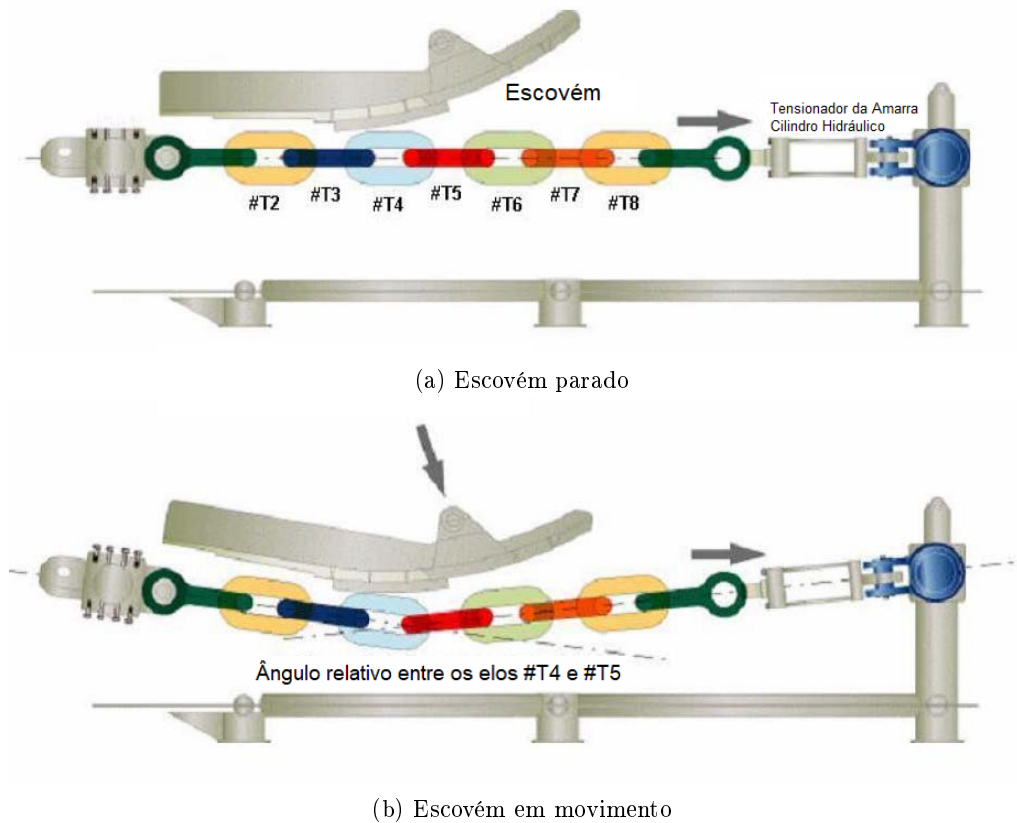


Figura 3.16: Esquema do dispositivo utilizado por Melis, Jean e Vargas [14]: (a) escovém parado e (b) escovém em movimento. Adaptado de [14].

Vargas e Jean [16] escreveram um artigo no ano de 2005 mostrando a física envolvida no mecanismo OPB simulado nos experimentos descritos no trabalho de Melis, Jean e Vargas [14]. Para isso, equações analíticas foram propostas e simulações numéricas em elementos finitos foram realizadas. Fatores como a pré-tensão, o coeficiente de atrito e o deslocamento do escovém foram avaliados em relação aos ângulos entre elos observados e às tensões geradas.

Também no ano de 2005, Jean, Goessens e L'Hostis [12] publicaram um artigo que continha alguns dos resultados obtidos em [14] e [16]. Além disso, o texto também expõe uma formulação analítica para calcular a tensão de flexão em função do ângulo do escovém. Ao final do trabalho, foi apresentado um dispositivo chamado braço biela (em inglês - *Rod Connecting Arm* - RCA), equipamento utilizado na boia da FPSO Girassol para reduzir as tensões causadas pela flexão fora do plano. A Figura 3.17 apresenta o RCA mencionado anteriormente.

Rampi e Vargas [19] deram prosseguimento aos trabalhos [12], [14] e [16] e também utilizaram o aparato experimental apresentado na Figura 3.16 para realizarem os primeiros ensaios de fadiga OPB em amarras. Diferentemente dos ensaios anteriores, apenas amarras com 40 mm de diâmetro, com malhete e grau R3 foram usadas. Destaca-se também que foram empregados 2 tipos distintos de escovéns (curvo e reto) e que, em todos os ensaios, as correntes foram expostas à água salgada artificial. Apenas 5 ensaios foram realizados: 3 com escovém curvo (falhas com 139.500, 102.700 e 609.500 ciclos) e 2 com escovém reto (ensaios interrompidos com 1 milhão e 1,5 milhão de ciclos).



Figura 3.17: Desenho do RCA utilizado na boia da FPSO Girassol [12].

O artigo publicado por Lassen, Storvoll e Bech no ano de 2009 [81] apresenta um estudo numérico e experimental acerca do fenômeno de fadiga OPB. As amarras consideradas no trabalho tinham 125 mm de diâmetro, não possuíam malhete e eram do grau R3. Do ponto de vista numérico, os autores utilizaram simulações em elementos finitos principalmente para encontrarem os fatores de concentração de tensão nos pontos críticos, as tensões causadas pela flexão fora do plano e também os ângulos entre elos. Os ensaios experimentais auxiliaram os pesquisadores na calibração das simulações numéricas. O aparato experimental utilizado nessa pesquisa é mostrado na Figura 3.18.

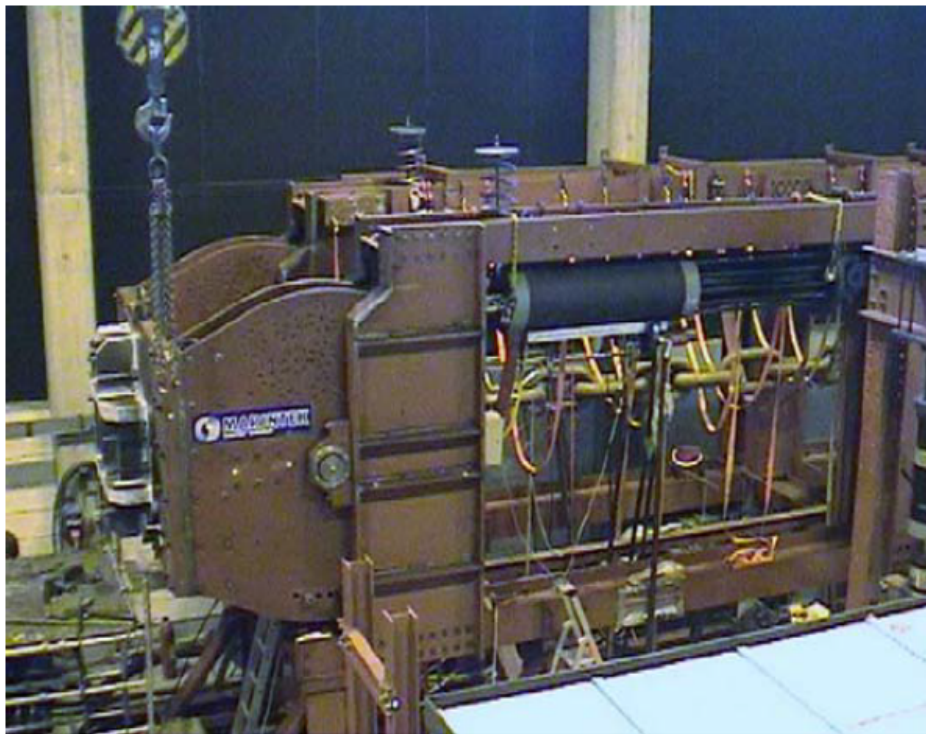


Figura 3.18: Aparato experimental utilizado por Lassen, Storvoll e Bech [81].

Por vezes, a empresa classificadora DNV GL (*Det Norske Veritas Germanischer Lloyd*) em associação com seus clientes cria projetos chamados de JIP's (*Joint Industry Project*) com a finalidade de desenvolver novas soluções, normas e práticas recomendadas na solução de problemas das indústrias de energia, petróleo & gás e marítima [82]. Dada a importância do fenômeno OPB, um JIP que contava com a participação de 26 empresas foi criado no ano de 2007, visando entender melhor tal fenômeno e propor novas recomendações relativas a projetos de linhas de ancoragem [13] [83] [84]. Os principais resultados alcançados e metodologias empregadas são apresentados em [13], [83] e [84]. Pode-se dizer que o artigo [13] é um resumo dos artigos [83] e [84]. Examinando os 3 trabalhos, o leitor encontrará os seguintes assuntos: **i)** metodologia utilizada nos testes de fadiga; **ii)** ensaios quase estáticos; **iii)** simulações numéricas via elementos finitos; **iv)** cálculo de fatores de concentração de tensão baseados em parâmetros diversos (e.g., diâmetro do elo, pré-tensão e ângulo entre elos); e **v)** recomendações para projetos de linha de ancoragem. Por fim, destaca-se que, nos ensaios experimentais apresentados, o elo intermediário de uma amarra pré-tensionada foi submetido a um deslocamento transversal completamente reverso, provocando uma flexão fora do plano em seus elos adjacentes (vide Figura 3.19).

A dissertação de mestrado defendida por Calf [18] apresenta uma revisão dos conceitos de fadiga multiaxial e dos aspectos relacionados ao mecanismo OPB. Após realizar análises em elementos finitos de condições de amarras submetidas à flexão fora do plano, o autor faz a previsão da vida em fadiga dos componentes utilizando diversos modelos multiaxiais de plano crítico, sendo que as vidas previstas pelo modelo de Wang e Brown foram as mais conservativas, ou seja, apresentaram o maior dano acumulado.



(a) Máquina de ensaio para amarras menores



(b) Máquina de ensaio para amarras maiores (2 baías independentes)

Figura 3.19: Máquinas usadas no JIP: (a) amarras menores e (b) amarras maiores [13].

Em 2017, Luo e Heyl [85] redigiram um artigo avaliando a influência da roldana do *fairlead* nas tensões provocado pelo mecanismo da flexão fora do plano. De forma majoritária, os estudos anteriores somente levaram em consideração o comportamento dos elos adjacentes, desprezando o efeito da roldana do *fairlead*. O estudo considerou uma roldana do *fairlead* com 7 bolsões e uma amarra com 168 mm de diâmetro, sem malhete e de Grau R4S. Os resultados encontrados mostraram que o primeiro elo livre capaz de sofrer flexão fora do plano é aquele que apresenta as maiores amplitudes de tensão ao longo do tempo. Além disso, foi mostrado também que os elos que estiverem completamente acomodados dentro dos bolsões também estão sujeitos às variações de tensão provocadas pelo mecanismo OPB, comparáveis àquelas encontradas no elo livre.

O artigo publicado por Mamiya *et al.* [17] apresenta o aparato experimental desenvolvido na Universidade de Brasília para a realização de ensaios de fadiga em amarras em escala reduzida sujeitas à flexão fora do plano. Em cada ensaio, a amarra era pré-tensionada e o mecanismo OPB era induzido nos elos adjacentes ao elo central, que, por sua vez, sofriam deslocamentos estritamente positivos impostos por um atuador hidráulico controlado por uma máquina de ensaio de fadiga. Foram realizados 8 testes sob condições de carregamentos diferentes. As amarras utilizadas foram fabricadas em aço naval U2 temperado e revenido, possuíam diâmetro de 19,05 mm e tinham malhetes. Uma formulação analítica foi usada para a obtenção das tensões normais causadas pela flexão fora do plano e pela tração dos elos. Ensaios em corpos de prova cilíndricos oxidados serviram como base para a calibração dos parâmetros usados no modelo de fadiga de SWT. Por fim, as vidas em fadiga previstas de todas as amarras ensaiadas de acordo com a metodologia exposta ficaram dentro de uma banda de fator 3. A Figura 3.20 ilustra, de forma esquemática, o aparato experimental utilizado.

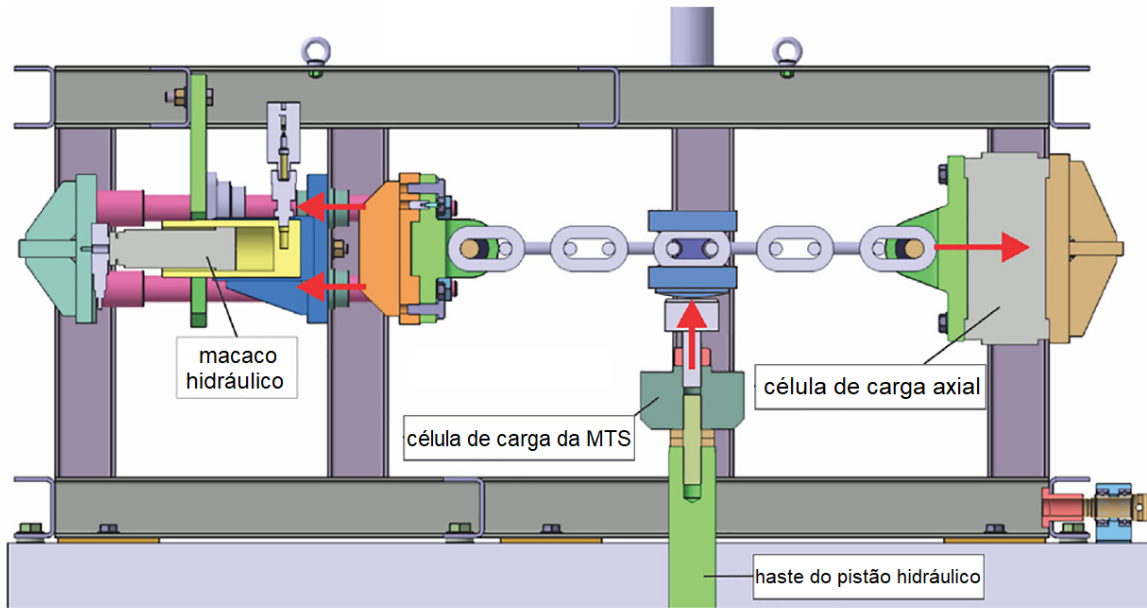


Figura 3.20: Esquema do aparato experimental desenvolvido na Universidade de Brasília para a realização de ensaios de fadiga por flexão fora do plano em amarras.

3.5.3 Procedimento Experimental

Com o intuito de observar o comportamento à fadiga das amarras de plataformas tipo FPSO, principalmente na presença do mecanismo da flexão fora do plano (OPB), desenvolveu-se um aparato experimental na Universidade de Brasília capaz de reproduzir tal efeito, contudo, em escala reduzida. Assim, o mesmo aparato experimental apresentado na Figura 3.20 também foi utilizado, no presente trabalho, para estudar a influência da flexão fora do plano na vida em fadiga de amarras fabricadas em aço *offshore* grau R4 com os mesmos tratamentos de têmpera e revenido adotados nos corpos de prova padrão descritos na Seção 3.4. A Figura 3.21 (a) apresenta uma das amarras utilizadas nos ensaios de fadiga por flexão fora do plano. Todas as correntes possuíam 9 elos com diâmetro de 19,05 mm cada, sendo que a geometria de um elo pode ser vista na Figura 3.21 (b). Para maiores detalhes acerca do aparato e do procedimento experimental, consulte o artigo publicado por Mamiya *et al.* [17].



Figura 3.21: (a) Exemplo de amarra utilizada nos ensaios e (b) geometria típica dos elos.

Resumidamente, o procedimento experimental adotado no ensaio de fadiga por flexão fora do plano das amarras consistiu nos seguintes passos: **i)** a amarra foi fixada no dispositivo por um

sistema composto por pinos e flanges; **ii**) uma pré-carga (F_{H0}) foi aplicada através de um macaco hidráulico; **iii**) deslocamentos cíclicos positivos ($V_{max} > V_{min} > 0$) foram impostos ao elo central da amarra com o auxílio de uma máquina universal de ensaio mecânico MTS 322 com atuador hidráulico. Dessa forma, os elos adjacentes ao elo central ficaram impedidos de rotacionarem livremente, e, conseqüentemente, puderam experimentar severas flexões fora do plano. A Figura 3.22 mostra um esquema do ensaio de flexão fora do plano das amarras descrito. Para esse tipo de ensaio, todas as falhas foram observadas na região curva de um dos elos adjacentes ao elo central, como pode ser visto na Figura 3.23. As amarras que não falharam antes dos 10^6 ciclos foram classificadas como *run-outs*.

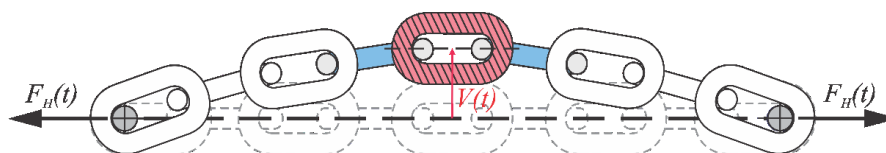
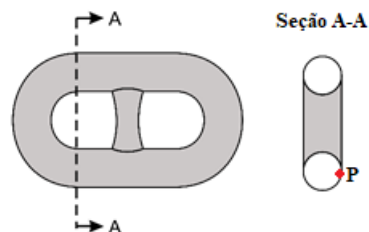


Figura 3.22: Esquema do ensaio de fadiga por flexão fora do plano das amarras.



(a) Falha de uma da amarra por OPB



(b) Posição do ponto crítico

Figura 3.23: (a) Falha de uma amarra por OPB e (b) posição do ponto crítico.

3.5.4 Cálculo das Tensões Críticas

A partir do diagrama de corpo livre apresentado na Figura 3.24, Mamiya *et al.* [17] propuseram uma formulação analítica para determinar as tensões no ponto crítico da amarra. A análise partiu do princípio que as forças axiais (F_H) e transversais (F_V) produzem binários que não se equilibram, e que os pinos que prendem as amarras não conseguem transmitir momento, gerando, conseqüentemente, um momento fletor (M_F), que pode ser calculado através da Equação 3.40.

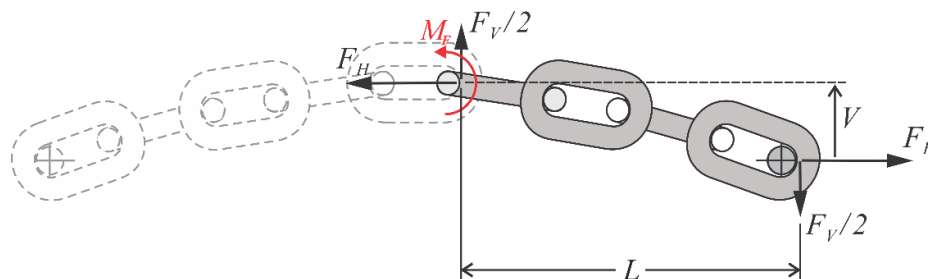


Figura 3.24: Diagrama de corpo livre de uma amarra ensaiada em fadiga por flexão fora do plano.

$$M_F = \frac{F_V}{2} L - F_H V \quad (3.40)$$

Nesse problema, é observada uma tensão normal devida à força axial, F_H , (Equação 3.41) e uma tensão normal devida ao momento fletor, M_F , (Equação 3.42). Sendo assim, a tensão normal resultante no ponto crítico é dada pela Equação 3.43.

$$\sigma_{Axial} = C_\alpha \frac{2 F_H}{\pi d^2} \quad (3.41)$$

$$\sigma_{OPB} = \frac{16 L}{\pi d^3} \left(\frac{F_V}{2} - F_H \frac{V}{L} \right) \quad (3.42)$$

$$\sigma_{Resultante} = \sigma_{Axial} + \sigma_{OPB} = C_\alpha \frac{2 F_H}{\pi d^2} + \frac{16 L}{\pi d^3} \left(\frac{F_V}{2} - F_H \frac{V}{L} \right) \quad (3.43)$$

Nas Equações anteriores, d é o diâmetro do elo (19,05 mm) e C_α é um fator de correção geométrico, que é dado pela razão entre a tensão última do material e a tensão axial no ponto crítico do elo quando a MBL (353 kN) é aplicada. Para o conjunto de amarras avaliado, $C_\alpha = 1,435$.

3.5.5 Dados Experimentais

Seguindo o procedimento experimental descrito na Subseção 3.5.3, foram realizados 8 ensaios em amarras. A Tabela 3.6 apresenta todos os dados experimentais e vidas estimadas seguindo a abordagem para a previsão de vida em fadiga discutida neste capítulo para as amarras ensaiadas. Destaca-se que as frequências (f) utilizadas nos experimentos foram maiores que aquelas observadas em condições reais (0,1 a 0,2 Hz), pois, somente dessa forma, os ensaios poderiam ser realizados dentro de um período de tempo adequado para a finalização deste trabalho [13] [84] [86].

Tabela 3.6: Dados experimentais e vidas estimadas para as amarras ensaiadas.

Amarra	F_{H0} [kN]	F_{Hmin} [kN]	F_{Hmax} [kN]	F_{Vmin} [kN]	F_{Vmax} [kN]	V_{min} [mm]	V_{max} [mm]	f [Hz]	$N_{Obs.}$ [ciclos]	$N_{Orig.}$ [ciclos]	$N_{Prop.}$ [ciclos]	$\frac{N_{Orig.}}{N_{Obs.}}$	$\frac{N_{Prop.}}{N_{Obs.}}$
R4A01	52,0	55,2	109,9	3,0	24,0	12,9	26,3	1	34.323	30.638	30.638	0,89	0,89
R4A02	50,4	55,3	109,5	3,3	24,3	16,6	30,1	1	16.409	99.219	99.219	6,05	6,05
R4A03	41,1	45,9	71,0	2,8	11,3	10,8	19,2	1,5	$> 10^6$	$> 10^6$	$> 10^6$	1,00	1,00
R4A04	40,9	45,8	81,0	2,4	14,9	13,8	23,8	1	149.698	$> 10^6$	$> 10^6$	∞	∞
R4A05	41,3	46,0	90,8	1,8	18,4	11,8	24,3	1	89.332	78.176	78.176	0,88	0,88
R4A06	41,2	45,4	99,6	2,2	21,3	15,3	29,1	1	79.321	176.802	176.802	2,23	2,23
R4A07	41,4	45,3	109,8	2,4	25,9	18,0	33,0	1	57.591	66.793	66.793	1,16	1,16
R4A08	40,8	45,6	75,8	3,3	13,5	12,2	21,3	1,5	$> 10^6$	$> 10^6$	$> 10^6$	1,00	1,00

Nota: F_{H0} é a pré-carga, F_{Hmin} é a força horizontal mínima, F_{Hmax} é a força horizontal máxima, F_{Vmin} é a força vertical mínima, F_{Vmax} é a força vertical máxima, V_{min} é o deslocamento transversal mínimo, V_{max} é o deslocamento transversal máximo, f é a frequência do ensaio, $N_{Obs.}$ é a vida observada experimentalmente, $N_{Orig.}$ é a vida estimada pela formulação original e $N_{Prop.}$ é a vida estimada pela função proposta.

3.6 Resultados e Discussões

Os resultados apresentados neste capítulo foram previstos de acordo com a função proposta no Capítulo 2 (usando $S_{\pm\frac{1}{3}} = 7,08$ MPa e $S_0 = 12,97$ MPa) e também com a formulação original de Lemaitre (i.e., $S_{\pm\frac{1}{3}} = S_0 = 7,08$ MPa). Nos gráficos, as setas para a direita (\rightarrow) e para cima (\uparrow) representam, respectivamente, que a vida observada e estimada para um dado ensaio foi considerada como *run-out*, ou seja, a falha não foi observada até 1×10^6 ciclos. A Figura 3.25 apresenta um gráfico de vidas previstas *versus* vidas observadas para os ensaios tipo tração-compressão. De acordo com as previsões, todos os ensaios se encontram dentro de uma banda de fator 2 para as duas formulações. Destaca-se que, para os ensaios classificados como *run-outs* experimentais (R4 OXU 11, R4 OXU 12 e R4 OXU 13), as vidas estimadas pelas duas formulações avaliadas também foram superiores a 1×10^6 ciclos.

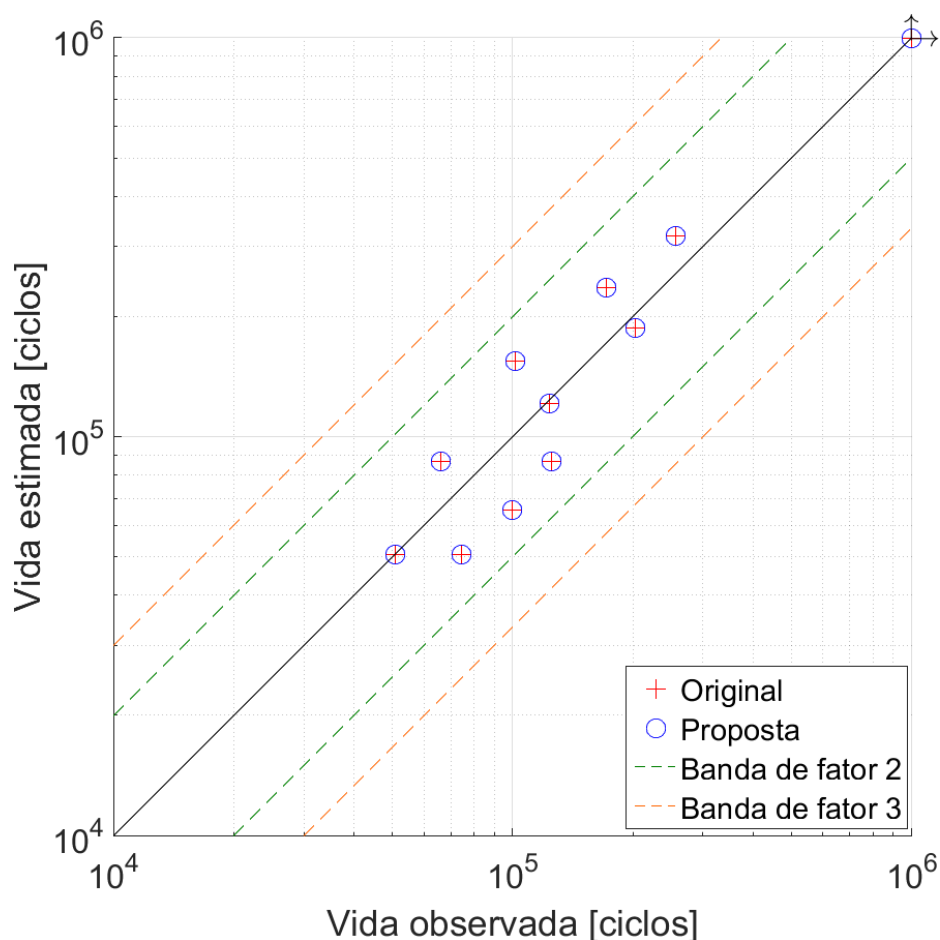


Figura 3.25: Vidas previstas para o aço grau R4 nos ensaios tipo tração-compressão.

As vidas previstas para os 5 ensaios torcionais são apresentadas na Figura 3.26. Em relação à formulação original, nenhuma vida prevista está dentro da banda de fator 2 e 40% das previsões situam-se no interior da banda de fator 3. De acordo com os resultados estimados pela função proposta, 100% deles pertencem à banda de fator 2. Para esse tipo de carregamento, fica evidente a melhoria proporcionada pela função proposta.

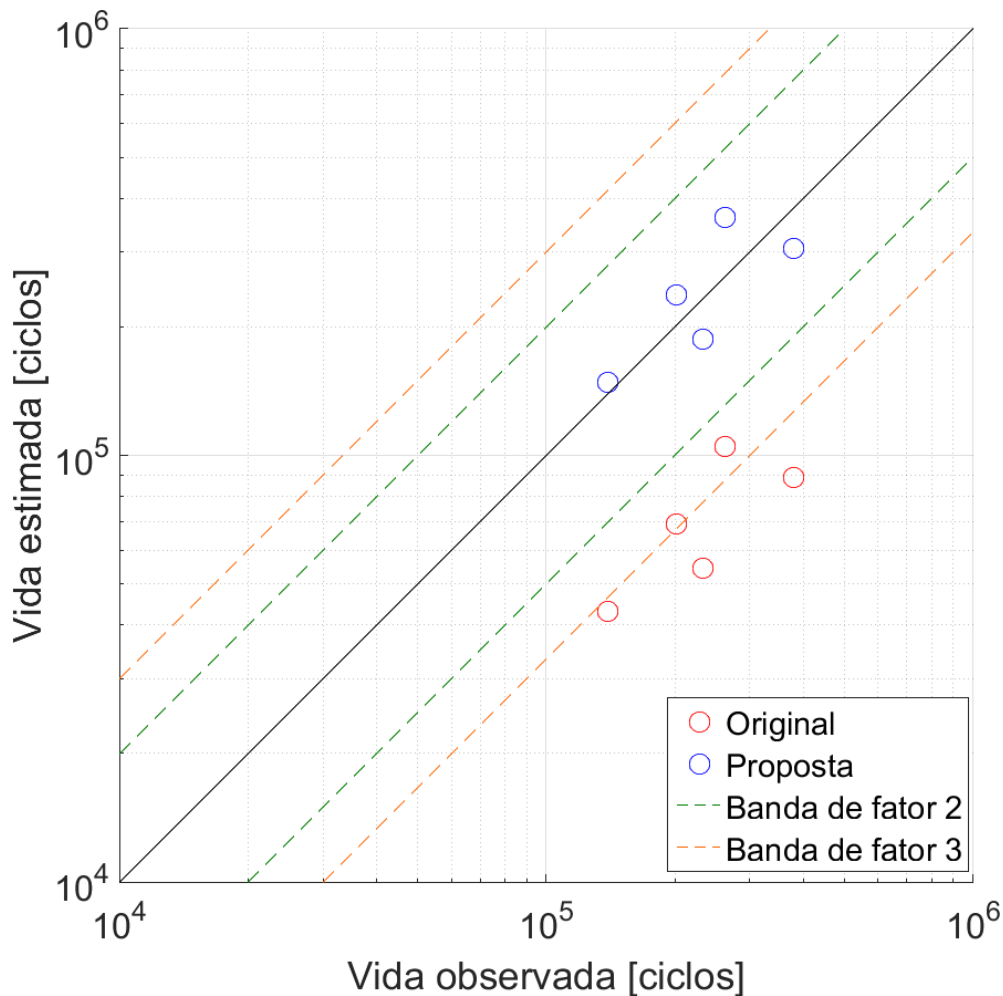


Figura 3.26: Vidas previstas para o aço grau R4 nos ensaios torcionais.

As vidas estimadas para os ensaios multiaxiais proporcionais são exibidas na Figura 3.27. A função proposta foi capaz de prever 100% dos resultados dentro de uma banda de fator 2. Dentre as previsões feitas pela formulação original, 60% delas se encontram dentro das bandas de fator 2 e 3, ou seja, a maior banda não foi capaz de incorporar nenhum resultado adicional. Percebe-se aqui que a notável diferença entre as formulações nos casos em que $\lambda_\sigma > 1,00$. Além disso, destaca-se que, mais uma vez, a formulação proposta apresentou uma expressiva melhora nas vidas estimadas nos casos multiaxiais proporcionais.

Para os 6 ensaios multiaxiais não proporcionais circulares (vide Figura 3.28), dentre os resultados previstos pelo modelo original, 66,67% estão dentro de uma banda de fator 2 e 100,00% se encontram no interior de uma banda de fator 3. Em relação às vidas previstas pela função proposta, enquanto a banda de fator 2 contempla 50,00% dos resultados, a banda de fator 3 abrange 66,67% das vidas estimadas. Para esse tipo de trajetória, a função proposta, quando comparada com a formulação original, obteve estimativas menos satisfatórias.

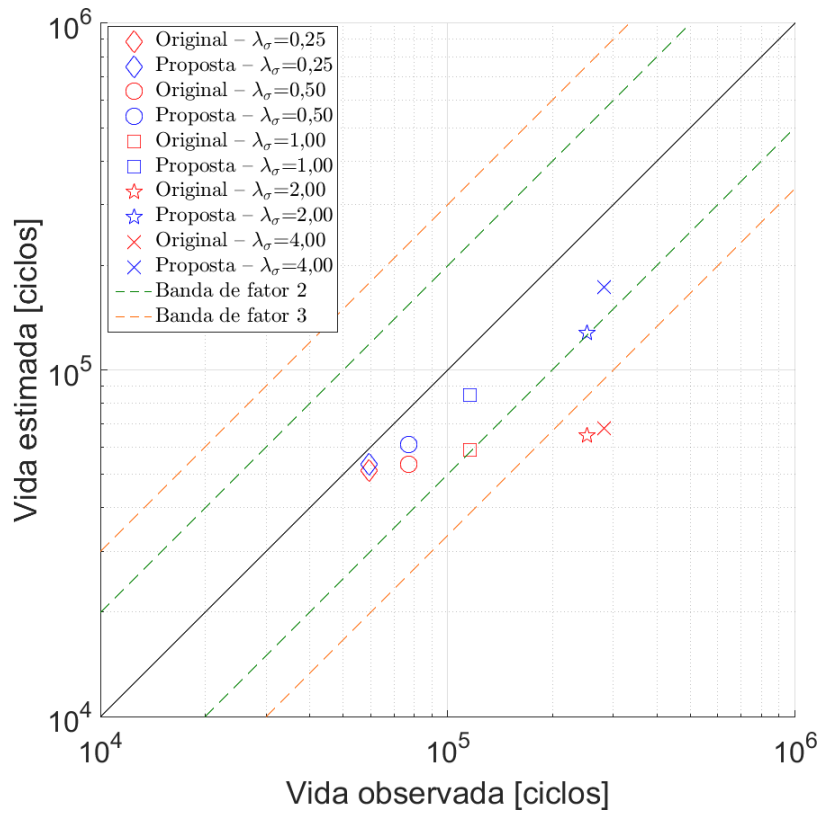


Figura 3.27: Vidas previstas para o aço grau R4 nos ensaios multiaxiais proporcionais.

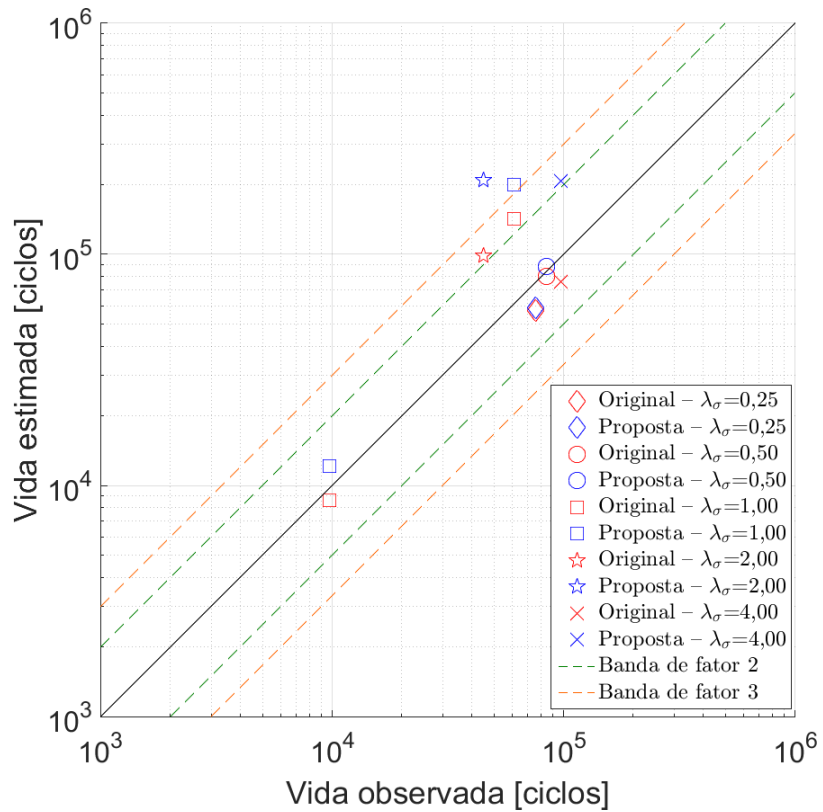


Figura 3.28: Vidas previstas para o aço grau R4 nos ensaios multiaxiais não proporcionais circulares.

A Figura 3.29 mostra as vidas estimadas para os ensaios das amarras. Como era de se esperar, as duas formulações apresentaram os mesmos resultados, pois concernem a ensaios do tipo tração-tração ($\eta = \frac{1}{3}$). 62,50 % dos resultados localizam-se no interior da banda de fator 2, enquanto 75,00 % estão dentro da banda de fator 3. Para os *run-outs* experimentais (R4A03 e R4A08), as formulações avaliadas também previram vidas superiores a 1×10^6 ciclos. Entretanto, para o ensaio da amarra R4A04, as vidas estimadas pelas duas formulações analisadas foram superiores a 1×10^6 ciclos, sendo que a vida observada experimentalmente foi de 149.698 ciclos. Além disso, destaca-se que as formulações foram otimistas em relação ao ensaio da amarra R4A02.

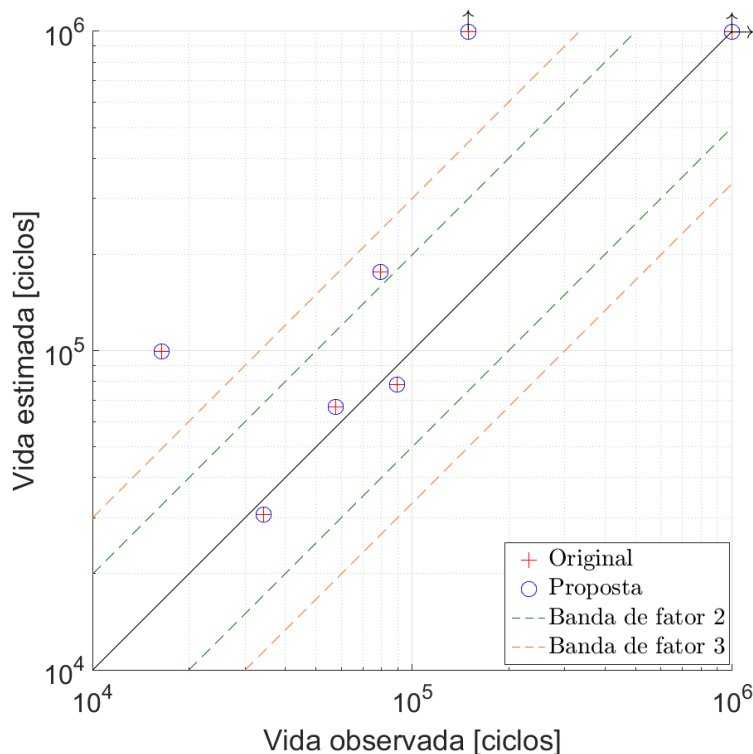


Figura 3.29: Vidas previstas para as amarras fabricadas em aço grau R4.

A Tabela 3.7 apresenta uma compilação das vidas previstas para as duas formulações avaliadas em relação às bandas de fator 2 e 3 para todos os corpos de prova em aço grau R4 avaliados.

Tabela 3.7: Compilação das vidas previstas em relação às bandas de fator 2 e 3 dos corpos de prova em aço grau R4.

Ensaio	Banda de fator	Original	Proposta
Tração-compressão	2	100,00%	100,00%
	3	100,00%	100,00%
Torção	2	0,00%	100,00%
	3	40,00%	100,00%
Proporcional	2	60,00%	100,00%
	3	60,00%	100,00%
Não proporcional - circular	2	66,67%	50,00%
	3	100,00%	66,67%
Amarras	2	62,50%	62,50%
	3	75,00%	75,00%

3.7 Conclusões

Primeiramente, pode-se afirmar que a utilização do modelo de duas escalas no presente capítulo foi primordial na previsão da vida em fadiga dos corpos de prova de R4, visto que, para cada um deles, a deformação plástica acumulada observada na macroescala era nula ou desprezível. Em relação às vidas previstas para cada tipo de ensaio, pode-se dizer que: **Tração-compressão** - 100% dos resultados encontraram-se dentro de uma banda de fator 2; **Torcionais** - considerando uma banda de fator 2, enquanto 100% dos resultados previstos utilizando a função proposta se localizaram dentro da banda, nem uma das vidas previstas pelo modelo original esteve dentro da mesma banda; **Multiaxiais proporcionais** - a função proposta foi capaz de prever todas as vidas dentro de uma banda de fator 2, enquanto a formulação original foi capaz de prever apenas 60 % dentro dessa banda; **Multiaxiais não proporcionais circulares** - enquanto 100% dos resultados estimados pelo modelo original se encontraram no interior de uma banda de fator 3, somente 66,67% das vidas estimadas pelo modelo aperfeiçoado estiveram dentro da mesma banda; e **Amarras** - as duas formulações apresentaram os mesmos resultados: 75,00% das vidas previstas dentro de uma banda de fator 3.

As vidas previstas pelo modelo aperfeiçoado somente foram piores nos casos multiaxiais não proporcionais, levantando a suspeita de um possível encruamento não proporcional do aço *offshore* grau R4. Além disso, para esse tipo de carregamento, observou-se que o ensaio com $\lambda_\sigma = 0,25$ apresentou uma vida maior do que aquele com $\lambda_\sigma = 4,00$, fato que, baseado nos valores calibrados para os denominadores de dano para esse aço, contrariou a perspectiva de que ensaios com carregamentos em que a influência da tensão normal é maior apresentariam vidas menores do que aqueles cuja influência da tensão cisalhante é maior. Essa observação pode indicar que o método para determinação da tensão equivalente não é o mais adequado ou até mesmo que um desses ensaios representaria uma dispersão experimental.

A utilização da função proposta no presente relatório melhorou as previsões das vidas em fadiga avaliadas nos ensaios puramente torcionais e multiaxiais proporcionais. Para o aço grau R4 estudado, a diferença entre os denominadores de dano foi considerável ($S_{\pm\frac{1}{3}} = 7,08$ MPa e $S_0 = 12,97$ MPa), conseqüentemente, os valores previstos pela função denominadora de dano apresentada, quando comparados ao valor de $S_{\pm\frac{1}{3}}$, foram mais impactantes para as simulações em que $\lambda_\sigma > 1$.

Em relação às vidas previstas para os ensaios das amarras, o modelo previu 75% dos casos dentro de uma banda de fator 3. Destaca-se que a formulação utilizada para a obtenção das tensões foi baseada em uma análise simplificada do problema ensaiado, desprezando-se, por exemplo, possíveis tensões cisalhantes cíclicas. De qualquer forma, levando-se em consideração a complexidade inerente ao problema da flexão fora do plano das amarras, considera-se que, em um nível de engenharia, as estimativas das vidas em fadiga alcançadas pelo modelo foram satisfatórias.

A curva de encruamento cíclico do material é um elemento essencial no tipo de modelo estudado. Sendo assim, é fundamental a obtenção dessa curva experimentalmente para verificar o quão fidedigna é a curva calculada através do método apresentado por Li, Zhang e Li [78], e, consequen-

temente, verificar a influência dela nas previsões das vidas em fadiga dos ensaios investigados.

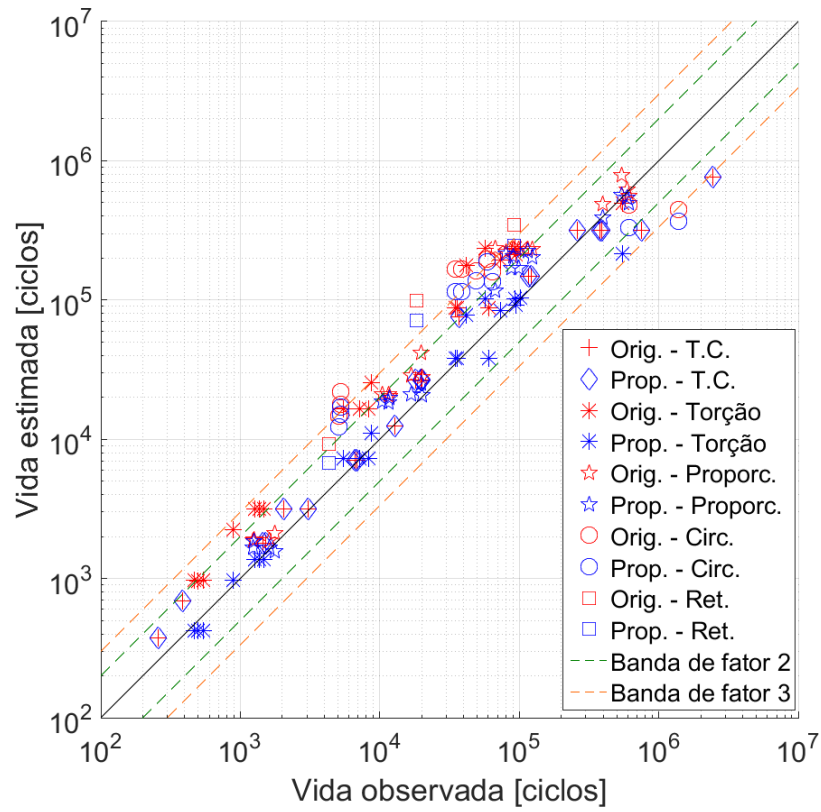
Virtualmente, o número de parâmetros a serem calibrados no modelo de dano da microescala, apresentado neste capítulo, é igual ao encontrado na macroescala, ou seja, 8 ($\sigma'_{y0}{}^\mu$, $H^{k\mu}$, M^μ , Γ^μ , D_c^μ , $S_{\pm\frac{1}{3}}^\mu$, S_0^μ e s^μ). Entretanto, considerando que vários desses parâmetros sejam iguais aos da macroescala e que a tensão de escoamento inicial da microescala possa ser assumida como sendo o limite de resistência à fadiga (σ_f), nenhum parâmetro da microescala precisa ser calibrado. Por fim, no modelo de dano para ensaios de fadiga sob controle de tensão apresentado, apenas os 8 parâmetros da macroescala precisam ser calibrados (σ'_{y0} , H^k , M , Γ , D_c , $S_{\pm\frac{1}{3}}$, S_0 e s). Para calibrar as constantes de dano da abordagem apresentada neste capítulo, é necessária a utilização de resultados de ensaios de fadiga axiais com R=-1 e torcionais com R=-1, todos sob controle de tensão.

Capítulo 4

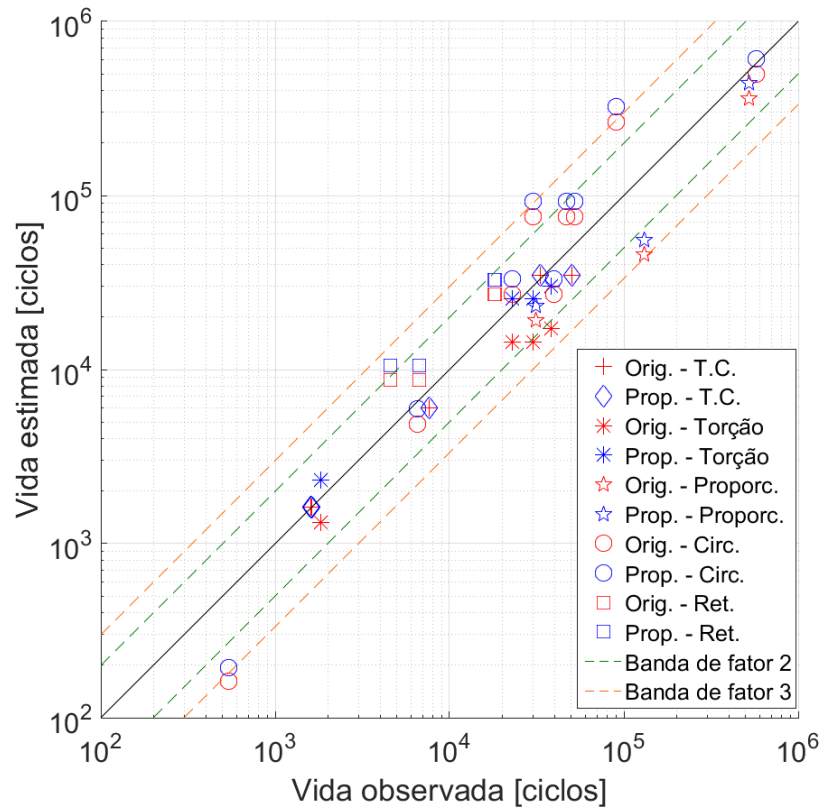
Considerações Finais e Sugestões para Trabalhos Futuros

4.1 Considerações Finais

Em uma primeira etapa, foi desenvolvida uma abordagem de dano incremental capaz de ser aplicada em problemas de fadiga de baixo número de ciclos, considerando um aprimoramento da lei de evolução do dano de Lemaitre e o endurecimento cinemático de Desmorat. A modificação na lei de evolução de dano de Lemaitre, através de uma nova função denominadora de dano, foi capaz de regularizar a evolução do dano, independentemente do estado de tensão observado. Além disso, mostrou-se a manutenção da consistência termodinâmica do modelo através da dissipação mecânica positiva. A partir de dados experimentais obtidos da literatura, os aços SAE 1045 e S460N foram avaliados de acordo com a abordagem em questão. Para o aço SAE 1045, os resultados mostraram que, para todas as trajetórias avaliadas, as vidas estimadas com o auxílio da função proposta foram melhores do que aquelas previstas pela formulação original. Em relação ao aço S460N, as vidas estimadas pela função proposta só foram piores que aquelas previstas pelo modelo original nos casos multiaxiais não proporcionais. Por fim, pode-se dizer que, para as trajetórias axiais, torcionais e multiaxiais proporcionais, a função proposta conseguiu incorporar mais 95,00% dos resultados dentro de uma banda de dispersão de fator 3 para os dois materiais avaliados de acordo com essa abordagem. Como desvantagem da formulação proposta, observou-se os ganhos não tão evidentes da função proposta para as previsões de vida sob carregamentos multiaxiais não proporcionais no caso do aço S460N. Esse fato pode ter ocorrido devido à não captura dos efeitos não proporcionais no encruamento cinemático do material através do modelo de Desmorat. A Figura 4.1 apresenta os gráficos do tipo vida estimada *versus* vida observada para todos os resultados obtidos de acordo com a primeira modelagem.



(a) Vida estimada *versus* vida observada para todos os espécimes fabricados em aço SAE1045



(b) Vida estimada *versus* vida observada para todos os espécimes fabricados em aço S460N

Figura 4.1: Gráficos do tipo vida estimada *versus* vida observada para todos os espécimes fabricados em aço: (a) SAE1045 e (b) S460N.

Em uma segunda etapa, um modelo em duas escalas foi desenvolvido para a aplicação em problemas de fadiga de alto número de ciclos. Foi utilizada a lei de localização de Eshelby-Kröner, que relaciona o campo de deformação total da macroescala, com o campo de deformação total da microescala. Nesse caso, a formulação em duas escalas foi testada em dados experimentais gerados para o aço de alta resistência *offshore* de grau R4. Na fabricação dos corpos de prova, considerou-se o mesmo acabamento superficial das amarras, ou seja, superfície oxidada, o que causou uma significativa redução na vida dos corpos de prova. Para os ensaios em corpos de prova padrão, a formulação desenvolvida foi capaz de prever todas as vidas dentro de uma faixa de dispersão de fator 2, exceto para os ensaios multiaxiais não proporcionais, em que foram observados 66,67% dos resultados dentro de uma banda de fator 3. Por fim, ensaios experimentais sob escala reduzida foram conduzidos em correntes de nove elos fabricadas com o mesmo material dos corpos de prova padrão e sob as mesmas condições superficiais. Através de tais ensaios experimentais, observou-se que a flexão fora do plano (OPB) foi capaz de elevar significativamente os níveis de tensão nos pontos críticos do elo, reduzindo a vida do sistema. Para os ensaios das amarras, a formulação em duas escalas foi aplicada e 75% das vidas estimadas ficaram na faixa de dispersão de fator 3. A Figura 4.2 mostra o gráfico da vida estimada *versus* vida observada para todos os resultados obtidos utilizando-se a formulação em duas escalas.

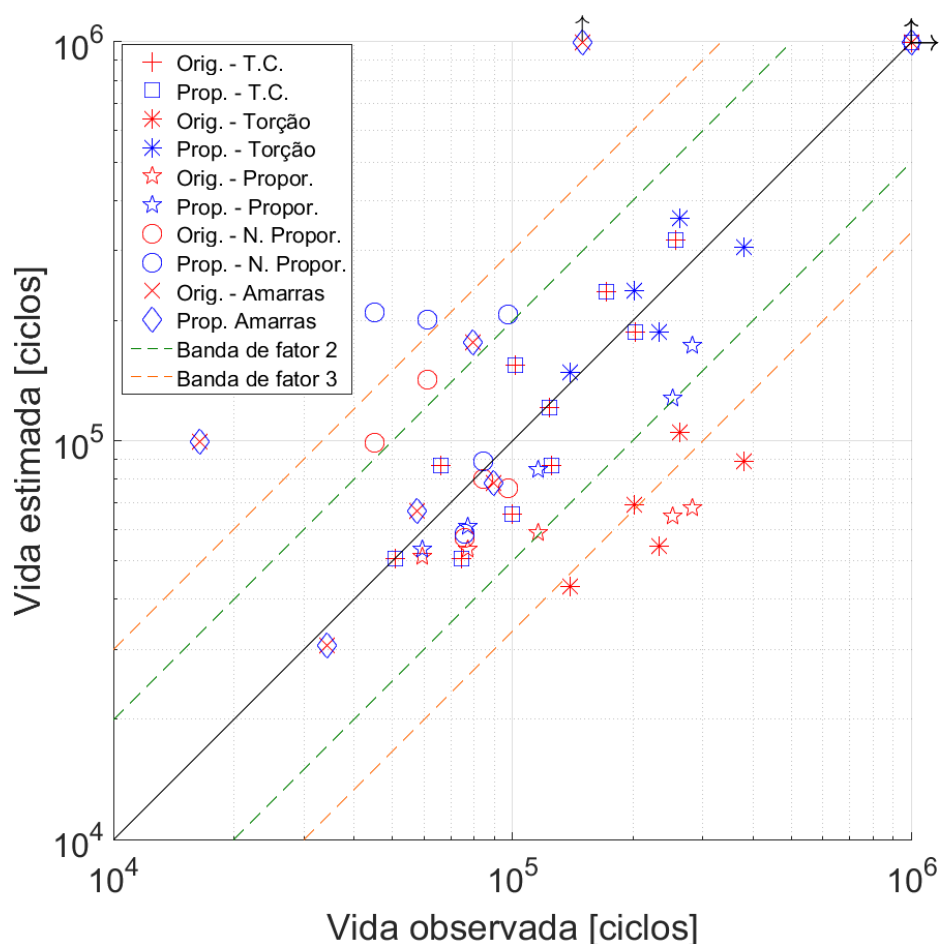


Figura 4.2: Gráfico da vida estimada *versus* vida observada para todos os espécimes fabricados em aço grau R4.

4.2 Sugestões para Trabalhos Futuros

Ao final desta pesquisa, foram observados os seguintes tópicos para a evolução do trabalho desenvolvido:

1. Utilização das duas abordagens apresentadas em condições de carregamentos complexos para que seja possível avaliar a qualidade das vidas estimadas sob tais circunstâncias;
2. Aplicação do modelo em duas escalas em condições reais de carregamento das amarras, que são caracterizadas por um estado multiaxial com amplitudes variáveis;
3. Levando-se em consideração que os resultados previstos para os ensaios multiaxiais não proporcionais não foram tão vantajosos, sugere-se a inclusão de uma outra formulação para o encruamento cinemático que seja capaz de capturar adequadamente o efeito do encruamento não proporcional;
4. Visto que, no presente trabalho, a curva de encruamento cíclico para o aço *offshore* grau R4 foi determinada através de uma formulação aproximada descrita por Li, Zhang e Li [78], que é baseada em propriedades monotônicas, e considerando a sua grande relevância para as abordagens mostradas nesta tese, sugere-se a obtenção dessa curva a partir de ensaios sob controle de deformação em corpos de prova padrão com superfície oxidada;
5. Realização de uma maior quantidade de ensaios em amarras considerando novas combinações de tensão média e alternada, bem como a repetição de alguns ensaios realizados, no sentido de se confirmar as vidas experimentais observadas; e
6. Desenvolvimento de um modelo que seja capaz de obter, de forma precisa, as tensões no ponto crítico das amarras sob efeito da flexão fora do plano. Para isso, sugere-se a realização de simulações numéricas através do Método dos Elementos Finitos e/ou ensaios experimentais com o auxílio de extensômetros.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- 1 PRÉ-SAL PETRÓLEO S.A. *O pré-sal*. Acesso em: 20 de setembro de 2018. Disponível em: <<http://www.presalpetroleo.gov.br>>.
- 2 PEDROSA, O.; CORRÊA, A. *A crise do petróleo e os desafios do pré-sal*. Rio de Janeiro, Brasil: FGV Energia - Caderno Opinião, 2016.
- 3 PETROBRAS. *Pré-sal*. Acesso em: 21 de setembro de 2018. Disponível em: <<http://www.petrobras.com.br/pt/nossas-atividades/areas-de-atuacao/exploracao-e-producao-de-petroleo-e-gas/pre-sal/>>.
- 4 MORAIS, J. M. de. *Petróleo em Águas Profundas : Uma História Tecnológica da Petrobrás na Exploração e Produção Offshore*. Brasília, Brasil: Ipea : Petrobras, 2013. ISBN 9788578111595.
- 5 BEZERRA NETO, H. P. *Notas de Aula da Disciplina Plataformas Marítimas - EPET047*. Alagoas, Brasil: Universidade Federal de Alagoas, Centro de Tecnologia, Engenharia de Petróleo, 2015.
- 6 Noble Denton Europe Limited. *Health & Safety Executive - Research Report 444*. Aberdeen, Escócia, 2006.
- 7 Offshore Magazine. *Mooring Systems for Offshore Floating Installations - Trends and Technology*. Houston, Estados Unidos: Pôster, 2013.
- 8 GORDON, R. B.; BROWN, M. G.; ALLEN, E. M. Mooring integrity management: A state-of-the-art review. In: *Offshore Technology Conference*. Offshore Technology Conference, 2014. Disponível em: <<https://doi.org/10.4043/25134-ms>>.
- 9 MA, K.; DUGGAL, A.; SMEDLEY, P.; L'HOSTIS, D.; SHU, H. A historical review on integrity issues of permanent mooring systems. In: *Offshore Technology Conference*. Offshore Technology Conference, 2013. Disponível em: <<https://doi.org/10.4043/24025-ms>>.
- 10 MAJHI, S.; D'SOUZA, R. Application of lessons learned from field experience to design, installation and maintenance of FPS moorings. In: *Offshore Technology Conference*. Offshore Technology Conference, 2013. Disponível em: <<https://doi.org/10.4043/24181-ms>>.
- 11 BROWN, M.; HALL, T.; MARR, D.; ENGLISH, M.; SNELL, R. Floating production mooring integrity JIP - key findings. In: *Offshore Technology Conference*. Offshore Technology Conference, 2005. Disponível em: <<https://doi.org/10.4043/17499-ms>>.
- 12 JEAN, P.; GOESSENS, K.; L'HOSTIS, D. Failure of chains by bending on deepwater mooring systems. In: *Offshore Technology Conference*. Offshore Technology Conference, 2005. Disponível em: <<https://doi.org/10.4043/17238-ms>>.

- 13 RAMPI, L.; DEWI, F.; VARGAS, P. Chain out of plane bending (OPB) joint industry project (JIP) summary and main results. In: *Offshore Technology Conference*. Offshore Technology Conference, 2015. Disponível em: <<https://doi.org/10.4043/25779-ms>>.
- 14 MELIS, C.; JEAN, P.; VARGAS, P. Out-of-plane bending testing of chain links. In: *24th International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering: Volume 3*. ASME, 2005. Disponível em: <<https://doi.org/10.1115/omae2005-67353>>.
- 15 WICHERS, J. *Guide to Single Point Moorings*. Califórnia, Estados Unidos: CreateSpace Independent Publishing Platform, 2013. ISBN 1482649756.
- 16 VARGAS, P.; JEAN, P. FEA of out-of-plane fatigue mechanism of chain links. In: *24th International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering: Volume 3*. ASME, 2005. Disponível em: <<https://doi.org/10.1115/omae2005-67354>>.
- 17 MAMIYA, E. N.; CASTRO, F. C.; FERREIRA, G. V.; NUNES FILHO, E. L. S. de A.; CANUT, F. A.; NEVES, R. S.; MALCHER, L. Fatigue of mooring chain links subjected to out-of-plane bending: Experiments and modeling. *Engineering Failure Analysis*, v. 100, n. 1, p. 206–213, 2019. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.engfailanal.2019.02.055>>.
- 18 CALF, I. *Multiaxial fatigue criteria for offshore mooring chain links subjected to out-of-plane bending*. Dissertação (Mestrado) — Technische Universiteit Delft, Delft, Holanda, 2015.
- 19 RAMPI, L.; VARGAS, P. Fatigue testing of out-of-plane bending mechanism of chain links. In: *Volume 3: Safety and Reliability; Materials Technology; Douglas Faulkner Symposium on Reliability and Ultimate Strength of Marine Structures*. ASME, 2006. Disponível em: <<https://doi.org/10.1115/omae2006-92488>>.
- 20 SMITH, K. N.; WATSON, P.; TOPPER, T. H. A stress-strain function for the fatigue of metals. *Journal of Materials*, v. 5, n. 4, p. 767–778, 1970.
- 21 BROWN, M. W.; MILLER, K. J. A theory for fatigue failure under multiaxial stress-strain conditions. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*, v. 187, p. 745–755, 1973.
- 22 MATAKE, T. An explanation on fatigue limit under combined stress. *Bulletin of JSME*, Japan Society of Mechanical Engineers, v. 20, n. 141, p. 257–263, 1977. Disponível em: <<https://doi.org/10.1299/jsme1958.20.257>>.
- 23 FATEMI, A.; SOCIE, D. F. A critical plane approach to multiaxial fatigue damage including out-of-phase loading. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials and Structures*, Wiley, v. 11, n. 3, p. 149–165, mar 1988. Disponível em: <<https://doi.org/10.1111/j.1460-2695.1988.tb01169.x>>.
- 24 CROSSLAND, B. Effect of large hydrostatic pressures on the torsional fatigue strength of an alloy steel. In: *Proceedings of the international conference on fatigue of metals*. Londres, Inglaterra: [s.n.], 1956. p. 138–149.
- 25 DAN VANG, K. Sur la résistance à la fatigue des métaux. *Sciences et Techniques de L'armement*, v. 47, p. 429–453, 1973.
- 26 MAMIYA, E. N.; ARAÚJO, J. A. Fatigue limit under multiaxial loadings: on the definition of the equivalent shear stress. *Mechanics Research Communications*, Elsevier BV, v. 29, n. 2-3, p. 141–151, mar 2002. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/s0093-6413\(02\)00239-2](https://doi.org/10.1016/s0093-6413(02)00239-2)>.
- 27 MAMIYA, E. N.; ARAÚJO, J. A.; CASTRO, F. C. Prismatic hull: A new measure of shear stress amplitude in multiaxial high cycle fatigue. *International Journal of Fatigue*, Elsevier BV, v. 31, n. 7, p. 1144–1153, jul 2009. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2008.12.010>>.

- 28 LEMAITRE, J. A continuous damage mechanics model for ductile fracture. *Journal of Engineering Materials and Technology*, ASME International, v. 107, n. 1, p. 83, 1985. Disponível em: <<https://doi.org/10.1115/1.3225775>>.
- 29 MALCHER, L.; MAMIYA, E. N. An improved damage evolution law based on continuum damage mechanics and its dependence on both stress triaxiality and the third invariant. *International Journal of Plasticity*, v. 56, p. 232–261, mai 2014. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2014.01.002>>.
- 30 CASTRO, F.; BEMFICA, C. Calibration and evaluation of the Lemaitre damage model using axial-torsion fatigue tests on five engineering alloys. *Latin American Journal of Solids and Structures*, FapUNIFESP (SciELO), v. 15, n. 10, oct 2018. Disponível em: <<https://doi.org/10.1590/1679-78254340>>.
- 31 LEMAITRE, J.; SERMAGE, J. P.; DESMORAT, R. *International Journal of Fracture*, Springer Nature, v. 97, n. 1/4, p. 67–81, 1999. Disponível em: <<https://doi.org/10.1023/a:1018641414428>>.
- 32 LEMAITRE, J.; DESMORAT, R. *Engineering Damage Mechanics: Ductile, Creep, Fatigue and Brittle Failures*. 1. ed. Berlim, Alemanha: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2005. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/b138882>>.
- 33 GABORIT, P.; DESMORAT, R.; DU TERTRE, A.; PYRE, A. Localization rules for the extension of a HCF two-scale damage model to a lemaitre LCF damage model. In: *The Tenth International Conference on Multiaxial Fatigue & Fracture - ICMFF10*. [S.l.: s.n.], 2013.
- 34 MCCLINTOCK, F. A. A criterion for ductile fracture by the growth of holes. *Journal of Applied Mechanics*, ASME International, v. 35, n. 2, p. 363, 1968. Disponível em: <<https://doi.org/10.1115/1.3601204>>.
- 35 RICE, J. R.; TRACEY, D. M. On the ductile enlargement of voids in triaxial stress fields. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Elsevier BV, v. 17, n. 3, p. 201–217, jun 1969. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/0022-5096\(69\)90033-7](https://doi.org/10.1016/0022-5096(69)90033-7)>.
- 36 LEMAITRE, J. Micro-mechanics of crack initiation. *International Journal of Fracture*, Springer Nature, v. 42, n. 1, p. 87–99, jan 1990. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/bf00018615>>.
- 37 TAYLOR, G. I. Plastic strain in metals. *Journal of the Institute of Metals*, v. 62, p. 307–324, 1938.
- 38 LEMAITRE, J.; DOGHRI, I. Damage 90: a post processor for crack initiation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Elsevier BV, v. 115, n. 3-4, p. 197–232, mai 1994. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/0045-7825\(94\)90060-4](https://doi.org/10.1016/0045-7825(94)90060-4)>.
- 39 LEMAITRE, J.; SERMAGE, J. P. One damage law for different mechanisms. *Computational Mechanics*, Springer Nature, v. 20, n. 1-2, p. 84–88, jul 1997. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s004660050221>>.
- 40 KRÖNER, E. Zur plastischen verformung des vielkristalls. *Acta Metallurgica*, Elsevier BV, v. 9, n. 2, p. 155–161, feb 1961. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/0001-6160\(61\)90060-8](https://doi.org/10.1016/0001-6160(61)90060-8)>.
- 41 ESHELBY, J. D. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, The Royal Society, v. 241, n. 1226, p. 376–396, ago 1957. Disponível em: <<https://doi.org/10.1098/rspa.1957.0133>>.

- 42 LOPES, J. P.; MALCHER, L. Fatigue life estimates under non-proportional loading through continuum damage evolution law. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, Elsevier BV, v. 88, p. 64–73, abr 2017. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2016.12.003>>.
- 43 CHABOCHE, J. L.; ROUSSELIER, G. On the plastic and viscoplastic constitutive equations—part i: Rules developed with internal variable concept. *Journal of Pressure Vessel Technology*, ASME International, v. 105, n. 2, p. 153, 1983. Disponível em: <<https://doi.org/10.1115/1.3264257>>.
- 44 JIANG, Y.; SEHITOGLU, H. Modeling of cyclic ratchetting plasticity, part i: Development of constitutive relations. *Journal of Applied Mechanics*, ASME International, v. 63, n. 3, p. 720, 1996. Disponível em: <<https://doi.org/10.1115/1.2823355>>.
- 45 SOUZA, A. G. de. *Previsão de vida à fadiga através de modelo CDM modificado*. Dissertação (Mestrado) — Universidade de Brasília, Brasília, Brasil, 2018.
- 46 ARAÚJO, L.; FERREIRA, G.; NEVES, R.; MALCHER, L. Fatigue analysis for the aluminum alloy 7050-t7451 performed by a two scale continuum damage mechanics model. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, Elsevier BV, v. 105, p. 102439, fev. 2020. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2019.102439>>.
- 47 FERREIRA, G. V.; MALCHER, L.; NEVES, R. S. Multiaxial Fatigue Life Estimation Using an Improved Lemaitre’s Continuous Damage Model. In: . Barcelona, Espanha: XIV International Conference on Computational Plasticity. Fundamentals and Applications, 2017.
- 48 MAMIYA, E. N.; MALCHER, L.; CASTRO, F. C.; NUNES FILHO, E. L. S. A.; FERREIRA, G. V.; NEVES, R. S.; CANUT, F. A.; RIBEIRO, M.; AUGUSTO, C.; TEIXEIRA, P. Fatigue analysis of reduced-scale FPSO mooring chains subjected to out-of-plane bending load. In: . Rio de Janeiro, Brasil: Rio Oil & Gas Expo and Conference 2018, 2018.
- 49 CASTRO, F. C.; MALCHER, L.; MAMIYA, E. N.; FERREIRA, G. V.; NEVES, R. S.; RIBEIRO, M.; AUGUSTO, C.; TEIXEIRA, P. Fatigue of a high strength steel used in a reduced-scale mooring chain testing device. In: . Rio de Janeiro, Brasil: Rio Oil & Gas Expo and Conference 2018, 2018.
- 50 FERREIRA, G. V.; MALCHER, L.; NEVES, R. S. Multiaxial Fatigue Life Estimation Using an Improved Lemaitre’s Continuous Damage Model. In: . Nova Iorque, Estados Unidos: 13th World Congress on Computational Mechanics (WCCM XIII), 2018.
- 51 MAMIYA, E. N.; CASTRO, F. C.; FERREIRA, G. V.; NUNES FILHO, E. L. S. A.; CANUT, F. A.; NEVES, R. S.; MALCHER, L. A study on the fatigue of mooring chains under out-of-plane bending. In: . São Carlos, Brasil: 7th International Symposium on Solid Mechanics - MECSOL 2019), 2019.
- 52 CASTRO, F. C.; MAMIYA, E. N.; MALCHER, L.; CANUT, F. A.; FERREIRA, G. V.; NEVES, R. S. Multiaxial fatigue of quenched and tempered u2 steel: Testing and fatigue life prediction. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, Wiley, v. 42, n. 11, p. 2487–2495, jul. 2019. Disponível em: <<https://doi.org/10.1111/ffe.13047>>.
- 53 FERREIRA, G. V.; CAMPOS, E. R. F. S.; NEVES, R. S.; MALCHER, L. An Improved Lemaitre’s Continuous Damage Model to Estimate Fatigue Life in Strain Control Problems. (**Em submissão**).
- 54 FERREIRA, G. V.; NEVES, R. S.; MALCHER, L. An Improved Lemaitre’s Continuous Damage Model to Estimate Fatigue Life Applying a Multiscale Approach. (**Em submissão**).

- 55 LEMAITRE, J. *A Course on Damage Mechanics*. 2. ed. Berlim, Alemanha: Springer Berlin Heidelberg, 1996. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/978-3-642-18255-6>>.
- 56 DE SOUZA NETO, E. A.; PERIC, D.; OWEN, D. R. J. *Computational Methods for Plasticity*. 1. ed. Nova Jérsei, Estados Unidos: John Wiley and Sons, 2008. Disponível em: <<https://doi.org/10.1002/9780470694626>>.
- 57 RABOTNOV, Y. N. Creep rupture. In: *Applied Mechanics*. Springer Berlin Heidelberg, 1969. p. 342–349. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-3-642-85640-2_26>.
- 58 PRAGER, W. The theory of plasticity: A survey of recent achievements. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*, SAGE Publications, v. 169, n. 1, p. 41–57, jun 1955. Disponível em: <https://doi.org/10.1243/pime_proc_1955_169_015_02>.
- 59 ARMSTRONG, P. J.; FREDERICK, C. O. *A mathematical representation of the multiaxial Bauschinger effect*. Report RD/B/N731, CEGB, Central Electricity Generating Board, Berkeley, Inglaterra, 1966.
- 60 DESMORAT, R. Non-saturating nonlinear kinematic hardening laws. *Comptes Rendus Mécanique*, Elsevier BV, v. 338, n. 3, p. 146–151, mar 2010. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.crme.2010.02.007>>.
- 61 BAI, Y.; WIERZBICKI, T. A new model of metal plasticity and fracture with pressure and lode dependence. *International Journal of Plasticity*, Elsevier BV, v. 24, n. 6, p. 1071–1096, jun 2008. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2007.09.004>>.
- 62 BRIDGMAN, P. W. *Studies in Large Plastic Flow and Fracture*. 1. ed. Nova Iorque, Estados Unidos: McGraw-Hill, 1952.
- 63 BAI, Y.; TENG, X.; WIERZBICKI, T. *Study on the effect of the third stress invariant on ductile fracture*. Massachusetts, Estados Unidos, 2006.
- 64 WIERZBICKI, T.; XUE, L. *On the Effect of the Third Invariant of the Stress Deviator on Ductile Fracture*. Massachusetts, Estados Unidos, 2005.
- 65 SIMO, J.; HUGHES, T. *Computational Inelasticity*. 1. ed. Nova Iorque, Estados Unidos: Springer-Verlag, 1998. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/b98904>>.
- 66 LEESE, G.; SOCIE, D. F. *Multiaxial Fatigue: Analysis and Experiments, Advances in Engineering, AE-14*. Pensilvânia, Estados Unidos, 1989.
- 67 HOFFMEYER, J. *Anrisslebensdauervorhersage bei mehrachsiger Beanspruchung auf Basis des Kurzrisskonzepts*. Tese (Doutorado) — Technische Universität Darmstadt, Darmstadt, Alemanha, January 2005. Disponível em: <<http://tubiblio.ulb.tu-darmstadt.de/25448/>>.
- 68 POMPETZKI, M.; TOPPER, T.; DUQUESNAY, D. The effect of compressive underloads and tensile overloads on fatigue damage accumulation in SAE 1045 steel. *International Journal of Fatigue*, Elsevier BV, v. 12, n. 3, p. 207–213, maio 1990. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/0142-1123\(90\)90097-x](https://doi.org/10.1016/0142-1123(90)90097-x)>.
- 69 CALLISTER JR., W. D.; RETHWISCH, D. G. *Materials Science and Engineering: An Introduction*. 8. ed. Nova Jérsei, Estados Unidos: John Wiley and Sons, 2009.
- 70 COLLINS, J. A.; BUSBY, H. R.; STAAB, G. H. *Mechanical Design of Machine Elements and Machines: A Failure Prevention Perspective*. 2. ed. Nova Jérsei, Estados Unidos: John Wiley & Sons, 2009.

- 71 KARWA, R. *A Textbook of Machine Design*. 1. ed. Nova Deli, Índia: Laxmi Publications, 2005.
- 72 JIANG, Y.; HERTEL, O.; VORMWALD, M. An experimental evaluation of three critical plane multiaxial fatigue criteria. *International Journal of Fatigue*, Elsevier BV, v. 29, n. 8, p. 1490–1502, ago. 2007. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2006.10.028>>.
- 73 HILL, R. Continuum micro-mechanics of elastoplastic polycrystals. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Elsevier BV, v. 13, n. 2, p. 89–101, abr. 1965. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/0022-5096\(65\)90023-2](https://doi.org/10.1016/0022-5096(65)90023-2)>.
- 74 Xiao Guo, Z. *Multiscale Materials Modelling: Fundamentals and Applications*. 1. ed. Cambridge, Inglaterra: Woodhead Publishing CRC Press Inc, 2007. ISBN 978-1-84569-071-7. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/book/9781845690717/multiscale-materials-modelling>>.
- 75 BERVEILLER, M.; ZAOUI, A. An extension of the self-consistent scheme to plastically-flowing polycrystals. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Elsevier BV, v. 26, n. 5-6, p. 325–344, out. 1978. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/0022-5096\(78\)90003-0](https://doi.org/10.1016/0022-5096(78)90003-0)>.
- 76 GONZÁLEZ, C.; LLORCA, J. A self-consistent approach to the elasto-plastic behaviour of two-phase materials including damage. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Elsevier BV, v. 48, n. 4, p. 675–692, abr. 2000. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/S0022-5096\(99\)00057-5](https://doi.org/10.1016/S0022-5096(99)00057-5)>.
- 77 SANDOVAL, C.; MALCHER, L.; CANUT, F.; ARAÚJO, L.; DOCA, T.; ARAÚJO, J. Micro-mechanical gurson-based continuum damage under the context of fretting fatigue: Influence of the plastic strain field. *International Journal of Plasticity*, Elsevier BV, v. 125, p. 235–264, fev. 2020. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2019.09.012>>.
- 78 LI, J.; ZHANG, Z.; LI, C. An improved method for estimation of ramberg-osgood curves of steels from monotonic tensile properties. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, Wiley, v. 39, n. 4, p. 412–426, nov. 2015. Disponível em: <<https://doi.org/10.1111/ffe.12366>>.
- 79 BROWN, M.; COMLEY, A.; ERIKSEN, M.; WILLIAMS, I.; SMEDLEY, P.; BHATTACHARJEE, S. SS: Mooring system integrity: Phase 2 mooring integrity JIP - summary of findings. In: *Offshore Technology Conference*. Offshore Technology Conference, 2010. Disponível em: <<https://doi.org/10.4043/20613-ms>>.
- 80 Lloyd's Register Group. *Rules for the Manufacture, Testing and Certification of Materials*. Londres, Inglaterra, 2018.
- 81 LASSEN, T.; STORVOLL, E.; BECH, A. Fatigue life prediction of mooring chains subjected to tension and out of plane bending. In: *Volume 1: Offshore Technology*. ASME, 2009. Disponível em: <<https://doi.org/10.1115/omae2009-79253>>.
- 82 DNV GL. *Joint Industry Projects (JIPs)*. Acesso em: 29 de janeiro de 2019. Disponível em: <<https://www.dnvgl.com/oilgas/joint-industry-projects/index.html>>.
- 83 RAMPI, L.; BIGNONNET, A.; CUNFF, C. L.; BOURGIN, F.; VARGAS, P. Chain out of plane bending (OPB) fatigue joint industry project (JIP) FEA results and multi-axiality study results. In: *Volume 1: Offshore Technology; Offshore Geotechnics*. ASME, 2016. Disponível em: <<https://doi.org/10.1115/omae2016-54198>>.
- 84 RAMPI, L.; GERTHOFFERT, A.; FRANCOIS, M.; BIGNONNET, A.; VARGAS, P. Chain out of plane bending (OPB) fatigue joint industry project (JIP) fatigue test program results and methodology. In: *Volume 1: Offshore Technology; Offshore Geotechnics*. ASME, 2016. Disponível em: <<https://doi.org/10.1115/omae2016-54199>>.

85 LUO, M.; HEYL, C. Numerical study on the out-of-plane bending (opb) behaviors of studless mooring chain links in fairlead structures. In: *The 27th International Ocean and Polar Engineering Conference*. International Society of Offshore and Polar Engineers, 2017. Disponível em: <<https://www.onepetro.org/conference-paper/ISOPE-I-17-509>>.

86 STIFF, J. J.; SMITH, D. W.; CASEY, N. F. Fatigue of mooring chain in air and water - results and analysis. In: *Offshore Technology Conference*. Offshore Technology Conference, 1996. Disponível em: <<https://doi.org/10.4043/8147-ms>>.