



**MODELAGEM DINÂMICA DE LINHA DE  
TRANSMISSÃO AÉREA UTILIZANDO MÉTODO DO  
ELEMENTO ESPECTRAL**

**Yanne Marcela Soares Fernandes**

**Dissertação de Mestrado  
Integridade de Materiais da Engenharia**

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA**

**Faculdade do Gama/ Faculdade de Tecnologia**

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
FACULDADE DO GAMA/ FACULDADE DE TECNOLOGIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM INTEGRIDADE DE  
MATERIAIS DA ENGENHARIA

MODELAGEM DINÂMICA DE LINHA DE TRANSMISSÃO  
AÉREA UTILIZANDO MÉTODO DO ELEMENTO  
ESPECTRAL

Yanne Marcela Soares Fernandes

Orientadora: Marcela Rodrigues Machado, Dra

Coorientador: Maciej Dutkiewicz, Dr

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

PUBLICAÇÃO: FGA.DM - 087A/2020

BRASÍLIA/DF: 17 de março

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA**  
**FACULDADE UnB GAMA/FACULDADE DE TECNOLOGIA**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM INTEGRIDADE DE**  
**MATERIAIS DA ENGENHARIA**

**MODELAGEM DINÂMICA DE LINHA DE TRANSMISSÃO AÉREA**  
**UTILIZANDO MÉTODO DO ELEMENTO ESPECTRAL**


**Yanne Marcela Soares Fernandes**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO SUBMETIDA AO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM INTEGRIDADE DE MATERIAIS DA ENGENHARIA DA FACULDADE DE TECNOLOGIA DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA, COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE.**

**APROVADA POR:**

  
\_\_\_\_\_  
**Prof. Dra. Marcela Rodrigues Machado; FT/UnB**  
**(Orientadora)**

  
\_\_\_\_\_  
**Prof. Dr. Marcus Vinícius Girão de Moraes; FT/UnB**  
**(Examinador Interno)**

  
\_\_\_\_\_  
**Prof. Dr. Daniel Alves Castello; COPPE/UFRJ**  
**(Examinador Externo)**

**Brasília, 17/03/2020**

## FICHA CATALOGRÁFICA

Soares, Y. M. F.  
Modelagem dinâmica de linha de transmissão aérea utilizando método do elemento espectral  
[Distrito Federal] 2020.  
xix, 76p. (FGA/UnB, Mestre, Integridade de Materiais da Engenharia, 2020.  
Dissertação de Mestrado - Universidade de Brasília.  
Faculdade do Gama/ Faculdade de Tecnologia.  
Programa de Pós-Graduação em Integridade de Materiais da Engenharia.

Palavras-chave:

- |                               |                                 |
|-------------------------------|---------------------------------|
| 1. Linha de transmissão aérea | 2. Método do Elemento Espectral |
| 3. Excitação Aleatória        | 4. Análise Dinâmica             |
| I. FGA/UnB                    | II. Título (série)              |

## REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

Soares, Y. M. F.(2020). Modelagem dinâmica de linha de transmissão aérea utilizando método do elemento espectral . Dissertação de Mestrado, Publicação FGA.DM - 087A/2020, Programa de Pós-Graduação em Integridade de Materiais da Engenharia, Universidade de Brasília, Brasília, Distrito Federal, xix, 76p.

## CESSÃO DE DIREITOS

**NOME DO AUTOR:** Yanne Marcela Soares Fernandes.

**TÍTULO DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO:** Modelagem dinâmica de linha de transmissão aérea utilizando método do elemento espectral .

**GRAU / ANO:** MESTRE / 2020

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta dissertação de mestrado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desta dissertação de mestrado pode ser reproduzida sem a autorização por escrito do autor.

---

Yanne Marcela Soares Fernandes

*A minha mãe Eliete e a Mariana.*

# Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por ter me concedido o dom da vida e ter me dado capacidade para alcançar meus objetivos.

A minha Mãe que sempre acreditou em mim e me incentivou a ir a atrás dos meus sonhos, dando suporte financeiro e emocional sempre que precisei, sem a senhora a realização desse sonho seria impossível. Aos meus familiares pelo incentivo, mesmo sem entenderem o que eu estava fazendo.

A Mariana, por me acompanhar nessa jornada, me acolhendo e me ajudando em todos os momentos mais difíceis e por entender as minhas ausências, sem você essa caminhada teria sido muito mais difícil.

A minha orientadora Dra. Marcela, pela excelente orientação, dedicação, paciência, conhecimento, confiança e apoio no desenvolvimento deste trabalho.

A todos os professores que me ajudaram na minha vida acadêmica, em especial a Fátima Brandão e Rosana Costa Brandão, pelo incentivo e por despertarem em mim o interesse na área de exatas.

Aos meus amigos Lincoln, Maria e Thiago, pelos anos de amizade, por terem me incentivado a fazer o mestrado e por travarem essa batalha junto comigo.

Aos meus amigos de laboratório, Braion, Daniely, Emerson, Filipe, Filipe Ossege, Juliana, Juliano e Thiago, por tornarem essa caminhada mais leve e descontraída além de me ajudarem a superar minhas limitações.

Ao Programa de Pós Graduação em Integridade dos Materiais que forneceu toda a estrutura necessária para a conclusão dessa etapa tão importante para minha formação.

A CAPES pelo apoio financeiro.

# Resumo

**Modelagem dinâmica de linha de transmissão aérea utilizando método do elemento espectral**

**Autor: Yanne Marcela Soares Fernandes**

**Orientadora: Marcela Rodrigues Machado, Dra**

**Coorientador: Maciej Dutkiewicz, Dr**

**Programa de Pós Graduação em Integridade de Materiais da Engenharia**

**Brasília, 17 de março**

Devido a crescente demanda de energia elétrica, surge a necessidade de expansão das Linhas de Transmissão Aéreas (LTAs), tornando-as mais robustas e complexas. Aumentando assim a necessidade de segurança e eficiência deste tipo de estrutura, uma vez que o surgimento de falhas pode acarretar grandes prejuízos para os consumidores e para as empresas geradoras. O estudo do comportamento dinâmico de LTAs apresenta alta relevância quando o objetivo é assegurar sua estabilidade. Dessa forma, métodos numéricos vêm sendo explorados para este tipo de análise, tais como o Método de Elementos Finitos (MEF) e o Método dos Elementos Espectrais (MEE), ambos abordados neste trabalho, utilizando os *softwares* MATLAB e ANSYS APDL. Considerando que o MEF requer a discretização da estrutura, foi comparado seu custo computacional em relação ao MEE, o qual é um métodos derivado da equação analítica da onda e que não necessidade de discretizações além de apresentar acurácia nos resultados. Foram modelados os elementos de cabo e de torre com diferentes tipos de barras. Em seguida, foi realizado o acoplamento das estruturas a partir da matriz de rigidez dinâmica espectral a fim de avaliar a influência de uma sobre a outra. Excitações de fenômenos como vento e chuva foram consideradas na análise dinâmica da LTA. Ainda, foram percebidas alterações nas frequências do cabo na região próxima ao acoplamento e a prevalência do comportamento da resposta da estrutura excitada. Por fim, o método proposto (MEE) apresentou eficiência, alta viabilidade e baixo custo computacional, tornando-se uma alternativa para análises do comportamento de LTAs.

**Palavras-chaves:** Linha de transmissão aérea; Método do Elemento Espectral; Excitação Aleatória; Análise Dinâmica.

# Abstract

## DYNAMIC MODELING OF OVERHEAD TRANSMISSION LINE USING THE SPECTRAL ELEMENT METHOD

**Author:** Yanne Marcela Soares Fernandes

**Supervisor:** Marcela Rodrigues Machado, Dra

**Co-supervisor:** Maciej Dutkiewicz, Dr

**Master in Engineering Materials Integrity**

**Brasília, 2020**

Due to the growing demand for electric energy, there is a need for expansion of Aerial Transmission Lines (LTAs), making them more robust and complex. Thus increasing the need for safety and efficiency of this type of structure, since the emergence of failures can cause great losses for consumers and generating companies. The study of the dynamic behavior of LTAs is highly relevant when the objective is to ensure its stability. Thus, numerical methods have been explored for this type of analysis, such as the Finite Element Method (MEF) and the Spectral Elements Method (MEE), both addressed in this work, using MATLAB and ANSYS APDL *softwares*. Considering that the MEF requires the discretization of the structure, its computational cost was compared in relation to the MEE, which is a method derived from the analytical wave equation and which does not need to be discretized in addition to presenting accuracy in the results. Cable and tower elements were modeled with different types of bars. Then, the structures were coupled from the spectral dynamic stiffness matrix in order to assess the influence of one on the other. Excitations of phenomena such as wind and rain were considered in the dynamic analysis of LTA, where the results obtained showed the variation of the displacements of the system when subjected to different types of loads. In addition, changes were observed in the cable frequencies in the region close to the coupling and the prevalence of the response behavior of the excited structure. Finally, the proposed method (MEE) showed efficiency, high viability and low computational cost, making it an alternative for analyzing the behavior of structures such as LTAs

**Key-words:** Aerial Transmission Lines; Spectral Elements Method; random excitement; dynamic analysis .



# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
1.1	Objetivos	2
1.2	Metodologia	3
1.3	Organização do trabalho	3
<b>2</b>	<b>REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b>	<b>4</b>
2.1	Conceitos iniciais	4
2.2	Estado da arte	6
2.2.1	Cabo	6
2.2.2	Torre	8
2.2.3	Linha de Transmissão Aérea-LTA	10
2.2.4	Método do Elemento Espectral-MEE	12
<b>3</b>	<b>FORMULAÇÃO TEÓRICA</b>	<b>14</b>
3.1	Formulação geral	14
3.2	Barra elementar	17
3.2.1	Formulação espectral de barra elementar	17
3.3	Barra Love	20
3.3.1	Formulação espectral para a barra Love	21
3.4	Barra Mindlin-Herrmann	22
3.4.1	Formulação espectral para a barra Mindlin-Herrmann	24
3.5	Cabo	26
3.5.1	Formulação espectral para cabo	27
3.5.1.1	Carregamento distribuído	29
3.6	Matriz de rotação	29
3.7	Excitação determinística e aleatória	30
3.7.1	Cargas de vento	30
3.7.2	Cargas de chuva	34
3.7.3	Carga de vento e chuva	37
3.7.4	Densidade espectral	38

3.7.5	Autocorrelação e correlação cruzada . . . . .	39
<b>4</b>	<b>RESULTADOS . . . . .</b>	<b>41</b>
4.1	<b>Metodologia . . . . .</b>	<b>41</b>
4.2	<b>Comparação entre barras . . . . .</b>	<b>43</b>
4.3	<b>Resultados dinâmicos da torre . . . . .</b>	<b>46</b>
4.4	<b>Resultados dinâmicos do cabo . . . . .</b>	<b>49</b>
4.5	<b>Resultados dinâmicos da LTA . . . . .</b>	<b>50</b>
4.6	<b>Excitações de cargas determinísticas . . . . .</b>	<b>55</b>
4.6.1	Excitações determinísticas pontuais no cabo . . . . .	55
4.6.2	Excitações determinísticas pontuais na LTA . . . . .	56
4.6.3	Excitações determinísticas distribuídas no cabo . . . . .	60
4.6.4	Excitações determinísticas distribuídas na LTA . . . . .	61
4.7	<b>Excitações aleatórias . . . . .</b>	<b>63</b>
4.7.1	Excitações aleatórias distribuídas no cabo . . . . .	64
4.7.2	Excitações aleatórias distribuídas na LTA . . . . .	65
<b>5</b>	<b>CONCLUSÃO . . . . .</b>	<b>69</b>
5.1	<b>Considerações Finais . . . . .</b>	<b>69</b>
5.2	<b>Contribuições . . . . .</b>	<b>70</b>
5.3	<b>Trabalhos Futuros . . . . .</b>	<b>70</b>
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>71</b>

# Lista de Figuras

Figura 1.1 – Linhão de Tucuruí. (Santos, 2013) . . . . .	1
Figura 2.1 – Mapa do sistema de transmissão - horizonte 2019. (Fonte: ONS) . . . . .	5
Figura 3.1 – Barra elementar. . . . .	17
Figura 3.2 – Diagrama de dispersão para barras elementares. . . . .	18
Figura 3.3 – Diagrama de dispersão para barra Love. . . . .	22
Figura 3.4 – Barra Mindlin-Herrmann. . . . .	23
Figura 3.5 – Diagrama de dispersão barra Mindlin-Herrmann. . . . .	24
Figura 3.6 – viga <i>Euler-Bernoulli</i> sujeito a uma carga axial. . . . .	26
Figura 3.7 – Diagrama de dispersão para cabo em diferentes tensões em [Kgf]. . . . .	27
Figura 3.8 – Relação de elementos e deslocamentos globais em um único nó ( Hutton, 2004). . . . .	29
Figura 3.9 – Espectro de potência típico da velocidade do vento a 100 m do solo- (Krée e Soize, 1986). . . . .	31
Figura 3.10–Velocidade base do vento - (NBR-5422,1985). . . . .	32
Figura 3.11–Relação entre categoria do terreno e período de integração - (NBR-5422,1985). . . . .	33
Figura 3.12–Relação de velocidade de chuva e vento (Fu, Li e Yi, 2015). . . . .	36
Figura 4.1 – Geometria da torre (m). . . . .	42
Figura 4.2 – Sistema de linha de transmissão . . . . .	43
Figura 4.3 – Função resposta em frequência de uma barra, para as teorias Elementar, Love e Mindlin-Herrmann. . . . .	44
Figura 4.4 – Diagramas de dispersão para barras elementares e Love. . . . .	44
Figura 4.5 – Diagrama de dispersão para barra Mindlin-Herrmann: (a) número de onda (b) Parte real, (c) Parte imaginária. . . . .	45
Figura 4.6 – FRF de uma barra da torre, para as teorias elementar, Love e Mindlin-Herrmann . . . . .	46
Figura 4.7 – FRFs da torre obtida para barra Elementar, Love, Mindlin-Herrmann e MEF discretizado em elementos de tamanho de 0.01 m. . . . .	47
Figura 4.8 – Erro percentual para a torre analisada com MEF. . . . .	48
Figura 4.9 – FRF do cabo obtido com MEE e MEF . . . . .	50

Figura 4.10–FRF’s obtidas devido a uma excitação pontual unitária na torre nos pontos, (a)(b) torre; (c) acoplamento, (d) cabo a um metro da conexão com a torre; (e) meio do cabo; (f) fim do cabo. . . . .	51
Figura 4.11–FRFs obtidas devido a uma excitação pontual unitária na torre medido no cabo a cada 0.1 até 1 m partindo do ponto de acoplamento. . . . .	52
Figura 4.12–FRFs obtidas devido à uma excitação pontual unitária no acoplamento (linhas em preto), à um metro do acoplamento (linhas em vermelho) e no meio do vão do cabo (linhas em azul), com medições em: (a) torre; (b) acoplamento; (c) cabo a um metro do acoplamento; (d) meio do cabo; (e) fim do cabo. . . . .	54
Figura 4.13–FRF de comparação entre forças devido vento, chuva e vento com chuva.	55
Figura 4.14–FRF de comparação entre forças devido vento, chuva e vento com chuva simultaneamente. . . . .	56
Figura 4.15–FRFs obtidas devido à uma excitação pontual de vento na torre (linhas vermelhas), no acoplamento (linhas pretas) e no meio do cabo (linhas azuis), com medições em: (a) torre; (b) acoplamento; (c) cabo a um metro do acoplamento; (d) meio do cabo e (e) fim do cabo. . . . .	57
Figura 4.16–FRFs obtidas devido à uma excitação pontual de vento na torre (linhas vermelhas), no acoplamento (linhas pretas) e no meio do cabo (linha azuis), com medições nos pontos: (a) torre; (b) acoplamento; (c) cabo a um metro do acoplamento; (d) meio do cabo e (e) fim do cabo. . . . .	58
Figura 4.17–FRFs obtidas devido à uma excitação pontual de vento na torre (linhas vermelhas), no acoplamento (linhas pretas) e no meio do cabo (linha azul), nos pontos (a) torre; (b) acoplamento; (c) cabo a um metro do acoplamento; (d) meio do cabo e (e) fim do cabo. . . . .	59
Figura 4.18–FRF para cabo submetido a tensão de 27 KN, excitado com: (a) carregamento unitário distribuído; (b) excitação de vento com velocidade base de 20m/s; (c) excitação de chuva om intensidade 150mm/h e (d) vento e chuva. . . . .	61
Figura 4.19–FRFs obtidas devido a uma excitação distribuída unitária na torre nos pontos, (a)(b) torre; (c) acoplamento, (d) cabo a um metro da conexão com a torre; (e) meio do cabo e (f) fim do cabo . . . . .	62
Figura 4.20–FRFs obtidas devido a uma excitação distribuída na torre com cargas de vento com chuva nos pontos, (a)(b) torre; (c) acoplamento, (d) cabo a um metro da conexão com a torre; (e) meio do cabo e (f) fim do cabo.	63
Figura 4.21–Densidade espectral de potência da força de excitação para ruído branco (azul), Kaimal (verde) e Kanai – Tajimi (rosa). . . . .	63
Figura 4.22–Força do vento no tempo para modelos de ruído branco, Kaimal e Kanai-Tajimi. . . . .	64
Figura 4.23–PSD do cabo submetido a excitação aleatória com PSD de ruído branco e carga de: (a) a vento (b) chuva e (c) vento com chuva. . . . .	64

Figura 4.24–PSD do cabo submetido a excitação aleatória com PSD de Kaimal e carga de: (a) a vento (b) chuva e (c) vento com chuva. . . . .	65
Figura 4.25–PSD do cabo submetido a excitação aleatória com PSD de Kanai-Tajimi e carga de: (a) a vento (b) chuva e (c) vento com chuva. . . . .	65
Figura 4.26–FRF com espectro de excitação de ruído branco com carga de vento: (a) obtido em pontos da torre; (b) no cabo a 1 m da conexão e (c) obtido a 50 m. . . . .	66
Figura 4.27–FRF com espectro de excitação de ruído branco com carga de chuva: (a) obtido em pontos da torre; (b) no cabo a 1 m da conexão e (c) obtido a 50 m. . . . .	66
Figura 4.28–FRF com espectro de excitação de ruído branco com carga de vento e chuva: (a) obtido em pontos da torre; (b) no cabo a 1 m da conexão e (c) obtido a 50 m. . . . .	66
Figura 4.29–FRF excitada com o espectro Kaimal para carga de vento: (a) obtido em pontos da torre; (b) no cabo a 1 m da conexão e (c) obtido a 50 m. . . . .	67
Figura 4.30–FRF excitada com o espectro Kaimal para carga de chuva: (a) obtido em pontos da torre; (b) no cabo a 1 m da conexão (c) obtido a 50 m. . . . .	67
Figura 4.31–FRF excitada com o espectro Kaimal para carga de vento e chuva: (a) obtido em pontos da torre; (b) no cabo a 1 m da conexão e (c) obtido a 50 m. . . . .	67
Figura 4.32–FRF excitada com o espectro Kanai-Tajimi para carga de vento: (a) obtida nos pontos da torre; (b) no cabo a 1 m da conexão e (c) obtido a 50 m. . . . .	68
Figura 4.33–FRF excitada com o espectro Kanai-Tajimi para carga de chuva: (a) obtida nos pontos da torre; (b) no cabo a 1 m da conexão e (c) obtido a 50 m. . . . .	68
Figura 4.34–FRF excitada com o espectro Kanai-Tajimi para carga de vento com chuva: (a) obtida nos pontos da torre; (b) no cabo a 1 m da conexão e (c) obtido a 50 m. . . . .	68

# Lista de Tabelas

Tabela 1 – coeficiente de rugosidade $K_r$ .(NBR-5422,1985). . . . .	33
Tabela 2 – Fator de correção do período de integração e rugosidade do terreno $n$ . (NBR-5422,1985). . . . .	33
Tabela 3 – Características das barras. . . . .	41
Tabela 4 – Características da torre. . . . .	42
Tabela 5 – Características do cabo. . . . .	42
Tabela 6 – Características do vento e chuva. . . . .	43
Tabela 7 – Tempo de processamento das barras. . . . .	46
Tabela 8 – Frequências de ressonância das torres. . . . .	47
Tabela 9 – Frequência de ressonância das torres por MEF. . . . .	48
Tabela 10 – Tempo de processamento das torres. . . . .	48
Tabela 11 – Frequência de ressonância do cabo. . . . .	49
Tabela 12 – Frequências de ressonância do sistema. . . . .	52

# Lista de Algoritmos

# Lista de Abreviaturas e Siglas

<i>ABNT</i>	Associação Brasileira de Normas Técnicas
<i>ANEEL</i>	Agência Nacional de Energia Elétrica
<i>CEMIG</i>	Companhia Energética de Minas Gerais
<i>LTA</i>	Linhas de Transmissão Aéreas
<i>ONS</i>	Operador Nacional do Sistema Elétrico
<i>MEE</i>	Método do Elemento Espectral
<i>MEF</i>	Método dos Elementos Finitos
<i>FOF</i>	First Order Filter
<i>FRF</i>	Função Resposta em Frequência
<i>PSD</i>	Power Spectral Density
<i>TCF</i>	Transformada Contínua de Fourier
<i>TDF</i>	Transformada Discreta de Fourier
<i>FFT</i>	Fast Fourier Transform
<i>SFEM</i>	Método do elemento espectral no domínio do tempo



# Lista de Símbolos

## Letras Latinas

$A$	Área
$A_1, A_2, A_3, A_4$	Constantes
$C_a$	Coefficiente de arrasto
$C_0$	Velocidade de fase
$C_g$	Velocidade de grupo
$d$	Diâmetro
$\mathbf{d}$	Vetor de Graus de Liberdade nodais
$\mathbf{D}$	Deslocamentos nodais
$E$	Modulo de Elasticidade [ $GPa$ ]
$F$	Força axial
$F_v$	Força do vento
$F_c$	força da chuva
$F_{total}$	Força total devido ao vento e a chuva
$\mathbf{F}$	Vetor de forças nodais
$\mathbf{g}$	função de forma do cabo
$h$	Altura
$H$	Função de transferência
$I$	Momento de inércia
$J$	Momento polar de inercia
$k$	Número de ondas

$\mathbf{K}$	Matriz de rigidez dinâmica espectral
$\mathbf{K}_g$	Matriz de rigidez global
$K_r$	Coefficiente de rugosidade
$K_d$	Coefficiente de relação entre categoria do terreno e período de integração
$L$	Comprimento do elemento
$L_{1u}$	escala de comprimento
$\mathcal{L}$	Operador estrutural diferencial no domínio do tempo
$\mathbf{L}$	Operador estrutural diferencial no domínio da frequência
$\mathbf{L}_{GB}$	Operador diferencial linear para as condições de contorno
$\mathbf{L}_{NB}$	Operador diferencial linear para as condições de contorno naturais
$n$	Fator de correção da rugosidade do terreno e período de integração
$n_h$	Espectro da gota de chuva na horizontal
$n_v$	Espectro da gota de chuva na vertical
$N$	Taxa de captura específica
$\mathbf{N}$	Função de forma
$m$	Massa
$M$	Momento fletor
$\mathbf{M}$	Operador Inercial
$\mathbf{p}$	Vetor de forças externas
$P_v$	Pressão dinâmica do vento
$P_c$	Pressão dinâmica da chuva
$r$	Raio
$R$	Razão de amplitude
$R_{xx}(\tau)$	Função de autocorrelação
$R_{xy}(\tau)$	Função de correlação cruzada
$R_{ey}$	número de Reynolds
$R_h$	Intensidade da chuva no sentido horizontal

$R_v$	Intensidade da chuva no sentido vertical
$S(\omega)$	Densidade espectral
$T$	Tensão axial
$\mathbb{T}$	Força Cisalhante
$t$	tempo
$Q$	Força em relação ao deslocamento transversal
$u$	Deslocamento axial
$\mathbf{u}$	Vetor de deslocamento axial
$U$	Energia total de deformação
$V$	Força cisalhante
$\mathbb{V}$	Energia Potencial
$v$	Deslocamento transversal
$\bar{v}$	Deslocamento transversal
$\bar{V}$	Velocidade instantânea
$\mathbf{v}$	Variação da velocidade
$V_b$	Velocidade básica do vento
$V_p$	Velocidade projeto do vento
$V_h$	Velocidade horizontal da chuva
$V_m$	Velocidade Media
$x, y, z$	Coordenadas espaciais

### Letras gregas

$\mu$	Viscosidade do ar
$\lambda$	temperatura
$\kappa$	altitude
$\mathbb{V}$	volume
$\varepsilon_{xx}$	Deformação axial
$\rho$	Densidade [ $kg/m^3$ ]

$\theta$	ângulo
$\sigma_{xx}$	Tensão axial
	Função resultante da transformada de Fourier
$\omega$	Frequência angular
$\eta$	Fator de amortecimento
$\nu$	Coefficiente de Poisson
$\epsilon$	Coefficiente de Poisson
$\epsilon_t$	Deformação transversal
$\psi$	Contração lateral
$\omega_c$	Frequência de corte
$\rho_v$	Massa específica do vento
$\rho_c$	Massa específica da gota de chuva
$\gamma$	Razão da velocidade da chuva
$\alpha$	fator de efetividade
$\omega_g$	Frequência característica
$\xi$	Coefficiente de amortecimento característico

# 1 Introdução

Em diversos países, o sistemas de Linhas de Transmissões Aéreas (LTAs) é o principal meio de transmissão de energia. Essas grandes estruturas de LTAs estão cada vez mais sendo adotadas como solução para vencer grandes distâncias e obstáculos. Por serem parte fundamental da infraestrutura, torna-se extremamente necessário um sistema seguro e eficiente (Fu e Li,2016a).

Existe uma crescente demanda de transporte de energia entre os pontos de geração e consumo fazendo que as LTAs percorram distâncias cada vez maiores. A partir dessa condição, torna-se imprescindível o dimensionamento mais detalhado deste tipo de estruturas o que tornam as etapas de projeto e de construção mais complexas, demoradas e onerosas.

Há diversos exemplos, de grandes estruturas de LTAs em todo o mundo. A fig. 1 apresenta a LTA de interligação Tucuruí-Macapá-Manaus, mais conhecido como Linhão de Tucuruí, considerada a mais alta da América Latina (Freitas, 2016).



Figura 1.1 – Linhão de Tucuruí. (Santos, 2013)

Com o aumento da dependência dessas estruturas, o processo de garantia da integridade é crucial na prevenção de falhas. Segundo Li et al.(2018) as falhas locais ou globais nas LTAs se propagam para seus membros ou sistemas estruturais adjacentes (como torres ou linhas vizinhas), conhecido como efeito cascata. Frequentemente essas falhas nas linhas de transmissão ocorrem devido a fadiga de cabos, tempestades ou até mesmo as ações dos ventos. E, devido às sua dimensões, elas estão mais suscetíveis a ação do vento. Segundo Chunming, Bin e Tingting (2012), quanto maior a altura, mais perceptível é a ação do vento nas LTAs.

Ainda que seja notório a importância de se conhecer o comportamento de uma estrutura que está sobre a ação do vento, não se é adotado nos cálculos das LTAs essa carga com efeito dinâmico durante o processo de projeto. Dessa forma, de acordo com a norma que trata sobre análises de LTAs (NBR-5422, 1985), são realizadas apenas suposições de que a pressão do vento pode ser calculada para um determinado perfil de vento de uma região específica, e aplicado como carga estática sem alteração em relação ao tempo. Esse tipo de cálculo exige a adoção de elevados valores para os fatores de segurança com o intuito de atenuar as incertezas.

As análises dinâmicas das LTAs são de grande importância, e geralmente são desenvolvidas com base no Método dos Elementos Finitos (MEF), que é um método de malha que necessita de discretizações. Como as estruturas estão cada vez mais complexas, o MEF se torna um processo com limitações computacionais. Assim existe a necessidade da aplicação de um método que supere os altos custos computacionais.

Com base na necessidade de projetos confiáveis de baixo custo, estudos têm sido desenvolvidos para análises dinâmicas de diversas estruturas como barras e vigas (Doyle, 1997), e para materiais mais complexos como compósitos (Lee, 2009). Esses estudos foram desenvolvidos utilizando o Método do Elemento Espectral (MEE) que é abordado no presente trabalho. De acordo com Lee(2009), a matriz de rigidez dinâmica do elemento espectral é resultante da solução exata da propagação da onda no meio. Por apresentar matriz de rigidez dinâmica exata, o MEE desenvolve uma solução precisa com menos esforço computacional e com um bom nível de acurácia se comparado aos outros métodos.

## 1.1 Objetivos

Tirando proveito do MEE, o presente trabalho tem por objetivo estudar o comportamento dinâmico da LTA através da Função de Resposta em Frequência (FRF).

Foram traçados os seguintes objetivos específicos:

- Investigar a influência da estrutura da torre sobre o cabo, e vice-versa.
- Buscar padrões no comportamento do cabo excitado com força determinística e aleatória de forma concentrada e distribuída, com cargas unitária, de vento, chuva e vento e chuva simultânea.
- Entender a influência da excitação na LTA com força determinística e aleatória, com cargas concentrada unitária e distribuída, de vento, de chuva e de vento e chuva simultâneas.

## 1.2 Metodologia

A metodologia desenvolvida no presente trabalho consiste em um breve referencial teórico da temática abordada e no desenvolvimento da modelagem numérica das estruturas de barras, torres e cabo baseado em MEE na plataforma MATLAB. Posteriormente, as mesmas modelagens foram realizadas utilizando o *software* comercial ANSYS APDL, com a intenção de verificar os resultados obtidos com os modelos com MEE. Após a validação, foi executado o acoplamento entre as estruturas, de torre e cabo, através da matriz de rigidez dinâmica espectral. E por fim, foram aplicadas forças abordadas como cargas pontuais e distribuídas unitárias, e como forças devido à pressão do vento e chuva, modeladas de forma determinista e randômica. A escolha da modelagem dinâmica dessas cargas em função do tempo deve fornecer uma simulação mais realista do comportamento do vento e reduzir a necessidade de fatores de segurança tão grandes, reduzindo, portanto, os custos computacionais. As análises aleatórias foram feitas com 3 espectros de densidade de potência diferentes, sendo eles, ruído branco, Kaimal, e Kanai-Tajima.

## 1.3 Organização do trabalho

O presente trabalho está organizado em cinco capítulos. O capítulo 1 consiste em um introdução ao tema, abordando sobre a motivação que levaram a realização do trabalho, a metodologia, os objetivos e organização do texto. Em seguida, no capítulo 2, é realizada uma revisão bibliográfica, dividida em fundamentação teórica e estado da arte abordando os principais trabalhos e os campos trabalhados na área do tema abordado. No capítulo 3 são apresentadas as formulações do método do elemento espectral para os elementos eles Barras (Elementar, Love e Mindlin-Hermann) e cabo em seguida é tratado sobre as excitações aleatórias e os espectros de potência. A descrição dos materiais e métodos e os resultados obtidos são apresentado posteriormente no capítulo 4. E por fim, no capítulo 5, são apresentados as conclusões, assim como as perspectivas futuras para o trabalho.

## 2 Revisão Bibliográfica

Neste capítulo, é apresentada a revisão bibliográfica, dividida em duas seções: a fundamentação teórica aborda os conceitos iniciais para o desenvolvimento do trabalho, e uma revisão dos principais trabalhos desenvolvidos nos últimos anos no tema de análise dinâmica de linhas de transmissão aérea.

### 2.1 Conceitos iniciais

Desde o seu descobrimento, a energia elétrica é fundamental para o desenvolvimento humano, estando assim sujeita a constantes inovações para atender a crescente demanda das novas necessidades além da otimização dos métodos utilizados.

Com a criação da primeira hidrelétrica no Brasil, na cidade de Diamantina (Minas Gerais), em 1833, surgiu a necessidade de implantação de sistemas de escoamento da energia gerada (CEMIG). Nesse contexto, as Linhas de Transmissão Aéreas (LTA) aparecem como estruturas eficientes para o transporte da energia, fazendo a interligação entre as fontes geradoras aos centros consumidores e garantindo o fornecimento seguro e ininterrupto.

Observa-se que devido ao alto uso de energia provinda de hidrelétricas tem-se uma demanda elevada de transferência de energia entre subsistemas. Segundo a Agência Nacional de Energia Elétrica (ANEEL), mais de 67% da fonte energética do Brasil é gerada em 16 bacias hidrográficas em diferentes regiões do país. Suas localizações afastadas dos grandes centros de consumo criam a necessidade da interconexão dos sistemas elétricos que é feita com a malha de transmissão. Segundo as Centrais Elétricas Brasileiras (ELETROBRAS), a rede brasileira apresentava mais de 141 mil km de extensão em 2017, com previsão de mais de 185 mil km até 2023, sendo considerada uma das maiores do mundo. A integração dos recursos de geração e transmissão permite o atendimento ao mercado com segurança e economicidade.

A fig. 2.1 apresenta o atual mapa de sistema de transmissão do Brasil. De acordo com Menezes (2015), o sistema de transmissão nacional apresenta alta interligação conectando eletricamente todas as regiões do país. Mesmo que a maior parte do país seja atendida pelas LTAs ainda existe uma crescente demanda de expansão, manutenção e reforma da malha elétrica.



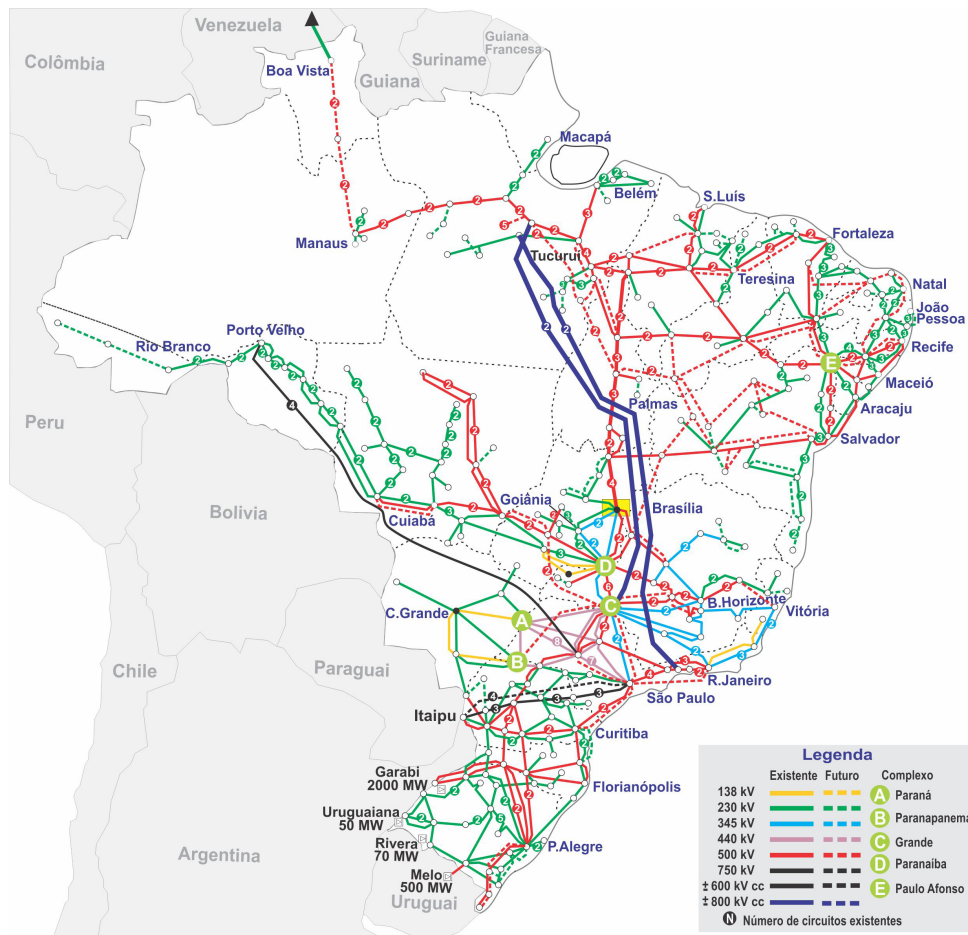


Figura 2.1 – Mapa do sistema de transmissão - horizonte 2019. (Fonte: ONS)

A criação, recuperação e ampliação das LTAs apresentam grande complexidade por exigirem vastos estudos preliminares associados a trabalhos de campo, tornando assim uma tarefa multidisciplinar (McClure e Lapointe, 2003). Os projetos de LTA podem ser divididos em três elementos estruturais principais: cabos (condutores e fio terra), torres e fundações.

Segundo Brewer (2017), cabo condutor é uma estrutura de cabo composto de alumínio reforçado com aço como finalidade do transporte de correntes elétricas por longas distâncias. O fio terra por sua vez atua como ponto de aterramento no caso de descargas elétricas diretas.

As torres são superestruturas onde os cabos condutores estão conectados através dos isoladores, e os fios de aterramentos são conectados diretamente. A maioria das torres são estruturas compostas de treliças construídas em aço. O *design* varia conforme a região em que é instalada. As torres podem aparecer como estruturas estaiadas (os esforços são resistidos por estaias) ou autoportantes (os esforços são transmitidos diretamente ao solo por sua fundação) (Singh, 2008).

Brewer (2017) define as fundações como estruturas que são geralmente feitas de concreto que servem de ancoragem das torres na terra. Essas estruturas representam parte

importante dos projetos pois as condições do solo podem variar bastante ao longo da LTA.

Conforme o aumento da altura e extensão dos sistemas de transmissão, ocorre um aumento da demanda de segurança e confiabilidade dessas estruturas. As torres são responsáveis por suportarem seu peso próprio, resistir os efeitos dos cabos, além de outras cargas aleatórias. Assim a análise dinâmica do sistema tornou-se um processo cada vez mais complexo para análises costumeiramente feitas com o método dos elementos finitos (MEF) como apresentado em Dua, Clobes e Höbbel (2015). Entretanto essa análise apresenta um elevado custo computacional em alguns casos. Desse modo, há a necessidade da utilização de um método rápido e fácil que leve em consideração todas as cargas e incertezas necessárias para um estudo preciso.

O Método dos Elementos Espectrais (MEE), é um método similar ao MEF, consiste na solução das equações diferenciais de equilíbrio para estruturas periódicas escritas no domínio da frequência (Doyle, 1997) . As funções de formas aproximadas do elemento são substituídas por funções de forma dinâmica exata obtidas da solução exata de equações diferenciais governantes. Portanto, um único elemento é suficiente para modelar qualquer parte contínua e uniforme da estrutura. Esse recurso reduz significativamente o número de elementos necessários no modelo da estrutura e melhora a precisão da solução de sistema dinâmico. Uma de suas vantagens é que a quantidade de elementos necessários para representar uma estrutura é igual ao número de descontinuidades contidas na mesma. Isto se deve ao fato de que a função de interpolação do elemento é a solução exata da sua equação diferencial.

## 2.2 Estado da arte

### 2.2.1 Cabo

A análise dinâmica em cabos de transmissão tem sido um tema recorrente nas últimas décadas. Barbieri, de Souza Júnior e Barbieri (2004) apresentam um estudo numérico validado com os resultados obtidos em um sistema de teste automatizado com diferentes comprimentos do elemento onde obtiveram boa aproximação das frequências e amortecimentos pelos métodos numérico e experimental. Em outro trabalho Barbieri, De Souza Júnior e Barbieri (2004a) deram continuidade na pesquisa através de estudos experimentais, simulados com 5 acelerômetros e estimaram de forma simples a matriz de amortecimento da estrutura. Notaram que o amortecimento aumentou com o crescimento da amostra e decresceu com o aumento da carga mecânica.

Meynen et al. (2005) realizou análises de diversos tipos de vento, simulado com o método de volume finito, para configurações diferentes de condutores agrupados. Logo, afirmaram que pode ser útil substituir os testes do túnel de vento por simulações numéricas, porém ressaltam que é indispensável uma validação dos resultados numéricos primeiro,

pelo menos em alguns casos especiais, para que possam ser usado com confiança no caso geral.

Castello e Matt (2007) apresentam a modelagem de um condutor elétrico trançado, usando o modelo de vigas homogêneas de Euler-Bernoulli submetido a pequenos deslocamentos e a amortecimento viscoso e estimam os parâmetros de rigidez à flexão e amortecimento. A capacidade preditiva do modelo computacional é avaliada por meio de validações no domínio da frequência e do tempo.

Em uma análise não linear para linhas de transmissão com um único vão, Kálmán, Farzaneh e McClure (2007) apresentam o efeito dinâmico causado pela queda do gelo, introduzida como uma carga tipo pulso, para diversas características das cargas de gelo com amplitude constante. O modelo apresentado serve para vários critérios de falha devido o efeito do gelo em termos da relações tensão-deformação.

Barbieri, Barbieri e de Souza Júnior (2008) desenvolveram uma análise dos cabos condutores elétricos com modelos não lineares, utilizando MEF, e para validação do modelo utilizaram resultados experimentais. Onde foi demonstrado o comportamento dinâmico para a flutuação do cabo em função da frequência de excitação, a influência de massa concentrada no cabo e a condição de batida. A adição de massa concentrada no cabo altera o comportamento dinâmico com o desacoplamento modal perto da região de desvio, onde observaram variações nas primeiras frequências naturais comparando aos resultados não lineares.

Um modelo numérico para cabos com seção equivalentes utilizando diferentes cargas de tração foi desenvolvido por Castello e Matt(2012), onde avaliaram o modelo nos domínios da frequência e do tempo, e perceberam que para a banda de frequência de 5 a 17.5 Hz os resultados apresentaram boas aproximações para ambas FRFs.

Com intuito de representar de forma mais precisa cabos sujeitos a cargas de vento, Keyhan, McClure e Habashi (2013) desenvolveram uma análise da interação fluido-estrutura, para vento e cabo, e fizeram a comparação com os resultados obtidos pelo método tradicional, que é o cálculo da pressão pseudoestética. Com os resultados obtidos, afirmam que a abordagem tradicional superestima significativamente o movimento do condutor e as tensões dos cabos.

Choi e Inman (2014) apresentam a modelagem de um único cabo e de dois cabos conectados por 4 e 6 molas, onde desenvolvem modelos utilizando MEE e MEF, ambos os métodos foram comparados a análises experimentais. A análise foi realizada com a intenção de avaliar a interferência da adição de rigidez ao cabeamento, detectaram que a abordagem espectral pode ser adotada como um método que obtém uma solução com boa precisão e elevada eficiência em seus resultados quando comparada com MEF, que necessitou de um número muito maior de elementos para a aproximação dos resultados. O MEE permitiu definir as localizações e o número de interconexões de forma muito conveniente, com a função de localização que permite a investigação dos efeitos do número

e da rigidez das conexões.

Com intenção de prever a vibração em cabo de transmissão de energia, Hernández, Castello e Matt (2018) desenvolveram modelos que consideravam típicos de cabos trançados, e comparam os resultados obtidos numericamente com os resultados experimentais, onde perceberam boa coerência até 25 Hz, porém entre 25-30 Hz nenhum dos modelos propostos obteve boa coerência. Foi notado que a rigidez de flexão do cabo aumenta com a carga de tração.

Zhang et al.(2018) apresentaram uma abordagem de propagação de ondas em cabo, cabo com dano e em uma treliça suportada por cabo, por meio de uma análise estática feita por MEF. Os resultados obtidos na primeira etapa foram utilizados nas análises dinâmicas realizadas por meio de MEE, o que permitiu uma significativa redução dos custos computacionais. No estudo, é demonstrado como o dano afeta o comportamento da estrutura em altas frequências, o que oferece oportunidades para o monitoramento de saúde das estruturas.

Com uma abordagem utilizando MEE, Dutkiewicz e Machado (2019b) apresentam análise de vibração de um cabo, em várias configurações de geometrias e forças de tensão a qual esta submetida, comparam os resultados com os obtidos analiticamente que apresentam boa coerência, demonstrando assim a eficiência de MEE, visto que a estrutura não precisou ser discretizada. Em Dutkiewicz e Machado (2019a), os autores investigaram as linhas de transmissão sob carregamento de vento turbulento, mostrando uma situação real e comparando uma função seno. Mostraram que quanto maior a turbulência, maior o deslocamento do cabo.

Machado et al. (2019) realizaram estudo de cabos de transmissão utilizando MEE, com dois tipos diferentes de amortecimento, histórico e aerodinâmico e de atrito. As análises foram realizadas observando os diagramas de dispersão e as FRFs do sistema com diferentes coeficientes de amortecimento, onde foi observado diferentes comportamentos nas respostas com relação as amplitudes e nas frequências. Os resultados numéricos foram comparados aos analíticos e aos obtidos experimentalmente onde foi possível observar que ambos os tipos de amortecimento apresentaram boa precisão na banda de frequência analisada, entretanto o modelo com amortecimento aerodinâmico apresentou maior complexidade.

## 2.2.2 Torre

Yin et al. (2009) apresentaram em seu estudo a viabilidade da utilização de dados de vibração ambiente, medidos a partir de um número limitado de sensores, na detecção de danos estruturais de torres de transmissão. Para posicionar os sensores adotaram locais de fácil acesso e que costumeiramente estão sujeito a danos. Validaram a metodologia numericamente com os dados coletados experimentalmente para casos de danos únicos e múltiplos. Com a análise realizada estimaram a estrutura danificada através diminuição

de sua rigidez equivalente.

Prasad Rao et al. (2010) apresentam um estudo do comportamento das torres com intuito de prever os padrões de falha e carga final para as estruturas de torres. Os autores realizaram testes em sistemas em grande escala com 5 torres diferentes, para diferentes tipos de falhas e comparando com modelos numéricos desenvolvidos em MEF.

Lam e Yin (2011) afirmam que torres em situações de uso real sofrem com os efeitos devido as forças dos cabos de transmissão, e que na prática eles não podem ser negligenciados. Em seu trabalho, investigaram métodos de detecção de danos aplicados a um modelo em escala reduzida de torre de transmissão de energia. Observaram que o método de detecção de danos proposto identificava subestruturas danificadas em todos os casos experimentais considerados.

Taillon, Légeron e Prud'Homme (2012) avaliaram a relação entre rigidez e amortecimento para estruturas treliçadas usando uma seção de 8 metros da torre solicitada de diferentes maneira, realizaram modelagem e compararam com os resultados experimentais. Os autores demonstraram que ambas as características estão ligadas às solicitações sofridas, foram feitas diferentes modelagens e observaram que a que a modelagem com uso viga é o de modelo híbrido feito de vigas para as pernas e barras treliçadas para as diagonais melhor se adaptaram.

Naidu e Krishna (2016) realizaram estudos estáticos e dinâmicos de uma torre, utilizando o *software* ANSYS, com intenção de determinar a resposta estática para cargas de ventos nas posições vertical e transversal, além de uma análise dinâmica devido a carga eólica variável no tempo.

Tian et al. (2018) com intuito de detectar as cargas de falha, realizaram testes em escala real em torres sujeitas a cargas de gelo, ventos fortes e quebras de condutores e compararam com resultados obtidos com modelo desenvolvido em ABAQUS. Os coeficientes de estabilidade foram introduzidos no material para capturar o efeito de flambagem do membro durante o processo de simulação. Posteriormente, realizaram a análise de falhas das torres de transmissão de energia usando um método explícito. Nas análises observaram que as barras treliçadas careciam de maior atenção por estarem mais suscetíveis a falhas.

Fernades et al. (2019) com intenção de identificar qual o melhor tipo de elemento para estudar torres de transmissão realizaram estudo numérico com uma estrutura constituída com diferentes tipos de barras (elementar, Love e Mindlin-Herrmann). Com relação as barras empregadas observaram que para a faixa de frequência analisada as estruturas apresentaram pequena diferença em seu comportamento, entretanto comparando os dois métodos utilizados MEE E MEF, percebeu-se que MEE apresentou um desempenho muito superior, por ser um método de solução exata que não precisa de discretização.

### 2.2.3 Linha de Transmissão Aérea-LTA

Abordando sobre linhas de transmissão com suspensão cruzada, Leon (1984) apresentou estudos experimental e numérico utilizando MEF. Notou que para baixas frequências os cabos cruzados não apresentam interferência significativa, mas que em frequências acima de 1 Hz pode ocorrer do sistema vibrar na frequência do sub-condutor cruzado.

Em seu estudo da resposta dinâmica do acoplamento entre torres e cabos através de uma série temporal, Momomura, Marukawa e Ohkuma (1992) desenvolveram a indução do vento em uma escala total do sistema torre-cabo com observação de micro tremores. Fizeram uma análise da aplicação da carga no sistema nos sentidos longitudinal e transversal, de modo que perceberam que em frequências entre 0.1 e 1 Hz as frequências correspondiam as do cabo, e as duas primeiras da torre apareciam em seguida. Notaram que as tendências qualitativas para ambos os valores medidos e os valores analíticos ficaram muito próximos.

Yasui et al. (1999) motivados pelo aumento das dimensões dos sistemas de torre e cabo no Japão, sentiram a necessidade de investigar com precisão a ação do vento levando em consideração o *design* das torres, onde desenvolveram um método para a análise do sistema com dois estudos de caso. Em seguida demonstraram a influência nas respostas, devido às diferentes formas que a torre suporta o cabo, perceberam também que as amplitudes a partir uma resposta de série temporal é maior que a calculada a partir da densidade do espectral de potência.

Em um estudo analítico-numérico para LTAs sujeitas a cargas de vento, Battista, Rodrigues e Pfeil (2003) demonstraram o comportamento dinâmico para a estrutura utilizando modelo numérico da estrutura em 3D e com o modelo analítico 2D simplificado avaliaram as frequências fundamentais do sistema. Os autores demonstram com o surgimento de uma inércia na torre devido ao movimento de oscilação induzida pelo vento nos cabos e ressaltam a importância da presença dos isoladores nos modelos de acoplamento de cabos e torres.

McClure e Lapointe (2003) apresentam análise dinâmica de uma LTA com um estudo de caso de uma torre que sofreu falha devido ao rompimento dos cabos e compararam ao modelo numérico para obtenção da carga de falha. O modelo dinâmica de cabos proposto foi aplicado com sucesso a vários exemplos, usando o *software* comercial ADINA.

Hamada e El Damatty (2011) realizaram um estudo numérico com modelo tridimensional de sistemas de transmissão submetidos a cargas de tornados, mostrando o desempenho das estruturas. As respostas dinâmicas foram analisadas para várias escalas de tornado, a partir de análise dinâmica dos fluidos e a ocorrência em diferentes pontos em relação ao sistema de transmissão. Demonstraram a necessidade de considerar as cargas como não lineares nas torres para casos críticos e ressaltam a importância de considerar as forças que atuam nos condutores.

Chunming, Bin e Tingting (2012) pesquisaram sobre os coeficientes de vibração

induzidos pelo vento nos sistemas de torre-cabo , utilizando 6 modelos com diferentes condições geométricas de sistemas. Uma série temporal da velocidade do vento com recursos de sobreposição de ondas foi simulado. Utilizaram MEF para a modelagem da treliça como viga e barras treliçadas e demonstraram que o efeito do vento no topo da torre são mais perceptíveis que na parte inferior.

Li, Junjian e Wei (2012) investigaram o efeito na torre devido à ação de vento nos fios, considerando a velocidade do vento na vertical ao fio condutor e observaram que o efeito da carga do vento nos fios é maior que os observados na torre. Com os resultados obtidos, perceberam que os efeitos dos fios condutores na torre não podem ser ignorados no projeto.

Chen et al. (2015) desenvolveram estudo sobre controle de vibração utilizando amortecedores de fricção em sistemas de transmissão de energia sujeitos a excitações do vento. Foram realizadas análises para a determinação dos parâmetros ótimos para o amortecimento, os resultados da análise numérica feita com elementos finitos foram comparados com os resultados obtidos em um sistema real. Concluíram a eficácia dos amortecedores adotando os parâmetros ótimos onde observaram redução significativa da resposta do sistema.

Hamada e El Damatty (2015) realizaram a análise de LTAs submetidas a cargas de tornado, através de simulação numérica utilizando MEF. Logo, identificaram os dois locais críticos que levam a forças de pico nas torres e realizaram as análises aumentando gradualmente a velocidade do tornado, nos locais críticos, até atingir a máxima definida para o tipo de tornado analisado. Ainda, determinaram a velocidade para o colapso das duas torre estudadas, que foram diferentes entre elas, porém os dois estudos obtiveram velocidades críticas inferiores a máxima característica do tornado proposto.

Dua, Clobes e Höbbel (2015) realizaram uma análise dinâmica não linear do sistemas utilizando MEF, onde verificaram que as respostas do sistema acoplado são diferentes em relação dos obtidos com os cabos com suportes fixos, concluíram que este tipo de erro pode ser atenuado utilizando sistema de vigas equivalentes para simular uma torre, reduzindo o tempo de análise e a complexidade da estrutura. Por fim, perceberam que o comportamento do cabo não é gaussiano para nenhum dos tipos de ventos analisados.

Desai, Y. M.; Yu, P. ; Popplewell , N.; Shah(2015) apresentam um modelo de cabo com intuito de demonstrar como se comportam as amplitudes vibracionais em diferentes intervalos da LTA para a demonstração da interação dos cabo e torres representadas pela adição de rigidez equivalente. Segundo os autores, existe a necessidade de considerar vários intervalos de interações, para uma boa estimativa da amplitude do galope, que é um tipo de vibração do cabo, para que assim possam ser garantidas as folgas suficientes nos condutores adjacentes.

Fu e Li(2016a) apresentaram estudo sobre LTA com efeito da excitação aleatória de forças de vento e chuva, em que especificaram uma força para uma determinada densidade

de chuva além da relação para as duas forças simultâneas, comparam os resultados de testes experimentais e numéricos, onde perceberam que o efeito da integração cargas de vento e chuva apresentam comportamento mais complexo.

De acordo Li et al.(2018), falhas em um componente estrutural (falhas locais, como flambagem de um membro local ou quebra de um fio único) ou toda a estrutura da LTA (falhas globais, como instabilidade de toda a torre) podem se propagar para seus membros ou sistemas estruturais adjacentes (como torres ou linhas vizinhas). Por esse motivo, realizaram estudo experimental de uma LTA em túnel de vento, onde desenvolveram uma análise probabilística para detectar um possível foco de falha na estrutura submetidas às diferentes períodos de retorno do vento.

Fernandes, Machado e Dutkiewicz (2019) Realizaram estudo de uma linha de transmissão submetida a uma carregamento de vento, onde empregaram diferentes espectros para a inclusão de aleatoriedade no sistema. Nas análises das FRFs notaram que as estruturas de torre e cabo exercem influência uma sobre a outra.

#### 2.2.4 Método do Elemento Espectral-MEE

Segundo Lee (2009), a análise espectral, também conhecida como análise de Fourier ou análise no domínio da frequência, começou como o trabalho pioneiro "*Theorie analytique de la chaleur*", publicada em 1822 por Joseph Fourier. Nesta obra, é mostrado que uma infinita série de funções senos e cossenos pode ser usadas para analisar a condução de calor em sólidos. Devido à desconfiança no uso das séries, o método de Fourier não ganhou muita aceitação. Entretanto, Dirichlet, Riemann e outros matemáticos publicaram trabalhos resolvendo algumas dúvidas sobre a validade das séries de Fourier e a análise espectral seguiu duas vias: Transformada Contínua de Fourier (TCF) e a Transformada Discreta de Fourier (TDF).

Devido ao alto custo computacional gerado pelas soluções que envolvem as TDF, foram desenvolvidas algumas formas de redução do tempo computacional no começo do século XX. Em 1965, James W. Cooley (pesquisador da IBM) e John W. Turkey (membro da faculdade de Princeton) desenvolveram um algoritmo computacional que é conhecido como *Fast Fourier Transform* (FFT). Tendo como objetivo a redução do número de operações aritméticas para computação, proporcionando uma análise espectral altamente eficiente, com aplicações difundidas para o processamento de sinal digital e diversas áreas de análises da engenharia (Lee, 2009).

O MEE foi proposto pela primeira vez por Beskos D.; Narayanan(1978), onde formularam a matriz de rigidez dinâmica para elementos de viga de Euler-Bernoulli uniformes de dois nós no domínio da frequência, usando a teoria TDF. Em seguida diversos estudos utilizando o MEE vêm sendo realizados, sendo que de maneira geral, destacam-se a formulação de elementos básicos, tais como, barra, viga, eixo e placa.



Doyle (1997), em seu livro intitulado *Wave Propagation in Structures*, apresentou uma série de trabalhos desenvolvendo análises com MEE para diversos casos com várias abordagens de propagações de ondas, com teorias e aplicações de estruturas simples. Já Lee (2009), no livro *Spectral Elements Method In Structural Dynamics*, reportou um estudo dos fundamentos de MEE com uma variedade de novas aplicações, casos como compósitos laminados e detecção de danos foram formulados a partir de seus estudos. No terceiro livro publicado sobre MEE, Gopalakrishnan, Chakraborty e Roy Mahapatra (2007) analisou o comportamento das ondas em compósitos e meios não homogêneos e controle de vibração ativa. Recentemente, Ostachowicz (2008) apresenta uma abordagem sobre o monitoramento da integridade estrutural em estruturas utilizando o MEE.

Estudos envolvendo estruturas danificadas utilizando MEE são encontrados em, Palacz e Krawczuk (2002) para barras, Krawczuk, Palacz e Ostachowicz (2003) para uma viga de Timoshenko, Krawczuk, Palacz e Ostachowicz (2004) para estruturas de vigas e placas. Peng, Meng e Li (2009) realiza aplicação tridimensional do Método do Elemento Espectral no Domínio do Tempo (SFEM) para problemas de propagação de ondas para detecção de danos em estruturas de placas. Análises do comportamento dinâmico de materiais compósitos com abordagens utilizando o MEE podem ser vistos em Kudela et al. (2007), Park e Lee (2012) para vigas, Park e Lee (2015) para placa de compósito laminado, onde são demonstrados a eficiência do MEE para esse tipo de material.

Um grande número de trabalhos a cerca de dinâmica estrutural e propagação de ondas utilizando MEE são encontrado . Fang et al. (2017) apresentam uma investigação teórica e experimental dos *band-gap* para uma viga de cristal phononic (PC) imersa em água. Lee (2018) propõe o uso do MEE para análises de vibração em placas finas. Zhu et al. (2018) abordam sobre problemas vibracionais em três dimensões em estruturas de tubos transportando fluidos. Kiryu e Gan (2018) apresentam estudo vibracional em pista pavimentada, modelada como placa fina, onde o uso de MEE na formulação apresenta grande eficiência e exatidão com um único elemento .

O MEE é uma ferramenta muito utilizada na área estrutural e tem sua eficiência comprovada ao longo do seu desenvolvimento, além disso o MEE tem se disseminado à outras áreas, como por exemplo a sismologia, encontrado em Seriani e Priolo (2011) onde abordam o MEE para o estudo de propagação de ondas acústicas em meios heterogêneos fazendo uma simulação numérica para uma estrutura geológica típica. Tsuboi (2014) apresentam duas simulações de um modelo em grande escala da terra, onde desenvolvem as principais propriedades do MEE relacionadas à cálculos numéricos de sismogramas sintéticos para modelos tridimensionais da terra.

Os trabalhos citados nessa seção utilizam o MEE para diversas aplicações. Para este trabalho é proposta uma abordagem utilizando o MEE aplicado a estruturas de LTA. Pesquisas foram realizadas e não se encontrou trabalhos abordando análise com MEE para essas estruturas. Deste modo o desenvolvimento do presente trabalho aparece como uma nova forma de estudar a dinâmicas dessas estruturas, de forma exata e eficiente.

## 3 Formulação Teórica

O presente capítulo tem o objetivo de apresentar o desenvolvimento das formulações do Método do Elemento Espectral (MEE) para estruturas unidimensionais de barras (Elementar, Love e Mindlin-Herman) e cabos. Todas as formulações foram desenvolvidas para estruturas sem descontinuidades com dois nós. As equações das barras e cabos são derivadas das soluções exatas de cada elemento no domínio da frequência e a função de interpolação é descrita da solução analítica da equação da onda seguindo a abordagem Lee (2009). Em seguida é apresentada a teoria sobre os efeitos das cargas de vento e chuva em estruturas dinâmicas e uma breve abordagem acerca de espectros de potência.

### 3.1 Formulação geral

As formulações desenvolvidas nessa seção são baseadas em Lee (2009), onde é demonstrado a formulação geral do elemento espectral através dos conceitos de equilíbrio e a compatibilidade com a solução exata da equação de governo do movimento, que se relacionam diretamente com as forças e deslocamentos nodais. A equação do movimento de um elemento estrutural é dada por:

$$\mathfrak{L}\mathbf{u}(x, t) + \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(x, t) = \mathbf{p}(x, t), \quad (3.1)$$

onde  $\mathfrak{L}$  é o operador estrutural diferencial linear no domínio do tempo  $t$ , e coordenada espacial  $x$ , e  $\mathbf{M}$  o operador inercial. O subscript ( $\cdot$ ) representa as derivadas no tempo,  $\mathbf{u}(x, t)$  e  $\mathbf{p}(x, t)$  são respectivamente vetores de campos de deslocamento e de forças externas. As forças externas são representadas na forma espectral como:

$$\mathbf{p}(x, t) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \hat{\mathbf{p}}_n(x, \omega_n) e^{i\omega_n t}, \quad (3.2)$$

onde  $\hat{\mathbf{p}}_n(x, \omega_n)$  são os componentes espectrais de forças externas  $\mathbf{p}(x, t)$ , obtidas através da transformada de Fourier. A solução para a eq.(3.1) é assumida na forma espectral como

$$\mathbf{u}(x, t) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \hat{\mathbf{u}}_n(x, \omega_n) e^{i\omega_n t}, \quad (3.3)$$

sendo  $\hat{\mathbf{u}}_n(x, \omega_n)$  o componente espectral do deslocamento  $\mathbf{u}(x, t)$ . Substituindo as eq. (3.2) e (3.3) na eq. (3.1), e assumindo  $\omega_n = \omega$ , onde as componentes espectrais,  $\hat{\mathbf{u}}_n(x, \omega)$  e

$\hat{\mathbf{p}}_n(x, \omega_n)$ , satisfaçam a eq.(3.1) em cada frequência discreta  $\omega_n$ , obtêm-se a equação do movimento na forma espectral como,

$$\mathbf{L}\hat{\mathbf{u}}(x, \omega) - \omega^2\mathbf{M}\hat{\mathbf{u}}(x, \omega) = \hat{\mathbf{p}}(x, \omega), \quad (3.4)$$

onde  $\mathbf{L}$  é o operador estrutural diferencial linear no domínio da frequência e coordenada espacial  $x$ . As funções de forma ou funções de forma dinâmica dependentes da frequência são usadas para formular a matriz do elemento espectral e são obtidas a partir da equação homogênea (Lee, 2009):

$$\mathbf{L}\hat{\mathbf{u}}(x) - \omega^2\mathbf{M}\hat{\mathbf{u}}(x) = 0. \quad (3.5)$$

A solução geral assumida para eq. (3.5) é tal que:

$$\hat{\mathbf{u}}(x) = \mathbf{c}e^{ikx}, \quad (3.6)$$

onde  $\mathbf{c}$  é um vetor de constantes e  $k$  é o número de onda. Substituindo a eq.(3.6) em (3.5) têm-se um problema de autovalor,

$$\mathbf{A}(k, \omega)\mathbf{c} = 0, \quad (3.7)$$

para uma solução não trivial  $\mathbf{c}$  deve ser diferente de zero, tornando necessário que a condição da determinante de  $\mathbf{A}(k, \omega)$  seja zero,

$$\det\mathbf{A}(k, \omega) = 0, \quad (3.8)$$

produzindo assim uma equação característica para o número de ondas  $k$  da seguinte forma,

$$k^p + \alpha_{(p-1)}(\omega)k^{(p-1)} + \alpha_{(p-2)}(\omega)k^{(p-2)} + \dots + \alpha_1(\omega)k + \alpha_0(\omega) = 0. \quad (3.9)$$

A eq.(3.9) é denominada relação de dispersão ou relação de espectro. Suponha que  $k_1, k_2, \dots, k_p$  são raízes distintas em uma dada frequência  $\omega$ . De forma que o autovetor  $\mathbf{c}_i$  pode ser calculado a partir da eq. (3.7) da seguinte forma,

$$\mathbf{c}_i = a_i \begin{Bmatrix} 1 \\ \beta_i \end{Bmatrix} = a_i \phi_i \quad (i = 1, 2, \dots, p), \quad (3.10)$$

sendo o autovetor  $\mathbf{c}_i$  normalizado para que um componente do vetor normalizado  $\phi$  se torne unitário e os demais assumam  $\beta_i$ . Com as condições de contorno são determinadas as constantes  $a_i$ . Com os autovetores  $k_i$  e  $c_i$ , obtidas para satisfazer o problema de autovalor na eq.(3.7) a solução geral para a eq.(3.5) é dada como

$$\hat{\mathbf{u}}(x) = \sum_{i=1}^p \phi_i e^{-ik_i(\omega)x} a_i = \mathbf{e}(x, \omega)\mathbf{a}, \quad (3.11)$$

sendo

$$\begin{aligned} \mathbf{e}(x, \omega) &= [\phi_1 \quad \phi_2 \quad \phi_3 \quad \dots \quad \phi_p]\Lambda(x, \omega), \\ \Lambda(x, \omega) &= \text{diag}[e^{-ik_i(\omega)x}], \\ \mathbf{a} &= \{a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad \dots \quad a_p\}^T. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Para um elemento de comprimento  $L$ , com características homogêneas em seu comprimento, a eq.(3.11) apresentará as condições de contorno em seus nós  $x = 0$  e  $x = L$ , dadas pelos deslocamento e inclinações nos nós, também conhecidos como variáveis primárias, podem ser representadas,

$$\mathbf{D}(x) = \mathbf{L}_{\mathbf{GB}}\hat{\mathbf{u}}(x), \quad (3.13)$$

onde  $\mathbf{L}_{\mathbf{GB}}$  é o operador diferencial linear para as condições de contorno. Aplicando a relação da eq.(3.11) na eq.(3.13) e considerando os graus de liberdade nodais  $\mathbf{d}$  especificados em dois nós do elemento finito, têm-se,

$$\mathbf{d} = \begin{Bmatrix} \mathbf{D}(0) \\ \mathbf{D}(L) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{\mathbf{GB}}\mathbf{e}(x, \omega)|_{x=0} \\ \mathbf{L}_{\mathbf{GB}}\mathbf{e}(x, \omega)|_{x=L} \end{bmatrix} \mathbf{a} = \mathbf{B}(\omega)\mathbf{a}, \quad (3.14)$$

sendo  $\mathbf{d}$  o vetor de graus de liberdade nodais. Onde  $\mathbf{a}$  pode ser definido como,

$$\mathbf{a} = \mathbf{B}(\omega)^{-1}\mathbf{d}. \quad (3.15)$$

A solução pode ser reescrita em termos das condições nodais, substituindo eq.(3.15) em eq.(3.11),

$$\hat{\mathbf{u}}(x) = \mathbf{N}(x, \omega)\mathbf{d}, \quad (3.16)$$

sendo  $\mathbf{N}(x, \omega)$  a função de forma definida por,

$$\mathbf{N}(x, \omega) = \mathbf{e}(x, \omega)\mathbf{B}^{-1}(\omega). \quad (3.17)$$

As forças e momentos internos, são as variáveis secundárias e suas especificações constituem as condições de contorno naturais (Lee, 2009). Logo, a resistência dos materiais provê a relação entre variáveis secundárias e os campos de deslocamento na forma,

$$\mathbf{F}(x) = \mathbf{L}_{\mathbf{NB}}\hat{\mathbf{u}}(x), \quad (3.18)$$

onde  $\mathbf{L}_{\mathbf{NB}}$  é o operador diferencial linear para as condições de contorno naturais. Substituindo a eq. (3.16) em eq. (3.18) e considerando a força nodal  $\mathbf{F}$ , que são as cargas concentradas nos nós do elemento finito, tem-se,

$$\mathbf{F} = \begin{Bmatrix} -F(0) \\ +F(L) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{L}_{\mathbf{NB}}\mathbf{N}(x, \omega)|_{x=0} \\ +\mathbf{L}_{\mathbf{NB}}\mathbf{N}(x, \omega)|_{x=L} \end{bmatrix} \mathbf{d} = \mathbf{K}(\omega)\mathbf{d}, \quad (3.19)$$

onde,

$$\mathbf{K}(\omega) = \begin{bmatrix} -\mathbf{L}_{\mathbf{NB}}\mathbf{N}(x, \omega)|_{x=0} \\ +\mathbf{L}_{\mathbf{NB}}\mathbf{N}(x, \omega)|_{x=L} \end{bmatrix} = \mathbf{G}(\omega)\mathbf{B}^{-1}(\omega), \quad (3.20)$$

sendo,

$$\mathbf{G}(\omega) = \begin{bmatrix} -\mathbf{L}_{\mathbf{NB}}\mathbf{e}(x, \omega)|_{x=0} \\ +\mathbf{L}_{\mathbf{NB}}\mathbf{e}(x, \omega)|_{x=L} \end{bmatrix}.$$

A matriz  $\mathbf{K}(\omega)$  representa a matriz de rigidez dinâmica exata dependente da frequência, também denominada como matriz de rigidez dinâmica do elemento espectral.

## 3.2 Barra elementar

A teoria para o modelo de barra elementar considera apenas os esforços correspondentes as cargas axiais, fig.3.1. Este modelo apresenta uma análise simples onde as tensões e deformações são constantes ao longo de todo o comprimento do elemento e os efeitos da contração lateral devido ao efeito de *Poisson* são desprezados (Doyle, 1997).

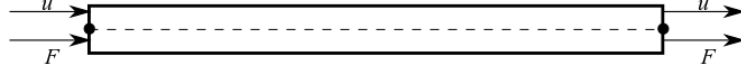


Figura 3.1 – Barra elementar.

Desta forma a deformação axial ( $\varepsilon_{xx}$ ) é dada como  $\varepsilon_{xx} = \partial u / \partial x$ .

Se a estrutura apresentar um comportamento estático linear tem-se a tensão axial dada por,  $\sigma_{xx} = E\varepsilon_{xx}$ , onde o parâmetro  $E$  é o módulo de elasticidade do material. Com a tensão ( $\sigma_{xx}$ ) obtêm-se a força axial interna ( $F$ ), a que o elemento está submetido, por:

$$F = \int_A \sigma_{xx} dA = EA \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (3.21)$$

onde  $A$  é a área de seção transversal. Aplicando o equilíbrio das forças no elemento obtêm-se:

$$-F + (F + \Delta F) = \rho A \Delta x \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}, \quad (3.22)$$

onde  $u$  é o deslocamento longitudinal e  $\rho$  é a densidade. Dividindo a eq.(3.22) por  $\Delta x$  e assumindo  $\Delta x \rightarrow 0$ , a equação do movimento é dada por:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \rho A \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}. \quad (3.23)$$

substituindo a eq. (3.21) na eq. (3.23) tem-se a equação do movimento para o modelo elementar sem amortecimento e com propriedades uniformes dado como:

$$EA \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \rho A \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 0. \quad (3.24)$$

### 3.2.1 Formulação espectral de barra elementar

Assumindo a solução geral da eq. (3.24) na forma espectral como

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^N \hat{u}(x, \omega_n) e^{i\omega_n t}. \quad (3.25)$$

Tendo em vista que as equações diferenciais lineares podem ser obtidas em termos das derivadas no tempo e no espaço, é possível aplicar a forma espectral em cada um de seus termos (Doyle, 1997). Substituindo a eq.(3.25) em eq. (3.24) temos um problema de autovalor para uma frequência discreta (como,  $\omega_n = \omega$ ) dada por,

$$EA \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2} + \omega^2 \rho A \hat{u} = 0, \quad (3.26)$$

sendo que  $\hat{u}$  indica a função resultante da transformada de Fourier,  $E = E(1+i\eta)$  representa o módulo de elasticidade complexo, sendo  $\eta$  o fator de amortecimento e  $\omega$  a frequência angular. A solução geral da eq. (3.26) é assumida como,

$$\hat{u}(x) = ae^{-ik(\omega)x}, \quad (3.27)$$

sendo  $a$  a amplitude indeterminada em cada frequência. Quando combinada com a variação no tempo, essa solução corresponde a duas ondas uma incidente e outra refletida. O  $k$  é o número de ondas, que descreve o comportamento da onda no espaço, para o caso simples em que todas as propriedades são uniformes pode ser obtidos pela Eq. (3.28),

$$k = \omega \sqrt{\frac{\rho}{E}}. \quad (3.28)$$

Assumindo valores para  $\rho$  e  $E$  e variando  $\omega$  entre 0 à  $3 \times 10^5 \text{ Hz}$ , podemos plotar o diagrama de dispersão dado na fig.3.2. Observa-se que o elemento apresenta comportamento não dispersivo, onde a curva tem comportamento linear em toda a faixa de frequência.

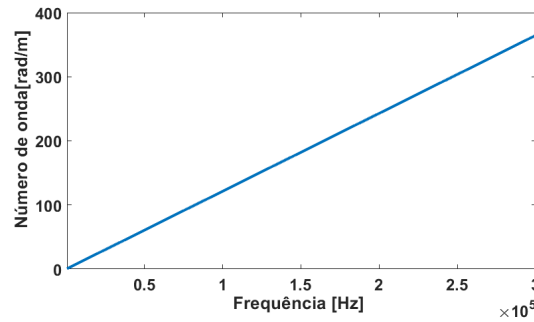


Figura 3.2 – Diagrama de dispersão para barras elementares.

A eq.(3.28) é uma relação linear em frequência. Por essa razão, tem-se velocidade de fase  $C_0$  e velocidade de grupo  $C_g$  constantes e iguais,

$$C_0 = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{EA}{A\rho}} = C_g = \frac{d\omega}{dk}. \quad (3.29)$$

Para um elemento finito de barra de comprimento  $L$ , a solução geral da eq. (3.26) pode ser obtida na forma exponencial como:

$$\hat{u}(x) = A_1 e^{-ikx} + A_2 e^{+ik(L-x)} = \mathbf{e}(x, \omega) \mathbf{a}, \quad (3.30)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathbf{e}(x, \omega) &= [e^{-ikx} \quad e^{+ik(L-x)}], \\ \mathbf{a} &= \{A_1 \quad A_2\}^T, \end{aligned} \quad (3.31)$$

sendo  $A_1$  e  $A_2$  constantes,  $e(x; \omega)$  ondas propagantes.

Os deslocamento nodais espectrais para a barra finita podem ser relacionadas ao campo de deslocamento na forma

$$\mathbf{d} = \begin{Bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \hat{u}(0) \\ \hat{u}(L) \end{Bmatrix}. \quad (3.32)$$

Substituindo a eq. (3.30) em eq.(3.32) temos,

$$\mathbf{d} = \begin{Bmatrix} \mathbf{e}(0, \omega) \\ \mathbf{e}(L, \omega) \end{Bmatrix} \mathbf{a} = \mathbf{B}(\omega)\mathbf{a}, \quad (3.33)$$

onde a matriz  $\mathbf{B}$  é expressa da forma,

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & e^{-ikL} \\ e^{-ikL} & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.34)$$

Ao suprimir o vetor constante  $\mathbf{a}$  da eq.(3.30) usando a eq.(3.33), temos o campo de deslocamento no elemento de barra finita em termos dos seus Graus De Liberdade (GDL) nodais dada por,

$$\hat{u} = \mathbf{N}_R(x, \omega)\mathbf{d}, \quad (3.35)$$

onde,

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_R(x, \omega) &= \mathbf{e}(x, \omega)\mathbf{B}^{-1}(\omega)[N_{R1} \quad N_{R2}], \\ N_{R1}(x, \omega) &= \csc(kL)\sin[k(L-x)], \\ N_{R2}(x, \omega) &= \csc(kL)\sin(kx). \end{aligned}$$

A força axial interna da barra na forma espectral é dada por:

$$\hat{F} = EA \frac{\partial \hat{u}}{\partial x}. \quad (3.36)$$

Deste modo as forças axiais nodais espectrais para a barra elementar finita são definidas como,

$$\hat{\mathbf{F}} = \begin{Bmatrix} \hat{F}_1 \\ \hat{F}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\hat{F}(0) \\ +\hat{F}(L) \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} ikEA & -ikEAe^{-ikL} \\ -ikEAe^{-ikL} & ikEA \end{bmatrix}}_{\Phi} \mathbf{a}. \quad (3.37)$$

Sendo

$$\hat{\mathbf{F}} = \Phi \mathbf{B}^{-1} \mathbf{d} \quad (3.38)$$

onde  $\mathbf{K}(\omega) = \mathbf{B}^{-1}\Phi$  onde  $\mathbf{K}(\omega)$  é a matriz do elemento espectral para o elemento de barra elementar finita, que pode ser transcrita como:

$$\mathbf{K}(\omega) = \frac{EA}{L} \frac{ikL}{(1 - e^{-2kL})} \begin{bmatrix} 1 + e^{-i2kL} & -2e^{-i2kL} \\ -2e^{-i2kL} & 1 + e^{-i2kL} \end{bmatrix}. \quad (3.39)$$

Utilizando base trigonométrica Lee (2009) obtêm a matriz de rigidez como,

$$\mathbf{K}(\omega) = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{12} & K_{22} \end{bmatrix}, \quad (3.40)$$

onde,

$$\begin{aligned} K_{11} &= K_{22} = (kL)cot(kL), \\ K_{12} &= -(kL)csc(kL). \end{aligned}$$

### 3.3 Barra Love

A barra Love, assim como a elementar, possui apenas um modo de deformação. Esta teoria considera a deformação longitudinal o qual causa uma deflexão transversal devido o efeito de *Poisson*. Assim a deformação transversal está diretamente relacionada a deformação axial  $\varepsilon_t = -\nu\varepsilon_{xx}$ . Deste modo o sistema passa a ter uma componente de velocidade transversal:

$$\dot{u}_t = r\dot{\varepsilon} = -\nu r\dot{\varepsilon} = -\nu r \frac{\partial \dot{u}}{\partial x}, \quad (3.41)$$

onde  $r$  é a distância até o centro da seção transversal da barra. Assim a energia cinética total da barra é dada por (Doyle, 1997) como:

$$\mathbb{T} = \frac{1}{2} \int_V \rho [\dot{u}(x, t)^2 + \dot{u}_t(x, t)^2] dV = \int_0^L \int_A \rho [\dot{u}^2 + \nu^2 r^2 \frac{\partial \dot{u}^2}{\partial x}] dA dx, \quad (3.42)$$

sendo  $\dot{u}$  dependente apenas de  $x$ , a eq.(3.42) pode ser reescrita após a integração em relação a área, expressa na forma,

$$\mathbb{T} = \int_0^L \rho A \dot{u}^2 + \nu^2 \rho J \left( \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} \right)^2 dx, \quad (3.43)$$

sendo  $J$  o momento polar de inércia. A energia de deformação é dada por:

$$\mathbb{U} = \int_0^L EA \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx, \quad (3.44)$$

e a energia potencial obtida com:

$$\mathbb{V} = - \int_0^L (F_0 u_0 + F_L u_L). \quad (3.45)$$

Onde  $F_0$  e  $F_L$  são as forças axiais nos nós de coordenada 0 e  $L$  respectivamente. Têm-se o princípio de Hamilton definido como (Petyt,2010):

$$\int_{t_2}^{t_1} \mathbb{T} - (\mathbb{U} + \mathbb{V}) dt = 0. \quad (3.46)$$

Substituindo as equações de energia da estrutura no principio de *Hamilton* tem-se:

$$\int_{t_2}^{t_1} \left\{ \int_0^L \left[ \rho A \dot{u} \delta \dot{u} + \nu^2 \rho J \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{u}}{\partial x} - EA \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \delta u}{\partial x} \right] dx + F \delta u \Big|_0^L \right\} dt = 0. \quad (3.47)$$



Integrando por partes e multiplicando todos os termos por  $\delta u$ , obtêm-se :

$$\int_{t_2}^{t_1} \left\{ \int_0^L \left[ EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \nu^2 \rho J \frac{\partial^2 \ddot{u}}{\partial x^2} - \rho A \ddot{u} \right] \delta u dx - \left[ EA \frac{\partial u}{\partial x} + \nu^2 \rho J \frac{\partial \ddot{u}}{\partial x} - F \right] \delta u \Big|_0^L \right\} dt = 0. \quad (3.48)$$

Assim a equação do movimento pode ser expressa da forma

$$EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \nu^2 \rho J \frac{\partial^2 \ddot{u}}{\partial x^2} - \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \quad (3.49)$$

As tensões axiais interna são obtidas por,

$$F = EA \frac{\partial u}{\partial x} + \nu^2 \rho J \frac{\partial \ddot{u}}{\partial x}. \quad (3.50)$$

Com  $\nu$  ou  $J$  muito pequenos a ponto de poder ser negligenciado, então a equação do movimento volta a ser eq. (3.24).

### 3.3.1 Formulação espectral para a barra Love

Assumindo a solução dada na eq.(3.25) pode-se reescrever a equação do movimento no domínio da frequência como:

$$EA \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2} - \omega^2 \nu^2 \rho J \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2} + \rho A \omega^2 \hat{u} = 0. \quad (3.51)$$

A solução geral para o caso Love é dada pela eq.(3.26). O Número de ondas para essa teoria pode ser obtida através do agrupamento dos termos semelhantes da equação, como demonstrado:

$$\begin{aligned} (EA - \nu^2 \omega^2 \rho J) \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2} + \rho A \omega^2 \hat{u} &= 0 \\ \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2} + \frac{\rho A \omega^2}{(EA - \nu^2 \omega^2 \rho J)} \hat{u} &= 0. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Deste modo para teoria Love,  $k$  é dado pela eq. (3.53),

$$k = \pm \omega \sqrt{\frac{\rho A \hat{u}}{(EA - \nu^2 \omega^2 \rho J)}}. \quad (3.53)$$

A fig. 3.3 mostra o diagrama de dispersão para a barra Love, onde pode ser observado que até 150 KHz, apresenta comportamento não dispersivo. As propagações de ondas para as teorias elementar e Love se assemelham até 100 KHz. Isso, no entanto, não implica que ambas as teorias são precisas para esse nível de frequência (Mei,2015).

A velocidade de fase e grupo são obtidas com:

$$\begin{aligned} C_0 = \frac{\omega}{k} &= \pm \sqrt{\frac{EA - \nu^2 \omega^2 \rho J}{\rho A}}, \\ C_g = \frac{d\omega}{dk} &= \sqrt{\frac{E}{\rho}} \left[ 1 - \nu^2 \frac{\rho J \omega^2}{\rho A} \right]^{\frac{3}{2}}. \end{aligned} \quad (3.54)$$

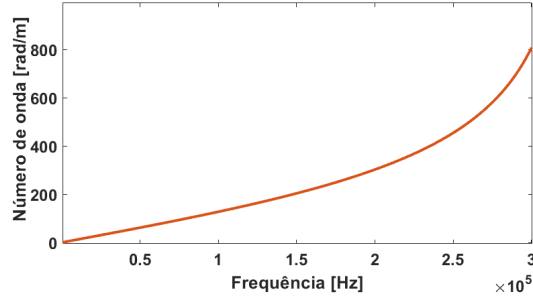


Figura 3.3 – Diagrama de dispersão para barra Love.

Os deslocamentos nodais  $\mathbf{d}$  para o modelo de love são iguais aos obtidos no modelo elementar apresentados nas eq.(3.32) e eq.(3.33), sendo que

$$\mathbf{a} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 1 & e^{-ikL} \\ e^{-ikL} & 1 \end{bmatrix} \mathbf{d} \quad (3.55)$$

As forças internas nos nós são encontradas usando a seguinte equação,

$$\hat{F} = EA \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + \nu^2 \rho \omega^2 J \frac{\partial \hat{u}}{\partial x}. \quad (3.56)$$

De forma que as forças nodais espectrais para o elemento de barra Love podem ser dadas matricialmente como:

$$\hat{\mathbf{F}} = \underbrace{\begin{bmatrix} ik(-EA + \nu^2 \rho J \omega^2) & ik(-EA + \nu^2 \rho J \omega^2)e^{-ikL} \\ ik(-EA + \nu^2 \rho J \omega^2)e^{-ikL} & ik(-EA + \nu^2 \rho J \omega^2) \end{bmatrix}}_{\Phi} \mathbf{a}. \quad (3.57)$$

Substituindo eq. (3.55) na eq. (3.57), sendo as duas matrizes quadradas com as mesmas dimensões, determina-se a matriz de rigidez dinâmica que representa a barra Love.

$$\hat{\mathbf{F}} = \Phi \mathbf{B}^{-1} \mathbf{d}, \quad (3.58)$$

onde  $\mathbf{K}(\omega) = \mathbf{B}^{-1}\Phi$ .

### 3.4 Barra Mindlin-Herrmann

A teoria de barra de *Mindlin-Herrmann*, conhecida como barra de dois modos, assim como Love também considera a deformação transversal devido ao efeito *Poisson*, porém a teoria leva em conta a deformação de cisalhamento devido ao deslocamento transversal (Doyle, 1997). Para essa metodologia cada nó possuem dois graus de liberdade, sendo deslocamento longitudinal  $u$  e deslocamento transversal  $\bar{v}$ , onde  $\bar{v} = \psi_x y$ ,  $\psi$  representa a contração transversal.

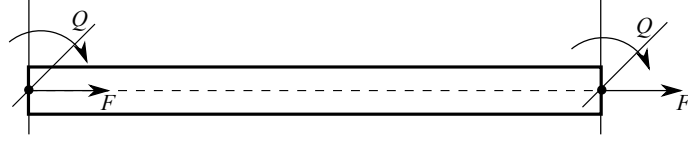


Figura 3.4 – Barra Mindlin-Herrmann.

A energia de deformação e cinética são definidas como:

$$\begin{aligned} \mathbb{U} &= \frac{1}{2} \int_0^L \left[ (2\mu + \lambda) A \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \psi^2 \right] + 2\lambda A \frac{\partial u}{\partial x} \psi + \mu I \left[ \frac{\partial \psi}{\partial x} \right]^2 \right] dx, \\ \mathbb{T} &= \frac{1}{2} \int_0^L \left[ \rho A \dot{u}^2 + \rho I \dot{\psi}^2 \right] dx. \end{aligned} \quad (3.59)$$

As equações do movimento para o modelo são dadas por Doyle (1997) como,

$$(2\mu + \lambda) A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \lambda A \frac{\partial \psi}{\partial x} = \rho A \ddot{u}, \quad (3.60)$$

$$\mu I K_{r1} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - (2\mu + \lambda) A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \lambda A \frac{\partial u}{\partial x} = \rho I K_{r2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}.$$

As condições de contorno associadas são especificadas em termos das eq. (3.61):

$$\begin{aligned} F &= (2\mu + \lambda) A \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda A \psi && \text{para } u, \\ Q &= \mu I K_{r1} \frac{\partial \psi}{\partial x} && \text{para } \psi, \end{aligned} \quad (3.61)$$

onde  $I$  é a inércia da seção transversal,  $\mu$ ,  $\lambda$ ,  $K_{r1}$  e  $K_{r2}$  são um conjunto de equações acopladas, definidas como:

$$\begin{aligned} \mu &= E/(2(1 + \nu)), \\ \lambda &= \nu E/((1 + \nu)(1 - 2\nu)), \\ K_{r1} &= \frac{12}{\pi^2}, \\ K_{r2} &= K_{r1} \left( \frac{1 + \nu}{0.87 + 1.12\nu} \right)^2. \end{aligned} \quad (3.62)$$

Como existem duas variáveis dependentes  $u$  e  $\psi$ , e os coeficientes são constantes, assume-se soluções nas formas:

$$\begin{aligned} u &= U e^{-i(kx - \omega t)}, \\ \psi &= \Psi e^{-i(kx - \omega t)}. \end{aligned} \quad (3.63)$$

Após a substituição 3.61, obtêm-se o seguinte sistema:

$$\begin{bmatrix} -(2\mu + \lambda) A k^2 + \rho A \omega^2 & -ik\lambda A \\ ik\lambda A & -\mu I K_{r1} k^2 - (2\mu + \lambda) A + \rho I K_{r2} \omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ \Psi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (3.64)$$

Fazendo o determinante da matriz igual a zero, encontra-se a equação característica e assim é determinado o valor do número de onda ( $k$ ).

$$a_2 k^4 + a_1 k^2 + a_0 = 0, \quad (3.65)$$

onde,

$$\begin{aligned} a_2 &= \mu A I K_{r1} (2\mu + \lambda), \\ a_1 &= \left[ 4\mu(\mu + \lambda) A^2 - \rho I K_{r2} \omega^2 (2\mu + \lambda) A + \rho A \omega^2 \mu I K_{r1} \right], \\ a_0 &= -\rho A \omega^2 \left[ A (2\mu + \lambda) - \rho I K_{r2} \omega^2 \right]. \end{aligned} \quad (3.66)$$

De forma que  $k$  pode ser facilmente obtido aplicando a fórmula de *Baskara*.

$$k^2 = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2 a_0}}{2a_2}, \quad (3.67)$$

por ser uma equação quadrática, apresenta dois números de ondas distintos, sendo  $k_1$  real e o  $k_2$  complexo. O comportamento do segundo modo por ser complexo é bem diferente como mostrado em fig. 3.5, pois apresenta comportamento evanescente abaixo de sua frequência de corte  $\omega_c$ , e acima apresenta comportamento propagante na estrutura.

$$\omega_c = \sqrt{\frac{(2\mu + \lambda) A}{\rho I K_{r2}}} \quad (3.68)$$

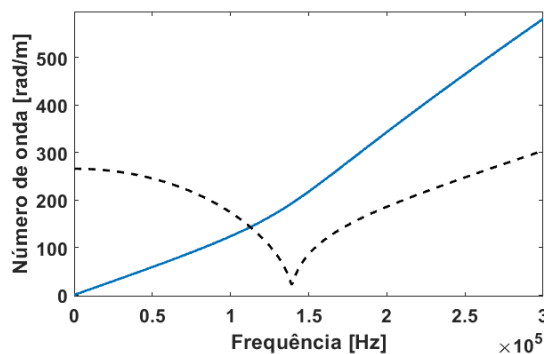


Figura 3.5 – Diagrama de dispersão barra Mindlin-Herrmann.

### 3.4.1 Formulação espectral para a barra Mindlin-Herrmann

Transformando as equações do movimento para a forma espectral obtêm-se as seguintes equações:

$$(2\mu + \lambda) A \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2} + \lambda A \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial x} + \omega^2 \rho A \hat{u}, \quad (3.69)$$

$$\mu I K_{r1} \frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial x^2} - (2\mu + \lambda) A \hat{\psi} - \lambda A \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + \omega^2 \rho I K_{r2} \hat{\psi}.$$

As condições de contorno tornam-se:

$$\begin{aligned}\widehat{F} &= (2\mu + \lambda) A \frac{\partial \widehat{u}}{\partial x} + \lambda A \widehat{\psi}, \\ \widehat{Q}_\psi &= \mu I K_{r1} \frac{\partial \widehat{\psi}}{\partial x}.\end{aligned}\tag{3.70}$$

Os deslocamentos nodais  $\mathbf{d}$  para a barra Mindlin-Herrmann de comprimento  $L$  são dados na forma,

$$\mathbf{d} = \begin{Bmatrix} \widehat{u}_1 \\ \widehat{\psi}_1 \\ \widehat{u}_2 \\ \widehat{\psi}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \widehat{u}(0) \\ \widehat{\psi}(0) \\ \widehat{u}(L) \\ \widehat{\psi}(L) \end{Bmatrix},\tag{3.71}$$

sendo os deslocamentos longitudinal e transversal dados pelas equações:

$$\widehat{u}_x = A_1 R_1 e^{-ik_1 x} + A_2 R_2 e^{-ik_2 x} - A_3 R_1 e^{-ik_1(L-x)} - A_4 R_2 e^{-ik_1(L-x)},\tag{3.72}$$

$$\widehat{\psi}_x = A_1 e^{-ik_1 x} + A_2 e^{-ik_2 x} + A_3 e^{-ik_1(L-x)} + A_4 e^{-ik_1(L-x)}.$$

Onde  $R$  é a razão da amplitude dada por (Krawczuk, Grabowska e Palacz, 2006):

$$R_i = \frac{ik_i \lambda A}{-(2\mu + \lambda) A k_i^2 + \rho A \omega^2},\tag{3.73}$$

onde  $i$  varia entre 1 e 2. Os coeficientes  $A_1, A_2, A_3$  e  $A_4$  podem ser encontradas substituindo as condições de contorno de deslocamento nodais do elemento:

$$\mathbf{a} = \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} R_1 & R_2 & -R_1 p_1 & -R_2 p_2 \\ 1 & 1 & p_1 & p_2 \\ R_1 p_1 & R_2 p_2 & -R_1 & -R_2 \\ p_1 & p_2 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}^{-1}}^{-1} \begin{Bmatrix} \widehat{u}_0 \\ \widehat{\psi}_0 \\ \widehat{u}_L \\ \widehat{\psi}_L \end{Bmatrix},\tag{3.74}$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{d},$$

onde  $p_1 = e^{-ik_1 L}$  e  $p_2 = e^{-ik_2 L}$ .

Substituindo a derivada das soluções de deslocamento apresentadas em eq.(3.72) nas condições de contorno da eq.(3.70), sendo  $\widehat{F}(0) = \widehat{F}_1$ ,  $\widehat{Q}(0) = \widehat{Q}_1$ ,  $\widehat{F}(L) = \widehat{F}_2$  e  $\widehat{Q}(L) = \widehat{Q}_2$ , obtêm-se o sistema:

$$\widehat{\mathbf{F}} = \begin{Bmatrix} \widehat{F}_1 \\ \widehat{Q}_1 \\ \widehat{F}_2 \\ \widehat{Q}_2 \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -ik_1 M_3 & -ik_2 M_3 & ik_1 M_3 p_1 & ik_2 M_3 p_2 \\ -N_1 + M_2 & -N_2 + M_2 & (-N_1 + M_2) p_1 & (-N_2 + M_2) p_2 \\ -ik_1 M_3 p_1 & -ik_2 M_3 p_2 & ik_1 M_3 & ik_2 M_3 \\ (-N_1 + M_2) p_1 & (-N_2 + M_2) p_2 & -N_1 + M_2 & -N_2 + M_2 \end{bmatrix}}_{\Phi} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{Bmatrix},\tag{3.75}$$

Sendo  $N_1 = (2\mu + \lambda)A$ ,  $M_2 = \lambda A$ ,  $N_1 = ik_1 M_1 R_1$  e  $N_2 = ik_2 M_1 R_2$ . Substituindo Eq. (3.74) na Eq. (3.75), sendo as duas matrizes quadradas com as mesmas dimensões, determina-se a matriz de rigidez dinâmica que representa a barra Mindlin-Herrmann .

$$\hat{\mathbf{F}} = \mathbf{B}^{-1}\Phi\mathbf{d}, \quad (3.76)$$

onde a matriz de rigidez dinâmica é expressa da forma  $\mathbf{K}(\omega) = \mathbf{B}^{-1}\Phi$ .

### 3.5 Cabo

O modelo de cabo, é adotado como uma viga modelo *Euler-Bernoulli*, sujeito a uma carga axial, mostrada na fig.3.6.

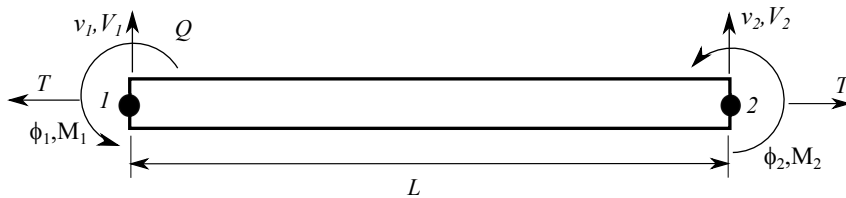


Figura 3.6 – viga *Euler-Bernoulli* sujeito a uma carga axial.

A contribuição da força axial no momento de equilíbrio é dado por:

$$T \text{seno}(\theta)\Delta x \approx T \frac{dv}{dx} \Delta x, \quad (3.77)$$

sendo  $T$  assumida como uma força axial de tração, assim a equação diferencial governante para a vibração livre não amortecida para o cabo é dada por:

$$EI(x) \frac{\partial^4 v}{\partial x^4}(x, t) + \rho A(x) \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(x, t) - T \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x, t) = q. \quad (3.78)$$

Considerando os coeficientes como constantes ao longo de todo o elemento, a solução de deslocamento pode ser assumida da forma:

$$v(x, t) = v_0 e^{-i(kx - \omega t)}. \quad (3.79)$$

sendo  $v_0$  a amplitude. Substituindo a solução do deslocamento na equação de governo temos,

$$EI k^4 + T k^2 - \rho A \omega^2 = 0. \quad (3.80)$$

Onde os números de ondas são dados por :

$$k_1 = \pm \sqrt{\frac{-T + \sqrt{T^2 + 4EI\rho A\omega^2}}{2EI}}, \quad (3.81)$$

$$k_2 = \pm \sqrt{\frac{-T - \sqrt{T^2 + 4EI\rho A\omega^2}}{2EI}},$$

as eq.3.81 demonstram que o número de ondas para o elemento de cabo esta diretamente relacionada a tensão axial ao qual o elemento esta submetido, sendo que aumentando a tensão a estrutura tende a ter um comportamento não dispersivo como mostrado na fig. 3.7 .

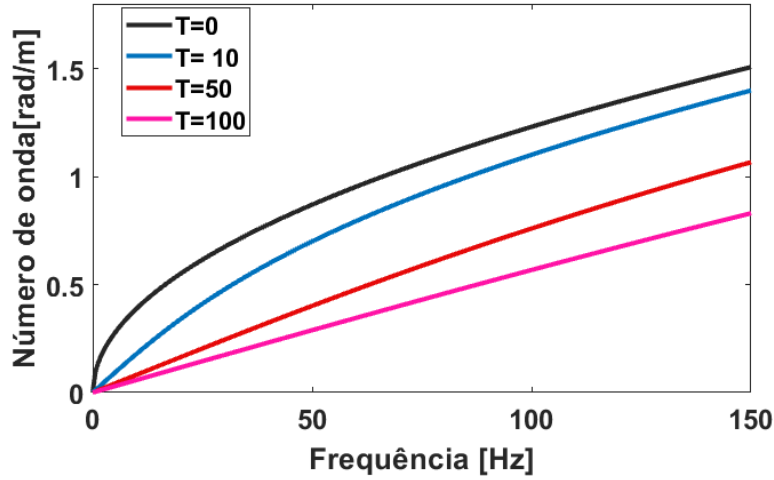


Figura 3.7 – Diagrama de dispersão para cabo em diferentes tensões em [Kgf].

### 3.5.1 Formulação espectral para cabo

Assumindo a solução espectral na forma exponencial dada por,

$$v(x, t) = \sum_{n=0}^N \hat{v}(x, \omega_n) e^{i\omega_n t}, \quad (3.82)$$

a equação do movimento no domínio da frequência é expressa na forma,

$$EI \frac{d^4 \hat{v}(x, \omega)}{dx^4} - \omega^2 \rho A \hat{v}(x, \omega) - T \frac{d^2 \hat{v}(x, \omega)}{dx^2} = q. \quad (3.83)$$

Sendo a solução geral dada por:

$$\hat{v}(x, \omega) = A_1 e^{-ikx} + A_2 e^{-kx} + A_3 e^{ik(L-x)} + A_4 e^{k(L-x)} = \mathbf{e}(x; \omega) \mathbf{a}, \quad (3.84)$$

onde,

$$\begin{aligned} \mathbf{e}(x, \omega) &= [e^{-ikx}, e^{-kx}, e^{-ik(L-x)}, e^{-k(L-x)}], \\ \mathbf{a} &= [A_1, A_2, A_3, A_4]^T. \end{aligned} \quad (3.85)$$

Na solução geral para o cabo, assim como em uma viga, existem 4 modos de ondas, sendo dois modos incidentes e dois refletidos, com um propagante e outro evanescente.

Os deslocamentos nodais espectrais e inclinações do elemento de viga estão relacionados ao campo de deslocamento no nó 1 em  $x = 0$  e no nó 2 em  $x = L$ , dados por,

$$\mathbf{d} = \begin{Bmatrix} \widehat{v}_1 \\ \widehat{\phi}_1 \\ \widehat{v}_2 \\ \widehat{\phi}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \widehat{v}(0) \\ \widehat{v}'(0) \\ \widehat{v}(L) \\ \widehat{v}'(L) \end{Bmatrix}, \quad (3.86)$$

Substituindo eq.(3.84) em eq.(3.86) a equação pode ser escrita na forma matricial como:

$$\mathbf{d} = \begin{Bmatrix} e(0, \omega) \\ e'(0, \omega) \\ e(L, \omega) \\ e'(L, \omega) \end{Bmatrix} \mathbf{a} = \mathbf{B}(\omega)\mathbf{a}, \quad (3.87)$$

onde,

$$\mathbf{B}(\omega) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & e^{-ikL} & e^{-kL} \\ -ik & -k & -ike^{-ikL} & -ke^{-kL} \\ e^{-ikL} & e^{-kL} & 1 & 1 \\ -ike^{-ikL} & -ke^{-kL} & -ik & -k \end{bmatrix}. \quad (3.88)$$

Definindo  $\mathbf{a}$  como,

$$\mathbf{a} = \mathbf{B}^{-1}(\omega)\mathbf{d}. \quad (3.89)$$

As forças espectrais resultantes para o cabo, força cisalhante  $V$  e momento fletor  $M$  são definidas como,

$$\begin{aligned} V &= EI \frac{\partial^2 \widehat{v}}{\partial x^2}, \\ M &= -EI \frac{\partial^3 \widehat{v}}{\partial x^3}, \end{aligned} \quad (3.90)$$

assim as forças nodais podem ser representadas matricialmente com,

$$\widehat{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} -V(0) \\ -M(0) \\ V(L) \\ M(L) \end{bmatrix} = EI \underbrace{\begin{bmatrix} -ik^3 & k^3 & ik^3 e^{-ikL} & -e^{ikL} \\ k^2 & -k^2 & k^2 e^{-ikL} & -k^2 e^{-kL} \\ ik^3 e^{-ikL} & -k^3 e^{-kL} & -ik^3 & k^3 \\ -k^2 e^{-ikL} & k^2 e^{-kL} & -k^2 & k^2 \end{bmatrix}}_{\Phi} \mathbf{a}. \quad (3.91)$$

Substituindo eq. (3.89) em eq.(3.91) podemos relacionar os deslocamento com as forças, chegando a matriz de rigidez espectral para o elemento de cabo dada como  $\mathbf{K}(\omega) = \mathbf{B}^{-1}\Phi$ , como,

$$\widehat{\mathbf{F}} = \Phi \mathbf{B}^{-1}(\omega)\mathbf{d}. \quad (3.92)$$

O deslocamento dependendo da frequência dentro de um elemento é dado pelo interpolação nodal, dado pelo vetor  $d$  eliminando o vetor de constantes. De forma que o deslocamento é dado por:

$$\widehat{v}(x, \omega) = \mathbf{g}(x, \omega)\mathbf{d}, \quad (3.93)$$

onde  $\mathbf{g}$  é a função de forma para o cabo,

$$\mathbf{g}(x, \omega) = \mathbf{e}(x, \omega)\mathbf{B}^{-1}(\omega). \quad (3.94)$$



### 3.5.1.1 Carregamento distribuído

As cargas distribuídas podem ser incorporadas na formulação espectral. Para determinar a contribuição da carga distribuída para a relação de rigidez, multiplicando a equação diferencial para  $v(x)$  pela função de forma  $\mathbf{g}(x)$  e integrar entre os limites do comprimento do elemento (Doyle,1997).

$$\int_0^L [EI\mathbf{g}''^T(x)\mathbf{g}''(x) + T\mathbf{g}'^T(x)\mathbf{g}'(x) + \omega^2\rho A\mathbf{g}^T(x)\mathbf{g}(x)]dx = \int_0^L \hat{q}(x)\mathbf{g}^T(x)\mathbf{g}(x)dx, \quad (3.95)$$

sendo ' a representação de derivada espacial. Dessa forma , a relação de rigidez para o cabo com uma carga distribuída, pode ser escrita como

$$\hat{\mathbf{F}} + \int_0^L \hat{q}(x)\mathbf{g}^T(x)\mathbf{g}(x)dx = \mathbf{K}(\omega)\mathbf{d}. \quad (3.96)$$

## 3.6 Matriz de rotação

As matrizes de rigidez dinâmica são descritas no sistema de coordenadas locais, já que as direções axial e transversal são definidas em termos do eixo do elemento (Hutton, 2004). Como as torres são constituídas por barras conectadas em ângulos diferentes é necessário transformar as coordenadas locais em coordenadas globais. A fig. 3.8 mostra uma barra inclinada em relação a um ângulo  $\theta$ .

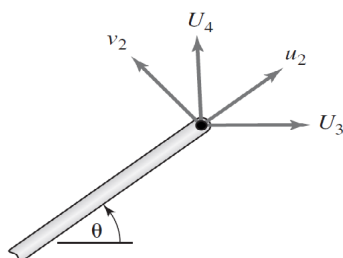


Figura 3.8 – Relação de elementos e deslocamentos globais em um único nó ( Hutton, 2004).

Os deslocamentos nodais na estrutura são dados por  $u_2$  e  $v_2$  e os deslocamentos globais correspondentes dados por  $U_3$  e  $U_4$ . Como os deslocamentos globais e locais devem ser os mesmos então temos,

$$\begin{aligned} u_2 &= U_3\cos\theta + U_4\sen\theta, \\ v_2 &= -U_3\sen\theta + U_4\cos\theta, \end{aligned} \quad (3.97)$$

sendo matricialmente dado por,

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sen(\theta) \\ -\sen(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix}. \quad (3.98)$$

A relação para o primeiro nó um é feita da mesma forma, de modo que a matriz de transformação completa para as barras é dada como,

$$\beta = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \text{sen}(\theta) & 0 & 0 \\ -\text{sen}(\theta) & \cos(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\theta) & \text{sen}(\theta) \\ 0 & 0 & -\text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix}. \quad (3.99)$$

A eq.(3.99) é usado para as teorias de barra elementar e Love, já para a estrutura do tipo Mindlin-Hermann é necessário aplicar a matriz de transformação correspondente a um pórtico, dado da seguinte forma:

$$\beta = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \text{sen}(\theta) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\theta) & \text{sen}(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{Bmatrix}. \quad (3.100)$$

Deste modo a matriz de rigidez dinâmica global para o sistema é dada por,

$$K_g(\omega) = [\beta]^T [\mathbf{K}(\omega)] [\beta]. \quad (3.101)$$

## 3.7 Excitação determinística e aleatória

As velocidades e direções dos fluxos de vento e chuva mudam com o espaço e tempo. Seguindo as práticas atuais como abordadas nos trabalhos Meynen et al. (2005), Li et al. (2018), Tian et al. (2018), as cargas resultantes desse fenômenos são determinadas a partir de testes em túnel de vento, simulações de campo ou simulações numéricas. Esta seção trata sobre os efeitos das cargas de vento e chuva em estruturas dinâmicas. A abordagem esta limitada á resposta devido as cargas ao longo das estruturas, deste modo tem por objetivo a discussão de alguns conceitos gerais para o embasamento dos fenômenos.

### 3.7.1 Cargas de vento

A ação do vento quando entra em contato com um corpo gera forças aerodinâmicas, que representam a soma do campo de pressão que atua sobre o corpo e as forças de atrito. A diferença de pressão a jusante e montante das estruturas, causam um pressão de arrasto, que é consideravelmente maior que o arrasto viscoso do ar . Devido a influencia da rugosidade dos solo, que causa uma força de atrito, a velocidade do vento varia conforme ocorre mudança de altitude Alkmim(2017). A velocidade do vento varia também no tempo, Krée e Soize (1986) demonstram em seu estudo essa flutuação do vento no tempo, onde

em uma análise de um longo intervalo de tempo é revelado diversas escalas de flutuações. A fig. 3.9 mostra o espectro de potência típico para da velocidade do vento a 100 metros acima do solo.

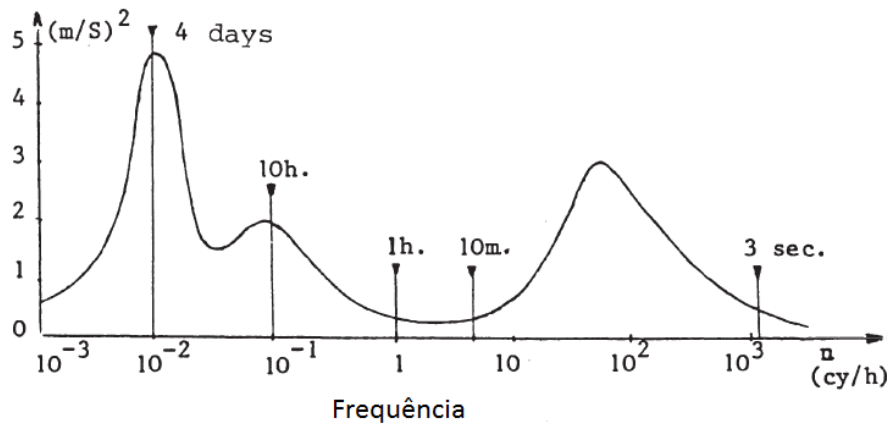


Figura 3.9 – Espectro de potência típico da velocidade do vento a 100 m do solo- (Krée e Soize, 1986).

Krée e Soize (1986) observaram que em baixa frequência a energia é concentrada durante um período de quatro dias que corresponde à escala de tempo dos movimentos geostróficos. Outro pico é geralmente encontrado em 12 ou 24 horas e tem origem nos fenômenos térmicos de alternância noite-dia. Uma parte importante da energia está concentrada ao longo de um período da ordem de um minuto e corresponde à escala de tempo dos movimentos turbulentos. No espectro é demonstrado que no período de 10 minutos a 2 horas a velocidade média será quase estável, deste modo nesse intervalo a velocidade instantânea é dada por,

$$\bar{V}(x, t) = V_m(x) + \mathbf{v}(x, t), \quad (3.102)$$

sendo  $V_m$  a velocidade média e  $\mathbf{v}$  a variação da velocidade. A norma NBR-6123 (1988), que aborda sobre forças devido ao vento em edificações, admite que a velocidade média se mantém constante por um período de até 10 minutos, tendo assim uma resposta puramente estática. Entretanto as flutuações do vento podem introduzir em estruturas esbeltas, como nos cabos, oscilações importantes na direção de atuação do vento.

De acordo com a NBR-5422 (1985), norma brasileira que trata sobre projeto de linhas de transmissão de energia elétrica, o cabo está sujeito as cargas decorrentes do seu peso próprio, da pressão do vento horizontal uniformemente distribuído e o componente da tração horizontal. A velocidade básica do vento  $V_b$ , é definida como a velocidade do vento referido a um período de retorno de 50 anos, a uma altura de 10 m em relação ao solo, sendo referente a um período de integração de 10 minutos medido em um terreno com grau de rugosidade B. Na ausência de medições específicas para a região implementada a linha de transmissão, a velocidade básica  $V_b$  pode ser adotada a partir da fig. 3.10.

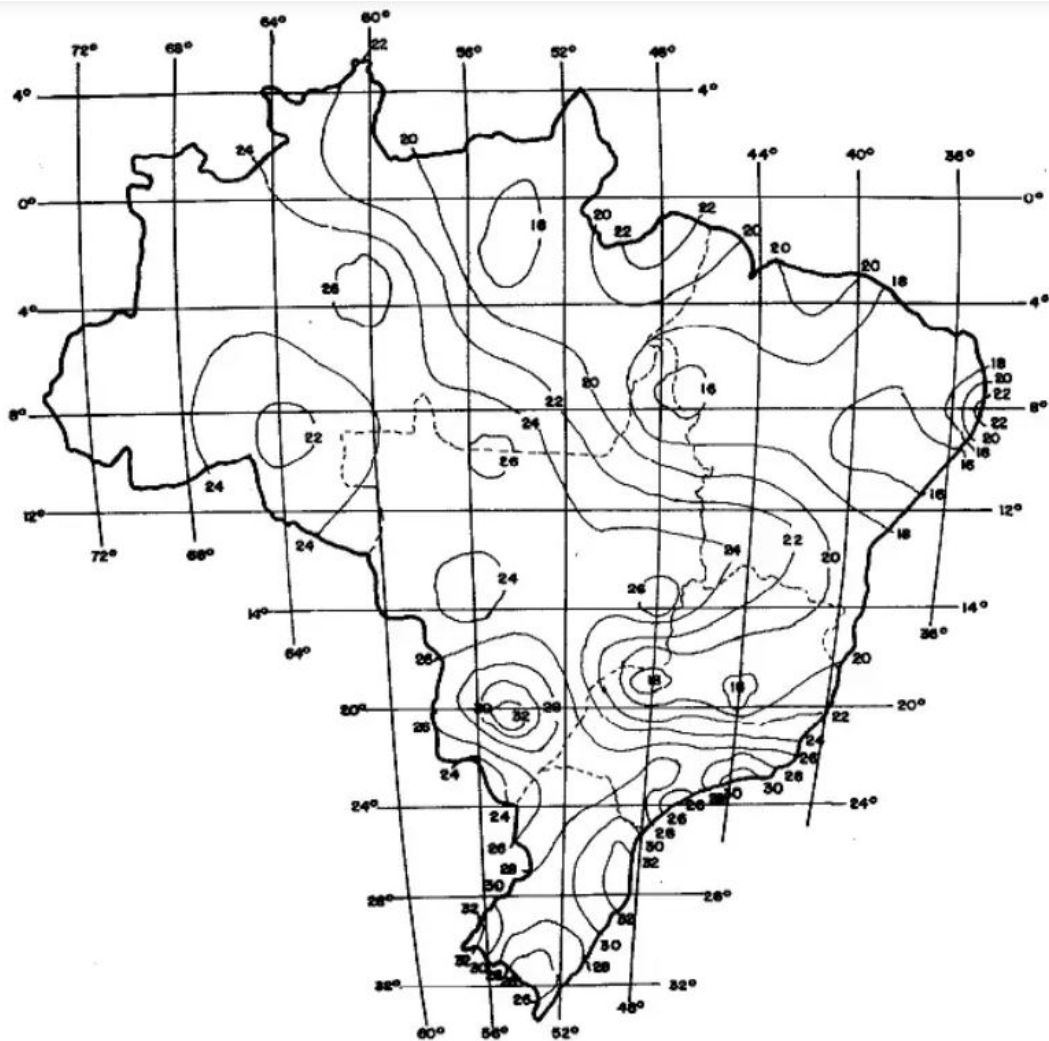


Figura 3.10 – Velocidade base do vento - (NBR-5422,1985).

Para a análise da LTA, a norma determina a adoção de uma velocidade projeto  $V_p$  que é dada por pela correção de  $V_b$  levando em conta o grau de rugosidade do terreno da região, o intervalo de tempo necessário para que o obstáculo responda a ação do vento e a altura do obstáculo, de modo que a velocidade de projeto é dada por:

$$V_p = K_r K_d \left( \frac{h}{10} \right)^{1/n} V_b, \quad (3.103)$$

sendo  $h$  a altura em que o vento esta atuando,  $K_r$  coeficiente de rugosidade dado na Tab. 1,  $K_d$  relação período de integração e rugosidade do terreno fig. 3.11, o coeficiente  $n$  e o fator de correção que dependente da rugosidade do terreno e do período de integração disposto na tab. 2.

Tabela 1 – coeficiente de rugosidade  $K_r$ .(NBR-5422,1985).

Cat. do terreno	Características do terreno	$K_r$
A	Vastas extensões de águas; áreas planas costeiras	1.08
B	Terrenos abertos com poucos obstáculos	1.0
C	Terrenos com obstáculos numerosos e pequenos	0.85
D	Áreas urbanizadas; terrenos com muitas árvores altas	0.67

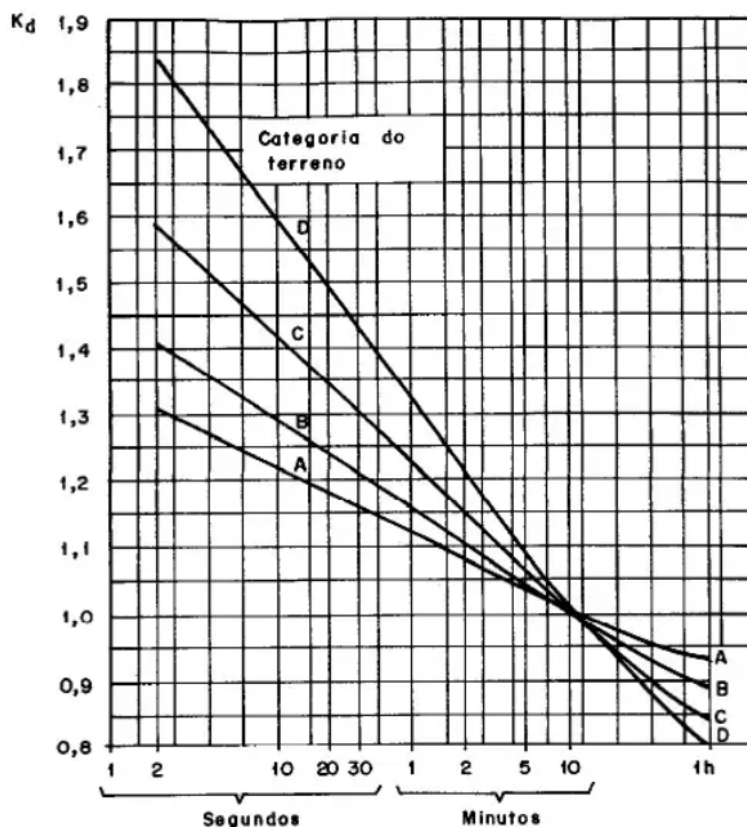


Figura 3.11 – Relação entre categoria do terreno e período de integração - (NBR-5422,1985).

Tabela 2 – Fator de correção do período de integração e rugosidade do terreno  $n$ . (NBR-5422,1985).

Categoria do terreno	n	
	t = 2 seg	t=30 seg
A	13	12
B	12	11
C	10	9.5
D	8.5	8

A pressão dinâmica de referência é dada pela fórmula:

$$P_v = \frac{1}{2} \rho_v V_p^2, \quad (3.104)$$

sendo  $\rho_v$  a massa específica do ar obtida por:

$$\rho_v = \frac{1,293}{(1 + 0,00367)\lambda} \left( \frac{16000 + 64\lambda - \kappa}{16000 + 64\lambda + \kappa} \right)$$

onde  $\lambda$  é a temperatura, em  $^{\circ}C$  e  $\kappa$  a altitude da região. A ação dos ventos no cabo gera um esforço aplicado perpendicularmente ao cabo no ponto de fixação a cada suporte deste vão, dada por:

$$F_v = P_v C_a \alpha d \frac{L}{2} \sin^2 \theta, \quad (3.105)$$

onde  $C_a$  representa o coeficiente de arrasto, igual a 1,  $\alpha$  o fator de efetividade,  $d$  o diâmetro do cabo em metros,  $L$  comprimento do vão considerado em metros e  $\theta$  o ângulo de incidência do vento ( $\leq 90^{\circ}$ ).

Em contrapartida, a NBR-6123 (1988), apresenta formulação diferente para o cálculo da ação dos ventos em edificações, sendo a força global na direção do vento determinada por:

$$F_v = C_a P_v A, \quad (3.106)$$

onde neste caso  $C_a$  determinada pelo número de *Reynolds* e  $A$  a área que esta sobre efeito da carga do vento, que para os cabos é dada como  $A = Ld$ , e a pressão dinâmica obtida através da velocidade de projeto  $V_p$  é determinada por:

$$P_v = \frac{1}{2} \rho V_p^2 = 0,613 V_p^2, \quad (3.107)$$

sendo  $V_p$  a velocidade básica corrigida pelos fatores de topografia, da influência da rugosidade do terreno além do fator relacionado a conceitos probabilísticos.

### 3.7.2 Cargas de chuva

Fu, Li e Yi (2015) derivam a fórmula da carga de chuva com base no estado de movimento das gotículas e na lei de conservação do momento. A trajetória da gota de chuva é dada por (Choi, 1997):

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} &= 6\pi\mu r \left( U - \frac{dx}{dt} \right) \frac{C_a R_{ey}}{24}, \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} &= 6\pi\mu r \left( V - \frac{dy}{dt} \right) \frac{C_a R_{ey}}{24}, \\ m \frac{d^2 z}{dt^2} &= 6\pi\mu r \left( W - \frac{dz}{dt} \right) \frac{C_a R_{ey}}{24} - mg \left( 1 - \frac{\rho_v}{\rho_w} \right). \end{aligned} \quad (3.108)$$

onde  $r$  é o raio da gota de chuva,  $\mu$  a viscosidade do ar,  $\rho_v$  a densidade do ar,  $\rho_w$  a densidade da água,  $U, V, W$  são as componentes da velocidade do vento nas direções  $x, y, z$  respectivamente,  $R_{ey}$  o número de Reynolds e  $C_a$  o coeficiente de arrasto dado por Gunn e Kinzer (1948), e  $m$  a massa da gota de chuva dada por:

$$m = \left( \frac{4\pi r^3}{3} \right) \rho_w. \quad (3.109)$$

O número de Reynolds é obtido por :

$$R_{ey} = \left( \frac{2\rho_v r}{\mu} \right) \sqrt{\left( U - \frac{dx}{dt} \right)^2 + \left( V - \frac{dy}{dt} \right)^2 + \left( W - \frac{dz}{dt} \right)^2}. \quad (3.110)$$

Substituindo eq. (3.110) em eq.(3.108) temos

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{3C_{ax}\rho_v}{8r\rho_w} \left( U - \frac{dx}{dt} \right) \sqrt{\left( U - \frac{dx}{dt} \right)^2 + \left( V - \frac{dy}{dt} \right)^2 + \left( W - \frac{dz}{dt} \right)^2}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{3C_{ay}\rho_v}{8r\rho_w} \left( V - \frac{dy}{dt} \right) \sqrt{\left( U - \frac{dx}{dt} \right)^2 + \left( V - \frac{dy}{dt} \right)^2 + \left( W - \frac{dz}{dt} \right)^2}, \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= \frac{3C_{az}\rho_v}{8r\rho_w} \left( W - \frac{dz}{dt} \right) \sqrt{\left( U - \frac{dx}{dt} \right)^2 + \left( V - \frac{dy}{dt} \right)^2 + \left( W - \frac{dz}{dt} \right)^2} - g \left( 1 - \frac{\rho_v}{\rho_w} \right). \end{aligned} \quad (3.111)$$

No campo eólico da camada limite atmosférica, as gotas de chuva devem ser influenciadas pelo fluxo de vento e assim apresentam uma componente de velocidade horizontal, tornando necessário estudar seus coeficientes de arrasto na direção horizontal para simular trajetórias de gota de chuva com precisão. Como simplificação os coeficientes de arrasto nas direções X, Y e Z dados respectivamente por  $C_{ax}$ ,  $C_{ay}$  e  $C_{az}$ , onde  $C_{az}$  é tomado partir dos resultados calculados por Gunn e Kinzer (1948) e  $C_{ax}$ ,  $C_{ay}$  são igualados ao coeficiente de arrasto de uma esfera, que é aproximadamente 0.47.

As variáveis utilizadas para estudar as características da carga de chuva no plano vertical e sua velocidade horizontal são a taxa de captura específica  $N(d)$  que esta relacionada ao diâmetro da gota de chuva  $d$ , e à razão de velocidade  $\gamma(h, d, \alpha)$  relacionados ao diâmetro da gota de chuva, sua altura  $h$  e ao expoente da lei de potência  $\alpha$ :

$$N = \frac{R_v}{R_h}, \quad (3.112)$$

sendo  $R_v$  e  $R_h$  a intensidade da chuva no sentido vertical e horizontal. Assim a razão de velocidade  $\gamma$  é dada por:

$$\gamma(h, d, \alpha) = \frac{V_h(h, d, \alpha)}{V_p(h, \alpha)}. \quad (3.113)$$

Choi (2001) demonstra que a velocidade de uma gota de chuva  $V_h$  é maior que a velocidade do vento  $V_p$  correspondente na direção horizontal. Em uma posição mais alta, a diferença de velocidade é muito pequena, pois a velocidade do vento varia suavemente, e a força de arrasto que atua sobre uma gota é tão pequena que a velocidade do pingo de chuva e a velocidade do vento podem manter uma boa consistência. Em uma posição mais baixa, a velocidade do vento varia drasticamente com a altitude devido ao atrito da superfície, e essa variação causa uma grande diferença de velocidade. A fig. 3.12 demonstra o fenômeno que a velocidade da gota de chuva horizontal é maior que a velocidade do vento correspondente.

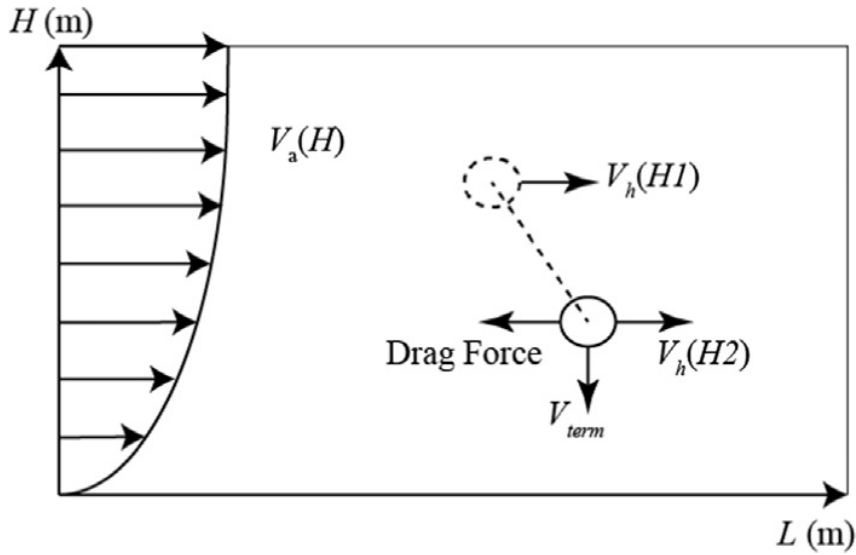


Figura 3.12 – Relação de velocidade de chuva e vento (Fu, Li e Yi, 2015).

Segundo Fu, Li e Yi (2015) a gota mantém seu estado de movimento devido à inércia, assim pequenas gotículas têm inércias menores e são suscetíveis a forças de arrasto que mudam seus estados de movimento tornando suas razões de velocidade próximas a 1. Em contrapartida as gotas grandes têm suas razões de velocidade maiores, de modo que quanto maior o diâmetro da gota maior será o expoente da lei de potência, tornando pior a consistência da velocidade do vento horizontal e a velocidade da gota de chuva. Em resumo  $\gamma$  é proporcional ao diâmetro  $d$  da gota de chuva e a  $\alpha$ , e inversamente proporcional a  $h$ .

A fórmula de ajuste para a razão de velocidade é derivada como:

$$\gamma(h, d, \alpha) = (0.2373h^{(-0.5008)}) \left(\frac{d}{3}\right)^{0.8} \left(\frac{\alpha}{0.12}\right) + 1, \quad (3.114)$$

sendo  $h$  adotado em metros e  $d$  em milímetros (Fu, Li e Yi, 2015).

A relação entre a intensidade da chuva no plano horizontal e vertical é dada pela taxa de captura específica  $N$  que também é igual à taxa de fluxo da chuva por unidade de área no plano vertical em relação ao plano horizontal. Portanto  $N$  pode também ser dado por:

$$N(d) = \frac{R_v(d)}{R_h(d)} = \frac{V_h}{V_{term}} = \frac{V_p \gamma}{V_{term}}, \quad (3.115)$$

onde  $V_h$  é a velocidade horizontal e  $V_{term}$  a velocidade terminal na direção vertical.  $V_{term}$  de uma gota de chuva pode ser calculada usando a fórmula de ajuste:

$$V_{term}(d) = 9.40(1 - e^{-0.557d^{1.15}}). \quad (3.116)$$

Se  $V_{term}$  é maior que  $V_h$  então a velocidade da chuva na vertical será maior que a velocidade horizontal.

Para uma chuva com diâmetros de gota  $d$  temos a intensidade definida por:

$$R(d) = 3600V_{gota}n(d)\frac{\pi d^3}{6}, \quad (3.117)$$



onde  $V_{gota}$  é a velocidade de uma gota perpendicular ao plano do espectro da gota de chuva e  $n(d)$  que é o número de gotas de chuva com diâmetro  $d$  por unidade de volume. Deste modo  $N$  é obtido por,

$$N(d) = \frac{R_v(d)}{R_h(d)} = \frac{3600V_h n_v(d)(\pi d^3/6)}{3600V_{term} n_h(d)(\pi d^3/6)} = \frac{V_h n_v(d)}{V_{term} n_h(d)}. \quad (3.118)$$

Sendo eq. (3.118) e eq.(3.115) iguais, temos que o espectro no sentido horizontal  $n_h$  e no sentido vertical  $n_v$  são iguais. De modo que espectro da chuva é definido por Marshall e Palmer (1948) como,

$$n_h(d) = n_0 e^{(-\Lambda d)}, \quad (3.119)$$

onde  $n_0 = 8 \times 10^3$  em  $1/(m^3 mm)$  e  $\Lambda = 4.1 R_h^{-0.21}$  em  $1/mm$ ,  $R_h$  é a intensidade da chuva horizontal.

No processo de colisão da gota de chuva com a estrutura, sua velocidade  $V_h$  se torna zero. Sendo o tempo de colisão, baseada na lei de conservação do momento, é dada por:

$$\int_0^\tau f(t)dt + \int_{V_h}^0 m dv = 0, \quad (3.120)$$

em que a força média de impacto  $F(\tau)$  da gota em um intervalo de tempo  $\tau$  é

$$F(\tau) = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau f(t)dt = \frac{mV_h}{\tau} = \frac{1}{6\tau} \rho_w \pi d^3 V_h. \quad (3.121)$$

A carga da chuva com um diâmetro específico  $d$  atuando na estrutura em um volume unitário deve adotar o espectro no plano vertical de modo que  $F_d$  é dado por,

$$F_d = F(\tau) n_v(d). \quad (3.122)$$

Logo, a carga referente a chuva atuando na estrutura é obtida por Fu, Li e Yi (2015) a partir da seguinte equação:

$$F_c = F_d \forall = \frac{1}{3} \rho_w \pi d^3 n_v(d) V_h^2 A = \frac{1}{3} \rho_w \pi d^3 n_h(d) (\gamma(h, d, \alpha) V_a(h, t))^2 A, \quad (3.123)$$

onde  $\forall$  é o volume do fluxo atuando na estrutura e a pressão da chuva é dada por:

$$P_c = \frac{1}{3} \rho_w \pi d^3 n_h(d) (\gamma(h, d, \alpha) V_p(h, t))^2. \quad (3.124)$$

### 3.7.3 Carga de vento e chuva

Segundo Fu e Li (2016a) a influência das chuvas na propriedade aerodinâmica de condutores de transmissão é significativo e o efeito de acoplamento das cargas de vento e chuva são mais complicadas do que a carga de vento puro. Conseqüentemente, é necessário estudar vento e chuva simultâneos para entender melhor o comportamento dinâmico da

estrutura. A ação das cargas de vento e chuva agindo simultaneamente é desenvolvida como o somatório das forças.

$$F_{total} = F_v + F_c. \quad (3.125)$$

### 3.7.4 Densidade espectral

Por serem altamente irregulares e dinâmicas as cargas devido aos fenômenos naturais como os descritos nas seções anteriores são melhores representadas utilizando uma *Power Spectral Density* (PSD) traduzido como densidades espectrais de potência. Segundo Newland (2005) o teorema de Wiener-Khinchin relaciona uma função de autocorrelação  $R(\tau)$  a um domínio de frequência de PSD  $S(\omega)$  por um par de transformadas de Fourier.

Na literatura existem diversos espectros que representam excitações altamente dinâmicas, como os de ruído branco, Kaimal e Kanai-Tajima. Existem grandes diferenças entre as flutuações geradas por diferentes espectros, sendo que o ruído branco apresenta um comportamento mais dispersivo em torno da média e não têm significância física, porém é muito usado devido sua simplicidade. Kanai-Tajimi, que é um espectro de segunda ordem, também mostra grande dispersão mas apresenta um histórico de domínio de tempo mais suave que o espectro de ruído branco. Já o espectro de Kaimal, espectro de primeira ordem, apresenta um perfil mais significativo apresentando boa autocorrelação (Murtagh, Basu e Broderick, 2004).

O ruído branco pode ser observado como uma idealização na qual o conteúdo da frequência do sinal é igualmente distribuído pela banda de frequência. Isso pode ser visto mais claramente na definição apresentada por Shin e Hammond (2008) que partindo do conceito de um processo de Poisson a função de autocorrelação pode ser definida como  $R_{xx}(\tau) = a^2 e^{-2\lambda_0|\tau|}$ . Com o aumento do valor de  $\lambda_0$  a função  $R_{xx}(\tau)$  se torna estreita, isso pode estar relacionado com o conceito de ruído branco quando tomamos uma situação limite. Quando  $\lambda_0 \rightarrow \infty$ , o processo é muito irregular e  $R_{xx}(\tau)$  se aproxima de um pico. Para que  $R_{xx}(\tau)$  não desapareça com o aumento de  $\lambda_0$ , pode-se aumentar o valor da amplitude ' $a$ ' em compensação. Isto elucidava a ideia de um processo aleatório "completamente irregular" cuja função de autocorrelação (autocovariância) é parecida com a função delta, assim o processo que tem essa propriedade é chamado de *ruído branco*.

O modelo PSD de ruído branco é fornecido por  $S(\omega) = S_0$ . Em alguns casos o ruído branco pode não ser fisicamente correta e outros modelos de PSD podem ser usados apresentando uma melhor representação para observações empíricas de turbulência atmosférica.

O modelo de espectro Kaimal é obtido por:

$$S_{xx}(\omega) = \left[ \frac{4S_0^2 L_{1u}/V_p}{(1 + 6\omega L_{1u}/V_p)} \right]^{5/3}, \quad (3.126)$$

onde  $L_{1u}$  é a escala de comprimento definida como

$$L_{1u} = 150m, \quad \text{ou} \quad 5h \quad \text{para} \quad h < 30. \quad (3.127)$$

O filtro de segunda ordem, Kanai-Tajimi, é fornecido por:

$$S_{xx}(\omega) = \frac{1 + 4\xi_g^2(\omega/\omega_g)S_0}{(1 + (\omega/\omega_g)^2 + 4\xi_g^2(\omega/\omega_g)^2)}, \quad (3.128)$$

a coeficiente de amortecimento característico  $\xi$  e a frequência característica  $\omega_g$  são ajustadas de acordo com a carga aleatória e o sistema. O filtro Kanai-Tajimi amplia as frequências em torno de  $\omega_g$ , atenua as frequências mais altas, mas não altera a amplitude de frequências muito baixas(Alkmim, 2017).

### 3.7.5 Autocorrelação e correlação cruzada

A autocorrelação de um sinal pode ser obtida através da equação:

$$R_{xx}(\tau) = \mathbf{E}[x(t)x(t - \tau)], \quad (3.129)$$

onde  $\tau$  é o tempo de defasagem da análise. A autocorrelação evidencia a relação linear entre um sinal em um determinado instante de tempo com o mesmo sinal com uma defasagem de  $\tau$ . O teorema de Wiener-Khinchin relaciona uma função de autocorrelação  $R_{xx}(\tau)$  ao domínio de frequência. Como pode ser visto a seguir:

$$S_{xx}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau, \quad (3.130)$$

onde  $S_{xx}(\omega)$  é definida como a PSD. Os ruídos considerados neste trabalho são definidos através da PSD.

A correlação cruzada pode ser definida analogamente através da análise dos sinais de entrada ( $x(t)$ ) e saída ( $y(t)$ ) do sistema, relacionando  $x$  em um instante  $t$  e  $y$  em um instante de  $t + \tau$ .

$$R_{xy}(\tau) = \mathbf{E}[x(t)y(t + \tau)], \quad (3.131)$$

ou ainda:

$$R_{xy}(\tau) = \mathbf{E} \left[ \int_0^{\infty} x(t)h(\tau_1)x(t + \tau - \tau_1)d\tau_1 \right]. \quad (3.132)$$

A eq. (3.132) é melhor discutida no livro de Shin e Hammond (2008), e é obtida através da relação de um sistema linearmente invariante no tempo com uma entrada e uma saída. O sinal  $y(t + \tau)$  pode ser obtido através da definição da relação entre entrada

e saída dada através da integral de convolução. A função  $h(\tau_1)$  está relacionada com as características do sistema e pode ser entendida como a função de transferência.

Ao levar a função de correlação cruzada para o domínio da frequência através da Transformada de Fourier, eq. (3.132), é possível obter a densidade espectral de potência cruzada que é intrinsecamente relacionada com a Função de Resposta em Frequência (FRF).

$$S_{xy}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau, \quad (3.133)$$

Aplicando a eq. (3.132) em eq. (3.133) pode-se obter:

$$S_{xy}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1) e^{-j\omega\tau_1} d\tau_1 \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau - \tau_1) e^{-j\omega(\tau - \tau_1)} d\tau, \quad (3.134)$$

a primeira integral é própria definição da função de transferência no domínio do tempo, a segunda é a densidade espectral de potência do sinal de entrada. Por fim, pode-se escrever que a resposta do sistema a um PSD de entrada é dado pela seguinte expressão:

$$S_{xy}(\omega) = |H(\omega)| S_{xx}(\omega), \quad (3.135)$$

onde,

$$H(\omega) = K^{-1}(\omega), \quad (3.136)$$

sendo que  $H(\omega)$  significa a função de transferência.

## 4 Resultados

No presente capítulo são apresentados os resultados numéricos obtidos nas implementações computacionais das estruturas tais como barras e cabo descritos no capítulo 3, utilizados na LTA. Para demonstrar e validar os modelos, os resultados obtidos utilizando o MEE foram comparados com aos obtidos pelo *software* comercial ANSYS. Em seguida, são abordados as ações das cargas determinísticas e randômicas dos fenômenos naturais descritos na seção 3.7 .

### 4.1 Metodologia

Dentre as subestruturas utilizados para a criação da LTA, se fez necessário a implementação e a validação dos elementos de barra elementar, Love e Mindlin-Herrmann, expostos respectivamente nas seções 3.2, 3.3 e 3.4, com as propriedades dadas na Tab. 3. Contudo, comparou-se os resultados obtidos com a solução de Krawczuk, Grabowska e Palacz (2006) afim de validar a implementação desenvolvida no *software* Matlab.

Tabela 3 – Características das barras.

Propriedades	Valor adotado
Módulo de Elasticidade [GPa]	210
Densidade [ $kg/m^3$ ]	7860
Área [ $m^2$ ]	0.02
Comprimento [ $m$ ]	4
Coefficiente de Poisson	0.3

Após a validação dos elementos, tomando a devida interpretação dos resultados expostos em comparação com Krawczuk, Grabowska e Palacz (2006), ficou claro as relações viáveis de cada elemento e seu tempo computacional. Posteriormente as análises de cada elemento de barras, foram utilizadas para modelar a torre como na fig. 4.1 baseado na estrutura proposta por Lam e Yin (2011), um torre autoportante, que foi adotado por ter dimensões reduzidas e simplificadas, tendo todas as barras a mesmas áreas seções transversais. As características adotadas para a análise da torre estão dispostas na Tab. 4.

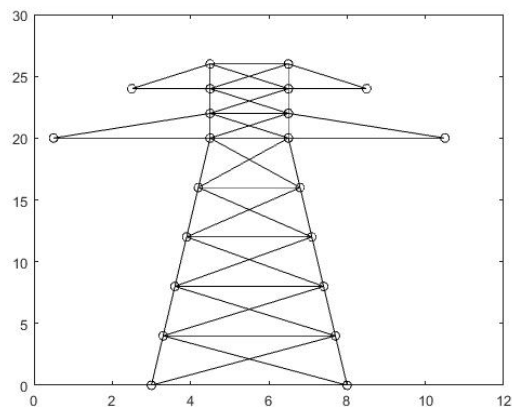


Figura 4.1 – Geometria da torre (m).

Tabela 4 – Características da torre.

Propriedades	Valor adotado
Módulo de Elasticidade [GPa]	210
Densidade [ $kg/m^3$ ]	7860
Área [ $m^2$ ]	0.01
Altura da torre [m]	26
Quantidade de nó	22
Quantidade de Barras	48
Coefficiente de Poisson	0.3

Foram desenvolvidos rotinas para os três modelos de barras utilizando MEE e para comparação com MEF foi realizado implementação da mesma estrutura em ANSYS utilizando o elemento Link 180, que representa os graus de liberdade correspondentes a uma treliça. Posteriormente a coleta de resultados da estrutura torre, estudou-se a dinâmica do elemento cabo bi-apoiado, as características geométricas e mecânicas adotadas para a sua implementação estão descritas em Tab. 5.

Tabela 5 – Características do cabo.

Propriedades	Valor adotado
Módulo de Elasticidade [GPa]	74
Densidade [ $kg/m^3$ ]	2700
Área [ $m^2$ ]	$50 \times 10^{-5}$
Comprimento [m]	100
Tensão [KN]	27

Após as implementações e validações do cabo, acoplou-se este a estrutura da torre constituída de barras elementares, demonstrada na fig. 4.2. Para isso foi utilizando a lógica de somar as matrizes de rigidez no ponto de conexão entre as estruturas, onde extraiu-se o comportamento dinâmico em análise harmônica com as devidas interpretações do sistema nos pontos destacados, sendo os pontos (a) e (b) localizados na torre nas direções  $x$  e  $y$  a

4 metros do solo, ponto (c) acoplamento, ponto (d) no cabo 1 metro do acoplamento e (e) localizado no meio do cabo.

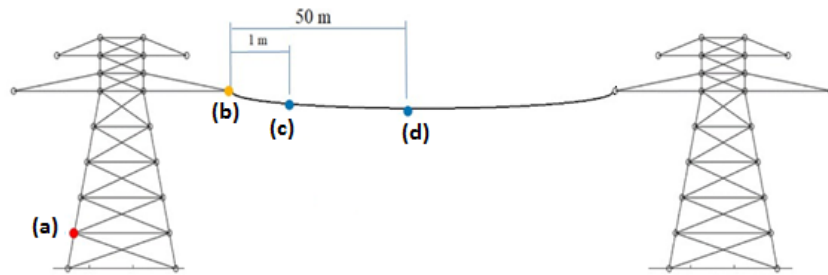


Figura 4.2 – Sistema de linha de transmissão

Em sequência, implementou-se as ações do vento e da chuva como cargas aleatória e determinística, sobre a torre e o cabo separados, depois em acoplamento. As características das excitações oriundas das cargas estão dispostas na Tab. 6

Tabela 6 – Características do vento e chuva.

Propriedades	Valor adotado
Velocidade base [m/s]	20
Densidade do ar [ $kg/m^3$ ]	1225
Densidade do gota de chuva [ $kg/m^3$ ]	1000
Fator de correção $n$	12
Categoria do terreno	B
Coefficiente de rugosidade $K_r$	1
Coefficiente $K_d$	1.6
Temperatura [ $^{\circ}C$ ]	25
Coefficiente de arrasto $C_a$	1
Expoente da lei de potência $\alpha$	0.65
Comprimento do vão [m]	100
Intensidade da chuva [mm/h]	150

Realizadas todas as análises no *software* Matlab adotando as respectivas associações de elementos e condições de contorno com suas validações no *software* ANSYS chegou-se a respostas que descrevem o comportamento vibracional do sistema LTA estudado neste trabalho e a eficiência do MEE para modelagem de estruturas acopladas e complexas.

## 4.2 Comparação entre barras

A resposta em frequência dos três modelos de barras implementados (Elementar, Love e Mindlin-Herrmann) com características descritas na Tab.3 em condição livre-livre, com excitação unitária e medição feitas no mesmo ponto ( $x = 0$ ) estão apresentados na fig. 4.3, onde mostraram-se condizentes com os resultados obtidos por Krawczuk, Grabowska e Palacz (2006). Contudo, observa-se que as teorias de barra Elementar e de Love

apresentam FRFs semelhantes, em contrapartida a teoria de Mindlin–Herrmann apresenta significativas diferenças desde baixas frequências, sendo essa discrepância mais evidente com o aumento da frequência. Esse resultado pode ser facilmente demonstrado visto que esta teoria apresenta um componente de deformação a mais, tal qual o cisalhamento devido o deslocamento transversal.

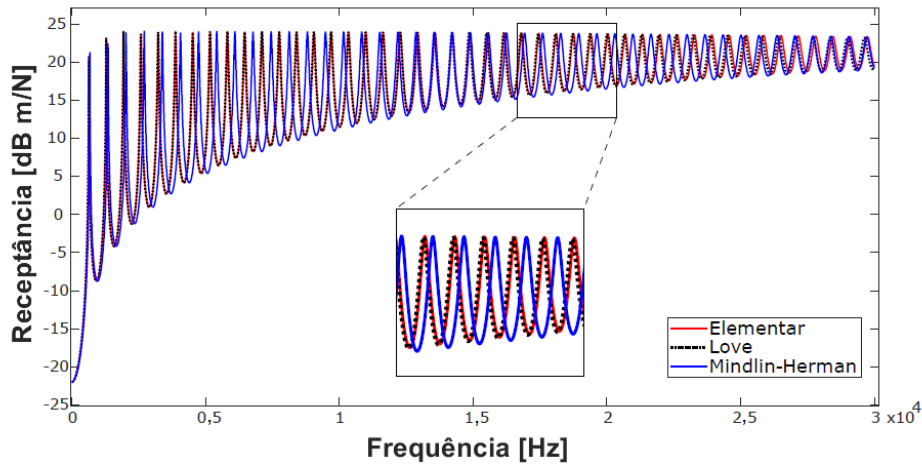


Figura 4.3 – Função resposta em frequência de uma barra, para as teorias Elementar, Love e Mindlin-Herrmann.

Na fig. 4.4 é apresentado os diagramas de dispersão para as teorias Elementar e Love, onde pode ser observado que para frequências menores que 100 kHz as curvas são coesas. A partir de 100 kHz a barra Love tem comportamento dispersivo, evidenciando o efeito da contração lateral que é considerada nessa teoria.

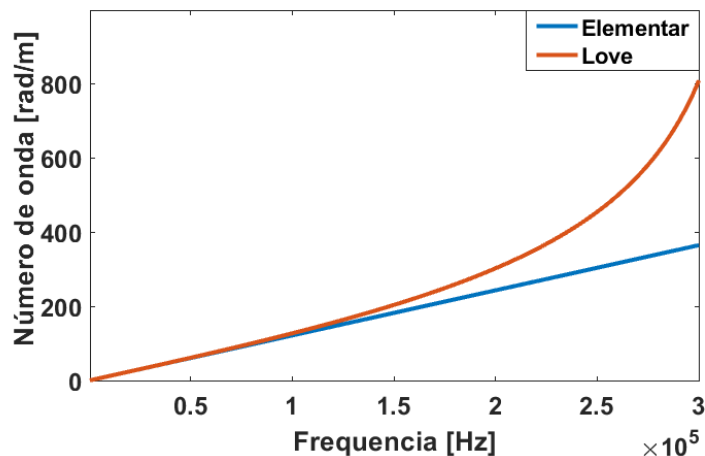
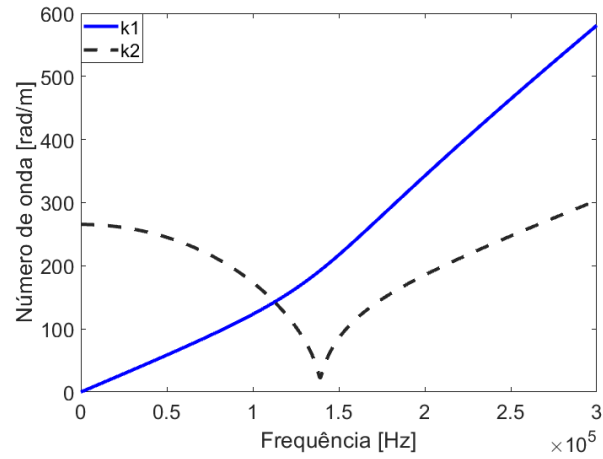


Figura 4.4 – Diagramas de dispersão para barras elementares e Love.

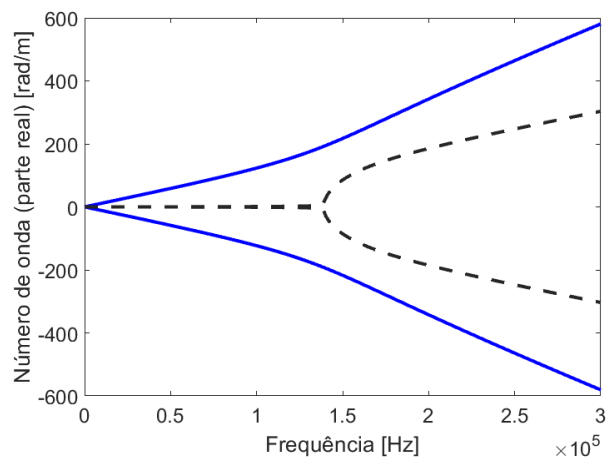
Na fig. 4.2 pode se observar o diagrama de dispersão para a teoria Mindlin-Herrmann. Onde o primeiro modo de onda ( $k_1$ ) apresenta comportamento puramente real, para baixas frequências se aproxima das demais teorias. O segundo modo ( $k_2$ ) nota-se um comportamento complexo, sendo que abaixo da frequência de corte ( $\omega_c$ ) tem valor



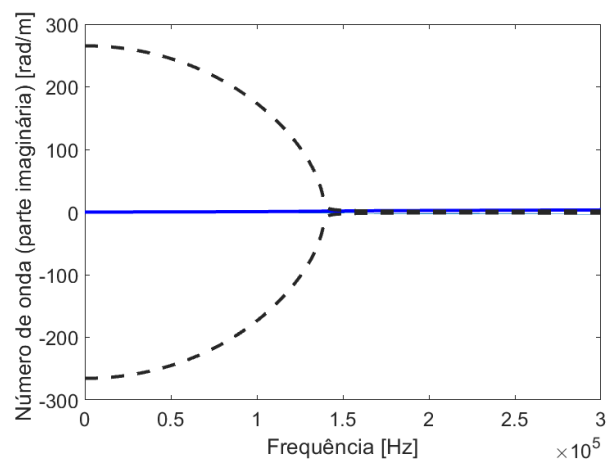
imaginário e por esse motivo tem comportamento evanescente, e acima de  $\omega_c$  apresenta valor real. Portanto, pode-se observar que abaixo da frequência de corte existe um par ondas de propagantes e um par de ondas evanescentes, e acima de  $\omega_c$ , existem dois pares de ondas propagantes.



(a)



(b)



(c)

Figura 4.5 – Diagrama de dispersão para barra Mindlin-Herrmann: (a) número de onda (b) Parte real, (c) Parte imaginária.

O tempo de processamento para as diferentes teorias é apresentado na Tab. 7, onde é perceptível uma diferença considerável no tempo de processamento, sendo o aumento constatado para as teorias mais complexas. Com base na teoria de barra elementar a barra Love apresentou tempo 53% maior para o processamento computacional enquanto que a Mindlin-Herrmann demonstrou um tempo 107% superior .

Tabela 7 – Tempo de processamento das barras.

Modelo	Tempo [s]
Elementar	0.6941
Love	1.0638
Mindlin-Herrmann	1.4402

Portanto para a escolha do modelo de barra, deve se considerar além das condições de deformações a que as barras estão sujeitas como também o tempo computacional.

### 4.3 Resultados dinâmicos da torre

Para o estudo da torre de transmissão, assumiu-se o modelo de uma treliça de aço com características de massa e rigidez contantes. A torre foi analisada numericamente utilizando o método MEE, por ser um método de solução exata, não há necessidade de discretização, de forma que o número de elementos é o mesmo que o número de barras. A fig.4.6 mostra o resultado para uma única barra da torre, onde foi observado que na banda de frequência de interesse, de 0 a 200hz, os resultados apresentaram boa coerência.

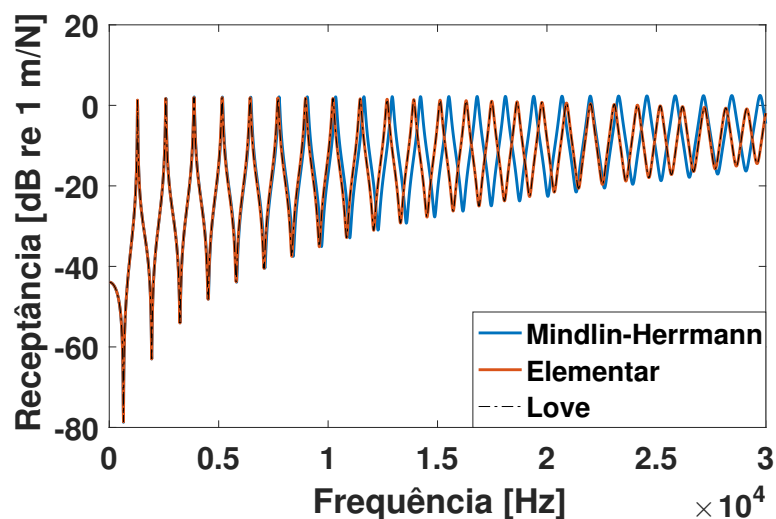


Figura 4.6 – FRF de uma barra da torre, para as teorias elementar, Love e Mindlin-Herrmann

A fig. 4.7 mostra as FRF's da torre com os três modelos de barra utilizando MEE e a barra utilizando MEF , com elemento Link 180 (ANSYS), para validar o estudo. Observa-se

que as teorias de barra Elementar e Love apresentam FRFs semelhantes em toda a faixa de frequência analisada. Comparando os resultados das barras com o MEF a proximidade das FRFs permanecem. Entretanto para essa aproximação, houve a necessidade de um grande número elementos na malha para a convergência dos resultados. Foi observado que a diferença nas amplitudes também diminuía com o aumento da discretização. Para a barra Mindlin-Herrmann é perceptível que as ressonâncias se diferenciam com o aumento da frequência. Existe ainda diferença no modos de vibrar com o aumento da frequência.

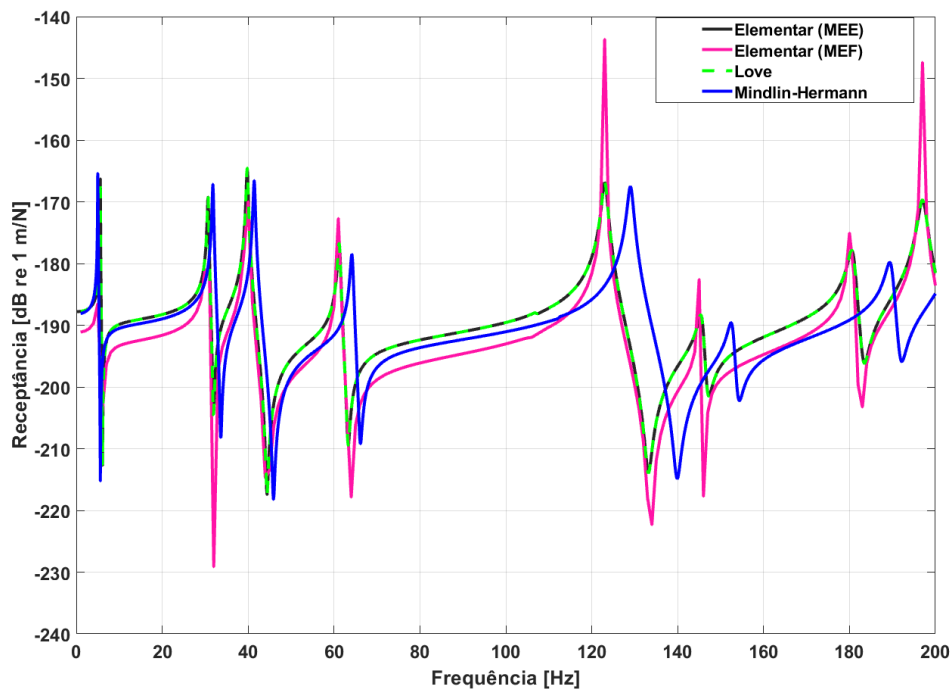


Figura 4.7 – FRFs da torre obtida para barra Elementar, Love, Mindlin-Herrmann e MEF discretizado em elementos de tamanho de 0.01 m.

A Tab. 8 mostra as frequências de ressonância obtidas usando as quatro barras, nota-se que todos os resultados obtidos para o cinco primeiros modos tem uma boa aproximação.

Tabela 8 – Frequências de ressonância das torres.

Modo	Elementar	Love	Mindlin-Herrmann	MEF
1º	5.6	5.6	5.2	5.6
2º	30.7	30.7	31.8	30.66
3º	39.8	39.8	41.3	39.75
4º	61.2	61.2	64.3	61.14
5º	123.2	123.2	129.5	122.98

Para obter a aproximação das frequências da torre obtidas com MEF e MEE para a teoria de barra Elementar vários testes com diferentes tamanhos de elementos link 180 foram necessário. A Tab. 9 mostra a relação de discretização da malha de cada barra em relação à convergência das frequências de ressonância. Comparando MEE e MEF, a

discretização com 0.01m aproximou-se melhor da solução do MEE. A fig. 4.8 apresenta o erro percentual das torres em MEF para as diferentes discretizações, onde se percebe que o erro diminui com o aumento das discretizações.

Tabela 9 – Frequência de ressonância das torres por MEF.

	MEE	MEF				
	N/A	N/A	1	0.5	0.1	0.01
1º	5.58	4.1221	5.17	5.35	5.53	5.572
2º	30.69	18.864	27.24	28.72	30.25	30.64
3º	39.79	28.388	36.88	38.18	39.45	39.76
4º	61.24	40.776	55.79	58.17	60.56	61.17
5º	123.2	83.538	104.10	118.45	120.68	122.98

O erro percentual de convergência foi feito com a seguinte formula:

$$\frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_1} * 100\% \quad (4.1)$$

onde  $\omega_1$  é a frequência obtida com MEE e  $\omega_2$  a frequência obtida com MEF, com diferentes discretizações.

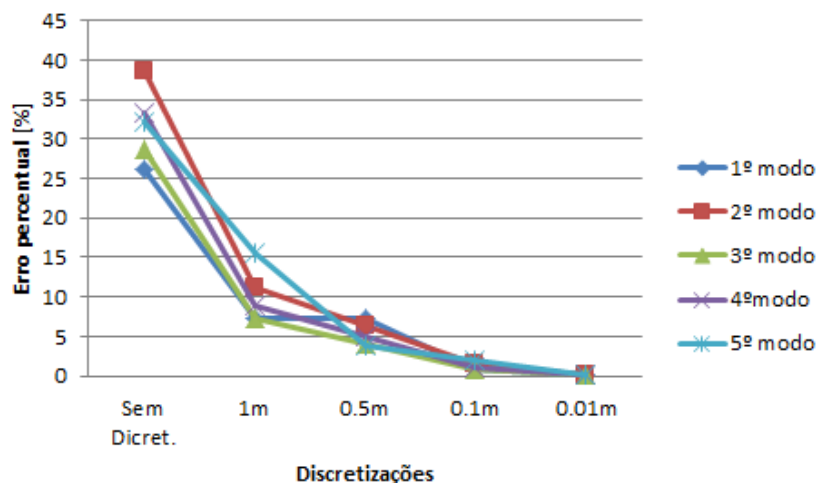


Figura 4.8 – Erro percentual para a torre analisada com MEF.

O tempo computacional para os processamentos está exposto na Tab. 10, foram obtido utilizando um micro computador Dell com processador Intel(R) core(TM) i7 e memoria RAM de 8 GB sob as mesmas condições. Nota-se que o modelo Elementar teve o menor tempo de processamento.

Tabela 10 – Tempo de processamento das torres.

Modelo	Tempo [s]
Elementar	0.897
Love	2.486
Mindlin-Hermann	3.374
Elementar MEF	108

Comparando a solução de MEE e MEF, percebeu-se que a necessidade de discretização é proporcional ao tempo computacional, por sua vez, o MEE demonstrou ser um método acurado e com um baixo custo computacional. Devido os resultados com os diferentes modelos apresentarem pequena variação na banda de frequência analisada, e o baixo custo envolvido na análise, foi adotado o modelo de barra elementar para os estudos seguintes.

## 4.4 Resultados dinâmicos do cabo

A análise do cabo foi realizada adotando uma única estrutura de alumínio, com carga de tensão e considerando o equilíbrio das forças na estrutura. A Tab. 11 mostra as frequências de ressonância do cabo estimadas pela solução analítica apresentada em Rao (2008), MEF com diferentes discretizações e MEE. O MEE apresentou os mesmos valores de frequência de ressonância da solução analítica, demonstrando a precisão do método. A solução em MEF aproxima com a solução estimada pelo MEE e solução analítica com o aumento do número de elementos na malha, o que implica em alto custo computacional.

Tabela 11 – Frequência de ressonância do cabo.

Modo	Frequência de ressonância					
	MEE	Analítico	MEF (Nº elementos)			
			10	20	50	100
1º	0.22	0.22	0.22	0.22	0.22	0.22
2º	0.45	0.45	0.44	0.45	0.45	0.45
3º	0.67	0.67	0.65	0.67	0.67	0.67
4º	0.90	0.90	0.85	0.89	0.89	0.90
5º	1.13	1.13	1.04	1.11	1.12	1.13

As frequências de ressonância estimadas com FEM foram obtidas com 10, 20, 50 e 100 elementos na malha. As três primeiras frequências convergem com 20 elementos na malha, as do quarto e quinta modos convergem a partir de 100 elementos na malha, demonstrando que o FEM é custoso em mais altas frequências. Assim, nos próximos testes foram utilizados 20 elementos na malha. A fig 4.9 mostra as FRFs obtidas com MEE e MEF, no ponto 'd' da fig. 4.2 .

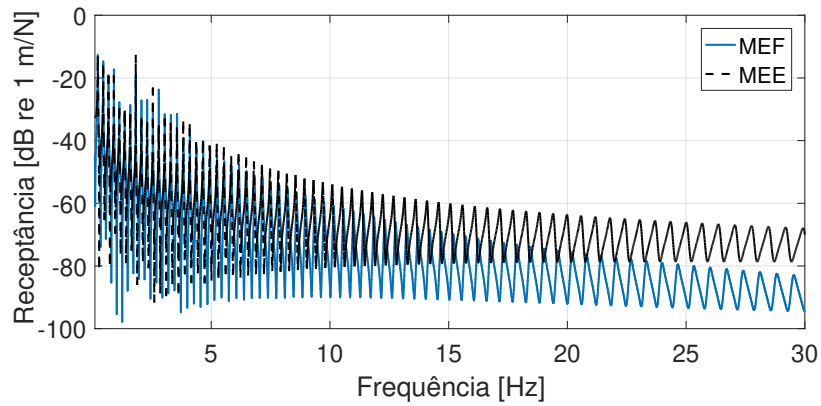


Figura 4.9 – FRF do cabo obtido com MEE e MEF

As fig.4.9 mostra as FRFs de receptância obtidas na extremidade esquerda do cabo com MEE e MEF com 20 elementos, respectivamente. As frequências de ressonância de até 10 Hz são semelhantes, a partir de 10Hz as ressonâncias têm uma pequena diferença devido à discretização assumida.

## 4.5 Resultados dinâmicos da LTA

A análise das FRFs da torre e cabo acoplados são apresentadas na fig.4.10. Foi assumido uma excitação unitária na torre no ponto 'a' (vermelho) demonstrado na fig.4.2. Os resultados obtidos apenas na torre são mostradas nas fig. 4.10 (a) a (c), mesmo com o cabo acoplado na torre a resposta em todos os pontos na torre é influenciada somente por ela, mesmo no ponto de acoplamento (amarelo), como mostrado na fig.4.10(c). A FRF obtida no cabo a um metro do acoplamento, é mostradas na fig. 4.10 (d), neste ponto, observa-se a interação do cabo e da torre, é possível perceber que a resposta do cabo é modulada pela torre. As FRF obtida no meio do cabo e no fim do cabo são apresentadas nas fig. 4.10 (e) e (f), onde nota-se um aumento da influência do cabo na resposta vibracional, contudo ainda há a modulação das FRFs pela vibração da torre.

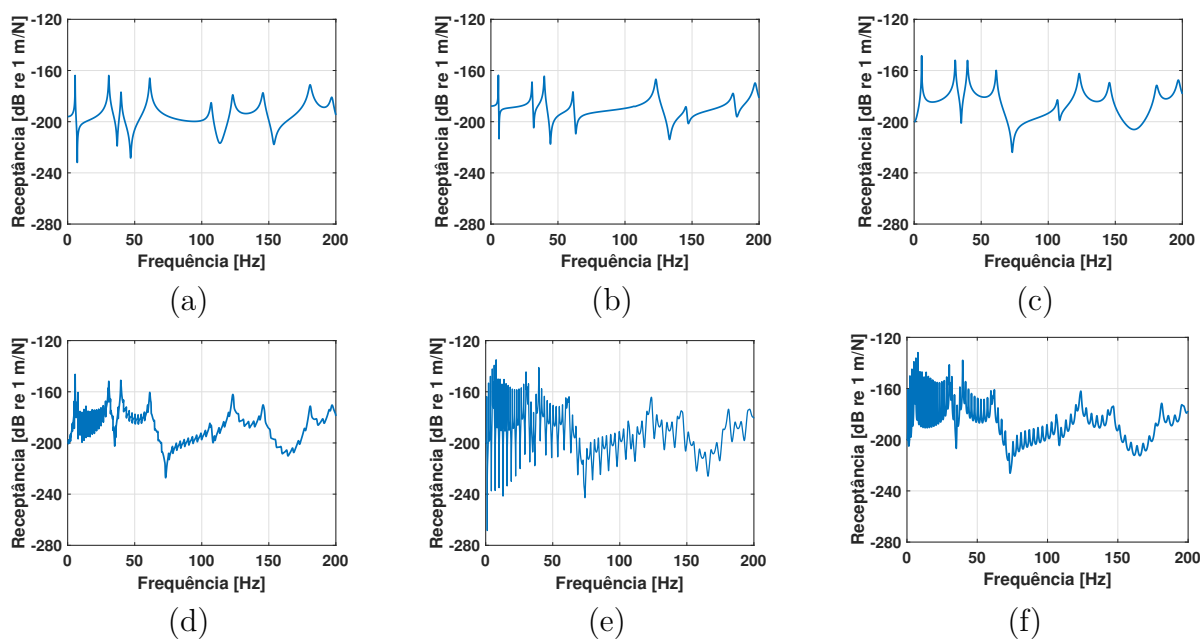


Figura 4.10 – FRF's obtidas devido a uma excitação pontual unitária na torre nos pontos, (a)(b) torre; (c) acoplamento, (d) cabo a um metro da conexão com a torre; (e) meio do cabo; (f) fim do cabo.

Geralmente as falhas por fadiga em cabos de linhas de transmissão ocorrem próximo ao ponto de acoplamento, e por esse motivo a fig. 4.11 apresenta FRFs obtidas no cabo a cada 0.1 m partindo do acoplamento até 1 m do mesmo. A contribuição dos modos da torre na resposta do cabo em diferentes posições é gradual, onde no acoplamento há apenas a contribuição da torre e a resposta do cabo aumenta a sua influência a cada ponto analisado. Contudo, a resposta da torre está contribuindo na resposta vibracional da LTA. Como demonstrado na literatura o rompimento de cabos geralmente ocorre entre 0.6 à 1 metro do acoplamento. Nesta região há uma crescente influência do cabo induzindo fadiga por vibração como demonstrado na fig. 4.11. É notado também que entre o primeiro e segundo modo da torre o cabo tem uma contribuição considerável na resposta, onde as FRFs apresentam maior densidade modal.

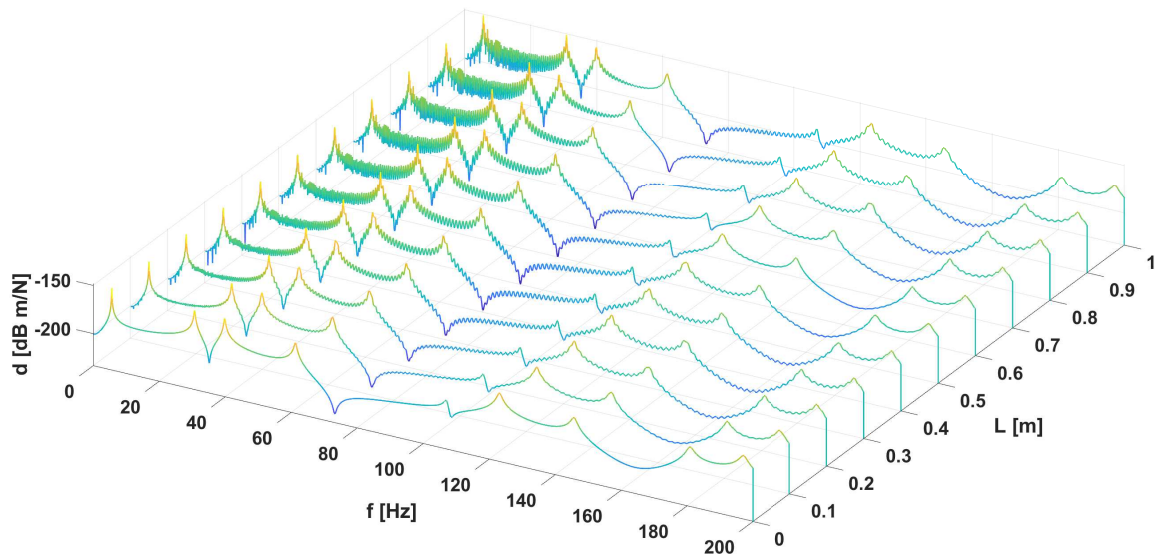


Figura 4.11 – FRFs obtidas devido a uma excitação pontual unitária na torre medido no cabo a cada 0.1 até 1 m partindo do ponto de acoplamento.

A Tab. 12 apresenta as primeiras seis frequências de ressonância obtidas na torre no ponto de conexão, no cabo à 1 e à 50 metros da conexão. Como nas análises das FRFs, também é possível identificar a interação entre torre e cabo observando as frequências de ressonância, onde a primeira frequência à um metro da conexão é coincidente com a da torre e as outras são puramente do cabo pois o segundo modo da torre está em 30.7 Hz. À 50 metros da conexão as seis primeira frequências são baixas sendo observado apenas a reposta do cabo, sendo impossível identificar a presença do 1° modo da torre.

Tabela 12 – Frequências de ressonância do sistema.

Modo	Frequências de Ressonância			
	Torre	Acoplamento	Cabo (1 m)	Cabo(50 m)
1º	5.6	5.6	5.6	0.7
2º	30.7	30.7	7.8	2.11
3º	39.8	39.8	9.23	3.52
4º	61.2	61.2	10.69	4.93
5º	123.4	106.8	12.17	6.36
6º	145.7	123.2	13.677	7.8

Percebe-se que para a análise de força pontual na torre, a estrutura excitada exerce influência tanto na frequência como no deslocamento do cabo, tornando assim relevante a interação do sistema. A fig. 4.12 apresenta FRFs da LTA com diferentes pontos de excitação unitária sendo no ponto de acoplamento, à um metro do acoplamento e no meio do cabo. Quando a excitação é no acoplamento, curvas em preto, as FRFs sofrem grande interferência da torre nas amplitude e nas frequências. Em contrapartida as respostas devido a excitação à um metro do acoplamento, curvas em vermelho, existe uma grande



influência do cabo nas respostas da torre apresentando uma maior densidade modal, entretanto os resultados da torre tendem a manter os seus picos e forma. As curvas em azul, são estimadas devido à uma excitação no meio do cabo, demonstram uma maior influência da cabo com maiores amplitudes em suas respostas. Assim, para minimizar a influência da vibração da torre na resposta do cabo, recomenda-se excitação e medição do cabo após 1 metro da conexão dos elementos da estrutura.

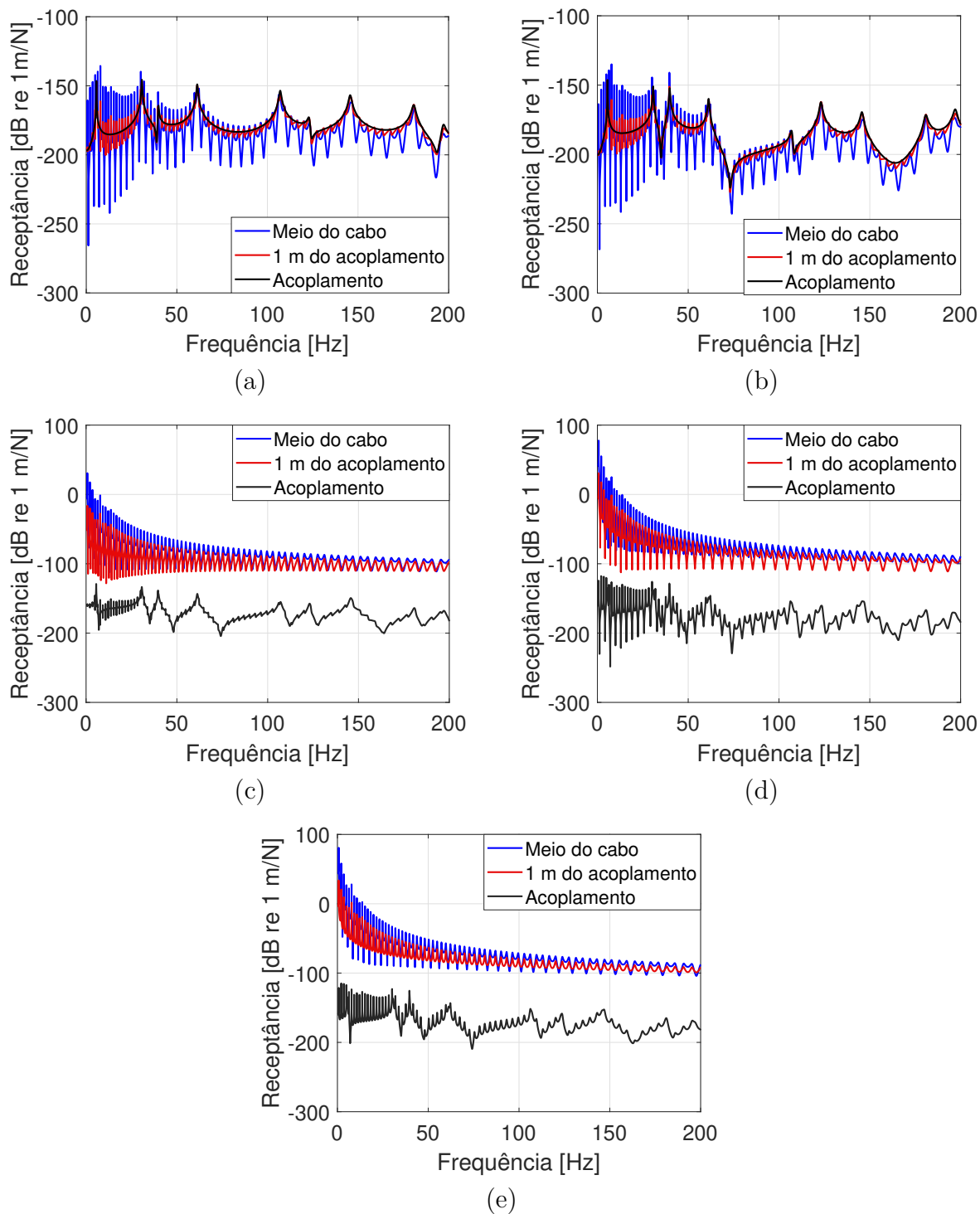


Figura 4.12 – FRFs obtidas devido à uma excitação pontual unitária no acoplamento (linhas em preto), à um metro do acoplamento (linhas em vermelho) e no meio do vão do cabo (linhas em azul), com medições em: (a) torre; (b) acoplamento; (c) cabo a um metro do acoplamento; (d) meio do cabo; (e) fim do cabo.

## 4.6 Excitações de cargas determinísticas

Nessa seção são apresentadas as análises das respostas submetidas as cargas determinísticas pontuais e distribuída de maneira uniforme como recomendado por normas brasileiras NBR-5422 (1985), NBR-6123 (1988) para cargas de vento, Fu e Li (2016b) para as cargas de chuva e vento com chuva.

### 4.6.1 Excitações determinísticas pontuais no cabo

A carga de vento depende diretamente do ângulo de atuação da força, deste modo faz-se necessário análise do efeito da ação do vento em diferentes posições, demonstrado na fig. 4.13, para se majorar os efeitos na resposta dinâmica. Foi adotado o ângulo de impacto como sendo de  $90^\circ$ , visto que a força está relacionado ao seno deste ângulo. Na fig.4.14 o cabo é excitado de forma pontual com a força de vento, chuva e vento com chuva com velocidades básicas  $20m/s$  considerando a categoria de terreno que correspondem a áreas urbanas e terrenos com muitas árvores altas.

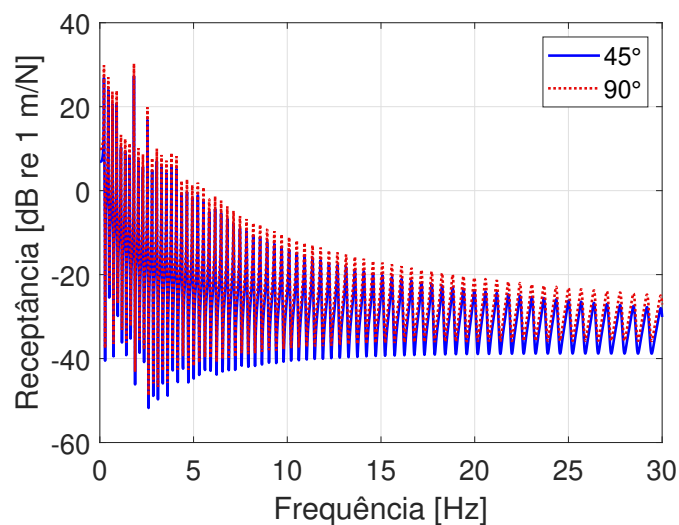


Figura 4.13 – FRF de comparação entre forças devido vento, chuva e vento com chuva.

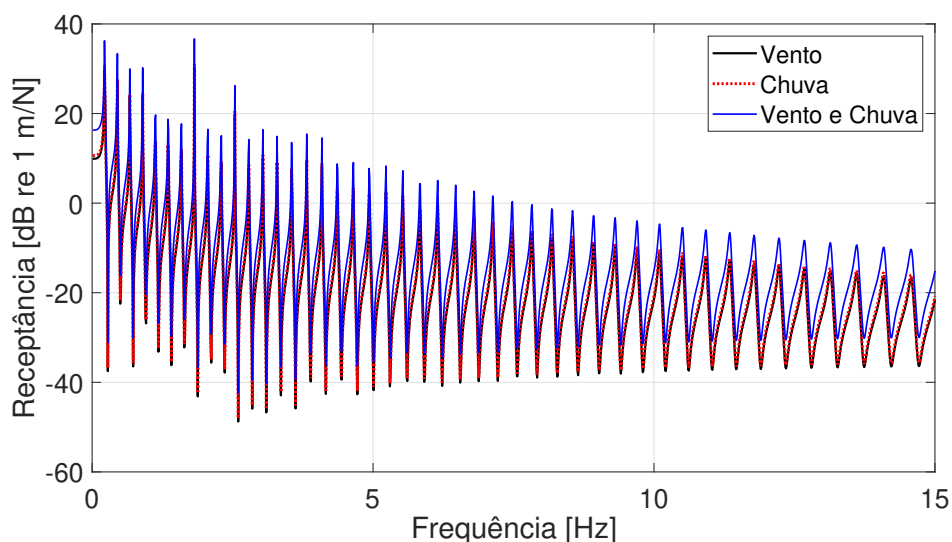


Figura 4.14 – FRF de comparação entre forças devido vento, chuva e vento com chuva simultaneamente.

O cabo foi excitado próximo ao apoio, e as respostas medidas no mesmo ponto para se obter o maior número de modos possíveis. Devido a excitação ser pontual, as FRFs apresentaram apenas uma pequena diferença nas amplitudes, tendo maior magnitude aquela que foi excitada com maior força. No caso de excitação devido ao vento com chuva simultaneamente, sendo essa carga resultante do somatório das ações separadas. O efeito de turbulência não foi considerado, um estudo sobre esse tipo de carga é encontrado em (Dutkiewicz e Machado,2019a).

#### 4.6.2 Excitações determinísticas pontuais na LTA

A resposta da LTA para uma carga pontual de vento foi estudada considerando uma excitação em três pontos diferentes, sendo um ponto na torre (ponto vermelho) na fig. 4.2, no ponto de acoplamento torre-cabo (ponto amarelo), e no meio do cabo. A resposta devido a essa carga é mostrada na fig. 4.15, tem-se que para excitação pontual com carga de vento a FRF apresenta alteração na amplitude, mas com as mesmas frequências de ressonância. Com a carga atuando no meio do cabo as amplitudes são maiores, apresentando um aumento na ordem de 150 dB. Além disso é notado que o comportamento das respostas tendem a tomar a forma da estrutura excitada.

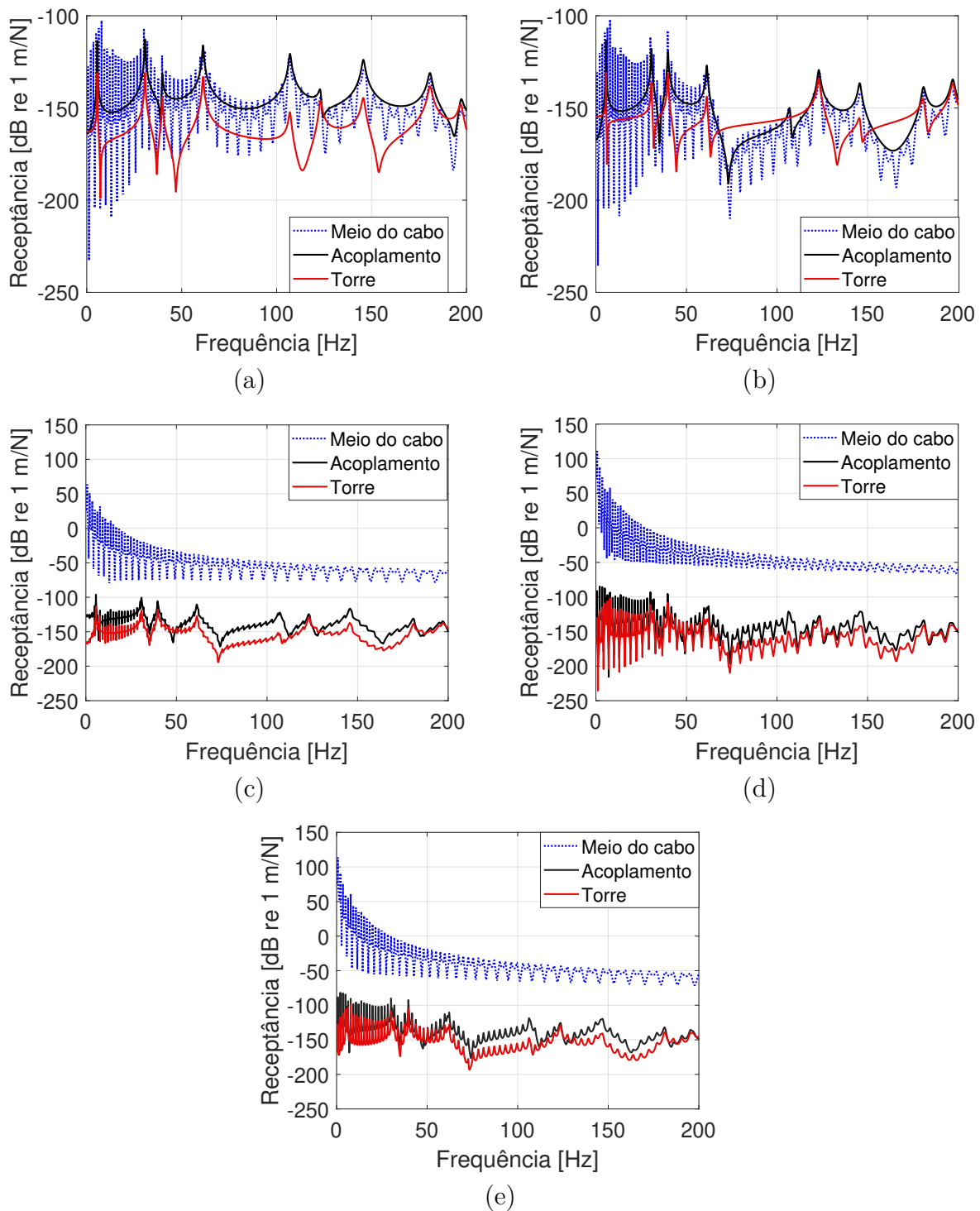


Figura 4.15 – FRFs obtidas devido à uma excitação pontual de vento na torre (linhas vermelhas), no acoplamento (linhas pretas) e no meio do cabo (linhas azuis), com medições em: (a) torre; (b) acoplamento; (c) cabo a um metro do acoplamento; (d) meio do cabo e (e) fim do cabo.

Do mesmo modo que a análise realizada para a excitação de vento na LTA, foi simulado uma carga de excitação de chuva, com as características apresentadas na Tab. 6, as medições foram realizadas nos mesmo pontos das FRFs de cargas do vento. Na fig 4.16 estão representadas as FRFs oriundas das excitações pontuais da LTA com a carga de chuva.

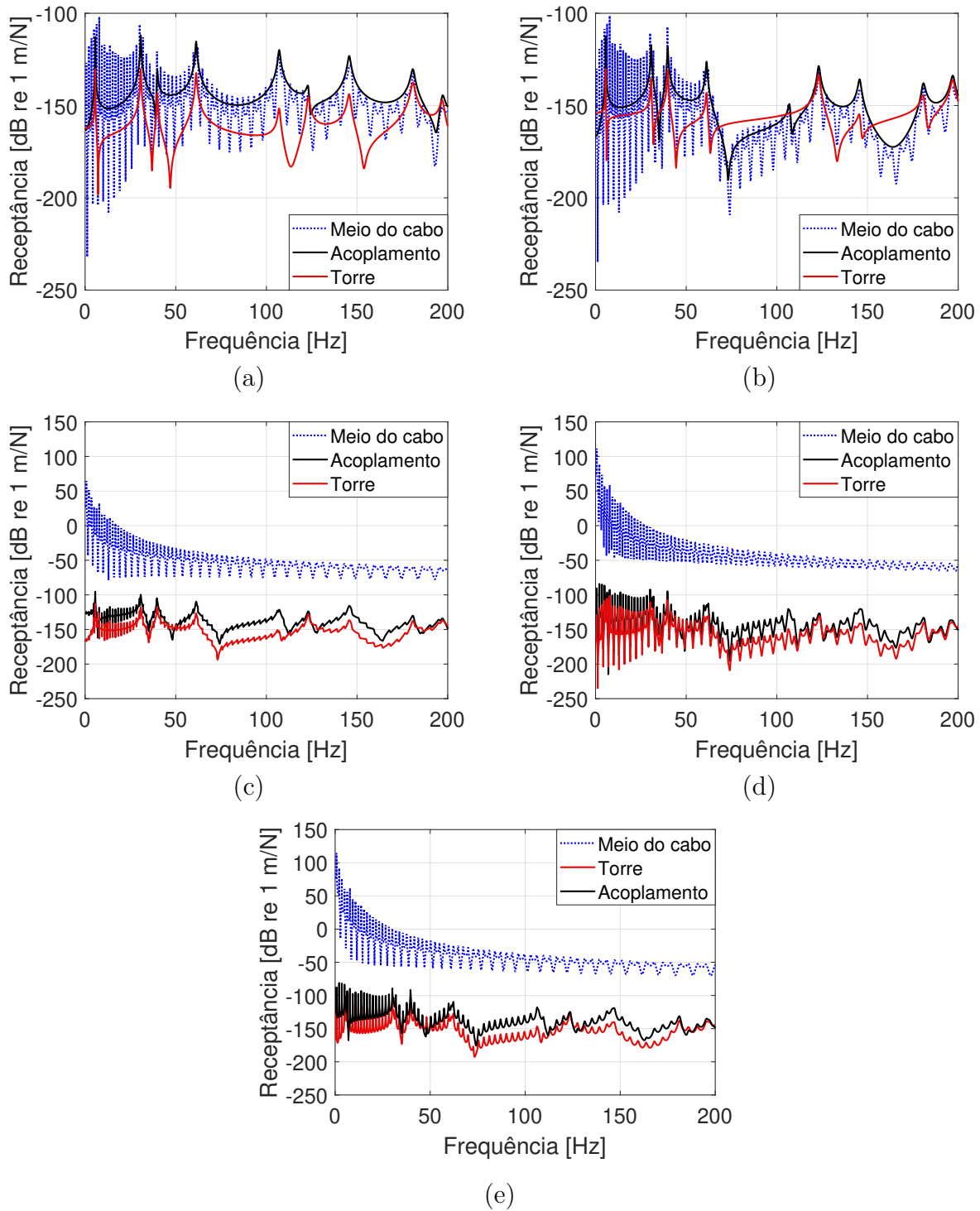


Figura 4.16 – FRFs obtidas devido à uma excitação pontual de vento na torre (linhas vermelhas), no acoplamento (linhas pretas) e no meio do cabo (linha azuis), com medições nos pontos: (a) torre; (b) acoplamento; (c) cabo a um metro do acoplamento; (d) meio do cabo e (e) fim do cabo.

Comparando a fig. 4.16 com a fig. 4.15, percebe-se que o comportamento referente a ação da chuva, é semelhante ao comportamento da ação do vento, pois as duas cargas não influenciam o padrão da resposta dinâmica, mediante aos valores das cargas adotadas.

Na análise de excitação do sistema por vento e chuva simultaneamente, foram

adotados os mesmos valores das análises anteriores, mantendo também os pontos de excitação e medição das respostas. Na fig. 4.17 estão representadas as FRFs oriundas das excitações pontuais da LTA com a carga de vento com chuva.

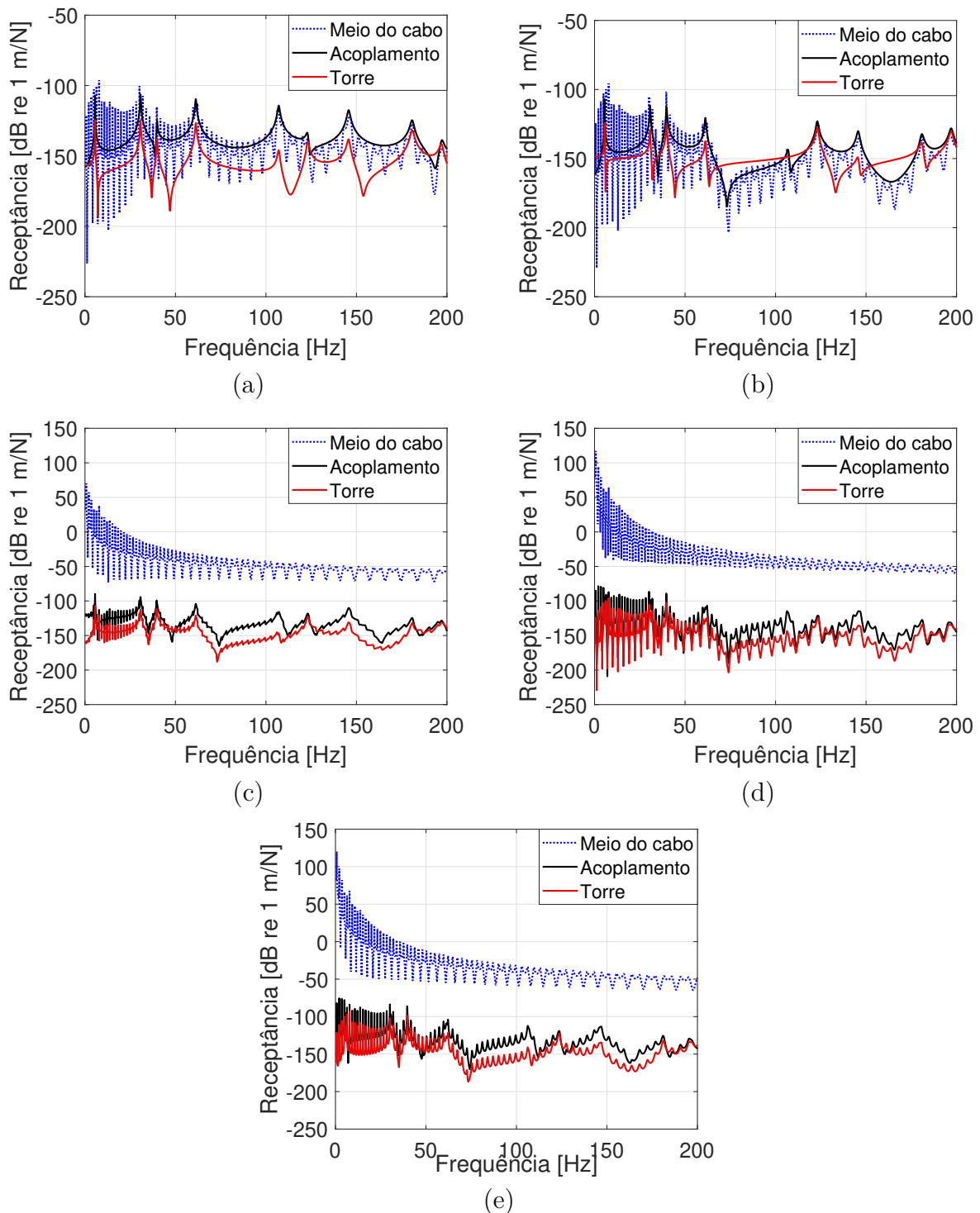


Figura 4.17 – FRFs obtidas devido à uma excitação pontual de vento na torre (linhas vermelhas), no acoplamento (linhas pretas) e no meio do cabo (linha azul), nos pontos (a) torre; (b) acoplamento; (c) cabo a um metro do acoplamento; (d) meio do cabo e (e) fim do cabo.

A excitação pontual de vento e chuva na estrutura apresenta o mesmo compor-

tamento dinâmico que as demais análises, com predominância do modo pertencente da estrutura excitada. Devido o aumento da magnitude da força empregada, que é o somatório das ações isoladas, tem-se que as respostas apresentam uma diferença na amplitude em comparação com as análises considerando as forças de vento e chuva separadamente.

### 4.6.3 Excitações determinísticas distribuídas no cabo

O comportamento do cabo, com carga distribuída, referente a banda de frequência de 0 a 30 Hz é apresentado na fig. 4.18 (a-d), a análise foi feita com a medição próximo ao ponto de apoio do cabo e excitação com uma carga distribuída uniformemente ao longo da estrutura, conforme a formulação apresentada na Seção 3.7.1. A fig. 4.18(a-d) mostra as FRFs do cabo submetido a tensão de 27 KN, excitado com (a) carregamento unitário distribuído; (b) excitação de vento com velocidade base de 20ms; (c) excitação de chuva om intensidade 150mm/h (d) vento e chuva. Percebe-se uma significativa diferença nas FRFs comparando com o resultado apresentado na fig. 4.14, sendo notório o efeito na amplitude e no próprio modo de vibrar da estrutura. Entretanto, quando comparamos com as diferentes cargas distribuídas e o carregamento unitário distribuído é possível observar que a diferença se dá apenas nas amplitudes das respostas. Na análise dinâmica com forças de vento e chuva foi demonstrado que a maior amplitude de vibração se deu quando os dois fenômenos ocorrem juntos. Assim, as análises seguintes considerando carregamento distribuído com efeito de forças externas serão assumidos cargas de vento e chuva simultâneas.



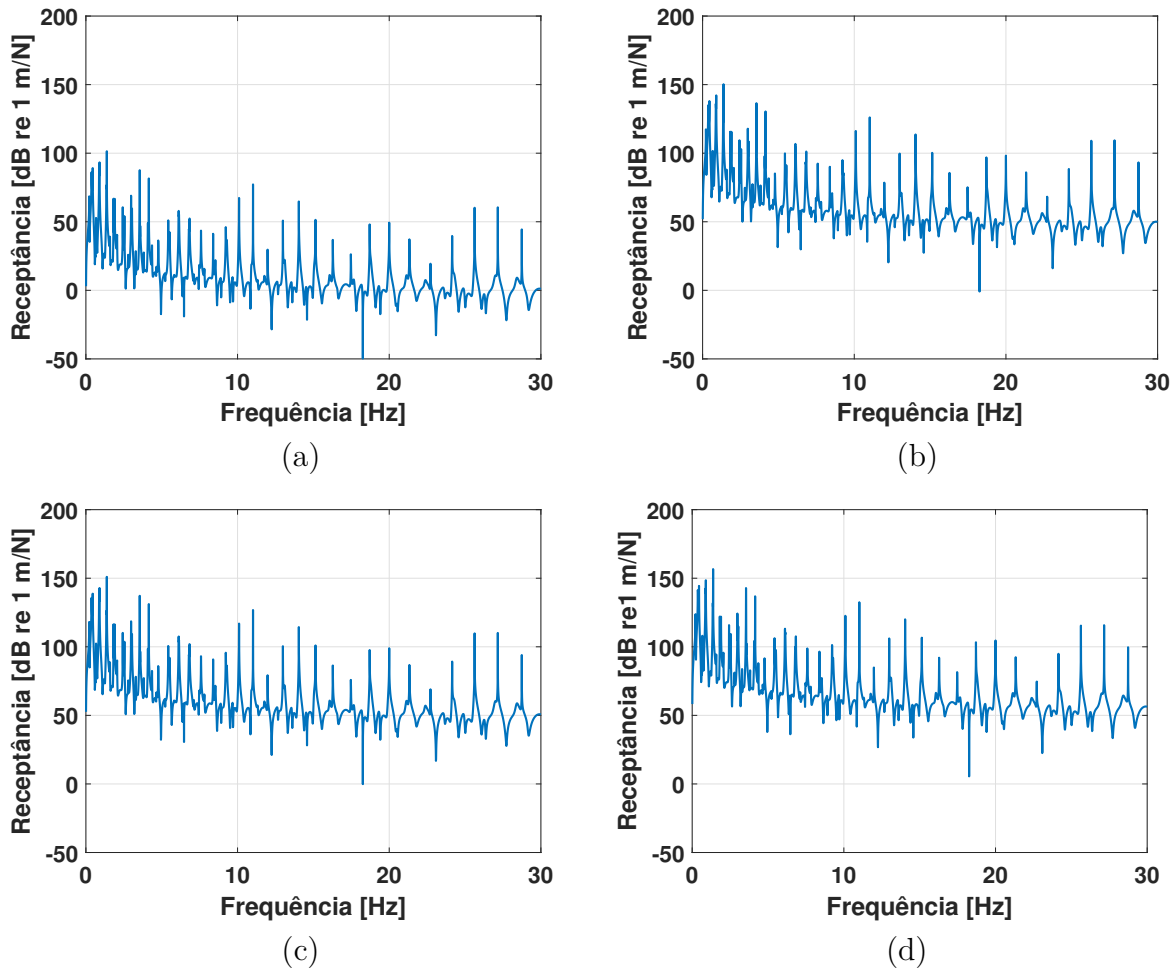


Figura 4.18 – FRF para cabo submetido a tensão de 27 kN, excitado com: (a) carregamento unitário distribuído; (b) excitação de vento com velocidade base de 20m/s; (c) excitação de chuva om intensidade 150mm/h e (d) vento e chuva.

#### 4.6.4 Excitações determinísticas distribuídas na LTA

Uma carga unitária foi aplicado ao longo de todo o cabo acoplado a torre, as FRFs da torre são apresentadas nas fig. 4.19 (a) e (b), pode ser observado que as respostas mantém a amplitude de deslocamento e apresentam alguns picos correspondentes a torre isolada. Entretanto, a FRF é predominantemente influenciada pela excitação do cabo. Esse comportamento aparece também na resposta obtida no ponto de acoplamento da estrutura como mostrado na fig. 4.19 (c). As FRFs correspondentes ao cabo, fig. 4.19 (d) a (f), apresentam baixa influência nas respostas devido a interação com a torre, tendo apenas um pequeno aumento de amplitude em pontos próximos ao acoplamento como mostrado na fig. 4.19 (d), também é observado a diminuição desse ganho de amplitude nos pontos mais afastados do acoplamento , como mostrado na fig. 4.16 (e) e (f).

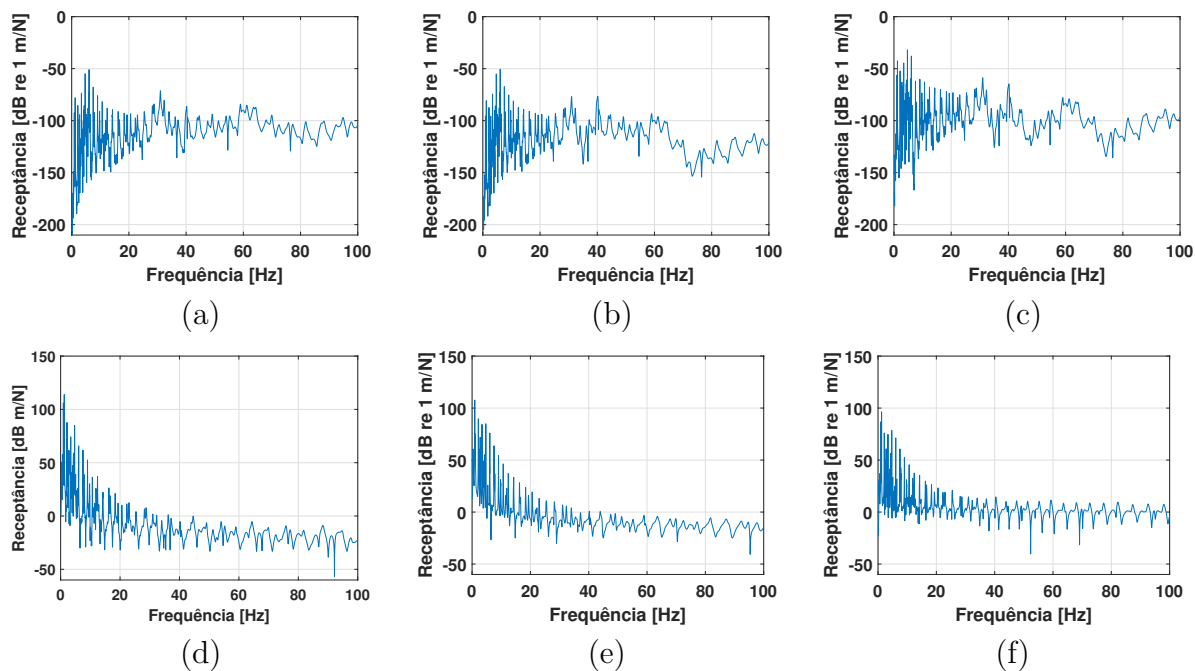


Figura 4.19 – FRFs obtidas devido a uma excitação distribuída unitária na torre nos pontos, (a)(b) torre; (c) acoplamento, (d) cabo a um metro da conexão com a torre; (e) meio do cabo e (f) fim do cabo

A fig. 4.20 apresenta as respostas em frequência obtidas devido a uma excitação distribuída de cargas de vento com chuva nos pontos da LTA. Comparando essa com a fig. 4.19 pode-se observar um padrão semelhante com apenas uma alteração de amplitude devido ao aumento de carga. Para a excitação com os fenômenos de vento e chuva agindo separado, as respostas seguem o mesmo padrão de curva tendo alteração apenas na amplitude.

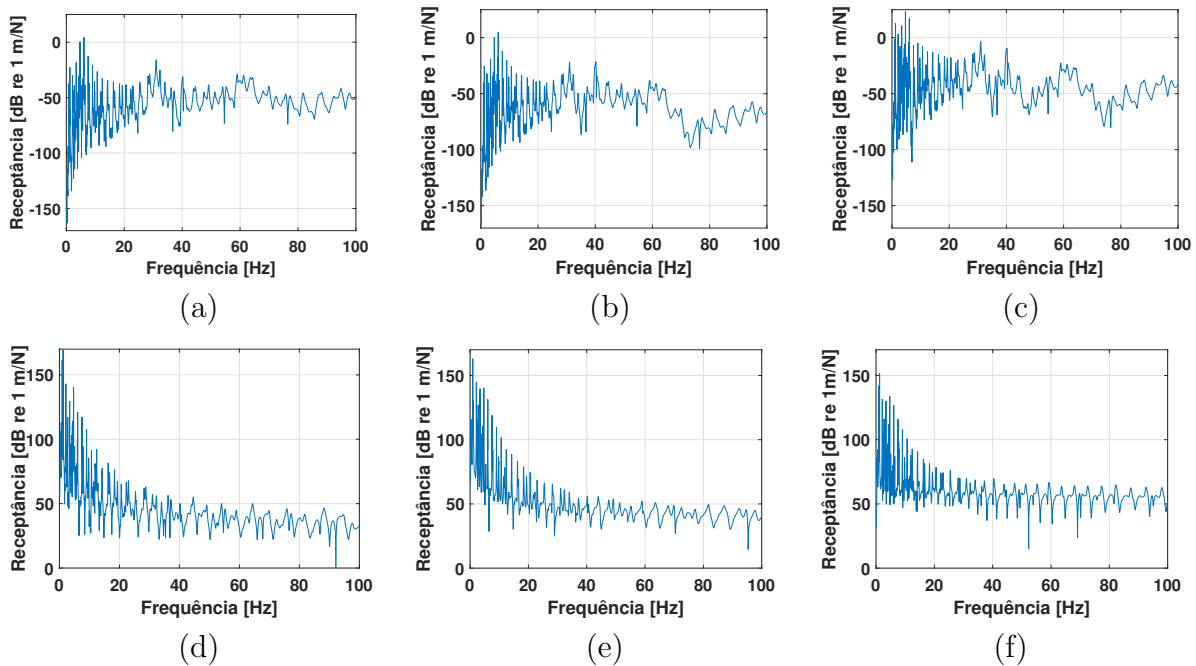


Figura 4.20 – FRFs obtidas devido a uma excitação distribuída na torre com cargas de vento com chuva nos pontos, (a)(b) torre; (c) acoplamento, (d) cabo a um metro da conexão com a torre; (e) meio do cabo e (f) fim do cabo.

## 4.7 Excitações aleatórias

Nessa seção são apresentadas as análises das respostas da estrutura submetidas à cargas aleatórias distribuídas, seguindo as recomendadas das normas NBR-5422 (1985) e NBR-6123 (1988) para cargas de vento e os estudos de Fu e Li (2016b) para as cargas de chuva e vento com chuva. Foram usados as PSDs de ruído branco, Kaimal e Kanai-Tajimi, sendo observado que elas apresentam diferentes decaimentos, sendo que a PSD de ruído branco permanece constante, é notado também que essa diferença nos decaimentos aumenta com o aumento da frequência como mostrado em fig.4.21.

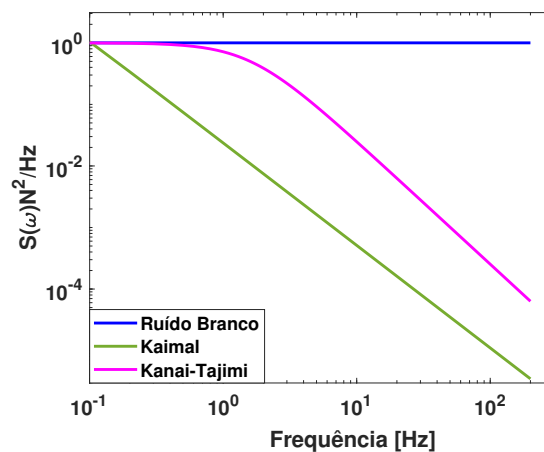


Figura 4.21 – Densidade espectral de potência da força de excitação para ruído branco (azul), Kaimal (verde) e Kanai – Tajimi (rosa).

A fig.4.22 apresentam a velocidade do vento no domínio do tempo, onde nota-se que a velocidade do ruído branco apresenta comportamento mais irregular, sendo a velocidade de um instante é independente da velocidade dos demais instantes de tempo, possuindo assim uma maior dispersão em torno da média. Kanai-Tajimi também apresenta grande dispersão entretanto menor que a apresentada pelo ruído branco, já PSD de Kaimal apresenta maior correlação.

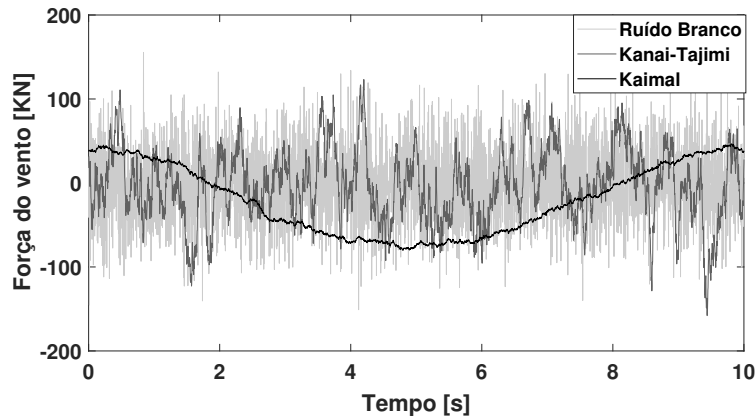


Figura 4.22 – Força do vento no tempo para modelos de ruído branco, Kaimal e Kanai-Tajimi.

#### 4.7.1 Excitações aleatórias distribuídas no cabo

Aplicando uma carga aleatória distribuída com uma PSD de ruído branco na excitação do cabo, têm-se as relações expostas na fig. 4.23 , para a PSD Kaimal as respostas são dadas em fig. 4.24 e para PSD Kanai-Tajimi fig. 4.25. Nas amplitudes dos espectros foram adotados cargas de vento (a), chuva (b) e vento com chuva (c). Todas as análises foram feitas com o ponto de medição à um metro do apoio.

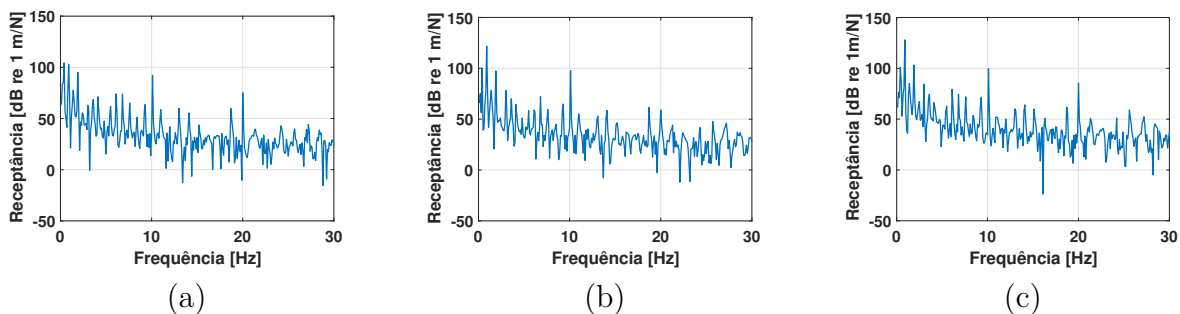


Figura 4.23 – PSD do cabo submetido a excitação aleatória com PSD de ruído branco e carga de: (a) a vento (b) chuva e (c) vento com chuva.

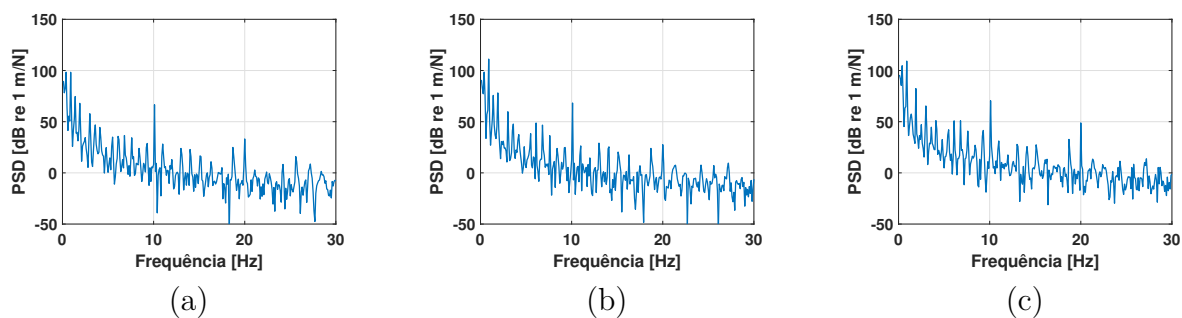


Figura 4.24 – PSD do cabo submetido a excitação aleatória com PSD de Kaimal e carga de: (a) a vento (b) chuva e (c) vento com chuva.

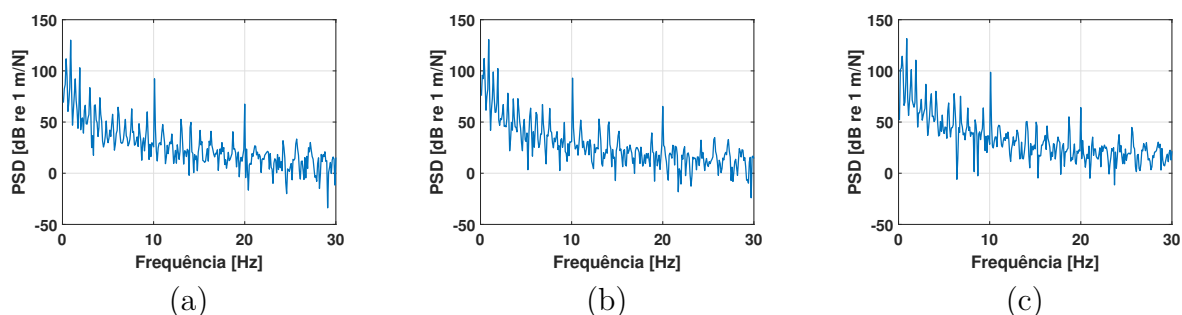


Figura 4.25 – PSD do cabo submetido a excitação aleatória com PSD de Kanai-Tajimi e carga de: (a) a vento (b) chuva e (c) vento com chuva.

As resposta com os diferentes espectros de potência, apresentaram uma diferença no decaimento para todos os tipos de excitações, sendo que o espectro de ruído branco apresenta o menor decaimento entre eles, como pode ser demonstrado de forma mais evidente na fig.4.21, é percebido também que a excitação de maior valor provocam maiores amplitudes nas resposta independente do espectro adotado.

#### 4.7.2 Excitações aleatórias distribuídas na LTA

Os carregamentos aleatórios foram aplicados de forma distribuída no cabo, para observar a interferência dos modos da torre na resposta a banda de frequência analisada foi de 0 a 200 Hz, assim como as análises apresentadas em 4.6.2. As análises foram realizadas com os espectros de ruído branco mostrados nas fig. 4.26 à 4.28, onde observa-se um menor decaimento das PSD em relação a frequência, sendo que a FRF de chuva com vento tem maior amplitude devido a carga atuante ter maior valor.

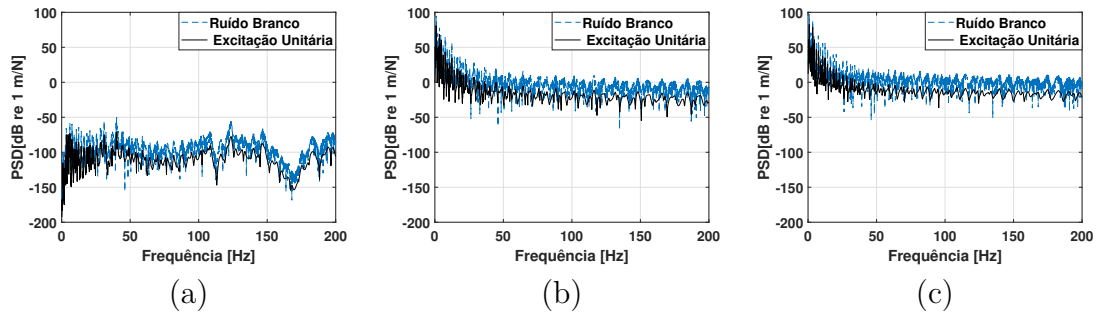


Figura 4.26 – FRF com espectro de excitação de ruído branco com carga de vento: (a) obtido em pontos da torre; (b) no cabo a 1 m da conexão e (c) obtido a 50 m.

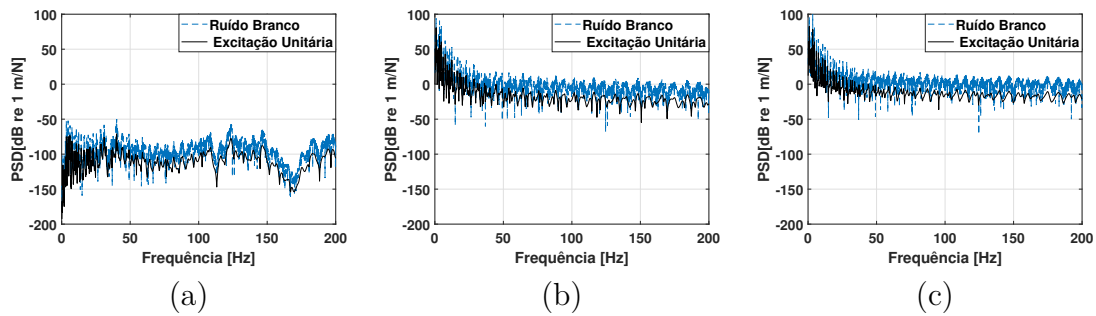


Figura 4.27 – FRF com espectro de excitação de ruído branco com carga de chuva: (a) obtido em pontos da torre; (b) no cabo a 1 m da conexão e (c) obtido a 50 m.

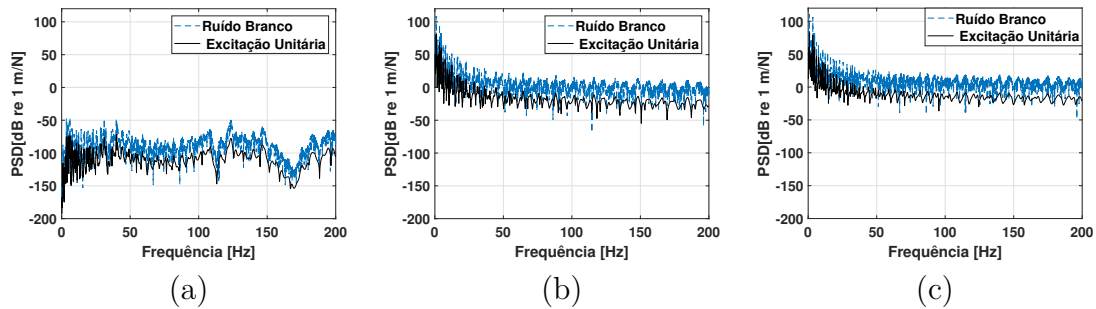


Figura 4.28 – FRF com espectro de excitação de ruído branco com carga de vento e chuva: (a) obtido em pontos da torre; (b) no cabo a 1 m da conexão e (c) obtido a 50 m.

As figs. 4.29 a 4.31 mostram os resultados das PSD Kaimal, onde observa-se um maior decaimento aos resultados em relação a excitação por ruído branco, esse filtro de primeira ordem aproxima melhor os efeitos das cargas de vento por apresentar uma boa correlação.

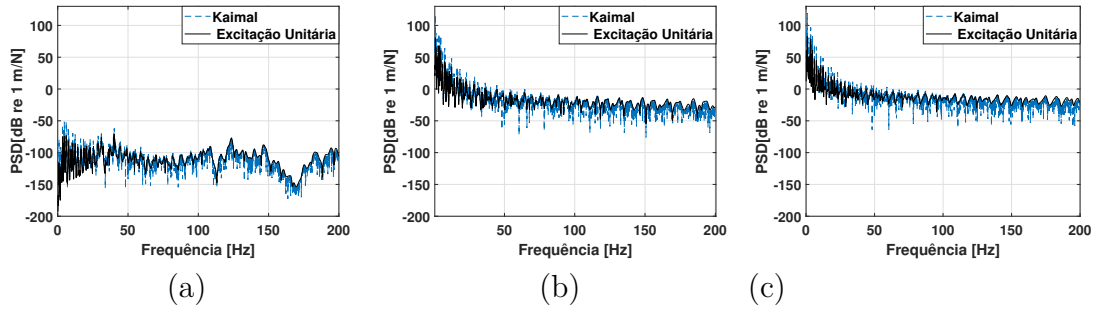


Figura 4.29 – FRF excitada com o espectro Kaimal para carga de vento: (a) obtido em pontos da torre; (b) no cabo a 1 m da conexão e (c) obtido a 50 m.

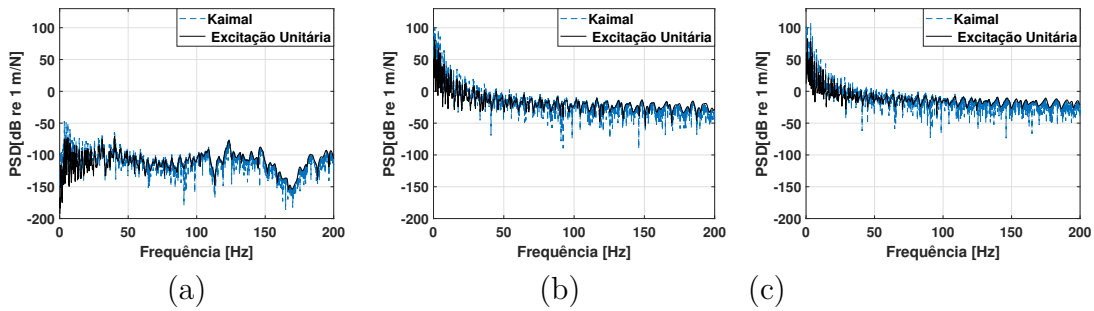


Figura 4.30 – FRF excitada com o espectro Kaimal para carga de chuva: (a) obtido em pontos da torre; (b) no cabo a 1 m da conexão (c) obtido a 50 m.

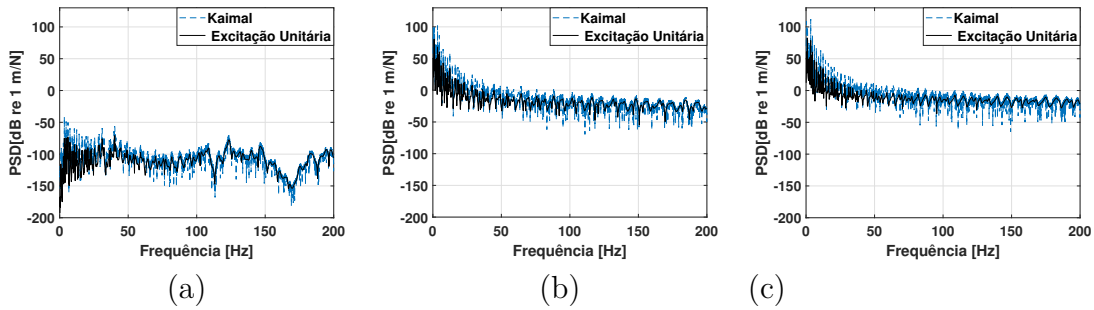


Figura 4.31 – FRF excitada com o espectro Kaimal para carga de vento e chuva: (a) obtido em pontos da torre; (b) no cabo a 1 m da conexão e (c) obtido a 50 m.

As fig. 4.32 a 4.34 apresentam os espectros de segunda ordem Kanai -Tajimi, apresentam um decaimento entre os de ruído branco e Kaimal, como visto na fig.4.21.

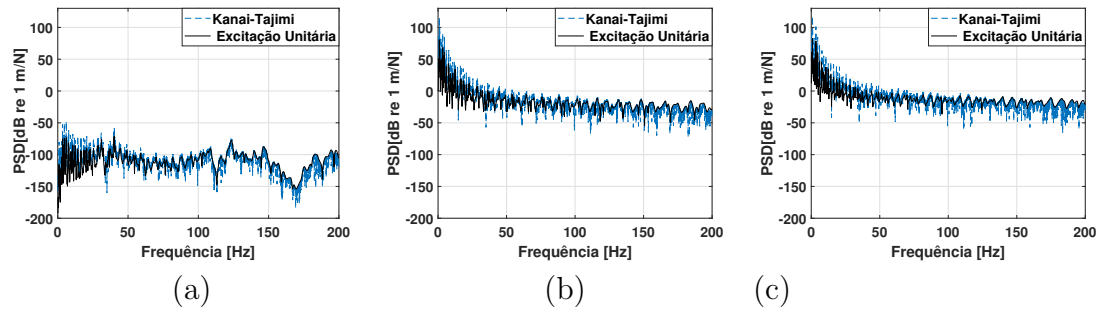


Figura 4.32 – FRF excitada com o espectro Kanai-Tajimi para carga de vento: (a) obtida nos pontos da torre; (b) no cabo a 1 m da conexão e (c) obtido a 50 m.

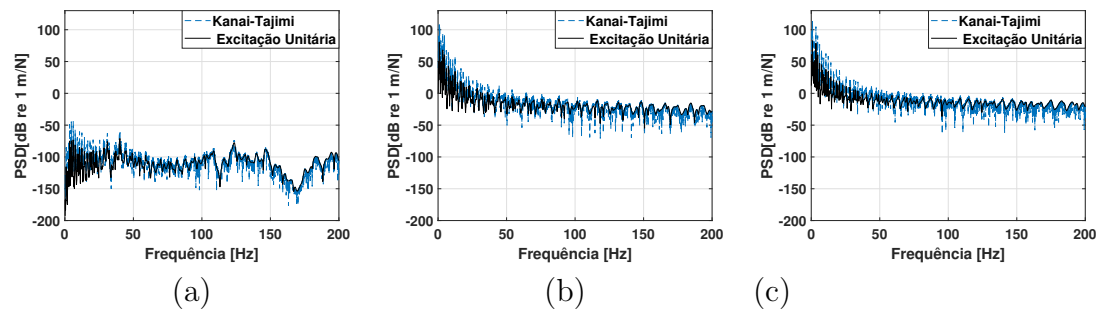


Figura 4.33 – FRF excitada com o espectro Kanai-Tajimi para carga de chuva: (a) obtida nos pontos da torre; (b) no cabo a 1 m da conexão e (c) obtido a 50 m.

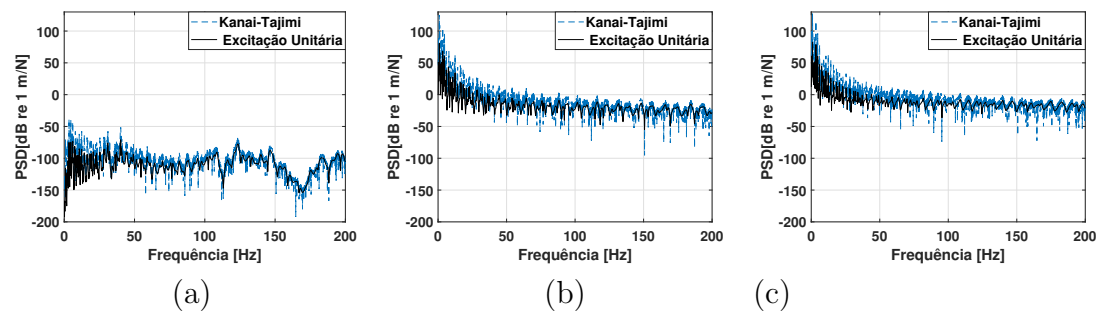


Figura 4.34 – FRF excitada com o espectro Kanai-Tajimi para carga de vento com chuva: (a) obtida nos pontos da torre; (b) no cabo a 1 m da conexão e (c) obtido a 50 m.

Em todo os casos, os efeitos das excitações aleatórias tiveram uma grande influência nas respostas de receptância do sistema, onde é notório que a excitação de maior valor provoca alterações maiores nas amplitudes, além de ser perceptível que o espectro que apresenta maior correlação é Kaimal, como mostrado na fig. 4.22, e que por esse motivo melhor se adequa aos tipos das cargas analisadas.



# 5 Conclusão

## 5.1 Considerações Finais

Neste trabalho foi apresentada uma abordagem da análise dinâmica para uma Linha de Transmissão Aérea (LTA) sujeita a diferentes cargas de excitação. O processo de implementação foi baseado no Método dos Elementos Espectrais (MEE) desenvolvido em linguagem Matlab e validado com Método dos Elementos Finitos utilizando ANSYS APDL.

A princípio, foram realizados os testes com os três modelos, barra Elementar, Love e Mindlin-Herman. Foi possível comparar os resultados com os da literatura, demonstrando assim boa concordância na análise. A barra Elementar se destacou por exigir menor custo computacional e em baixas frequências todas apresentam comportamentos similares.

A modelagem da torre de transmissão foi desenvolvida utilizando os três modelos de barra com MEE e com barra Elementar para Método dos Elementos Finitos (MEF). Observou-se que para obter aproximação do modelo em MEF foi necessário um grande número de discretizações, o que mostra um custo computacional mais alto, o que tornou o MEE uma ótima alternativa para lidar com essa análise, atendendo aos requisitos de confiabilidade e agilidade no processo. Na análise realizada, entre as torres com barras de alta ordem, a similaridade entre as respostas foi notada. Assim optou-se por utilizar a barra Elementar para modelagem da torre.

Para a análise do cabo, foi feita a comparação entre os MEE, MEF e a solução analítica, onde ficou demonstrado a acurácia do MEE. A linha de transmissão foi submetida a carregamentos pontuais e distribuídos com a pressão do vento, chuva e vento com chuva. Da mesma forma com excitação determinística e randômica. Foi observado o efeito que a variação da carga causa nas amplitudes de deslocamento do sistema. É notório também que não ocorreram grandes variações no comportamento das FRFs para os casos de carregamentos distribuídos.

Para identificação dos efeitos do acoplamento nas respostas dinâmicas das estruturas, foi feita a interação pelas matrizes de rigidez dinâmica espectral do cabo e da torre, sendo perceptíveis as alterações nas frequências do cabo próximo ao acoplamento. Com a aplicação das cargas em diferentes posições foi notada que a resposta tende a vibrar no modo da

estrutura excitada. Os resultados da LTA submetida a carregamento distribuído no cabo, mostraram que a prevalência da estrutura excitada permanece independentemente do espectro adotado, existindo influência apenas no seu decaimento.

Por fim, vale ressaltar que o método proposto no presente trabalho apresentou boa viabilidade para este tipo de estrutura. Vale salientar que é essencial a análise da interação das estruturas uma vez que ambas apresentaram influência do acoplamento nas respostas.

## 5.2 Contribuições

Os estudos realizados nesse trabalho permitiram as seguintes contribuições:

Fernandes, Y. M. S. et al. Vibrational analysis of power transmission tower by spectral element method: a numerical validation. *25th International Congress of Mechanical Engineering*, Uberlândia - MG, Brasil, 2019.

Fernandes, Y. M. S. et al. Structural dynamic response of coupling between transmission lines and tower under random excitation. *Dynamical Systems Theory and Application*, Łódź, Poland, 2019.

## 5.3 Trabalhos Futuros

A partir dos resultados obtidos no presente estudo, outras possibilidades de extensão são sugeridas para trabalhos futuros, tais como:

- Verificação do impacto da aplicação de cargas distribuídas em toda a estrutura LTA.
- Analisar possíveis locais de falha e locais para a adição de absorvedores dinâmicos.
- Análise da LTA com o uso de estruturas mistas de viga e barra.
- Estudar a viabilidade de aplicação do MEE na análise dinâmica de uma LTA tridimensional.

# Referências

ALKMIM, M. H. *Análise de um amortecedor de coluna de líquido sintonizado em uma turbina eólica sujeita a carregamento aleatório*. 2017. 90 p. Citado 2 vezes nas páginas 30 e 39.

ANEEL. *Agência Nacional de Energia Elétrica - ANEEL*. Disponível em: <<https://www.aneel.gov.br>>. Acesso em: 07 nov. 2018. Citado na página 4.

BARBIERI, N. et al. Dynamical analysis of transmission line cables. Part 1- Linear theor. *Mechanical Systems and Signal Processing*, v. 18, n. 4, p. 659–669, 2004. ISSN 08883270. Citado na página 6.

BARBIERI, N. et al. Dynamical analysis of transmission line cables. Part 2 - Damping estimation. *Mechanical Systems and Signal Processing*, v. 18, n. 3, p. 671–681, 2004a. ISSN 08883270. Citado na página 6.

BARBIERI, R. et al. Dynamical analysis of transmission line cables. Part 3-Nonlinear theory. *Mechanical Systems and Signal Processing*, v. 22, n. 4, p. 992–1007, 2008. ISSN 08883270. Citado na página 7.

BATTISTA, R. C. et al. Dynamic behavior and stability of transmission line towers under wind forces. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, v. 91, n. 8, p. 1051–1067, 2003. ISSN 01676105. Citado na página 10.

BESKOS D.; NARAYANAN, G. Use of dynamic influence coefficients in forced vibration problems with the aid of fast fourier transform. 1978. Citado na página 12.

BREWER, A. Dynamic Wind Load Modelling of High Overhead Transmission Line Towers. p. 97, 2017. Citado na página 5.

CASTELLO, D. a.; MATT, C. F. Estimation of Bending Stiffness and Damping of Transmission Line Conductors. v. 22, n. Diname, 2007. Citado na página 7.

CASTELLO, D. A.; MATT, C. F. T. A validation metrics based model calibration applied on stranded cables. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, v. 33, n. 4, p. 417–427, 2012. ISSN 1678-5878. Citado na página 7.

CEMIG. *Historia da eletricidade no Brasil*. Disponível em: <[http://www.cemig.com.br/pt-br/a\\_cemig/Nossa\\_Historia/Paginas/historia\\_da\\_eletricidade\\_no\\_brasil.aspx](http://www.cemig.com.br/pt-br/a_cemig/Nossa_Historia/Paginas/historia_da_eletricidade_no_brasil.aspx)>. Acesso em: 07 nov. 2018. Citado na página 4.

CHEN, B. et al. Performance Evaluation on Transmission Tower-Line System with Passive Friction Dampers Subjected to Wind Excitations. *Shock and Vibration*, v. 2015, 2015. ISSN 10709622. Citado na página 11.

CHOI, E. Numerical modelling of gust effect on wind-driven rain. v. 72, p. 107–116, 1997. Citado na página 34.

CHOI, E. C. C. Wind-driven rain and driving rain coefficient during thunderstorms and non-thunderstorms. v. 89, p. 293–308, 2001. Citado na página 35.

CHOI, J.; INMAN, D. J. Spectrally formulated modeling of a cable-harnessed structure. *Journal of Sound and Vibration*, Elsevier, v. 333, n. 14, p. 3286–3304, 2014. ISSN 10958568. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.jsv.2014.03.020>>. Citado na página 7.

CHUNMING, W. et al. Research on the Wind-induced Vibration Coefficient of Transmission Tower-line System. *Physics Procedia*, Elsevier B.V., v. 24, p. 149–154, 2012. ISSN 18753892. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.phpro.2012.02.023>>. Citado 2 vezes nas páginas 1 e 10.

Desai, Y. M.; Yu, P. ; Popplewell , N.; Shah, A. H. Finite Element Modelling of Cracks. v. 57, n. March, 2015. Citado na página 11.

DOYLE, J. F. *Wave Propagation in Structures-Spectral Analysis Using Fast Discrete Fourier Transforms*. [S.l.: s.n.], 1997. 336 p. ISBN 1461273048. Citado 9 vezes nas páginas 2, 6, 13, 17, 18, 20, 22, 23 e 29.

DUA, A. et al. Dynamic analysis of overhead transmission line under turbulent wind loading. *Electronic Journal of Structural Engineering*, v. 15, n. 1, p. 46–54, 2015. ISSN 14439255. Citado 2 vezes nas páginas 6 e 11.

DUTKIEWICZ, M.; MACHADO, M. R. Dynamic Response of Overhead Transmission Line in Turbulent Wind Flow with Application of the Spectral Element Method. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, v. 471, n. 5, 2019. ISSN 1757899X. Citado 2 vezes nas páginas 8 e 56.

DUTKIEWICZ, M.; MACHADO, M. R. Spectral Approach in Vibrations of Overhead Transmission Lines. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, v. 471, n. 5, 2019. ISSN 1757899X. Citado na página 8.

ELETROBRAS. *Sistemas elétrico brasileiro*. Disponível em: <<https://eletrobras.com/pt/Paginas/Sistema-Eletrico-Brasileiro.aspx>>. Acesso em: 07 nov. 2018. Citado na página 4.

FANG, X. et al. Experimental and Theoretical Investigation of Lowering the Band Gaps of Phononic Crystal Beams through Fluid-Solid Coupling. *Crystals*, v. 7, n. 12, p. 366, 2017. ISSN 2073-4352. Disponível em: <<http://www.mdpi.com/2073-4352/7/12/366>>. Citado na página 13.

FERNADES, Y. M. S. et al. Vibrational analysis of power transmission tower by spectral element method : a numerical validation. 2019. Citado na página 9.

FERNANDES, Y. M. S. et al. Structural dynamic response of coupling between transmission lines and tower under random excitation. 2019. Citado na página 12.

FREITAS, A. F. *Alocação ótimas de PMUS em sistemas de energia elétrica* . 2016. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Minas Gerais - UFMG. Citado na página 1.

FU, X.; LI, H. N. Dynamic analysis of transmission tower-line system subjected to wind and rain loads. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, Elsevier, v. 157, p. 95–103, 2016. ISSN 01676105. Citado 3 vezes nas páginas 1, 11 e 37.

FU, X.; LI, H. N. Dynamic analysis of transmission tower-line system subjected to wind and rain loads. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, Elsevier, v. 157, p. 95–103, 2016. ISSN 01676105. Citado 2 vezes nas páginas 55 e 63.

FU, X. et al. Journal of Wind Engineering Research on motion of wind-driven rain and rain load acting on transmission tower. *Jnl. of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, Elsevier, v. 139, p. 27–36, 2015. ISSN 0167-6105. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.jweia.2015.01.008>>. Citado 4 vezes nas páginas x, 34, 36 e 37.

GOPALAKRISHNAN, S. et al. *Spectral Finite Element Method*. [S.l.: s.n.], 2007. 205–227 p. ISSN 16121384. ISBN 9781846283550. Citado na página 13.

GUNN, R.; KINZER, G. *The Terminal Velocity of fall for water droplets in stafnant air*. 1948. 6 p. Citado 2 vezes nas páginas 34 e 35.

HAMADA, A.; El Damatty, A. A. Behaviour of guyed transmission line structures under tornado wind loading. *Computers and Structures*, Elsevier Ltd, v. 89, n. 11-12, p. 986–1003, 2011. ISSN 00457949. Citado na página 10.

HAMADA, A.; El Damatty, A. A. Failure analysis of guyed transmission lines during F2 tornado event. *Engineering Structures*, Elsevier Ltd, v. 85, p. 11–25, feb 2015. ISSN 1873-7323. Citado na página 11.

HERNÁNDEZ, W. P. et al. On the model building for transmission line cables: a Bayesian approach. *Inverse Problems in Science and Engineering*, Taylor & Francis, v. 26, n. 12, p. 1784–1812, 2018. ISSN 17415985. Disponível em: <<https://doi.org/10.1080/17415977.2018.1436171>>. Citado na página 8.

HUTTON, D. V. *Fundamentals of Finite Element Analysis*. 2004. Citado 2 vezes nas páginas x e 29.

KÁLMÁN, T. et al. Numerical analysis of the dynamic effects of shock-load-induced ice shedding on overhead ground wires. *Computers and Structures*, v. 85, n. 7-8, p. 375–384, 2007. ISSN 00457949. Citado na página 7.

KEYHAN, H. et al. Dynamic analysis of an overhead transmission line subject to gusty wind loading predicted by wind-conductor interaction. *Computers and Structures*, Elsevier Ltd, v. 122, p. 135–144, 2013. ISSN 00457949. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.compstruc.2012.12.022>>. Citado na página 7.

KIRYU, S.; GAN, B. S. Advanced Civil and Environmental Engineering Vibrational Analysis of Levy-Type Plates by Using SEM. v. 1, n. 1, p. 18–29, 2018. Citado na página 13.

KRAWCZUK, M. et al. Longitudinal wave propagation. Part I-Comparison of rod theories. *Journal of Sound and Vibration*, v. 295, n. 3-5, p. 461–478, 2006. ISSN 10958568. Citado 3 vezes nas páginas 25, 41 e 43.

KRAWCZUK, M. et al. The dynamic analysis of a cracked Timoshenko beam by the spectral element method. *Journal of Sound and Vibration*, v. 264, n. 5, p. 1139–1153, 2003. ISSN 0022460X. Citado na página 13.

KRAWCZUK, M. et al. Wave propagation in plate structures for crack detection. *Finite Elements in Analysis and Design*, v. 40, p. 991–1004, 2004. ISSN 03797112. Citado na página 13.

KRÉE, P.; SOIZE, C. *Mathematics of random phenomena: random vibrations of mechanical structures*. 1986. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/978-94-009-4770-2>>. Citado 3 vezes nas páginas x, 30 e 31.

KUDELA, P. et al. Modelling of wave propagation in composite plates using the time domain spectral element method. *Journal of Sound and Vibration*, v. 302, n. 4-5, p. 728–745, 2007. ISSN 10958568. Citado na página 13.

LAM, H. F.; YIN, T. Dynamic reduction-based structural damage detection of transmission towers: Practical issues and experimental verification. *Engineering Structures*, Elsevier Ltd, v. 33, n. 5, p. 1459–1478, 2011. ISSN 01410296. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.engstruct.2011.01.009>>. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 41.

LEE, U. *Spectral Element Method in Strutural Dynamics*. [S.l.: s.n.], 2009. ISBN 9780470823743. Citado 7 vezes nas páginas 2, 12, 13, 14, 15, 16 e 20.

LEE, U. T. K. Vibration Analysis of Thin Plate Structures Subjected to a Moving Force Using Frequency-Domain Spectral Element Method. *Shock and Vibration*, v. 2018, p. 27, 2018. Citado na página 13.

LEON, B. Cross-rope transmission tower-line dynamic analysis. v. 110, n. 6, p. 1321–1335, 1984. Citado na página 10.

LI, Q. et al. Random Wind-induced Response Analysis of Transmission Tower-line System. *Energy Procedia*, v. 16, p. 1813–1821, 2012. ISSN 18766102. Citado na página 11.

LI, X. et al. Probabilistic capacity assessment of single circuit transmission tower-line system subjected to strong winds. *Engineering Structures*, Elsevier, v. 175, n. July, p. 517–530, 2018. ISSN 18737323. Citado 3 vezes nas páginas 1, 12 e 30.

MACHADO, M. R. et al. Spectral model and experimental validation of hysteretic and aerodynamic damping in dynamic analysis of overhead transmission conductor. p. 1–21, 2019. Citado na página 8.

MARSHALL, J.; PALMER, w. M. *The Distribution of Raindrops With size*. 1948. Citado na página 37.

MCCLURE, G.; LAPOINTE, M. Modeling the structural dynamic response of overhead transmission lines. *Computers and Structures*, v. 81, n. 8-11, p. 825–834, may 2003. ISSN 00457949. Citado 2 vezes nas páginas 5 e 10.

MEI, C. *Comparison of the four rod theories of longitudinally vibrating rods*. [S.l.: s.n.], 2015. Citado na página 21.

MENEZES, V. P. Linhas de transmissão de energia elétrica: Aspectos técnicos, orçamentários e construtivos. *Universidade Federal do Rio de Janeiro*, p. 77, 2015. Citado na página 4.

MEYNEN, S. et al. On the numerical simulation of vortex-induced vibrations of oscillating conductors. *Journal of Fluids and Structures*, v. 21, n. 1 SPEC. ISS., p. 41–48, 2005. ISSN 10958622. Citado 2 vezes nas páginas 6 e 30.

MOMOMURA, Y. et al. Wind-induced vibration of transmission line system. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, v. 43, n. 1-3, p. 2035–2046, 1992. ISSN 01676105. Citado na página 10.

MURTAGH, P. et al. Wind force time-history generation by discrete fourier transform (dft). 2004. Citado na página 38.

NAIDU, G. G.; KRISHNA, P. M. Dynamic Analysis Of Electrical Transmission Tower Using Fnite Element Technique. n. November, 2016. Citado na página 9.

NBR-5422. *NBR5422- Projeto de linhas de transmissão de energia elétrica*. 1985. Citado 8 vezes nas páginas x, xiii, 2, 31, 32, 33, 55 e 63.

NBR-6123. *Forças devidas ao vento em edificações*. 1988. Citado 4 vezes nas páginas 31, 34, 55 e 63.

NEWLAND, D. E. *An Introduction to Random Vibrations, Spectral & Wavelet Analysis*. 2005. Citado na página 38.

OSTACHOWICZ, W. M. Damage detection of structures using spectral finite element method. *Computers and Structures*, v. 86, n. 3-5, p. 454–462, 2008. ISSN 00457949. Citado na página 13.

PALACZ, M.; KRAWCZUK, M. Analysis of longitudinal wave propagation in a cracked rod by the spectral element method. *Computers and Structures*, v. 80, n. 24, p. 1809–1816, 2002. ISSN 00457949. Citado na página 13.

PANTERA, T. A spectral element method for fluid dynamics: laminar flow in a channel expansion. *Journal of Computational Physics*, v. 54, p. 468–488, 1984. Nenhuma citação no texto.

PARK, I.; LEE, U. Dynamic analysis of smart composite beams by using the frequency-domain spectral element method. *Journal of Mechanical Science and Technology*, v. 26, n. 8, p. 2511–2521, 2012. ISSN 1738494X. Citado na página 13.

PARK, I.; LEE, U. Spectral element modeling and analysis of the transverse vibration of a laminated composite plate. *Composite Structures*, Elsevier Ltd, v. 134, p. 905–917, 2015. ISSN 02638223. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.08.111>>. Citado na página 13.

PENG, H. et al. Modeling of wave propagation in plate structures using three-dimensional spectral element method for damage detection. *Journal of Sound and Vibration*, v. 320, n. 4-5, p. 942–954, 2009. ISSN 0022460X. Citado na página 13.

PETYT, M. *Finite Element Vibration Analysis*. 2nd ed.. ed. [S.l.: s.n.], 2010. ISBN 9780521191609. Citado na página 20.

Prasad Rao, N. et al. Investigation of transmission line tower failures. *Engineering Failure Analysis*, Elsevier Ltd, v. 17, n. 5, p. 1127–1141, 2010. ISSN 13506307. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.engfailanal.2010.01.008>>. Citado na página 9.

RAO, S. S. *Vibrações Mecânicas*. 4ed. [S.l.: s.n.], 2008. Citado na página 49.

SANTOS, A. *Megaobra cruza a Amazônia para transmitir energia*. 2013. Disponível em: <<http://www.cimentoitambe.com.br/megaobra-cruza-a-amazonia-para-transmitir-energia/>>. Citado 2 vezes nas páginas x e 1.

SERIANI, G.; PRIOLO, E. Spectral element method for acoustic wave simulation in heterogeneous media. p. 337–348, 2011. Citado na página 13.

SHIN, K.; HAMMOND, J. K. *Fundamentals of Signal Processing for sound and vibration engineers*. [S.l.: s.n.], 2008. ISBN 9780470511886. Citado 2 vezes nas páginas 38 e 39.

SINGH, K. d. S. ANÁLISE ESTÁTICA DE TORRES METÁLICAS TRELIÇADAS AUTOPORTANTES PARA LINHAS DE TRANSMISSÃO. 2008. Citado na página 5.

TAILLON, J. Y. et al. Variation of damping and stiffness of lattice towers with load level. *Journal of Constructional Steel Research*, Elsevier Ltd, v. 71, p. 111–118, 2012. ISSN 0143974X. Citado na página 9.

TIAN, L. et al. Full-Scale Tests and Numerical Simulations of Failure Mechanism of Power Transmission Towers. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, v. 18, n. 09, p. 1850109, 2018. ISSN 0219-4554. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 30.

TSUBOI, S. The Spectral-Element Method in Seismology The Spectral-Element Method in Seismology. n. January 2005, 2014. Citado na página 13.

YASUI, H. et al. Analytical study on wind-induced vibration of power transmission towers. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, v. 83, n. 1-3, p. 431–441, 1999. ISSN 01676105. Citado na página 10.

YIN, T. et al. Dynamic reduction-based structural damage detection of transmission tower utilizing ambient vibration data. *Engineering Structures*, Elsevier Ltd, v. 31, n. 9, p. 2009–2019, 2009. ISSN 01410296. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.engstruct.2009.03.004>>. Citado na página 8.

ZHANG, S. et al. A two-step FEM-SEM approach for wave propagation analysis in cable structures. *Journal of Sound and Vibration*, Elsevier Ltd, v. 415, p. 41–58, 2018. ISSN 10958568. Citado na página 8.

ZHU, H.-z. et al. Spectral element method for vibration analysis of three-dimensional pipes conveying fluid. *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, Springer Netherlands, v. 7, 2018. ISSN 1569-1713. Disponível em: <<http://link.springer.com/10.1007/s10999-018-9416-7>>. Citado na página 13.