Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Imersões isométricas locais de superfícies pseudoesféricas e classes de equações diferenciais parciais

Jailson Oliveira Dias

Brasília

2020

Jailson Oliveira Dias

Imersões isométricas locais de superfícies pseudoesféricas e classes de equações diferenciais parciais

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos para obtenção do grau de MESTRE em Matemática.

Orientador:
Prof. Dr. Tarcísio Castro Silva

Brasília

2020

Ficha catalográfica elaborada automaticamente,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

DD541i

Dias, Jailson Oliveira
Imersões isométricas locais de superfícies pseudoesféricas e classes de equações diferenciais parciais / Jailson Oliveira Dias; orientador Tarcísio Castro Silva. - Brasília, 2020.
95 p.

Dissertação (Mestrado - Mestrado em Matemática) -- Universidade de Brasília, 2020.

1. Geometria diferencial. 2. Equações diferenciais. 3. Equação de Sine-Gordon. 4. Método do referencial móvel. I. Silva, Tarcísio Castro , orient. II. Título.

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Imersões isométricas locais de superfícies pseudoesféricas e classes de equações diferenciais parciais

por

Jailson Oliveira Dias *

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos para obtenção do grau de

MESTRE EM MATEMÁTICA

Brasília, 28 de Fevereiro de 2020

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Tarcísio Castro Silva- Orientador (MAT/UnB)

Prof. Dr. Benedito Leandro Neto - Membro (IME/UFG)

Prof. Dr. João Paulo dos Santos - Membro (MAT/UnB)

*O autor foi bolsista do CNPq durante a elaboração deste trabalho.

E que viva a criatividade.

Agradecimentos

Agradeço, sobretudo, a Deus por me dar forças externas, as quais me possibilitaram chegar até aqui; a minha mãe, Lucineide Bispo de Oliveira, por me ensinar a ler; a minha tia, Marileide Bispo de Oliveira, por atender ao meu pedido de me colocar em uma escola no ano em que eu completava 9 anos; a minha avó, Judite Barreto, pelo zelo; ao meu avô, Geraldo Bispo, pelo cuidado e ao meu pai, Josemar Ribeiro, pelas lições vitais.

Quero agradecer, de uma forma especial, pelo apoio de pessoas como Magno Ernesto Cavalcante, Alaide Dias Ferraz, Homero Lima Vieira, Thereza Costa Lima Vieira e seus familiares.

Agradeço ao meu orientador, Tarcísio Castro Silva, por todo rigor, toda exigência e toda atenção; aos professores Eduardo Antonio da Siva, Aline G. da Silva, Alex Carrazedo, Jiazheng Zhou, Carlos A. P. dos Santos, Igor dos Santos, José Luis Teruel, Sandra Imaculada, Gilberto da Silva Pina, Luiz Alberto de Oliveira Silva, Maria Amelia de Pinho Barbosa, Antonio Andrade do Espirito Santo, Mariana Pinheiro, Genilson Melo, Jilvan Lemos, Juarez dos Santos Azevedo, Fausto Assunção de Brito Lira, Katia Silene Ferreira, Eleni Cerqueira, Karla, Avani Rios Magalhaes, Adriana Reis, Cosme Geraldo, Raimundo Correia, Norai Romeu, Neusa Correia, Elenita, Bolivar, Maria do Amparo, Eva Christian, Sandra Sinara Cerqueira, Conceição Freire Costa, Maria Bárbara Mesquita, Joseilton Gomes, Leila Maria, Romélia Silva, Luciana Boeira e Roque Santos pelo incentivo e por toda atenção e aos membros da banca, Benedito Leandro Neto e João Paulo dos Santos, pelas dicas e sugestões.

Quero também agradecer pelo apoio de Jefferson Araujo, Mabel Santana, Jéssica Almeida, Adalberto Oliveira, Wállace John Pereira, Nadine Paranhos, Caroline Araujo, Juciara Gomes, Joilma Gomes, Ito, Ariana de Lima, Levi Valadares, Cid Ferraz Machado, Rebeca Oliveira, José Raimundo Calado, Arisvaldo, Lino Lombardo, Maike Dias, José Batista Rabelo Costa, Aldo Silva, Wesley Ferreira, Hernane de Araújo, Fabíola Paim, Railson Rodrigues, Klleanny Mello, Washington Luis, Laís Moraes, Devanile Assis, Liliane Lima, Jailton Souza, João Henrique Espíndula, Fabiane Moraes, Emilson Silva, Jean Jacson, Maria das Neves, Jorge Paranhos, Ariel Paranhos, Danilo, Zenaide Oliveira, Maria Rosangela, Caroline Oliveira, Ana Lúcia Paranhos, Tatiana Oliveira, Vitória, Iara Soares, Andre Lima, Eduardo, Sérgio Silva, Vanessa Sousa, Vanessa Silva, Bárbara Machado, Marcos Silva, Marcos Bomfim, Orlando Júnior, Khalil Machado, Geovane Cardoso, Murilo, Weverton Gomes, Iago Fiais, Maria Edna Gomes, Paulo, Romulo Diaz, Vítor Antonelli, Mateus Fleury, Roxa, William Humberto Cuellar, Júlia Aredes, Adler Marques, Valdenilson Silva, Flávio, Francisca Capellesso, Edileusa Paranhos, Alancoc Alencar, Imelson Ntchala, George Demetrios, Enio de Sousa, Nicole, Vinicius Kobayashi, Henrique Augusto Souza, João Batista, Rodrigo Ramos, Mitsue Yoshida, Elivelton Lopes, Gabriel Leal, Vinicius Coelho, Lucas Rocha, Rodrigo Silva, Antonio Marcos, Edson, Zelinho, Celina, Mauricio Mendes, Braz, Camilo Araújo, Samira Rachid, Jade Paranhos, Tiago Santos Figueredo, Roseneide Ferreira, Lalinha, Pedro, Edmar Silva, Nena Santana, Rute, Jonas Gonçalves, Cassia Maria, Rosa Reis, Elieser Azevedo, Marcia Cristina, Wander Junior, Beatriz, Leonardo Mendes, Karine de Oliveira, Dalila, Magno Bueno, Tharles Araújo, João Pedro Parpalardo, Junio Rocha, Mateus de Andrade Cruz Dutra, Matheus Andrade Ribeiro de Moura Horácio, Samuel Matias, Rodrigo Duarte, Lucas Lavoyer, Marta Adriana Sousa, Marta Chagas, Ingrid Andrade, Cacau Queiroz, Thaylane Trindade, Adja Menezes, Mayla, Criste, Katianny Freitas, Carlos Henrique Dos Santos, Arielton, Téo, Dougllas Santos, Hamadia Matos, Lejean, Mateus Figueiredo, Rodolfo Ferreira, Leonardo Melo, Mayra Soares, Felipe Quintino, Marcos Duarte, Genildo Nery, Lais Moreira, Letícia Santos, Christe Hélida, Santiago Miler Quispe Mamani, Filipe Kelmer Alves, Nathália Nogueira, Welinton Gimarez, Valter Borges, John Freddy Moreno e Elaine Cristine.

Enfim, quero agradecer ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo financiamento durante a elaboração deste trabalho.

Resumo

Baseado em [15, 16, 17], consideramos duas classes de equações diferenciais parciais que descrevem superfícies pseudoesféricas, a saber, a classe de equações evolutivas de ordem $k \geq 2$, dada por

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right),$$

classificada por Chern e Tenenblat [11], e a classe de equações hiperbólicas de ordem 2, dada por

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = F\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}\right),$$

estudada por Rabelo e Tenenblat [21], onde $u(x,t)$ é uma função real e diferenciável. Em seguida, fazemos uma abordagem sistemática de imersões isométricas locais em $\mathbb{R}^3$ de superfícies pseudoesféricas sob a perspectiva das equações diferenciais que dão origem às métricas.

Palavras-chave: imersão, superfície, pseudoesférica, evolutiva, hiperbólica.

Abstract

Based on [15, 16, 17], we consider two classes of partial differential equations which describe pseudo-spherical surfaces, namely, the class of k-th order evolution equations given by

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right), \qquad k \geq 2,$$

classified by Chern and Tenenblat [11] and the class of second order hyperbolic equations given by

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = F\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}\right),$$

studied by Rabelo and Tenenblat [21], where $u(x,t)$ is a real and differentiable function. In the next, we consider a systematic approach to local isometric immersions into $\mathbb{R}^3$ of pseudo-spherical surfaces from the perspective of the differential equations that give rise to the metrics.

Keywords: immersion, surface, pseudo-spherical, evolution, hyperbolic.

Sumário

Introdução

As equações diferenciais parciais que descrevem superfícies pseudoesféricas apresentam suma importância na descrição de fenômenos físicos não-lineares e na resolução de problemas de natureza matemática pura ou aplicada. A essência geométrica destas equações reside sobretudo no fato de que suas soluções genéricas fornecem métrica em subconjuntos abertos de $\mathbb{R}^2$, com curvatura gaussiana $K = -1$. Um dos exemplos mais famosos de tal equação é a equação de Sine-Gordon $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = sin(u)$. Esse exemplo foi descoberto por Edmond Bour [1]. Ele percebera que em termos de coordenadas assintóticas de Darboux, as equações de Gauss-Codazzi-Mainardi para superfícies pseudoesféricas em $\mathbb{R}^3$ se reduzem à equação de Sine-Gordon. Com isso, a descoberta das transformações de Bäcklund e a fórmula de superposição para soluções de equações construída por Bianchi focaram sobretudo ênfase na equação de Sine-Gordon que em sua culminância acabou sendo um modelo importante na descrição de vários fenômenos não-lineares.

Uma equação diferencial parcial

$$\Delta\left(t, x, u, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}, \cdots, \frac{\partial^k u}{\partial t^l \partial x^{k-l}}\right) = 0 \tag{1}$$

descreve *superfícies pseudoesféricas* (**s.p.e.**) ou é dita equação PS se existe um sistema de 1-formas $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, dado por

$$\omega_1 = f_{11}dx + f_{12}dt, \quad \omega_2 = f_{21}dx + f_{22}dt, \quad \omega_3 = f_{31}dx + f_{32}dt, \tag{2}$$

onde f_{ij}, $(i,j) \in \{1,2,3\} \times \{1,2\}$, são funções de x, t, $u(x,t)$ e derivadas parciais de $u(x,t)$ com respeito a x e t, tal que as equações de estrutura

$$d\omega_1 = \omega_3 \wedge \omega_2, \quad d\omega_2 = \omega_1 \wedge \omega_3, \quad d\omega_3 = \omega_1 \wedge \omega_2, \tag{3}$$

de uma superfície com curvatura gaussiana $K = -1$ são satisfeitas se, e somente se, u é uma solução de (1) satisfazendo $\omega_1 \wedge \omega_2 \neq 0$, com $\omega_3 := \omega_{12}$ sendo a conexão de Levi-Civita da correspondente métrica pseudoesférica, a qual está definida no domínio da solução u de (1) por

$$I = \omega_1^2 + \omega_2^2. \tag{4}$$

Além da equação de Sine-Gordon, outra equação de interesse é a Korteweg–de Vries (KdV),

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + 6u\frac{\partial u}{\partial x},$$

com 1-formas associadas

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= (1-u)\ dx + \left(-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \eta\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \eta^2 u - 2u^2 + \eta^2 + 2u\right)\ dt,\\
\omega_2 &= \eta\, dx + \left(\eta^3 + 2\eta u - 2\frac{\partial u}{\partial x}\right)\ dt,\\
\omega_3 &= -\left(1+u\right)\ dx + \left(-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \eta\frac{\partial u}{\partial x} - \eta^2 u - 2u^2 - \eta^2 - 2u\right)\ dt.
\end{aligned}$$

As equações que descrevem superfícies pseudoesféricas também podem ser caracterizadas de outras maneiras alternativas. Por exemplo, o sistema de equações (3) é equivalente à condição de integração do sistema linear

$$\begin{pmatrix} dv^1 \\ dv^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \omega_2 & \omega_1 - \omega_3 \\ \omega_1 + \omega_3 & -\omega_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

onde $v^i = v^i\,(x,t)$.

Nos anos derradeiros muitas tentativas têm sido feitas no sentido de caracterizar e classificar equação PS, por exemplo, em [11] Chern e Tenenblat deram uma caracterização para equações evolutivas da forma $\frac{\partial u}{\partial t} = F\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, ..., \frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right)$ sob as hipóteses de que $f_{ij} = f_{ij}\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, ..., \frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right)$ e $f_{21} = \eta$, onde η é um parâmetro real; no artigo [8], Catalano-Silva obtiveram uma classificação completa e explícita de equações da forma $\frac{\partial u}{\partial t} = A\,(x,t,u)\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\left(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial x}\right)$ sob as hipóteses de que $A \neq 0$ e $f_{21} = \eta$; Gomes [13] e Catalano-Tenenblat [10] classificaram equações evolutivas da forma $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^5 u}{\partial x^5} + G\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}, \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)$ e $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + G\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)$, respectivamente, sob hipóteses auxiliares que f_{21} e f_{31} são combinações lineares de f_{11}.

Esses constituem alguns dos resultados obtidos até o presente momento.

Uma observação importante a ser feita é que a classificação apresenta-se como sendo mais forte que a caracterização. Enquanto esta impõe restrições fortes sob as funções f_{ij} sem explicitá-las, aquela dá uma expressão explícita para as funções f_{ij}. Ainda é importante ressaltar que há uma série de equações PS que não foram caracterizadas, bem como classificadas e é nesta direção que surge a necessidade de dar prosseguimento ao estudo, porquanto as supracitadas equações apresentam suma importância para a física e para a própria matemática.

Um clássico resultado em geometria afirma que qualquer superfície pseudoesférica pode ser local isometricamente imersa em $\mathbb{E}^3$. Por conseguinte, qualquer superfície pseudoesférica descrita por uma equação PS $\mathscr{E}$ admite uma imersão isométrica local em $\mathbb{E}^3$.

De outro modo, pelo teorema de Bonnet, a toda solução genérica u de $\mathscr{E}$ está associado um par $(I[u], II[u])$ de primeira e segunda formas fundamentais, as quais satisfazem as equações de Gauss-Codazzi.

Portanto segue-se da teoria básica que as componentes a, b, c da segunda forma fundamental de qualquer imersão isométrica local em $\mathbb{E}^3$ de uma métrica de curvatura constante -1 estão definidas por 1-formas

$$\omega_{13} = a\omega_1 + b\omega_2, \quad \omega_{23} = b\omega_1 + c\omega_2,$$

que satisfazem as equações de estrutura (Codazzi)

$$d\omega_{13} = \omega_{12} \wedge \omega_{23}, \quad d\omega_{23} = \omega_{21} \wedge \omega_{13},$$

e a equação de Gauss

$$ac - b^2 = -1.$$

Para a equação de Sine-Gordon, $u_{tx} = \sin u$, com a escolha de 1-formas ω_1 , ω_2 e $\omega_3 = \omega_{12}$, dadas por

$$\omega_1 = \frac{1}{\eta} \sin u\, dt, \quad \omega_2 = \eta\, dx + \frac{1}{\eta} \cos u\, dt, \quad \omega_3 = u_x\, dx,$$

podemos facilmente verificar que as 1-formas ω_{13} e ω_{23} são dadas por

$$\omega_{13} = \tan \frac{u}{2} \omega_1, \qquad \omega_{23} = -\cot \frac{u}{2} \omega_2,$$

donde $a = tan(u/2)$, $b = 0$ e $c = -cot(u/2)$, isto é, para a equação de Sine-Gordon, as componentes a, b, c da segunda forma fundamental da imersão isométrica local dependem de um *jato de ordem finita* de u. Uma questão natural é saber se esta propriedade se estende para outras equações, além da equação de Sine-Gordon, dentro da classe de equações diferenciais que descrevem superfícies pseudoesféricas.

No Capítulo 2, consideraremos a classe de equações evolutivas classificadas por Chern e Tenenblat [11] e, no Capítulo 3, a classe de equações hiperbólicas de ordem 2, dada por

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = F\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}\right),$$

estudada por Rabelo e Tenenblat [21], onde $u(x,t)$ é uma função real e diferenciável. Em ambos os casos, veremos que as componentes a, b e c de qualquer imersão isométrica local em $\mathbb{R}^3$ de superfícies pseudoesféricas associadas às soluções de tais equações são independentes da solução u da equação, isto é, dependem apenas de x e t e, portanto, são ditos *universais*.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, trataremos de alguns conceitos e notações que serão utilizados no decorrer deste trabalho.

Na Seção 1.1, introduziremos a noção de formas diferenciais e, na Seção 1.2, aplicaremos a teoria descrita na seção anterior ao estudo do método do referencial móvel às superfícies de $\mathbb{R}^3$.

Tendo em vista o nosso propósito de estudar as imersões isométricas locais de métricas associadas às soluções de equações diferenciais parciais, destinamos a Seção 1.3 ao estudo de alguns exemplos de classes de equações diferenciais que descrevem superfícies pseudoesféricas. Por conseguinte, o leitor, já familiarizado com a linguagem de formas diferenciais, poderá, em uma primeira leitura, omitir as Seções 1.1 e 1.2 e analisar diretamente a Seção 1.3.

1.1 Formas diferenciais em $\mathbb{R}^2$

Dado um ponto $p \in \mathbb{R}^2$, indicaremos o espaço tangente a $\mathbb{R}^2$ em p por ${R_p}^2$. Diremos que um campo de vetores em $\mathbb{R}^2$ é uma aplicação

$$\begin{aligned} v : \mathbb{R}^2 &\to {R_p}^2 \\ p &\longmapsto v(p) \end{aligned},$$

isto é, uma aplicação que para cada ponto $p \in \mathbb{R}^2$ associa um vetor $v(p) \in {R_p}^2$.

Uma vez que ${R_p}^2$, com a adição e a multiplicação usuais de seus elementos por escalar, é um espaço vetorial de dimensão 2 no corpo $\mathbb{R}$, faz sentido falar em base atrelada a esse conjunto. Com isso, dado $p \in \mathbb{R}^2$, obtemos, pela definição da aplicação

v, um vetor $v(p) \in {R_p}^2$, o qual pode ser escrito como

$$v(p) = a_1(p)v_1(p) + a_2(p)v_2(p), \tag{1.1}$$

em que $\{v_1(p), v_2(p)\}$ é, para cada p, uma base, ou seja, a medida que p varia em $\mathbb{R}^2$, varia-se ${R_p}^2$ e $\{v_1(p), v_2(p)\}$ é a sua correspondente base. Além disso, a_1 e a_2 são funções reais, isto é,

$$\begin{aligned} a_j : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ p &\longmapsto a_j(p) \end{aligned},$$

$j \in \{1, 2\}$, é função real, e como podemos ver, fixado $j \in \{1, 2\}$, obtemos, para cada $p \in \mathbb{R}^2$, um escalar $a_j(p) \in \mathbb{R}$. Além disso, se as funções a_1 e a_2 são diferenciáveis, o campo v é dito diferenciável.

Para cada espaço vetorial ${R_p}^2$, podemos associar um conjunto indicado por $({R_p}^2)^*$. Tal conjunto é definido por $({R_p}^2)^* = \{L : {R_p}^2 \to \mathbb{R}; \text{T é uma aplicação linear}\}$.

Com as operações usuais de adição e multiplicação de aplicações lineares de $({R_p}^2)^*$ por escalares de $\mathbb{R}$, $({R_p}^2)^*$ é evidentemente um espaço vetorial. Tal espaço recebe o nome de espaço dual do espaço ${R_p}^2$.

Se considerarmos $\{e_1(p), e_2(p)\}$ a base canônica de ${R_p}^2$, então a base de $({R_p}^2)^*$ é dada por $\{(dx)_p, (dt)_p\}$, onde $(dx)_p : {R_p}^2 \to \mathbb{R}$ e $(dt)_p : {R_p}^2 \to \mathbb{R}$ serão aplicações definidas por $(dx)_p(a_1(p), a_2(p)) = a_1(p)$ e $(dt)_p(a_1(p), a_2(p)) = a_2(p)$, com $(a_1(p), a_2(p))$ sendo um vetor de ${R_p}^2$ na base $\{e_1(p), e_2(p)\}$. A base $\{(dx)_p, (dt)_p\}$ de $({R_p}^2)^*$ é a base dual da base $\{e_1(p), e_2(p)\}$ de ${R_p}^2$.

Definição 1.1.1. *Uma 1-forma ou forma diferencial de grau 1 em um conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^2$ é uma aplicação $\omega : U \to ({R_p}^2)^*$ que para cada $p \in U$ associa um vetor $\omega(p) \in ({R_p}^2)^*$.*

Note que consoante a Definição 1.1.1 e as observações precedentes, podemos, para cada $p \in U$, escrever

$$\omega(p) = a_1(p)(dx)_p + a_2(p)(dt)_p,$$

em que $a_1, a_2 : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ são funções reais, isto é, para cada $p \in U$, tem-se $a_1(p), a_2(p) \in \mathbb{R}$.

Agora, a fim de introduzir a definição de 2-formas ou forma diferencial de grau 2, considere o conjunto

$$V_2[({R_p}^2)^*] := \{M : {R_p}^2 \times {R_p}^2 \to \mathbb{R}; \text{M é uma aplicação bilinear e alternada}\}.$$

Esse conjunto, com a adição usual de aplicações bilineares e a multiplicação de aplicação bilinear por um escalar de $\mathbb{R}$, constitui um espaço vetorial. Dizer que M é uma aplicação alternada significa que tal aplicação muda de sinal na medida em que se permuta dois de seus argumentos consecutivamente, ou seja, $M(v_1, v_2) = -M(v_2, v_1)$ para quaisquer $v_1, v_2 \in R_p^2$.

Sejam M_1 e M_2 1-formas definidas num subconjunto aberto U de $\mathbb{R}^2$. Daí, considerando $p \in U$, denominamos a aplicação $(M_1M_2)_p : {R_p}^2 \times {R_p}^2 \to \mathbb{R}$, dada por $(M_1M_2)_p(v_1, v_2) = (M_1)_p(v_1)(M_2)_p(v_2)$, como sendo o produto tensorial de M_1 e M_2. É evidente que tal aplicação é bilinear, pois M_1 e M_2 são aplicações lineares.

Dadas 1-formas θ_1 e θ_2 em $U \subset \mathbb{R}^2$, define-se, para cada $p \in U$, a soma delas como $(\theta_1 + \theta_2)(p) = \theta_1(p) + \theta_2(p)$ enquanto que o produto de uma 1-forma θ, definida em $U \subset \mathbb{R}^2$, por uma função real f, também definida em $U \subset \mathbb{R}^2$, é definido por $(f\theta)(p) = f(p)\theta(p)$, seja qual for $p \in U$. Consequentemente, pondo $\theta_1 = a_1dx + b_1dt$, $\theta_2 = a_2dx + b_2dt$ e $\theta = adx + bdt$, temos $\theta_1 + \theta_2 = (a_1 + a_2)dx + (b_1 + b_2)dt$ enquanto que $f\theta = afdx + bfdt$.

Para 1-formas M_1, M_2 e M_3 quaisquer e uma função real f, definidas em um aberto $U \subset \mathbb{R}^2$, é válido que

$$\begin{aligned}
&(M_1 + M_2)M_3 = M_1M_3 + M_2M_3, \\
&M_1(M_2 + M_3) = M_1M_2 + M_1M_2, \\
&(fM_1)M_2 = M_1(fM_2) = fM_1M_2.
\end{aligned} \tag{1.2}$$

Uma demonstração dos fatos evidenciados em (1.2) pode ser encontrada em [24].

Ainda supondo que M_1 e M_2 são 1-formas definidas num subconjunto aberto U de $\mathbb{R}^2$, obtemos um elemento $M_1 \wedge M_2 \in V_2[({R_p}^2)^*]$, definido como segue:

$$(M_1 \wedge M_2)(v_1, v_2) = det(M_i(v_j)),\ i, j \in \{1, 2\}. \tag{1.3}$$

Mais precisamente,

$$(M_1 \wedge M_2)(v_1, v_2) = M_1(v_1)M_2(v_2) - M_2(v_1)M_1(v_2),$$

e, claramente, trata-se de uma expressão bilinear alternada. De acordo com o exposto anteriormente, podemos, de maneira mais simples, escrever $M_1 \wedge M_2 = M_1M_2 - M_2M_1$.

A operação, introduzida em (1.3), recebe o nome de produto exterior de 1-formas. Note que, em particular, $(dx)_p \wedge (dt)_p \in V_2[({R_p}^2)^*]$. Essa expressão será denotada simplesmente por $(dx \wedge dt)_p$ no que segue.

É importante ainda mencionar que, como consequência de (1.1), decorre-se que

$$dx \wedge dx = 0, \qquad dt \wedge dt = 0, \qquad dx \wedge dt = -dt \wedge dx.$$

Proposição 1.1.2. *O conjunto* $\{(dx \wedge dt)_p\}$ *é uma base para* $V_2[({R_p}^2)^*]$.

Demonstração. Devemos mostrar que o conjunto $\{(dx \wedge dt)_p\}$, mencionado acima, é linearmente independente e que ele gera $V_2[({R_p}^2)^*]$. Com efeito, supondo

$$a_{12}(dx \wedge dt) = \tilde{0},$$

em que $\tilde{0}$ é o vetor nulo do espaço vetorial $V_2[({R_p}^2)^*]$, temos

$$a_{12}(dx \wedge dt)(e_1, e_2) = \tilde{0}(e_1, e_2),$$

o que implica $a_{12} = 0$. Isso mostra que o conjunto $\{(dx \wedge dt)_p\}$ é linearmente independente. Agora, a fim de mostrar que o mesmo conjunto gera $V_2[({R_p}^2)^*]$, devemos provar que dado $f \in V_2[({R_p}^2)^*]$, podemos escrever

$$f = a_{12}(dx \wedge dt).$$

Com efeito, uma vez que $f \in V_2[({R_p}^2)^*]$, segue-se que $f(e_1, e_2) \in \mathbb{R}$ e como $(dx \wedge dt) \in V_2[({R_p}^2)^*]$, temos $f(e_1, e_2)(dx \wedge dt) \in V_2[({R_p}^2)^*]$. Daí, definindo $g = f(e_1, e_2)(dx \wedge dt)$ e aplicando g a (e_1, e_2), obtemos $f(e_1, e_2) = g(e_1, e_2)$, donde $f = g$. $\square$

A definição a seguir se refere a 2-formas.

Definição 1.1.3. *Uma 2-forma ou forma diferencial de grau* 2 *em um conjunto aberto* $U \subset \mathbb{R}^2$ *é uma aplicação* $\omega : U \to V_2[({R_p}^2)^*]$, *isto é,* ω *é uma aplicação que para cada* $p \in U$ *associa um vetor* $\omega(p) \in V_2[({R_p}^2)^*]$.

Pela Definição 1.1.3, segue-se que para cada $p \in U$,

$$\omega(p) = a_{12}(dx \wedge dt)_p,$$

em que a_{12} é uma função de um conjunto aberto U de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$. Além disso, juntando a Definição 1.1.3 com Proposição 1.1.2, temos, para cada $p \in U \subset \mathbb{R}^2$,

$$\omega(p) = a_{12}(p)(dx)_p \wedge (dt)_p = a_{12}(dx \wedge dt)_p.$$

É importante destacar que o produto exterior de 1-formas introduzido em (1.3) cumpre as propriedades listadas na proposição que segue:

Proposição 1.1.4. *Sejam ω, θ e κ 1-formas diferenciais definidas num aberto U de $\mathbb{R}^2$, então*

1. $\omega \wedge (\theta + \kappa) = \omega \wedge \theta + \omega \wedge \kappa.$

2. $(\theta + \kappa) \wedge \omega = \theta \wedge \omega + \kappa \wedge \omega.$

3. $(f\omega) \wedge \theta = \omega \wedge (f\theta) = f\omega \wedge \theta.$

Ao leitor interessado na demonstração dessa proposição, sugerimos uma rápida consulta em [24].

Para enfatizar tudo que foi visto até o presente momento, veremos alguns exemplos.

Exemplo 1.1. Seja $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável de classe C^∞ e seja $p \in U$, com $p = (x, t)$. A aplicação $df : U \subset \mathbb{R}^2 \to (\mathbb{R}^2)^*$ que para cada $p \in U$ associa a diferencial de f em p, df_p, é uma forma diferencial de grau 1, com $df_p = f_x(p)dx + f_t(p)dt$, em que f_x e f_t são, respectivamente, as derivadas parciais de f em relação a x e a t e, além disso, $dx, dt : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ são aplicações lineares definidas por $dx(v_1, v_2) = v_1$ e $dx(v_1, v_2) = v_2$ para cada $(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$.

Exemplo 1.2. Considere as expressões

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= u\,dx + \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \phi\right) dt,\\
\omega_2 &= \left(\mu_2 u - 2m_0\sqrt{1+\mu_2^2}\right) dx + \left[\mu_2\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \phi\right) + s_0\sqrt{1+\mu_2^2}\right] dt,\\
\omega_3 &= \left(\sqrt{1+\mu_2^2}u - 2m_0\mu_2\right) dx + \left[\sqrt{1+\mu_2^2}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \phi\right) + \mu_2 s_0\right] dt,
\end{aligned}$$

onde $\phi = (m_1 + 2m_0)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{u^2}{2} + 2m_0 Bu$, com $B = 4m_0^2 + 2m_0 m_1 + m_2$, sendo que $m_0, m_1, m_2, \mu_2 \in \mathbb{R}$, $m_0 \neq 0$, $s_0 = -4m_0 B$ e $u : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável que depende de x e t. As expressões ω_1, ω_2 e ω_3 são 1-formas diferenciais.

Exemplo 1.3. Se considerarmos a_i e a_{ij} funções de $\mathbb{R}^4$ em $\mathbb{R}$, temos o seguinte:

1. Toda função diferenciável $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ é uma 0-forma (por convenção).

2. A expressão
$$a_1dx_1 + a_2dx_2 + a_3dx_3 + a_4dx_4$$
é uma 1-forma.

3. A expressão

$$\begin{aligned} &a_{12}dx_1 \wedge dx_2 + a_{13}dx_1 \wedge dx_3 + a_{14}dx_1 \wedge dx_4 + a_{23}dx_2 \wedge dx_3 \\ &\quad + a_{24}dx_2 \wedge dx_4 + a_{34}dx_3 \wedge dx_4 \end{aligned}$$

é uma 2-forma.

Quando estudamos funções diferenciáveis, existe uma transformação linear correspondente a cada função diferenciável em questão, a qual recebe o nome de diferencial. Por conseguinte, ao estudar formas diferenciais uma pergunta natural seria: dada uma 1-forma diferenciável, pode-se definir diferencial de uma 1-forma? A definição que segue sistematiza essa pergunta.

Definição 1.1.5. *Seja $\omega = a_1 dx + a_2 dt$ uma 1-forma diferencial. A diferencial exterior de ω, indicada por $d\omega$, é definida por*

$$d\omega = da_1 \wedge dx + da_2 \wedge dt.$$

Observe que a diferencial de uma 1-forma resulta numa 2-forma.

Para finalizar esta seção, apresentaremos uma proposição que trata sobre a diferencial de 1-formas que é a que segue.

Proposição 1.1.6. *Sejam ω e θ 1-formas diferenciais definidas num aberto U de $\mathbb{R}^2$ e $f : U \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Então:*

1. $d(df) = 0$.
2. $d(\omega + \theta) = d\omega + d\theta$.
3. $d(f\omega) = df \wedge \omega + f d\omega$.

Queremos enfatizar que o nosso principal objetivo nesta seção foi apresentar os resultados que justificam os tópicos que serão apresentados nos próximos capítulos. Por isso, omitimos detalhes dessa última proposição. Contudo, ao leitor interessado na demonstração, sugerimos [24].

1.2 Método do referencial móvel

Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular. Daí se considerarmos uma parametrização $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to S$, em que U é um conjunto aberto, segue-se que, dado $q \in U$, a diferencial de X em q, $dX_q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, é injetiva, donde o conjunto $dX_q(\mathbb{R}^2)$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$ de dimensão 2, mais que isso, tal conjunto é o próprio plano tangente a S em $X(q)$, isto é, $dX_q(\mathbb{R}^2) = T_{X(p)}S$. Uma prova dessa afirmação pode ser vista em [3].

Um triedro móvel associado à parametrização $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to S$ de uma superfície S é um terno de funções diferenciáveis $e_1, e_2, e_3 : U \to \mathbb{R}^3$ tal que para todo $q \in U$, o conjunto $\{e_1(q), e_2(q), e_3(q)\}$ seja uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ e os vetores $e_1(q)$ e $e_2(q)$ são tangentes a S em $X(q)$. Uma vez que o conjunto $\{e_1(q), e_2(q), e_3(q)\}$ é ortonormal e $e_1(q)$ e $e_2(q)$ são os geradores do espaço tangente a S em $X(q)$, segue-se que $e_3(q)$ é um vetor normal à superfície S no ponto $X(q)$.

Observação. Sempre que uma superfície é parametrizada, existe um triedro móvel. Com efeito, se $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to S$ é uma superfície parametrizada, defina e_1, e_2, $e_3 : U \to \mathbb{R}^3$ por

$$e_1(q) = \frac{X_u}{|X_u|}, \quad e_3(q) = \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|} \quad \text{e} \quad e_2(q) = e_3(q) \times e_1(q).$$

Retomando a informação de que $dX_q(\mathbb{R}^2) = T_{X(p)}S$, segue-se que dado $v \in \mathbb{R}^2$, temos $dX_q(v) \in T_{X(p)}S$ e, sendo $\{e_1(q), e_2(q)\}$ uma base de $T_{X(p)}S$, segue-se que existem escalares $(\omega_1)_q(v)$, $(\omega_2)_q(v) \in \mathbb{R}$ tais que

$$dX_q(v) = (\omega_1)_q(v)\, e_1(q) + (\omega_2)_q(v)\, e_2(q), \tag{1.4}$$

onde $(\omega_1)_q(v) = \langle dX_q(v), e_1(q)\rangle$ e $(\omega_2)_q(v) = \langle dX_q(v), e_2(q)\rangle$. Fazendo q variar em U, segue-se que $(\omega_1)_q, (\omega_2)_q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ são funcionais lineares (e, portanto, são 1-formas diferenciais em U).

Analogamente, sejam $e_1, e_2, e_3 : U \to \mathbb{R}^3$ funções diferenciáveis. Daí, para cada $q \in U$, considere as diferenciais $d(e_1)_q, d(e_2)_q, d(e_3)_q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ de e_1, e_2 e e_3 em q, respectivamente. Como o conjunto $\{e_1(q), e_2(q), e_3(q)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$, segue-se que dado $v \in \mathbb{R}^2$, podemos escrever $d(e_i)_q(v)$, $i \in \{1, 2, 3\}$, como combinação linear de $e_1(q), e_2(q)$ e $e_3(q)$, isto é,

$$d(e_i)_q(v) = (\omega_{i1})_q(v)e_1(q) + (\omega_{i2})_q(v)e_2(q) + (\omega_{i3})_q(v)e_3(q), \tag{1.5}$$

em que $(\omega_{ij})_q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $i, j \in \{1, 2, 3\}$, são funcionais lineares.

Por simplicidade, as expressões (1.4) e (1.5) podem ser escritas como

$$dX = \omega_1 e_1 + \omega_2 e_2, \tag{1.6}$$

$$de_i = \omega_{i1}e_1 + \omega_{i2}e_2 + \omega_{i3}e_3, \tag{1.7}$$

com $i \in \{1,2,3\}$, respectivamente, em que $\omega_{ij} = \langle de_i, e_j \rangle$, $i, j \in \{1,2,3\}$ e $\omega_k = \langle dX, e_k \rangle$, $k \in \{1,2\}$.

As 1-formas ω_1 e ω_2, aqui mencionadas, recebe o nome de correferencial móvel associado à superfície e as formas ω_{ij}, $i, j \in \{1,2,3\}$, são denominadas formas de conexão do triedro.

É importante frisar que se e_1, e_2, e_3 é um referencial móvel associado a uma superfície parametrizada, então o correferencial e as formas de conexão satisfazem as seguintes relações (equações de estrutura)

$$\begin{aligned}
&\omega_{ij} = -\omega_{ji},\\
&d\omega_1 = \omega_2 \wedge \omega_{21},\\
&d\omega_2 = \omega_1 \wedge \omega_{12},\\
&\omega_1 \wedge \omega_{13} + \omega_2 \wedge \omega_{23} = 0,\\
&d\omega_{12} = \omega_{13} \wedge \omega_{32},\\
&d\omega_{13} = \omega_{12} \wedge \omega_{23},\\
&d\omega_{23} = \omega_{21} \wedge \omega_{13}.
\end{aligned} \tag{1.8}$$

Uma demonstração do fato acima é encontrada em [24]. Além disso, segundo [24], toda forma diferencial, definida num aberto $U \subset \mathbb{R}^2$, pode ser escrita como combinação linear das 1-formas linearmente independentes ω_1 e ω_2. Com isso, segue-se que, uma vez que ω_{13} e ω_{23} são 1-formas, existem funções reais a, b, c e d tais que

$$\begin{aligned}
\omega_{13} &= a\omega_1 + b\omega_2,\\
\omega_{23} &= d\omega_1 + c\omega_2.
\end{aligned} \tag{1.9}$$

Se substituirmos as duas equações de (1.9) na quarta expressão de (1.8), obteremos $(b-d)\omega_1 \wedge \omega_2 = 0$, donde $b = d$, já que ω_1 e ω_2 são linearmente independentes. Com isso, as expressões de (1.9) passam a ser

$$\begin{aligned}
\omega_{13} &= a\omega_1 + b\omega_2,\\
\omega_{23} &= b\omega_1 + c\omega_2.
\end{aligned} \tag{1.10}$$

Seja S uma variedade riemanniana 2-dimensional e seja $U \subset S$ um aberto onde um referencial móvel $\{e_1, e_2\}$ esteja definido. Se o conjunto $\{\omega_1, \omega_2\}$ é o correferencial associado ao referencial em questão, então segundo o teorema de Levi-Civita, existe uma única 1-forma $\omega_{12} = -\omega_{21} = \omega_3$ tal que

$$d\omega_1 = \omega_{12} \wedge \omega_2, \quad d\omega_2 = \omega_{21} \wedge \omega_1.$$

Uma prova do fato mencionado anteriormente pode ser encontra em [2].

Substituindo (1.10) na quinta expressão de (1.8), obtemos

$$d\omega_3 = -K\omega_1 \wedge \omega_2,$$

onde $K = ac - b^2$ é a curvatura de Gauss de S.

Vimos inicialmente que dada uma superfície parametrizada $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to S$, com um referecial móvel dado e um correferencial correspondente, valem (1.6) e (1.7). Ora, segundo a geometria diferencial clássica a primeira e segunda formas fundamentais são dadas, respectivamente, por

$$I(v) = \langle dX_q(v), dX_q(v) \rangle, \quad II(v) = \langle dX_q(v), dN_q(v) \rangle, \tag{1.11}$$

com $q \in U$, $v \in \mathbb{R}^2$

Daí, considerando o vetor normal à superfície parametrizada como sendo $N = e_3$ e levando conta a veracidade de (1.6) e (1.7), podemos reescrever (1.11) como

$$I = \omega_1^2 + \omega_2^2, \quad II = \omega_1\omega_{13} + \omega_2\omega_{23}.$$

Na seção a seguir, daremos alguns exemplos de equações diferenciais que descrevem superfícies pseudoesféricas.

1.3 Classes de equações diferenciais parciais que descrevem superfícies pseudoesféricas

Recordemos que uma equação diferencial parcial

$$\Delta\left(t, x, u, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}, \cdots, \frac{\partial^k u}{\partial t^l \partial x^{k-l}}\right) = 0 \tag{1.12}$$

descreve *superfícies pseudoesféricas* (**s.p.e.**) ou é dita equação PS se existe um sistema de 1-formas $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ dado por

$$\omega_1 = f_{11}dx + f_{12}dt, \quad \omega_2 = f_{21}dx + f_{22}dt, \quad \omega_3 = f_{31}dx + f_{32}dt,$$

onde f_{ij}, $(i,j) \in \{1,2,3\} \times \{1,2\}$, são funções de x, t, $u(x,t)$ e derivadas parciais de $u(x,t)$ com respeito a x e t, tal que as equações de estrutura

$$d\omega_1 = \omega_3 \wedge \omega_2, \quad d\omega_2 = \omega_1 \wedge \omega_3, \quad d\omega_3 = \omega_1 \wedge \omega_2,$$

de uma superfície com curvatura gaussiana $K = -1$ são satisfeitas se, e somente se, u é uma solução de (1.12) satisfazendo $\omega_1 \wedge \omega_2 \neq 0$.

A seguir, apresentaremos alguns exemplos de classes de equações diferenciais parciais PS.

Exemplo 1.4. A classe de equações diferenciais parciais hiperbólicas, dada por

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = F\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}\right),$$

foi considerada por Rabelo e Tenenblat em 1989 (veja [21]). Um exemplo particular de tal classe é a equação de Sine-Gordon

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = sin\,(u)$$

cujas 1-formas associadas são

$$\omega_1 = \frac{1}{\eta} sin\,(u)\; dt, \quad \omega_2 = \eta\, dx + \frac{1}{\eta} cos\,(u)\; dt, \quad \omega_3 = \frac{\partial u}{\partial x} dx,$$

com $\eta \in \mathbb{R} - \{0\}$. É fácil ver que a equação de Sine-Gordon descreve **s.p.e.**, tendo em vista que

$$d\omega_1 - \omega_3 \wedge \omega_2 = \frac{1}{\eta}\left[cos(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right] dx \wedge dt - \frac{\partial u}{\partial x} dx \wedge \left[\frac{1}{\eta} cos\,(u)\, dt\right] = 0,$$

$$d\omega_2 - \omega_1 \wedge \omega_3 = \frac{1}{\eta}\left[-sen(u)\frac{\partial u}{\partial x} dx\right] \wedge dt - \left[\frac{1}{\eta} sen(u) dt\right] \wedge \frac{\partial u}{\partial x} dx = 0,$$

e

$$d\omega_3 - \omega_1 \wedge \omega_2 = \left[-\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + sin(u)\right] dx \wedge dt = 0$$

se, e somente se, u é uma solução não nula da equação de Sine-Gordon.

Equações que descrevem superfícies pseudoesféricas considerando $f_{21} = \eta$ são também chamadas de equações que descrevem η-superfície pseudoesférica. A equação de Sine-Gordon do Exemplo 1.4 ilustra uma equação desse tipo.

Exemplo 1.5. Em [11], Chern e Tenenblat obtiveram resultados associando uma família a 1-parâmetro de problemas lineares com a classe de equações evolutivas da forma

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right).$$

Uma ocorrência particular da equação acima é dada por

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + 6u\frac{\partial u}{\partial x} \qquad \text{(KdV)},$$

que descreve **s.p.e.**, com 1-formas associadas

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= (1-u)\; dx + \left(-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \eta\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \eta^2 u - 2u^2 + \eta^2 + 2u\right)\, dt,\\
\omega_2 &= \eta\, dx + \left(\eta^3 + 2\eta u - 2\frac{\partial u}{\partial x}\right)\, dt,\\
\omega_3 &= -\,(1+u)\; dx + \left(-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \eta\frac{\partial u}{\partial x} - \eta^2 u - 2u^2 - \eta^2 - 2u\right)\, dt.
\end{aligned}$$

Trata-se de um cálculo simples verificar que as 1-formas $\omega_{i's}$ acima satisfazem (1.3), com a condição de que $\omega_1 \wedge \omega_2 \neq 0$.

Outros exemplos de classes de equações que descrevem **s.p.e.** podem ser encontrados na literatura. Ao leitor interessado, sugerimos [5, 8, 7, 10, 12, 14, 19, 20, 21, 22]. As classes mencionadas nos Exemplos (1.4) e (1.5) serão objetos de estudo nos capítulos subsequentes.

Finalizamos esta seção preliminar observando que, em termos dos coeficientes f_{ij} das 1-formas $\omega_i = f_{i1}dx + f_{i2}dt$, $1 \leq i \leq 3$, as componentes a, b e c da segunda forma fundamental são dadas por

$$\omega_{13} = a\omega_1 + b\omega_2, \quad \omega_{23} = b\omega_1 + c\omega_2, \tag{1.13}$$

onde as 1-formas ω_{13} e ω_{23} satisfazem as equações de estrutura

$$d\omega_{13} = \omega_{12} \wedge \omega_{23}, \quad d\omega_{23} = \omega_{21} \wedge \omega_{13}, \tag{1.14}$$

as quais são equivalentes às equações de Codazzi-Mainardi

$$f_{11}D_t a + f_{21}D_t b - f_{12}D_x a - f_{22}D_x b - 2b\Delta_{13} + (a-c)\Delta_{23} = 0, \tag{1.15}$$

$$f_{11}D_t b + f_{21}D_t c - f_{12}D_x b - f_{22}D_x c + (a-c)\Delta_{13} + 2b\Delta_{23} = 0, \tag{1.16}$$

com

$$\Delta_{12} := f_{11}f_{22} - f_{21}f_{12};\ \Delta_{13} := f_{11}f_{32} - f_{31}f_{12};\ \Delta_{23} := f_{21}f_{32} - f_{31}f_{22}, \tag{1.17}$$

sendo que D_t e D_x representam os operadores derivada total. Além disso, segue-se de

$$d\omega_3 = -\omega_{13} \wedge \omega_{23} \tag{1.18}$$

que a equação de Gauss é dada por

$$K = ac - b^2 = -1. \tag{1.19}$$

Capítulo 2

Imersões isométricas locais de métricas associadas às soluções de equações evolutivas

Em [11], Chern e Tenenblat consideraram uma classe de equações evolutivas da forma

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right) \tag{2.1}$$

e obtiveram resultados sob certa hipótese técnica, associando cada solução de (2.1) a uma métrica riemanniana de dimensão 2 com curvatura gaussiana constante e igual a -1.

Neste capítulo, seguiremos os passos de [15] e [16], isto é, investigaremos a existência de uma imersão isométrica local em $\mathbb{R}^3$ de uma métrica associada a uma solução u de (2.1), para a qual as componentes a, b e c da segunda forma fundamental da superfície imersa dependem de um jato de ordem finita de u, ou seja, de x, t, u e derivadas parciais de u com respeito a x e t.

Para facilitar o entendimento do leitor quanto a nossa exposição, na Seção 2.1, consideraremos equações do tipo (2.1) para $k = 2$ e, posteriormente, na Seção 2.2, trataremos de equações evolutivas de ordem $k \geq 2$.

2.1 Imersões isométricas locais de superfícies pseudoesféricas e equações evolutivas de ordem 2

Consideremos uma classe de equações diferenciais parciais evolutivas de ordem 2 dada por

$$u_t = F(u, u_x, u_{xx}). \tag{2.2}$$

Nosso principal objetivo nesta seção resume-se em provar o seguinte teorema:

Teorema 2.1. *Exceto para equações de evolução de segunda ordem da forma*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{f_{12,u_x}}{f_{11,u}} u_{xx} + \frac{f_{12,u}}{f_{11,u}} u_x \mp \frac{\lambda f_{11} - \eta f_{12}}{f_{11,u}}, \tag{2.3}$$

em que $f_{11,u} \neq 0$ e $f_{12,u_x} \neq 0$, não existe nenhuma equação evolutiva do tipo (2.2) de ordem 2 que descreve superfície pseudoesférica, com $f_{21} = \eta$ e com a propriedade de que os coeficientes da segunda forma fundamental de imersões isométricas locais de superfícies associadas à solução u da equação dependem de um jato de ordem finita de u. Além disso, os coeficientes da segunda forma fundamental das imersões isométricas locais das superfícies determinadas pela solução u de (2.3) são universais, isto é, são funções de x e t e, portanto, independem de u.

Para demonstrarmos o Teorema 2.1, é necessário considerarmos os resultados de classificação de equações do tipo (2.1), obtidos por Chern e Tenenblat [11], para o caso em que $k = 2$.

Tendo em vista que o nosso propósito nesta dissertação consiste no estudo de imersões isométricas locais em $\mathbb{R}^3$ de métricas associadas às soluções de equações diferenciais, a seguir apresentaremos, sem demonstrar, o resultado de caracterização (Lema 2.1) e os resultados de classificação (Lemas 2.2 e 2.3, ver [16] para $k = 2$), pois dessa forma prezaremos pela objetividade no estudo proposto e, por conseguinte, não tornaremos a leitura enfadonha. O leitor interessado em detalhes sobre a classificação mencionada poderá consultar [11].

O seguinte lema caracteriza equações do tipo (2.2). Será conveniente introduzirmos a seguinte notação para as derivadas de u com respeito a x (usadas inicialmente em [11])

$$z_i = \frac{\partial^i u}{\partial x_i}, \quad 0 \leq i \leq k.$$

Consideraremos $(x, t, z_0, z_1, \ldots, z_k)$ como coordenadas locais de um subconjunto aberto U de uma subvariedade M do espaço de jato $\mathbf{J}^k(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ definido pela equação diferencial (2.2).

Sucintamente, a linguagem de *jatos* representa um caminho conciso de descrever fenômenos que estão associados com derivadas de aplicações. Recomendamos a leitura de [23], o qual introduz alguns aspectos da teoria de jatos.

Lema 2.1. ([11]) *Considere uma equação de evolução de segunda ordem da forma*

$$z_{0,t} = F\left(z_0, z_1, z_2\right), \tag{2.4}$$

que descreve η-superfície pseudoesférica, com 1-formas associadas (2). Se f_{ij}, $(i,j) \in \{1,2,3\} \times \{1,2\}$ são funções diferenciáveis de z_0, z_1 e z_2, então

$$f_{ij,z_2} = 0, \quad f_{11,z_1} = f_{31,z_1} = f_{22,z_1} = 0; \tag{2.5}$$

$$f^2_{11,z_0} + f^2_{31,z_0} \neq 0. \tag{2.6}$$

Observe que a primeira relação em (2.5) nos dá a informação que as funções f_{ij} independem de z_2 e, além disso, segue-se também de (2.5) que f_{11}, f_{31} e f_{22} são independentes de z_1. A condição em (2.6) é importante, tendo em vista que a equação diferencial deve ser a condição de integrabilidade para o problema linear associado.

No que segue, apresentaremos os lemas de classificação e, além disso, utilizaremos as seguintes notações $H = f_{11}f_{11,z_0} - f_{31}f_{31,z_0}$ e $L = f_{11}f_{31,z_0} - f_{31}f_{11,z_0}$.

Lema 2.2. ([16]) *Sejam f_{ij}, $(i,j) \in \{1,2,3\} \times \{1,2\}$, funções diferenciáveis de z_0, z_1 e z_2 tais que (2.5) e (2.6) sejam válidas, com $f_{21} = \eta$ um parâmetro não nulo e suponha que $HL \neq 0$. Então $z_{0,t} = F(z_0, z_1, z_2)$ descreve uma η-superfície pseudoesférica, com 1-formas associadas (2) se, e somente se,*

$$F = \left\{ \frac{(\eta^2 + f_{11}^2 - f_{31}^2) f_{22,z_0}}{\eta[(1-\alpha^2) f_{11} \mp \alpha\eta\sqrt{1-\alpha^2}] f_{11,z_0}} + \frac{f_{22}}{\eta} \right\} z_1 \mp \frac{f_{22,z_0} z_2 + f_{22,z_0 z_0} z_1^2}{\eta\sqrt{1-\alpha^2} f_{11,z_0}}, \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned} f_{31} &= \alpha f_{11} \pm \eta\sqrt{1-\alpha^2}, \\ f_{12} &= \frac{f_{11}f_{22}}{\eta} \mp \frac{f_{22,z_0}}{\eta\sqrt{1-\alpha^2}} z_1, \\ f_{32} &= \frac{\alpha f_{11} \pm \eta\sqrt{1-\alpha^2}}{\eta} f_{22} \mp \frac{\alpha f_{22,z_0}}{\eta\sqrt{1-\alpha^2}} z_1, \end{aligned}$$

onde $f_{22,z_0} \neq 0$, $f_{11,z_0} \neq 0$ e $\alpha^2 < 1$.

Lema 2.3. ([16]) *Sejam f_{ij}, $(i,j) \in \{1,2,3\} \times \{1,2\}$, funções diferenciáveis de z_0, z_1 e z_2 tais que (2.5) e (2.6) sejam válidas, com $f_{21} = \eta$ um parâmetro não nulo e suponha que $f_{31} =$*

$\pm f_{11} \neq 0$. *Então* $z_{0,t} = F(z_0, z_1, z_2)$ *descreve uma* η*-superfície pseudoesférica, com 1-formas associadas (2) se, e somente se,* $f_{22} = \lambda$, *onde* λ *é constante,* $f_{32} = \pm f_{12}$ *e*

$$F(z_0, z_1, z_2) = \frac{f_{12,z_1}}{f_{11}, z_0} z_2 + \frac{f_{12,z_0}}{f_{11}, z_0} z_1 \mp \frac{\lambda f_{11} - \eta f_{12}}{f_{11}, z_0}. \tag{2.8}$$

A seguir, apresentaremos um lema que trata a respeito de quais implicações a existência de uma imersão isométrica local de uma η-superfície pseudoesférica cuja métrica está associada à solução de uma equação do tipo (2.2) pode ter com relação aos coeficientes da segunda forma fundamental se a equação diferencial em questão satisfaz as hipóteses dos Lemas (2.2) e (2.3).

Lema 2.4. *Seja* $z_{0,t} = F(z_0, z_1, z_2)$ *uma equação evolutiva de segunda ordem que descreve* η*-superfície pseudoesférica como no Lema 2.2 ou no Lema 2.3. Se existe imersão isométrica local de uma superfície, determinada por uma solução* u, *para a qual os coeficientes da segunda forma fundamental* a, b *e* c *dependem de* x, t, z_0, z_1,..., z_l, *com* l *finito, então tais coeficientes são universais, isto é,* a, b *e* c *dependem somente de* x *e* t.

Demonstração. Suponha a existência de uma imersão isométrica local de uma superfície, determinada por uma solução u, para a qual os coeficientes da segunda forma fundamental a, b e c dependam de x, t, z_0, z_1,..., z_l, com l finito. Com isso, a, b e c são funções que dependem de x, t, z_0, z_1,..., z_l e, consequentemente, temos as seguintes identidades:

$$\begin{aligned} &D_x a = a_x + \sum_{i=0}^{l} a_{z_i} z_{i+1}, \quad D_t a = a_t + \sum_{i=0}^{l} a_{z_i} z_{i,t}, \quad D_x b = b_x + \sum_{i=0}^{l} b_{z_i} z_{i+1}, \\ &D_t b = b_t + \sum_{i=0}^{l} b_{z_i} z_{i,t}, \quad D_x c = c_x + \sum_{i=0}^{l} c_{z_i} z_{i+1}, \quad D_t c = c_t + \sum_{i=0}^{l} c_{z_i} z_{i,t}. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Daí, substituindo as expressões de (2.9) em (1.15) e (1.16), obtemos:

$$\begin{aligned} & f_{11}a_t + \eta b_t - f_{12}a_x - f_{22}b_x - 2b\Delta_{13} + (a-c)\Delta_{23} - \sum_{i=0}^{l}(f_{12}a_{z_i} - f_{22}b_{z_i})z_{i+1} \\ & \qquad\qquad + \sum_{i=0}^{l}(f_{11}a_{z_i} + \eta b_{z_i})z_{i,t} = 0; \\ & f_{11}b_t + \eta c_t - f_{12}b_x - f_{22}c_x + (a-c)\Delta_{13} + 2b\Delta_{23} - \sum_{i=0}^{l}(f_{12}b_{z_i} - f_{22}c_{z_i})z_{i+1} \\ & \qquad\qquad + \sum_{i=0}^{l}(f_{11}b_{z_i} + \eta c_{z_i})z_{i+1} = 0. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Como $f_{22,z_0} \neq 0$ e $f_{11,z_0} \neq 0$ para equações de evolução (2.7); $f_{11,z_0} \neq 0$ e $f_{12,z_1} \neq 0$ para equações do tipo (2.8), diferenciando as equações de (2.10) com relação a z_{l+2}, obtemos

$$f_{11}a_{z_l} + \eta b_{z_l} = 0, \quad f_{11}b_{z_l} + \eta c_{z_l} = 0, \tag{2.11}$$

e, sendo $\eta \neq 0$, podemos reescrever as expressões de (2.11) como

$$b_{z_l} = \frac{-f_{11}a_{z_l}}{\eta}, \quad c_{z_l} = \frac{-f_{11}b_{z_l}}{\eta} \tag{2.12}$$

Ora, a fim de explicitar c_{z_l} em termos de a_{z_l}, basta substituir a primeira expressão de (2.12) na segunda, obtendo-se

$$c_{z_l} = \frac{f_{11}^2}{\eta^2}a_{z_l}. \tag{2.13}$$

Diferenciando a equação de Gauss em relação a z_l, obtemos

$$ca_{z_l} + ac_{z_l} - 2bb_{z_l} = 0. \tag{2.14}$$

Substituindo (2.13) e a primeira expressão de (2.12) em (2.14), obtemos

$$ca_{z_l} + a\frac{f_{11}^2}{\eta^2}a_{z_l} + 2b\frac{f_{11}}{\eta}a_{z_l} = 0,$$

que é equivalente a

$$\left[c + \left(\frac{f_{11}}{\eta}\right)^2 + 2\left(\frac{f_{11}}{\eta}\right)\right]a_{z_l} = 0. \tag{2.15}$$

Caso seja $c+\left(\frac{f_{11}}{\eta}\right)^2+2\left(\frac{f_{11}}{\eta}\right)=0$, substituindo c na equação de Gauss, temos

$$\left(a\frac{f_{11}}{\eta}\right)^2+2\left(\frac{af_{11}}{\eta}\right)b+b^2=1,$$

que equivale a

$$\left(a\frac{f_{11}}{\eta}+b\right)^2=1. \tag{2.16}$$

Como consequência de (2.16), obtemos

$$b=\pm 1-\frac{af_{11}}{\eta}.$$

Daí segue-se que

$$c=\left(\frac{f_{11}}{\eta}\right)^2 a\mp 2\frac{f_{11}}{\eta}.$$

Agora, calcularemos as derivadas totais D_x e D_t de b e c. Durante o processo de derivação, consideraremos, mediante o Lema 2.1, que f_{11} independe de z_1 e z_2, isto é, $f_{11,z_1}=0$ e $f_{11,z_2}=0$. Com isso, segue-se que:

$$\begin{aligned}
D_xb &= D_x\left(\pm 1-\frac{af_{11}}{\eta}\right)=-\frac{1}{\eta}D_x(f_{11}a)=-\frac{f_{11,z_0}z_1}{\eta}a-\frac{f_{11}}{\eta}D_xa;\\
D_tb &= D_t\left(\pm 1-\frac{af_{11}}{\eta}\right)=-\frac{f_{11,z_0}z_{0,t}}{\eta}a-\frac{f_{11}}{\eta}D_ta=-\frac{f_{11,z_0}F}{\eta}a-\frac{f_{11}}{\eta}D_ta;\\
D_xc &= D_x\left(\left(\frac{f_{11}}{\eta}\right)^2 a\mp 2\frac{f_{11}}{\eta}\right)=\left(\frac{f_{11}}{\eta}\right)^2 D_xa+\frac{2}{\eta}\left(\frac{f_{11}}{\eta}a\mp 1\right)f_{11,z_0}z_1; \qquad (2.17)\\
D_tc &= D_t\left(\left(\frac{f_{11}}{\eta}\right)^2 a\mp 2\frac{f_{11}}{\eta}\right)=\frac{2af_{11}}{\eta^2}f_{11,z_0}z_{0,t}+\left(\frac{f_{11}}{\eta}\right)^2 D_ta\mp\frac{2}{\eta}f_{11,z_0}z_{0,t}\\
&= \frac{2af_{11}}{\eta^2}f_{11,z_0}F+\left(\frac{f_{11}}{\eta}\right)^2 D_ta\mp\frac{2}{\eta}f_{11,z_0}F\\
&= \left(\frac{f_{11}}{\eta}\right)^2 D_ta+\frac{2}{\eta}\left(\frac{f_{11}}{\eta}a\mp 1\right)f_{11,z_0}F.
\end{aligned}$$

Usando as equações de (2.17), segue-se que

$$
\begin{aligned}
f_{11}D_ta+\eta D_tb &= f_{11}D_ta+\eta\left(-\frac{f_{11,z_0}F}{\eta}a-\frac{f_{11}}{\eta}D_ta\right)=-af_{11,z_0}F;\\
f_{11}D_tb+\eta D_tc &= f_{11}\left(-\frac{f_{11,z_0}F}{\eta}a-\frac{f_{11}}{\eta}D_ta\right)+\eta\left[\left(\frac{f_{11}}{\eta}\right)^2D_ta+\frac{2}{\eta}\left(\frac{f_{11}}{\eta}a\mp 1\right)f_{11,z_0}F\right]\\
&= -\frac{f_{11}^2}{\eta}D_ta-\frac{a}{\eta}f_{11}f_{11,z_0}F+\frac{f_{11}^2}{\eta}D_ta+2\left(\frac{f_{11}}{\eta}\mp 1\right)f_{11,z_0}F\\
&= \left(a\frac{f_{11}}{\eta}\mp 2\right)f_{11,z_0}F;\\
f_{12}D_xa+f_{22}D_xb &= f_{12}D_xa+f_{22}\left[-\frac{f_{11}}{\eta}D_xa-\frac{a}{\eta}f_{11,z_0}z_1\right]\\
&= -\frac{1}{\eta}\left[f_{11}f_{22}-\eta f_{12}\right]D_xa-\frac{af_{22}}{\eta}f_{11,z_0}z_1\\
&= -\frac{\Delta_{12}}{\eta}D_xa-\frac{af_{22}}{\eta}f_{11,z_0}z_1;
\end{aligned}
$$

com $\Delta_{12}=f_{11}f_{22}-\eta f_{12}$ e

$$
\begin{aligned}
f_{12}D_xb+f_{22}D_xc &= f_{12}\left[-\frac{f_{11,z_0}z_1}{\eta}a-\frac{f_{11}}{\eta}D_xa\right]+f_{22}\left[\left(\frac{f_{11}}{\eta}\right)^2D_xa+\frac{2}{\eta}\left(\frac{f_{11}}{\eta}a\mp 1\right)f_{11,z_0}z_1\right]\\
&= -\frac{af_{12}}{\eta}f_{11,z_0}z_1-\frac{f_{12}f_{11}}{\eta}D_xa+\frac{f_{22}f_{11}^2}{\eta^2}D_xa+\frac{2f_{22}}{\eta}\left(\frac{f_{11}}{\eta}a\mp 1\right)f_{11,z_0}z_1\\
&= \frac{f_{11}}{\eta^2}(f_{11}f_{22}-\eta f_{12})D_xa+\left[\frac{2a}{\eta^2}f_{11}f_{22}\mp\frac{2f_{22}}{\eta}-\frac{af_{12}}{\eta}\right]f_{11,z_0}z_1\\
&= \frac{f_{11}}{\eta^2}\Delta_{12}D_xa+\left[\frac{a}{\eta^2}(f_{11}f_{22}-\eta f_{12})+\frac{a}{\eta^2}f_{11}f_{22}\mp\frac{2f_{22}}{\eta}\right]f_{11,z_0}z_1\\
&= \frac{f_{11}}{\eta^2}\Delta_{12}D_xa+\left[\frac{a}{\eta^2}\Delta_{12}+\frac{a}{\eta^2}f_{11}f_{22}\mp\frac{2f_{22}}{\eta}\right]f_{11,z_0}z_1\\
&= \frac{f_{11}}{\eta^2}\Delta_{12}D_xa+\frac{a}{\eta^2}\Delta_{12}f_{11,z_0}z_1+\frac{f_{22}}{\eta}\left(\frac{f_{11}}{\eta}a\mp 2\right)f_{11,z_0}z_1.
\end{aligned}
$$

Substituindo as expressões acima nas equações de Codazzi-Mainardi (1.15) e (1.16), obtemos

$$\begin{aligned}
-af_{11,z_0}F + \frac{\Delta_{12}}{\eta}D_x a + \frac{af_{22}}{\eta}f_{11,z_0}z_1 - 2b\Delta_{13} + (a-c)\Delta_{23} = 0,\\
\left(\frac{f_{11}}{\eta}a \mp 2\right)f_{11,z_0}F - \frac{f_{11}}{\eta^2}\Delta_{12}D_x a - \frac{a}{\eta^2}\Delta_{12}f_{11,z_0}z_1 - \frac{f_{22}}{\eta}\left(\frac{f_{11}}{\eta}a \mp 2\right)f_{11,z_0}z_1\\
+(a-c)\Delta_{13} + 2b\Delta_{23} = 0,
\end{aligned}$$

que equivalem, respectivamente, a

$$\begin{aligned}
-af_{11,z_0}F + \frac{\Delta_{12}}{\eta}\sum_{i=0}^{l} a_{z_i}z_{i+1} + \frac{af_{22}}{\eta}f_{11,z_0}z_1 - 2b\Delta_{13} + (a-c)\Delta_{23} = 0,\\
\left(\frac{f_{11}}{\eta}a \mp 2\right)f_{11,z_0}F - \frac{f_{11}}{\eta^2}\Delta_{12}\sum_{i=0}^{l} a_{z_i}z_{i+1} - \frac{a}{\eta^2}\Delta_{12}f_{11,z_0}z_1 - \frac{f_{22}}{\eta}\left(\frac{f_{11}}{\eta}a \mp 2\right)f_{11,z_0}z_1\\
+(a-c)\Delta_{13} + 2b\Delta_{23} = 0.
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Portanto se $l \geq 2$, então derivando a primeira expressão de (2.18) com relação a z_{l+1}, teremos $-\frac{f_{11}}{\eta^2}\Delta_{12}a_{z_l} = 0$, donde $a_{z_l} = 0$. Substituindo essa última informação em (2.12) e (2.13), obtemos $b_{z_l} = 0$ e $c_{z_l} = 0$.

Se $l = 1$, então diferenciando as expressões de (2.18) com relação a z_2, temos

$$\left\{\begin{array}{l}
-af_{11,z_0}F_{z_2} + \dfrac{\Delta_{12}}{\eta}a_{z_1} = 0\\
\left(\dfrac{f_{11}}{\eta}a \mp 2\right)f_{11,z_0}F_{z_2} - \dfrac{f_{11}\Delta_{12}}{\eta^2}a_{z_1} = 0
\end{array}\right. . \tag{2.19}$$

Multiplicando a primeira equação de (2.19) por f_{11}/η e somando com a segunda equação de (2.19), obtemos $f_{11,z_0}F_{z_2} = 0$. Contudo, $f_{11,z_0}F_{z_2} = 0$ conduz-nos a uma contradição. De fato, tendo em vista que $f_{11,z_0} \neq 0$, nos Lemas 2.2 e 2.3, resulta que $F_{z_2} = 0$, o que também não pode ocorrer, pois a equação (2.4) é de segunda ordem.

Se $l = 0$, então diferenciando as expressões de (2.18) com relação a z_2, temos

$$\left\{\begin{array}{l}
-af_{11,z_0}F_{z_2} = 0\\
\left(\dfrac{f_{11}}{\eta}a \mp 2\right)f_{11,z_0}F_{z_2} = 0
\end{array}\right. . \tag{2.20}$$

As equações de (2.20) implicam em $f_{11,z_0}F_{z_2} = 0$, o que é uma contradição pelo que foi exposto acima. Portanto, para todo l, as equações de Codazzi-Mainardi e a equação de Gauss formam um sistema inconsistente.

Para finalizarmos, se a expressão entre colchetes em (2.15) não é nula, então $a_{z_l} = 0$ e segue-se de (2.12) e (2.13) que $b_{z_l} = c_{z_l} = 0$, donde derivadas sucessivas nos conduz a $a_{z_i} = b_{z_i} = c_{z_i} = 0$ para todo $i = 0, \ldots, l$. Em outras palavras, a, b e c são funções somente de x e t. □

Na Proposição 2.1.1 a seguir, consideraremos as equações evolutivas (2.4) classificadas no Lema 2.2.

Proposição 2.1.1. *Para as equações de evolução de segunda ordem que descrevem η-superfície pseudoesférica como no Lema 2.2, não existe imersão isométrica local em $\mathbb{R}^3$, determinada por uma solução u, para a qual os coeficientes da segunda forma fundamental a, b e c dependem somente de um jato de ordem finita de u.*

Demonstração. Suponha que para as equações evolutivas, dadas no Lema 2.2, exista uma imersão isométrica local em $\mathbb{R}^3$ de uma superfície pseudoesférica, determinada por uma solução u, para a qual os coeficientes da segunda forma fundamental dependam de um jato de ordem finita de u. Daí, pelo Lema 2.4, segue-se que os coeficientes a, b e c são universais, isto é, dependem apenas de x e t. Além disso, tais coeficientes satisfazem a equação de Gauss (1.19).

Usando o Lema 2.2, calcularemos Δ_{13} e Δ_{23}. Com efeito,

$$\begin{aligned}
\Delta_{13} &= f_{11}f_{32} - f_{12}f_{31} \\
&= f_{11}\left[\frac{\alpha f_{11} \pm \eta A}{\eta} f_{22} \mp \frac{\alpha f_{22,z_0}}{\eta A} z_1\right] - \left[\frac{f_{11}f_{22}}{\eta} \mp \frac{f_{22,z_0}}{\eta A} z_1\right][\alpha f_{11} \pm \eta A] \\
&= f_{22,z_0} z_1,
\end{aligned}$$

com $A = \sqrt{1-\alpha^2}$. Ademais,

$$\begin{aligned}
\Delta_{23} &= \eta f_{32} - f_{22}f_{31} \\
&= \eta\left[\frac{\left(\alpha f_{11} \pm \eta\sqrt{1-\alpha^2}\right) f_{22}}{\eta} \mp \frac{\alpha f_{22,z_0}}{\eta\sqrt{1-\alpha^2}} z_1\right] - f_{22}(\alpha f_{11} + \pm\eta\sqrt{1-\alpha^2}) \\
&= \mp \frac{\alpha f_{22,z_0}}{\eta\sqrt{1-\alpha^2}} z_1.
\end{aligned}$$

Consequentemente, temos

$$\Delta_{13} = f_{22,z_0} z_1, \quad \Delta_{23} = \mp \frac{\alpha f_{22,z_0}}{\eta\sqrt{1-\alpha^2}} z_1. \tag{2.21}$$

Daí segue-se que substituindo as expressões de (2.21) nas equações de Codazzi-Mainard (1.15) e (1.16), temos

$$\begin{aligned} & f_{11}a_t + \eta b_t - \left[\frac{f_{11}f_{22}}{\eta} - \delta\frac{f_{22,z_0}}{\eta A}z_1\right]a_x - f_{22}b_x - 2bf_{22,z_0}z_1 - \delta(a-c)\tfrac{\alpha f_{22,z_0}}{\eta A}z_1 \\ & \quad - \sum_{i=0}^{l}(f_{12}a_{z_i} - f_{22}b_{z_i})z_{i+1} + \sum_{i=0}^{l}(f_{11}a_{z_i} + \eta b_{z_i})z_{i,t} = 0, \\ & f_{11}b_t + \eta c_t - \left[\frac{f_{11}f_{22}}{\eta} - \delta\frac{f_{22,z_0}}{\eta A}z_1\right]b_x - f_{22}c_x + (a-c)f_{22,z_0}z_1 - 2\delta b\frac{\alpha f_{22,z_0}}{\eta A}z_1 \\ & \quad - \sum_{i=0}^{l}(f_{12}a_{z_i} - f_{22}b_{z_i})z_{i+1} + \sum_{i=0}^{l}(f_{11}a_{z_i} + \eta b_{z_i})z_{i,t} = 0, \end{aligned} \tag{2.22}$$

com $\delta = \pm 1$.

Ora, mas como por hipótese a, b e c são universais, isto é, tais coeficientes dependem tão somente de x e t, segue-se que as equações de (2.22) reduzir-se-ão a

$$\begin{aligned} & f_{11}a_t + \eta b_t - \left[\frac{f_{11}f_{22}}{\eta} + \epsilon\frac{f_{22,z_0}}{\eta A}z_1\right]a_x - f_{22}b_x - 2bf_{22,z_0}z_1 + \epsilon(a-c)\tfrac{\alpha f_{22,z_0}}{\eta A}z_1 = 0, \\ & f_{11}b_t + \eta c_t - \left[\frac{f_{11}f_{22}}{\eta} + \epsilon\frac{f_{22,z_0}}{\eta A}z_1\right]b_x - f_{22}c_x + (a-c)f_{22,z_0}z_1 + 2\epsilon b\tfrac{\alpha f_{22,z_0}}{\eta A}z_1 = 0. \end{aligned} \tag{2.23}$$

Derivando-se (2.23) com relação a z_1, obtemos

$$\begin{aligned} & \delta\frac{f_{22,z_0}}{\eta A}a_x - \delta(a-c)\frac{\alpha f_{22,z_0}}{\eta A} - 2bf_{22,z_0} = 0, \\ & \delta\frac{f_{22,z_0}}{\eta A}b_x - 2\delta b\tfrac{\alpha f_{22,z_0}}{\eta A} + (a-c)f_{22,z_0} = 0. \end{aligned} \tag{2.24}$$

De (2.24), obtemos

$$\begin{aligned} a_x &= 2\delta\eta Ab + \alpha\eta(a-c), \\ b_x &= 2\eta\alpha b - \delta\eta A(a-c), \end{aligned}$$

donde, em termos matriciais,

$$\begin{bmatrix} a_x \\ a_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\delta\eta Ab + \alpha\eta(a-c) \\ 2\alpha\eta b - \delta\eta A(a-c) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta\eta A & \alpha\eta \\ \eta\alpha & -\delta\eta A \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2b \\ a-c \end{bmatrix}.$$

Daí como

$$det\begin{bmatrix} \delta\eta A & \alpha\eta \\ \eta\alpha & -\delta\eta A \end{bmatrix} = -\eta^2 \neq 0,$$

segue-se que a_x e a_t não podem ser concomitantemente nulos, porquanto se isso ocorresse, ter-se-íamos $2b = a - c = 0$, donde seria $a = c$ e $b = 0$. Com isso, a equação de Gauss reduzir-se-ia a $a^2 = -1$ e, por conseguinte, uma contradição.

As equações de (2.23) podem ser reescritas como

$$\begin{aligned} &f_{11}a_t + \eta b_t - \frac{f_{11}f_{22}}{\eta}a_x - f_{22}b_x + \left[\delta\frac{f_{22,z_0}}{\eta A}a_x - \delta(a-c)\frac{\alpha f_{22,z_0}}{\eta A} - 2bf_{22,z_0}\right]z_1 = 0, \\ &f_{11}b_t + \eta c_t - \frac{f_{11}f_{22}}{\eta}b_x - f_{22}c_x + \left[\delta\frac{f_{22,z_0}}{\eta A}b_x - 2\delta b\frac{\alpha f_{22,z_0}}{\eta A} + (a-c)f_{22,z_0}\right]z_1 = 0. \end{aligned} \tag{2.25}$$

Substituindo as equações de (2.24) nas equações de (2.25), obtemos

$$\begin{aligned} f_{11}a_t + \eta b_t - \frac{f_{11}f_{22}}{\eta}a_x - f_{22}b_x = 0, \\ f_{11}b_t + \eta c_t - \frac{f_{11}f_{22}}{\eta}b_x - f_{22}c_x = 0, \end{aligned}$$

que são, respectivamente, equivalentes a

$$\begin{aligned} \eta f_{11}a_t + \eta^2 b_t - f_{11}f_{22}a_x - \eta f_{22}b_x = 0, \\ \eta f_{11}b_t + \eta^2 c_t - f_{11}f_{22}b_x - \eta f_{22}c_x = 0. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Derivando-se as expressões de (2.26) com relação a z_0, temos

$$\begin{aligned} \eta f_{11,z_0}a_t - (f_{11}f_{22})_{z_0}a_x - \eta f_{22,z_0}b_x = 0, \\ \eta f_{11,z_0}b_t - (f_{11}f_{22})_{z_0}b_x - \eta f_{22,z_0}c_x = 0. \end{aligned} \tag{2.27}$$

Como $\eta f_{11,z_0} \neq 0$, segue-se de (2.27) que

$$\begin{aligned} a_t &= \frac{(f_{11}f_{22})_{z_0}}{\eta f_{11,z_0}}a_x + \frac{f_{22,z_0}}{f_{11,z_0}}b_x, \\ b_t &= \frac{(f_{11}f_{22})_{z_0}}{\eta f_{11,z_0}}b_x + \frac{f_{22,z_0}}{f_{11,z_0}}c_x. \end{aligned} \tag{2.28}$$

Derivando-se as expressões de (2.28) com relação a z_0, temos

$$\begin{aligned} \left[\frac{(f_{11}f_{22})_{z_0}}{\eta f_{11,z_0}}\right]_{z_0} b_x + \left[\frac{f_{22,z_0}}{f_{11,z_0}}\right]_{z_0} c_x = 0, \\ \left[\frac{(f_{11}f_{22})_{z_0}}{\eta f_{11,z_0}}\right]_{z_0} a_x + \left[\frac{f_{22,z_0}}{f_{11,z_0}}\right]_{z_0} b_x = 0. \end{aligned}$$

Observe que se $\left[\dfrac{(f_{11}f_{22})_{z_0}}{f_{11,z_0}}\right]_{z_0} = \left[\dfrac{f_{22,z_0}}{f_{11,z_0}}\right]_{z_0} = 0$, então $\dfrac{(f_{11}f_{22})_{z_0}}{f_{11,z_0}}$ e $\dfrac{f_{22,z_0}}{f_{11,z_0}}$ são constantes, o que implica $f_{22,z_0} = 0$ e, portanto, uma contradição. Além disso, segue-se que

$$a_x c_x - b_x^2 = 0. \tag{2.29}$$

Multiplicando-se a primeira equação de (2.28) por b_x e a segunda por a_x, obtemos

$$\begin{aligned} a_t b_x &= \frac{(f_{11}f_{22})_{z_0}}{\eta f_{11,z_0}} a_x b_x + \frac{f_{22,z_0}}{f_{11,z_0}} b_x^2, \\ a_x b_t &= \frac{(f_{11}f_{22})_{z_0}}{\eta f_{11,z_0}} a_x b_x + \frac{f_{22,z_0}}{f_{11,z_0}} a_x c_x. \end{aligned}$$

Daí, usando (2.29),

$$a_t b_x - a_x b_t = \frac{f_{22,z_0}}{f_{11,z_0}} (b_x^2 - a_x c_x) = 0.$$

Observe que podemos reescrever a primeira equação de (2.26) como

$$f_{11}(\eta a_t - f_{22} a_x) + \eta^2 b_t - \eta f_{22} b_x = 0. \tag{2.30}$$

Afirmamos que

$$\eta a_t - f_{22} a_x \neq 0. \tag{2.31}$$

De fato, se fosse

$$\eta a_t - f_{22} a_x = 0, \tag{2.32}$$

então, derivando essa última expressão com relação z_0, obteríamos $f_{22,z_0} a_x = 0$, o que implicaria $a_x = 0$, pois $f_{22,z_0} \neq 0$, e então a equação (2.32) reduzir-se-ia a $\eta a_t = 0$, donde $a_t = 0$, porquanto $\eta \neq 0$. De $a_x = 0$, $a_t = 0$ e (2.29), teríamos $b_x = 0$, o que é um absurdo. Consequentemente, a afirmação estipulada em (2.31) é verdadeira. Com isso, a igualdade

$$f_{11} = \frac{\eta f_{22}(f_{22} b_x - \eta b_t)}{\eta a_t - f_{22} a_x}$$

faz sentido. Por conseguinte, temos

$$\begin{aligned} f_{11,z_0} &= \left[\frac{\eta f_{22}(f_{22}b_x - \eta b_t)}{\eta a_t - f_{22}a_x}\right]_{z_0} \\ &= \frac{\eta f_{22,z_0} b_x(\eta a_t - f_{22}a_x) - \eta(f_{22}b_x - \eta b_t)(-f_{22,z_0}a_x)}{(\eta a_t - f_{22}a_x)^2} \\ &= \frac{\eta^2 b_x a_t f_{z_0} - \eta b_x a_x f_{22} f_{22,z_0} + \eta a_x b_x f_{22} f_{22,z_0} - \eta^2 b_x a_t f_{z_0}}{(\eta a_t - f_{22}a_x)^2} \\ &= 0, \end{aligned}$$

donde $f_{11,z_0} = 0$, o que é absurdo. Consequente, não existe uma imersão isométrica local em $\mathbb{R}^3$ de uma superfície pseudoesférica, associada a uma solução u de uma equação pertencente à classe dada no Lema 2.2, para a qual os coeficientes da segunda forma fundamental dependam de um jato de ordem finita de u.

□

A seguinte proposição considera a classe de equações evolutivas (2.4) que descrevem **s.p.e.** como no Lema 2.3.

Proposição 2.1.2. *Seja (2.4) uma equação diferencial de segunda ordem que descreve superfície pseudoesférica como no Lema 2.3. Existe uma imersão isométrica local em $\mathbb{R}^3$ de uma superfície pseudoesférica, determinada por uma solução u, para a qual os coeficientes da segunda forma fundamental dependem de um jato de ordem finita de u se, e somente se, os coeficientes são universais e são dados por*

$$a = \pm\sqrt{le^{\pm 2(\eta x + \lambda t)} - \gamma^2 e^{\pm 4(\eta x + \lambda t)} - 1}, \tag{2.33}$$

$$b = \gamma e^{\pm 2(\eta x + \lambda t)}, \tag{2.34}$$

$$c = \frac{\pm\gamma^2 e^{\pm 4(\eta x + \lambda t)} - 1}{\sqrt{le^{\pm 2(\eta x + \lambda t)} - \gamma^2 e^{\pm 4(\eta x + \lambda t)} - 1}}, \tag{2.35}$$

$l, \gamma \in \mathbb{R}$, $l > 0$ e $l^2 > 4\gamma^2$. As 1-formas são definidas em uma faixa de $\mathbb{R}^2$ onde

$$\log\sqrt{\frac{l - \sqrt{l^2 - 4\gamma^2}}{2\lambda^2}} < \pm(\eta x + \lambda t) < \log\sqrt{\frac{l + \sqrt{l^2 - 4\gamma^2}}{2\gamma^2}}. \tag{2.36}$$

Além disso, as constantes l e γ devem ser escolhidas de tal modo que a faixa dada por (2.36) intersecte o domínio da solução da equação de evolução.

Demonstração. Suponha que a equação evolutiva (2.4) seja dada como no Lema 2.3. Se

a, b e c dependem de um jato de ordem finita, então pelo Lema 2.4, a, b e c dependem de x e t. Além disso, $f_{12,z_1} \neq 0$, pois caso contrário, a equação evolutiva estipulada no Lema 2.4 não seria de ordem 2.

Como a equação evolutiva, aqui estipulada, descreve η-superfície pseudoesférica, segue-se que as equações de Codazzi-Mainardi (1.15) e (1.16) valem e, como estamos supondo as hipóteses do Lema 2.3, temos $f_{31} = \delta f_{11}$, $f_{22} = \lambda$, $f_{32} = \delta f_{12}$, com $\delta = \pm 1$. Daí, substituindo esses últimos dados nas equações de Codazzi-Mainardi (1.15) e (1.16), obtemos

$$\begin{aligned} &f_{11}a_t + \eta b_t - f_{12}a_x - \lambda b_x + \delta(a-c)(\eta f_{12} - \lambda f_{11}) = 0, \\ &f_{11}b_t + \eta c_t - f_{12}b_x - \lambda c_x + 2\delta b(\eta f_{12} - \lambda f_{11}) = 0. \end{aligned} \tag{2.37}$$

Derivando-se as expressões de (2.37) com relação a z_1, obtemos

$$-f_{12,z_1}a_x + \delta(a-c)\eta f_{12,z_1} = 0, \quad -f_{12,z_1}b_x + 2\delta b\eta f_{12,z_1} = 0. \tag{2.38}$$

Como $f_{12,z_1} \neq 0$, temos, dividindo as expressões de (2.38), membro a membro por $-f_{12,z_1}$, as seguintes expressões

$$a_x - \delta(a-c)\eta = 0, \quad b_x - 2\delta b\eta = 0. \tag{2.39}$$

As expressões de (2.37) podem ser reescritas como

$$\begin{aligned} &-f_{11}a_t - \eta b_t + \lambda b_x + \delta(a-c)\lambda f_{11} + [a_x - \delta(a-c)\eta]f_{12} = 0, \\ &-f_{11}b_t - \eta c_t + \lambda c_x + 2b\lambda\delta f_{11} + [b_x - 2\delta b\eta]f_{12} = 0. \end{aligned} \tag{2.40}$$

Substituindo as expressões de (2.39) em (2.40), obtemos

$$\begin{aligned} &-f_{11}a_t - \eta b_t + \lambda b_x + \delta(a-c)\lambda f_{11} = 0, \\ &-f_{11}b_t - \eta c_t + \lambda c_x + 2b\lambda\delta f_{11} = 0, \end{aligned}$$

que equivalem, respectivamente, a

$$\begin{aligned} &f_{11}a_t + \eta b_t - \lambda b_x - \delta(a-c)\lambda f_{11} = 0, \\ &f_{11}b_t + \eta c_t - \lambda c_x - 2b\lambda\delta f_{11} = 0. \end{aligned} \tag{2.41}$$

Derivando-se as expressões de (2.41) com relação a z_0, ficamos com

$$f_{11,z_0}a_t - \delta(a-c)\lambda f_{11,z_0} = 0, \quad f_{11,z_0}b_t - 2b\lambda\delta f_{11,z_0} = 0. \tag{2.42}$$

Uma vez que $f_{11,z_0} \neq 0$, segue-se que, dividindo ambas as equações de (2.42) por f_{11,z_0}, membro a membro, obtemos

$$a_t - \delta(a-c)\lambda = 0, \quad b_t - 2b\lambda\delta = 0. \tag{2.43}$$

Podemos reescrever as expressões de (2.41) como

$$[a_t - \delta(a-c)\lambda]f_{11} + \eta b_t - \lambda b_x = 0, \quad [b_t - 2b\lambda\delta]f_{11} + \eta c_t - \lambda c_x = 0. \tag{2.44}$$

Por conseguinte, substituindo as expressões de (2.43) nas expressões de (2.44), obtemos

$$\eta b_t - \lambda b_x = 0, \quad \eta c_t - \lambda c_x = 0. \tag{2.45}$$

Com base nas equações supracitadas, iremos explicitar os valores dos coeficientes da segunda forma fundamental a, b e c. Com efeito, pela segunda equação de (2.39), temos

$$b_x = 2b\eta\delta. \tag{2.46}$$

Integrando (2.46) com relação a x, obtemos

$$b = c(t)e^{2\delta\eta x}, \tag{2.47}$$

em que $c(t)$ é uma função real diferenciável. Derivando (2.47) com relação t, obtemos

$$b_t = bc'(t). \tag{2.48}$$

Ora, tendo em vista que a segunda equação de (2.43) pode ser reescrita como

$$b_t = 2b\lambda\delta, \tag{2.49}$$

segue-se da comparação de (2.47), (2.48) e (2.49) que

$$c'(t) = 2\lambda\delta c(t). \tag{2.50}$$

Integrando (2.50) com relação a t, temos

$$c(t) = \gamma e^{2\lambda\delta t}, \tag{2.51}$$

em que γ é uma constante real. Por fim, substituindo (2.51) em (2.47), obtemos

$$b = \gamma e^{2\delta(\eta x + \lambda t)}. \tag{2.52}$$

Além do exposto anteriormente, $a \neq 0$, do contrário, a equação de Gauss (1.19), reduzir-se-ia a

$$b = \pm 1,$$

donde por (2.46), teríamos $\eta = 0$, uma contradição. Portanto $a \neq 0$ e isso permite-nos expressar a equação de Gauss (1.19) por

$$c = \frac{b^2 - 1}{a}. \tag{2.53}$$

Substituindo (2.52) em (2.53), ficamos com

$$c = \frac{\gamma^{4\delta(\eta x + \lambda t)} - 1}{a}. \tag{2.54}$$

Substituindo (2.54) nas equações (2.39) e (2.43), obtemos, respectivamente,

$$a_x - \delta \left[a - \frac{\gamma^2 e^{4\delta(\eta x + \lambda t)} - 1}{a} \right] \eta = 0,$$

$$a_t - \delta \left[a - \frac{\gamma^2 e^{4\delta(\eta x + \lambda t)} - 1}{a} \right] \lambda = 0,$$

que equivalem a

$$aa_x - \delta\eta [a^2 - \gamma^2 e^{4\delta(\eta x + \lambda t)} + 1] = 0, \tag{2.55}$$

$$aa_t - \delta\lambda [a^2 - \gamma^2 e^{4\delta(\eta x + \lambda t)} + 1] = 0. \tag{2.56}$$

Agora, considere uma função real $y : A \subset \mathbb{R}^2 \to (0, \infty)$, definida por $y(x,t) = a(x,t)^2$. Por simplicidade, temos

$$y = a^2. \tag{2.57}$$

Daí, derivando (2.57) com relação a x, temos $y_x = 2aa_x$, isto é,

$$aa_x = \frac{y_x}{2}. \tag{2.58}$$

Substituindo (2.57) e (2.58) na equação (2.55), obtemos a seguinte equação

$$\frac{y_x}{2} - \delta\eta[y - \gamma^2 e^{4\delta(\eta x+\lambda t)} + 1] = 0. \tag{2.59}$$

Podemos reescrever (2.59) como

$$y_x - 2\delta\eta y = -2\delta\eta\gamma^2 e^{4\delta(\eta x+\lambda t)} + 2\delta\eta. \tag{2.60}$$

Um fator de integração para a equação (2.60) é dado por $\mu(x) = e^{-\int 2\delta\eta dx}$, isto é,

$$\mu(x) = e^{-2\delta\eta x}. \tag{2.61}$$

Multiplicando-se (2.60) pelo fator de integração (2.61), obtemos

$$e^{-2\delta\eta x} y_x - 2e^{-2\delta\eta x}\delta\eta y = e^{-2\delta\eta x}(-2\delta\eta\gamma^2 e^{4\delta(\eta x+\lambda t)} + 2\delta\eta), \tag{2.62}$$

donde (2.62) implica em

$$\frac{d}{dx}(e^{-2\delta\eta x} y) = e^{-2\delta\eta x}(-2\delta\eta\gamma^2 e^{4\delta(\eta x+\lambda t)} + 2\delta\eta). \tag{2.63}$$

Integrando a equação (2.63) com relação a x, membro a membro, obtemos

$$e^{-2\delta\eta x} y = -\gamma^2 e^{4\delta\lambda t + 2\delta\eta x} - e^{-2\delta\eta x} + f(t), \tag{2.64}$$

com $f = f(t)$ uma função de t.

Multiplicando (2.64) por $e^{2\delta\eta x}$, membro a membro, obtemos

$$y = -\gamma^2 e^{4\delta\lambda t + 4\delta\eta x} - 1 + f(t)e^{2\delta\eta x}. \tag{2.65}$$

Assim, de (2.57) e de (2.65), resulta que

$$a^2 = -\gamma^2 e^{4\delta(\eta x+\lambda t)} - 1 + f(t)e^{2\delta\eta x}. \tag{2.66}$$

Derivando (2.66) em relação t, ficamos com

$$2aa_t = -4\delta\lambda\gamma^2 e^{4\delta(\eta x+\lambda t)} + e^{2\delta\eta x} f'(t),$$

isto é,

$$aa_t = -2\delta\lambda\gamma^2 e^{4\delta(\eta x+\lambda t)} + \frac{e^{2\delta\eta x} f'(t)}{2}. \tag{2.67}$$

Além disso, podemos reescrever (2.56) como

$$aa_t = \delta\lambda[a^2 - \gamma^2 e^{4\delta(\eta x+\lambda t)} + 1]. \tag{2.68}$$

Como $a^2 = y$, a equação (2.68) se reduz a

$$aa_t = \delta\lambda[y - \gamma^2 e^{4\delta(\eta x+\lambda t)} + 1]. \tag{2.69}$$

Por fim, comparando-se (2.67) e (2.69), obteremos $f'(t) = 2\delta\lambda f(t)$, donde $lnf = 2\delta\lambda t + k$, com k constante real, donde $f = e^{lnf} = e^k e^{2\delta\lambda t}$. Daí, fazendo $l = e^k$, obtemos

$$f(t) = le^{2\delta\lambda t}. \tag{2.70}$$

Portanto substituindo (2.70) em (2.65), obtemos

$$y = -\gamma^2 e^{4\delta\lambda t+4\delta\eta x} - 1 + le^{2\delta(\eta x+\lambda t)}. \tag{2.71}$$

Consequentemente, segue-se de (2.57) e de (2.71) que

$$a = \sqrt{-\gamma^2 e^{4\delta\lambda t+4\delta\eta x} - 1 + le^{2\delta(\eta x+\lambda t)}},$$

onde $-\gamma^2 e^{4\delta\lambda t+4\delta\eta x} - 1 + le^{2\delta(\eta x+\lambda t)} > 0$. Por conseguinte, $l > 0$ e

$$\frac{l - \sqrt{l^2 - 4\gamma^2}}{2\lambda^2} < e^{\pm 2(\eta x+\lambda t)} < \frac{l + \sqrt{l^2 - 4\gamma^2}}{2\gamma^2},$$

donde a está definido na faixa descrita em (2.36). Substituindo (2.1) em (2.54), obtemos

$$c = \frac{\gamma^{4\delta(\eta x+\lambda t)} - 1}{\sqrt{-\gamma^2 e^{4\delta\lambda t+4\delta\eta x} - 1 + le^{2\delta(\eta x+\lambda t)}}}.$$

Tendo em vista a simplicidade na recíproca, omitiremos a mesma a fim de não tornarmos a leitura enfadonha. Assim, dada uma solução da equação de evolução classificada no Lema 2.3, a fim de que tenhamos uma imersão em $\mathbb{R}^3$ da **s.p.e.** associada, temos que escolher as constantes l e γ de tal modo que a faixa descrita em (2.36) intersecte o domínio da solução em $\mathbb{R}^2$. $\square$

Uma vez que as proposições anteriores foram provadas, um argumento simples prova a veracidade do Teorema 2.1.

Demonstração do Teorema 2.1. De acordo com a classificação de Chern e Tenenblat feita em [11], as equações evolutivas (2.2) de ordem 2 podem ser tal como no Lema 2.2, ou no Lema 2.3. Assim, se a equação (2.2) é dada por (2.3), então ela satisfaz as hipóteses do Lema 2.3. Daí segue-se da Proposição 2.1.2 que existe uma imersão isométrica local em $\mathbb{R}^3$ de uma superfície pseudoesférica, determinada por uma solução u, para a qual os coeficientes da segunda forma fundamental dependem de um jato de ordem finita de u (nesse caso, os coeficientes são universais).

Por outro lado, caso a equação seja aquela tratada no Lema 2.2, pela Proposição 2.1.1 não existe imersão isométrica local em $\mathbb{R}^3$, determinada por uma solução u, para a qual os coeficientes da segunda forma fundamental a, b e c dependem de um jato de ordem finita de u. Essas observações provam o teorema. $\square$

Na próxima seção, generalizaremos os resultados anteriores para equações evolutivas de ordem $k \geq 2$.

2.2 Imersões isométricas locais de superfícies pseudoesféricas e equações evolutivas de ordem k, $k \geq 2$

Nesta seção, consideraremos o estudo das imersões isométricas locais de superfícies pseudoesféricas cuja métrica está associada a soluções de equações evolutivas de ordem k, $k \geq 2$, isto é, consideraremos equações do tipo

$$u_t = F(u, u_x, \cdots, \partial_x^k u), \tag{2.72}$$

descrevendo η-superfícies pseudoesféricas cuja classificação foi obtida por Chern e Tenenblat [11].

Em outras palavras, seguindo os passos apresentados em [17], nosso objetivo na presente seção é provar o seguinte resultado:

Teorema 2.2. ([17]) *Exceto para equações de evolução de k-ésima ordem da forma*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{f_{11,u}} \left(\sum_{i=0}^{k-1} f_{12,\partial^i u/\partial x^i} \cdot \frac{\partial^{i+1} u}{\partial x^{i+1}} \mp (\beta f_{11} - \eta f_{12}) \right), \; k \geq 2, \tag{2.73}$$

em que $f_{11,u} \neq 0$ e $f_{12,\partial_x^{k-1} u} \neq 0$, não existe nenhuma equação evolutiva do tipo (2.72) de ordem $k \geq 2$ que descreve superfície pseudoesférica, com $f_{21} = \eta$ e com a propriedade de que os coeficientes da segunda forma fundamental das imersões isométricas locais das superfícies associadas à solução u da equação dependem de um jato de ordem finita de u. Além disso, *os coeficientes da segunda forma fundamental das imersões isométricas locais das superfícies determinadas pela solução u de (2.73) são universais, isto é, eles são funções de x e t, os quais independem de u.*

A fim de tornar a demonstração do Teorema 2.2 mais concisa, apresentaremos alguns resultados importantes, dos quais provaremos eventualmente aqueles que tiverem mais relevância para os nossos propósitos.

Inicialmente, queremos frisar que S.S. Chern e K. Tenenblat em [11] deram uma importante contribuição no ano de 1986. Eles deram uma classificação completa para equações evolutivas (2.72).

De acordo com a classificação de equações do tipo (2.72), Chern e Tenenblat mostraram que existem cinco grandes grupos, os quais se encontram resumidos a seguir, de acordo com as propriedades das seguintes funções:

$$H = f_{11}f_{11,z_0} - f_{31}f_{31,z_0}, \qquad L = f_{11}f_{31,z_0} - f_{31}f_{11,z_0}.$$

Tipo I. $L = 0$ com $f_{31} = \lambda f_{11} \neq 0$, $\lambda^2 - 1 = 0$. Neste caso, f_{22} não depende de z_i, $i \in \{0, 1, ..., k-1, k\}$ e $f_{32} = \lambda f_{12}$;

Tipo II. $L = 0$ com $f_{31} = \lambda f_{11} \neq 0$, $\lambda^2 - 1 \neq 0$. Neste caso, $f_{22,z_{k-2}} = 0$ não depende de z_i, $i \in \{0, 1, ..., k-1, k\}$ e $f_{32} = \lambda f_{12}$;

Tipo III. $L = 0$ e $H \neq 0$, isto é, $f_{11} = 0$ e $f_{31,z_0} \neq 0$ ou $f_{31} = 0$ e $f_{11,z_0} = 0$;

Tipo IV. $L \neq 0$ e $H = 0$, isto é, $f_{31}^2 - f_{11}^2 = C \neq 0$;

Tipo V. $HL \neq 0$.

A seguir apresentaremos um lema que fornece uma caracterização para equações evolutivas de ordem k do tipo (2.72). Embora não apresentemos uma demonstração desse lema, após o seu enunciado, abordaremos observações importantes inerentes a ele. Ressaltamos, no entanto, que o leitor, mais comumente interessado, poderá encontrar a demonstração em [11].

Consideraremos $(x, t, z_0, z_1, \ldots, z_k)$ como coordenadas locais de um subconjunto aberto U de uma subvariedade M do espaço de jato $\mathbf{J}^k(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ definido pela equação diferencial (2.72).

Lema 2.5. *Seja (2.72) uma equação evolutiva de ordem k, a qual descreva η-superfície pseudoesférica, com 1-formas associadas dadas por (2). Então, condições necessárias e suficientes para* *que as equações de estruturas (3) sejam válidas são dada por*

$$f_{11,z_k} = ... = f_{11,z_1} = 0, f_{21} = \eta, \; f_{31,z_k} = ... = f_{31,z_1} = 0; \tag{2.74}$$

$$f_{12,z_k} = 0, \; f_{22,z_k} = f_{22,z_{k-1}} = 0, f_{32,z_k} = 0; \tag{2.75}$$

$$f_{11,z_0}^2 + f_{31,z_0}^2 \neq 0; \tag{2.76}$$

$$f_{11,z_0}F = \sum_{i=0}^{k-1} f_{12,z_i} z_{i+1} + \eta f_{32} - f_{31} f_{22}; \tag{2.77}$$

$$\sum_{i=0}^{k-2} f_{22,z_i} z_{i+1} = f_{11} f_{32} - f_{31} f_{12}; \tag{2.78}$$

$$f_{31,z_0}F = \sum_{i=0}^{k-1} f_{32,z_i} z_{i+1} + \eta f_{12} - f_{11} f_{22}; \tag{2.79}$$

$$f_{11} f_{22} - \eta f_{12} \neq 0. \tag{2.80}$$

De acordo com o Lema 2.5 se as funções diferenciáveis f_{ij} estão definidas num conjunto aberto e conexo, então a equação (2.74) nos dá a informação que as funções f_{11} e f_{31} independem de $z_1, \cdots, z_k$ e, além disso, as equações (2.75) significam que f_{12} independe de z_k, f_{22} independe de z_k e z_{k-1} e f_{32} independe de z_k. A expressão (2.76) assegura que a equação diferencial (2.72) seja a condição de integrabilidade do problema linear associado e a última expressão é importante para que não haja degeneração da métrica.

No que segue, apresentaremos uma proposição que fornece um critério sistemático quanto à universalidade dos coeficientes da segunda forma fundamental.

Proposição 2.2.1. *Seja (2.72) uma equação evolutiva de ordem k, descrevendo η-superfície pseudoesférica. Se existe uma imersão isométrica local de uma superfície, determinada por uma solução u, para qual os coeficientes da segunda forma fundamental dependem de um jato de ordem finita de u, isto é, a, b e c dependem de $x, t, z_0, z_1 \cdots, z_l$, com l finito, então a, b e c são universais, isto é, eles dependem de x e t, o que equivale dizer que $l = 0$.*

Demonstração. Como a equação (2.72) descreve η-superfície pseudoesférica, segue-se que existem 1-formas (2) satisfazendo (3). Pelo Lema 2.5 isso implica na validade de (2.74), (2.75), (2.76) (2.77), (2.78), (2.79) e (2.80). Além disso, como (2.72) é uma **s.p.e.**, temos como consequência a validade das equações de Codazzi-Mainardi (1.15), (1.16) e a equação de Gauss (1.19). Daí supondo que exista uma imersão isométrica local de uma superfície, determinada por uma solução u, para qual os coeficientes da segunda forma fundamental dependem de um jato de ordem finita de u, isto é, a, b e

c dependem de $x, t, z_0, z_1 \cdots, z_l$, com l finito, segue-se que $a = a(x, t, z_0, z_1, \cdots, z_l)$, $b = b(x, t, z_0, z_1, \cdots, z_l)$ e $c = c(x, t, z_0, z_1, \cdots, z_l)$ e, por conseguinte, vale as equações de (2.9). Substituindo elas em (1.15) e (1.16), obtemos as expressões de (2.10). Derivando elas em relação a z_{k+l}, temos, respectivamente,

$$(f_{11}a_{z_l} + \eta b_{z_l})F_{z_k} = 0, \quad (f_{11}b_{z_l} + \eta c_{z_l})F_{z_k} = 0.$$

Como $F_{z_k} \neq 0$, temos

$$f_{11}a_{z_l} + \eta b_{z_l} = 0, \quad f_{11}b_{z_l} + \eta c_{z_l} = 0. \tag{2.81}$$

Note que as equações de (2.81) são exatamente as mesmas obtidas em (2.11). Daí, repetindo exatamente os mesmos cálculos da Seção 2.1, chega-se na validade de (2.18).

Se $l \geq k$, então derivando a primeira equação em (2.18) com respeito a z_{l+1} e usando o fato de que $\Delta_{12} \neq 0$, obtemos $a_{z_l} = 0$ e, por (2.81), $b_{z_l} = c_{z_l} = 0$, pois $\eta \neq 0$.

Se $l = k-1$, então diferenciando as equações de (2.18) em relação a z_k, temos

$$\begin{cases} -af_{11,z_0}F_{z_k} + \dfrac{\Delta_{12}}{\eta}a_{z_{k-1}} = 0 \\ \left(\dfrac{f_{11}}{\eta}a \mp 2\right) f_{11,z_0}F_{z_k} - \dfrac{f_{11}\Delta_{12}}{\eta^2}a_{z_{k-1}} = 0 \end{cases}. \tag{2.82}$$

Em (2.82), isolando a expressão $\dfrac{\Delta_{12}}{\eta}a_{z_{k-1}}$ na primeira equação e substituindo na segunda equação, obtemos

$$0 = \left(\frac{f_{11}}{\eta}a \mp 2 - a\frac{f_{11}}{\eta}\right) f_{11,z_0}F_{z_k} = \mp 2\, f_{11,z_0}F_{z_k},$$

isto é, $f_{11,z_0}F_{z_k} = 0$ e, pela primeira equação em (2.82), $\dfrac{\Delta_{12}}{\eta}a_{z_{k-1}} = 0$. Isso tem como consequência $a_{z_{k-1}} = 0$, acarretando $b_{z_{k-1}} = c_{z_{k-1}} = 0$, mediante os usos de (2.13) e da primeira expressão de (2.12).

Se $l \leq k-2$, então diferenciando as equações de (2.18) com relação a z_k, temos

$$\begin{cases} -af_{11,z_0}F_{z_k} = 0 \\ \left(\frac{f_{11}}{\eta}a \mp 2\right) f_{11,z_0}F_{z_k} = 0 \end{cases}, \tag{2.83}$$

que implica em $f_{11,z_0} = 0$ que, por integração, com relação a z_0, resulta em

$$f_{11} = \mu, \quad \text{com} \quad \mu \in \mathbb{R}. \tag{2.84}$$

Substituindo as expressões de (2.83) e (2.84) em (2.18), teremos

$$-\frac{\Delta_{12} a_x}{\eta} - 2b\Delta_{13} + (a-c)\Delta_{23} + \frac{\Delta_{12}}{\eta}\sum_{i=0}^{l} a_{z_i} z_{i+1} = 0,$$

$$-\frac{\mu\Delta_{12} a_x}{\eta^2} + (a-c)\Delta_{13} + 2b\Delta_{23} - \frac{\mu\Delta_{12}}{\eta^2}\sum_{i=0}^{l} a_{z_i} z_{i+1} = 0,$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
&-\frac{\mu f_{22} - \eta f_{12}}{\eta} a_x - 2b(\mu f_{32} - f_{31} f_{12}) + (a-c)(\eta f_{32} - f_{31} f_{22}) \\
&\quad + \frac{\mu f_{22} - \eta f_{12}}{\eta}\sum_{i=0}^{l} a_{z_i} z_{i+1} = 0, \\
&-\frac{\mu(\mu f_{22} - \eta f_{12})}{\eta^2} a_x + (a-c)(\mu f_{32} - f_{31} f_{12}) + 2b(\eta f_{32} - f_{31} f_{22}) \\
&\quad + \frac{\mu(\mu f_{22} - \eta f_{12})}{\eta^2}\sum_{i=0}^{l} a_{z_i} z_{i+1} = 0.
\end{aligned} \tag{2.85}$$

Supondo que

$$f_{11,z_0} F_{z_k} = 0 \tag{2.86}$$

e tendo em vista que $D_t f_{11} - D_x f_{12} = \Delta_{23}$, $f_{11} = \mu$ e que $f_{12,z_k} = 0$, pelo Lema 2.5, segue-se que (2.86) pode ser reescrito como

$$f_{12,z_0} z_1 + \cdots + f_{12,z_{k-1}} z_k = -\Delta_{23},$$

ou equivalentemente

$$f_{12,z_0} z_1 + \cdots + f_{12,z_{k-1}} z_k = f_{22} f_{31} - \eta f_{32}. \tag{2.87}$$

Diferenciando (2.87) com relação a z_k, temos $f_{12,z_{k-1}} = 0$. Se $l = k-2$, então podemos reescrever as expressões de (2.85) como

$$\begin{aligned}
&-\frac{\mu f_{22} - \eta f_{12}}{\eta} a_x + \frac{\mu f_{22} - \eta f_{12}}{\eta} \sum_{i=0}^{k-3} \left[a_{z_i} z_{i+1} + a_{z_{k-2}} z_{k-1} \right] \\
&\quad -2b(\mu f_{32} - f_{31} f_{12}) + (a-c)(\eta f_{32} - f_{31} f_{22}) = 0, \\
&-\frac{\mu(\mu f_{22} - \eta f_{12})}{\eta^2} a_x - \frac{\mu(\mu f_{22} - \eta f_{12})}{\eta^2} \sum_{i=0}^{k-3} \left[a_{z_i} z_{i+1} + a_{z_{k-2}} z_{k-1} \right] \\
&\quad +(a-c)(\mu f_{32} - f_{31} f_{12}) + 2b(\eta f_{32} - f_{31} f_{22}) = 0.
\end{aligned} \tag{2.88}$$

Daí, derivando as expressões de (2.88) com relação a z_{k-1}, teremos

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\mu f_{22} - \eta f_{12}}{\eta} \right) a_{z_{k-2}} - 2b\mu f_{32,z_{k-1}} + (a-c)\eta f_{32,z_{k-1}} = 0, \\
&-\frac{\mu(\mu f_{22} - \eta f_{12})}{\eta^2} a_{z_{k-2}} + (a-c)\mu f_{32,z_{k-1}} + 2b\eta f_{32,z_{k-1}} = 0.
\end{aligned} \tag{2.89}$$

Afirmamos que $f_{11} = \mu \neq 0$. Caso fosse $f_{11} = \mu = 0$, então como $c = -\left(\frac{f_{11}}{\eta}\right)^2 - 2b\left(\frac{f_{11}}{\eta}\right)$, por hipótese, segue-se que $c = 0$, donde pela equação de Gauss (1.19), ter-se-íamos $b = \pm 1$. Daí a segunda expressão de (2.89) reduzir-se-ia a $2 \pm \eta f_{32,z_{k-1}} = 0$, o que é uma contradição. Logo $f_{11} = \mu \neq 0$.

Tendo em vista que $D_t f_{31} - D_x f_{32} = \eta f_{12} - f_{11} f_{22}$ se, e somente se,

$$f_{31,z_0} F - f_{32,z_0} z_1 - \cdots f_{32,z_{k-1}} z_k = \eta f_{12} - f_{11} f_{22},$$

segue-se que diferenciando essa última expressão com relação a z_k, obteremos $f_{31,z_0} F_{z_k} - f_{32,z_{k-1}} = 0$, isto é, $f_{31,z_0} F_{z_k} = f_{32,z_{k-1}}$.

Afirmamos que $f_{32,z_{k-1}} \neq 0$. De fato, se fosse $f_{32,z_{k-1}} = 0$, como $F_k \neq 0$, teríamos forçosamente $f_{31,z_0} = 0$ e como já se tem $f_{11,z_0} = 0$ a equação (2.76) do Lema 2.5 seria infringida. Logo $f_{32,z_{k-1}} \neq 0$.

Por fim, multiplicando (2.89) por $\dfrac{\mu}{\eta}$, teremos

$$\frac{\mu(\mu f_{22} - \eta f_{12})}{\eta^2} a_{z_{k-2}} - 2\frac{b\mu^2 f_{32,z_{k-1}}}{\eta} + (a-c)\mu f_{32,z_{k-1}} = 0. \tag{2.90}$$

Somando a segunda expressão de (2.89) e (2.90), obtemos

$$\left(\mu(a-c) - 2\frac{\mu^2 b}{\eta} + \mu(a-c) + 2\eta b\right) f_{32,z_{k-1}} = 0. \tag{2.91}$$

Como $f_{32,z_{k-1}} \neq 0$, (2.91) se reduz a

$$\mu(a-c) - 2\frac{\mu^2 b}{\eta} + \mu(a-c) + 2\eta b = 0.$$

Essa última equação implica em

$$\eta\mu(a-c) = (\mu^2 - \eta^2)b. \tag{2.92}$$

Se $\mu^2 = \eta^2$, então teremos $a - c = 0$. Ora, mas como $c = \left(\frac{f_{11}}{\eta}\right)^2 a \mp 2\frac{f_{11}}{\eta}$ e $f_{11} = \mu$, teremos $a - c = \pm 2\frac{\mu}{\eta} \neq 0$. Portanto $\mu^2 \neq \eta^2$, donde $\mu^2 - \eta^2 \neq 0$. Além disso, $b = \pm 1 - \frac{\mu}{\eta}a$.

Substituindo os valores de b e c em (2.92), teremos como equação culminante

$$\mu^2 + \eta^2 = \mp\frac{(\mu^2 - \eta^2)\mu a}{\eta}.$$

Caso $\mu^2 - \eta^2 = 0$, teremos $\mu^2 + \eta^2 = 0$, o que será uma contradição. Por fim, se $l < k - 2$, com $k \geq 3$, então diferenciando as expressões de (2.85) em relação a z_{k-1}, teremos

$$(a-c)\eta f_{32,z_{k-1}} - 2b\mu f_{32,z_{k-1}} = 0, \quad (a-c)\mu f_{32,z_{k-1}} - 2b\eta f_{32,z_{k-1}} = 0. \tag{2.93}$$

Como $f_{32,z_{k-1}} \neq 0$, as equações de (2.93) implicam no sistema

$$\begin{cases} (a-c)\eta - 2b\mu = 0 \\ (a-c)\mu + 2b\eta = 0 \end{cases}. \tag{2.94}$$

O sistema de equações (2.94) pode ser reescrito como

$$\begin{bmatrix} \eta & -2\mu \\ \mu & -2\eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a-c \\ 2b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{2.95}$$

Como o determinante da primeira matriz de (2.95) é não nulo, isto é, $-2(\eta^2+\mu^2) \neq 0$, segue-se que $a-c=0$ e $b=0$, o que contradiz a equação de Gauss.

Portanto, uma vez que todos os casos foram esgotados, segue-se que a, b e c são coeficientes universais, conforme queríamos. □

Uma das consequências cruciais da Proposição 2.2.1 é que as equações de Codazzi-Mainardi que são dadas por

$$\begin{aligned}
&f_{11}a_t + \eta b_t - f_{12}a_x - f_{22}b_x - 2b\Delta_{13} + (a-c)\Delta_{23} \\
&- \sum_{i=0}^{l}(f_{12}a_{z_i} - f_{22}b_{z_i})z_{i+1} + \sum_{i=0}^{l}(f_{11}a_{z_i} + \eta b_{z_i})z_{i,t} = 0, \\
&f_{11}b_t + \eta c_t - f_{12}b_x - f_{22}c_x + (a-c)\Delta_{13} + 2b\Delta_{23} \\
&- \sum_{i=0}^{l}(f_{12}b_{z_i} - f_{22}c_{z_i})z_{i+1} + \sum_{i=0}^{l}(f_{11}b_{z_i} + \eta c_{z_i})z_{i+1} = 0,
\end{aligned} \tag{2.96}$$

se reduzem a tão somente a

$$\begin{aligned}
&f_{11}a_t + \eta b_t - f_{12}a_x - f_{22}b_x - 2b\Delta_{13} + (a-c)\Delta_{23} = 0, \\
&f_{11}b_t + \eta c_t - f_{12}b_x - f_{22}c_x + (a-c)\Delta_{13} + 2b\Delta_{23} = 0.
\end{aligned} \tag{2.97}$$

A Proposição 2.2.2 a seguir ilustra o que acontece com equações evolutivas (2.72) do tipo I quanto à existência de uma imersão isométrica local em $\mathbb{R}^3$ de uma superfície pseudoesférica determinada por uma solução u para a qual os coeficientes a, b e c da segunda forma fundamental dependem de um jato de ordem finita de u.

Proposição 2.2.2. ([17]) *Seja*

$$z_{0,t} = \frac{1}{f_{11}, z_0}\left(\sum_{i=0}^{k-1} f_{12,z_i}z_{i+1} \mp (\beta f_{11} - \eta f_{12})\right),\ k \geq 2, \tag{2.98}$$

em que $f_{11}, z_0 \neq 0$ *e* $f_{12,z_{k-1}} \neq 0$*, uma equação evolutiva do tipo (2.72) de ordem* $k \geq 2$ *que descreve* η*-superfície pseudoesférica, com 1-formas* ω_i *como em (2). Então existe imersão isométrica local em* $\mathbb{R}^3$ *de uma superfície pseudoesférica, determinada por uma solução* u*, para a qual os coeficientes* a, b *e* c *da segunda forma fundamental dependem de um jato de ordem finita de* u *se, e somente se, os coeficientes são universais e são dados por*

$$a = \sqrt{le^{\pm 2(\eta x + \beta t)} - \gamma^2 e^{\pm 4(\eta x + \beta t)} - 1},$$

$$b = \gamma e^{\pm(\eta x + \beta t)},$$
$$c = \frac{\gamma^2 e^{\pm 4(\eta x+\beta t)} - 1}{\sqrt{l e^{\pm 2(\eta x+\beta t)} - \gamma^2 e^{\pm 4(\eta x + \beta t)} - 1}},$$

$l, \gamma \in \mathbb{R}$, $l > 0$ e $l^2 > 4\lambda^2$. As 1-formas são definidas em uma faixa de $\mathbb{R}^2$ onde

$$\log\sqrt{\frac{l - \sqrt{l^2 - 4\lambda^2}}{2\lambda^2}} < \pm(\eta x + \beta t) < \log\sqrt{\frac{l + \sqrt{l^2 - 4\lambda^2}}{2\lambda^2}}.$$

Além disso, as constantes l e λ devem ser escolhidas de tal modo que a faixa intersecte o domínio da solução da equação de evolução.

Demonstração. Para as equações de evolução do tipo I, temos $f_{31} = \delta f_{11}$, $f_{32} = \delta f_{12}$, $f_{11,z_0} \neq 0$, $f_{12,z_{k-1}} \neq 0$, com $f_{22} = \beta$ independente de $z_0, z_1, \cdots, z_k$.

Supondo que existe imersão isométrica local em $\mathbb{R}^3$ de uma superfície pseudoesférica determinada por uma solução u para a qual os coeficientes a, b e c da segunda forma fundamental dependem de um jato de ordem finita de u, segue-se da Proposição 2.2.1 que os coeficientes da segunda forma fundamental a, b e c são universais e, como consequência disso, as equações de Codazzi-Mainardi (2.96) se reduzem a (2.97). Note que

$$\Delta_{13} \;=\; f_{11}f_{32} - f_{31}f_{12} = \delta f_{11}f_{12} - \delta f_{11}f_{12} = 0$$

e

$$\Delta_{23} \;=\; f_{21}f_{32} - f_{31}f_{22} = \eta\delta f_{12} - \delta f_{11}\beta = \delta(\eta f_{12} - \beta f_{11}),$$

donde

$$\Delta_{13} = 0, \quad \Delta_{23} = \delta(\eta f_{12} - \beta f_{11}). \tag{2.99}$$

Daí, substituindo as funções f_{ij} expressas no tipo I e (2.99) nas equações (2.97), ficamos com

$$\begin{aligned} &f_{11}a_t + \eta b_t - f_{12}a_x - \beta b_x + \delta(a-c)(\eta f_{12} - \beta) = 0, \\ &f_{11}b_t + \eta c_t - f_{12}b_x - \beta c_x + 2\delta b(\eta f_{12} - \beta) = 0. \end{aligned} \tag{2.100}$$

Como $k \geq 2$, segue-se que derivando as expressões de (2.100) com relação a z_{k-1}, temos, mediante a utilização do Lema 2.5,

$$\begin{aligned} -f_{12,z_{k-1}}a_x + \delta(a-c)\eta f_{12,z_{k-1}} &= 0, \\ -f_{12,z_{k-1}}b_x + 2\delta b\eta f_{12,z_{k-1}} &= 0. \end{aligned} \tag{2.101}$$

Ambas as equações de (2.101) podem ser reescritas como

$$[-a_x + \delta(a-c)\eta]f_{12,z_{k-1}} = 0, \quad (-b_x + 2\delta b\eta)f_{12,z_{k-1}} = 0,$$

mas, por hipótese, $f_{12,z_{k-1}} \neq 0$ e isso culmina em

$$a_x - \delta(a-c)\eta = 0, \quad b_x - 2\delta b\eta = 0. \tag{2.102}$$

As expressões de (2.100) podem ser reescritas, respectivamente, como

$$\begin{aligned} -[a_x - \delta(a-c)\eta]f_{12} + f_{11}a_t + \eta b_t - \beta b_x - \delta(a-c)\beta f_{11} &= 0, \\ -(b_x - 2\delta b\eta)f_{12} + f_{11}b_t + \eta c_t - \beta c_x - 2\delta b\beta f_{11} &= 0. \end{aligned} \tag{2.103}$$

Substituindo (2.102) em (2.103), obtemos

$$\begin{aligned} f_{11}a_t + \eta b_t - \beta b_x - \delta(a-c)\beta f_{11} &= 0, \\ f_{11}b_t + \eta c_t - \beta c_x - 2\delta b\beta f_{11} &= 0. \end{aligned} \tag{2.104}$$

Diferenciando-se as expressões de (2.104) em relação a z_0, obtemos, com o uso do Lema 2.5, o seguinte:

$$f_{11,z_0}a_t - \delta(a-c)\beta f_{11,z_0} = 0,$$

$$f_{11,z_0}b_t - 2\delta b\beta f_{11,z_0} = 0,$$

que equivalem a

$$[a_t - \delta(a-c)\beta]f_{11,z_0} = 0, \quad (b_t - 2\delta b\beta)f_{11,z_0} = 0. \tag{2.105}$$

Uma vez que $f_{11,z_0} \neq 0$, segue-se que as expressões de (2.105) podem ser reescritas como

$$a_t - \delta(a-c)\beta = 0, \quad b_t - 2\delta b\beta = 0. \tag{2.106}$$

Reescreva (2.104) como segue:

$$\begin{aligned} &[a_t - \delta(a-c)\beta]f_{11} + \eta b_t - \beta b_x = 0, \\ &(b_t - 2\delta b\beta)f_{11} + \eta c_t - \beta c_x = 0. \end{aligned} \tag{2.107}$$

Substitua (2.106) em (2.107), a fim de obter

$$\eta b_t - \beta b_x = 0, \quad \eta c_t - \beta c_x = 0. \tag{2.108}$$

Note que a equação (2.102) é a mesma obtida em (2.39) e que a equação (2.106), salvo pela troca de β por λ, é a mesma obtida em (2.43). Daí, repetindo exatamente os mesmos argumentos da Seção 2.1, obtemos

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{le^{\pm 2(\eta x + \beta t)} - \gamma^2 e^{\pm 4(\eta x + \beta t)} - 1}, \\ b &= \gamma e^{\pm(\eta x + \beta t)}, \\ c &= \frac{\gamma^2 e^{\pm 4(\eta x + \beta t)} - 1}{\sqrt{le^{\pm 2(\eta x + \beta t)} - \gamma^2 e^{\pm 4(\eta x + \beta t)} - 1}}, \end{aligned}$$

$l, \gamma \in \mathbb{R}$, $l > 0$ e $l^2 > 4\lambda^2$. As 1-formas são definidas em faixas de $\mathbb{R}$ onde

$$\log \sqrt{\frac{l - \sqrt{l^2 - 4\lambda^2}}{2\lambda^2}} < \pm(\eta x + \beta t) < \log \sqrt{\frac{l + \sqrt{l^2 - 4\lambda^2}}{2\lambda^2}}.$$

Além disso, as constantes l e λ devem ser escolhidas numa faixa que intersecte o domínio da solução da equação de evolução.

A recíproca é um cálculo fácil. $\square$

A Proposição 2.2.3 a seguir ilustra o que acontece com equações evolutivas (2.72) do tipo II quanto à existência de uma imersão isométrica local em $\mathbb{R}^3$ de uma superfície pseudoesférica determinada por uma solução u para a qual os coeficientes a, b e c da segunda forma fundamental dependem de um jato de ordem finita de u.

Proposição 2.2.3. ([17]) *Para equações evolutivas de ordem k, com $k \geq 2$, que descrevem η-superfícies pseudoesféricas do tipo (2.72), com 1-formas $\omega_i = f_{i1}dx + f_{i2}dt$, $i \in \{1, 2, 3\}$, onde $f_{31} = \lambda f_{11} \neq 0$ e $\lambda^2 \neq 1$, o sistema, formado pelas equações de Codazzi-Mainardi (1.15), (1.16) e a equação de Gauss (1.19), é inconsistente.*

Demonstração. Seja (2.72) uma equação evolutiva descrevendo η-superfície pseudoesférica. Com isso, as equações de estruturas dadas por (2) são satisfeitas, o que segundo o Lema 2.5 implica na validade de (2.77), (2.78) e (2.79).

Tendo em vista que o estipulado nesta proposição contempla a classificação do tipo II, segue-se que $f_{31} = \lambda f_{11}$, com $\lambda^2 \neq 1$. Com isso, (2.77), (2.78) e (2.79) podem ser reescritos como

$$f_{11,z_0} F = \sum_{i=0}^{k-1} f_{12,z_i} z_{i+1} + \eta f_{32} - \lambda f_{11} f_{22}, \tag{2.109}$$

$$\sum_{i=0}^{k-2} f_{22,z_i} z_{i+1} = f_{11}(f_{32} - \lambda f_{12}), \tag{2.110}$$

$$\lambda f_{11,z_0} F = \sum_{i=0}^{k-1} f_{32,z_i} z_{i+1} + \eta f_{12} - f_{11} f_{22}. \tag{2.111}$$

Derivando (2.109) com relação a z_k, temos

$$f_{11,z_0} F_{z_k} = f_{12,z_{k-1}}. \tag{2.112}$$

Além disso, $f_{11,z_0} \neq 0$, do contrário, a equação (2.76) do Lema 2.5 seria infringida. Paralelamente a isso, $F_{z_k} \neq 0$, pois se fosse $F_{z_k} = 0$, a equação (2.72) não seria de ordem k. Como consequência de ser $f_{11,z_0} \neq 0$ e $F_{z_k} \neq 0$, segue-se que $f_{12,z_{k-1}} \neq 0$. Agora se multiplicarmos a expressão (2.109) por λ, ficaremos com

$$\lambda_{11,z_0} F = \sum_{i=0}^{k-1} \lambda f_{12,z_i} z_{i+1} + \lambda \eta f_{32} - \lambda^2 f_{11} f_{22}. \tag{2.113}$$

Daí, subtraindo-se a expressão (2.113) da expressão (2.111), resulta que

$$\sum_{i=0}^{k-1} (f_{32,z_i} - \lambda f_{12,z_i}) z_{i+1} + \eta (f_{12} - \lambda f_{32}) + (\lambda^2 - 1) f_{11} f_{22} = 0. \tag{2.114}$$

Diferenciando a expressão (2.114) com relação a z_k, obtemos

$$f_{32,z_{k-1}} - \lambda f_{12,z_{k-1}} = 0. \tag{2.115}$$

Como $k \geq 2$, segue-se que, diferenciando (2.110) com relação a z_{k-1} e utilizando-se (2.115), temos

$$f_{22,z_{k-2}} = 0. \tag{2.116}$$

Diferenciando a expressão (2.114) com relação a z_{k-1}, obtemos

$$f_{32,z_{k-2}} - \lambda f_{12,z_{k-2}} + \eta (f_{12,z_{k-1}} - \lambda f_{32,z_{k-1}}) = 0. \tag{2.117}$$

Substituindo $f_{32,z_{k-1}}$ por $\lambda f_{12,z_{k-1}}$ na equação (2.117), obtemos

$$f_{32,z_{k-2}} - \lambda f_{12,z_{k-2}} = \eta(\lambda^2 - 1) f_{12,z_{k-1}}. \tag{2.118}$$

Como $\eta \neq 0$, $\lambda^2 - 1 \neq 0$ e $f_{12,z_{k-1}} \neq 0$, segue-se que

$$f_{32,z_{k-2}} - \lambda f_{12,z_{k-2}} \neq 0. \tag{2.119}$$

Note que

$$\Delta_{13} = f_{11}(f_{32} - \lambda f_{12}), \quad \Delta_{23} = \eta f_{32} - \lambda f_{11} f_{22}. \tag{2.120}$$

Pela Proposição 2.2.1, as expressões de (2.96) passam a ser como em (2.97). Portanto substituindo os dados da classificação do tipo II e as expressões de (2.120) em (2.97), obtemos

$$\begin{aligned} &f_{11}a_t + \eta b_t - f_{12}a_x - f_{22}b_x - 2bf_{11}(f_{32} - \lambda f_{12}) + (a-c)(\eta f_{32} - \lambda f_{11} f_{22}) = 0, \\ &f_{11}b_t + \eta c_t - f_{12}b_x - f_{22}c_x + (a-c)f_{11}(f_{32} - \lambda f_{12}) + 2b(\eta f_{32} - \lambda f_{11} f_{22}) = 0. \end{aligned} \tag{2.121}$$

Diferenciando as expressões de (2.121) com relação a z_{k-1}, temos

$$\begin{aligned} &-f_{12,z_{k-1}}a_x - 2bf_{11}(f_{32,z_{k-1}} - \lambda f_{12,z_{k-1}}) + (a-c)\eta f_{32,z_{k-1}} = 0, \\ &-f_{12,z_{k-1}}b_x + (a-c)f_{11}(f_{32,z_{k-1}} - \lambda f_{12,z_{k-1}}) + 2b\eta f_{32,z_{k-1}} = 0. \end{aligned} \tag{2.122}$$

Substituindo (2.115) nas expressões de (2.122), obtemos

$$-f_{12,z_{k-1}}a_x + (a-c)\eta f_{32,z_{k-1}} = 0, \quad -f_{12,z_{k-1}}b_x + 2b\eta f_{32,z_{k-1}} = 0. \tag{2.123}$$

Levando-se em conta que $f_{32,z_{k-1}} = \lambda f_{12,z_{k-1}}$, podemos reescrever (2.123) como

$$[-a_x + (a-c)\eta\lambda] f_{12,z_{k-1}} = 0, \quad (-b_x + 2b\eta\lambda) f_{12,z_{k-1}} = 0. \tag{2.124}$$

Como $f_{12,z_{k-1}} \neq 0$, as expressões de (2.124) reduzir-se-ão a

$$a_x - (a-c)\eta\lambda = 0, \quad b_x - 2b\eta\lambda = 0,$$

donde

$$a_x = (a-c)\eta\lambda, \quad b_x = 2b\eta\lambda. \tag{2.125}$$

Substituindo as expressões de (2.125) nas expressões de (2.121), obtemos

$$\begin{aligned} & f_{11}a_t + \eta b_t - f_{12}(a-c)\eta\lambda - 2f_{22}\eta\lambda b - 2bf_{11}(f_{32} - \lambda f_{12}) + (a-c)(\eta f_{32} - \lambda f_{11}f_{22}) = 0, \\ & f_{11}b_t + \eta c_t - 2f_{12}\eta\lambda b - f_{22}c_x + (a-c)f_{11}(f_{32} - \lambda f_{12}) + 2b(\eta f_{32} - \lambda f_{11}f_{22}) = 0. \end{aligned} \tag{2.126}$$

Se $k \geq 3$, então derivando as expressões de (2.126) com relação a z_{k-2}, temos

$$\begin{aligned} & -f_{12,z_{k-2}}(a-c)\eta\lambda - 2f_{22,z_{k-2}}\eta\lambda b - 2bf_{11}(f_{32,z_{k-2}} - \lambda f_{12,z_{k-2}}) + (a-c)\eta f_{32,z_{k-2}} = 0, \\ & -2f_{12,z_{k-2}}\eta\lambda b - f_{22,z_{k-2}}c_x + (a-c)f_{11}(f_{32,z_{k-2}} - \lambda f_{12,z_{k-2}}) + 2b\eta f_{32,z_{k-2}} = 0. \end{aligned} \tag{2.127}$$

Substituindo (2.116) nas expressões de (2.127), obtemos

$$-f_{12,z_{k-2}}(a-c)\eta\lambda - 2bf_{11}(f_{32,z_{k-2}} - \lambda f_{12,z_{k-2}}) + (a-c)\eta f_{32,z_{k-2}} = 0,$$

$$-2f_{12,z_{k-2}}\eta\lambda b + (a-c)f_{11}(f_{32,z_{k-2}} - \lambda f_{12,z_{k-2}}) + 2b\eta f_{32,z_{k-2}} = 0,$$

o que pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} (f_{32,z_{k-2}} - \lambda f_{12,z_{k-2}})[(a-c)\eta - 2bf_{11}] = 0, \\ (f_{32,z_{k-2}} - \lambda f_{12,z_{k-2}})[(a-c)f_{11} + 2b\eta] = 0. \end{aligned}$$

Como $f_{32,z_{k-2}} - \lambda f_{12,z_{k-2}} \neq 0$, segue-se que

$$\begin{cases} (a-c)\eta - 2bf_{11} = 0 \\ (a-c)f_{11} + 2b\eta = 0 \end{cases} . \tag{2.128}$$

O sistema de equações (2.128) pode ser reescrito como

$$\begin{bmatrix} \eta & -f_{11} \\ f_{11} & \eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a-c \\ 2b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Como $f_{11,z_0} \neq 0$,

$$det \begin{bmatrix} \eta & -f_{11} \\ f_{11} & \eta \end{bmatrix} \neq 0,$$

pois caso contrário, $\eta^2 + f_{11}^2 = 0$, donde diferenciando essa última expressão em relação a z_0, teríamos $f_{11,z_0} = 0$, um absurdo. Por conseguinte, $a - c = 0$ e $b = 0$, o que contradiz a equação de Gauss.

Se $k = 2$, a prova da proposição é como na Seção 2.1. □

A Proposição 2.2.4 a seguir ilustra o que acontece com equações evolutivas (2.72) do tipo III quanto à existência de uma imersão isométrica local em $\mathbb{R}^3$ de uma η-superfície pseudoesférica determinada por uma solução u para a qual os coeficientes a, b e c da segunda forma fundamental dependem de um jato de ordem finita de u.

Proposição 2.2.4. ([17]) *Para equações evolutivas de ordem k, com $k \geq 2$ que descrevem η-superfícies pseudoesféricas do tipo (2.72), com 1-formas $\omega_i = f_{i1}dx + f_{i2}dt$, $i \in \{1, 2, 3\}$, onde $f_{11} = 0$ ou $f_{31} = 0$, o sistema, formado pelas equações de Codazzi-Mainardi (1.15), (1.16) e a equação de Gauss (1.19), é inconsistente.*

Demonstração. Como valem as equações de estrutura (2), segue-se do Lema 2.5 que valem (2.77), (2.78) e (2.79).

Se $f_{11} = 0$, então (2.77), (2.78) e (2.79) serão reescritos como

$$\sum_{i=0}^{k-1} f_{12,z_i} z_{i+1} = -\eta f_{32} + f_{11} f_{22}, \tag{2.129}$$

$$\sum_{i=0}^{k-2} f_{22,z_i} z_{i+1} = -f_{31} f_{12}, \tag{2.130}$$

$$f_{31,z_0} F = \sum_{i=0}^{k-1} f_{32,z_i} z_{i+1} + \eta f_{12}. \tag{2.131}$$

Diferenciando (2.129) com relação a z_k, temos

$$f_{12,z_{k-1}} = 0.$$

Uma vez que $k \geq 2$, faz sentido diferenciar com relação a z_{k-1}. Daí, diferenciando-se (2.130) com relação a z_{k-1}, obtemos

$$f_{22,z_{k-2}} = 0.$$

Por fim, diferenciando-se (2.131) com relação a z_k, obtemos

$$f_{32,z_{k-1}} = f_{31,z_0} F_{z_k}.$$

Com isso, observe que $F_{z_k} \neq 0$, uma vez que a equação (2.72) é de ordem k e, além disso, $f_{31,z_0} \neq 0$, do contrário, a equação (2.76) do Lema 2.5 seria infringida. Consequentemente, $f_{32,z_{k-1}} \neq 0$ e analogamente ao que foi feito nas outras proposições, encontramos

$$\Delta_{13} = -f_{31} f_{12}, \quad \Delta_{23} = \eta f_{32} - f_{31} f_{22}. \tag{2.132}$$

Pela proposição 2.2.1, as expressões de (2.96) passam a ser como em (2.97). Portanto substituindo os dados da classificação do tipo III e as expressões de (2.132) em (2.97), obtemos

$$\begin{aligned} &f_{11}a_t + \eta b_t - f_{12}a_x - f_{22}b_x + 2bf_{31}f_{12} + (a-c)(\eta f_{32} - f_{22}) = 0, \\ &f_{11}b_t + \eta c_t - f_{12}b_x - f_{22}c_x - (a-c)f_{31}f_{12} + 2b(\eta f_{32} - \lambda f_{22}f_{31}) = 0. \end{aligned} \tag{2.133}$$

Diferenciando as expressões de (2.133) com relação a z_{k-1} (isso faz sentido, pois $k \geq 2$), temos

$$\begin{aligned} (a-c)\eta f_{32,z_{k-1}} &= 0, \\ 2b\eta f_{32,z_{k-1}} &= 0. \end{aligned} \tag{2.134}$$

Como $f_{32,z_{k-1}} \neq 0$ e $\eta \neq 0$, segue-se que $a - c = 0$ e $b = 0$, o que contradiz a equação de Gauss (1.19). Portanto se $f_{11} = 0$, o sistema de equações (1.15-1.19) é inconsistente.

Se, por outro lado, for $f_{31} = 0$, (2.77), (2.78) e (2.79) se reduzem a

$$f_{11,z_0}F = \sum_{i=0}^{k-1} f_{12,z_i}z_{i+1} + \eta f_{32},$$

$$\sum_{i=0}^{k-2} f_{22,z_i}z_{i+1} = f_{11}f_{32}, \tag{2.135}$$

$$\sum_{i=0}^{k-1} f_{32,z_i}z_{i+1} = -\eta f_{12} + f_{11}f_{22}, \tag{2.136}$$

Diferenciando (2.134) e (2.135) com relação a z_k, obtemos, respectivamente,

$$f_{11,z_0}F_{z_k} = f_{12,z_{k-1}} \tag{2.137}$$

e

$$f_{32,z_{k-1}} = 0. \tag{2.138}$$

Uma vez que $k \geq 2$, faz sentido diferenciar com relação a z_{k-1}. Daí, diferenciando-se (2.135) com relação a z_{k-1}, obtemos

$$f_{22,z_{k-2}} = 0.$$

Como F é uma equação evolutiva de ordem k, segue-se daí que $F_{z_k} \neq 0$ e, além disso, $f_{11,z_0} \neq 0$, donde por (2.137), $f_{12,z_{k-1}} \neq 0$.

Analogamente como foi feito nas outras proposições, encontramos

$$\Delta_{13} = f_{11} f_{32}, \quad \Delta_{23} = \eta f_{32}. \tag{2.139}$$

Pela proposição 2.2.1, as expressões de (2.96) passam a ser como em (2.97). Portanto substituindo os dados da classificação do tipo III e as expressões de (2.139) em (2.97), obtemos

$$\begin{aligned} & f_{11} a_t + \eta b_t - f_{12} a_x - f_{22} b_x - 2b f_{11} f_{32} + (a-c)\eta f_{32} = 0, \\ & f_{11} b_t + \eta c_t - f_{12} b_x - f_{22} c_x + (a-c) f_{11} f_{32} + 2b\eta f_{32} = 0. \end{aligned} \tag{2.140}$$

Diferenciando as expressões de (2.140) com relação a z_{k-1} (isso faz sentido, pois $k \geq 2$), temos

$$\begin{aligned} & -f_{12,z_{k-1}} a_x - 2b f_{11} f_{32,z_{k-1}} + (a-c)\eta f_{32,z_{k-1}} = 0, \\ & -f_{12,z_{k-1}} b_x + (a-c) f_{11} f_{32,z_{k-1}} + 2b\eta f_{32,z_{k-1}} = 0. \end{aligned} \tag{2.141}$$

Mas por conta de (2.138), as equações de (2.141) se tornam

$$-f_{12,z_{k-1}} a_x = 0, \quad -f_{12,z_{k-1}} b_x = 0.$$

Como $f_{12,z_{k-1}} \neq 0$, segue-se que $a_x = b_x = 0$. Com isso, as equações de (2.140) se reduzem a

$$\begin{aligned} & f_{11} a_t + \eta b_t - 2b f_{11} f_{32} + (a-c)\eta f_{32} = 0, \\ & f_{11} b_t + \eta c_t - f_{22} c_x + (a-c) f_{11} f_{32} + 2b\eta f_{32} = 0. \end{aligned} \tag{2.142}$$

Diferenciando (2.136) com relação a z_{k-1}, temos

$$f_{32,z_{k-2}} = -\eta f_{12,z_{k-1}}.$$

Como $\eta \neq 0$ e $f_{12,z_{k-1}} \neq 0$, segue-se que $f_{32,z_{k-2}} \neq 0$.

Se $k \geq 3$, então diferenciando as expressões de (2.142) com relação a z_{k-2}, temos

$$-2b f_{11} f_{32,z_{k-2}} + (a-c)\eta f_{32,z_{k-2}} = 0, \quad (a-c) f_{11} f_{32,z_{k-2}} + 2b\eta f_{32,z_{k-2}} = 0. \tag{2.143}$$

Como $f_{32,z_{k-2}} \neq 0$, segue-se que (2.143) reduzir-se-á ao sistema

$$\begin{cases} (a-c)\eta - 2b f_{11} = 0 \\ (a-c) f_{11} + 2b\eta = 0 \end{cases}. \tag{2.144}$$

O sistema de equações (2.144) pode ser reescrito como

$$\begin{bmatrix} \eta & -f_{11} \\ f_{11} & \eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a-c \\ 2b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Como $f_{11,z_0} \neq 0$,

$$det \begin{bmatrix} \eta & -f_{11} \\ f_{11} & \eta \end{bmatrix} \neq 0,$$

pois caso contrário, $\eta^2 + f_{11}^2 = 0$, donde diferenciando essa última expressão em relação a z_0, teríamos $f_{11,z_0} = 0$, um absurdo. Por conseguinte, $a - c = 0$ e $b = 0$, o que contradiz a equação de Gauss. Portanto se $f_{31} = 0$, o sistema de equações (1.15-1.19) é inconsistente.

O caso $k = 2$ foi tratado na Seção 2.1. □

A Proposição 2.2.5 a seguir ilustra o que acontece com equações evolutivas (2.72) do tipo IV quanto à existência de uma imersão isométrica local em $\mathbb{R}^3$ de uma η-superfície pseudoesférica determinada por uma solução u para a qual os coeficientes a, b e c da segunda forma fundamental dependem de um jato de ordem finita de u.

Proposição 2.2.5. *Para equações evolutivas de ordem k, com $k \geq 2$, que descrevem η-superfícies pseudoesféricas do tipo (2.72), com 1-formas $\omega_i = f_{i1}dx + f_{i2}dt$, $i \in \{1, 2, 3\}$, onde $f_{31}^2 - f_{11}^2 = C \neq 0$, o sistema, formado pelas equações de Codazzi-Mainardi (1.15), (1.16) e a equação de Gauss (1.19), é inconsistente.*

Demonstração. Se $f_{31}^2 - f_{11}^2 = C \neq 0$, então $H = 0$ e $L \neq 0$. Como valem as equações de estrutura (2), segue do Lema 2.5 que valem (2.77), (2.78) e (2.79).

Tendo em vista que o estipulado nesta proposição contempla a classificação do tipo IV, segue-se que $f_{31} = \lambda f_{11}$, com $\lambda^2 \neq 1$. Com isso, valem as equações (2.77), (2.78) e (2.79).

Multiplicando (2.77) por f_{11} e (2.79) por f_{31}, obtemos a seguinte configuração:

$$f_{11}f_{11,z_0}F = \sum_{i=0}^{k-1} f_{11}f_{12,z_i}z_{i+1} + \eta f_{11}f_{32} - f_{11}f_{31}f_{22}, \tag{2.145}$$

$$f_{31}f_{31,z_0}F = \sum_{i=0}^{k-1} f_{31}f_{32,z_i}z_{i+1} + \eta f_{31}f_{12} - f_{11}f_{22}f_{31}. \tag{2.146}$$

Subtraindo (2.146) de (2.145), obtemos

$$(f_{11}f_{11,z_0} - f_{31}f_{31,z_0})F = \sum_{i=0}^{k-1}(f_{11}f_{12,z_i} - f_{31}f_{32,z_i})z_{i+1} + \eta(f_{11}f_{32} - f_{31}f_{12}),$$

que equivale a

$$HF = \sum_{i=0}^{k-1}(f_{11}f_{12,z_i} - f_{31}f_{32,z_i})z_{i+1} + \eta(f_{11}f_{32} - f_{31}f_{12}). \tag{2.147}$$

Ora, mas $H = 0$, por hipótese, e isso implica $HF = 0$. Consequentemente, (2.147) se reduz a

$$\sum_{i=0}^{k-1}(f_{11}f_{12,z_i} - f_{31}f_{32,z_i})z_{i+1} + \eta(f_{11}f_{32} - f_{31}f_{12}) = 0. \tag{2.148}$$

Diferenciando a expressão (2.148) com relação a z_k, obtemos

$$f_{11}f_{12,z_{k-1}} - f_{31}f_{32,z_{k-1}} = 0. \tag{2.149}$$

Multiplicando (2.77) por f_{31} e (2.79) por f_{11}, temos

$$f_{31}f_{11,z_0}F = \sum_{i=0}^{k-1} f_{31}f_{12,z_i}z_{i+1} + \eta f_{31}f_{32} - f_{31}^2 f_{22}\,, \tag{2.150}$$

$$f_{11}f_{31,z_0}F = \sum_{i=0}^{k-1} f_{11}f_{32,z_i}z_{i+1} + \eta f_{11}f_{12} - f_{11}^2 f_{22}. \tag{2.151}$$

Subtraindo (2.150) de (2.151), obtemos

$$\begin{aligned}(f_{11}f_{31,z_0} - f_{31}f_{11,z_0})F &= \sum_{i=0}^{k-1}(f_{11}f_{32,z_i} - f_{31}f_{12,z_i})z_{i+1} \\ &+\eta(f_{11}f_{12} - f_{31}f_{12}) + (f_{31}^2 - f_{11}^2)f_{22}\,,\end{aligned} \tag{2.152}$$

que equivale a

$$LF = \sum_{i=0}^{k-1}(f_{11}f_{32,z_i} - f_{31}f_{12,z_i})z_{i+1} + \eta(f_{11}f_{12} - f_{31}f_{12}) + Cf_{22}. \tag{2.153}$$

Como $L \neq 0$ e $F \neq 0$, temos $HF \neq 0$, donde a expressão (2.153) é diferente de zero.

Daí, diferenciando-a com relação a z_k, ficamos com

$$LF_{z_k} = f_{11}f_{32,z_{k-1}} - f_{31}f_{12,z_{k-1}}.$$

Como $L \neq 0$ e $F_{z_k} \neq 0$, pois F depende de z_k, segue-se que

$$f_{11}f_{32,z_{k-1}} - f_{31}f_{12,z_{k-1}} \neq 0. \tag{2.154}$$

Como $C \neq 0$, segue-se que $f_{11} \neq 0$ e $f_{31} \neq 0$, do contrário, se $f_{11} = 0$, $C = f_{31}^2$, donde diferenciando essa última expressão com relação a z_0, obteríamos $2f_{31}f_{31,z_0} = 0$ e, por conseguinte, $f_{31,z_0} = 0$. Juntando essas informações, teríamos $f_{11,z_0} = 0$ e $f_{31,z_0} = 0$, contradizendo a expressão (2.76) do Lema 2.5. Analogamente, mostramos que $f_{31} \neq 0$.

De (2.149), temos

$$f_{11}f_{12,z_{k-1}} = f_{31}f_{32,z_{k-1}}. \tag{2.155}$$

Note que $f_{12,z_{k-1}} \neq 0$ e $f_{32,z_{k-1}} \neq 0$. De fato, se fosse $f_{12,z_{k-1}} = 0$, então por (2.155), teríamos $f_{31}f_{32,z_{k-1}} = 0$, e como $f_{31} \neq 0$, teríamos $f_{32,z_{k-1}} = 0$, mas substituindo isso em (2.154), obteríamos uma contradição. Se, por outro lado, fosse $f_{32,z_{k-1}} = 0$, então por (2.155), teríamos $f_{11}f_{12,z_{k-1}} = 0$, e como $f_{11} \neq 0$, teríamos $f_{12,z_{k-1}} = 0$. Substituindo esses dados em (2.154), obteríamos uma contradição. Assim, $f_{12,z_{k-1}} \neq 0$ e $f_{32,z_{k-1}} \neq 0$ conforme o afirmado. Podemos reescrever (2.155) como

$$\frac{f_{11}}{f_{31}} = \frac{f_{32,z_{k-1}}}{f_{12,z_{k-1}}}. \tag{2.156}$$

Pela Proposição 2.2.1, as expressões de (2.96) passam a ser como em (2.97). Diferenciando-as em relação a z_{k-1}, temos

$$\begin{aligned} &-f_{12,z_{k-1}}a_x - 2b(f_{11}f_{32,z_{k-1}} - f_{31}f_{12,z_{k-1}}) + (a-c)\eta f_{32,z_{k-1}} = 0,\\ &-f_{12,z_{k-1}}b_x + (a-c)(f_{11}f_{32,z_{k-1}} - f_{31}f_{12,z_{k-1}}) + 2b\eta f_{32,z_{k-1}} = 0. \end{aligned} \tag{2.157}$$

Dividindo as expressões de (2.157) membro a membro por $-f_{12,z_{k-1}}$, ficamos com

$$\begin{aligned} &a_x + 2b\left(f_{11}\tfrac{f_{32,z_{k-1}}}{f_{12,z_{k-1}}} - f_{31}\right) + (a-c)\eta\tfrac{f_{32,z_{k-1}}}{f_{12,z_{k-1}}} = 0,\\ &b_x - (a-c)\left(f_{11}\tfrac{f_{32,z_{k-1}}}{f_{12,z_{k-1}}} - f_{31}\right) - 2b\eta\tfrac{f_{32,z_{k-1}}}{f_{12,z_{k-1}}} = 0. \end{aligned} \tag{2.158}$$

Substituindo (2.156) nas expressões de (2.158), obtemos

$$a_x + 2b\left(\frac{f_{11}^2}{f_{31}} - f_{31}\right) - (a-c)\eta\frac{f_{11}}{f_{31}} = 0,$$

$$b_x - (a-c)\left(\frac{f_{11}^2}{f_{31}} - f_{31}\right) - 2b\eta\frac{f_{11}}{f_{31}} = 0.$$

Assim, ficamos com

$$a_x = 2b\left(\frac{f_{31}^2 - f_{11}^2}{f_{31}}\right) + (a-c)\eta\frac{f_{11}}{f_{31}},$$

$$b_x = -(a-c)\left(\frac{f_{31}^2 - f_{11}^2}{f_{31}}\right) + 2b\eta\frac{f_{11}}{f_{31}}.$$

Como $C = f_{31}^2 - f_{11}^2$, segue-se que as duas últimas equações podem ser reescritas como

$$\begin{aligned} a_x &= (a-c)\eta\frac{f_{11}}{f_{31}} + 2b\frac{C}{f_{31}} = 0,\\ b_x &= -(a-c)\frac{C}{f_{31}} + 2b\eta\frac{f_{11}}{f_{31}} = 0. \end{aligned} \tag{2.159}$$

Note que diferenciando as equações de (2.159) com relação a z_0, obtemos

$$\begin{aligned} &\frac{(a-c)\eta(f_{31}f_{11,z_0} - f_{11}f_{31,z_0})}{f_{31}^2} + \frac{2b}{f_{31}^2}(C_{z_0}f_{31} - Cf_{31,z_0}) = 0,\\ &-\frac{(a-c)}{f_{31}^2}(C_{z_0}f_{31} - Cf_{31,z_0}) + \frac{2b\eta}{f_{31}^2}(f_{31}f_{11,z_0} - f_{11}f_{31,z_0}) = 0. \end{aligned} \tag{2.160}$$

Uma vez que $C_{z_0} = -2(f_{11}f_{11,z_0} - f_{13}f_{31,z_0}) = -2H$, com $H = 0$, temos

$$C_{z_0} = 0. \tag{2.161}$$

Substituindo (2.161) nas equações de (2.160) e tendo em vista que $L = f_{11}f_{31,z_0} - f_{31}f_{11,z_0}$, ficamos com

$$-\frac{(a-c)\eta L}{f_{31}^2} - \frac{2b}{f_{31}^2}Cf_{31,z_0} = 0,$$

$$\frac{(a-c)}{f_{31}^2}Cf_{31,z_0} - \frac{2b\eta}{f_{31}^2}L = 0,$$

que equivalem ao sistema

$$\begin{cases} -\eta L(a-c) - 2Cf_{31,z_0}b = 0 \\ Cf_{31,z_0}(a-c) - 2\eta Lb = 0 \end{cases}. \tag{2.162}$$

O sistema de equações (2.162) pode ser reescrito como

$$\begin{bmatrix} -\eta L & -Cf_{31,z_0} \\ Cf_{31,z_0} & -\eta L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a-c \\ 2b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Como $\eta \neq 0$, $L \neq 0$, $f_{31,z_0} \neq 0$ e $C \neq 0$, segue-se que

$$det \begin{bmatrix} -\eta L & -Cf_{31,z_0} \\ Cf_{31,z_0} & -\eta L \end{bmatrix} = \eta^2 L^2 + C^2 f_{31,z_0}^2 \neq 0.$$

Isso implica em $a - c = 0$ e $b = 0$, o que contradiz a equação de Gauss. □

A Proposição 2.2.6 a seguir ilustra o que acontece com equações evolutivas (2.72) do tipo V quanto à existência de uma imersão isométrica local em $\mathbb{R}^3$ de uma η-superfície pseudoesférica determinada por uma solução u para a qual os coeficientes a, b e c da segunda forma fundamental dependem de um jato de ordem finita de u.

Proposição 2.2.6. *Para equações evolutivas de ordem k, com $k \geq 2$, que descrevem η-superfícies pseudoesféricas do tipo (2.72), com 1-formas $\omega_i = f_{i1}dx + f_{i2}dt$, $i \in \{1, 2, 3\}$, onde $HL \neq 0$, o sistema, formado pelas equações de Codazzi-Mainardi (1.15), (1.16) e a equação de Gauss (1.19), é inconsistente.*

Demonstração. Suponha que $HL \neq 0$, com $H = f_{11}f_{11,z_0} - f_{31}f_{31,z_0}$ e $L = f_{11}f_{31,z_0} - f_{31}f_{11,z_0}$. Assim, temos $f_{11} \neq 0$ e $f_{31} \neq 0$, do contrário, se fosse $f_{11} = 0$ ou $f_{31} = 0$, teríamos $L = 0$, donde $HL = 0$. Como valem as equações de estrutura (2), segue-se do Lema 2.5 que valem (2.77), (2.78) e (2.79).

Multiplicando (2.77) por f_{11} e (2.79) f_{31}, obtemos

$$f_{11}f_{11,z_0}F = \sum_{i=0}^{k-1} f_{11}f_{12,z_i}z_{i+1} + \eta f_{11}f_{32} - f_{11}f_{31}f_{22}, \tag{2.163}$$

$$f_{31}f_{31,z_0}F = \sum_{i=0}^{k-1} f_{31}f_{32,z_i}z_{i+1} + \eta f_{31}f_{12} - f_{11}f_{31}f_{22}. \tag{2.164}$$

Subtraindo (2.164) de (2.163), obtemos

$$(f_{11}f_{11,z_0} - f_{31}f_{31,z_0})F = \sum_{i=0}^{k-1}(f_{11}f_{12,z_i} - f_{31}f_{32,z_i})z_{i+1} + \eta(f_{11}f_{32} - f_{31}f_{12}),$$

que equivale a

$$HF = \sum_{i=0}^{k-1}(f_{11}f_{12,z_i} - f_{31}f_{32,z_i})z_{i+1} + \eta(f_{11}f_{32} - f_{31}f_{12}). \tag{2.165}$$

Multiplicando (2.77) por f_{31} e (2.78) por f_{11}, obtemos

$$f_{31}f_{11,z_0}F = \sum_{i=0}^{k-1} f_{31}f_{12,z_i}z_{i+1} + \eta f_{31}f_{32} - f_{31}^2 f_{22}, \tag{2.166}$$

$$f_{11}f_{31,z_0}F = \sum_{i=0}^{k-1} f_{11}f_{32,z_i}z_{i+1} + \eta f_{11}f_{12} - f_{11}^2 f_{22}. \tag{2.167}$$

Subtraindo (2.166) de (2.167), obtemos

$$(f_{11}f_{31,z_0} - f_{31}f_{11,z_0})F = \sum_{i=0}^{k-1}(f_{11}f_{32,z_i} - f_{31}f_{12,z_i})z_{i+1} + \eta(f_{11}f_{12} - f_{31}f_{32}) - f_{22}(f_{31}^2 - f_{11}^2),$$

que equivale a

$$LF = \sum_{i=0}^{k-1}(f_{11}f_{32,z_i} - f_{31}f_{12,z_i})z_{i+1} + \eta(f_{11}f_{12} - f_{31}f_{32}) + f_{22}C. \tag{2.168}$$

Tendo em vista que $L_{z_k} = 0$ e $H_{z_k} = 0$, segue-se que $(LF)_{z_k} = LF_{z_k}$ e $(HF)_{z_k} = HF_{z_k}$. Assim, diferenciando-se (2.165) e (2.168) com relação a z_k, obtemos

$$f_{11}f_{12,z_{k-1}} - f_{31}f_{32,z_{k-1}} = HF_{z_k},$$

$$f_{11}f_{32,z_{k-1}} - f_{31}f_{12,z_{k-1}} = LF_{z_k}.$$

Como $H \neq 0$, $L \neq 0$ e $F_k \neq 0$, segue-se que

$$f_{11}f_{12,z_{k-1}} - f_{31}f_{32,z_{k-1}} \neq 0 \quad \text{e} \quad f_{11}f_{32,z_{k-1}} - f_{31}f_{12,z_{k-1}} \neq 0. \tag{2.169}$$

Diferenciando (2.78) com relação a z_{k-1}, obtemos

$$f_{22,z_{k-2}} = f_{11}f_{32,z_{k-1}} - f_{31}f_{12,z_{k-1}},$$

donde $f_{22,z_{k-2}} \neq 0$.

Como $HL \neq 0$, temos $H \neq 0$ e $L \neq 0$ e, assim, podemos reescrever (2.165) e (2.168) como

$$F = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{f_{11}f_{12,z_i} - f_{31}f_{32,z_i}}{H} z_{i+1} + \frac{\eta(f_{11}f_{32} - f_{31}f_{12})}{H}, \tag{2.170}$$

$$F = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{f_{11}f_{32,z_i} - f_{31}f_{12,z_i}}{L} z_{i+1} + \frac{C}{L} f_{22} + \frac{\eta(f_{11}f_{12} - f_{31}f_{32})}{L}. \tag{2.171}$$

Subtraindo (2.171) de (2.170), temos

$$\begin{aligned} &\sum_{i=0}^{k-1} \left[\frac{f_{11}f_{12,z_i} - f_{31}f_{32,z_i}}{H} - \frac{f_{11}f_{32,z_i} - f_{31}f_{12,z_i}}{L} \right] z_{i+1} \\ &\quad + \eta \left[\frac{f_{11}f_{32} - f_{31}f_{12}}{H} - \frac{f_{11}f_{12} - f_{31}f_{32}}{L} \right] - \frac{C}{L} f_{22} = 0. \end{aligned} \tag{2.172}$$

Derivando a expressão (2.172) com relação a z_k

$$\begin{aligned} &\frac{H(f_{11}f_{12,z_{k-1}} - f_{31}f_{32,z_{k-1}}) - H_{z_k}(f_{11}f_{12,z_{k-1}} - f_{31}f_{12,z_{k-1}})z_k}{H^2} \\ &- \frac{L(f_{11}f_{32,z_{k-1}} - f_{31}f_{12,z_{k-1}}) - L_{z_k}(f_{11}f_{32,z_{k-1}} - f_{31}f_{12,z_{k-1}})z_k}{L^2} = 0. \end{aligned} \tag{2.173}$$

Como $H_{z_k} = 0$ e $L_{z_k} = 0$, a expressão (2.173) se reduz a

$$\frac{f_{11}f_{12,z_{k-1}} - f_{31}f_{32,z_{k-1}}}{H} - \frac{f_{11}f_{32,z_{k-1}} - f_{31}f_{12,z_{k-1}}}{L} = 0. \tag{2.174}$$

Daí, multiplicando (2.174) por HL, ficamos com

$$L(f_{11}f_{12,z_{k-1}} - f_{31}f_{32,z_{k-1}}) - H(f_{11}f_{32,z_{k-1}} - f_{31}f_{12,z_{k-1}}) = 0. \tag{2.175}$$

Substituindo as expressões de H e L em (2.175), obtemos

$$(f_{31}^2 - f_{11}^2)(f_{11,z_0}f_{32,k-1} - f_{31,z_0}f_{12,z_{k-1}}) = 0,$$

sendo que $C = f_{31}^2 - f_{11}^2$ não é constante, pois se fosse, então $C_{z_0} = 0$, donde $f_{31}f_{31,z_0} - f_{11}f_{31,z_0} = 0$, o que nos levaríamos a concluir que $H = 0$. Por conseguinte,

$$f_{11,z_0}f_{32,k-1} - f_{31,z_0}f_{12,z_{k-1}} = 0. \tag{2.176}$$

Como não pode ocorrer $f_{11,z_0} = 0$ e $f_{31,z_0} = 0$, pois nesse caso a expressão (2.76) do Lema 2.5 seria infringida, segue-se que $f_{11,z_0} \neq 0$ ou $f_{31,z_0} \neq 0$. Também $f_{12,z_{k-1}}$ e $f_{32,k-1}$ não zeram simultaneamente, pois se isso ocorresse a equação (2.72) não seria de ordem k.

Diferenciando (2.77) e (2.79) do Lema 2.5 com relação a z_k, temos

$$f_{11,z_0}F_{z_k} = f_{12,z_{k-1}}, \tag{2.177}$$

$$f_{31,z_0}F_{z_k} = f_{32,z_{k-1}}. \tag{2.178}$$

Note que $F_{z_k} \neq 0$, do contrário, a equação (2.72) não seria de ordem k.

Portanto pela expressão (2.177), segue-se que $f_{11,z_0} \neq 0$ se, e somente se, $f_{12,z_{k-1}} \neq 0$ e pela expressão (2.178), $f_{31,z_0} \neq 0$ se, e somente se, $f_{32,z_{k-1}} \neq 0$. Daí se $f_{11,z_0} = 0$, então $f_{12,z_{k-1}} = 0$, $f_{31,z_0} \neq 0$ e $f_{32,z_{k-1}} \neq 0$ (lembre-se que não pode ser $f_{11,z_0} = 0$ e $f_{31,z_0} = 0$).

Por outro lado, se $f_{31,z_0} = 0$, então $f_{32,z_{k-1}} = 0$, $f_{11,z_0} \neq 0$ e $f_{31,z_{k-1}} \neq 0$ (lembre-se que não pode ser $f_{11,z_0} = 0$ e $f_{31,z_0} = 0$).

Derivando as equações de Codazzi-Mainardi (1.15) e (1.16) com relação a z_{k-1}, obteremos, com o auxílio do Lema 2.5

$$\begin{aligned} f_{12,z_{k-1}}a_x &= (a-c)\eta f_{32,z_{k-1}} - 2b(f_{11}f_{32,z_{k-1}} - f_{31}f_{12,z_{k-1}}), \\ f_{12,z_{k-1}}b_x &= (a-c)(f_{11}f_{32,z_{k-1}} - f_{31}f_{12,z_{k-1}}) + 2b\eta f_{32,z_{k-1}}. \end{aligned} \tag{2.179}$$

Pelo que vimos anteriormente, a não concomitância de $f_{11,z_0} = 0$ e $f_{31,z_0} = 0$ implica na não concomitância de $f_{12,z_{k-1}} = 0$ e $f_{32,z_{k-1}} = 0$ e reciprocamente. Como consequência disso, resulta que se $f_{12,z_{k-1}} = 0$, então $f_{32,z_{k-1}} \neq 0$ e as equações de (2.179) reduzir-se-ão a

$$\begin{aligned} (a-c)\eta f_{32,z_{k-1}} - 2bf_{11}f_{32,z_{k-1}} &= 0, \\ (a-c)f_{11}f_{32,z_{k-1}} + 2b\eta f_{32,z_{k-1}} &= 0. \end{aligned} \tag{2.180}$$

Como $f_{32,z_{k-1}} \neq 0$, segue-se que as expressões de (2.180) podem ser reescritas como

$$(a-c)\eta - 2bf_{11} = 0, \quad (a-c)f_{11} + 2b\eta = 0,$$

que equivale a

$$\begin{bmatrix} \eta & -f_{11} \\ f_{11} & \eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a-c \\ 2b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Como

$$det \begin{bmatrix} \eta & -f_{11} \\ f_{11} & \eta \end{bmatrix} = \eta^2 + f_{11}^2 \neq 0,$$

segue-se que $a - c = 0$ e $2b = 0$, o que contradiz a equação de Gauss (1.19).

Se $f_{12,z_{k-1}} \neq 0$, então as equações de (2.179) podem ser reescritas como

$$\begin{aligned} a_x &= (a-c)\eta \frac{f_{32,z_{k-1}}}{f_{12,z_{k-1}}} - 2b \frac{f_{11} f_{32,z_{k-1}} - f_{31} f_{12,z_{k-1}}}{f_{12,z_{k-1}}}, \\ b_x &= (a-c) \frac{f_{11} f_{32,z_{k-1}} - f_{31} f_{12,z_{k-1}}}{f_{12,z_{k-1}}} + 2b\eta \frac{f_{32,z_{k-1}}}{f_{12,z_{k-1}}}. \end{aligned} \tag{2.181}$$

De (2.176) e da hipótese que $f_{12,z_{k-1}} \neq 0$, decorre-se que

$$\frac{f_{32,z_{k-1}}}{f_{12,z_{k-1}}} = \frac{f_{31,z_0}}{f_{11,z_0}}. \tag{2.182}$$

Substituindo (2.182) em nas expressões de (2.181), obtemos

$$\begin{aligned} a_x &= (a-c)\eta \frac{f_{31,z_0}}{f_{11,z_0}} - 2b \frac{f_{11} f_{31,z_0} - f_{31} f_{11,z_0}}{f_{11,z_0}}, \\ b_x &= (a-c) \frac{f_{11} f_{31,z_0} - f_{31} f_{11,z_0}}{f_{11,z_0}} + 2b\eta \frac{f_{31,z_0}}{f_{11,z_0}}. \end{aligned} \tag{2.183}$$

Tendo em vista que $L = \dfrac{f_{31,z_0}}{f_{11,z_0}}$, segue-se que as equações de (2.183) podem ser reescritas como

$$\begin{aligned} a_x &= (a-c)\eta \frac{f_{31,z_0}}{f_{11,z_0}} - 2b \frac{L}{f_{11,z_0}}, \\ b_x &= (a-c) \frac{L}{f_{11,z_0}} + 2b\eta \frac{f_{31,z_0}}{f_{11,z_0}}. \end{aligned} \tag{2.184}$$

Diferenciando as expressões de (2.184) com relação a z_0, ficamos com

$$(a-c)\eta \left(\frac{f_{31,z_0}}{f_{11,z_0}} \right)_{z_0} - 2b \left(\frac{L}{f_{11,z_0}} \right)_{z_0} = 0,$$

$$(a-c) \left(\frac{L}{f_{11,z_0}} \right)_{z_0} + 2b\eta \left(\frac{f_{31,z_0}}{f_{11,z_0}} \right)_{z_0} = 0,$$

o que implica em

$$\begin{bmatrix} \eta \left(\dfrac{f_{31,z_0}}{f_{11,z_0}} \right)_{z_0} & - \left(\dfrac{L}{f_{11,z_0}} \right) \\ \left(\dfrac{L}{f_{11,z_0}} \right) & \eta \left(\dfrac{f_{31,z_0}}{f_{11,z_0}} \right)_{z_0} \end{bmatrix}.$$

O determinante da matriz anterior é igual a zero, isto é, $\eta^2 \left(\dfrac{f_{31,z_0}}{f_{11,z_0}}\right)^2_{z_0} + \left(\dfrac{L}{f_{11,z_0}}\right)^2 = 0$, do contrário, seria $a - c = 0$ e $b = 0$, contradizendo (1.19). Por conseguinte, o determinante supracitado é zero e isso culmina em

$$\left(\frac{L}{f_{11,z_0}}\right) = 0 \quad \text{e} \quad \left(\frac{f_{31,z_0}}{f_{11,z_0}}\right)_{z_0} = 0. \tag{2.185}$$

Integrando a segunda expressão de (2.185) com relação a z_0, obtemos

$$\frac{f_{31,z_0}}{f_{11,z_0}} = \lambda, \tag{2.186}$$

onde λ é uma constante.

De (2.186), temos $f_{31,z_0} = \lambda f_{11,z_0}$. Após integrar essa expressão com relação a z_0, obtemos

$$f_{31} = \lambda f_{11} + \mu, \tag{2.187}$$

onde μ é uma constante.

Por outro lado, segue de (2.182) e de (2.186) que

$$\frac{f_{32,z_{k-1}}}{f_{12,z_{k-1}}} = \lambda,$$

donde

$$f_{32} = \lambda f_{12} + \nu, \tag{2.188}$$

em que ν é uma função de $z_0, \cdots, z_{k-2}$. Pela segunda expressão de (2.169) e tendo em vista que $f_{12,z_{k-1}} \neq 0$, segue-se que $\mu \neq 0$, pois caso fosse $\mu = 0$, (2.187) se reduziria a $f_{31} = \lambda f_{11}$. Substituindo essa última informação na segunda expressão de (2.169), ter-se-íamos uma contradição. Note ainda que

$$L = f_{11} f_{31,z_0} - f_{31} f_{11,z_0} = \lambda f_{11} f_{11,z_0} - (\lambda f_{11} + \mu) f_{11,z_0} = -\mu f_{11,z_0}.$$

Por conseguinte,

$$\frac{L}{f_{11,z_0}} = -\mu. \tag{2.189}$$

Substituindo (2.186) e (2.189) nas expressões de (2.184), obtemos

$$a_x = (a - c)\eta\lambda - 2b\mu, \quad b_x = -(a - c)\mu + 2b\eta\lambda. \tag{2.190}$$

Analogamente ao que foi feito em outras proposições, chegamos por reduções algébricas simples que

$$\Delta_{13} = \nu f_{11} - \mu f_{12}, \quad \Delta_{23} = \eta\lambda f_{12} + \eta\nu - \lambda f_{11} f_{22} - \mu f_{22}. \tag{2.191}$$

Substituindo as expressões de (2.190) e as expressões de (2.191) nas equações (1.15) e (1.16) de Codazzi-Mainardi, obteremos

$$\begin{aligned} &f_{11}a_t + \eta b_t - (a-c)(\lambda f_{11} f_{22} - \eta\nu) - 2b(\eta\lambda f_{22} + \nu f_{11}) = 0, \\ &f_{11}b_t + \eta c_t + (a-c)\nu f_{11} + 2b(\eta\nu - \lambda f_{11} f_{22} - \mu f_{22}) - f_{22}c_x = 0. \end{aligned} \tag{2.192}$$

Se $k \geq 3$, então diferenciando as equações de (2.192) com relação a z_{k-2}, obtemos

$$\begin{aligned} &-(a-c)\lambda f_{11} f_{22,z_{k-2}} - 2b\eta\lambda f_{22,z_{k-2}} = -(a-c)\eta\nu_{z_{k-2}} + 2bf_{11}\nu_{z_{k-2}}, \\ &-2b(\lambda f_{11} + \mu) f_{22,z_{k-2}} - c_x f_{22,z_{k-2}} = -(a-c) f_{11}\nu_{z_{k-2}} + 2b\eta\nu_{z_{k-2}}. \end{aligned} \tag{2.193}$$

Dividindo as expressões de (2.193), membro a membro por $-f_{22,z_{k-2}} \neq 0$, obtemos

$$\begin{aligned} [(a-c)f_{11} - 2b\eta]\lambda &= \frac{\nu_{z_{k-2}}}{f_{22,z_{k-2}}}[(a-c)\eta - 2bf_{11}], \\ 2b(\lambda f_{11} + \mu) + c_x &= \frac{\nu_{z_{k-2}}}{f_{22,z_{k-2}}}[(a-c)f_{11} + 2b\eta]. \end{aligned} \tag{2.194}$$

Observe que $(a-c)\eta - 2bf_{11}$ e $(a-c)f_{11} - 2b\eta$ não podem ser nulos simultaneamente, pois $f_{11,z_0} \neq 0$ e $(a-c)^2 + b^2 \neq 0$. Assim, podemos reescrever (2.194) como

$$\frac{\nu_{z_{k-2}}}{f_{22,z_{k-2}}} = \frac{[(a-c)f_{11} - 2b\eta]\lambda}{(a-c)\eta - 2bf_{11}}, \tag{2.195}$$

$$\frac{\nu_{z_{k-2}}}{f_{22,z_{k-2}}} = \frac{2b(\lambda f_{11} + \mu) + c_x}{(a-c)f_{11} + 2b\eta}. \tag{2.196}$$

Comparando (2.195) e (2.196), temos

$$\frac{[(a-c)f_{11} - 2b\eta]\lambda}{(a-c)\eta - 2bf_{11}} = \frac{2b(\lambda f_{11} + \mu) + c_x}{(a-c)f_{11} + 2b\eta},$$

donde

$$\begin{aligned} &\lambda[(a-c)^2 + 4b^2]f_{11}^2 + [2b\eta\lambda(a-c) + 4b^3\mu + 2bc_x]f_{11} \\ &+4b^2\eta^2\lambda - (a-c)\eta(2b\mu + c_x) = 0. \end{aligned} \tag{2.197}$$

Diferenciando (2.197) com relação a z_0, ficamos com $\lambda = 0$ e $c_x = -2b\mu$. Substituindo isso nas expressões de (2.192), obteremos

$$\begin{aligned} f_{11}a_t + \eta b_t + [(a-c)\eta - 2bf_{11}]\nu &= 0, \\ f_{11}b_t + \eta c_t + [(a-c)f_{11} + 2b\eta]\nu &= 0. \end{aligned} \tag{2.198}$$

As equações de (2.198) se reduzem a

$$\nu = -\frac{f_{11}a_t + \eta b_t}{(a-c)\eta - 2bf_{11}},$$

$$\nu = -\frac{f_{11}b_t + \eta c_t}{(a-c)f_{11} + 2b\eta}.$$

Comparando as duas equações acima, chegamos a

$$[2bb_t + (a-c)a_t]f_{11}^2 + 2b\eta(a_t + c_t)f_{11} + \eta^2[2bb_t - (a-c)c_t] = 0. \tag{2.199}$$

De (2.199) resulta que

$$[2bb_t + (a-c)a_t]f_{11}^2 = 0, \quad 2b\eta(a_t + c_t)f_{11} = 0, \quad [2bb_t - (a-c)c_t]\eta^2 = 0. \tag{2.200}$$

Como $\eta \neq 0$ e $f_{11} \neq 0$, segue-se que $\eta^2 \neq 0$ e $f_{11}^2 \neq 0$. Com isso, as expressões de (2.200) se reduzem a

$$2bb_t + (a-c)a_t = 0, \quad b(a_t + c_t) = 0, \quad 2bb_t - (a-c)c_t = 0. \tag{2.201}$$

Daí se $b = 0$, então $a_t = 0$, donde $c_t = 0$ pela terceira expressão de (2.201); se $b \neq 0$, então $a_t + c_t = 0$. Daí, mediante o uso da derivada de (1.19), concluímos que $a_t(a - c) = 0$. Assim, $a_t = 0$ ou $a - c = 0$. Em quaisquer dos casos, obtemos $a_t = c_t = 0$. Por conseguinte, a, b e c não dependem de t. Daí segue-se que as equações de (2.198) se reduzem a

$$[(a-c)\eta - 2bf_{11}]\nu = 0, \quad [(a-c)f_{11} + 2b\eta]\nu = 0,$$

o que equivale a

$$\begin{bmatrix} \eta\nu & -f_{11}\nu \\ f_{11}\nu & \eta\nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a-c \\ 2b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{2.202}$$

Como não ocorre $a - c = 0$ e $2b = 0$, por hipótese, segue-se que que o determinante da primeira matriz de (2.202) é igual zero, isto é, $\nu^2(\eta^2 + f_{11}^2) = 0$. Ora, como $\eta^2 + f_{11}^2 \neq 0$, segue-se que $\nu = 0$. Com isso, podemos reescrever a expressão (2.188) como $f_{32} = \lambda f_{12}$, donde sempre que $f_{32} = 0$, teremos $f_{31} = \mu \neq 0$ e, portanto, $H = f_{11}f_{11,z_0}$ e

$L = -\mu f_{11,z_0}$. Por conseguinte, a expressão (2.172) se reduz a

$$(\mu^2 - f_{11}^2)(\eta f_{12} - f_{22} f_{11}) = 0. \tag{2.203}$$

Diferenciando (2.203) com respeito a z_{k-1}, obtemos um contradição, pois $(\mu^2 - f_{11}^2) f_{12,z_{k-1}} \neq 0$.

Se $k = 2$, então a prova desta proposição é dada como na seção anterior. Se $k \geq 2$, então sempre que $HL \neq 0$, o sistema, formado pelas equações (1.15), (1.16) e (1.19), é inconsistente.

□

Uma vez que as proposições anteriores foram provadas, um argumento simples prova a veracidade do Teorema 2.2.

Demonstração do Teorema 2.2. De acordo com a classificação de Chern e Tenenblat feita em [11], as equações evolutivas (2.72) podem ser de um dos tipos mencionados no início desta seção, e as Proposições (2.2.2-2.2.6) englobam todos casos possíveis, sendo que, como pudemos ver, há apenas um caso que existe uma imersão isométrica local em $\mathbb{R}^3$ de uma η-superfície pseudoesférica, determinada por uma solução u, para a qual os coeficientes da segunda forma fundamental dependem de um jato de ordem finita de u. Esse caso trata-se justamente de equações evolutivas do tipo (2.73). Para os outros casos, o sistema, formado pelas equações de Gauss e Codazzi-Mainardi, é inconsistente. Essas observações provam o teorema. □

No que segue, para finalizar a seção, apresentamos um corolário do Teorema 2.2.

Corolário 2.1. *Para cada solução u de uma equação do tipo (2.73) existe uma folheação do domínio de u por retas com a propriedade de que quando a métrica de curvatura gaussiana negativa constante $K = -1$, associada a u por meio de (4), é local isometricamente imersa como uma superfície $S \subset \mathbb{E}^3$, a curvatura média de S é constante ao longo das curvas definidas pelas imagens sob a imersão das retas dessa folheação.*

Demonstração. Para cada solução u de qualquer equação do tipo (2.73), as 1-formas associadas (2) definem uma métrica de curvatura gaussiana $K = -1$. Com isso, segue do Teorema 2.2 que uma imersão isométrica local de uma tal métrica em $\mathbb{E}^3$ é determinada pelos coeficientes da segunda forma fundamental, os quais são funções de $\eta x + \beta t$.

Considere $(x, t) \in \mathbb{R}^2$ tal que a reta $\eta x + \beta t = \delta$, $\delta \in \mathbb{R}$, esteja contida no domínio de definição da imersão. O domínio é folheado por tais retas. Para cada δ, a imagem da reta é uma curva da superfície, sendo que, ao londo dessa curva, os coeficientes da segunda forma fundamental são constantes determinadas por δ. Como a curvatura média da superfície é dada pelo traço da segunda forma fundamental, segue-se que H é constante ao longo de tal curva. $\square$

Capítulo

3

Imersões isométricas locais de métricas associadas às soluções de equações hiperbólicas

Neste capítulo, consideraremos a classe de equações diferenciais parciais hiperbólicas de segunda ordem dada por

$$u_{xt} = F(u, u_x), \tag{3.1}$$

que descrevem η-superfícies pseudoesféricas (**s.p.e.**) (veja [21]) e, seguindo os passos descritos em [16], concluiremos que, exceto para a equação de Sine-Gordon, sempre que uma tal imersão isométrica local existe, os coeficientes são funções que dependem somente de x e t e, portanto, são universais.

Dada uma função diferenciável $u(x,t)$, ao longo deste capítulo, usaremos as seguintes notações

$$z_i = \frac{\partial^i u}{\partial x^i}, \qquad w_i = \frac{\partial^i u}{\partial t^i}, \quad \text{onde} \quad z_0 = w_0 = u. \tag{3.2}$$

Consequentemente,

$$z_{i,x} = z_{i+1}, \quad z_{i,t} = \frac{\partial^{i-1} u_{xt}}{\partial x^{i-1}}, \quad w_{i,x} = \frac{\partial^{i-1} u_{xt}}{\partial t^{i-1}}, \quad w_{i,t} = w_{i+1} \tag{3.3}$$

e as derivadas totais de uma função diferenciável $\varphi = \varphi(x, t, z_0, z_1, w_1, \cdots, z_l, w_l)$ serão dadas por

$$D_x\varphi = \varphi_x + \sum_{i=0}^{l} \varphi_{z_i} z_{i+1} + \sum_{i=1}^{l} \varphi_{w_i} w_{i,x}, \tag{3.4}$$

$$D_t\varphi = \varphi_t + \sum_{i=1}^{l} \varphi_{z_i} z_{i,t} + \sum_{i=0}^{l} \varphi_{w_i} w_{i+1}. \tag{3.5}$$

Para além disso, introduziremos a notação

$$\Delta_{ij} = f_{i1} f_{j2} - f_{j1} f_{i2}. \tag{3.6}$$

Antes de prosseguirmos, note que $\omega_1 \wedge \omega_2 \neq 0$ equivale a

$$\Delta_{12} \neq 0$$

e que $\omega_1 \wedge \omega_3 = \Delta_{13} dx \wedge dt$ e $\omega_2 \wedge \omega_3 = \Delta_{23} dx \wedge dt$. Consequentemente,

$$\Delta_{13}^2 + \Delta_{23}^2 \neq 0, \tag{3.7}$$

pois, caso contrário, teríamos $\Delta_{13} = 0$ e $\Delta_{23} = 0$, donde $\omega_1 \wedge \omega_3 = 0$ e $\omega_2 \wedge \omega_3 = 0$, acarretando, respectivamente, $d\omega_2 = 0$ e $d\omega_1 = 0$. Portanto obteríamos $\omega_3(e_1) = \omega_3(e_2) = 0$, o que seria uma contradição com $d\omega_3 = \omega_1 \wedge \omega_2$.

Na Seção 3.1, apresentaremos os resultados de caracterização e classificação de equações hiperbólicas do tipo (3.1) que descrevem **s.p.e.** e, na Seção 3.2, analisaremos as imersões isométricas locais de métricas associadas às soluções de tais equações.

3.1 Classe de equações hiperbólicas que descrevem superfícies pseudoesféricas

Em 1990, M. Rabelo e K. Tenenblat [21] obtiveram uma classificação completa e explícita para equações hiperbólicas do tipo (3.1), sob a condição a priori de que $f_{21} = \eta$ (nesse caso dizemos também que a equação descreve uma η-**s.p.e.**). Nesta seção, apresentaremos esses resultados de forma breve, pois faremos uso deles na Seção 3.2.

A seguir apresentaremos um lema que caracteriza equações hiperbólicas do tipo (3.1).

Lema 3.1. [21] *Seja (3.1) uma equação hiperbólica descrevendo η-superfície pseudoesférica, com 1-formas associadas (2). Se f_{ij}, $(i,j) \in \{1,2,3\} \times \{1,2\}$ e F são funções diferenciáveis em um conjunto aberto e conexo U, então*

$$f_{11,z_0} = f_{31,z_0} = 0, \tag{3.8}$$

$$f_{12,z_1} = f_{22,z_1} = f_{32,z_1} = 0, \tag{3.9}$$

$$f^2_{11,z_1} + f^2_{31,z_1} \neq 0 \tag{3.10}$$

em U.

Em síntese, como U é aberto e conexo, segue-se de (3.8) que f_{11} e f_{31} são funções apenas de z_1 enquanto que (3.9) implica no fato de que f_{12}, f_{22} e f_{32} dependem apenas da variável z_o. A expressão, dada em (3.10), garante que a equação (3.1) é a condição de integrabilidade do problema linear associado.

Utilizando-se do lema de caracterização, Rabelo e Tenenblat mostraram que todas as equações do tipo (3.1) que descrevem η-**s.p.e.** são aquelas cujas formas estão apresentadas no próximo teorema.

Teorema 3.1. *Seja F uma função diferenciável, definida em um subconjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^2$. Uma equação $u_{tx} = F(u, u_x)$ descreve superfície pseudoesférica para $\eta \in P \subset \mathbb{R}$, onde P é um subconjunto denso de $\mathbb{R}$ e F independente de η se, e somente se, F satisfaz uma das seguintes opções:*

1. *F é independente de u_x e $F''(u) + \alpha F(u) = 0$, $U = \mathbb{R}^2$, $P = \mathbb{R}^*$ e α é uma constante não nula.*

2. *$F = \nu e^{\delta u}\sqrt{\beta + \gamma u_x^2}$, onde $U = \{(u, z) \in \mathbb{R}^2 : \beta + \gamma z^2 > 0\}$, $P = \mathbb{R}$, $\delta, \gamma, \beta, \mu$ são constantes reais, com δ, γ, μ não nulos e $\beta = 0$, em que $\gamma = 1$.*

3. *$F = \lambda u + \xi u_x + \tau$, onde $U = \mathbb{R}^2$, $P = \mathbb{R}^*$ e λ, ξ, μ são constantes reais.*

A demonstração do teorema de classificação (Teorema 3.1) faz-se uso de alguns lemas. Esses lemas fornecem os coeficientes f_{ij} das 1-formas $\omega_i = f_{i1}\,dx + f_{i2}\,dt$, $1 \leq i \leq 3$, para cada equação apresentada no Teorema 3.1.

Tendo em vista a importância desses coeficientes f_{ij} para o estudo que será tratado na próxima seção, a seguir apresentaremos esses lemas cujas demonstrações serão omitidas.

Lema 3.2. [21] *Os coeficientes f_{ij} das 1-formas (2) para a equação*

$$u_{tx} = F(u), \text{ onde } F''(u) + \alpha F(u) = 0, \tag{3.11}$$

$\alpha \in \mathbb{R}^*$ são dadas por

$$\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \\ f_{31} & f_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha(Bz_1 - AQ) & A\alpha(QF' - \eta F)/(Q^2\alpha + \eta^2) \\ \eta & (\eta F' + \alpha QF)/(Q^2\alpha + \eta^2) \\ -\alpha(Az_1 - BQ) & B\alpha(QF' - \eta F)/(Q^2\alpha + \eta^2) \end{bmatrix}, \tag{3.12}$$

onde $z_1 = u_x, A, B, Q \in \mathbb{R}$ *são tais que* $\alpha = \dfrac{1}{A^2 - B^2}$, $A^2 - B^2 \neq 0$ *e* $Q^2\alpha + \eta^2 \neq 0$ *e* $\eta \in \mathbb{R}^*$. *Em particular, se* $B = 0$ *e, consequentemente,* $A \neq 0$, *tem-se* $\alpha = \dfrac{1}{A^2} > 0$ *e*

$$\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \\ f_{31} & f_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha AQ & A\alpha(QF' - \eta F)/(Q^2\alpha + \eta^2) \\ \eta & (\eta F' + \alpha QF)/(Q^2\alpha + \eta^2) \\ -\alpha A z_1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.13}$$

Lema 3.3. [21] *Os coeficientes* f_{ij} *das 1-formas 2 para a equação*

$$u_{xt} = \nu e^{\delta u}\sqrt{\beta + \gamma u_x^2}, \quad \text{onde} \quad \delta, \gamma, \nu \in \mathbb{R}^* \quad e \quad \beta = 0, \tag{3.14}$$

são dados como segue:

1. *Se* $\gamma \neq 1$, *então*

$$\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \\ f_{31} & f_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta A\delta - (Bz_1 \mp A\sqrt{\Delta})\delta^2/(\gamma - 1) & \pm A\delta\nu e^{\delta z_0} \\ \eta & \pm \nu e^{\delta z_0} \\ \eta B\delta - (Az_1 \mp B\sqrt{\Delta})\delta^2/(\gamma - 1) & \pm B\delta\nu e^{\delta z_0} \end{bmatrix} \tag{3.15}$$

onde $z_0 = u$, $z_1 = u_x$, $\Delta = \beta + \gamma z_1^2 > 0$, $A^2 - B^2 = (\gamma - 1)/\delta^2$ *e* $\eta \in \mathbb{R}^*$

2. *Se* $\gamma = 1$, *então*

$$\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \\ f_{31} & f_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{A} + \delta^2 A\right) z_1 + \eta\delta A & \pm A\delta\nu e^{\delta z_0} \\ \eta & \pm \nu e^{\delta z_0} \\ \dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{A} + \delta^2 A\right) z_1 \pm \eta\delta A & A\delta\nu e^{\delta z_0} \end{bmatrix}, \tag{3.16}$$

onde $A, \eta \in \mathbb{R}^*$.

Lema 3.4. [21] *Os coeficientes* f_{ij} *das 1-formas (2) para a equação*

$$u_{xt} = \lambda u + \xi u_x + \tau, \ \lambda, \xi, \tau \in \mathbb{R}, \tag{3.17}$$

são dados como segue:

1. *Se $\lambda = \xi = \tau = 0$, então*
$$\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \\ f_{31} & f_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 & 0 \\ \eta & e^{z_0} \\ \eta & e^{z_0} \end{bmatrix}, \tag{3.18}$$
onde $z_0 = u$, $z_1 = u_x$ e $\eta \neq 0$.

2. *Se $\lambda \neq 0$, então*
$$\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \\ f_{31} & f_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pm\eta T z_1/\lambda & T z_0 + \tau T/\lambda \\ \eta & \lambda/\eta \mp \xi \\ \eta T z_1/\lambda & \pm T z_0 \pm \tau T/\lambda \end{bmatrix}, \tag{3.19}$$
onde $T, \eta \in \mathbb{R}^*$

3. *Se $\lambda = 0$ e $\xi^2 + \tau^2 \neq 0$, então*
$$\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \\ f_{31} & f_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int dz_1/F(z_1) & 1/\eta \\ \eta & 0 \\ \int dz_1/F(z_1) & 1/\eta \end{bmatrix}, \tag{3.20}$$
onde $\eta \in \mathbb{R}^*$.

Trata-se de um cálculo simples verificar que, em cada um dos Lemas 3.2-3.4, as equações de estrutura (3) valem se, e somente se, a correspondente equação hiperbólica está satisfeita.

Concentraremos nossos esforços na próxima seção por se tratar do tema central do presente capítulo.

3.2 Imersões isométricas locais e equações hiperbólicas de orem 2

Nesta seção, consideraremos os lemas de classificação apresentados na seção anterior e, como objetivo principal, demonstraremos o seguinte resultado:

Teorema 3.2. *Considere uma equação $u_{tx} = F(u, u_x)$, descrevendo η-superfície pseudoesférica como no Teorema 3.1. Assim, ocorre uma das possibilidades:*

1. *Se F é independente de u_x e satisfaz $F''(u) + \alpha F(u) = 0$, em que α é uma constante real positiva, então existe uma imersão isométrica local em $\mathbb{R}^3$ de uma superfície pseudoesférica, determinada por uma solução $u(x,t)$, para a qual os coeficientes da segunda forma*

fundamental dependem de um jato de ordem finita de u se, e somente se, eles dependem de um jato de ordem zero.

2. *Se $F = \lambda u + \xi u_x + \tau$, então existe uma imersão isométrica local em $\mathbb{R}^3$ de uma superfície pseudoesférica, determinada por uma solução $u(x,t)$, para a qual os coeficientes da segunda forma fundamental dependem de um jato de ordem finita de u se, e somente se, λ, ξ e τ não se anulam simultaneamente e os coeficientes são independentes de u, isto é, eles são funções universais de x e t.*

3. *Para as equações restantes, isto é, se F é independente de u_x e satisfaz $F''(u) + \alpha F(u) = 0$, em que α é uma constante real negativa, $F = \nu e^{\delta u}\sqrt{\beta + \gamma u_x^2}$, $F = 0$, então não existe uma imersão isométrica local em $\mathbb{R}^3$ de uma superfície pseudoesférica, determinada por uma solução $u(x,t)$, para a qual os coeficientes da segunda forma fundamental dependem de um jato de ordem finita de u.*

A prova do Teorema 3.2 requer como sustentáculo o Lema 3.1 e, além disso, é importante conhecer os coeficientes f_{ij} das 1-formas (2) explicitamente. É nesse quesito que os Lemas 3.2, 3.3 e 3.4 adquirem importância.

A seguir, apresentaremos um lema que nos informa como são as restrições impostas aos coeficientes da segunda forma fundamental quando existe uma imersão isométrica local de qualquer superfície pseudoesférica, determinada por uma solução $u(x,t)$ das equações hiperbólicas mencionadas nos Lemas 3.2, 3.3 e 3.4.

Lema 3.5. *Considere uma equação $u_{xt} = F(u, u_x)$, descrevendo η-superfície pseudoesférica, com 1-formas (2), onde as funções f_{ij} são dadas pelas equações dos Lemas 3.2, 3.3 e 3.4. Se existe uma imersão isométrica local de qualquer superfície pseudoesférica, determinada por uma solução $u(x,t)$, para a qual os coeficientes a, b e c das 1-formas ω_{13} e ω_{23} dependem de um jato de ordem finita de u, então:*

1. *$a \neq 0$ em qualquer conjunto aberto;*

2. *$c = 0$ em um conjunto aberto se, e somente se, $f_{11} = 0$ em U, isto é, F satisfaz $u_{tx} = F(u)$, onde $F''(u) + \alpha F(u) = 0$ e f_{ij} são dadas por (3.13), com $Q = 0$. Nesse caso, $\alpha = \dfrac{1}{A^2} > 0$,*

$$a = \pm\frac{2F'}{A\alpha F'}, \quad b = \pm 1 \quad \text{e} \quad c = 0.$$

Demonstração.

1. Suponha que $a = 0$, em um conjunto aberto. Daí, pela equação de Gauss, ficamos com $b = \pm 1$. Substituindo essas informações nas equações de Codazzi-Mainardi (1.15) e (1.16), obtemos

$$\begin{cases} \mp 2\Delta_{13} - c\Delta_{23} = 0 \\ \eta D_t c - f_{22} D_x c - c\Delta_{13} \pm 2\Delta_{23} = 0 \end{cases}. \tag{3.21}$$

Como $\Delta_{13}^2 + \Delta_{23}^2 \neq 0$, segue-se que o sistema (3.21) reduzir-se-á a

$$\begin{cases} c = \frac{\mp 2\Delta_{13}}{\Delta_{23}} \\ \eta D_t c - f_{22} D_x c - c\Delta_{13} \pm 2\Delta_{23} = 0 \end{cases}. \tag{3.22}$$

Como Δ_{13} e Δ_{23} são funções dadas em termos de funções f_{ij} e elas são funções que dependem de z_0 e z_1, segue-se que Δ_{13} e Δ_{23} são funções de z_0 e z_1, donde c é uma função que depende de z_0 e z_1, isto é, $c = c(z_0, c_{z_1})$. Assim, $D_t c = c_{z_0} w_1 + c_{z_1} z_{1,t}$ e $D_x c = c_{z_0} z_1 + c_{z_1} z_2$. Substituindo essas últimas expressões na segunda equação de (3.22), temos

$$\eta c_{z_0} w_1 + \eta c_{z_1} z_{1,t} - f_{22} c_{z_0} z_1 - f_{22} c_{z_1} z_2 - c\Delta_{13} \pm \Delta_{23} = 0. \tag{3.23}$$

Derivando (3.23) em relação a z_2, temos $f_{22} c_{z_1} = 0$; derivando a mesma expressão com relação a w_1, temos $\eta c_{z_0} = 0$. Como $\eta \neq 0$, obtemos $c_{z_0} = 0$. Por conseguinte, analisaremos dois casos, a saber:

Caso I. $c_{z_0} = 0$ e $f_{22} \neq 0$.

Se $f_{22} \neq 0$, então $c_{z_1} = 0$. Ora, como $c_{z_0} = 0$ e $c_{z_1} = 0$, segue-se que c é constante, donde o sistema (3.22) torna-se

$$\begin{cases} c = \dfrac{\mp 2\Delta_{13}}{\Delta_{23}} \\ -c\Delta_{13} \pm 2\Delta_{23} = 0 \end{cases}, \tag{3.24}$$

que equivale a

$$\begin{cases} -c\Delta_{13} \pm 2\Delta_{23} = 0 \\ \mp 2\Delta_{13} - c\Delta_{23} = 0 \end{cases}. \tag{3.25}$$

Note que (3.25) pode ser reescrito como

$$\begin{bmatrix} -c & \pm 2 \\ \mp 2 & -c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_{13} \\ \Delta_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Uma vez que

$$det \begin{bmatrix} -c & \pm 2 \\ \mp 2 & -c \end{bmatrix} = c^2 + 4 \neq 0,$$

segue-se que $\Delta_{13} = \Delta_{23} = 0$, o que é uma contradição.

Caso II. $c_{z_0} = 0$ e $f_{22} = 0$.

Se $f_{22} = 0$ em um conjunto aberto, então (3.20) implica que $\Delta_{13} = 0$ e $\Delta_{23} = 1$, donde o sistema (3.24) fornece uma contradição.

Pelos casos I e II, vemos que a não pode ser zero. Consequentemente, $a \neq 0$, como queríamos.

2. Suponha que $f_{11} = 0$ em um conjunto aberto. Note que isso só é possível se F satisfaz (3.11) e f_{ij} são dadas por (3.13), com $Q = 0$. Consequentemente, (3.13) se reduz a

$$\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \\ f_{31} & f_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha AF/\eta \\ \eta & F'/\eta \\ -\alpha A z_1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.26}$$

Ao substituirmos as expressões de (3.26) nas equações de Codazzi-Mainardi, obtemos

$$\begin{cases} \eta D_t b + \frac{\alpha AF}{\eta} D_x a - \frac{F'}{\eta} D_x b - 2b\Delta_{13} + (a-c)\Delta_{23} = 0, \\ \eta D_t c + \frac{\alpha AF}{\eta} D_x b - \frac{F'}{\eta} D_x c + (a-c)\Delta_{13} + 2b\Delta_{23} = 0, \end{cases} \tag{3.27}$$

onde a, b e c são funções de $x, t, z_0, z_1, \ldots, z_l, w_l$. Suponhamos $c \neq 0$. Daí, pela equação de Gauss, podemos escrever $a = \dfrac{b^2 - 1}{c}$. Como a, b e c dependem de um jato de ordem finita, se $l \geq 1$ é a ordem do jato, então as derivadas de ambas as equações em (3.27) com respeito a w_{l+1} fornecem $b_{w_l} = c_{w_l} = 0$ e, portanto, $a_{w_l} = 0$. Derivando sucessivamente (3.27) com respeito a $w_l, \ldots, w_1$, concluímos que a, b e c não dependem de $w_{l-1}, \ldots, w_0$ $(= z_0)$. Paralelamente a isso, derivando-se (3.27) sucessivamente com respeito a $z_{l+1}, \ldots, z_2$, concluímos que a, b e c não dependem de $z_l, \ldots, z_1$. Portanto a,

b e c dependem somente de x e t. Logo o sistema (3.27) se reduz a

$$\begin{cases} \eta b_t + \dfrac{\alpha AF}{\eta} a_x - \dfrac{F'}{\eta} b_x + 2b\Delta_{13} + (a-c)\Delta_{23} = 0 \\ \eta c_t + \dfrac{\alpha AF}{\eta} b_x - \dfrac{F'}{\eta} c_x + (a-c)\Delta_{13} + 2b\Delta_{23} = 0 \end{cases}. \tag{3.28}$$

Substituindo as funções f_{ij} de (3.26) nas expressões que regem Δ_{13} e Δ_{23} (vide (3.6)), ficamos com

$$\Delta_{13} = \frac{\alpha^2 A^2 F}{\eta} z_1, \quad \Delta_{23} = \frac{\alpha A F'}{\eta} z_1. \tag{3.29}$$

Substituindo as expressões de (3.29) em (3.28), obtemos

$$\begin{cases} \eta b_t + \dfrac{\alpha AF}{\eta} a_x - \dfrac{F'}{\eta} b_x + 2b\dfrac{\alpha^2 A^2 F}{\eta} z_1 + (a-c)\dfrac{\alpha A F'}{\eta} z_1 = 0 \\ \eta c_t + \dfrac{\alpha AF}{\eta} b_x - \dfrac{F'}{\eta} c_x + (a-c)\dfrac{\alpha^2 A^2 F}{\eta} z_1 + 2b\dfrac{\alpha A F'}{\eta} z_1 = 0 \end{cases}. \tag{3.30}$$

Derivando (3.30) com relação a z_1, obtemos

$$\begin{cases} 2b\dfrac{\alpha^2 A^2 F}{\eta} + (a-c)\dfrac{\alpha A F'}{\eta} = 0 \\ (a-c)\dfrac{\alpha^2 A^2 F}{\eta} + 2b\dfrac{\alpha A F'}{\eta} = 0 \end{cases}. \tag{3.31}$$

Multiplicando as equações do sistema (3.31), membro a membro por $\dfrac{\eta}{\alpha A}$, obtemos

$$\begin{cases} 2b\alpha AF + (a-c)F' = 0 \\ (a-c)\alpha AF + 2bF' = 0 \end{cases}, \tag{3.32}$$

o que equivale a

$$\begin{bmatrix} 2b & a-c \\ a-c & 2b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha AF \\ F' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ora, como $\begin{bmatrix} \alpha AF \\ F' \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, temos, forçosamente $4b^2 - (a-c)^2 = 0$, donde

$$a - c = \pm 2b. \tag{3.33}$$

Daí podemos reescrever (3.32) como

$$\begin{cases} 2b\alpha AF \pm 2bAF' = 0 \\ \pm 2\alpha AF + 2b\alpha AF' = 0 \end{cases}. \tag{3.34}$$

Por fim, substituindo $\alpha = \dfrac{1}{A^2}$ em (3.34), concluímos que

$$\begin{cases} b(F \pm AF') = 0 \\ b(\pm F + AF') = 0 \end{cases},$$

donde $F = -\delta AF'$, com $\delta = \mp 1$ ou $b = 0$. Caso $b = 0$, a equação de Gauss (1.19) implica em

$$ac = -1, \tag{3.35}$$

e (3.33) se reduz a $a = c$, donde por (3.35), concluímos que $a^2 = -1$, o que é uma contradição.

Por outro lado, se

$$F = -\delta AF', \tag{3.36}$$

então, derivando essa última expressão com respeito a z_0, temos

$$F' = -\delta AF''. \tag{3.37}$$

De (3.36), temos $F' = -\dfrac{F}{\delta A}$. Substituindo essa última expressão em (3.37), obtemos

$$F'' - \frac{1}{A^2}F = 0. \tag{3.38}$$

Comprando (3.38) e (3.11), chegamos a $\alpha A^2 = -1$, o que é novamente uma contradição, pois $\alpha = \dfrac{1}{A^2}$.

Reciprocamente, se $c = 0$ em um conjunto aberto, então segue da equação de Gauss (1.19) que $b = \pm 1$ e, por conseguinte, as equações de Codazzi-Mainardi (1.15) e (1.16) se reduzem ao sistema

$$\begin{cases} f_{11}D_t a - f_{12}D_x a \mp 2\Delta_{13} + a\Delta_{23} = 0 \\ a\Delta_{13} \pm 2\Delta_{23} = 0 \end{cases}. \tag{3.39}$$

Como $\Delta_{13}^2 + \Delta_{23}^2 \neq 0$, segue-se que a segunda equação de (3.39) se reduz a $a = \mp 2\dfrac{\Delta_{23}}{\Delta_{13}}$. Assim, a depende de z_0 e z_1, pois Δ_{13} e Δ_{23} dependem das funções f_{ij}, que por sua vez, dependem de z_0 e z_1. Como consequência, temos $D_t a = a_{z_0} z_{0,t} + a_{z_1} z_{1,t}$, que pelo uso de (3.1), (3.2) e (3.3), torna-se $D_t a = a_{z_0} w_1 + a_{z_1} F$ e, por outro lado, $D_x a = a_{z_0} z_1 + a_{z_1} z_2$. Substituindo as expressões de $D_t a$ e $D_x a$ na primeira equação do sistema (3.39), obtemos

$$f_{11}(a_{z_0} w_1 + a_{z_1} F) - f_{12}(a_{z_0} z_1 + a_{z_1} z_2) \mp 2\Delta_{13} + a\Delta_{23} = 0. \tag{3.40}$$

Se derivarmos a expressão (3.40) com relação a w_1, obtemos $f_{11} a_{z_0} = 0$; se derivarmos em relação a w_2, obtemos $f_{12} a_{z_1} = 0$.

Uma vez que $\Delta_{12} \neq 0$ não se pode ter $f_{11} = 0$ e $f_{12} = 0$. Se $f_{11} \neq 0$ e $f_{12} \neq 0$, então como $f_{11} a_{z_0} = 0$ e $f_{12} a_{z_1} = 0$, concluímos que a é constante, e a expressão (3.40) se torna apenas

$$\mp 2\Delta_{13} + a\Delta_{23} = 0.$$

Por conseguinte, o sistema (3.39) se torna

$$\begin{cases} \mp 2\Delta_{13} + a\Delta_{23} = 0 \\ a\Delta_{13} - 2\Delta_{23} = 0 \end{cases},$$

o que equivale a

$$\begin{bmatrix} \mp 2 & a \\ \mp a & \pm 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_{13} \\ \Delta_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Como o determinante da primeira matriz é diferente de zero, segue-se que $\Delta_{13} = \Delta_{23} = 0$. Mas isso é uma contradição com $\Delta_{13}^2 + \Delta_{23}^2 \neq 0$.

Se $f_{12} = 0$ em um conjunto aberto, então as funções f_{ij} são dadas por (3.12), com $A = 0$, $B \neq 0$ ou (3.15), com $A = 0$, $B \neq 0$ ou (3.18). Como $f_{11} \neq 0$, segue-se de $f_{11} a_{z_0} = 0$ que $a_{z_0} = 0$ e, portanto, (3.40) se torna

$$f_{11} a_{z_1} F \mp 2\Delta_{13} + a\Delta_{23} = 0. \tag{3.41}$$

Se as funções f_{ij} são dadas por (3.12), com $A = 0$, $B \neq 0$, então

$$\Delta_{13} = \frac{-\alpha^2 B^2 (QF' - \eta F)}{Q^2\alpha + \eta^2} z_1, \quad \Delta_{23} = -\alpha B F. \tag{3.42}$$

Substituindo as expressões de (3.42) em (3.41), obtemos

$$f_{11} a_{z_1} F \pm 2 \frac{\alpha(QF' - \eta F)}{Q^2\alpha + \eta^2} z_1 - a\alpha B F = 0. \tag{3.43}$$

Diferenciando (3.43) com respeito a z_1 duas vezes, chegamos a uma contradição. Se as funções f_{ij} são dadas por (3.15), com $A = 0$, $B \neq 0$, obtemos analogamente $\Delta_{13} = \mp B\mu\delta^2 z_1 e^{\delta z_0}$, $\Delta_{23} = \pm\mu\delta z_1 e^{\delta z_0}$ e $a = \pm\dfrac{2}{B\delta}$. Substituindo essas informações em (3.41), obtemos

$$\mp 2\Delta_{13} + a\Delta_{23} = 0,$$

o que é uma contradição com a segunda equação de (3.39).

Por fim, se as funções f_{ij} são dadas por (3.18), então $\Delta_{23} = 0$ e, consequentemente, segue-se do fato de que $\Delta_{12} \neq 0$ e $\Delta_{13}^2 + \Delta_{23}^2 \neq 0$ que $a = 0$, o que é uma contradição.

Concluímos que, se $c = 0$ em um conjunto aberto, então $f_{11} = 0$, ou seja, f_{ij} são dados por (3.13), com $Q = 0$. Portanto $\Delta_{13} = -\dfrac{A^2\alpha^2 F(u) z_1}{\eta}$ e $\Delta_{23} = \dfrac{A\alpha F'(u) z_1}{\eta}$ e, consequentemente, a segunda equação do sistema (3.39) implica $a = \pm 2\dfrac{F'}{A\alpha F}$. Além disso, (3.40) é uma identidade, pois $A^2\alpha = 1$.

□

Agora, no que segue, faremos algumas considerações a respeito de equações hiperbólicas dada como em (3.1), descrevendo uma superfície pseudoesférica e satisfazendo os Lemas (3.2-3.4). Com efeito, existe uma imersão isométrica local em $\mathbb{R}^3$ de qualquer superfície pseudoesférica, determinada por uma solução u, para a qual os coeficientes da segunda forma fundamental a, b e c dependem de $x, t, z_0, z_1, w_1 \cdots, z_l, w_l$ se, e somente se, valem (1.15), (1.16) e (1.19). Por conseguinte, ao substituirmos as equações (3.4) e (3.5) nas equações de Codazzi-Mainardi (1.15) e (1.16), obtemos

$$\begin{aligned} & f_{11}a_t + \eta b_t + \sum_{i=0}^{l}(f_{11}a_{w_i} + \eta b_{w_i})w_{i+1} + \sum_{i=1}^{l}(f_{11}a_{z_i} + \eta b_{z_i})\frac{\partial^{i-1}F}{\partial x^{i-1}} - (f_{12}a_x + f_{22}b_x) \\ & - \sum_{i=0}^{l}(f_{12}a_{z_i} + f_{22}b_{z_i})z_{i+1} - \sum_{i=1}^{l}(f_{12}a_{w_i} + f_{22}b_{w_i})\frac{\partial^{i-1}F}{\partial x^{i-1}} - 2b\Delta_{13} + (a-c)\Delta_{23} = 0, \end{aligned} \tag{3.44}$$

$$\begin{aligned} & f_{11}b_t + \eta c_t + \sum_{i=0}^{l}(f_{11}b_{w_i} + \eta c_{w_i})w_{i+1} + \sum_{i=1}^{l}(f_{11}b_{z_i} + \eta c_{z_i})\frac{\partial^{i-1}F}{\partial x^{i-1}} - (f_{12}b_x + f_{22}c_x) \\ & - \sum_{i=0}^{l}(f_{12}b_{z_i} + f_{22}c_{z_i})z_{i+1} - \sum_{i=1}^{l}(f_{12}b_{w_i} + f_{22}c_{w_i})\frac{\partial^{i-1}F}{\partial x^{i-1}} + (a-c)\Delta_{13} + 2b\Delta_{23} = 0. \end{aligned} \tag{3.45}$$

Diferenciando (3.44) e (3.45) com respeito a w_{l+1}, ficamos com

$$f_{11}a_{w_l} + \eta b_{w_l} = 0, \quad f_{11}b_{w_l} + \eta c_{w_l} = 0. \tag{3.46}$$

Além disso, desde que $b \neq 0$, decorre-se de

$$ca_{w_l} + ac_{w_l} - 2bb_{w_l} = 0,$$

que

$$b_{w_l} = \frac{ca_{w_l} + ac_{w_l}}{2b}. \tag{3.47}$$

Substituindo (3.47) nas equações de (3.45), obtemos

$$\left[c + \left(\frac{f_{11}}{\eta}\right)^2 a + 2\frac{f_{11}b}{\eta}\right] a_{w_l} = 0. \tag{3.48}$$

No Lema 3.6 e no Lema 3.7, consideramos os casos em que $c + \left(\frac{f_{11}}{\eta}\right)^2 a + 2\frac{f_{11}b}{\eta} = 0$ e $c + \left(\frac{f_{11}}{\eta}\right)^2 a + 2\frac{f_{11}b}{\eta} \neq 0$, respectivamente.

Lema 3.6. *Considere uma equação $u_{xt} = F(u, u_x)$, descrevendo η-superfície pseudoesférica, com 1-formas (2), onde as funções f_{ij} são dadas por (3.12-3.20). Suponha que exista uma imersão isométrica local de uma superfície pseudoesférica, determinada por uma solução $u(x,t)$, para a qual os coeficientes da segunda forma fundamental dependam de um jato de ordem finita de u. Se $c + \left(\frac{f_{11}}{\eta}\right)^2 a + 2\frac{f_{11}b}{\eta} = 0$ em um conjunto aberto não vazio, então:*

1. *Para toda equação com as funções f_{ij} dadas como em (3.13), os coeficientes da segunda forma fundamental são dados por*

$$\begin{aligned} a &= \pm\frac{2\eta}{A(Q^2\alpha + \eta^2)}\left(\frac{\eta F'}{\alpha F} + Q\right), \quad b = \pm\frac{1}{Q^2\alpha + \eta^2}\left(\frac{2\eta Q F'}{F} + Q^2\alpha - \eta^2\right) \quad e \\ c &= \pm\frac{2QA\alpha}{Q^2\alpha^2 + \eta^2}\left(Q\frac{F'}{F} - \eta\right), \end{aligned} \tag{3.49}$$

   com $\alpha = \dfrac{1}{A^2}$. Em particular, quando $Q = 0$, a, b e c são dados por $a = \pm\dfrac{2F'}{\alpha AF}$, $b = \pm 1$ e $c = 0$.

2. *Para todas equações, exceto aquelas consideradas em (3.6), as equações de Codazzi-Mainardi e Gauss formam um sistema inconsistente.*

Demonstração.

Supondo que $c + \left(\frac{f_{11}}{\eta}\right)^2 a + 2\frac{f_{11}b}{\eta} = 0$ em um conjunto aberto não vazio, temos

$$c = -\left(\frac{f_{11}}{\eta}\right)^2 a - 2\frac{f_{11}b}{\eta}.$$

Substituindo essa informação na equação de Gauss (1.19), obtemos

$$\left(\frac{f_{11}a}{\eta}+b\right)^2=1,$$

donde

$$b=\pm 1-\frac{f_{11}a}{\eta} \tag{3.50}$$

e

$$c=\left(\frac{f_{11}}{\eta}\right)^2 a\mp 2\frac{f_{11}}{\eta}. \tag{3.51}$$

Consequentemente, temos

$$\begin{aligned}
&f_{11}D_ta+\eta D_tb=-af_{11,z_1}F,\\
&f_{11}D_tb+\eta D_tc=\left(a\tfrac{f_{11}}{\eta}\mp 2\right)f_{11,z_1}F,\\
&f_{12}D_xa+f_{22}D_xb=-\tfrac{\Delta_{12}}{\eta}D_xa-\tfrac{af_{22}f_{11,z_1}}{\eta}z_2,\\
&f_{12}D_xb+f_{22}D_xc=\tfrac{f_{11}\Delta_{12}}{\eta^2}D_xa+\frac{a\Delta_{12}f_{11,z_1}}{\eta^2}z_2+\frac{af_{22}f_{11}f_{11,z_1}}{\eta^2}z_2\mp 2\tfrac{f_{22}f_{11,z_1}}{\eta}z_2.
\end{aligned} \tag{3.52}$$

Substituindo as expressões de (3.52) nas equações de Codazzi-Mainardi (1.15) e (1.16), obtemos, respectivamente,

$$-af_{11,z_1}F+\frac{\Delta_{12}}{\eta}D_xa+\frac{af_{22}f_{11,z_1}}{\eta}z_2\mp 2\Delta_{13}+2\Delta_{13}\frac{f_{11}a}{\eta}+\left[1-\left(\frac{f_{11}}{\eta}\right)^2\right]a\Delta_{23}\pm 2\frac{f_{11}}{\eta}\Delta_{23}=0, \tag{3.53}$$

$$\begin{aligned}
&a\frac{f_{11}f_{11,z_1}}{\eta}F\mp 2f_{11,z_1}F-\frac{f_{11}\Delta_{12}}{\eta^2}D_xa-\frac{a\Delta_{12}f_{11,z_1}}{\eta^2}z_2-\frac{af_{22}f_{11}f_{11,z_1}}{\eta^2}z_2\pm 2\frac{f_{22}f_{11,z_1}}{\eta}z_2,\\
&\qquad+\left[1-\left(\frac{f_{11}}{\eta}\right)^2\right]a\Delta_{23}\pm 2\frac{f_{11}}{\eta}\Delta_{13}\pm 2\frac{f_{11}}{\eta}\Delta_{23}-2\frac{af_{11}}{\eta}\Delta_{23}=0,
\end{aligned} \tag{3.54}$$

que equivalem, respectivamente, a

$$-af_{11,z_1}F+\frac{\Delta_{12}}{\eta}\sum_{i=0}^{l}a_{z_i}z_{i+1}+\frac{af_{22}f_{11,z_1}}{\eta}z_2\mp 2\Delta_{13}+2\Delta_{13}\frac{f_{11}a}{\eta}+\left[1-\left(\frac{f_{11}}{\eta}\right)^2\right]a\Delta_{23}\pm 2\frac{f_{11}}{\eta}\Delta_{23}=0, \tag{3.55}$$

$$a\frac{f_{11}f_{11,z_1}}{\eta}F \mp 2f_{11,z_1}F - \frac{f_{11}\Delta_{12}}{\eta^2}\sum_{i=0}^{l} a_{z_i}z_{i+1} - \frac{a\Delta_{12}f_{11,z_1}}{\eta^2}z_2 - \frac{af_{22}f_{11}f_{11,z_1}}{\eta^2}z_2 \pm 2\frac{f_{22}f_{11,z_1}}{\eta}z_2$$
$$+\left[1-\left(\frac{f_{11}}{\eta}\right)^2\right]a\Delta_{23} \pm 2\frac{f_{11}}{\eta}\Delta_{13} \pm 2\frac{f_{11}}{\eta}\Delta_{23} - 2\frac{af_{11}}{\eta}\Delta_{23} = 0. \tag{3.56}$$

Portanto se $l \geq 2$, então derivando (3.55) com relação a z_{l+1}, teremos $-\frac{f_{11}}{\eta^2}\Delta_{12}a_{z_l} = 0$, donde $a_{z_l} = 0$. Daí concluímos que fazendo-se a derivação sucessiva de (3.55) com relação a $z_l, \cdots, z_3$, ficamos com $a_{z_l} = a_{z_{l-1}} = \cdots = a_2 = 0$.

Se $l \geq 1$, então após multiplicar (3.55) e (3.56) por η e η^2, respectivamente, ficaremos com a seguinte configuração:

$$-a\eta f_{11,z_1}F + \Delta_{12}\sum_{i=0}^{l} a_{z_i}z_{i+1} + af_{22}f_{11,z_1}z_2 \mp 2\eta\Delta_{13} + 2\Delta_{13}f_{11}a + \left[\eta - \frac{f_{11}^2}{\eta}\right]a\Delta_{23} \pm 2f_{11}\Delta_{23} = 0, \tag{3.57}$$

$$a\eta f_{11}f_{11,z_1}F \mp 2\eta^2 f_{11,z_1}F - f_{11}\Delta_{12}\sum_{i=0}^{l} a_{z_i}z_{i+1} - a\Delta_{12}f_{11,z_1}z_2 - af_{22}f_{11}f_{11,z_1}z_2 \pm 2\eta f_{22}f_{11,z_1}z_2$$
$$+\left[\eta - \frac{f_{11}^2}{\eta}\right]a\Delta_{23} \pm 2\eta f_{11}\Delta_{13} \pm 2\eta f_{11}\Delta_{23} - 2\eta a f_{11}\Delta_{23} = 0. \tag{3.58}$$

Diferenciando (3.57) e (3.58) em relação a z_2, obtemos

$$\begin{cases} \Delta_{12}a_{z_1} + af_{22}f_{11,z_1} = 0 \\ -f_{11}\Delta_{12}a_{z_1} - \Delta_{12}af_{11,z_1} - af_{22}f_{11}f_{11,z_1} \pm 2\eta f_{22}f_{11,z_1} = 0 \end{cases}. \tag{3.59}$$

A segunda equação de (3.59) pode ser reescrita como

$$-f_{11}(\Delta_{12}a_{z_1} + af_{22}f_{11,z_1}) + (-\Delta_{12}a \pm 2\eta f_{22})f_{11,z_1} = 0. \tag{3.60}$$

Substituindo a primeira equação do sistema (3.59) em (3.60), ficamos com $(\Delta_{12}a \mp 2\eta f_{22})f_{11,z_1} = 0$. Com isso, o sistema (3.59) pode ser reescrito como

$$\begin{cases} \Delta_{12}a_{z_1} + af_{22}f_{11,z_1} = 0 \\ (\Delta_{12}a \mp 2\eta f_{22})f_{11,z_1} = 0 \end{cases}. \tag{3.61}$$

Com essas observações precedentes, estamos aptos a demonstrar, de fato, o estipulado nos dois itens do Lema 3.6. A seguir, apresentamos os argumentos que validam a veracidade dos itens supracitados:

1. Se considerarmos uma equação do tipo (3.11), com f_{ij} dadas por (3.13), temos $f_{11,z_1} = 0$. Consequentemente, a equação (3.61) é satisfeita e, portanto, por (3.59), temos $a_{z_1} = 0$. Assim, (3.55) e (3.56) se reduzem a

$$\frac{\Delta_{12}}{\eta} D_x a + 2\left(a\frac{f_{11}}{\eta} \mp 1\right)\Delta_{13} + \left[\left(1 - \frac{f_{11}^2}{\eta^2}\right) a \pm 2\frac{f_{11}}{\eta}\right]\Delta_{23} = 0, \tag{3.62}$$

$$-f_{11}\frac{\Delta_{12}}{\eta^2} D_x a + \left[\left(1 - \frac{f_{11}^2}{\eta^2}\right) a \pm 2\frac{f_{11}}{\eta}\right]\Delta_{13} - 2\left(\frac{f_{11}}{\eta} \mp 1\right)\Delta_{23} = 0. \tag{3.63}$$

Multiplicando a equação (3.62) por $\dfrac{f_{11}}{\eta}$, obtemos

$$\frac{f_{11}\Delta_{12}}{\eta^2} D_x a + 2\left(a\frac{f_{11}^2}{\eta^2} \mp \frac{f_{11}}{\eta}\right)\Delta_{13} + \left[\left(\frac{f_{11}}{\eta} - \frac{f_{11}^3}{\eta^3}\right) a \pm 2\frac{f_{11}^2}{\eta^2}\right]\Delta_{23} = 0. \tag{3.64}$$

Somando (3.63) com (3.64), temos

$$\left(1 + \frac{f_{11}^2}{\eta^2}\right)\left[a\Delta_{13} - \left(\frac{f_{11}a}{\eta} \mp 2\right)\Delta_{23}\right] = 0.$$

Como $1 + \dfrac{f_{11}^2}{\eta^2} \neq 0$, segue-se que $a\Delta_{13} - \left(\dfrac{f_{11}a}{\eta} \mp 2\right)\Delta_{23} = 0$, ou seja,

$$a = \frac{-2\delta\eta\Delta_{23}}{\eta\Delta_{13} - f_{11}\Delta_{23}}, \quad \text{com} \quad \delta = \pm 1. \tag{3.65}$$

Daí se considerarmos as funções f_{ij} como em (3.13), então após substituí-las nas expressões que regem Δ_{12}, Δ_{13} e Δ_{23} (vide (3.6)), teremos

$$\Delta_{12} = \alpha AF, \quad \Delta_{13} = \frac{\alpha(QF' - \eta F)}{Q^2\alpha + \eta^2} z_1 \quad \text{e} \quad \Delta_{23} = \frac{\alpha A(\eta F' + \alpha QF)}{Q^2\alpha + \eta^2} z_1.$$

Além disso, observando-se que $\eta\Delta_{13} - f_{11}\Delta_{23} = f_{31}\Delta_{12}$, podemos reescrever (3.65) simplesmente como

$$a = \frac{-2\delta\eta\Delta_{23}}{f_{31}\Delta_{12}}, \quad \text{com} \quad \delta = \pm 1. \tag{3.66}$$

Por conseguinte, substituindo as expressões que regem Δ_{12} e Δ_{23} em (3.66), obtemos

$$a = \pm\frac{2\eta}{\alpha Q^2 + \eta^2}\left(\eta A\frac{F'}{F} + \frac{Q}{A}\right). \tag{3.67}$$

Por fim, substituindo (3.67) em (3.50) e (3.51), obtemos

$$b = \pm\frac{1}{Q^2\alpha + \eta^2}\left(\frac{2\eta QF'}{F} + Q^2\alpha - \eta^2\right) \quad \text{e} \quad c = \pm\frac{2QA\alpha}{Q^2\alpha^2 + \eta^2}\left(Q\frac{F'}{F} - \eta\right).$$

2. Para toda equação, salvo aquelas consideradas em (3.2), temos $f_{11,z_1} \neq 0$. Daí caso $l = 0$, então diferenciando (3.53) e (3.54), com respeito a z_2, teremos

$$\frac{af_{22}f_{11,z_1}}{\eta} = 0 \text{ e } -\frac{\Delta_{12}af_{11,z_1}}{\eta^2} - \frac{af_{22}f_{11}f_{11,z_1}}{\eta^2} \pm 2\frac{f_{22}f_{11,z_1}}{\eta} = 0.$$

Uma vez que $\eta \neq 0$, podemos reescrever essas últimas equações como simplesmente

$$af_{22}f_{11,z_1} = 0, \quad af_{22}f_{11,z_1} + \Delta_{12}af_{11,z_1} \mp 2\eta f_{22}f_{11,z_1} = 0. \tag{3.68}$$

Se existe uma imersão isométrica local de qualquer superfície pseudoesférica, determinada por uma solução $u(x,t)$, para a qual os coeficientes a, b e c das 1-formas ω_{13} e ω_{23} dependem de um jato de ordem finita de u, segue do Lema 3.5 que $a \neq 0$, donde a primeira equação de (3.68) se reduz a $f_{22}f_{11,z_1} = 0$. Daí, substituindo essa expressão na segunda equação de (3.68), obtemos $\Delta_{12}af_{11,z_1} = 0$, mas como já vimos, $a \neq 0$. Como consequência disso, temos $\Delta_{12}f_{11,z_1} = 0$. Por conseguinte, teremos $f_{11,z_1} = 0$, o que é uma contradição. Logo $l \geq 1$.

Se $f_{22} = 0$, então vale a equação (3.17) com as funções f_{ij} dadas por (3.20). Substituindo essas funções f_{ij} no sistema (3.61), obteremos $a = 0$, contradizendo o Lema 3.5. Com isso, as equações de Codazzi-Mainardi (1.15) e (1.16) e Gauss (1.19) formam um sistema inconsistente.

Se $f_{22} \neq 0$, então todas as equações, excetuando-se as de (3.17), com $\lambda = 0$ e $\xi^2 + \tau^2 \neq 0$, são satisfeitas. Com isso, dividindo a segunda equação do sistema (3.61) por f_{11,z_1}, obtemos $\Delta_{12}a \mp 2\eta f_{22} = 0$. Ao derivarmos essa última expressão com relação a z_1, obteremos $\Delta_{12}a_{z_1} + a\Delta_{12,z_1} = 0$ e, além disso, segue de (3.6) que $\Delta_{12,z_1} = f_{22}f_{11,z_1}$. Pondo essas considerações no sistema (3.61), obtemos

$$a = \pm 2\eta\frac{f_{22}}{\Delta_{12}},$$

o que significa dizer que $a_{w_1} = a_x = a_t = 0$, ou seja, a é uma função de z_0 e z_1 apenas. Com isso, as equações (3.53) e (3.54) equivalem às equações

$$-af_{11,z_1}F + \frac{\Delta_{12}}{\eta}a_{z_0}z_1 + \frac{af_{22}f_{11,z_1}}{\eta}z_2 \mp 2\Delta_{13} + 2\Delta_{13}\frac{f_{11}a}{\eta} + \left[1 - \left(\frac{f_{11}}{\eta}\right)^2\right]a\Delta_{23} \pm 2\frac{f_{11}}{\eta}\Delta_{23} = 0,$$

$$a\frac{f_{11}f_{11,z_1}}{\eta}F \mp 2f_{11,z_1}F - f_{11}\frac{\Delta_{12}}{\eta^2}a_{z_0}z_1 + \left[1 - \left(\frac{f_{11}}{\eta}\right)^2\right]a\Delta_{13} \pm 2\frac{f_{11}}{\eta}\Delta_{13} \pm 2\Delta_{23} - 2\frac{af_{11}}{\eta}\Delta_{23} = 0,$$

que são equivalentes a

$$af_{11,z_1}F - \frac{\Delta_{12}}{\eta}a_{z_0}z_1 - \Delta_{13}\frac{f_{11}a}{\eta} \pm 2\Delta_{13} - a\Delta_{23} = \frac{f_{11}}{\eta}\left(af_{31}\frac{\Delta_{12}}{\eta} \pm 2\Delta_{23}\right), \tag{3.69}$$

$$\pm 2f_{11,z_1}F = \frac{f_{11}}{\eta}\left[af_{11,z_1}F - \frac{\Delta_{12}}{\eta}a_{z_0}z_1 - \frac{f_{11}}{\eta}a\Delta_{13} \pm 2\Delta_{13} - a\Delta_{23}\right] + af_{31}\frac{\Delta_{12}}{\eta} \pm 2\Delta_{23}. \tag{3.70}$$

Substituindo (3.69) em (3.70), obtemos $F = \dfrac{(f_{11}^2 + \eta^2) f_{32}}{\eta f_{11,z_1}}$, o que contradiz a equação (3.11), com funções f_{ij} e $B \neq 0$, dadas por (3.12) e contradiz as equações (3.14) e (3.17), com funções f_{ij}, dadas por (3.15)-(3.20). Com isso, concluímos a prova do lema.

□

Daqui em diante, a fim de tornar o texto menos saturado, omitiremos alguns passos relativos a contas, principalmente contas análogas as que já foram feitas anteriormente. No que segue, apresentaremos um lema que estabelece de um certo modo um critério de universalidade para os coeficientes da segunda forma fundamental sempre que existe uma imersão isométrica local de uma superfície pseudoesférica, determinada por uma solução de uma equação do tipo (3.1), para a qual os coeficientes da segunda forma fundamental dependem de um jato de ordem finita.

Lema 3.7. *Considere uma equação $u_{xt} = F(u, u_x)$, descrevendo η-superfície pseudoesférica, com 1-formas (2), onde as funções f_{ij} são dadas por (3.12-3.20). Suponha que exista uma imersão isométrica local de uma superfície pseudoesférica, determinada por uma solução $u(x,t)$, para a qual os coeficientes da segunda forma fundamental dependam de um jato de ordem finita de u. Se*

$$c + \left(\frac{f_{11}}{\eta}\right)^2 a + 2\frac{f_{11} b}{\eta} \neq 0 \tag{3.71}$$

vale, então a, b e c são funções universais de x e t.

Demonstração.

Suponha a validade de (3.71). Se existe uma imersão isométrica local de uma superfície pseudoesférica, determinada por uma solução $u(x,t)$, para a qual os coeficientes da segunda forma fundamental dependem de um jato de ordem finita de u, por hipótese, vale o Lema 3.5. Consequentemente, devemos ter obrigatoriamente $c \neq 0$, pois se fosse $c = 0$, teríamos, pelo Lema 3.5, $f_{11} = 0$ e, por conseguinte, a expressão (3.71) seria infringida. Portanto como $c \neq 0$, segue do Lema 3.5 que $f_{11} \neq 0$. Em síntese, c e f_{11} devem ser simultaneamente distintos de zero. Além disso, de (3.48), temos $a_{w_l} = 0$, donde por (3.46), temos $b_{w_l} = 0$ e $c_{w_l} = 0$.

Se $l = 0$, então a, b e c são funções de x e t e, portanto, universal. Se $l \geq 1$, então diferenciando-se (3.44), (3.45) e (1.19) sucessivamente com respeito a $w_l, \cdots, w_1$, teremos $a_{w_i} = b_{w_i} = c_{w_i} = 0$, $i = 0, 1, \cdots, l$. Com isso a, b e c são funções que não dependem de z_0. Portanto a, b e c são funções de $x, t, z_1, \cdots, z_l$. Diferenciando (3.44) e (3.45) com relação a z_{l+l}, obtemos

$$f_{12} a_{z_l} + f_{22} b_{z_l} = 0, \quad f_{12} b_{z_l} + f_{22} c_{z_l} = 0. \tag{3.72}$$

Portanto diferenciando a equação de Gauss (1.19), com respeito a z_l, temos

$$c a_{z_l} + a c_{z_l} - 2 b b_{z_l} = 0. \tag{3.73}$$

Se $f_{22} = 0$, então vale a equação (3.17) com as funções f_{ij} dadas por (3.20). Como $f_{12} \neq 0$, (3.72) implica $a_{z_l} = b_{z_l} = 0$. Substituindo essas informações em (3.73), obtemos $ac_{z_l} = 0$. Daí, usando o Lema 3.5, temos $a \neq 0$, donde $c_{z_l} = 0$. Diferenciando-se (3.44), (3.45) e (1.19) sucessivamente com respeito a $z_l, \cdots, z_2$, teremos $a_{z_i} = b_{z_i} = 0$ e, consequentemente, $c_{z_i} = 0$, $i = 1, \cdots, l$. Assim, a, b e c são funções de x e t.

Se $f_{22} \neq 0$, então (3.72) implica em

$$b_{z_l} = -\frac{f_{12}}{f_{22}} a_{z_l}, \quad c_{z_l} = \frac{f_{12}^2}{f_{22}^2} a_{z_l}. \tag{3.74}$$

Daí, substituindo as expressões de (3.74) em (3.73), obteremos

$$\left[c + \left(\frac{f_{12}}{f_{22}} \right)^2 a + 2\frac{f_{12}}{f_{22}} b \right] a_{z_l} = 0.$$

Se

$$c + \left(\frac{f_{12}}{f_{22}} \right)^2 a + 2\frac{f_{12}}{f_{22}} b \neq 0,$$

então $a_{z_l} = 0$, donde por (3.74), $b_{z_l} = 0$ e $c_{z_l} = 0$. Diferenciando-se (3.44) e (3.45) sucessivamente com respeito a $z_l, \cdots, z_2$, teremos $a_{z_i} = b_{z_i} = 0$ e, consequentemente, $c_{z_i} = 0$, $i = 1, \cdots, l$. Assim, a, b e c são funções de x e t apenas.

Agora, se

$$c + \left(\frac{f_{12}}{f_{22}} \right)^2 a + 2\frac{f_{12}}{f_{22}} b = 0, \tag{3.75}$$

em um conjunto aberto não vazio, então segue do Lema 3.5 e de (3.71) que $c \neq 0$ e, consequentemente, $f_{12} \neq 0$. Além disso, segue-se de (3.75) e da equação de Gauss (1.19) que

$$b = \pm 1 - \frac{f_{12}}{f_{22}} a, \qquad c = \left(\frac{f_{12}}{f_{22}} \right)^2 a \mp 2\frac{f_{12}}{f_{22}}. \tag{3.76}$$

Por conseguinte,

$$\begin{aligned}
f_{11} D_t a + \eta D_t b &= \frac{\Delta_{12}}{f_{22}} D_t a - \eta a \left(\frac{f_{12}}{f_{22}} \right)_{z_0} w_1, \\
f_{11} D_t b + \eta D_t c &= \left(\frac{2\eta f_{12}}{f_{22}} a - f_{11} a \mp 2\eta \right) \left(\frac{f_{12}}{f_{22}} \right)_{z_0} w_1 - \frac{f_{12}}{f_{22}^2} \Delta_{12} D_t a, \\
f_{12} D_x a + f_{22} D_x b &= -a f_{22} \left(\frac{f_{12}}{f_{22}} \right)_{z_0} z_1, \\
f_{12} D_x b + f_{22} D_x c &= (a f_{12} \mp 2 f_{22}) \left(\frac{f_{12}}{f_{22}} \right)_{z_0} z_1.
\end{aligned} \tag{3.77}$$

Substituindo as expressões de (3.77) nas equações de Codazzi-Mainardi (1.15) e (1.16), obtemos

$$\frac{\Delta_{12}}{f_{22}}D_t a - \eta a\left(\frac{f_{12}}{f_{22}}\right)_{z_0} w_1 + af_{22}\left(\frac{f_{12}}{f_{22}}\right)_{z_0} z_1 - 2b\Delta_{13} + (a-c)\Delta_{23} = 0, \tag{3.78}$$

$$\left[\left(\frac{2\eta f_{12}}{f_{22}}a - f_{11}a \mp 2\eta\right)w_1 - (af_{12} \mp 2f_{22})z_1\right]\left(\frac{f_{12}}{f_{22}}\right)_{z_0} + (a-c)\Delta_{13} + 2b\Delta_{23} - \frac{f_{12}\Delta_{12}}{f_{22}^2}D_t a = 0. \tag{3.79}$$

Diferenciando (3.78) com relação a w_1, teremos $\eta a\left(\frac{f_{12}}{f_{22}}\right)_{z_0} = 0$. Como $\eta a \neq 0$, segue-se que $\left(\frac{f_{12}}{f_{22}}\right)_{z_0} = 0$. Substituindo essa informação nas equações (3.78) e (3.79), obtemos

$$\frac{\Delta_{12}}{f_{22}}D_t a - 2b\Delta_{13} + (a-c)\Delta_{23} = 0, \tag{3.80}$$

$$-\frac{f_{12}\Delta_{12}}{f_{22}^2}D_t a + (a-c)\Delta_{13} + 2b\Delta_{23} = 0. \tag{3.81}$$

Ao multiplicar (3.80) por $\frac{f_{12}}{f_{22}}$, obtemos

$$\frac{f_{12}\Delta_{12}}{f_{22}^2}D_t a - \frac{2bf_{12}\Delta_{13}}{f_{22}} + \frac{(a-c)f_{12}\Delta_{23}}{f_{22}} = 0. \tag{3.82}$$

Somando (3.81) com (3.82), obtemos

$$\left[a - c - 2b\frac{f_{12}}{f_{22}}\right]\Delta_{13} + \left[2b + (a-c)\frac{f_{12}}{f_{22}}\right]\Delta_{23} = 0. \tag{3.83}$$

Por outro lado, segue de (3.76) que

$$\begin{aligned} a - c - 2b\frac{f_{12}}{f_{22}} &= a\left[1 + \left(\frac{f_{12}}{f_{22}}\right)^2\right], \\ 2b + (a-c)\frac{f_{12}}{f_{22}} &= \left(\pm 2 - a\frac{f_{12}}{f_{22}}\right)\left[1 + \left(\frac{f_{12}}{f_{22}}\right)^2\right]. \end{aligned}$$

Substituindo essas duas últimas expressões em (3.83), obtemos

$$a\left[1 + \left(\frac{f_{12}}{f_{22}}\right)^2\right]\Delta_{13} + \left(\pm 2 - a\frac{f_{12}}{f_{22}}\right)\left[1 + \left(\frac{f_{12}}{f_{22}}\right)^2\right]\Delta_{23} = 0.$$

Ora, mas como evidentemente $1 + \left(\frac{f_{12}}{f_{22}}\right)^2 \neq 0$, segue-se que

$$a\Delta_{13} + \left(\pm 2 - a\frac{f_{12}}{f_{22}}\right)\Delta_{23} = 0,$$

isto é,

$$a\left(\frac{f_{22}\Delta_{13} - f_{12}\Delta_{23}}{f_{22}}\right) \pm 2\Delta_{23} = 0. \tag{3.84}$$

Como $f_{22}\Delta_{13} - f_{12}\Delta_{23} = f_{32}\Delta_{12}$, podemos reescrever a expressão (3.84) como tão somente

$$\frac{f_{32}}{f_{22}}\Delta_{12}a \pm 2\Delta_{23} = 0. \tag{3.85}$$

Note que $f_{22} \neq 0$, $f_{12} \neq 0$ e $\left(\frac{f_{12}}{f_{22}}\right)_{z_0} = 0$. A única equação que satisfaz essas condições é a mencionada em (3.14) do Lema 3.3.

Se $\gamma = 1$, segue-se de (3.16) que $f_{32} \neq 0$ e (3.85) implica que a é constante, donde $D_t a = 0$. Com isso, (3.80) e (3.81) se reduzem a

$$\begin{aligned} -2b\Delta_{13} + (a-c)\Delta_{23} &= 0, \\ (a-c)\Delta_{13} + 2b\Delta_{23} &= 0, \end{aligned}$$

que em termos matriciais é equivalente a

$$\begin{bmatrix} -2b & a-c \\ a-c & 2b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_{13} \\ \Delta_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Segue-se de (3.7) que $\begin{bmatrix} \Delta_{13} \\ \Delta_{23} \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Por conseguinte, $det \begin{bmatrix} -2b & a-c \\ a-c & 2b \end{bmatrix} = 0$, donde $4b^2 + (a-c)^2 = 0$. Assim, $b = 0$ e $a = c$, o que contradiz a equação de Gauss.

Se $\gamma \neq 1$, as funções f_{ij} são dadas por (3.15). Se $f_{32} = 0$, então $B = 0$ e (3.85) implica $\Delta_{23} = 0$. Assim, segue da expressão de Δ_{23} que $A = 0$, o que contradiz o fato de que $A^2 - B^2 \neq 0$. Se $f_{32} \neq 0$, isto é, $B \neq 0$, então (3.85) pode ser reescrita como

$$a = \mp 2\frac{\Delta_{23}f_{22}}{\Delta_{12}f_{32}}. \tag{3.86}$$

Substituindo as expressões de b e c, as quais são dadas por (3.76), em (3.80) e (3.81), obtemos

$$\frac{\Delta_{12}}{f_{22}}D_t a + 2\left(\frac{f_{12}}{f_{22}} \mp 1\right)\Delta_{13} + \left[a - \left(\frac{f_{12}}{f_{22}}\right)^2 a \pm 2\frac{f_{12}}{f_{22}}\right]\Delta_{23} = 0. \tag{3.87}$$

Calculando a derivada total de a com respeito a t e usando a expressão de a como em (3.86), a equação (3.87) se torna

$$F(\Delta_{23,z_1}\Delta_{12} - \Delta_{12,z_1}\Delta_{23}) = -f_{22}(\Delta_{13}^2 + \Delta_{23}^2),$$

que em decorrência de (3.14) e (3.15) se reduz a

$$(B^2 - A^2\gamma)z_1^2 - A^2\beta = 0,$$

que é uma contradição. Portanto concluímos que que as equações de Codazzi-Mainardi e a equação de Gauss formam um sistema inconsistente.

□

O lema a seguir estabelece sob quais hipóteses o sistema, formado pelas equações de Codazzi-Mainardi e Gauss, é inconsistente.

Lema 3.8. *Considere uma equação $u_{xt} = F(u, u_x)$, descrevendo η-superfície pseudoesférica, com 1-formas (2), onde F é dada como no Lema 3.2 e as funções f_{ij} como em (3.12). Se os coeficientes da segunda forma fundamental da imersão em $\mathbb{R}^3$ da superfície pseudoesférica, determinada por uma solução $u(x,t)$, são universais, então o sistema, formado pelas equações de Codazzi-Mainardi e Gauss, é inconsistente.*

Demonstração.

Se os coeficientes da segunda forma fundamental da imersão isométrica da η-superfície pseudoesférica, descrita pela equação diferencial, são universais, então as equações (1.15) e (1.16) reduzir-se-ão às seguintes

$$\begin{aligned} &f_{11}a_t + \eta b_t - f_{12}a_x - f_{22}b_x - 2b\Delta_{13} + (a-c)\Delta_{23} = 0, \\ &f_{11}b_t + \eta c_t - f_{12}b_x - f_{22}c_x + (a-c)\Delta_{13} + 2b\Delta_{23} = 0, \end{aligned} \tag{3.88}$$

onde as funções f_{ij} são dadas por (3.12).

Substituindo as funções f_{ij} de (3.12) nas expressões de (3.88), teremos a seguinte configuração:

$$\begin{aligned} &-\alpha(Bz_1 - AQ)a_t + \eta b_t + (\eta F - QF')/(Q^2\alpha + \eta^2)a_x - (\eta F' + \alpha QF)/(Q^2\alpha + \eta^2)b_x \\ &\qquad -2b\alpha\frac{(QF' - \eta F)z_1}{Q^2\alpha + \eta^2} + (a-c)\frac{\eta B\alpha(QF' - \eta F) + \alpha(Az_1 - BQ)(\eta F' + \alpha QF)}{Q^2\alpha + \eta^2} = 0, \end{aligned} \tag{3.89}$$

$$\begin{aligned} &-\alpha(Bz_1 - AQ)b_t + \eta c_t + (\eta F - QF')/(Q^2\alpha + \eta^2)b_x - (\eta F' + \alpha QF)/(Q^2\alpha + \eta^2)c_x \\ &\qquad +(a-c)\alpha\frac{(QF' - \eta F)z_1}{Q^2\alpha + \eta^2} + 2b\frac{\eta B\alpha(QF' - \eta F) + \alpha(Az_1 - BQ)(\eta F' + \alpha QF)}{Q^2\alpha + \eta^2} = 0. \end{aligned} \tag{3.90}$$

Diferenciando-se (3.89) e (3.90) com relação a z_1, obtemos

$$\begin{aligned} -\alpha Ba_t - 2b\alpha\frac{QF' - \eta F}{Q^2\alpha + \eta^2} + (a-c)\alpha\frac{A(\eta F' + \alpha QF)}{Q^2\alpha + \eta^2} = 0, \\ -\alpha Bb_t + (a-c)\alpha\frac{(QF' - \eta F)}{Q^2\alpha + \eta^2} + 2b\alpha\frac{A(\eta F' + \alpha QF)}{Q^2\alpha + \eta^2} = 0. \end{aligned} \tag{3.91}$$

Multiplicando as equações de (3.91) por $Q^2\alpha + \eta^2$, ficamos com

$$-(Q^2\alpha + \eta^2)\alpha Ba_t - 2b\alpha(QF' - \eta F) + (a-c)\alpha A(\eta F' + \alpha QF) = 0,$$

$$-(Q^2\alpha + \eta^2)\alpha Bb_t + (a-c)\alpha(QF' - \eta F) + 2b\alpha A(\eta F' + \alpha QF) = 0.$$

Daí, diferenciando as duas últimas equações com respeito a z_0 e levando em conta que $F'' = -\alpha F$, obtemos

$$\begin{bmatrix} 2b & \alpha A(a-c) \\ -(a-c) & 2\alpha Ab \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha QF + \eta F' \\ QF' - \eta F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Como $\alpha QF + \eta F'$ e $QF' - \eta F$ são diferentes de zero, concluímos que

$$det \begin{bmatrix} 2b & \alpha A(a-c) \\ -(a-c) & 2\alpha Ab \end{bmatrix} = 0,$$

ou seja, que $\alpha A[4b^2 + (a-c)^2] = 0$. Se $b = 0$ e $a = c$, então e equação de Gauss será infringida; se $A = 0$, então as equações de (3.91) se reduzem a

$$\begin{aligned} -\alpha Ba_t - 2b\frac{\alpha(QF' - \eta F)}{Q^2\alpha + \eta^2} = 0, \\ -\alpha Bb_t + (a-c)\frac{\alpha(QF' - \eta F)}{Q^2\alpha + \eta^2} = 0. \end{aligned} \tag{3.92}$$

Como a, b e c são universais, segue-se que derivando as equações de (3.92) com relação a z_0, temos

$$2b\frac{\alpha(QF'' - \eta F')}{Q^2\alpha + \eta^2} = 0 \quad \text{e} \quad (a-c)\frac{\alpha(QF'' - \eta F')}{Q^2\alpha + \eta^2} = 0\ ,$$

que com o uso de (3.11) equivale a

$$2b\frac{\alpha(\alpha QF + \eta F')}{Q^2\alpha + \eta^2} = 0 \quad \text{e} \quad (a-c)\frac{\alpha(\alpha QF + \eta F')}{Q^2\alpha + \eta^2} = 0\ .$$

Portanto como $\dfrac{\alpha(\alpha QF + \eta F')}{Q^2\alpha + \eta^2} \neq 0$, segue-se que $b = a - c = 0$, o que contradiz a equação de Gauss. Por conseguinte, o sistema de equações formado pelas equações (1.15), (1.16) e (1.19) é inconsistente.

□

Para facilitar o entendimento da demonstração do Teorema 3.2, demonstraremos primeiro as seguintes proposições.

Proposição 3.2.1. *Considere uma equação $u_{xt} = F(u, u_x)$, com $F''(u) + \alpha F(u) = 0$, $\alpha \neq 0$, descrevendo uma η-superfície pseudoesférica, com funções f_{ij} dadas por (3.12). Existe uma imersão isométrica local em $\mathbb{R}^3$ de uma superfície pseudoesférica, determinada por uma solução $u(x,t)$, para a qual os coeficientes da segunda forma fundamental dependem de um jato de ordem finita de u, isto é, a, b e c dependem de $x, t, u, w_1 \cdots, w_l$, onde l é finito se, e somente se, $\alpha > 0$ e f_{ij} são dados por (3.13), a, b e c dependem de um jato de ordem zero de u e são dadas por (3.6) do Lema 3.6.*

Demonstração.

Suponha que exista uma imersão isométrica local em $\mathbb{R}^3$ de uma superfície pseudoesférica, determinada por uma solução $u(x,t)$, para a qual os coeficientes da segunda forma fundamental dependam de um jato de ordem finita de u, isto é, a, b e c dependem de $x, t, u, w_1 \cdots, w_l$, onde l é finito. Se $c + \left(\frac{f_{11}}{\eta}\right)^2 a + 2f_{11}\frac{b}{\eta} = 0$ em um conjunto aberto não vazio, então segue do Lema 3.6 que $B = 0$, isto é, $\alpha > 0$ e f_{ij} são dadas por (3.13). Além disso, a, b e c dependem de um jato de ordem zero de u e são dadas por (3.49) do Lema 3.6. Se $c + \left(\frac{f_{11}}{\eta}\right)^2 a + 2f_{11}\frac{b}{\eta} \neq 0$, então o Lema 3.7 implica na universalidade de a, b e c. Contudo, segue-se do Lema 3.8 que tal imersão não existe.

Reciprocamente, um cálculo direto mostra que se as funções f_{ij} são dadas como em (3.13) e a, b e c são dadas por (3.6) do Lema 3.6, então as formas de conexões ω_{13} e ω_{23} são dados por (1.13), satisfazem as equações (1.14) de uma imersão em $\mathbb{R}^3$ e a equação de Gauss (1.19).

□

Proposição 3.2.2. *Considere uma equação do tipo $u_{xt} = \nu e^{\delta u}\sqrt{\beta + \gamma u_x^2}$, descrevendo η-superfície pseudoesférica, com funções f_{ij} dadas pelo Lema 3.3. Não existe imersão isométrica local em $\mathbb{R}^3$ de uma η-superfície pseudoesférica, determinada por uma solução $u(x,t)$ da equação, para a qual os coeficientes da segunda forma fundamental dependem de um jato de ordem finita de u.*

Demonstração.

Suponha, por absurdo, a existência de uma imersão isométrica local em $\mathbb{R}^3$ de uma η-superfície pseudoesférica, determinada por uma solução $u(x,t)$ da equação, para a qual os coeficientes da segunda forma fundamental dependam de um jato de ordem finita de u. Daí o item (3.6) do Lema 3.6 implica $c + \left(\frac{f_{11}}{\eta}\right)^2 a + 2f_{11}\frac{b}{\eta} \neq 0$.

Uma vez que estamos supondo a existência da imersão isométrica local e $c + \left(\frac{f_{11}}{\eta}\right)^2 a + 2f_{11}\frac{b}{\eta} \neq 0$, segue do Lema 3.7, que a, b e c são universais. Com isso as equações de Codazzi-

Mainardi se reduzem a tão somente a

$$\begin{aligned} &f_{11}a_t + \eta b_t - f_{12}a_x - f_{22}b_x - 2b\Delta_{13} + (a-c)\Delta_{23} = 0, \\ &f_{11}b_t + \eta c_t - f_{12}b_x - f_{22}c_x + (a-c)\Delta_{13} + 2b\Delta_{23} = 0. \end{aligned} \tag{3.93}$$

Ora, se $\gamma \neq 1$, então as funções f_{ij} são dadas por (3.15); se $\gamma = 1$, então elas são dadas por (3.16). Derivando as equações de (3.93) com respeito a z_1 e depois com respeito a z_0, ficaremos com

$$\begin{bmatrix} -2b & a-c \\ a-c & 2b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_{13,z_1z_0} \\ \Delta_{23,z_1z_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Como $\Delta_{13,z_1z_0}\Delta_{23,z_1z_0} \neq 0$, é decorrente que se $\gamma = 1$ ou $\gamma \neq 1$, teremos $b = 0$ e $a = c$, contradizendo assim a equação de Gauss (1.19).

□

Proposição 3.2.3. *Considere uma equação $u_{xt} = \lambda u + \xi u_x + \tau$, descrevendo η-superfície pseudoesférica. Existe uma imersão isométrica local em $\mathbb{R}^3$, definida por uma solução $u(x,t)$, para a qual os coeficientes da segunda forma fundamental a, b e c dependem de um jato de ordem finita de u se, e somente se, λ, ξ e τ não são nulos simultaneamente e a, b e c são universais e dados por:*

1. *Quando $\lambda \neq 0$*

$$a = \sqrt{lL(x,t) - \gamma^2 L(x,t)^2 - 1}, \quad b = \gamma L(x,t), \quad c = \frac{b^2-1}{a}, \tag{3.94}$$

onde $L(x,t) = e^{\pm 2\left[\eta x + \left(\frac{\lambda}{\eta} \mp \zeta\right)t\right]}$, $l, \gamma \in \mathbb{R}$ e $l^2 > 4\gamma^2$ e as 1-formas são definidas em uma faixa de $\mathbb{R}^2$, onde

$$\log\sqrt{\frac{l - \sqrt{l^2 - 4\gamma^2}}{2\gamma^2}} < \pm\left[\eta x + \left(\frac{\lambda}{\eta} \mp \zeta\right)t\right] < \log\sqrt{\frac{l + \sqrt{l^2 - 4\gamma^2}}{2\gamma^2}}. \tag{3.95}$$

2. *Quando $\lambda = 0$ e $\xi^2 + \tau^2 \neq 0$*

$$a = \sqrt{le^{2\eta x} - \gamma^2 e^{4\eta x} - 1}, \quad b = \gamma e^{2\eta x}, \quad c = \frac{b^2-1}{a}, \tag{3.96}$$

com $l, \gamma \in \mathbb{R}$ e $l^2 > 4\gamma^2$ e as 1-formas são definidas em uma faixa de $\mathbb{R}^2$, onde

$$\log\sqrt{\frac{l - \sqrt{l^2 - 4\gamma^2}}{2\gamma^2}} < \eta x < \log\sqrt{\frac{l + \sqrt{l^2 - 4\gamma^2}}{2\gamma^2}}. \tag{3.97}$$

Além disso, as constantes l e γ devem ser escolhidas de tal modo que a faixa onde as 1-formas estão definidas intersecte a solução da equação hiperbólica.

Demonstração.

Supondo que os coeficientes da segunda forma fundamental da imersão isométrica da η-superfície pseudoesférica, descrita pelas equações do tipo (3.2.3), dependam de um jato de ordem zero de u, garantimos, mediante os Lemas 3.6 e 3.7, que eles são universais. A universalidade dos coeficientes da segunda forma fundamental permite-nos concluir que as equações de Codazzi-Mainardi podem ser escritas como

$$\begin{aligned} &f_{11}a_t + \eta b_t - f_{12}a_x - f_{22}b_x - 2b\Delta_{13} + (a-c)\Delta_{23} = 0, \\ &f_{11}b_t + \eta c_t - f_{12}b_x - f_{22}c_x + (a-c)\Delta_{13} + 2b\Delta_{23} = 0. \end{aligned} \tag{3.98}$$

Se $\lambda = \zeta = \tau = 0$ e as funções f_{ij} são dadas por (3.18), então derivando as equações de (3.98) com relação a z_0 e usando o fato que $\Delta_{13} = e^{z_0}z_1$ e $\Delta_{23} = 0$, obtemos

$$b_x - 2bz_1 = 0, \quad c_x + (a-c)z_1 = 0.$$

Como a, b e c são universais, concluímos que $b = 0$ e $a = c$, contradizendo a equação de Gauss (1.19). Portanto a imersão não existe.

Se $\lambda \neq 0$ e as funções f_{ij} são como em (3.19), então $\Delta_{13} = 0$. Daí, diferenciando as expressões de (3.98) com relação a z_1, ficamos com

$$f_{11,z_1}a_t \mp f_{11,z_1}(a-c) = 0, \quad f_{11,z_1}b_t \mp 2bf_{11,z_1}f_{22} = 0. \tag{3.99}$$

Dividindo as expressões de (3.99) por f_{11,z_1}, membro a membro, obtemos, após ajustes,

$$a_t = \pm(a-c)f_{22}, \quad b_t = \pm 2bf_{22}. \tag{3.100}$$

Diferenciando as expressões de (3.98) com relação a z_0, temos

$$f_{12,z_0}a_x \mp \eta f_{12,z_0}(a-c) = 0, \quad f_{12,z_0}b_x \mp 2\eta b = 0. \tag{3.101}$$

Dividindo as expressões de (3.101) por f_{12,z_0}, membro a membro, obtemos, após ajustes,

$$a_x = \pm\eta(a-c), \quad b_x = \pm 2\eta b. \tag{3.102}$$

Consequentemente as equações de (3.98) se reduzem a

$$\eta b_t - f_{22}b_x = 0, \quad \eta c_t - f_{22}c_x = 0. \tag{3.103}$$

As equações (3.100), (3.102) e (3.103) são, respectivamente, as mesmas que (2.43), (2.39) e (2.45), desde que f_{22} seja constante. Por conseguinte, a como em (2.33), b como em (2.34) e c como em (2.35) estão sujeitas a (2.36), onde λ é substituído por $f_{22} = \lambda/\eta \mp \zeta$. Portanto obtemos a, b e c como em (3.94) na faixa (3.95).

Se $\lambda = 0$, $\xi^2 + \tau^2 \neq 0$ e as funções f_{ij} são como em (3.20), então $\Delta_{13} = 0$ e $\Delta_{23} = 1$. Com isso, as expressões de (3.98) se reduzem a

$$f_{11}a_t + \eta b_t - f_{12}a_x + (a - c) = 0, \quad f_{11}b_t + \eta c_t - f_{12}b_x + 2b = 0. \tag{3.104}$$

Diferenciando as expressões de (3.104) com respeito a z_1, obtemos $a_t = b_t = 0$. Além disso, diferenciando a equação de Gauss (1.19), com relação a t, temos

$$a_t c + ac_t - 2bb_t = 0. \tag{3.105}$$

Por causa do Lema 3.5, temos $a \neq 0$. Isso permite-nos reescrever (3.105) como

$$c_t = \frac{-a_t c + 2bb_t}{a}. \tag{3.106}$$

Daí, uma vez que $a_t = b_t = 0$, segue-se de (3.106) que $c_t = 0$.

As informações anteriores permite-nos reescrever as expressões de (3.104) como

$$a_x = \frac{a - c}{f_{12}}, \quad b_x = \frac{2b}{f_{12}}. \tag{3.107}$$

Como $f_{12} = \dfrac{1}{\eta}$; as expressões de (3.107) podem ser reescritas como

$$a_x = \eta(a - c), \quad b_x = 2\eta b,$$

sendo $c = \dfrac{b^2 - 1}{a}$.

Seguindo a mesma linha de raciocínio usada na prova da Proposição 2.1.2 com $\lambda = 0$ e $\pm$ substituído por $+$, obteremos que a, b e c são dados por (3.96) na faixa (3.97).

As considerações feitas acima demonstram os dois itens desta proposição. A recíproca trata-se de um cálculo fácil, que omitiremos para não tornar a leitura enfadonha.

□

Como as Proposições (3.2.1-3.2.3) tratam-se dos itens do Teorema 3.2, seque-se que o mesmo está demonstrado.

Capítulo 4

Conclusão

Nesta dissertação, estudamos o problema das imersões isométricas locais em $\mathbb{R}^3$ de superfícies pseudoesféricas da perspectiva das equações diferenciais que dão origem às métricas.

Além dos trabalhos aqui apresentados, a existência de imersões isométricas locais de ordem finita foi investigada em [4, 9] para as famílias de equações que descrevem **s.p.e.**, anteriormente estudadas em [5, 8].

Em todos estes trabalhos observa-se que, exceto para a equação de Sine-Gordon, tais imersões isométricas locais têm coeficientes universais. Em outras palavras, as curvaturas principais (e, portanto, a curvatura média) da imersão não dependem da solução genérica da equação diferencial. Consequentemente, a equação de Sine-Gordon parecia ocupar um lugar especial dentro da classe de equações diferenciais que descrevem **s.p.e.**, introduzida por [11].

A procura por novos exemplos de equações com tal propriedade encerrou-se em [6]. Em verdade, os autores obtiveram uma família de equações (ver [6]) da qual foi extraída a equação *short pulse*

$$u_{xt} = u + \frac{1}{6}\,(u^3)_{,xx},$$

também conhecida como equação cúbica de Rabelo [19], para a qual

$$\omega_1 = \lambda u_x\, dx + \frac{\lambda}{2} u_x u^2\, dt, \qquad \omega_2 = \lambda\, dx + \left(\frac{\lambda}{2}u^2 + \frac{1}{\lambda}\right) dt, \qquad \omega_3 = u\, dt,$$

onde $\lambda \neq 0$ é uma constante real e

$$\omega_{13} = \frac{-2}{u_x}\,\omega_1 + \omega_2, \qquad \omega_{23} = \omega_1,$$

isto é, dada uma solução u para a equação *short pulse*, as componentes a, b e c da segunda forma fundamental da imersão isométrica local da métrica determinada por u não são universais, ou seja, dependem de um *jato de ordem finita* de u.

Referências Bibliográficas

[1] E. Baur, Théorie de la déformation des surfaces, *J. l'École Imperiale Polytech.* **19** (1862) Cahier 39, 1-48.

[2] M. P. do Carmo, Formas Diferenciais e Aplicações. SBM, 1a ed. (2015).

[3] M. P. do Carmo, Geometria diferencial de curvas e superfícies. SBM, 2a ed. (2005).

[4] T. Castro Silva and N. Kamran, Third order differential equations and local isometric immersions of pseudospherical surfaces, Communications in Contemporary Math. **18**, No. 6 (2016) 1650021 (41 pages).

[5] T. Castro Silva and K. Tenenblat, Third order differential equations describing pseudospherical surfaces, *J. Differential Equations* **259** (2015) 4897-4923.

[6] D. Catalano Ferraioli, T. Castro Silva and K. Tenenblat, A note on isometric immersions and differential equations which describe pseudospherical surfaces. (arXiv:1910.14523)

[7] D. Catalano Ferraioli, T. Castro Silva and K. Tenenblat, A class of quasilinear secondorder partial differential equations which describe spherical or pseudospherical surfaces, *J. of Differential Equations* (https://doi.org/10.1016/j.jde.2019.11.069).

[8] D. Catalano Ferraioli and L. A. de Oliveira Silva, Second order evolution equations which describe pseudospherical surfaces, J. Differential Equations **260** (2016) 8072-8108.

[9] D. Catalano Ferraioli and L. A. de Oliveira, Local isometric immersions of pseudospherical surfaces described by evolution equations in conservation law form, J.Math. Anal. Appl. **446** (2017) 1606–1631.

[10] D. Catalano Ferraioli and K. Tenenblat, Fourth order evolution equations which describe pseudospherical surfaces, *J. Differential Equations* **257** (2014) 3165-3199

[11] S. S. Chern and K. Tenenblat, Pseudo-spherical surfaces and evolution equations, *Stud. Appl. Math.* **74** (1986) 55–83.

[12] Q. Ding, K. Tenenblat, On differential systems describing surfaces of constant curvature, *J. Differential Equations* **184** (2002) 185–214.

[13] V. P. Gomes Neto, Fifth-order evolution equations describing pseudospherical surfaces, *J. Diff. Equ.* **249** (2010) 2822-2865 2010.

[14] L. Jorge, K. Tenenblat, Linear problems associated to evolution equations of type $u_{tt} = F(u, u_x, u_{xx}, u_t)$, *Stud. Appl. Math.* **77** (1987) 103–117

[15] N. Kahouadji, N. Kamran, K. Tenenblat, Local isometric immersions of pseudo-spherical surfaces and evolution equations, *Fields Inst. Commun.* **75** (2015) 369-281.

[16] N. Kahouadji, N. Kamran and K. Tenenblat, Second-order equations and local isometric immersions of pseudo-spherical surfaces, *Commun. Anal. Geom.* **24** (3) (2016) 605 - 643.

[17] N. Kahouadji, N. Kamran and K. Tenenblat, Local isometric immersions of pseudo-spherical surfaces and kth order evolution equations, *Commun. in Contemp. Math.* **24** (3) (2019) 1850025 (21 pages).

[18] N. Kamran and K. Tenenblat, On differential equations describing pseudospherical surfaces, *J. Differential Equations* **115** (1995) 75-98

[19] M. Rabelo, On equations which describe pseudospherical surfaces, *Stud. Appl. Math.* **81** (1989) 221–248

[20] M. Rabelo, A characterization of differential equations of type $u_{xt} = F(u, u_x, \cdots, u_{x^k})$ which describe pseudospherical surfaces, An. Acad. Brasil. Ciênc. **60**(1988), no. 2, 119-126.

[21] M. Rabelo, K. Tenenblat, On equations of type $u_{xt} = F(u, u_x)$ which describe pseudospherical surfaces, *J. Math. Phys.* **31** (1990) 1400–1407

[22] M. Rabelo, K. Tenenblat, A classification of pseudospherical surface equations of type $u_t = u_{xxx} + G(u, u_x, u_{xx})$, *J. Math. Phys.* **33** (1992) 537–549

[23] D. J. Saunders, The Geometry of Jet Bundles. London Mathematical Society, Lecture Note Series 142, Cambridge University Press (1989).

[24] K. Tenenblat. Introdução à Geometria Diferencial. Keti Tenenblat. Ed. Blucher, 2a ed. (2008).