Departamento de Estatística - Universidade de Brasília

Teste de hipóteses para proporções usando um nível de significância adaptativo

Carlos Eduardo Linhares Levicoy

Brasília
2020

Carlos Eduardo Linhares Levicoy

Teste de hipóteses para proporções usando um nível de significância adaptativo

Dissertação apresentada como requisito para obtenção do título de Mestre em Estatística pelo Programa de Pós-Graduação em Estatística da Universidade de Brasília

Orientador: Prof. Dr. Eduardo Yoshio Nakano

Brasília
2020

Agradecimentos

Agradeço aos meus pais, Carlos e Izabel, pelo apoio, compreensão, amor e amizade durante minha trajetória acadêmica.

Aos professores do departamento de estatística da UnB. Principalmente ao meu orientador, Professor Eduardo Yoshio Nakano, por ser um exemplo como pessoa e profissional.

Aos funcionários da secretaria, segurança e limpeza do prédio CIC/EST. Além de serem a base para o funcionamento de tudo, sempre foram compreensivos, prestativos e amigáveis com todos.

A todas minhas amizades que contribuíram de forma direta ou indireta para realização deste trabalho.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Resumo

Na realização de um teste de hipótese uma importante discussão é sobre qual deve ser o nível de significância utilizado em cada problema. Devido à consistência dos testes de significância clássicos, fica mais fácil rejeitar uma hipótese nula quando se aumenta o tamanho da amostra. Isso ocorre porque o nível descritivo do teste (valor p) diminui à medida que a amostra cresce, enquanto o nível de significância do teste permanece fixo. Diante disso, Pereira et al. (2017) propuseram um teste de hipótese com níveis de significância adaptativos. Neste trabalho é avaliado o comportamento dos níveis de significância adaptativos para experimentos de Bernoulli. Os resultados mostram que o aumento da amostra também levará uma maior rejeição da hipótese nula nos testes com níveis de significância adaptativos, porém com menor taxa de rejeição em relação aos testes com níveis de significância fixos.

Palavras-chave: Níveis de significância adaptativos. Teste de Proporção. P-valor. Distribuição Preditiva. Fator de Bayes. Teste de Significância.

Abstract

In a hypothesis test an important discussion is about what level of significance should be used in each problem. Due to the consistency of classical significance tests, it is easier to reject a null hypothesis when increasing the sample size. This is because the test's descriptive level (p-value) decreases as the sample grows, while the test's significance level remains fixed. Therefore, Pereira et al. (2017) proposed a hypothesis test with adaptive significance levels. In this work, the behavior of adaptive significance levels for Bernoulli's experiments is evaluated. The results show that the increase in the sample also presents a greater rejection of the null hypothesis in tests with adaptive significance levels, but with a lower rejection rate compared to tests with fixed levels of significance.

Keywords: Adaptive significance levels. Test of Proportion. P-value. Predictive distribution. Bayes Factor. Significance test.

Sumário

1 Introdução

Atualmente, um assunto que gera uma grande discussão no meio científico se refere a quando uma evidência pode ser considerada concreta. Diante disso, uma das maiores polêmicas envolvendo essa questão se refere ao uso do nível descritivo (mais conhecido como valor p) em testes de significância estatísticos. Na estatística frequentista, quando o valor p é menor ou igual ao nível de significância α preestabelecido, a hipótese nula é rejeitada. O nível de significância α é a probabilidade de se cometer o erro tipo I (rejeitar a hipótese nula quando ela é verdadeira), e normalmente recebe valores entre 0.10 e 0.005, sendo o mais comum de 0.05. De acordo com Gelman e Robert (2014), o nível de significância apropriado depende do cenário estudado, pois o que funcionou bem para experimentos na agricultura da década de 1920 pode não ser apropriado para muitas aplicações em biociências modernas. Segundo Moore e Mccabe (2017), o tamanho da amostra influencia fortemente o valor p de um teste. De fato, um efeito que não é significativo para um nível de significância α em uma pequena amostra, pode ser significativo em uma amostra maior. O problema é que ao fixar a probabilidade de cometer o erro tipo I e aumentar o tamanho da amostra, a probabilidade de cometer o erro tipo II é diminuída (o erro tipo II é definido como aceitar a hipótese nula quando ela é falsa e sua probabilidade é denotada por β). Com isso, se o receio por cometer um erro tipo I é maior que o erro tipo II, o teste tende a rejeitar a hipótese nula. Logo, utilizar o mesmo nível de significância para diferentes tamanhos amostrais pode levar a tomadas de decisões equivocadas.

No intuito de solucionar tais divergências relacionadas ao valor p, Pereira et al (2017) propuseram um método que usa níveis de significância adaptativos obtidos ordenando o espaço amostral pelo Fator de Bayes. Tal método sugere valores ótimos para alfa e beta de acordo com o tamanho da amostra do experimento estatístico. Além disso, o método ainda segue o princípio da verossimilhança e permite calcular o tamanho da amostra ideal para um nível de significância pré determinado. Por ser um estudo recente, poucos casos são abordados utilizando tal método na literatura. Com isso, o objetivo deste trabalho consiste em investigar as propriedades do método para experimentos de Bernoulli, derivando as equações referentes aos casos mais usados e mostrando a diferença, quando a amostra aumenta, na velocidade de rejeição da hipótese nula em relação os testes com níveis de significância fixos.

2 Revisão Bibliográfica

2.1 Testes Clássicos de Hipóteses

Segundo Migon & Gamerman (1999), um teste de hipóteses é um problema de decisão com um número de possíveis ações. A partir da informação amostral é preciso decidir entre as hipóteses H_0 (hipótese nula) e H_1 (hipótese alternativa), sendo H_0 uma afirmação sobre o parâmetro que se tem o interesse de testar e H_1 uma afirmação contraria a H_0. Ao optar por rejeitar ou não a hipótese nula dois tipos de erros podem ser cometidos. O erro do tipo I, cuja probabilidade é denotada por α, que ocorre quando H_0 é rejeitada sendo verdadeira e o erro do tipo II, cuja probabilidade é denotada por β, que é quando H_0 não é rejeitada sendo falsa.

Se um pesquisador toma uma decisão errada, ele sofre uma penalidade associada a ela. Desse modo, é importante que o pesquisador tente minimizar sua perda ao se cometer um erro. Como no teste de hipóteses só é possível cometer dois tipos de erro, o ideal seria minimizar ambos erros simultaneamente, porém isso não é possível, como é mostrado no Lema de Neyman-Pearson (Casella e Berger, 2002). Então o que costuma ser feito é minimizar a combinação linear do erros, pois isso torna possível colocar pesos de acordo com a gravidade de cada erro para um problema especifico.

Na maioria dos casos o que é feito na prática se trata em fixar um valor da probabilidade de erro tipo I e escolher um teste que minimize a probabilidade do erro tipo II. Outra abordagem busca minimizar a soma das probabilidades dos erros tipo I e II, fazendo com que ambos tenham a mesma gravidade ao serem cometidos. Para mostrar o tipo de teste que minimiza a combinação linear dos erros e explicar que não é possível minimizar os erros conjuntamente, a seguir são enunciados o teorema do teste ótimo e o lema de Neyman-Pearson, respectivamente.

Teorema (Teste ótimo): Assuma que $X = (X_1, \ldots, X_n)$ é uma amostra aleatória de $p(x|\theta)$ e $H_0 : \theta = \theta_0$ e $H_1 : \theta = \theta_1$ são as hipóteses de interesse. Seja Ψ^* um teste de H_0 versus H_1, tal que H_0 é aceito se $p_0/p_1 > K$ e H_0 é rejeitado se $p_0/p_1 < K$, em que $p_i = p(x|\theta_i)$, $i = 0,\, 1$ e $K > 0$ (se $p_0/p_1 = K$ nada pode ser decidido). Então, qualquer outro teste Ψ será tal que

$$a\alpha(\Psi^*) + b\beta(\Psi^*) \leq a\alpha(\Psi) + b\beta(\Psi) \tag{2.1}$$

para quaisquer $a,\, b \in \mathbb{R}^+$. Aqui, $\alpha(\Psi)$ é a probabilidade do erro tipo I do teste Ψ e $\beta(\Psi)$ é a probabilidade do erro tipo II do teste Ψ. De acordo com o teorema é possível notar que para um valor fixo α, os testes baseados na razão de verossimilhança (p_1/p_0) são os mais poderosos, dado que o poder do teste, que é a probabilidade de rejeitar H_0 quando ela é falsa, é definido por $\pi(\theta_1) = 1 - \beta(\Psi)$.

Lema (Neyman-Pearson): Assuma que $X = (X_1, \ldots, X_n)$ é uma amostra aleatória de $p(x|\theta)$ e $H_0 : \theta = \theta_0$ e $H_1 : \theta = \theta_1$ são as hipóteses de interesse. Seja Ψ^* um teste de H_0 versus H_1, tal que H_0 é aceito se $p_0/p_1 > K$ e H_0 é rejeitado se $p_0/p_1 < K$, em que $p_i = p(x|\theta_i)$, $i = 0$, 1 e $K > 0$ (se $p_0/p_1 = K$ nada pode ser decidido). Então, para qualquer outro teste Ψ tal que $\alpha(\Psi) \leq \alpha(\Psi^*)$ tem-se que $\beta(\Psi) \geq \beta(\Psi^*)$. Além disso, $\alpha(\Psi) < \alpha(\Psi^*)$ implica que $\beta(\Psi) > \beta(\Psi^*)$.

A prova do lema de Neyman-Pearson decorre do teste ótimo. Se a=1, então $\alpha(\Psi^*) + b\beta(\Psi^*) \leq \alpha(\Psi) + b\beta(\Psi)$. Sendo assim, se $\alpha(\Psi) \leq \alpha(\Psi^*)$, então necessariamente $\beta(\Psi) \geq \beta(\Psi^*)$. Vale notar que o lema de Neyman-Pearson também é válido para hipóteses gerais do tipo $H_0 : \theta \in \Theta_0$ contra $H_1 : \theta \in \Theta_1$, em que $\Theta_0 \cup \Theta_1 = \Theta$ e $\Theta_0 \cap \Theta_1 = \varnothing$, sendo neste caso conhecido como lema de Neyman-Pearson generalizado.

Corolário 1: Assuma as condições do teste ótimo e que a, $b > 0$. O teste Ψ para qual o valor de $a\alpha(\Psi) + b\beta(\Psi)$ é minimo, rejeita H_0 quando a razão de verossimilhança excede a/b e não rejeita H_0 quando a razão de verossimilhança é menor que a/b.

Uma abordagem explorada em DeGroot (1989) é em relação a minimizar a soma das probabilidades dos erros tipo I e II, dando pesos iguais para ambos, ou seja, escolhendo $a = b = 1$. Sendo assim, basta verificar se $p_1/p_0 > a/b = 1$ para rejeitar ou não H_0.

2.2 Inferência Bayesiana

Definição 1: Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ um espaço de probabilidade e sejam $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ e $(\Theta, \mathcal{B}(\Theta))$ espaços de Borel. Considere X:$(\Omega \to \mathcal{X})$ e $\theta : \Omega \to \Theta$ mensuráveis. Seja θ um parâmetro e Θ um espaço de parâmetros. A distribuição de X dado θ é chamada uma família paramétrica de distribuições de X e denotada por:

$$\mathcal{P} = \{P_{\theta_0}; P_{\theta_0}(A) = P(X \in A|\theta = \theta_0), \forall A \in \mathcal{B}, \theta_0 \in \Theta\}. \tag{2.2}$$

Uma distribuição a priori de θ é uma medida de probabilidade Q_θ sobre $(\Theta, \mathcal{B}(\Theta))$ induzida por θ de $\mathcal{P}$.

Suponha que cada P_{θ_0}, quando considerado como medida em $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$, é absolutamente contínua com respeito a uma medida ν em $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$. Seja

$$\frac{\partial P_{\theta_0}(x)}{\partial \nu} = f(x; \theta_0). \tag{2.3}$$

Será assumido que f(.;.) é mensurável com respeito a σ-álgebra produto $\mathcal{B} \times \mathcal{B}(\Theta)$. Isto permite integrar esta função com respeito as medidas em $\mathcal{X}$ e Ω.

Para cada $\theta \in \Theta$, a função f(x;θ_0) é a densidade condicional de X dado $\theta = \theta_0$. Assim, para cada $A \in \mathcal{B}$,

$$P(X \in A|\theta = \theta_0) = \int_A f(x;\theta_0)\partial\nu(x) \tag{2.4}$$

A distribuição condicional de θ dado $X = x$ é chamada distribuição a posteriori de θ. O teorema a seguir mostra como calcular a distribuição a posteriori de um parâmetro no caso em que existe uma medida ν tal que cada P_{θ_0} é dominada por ν ($P_{\theta_0} << \nu$).

Teorema 2 (Teorema de Bayes): Suponha que X tem uma família paramétrica de distribuições $\mathcal{P}$ com respeito a um espaço de parâmetros Θ. Suponha que $P_{\theta_0} << \nu$ para todo $\theta_0 \in \Theta$ e seja $f(x;\theta_0)$ a densidade condicional (com respeito a ν) de X dado $\theta = \theta_0$. Sejam Q_θ uma distribuição a priori de θ e $P_{\theta|X}(.|x)$ a distribuição condicional de θ dado $X = x$. Então $P_{\theta|X} << Q_\theta$ e a derivada de Radon-Nikodym é

$$\frac{\partial P_{\theta|X}}{\partial Q_\theta}(\theta_0|x) = \frac{f_{X|\theta}(x|\theta_0)}{\displaystyle\int_\Theta f_{X|\theta}(x|t)\partial Q_{\theta_0}(t)}, \tag{2.5}$$

para cada x cujo denominador não seja zero nem infinito.

Exemplo 1: Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra permutável de X que, dado $\theta > 0$, segue uma distribuição Poisson (θ). Considere uma distribuição a priori para θ como sendo uma Gama (a, b) e assuma que $s = \sum_{i=1}^n x_i$. Então,

$$L(X|\theta) = \frac{\theta^s e^{-n\theta}}{\displaystyle\prod_{i=i}^{n} x_i!} \quad \text{e}$$
$$\pi(\theta) = \frac{b^a}{\Gamma(a)}\theta^{a-1}e^{-b\theta}.$$

Segundo o Teorema de Bayes, a distribuição a posteriori de θ dado X é dada por:

$$\begin{aligned}
\pi(\theta|X) &= \frac{L(X|\theta)\pi(\theta)}{\displaystyle\int_0^\infty L(X|\theta)\pi(\theta)\partial\theta} \\
&= \frac{\theta^{a+s-1}e^{-(n+b)\theta}}{\displaystyle\int_0^\infty \theta^{a+s-1}e^{-(n+b)\theta}\partial\theta} \\
&= \frac{(n+b)^{a+s}}{\Gamma(a+s)}\theta^{a+s-1}e^{-(n+b)\theta},
\end{aligned}$$

que representa uma distribuição Gama$(a + s, n + b)$.

2.3 Fator de Bayes

O fator de Bayes, criado por Jeffreys (1961), é um teste de hipótese bayesiano baseado em uma razão de probabilidades de duas hipóteses concorrentes, H e A.

Seja Ω o espaço amostral associado a um experimento aleatório e Ω_H um subconjunto de Ω ($\Omega_H \subset \Omega$). Seja μ uma medida de probabilidade sobre Ω e para cada $\theta \in \Omega$ tem-se que $f_{X|\Theta}(.|\theta)$ é função de densidade de X dado $\Theta = \theta$. A densidade preditiva de X dado H: $\Theta \in \Omega_H$ é $f_H(x)$ que é igual a média de $f_{X|\Theta}(x|\theta)$ com respeito a μ restrito a Ω_H. Similarmente, a densidade preditiva de X dado A: $\Theta \notin \Omega_H$ é $f_A(x)$ que é igual a média de $f_{X|\Theta}(x|\theta)$ com respeito a μ restrito a Ω_A (o complementar de Ω_H). Desse modo, as densidades preditivas de X dado as hipóteses H e A são dadas, respectivamente, por:

$$f_H(x) = \frac{\int_{\Omega_H} f_{X|\Theta}(x|\theta)\partial\mu(\theta)}{\mu(\Omega_H)} \qquad \text{e} \tag{2.6}$$

$$f_A(x) = \frac{\int_{\Omega_A} f_{X|\Theta}(x|\theta)\partial\mu(\theta)}{\mu(\Omega_A)}. \tag{2.7}$$

Seja P(H) a probabilidade a priori a favor de H, ou seja, P(H) = $\mu(\Omega_H)$. A chance (odd) a posteriori em função de H é O(H|X) = P(H)$f_H(x)$/(1-P(H))$f_A(x)$ e a chance (odd) a priori em função de H é O(H) = P(H)/(1-P(H)). Sendo assim, o Fator de Bayes a favor de H é a razão entre a chance a posteriori em função de H e a chance a priori em função de H. Isto é,

$$BF_{HA}(x) = \frac{f_H(x)}{f_A(x)}. \tag{2.8}$$

O Fator de Bayes (2.8) mede a influência dos dados na alteração da credibilidade relativa de H e A. Assim, quanto maior é $BF_{HA}(x)$, maior é a evidência à favor da hipótese H (contra a hipótese A).

A Tabela 1 apresenta a escala de evidências para o fator de Bayes proposta por Jeffreys (1961).

Tabela 1: Escala de evidências de Jeffreys para o Fator de Bayes

$BF_{HA}(x)$	Evidência à favor de H
< 1	negativa
1 a 3	insignificante
3 a 10	moderada
10 a 30	forte
30 a 100	muito forte
> 100	decisiva

2.4 Teste de Significância adaptativo utilizando o Fator de Bayes

Foi visto no **Corolário 1** (Seção 2.1) que o teste que minimiza a combinação linear dos erros tipo I e II ($a\alpha(\delta) + b\beta(\delta)$) é o baseado na razão de verossimilhanças, sendo que a decisão de rejeitar ou não H_0 depende de uma constante $K = b/a$. Desse modo, a ideia do teste de significância adaptativo, proposto por Pereira et al. (2017), segue o mesmo raciocínio do teste clássico, porém considera uma razão de densidades preditivas $BF_{HA}(x) = f_H(x)/f_A(x)$ no lugar da de verossimihanças. Sendo assim, a regra de decisão continuará dependendo da mesma constante K, porém sofrerá algumas modificações.

Considere um teste de hipótese δ de H versus A, tal que H: $\theta \in \Theta_H$ e A: $\theta \in \Theta_A$, sendo que $\Theta_H \cup \Theta_A = \Theta$ e $\Theta_H \cap \Theta_A = \varnothing$. Seja $BF_{HA}(x) = f_H(x)/f_A(x)$ a razão de Bayes sobre a hipótese nula e $\ell(\delta)$ a função de perda tal que

$$\ell(\delta) = \begin{cases} 0, & \text{se nenhum erro for cometido} \\ w_A, & \text{se o erro tipo I for cometido} \\ w_H, & \text{se o erro tipo II for cometido.} \end{cases} \tag{2.9}$$

Se π for uma probabilidade priori a favor de H, então a função risco (perda esperada) do teste adaptativo pode ser definida como

$$r(\delta) = w_A \pi \alpha(\delta) + w_H(1-\pi)\beta(\delta), \tag{2.10}$$

em que $\alpha(\delta)$ é a probabilidade do erro tipo I e $\beta(\delta)$ é a probabilidade do erro tipo II.

Nos problemas inferenciais é de interesse que a função de risco seja minimizada. Com isso, o problema de minimizar a função risco do teste adaptativo seria equivalente ao de minimizar a combinação linear dos erros tipo I e II em 2.1, porém considerando $a = \pi w_A$ e $b = (1-\pi)w_H$. Isso faz com que K possa ser escrito como

$$K = \frac{b}{a} = \frac{(1-\pi)w_H}{\pi w_A}. \tag{2.11}$$

Seja um experimento estatístico em que foram coletadas x observações sobre algum fenômeno de interesse. Para um valor observado x_0, é possível definir um espaço Ψ dado pelo conjunto de valores de x cuja razão de Bayes é menor que K vezes a razão de Bayes aplicada em x_0, isto é:

$$\Psi = \{x \in \mathfrak{X} : BF_{HA}(x) \leq K\ BF_{HA}(x_0)\}. \tag{2.12}$$

O valor P (P maiúsculo para diferenciar com o valor p clássico) para o valor observado x_0 é

$$\text{valor P} = \begin{cases} \sum_{x \in \Psi} f_H(x), & \text{se } \mathfrak{X} \text{ é discreto} \\ \int_{x \in \Psi} f_H(x), & \text{se } \mathfrak{X} \text{ é contínuo.} \end{cases} \tag{2.13}$$

O valor P na expressão (2.13) é dado pela probabilidade (preditiva sobre H) de se observar um valor mais extremo daquele observado na amostra (x_0). Note que a ordenação do espaço amostral (para definir o que é mais extremo que o valor observado) é feito pelo fator de Bayes $BF_{HA}(x)$.

Para encontrar os valores α e beta ótimos (níveis de significância adaptativos) defina o conjunto Ψ^*, de todos valores de x cuja razão de Bayes é menor que K:

$$\Psi^* = \{x \in \mathfrak{X} : BF_{HA}(x) < K\}. \tag{2.14}$$

Assim, os valores de alfa e beta ótimos são dados por (Pereira et al. (2017))

$$\alpha^* = \begin{cases} \sum_{x \in \Psi^*} f_H(x), & \text{se } \mathfrak{X} \text{ é discreto} \\ \int_{x \in \Psi^*} f_H(x), & \text{se } \mathfrak{X} \text{ é contínuo} \end{cases} \tag{2.15}$$

$$\beta^* = \begin{cases} \sum_{x \notin \Psi^*} f_A(x), & \text{se } \mathfrak{X} \text{ é discreto} \\ \int_{x \notin \Psi^*} f_A(x), & \text{se } \mathfrak{X} \text{ é contínuo.} \end{cases} \tag{2.16}$$

A hipótese H é rejeitada se $P < \alpha^*$ e não rejeitada se $P \geq \alpha^*$.
Nota: Note que a decisão do teste de hipóteses não depende do cálculo do alfa ótimo, de fato a hipótese H é rejeitada se $BF_{HA}(x_0) < K$.

2.5 Distribuição Beta

A distribuição Beta é uma distribuição de probabilidade contínua definida no intervalo unitário, e é geralmente usada para representar resultados de proporção ou porcentagens.

Se $X \sim \text{Beta}(a, b)$, então a função de densidade de X para $a, b > 0$ é dada por:

$$f_X(x) = f(x; a, b) = \frac{1}{B(a, b)} x^{a-1}(1 - x)^{b-1}, \tag{2.17}$$

sendo $B(a,b)$ a função beta, definida por:

$$B(a,b) = \int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{b-1}\partial u. \tag{2.18}$$

A função de distribuição acumulada de X para $a, b > 0$ é dada por:

$$F_X(x) = F(x;a,b) = \frac{B(x;a,b)}{B(a,b)}, \tag{2.19}$$

sendo a função $B(x;a,b)$ chamada de Beta incompleta e dada pela seguinte expressão:

$$B(x;a,b) = \int_0^x u^{a-1}(1-u)^{b-1}\partial u. \tag{2.20}$$

A função de sobrevivência de X para $a, b > 0$ é dada por:

$$S_X(x) = 1 - F_x(x) = \frac{B(a,b) - B(x;a,b)}{B(a,b)}, \tag{2.21}$$

sendo que o numerador da função de sobrevivência 2.21 pode ser reescrito como:

$$B(a,b) - B(x;a,b) = \int_x^1 u^{a-1}(1-u)^{b-1}\partial u. \tag{2.22}$$

2.6 Integral de Linha

As integrais de linha foram inventadas no começo do século XIX para resolver problemas físicos e desde então apresentam diversas aplicações nas ciências exatas. Uma integral de linha é semelhante à unidimensional, porém ao em vez de se integrar sobre um intervalo [a,b], se integra sobre uma curva C. Inicialmente, considere C como uma curva suave em $\mathbb{R}^2$ dada pelas equações paramétricas

$$x = x(t), \qquad y = y(t) \qquad a \leq t \leq b, \tag{2.23}$$

ou equivalentemente, $\boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j}$. Desse modo, se $s(t)$ é o comprimento de C entre $\boldsymbol{r}(a)$ e $\boldsymbol{r}(t)$, então

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2}. \tag{2.24}$$

Se $f(x,y)$ é uma função contínua cujo domínio inclui a curva C, então é possível mostrar que a integral de linha de $f(x,y)$ sobre C pode ser expressa pela fórmula

$$\int_C f(x,y)\partial s = \int_a^b f(x(t),y(t))\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2}\partial t. \tag{2.25}$$

Analogamente, se C for uma curva no espaço tridimensional que é parametrizado por

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad z = z(t) \qquad a \leq t \leq b, \tag{2.26}$$

então

$$\int_C f(x,y,z)\partial s = \int_a^b f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2}\partial t. \tag{2.27}$$

Exemplo 2 (Anton, H. - Cálculo, Volume 2, Edição 8, pág. 1116): Calcule a integral de linha $\int_C (xy + z^3)\partial s$ de (1,0,0) a (-1,0,π) ao longo da hélice C que é representada pelas equações paramétricas

$$x = \cos t, \qquad y = \text{sen } t, \qquad z = t \qquad 0 \leq t \leq \pi. \tag{2.28}$$

Pela fórmula 2.27,

$$\begin{aligned}
\int_C (xy + z^3)\partial s &= \int_0^\pi (\cos t \text{ sen } t + t^3)\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2}\partial t \\
&= \int_0^\pi (\cos t \text{ sen } t + t^3)\sqrt{(-\text{sen } t)^2 + (\cos t)^2 + 1}\ \partial t \\
&= \sqrt{2}\int_0^\pi (\cos t \text{ sen } t + t^3)\partial t \\
&= \sqrt{2}\left[\frac{\text{sen}^2 t}{2} + \frac{t^4}{4}\right]_0^\pi = \frac{\sqrt{2}\pi^4}{4}.
\end{aligned}$$

3 Metodologia

Neste capitulo será apresentado o teste de significância adaptativo para uma ou duas proporções populacionais. Na Seção 3.1 é descrito o teste de significância adaptativo para uma proporção quando se tem uma hipótese bilateral, enquanto na Seção 3.2 corresponde a uma hipótese unilateral. As Sessões 3.3 e 3.4 seguem a mesma estrutura das 3.1 e 3.2, porém considerando o caso que estão sendo comparadas duas proporções.

3.1 Teste de hipótese bilateral para uma proporção

Considere um experimento no qual tenham x indivíduos com uma característica de interesse dentro de uma amostra de tamanho n. Seja θ um parâmetro desconhecido que representa a proporção da população com tal característica e assuma que, a priori, $\theta \sim$ Beta(a, b).

Caso 1: Seja um teste de hipótese de H: $\theta = \theta_0$ versus A :$\theta \neq \theta_0$. A seguir é apresentado o teste com nível de significância adaptativo para o caso em que o experimento foi realizado para um n fixo com x aleatório, ou seja, com $X|\theta \sim$ Binomial(n, θ), $x \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

Neste caso, a função de verossimilhança é dada por:

$$L(X|\theta) = \binom{n}{x} \theta^x (1-\theta)^{n-x}, \tag{3.1}$$

que ao considerar, a priori, que $\theta \sim$ Beta(a, b), resulta na seguinte distribuição à posteriori:

$$\pi(\theta|X) = \frac{1}{B(a+x, b+n-x)} \theta^{a+x-1}(1-\theta)^{b+n-x-1}, \tag{3.2}$$

isto é, $\theta|X \sim$ Beta$(a+x, b+n-x)$.

A densidade preditiva sobre H é dada por:

$$\begin{aligned} f_H(x) &= P\left[H|X\right] \\ &= P\left[\theta = \theta_0|X\right] \\ &= P\left[X = x, \theta = \theta_0|X\right] \\ &= P\left[X = x|\theta = \theta_0\right] P\left[\theta = \theta_0|X = x\right] \\ &= \binom{n}{x} \theta_0^x (1-\theta_0)^{n-x}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

A densidade preditiva sobre A é dada por:

$$\begin{aligned}
f_A(x) &= P\left[A|X\right] \\
&= P\left[\theta \neq \theta_0|X\right] \\
&= P\left[X = x, \theta \neq \theta_0|X\right] \\
&= \int_0^1 P\left[X = x|\theta\right] P\left[\theta\right] \partial\theta \\
&= \int_0^1 \binom{n}{x} \theta^x (1-\theta)^{n-x} \frac{1}{B(a,b)} \theta^{a-1}(1-\theta)^{b-1} \partial\theta \\
&= \frac{\binom{n}{x}}{B(a,b)} \int_0^1 \theta^{a+x-1}(1-\theta)^{b+n-x-1} \partial\theta \\
&= \binom{n}{x} \frac{B(a+x, b+n-x)}{B(a,b)}. \qquad (3.4)
\end{aligned}$$

A razão de Bayes à favor da hipótese nula é dada por:

$$BF_{HA}(x) = \frac{f_H(x)}{f_A(x)} = \frac{B(a,b)}{B(a+x, b+n-x)} \theta_0^x (1-\theta_0)^{n-x}. \qquad (3.5)$$

Seja uma função perda como em 2.9 e π uma probabilidade a priori a favor de H, então a constante K é dada por 2.1. É possível definir o conjunto de todos os valores de x cuja razão de Bayes é menor que $K\ BF_{HA}(x_0)$, sendo x_0 o número de casos observados no experimento.

$$\Psi = \{x \in \{0, 1, \ldots, n\} : BF_{HA}(x) \leq K\ BF_{HA}(x_0)\}. \qquad (3.6)$$

O valor P para x_0 é dado pela soma dos valores da densidade preditiva sobre a hipótese nula em Ψ, isto é:

$$\text{valor P} = \sum_{x \in \Psi} f_H(x) = \sum_{x \in \Psi} \binom{n}{x} \theta_0^x (1-\theta_0)^{n-x}. \qquad (3.7)$$

O conjunto de todos os valores de x cuja razão de Bayes é menor ou igual do que K é definido por:

$$\Psi^* = \{x \in \{0, 1, \ldots, n\} : BF_{HA}(x) \leq K\}. \qquad (3.8)$$

Assim, segundo 2.15 e 2.16, os valores de alfa e beta ótimos podem ser obtidos pelas expressões a seguir:

$$\alpha^* = \sum_{x \in \Psi^*} \binom{n}{x} \theta_0^x (1-\theta_0)^{n-x} \tag{3.9}$$

$$\beta^* = \sum_{x \notin \Psi^*} \binom{n}{x} \frac{B(a+x, b+n-x)}{B(a,b)}. \tag{3.10}$$

A tomada de decisão se dá comparando o valor P com o alfa ótimo: se P $< \alpha^*$ rejeita-se H e se P $\geq \alpha^*$ não se rejeita H.

Exemplo 3: Considere um teste de proporção tal que X$|\theta \sim$ Binomial(n, θ) e $\theta \sim$ Beta$(a = 1, b = 1)$ (Uniforme(0,1)). Suponha que se deseja testar a hipótese H: $\theta = 0,5$ versus A: $\theta \neq 0,5$ para uma amostra fixada $n = 10$ e que $K = 1$. A seguir é apresentada uma tabela contendo as densidades preditivas, a razão de Bayes e o valor P para todos possíveis valores de x ($x = 0, 1, \ldots, 10$).

Tabela 2: Densidades preditivas, Razão de Bayes e valor P para o teste de hipóteses $H : \theta = 0.5$ versus $A : \theta \neq 0.5$ com uma amostra fixa de tamanho n=10.

x	$f_H(x)$	$f_A(x)$	$BF_{HA}(x)$	P
0	0.00098	0.09091	0.01074	0.00000
1	0.00977	0.09091	0.10742	0.00195
2	0.04395	0.09091	0.48340	0.02148
3	0.11719	0.09091	1.28906	0.10938
4	0.20508	0.09091	2.25586	0.34375
5	0.24609	0.09091	2.70703	0.75391
6	0.20508	0.09091	2.25586	0.34375
7	0.11719	0.09091	1.28906	0.10938
8	0.04395	0.09091	0.48340	0.02148
9	0.00977	0.09091	0.10742	0.00195
10	0.00098	0.09091	0.01074	0.00000

Para o exemplo acima foram obtidos valores de alfa e beta ótimos iguais a $\boldsymbol{\alpha}^* = \mathbf{0.10937}$ e $\boldsymbol{\beta}^* = \mathbf{0.45454}$, respectivamente. Para os valores de x=(0,1,2,8,9,10) a hipótese H é rejeitada porque pode ser visto que P $< \alpha^*$. Enquanto isso para os demais valores x=(3,4,5,6,7) a hipótese H não é rejeitada. Note que a tomada de decisão também pode ser feita rejeitando H se $BF_{HA}(x) < K = 1$ e não rejeitando caso contrário.

Caso 2: Seja um teste de hipótese de H: $\theta = \theta_0$ versus A: $\theta \neq \theta_0$. A seguir é apresentado o teste com nível de significância adaptativo para o caso em que o experimento foi realizado para um x fixo e n aleatório, ou seja, N$|\theta \sim$ Binomial Negativa (x, θ), $n \in \{x, x+1, \ldots\}$.

A função de verossimilhança de X$|\theta$ é dada por:

$$L(N|\theta) = \binom{n-1}{x-1}\theta^x(1-\theta)^{n-x}. \tag{3.11}$$

Como a distribuição Binomial Negativa tem função de verossimilhança proporcional a da distribuição Binomial, então dado uma mesma distribuição a priori $\pi(\theta)$, a distribuição a posteriori obtida por elas é a mesma. Assim,

$$\pi(\theta|N) = \frac{1}{B(a+x, b+n-x)}\theta^{a+x-1}(1-\theta)^{b+n-x-1}, \tag{3.12}$$

isto é, $\theta|N \sim \text{Beta}(a+x, n+b-x)$.

A densidade preditiva sobre H é dada por:

$$\begin{aligned}
f_H(n) &= P\left[H|N\right] \\
&= P\left[\theta = \theta_0|N\right] \\
&= P\left[N = n, \theta = \theta_0|N\right] \\
&= P\left[N = n|\theta = \theta_0\right] P\left[\theta = \theta_0|N = n\right] \\
&= \binom{n-1}{x-1}\theta_0^x(1-\theta_0)^{n-x}.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

A densidade preditiva sobre A é dada por:

$$\begin{aligned}
f_A(n) &= P\left[A|N\right] \\
&= P\left[\theta \neq \theta_0|N\right] \\
&= P\left[N = n, \theta \neq \theta_0|N\right] \\
&= \int_0^1 P\left[N = n|\theta\right] P\left[\theta\right] \partial\theta \\
&= \int_0^1 \binom{n-1}{x-1}\theta^x(1-\theta)^{n-x}\frac{1}{B(a,b)}\theta^{a-1}(1-\theta)^{b-1}\partial\theta \\
&= \frac{\binom{n-1}{x-1}}{B(a,b)}\int_0^1 \theta^{a+x-1}(1-\theta)^{b+n-x-1}\partial\theta \\
&= \binom{n-1}{x-1}\frac{B(a+x, b+n-x)}{B(a,b)}.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

A razão de Bayes à favor da hipótese nula é dada por:

$$BF_{HA}(n) = \frac{f_H(n)}{f_A(n)} = \frac{B(a,b)}{B(a+x, b+n-x)}\theta_0^x(1-\theta_0)^{n-x}. \tag{3.15}$$

Seja a função de perda dada pela expressão 2.11. Desse modo, é possível definir o conjunto de todos valores de n cuja razão de Bayes é menor que $K\ BF_{HA}(n_0)$, sendo n_0 o número de ensaios observados no experimento.

$$\Psi = \{n \in \{x, x+1, \dots\} : BF_{HA}(n) \leq K\ BF_{HA}(n_0)\}. \tag{3.16}$$

O valor P para n_0 é dado pela soma dos valores da densidade preditiva sobre a hipótese nula em Ψ, isto é:

$$\text{valor P} = \sum_{n \in \Psi} f_H(n) = \sum_{n \in \Psi} \binom{n-1}{x-1} \theta_0^x (1-\theta_0)^{n-x}. \tag{3.17}$$

O conjunto de todos os valores de n cuja razão de Bayes é menor do que K é definido por:

$$\Psi^* = \{n \in \{x, x+1, \dots\} : BF_{HA}(n) \leq K\}. \tag{3.18}$$

Assim, segundo 2.15 e 2.16, os valores de alfa e beta ótimos podem ser obtidos pelas expressões a seguir:

$$\alpha^* = \sum_{n \in \Psi^*} \binom{n-1}{x-1} \theta_0^x (1-\theta_0)^{n-x} \tag{3.19}$$

$$\beta^* = \sum_{n \notin \Psi^*} \binom{n-1}{x-1} \frac{B(a+x, b+n-x)}{B(a,b)}. \tag{3.20}$$

A tomada de decisão se dá comparando o valor P com o alfa ótimo: se P $< \alpha^*$ rejeita-se H e se P $\geq \alpha^*$ não se rejeita H.

Exemplo 4: Considere um teste de proporção tal que N$|\theta \sim$ Binomial Negativa(x, θ) e $\theta \sim$ Beta$(a = 1, b = 1)$ (Uniforme(0,1)). Suponha que se deseja testar a hipótese H: $\theta = 0,5$ versus A: $\theta \neq 0,5$ para x=5 casos de um fenômeno de interesse e que $K = 1$. A Tabela 3 apresenta as densidades preditivas, a razão de Bayes e o valor P para os valores de n.

Tabela 3: Densidades preditivas, Razão de Bayes e valor P para o teste de hipóteses $H : \theta = 0.5$ versus $A : \theta \neq 0.5$ com **x=5** indivíduos com a característica de interesse.

n	$f_H(n)$	$f_A(n)$	$BF_{HA}(n)$	P
5	0.03125	0.16667	0.18750	0.00357
6	0.07812	0.11905	0.65625	0.05574
7	0.11719	0.08929	1.31250	0.16858
8	0.13672	0.06944	1.96875	0.35996
9	0.13672	0.05556	2.46094	0.55710
10	0.12305	0.04545	2.70703	0.77438
11	0.10254	0.03788	2.70703	0.89743
12	0.08057	0.03205	2.51367	0.69382
13	0.06042	0.02747	2.19946	0.49667
14	0.04364	0.02381	1.83289	0.31632
15	0.03055	0.02083	1.46631	0.28577
16	0.02083	0.01838	1.13306	0.14775
17	0.01389	0.01634	0.84979	0.13387
18	0.00908	0.01462	0.62100	0.04666
19	0.00584	0.01316	0.44357	0.04083
20	0.00370	0.01190	0.31050	0.03713
21	0.00231	0.01082	0.21347	0.03482
22	0.00143	0.00988	0.14441	0.00214
23	0.00087	0.00906	0.09627	0.00127
24	0.00053	0.00833	0.06334	0.00074
25	0.00032	0.00769	0.04117	0.00043
26	0.00019	0.00712	0.02647	0.00024
27	0.00011	0.00661	0.01684	0.00013
28	0.00007	0.00616	0.01062	0.00006
29	0.00004	0.00575	0.00664	0.00002
30	0.00002	0.00538	0.00411	0.00000
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Para o exemplo acima foram obtidos valores de alfa e beta ótimos iguais a $\boldsymbol{\alpha}^* = \mathbf{0.14775}$ e $\boldsymbol{\beta}^* = \mathbf{0.42016}$, respectivamente. Para os valores de n=(5,6)∪(17,18,19,...) a hipótese H é rejeitada porque pode ser visto que P $< \alpha^*$. Enquanto isso para os demais valores n=(7,8,...,16) a hipótese H não é rejeitada. Note que a tomada de decisão também pode ser feita rejeitando H se $BF_{HA}(n) < K = 1$ e não rejeitando caso contrário. Com isso, de modo geral, é possível perceber que para qualquer $n \geq 17$ a hipótese H sempre será rejeitada porque $BF_{HA}(n) < 1$.

Observe que a tomada de decisão do Exemplo 3 para $\boldsymbol{x} = \mathbf{5}$ é equivalente a Exemplo 4 para $\boldsymbol{n} = \mathbf{10}$ (mesmo apresentando diferentes valores do alfa ótimo), pois a razão de Bayes desses exemplos é igual quando o número de indivíduos com a característica de interesse e o tamanho amostral coincidem. Pelo fato desses dois experimentos terem verossimilhanças proporcionais e apresentarem a mesma razão de Bayes (e consequentemente resultarem na mesma decisão), podemos dizer que esse teste não viola o Princípio da Verossimilhança.

3.2 Teste de hipótese unilateral para uma proporção

Caso 3: Seja um teste de hipótese de H: $\theta \leq \theta_0$ versus A :$\theta > \theta_0$. A seguir é apresentado o teste com nível de significância adaptativo para o caso em que $X|\theta \sim$ Binomial(n, θ), $x \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

A função de verossimilhança de $X|\theta$ é dada por 3.1 e será considerado, a priori, que $\theta \sim$ Beta(a, b). Como nesse caso as hipóteses apresentadas são compostas, então é preciso obter densidades prioris sobre as hipóteses nula e alternativa para realização do cálculo das densidades preditivas. Com isso, as densidades prioris sobre H e A são obtidas pelas probabilidades condicionais de θ dado H e θ dado A, respectivamente. Note que tais cálculos não foram feitos nos casos anteriores porque por θ ter uma distribuição contínua, então $P(\theta|\theta = \theta_0) = P(\theta|\theta \neq \theta_0)$.

A densidade a priori sobre a hipótese H é dada por:

$$\begin{aligned}
g_H(\theta) &= P(\theta|\theta \leq \theta_0) \\
&= \frac{P(\theta, \theta \leq \theta_0)}{P(\theta \leq \theta_0)} \\
&= \frac{g(\theta; a, b)\ I_\theta(0, \theta_0)}{\displaystyle\int_0^{\theta_0} g(\theta; a, b)\partial\theta} \\
&= \frac{\theta^{a-1}(1-\theta)^{b-1}\ I_\theta(0, \theta_0)}{\displaystyle\int_0^{\theta_0} \theta^{a-1}(1-\theta)^{b-1}\partial\theta} \\
&= \frac{\theta^{a-1}(1-\theta)^{b-1}\ I_\theta(0, \theta_0)}{B(\theta_0; a, b)},
\end{aligned} \tag{3.21}$$

em que $I(.)$ é a função indicadora.

A densidade a priori sobre a hipótese A é dada por:

$$\begin{aligned}
g_A(\theta) &= P(\theta|\theta > \theta_0) \\
&= \frac{P(\theta, \theta > \theta_0)}{P(\theta > \theta_0)} \\
&= \frac{g(\theta; a, b)\ I_\theta[\theta_0, 1)}{\displaystyle\int_{\theta_0}^{1} g(\theta; a, b)\partial\theta} \\
&= \frac{\theta^{a-1}(1-\theta)^{b-1}\ I_\theta[\theta_0, 1)}{\displaystyle\int_0^{1} \theta^{a-1}(1-\theta)^{b-1}\partial\theta - \int_0^{\theta_0} \theta^{a-1}(1-\theta)^{b-1}\partial\theta} \\
&= \frac{\theta^{a-1}(1-\theta)^{b-1}\ I_\theta[\theta_0, 1)}{B(a, b) - B(\theta_0; a, b)},
\end{aligned} \tag{3.22}$$

em que $I(.)$ é a função indicadora.

A densidade preditiva sobre H é dada por:

$$
\begin{aligned}
f_H(x) &= P\left[H|X\right] \\
&= P\left[\theta \leq \theta_0|X\right] \\
&= P\left[X = x, \theta \leq \theta_0|X\right] \\
&= \int_0^{\theta_0} L(X|\theta) g_H(\theta) \partial\theta \\
&= \int_0^{\theta_0} \binom{n}{x} \theta^x (1-\theta)^{n-x} \frac{1}{B(\theta_0; a, b)} \theta^{a-1} (1-\theta)^{b-1} \partial\theta \\
&= \binom{n}{x} \frac{}{B(\theta_0; a, b)} \int_0^{\theta_0} \theta^{a+x} (1-\theta)^{b+n-x-1} \partial\theta \\
&= \binom{n}{x} \frac{B(\theta_0; a+x, b+n-x)}{B(\theta_0; a, b)}. \qquad (3.23)
\end{aligned}
$$

A densidade preditiva sobre A é dada por:

$$
\begin{aligned}
f_A(x) &= P\left[A|X\right] \\
&= P\left[\theta > \theta_0|X\right] \\
&= P\left[X = x, \theta > \theta_0|X\right] \\
&= \int_{\theta_0}^{1} L(X|\theta) g_A(\theta) \partial\theta \\
&= \int_0^{1} L(X|\theta) g_A(\theta) \partial\theta - \int_0^{\theta_0} L(X|\theta) g_A(\theta) \partial\theta \\
&= \binom{n}{x} \frac{B(a+x, b+n-x)}{B(a,b) - B(\theta_0; a, b)} - \binom{n}{x} \frac{B(\theta_0; a+x, b+n-x)}{B(a,b) - B(\theta_0; a, b)} \\
&= \binom{n}{x} \frac{B(a+x, b+n-x) - B(\theta_0; a+x, b+n-x)}{B(a,b) - B(\theta_0; a, b)} \qquad (3.24)
\end{aligned}
$$

A razão de Bayes à favor da hipótese nula é dada por:

$$
BF_{HA}(x) = \frac{f_H(x)}{f_A(x)} = \frac{B(\theta_0; a+x, b+n-x)\Big(B(a,b) - B(\theta_0; a, b)\Big)}{B(\theta_0; a, b)\Big(B(a+x, b+n-x) - B(\theta_0; a+x, b+n-x)\Big)}. \qquad (3.25)
$$

Sejam os conjuntos Ψ e Ψ^* dados pelas Expressões 3.6 e 3.8, respectivamente. Desse modo, segundo as Expressões 2.13, 2.15 e 2.16, o valor valor P, alfa e beta ótimos são dados por:

$$\text{valor P} = \sum_{x \in \Psi} \binom{n}{x} \frac{B(\theta_0; a+x, b+n-x)}{B(\theta_0; a, b)}. \tag{3.26}$$

$$\alpha^* = \sum_{x \in \Psi^*} \binom{n}{x} \frac{B(\theta_0; a+x, b+n-x)}{B(\theta_0; a, b)} \tag{3.27}$$

$$\beta^* = \sum_{x \notin \Psi^*} \binom{n}{x} \frac{B(\theta_0; a+x, b+n-x) - B(a+x, b+n-x)}{B(a,b) - B(\theta_0; a, b)} \tag{3.28}$$

A tomada de decisão se dá comparando o valor P com o alfa ótimo: se P $< \alpha^*$ rejeita-se H e se P $\geq \alpha^*$ não se rejeita H.

Exemplo 5: Considere um teste de proporção tal que X$|\theta \sim$ Binomial(n, θ) e $\theta \sim$ Beta$(a = 1, b = 1)$ (Uniforme(0,1)). Suponha que se deseja testar a hipótese H: $\theta \leq 0,5$ versus A: $\theta > 0,5$ para uma amostra fixada $n = 10$ e que $K = 1$. A seguir é apresentada uma tabela contendo as densidades preditivas, a razão de Bayes e o valor P para todos possíveis valores de x ($x = 0, 1, \ldots, 10$).

Tabela 4: Densidades preditivas, Razão de Bayes e valor P para o teste de hipóteses $H : \theta \leq 0.5$ versus $A : \theta > 0.5$ com uma amostra fixa de tamanho n=10.

x	$f_H(x)$	$f_A(x)$	$BF_{HA}(x)$	P
0	0.18173	0.00009	2047.00000	0.81827
1	0.18075	0.00107	169.66667	0.63752
2	0.17587	0.00595	29.56716	0.46165
3	0.16122	0.02060	7.82759	0.30043
4	0.13192	0.04989	2.64413	0.16850
5	0.09091	0.09091	1.00000	0.07759
6	0.04989	0.13192	0.37820	0.02770
7	0.02060	0.16122	0.12775	0.00710
8	0.00595	0.17587	0.03382	0.00115
9	0.00107	0.18075	0.00589	0.00009
10	0.00009	0.18173	0.00049	0.00000

Para o exemplo acima foram obtidos valores de alfa e beta ótimos iguais a $\boldsymbol{\alpha}^* = \mathbf{0.07759}$ e $\boldsymbol{\beta}^* = \mathbf{0.16850}$. Para os valores de x=(6,7,8,9,10) a hipótese H é rejeitada porque pode ser visto que P $< \alpha^*$. Enquanto isso para os demais valores x=(0,1,2,3,4,5) a hipótese H não é rejeitada. Note que a tomada de decisão também pode ser feita rejeitando H se $BF_{HA}(x) < K = 1$ e não rejeitando caso contrário.

Caso 4: Seja um teste de hipótese de H: $\theta \leq \theta_0$ versus A :$\theta > \theta_0$. A seguir é apresentado o teste com nível de significância adaptativo para o caso em que $N|\theta \sim$ Binomial Negativa (x, θ), $n \in \{x, x+1, \dots\}$.

Neste caso, a função de verossimilhança é dada por 3.11 e será considerado, a priori, que $\theta \sim$ Beta(a, b). Desse modo, a densidade a priori sobre a hipótese H será equivalente a 3.21 e a densidade a priori sobre a hipótese A equivalente a 3.22.

A densidade preditiva sobre H é dada por:

$$\begin{aligned} f_H(n) &= P\left[H|N\right] \\ &= P\left[\theta \leq \theta_0|N\right] \\ &= P\left[N = n, \theta \leq \theta_0|N\right] \\ &= \int_0^{\theta_0} L(N|\theta)g_H(\theta)\partial\theta \\ &= \int_0^{\theta_0} \binom{n-1}{x-1}\theta^x(1-\theta)^{n-x}\frac{1}{B(\theta_0; a, b)}\theta^{a-1}(1-\theta)^{b-1}\partial\theta \\ &= \binom{n-1}{x-1}\frac{}{B(\theta_0; a, b)}\int_0^{\theta_0} \theta^{a+x}(1-\theta)^{b+n-x-1}\partial\theta \\ &= \binom{n-1}{x-1}\frac{B(\theta_0; a+x, b+n-x)}{B(\theta_0; a, b)}. \end{aligned} \tag{3.29}$$

A densidade preditiva sobre A é dada por:

$$\begin{aligned} f_A(n) &= P\left[A|N\right] \\ &= P\left[\theta > \theta_0|N\right] \\ &= P\left[N = n, \theta > \theta_0|N\right] \\ &= \int_{\theta_0}^{1} L(N|\theta)g_A(\theta)\partial\theta \\ &= \int_0^1 L(N|\theta)g_A(\theta)\partial\theta - \int_0^{\theta_0} L(N|\theta)g_A(\theta)\partial\theta \\ &= \binom{n-1}{x-1}\frac{B(a+x, b+n-x)}{B(a,b) - B(\theta_0; a, b)} - \binom{n-1}{x-1}\frac{B(\theta_0; a+x, b+n-x)}{B(a,b) - B(\theta_0; a, b)} \\ &= \binom{n-1}{x-1}\frac{B(a+x, b+n-x) - B(\theta_0; a+x, b+n-x)}{B(a,b) - B(\theta_0; a, b)}. \end{aligned} \tag{3.30}$$

A razão de Bayes à favor da hipótese nula é dada por:

$$BF_{HA}(n) = \frac{f_H(n)}{f_A(n)} = \frac{B(\theta_0; a+x, b+n-x)\Big(B(a,b) - B(\theta_0; a, b)\Big)}{B(\theta_0; a, b)\Big(B(a+x, b+n-x) - B(\theta_0; a+x, b+n-x)\Big)}. \tag{3.31}$$

Sejam os conjuntos Ψ e Ψ^* dados pelas expressões 3.16 e 3.18, respectivamente. Desse modo, os valores do valor P, alfa e beta ótimos são dados por:

$$\text{valor P} = \sum_{n \in \Psi} \binom{n-1}{x-1} \frac{B(\theta_0; a+x, b+n-x)}{B(\theta_0; a, b)}. \tag{3.32}$$

$$\alpha^* = \sum_{n \in \Psi^*} \binom{n-1}{x-1} \frac{B(\theta_0; a+x, b+n-x)}{B(\theta_0; a, b)} \tag{3.33}$$

$$\beta^* = \sum_{n \in \Psi^*} \binom{n-1}{x-1} \frac{B(\theta_0; a+x, b+n-x) - B(a+x, b+n-x)}{B(a,b) - B(\theta_0; a, b)} \tag{3.34}$$

A tomada de decisão se dá comparando o valor P com o alfa ótimo: se P $< \alpha^*$ rejeita-se H e se P $\geq \alpha^*$ não se rejeita H.

Exemplo 6: Considere um teste de proporção tal que N$|\theta \sim$ Binomial Negativa(x, θ) e $\theta \sim$ Beta$(a = 1, b = 1)$ (Uniforme(0,1)). Suponha que se deseja testar a hipótese H: $\theta \leq 0,5$ versus A: $\theta > 0,5$ para x=5 casos de um fenômeno de interesse e que $K = 1$. A seguir é apresentada uma tabela contendo as densidades preditivas, a razão de Bayes e o valor P para os valores de n.

Tabela 5: Densidades preditivas, Razão de Bayes e valor P para o teste de hipóteses $H : \theta \leq 0.5$ versus $A : \theta > 0.5$ com **x=5** indivíduos com a característica de interesse.

n	$f_H(n)$	$f_A(n)$	$BF_{HA}(n)$	P
5	0.00521	0.32812	0.01587	0.00000
6	0.01488	0.22321	0.06667	0.00521
7	0.02581	0.15276	0.16895	0.02009
8	0.03526	0.10362	0.34031	0.04590
9	0.04188	0.06923	0.60502	0.08116
10	0.04545	0.04545	1.00000	0.12305
11	0.04642	0.02933	1.58260	0.16850
12	0.04548	0.01862	2.44202	0.21493
13	0.04330	0.01165	3.71754	0.26040
14	0.04043	0.00718	5.62783	0.30370
15	0.03729	0.00438	8.51866	0.34414
16	0.03413	0.00264	12.94086	0.38143
17	0.03111	0.00157	19.77869	0.41555
18	0.02831	0.00093	30.46231	0.44666
19	0.02577	0.00054	47.32147	0.47497
20	0.02349	0.00032	74.17752	0.50074
21	0.02146	0.00018	117.33942	0.52423
22	0.01966	0.00010	187.28802	0.54570
23	0.01806	0.00006	301.53748	0.56535
24	0.01663	0.00003	489.51884	0.58341
25	0.01537	0.00002	800.95100	0.60004
26	0.01423	0.00001	1320.24870	0.61541
27	0.01322	0.00001	2191.41948	0.62964
28	0.01231	0.00000	3661.24803	0.64286
29	0.01149	0.00000	6154.47059	0.65518
30	0.01075	0.00000	10405.08839	0.66667
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Para o exemplo acima foram obtidos valores de alfa e beta ótimos iguais a $\boldsymbol{\alpha}^* = \mathbf{0.12304}$ e $\boldsymbol{\beta}^* = \mathbf{0.12304}$. Para os valores de n=(5,6,7,8,9) a hipótese H é rejeitada porque pode ser visto que P $< \alpha^*$. Enquanto isso para os demais valores n=(10,11,...,29,30) a hipótese H não é rejeitada. Note que a tomada de decisão também pode ser feita rejeitando H se $BF_{HA}(n) < K = 1$ e não rejeitando caso contrário. Com isso, de modo geral, é possível perceber que para qualquer $n \geq 10$ a hipótese H será não rejeitada porque $BF_{HA}(n) \geq 1$.

Observe que a tomada de decisão do Exemplo 5 para $\boldsymbol{x} = \mathbf{5}$ é equivalente a do Exemplo 6 para $\boldsymbol{n} = \mathbf{10}$, pois a razão de Bayes desses exemplos é igual quando o número de indivíduos com a característica de interesse e o tamanho amostral coincidem (satisfaz o principio da verossimilhança).

3.3 Teste de hipótese bilateral para duas proporções

Considere um experimento no qual tenham x indivíduos com uma característica de interesse dentro de uma amostra de tamanho n_1 e y indivíduos com outra característica de interesse dentro de uma amostra de tamanho n_2. Sejam θ_1 e θ_2 parâmetros desconhecidos que representam as proporções de cada característica de interesse nas Populações 1 e 2, respectivamente. Assuma que, a priori, $\theta_1 \sim \text{Beta}(a_1, b_1)$, $\theta_2 \sim \text{Beta}(a_2, b_2)$ e que as características associadas a x e y sejam independentes.

Caso 5: Seja um teste de hipótese de H: $\theta_1 = \theta_2$ versus A :$\theta_1 \neq \theta_2$. A seguir é apresentado o teste com nível de significância adaptativo para o caso em que o experimento foi realizado para n_1 e n_2 fixos com x e y aleatórios, ou seja, com $X|\theta_1 \sim \text{Binomial}(n_1, \theta_1)$, $x \in \{0, 1, \dots, n_1\}$, $Y|\theta_2 \sim \text{Binomial}(n_2, \theta_2)$ e $y \in \{0, 1, \dots, n_2\}$.

Como está sendo considerado no problema que X e Y são independentes, isso implica que $P(X = x, Y = y|\theta_1, \theta_2) = P(X = x|\theta_1)P(Y = y|\theta_2)$. Sendo assim, a função de verossimilhança de (X, Y) é dada por:

$$L(X, Y|\theta_1, \theta_2) = \binom{n_1}{x}\binom{n_2}{y}\theta_1^x(1-\theta_1)^{n_1-x}\theta_2^y(1-\theta_2)^{n_2-y}, \tag{3.35}$$

Considerando que as prioris θ_1 e θ_2 são independentes, então a distribuição conjunta de (θ_1, θ_2) pode ser escrita como $g(\theta_1, \theta_2; a_1, b_1, a_2, b_2) = g(\theta_1; a_1, b_1)g(\theta_2; a_2, b_2)$, ou seja,

$$g(\theta_1, \theta_2; a_1, b_1, a_2, b_2) = \frac{\theta_1^{a_1-1}(1-\theta_1)^{b_1-1}\theta_2^{a_2-1}(1-\theta_2)^{a_2-1}}{B(a_1, b_1)B(a_2, b_2)}, \qquad 0 < \theta_1, \theta_2 < 1. \tag{3.36}$$

Com isso, a densidade a priori sobre a hipótese H é dada pela probabilidade condicional da distribuição conjunta de (θ_1, θ_2) dado a hipótese H.

$$\begin{aligned}
g_H(\theta) &= P(\theta_1, \theta_2|\theta_1 = \theta_2) \\
&= \frac{P(\theta_1, \theta_2, \theta_1 = \theta_2)}{\displaystyle\int_{\mathrm{H}} g(\theta_1; a_1, b_1)g(\theta_2; a_2, b_2)\partial s} \\
&= g(\theta_1; a_1, b_1)g(\theta_2; a_2, b_2)I_{\theta_1=\theta_2}(0,1)\frac{B(a_1, b_1)B(a_2, b_2)}{\sqrt{2}B(a_1 + a_2 - 1, b_1 + b_2 - 1)} \\
&= \frac{\theta^{a_1+a_2-2}(1-\theta)^{b_1+b_2-2}I_\theta(0,1)}{\sqrt{2}B(a_1 + a_2 - 1, b_1 + b_2 - 1)} \\
&= \frac{\theta^{a_1+a_2-2}(1-\theta)^{b_1+b_2-2}}{\sqrt{2}B(a_1 + a_2 - 1, b_1 + b_2 - 1)}, \qquad 0 < \theta < 1.
\end{aligned} \tag{3.37}$$

Note que o cálculo de $\int_{\mathrm{H}} g(\theta_1; a_1, b_1)g(\theta_2; a_2, b_2)\partial s$ é realizado através de uma integral de linha. Considere a integral $\int_{\mathrm{H}} g(\theta_1; a_1, b_1)g(\theta_2; a_2, b_2)\partial s$ de (0,0) a (1,1) ao longo do caminho H: $\theta_1 = \theta_2$, que é representado pelas equações paramétricas

$$\theta_1 = \theta, \qquad \theta_2 = \theta \qquad (0 \leq \theta \leq 1). \tag{3.38}$$

Pela fórmula 2.25

$$\begin{aligned}
P(\theta_1 = \theta_2) &= \int_C g(\theta_1; a_1, b_1)g(\theta_2; a_2, b_2)\partial s \\
&= \int_0^1 g(\theta; a_1, b_1)g(\theta; a_2, b_2)\sqrt{\left(\frac{\partial\theta_1}{\partial\theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial\theta_2}{\partial\theta}\right)^2}\partial\theta \\
&= \sqrt{2}\int_0^1 g(\theta; a_1, b_1)g(\theta; a_2, b_2)\partial\theta \\
&= \sqrt{2}\int_0^1 \frac{\theta^{a_1+a_2-2}(1-\theta)^{b_1+b_2-2}}{B(a_1, b_1)B(a_2, b_2)}\partial\theta \\
&= \frac{\sqrt{2}B(a_1 + a_2 - 1, b_1 + b_2 - 1)}{B(a_1, b_1)B(a_2, b_2)}.
\end{aligned} \tag{3.39}$$

De modo geral, é possível observar que para qualquer função $g(\theta_1, \theta_2)$ envolvendo a parametrização 3.38, a integral de linha $\int_C g(\theta_1, \theta_2)\partial s$ pode ser escrita como

$$\int_C g(\theta_1, \theta_2)\partial s = \sqrt{2}\int_0^1 g(\theta, \theta)\partial\theta. \tag{3.40}$$

Por outro lado, a densidade priori sobre a hipótese A é dada pela probabilidade condicional da distribuição conjunta de (θ_1, θ_2) dado a hipótese A.

$$\begin{aligned}
g_A(\theta_1, \theta_2) &= P(\theta_1, \theta_2 | \theta_1 \neq \theta_2) \\
&= \frac{P(\theta_1, \theta_2, \theta_1 \neq \theta_2)}{P(\theta_1 \neq \theta_2)} \\
&= \frac{g(\theta_1; a_1, b_1)g(\theta_2; a_2, b_2)I_{\theta_1 \neq \theta_2}(0, 1)}{\displaystyle\iint\limits_{0 \leq \theta_1 \neq \theta_2 \leq 1} g(\theta_1; a_1, b_1)g(\theta_2; a_2, b_2)\partial\theta_1\partial\theta_2} \\
&= \frac{\theta_1^{a_1-1}(1-\theta_1)^{b_1-1}\theta_2^{a_2-1}(1-\theta_2)^{a_2-1}I_{\theta_1}(0,1)I_{\theta_2}(0,1)}{\displaystyle\int_0^1\int_0^1 \theta_1^{a_1-1}(1-\theta_1)^{b_1-1}\theta_2^{a_2-1}(1-\theta_2)^{b_2-1}\partial\theta_1\partial\theta_2} \\
&= \frac{\theta_1^{a_1-1}(1-\theta_1)^{b_1-1}\theta_2^{a_2-1}(1-\theta_2)^{a_2-1}}{B(a_1, b_1)B(a_2, b_2)}, \qquad 0 < \theta_1, \theta_2 < 1.
\end{aligned} \tag{3.41}$$

A densidade preditiva sobre H é dada por:

$$
\begin{aligned}
f_H(x,y) &= P\left[H|X,Y\right] \\
&= P\left[\theta_1=\theta_2|X,Y\right] \\
&= P\left[X=x,Y=y,\theta_1=\theta_2|X,Y\right] \\
&= \int_C L(X,Y|\theta_1,\theta_2)g_H(\theta_1,\theta_2)\partial s \\
&= \sqrt{2}\int_0^1 L(X,Y|\theta)g_H(\theta)\partial\theta \\
&= \int_0^1 \binom{n_1}{x}\binom{n_2}{y}\theta^{x+y-1}(1-\theta)^{n_1-x+n_2-y-1}\frac{\theta^{a_1+a_2-1}(1-\theta)^{b_1+b_2-1}}{B(a_1+a_2-1,b_1+b_2-1)}\partial\theta \\
&= \binom{n_1}{x}\binom{n_2}{y}\frac{\int_0^1 \theta^{a_1+x+a_2+y-2}(1-\theta)^{b_1+n_1-x+b_2+n_2-y-2}\partial\theta}{B(a_1+a_2-1,b_1+b_2-1)} \\
&= \binom{n_1}{x}\binom{n_2}{y}\frac{B(a_1+x+a_2+y-1,b_1+n_1-x+b_2+n_2-y-1)}{B(a_1+a_2-1,b_1+b_2-1)}. \qquad (3.42)
\end{aligned}
$$

A densidade preditiva sobre A é dada por:

$$
\begin{aligned}
f_A(x,y) &= P\left[A|X,Y\right] \\
&= P\left[\theta_1\neq\theta_2|X,Y\right] \\
&= P\left[X=x,Y=y,\theta_1\neq\theta_2|X,Y\right] \\
&= \int_0^1\int_0^1 L(X,Y|\theta_1,\theta_2)g_A(\theta_1,\theta_2)\partial\theta_1\partial\theta_2 \\
&= \int_0^1\int_0^1 \binom{n_1}{x}\binom{n_2}{y}\theta_1^x(1-\theta_1)^{n_1-x}\theta_2^y(1-\theta_2)^{n_2-y}\frac{\theta_1^{a_1-1}(1-\theta_1)^{b_1-1}\theta_2^{a_2-1}(1-\theta_2)^{a_2-1}}{B(a_1,b_1)B(a_2,b_2)}\partial\theta_1\partial\theta_2 \\
&= \binom{n_1}{x}\binom{n_2}{y}\frac{\int_0^1 \theta_2^{a_2+y-1}(1-\theta_2)^{b_2+n_2-y-1}\int_0^1 \theta_1^{a_1+x-1}(1-\theta_1)^{b_1+n_1-x-1}\partial\theta_1\partial\theta_2}{B(a_1,b_1)B(a_2,b_2)} \\
&= \binom{n_1}{x}\binom{n_2}{y}\frac{B(a_1+x,b_1+n_1-x)}{B(a_1,b_1)B(a_2,b_2)}\int_0^1 \theta_1^{a_1+x-1}(1-\theta_1)^{b_1+n_1-x-1}\partial\theta_2 \\
&= \binom{n_1}{x}\binom{n_2}{y}\frac{B(a_1+x,b_1+n_1-x)B(a_2+y,b_2+n_2-y)}{B(a_1,b_1)B(a_2,b_2)}. \qquad (3.43)
\end{aligned}
$$

Assim, a razão de Bayes à favor da hipótese nula é dada por:

$$
BF_{HA}(x,y)=\frac{f_H(x,y)}{f_A(x,y)}=\frac{B(a_1+x+a_2+y-1,b_1+n_1-x+b_2+n_2-y-1)B(a_1,b_1)B(a_2,b_2)}{B(a_1+a_2-1,b_1+b_2-1)B(a_1+x,b_1+n_1-x)B(a_2+y,b_2+n_2-y)}. \qquad (3.44)
$$

Seja a função de perda dada pela expressão 2.11. É possível definir o conjunto Ψ,de todos os pares (x, y) cuja razão de Bayes é menor que $K\ BF_{HA}(x_0, y_0)$, sendo x_0 e y_0 o número de casos observados nas amostras das Populações 1 e 2, respectivamente.

$$\Psi = \{(x, y) \in \{0, 1, \ldots, n_1\} \times \{0, 1, \ldots, n_2\} : BF_{HA}(x, y) \leq K\ BF_{HA}(x_0, y_0)\}. \quad (3.45)$$

O valor P para um par x_0, y_0 é dado pela soma dos pares de (x, y) pertencentes a Ψ aplicadas na densidade preditiva sobre a hipótese nula, isto é,

$$\text{valor P} = \sum_{(x,y)\in\Psi} f_H(x, y) = \sum_{(x,y)\in\Psi} \binom{n_1}{x}\binom{n_2}{y} \frac{B(a_1 + x + a_2 + y - 1, b_1 + n_1 - x + b_2 + n_2 - y - 1)}{B(a_1 + a_2 - 1, b_1 + b_2 - 1)}. \quad (3.46)$$

O conjunto de todos os pares (x, y) cuja razão de Bayes é menor do que K é definido por:

$$\Psi^* = \{(x, y) \in \{0, 1, \ldots, n_1\} \times \{0, 1, \ldots, n_2\} : BF_{HA}(x, y) \leq K\}. \quad (3.47)$$

Assim, segundo 2.15 e 2.16, os valores de alfa e beta ótimos podem ser obtidos pelas expressões a seguir:

$$\alpha^* = \sum_{(x,y)\in\Psi^*} \binom{n_1}{x}\binom{n_2}{y} \frac{B(a_1 + x + a_2 + y - 1, b_1 + n_1 - x + b_2 + n_2 - y - 1)}{B(a_1 + a_2 - 1, b_1 + b_2 - 1)} \quad (3.48)$$

$$\beta^* = \sum_{(x,y)\notin\Psi^*} \binom{n_1}{x}\binom{n_2}{y} \frac{B(a_1 + x, b_1 + n_1 - x)B(a_2 + y, b_2 + n_2 - y)}{B(a_1, b_1)B(a_2, b_2)}. \quad (3.49)$$

A tomada de decisão se dá comparando o valor P com o alfa ótimo: se P $< \alpha^*$ rejeita-se H e se P $\geq \alpha^*$ não se rejeita H.

Exemplo 7: Considere um teste de proporção tal que $X|\theta_1 \sim \text{Binomial}(n_1, \theta_1)$, $Y|\theta_2 \sim \text{Binomial}(n_2, \theta_2)$, $\theta_1 \sim \text{Beta}(a_1 = 1, b_1 = 1)$, $\theta_2 \sim \text{Beta}(a_2 = 1, b_2 = 1)$ e que X e Y sejam independentes. Suponha que se deseja testar a hipótese H: $\theta_1 = \theta_2$ versus A: $\theta_1 \neq \theta_2$ para amostras fixadas $n_1 = 10$ e $n_2 = 10$ das Populações 1 e 2, respectivamente, e que $K = 1$. A seguir é apresentada uma tabela contendo as densidades preditivas, a razão de Bayes e o valor P para todos possíveis valores de x ($x = 0, 1, \ldots, 10$) e y ($y = 0, 1, \ldots, 10$).

Tabela 6: Densidades preditivas, Razão de Bayes e valor P do teste de hipóteses $H: \theta_1 = \theta_2$ versus $A: \theta_1 \neq \theta_2$ para todas possíveis amostras de $n_1 = n_2 = 10$.

x	y	f_H	f_A	R_{HA}	P	x	y	f_H	f_A	R_{HA}	P	x	y	f_H	f_A	R_{HA}	P	x	y	f_H	f_A	R_{HA}	P
0	0	0.048	0.008	5.762	0.905	2	9	0.000	0.008	0.015	0.000	5	7	0.011	0.008	1.383	0.232	8	5	0.007	0.008	0.843	0.107
0	1	0.024	0.008	2.881	0.759	2	10	0.000	0.008	0.002	0.000	5	8	0.007	0.008	0.843	0.107	8	6	0.012	0.008	1.405	0.277
0	2	0.011	0.008	1.365	0.164	3	0	0.005	0.008	0.607	0.062	5	9	0.003	0.008	0.375	0.027	8	7	0.017	0.008	2.007	0.509
0	3	0.005	0.008	0.607	0.062	3	1	0.012	0.008	1.427	0.324	5	10	0.001	0.008	0.094	0.005	8	8	0.020	0.008	2.408	0.720
0	4	0.002	0.008	0.250	0.019	3	2	0.017	0.008	2.007	0.509	6	0	0.000	0.008	0.031	0.001	8	9	0.019	0.008	2.274	0.644
0	5	0.001	0.008	0.094	0.005	3	3	0.018	0.008	2.141	0.609	6	1	0.001	0.008	0.156	0.008	8	10	0.011	0.008	1.365	0.164
0	6	0.000	0.008	0.031	0.001	3	4	0.015	0.008	1.873	0.431	6	2	0.004	0.008	0.432	0.040	9	0	0.000	0.008	0.000	0.000
0	7	0.000	0.008	0.009	0.000	3	5	0.011	0.008	1.383	0.232	6	3	0.007	0.008	0.864	0.135	9	1	0.000	0.008	0.003	0.000
0	8	0.000	0.008	0.002	0.000	3	6	0.007	0.008	0.864	0.135	6	4	0.011	0.008	1.375	0.209	9	2	0.000	0.008	0.015	0.000
0	9	0.000	0.008	0.000	0.000	3	7	0.004	0.008	0.449	0.054	6	5	0.015	0.008	1.815	0.371	9	3	0.000	0.008	0.055	0.002
0	10	0.000	0.008	0.000	0.000	3	8	0.002	0.008	0.185	0.013	6	6	0.017	0.008	2.017	0.576	9	4	0.001	0.008	0.156	0.008
1	0	0.024	0.008	2.881	0.759	3	9	0.000	0.008	0.055	0.002	6	7	0.015	0.008	1.873	0.431	9	5	0.003	0.008	0.375	0.027
1	1	0.025	0.008	3.033	0.855	3	10	0.000	0.008	0.009	0.000	6	8	0.012	0.008	1.405	0.277	9	6	0.006	0.008	0.780	0.082
1	2	0.019	0.008	2.274	0.644	4	0	0.002	0.008	0.250	0.019	6	9	0.006	0.008	0.780	0.082	9	7	0.012	0.008	1.427	0.324
1	3	0.012	0.008	1.427	0.324	4	1	0.006	0.008	0.780	0.082	6	10	0.002	0.008	0.250	0.019	9	8	0.019	0.008	2.274	0.644
1	4	0.006	0.008	0.780	0.082	4	2	0.012	0.008	1.405	0.277	7	0	0.000	0.008	0.009	0.000	9	9	0.025	0.008	3.033	0.855
1	5	0.003	0.008	0.375	0.027	4	3	0.015	0.008	1.873	0.431	7	1	0.000	0.008	0.055	0.002	9	10	0.024	0.008	2.881	0.759
1	6	0.001	0.008	0.156	0.008	4	4	0.017	0.008	2.017	0.576	7	2	0.002	0.008	0.185	0.013	10	0	0.000	0.008	0.000	0.000
1	7	0.000	0.008	0.055	0.002	4	5	0.015	0.008	1.815	0.371	7	3	0.004	0.008	0.449	0.054	10	1	0.000	0.008	0.000	0.000
1	8	0.000	0.008	0.015	0.000	4	6	0.011	0.008	1.375	0.209	7	4	0.007	0.008	0.864	0.135	10	2	0.000	0.008	0.002	0.000
1	9	0.000	0.008	0.003	0.000	4	7	0.007	0.008	0.864	0.135	7	5	0.011	0.008	1.383	0.232	10	3	0.000	0.008	0.009	0.000
1	10	0.000	0.008	0.000	0.000	4	8	0.004	0.008	0.432	0.040	7	6	0.015	0.008	1.873	0.431	10	4	0.000	0.008	0.031	0.001
2	0	0.011	0.008	1.365	0.164	4	9	0.001	0.008	0.156	0.008	7	7	0.018	0.008	2.141	0.609	10	5	0.001	0.008	0.094	0.005
2	1	0.019	0.008	2.274	0.644	4	10	0.000	0.008	0.031	0.001	7	8	0.017	0.008	2.007	0.509	10	6	0.002	0.008	0.250	0.019
2	2	0.020	0.008	2.408	0.720	5	0	0.001	0.008	0.094	0.005	7	9	0.012	0.008	1.427	0.324	10	7	0.005	0.008	0.607	0.062
2	3	0.017	0.008	2.007	0.509	5	1	0.003	0.008	0.375	0.027	7	10	0.005	0.008	0.607	0.062	10	8	0.011	0.008	1.365	0.164
2	4	0.012	0.008	1.405	0.277	5	2	0.007	0.008	0.843	0.107	8	0	0.000	0.008	0.002	0.000	10	9	0.024	0.008	2.881	0.759
2	5	0.007	0.008	0.843	0.107	5	3	0.011	0.008	1.383	0.232	8	1	0.000	0.008	0.015	0.000	10	10	0.048	0.008	5.762	0.905
2	6	0.004	0.008	0.432	0.040	5	4	0.015	0.008	1.815	0.371	8	2	0.001	0.008	0.063	0.004						
2	7	0.002	0.008	0.185	0.013	5	5	0.016	0.008	1.980	0.493	8	3	0.002	0.008	0.185	0.013						
2	8	0.001	0.008	0.063	0.004	5	6	0.015	0.008	1.815	0.371	8	4	0.004	0.008	0.432	0.040						

Para o Exemplo 7 foram obtidos valores de alfa e beta ótimos iguais a $\boldsymbol{\alpha}^* = \mathbf{0.16385}$ e $\boldsymbol{\beta}^* = \mathbf{0.40495}$. De acordo com a Tabela 6 é possível notar que a hipótese H foi rejeitada para os casos em que $|x - y| > 2$ e não rejeitada para os casos em que $|x - y| \leq 2$. A tomada de decisão também pode ser feita rejeitando H se $BF_{HA}(x, y) < K = 1$ e não rejeitando caso contrário.

3.4 Teste de hipótese unilateral para duas proporções

Caso 6: Seja um teste de hipótese de H: $\theta_1 \leq \theta_2$ versus A :$\theta_1 > \theta_2$. A seguir é apresentado o teste com nível de significância adaptativo para o caso em que o experimento foi realizado considerando $X|\theta \sim$ Binomial(n_1, θ_1), $x \in \{0, 1, \ldots, n_1\}$ e $Y|\theta \sim$ Binomial(n_2, θ_2), $y \in \{0, 1, \ldots, n_2\}$.

Neste caso, a função de verossimilhança de (X, Y) é dada por 3.35 e a distribuição conjunta de (θ_1, θ_2) é dada por 3.36.

A densidade a priori sobre a hipótese H é dada por:

$$
\begin{aligned}
g_H(\theta_1, \theta_2) &= P(\theta_1, \theta_2 | \theta_1 \leq \theta_2) \\
&= \frac{P(\theta_1, \theta_2, \theta_1 \leq \theta_2)}{P(\theta_1 \leq \theta_2)} \\
&= \frac{g(\theta_1; a_1, b_1) g(\theta_2; a_2, b_2)\ I_{\theta_1}(0, \theta_2) I_{\theta_2}(0, 1)}{\displaystyle\iint\limits_{0 \leq \theta_1 \leq \theta_2 \leq 1} g(\theta_1; a_1, b_1) g(\theta_2; a_2, b_2) \partial\theta_1 \partial\theta_2} \\
&= \frac{\theta_1^{a_1-1}(1-\theta_1)^{b_1-1}\theta_2^{a_2-1}(1-\theta_2)^{a_2-1}\ I_{\theta_1}(0, \theta_2) I_{\theta_2}(0, 1)}{\displaystyle\int_0^1 \int_0^{\theta_2} \theta_1^{a_1-1}(1-\theta_1)^{b_1-1}\theta_2^{a_2-1}(1-\theta_2)^{b_2-1} \partial\theta_1 \partial\theta_2} \\
&= \frac{\theta_1^{a_1-1}(1-\theta_1)^{b_1-1}\theta_2^{a_2-1}(1-\theta_2)^{a_2-1}\ I_{\theta_1}(0, \theta_2) I_{\theta_2}(0, 1)}{\displaystyle\int_0^1 \theta_2^{a_2-1}(1-\theta_2)^{b_2-1} \int_0^{\theta_2} \theta_1^{a_1-1}(1-\theta_1)^{b_1-1} \partial\theta_1 \partial\theta_2} \\
&= \frac{\theta_1^{a_1-1}(1-\theta_1)^{b_1-1}\theta_2^{a_2-1}(1-\theta_2)^{a_2-1}}{\displaystyle\int_0^1 \theta_2^{a_2-1}(1-\theta_2)^{b_2-1} B(\theta_2; a_1, b_1) \partial\theta_2}, \qquad 0 \leq \theta_1 \leq \theta_2 \leq 1.
\end{aligned} \tag{3.50}
$$

A densidade priori sobre a hipótese A é dada por:

$$
\begin{aligned}
g_A(\theta_1,\theta_2) &= P(\theta_1,\theta_2|\theta_1>\theta_2)\\
&= \frac{P(\theta_1,\theta_2,\theta_1>\theta_2)}{P(\theta_1>\theta_2)}\\
&= \frac{g(\theta_1;a_1,b_1)g(\theta_2;a_2,b_2)\ I_{\theta_1}[\theta_2,1)I_{\theta_2}(0,1)}{\displaystyle\iint_{0\le\theta_2<\theta_1\le 1} g(\theta_1;a_1,b_1)g(\theta_2;a_2,b_2)\partial\theta_1\partial\theta_2}\\
&= \frac{\theta_1^{a_1-1}(1-\theta_1)^{b_1-1}\theta_2^{a_2-1}(1-\theta_2)^{a_2-1}\ I_{\theta_1}[\theta_2,1)I_{\theta_2}(0,1)}{\displaystyle\int_0^1\int_{\theta_2}^1 \theta_1^{a_1-1}(1-\theta_1)^{b_1-1}\theta_2^{a_2-1}(1-\theta_2)^{b_2-1}\partial\theta_1\partial\theta_2}\\
&= \frac{\theta_1^{a_1-1}(1-\theta_1)^{b_1-1}\theta_2^{a_2-1}(1-\theta_2)^{a_2-1}\ I_{\theta_1}[\theta_2,1)I_{\theta_2}(0,1)}{\displaystyle\int_0^1 \theta_2^{a_2-1}(1-\theta_2)^{b_2-1}\int_{\theta_2}^1 \theta_1^{a_1-1}(1-\theta_1)^{b_1-1}\partial\theta_1\partial\theta_2}\\
&= \frac{\theta_1^{a_1-1}(1-\theta_1)^{b_1-1}\theta_2^{a_2-1}(1-\theta_2)^{a_2-1}}{\displaystyle\int_0^1 \theta_2^{a_2-1}(1-\theta_2)^{b_2-1}[B(a_1,b_1)-B(\theta_2;a_1,b_1)]\partial\theta_2}, \qquad 0\le\theta_2<\theta_1\le 1.
\end{aligned}
\tag{3.51}
$$

A densidade preditiva sobre H é dada por:

$$
\begin{aligned}
f_H(x,y) &= P\left[H|X,Y\right]\\
&= P\left[\theta_1\le\theta_2|X,Y\right]\\
&= P\left[X=x,Y=y,\theta_1\le\theta_2|X,Y\right]\\
&= \iint_{0\le\theta_1\le\theta_2\le 1} L(X,Y|\theta_1,\theta_2)g_H(\theta_1,\theta_2)\partial\theta_1\partial\theta_2\\
&= \int_0^1\int_0^{\theta_2}\binom{n_1}{x}\binom{n_2}{y}\theta_1^x(1-\theta_1)^{n_1-x}\theta_2^y(1-\theta_2)^{n_2-y}\frac{\theta_1^{a_1-1}(1-\theta_1)^{b_1-1}\theta_2^{a_2-1}(1-\theta_2)^{a_2-1}}{\displaystyle\int_0^1\theta_2^{a_2-1}(1-\theta_2)^{b_2-1}B(\theta_2;a_1,b_1)\partial\theta_2}\partial\theta_1\partial\theta_2\\
&= \binom{n_1}{x}\binom{n_2}{y}\frac{\displaystyle\int_0^1\theta_2^{a_2+y-1}(1-\theta_2)^{b_2+n_2-y-1}\int_0^{\theta_2}\theta_1^{a_1+x-1}(1-\theta_1)^{b_1+n_1-x-1}\partial\theta_1\partial\theta_2}{\displaystyle\int_0^1\theta_2^{a_2-1}(1-\theta_2)^{b_2-1}B(\theta_2;a_1,b_1)\partial\theta_2}\\
&= \binom{n_1}{x}\binom{n_2}{y}\frac{\displaystyle\int_0^1\theta_2^{a_2+y-1}(1-\theta_2)^{b_2+n_2-y-1}B(\theta_2;a_1+x,b_1+n_1-x)\partial\theta_2}{\displaystyle\int_0^1\theta_2^{a_2-1}(1-\theta_2)^{b_2-1}B(\theta_2;a_1,b_1)\partial\theta_2}.
\end{aligned}
\tag{3.52}
$$

A densidade preditiva sobre A é dada por:

$$
\begin{aligned}
f_A(x,y) &= P\left[A|X,Y\right]\\
&= P\left[\theta_1>\theta_2|X,Y\right]\\
&= P\left[X=x,Y=y,\theta_1>\theta_2|X,Y\right]\\
&= \iint\limits_{0\le\theta_2<\theta_1\le 1} L(X,Y|\theta_1,\theta_2)g_A(\theta_1,\theta_2)\partial\theta_1\partial\theta_2\\
&= \int_0^1\int_{\theta_2}^1\binom{n_1}{x}\binom{n_2}{y}\frac{\theta_1^x(1-\theta_1)^{n_1-x}\theta_2^y(1-\theta_2)^{n_2-y}\theta_1^{a_1-1}(1-\theta_1)^{b_1-1}\theta_2^{a_2-1}(1-\theta_2)^{a_2-1}}{\int_0^1\theta_2^{a_2-1}(1-\theta_2)^{b_2-1}[B(a_1,b_1)-B(\theta_2;a_1,b_1)]\partial\theta_2}\partial\theta_1\partial\theta_2\\
&= \binom{n_1}{x}\binom{n_2}{y}\frac{\int_0^1\theta_2^{a_2+y-1}(1-\theta_2)^{b_2+n_2-y-1}\int_{\theta_2}^1\theta_1^{a_1+x-1}(1-\theta_1)^{b_1+n_1-x-1}\partial\theta_1\partial\theta_2}{\int_0^1\theta_2^{a_2-1}(1-\theta_2)^{b_2-1}[B(a_1,b_1)-B(\theta_2;a_1,b_1)]\partial\theta_2}\\
&= \binom{n_1}{x}\binom{n_2}{y}\frac{\int_0^1\theta_2^{a_2+y-1}(1-\theta_2)^{b_2+n_2-y-1}[B(a_1+x,b_1+n_1-x)-B(\theta_2;a_1+x,b_1+n_1-x)]\partial\theta_2}{\int_0^1\theta_2^{a_2-1}(1-\theta_2)^{b_2-1}[B(a_1,b_1)-B(\theta_2;a_1,b_1)]\partial\theta_2}.
\end{aligned}
\tag{3.53}
$$

A razão de Bayes a favor da hipótese nula é dada por:

$$
\begin{aligned}
BF_{HA}(x,y) =& \frac{\int_0^1\theta_2^{a_2+y-1}(1-\theta_2)^{b_2+n_2-y-1}B(\theta_2;a_1+x,b_1+n_1-x)\partial\theta_2}{\int_0^1\theta_2^{a_2+y-1}(1-\theta_2)^{b_2+n_2-y-1}[B(a_1+x,b_1+n_1-x)-B(\theta_2;a_1+x,b_1+n_1-x)]\partial\theta_2}\times\\
&\times\frac{\int_0^1\theta_2^{a_2-1}(1-\theta_2)^{b_2-1}[B(a_1,b_1)-B(\theta_2;a_1,b_1)]\partial\theta_2}{\int_0^1\theta_2^{a_2-1}(1-\theta_2)^{b_2-1}B(\theta_2;a_1,b_1)\partial\theta_2}.
\end{aligned}
\tag{3.54}
$$

Considere os conjuntos Ψ e Ψ^* dados pelas expressões 3.45 e 3.47, respectivamente. Desse modo, os valores do valor P, alfa e beta ótimos são dados por:

$$
\text{valor P} = \sum_{(x,y)\in\Psi}\binom{n_1}{x}\binom{n_2}{y}\frac{\int_0^1\theta_2^{a_2+y-1}(1-\theta_2)^{b_2+n_2-y-1}B(\theta_2;a_1+x,b_1+n_1-x)\partial\theta_2}{\int_0^1\theta_2^{a_2-1}(1-\theta_2)^{b_2-1}B(\theta_2;a_1,b_1)\partial\theta_2}
\tag{3.55}
$$

$$\alpha^* = \sum_{(x,y)\in\Psi^*} \binom{n_1}{x}\binom{n_2}{y} \frac{\int_0^1 \theta_2^{a_2+y-1}(1-\theta_2)^{b_2+n_2-y-1} B(\theta_2; a_1+x, b_1+n_1-x)\partial\theta_2}{\int_0^1 \theta_2^{a_2-1}(1-\theta_2)^{b_2-1} B(\theta_2; a_1, b_1)\partial\theta_2} \tag{3.56}$$

$$\beta^* = \sum_{(x,y)\notin\Psi^*} \binom{n_1}{x}\binom{n_2}{y} \frac{\int_0^1 \theta_2^{a_2+y-1}(1-\theta_2)^{b_2+n_2-y-1} \int_{\theta_2}^1 \theta_1^{a_1+x-1}(1-\theta_1)^{b_1+n_1-x-1}\partial\theta_1\partial\theta_2}{\int_0^1 \theta_2^{a_2-1}(1-\theta_2)^{b_2-1}[B(a_1,b_1) - B(\theta_2; a_1, b_1)]\partial\theta_2}. \tag{3.57}$$

A tomada de decisão se dá comparando o valor P com o alfa ótimo: se P $< \alpha^*$ rejeita-se H e se P $\geq \alpha^*$ não se rejeita H.

Exemplo 8: Considere um teste de proporção tal que $X|\theta_1 \sim$ Binomial(n_1, θ_1), $Y|\theta_2 \sim$ Binomial(n_2, θ_2), $\theta_1 \sim$ Beta$(a_1, b_1 = 1)$, $\theta_2 \sim$ Beta$(a_2 = 1, b_2 = 1)$ e que X e Y sejam independentes. Suponha que se deseja testar a hipótese H: $\theta_1 \leq \theta_2$ versus A: $\theta_1 > \theta_2$ para amostras fixadas $n_1 = 10$ e $n_2 = 10$ das Populações 1 e 2, respectivamente, e que $K = 1$. A seguir é apresentada uma tabela contendo as densidades preditivas, a razão de Bayes e o valor P para todos possíveis valores de x ($x = 0, 1, \ldots, 10$) e y ($y = 0, 1, \ldots, 10$). Entretanto, como nesse caso as densidades preditivas dependem de integrais sem solução analítica, foi preciso obter aproximações numéricas para obtenção de seus valores. Dessa forma, foram utilizadas 10^7 simulações de Monte Carlo para obtenção de cada densidade preditiva.

Para o Exemplo 8 foram obtidos valores de alfa e beta ótimos iguais a $\boldsymbol{\alpha^* = 0.13926}$ e $\boldsymbol{\beta^* = 0.13100}$. De acordo com a Tabela 7 é possível notar que a hipótese H foi rejeitada para os casos em que $x < y$ e não rejeitada para os casos em que $x > y$. Enquanto isso, para os casos $x = y$ somente os casos (0,0), (1,1), (6,6) e (7,7) a hipótese H foi rejeitada. A tomada de decisão também pode ser feita rejeitando H se $BF_{HA}(x, y) < K = 1$ e não rejeitando caso contrário.

Na Tabela 7 pode ser observado que os valores $BF_{HA}(x, y) \approx 1$ quando $x = y$. Acredita-se que tais valores possam ser exatamente iguais a um, porém devido a erros de aproximação nos cálculos das densidades preditivas ocorreu tal diferença. Caso seja considerado que $BF_{HA}(x, y) = 1$ quando $x = y$, então os novos valores Alfa e Beta ótimos seriam $\boldsymbol{\alpha^* = 0.10726}$ e $\boldsymbol{\beta^* = 0.16300}$. Entretanto, como essa igualdade não foi comprovada, não é possível afirmar que esse novo resultado está certo.

Tabela 7: Densidades preditivas, Razão de Bayes e valor P do teste de hipóteses $H : \theta_1 \leq \theta_2$ versus $A : \theta_1 > \theta_2$ para todas possíveis amostras de $n_1 = n_2 = 10$.

x	y	f_H	f_A	R_{HA}	P	x	y	f_H	f_A	R_{HA}	P	x	y	f_H	f_A	R_{HA}	P
0	0	0.008	0.008	0.999	0.123	3	8	0.016	0.000	65.736	0.654	7	5	0.003	0.013	0.240	0.030
0	1	0.013	0.004	3.201	0.283	3	9	0.016	0.000	264.606	0.769	7	6	0.005	0.011	0.492	0.073
0	2	0.015	0.002	8.332	0.391	3	10	0.017	0.000	1936.726	0.868	7	7	0.008	0.008	0.999	0.114
0	3	0.016	0.001	21.175	0.527	4	0	0.000	0.016	0.018	0.002	7	8	0.011	0.005	2.147	0.225
0	4	0.016	0.000	55.985	0.638	4	1	0.001	0.015	0.080	0.008	7	9	0.014	0.003	5.441	0.377
0	5	0.016	0.000	160.568	0.736	4	2	0.003	0.014	0.221	0.024	7	10	0.016	0.001	21.168	0.511
0	6	0.016	0.000	515.896	0.802	4	3	0.005	0.011	0.492	0.068	8	0	0.000	0.016	0.000	0.000
0	7	0.017	0.000	1938.650	0.884	4	4	0.008	0.008	1.000	0.148	8	1	0.000	0.017	0.001	0.000
0	8	0.017	0.000	9028.982	0.917	4	5	0.011	0.006	1.988	0.192	8	2	0.000	0.016	0.004	0.000
0	9	0.017	0.000	58808.471	0.967	4	6	0.013	0.003	4.065	0.296	8	3	0.000	0.016	0.015	0.001
0	10	0.017	0.000	706398.322	0.984	4	7	0.015	0.002	9.085	0.420	8	4	0.001	0.016	0.042	0.003
1	0	0.004	0.013	0.313	0.040	4	8	0.016	0.001	23.852	0.574	8	5	0.002	0.015	0.101	0.009
1	1	0.008	0.008	0.999	0.131	4	9	0.016	0.000	83.194	0.687	8	6	0.003	0.014	0.221	0.027
1	2	0.012	0.005	2.411	0.259	4	10	0.017	0.000	516.041	0.818	8	7	0.005	0.011	0.465	0.057
1	3	0.014	0.003	5.425	0.363	5	0	0.000	0.016	0.006	0.000	8	8	0.008	0.008	0.999	0.090
1	4	0.015	0.001	12.459	0.495	5	1	0.001	0.016	0.033	0.002	8	9	0.012	0.005	2.409	0.247
1	5	0.016	0.001	30.521	0.606	5	2	0.002	0.015	0.101	0.011	8	10	0.015	0.002	8.336	0.406
1	6	0.016	0.000	83.248	0.703	5	3	0.003	0.013	0.240	0.033	9	0	0.000	0.017	0.000	0.000
1	7	0.016	0.000	265.025	0.785	5	4	0.006	0.011	0.504	0.084	9	1	0.000	0.017	0.000	0.000
1	8	0.017	0.000	1049.760	0.851	5	5	0.008	0.008	0.999	0.098	9	2	0.000	0.017	0.001	0.000
1	9	0.017	0.000	5780.857	0.901	5	6	0.011	0.006	1.986	0.181	9	3	0.000	0.016	0.004	0.000
1	10	0.017	0.000	58789.990	0.951	5	7	0.013	0.003	4.167	0.322	9	4	0.000	0.016	0.012	0.001
2	0	0.002	0.015	0.120	0.017	5	8	0.015	0.002	9.953	0.450	9	5	0.001	0.016	0.033	0.003
2	1	0.005	0.012	0.415	0.052	5	9	0.016	0.001	30.520	0.590	9	6	0.001	0.015	0.080	0.007
2	2	0.008	0.008	1.001	0.172	5	10	0.016	0.000	160.444	0.720	9	7	0.003	0.014	0.184	0.019
2	3	0.011	0.005	2.150	0.236	6	0	0.000	0.016	0.002	0.000	9	8	0.005	0.012	0.415	0.048
2	4	0.014	0.003	4.532	0.336	6	1	0.000	0.016	0.012	0.001	9	9	0.008	0.008	1.000	0.139
2	5	0.015	0.002	9.954	0.465	6	2	0.001	0.016	0.042	0.004	9	10	0.013	0.004	3.196	0.271
2	6	0.016	0.001	23.838	0.558	6	3	0.002	0.015	0.110	0.012	10	0	0.000	0.017	0.000	0.000
2	7	0.016	0.000	65.748	0.671	6	4	0.003	0.013	0.246	0.036	10	1	0.000	0.017	0.000	0.000
2	8	0.016	0.000	223.276	0.752	6	5	0.006	0.011	0.504	0.079	10	2	0.000	0.017	0.000	0.000
2	9	0.017	0.000	1048.923	0.835	6	6	0.008	0.008	0.999	0.106	10	3	0.000	0.017	0.001	0.000
2	10	0.017	0.000	9054.851	0.934	6	7	0.011	0.005	2.034	0.214	10	4	0.000	0.016	0.002	0.000
3	0	0.001	0.016	0.047	0.006	6	8	0.014	0.003	4.534	0.349	10	5	0.000	0.016	0.006	0.000
3	1	0.003	0.014	0.184	0.021	6	9	0.015	0.001	12.451	0.480	10	6	0.000	0.016	0.018	0.001
3	2	0.005	0.011	0.465	0.062	6	10	0.016	0.000	55.972	0.622	10	7	0.001	0.016	0.047	0.005
3	3	0.008	0.008	1.001	0.164	7	0	0.000	0.017	0.001	0.000	10	8	0.002	0.015	0.120	0.015
3	4	0.011	0.005	2.032	0.203	7	1	0.000	0.016	0.004	0.000	10	9	0.004	0.013	0.313	0.044
3	5	0.013	0.003	4.166	0.309	7	2	0.000	0.016	0.015	0.001	10	10	0.008	0.008	1.001	0.156
3	6	0.015	0.002	9.089	0.435	7	3	0.001	0.016	0.045	0.004						
3	7	0.016	0.001	22.227	0.542	7	4	0.002	0.015	0.110	0.014						

3.5 Estudo do Alfa e Beta ótimos

Na estatística frequentista, o tamanho amostral tem grande influência sobre o valor p de um teste, sendo que quanto maior a amostra, menor é o valor p obtido pelo teste. Com isso, um dos problemas mais discutidos ao se trabalhar com grandes amostras é em relação a qual o nível de significância deve ser utilizado. Sendo assim, uma vantagem do teste de significância adaptativo é de que o nível de significância (alfa ótimo) utilizado para cada problema é obtido levando em conta o tamanho amostral, fazendo com que seja eliminado tal problema envolvendo o valor p.

No intuito de mostrar como o nível de significância adaptativo se comporta de acordo com o tamanho amostral, nesta seção é apresentado um estudo sobre como o tamanho amostral influencia nos valores alfa e beta ótimos no teste de significância adaptativo. Para isso, serão reproduzidos exemplos variando o tamanho amostral no caso em que a verossimilhança usada é Binomial e o número de indivíduos no caso em que é Binomial Negativa.

Hipótese Bilateral e Amostra Binomial (1 Proporção):

Considere X$|\theta \sim$ Binomial(n, θ), $\theta \sim$ Beta(1,1) e $K = 1$. Na Tabela 8 e Figura 1 são apresentados os valores alfa e beta ótimos, de acordo com o tamanho da amostra n, para o teste H: $\theta = 0,5$ versus A: $\theta \neq 0,5$.

Tabela 8: Alfa e beta ótimos obtidos de acordo com o tamanho da amostra n para o teste de hipóteses $H : \theta = 0.5$ versus $A : \theta \neq 0.5$ com $K = 1$.

n	α	β	n	α	β	n	α	β
2	0.50000	0.33333	60	0.05189	0.24590	5000	0.00447	0.04019
3	0.25000	0.50000	70	0.04139	0.23944	10000	0.00318	0.02950
4	0.12500	0.60000	80	0.05666	0.20988	50000	0.00126	0.01442
5	0.37500	0.33333	90	0.04460	0.20879	100000	0.00089	0.01051
6	0.21875	0.42857	100	0.03520	0.20792	500000	0.00037	0.00503
7	0.12500	0.50000	200	0.02813	0.15423	1000000	0.00026	0.00365
8	0.28906	0.33333	300	0.02418	0.12957	5000000	0.00011	0.00173
9	0.17969	0.40000	400	0.01866	0.11721	10000000	0.00008	0.00125
10	0.10937	0.45455	500	0.01769	0.10579			
15	0.11847	0.37500	600	0.01594	0.09817			
20	0.11532	0.33333	700	0.01396	0.09272			
25	0.10775	0.30769	800	0.01202	0.08864			
30	0.09874	0.29032	900	0.01238	0.08324			
35	0.08953	0.27778	1000	0.01039	0.08092			
40	0.08069	0.26829	2000	0.00778	0.05947			
45	0.07245	0.26087	3000	0.00583	0.05032			
50	0.06491	0.25490	4000	0.00513	0.04424			

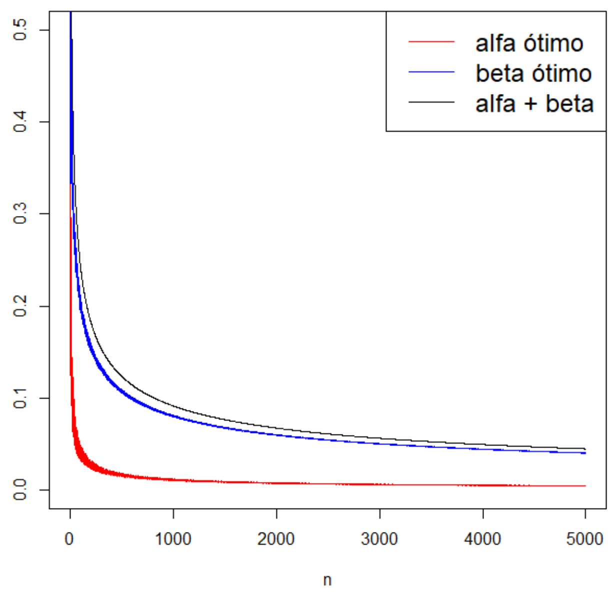

Figura 1 – Alfa e beta ótimos obtidos variando o tamanho da amostra n para o teste de hipóteses $H : \theta = 0.5$ versus $A : \theta \neq 0.5$.

De acordo com os resultados apresentados é possível perceber que a curva do alfa ótimo decresce mais rápido que a do beta ótimo, sendo que os valores de alfa são sempre menores que os de beta, exceto para $n = (2, 5)$. Nesse caso, os tamanhos amostrais recomendados para se ter $\alpha = (0.10, 0.05, 0.005)$ por exemplo, seriam de aproximadamente $n = (10, 60, 4000)$. Além disso, vale ressaltar que o decrescimento dos níveis de ótimos não é monótono porque a distribuição da verossimilhança utilizada é discreta.

Hipótese Bilateral e Amostra Binomial Negativa (1 Proporção):

Considere N$|\theta \sim$ Binomial Negativa(x, θ), $\theta \sim$ Beta(1,1) e $K = 1$. Na Tabela 9 e Figura 2 são apresentados os valores alfa e beta ótimos, de acordo com o número de indivíduos x, para o teste H: $\theta = 0,5$ versus A: $\theta \neq 0,5$.

De acordo com os resultados apresentados é possível perceber que a curva do alfa ótimo decresce mais rápido que a do beta ótimo, sendo que todos os valores de alfa são menores que os de beta. Nesse caso, o número de indivíduos com a característica de interesse recomendados para se ter $\alpha = (0.10, 0.05, 0.005)$ por exemplo, seriam de aproximadamente $x = (15, 35, 2000)$. Vale ressaltar que as curvas dos níveis de significância da Figura 2 decrescem com aproximadamente o dobro da velocidade em relação aos da Figura 1, visto que é esperado o tamanho da amostra ter aproximadamente o dobro do número de indivíduos nessa situação.

Tabela 9: Alfa e beta ótimos obtidos de acordo com o número de indivíduos x para o teste de hipóteses $H : \theta = 0.5$ versus $A : \theta \neq 0.5$ com $K = 1$.

x	α	β	x	α	β	x	α	β
1	0.06250	0.80000	60	0.03718	0.18904	10000	0.00210	0.02175
2	0.31250	0.41667	70	0.03323	0.17902	50000	0.00088	0.01051
3	0.17969	0.47727	80	0.03136	0.16939	100000	0.00061	0.00766
4	0.23364	0.38095	90	0.02920	0.16188	500000	0.00026	0.00366
5	0.14778	0.42017	100	0.02694	0.15586	1000000	0.00018	0.00265
6	0.17632	0.36667	200	0.01932	0.11677	5000000	0.00008	0.00125
7	0.12902	0.38182	300	0.01453	0.09966	10000000	0.00005	0.00090
8	0.14524	0.34667	400	0.01218	0.08856			
9	0.11076	0.35897	500	0.01106	0.08030			
10	0.12050	0.33333	600	0.00988	0.07444			
15	0.09669	0.29503	700	0.00925	0.06953			
20	0.07609	0.27479	800	0.00841	0.06585			
25	0.05965	0.26224	900	0.00806	0.06243			
30	0.05924	0.24038	1000	0.00758	0.05969			
35	0.04574	0.23611	2000	0.00515	0.04423			
40	0.04757	0.21935	3000	0.00409	0.03707			
45	0.04834	0.20632	4000	0.00347	0.03268			
50	0.03744	0.20653	5000	0.00308	0.02960			

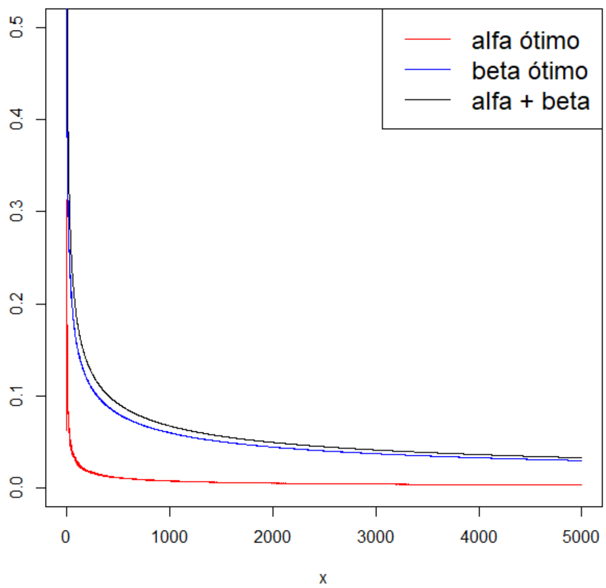

Figura 2 – Alfa e beta ótimos obtidos variando o número de indivíduos x para o teste de hipóteses $H : \theta = 0.5$ versus $A : \theta \neq 0.5$.

Hipótese Unilateral e Amostra Binomial (1 Proporção):

Considere X$|\theta \sim$ Binomial(n, θ), $\theta \sim$ Beta(1,1) e $K = 1$. Na Tabela 10 e Figura 3 são apresentados os valores alfa e beta ótimos, de acordo com o tamanho da amostra n, para o teste H: $\theta \leq 0,5$ versus A: $\theta > 0,5$.

Tabela 10: Alfa e beta ótimos obtidos de acordo com o tamanho da amostra n para o teste de hipóteses $H : \theta \leq 0.5$ versus $A : \theta > 0.5$ com $K = 1$.

n	α	β	n	α	β	n	α	β
1	0.25000	0.25000	60	0.04309	0.05949	10000	0.00394	0.00404
2	0.08333	0.41667	70	0.04047	0.05455	50000	0.00177	0.00179
3	0.18750	0.18750	80	0.03829	0.05064	100000	0.00126	0.00127
4	0.08750	0.28750	90	0.03644	0.04743	500000	0.00056	0.00057
5	0.15625	0.15625	100	0.03484	0.04475	1000000	0.00040	0.00040
6	0.08482	0.22768	200	0.02569	0.03066	5000000	0.00018	0.00018
7	0.13672	0.13672	300	0.02135	0.02467	10000000	0.00013	0.00013
8	0.08116	0.19227	400	0.01869	0.02118			
9	0.12305	0.12305	500	0.01683	0.01883			
10	0.07759	0.16850	600	0.01545	0.01711			
15	0.09819	0.09819	700	0.01436	0.01579			
20	0.06429	0.11191	800	0.01348	0.01472			
25	0.07749	0.07749	900	0.01274	0.01385			
30	0.05610	0.08836	1000	0.01211	0.01311			
35	0.06603	0.06603	2000	0.00867	0.00917			
40	0.07488	0.05049	3000	0.00712	0.00745			
45	0.05850	0.05850	4000	0.00618	0.00643			
50	0.04633	0.06594	5000	0.00554	0.00574			

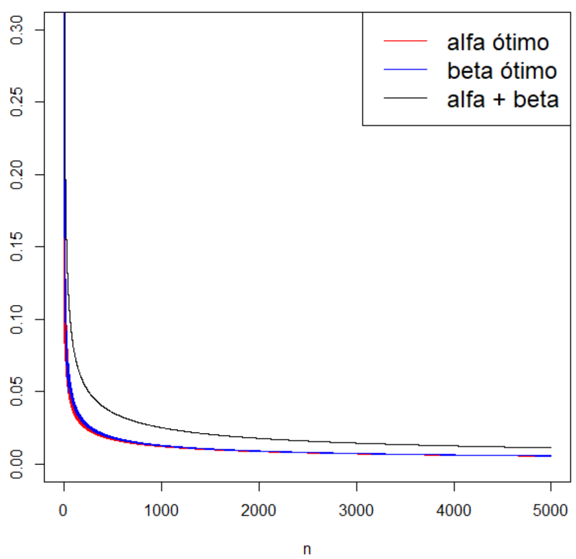

Figura 3 – Alfa e beta ótimos obtidos variando o tamanho da amostra n para o teste de hipóteses $H : \theta \leq 0.5$ versus $A : \theta > 0.5$.

De acordo com os resultados apresentados é possível perceber que os valores dos alfas ótimos são próximos aos dos betas ótimos, sendo que quando n é impar, seus valores são exatamente iguais. Nesse caso, os tamanhos amostrais recomendados para se ter $\alpha = (0.10, 0.05, 0.005)$ por exemplo, seriam de aproximadamente $n = (15, 50, 5000)$.

Hipótese Bilateral e Amostra Binomial Negativa (1 Proporção):

Considere N$|\theta \sim$ Binomial Negativa(x, θ), $\theta \sim$ Beta(1,1) e $K = 1$. Na Tabela 11 e Figura 4 são apresentados os valores alfa e beta ótimos, de acordo com o número de indivíduos x, para o teste H: $\theta \leq 0,5$ versus A: $\theta > 0,5$.

De acordo com os resultados apresentados é possível perceber que todos valores dos alfas ótimos são exatamente iguais aos dos betas ótimos. Nesse caso, o número de indivíduos com a característica de interesse recomendados para se ter $\alpha = (0.10, 0.05, 0.005)$ por exemplo, seriam de aproximadamente $x = (8, 30, 3000)$. Vale notar que os níveis de significância obtidos na Tabela 11 são exatamente iguais aos da Tabela 10 quando n é impar.

Tabela 11: Alfa e beta ótimos obtidos de acordo com o número de indivíduos x para o teste de hipóteses $H : \theta \leq 0.5$ versus $A : \theta > 0.5$ com $K = 1$.

x	α	β	x	α	β	x	α	β
1	0.25000	0.25000	60	0.03634	0.03634	10000	0.00282	0.00282
2	0.18750	0.18750	70	0.03366	0.03366	50000	0.00126	0.00126
3	0.15625	0.15625	80	0.03149	0.03149	100000	0.00089	0.00089
4	0.13672	0.13672	90	0.02969	0.02969	500000	0.00040	0.00040
5	0.12305	0.12305	100	0.02817	0.02817	1000000	0.00028	0.00028
6	0.11279	0.11279	200	0.01993	0.01993	5000000	0.00013	0.00013
7	0.10474	0.10474	300	0.01628	0.01628	10000000	0.00009	0.00009
8	0.09819	0.09819	400	0.01410	0.01410			
9	0.09274	0.09274	500	0.01261	0.01261			
10	0.08810	0.08810	600	0.01151	0.01151			
15	0.07223	0.07223	700	0.01066	0.01066			
20	0.06268	0.06268	800	0.00997	0.00997			
25	0.05614	0.05614	900	0.00940	0.00940			
30	0.05129	0.05129	1000	0.00892	0.00892			
35	0.04751	0.04751	2000	0.00631	0.00631			
40	0.04446	0.04446	3000	0.00515	0.00515			
45	0.04194	0.04194	4000	0.00446	0.00446			
50	0.03979	0.03979	5000	0.00399	0.00399			

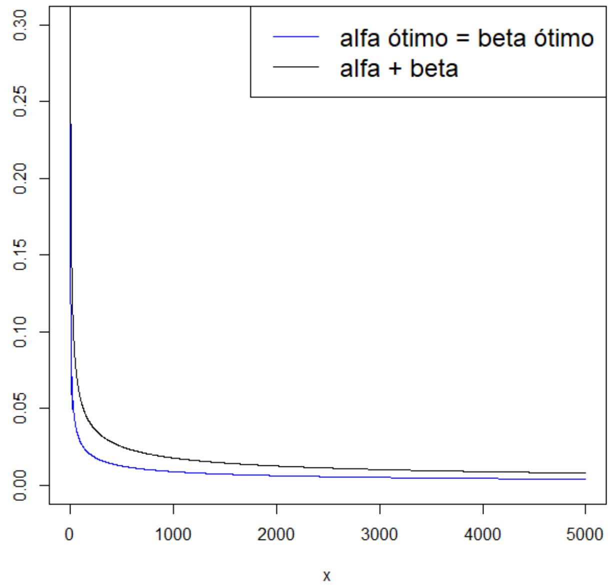

Figura 4 – Alfa e beta ótimos obtidos variando o número de indivíduos x para o teste de hipóteses $H : \theta \leq 0.5$ versus $A : \theta > 0.5$.

Hipótese Bilateral e Amostras Binomiais (2 Proporções):

Considere X$|\theta_1 \sim$ Binomial(n_1, θ_1), Y$|\theta_2 \sim$ Binomial(n_2, θ_2), $\theta_1 \sim$ Beta(1,1), $\theta_2 \sim$ Beta(1,1) e $K = 1$. Na Tabela 12 e Figura 5 são apresentados os valores alfa e beta ótimos, de acordo com os tamanhos das amostras em que $n_1 = n_2$, para o teste H: $\theta_1 = \theta_2$ versus A: $\theta_1 \neq \theta_2$.

Tabela 12: Alfa e beta ótimos obtidos de acordo com os tamanhos amostrais $n_1 = n_2$ para o teste de hipóteses $H : \theta_1 = \theta_2$ versus $A : \theta_1 \neq \theta_2$ com $K = 1$.

$n_1 = n_2$	α	β	$n_1 = n_2$	α	β	$n_1 = n_2$	α	β
1	0.33333	0.50000	40	0.07061	0.29685	500	0.01840	0.11547
2	0.46667	0.33333	45	0.07305	0.27883	1000	0.01248	0.08683
3	0.12857	0.62500	50	0.06674	0.27182	1500	0.00995	0.07325
4	0.18095	0.52000	60	0.05913	0.25719	2000	0.00845	0.06486
5	0.22511	0.44444	70	0.05386	0.24459	2500	0.00747	0.05897
6	0.26274	0.38776	80	0.05075	0.23274	3000	0.00675	0.05452
7	0.16469	0.46875	90	0.04681	0.22401	3500	0.00621	0.05101
8	0.12453	0.48148	100	0.04491	0.21498	4000	0.00576	0.04815
9	0.14477	0.44000	150	0.03586	0.18521	4500	0.00540	0.04575
10	0.16385	0.40496	200	0.03051	0.16606	5000	0.00509	0.04370
15	0.13277	0.37500	250	0.02693	0.15233			
20	0.09953	0.36508	300	0.02434	0.14180			
25	0.08916	0.34320	350	0.02264	0.13308			
30	0.09968	0.30697	400	0.02078	0.12641			
35	0.08103	0.30401	450	0.01940	0.12060			

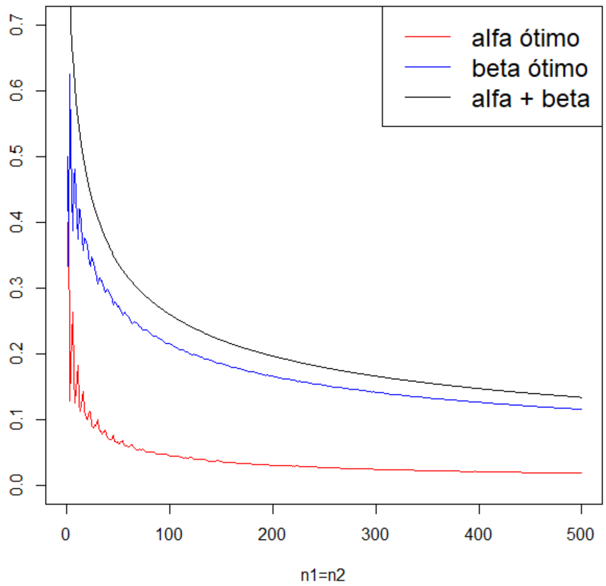

Figura 5 – Alfa e beta ótimos obtidos variando o tamanho das amostras $n_1 = n_2$ para o teste de hipóteses $H : \theta_1 = \theta_2$ versus $A : \theta_1 \neq \theta_2$.

De acordo com os resultados apresentados é possível perceber que a curva do alfa ótimo decresce mais rápido que a do beta ótimo, sendo que os valores de alfa sempre são menores que os de beta, exceto para $n_1 = n_2 = 2$. Nesse caso, os tamanhos amostrais recomendados para se ter $\alpha = (0.10, 0.05, 0.005)$ por exemplo, seriam de aproximadamente $n = (20, 80, 5000)$.

Hipótese Unilateral e Amostras Binomiais (2 Proporções):

Considere X$|\theta_1 \sim$ Binomial(n_1, θ_1), Y$|\theta_2 \sim$ Binomial(n_2, θ_2), $\theta_1 \sim$ Beta(1,1), $\theta_2 \sim$ Beta(1,1) e $K = 1$. Na Tabela 13 e Figura 6 são apresentados os valores alfa e beta ótimos, de acordo com os tamanhos das amostras em que $n_1 = n_2$, para o teste H: $\theta_1 \leq \theta_2$ versus A: $\theta_1 > \theta_2$.

De acordo com os resultados apresentados é possível perceber que os valores dos alfas ótimos são próximos aos dos betas ótimos, sendo que seus valores tendem a se tornar mais parecidos com o aumento das amostras. Nesse caso, os tamanhos amostrais recomendados para se ter $\alpha = (0.10, 0.05)$ por exemplo, seriam de aproximadamente $n = (20, 80)$.

Tabela 13: Alfa e beta ótimos obtidos de acordo com os tamanhos amostrais $n_1 = n_2$ para o teste de hipóteses $H : \theta_1 \leq \theta_2$ versus $A : \theta_1 > \theta_2$ com $K = 1$. (Foram utilizadas M=1000 simulações de Monte Carlo para o cálculo de cada densidade preditiva)

$n_1 = n_2$	α	β	$n_1 = n_2$	α	β	$n_1 = n_2$	α	β
1	0.56789	0.08232	15	0.11024	0.11071	80	0.04920	0.04913
2	0.21015	0.31389	20	0.10488	0.08944	90	0.04639	0.04641
3	0.22500	0.22476	25	0.09396	0.07973	100	0.04470	0.04284
4	0.21893	0.18050	30	0.07619	0.08174			
5	0.12823	0.23243	35	0.07531	0.07116			
6	0.19771	0.14142	40	0.07079	0.06698			
7	0.14408	0.17124	45	0.06468	0.06524			
8	0.17963	0.11805	50	0.06284	0.06030			
9	0.12160	0.15843	60	0.05519	0.05748			
10	0.13011	0.13797	70	0.05243	0.05225			

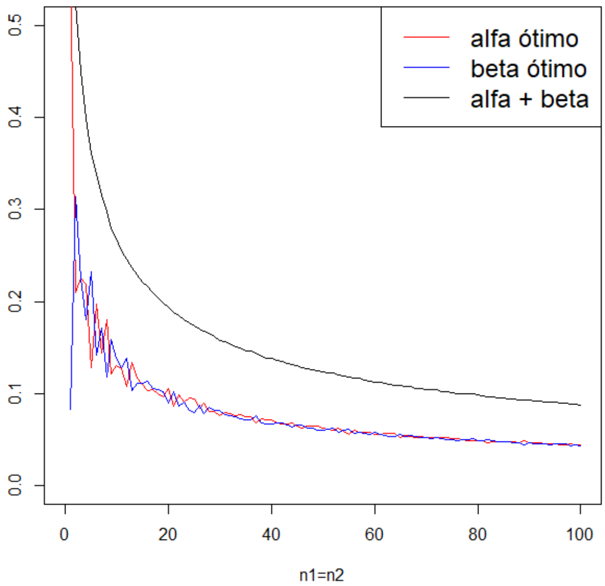

Figura 6 – Alfa e beta ótimos obtidos variando o tamanho das amostras $n_1 = n_2$ para o teste de hipóteses $H : \theta_1 \leq \theta_2$ versus $A : \theta_1 > \theta_2$.

4 Comparação entre o teste de proporção adaptativo com o teste binomial exato

Uma propriedade importante ao se realizar um teste de hipóteses é a consistência. Um estimador é dito consistente quando a medida que à amostra cresce, seu valor se aproxima do verdadeiro valor do parâmetro. Pela definição, é dito que uma sequência de estimadores T_n é consistente para θ se, dado $\epsilon > 0$, $\lim_{n\to\infty} P(|T_n - \theta| < \epsilon) = 0$. De acordo com esse resultado, é possível verificar por exemplo que o estimador de proporção $\hat{p}$ é consistente para proporção populacional p, ou seja, $\lim_{n\to\infty} P(|\hat{p} - p| < \epsilon) = 0$. Porém, como $\hat{p}$ se aproxima do parâmetro p a medida que a amostra cresce, é esperado que a decisão em afirmar algo sobre p se torne cada vez mais rigorosa para ser aceita. Consequentemente, isso faz com que seja mais fácil rejeitar hipóteses nulas sobre p ao aumentar a amostra.

Na estatística clássica, a hipótese nula é rejeitada se e somente se o valor p for menor que um nível de significância α. Geralmente, são adotados valores para α entre 0.1 e 0.005, porém não existe uma regra para sua escolha. Como o valor p diminui com o aumento da amostra, seria ideal escolher valores de alfa de acordo com o tamanho amostral, do contrário fixar seu valor permitirá aumentar o tamanho da amostra até que uma hipótese de interesse seja rejeitada.

No teste de significância adaptativo, a hipótese nula é rejeitada se e somente se o valor P for menor que um nível de significância α^*. Nesse caso, o valor de alfa ótimo é variável de acordo com o tamanho amostral, fazendo com que seja eliminado o problema do caso clássico. Todavia, pela consistência do teste, aumentar o tamanho da amostra também levará a maior rejeição das hipóteses nulas, porém pela penalidade que ocorre no alfa ótimo a velocidade dessa rejeição é retardada.

Exemplo 9: Seja um teste de proporção tal que X$|P \sim$ Binomial(n, p), $P \sim$ Beta(1,1) e $K = 1$. Suponha que se deseja testar a hipótese H: $p = 0,5$ versus A: $p \neq 0,5$ para diferentes tamanhos amostrais. A seguir será feita uma comparação entre o teste de proporção adaptativo e o teste binomial exato (clássico) para avaliar a tomada de decisão em cada caso .

Considere os valores críticos do teste de proporção bilateral como sendo LI_c (Limite Inferior crítico) e LS_c (Limite Superior crítico). Desse modo, é possível criar um intervalo $I_c = (LI_c; LS_c)$ (Intervalo crítico) para avaliar quais valores de $\hat{p} = x/n$ a hipótese H seria rejeitada. A regra de decisão seria dada por

$$\text{Se} \begin{cases} \hat{p} \in I_c, & \text{H não é rejeitada} \\ \hat{p} \notin I_c, & \text{H é rejeitada.} \end{cases} \tag{4.1}$$

Na Tabela 14 e Figura 7 são apresentados os intervalos críticos do teste de significância adaptativo e do teste binomial exato (clássico) para um nível de significância fixado $\alpha = 0.05$.

Tabela 14: Intervalos críticos obtidos de acordo com o tamanho amostral n para o teste de hipóteses $H : p = 0.5$ versus $A : p \neq 0.5$ com $K = 1$ e $\alpha = 0.05$.

n	I_c Adaptativo	I_c clássico	n	I_c Adaptativo	I_c clássico
1	(0.000;1.000)	(0.000;1.000)	60	(0.383;0.617)	(0.367;0.633)
2	(0.500;0.500)	(0.000;1.000)	70	(0.386;0.614)	(0.386;0.614)
3	(0.333;0.667)	(0.000;1.000)	80	(0.400;0.600)	(0.388;0.612)
4	(0.250;0.750)	(0.000;1.000)	90	(0.400;0.600)	(0.400;0.600)
5	(0.400;0.600)	(0.000;1.000)	100	(0.400;0.600)	(0.400;0.600)
6	(0.333;0.667)	(0.167;0.833)	200	(0.425;0.575)	(0.430;0.570)
7	(0.286;0.714)	(0.143;0.857)	300	(0.437;0.563)	(0.443;0.557)
8	(0.375;0.625)	(0.125;0.875)	400	(0.442;0.558)	(0.450;0.550)
9	(0.333;0.667)	(0.222;0.778)	500	(0.448;0.552)	(0.456;0.544)
10	(0.300;0.700)	(0.200;0.800)	600	(0.452;0.548)	(0.460;0.540)
15	(0.333;0.667)	(0.267;0.733)	700	(0.454;0.546)	(0.463;0.537)
20	(0.350;0.650)	(0.300;0.700)	800	(0.456;0.544)	(0.465;0.535)
25	(0.360;0.640)	(0.320;0.680)	900	(0.459;0.541)	(0.468;0.532)
30	(0.367;0.633)	(0.333;0.667)	1000	(0.460;0.540)	(0.469;0.531)
35	(0.371;0.629)	(0.343;0.657)	10000	(0.485;0.515)	(0.490;0.510)
40	(0.375;0.625)	(0.350;0.650)	100000	(0.495;0.505)	(0.497;0.503)
45	(0.378;0.622)	(0.356;0.644)	1000000	(0.498;0.502)	(0.499;0.501)
50	(0.380;0.620)	(0.360;0.640)	10000000	(0.499;0.501)	(0.500;0.500)

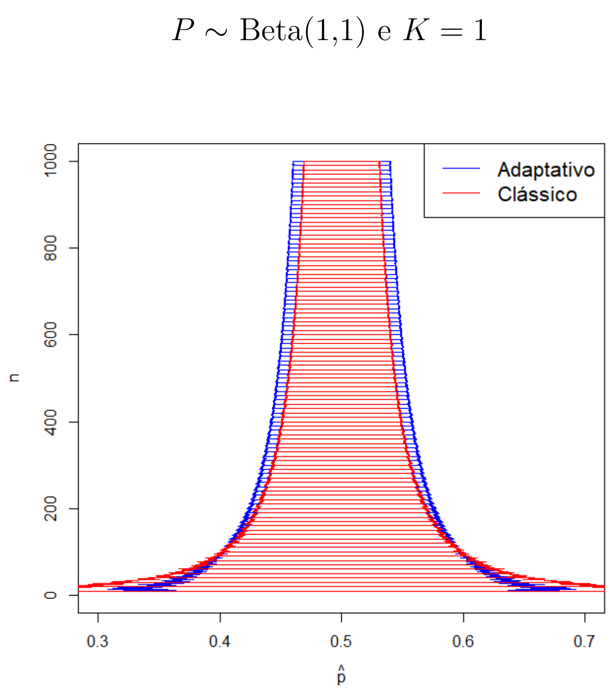

Figura 7 – Intervalos críticos do teste de significância adaptativo em comparação ao clássico com $\alpha = 0.05$ para hipótese $H : p = 0.5$ versus $A : p \neq 0.5$.

Pela Tabela 14 e Figura 7 é possível visualizar que por ambos testes usarem um estimador consistente, na medida que a amostra cresce, os limites dos intervalos críticos se aproximam de $p = 0.5$. Entretanto, pelo teste adaptativo usar um nível de significância que varia de acordo com o tamanho amostral, a velocidade dessa aproximação é diferente do caso clássico. Quando n $<$ 70 o comprimento do intervalo crítico adaptativo é menor que o clássico, entre n = (70,100) os intervalos são parecidos e para n $>$ 100 o comprimento intervalo crítico adaptativo é maior que o clássico. Tal resultado é condizente com a Tabela 8, pois a diferença dos intervalos críticos depende de quanto o valor de alfa ótimo α^* difere de $\alpha = 0.05$.

Na Tabela 14, ao se multiplicar o intervalo crítico pela sua respectiva amostra, é obtido o intervalo do número de indivíduos para qual a hipótese H é rejeitada. Por exemplo, na situação em que n = 50 no caso adaptativo é obtido que $x = 50(0.380; 0.620) = (19, 31)$, ou seja, para quaisquer número de indivíduos entre $x = (19, 31)$, H não será rejeitado, enquanto para os demais valores H é rejeitado. Dessa forma, apesar do intervalo critico adaptativo e clássico serem parecidos para amostras grandes, existe uma diferença significativa o número de indivíduos para qual a hipótese H é rejeitada.

Devido a arredondamentos, o intervalo crítico clássico para n=10000000 foi de $I_c = (0.500; 0.500)$, porém seu valor exato é de $I_c = (0.4996901, 0.5003099)$. Nesse caso, é possível demonstrar que, tanto para o caso clássico como o adaptativo, somente quando n$\rightarrow \infty$ os limites inferior e superior iriam coincidir sendo $LI_c = LS_c = 0.500$.

4.1 Variação dos parâmetros da priori e K

A distribuição a priori representa o conhecimento em relação um parâmetro antes da realização do experimento estatístico. Dessa forma, a priori pode carregar pouca ou muita informação sobre o parâmetro dependendo da escolha dos seus parâmetros. Por exemplo, o uso de uma priori Uniforme $(a = 1, b = 1)$ indica que existe a mesma probabilidade de se escolher qualquer valor dentro desse intervalo e nula fora dele. Com isso, intervalos menores diminuem a variância da distribuição e consequentemente, trazem maior informação sobre a localização do parâmetro. Em estudos sobre proporções é comum o uso da distribuição a priori Beta para descrever conhecimentos prévios do parâmetro. Nesse tópico, será visto como a escolha dos parâmetros da Beta afetam no intervalo crítico do teste de significância adaptativo. Além disso, também será avaliado o impacto da escolha de K no teste, visto que seu valor afeta no peso de cometer um erro do tipo I em relação ao erro do tipo II.

A seguir são apresentados gráficos dos intervalos críticos do teste de significância adaptativo, variando os parâmetros da priori e K, do teste de significância adaptativo em comparação ao teste clássico para um nível de significância fixado $\alpha = 0.05$.

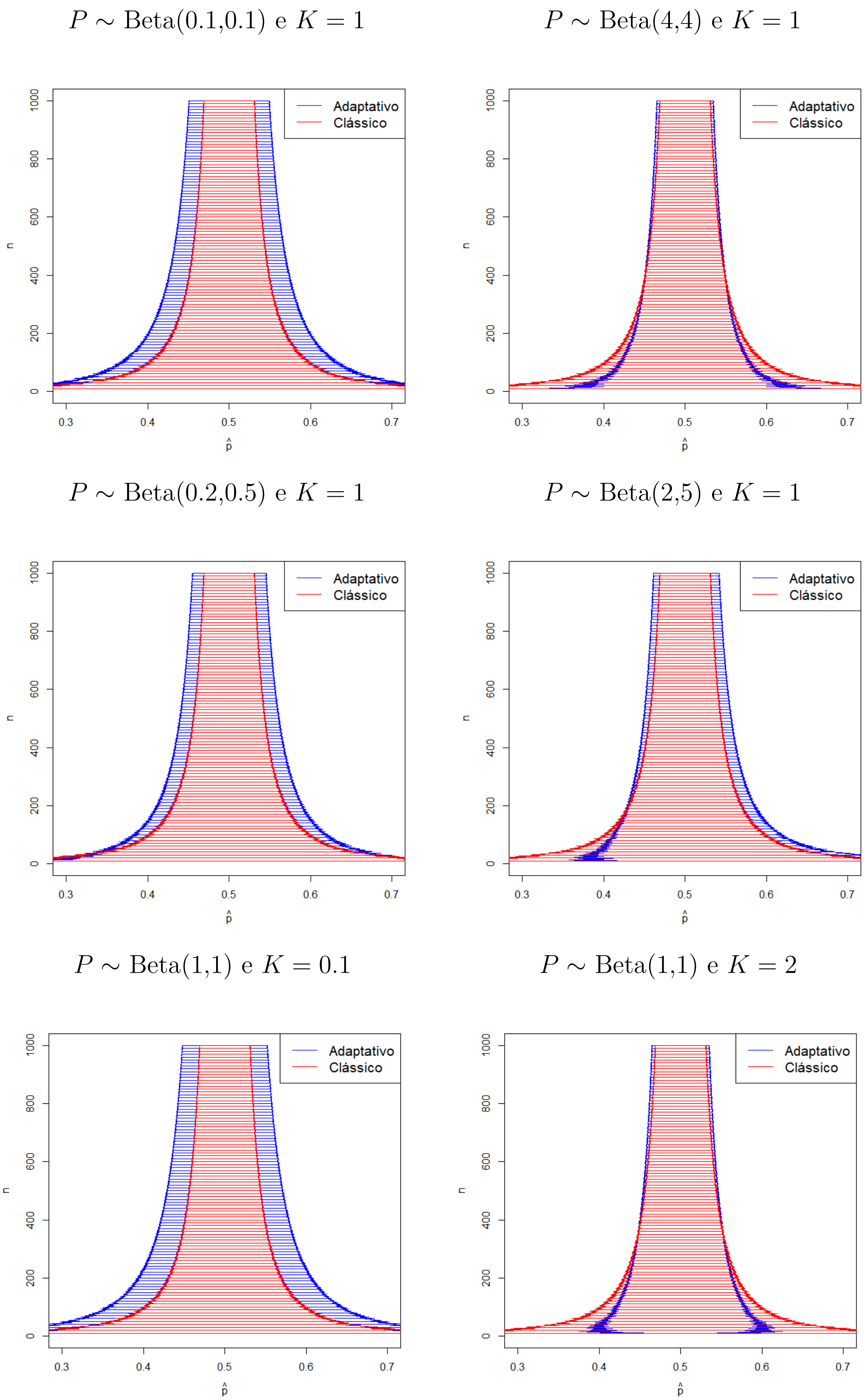

Figura 8 – Intervalos críticos variando parâmetros da priori e K do teste de significância adaptativo em comparação ao clássico com $\alpha = 0.05$ para hipótese $H : p = 0.5$ versus $A : p \neq 0.5$.

Pela Figura 8 pode ser visto que a diminuição de K e dos parâmetros da Beta ampliaram o intervalo crítico do teste de significância adaptativo, enquanto por outro lado o aumento de K e dos parâmetros da Beta diminuíram esse intervalo. Em relação a priori Beta, um modo de explicar a variação dos intervalos críticos é através dos momentos da distribuição. Se $P \sim \text{Beta}(a, b)$, então o valor esperado e a variância de P são dados por

$$E(P) = \frac{a}{a+b} \qquad Var(P) = \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}. \tag{4.2}$$

Quando $a = b$, a expressão do valor esperado vira $E(P) = 0.5$, que por ser igual o valor da hipótese testada, sempre vai gerar intervalos críticos simétricos em torno de $p = 0.5$. Na expressão da variância, quanto maior os valores dos parâmetros, menor será a variância da distribuição. Por isso, utilizar uma priori Beta(0.1,0.1) gera intervalos críticos maiores que uma Beta(4,4). Apesar de suas médias serem iguais, uma variância maior indica menor incerteza sobre a localização do parâmetro, fazendo com que o intervalo crítico aumente. Ao usar prioris Beta(0.2,0.5) e Beta(2,5), ambas geram uma esperança $E(P) = 0.28$, fazendo com que o intervalo crítico seja deslocado para direita. Porém, como a variância é maior quando os parâmetros são menores, esse deslocamento é mais suave quando usada a Beta(0.2,0.5). A análise sobre K é mais simples por ele ser relacionado a importância do erro tipo I em relação ao erro tipo II. Como K menor indica uma penalidade maior ao se cometer um erro do tipo I, então o intervalo crítico aumenta porque o risco de cometer esse erro se torna menor. Já para um K maior o intervalo diminui para evitar o risco de cometer um erro do tipo II.

Não foi variado o valor da proporção (p) das hipóteses porque no teste bilateral os valores alfa e beta ótimos não dependem dele, com isso a análise seria similar para qualquer outro valor. Já nas hipóteses unilaterais mesmo os níveis de significância dependendo do valor da hipótese testada, não seria interessante realizar essa análise, pois o teste iria possuir apenas um valor crítico, impossibilitando a criação do intervalo crítico.

5 Conclusão

O trabalho abordado retrata a influencia que o nível de significância pode ter na realização de um teste de hipóteses. Através do teste de significância adaptativo, foi visto como os níveis de significância ótimos se comportam de acordo com o aumento amostral para diferentes hipóteses do teste de proporção. É analisada a diferença da velocidade de rejeição entre usar um teste com nível de significância adaptativo e um teste com nível de significância fixo.

O resultado esperado era que ao se aumentar o tamanho amostral de um teste de hipóteses H : $\theta \in \Theta_0$ contra A : $\theta \in \Theta_1$, o teste de significância adaptativo rejeitasse a hipótese H para menos resultados estimados ($\hat{p} = x/n$) que o teste clássico. De fato, como o valor de alfa ótimo diminui com o aumento amostral, ao esse valor ser menor que o nível de significância fixado do teste clássico, isso irá acontecer. Pelo teste de proporção bilateral, na situação padrão ($K = 1$ e priori não informativa), o teste adaptativo rejeita menos valores estimados a partir de $n = 100$ (quando comparado com o nível de significância fixo $\alpha = 0.05$). Foi visto que a escolha de K pode mudar o tamanho dos intervalos críticos, enquanto a escolha da priori pode deslocar os intervalos críticos, além de mudar seu tamanho. Dessa forma, a escolha da priori e K podem tanto acelerar como retardar a zona de rejeição para valores estimados do teste de hipóteses.

Ao decorrer do trabalho foram calculadas distribuições preditivas para variadas hipóteses. Normalmente seus resultados dependiam de integrais não elementares, sendo necessário utilizar alguma ferramenta computacional para resolver-las. Diante disso, a obtenção dos valores alfa e beta ótimos podem ter alta complexidade computacional dependendo do tamanho amostral.

6 Anexo

Considere π um parâmetro desconhecido que representa a proporção de uma população que tem uma determinada característica de interesse. Assuma, a priori, que $\pi \sim \text{Beta}(a, b)$. Seja x o número de indivíduos que representam a característica de interesse em uma amostra de tamanho n.

Sejam as hipóteses

$$
\begin{aligned}
\mathrm{H}_1 : \pi = \pi_0 \quad &\text{vs.} \quad \mathrm{H}_{1a} : \pi \neq \pi_0 \\
\mathrm{H}_2 : \pi \leq \pi_0 \quad &\text{vs.} \quad \mathrm{H}_{2a} : \pi > \pi_0 \\
\mathrm{H}_3 : \pi = \pi_0 \quad &\text{vs.} \quad \mathrm{H}_{3a} : \pi > \pi_0 \\
\mathrm{H}_4 : \pi_1 \leq \pi \leq \pi_2 \quad &\text{vs.} \quad \mathrm{H}_{4a} : (\pi < \pi_1) \cup (\pi > \pi_2) \\
\mathrm{H}_5 : (\pi_1 \leq \pi \leq \pi_2) \cup (\pi_3 \leq \pi \leq \pi_4) \quad &\text{vs.} \quad \mathrm{H}_{5a} : (\pi < \pi_1) \cup (\pi_2 < \pi < \pi_3) \cup (\pi > \pi_4)
\end{aligned}
$$

Hipótese	Distribuição Preditiva
$H_1 = H_3$	$\binom{n}{x}\pi_0^x(1-\pi_0)^{n-x}$
H_{1a}	$\binom{n}{x}\dfrac{B(A,B)}{B(a,b)}$
H_2	$\binom{n}{x}\dfrac{B(\pi_0;A,B)}{B(\pi_0;a,b)}$
$H_{2a} = H_{3a}$	$\binom{n}{x}\dfrac{B(A,B)-B(\pi_0;A,B)}{B(a,b)-B(\pi_0;a,b)}$
H_4	$\binom{n}{x}\dfrac{B(\pi_2;A,B)-B(\pi_1;A,B)}{B(\pi_2;a,b)-B(\pi_1;a,b)}$
H_{4a}	$\binom{n}{x}\dfrac{B(A,B)-B(\pi_2;A,B)+B(\pi_1;A,B)}{B(a,b)-B(\pi_2;a,b)+B(\pi_1;a,b)}$
H_5	$\binom{n}{x}\dfrac{B(\pi_2;A,B)-B(\pi_1;A,B)+B(\pi_4;A,B)-B(\pi_3;A,B)}{B(\pi_2;a,b)-B(\pi_1;a,b)+B(\pi_4;a,b)-B(\pi_3;a,b)}$
H_{5a}	$\binom{n}{x}\dfrac{B(A,B)-B(\pi_2;A,B)-B(\pi_1;A,B)+B(\pi_4;A,B)-B(\pi_3;A,B)}{B(a,b)-B(\pi_2;a,b)-B(\pi_1;a,b)+B(\pi_4;a,b)-B(\pi_3;a,b)}$

$A = a + x$; $B = b + n - x$.

Considere π_1 e π_2 parâmetros desconhecidos que representam a proporção de uma determinada característica de interesse nas Populações 1 e 2, respectivamente. Assuma, a priori, que $\pi_1 \sim \text{Beta}(a_1, b_1)$ e $\pi_2 \sim \text{Beta}(a_2, b_2)$. Seja x o número de indivíduos que representam a característica de interesse em uma amostra de tamanho n_1 da População 1 e y o número de indivíduos que apresentam a característica de interesse em uma amostra de tamanho n_2 da População 2. (n_1 e n_2 fixos)

Sejam as hipóteses

$$
\begin{aligned}
\mathrm{H}_1 : \pi_1 = \pi_2 \quad &\text{vs.} \quad \mathrm{H}_{1a} : \pi_1 \neq \pi_2 \\
\mathrm{H}_2 : \pi_1 \leq \pi_2 \quad &\text{vs.} \quad \mathrm{H}_{2a} : \pi_1 > \pi_2 \\
\mathrm{H}_3 : \pi_1 = \pi_2 \quad &\text{vs.} \quad \mathrm{H}_{3a} : \pi_1 > \pi_2 \\
\mathrm{H}_4 : |\pi_1 - \pi_2| \leq k \quad &\text{vs.} \quad |\pi_1 - \pi_2| > k
\end{aligned}
$$

Hipótese	Distribuição Preditiva
$H_1 = H_3$	$\binom{n_1}{x}\binom{n_2}{y}\dfrac{B(A_1 + A_2 - 1, B_1 + B_2 - 1)}{B(a_1 + a_2 - 1, b_1 + b_2 - 1)}$
H_{1a}	$\binom{n_1}{x}\binom{n_2}{y}\dfrac{B(A_1, B_1)B(A_2, B_2)}{B(a_1, b_1)B(a_2, b_2)}$
H_2	$\binom{n_1}{x}\binom{n_2}{y}\dfrac{\int_0^1 u_2^{A_2-1}(1-u_2)^{B_2-1}B(u_2; A_1, B_1)\partial u_2}{\int_0^1 u_2^{a_2-1}(1-u_2)^{b_2-1}B(u_2; a_1, b_1)\partial u_2}$
$H_{2a} = H_{3a}$	$\binom{n_1}{x}\binom{n_2}{y}\dfrac{\int_0^1 u_2^{A_2-1}(1-u_2)^{B_2-1}[B(A_1, B_1) - B(u_2; A_1, B_1)]\partial u_2}{\int_0^1 u_2^{a_2-1}(1-u_2)^{b_2-1}[B(a_1, b_1) - B(u_2; a_1, b_1)]\partial u_2}$
H_4	$\binom{n_1}{x}\binom{n_2}{y}\frac{B(A_1,B_1)-\int_k^1 u_2^{A_2-1}(1-u_2)^{B_2-1}B(u_2+k;A_1,B_1)\partial u_2-\int_k^1 u_2^{A_2-1}(1-u_2)^{B_2-1}[B(A_1,B_1)-B(u_2-k;A_1,B_1)]\partial u_2}{B(a_1,b_1)-\int_k^1 u_2^{A_2-1}(1-u_2)^{B_2-1}B(u_2+k;a_1,b_1)\partial u_2-\int_k^1 u_2^{A_2-1}(1-u_2)^{B_2-1}[B(a_1,b_1)-B(u_2-k;a_1,b_1)]\partial u_2}$
H_{4a}	$\binom{n_1}{x}\binom{n_2}{y}\frac{\int_k^1 u_2^{A_2-1}(1-u_2)^{B_2-1}B(u_2+k;A_1,B_1)\partial u_2-\int_k^1 u_2^{A_2-1}(1-u_2)^{B_2-1}[B(A_1,B_1)-B(u_2-k;A_1,B_1)]\partial u_2}{\int_k^1 u_2^{A_2-1}(1-u_2)^{B_2-1}B(u_2+k;a_1,b_1)\partial u_2-\int_k^1 u_2^{A_2-1}(1-u_2)^{B_2-1}[B(a_1,b_1)-B(u_2-k;a_1,b_1)]\partial u_2}$

$A_1 = a_1 + x$, $A_2 = a_2 + y$, $B_1 = b_1 + n_1 - x$ e $B_2 = b_2 + n_2 - y$.

Referências

[1] Anton, H. (2007). *Cálculo, Volume 2 - Oitava Edição*, Porto Alegre.

[2] Casella, G.; Berger, R. L. (2002). *Statistical Inference - Second Edition, Belmont*, CA: Duxbury.

[3] DeGroot, M. H. (1985). *Probability and Statistics - Second Edition*, Pittsburguer.

[4] Ehlers, R.S. (2003). *Introdução a Inferência Bayesiana*, São Paulo.

[5] Gannon, M.A.; Pereira, C.A.; Polpo, A. *Blending Bayesian and Classical Tools to Define Optimal Sample-Size- Dependent Significance Levels*, The American Statistician, 73:sup1, 213-222, DOI: 10.1080/00031305.2018.1518268

[6] Gelman, A.; Robert, C.P. *Revised evidence for statistical standarts. Proc. Natl. Acad. Sci.* USA **2014**, 111, E1933

[7] Jeffreys, H. (1961). *Theory of Probability.* Ed. 3. Oxford , U.K.: Oxford University Press.

[8] Lavine, M; Schervish, M.J. (1997). *Bayes Factors: What they are and what they are not.*

[9] Migon, H. S.; Gamerman, D. (1999). *Statistical Inference: An Integrated Approach*, New York.

[10] Moore, D. S., McCabe, G. P., Craig, B. A. (2009). *Introduction to the practice of statistics.* New York: W.H. Freeman.

[11] Pereira, C.A.; Nakano, E. Y.; Fossaluza, U.; Esteves, L. G.; Gannon, M.A.; Polpo, A. *Hypothesis Tests for Bernoulli Experiments: Ordering the Sample Space by Bayes Factors and Using Adaptive Significance Levels for Decisions.* Entropy **2017**, 19, 696.

[12] Schervish, M.J.; DeGroot, M.H. (2012). *Probability and Statistics - Fourth Edition*, Boston.

[13] Shao, J. (2003). *Mathematical Statistics*, Madison.

[14] Stewart, J. (2015). *Cálculo, Volume 2 - Sétima Edição*, São Paulo.

[15] R Development Core Team (2009) *R: A language and environment for statistical computing.* R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. ISBN 3-900051-07-0, URL http://www.R-project.org.