Universidade de Brasília

Existência de soluções para alguns sistemas de equações de Schrödinger

Paulo Vitor de Oliveira Pinto Dias

Orientador: Jiazheng Zhou

Departamento de Matemática
Universidade de Brasília

Dissertação apresentada em cumprimento parcial dos requisitos para o grau de
Mestrado em Matemática

Brasília, Outubro 2019

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Existência de solução para alguns sistemas de equação de Schrödinger

por

Paulo Vitor de Oliveira Pinto Dias*

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos para obtenção do grau de

MESTRE EM MATEMÁTICA

Brasília, 22 de outubro de 2019.

Comissão Examinadora:

Jiazheng Zhou

Prof. Dr. Jiazheng Zhou - MAT/UnB (Orientador)

Ricardo Ruviaro

Prof. Dr. Ricardo Ruviaro – MAT/UnB (Membro)

Elson Leal de Moura

Prof. Dr. Elson Leal de Moura - UFVJM (Membro)

* O autor foi bolsista do CNPq durante a elaboração desta dissertação.

Ficha catalográfica elaborada automaticamente,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

de Oliveira Pinto Dias, Paulo Vitor
de Existência de soluções para alguns sistemas de equações não-lineares de Schrödinger / Paulo Vitor de Oliveira Pinto Dias; orientador Jiazheng Zhou. -- Brasília, .
p.

Tese (Doutorado - Mestrado em Matemática) -- Universidade de Brasília, .

1. Equações não-lineares de Schrödinger. 2. Análise não linear. 3. Variedade de Nehari. 4. Métodos Variacionais . 5. Variedades de Hilbert. I. Zhou, Jiazheng , orient. II. Título.

À minha família, Dilson, Marcia e Anna.

Agradecimentos

A Deus, a minha fortaleza, que mesmo sendo o criador de todo universo, busca incessantemente se relacionar conosco.

A meu pai Dilson, minha mãe Márcia e minha irmã Anna, as pessoas que mais amo e que são a coisa mais importante que tenho, que me deram a minha principal formação, que mesmo distantes me apoiaram em tudo que poderiam.

A meu tio Mário, minha tia Marluce e seus filhos Vitor, Rodrigo, Mariana e Lucas, que com amor, carinho e atenção me acolheram quando cheguei a Brasília.

À minha amada melhor amiga Lídia, que não se ausentou da minha vida em sequer um dia, dentre centenas que estivemos distantes.

A meus amigos do programa de mestrado da UnB, em especial: à minha amiga Maria, por toda preocupação e cuidado que dedicou a mim; a meu amigo Alancoc, pela disposição nos momentos mais difíceis; a meus amigos Deivid, Geovane e Manuel pelo auxílio técnico com o Latex e com a defesa; a meus amigos Bruna, Hérnan, Carlos, Makson e Hermano por tornam meu primeiro ano um excelente ano; aos meus amigos da sala 408/10 (de juvenil alcunha "sala top") pelos inesquecíveis momentos de descontração, pelas discussões e pela "hora do café" de todas as tardes.

A meus amigos da Cru Campus, pela mútua cooperação na fé e orações, em especial ao Marco e à Vitória.

À todas as pessoas que tive a oportunidade de compartilhar a mesma habitação, que me proporcionaram experiências muito engrandecedoras.

Ao meu orientador pelo auxílio e cobrança.

Ao professor Ricardo Ruviaro por toda ajuda que me concedeu na composição deste trabalho.

Aos meus amigos Christian, Erick, Letícia e Monick pelo incentivo e por manterem vivas em mim importantes memórias de minha trajetória.

Aos funcionários do departamento de matemática, em especial, à Cláudia, ao Sr. Manuel e ao Sr. Otacílio, por toda solicitude e serviço prestado, e à Dona Deusa, pelo "café de cada dia".

À CAPES e ao CNPq pelo apoio financeiro.

Resumo

Nesta dissertação, motivados pelos trabalhos de Ambrosetti, A. e Colorado, E. em [3] e Liu, H e Liu, Z em [23], estudaremos o sistema não-linear de Schrödinger

$$\begin{cases} -\Delta u_1 + V_1(x)u_1 = \mu_1(x)u_1^3 + \beta(x)u_2^2 u_1, \ x \in \mathbb{R}^N, \\ -\Delta u_2 + V_2(x)u_2 = \beta(x)u_1^2 u_2 + \mu_2(x)u_2^3, \ x \in \mathbb{R}^N, \\ u_j \in H^1(\mathbb{R}^N), j = 1,2. \end{cases} \tag{1}$$

No primeiro capítulo os coeficientes do sistema dado em (1) são constantes, sendo $\beta \in \mathbb{R}$ e os demais coeficientes, positivos, com $N = 2,3$. De modo que serão exibidos resultados de existência de soluções radiais positivas dos tipos ground state e bound state. Para o segundo capítulo consideraremos $N = 2,3$, e resultados de existência são obtidos no caso em que β é “pequeno” e também no caso em que β é “grande”. Além disto, $V_j(x), \mu_j(x), \beta(x)$ são, em alguns resultados, funções contínuas, positivas e periódicas em suas coordenadas, e em outros resultados, funções contínuas e positivas que possuem limite quando $|x| \to +\infty$.

Abstract

In this thesis, motivated by the works of Ambrosetti, A. and Colorado, E. in [3] and Liu, H and Liu, Z in [23], we will study the following nonlinear Schrödinger system

$$\begin{cases} -\Delta u_1 + V_1(x)u_1 = \mu_1(x)u_1^3 + \beta(x)u_2^2u_1,\ x \in \mathbb{R}^N, \\ -\Delta u_2 + V_2(x)u_2 = \beta(x)u_1^2u_2 + \mu_2(x)u_2^3,\ x \in \mathbb{R}^N, \\ u_j \in H^1(\mathbb{R}^N), j = 1,2, \end{cases}$$

In the first chapter, the coefficients of (1) are considered constants, being $\beta \in \mathbb{R}$ and the other coefficients are positive, where $N = 2,3$. Thus, existence results of positive radial ground state and bound state for (1) will be displayed. Moving on to the next chapter, where $N = 2,3$, the existence results are obtained in the case of a "small" coefficient β and also the case of a "large" coefficient β. Furthermore, $V_j(x), \mu_j(x), \beta(x)$ are, in some results, continuous, positive and periodic, and in other results, $V_j(x)$ are continuous and well-shaped, and $\mu_j(x), \beta(x)$ are continuous and anti-well-shaped.

Conteúdo

Lista de Notações

Utilizaremos nesta dissertação a notação que se segue.

- Denotaremos por $|\cdot|$ a norma *euclidiana* de $\mathbb{R}^N$ dada por

$$|x| = \left(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_N^2\right)^{1/2},$$

com $x = (x_1, x_2, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N$;

- $L^p(\mathbb{R}^N) := \left\{ f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R} \text{ é mensurável e } \int_{\mathbb{R}^N} |f(x)|^p < +\infty \right\}$, com sua norma usual dada por

$$\|f\|_{L^p} := \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(x)|^p \right)^{1/p},$$

com $1 < p < \infty$;

- $L^p_{loc}(\mathbb{R}^N) := \left\{ f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R};\ f\chi_K \in L^p(\mathbb{R}^N),\ \text{para todo compacto } K \subset \mathbb{R}^N \right\}$, com $1 < p < \infty$, em que $\chi_K : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é a função *característica de* K, dado por

$$\chi_K(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in K \\ 0, & \text{se } x \notin K; \end{cases}$$

- $supp(\phi) := \overline{\{x \in \Omega; \phi(x) \neq 0\}}$, em que $\phi : \Omega \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$;

- $C^m(\Omega) = \{ f : \Omega \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R};\ f$ é m vezes diferenciável e a m-ésima derivada é contínua$\}$;

- $C_c^\infty(\Omega) := \{ \phi : \Omega \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R};\ \phi$ possui derivadas de ordem $n, \forall n \in \mathbb{N}$ e $supp(\phi)$ é um compacto de $\mathbb{R}^N$ $\}$;

- Denotaremos a *derivada fraca* de u por $D_i u$;

- $\nabla u(x) := (D_1 u(x), D_2 u(x), \ldots, D_N u(x))$;

- $W^{1,2}(\mathbb{R}^N) := \{u \in L^2(\mathbb{R}^N);\ D_i u \in L^2(\mathbb{R}^N),\ \text{para } i = 1,2,...,N.\}$, com sua norma usual dada por
$$\|u\|_{1,2} := \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u(x)|^2 + u(x)^2);$$
- $\hookrightarrow$ imersão contínua;
- $\to$ convergência segundo a norma (convergência forte);
- $\rightharpoonup$ convergência fraca;
- $\int_\Omega f := \int_\Omega f(x)dx;$
- sendo X um espaço vetorial normado, seu dual topológico (o espaço dos funcionais lineares reais definidos em X) será denotado por X^*;
- $B_r(x) := \{y \in X; \|x-y\| < r\};$
- Seja $\Phi : X \to \mathbb{R}$ um funcional duas vezes *Fréchet-diferenciável*. Denotaremos por Φ' e Φ'' as, respectivamente primeira e segunda, derivadas de *Fréchet* de Φ ;

Introdução

Neste trabalho, no primeiro capítulo estudamos o artigo de A. Ambrosetti e E. Colorado, em [3], que trata de uma classe de sistemas de equações não-lineares de Schrödinger dado por

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta u_1 + \lambda_1 u_1 = \mu_1 u_1^3 + \beta u_2^2 u_1, \;\; u_1 \in W^{1,2}(\mathbb{R}^N), \\ -\Delta u_2 + \lambda_2 u_2 = \beta u_1^2 u_2 + \mu_2 u_2^3, \;\; u_1 \in W^{1,2}(\mathbb{R}^N), \end{array} \right. \tag{2}$$

em que $\lambda_j, \mu_j > 0$, $N = 2,3$, com $j = 1,2$, e $\beta \in \mathbb{R}$.

Problemas como estudado em (2) podem ser encontrados no estudo de *equações não-lineares de Schrödinger* (NLS-nonlinear Schrödinger) que modelam muitos fenômenos tratados pela física, especialmente em óptica não-linear. Considere por exemplo, uma onda eletromagnética. Seu campo elétrico é da forma $\tilde{\mathbf{E}}(r,t) = \mathbf{E}(r,t)e^{-i(\omega t - kr)}$, em que $\mathbf{E}(r,t)$ é envelope complexo do campo. Se a onda em questão for plana e estacionária então os feixes de luz que se propagam na direção z são descritos pela equação

$$2ik\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial z} + \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x^2} = -k^2 \frac{\delta n_{nl}}{n_0} |\mathbf{E}|^2 \mathbf{E}.$$

Através do processo de adimensionalização, semelhante ao visto em [24], transformamos a equação não-linear de Schrödinger acima na equação adimensional que se segue

$$i\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial z} + \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x^2} + \kappa |\mathbf{E}|^2 \mathbf{E} = 0,$$

com κ sendo uma constante positiva. Podemos representar $\mathbf{E}$ como a soma de uma onda circularmente polarizada à direita com uma onda circularmente polarizada à esquerda

$$\mathbf{E} = a_1 E_1 c_R + a_2 E_2 c_L,$$

em que c_R e c_L são vetores complexos unitários que representam as polarizações circulares à direita e à esquerda, e $a_j \in \mathbb{R}$, $j = 1,2$. Valendo-nos da ortogonalidade entre c_R e c_L obtemos o seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} ia_1\dfrac{\partial E_1}{\partial z}+a_1\dfrac{\partial^2 E_1}{\partial x^2}+\kappa(a_1^2|E_1|^2+a_2^2|E_2|^2)a_1E_1=0, \\ ia_2\dfrac{\partial E_2}{\partial z}+a_2\dfrac{\partial^2 E_2}{\partial x^2}+\kappa(a_1^2|E_1|^2+a_2^2|E_2|^2)a_2E_2=0, \end{cases}$$

e então

$$\begin{cases} i\dfrac{\partial E_1}{\partial z}+\dfrac{\partial^2 E_1}{\partial x^2}+\kappa(a_1^2|E_1|^2+a_2^2|E_2|^2)E_1=0, \\ i\dfrac{\partial E_2}{\partial z}+\dfrac{\partial^2 E_2}{\partial x^2}+\kappa(a_1^2|E_1|^2+a_2^2|E_2|^2)E_2=0. \end{cases} \tag{3}$$

Estamos a procura de soluções estacionárias, isto é, soluções de (3) da forma $E_j(z,x) := e^{i\lambda_j z}u_j(x)$, em que λ_j é uma constante positiva e $u_j(x)$ é uma função de valor real. Como queremos que $E_j(z,x)$, seja solução de (3), com respeito a $u_j(x)$ devemos ter que

$$\begin{cases} i\dfrac{\partial(e^{i\lambda_1 z}u_1(x))}{\partial z}+\dfrac{\partial^2(e^{i\lambda_1 z}u_1(x))}{\partial x^2}+\kappa(a_1^2|e^{i\lambda_1 z}u_1(x)|^2+a_2^2|e^{i\lambda_2 z}u_2(x)|^2)e^{i\lambda_1 z}u_1(x)=0, \\ i\dfrac{\partial(e^{i\lambda_2 z}u_2(x))}{\partial z}+\dfrac{\partial^2(e^{i\lambda_2 z}u_2(x))}{\partial x^2}+\kappa(a_1^2|e^{i\lambda_1 z}u_1(x)|^2+a_2^2|e^{i\lambda_2 z}u_2(x)|^2)e^{i\lambda_2 z}u_2(x)=0, \end{cases}$$

equivalentemente,

$$\begin{cases} i^2\lambda_1u_1(x)e^{i\lambda_1 z}+e^{2(i\lambda_1 z)}(u_1)_{xx}+\kappa(a_1^2|e^{i\lambda_1 z}|^2|u_1(x)|^2+a_2^2|e^{i\lambda_2 z}|^2|u_2(x)|^2)e^{i\lambda_1 z}u_1(x)=0, \\ i^2\lambda_2u_2(x)e^{i\lambda_2 z}+e^{2(i\lambda_2 z)}(u_2)_{xx}+\kappa(a_1^2|e^{i\lambda_1 z}|^2|u_1(x)|^2+a_2^2|e^{i\lambda_2 z}|^2|u_2(x)|^2)e^{i\lambda_2 z}u_2(x)=0 \end{cases}$$

por fim,

$$\begin{cases} -\lambda_1u_1(x)+(u_1)_{xx}+\kappa(a_1^2u_1(x)^2+a_2^2u_2(x)^2)u_1(x)=0, \\ -\lambda_2u_2(x)+(u_2)_{xx}+\kappa(a_1^2u_1(x)^2+a_2^2u_2(x)^2)u_2(x)=0. \end{cases}$$

Se tomarmos o fator de acoplamento $a_j^2 := \beta$ como um parâmetro e permitirmos que os coeficientes de u_j^3 sejam diferentes de β, conferindo a estes a notação μ_j, e supormos sem perdas que $\kappa = 1$, então obtemos o seguinte sistema

$$\begin{cases} -(u_1)_{xx}+\lambda_1u_1=\mu_1^2u_1^3+\beta u_2^2u_1, \\ -(u_2)_{xx}+\lambda_2u_2=\beta u_1^2u_2+\mu_2^2u_2^3, \end{cases}$$

que é o sistema em que estamos interessados. Sistemas como este tem sido bastante estudados na literatura. Até o ano de publicação de [3] a maioria dos artigos que lidavam com equações NLS ou possuiam resultados baseados em argumentos numéricos, ou tratavam de existência de soluções explícitas com muita especificidade, como no trabalho de F. T. Hioe e T. S. Salter em [16].

No então recente momento em que começavam a surgir conquistas de resultados mais gerais e rigorosos, tais quais [10, 21, 28], A. Ambrosetti e E. Colorado foram motivados por T.-C. Lin e J. Wei em [21] para estudar o sistema (2) bem como algumas extensões para sistemas com mais de duas equações. Resumidamente, o que estes pesquisadores fizeram foi mostrar que existem constantes $\Lambda' \geq \Lambda > 0$ que dependem que λ_j, μ_j, tais que, se $\beta \in (0,\Lambda) \cup (\Lambda', +\infty)$ então o sistema dado em (2) possui uma solução radialmente simétrica $(u_1,u_2) \in W^{1,2}(\mathbb{R}^N) \times W^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, com $u_1, u_2 > 0$. Além disso, se $\beta > \Lambda'$ então as soluções encontradas possuem energia. Vale ressaltar que para quaisquer valores de β, o sistema dado em (2) possui duas soluções denotadas por $(U_1,0),(0,U_2)$, em que U_j são soluções radiais positivas de $-\Delta u + \lambda_j u = \mu_j u^3$, $u \in W^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, cuja existência é assegurada por M. K. Kwong, em [19]. Essas soluções serão essenciais para a demonstração dos resultados de existência, embora nossas atenções estejam voltadas para soluções diferentes destas. Na verdade, resultados preliminares são obtidos demonstrando-se que o índice de Morse de $(U_1,0),(0,U_2)$ muda segundo o valor que β assume. Os principais resultados são obtidos a partir deste fato, bem como da utilização "apropriada" do Método de Nehari.

Com respeito às soluções U_j mencionadas, definimos as constantes

$$\gamma_1^2 := \inf_{\varphi \in H \setminus \{0\}} \frac{\|\varphi\|_2^2}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} U_1^2 \varphi^2} \quad , \quad \gamma_2^2 := \inf_{\varphi \in H \setminus \{0\}} \frac{\|\varphi\|_1^2}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} U_2^2 \varphi^2}$$

$$\Lambda := \min\{\gamma_1^2, \gamma_2^2\} \quad , \quad \Lambda' := \max\{\gamma_1^2, \gamma_2^2\}.$$

Nossos principais resultados de existência do Capítulo 1 são os seguintes:

Teorema 1.1. Se $\beta > \Lambda'$, então (2) possui uma solução $\tilde{\mathbf{u}}$ radial positiva do tipo ground state.

Teorema 1.2. Se $\beta < \Lambda$, então (2) possui uma solução $\mathbf{u}^*$ radial do tipo bound state tal que $\mathbf{u}^* \neq \mathbf{u}_j$, $j = 1,2$. Além disto, se $\beta \in (0,\Lambda)$, então $\mathbf{u}^* > 0$.

Os resultados obtidos por A. Ambrosetti e E. Colorado em [3] sobre a existência de solução de energia mínima, incluindo o que trata de sistemas gerais (veja o Teorema 6.2 (*ii*) de [3]) eram, na ocasião, novos. Além disso, os resultados relativos à existência de soluções do tipo bound state melhoram e conferiram mais precisão a [21], mais precisamente o Teorema 2.

Em um segundo momento dessa dissertação estudaremos o trabalho de L. HaiDong e L. Zhaoli em [23], que trata de um sistema de Schröndinger não linear com potencias não constantes, dado por

$$\begin{cases} -\Delta u_1 + V_1(x)u_1 = \mu_1(x)u_1^3 + \beta(x)u_2^2 u_1,\ x \in \mathbb{R}^N, \\ -\Delta u_2 + V_2(x)u_2 = \beta(x)u_1^2 u_2 + \mu_2(x)u_2^3,\ x \in \mathbb{R}^N, \\ u_j \in H^1(\mathbb{R}^N),\ j = 1,2, \end{cases} \tag{4}$$

em que $V_j(x)$, $\mu_j(x)$, e $\beta(x)$ são funções contínuas e positivas, com $N = 2,3$. O segundo capítulo desta dissertação é composto pelos resultados obtido por L. HaiDong e L. Zhaoli em [23] acerca de (4), sistema este que, no então cenário científico em que o artigo fora publicado, havia sido alvo de "raros" estudos. Nos 10 anos anteriores, a maioria dos artigos sobre sistemas de equações NLS tinham como objeto de estudo sistemas com coeficientes constantes, assim como (2). Quando em 2015, "parcialmente" motivados por [2, 3, 7, 29] os pesquisadores L. HaiDong e L. Zhaoli desenvolveram um estudo sobre o sistema (2) considerando λ_j, μ_j, β funções na variável $x \in \mathbb{R}^N$.

Neste novo caso, os resultados de existência, de soluções do tipo *ground states*, são obtidos a partir de estimativas, em termos de $V_j(x)$, $\mu_j(x)$, para $\beta(x)$. Ou seja, a existência de solução para o sistema (4) será possível no caso em que β é "pequeno" e no caso em β é "grande", sendo estes casos determináveis a partir de valores obtidos em função de $V_j(x)$ e $\mu_j(x)$. Note que estas condições não compreendem todos os valores positivos que β poderia assumir em (4), fato que já era esperado, afinal,no caso particular dos coeficientes constantes T. Bartsch e Z.-Q. Wang mostram em [7] que (2) não possui solução positiva se tivermos $\lambda_1 \geq \lambda_2$ e $\mu_1 < \beta < \mu_2$.

Além das hipóteses de $V_j(x)$, $\mu_j(x)$, e $\beta(x)$ serem funções contínuas e positivas, outras hipóteses são necessárias. Abaixo as anunciamos.

(H1) $0 < V_j(x) \leq V_{j\infty} := \lim_{|x|\to+\infty} V_j(x) < +\infty$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$, $j = 1,2$; $0 < \mu_{j\infty} := \lim_{|x|\to+\infty} \mu_j(x) \leq \mu_j(x)$, para $x \in \mathbb{R}^N$, $j = 1,2$;

(H2) $V_j(x)$ e $\mu_j(x)$ são positivas e τ_i-periódicas em x_i, $\tau_i > 0$, $i = 1,2,...,N$, $j = 1,2$;

Observação 2.1. A equação não-linear de Schrödinger

$$-\Delta u + V_j(x)u = \mu_j(x)u, x \in \mathbb{R}^N, u \in H^1(\mathbb{R}^N) \tag{5}$$

possui uma solução positiva do tipo ground state considerando a ocorrência de (H1) ([11, 22, 33]) ou de (H2) ([32, 20]). Denotaremos esta solução por ω_j, para $j = 1,2$.

Considere

$$\mathcal{M}_j := \left\{ u \in H^1(\mathbb{R}^N); u \neq 0, \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + V_j u^2) = \int_{\mathbb{R}^N} \mu_j u^4 \right\}$$

e

$$S_j := \inf_{u \in H^1(\mathbb{R}^N)\setminus\{0\}} \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + V_j u^2)}{\left(\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \mu_j u^4 \right)^{1/2}}.$$

S_j^2 é assumido em ω_j, portanto

$$S_j^2 = \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla \omega_j|^2 + V_j \omega_j{}^2) = \int_{\mathbb{R}^N} \mu_j \omega_j{}^4.$$

(H3) $0 \leq \beta_\infty := \lim\limits_{|x| \to +\infty} \beta(x) \leq \beta(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}^N$;

(H4) $\beta(x)$ é não-negativa e τ_i-periódica em x_i, $\tau_i > 0$, $i = 1, 2, ..., N$;

(H5) $\xi := \left| \dfrac{\beta}{(\mu_1 \mu_2)^{1/2}} \right|_\infty < \min \left\{ \dfrac{S_1^2 S_2^2 - \eta^4}{S_1 S_2 (S_1^2 + S_2^2 - 2\eta^2)}, \dfrac{S_1}{S_2}, \dfrac{S_2}{S_1} \right\}$, em que $\eta = \left(\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \beta \omega_1^2 \omega_2^2 \right)^{1/2}$.

(H6) O sistema

$$\begin{cases} -\Delta u_1 + V_{1\infty} u_1 = \mu_{1\infty} u_1^3 + \beta_\infty u_2^2 u_1, \ x \in \mathbb{R}^N, \\ -\Delta u_2 + V_{2\infty} u_2 = \beta_\infty u_1^2 u_2 + \mu_{2\infty} u_2^3, \ x \in \mathbb{R}^N, \\ u_j \in H^1(\mathbb{R}^N), j = 1, 2, \end{cases}$$

possui uma solução ground state positiva.

(H7) Existem $\rho > 0$, $\kappa > 0$, $\varphi_1, \varphi_2 \in H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$ tais que

$$\frac{\|(\omega_1, \rho\varphi_1)\|^4}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} (\mu_1 \omega_1^4 + 2\rho^2 \beta \omega_1^2 \varphi_1^2 + \rho^4 \mu_2 \varphi_1^4)} < \int_{\mathbb{R}^N} \mu_1 \omega_1^4$$

e

$$\frac{\|(\kappa\varphi_2, \omega_2)\|^4}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} (\kappa^4 \mu_1 \varphi_2^4 + 2\kappa^2 \beta \omega_2^2 \varphi_2^2 + \mu_2 \omega_2^4)} < \int_{\mathbb{R}^N} \mu_2 \omega_2^4.$$

As hipóteses (H1) a (H4) são vistas em diversos aritgos em que lidam com a equação NLS simples, mencionada na Observação 2.1, como em [11, 32, 20], fato que inspirou L. HaiDong e L. Zhaoli a utilizarem estas hipóteses em [23]. As hipóteses (H5) a (H7) se relacionam com as condições de β ser “grande” ou “pequeno”.

Nossos principais resultados de existência do Capítulo 2 são os seguintes:

Teorema 2.1. Se (H1), (H3), (H5) e (H6) ocorrem, então (4) possui uma solução ground state positiva.

Teorema 2.2. Se (H1), (H4) e (H5) ocorrem, então (4) possui uma solução ground state positiva.

Teorema 2.3. Se (H1), (H3) e (H7) ocorrem, então (4) possui uma solução ground state positiva.

Teorema 2.2. Se (H2), (H4) e (H7) ocorrem, então (4) possui uma solução ground state positiva.

Para que estudo dos sistemas dados em (2) e (4) fosse realizado, utilizamos algumas ferramentas que, há algum tempo, estão entre as principais utilizadas para problemas semelhantes. Tais ferramentas tratam-se de *Métodos Variacionais*, cuja ideia central se concebe no estudo "direto" de um funcional associado ao problema, denominado *funcional de energia*, e várias técnicas e resultados surgem a partir da questão de minimização deste funcional.

A estratégia utilizada para minimizar o funcional consiste em definir um conjunto adequado onde o funcional será limitado inferiormente, possuindo então um possível ponto de mínimo, o qual procuramos, como canditado a ponto crítico. Provado que este canditado é de fato um mínimo, e portanto uma solução, torna possível obter ainda, outras soluções a partir desta.

Dentre as ferramentas utiliziadas destacamos as *Imersões de Sobolev*, o *Princípio Variacional de Ekeland* e o *Teorema do Passo da Montanha*. A fim de garantir a existência de um mínimo para o funcional, resultados de compacidade serão úteis, afinal uma *sequência minimizante* para o funcional é limitada em $W^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, possuindo então subsequência converte, caso os conjuntos limitados possuam fecho compacto. No Capítulo 1, para obter a subsequência converte foi necessário, restringir o espaço sobre o qual procuramos as soluções, dado que o *espaço de Sobolev padrão* $W^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ não possui imersão compacta. Já no Capítulo 2, aplicamos o *Lema de Concentração e Compacidade de Lions* para esta finalidade.

Capítulo 1

Sistema de equações não-lineares de Schrödinger com coeficientes constantes

Neste capítulo estudaremos o seguinte problema não-linear

$$\begin{cases} -\Delta u_1 + \lambda_1 u_1 = \mu_1 u_1^3 + \beta u_2^2 u_1, \ u_1 \in W^{1,2}(\mathbb{R}^N), \\ -\Delta u_2 + \lambda_2 u_2 = \mu_2 u_2^3 + \beta u_1^2 u_2, \ u_2 \in W^{1,2}(\mathbb{R}^N), \end{cases} \tag{1.1}$$

em que $N = 2,3$, λ_j, μ_j, com $j = 1,2$, são constantes positivas e β é um número real.

Utilizaremos a seguinte notação:

(i) $E := W^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, o espaço de Sobolev padrão munido com o seguinte produto interno

$$\langle u, v\rangle_{\mathrm{j}} = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla v + \lambda_{\mathrm{j}} uv, \ \|u\|_{\mathrm{j}}^2 = \langle u, v\rangle_{\mathrm{j}};$$

(ii) $\mathbb{E} := E \times E$, cujos elementos são denotados por $\mathbf{u} := (u_1, u_2)$, e sua norma é dada por

$$\|\mathbf{u}\|^2 = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle,$$

em que $\langle ., .\rangle : \mathbb{E} \times \mathbb{E} \to \mathbb{R}$ é um produto interno dado por

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = \langle u_1, v_1\rangle_1 + \langle u_2, v_2\rangle_2.$$

(iii) Indicaremos o par nulo $(0,0)$ por $\mathbf{0}$;

(iv) Dado $\mathbf{u} \in \mathbb{E}$ diremos que $\mathbf{u} \geq 0$ (ou $\mathbf{u} > 0$), se para cada $j = 1,2$ tivermos que $u_j \geq 0$ (ou $u_j > 0$);

(v) H denota o espaço das funções radialmente simétricas em E;

(vi) $\mathbb{H} := H \times H$;

Primeiramente, é necessário que definamos os funcionais a seguir:

$$
\begin{aligned}
I_j(u) = & \ \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u|^2 + \lambda_j u^2) - \frac{1}{4}\mu_j \int_{\mathbb{R}^N} u^4, \\
F(\mathbf{u}) = & \ F(u_1,u_2) = \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^N}(\mu_1 u_1^4 + \mu_2 u_2^4) \\
G(\mathbf{u}) = & \ G(u_1,u_2) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} u_1^2 u_2^2, \\
\Phi(\mathbf{u}) = & \ \Phi(u_1,u_2) = I_1(u_1) + I_2(u_2) - \beta G(u_1,u_2) \\
= & \ \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u_1|^2 + \lambda_1 u_1^2) - \frac{1}{4}\mu_1 \int_{\mathbb{R}^N} u_1^4 \\
& + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u_2|^2 + \lambda_2 u_2^2) - \frac{1}{4}\mu_2 \int_{\mathbb{R}^N} u_2^4 - \frac{\beta}{2}\int_{\mathbb{R}^N} u_1^2 u_2^2 \\
= & \ \frac{\|\mathbf{u}\|^2}{2} - F(\mathbf{u}) - \beta G(\mathbf{u}),
\end{aligned}
$$

sendo $u \in E$ e $\mathbf{u} = (u_1,u_2) \in \mathbb{E}$.

A fim de provarmos que I_j, F, G e Φ estão bem definidos basta verificar que as integrais

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2, \ \int_{\mathbb{R}^N} u^2, \ \int_{\mathbb{R}^N} u^4, \ \int_{\mathbb{R}^N} u_1^2 u_2^2,$$

são finitas, para todo $u \in E$ e todo $\mathbf{u} = (u_1,u_2) \in \mathbb{E}$. Por definição, se $u \in W^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ então $|\nabla u|, \ u \in L^2(\mathbb{R}^N)$, logo

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 < +\infty, \ \int_{\mathbb{R}^N} u^2 < +\infty.$$

Para mostrar que

$$\int_{\mathbb{R}^N} u^4 < +\infty, \ \int_{\mathbb{R}^N} u_1^2 u_2^2 < +\infty,$$

precisamos das *Imersões de Sobolev* (consultar Seção B.3) de E em alguns espaços L^p. Estes resultados são obtidos considerando-se em $W^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ sua usual norma $\|\cdot\|_{1,2}$. Sendo assim, para garantir os mesmos resultados é suficiente mostrar que $\|\cdot\| : W^{1,2}(\mathbb{R}^N) \times W^{1,2}(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ dada por

$$\|u\|^2 = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + \lambda_j u^2,$$

e $\|\cdot\|_{1,2}$ são equivalentes.

Lema 1.1. As normas $\|\cdot\|_j$ e $\|\cdot\|_{1,2}$ são equivalentes.

Demonstração. Seja $u \in W^{1,2}(\mathbb{R}^N)$. Segue que

$$\|u\|_j^2 = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + \lambda_j u^2 \leq \max\{1, \lambda_j\} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + u^2 \leq \max\{1, \lambda_j\} \|u\|_{1,2}^2.$$

Temos também que

$$\begin{aligned} \|u\|_{1,2}^2 = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + u^2 &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + \frac{\lambda_j}{\lambda_j} u^2 \\ &\leq \max\{1,\ 1/\lambda_j\} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + \lambda_j u^2 \\ &= \max\{1,\ 1/\lambda_j\} \|u\|_j^2. \end{aligned}$$

□

Portanto, pela definição de imersão (consultar Seção B.3) e pelo Corolário B.3 existe $C > 0$ tal que

$$\|u\|_{L^4}^4 = \int_{\mathbb{R}^N} u^4 < C\|u\|^4 < +\infty.$$

Além disso, pela desigualdade de Hölder (consultar Teorema A.8)

$$\int_{\mathbb{R}^N} u_1^2 u_2^2 \leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} u_1^4 \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^N} u_2^4 \right)^{1/2} \leq C \left(\|u_1\|^4 \right)^{1/2} \left(\|u_2\|^4 \right)^{1/2} < +\infty,$$

logo I_j, F, G e Φ estão bem definidos.

Observação 1.1. Note que pelo Lema 1.1, assim como $W^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, E é um espaço de Hilbert, ou seja, $W^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ é completo com a norma $\|\cdot\|$, que é definida a partir do produto interno $\langle \cdot,\cdot \rangle_j : W^{1,2}(\mathbb{R}^N) \times W^{1,2}(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ dado por

$$\langle u, v \rangle_j = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla v + \lambda_j uv.$$

Mais do que boa-definição, precisamos de alguma regularidade para Φ.

Lema 1.2. Φ é duas vezes *Fréchet-diferenciável* em $\mathbb{E}$, com *derivada segunda de Fréchet* contínua, ou seja, $\Phi \in C^2(\mathbb{E}, \mathbb{R})$.

Demonstração. Este resultado decorre diretamente dos Lemas C.3 e C.4 e da Proposição C.1. Além disso, temos que

$$
\begin{aligned}
\langle \Phi'(\mathbf{u}), \varphi \rangle = {} & \frac{1}{2}\langle \left(\|\mathbf{u}\|^2\right)', \varphi\rangle - \langle F'(\mathbf{u}), \varphi\rangle - \beta\langle G'(\mathbf{u}), \varphi\rangle \\
= {} & \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u_1 \nabla \varphi_1 + \lambda_1 u \varphi_1 + \nabla u_2 \nabla \varphi_2 + \lambda_2 u_2 \varphi_2) \qquad (1.2) \\
& - \int_{\mathbb{R}^N} (\mu_1 u_1^3 \varphi_1 + \mu_2 u_2^3 \varphi_2) - \int_{\mathbb{R}^N} \beta (2u_1^2 u_2 \varphi_2 + 2u_1 \varphi_1 u_2^2).
\end{aligned}
$$

□

Observação 1.2. Observe que a notação utilizada para expressar a imagem de φ pelos funcionaias "diferenciais" é a mesma notação que exprime o produto interno de dois elementos de $\mathbb{E}$. Isto se deve ao fato de que, por exemplo, $\Phi'(\mathbf{u})$ denota na verdade um elemento de $\mathbb{E}$, que é o representante , concedido pelo Teorema da representação de Riesz (consultar Teorema A.13), do funcional linear "diferencial de Fréchet" $\mathrm{d}F(\mathbf{u})$ (consultar Definição C.2).

Definição 1.1. Um ponto $\mathbf{u} \in \mathbb{E}$ é dito ponto crítico de Φ se $\Phi'(\mathbf{u}) = 0$.

Diremos que $\mathbf{u} \in \mathbb{E}$ é *solução fraca* do problema dado em (1.1) se

$$
\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u_1 \nabla \varphi_1 + \lambda_1 u_1 \varphi_1 + \nabla u_2 \nabla \varphi_2 + \lambda_2 u_2 \varphi_2) = \\
& \int_{\mathbb{R}^N} (\mu_1 u_1^3 \varphi_1 + \mu_2 u_2^3 \varphi_2 + \beta u_1^2 u_2 \varphi_2 + \beta u_1 u_2^2 \varphi_1).
\end{aligned}
$$

para todo $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in \mathbb{E}$.

Observação 1.3. Comparando a equação (1.2) com a definição de solução fraca vemos que um ponto crítico $\mathbf{u} \in \mathbb{E}$ de Φ é uma solução de (1.1).

Diz-se que um ponto crítico $\mathbf{u} \in \mathbb{E}$ de Φ é não-trivial (diz-se também solução não-trivial do problema dado (1.1)) se $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$.

Distingui-se duas classes de soluções não-triviais, como a seguir:

Definição 1.2. Diz-se que $\mathbf{u} \in \mathbb{E}$ é uma solução *bound state* de (1.1) se $\mathbf{u}$ é um ponto crítico de Φ.

Definição 1.3. Uma solução bound state $\mathbf{u}$ que possua a menor energia dentre as energias de bound states não-triviais, i.e.,

$$
\Phi(\mathbf{u}) = \min\left\{\Phi(\mathbf{v}) : \mathbf{v} \in \mathbb{E} \setminus \{0\}\, ; \Phi'(\mathbf{v}) = 0\right\},
$$

é dita solução *ground state* de (1.1).

Observação 1.4. No caso de uma equação NLS simples

$$-\Delta u+\lambda u=\mu u^3, u\in E \tag{1.3}$$

diz-se que $u\in E$ é uma solução fraca deste problema se

$$\int_{\mathbb{R}^N}(\nabla u\nabla\varphi+\lambda u\varphi)-\mu\int_{\mathbb{R}^N}u^3\varphi=0 \tag{1.4}$$

para todo $\varphi\in E$.

Definição 1.4. Uma solução positiva do tipo *ground state* de (1.3) é uma solução $\tilde{u}>0$ de (1.3) tal que

$$I(\tilde{u})=\min\left\{I(u): u\in E\backslash\{0\}, u\geq 0; I'(u)=0\right\},$$

em que

$$I(u)=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u|^2+\lambda u^2)-\frac{1}{4}\mu\int_{\mathbb{R}^N}u^4.$$

Em [19], por Kwong, M. K., fora encontrada uma solução explícita U, que é a única solução radial positiva para a equação $-\Delta u+u=u^3$. Então, podemos verificar que U_j dada por

$$U_j(x)=\sqrt{\frac{\lambda_j}{\mu_j}}U\left(\sqrt{\lambda_j}x\right), j=1,2.$$

satisfaz (1.3) quando consideramos $\lambda_j=\lambda$, $\mu_j=\mu$ para $j=1,2$. Em verdade, é preciso notar primeiro que $\varphi(x)\mapsto\varphi(\sqrt{\lambda_j}x)$ é um isomorfismo sobre $W^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, portanto, dada $\varphi\in W^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ existe $\overline{\varphi}\in W^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ tal que $\overline{\varphi}(\sqrt{\lambda_j}x)=\varphi(x)$. Além disso, a aplicação $x\mapsto\sqrt{\lambda_j}x$ é um difeomorfismo de classe C^1 sobre $\mathbb{R}^N$ com inversa dada por $x\mapsto x/\sqrt{\lambda_j}$, também de classe C^1. Portanto, podemos aplicar a Proposição B.2 obtendo, para todo $\varphi\in\mathbb{E}$, que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N}\nabla U_j\nabla\varphi+\lambda_jU_J\varphi &= \int_{\mathbb{R}^N}\nabla\left(\sqrt{\frac{\lambda_j}{\mu_j}}U\left(\sqrt{\lambda_j}x\right)\right)\nabla\varphi(x)\\ &+\int_{\mathbb{R}^N}\left(\lambda_j\sqrt{\frac{\lambda_j}{\mu_j}}U\left(\sqrt{\lambda_j}x\right)\right)\varphi(x)\\ &=\int_{\mathbb{R}^N}\left(\nabla\left(\sqrt{\frac{\lambda_j}{\mu_j}}U\left(\sqrt{\lambda_j}x\right)\right)\nabla\left(\overline{\varphi}\left(\sqrt{\lambda_j}x\right)\right)\right)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \int_{\mathbb{R}^N} \left(\lambda_j (\sqrt{\frac{\lambda_j}{\mu_j}} U\left(\sqrt{\lambda_j} x\right)) \overline{\varphi}\left(\sqrt{\lambda_j} x\right) \right) \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \left(\left(\sqrt{\lambda_j} \sqrt{\frac{\lambda_j}{\mu_j}} \nabla U\left(\sqrt{\lambda_j} x\right) \right) \left(\sqrt{\lambda_j} \nabla \overline{\varphi}\left(\sqrt{\lambda_j} x\right) \right) \right) \\
&+ \int_{\mathbb{R}^N} \left(\lambda_j \sqrt{\frac{\lambda_j}{\mu_j}} U\left(\sqrt{\lambda_j} x\right) \right) \overline{\varphi}\left(\sqrt{\lambda_j} x\right) \\
&= \lambda_j \sqrt{\frac{\lambda_j}{\mu_j}} \int_{\mathbb{R}^N} \left(\nabla U\left(\sqrt{\lambda_j} x\right) \nabla \overline{\varphi}\left(\sqrt{\lambda_j} x\right) \right) \\
&+ \lambda_j \sqrt{\frac{\lambda_j}{\mu_j}} \int_{\mathbb{R}^N} U\left(\sqrt{\lambda_j} x\right) \overline{\varphi}\left(\sqrt{\lambda_j} x\right) \\
&= \lambda_j \sqrt{\frac{\lambda_j}{\mu_j}} \int_{\mathbb{R}^N} U_j^3\left(\sqrt{\lambda_j} x\right) \overline{\varphi}\left(\sqrt{\lambda_j} x\right) \\
&= \mu_j \int_{\mathbb{R}^N} \left(\sqrt{\frac{\lambda_j}{\mu_j}} U_j\left(\sqrt{\lambda_j} x\right) \right)^3 \overline{\varphi}\left(\sqrt{\lambda_j} x\right) \\
&= \mu_j \int_{\mathbb{R}^N} U_j^3 \varphi,
\end{aligned}
$$

Deste modo, definindo

$$\mathbf{u}_1 = (U_1, 0), \mathbf{u}_2 = (0, U_2)$$

obtemos duas soluções explícitas de (1.1). Em verdade, verificando o sistema (1.1) em $\mathbf{u}_1$ ou em $\mathbf{u}_2$, o vemos reduzido à equação simples de Schrödinger.

1.1 Uma restrição natural

A fim de encontrar os pontos críticos de Φ, recorreremos ao método introduzido por Nehari, Z. em [26] e [27] conhecido como o *método de Nehari*. Este método consiste em definir um subconjunto $\mathcal{M}$ fechado em $\mathbb{H}$ vinculado ao funcional Φ, na qual todos os pontos críticos de Φ estão contidos, e mais ainda, o funcional Φ é limitado inferiormente sobre $\mathcal{M}$, o que torna o ponto de mínimo do funcional restrito a variedade um canditado a ponto crítico em $\mathbb{H}$. Definamos então o funcional ψ em $\mathbb{E}$, dado por

$$
\begin{aligned}
\psi(\mathbf{u}) = \langle \Phi'(\mathbf{u}), \mathbf{u} \rangle = & \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u_1|^2 + \lambda_1 u_1^2) + \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u_2|^2 + \lambda_2 u_2^2) \\
- & \int_{\mathbb{R}^N} (\mu_1 u_1^4 + \mu_2 u_2^4) - 2\beta \int_{\mathbb{R}^N} u_1^2 u_2^2
\end{aligned}
\tag{1.5}
$$

$$= \quad \|\mathbf{u}\|^2 - 4F(\mathbf{u}) - 4\beta G(\mathbf{u}),$$

e o conjunto

$$\mathcal{M} = \{\mathbf{u} \in \mathbb{H} \setminus \{\mathbf{0}\} : \psi(\mathbf{u}) = 0\},$$

conhecido como *Variedade de Nehari*. Note que $\mathcal{M}$ contém todos os pontos críticos não-nulos de Φ.

Verifiquemos alguns fatos sobre $\mathcal{M}$ que são importantes para a aplicação do método criado por Nehari, Z.

I. Dados $\mathbf{v} \in \mathbb{E} \setminus \{0\}$ e $t \in \mathbb{R}$, $t\mathbf{v} \in \mathcal{M} \Leftrightarrow t^2\|\mathbf{v}\|^2 = t^4\,[4F(\mathbf{v}) + 4G(\mathbf{v})]$.

   Com efeito, se existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $t\mathbf{v} \in \mathcal{M}$, necessariamente devemos ter que $\psi(t\mathbf{v}) = 0$, ou seja,

$$\begin{aligned}\Phi'(t\mathbf{v}).t\mathbf{v} &= t^2 \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla v_1|^2 + \lambda_1 v_1^2 + |\nabla v_2|^2 + \lambda_2 v_2^2) \\ &\quad -t^4 \int_{\mathbb{R}^N} (\mu_1 v_1^4 + 2\beta v_1^2 v_2^2 + \mu_2 v_2^4) \\ &= t^2\|\mathbf{v}\|^2 - t^4(4F(\mathbf{v}) + 4G(\mathbf{v})) \\ &= 0.\end{aligned}$$

   Por outro lado, se $t \in \mathbb{R}$ é tal que $t^2\|\mathbf{v}\|^2 = t^4(4F(\mathbf{v}) + 4G(\mathbf{v}))$, desconsiderando o caso $t = 0$ e $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, afinal $\mathbf{0} \notin \mathcal{M}$, basta resolver a equação na variável t. Deste modo obtemos

$$t = \pm \left(\frac{\|\mathbf{v}\|^2}{4F(\mathbf{v}) + 4G(\mathbf{v})} \right)^{1/2}.$$

   Segue que

$$\psi(t\mathbf{v}) = t^2\|\mathbf{v}\|^2 - t^4\,(4F(\mathbf{v}) + 4G(\mathbf{v})) = 0.$$

   Portanto, $t\mathbf{v} \in \mathcal{M}$.

II. Uma consequência imediata do fato anterior é que dado $\mathbf{v} \in \mathbb{E}$, existe $t > 0$, obtido de maneira única, tal que $t\mathbf{v} \in \mathcal{M}$.

III. Existe $\rho > 0$ tal que

$$\|\mathbf{u}\|^2 \geq \rho, \forall \mathbf{u} \in \mathcal{M}. \tag{1.6}$$

   De fato, pelo Corolário B.3 existem constantes positivas c_1 e c_2 tais que

$$\|u_1\|_{L^4} \leq c_1\|u_1\|_1 \text{ e } \|u_2\|_{L^4} \leq c_2\|u_2\|_2, \forall u_1, u_2 \in E. \tag{1.7}$$

Considerando $\mathbf{u} \in \mathcal{M}$ temos,

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}\|^2 &= 4F(\mathbf{u}) + 4\beta G(\mathbf{u}) \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} (\mu_1 u_1^4 + \mu_2 u_2^4) + 2\beta \int_{\mathbb{R}^N} u_1^2 u_2^2 \\ &= \mu_1 \|u_1\|_{L^4}^4 + \mu_2 \|u_2\|_{L^4}^4 + 2\beta \int_{\mathbb{R}^N} u_1^2 u_2^2.\end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Hölder em $\int_{\mathbb{R}^N} u_1^2 u_2^2$ obtemos que

$$\|\mathbf{u}\|^2 \leq \mu_1 \|u_1\|_{L^4}^4 + \mu_2 \|u_2\|_{L^4}^4 + 2\beta \left(\int_{\mathbb{R}^N} u_1^4\right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^N} u_2^4\right)^{1/2}. \tag{1.8}$$

Segue por (1.7) e (1.8) que

$$\|\mathbf{u}\|^2 \leq c_1^4 \mu_1 \|u_1\|_1^4 + c_2^4 \mu_2 \|u_2\|_2^4 + 2\beta \left(\int_{\mathbb{R}^N} u_1^4\right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^N} u_2^4\right)^{1/2}. \tag{1.9}$$

Tomando C sendo o maior dos coeficientes em (1.9) temos

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}\|^2 \quad &\leq C\left(\|u_1\|_1^4 + \|u_2\|_2^4 + 2\left(\int_{\mathbb{R}^N} u_1^4\right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^N} u_2^4\right)^{1/2}\right) \\ &= C\left(\|u_1\|_1^4 + \|u_2\|_2^4 + 2\|u_1\|_1^2 \|u_n\|_2^2\right) \\ &= C\left(\|u_1\|_1^2 + \|u_2\|_2^2\right)^2 \\ &= C\|\mathbf{u}\|^4.\end{aligned} \tag{1.10}$$

Desde que $\mathbf{u} \neq 0$ temos $\|\mathbf{u}\| > 0$. Concluímos por (1.10) que

$$\rho \leq \|\mathbf{u}\|$$

em que $\rho = \dfrac{1}{C}$.

IV. Φ restrito a $\mathcal{M}$ é limitada inferiormente.

Em verdade, concluímos através da definição de $\mathcal{M}$ e por (1.6) que dado $\mathbf{u} \in \mathcal{M}$ temos que

$$\psi(\mathbf{u}) = 0 \Leftrightarrow \qquad \|\mathbf{u}\|^2 = (4F(\mathbf{u}) + 4\beta G(\mathbf{u})) \tag{1.11}$$

$$\Rightarrow \qquad \Phi(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\|\mathbf{u}\|^2 - \frac{1}{4}\|\mathbf{u}\|^2 = \frac{1}{4}\|\mathbf{u}\|^2 \geq \frac{\rho}{4} > 0. \tag{1.12}$$

V. $\mathcal{M}$ é uma variedade diferenciável de codimensão 1 (conforme a Definição C.7).

Segundo a Proposição C.6 é suficiente verificar que $\psi'(\mathbf{u}) \neq 0$ para todo $\mathbf{u} \in \mathcal{M}$, ou seja, dado $\mathbf{u} \in \mathcal{M}$ devemos garantir a existência de um ponto $\varphi \in \mathcal{M}$ no qual tenhamos $\langle \psi'(\mathbf{u}), \varphi \rangle \neq 0$.

Por (1.5) e pela Proposição C.1 temos que

$$\langle \psi'(\mathbf{u}), \mathbf{u} \rangle = \langle (\|\mathbf{u}\|^2)', \mathbf{u} \rangle - 4\langle (F(\mathbf{u}))', \mathbf{u} \rangle - 4\langle (G(\mathbf{u}))', \mathbf{u} \rangle. \tag{1.13}$$

Da demonstração do Lema 1.2 sabemos que

$$\langle (\|\mathbf{u}\|^2)', \mathbf{u} \rangle = 2\|\mathbf{u}\|^2, \ \langle (F(\mathbf{u}))', \mathbf{u} \rangle = 4F(\mathbf{u}), \ \langle (G(\mathbf{u}))', \mathbf{u} \rangle = 4G(\mathbf{u}). \tag{1.14}$$

Substituindo (1.14) em (1.13) concluímos que

$$\langle \psi'(\mathbf{u}), \mathbf{u} \rangle = 2\|\mathbf{u}\|^2 - 16F(\mathbf{u}) - 16G(\mathbf{u}). \tag{1.15}$$

Sendo assim, se $\mathbf{u} \in \mathcal{M}$, devemos ter que $\psi(\mathbf{u}) = 0$ e então por (1.5)

$$4\|\mathbf{u}\|^2 = \quad 16F(\mathbf{u}) + 16G(\mathbf{u}). \tag{1.16}$$

Substituindo (1.16) em (1.15) segue que $\langle \psi'(\mathbf{u}), \mathbf{u} \rangle = -2\|\mathbf{u}\|^2$ e, além disto, por (1.6) podemos concluir que

$$\langle \psi'(\mathbf{u}), \mathbf{u} \rangle = -2\|\mathbf{u}\|^2 \leq -2\rho < 0, \forall \mathbf{u} \in \mathcal{M}. \tag{1.17}$$

Deste modo, dado $\mathbf{u} \in \mathcal{M}$, $\psi'(\mathbf{u}) \neq 0$, e de fato $\mathcal{M}$ é uma variedade diferenciável de codimensão 1.

O item IV nos conduz a seguinte proposição.

Proposição 1.1. Um elemento $\mathbf{u} \in \mathcal{M}$, é um ponto crítico não-trivial de Φ se, e somente se, é um ponto crítico da restrição de Φ a $\mathcal{M}$.

Demonstração. Por um lado, se $\mathbf{u} \in \mathcal{M}$ é um ponto crítico de Φ, pela Definição C.11, então $\mathbf{u}$ é ponto crítico da restrição.

Por outro lado, se $\mathbf{u} \in \mathcal{M}$ é ponto crítico da restrição de Φ a $\mathcal{M}$, sendo Φ de classe C^1, pelo Lema 1.2, e por $\mathcal{M} = \psi^{-1}(\{0\})$ ser uma variedade diferenciável, o Teorema C.4 nos garante a existência de um número real α tal que

$$\Phi'(\mathbf{u}) = \alpha \psi'(\mathbf{u}). \tag{1.18}$$

Segue imediatamente disto que

$$\alpha\langle\psi'(\mathbf{u}),\mathbf{u}\rangle = \langle(\alpha\psi)'(\mathbf{u}),\mathbf{u}\rangle = \langle\Phi'(\mathbf{u}),\mathbf{u}\rangle = \psi(\mathbf{u}) = 0.$$

Logo, por (1.17) obtemos que $\alpha = 0$. Associando isto à equação (1.18), concluímos que $\Phi'(\mathbf{u}) = 0$. □

A Proposição 1.1 nos mostra que o conjunto $\mathcal{M}$ uma restrição natural para Φ.

O que acabamos de verificar foi que a fim de encontrar pontos críticos não-trivias de Φ (que por sua vez serão soluções não-triviais de (1.1)), basta que os procuremos em $\mathcal{M}$.

Considerando $c \in \overline{\{\Phi(\mathbf{u});\ \mathbf{u} \in \mathcal{M}\}}$, concernente à condição *(PS)*$_c$ (consultar Definição C.13) segue o próximo lema.

Lema 1.3. Φ satisfaz a condição *(PS)*$_c$ em $\mathcal{M}$.

Demonstração. Seja $\{\mathbf{u}_n\} \in \mathcal{M}$ sequência tal que $\Phi(\mathbf{u}_n) \to c$ e $\nabla_{\mathcal{M}}\Phi(\mathbf{u}_n) \to 0$, quando $n \to +\infty$.
Como consequência imediata de (1.12) temos que

$$c \geq \frac{\rho}{4} > 0. \tag{1.19}$$

Além disto, $\{\Phi(\mathbf{u}_n)\}$ é um sequência convergente, consequentemente limitada, ou seja, existe $k > 0$ tal que $|\Phi(\mathbf{u}_n)| \leq k$. Segue adicionalmente por (1.12), que

$$|\Phi(\mathbf{u}_n)| = \frac{1}{4}\|\mathbf{u}_n\|^2 \leq k,$$

ou seja, $\{\mathbf{u}_n\}$ é uma sequência limitada.
Pelo Teorema C.1 $\mathbb{H}$ é espaço de Hilbert, logo reflexivo pela Proposição A.3. Portanto em decorrência do Teorema A.3, as sequências limitadas de $\mathbb{H}$ possuem subsequência *fracamente convergente* (consultar Definição A.2). Sendo $\{\mathbf{u}_n\} \subset \mathbb{H}$ limitada, consideremos sua subsequência convergente (que também denotaremos por $\{\mathbf{u}_n\}$), cujo limite fraco denotaremos por $\mathbf{u}_0$.

A seguir provamos que F e G são funcionais contínuos em $\mathbb{H}$ equipado com a norma usual de $L^4(\mathbb{R}^n) \times L^4(\mathbb{R}^N)$.

Considere $\{\mathbf{v}_n\} := \{(v_{1n}, v_{2n})\} \subset \mathbb{H}$ tal que $\|\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_0\|_{L^4\times L^4} \to 0$ quando $n \to +\infty$, para algum $\mathbf{v}_0 = (v_{1_0}, v_{2_0}) \in \mathbb{H}$. A fim de provar que F e G são contínuos em $(\mathbb{H}, \|\cdot\|_{L^4\times L^4})$ é necessário e suficiente provarmos que a)

$$\begin{aligned}|F(\mathbf{v}_n)-F(\mathbf{v}_0)| &= \left|\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^N}(\mu_1(v_{1n}^4-v_{1_0}^4)+\mu_2(v_{2n}^4-v_{2_0}^4))\right| \\ &= \frac{1}{4}\left|\mu_1\left(\int_{\mathbb{R}^N}v_{1n}^4-\int_{\mathbb{R}^N}v_{1_0}^4\right)+\mu_2\left(\int_{\mathbb{R}^N}v_{2n}^4-\int_{\mathbb{R}^N}v_{2_0}^4\right)\right| \\ &\leq \frac{1}{4}\left|\mu_1\left(\|v_{1n}\|_{L^4}^4-\|v_{1_0}\|_{L^4}^4\right)\right| \\ &\quad +\frac{1}{4}\left|\mu_2\left(\|v_{2n}\|_{L^4}^4-\|v_{2_0}\|_{L^4}^4\right)\right| \to 0,\end{aligned}$$

quando $n \to +\infty$.

b) Aplicando a desigualdade de Hölder encontramos

$$\begin{aligned}|G(\mathbf{v}_n)-G(\mathbf{v}_0)| = &\ \left|\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(v_{1n}^2v_{2n}^2-v_{1_0}^2v_{2_0}^2)\right| \\ = &\ \frac{1}{2}\left|\int_{\mathbb{R}^N}(v_{1n}^2v_{2n}^2-v_{1_0}^2v_{2_0}^2+v_{1n}^2v_{2_0}^2-v_{1n}^2v_{2_0}^2)\right| \\ = &\ \frac{1}{2}\left|\int_{\mathbb{R}^N}\left[v_{1n}^2\left(v_{2n}^2-v_{2_0}^2\right)+v_{2_0}^2\left(v_{1n}^2-v_{1_0}^2\right)\right]\right| \\ \leq &\ \frac{1}{2}\left[\left(\int_{\mathbb{R}^N}v_{1n}^4\right)^{1/2}\left(\int_{\mathbb{R}^N}\left(v_{2n}^2-v_{2_0}^2\right)^2\right)^{1/2}\right] \\ &+\frac{1}{2}\left[\left(\int_{\mathbb{R}^N}v_{2_0}^4\right)^{1/2}\left(\int_{\mathbb{R}^N}\left(v_{1n}^2-v_{1_0}^2\right)^2\right)^{1/2}\right],\end{aligned} \tag{1.20}$$

quando $n \to +\infty$.

Utilizando novamente a desigualdade de Hölder segue, para $i = 1,2$, que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N}\left(v_{in}^2-v_{i_0}^2\right)^2 &= \int_{\mathbb{R}^N}\left[\left(v_{in}+v_{i_0}\right)\left(v_{in}-v_{i_0}\right)\right]^2 \\ &= \int_{\mathbb{R}^N}\left(v_{in}+v_{i_0}\right)^2\left(v_{in}-v_{i_0}\right)^2 \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N}\left(v_{in}+v_{i_0}\right)^4\right)^{1/2}\left(\int_{\mathbb{R}^N}\left(v_{in}-v_{i_0}\right)^4\right)^{1/2} \\ &= \|v_{in}+v_{i_0}\|_{L^4}^2\|v_{in}-v_{i_0}\|_{L^4}^2 \\ &\leq \left(\|v_{in}\|_{L^4}+\|v_{i_0}\|_{L^4}\right)^2\|v_{in}-v_{i_0}\|_{L^4}^2.\end{aligned} \tag{1.21}$$

Portanto, por (1.20) e (1.21)

$$\begin{aligned}|G(\mathbf{v}_n)-G(\mathbf{v}_0)| \leq\ & \frac{1}{2}\Big[\|v_{1n}\|_{L^4}^2\left(\|v_{2n}\|_{L^4}+\|v_{2_0}\|_{L^4}\right)\|v_{2n}-v_{2_0}\|_{L^4} \\ & +\|v_{2_0}\|_{L^4}^2\left(\|v_{1n}\|_{L^4}+\|v_{1_0}\|_{L^4}\right)\|v_{1n}-v_{1_0}\|_{L^4}\Big] \to 0.\end{aligned}$$

Segundo [30], devido a Strauss, W. A., a imersão de H em $L^4(\mathbb{R}^N)$ é compacta, isto é, o operador identidade é compacto (segundo a Definição A.3) de $(H,\|\cdot\|)$ em $(L^4(\mathbb{R}^N),\|\cdot\|_{L^4})$. Deste modo, conforme o Teorema A.4, a sequência$\{\mathbf{u}_n\}$, que é fracamente convergente em $(\mathbb{H},\|\cdot\|)$, possui uma subsequência $\{\mathbf{u}_n\}$ que converge forte para um certo $\tilde{\mathbf{u}}_0\in\mathbb{H}$, quando a consideramos pertencente a $(L^4(\mathbb{R}^N)\times L^4(\mathbb{R}^N),\|\cdot\|_{L^4\times L^4})$.
Devemos ter que $\tilde{\mathbf{u}}_0=\mathbf{u}_0$. De fato, pelo Corolário B.3 ocorre que $(\mathbb{H},\|\cdot\|)^*\subset\left(\mathbb{H},\|\cdot\|_{L^4\times L^4}\right)^*$. Pelo item (i) da Proposição A.2 tem-se que

$$\begin{aligned} & \mathbf{u}_n \rightharpoonup \tilde{\mathbf{u}}_0 \text{ em } \sigma\left(\left(\mathbb{H},\|\cdot\|_{L^4\times L^4}\right),\left(\mathbb{H},\|\cdot\|_{L^4\times L^4}\right)^*\right) \\ \text{implica em}\quad & \mathbf{u}_n \rightharpoonup \tilde{\mathbf{u}}_0 \text{ em } \sigma\left((\mathbb{H},\|\cdot\|),(\mathbb{H},\|\cdot\|)^*\right).\end{aligned} \tag{1.22}$$

Dado que, pela Proposição A.1, temos unicidade para limites de sequências convergentes da topologia fraca, segue que $\tilde{\mathbf{u}}_0=\mathbf{u}_0$ (para melhor compreender a notação utilizada em (1.22), que denota a topologia em $\mathbb{H}$ associada à família de funcionais lineares contínuos em $\left(\mathbb{H},\|\cdot\|_{L^4\times L^4}\right)$ e $(\mathbb{H},\|\cdot\|)$, o leitor pode consultar a Seção A.3).
Inferimos que $\mathbf{u}_n\to\mathbf{u}_0$ em $\left(\mathbb{H},\|\cdot\|_{L^4\times L^4}\right)$. Pela continuidade de F e G em $\left(\mathbb{H},\|\cdot\|_{L^4\times L^4}\right)$ temos que

$$F(\mathbf{u}_n)+\beta G(\mathbf{u}_n)\to F(\mathbf{u}_0)+\beta G(\mathbf{u}_0). \tag{1.23}$$

Desde que $\{\mathbf{u}_n\}\in\mathcal{M}$, por (1.11), (1.12) e (1.23), temos

$$\begin{aligned} F(\mathbf{u}_n)+\beta G(\mathbf{u}_n)=\frac{1}{4}\|\mathbf{u}_n\|^2 & \geq \frac{\rho}{4}>0 \\ \Rightarrow F(\mathbf{u}_0)+\beta G(\mathbf{u}_0) & \geq \frac{\rho}{4}>0,\end{aligned}$$

isto implica que $\mathbf{u}_0\neq\mathbf{0}$.

Considere agora $\mathbf{u}\in\mathcal{M}$. Pela Proposição C.7 o gradiente da restrição de Φ em $\mathcal{M}$ é dado por

$$\nabla_{\mathcal{M}}\Phi(\mathbf{u})=\Phi'(\mathbf{u})-\alpha\psi'(\mathbf{u}), \tag{1.24}$$

em que α é um número real subordinado a $\mathbf{u}$. Considerando a hipótese de que $\nabla_{\mathcal{M}}\Phi(\mathbf{u}_n) \to 0$, inerente a sequência PS_c, e aplicando $\{\mathbf{u}_n\}$ em (1.24) obtemos

$$\langle \nabla_{\mathcal{M}}\Phi(\mathbf{u}_n), \mathbf{u}_n\rangle = \langle \Phi'(\mathbf{u}_n), \mathbf{u}_n\rangle - \langle \alpha_n \psi'(\mathbf{u}_n), \mathbf{u}_n\rangle \to 0, \text{ quando } n \to +\infty.$$

Desde que $\langle \Phi'(\mathbf{u}_n), \mathbf{u}_n\rangle = 0$, segue que $\langle \alpha_n \psi'(\mathbf{u}_n), \mathbf{u}_n\rangle \to 0$. Entretanto, pela desigualdade (1.17),

$$|\langle \psi'(\mathbf{u}_n), \mathbf{u}_n\rangle| \geq 2\rho > 0,$$

isto implica que

$$|\alpha_n| = \left|\alpha_n \frac{\langle \psi'(\mathbf{u}_n), \mathbf{u}_n\rangle}{\langle \psi'(\mathbf{u}_n), \mathbf{u}_n\rangle}\right| \leq \frac{|\alpha_n \langle \psi'(\mathbf{u}_n), \mathbf{u}_n\rangle|}{2\rho} \to 0, \text{ quando } n \to +\infty,$$

ou seja, $\alpha_n \to 0$ quando $n \to +\infty$.

A fim de provar que $\{\psi'(\mathbf{u}_n)\} \subset \mathbb{E}$ é limitada note que, dado $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in \mathbb{E}$ temos

$$\begin{aligned}
\big|\langle \psi'(\mathbf{u}), \varphi\rangle\big| = & \left|\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u_1 \nabla \varphi_1 + \lambda_1 u_1 \varphi_1 + \nabla u_2 \nabla \varphi_2 + \lambda_2 u_2 \varphi_2)\right. \\
& \left. - \int_{\mathbb{R}^N} 4(\mu_1 u_1^3 \varphi_1 + \mu_2 u_2^2 \varphi_2) - 4\beta \int_{\mathbb{R}^N} (u_1^2 u_2 \varphi_2 + u_1 u_2^2 \varphi_1)\right| \\
\leq & \int_{\mathbb{R}^N} |(\nabla u_1 \nabla \varphi_1 + \lambda_1 u_1 \varphi_1 + \nabla u_2 \nabla \varphi_2 + \lambda_2 u_2 \varphi_2)| \\
& + \left|\int_{\mathbb{R}^N} 4(\mu_1 u_1^3 \varphi_1 + \mu_2 u_2^3 \varphi_2)\right| + 4\beta \left|\int_{\mathbb{R}^N} (u_1^2 u_2 \varphi_2 + u_1 u_2^2 \varphi_1)\right|.
\end{aligned}$$

Através da desigualdade de Hölder obtemos que

$$\begin{aligned}
\langle \psi'(\mathbf{u}), \varphi\rangle \leq & \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_1|^2\right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \varphi_1|^2\right)^{1/2} + \lambda_1 \left(\int_{\mathbb{R}^N} u_1^2\right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \varphi_1^2\right)^{1/2} \\
& + \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_2|^2\right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \varphi_2|^2\right)^{1/2} + \lambda_2 \left(\int_{\mathbb{R}^N} u_2^2\right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \varphi_2^2\right)^{1/2} \\
& + 4\mu_1 \left(\int_{\mathbb{R}^N} u_1^6\right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \varphi_1^2\right)^{1/2} + 4\mu_2 \left(\int_{\mathbb{R}^N} u_2^6\right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \varphi_2^2\right)^{1/2} \\
& + 4\beta \left(\int_{\mathbb{R}^N} u_1^4\right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^N} u_1^2 \varphi_1^2\right)^{1/2} + 4\beta \left(\int_{\mathbb{R}^N} u_2^4\right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^N} u_2^2 \varphi_2^2\right)^{1/2} \\
\leq & (2 + \lambda_1 + \lambda_2)\|\mathbf{u}\|\|\varphi\| \\
& + 4\mu_1 \|u_1\|_{L^6}^3 \|\varphi_1\|_1 + 4\mu_2 \|u_2\|_{L^6}^3 \|\varphi_2\|_2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& +4\beta\|u_1\|_{L^4}^2\left(\int_{\mathbb{R}^N} u_1^4\right)^{1/4}\left(\int_{\mathbb{R}^N} \varphi_1^4\right)^{1/4} \\
& +4\beta\|u_2\|_{L^4}^2\left(\int_{\mathbb{R}^N} u_2^4\right)^{1/4}\left(\int_{\mathbb{R}^N} \varphi_2^4\right)^{1/4} \\
\leq\ & C\|\mathbf{u}\|\|\varphi\|+4\mu_1\|u_1\|_{L^6}^3\|\varphi_1\|_1+4\mu_2\|u_2\|_{L^6}^3\|\varphi_2\|_2 \\
& +\beta\|u_1\|_{L^4}^2\|u_1\|_{L^4}\|\varphi_1\|_{L^4}+\beta\|u_2\|_{L^4}^2\|u_2\|_{L^4}\|\varphi_2\|_{L^4}.
\end{aligned}
$$

Pelo Corolário B.3 inferimos que existe uma constante $\tilde{C}>0$ tal que

$$
\begin{aligned}
|\langle\psi'(\mathbf{u}),\varphi\rangle| \leq\ & \tilde{C}\left(\|\mathbf{u}\|\|\varphi\|+\|u_1\|_1^3\|\varphi_1\|_1+\|u_2\|_2^3\|\varphi_2\|_2\right. \\
& \left.+\|u_1\|_1^2\|u_1\|_1\|\varphi_1\|_1+\|u_2\|_2^2\|u_2\|_2\|\varphi_2\|_2\right) \\
\leq\ & \tilde{C}\left(\|\mathbf{u}\|\|\varphi\|+\|\mathbf{u}\|^3\|\varphi\|+\|\mathbf{u}\|^3\|\varphi\|\right. \\
& \left.+\|\mathbf{u}\|^3\|\varphi\|+\|\mathbf{u}\|^3\|\varphi\|\right).
\end{aligned}
$$

Assim, dado que $\{\mathbf{u}_n\}$ é limitada em $\mathbb{H}$, tem-se que para cada φ fixado $\langle\psi'(\mathbf{u}_n),\varphi\rangle$ é uma sequência real limitada, logo pelo *Princípio da Limitação Uniforme* (consultar Teorema A.1), a família de funcionais $\mathrm{d}\psi(\mathbf{u}_n):\mathbb{E}\to\mathbb{R}$ (consultar Definição C.2) possui norma em E^* limitada. Pelo Teorema da representação de Riesz–Fréchet $\|\mathrm{d}\psi(\mathbf{u}_n)\|_{E^*}=\|\psi'(\mathbf{u}_n)\|$, portanto existe $C>0$ constante tal que

$$
\|\psi'(\mathbf{u}_n)\|=\|\mathrm{d}\psi(\mathbf{u}_n)\|_{E^*}\leq C, \tag{1.25}
$$

para todo n.
Da hipótese que $\nabla_{\mathcal{M}}\Phi(\mathbf{u}_n)\to 0$, por (1.25) e do fato de que $\alpha_n\to 0$ obtemos que

$$
\begin{aligned}
\|\Phi'(\mathbf{u}_n)\| &= \|\Phi'(\mathbf{u}_n)-\alpha_n\psi'(\mathbf{u}_n)+\alpha_n\psi'(\mathbf{u}_n)\| \\
&\leq \|\Phi'(\mathbf{u}_n)-\alpha_n\psi'(\mathbf{u}_n)\|+\|\alpha_n\psi'(\mathbf{u}_n)\| \\
&\leq \|\nabla_{\mathcal{M}}\Phi'(\mathbf{u}_n)\|+|\alpha_n|\|\psi'(\mathbf{u}_n)\|\to 0.
\end{aligned}
$$

Calculando as derivada de Φ, ψ em $\mathbf{u}_n$ na direção de $\varphi\in\mathbb{E}$ encontramos

$$
\begin{cases}
\langle\Phi'(\mathbf{u}_n),\varphi\rangle=\langle\mathbf{u}_n,\varphi\rangle-\langle F'(\mathbf{u}_n),\varphi\rangle-\beta\langle G'(\mathbf{u}_n),\varphi\rangle \\
\langle\psi'(\mathbf{u}_n),\varphi\rangle=2\langle\mathbf{u}_n,\varphi\rangle-4(\langle F'(\mathbf{u}_n),\varphi\rangle+\beta\langle G'(\mathbf{u}_n),\varphi\rangle).
\end{cases} \tag{1.26}
$$

Deste modo, através da Observação 1.2, por (1.26) e (1.24) inferimos que

$$\Phi'(\mathbf{u}_n) = \mathbf{u}_n - (F'(\mathbf{u}_n) + \beta G'(\mathbf{u}_n)) \tag{1.27}$$

$$\psi'(\mathbf{u}_n) = 2\mathbf{u}_n - 4(F'(\mathbf{u}_n) + \beta G'(\mathbf{u}_n)) \tag{1.28}$$

$$\Phi'(\mathbf{u}_n) - \alpha_n \psi'(\mathbf{u}_n) = \mathbf{v}_n, \tag{1.29}$$

para alguma sequência $\{\mathbf{v}_n\} \in \mathbb{H}$ tal que $\mathbf{v}_n \to \mathbf{0}$ quando $n \to +\infty$.
Substituindo (1.27) e (1.28) em (1.29), obtemos

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_n - (F'(\mathbf{u}_n) + \beta G'(\mathbf{u}_n)) - \alpha_n(2\mathbf{u}_n - 4(F'(\mathbf{u}_n) + \beta G'(\mathbf{u}_n))) &= \mathbf{v}_n \\ (1-2\alpha_n)\mathbf{u}_n &= (1-4\alpha_n)(F'(\mathbf{u}_n) + \beta G'(\mathbf{u}_n) + \mathbf{v}_n. \end{aligned}$$

Pelo Lema C.4 F, G pertencem a $C^1(L^4(\mathbb{R}^N) \times L^4(\mathbb{R}^N), \mathbb{R})$. Portanto, pelo Corolário B.3 temos que $F', G' : (\mathbb{H}, \|\cdot\|_{L^4 \times L^4}) \to (\mathbb{H}, \|\cdot\|_{L^4 \times L^4})^*$ são aplicações contínuas. Sendo assim, pela imersão compacta $E \hookrightarrow L^4(\mathbb{R}^N)$, para $N = 2, 3$, obtida em [30] por Strauss, W. A., segue que $F', G' : (\mathbb{H}, \|\cdot\|) \to (\mathbb{H}, \|\cdot\|)^*$ são aplicações compactas, ou seja, se $\{\mathbf{u}_n\}$ é uma sequência que converge fraco para $\mathbf{u}_0$ em $(\mathbb{H}, \|\cdot\|)$ então $F'(\mathbf{u}_n)$ e $G'(\mathbf{u}_n)$ convergem forte, respectivamente, para $F'(\mathbf{u}_0)$ e $G'(\mathbf{u}_0)$ em $(\mathbb{H}, \|\cdot\|)^*$.
Logo, da continuidade fraca de $F', G' : (\mathbb{H}, \|\cdot\|) \to (\mathbb{H}, \|\cdot\|)^*$ e do fato de $\alpha_n \to 0$ temos que

$$\mathbf{u}_n = \frac{(1-4\alpha_n)(F'(\mathbf{u}_n) + \beta G'(\mathbf{u}_n)) + o(1)}{(1-2\alpha_n)} \to F'(\mathbf{u}_0) + \beta G'(\mathbf{u}_0), \tag{1.30}$$

quando $n \to +\infty$. Pelo item (ii) da Proposição A.2 e pela unicidade do limite na topologia fraca, temos que

$$\mathbf{u}_0 = F'(\mathbf{u}_0) + \beta G'(\mathbf{u}_0). \tag{1.31}$$

Por (1.30) e (1.31) inferimos que $\mathbf{u}_n \to \mathbf{u}_0$. Além disso, efetuando o produto interno de $\mathbf{u}_0$ pela identificação de $\mathbf{u}_0$ dada em (1.31) encontramos

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_0\|^2 &= \langle F'(\mathbf{u}_0), \mathbf{u}_0 \rangle + \beta \langle G'(\mathbf{u}_0), \mathbf{u}_0 \rangle \\ &= 4F(\mathbf{u}_0) + 4\beta G(\mathbf{u}_0), \end{aligned}$$

ou seja, $\mathbf{u}_0 \in \mathcal{M}$. Logo, referente ao funcional Φ, toda sequência PS_c em $\mathcal{M}$ possui uma subsequência convergente, com limite ainda em $\mathcal{M}$. □

Observação 1.5. Pelo Lema 1.3, é possível verificar que o conjunto $\mathcal{A} = \{\Phi(\mathbf{u}) : \mathbf{u} \in \mathcal{M}\}$ não só é limitado inferiormente, como também possui um elemento mínimo, *i.e.*, existe $\mathbf{u}_0 \in \mathcal{M}$ tal que $\Phi(\mathbf{u}_0) = \inf \mathcal{A}$. De fato, dado que

(i) Φ satisfaz a condição *(PS)$_c$* em M (pelo Lema 1.3), com $c = \inf \mathcal{A}$,

(ii) $\Phi, \psi \in C^1(\mathbb{E}, \mathbb{R})$,

(iii) $\psi'(\mathbf{u}) \neq 0$ para todo $\mathbf{u} \in \mathcal{M} = \psi^{-1}(\{0\})$ e

(iv) Φ é limitado inferiormente em $\mathcal{M}$,

segue diretamente do Teorema C.6 que c é assumido em $\mathcal{M}$.

Duas soluções explícitas de (1.1) já são conhecidas, as quais denotamos por

$$\mathbf{u}_1 = (U_1, 0), \mathbf{u}_2 = (0, U_2)$$

em que U_j é solução radial positiva e única do problema $-\Delta u + \lambda_j u = \mu_j u^3$, abordado na Observação 1.4. Os resultados que exibiremos nas próximos seções obtem soluções cujas coordenadas são simultaneamente não-nulas.

1.2 Resultados de existência

Neste seção encontraremos soluções não-triviais de (1.1) diferentes das soluções semi-triviais $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$, os quais nas seções seguintes provaremos serem soluções positivas . Tais resultados dependem fortemente do intervalo em que β se encontra. A fim de determinar condições suficientes para valores que β pode assumir, definamos as seguintes constantes:

$$\gamma_1^2 = \inf_{\varphi \in H \setminus \{0\}} \frac{\|\varphi\|_2^2}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} U_1^2 \varphi^2}, \gamma_2^2 = \inf_{\varphi \in H \setminus \{0\}} \frac{\|\varphi\|_1^2}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} U_2^2 \varphi^2}$$

e

$$\Lambda = \min\{\gamma_1^2, \gamma_2^2\}, \ \Lambda' = \max\{\gamma_1^2, \gamma_2^2\}.$$

A proposição que se segue concebe as soluções não-triviais há pouco mencionadas.

Proposição 1.2. i) Se $\beta < \Lambda$, então $\mathbf{u}_j$ é mínimo local estrito de Φ em $\mathcal{M}$, para $j = 1, 2$.

ii) Se $\beta > \Lambda'$, então $\mathbf{u}_j$ é ponto de sela de Φ em $\mathcal{M}$, para $j = 1, 2$. Em particular, $\inf_{\mathcal{M}} \Phi < \min\{\Phi(\mathbf{u}_1), \Phi(\mathbf{u}_2)\}$.

A estratégia usada para demonstrar a Proposição 1.2 consiste em avaliar o sinal da segunda derivada de Φ em $\mathbf{u}_j$ restrito a $\mathcal{M}$.

Denotaremos por $D^2_{\mathcal{M}}\Phi$ a segunda derivada de Φ restrito a $\mathcal{M}$. Do fato de que $\Phi'(\mathbf{u}_j) = 0$, ocorre que $\mathbf{u}_j \in \mathcal{M}$, deste modo podemos definir $D^2\Phi_{\mathcal{M}}(\mathbf{u}_j)$. Pela Definição C.9 temos que

$$D^2\Phi_{\mathcal{M}}(\mathbf{u}_j)[\mathbf{h}]^2 = \Phi''(\mathbf{u}_j)[\mathbf{h}]^2, \quad \forall \mathbf{h} \in T_{\mathbf{u}_j}\mathcal{M}. \tag{1.32}$$

Semelhantemente, se $\mathcal{N}_j$ denota a variedade de Nehari relativa ao funcional I_j, $j = 1,2$,

$$\mathcal{N}_j = \{u \in H\backslash\{0\} : \langle I_j'(u), u\rangle = 0\} = \{u \in H\backslash\{0\} : \|u\|_j^2 = \mu_j \int_{\mathbb{R}^N} u^4\}. \tag{1.33}$$

Neste caso $U_j \in \mathcal{N}_j$, dado que $I_j'(U_j) = 0$ e $U_j \neq 0$. Podemos definir $D^2(I_j)_{\mathcal{N}_j}(U_j)$. Deste modo, pela Definição C.9 temos que

$$D^2(I_j)_{\mathcal{N}_j}(U_j)[h]^2 = I_j''(U_j)[h]^2, \quad \forall h \in T_{U_j}\mathcal{N}_j. \tag{1.34}$$

U_j é um mínimo de I_j restrito a $\mathcal{N}_j$, por conseguinte, nos é garantida a existência de uma constante z_j, positiva, tal que

$$D^2(I_j)_{\mathcal{N}_j}(U_j)[h]^2 \geq z_j\|h_j\|_j^2, j = 1,2. \tag{1.35}$$

Substituindo (1.34) em (1.35) obtemos que

$$I_j''(U_j)[h_j]^2 \geq z_j\|h_j\|_j^2, j = 1,2. \tag{1.36}$$

A relação entre $T_{\mathbf{u}_j}\mathcal{M}$ e $T_{U_j}\mathcal{N}_j$ é expressa pelo lema a seguir.

Lema 1.4. $\mathbf{h} = (h_1, h_2) \in T_{\mathbf{u}_j}\mathcal{M} \Leftrightarrow h_j \in T_{U_j}\mathcal{N}_j$

Demonstração. Pela Proposição C.6 temos que $h_j \in T_{U_j}\mathcal{N}_j$ se, e somente se,

$$\begin{aligned}
& \langle (I_j'(U_j), U_j)', h_j\rangle = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & 2\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla U_j \nabla h_j + \lambda_j U_j h_j) - 4\mu_j \int_{\mathbb{R}^N} U_j^3 h_j \quad = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \langle U_j, h_j\rangle_j = 2\mu_j \int_{\mathbb{R}^N} U_j^3 h_j.
\end{aligned}$$

Ao passo que $\mathbf{h} \in T_{\mathbf{u}}\mathcal{M}$ se, e somente se

$$\begin{aligned}
\langle \psi'(\mathbf{u}), \mathbf{h}\rangle &= 0 \\
2\langle \mathbf{u}, \mathbf{h}\rangle - 4\langle F'(\mathbf{u}), \mathbf{h}\rangle - 4\beta\langle G'(\mathbf{u}), \mathbf{h}\rangle &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle u_1,h_1\rangle_1+\langle u_2,h_2\rangle_2 &= 2\int_{\mathbb{R}^N}\left(\mu_1u_1^3h_1+\mu_2u_2^3h_2\right)\\ &+ \beta\int_{\mathbb{R}^N}\left(u_1h_1u_2^2+u_2h_2u_1^2\right).\end{aligned}$$

Dado que $\mathbf{u}_j$ possui apenas a j-ésima coordenada não-nula, $\mathbf{h}\in T_{\mathbf{u}_j}\mathcal{M}$ se, e somente se

$$\begin{aligned}\langle U_j,h_j\rangle_j+\langle 0,h_i\rangle_2 &= 2\int_{\mathbb{R}^N}\left(\mu_jU_j^3h_j+\mu_i0^3h_i\right)+\beta\int_{\mathbb{R}^N}\left(U_jh_j0^2+0h_iu_j^2\right)\\ \langle U_j,h_j\rangle_j &= 2\int_{\mathbb{R}^N}\mu_jU_j^3h_j,\end{aligned}$$

sendo $i,j=1,2$ e $i\neq j$.

$\square$

Demonstraremos a seguir a Proposição 1.2.

Demonstração. *(i)*: Dados $\mathbf{u}=(u_1,u_2),\mathbf{h}=(h_1,h_2)\in\mathbb{H}$ tem-se que

$$\Phi''(\mathbf{u})[\mathbf{h}]^2=I_1''(u_1)[h_1]^2+I_2''(u_2)[h_2]^2-\beta\int_{\mathbb{R}^N}(u_1^2h_2^2+u_2^2h_1^2+4u_1u_2h_1h_2).$$

No caso particular $\mathbf{u}=\mathbf{u}_1$ obtemos

$$\Phi''(\mathbf{u}_1)[\mathbf{h}]^2=I_1''(U_1)[h_1]^2+\|h_2\|_2^2-\beta\int_{\mathbb{R}^N}U_1^2h_2^2. \tag{1.37}$$

Seja $\mathbf{h}=(h_1,h_2)\in T_{\mathbf{u}_1}\mathcal{M}$. Pelo Lema 1.4, temos que $h_1\in T_{U_1}\mathcal{N}_1$, e assim por (1.36)

$$I_1''(U_1)[h_1]^2\geq z_1\|h_1\|_1^2,$$

substituindo em (1.37) encontramos

$$\Phi''(\mathbf{u}_1)[\mathbf{h}]^2\geq z_1\|h_1\|_1^2+\|h_2\|_2^2-\beta\int_{\mathbb{R}^N}U_1^2h_2^2,\mathbf{h}\in T_{\mathbf{u}_1}\mathcal{M}. \tag{1.38}$$

Sendo γ_1^2 dado como um ínfimo, tem-se que $\gamma_1^2\leq\dfrac{\|\varphi\|_2^2}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N}U_2^2\varphi^2},\forall\varphi\in H\backslash\{0\}$. Em particular, $\gamma_1^2\leq\dfrac{\|h_2\|_2^2}{\int U_2^2h_2^2}$, isto implica que

$$-\int_{\mathbb{R}^N}U_2^2h_2^2\geq-\frac{\|h_2\|_2^2}{\gamma_1^2}. \tag{1.39}$$

Substituindo (1.39) em (1.38) obtemos

$$\Phi''(\mathbf{u}_1)[\mathbf{h}]^2 \geq z_1\|h_1\|_1^2 + \|h_2\|_2^2 - \frac{\beta}{\gamma_1^2}\|h_2\|_2^2, \mathbf{h} \in T_{\mathbf{u}_1}\mathcal{M}. \tag{1.40}$$

Por hipótese $\beta < \Lambda \leq \gamma_1^2$. Deste modo temos que $\dfrac{\beta}{\gamma_1^2} < 1$. Logo, definindo $\theta_1 = \min\left\{c_1, 1 - \dfrac{\beta}{\gamma_1^2}\right\} >$ 0, podemos concluir através de (1.40) que

$$\Phi''(\mathbf{u}_1)[\mathbf{h}]^2 \geq \theta_1\|\mathbf{h}\|^2, \mathbf{h} \in T_{\mathbf{u}_1}\mathcal{M}. \tag{1.41}$$

Portanto,

$$D^2_{\mathcal{M}}\Phi(\mathbf{u}_1)[\mathbf{h}]^2 \geq \theta_1\|\mathbf{h}\|^2, \mathbf{h} \in T_{\mathbf{u}_1}\mathcal{M},$$

e isto implica que $\mathbf{u}_1$ mínimo local estrito de Φ em $\mathcal{M}$.

Analogamente, concluímos que se $\beta < \gamma_2^2$, existe uma constante positiva θ_2 tal que

$$\Phi''(\mathbf{u}_2)[\mathbf{h}]^2 \geq \theta_2\|\mathbf{h}\|^2,\ \mathbf{h} \in T_{\mathbf{u}_1}\mathcal{M},$$

implicando que $\mathbf{u}_2$ é também um mínimo local estrito de Φ em $\mathcal{M}$.

(ii): Iremos avaliar agora $\Phi''(\mathbf{u}_1)$ sobre os vetores de $T_{\mathbf{u}_1}\mathcal{M}$ que são da forma $(0, h_2)$. Segue de (1.37) que

$$\Phi''(\mathbf{u}_1)[(0, h_2)]^2 = \|h_2\|_2^2 - \beta\int_{\mathbb{R}^N} U_1^2 h_2^2.$$

Além disto, o Lema 1.4 atesta que não há necessidade de impor restrições a h_2 a fim de que $(0, h_2)$ pertenca a $T_{\mathbf{u}_1}\mathcal{M}$ dado que $0 \in T_{U_1}\mathcal{N}_1$, ou seja, $(0, h_2) \in T_{\mathbf{u}_1}\mathcal{M}$, $\forall h_2 \in H$.
Por hipótese temos que $\gamma_1^2 \leq \Lambda' < \beta$. Sendo assim, pela definição de ínfimo, existe $\overline{h}_2 \in H\backslash\{0\}$ tal que

$$\gamma_1^2 < \frac{\|\overline{h}_2\|_2^2}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} U_1^2 \overline{h}_2^{\,2}} < \beta,$$

ou equivalentemente,

$$-\beta\int_{\mathbb{R}^N} U_1^2 \overline{h}_2^{\,2} < -\|\overline{h}_2\|_2^2 < -\gamma_1^2\int_{\mathbb{R}^N} U_1^2 \overline{h}_2^{\,2}.$$

Consequentemente,

$$\Phi''(\mathbf{u}_1)[(0, \overline{h}_2)]^2 = \|\overline{h}_2\|_2^2 - \beta\int_{\mathbb{R}^N} U_1^2 \overline{h}_2^2 < 0.$$

Analogamente, considerando que $\gamma_2^2 \leq \Lambda' < \beta$ segue que existe $\overline{h}_1 \in H \backslash \{0\}$ tal que

$$\Phi''(\mathbf{u}_2)[(\overline{h}_1, 0)]^2 = \|\overline{h}_1\|_1^2 - \beta \int_{\mathbb{R}^N} U_2^2 h_1^2 < 0.$$

Vimos então que se $\beta > \Lambda'$, $\Phi'(\mathbf{u}_j)$ não possui sinal definido, logo $\mathbf{u}_j$ não é um ponto de máximo nem de mínimo, ou seja, $\mathbf{u}_j$ é ponto de sela, para $j = 1, 2$.

□

O lema a seguir decorre diretamente desta proposição, bem como do Lema 1.3.

Lema 1.5. i) Se $\beta < \Lambda$, então Φ possui um ponto crítico $\mathbf{u}^*$ em $\mathcal{M}$, concebido pelo Teorema do Passo da Montanha, ocorrendo ainda que $\Phi(\mathbf{u}^*) > \max\{\Phi(\mathbf{u}_1), \Phi(\mathbf{u}_2)\}$.

ii) Se $\beta > \Lambda'$, então Φ possui um mínimo global $\tilde{\mathbf{u}}$ em $\mathcal{M}$, e $\Phi(\tilde{\mathbf{u}}) < \min\{\Phi(\mathbf{u}_1), \Phi(\mathbf{u}_2)\}$.

Demonstração. (i):
A fim de obter um ponto crítico $\mathbf{u}^*$ em $\mathcal{M}$ através do clássico teorema devido a Ambrosetti, A. and Rabinowitz, P. H., introduzido em [6], utilizaremos uma estratégia semelhante à utilizada por Goulart C. e Silva E. para demonstrar o Teorema 1.1 de [14]. Definamos então o *nível crítico do passo da montanha associado ao funcional* Φ *sobre* $\mathcal{M}$:

$$c_{\mathcal{M}} := \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} \Phi(\gamma(t)), \tag{1.42}$$

em que $\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], \mathcal{M});\ \gamma(0) = \mathbf{u}_1,\ \gamma(1) = \mathbf{u}_2\}$.
Dado que $\gamma([0,1]) \in \mathcal{M}$, para $\gamma \in \Gamma$, temos que $\max\limits_{t \in [0,1]} \Phi(\gamma(t)) \in \{\Phi(\mathbf{u});\ \mathbf{u} \in \mathcal{M}\}$. Segue que

$$c_{\mathcal{M}} \in \overline{\{\Phi(\mathbf{u});\ \mathbf{u} \in \mathcal{M}\}}.$$

Deste modo, pelo Lema 1.3 temos que Φ satisfaz a condição *(PS)*$_{c_{\mathcal{M}}}$ em $\mathcal{M}$.
Por hipótese, $\beta < \Lambda$. Sendo assim, pela Proposição 1.2, $\mathbf{u}_j$ é mínimo local estrito de Φ restrito a $\mathcal{M}$, para $j = 1, 2$. Considerando também que $\mathbf{u}_1 \neq \mathbf{u}_2$, existem vizinhanças V_1 e V_2 de $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ em $\mathcal{M}$, respectivamente, tais que $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ e

$$\Phi(\mathbf{u}_j) < \Phi(\mathbf{v}), \text{ para todo } \mathbf{v} \in \partial V_j,\ j = 1, 2. \tag{1.43}$$

Segue do Lema 1.2, de (1.43), do Lema 1.3 e o Teorema do Passo da Montanha que Φ possui um ponto crítico $\mathbf{u}^*$ em $\mathcal{M}$ tal que $\Phi(\mathbf{u}^*) = c_{\mathcal{M}} > \max\{\Phi(\mathbf{u}_1), \Phi(\mathbf{u}_2)\}$, com $c_{\mathcal{M}}$ definido em (1.42).

(ii):

Se $\beta > \Lambda'$ então, pela Proposição 1.2, $\mathbf{u}_j$ é ponto de sela de Φ em $\mathcal{M}$, para $j = 1,2$. Neste caso, sendo V_1 e V_2 vizinhanças de $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ em $\mathcal{M}$, respectivamente, existem pontos $\mathbf{v}_1 \in V_1$, $\mathbf{v}_2 \in V_2$ tais que

$$\Phi(\mathbf{v}_j) < \Phi(\mathbf{u}_j), \ j = 1,2. \tag{1.44}$$

Como mencionado na Observação 1.5 existe $\tilde{\mathbf{u}} \in \mathcal{M}$ tal que $\Phi(\tilde{\mathbf{u}}) = \inf\{\Phi(\mathbf{u}) : \mathbf{u} \in \mathcal{M}\}$. Segue da definição de ínfimo e por (1.44) que

$$\Phi(\tilde{\mathbf{u}}) \leq \Phi(\mathbf{v}_j) < \Phi(\mathbf{u}_j), \ j = 1,2,$$

ou seja, $\Phi(\tilde{\mathbf{u}}) < \min\{\Phi(\mathbf{u}_1), \Phi(\mathbf{u}_2)\}$. □

Nas próximas duas seções exibiremos os principais resultados de existência de solução dos tipos ground state e bound state. Nossa terefa consistirá em tomar os pontos crítico $\tilde{\mathbf{u}}$ e $\mathbf{u}^*$, cuja existência é assegura pelo Lema 1.5 e verificar as demais condições para que de fato $\tilde{\mathbf{u}}$ e $\mathbf{u}^*$ sejam as solução pretendidas. Para garantir a positividade destas soluções o lema a seguir é necessário.

Lema 1.6. Seja $v \in W^{1,2}(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$, tal que $v \geq 0$ e satisfaz

$$-\Delta v + \lambda v = \mu v^3 + \beta u^2 v, \tag{1.45}$$

com $\lambda, \mu > 0$, $\beta \geq 0$ e $u \in W^{1,2}(\mathbb{R}^N)$. Então $\mathbf{v} > 0$.

Demonstração. Seja v segundo as condições do Lema. Considere a aplicação $L : W^{1,2}(\mathbb{R}^N) \to L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ dado por

$$Lu = \Delta u - \lambda u.$$

Nota que L é uma aplicação tal qual a aplicação referida na hipótese do Teorema B.6, pondo-se $a^{ij}(x) = 1$, $b^i(x) = c^i(x) = 0$ e $d(x) = -\lambda$, para $i, j = 1,2,...,N$. De fato, note que

(i) $\displaystyle\sum_{i,j}^{N} \xi_i \xi_j = |\xi|^2, \forall \xi = (\xi_1, ..., \xi_N) \in \mathbb{R}^N,$

(ii) L possui coeficientes limitados em $\mathbb{R}^N$,

(iii) dado que $\lambda > 0$ então

$$\int_{\mathbb{R}^N} -\lambda w \leq 0, \ \forall w \geq 0, w \in C^1_0(\mathbb{R}^N),$$

ou seja, $d(x) = -\lambda$ e $b^i(x) = 0$ satisfazem

$$\int_{\mathbb{R}^N} (dw - b^i D_i v) dx \leq 0, \ \forall w \geq 0, w \in C_0^1(\mathbb{R}^N).$$

Além disso, dado que $v \geq 0$, temos por (1.45) que

$$L(-v) = \Delta(-v) - \lambda(-v) = -\Delta v + \lambda v = \mu v^3 + \beta u^2 v \geq 0. \tag{1.46}$$

Suponha existe $x_0 \in \mathbb{R}^N$ tal que $v(x_0) = 0$. Neste caso, ocorre que

$$\sup_B \{-v_1(x)\} = \sup_{\mathbb{R}^N} \{-v_1(x)\} = 0, \tag{1.47}$$

sendo B uma bola contendo x_0. Por (1.47), (1.46) e pelo Teorema B.6 concluímos v é constante. Dado que $v \in W^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ e v é constante, segue que

$$\int_{\mathbb{R}^N} v^2 = v^2 \int_{\mathbb{R}^N} 1 < +\infty \text{ se, e somente se, } v = 0,$$

o que contradiz o fato de $v \in W^{1,2}(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$.

Portanto, não existe $x_0 \in \mathbb{R}^N$ tal que $v(x) = 0$, logo $v > 0$.

□

1.3 Existência de ground states

Teorema 1.1. Se $\beta > \Lambda'$, então (1.1) possui uma solução $\tilde{\mathbf{u}}$ radial positiva do tipo ground state.

Demonstração. O item (ii) do Lema 1.5 e a Proposição C.5 garantem a existência de um ponto crítico $\tilde{\mathbf{u}} \in \mathcal{M}$ que é solução não-trivial de (1.1). Para o termino desta demonstração, resta verificar que $\tilde{\mathbf{u}} > \mathbf{0}$ e que $\tilde{\mathbf{u}}$ tem energia mínima em $\mathbb{E}$, isto é, $\tilde{\mathbf{u}} \in \mathbb{E}$ é uma solução *ground state* do sistema dado em (1.1). Podemos assumir sem perdas que $\tilde{\mathbf{u}} \geq \mathbf{0}$, afinal, não sendo o caso, substituimos $\tilde{\mathbf{u}}$ por $|\tilde{\mathbf{u}}|$ dado que

$$\begin{aligned}
\psi(|\tilde{\mathbf{u}}|) &= \|\tilde{\mathbf{u}}\|^2 - 4F(\tilde{\mathbf{u}}) - 4\beta G(\tilde{\mathbf{u}}) = \psi(\tilde{\mathbf{u}}) = 0, \\
\Phi(|\tilde{\mathbf{u}}|) &= \frac{\|\tilde{\mathbf{u}}\|^2}{2} - F(|\tilde{\mathbf{u}}|) - G(|\tilde{\mathbf{u}}|) = \Phi(\tilde{\mathbf{u}}) = \min\{\Phi(\mathbf{u}) : \mathbf{u} \in \mathcal{M}\}.
\end{aligned}$$

Desde que $\tilde{\mathbf{u}} \in \mathcal{M}$, $\tilde{\mathbf{u}} \neq \mathbf{0}$. Além disto, não pode ocorrer que $\tilde{\mathbf{u}}$ tenha alguma coordenada nula, pois supondo $\tilde{u_2}$ igual a zero, por exemplo, então $\tilde{u_1}$ satisfaz a equação

$$-\Delta\tilde{u_1} + \lambda_1\tilde{u_1} = \mu_1\tilde{u_1}^3,$$

Dado que $\tilde{u_1} \geq 0$, obtemos através do Lema 1.6 que $\tilde{u_1} > 0$. Neste caso, pela unicidade de solução radial positiva, mencionada na Observação 1.4, teriamos $\tilde{u_1} = U_1$ e então $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u}_1$. Porém isto não ocorre, dado que pelo Lema 1.5 $\Phi(\tilde{\mathbf{u}}) < \min\{\Phi(\mathbf{u}_1), \Phi(\mathbf{u}_2)\}$. Neste caso, dado que $\tilde{u}_j \in H \setminus \{0\}$, no Lema 1.6 podemos considerar $\lambda = \lambda_j$, $\mu = \mu_1$ e $\beta > \Lambda' > 0$, assim obtendo que $\tilde{\mathbf{u}} > 0$.

Mostremos agora que $\tilde{\mathbf{u}}$ é uma solução *ground state*. Suponha, por contradição, que exista $\tilde{\mathbf{v}} \in \mathbb{E}$ um ponto crítico não-trivial de Φ tal que

$$\Phi(\tilde{\mathbf{v}}) < \Phi(\tilde{\mathbf{u}}) = \min\{\Phi(\mathbf{u}) : \mathbf{u} \in \mathcal{M}\}. \tag{1.48}$$

Definindo $\mathbf{w} = |\tilde{\mathbf{v}}|$ tem-se que

$$\Phi(\mathbf{w}) = \Phi(\tilde{\mathbf{v}}),\ \psi(\mathbf{w}) = \psi(\tilde{\mathbf{v}}). \tag{1.49}$$

Seja $u \in E$, $u \geq 0$. Denotaremos por u^* a função simétrica de Schwarz associada a u, que é radialmente simétrica, radialmente não-decrescente e equi-mensurável a u. Recorreremos às seguintes propriedades da técnica de simetrização de Schwarz,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u^*|^2 &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2,\ \forall u \in W^{1,2}(\mathbb{R}^N),\ u \geq 0,\\
\int_{\mathbb{R}^N} |u^*|^p &= \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p,\ \forall u \in L^p(\mathbb{R}^n),\ u \geq 0,\\
\int_{\mathbb{R}^N} u^* v^* &\geq \int_{\mathbb{R}^N} uv,\ \forall u, v \in L^2(\mathbb{R}^n),\ u, v \geq 0\\
\int_{\mathbb{R}^N} (u^*)^2 &= \int_{\mathbb{R}^N} (u^2)^*,\ \forall u \in L^2(\mathbb{R}^n).
\end{aligned}$$

Para mais informações sobre esta técnica o leitor pode consultar [17], e com respeito às propriedades o Corolário 2.33 e equações (C) e (P1).

Seja $\mathbf{w} = (w_1, w_2) \in \mathbb{E}$, definimos sua função simétrica de Schwarz $\mathbf{w}^\star = (w_1^*, w_2^*)$. Pelas propriedades que enunciamos acima, obtemos

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{w}^\star\|^2 = &\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla w_1^*|^2 + \lambda_1 {w_1^*}^2) + \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla w_2^*|^2 + \lambda_2 {w_2^*}^2)\\
= &\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla w_1^*|^2 + \lambda_1 {w_1}^2) + \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla w_2^*|^2 + \lambda_2 {w_2}^2)
\end{aligned} \tag{1.50}$$

$$\begin{aligned} &\leq \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla w_1|^2 + \lambda_1 w_1{}^2) + \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla w_2|^2 + \lambda_2 w_2{}^2) \\ &= \|\mathbf{w}\|^2 \end{aligned} \tag{1.51}$$

e

$$\begin{aligned} F(\mathbf{w}^\star) + \beta G(\mathbf{w}^\star) = \;& \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^N} (\mu_1 w_1^{*4} + \mu_2 w_2^{*4}) + \frac{\beta}{2} \int_{\mathbb{R}^N} w_1^{*2} w_2^{*2} \\ = \;& \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^N} (\mu_1 w_1{}^4 + \mu_2 w_2{}^4) + \frac{\beta}{2} \int_{\mathbb{R}^N} w_1^{*2} w_2^{*2} \\ \geq \;& \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^N} (\mu_1 w_1{}^4 + \mu_2 w_2{}^4) + \frac{\beta}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (w_1{}^2)^* (w_2{}^2)^* \\ \geq \;& \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^N} (\mu_1 w_1{}^4 + \mu_2 w_2{}^4) + \frac{\beta}{2} \int_{\mathbb{R}^N} w_1{}^2 w_2{}^2 \\ \geq \;& F(\mathbf{w}) + \beta G(\mathbf{w}). \end{aligned} \tag{1.52}$$

Segue por (1.50) (1.52) que

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{w}^*) = \;& \|\mathbf{w}^*\|^2 - 4F(\mathbf{w}^*) - 4\beta G(\mathbf{w}^*) \\ \leq \;& \|\mathbf{w}\|^2 - 4F(\mathbf{w}) - 4\beta G(\mathbf{w}) \\ = \;& \psi(\mathbf{w}) \end{aligned}$$

Por (1.49) e pelo fato de $\tilde{\mathbf{v}}$ ser ponto crítico de Φ (implicação da contradição da tese), temos que $\psi(\mathbf{w}) = \psi(\tilde{\mathbf{v}}) = 0$. Pelo fato I sobre a variedade de Nehari, temos que $t\mathbf{w}^\star \in \mathcal{M}$ para $t = \dfrac{\|\mathbf{w}^\star\|^2}{4F(\mathbf{w}^\star) + 4\beta G(\mathbf{w}^\star)}$, de modo que por (1.50) e (1.52) ocorre

$$0 < t = \frac{\|\mathbf{w}^\star\|^2}{4F(\mathbf{w}^\star) + 4\beta G(\mathbf{w}^\star)} \leq \frac{\|\mathbf{w}\|^2}{4F(\mathbf{w}^\star) + 4\beta G(\mathbf{w}^\star)} \leq \frac{\|\mathbf{w}\|^2}{4F(\mathbf{w}) + 4\beta G(\mathbf{w})}$$

dado que $\|\mathbf{w}\|^2 = 4F(\mathbf{w}) + 4\beta G(\mathbf{w})$, desde que $\psi(\mathbf{w}) = 0$,

$$0 < t = \frac{\|\mathbf{w}^\star\|^2}{4F(\mathbf{w}^\star) + 4\beta G(\mathbf{w}^\star)} \leq \frac{\|\mathbf{w}\|^2}{4F(\mathbf{w}) + 4\beta G(\mathbf{w})} = 1.$$

Consequentemente,

$$\Phi(t\mathbf{w}^*) = \frac{1}{4} t^2 \|\mathbf{w}^\star\|^2 \leq \frac{1}{4} \|\mathbf{w}^\star\|^2. \tag{1.53}$$

Note que (1.53) e (1.50) implicam que

$$\Phi(t\mathbf{w}^*) = \frac{1}{4}t^2\|\mathbf{w}^\star\|^2 \leq \frac{1}{4}\|\mathbf{w}^\star\|^2 \leq \frac{1}{4}\|\mathbf{w}\|^2 = \Phi(\mathbf{w}). \tag{1.54}$$

Através de (1.54), (1.49) e de (1.48) obtemos,

$$\Phi(t\mathbf{w}^*) \leq \Phi(\mathbf{w}) = \Phi(\tilde{\mathbf{v}}) < \Phi(\tilde{\mathbf{u}}) = \min\{\Phi(\mathbf{u}) : \mathbf{u} \in \mathcal{M}\},$$

o que é uma contradição, dado que $t\mathbf{w}^\star \in \mathcal{M}$. Logo, $\Phi(\tilde{\mathbf{u}}) = \min\{\Phi(\mathbf{v}) : \mathbf{v} \in \mathbb{E}\backslash\{0\}; \Phi'(\mathbf{v}) = 0\}$. □

1.4 Existência de solução do tipo bound states

Teorema 1.2. Se $\beta < \Lambda$, então (1.1) possui uma solução radial $\mathbf{u}^*$ do tipo bound state tal que $\mathbf{u}^* \neq \mathbf{u}_j$, $j = 1,2$. Além disto, se $\beta \in (0,\Lambda)$, então $\mathbf{u}^* > 0$.

Demonstração. Se $\beta < \Lambda$, então o Lema 1.5 garante a existência de uma solução não-trivial $\mathbf{u}^* \in \mathcal{M}$ de (1.1), dada pelo Teorema do Passo da Montanha, de tal sorte que $\Phi(\mathbf{u}^*) > \max\{\Phi(\mathbf{u}_1), \Phi(\mathbf{u}_2)\}$, implicando que $\mathbf{u}^* \neq \mathbf{u}_j$, $j = 1,2$. Queremos provar que $\mathbf{u}^* > 0$, dado que $\beta \in (0,\Lambda)$. A fim de realizar tal tarefa definamos o seguinte funcional

$$\Phi^+(\mathbf{u}) = \frac{\|\mathbf{u}\|^2}{2} - F(\mathbf{u}^+) - \beta G(\mathbf{u}^+),$$

em que $\mathbf{u}^+ := (u_1^+, u_2^+)$ e $u_j^+ := \max\{u_j, 0\}$. Considere a variedade de Nehari associada ao funcional definido acima por

$$\mathcal{M}^+ = \left\{\mathbf{u} \in \mathbb{H}\backslash\{0\} : \langle\nabla\Phi^+(\mathbf{u}), \mathbf{u}\rangle = 0\right\}.$$

Dado que $\Phi^+ \in C^1(\mathbb{E},\mathbb{R})$, é possível provar versões do Proposição 1.1 e do Lema 1.3 para Φ^+ e $\mathcal{M}$, utilizando argumentos semelhantes. Porém, a fim de obter o resultado expresso na Proposição 1.2, não é possível utilizar argumentação semelhante, afinal Φ^+ não de classe C^2 em $\mathbb{E}$. Contornaremos este problema com a argumentação a seguir. Pela continuidade dos funcionais $\overline{F}$ e $\overline{G}$ dados por $\overline{F}(\mathbf{u}) = F(\mathbf{u}^+)$, $\overline{G}(\mathbf{u}) = \beta G(\mathbf{u}^+)$ em $\mathbb{H}$ e dado que $\mathbf{u}_1 > 0$ temos que

$$\lim_{\mathbf{u}\to\mathbf{u}_1} F(\mathbf{u}^+) + \beta G(\mathbf{u}^+) = F(\mathbf{u}_1^+) + \beta G(\mathbf{u}_1^+) = F(\mathbf{u}_1) > 0.$$

Portanto, existe $V_\varepsilon \subset \mathcal{M}$ vizinhança de $\mathbf{u}_1$ tal que

$$F(\mathbf{u}^+) + \beta G(\mathbf{u}^+) \geq c, \forall \mathbf{u} \in V_\varepsilon,$$

para algum $c > 0$. Para cada $\mathbf{u} \in V_\varepsilon$ existe um número real positivo, o qual identificaremos por $T(\mathbf{u})$, tal que $T(\mathbf{u})\mathbf{u} \in \mathcal{M}^+$. Em verdade, $T(\mathbf{u})$ é dado por

$$T(\mathbf{u}) := \left(\frac{\|\mathbf{u}\|^2}{4[F(\mathbf{u}^+) + \beta G(\mathbf{u}^+)]} \right)^{1/2}. \tag{1.55}$$

De fato, se $\mathbf{u} \in V_\varepsilon$ então

$$\begin{aligned}
\langle \nabla \Phi^+(T(\mathbf{u})\mathbf{u}), T(\mathbf{u})\mathbf{u} \rangle = \; & \|T(\mathbf{u})\mathbf{u}\|^2 - 4F((T(\mathbf{u})\mathbf{u})^+) - 4\beta G((T(\mathbf{u})\mathbf{u})^+) \\
= \; & \|T(\mathbf{u})\mathbf{u}\|^2 - 4F(T(\mathbf{u})\mathbf{u}^+) - 4\beta G(T(\mathbf{u})\mathbf{u}^+) \\
= \; & T(\mathbf{u})^2 \|\mathbf{u}\|^2 - 4T(\mathbf{u})^4 F(\mathbf{u}^+) - 4T(\mathbf{u})^4 \beta G(\mathbf{u}^+) \\
= \; & \frac{\|\mathbf{u}\|^2}{4[F(\mathbf{u}^+) + \beta G(\mathbf{u}^+)]} \|\mathbf{u}\|^2 \\
& -4 \left[\frac{\|\mathbf{u}\|^2}{4(F(\mathbf{u}^+) + \beta G(\mathbf{u}^+))} \right]^2 (F(\mathbf{u}^+) + G(\mathbf{u}^+)) \\
& = 0.
\end{aligned}$$

Note que se $\mathbf{u} \in \mathcal{M}^+$ então

$$\|\mathbf{u}\|^2 - 4F(\mathbf{u}^+) - 4\beta G(\mathbf{u}^+) = \langle \nabla \Phi^+(\mathbf{u}), \mathbf{u} \rangle = 0,$$

portanto

$$T(\mathbf{u}) = \left(\frac{\|\mathbf{u}\|^2}{4[F(\mathbf{u}^+) + \beta G(\mathbf{u}^+)]} \right)^{1/2} = 1,$$

concluímos então que

$$\begin{aligned}
\Phi^+(\mathbf{u}) = \; & \frac{\|\mathbf{u}\|^2}{2} - F(\mathbf{u}^+) - \beta G(\mathbf{u}^+) \\
= \; & \frac{\|\mathbf{u}\|^2}{2} - T^2(\mathbf{u}) F(\mathbf{u}^+) - T^2(\mathbf{u}) \beta G(\mathbf{u}^+) \\
= \; & \frac{\|\mathbf{u}\|^2}{2} - \frac{\|\mathbf{u}\|^2}{4[F(\mathbf{u}^+) + \beta G(\mathbf{u}^+)]} F(\mathbf{u}^+) - \frac{\|\mathbf{u}\|^2}{4[F(\mathbf{u}^+) + \beta G(\mathbf{u}^+)]} \beta G(\mathbf{u}^+) \qquad (1.56) \\
= \; & \frac{1}{2} \|\mathbf{u}\|^2 - \frac{1}{4} \|\mathbf{u}\|^2 \\
= \; & \frac{1}{4} \|\mathbf{u}\|^2.
\end{aligned}$$

Por (1.55), $T(\mathbf{u})$ é um funcional contínuo em $\mathbb{H} \cap V_\varepsilon$, sendo assim, a aplicação $\mathcal{A} : V_\varepsilon \subset \mathcal{M} \to \mathcal{M}^+$ dada por $\mathcal{A}(\mathbf{u}) := T(\mathbf{u})\mathbf{u}$ é contínua.

Considere a aplicação $\mathcal{B}_1 : \mathbb{H} \backslash \{0\} \to \mathcal{M}$ dada por $\mathcal{B}_1(\mathbf{u}) := t(\mathbf{u})\mathbf{u}$, em que

$$t(\mathbf{u}) := \left(\frac{\|\mathbf{u}\|^2}{4[F(\mathbf{u}) + \beta G(\mathbf{u})]} \right)^{1/2}. \tag{1.57}$$

Considere também $W_\varepsilon = \mathcal{B}_1^{-1}(\{V_\varepsilon\}) \cap \mathcal{M}^+$ e a restrição $\mathcal{B} : W_\varepsilon \subset \mathcal{M}^+ \to V_\varepsilon$ dada por $\mathcal{B}(\mathbf{u}) = \mathcal{B}_1(\mathbf{u})$. Note que pela continuidade de F, G e da norma $\|\cdot\|$, temos que $\mathcal{B}$ é uma aplicação contínua. Além disto, sendo $\mathbf{u} \in V_\varepsilon \subset \mathcal{M}$ temos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}(\mathcal{A}(\mathbf{u})) = {} & t(\mathcal{A}(\mathbf{u}))\mathcal{A}(\mathbf{u}) \\
= {} & \left(\frac{\|\mathcal{A}(\mathbf{u})\|^2}{4[F(\mathcal{A}(\mathbf{u})) + \beta G(\mathcal{A}(\mathbf{u}))]} \right)^{1/2} \mathcal{A}(\mathbf{u}) \\
= {} & \left(\frac{\|T(\mathbf{u})\mathbf{u}\|^2}{4[F(T(\mathbf{u})\mathbf{u}) + \beta G(T(\mathbf{u})\mathbf{u})]} \right)^{1/2} T(\mathbf{u})\mathbf{u} \\
= {} & \left(\frac{T(\mathbf{u})^2\|\mathbf{u}\|^2}{4[T(\mathbf{u})^4 F(\mathbf{u}) + T(\mathbf{u})^4 \beta G(\mathbf{u})]} \right)^{1/2} T(\mathbf{u})\mathbf{u} \\
= {} & \frac{1}{T(\mathbf{u})} \left(\frac{\|\mathbf{u}\|^2}{4[F(\mathbf{u}) + \beta G(\mathbf{u})]} \right)^{1/2} T(\mathbf{u})\mathbf{u} \\
= {} & \left(\frac{\|\mathbf{u}\|^2}{4[F(\mathbf{u}) + \beta G(\mathbf{u})]} \right)^{1/2} \mathbf{u} \\
= {} & \mathbf{u},
\end{aligned}$$

e ainda, se $\mathbf{u} \in W_\varepsilon \subset \mathcal{M}^+$ temos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(\mathcal{B}(\mathbf{u})) = {} & T(\mathcal{B}(\mathbf{u}))\mathcal{B}(\mathbf{u}) \\
= {} & \left(\frac{\|\mathcal{B}(\mathbf{u})\|^2}{4[F(\mathcal{B}(\mathbf{u})^+) + \beta G(\mathcal{B}(\mathbf{u})^+)]} \right)^{1/2} \mathcal{B}(\mathbf{u}) \\
= {} & \left(\frac{\|t(\mathbf{u})\mathbf{u}\|^2}{4[F((t(\mathbf{u})\mathbf{u})^+) + \beta G((t(\mathbf{u})\mathbf{u})^+)]} \right)^{1/2} t(\mathbf{u})\mathbf{u} \\
= {} & \left(\frac{\|t(\mathbf{u})\mathbf{u}\|^2}{4[F(t(\mathbf{u})\mathbf{u}^+) + \beta G((t(\mathbf{u})\mathbf{u})^+)]} \right)^{1/2} t(\mathbf{u})\mathbf{u}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\frac{t(\mathbf{u})^2\|\mathbf{u}\|^2}{4[t(\mathbf{u})^4F(\mathbf{u}^+)+t(\mathbf{u})^4\beta G(\mathbf{u}^+)]}\right)^{1/2} t(\mathbf{u})\mathbf{u} \\
&= \frac{1}{t(\mathbf{u})}\left(\frac{\|\mathbf{u}\|^2}{4[F(\mathbf{u}^+)+\beta G(\mathbf{u}^+)]}\right)^{1/2} t(\mathbf{u})\mathbf{u} \\
&= \left(\frac{\|\mathbf{u}\|^2}{4[F(\mathbf{u}^+)+\beta G(\mathbf{u}^+)]}\right)^{1/2} \mathbf{u} \\
&= \mathbf{u}.
\end{aligned}
$$

Com isso, inferimos que $\mathcal{A}^{-1}=\mathcal{B}$, e portanto $\mathcal{A}:V_\varepsilon \to W_\varepsilon$ é um homeomorfismo.
Do fato de que $\|\mathbf{u}\|^2 = 4(F(\mathbf{u})+\beta G(\mathbf{u}))$, se $\mathbf{u}\in\mathcal{M}$, e por (1.55) obtemos

$$
T(\mathbf{u}) = \left(\frac{4(F(\mathbf{u})+\beta G(\mathbf{u}))}{4[F(\mathbf{u}^+)+\beta G(\mathbf{u}^+)]}\right)^{1/2}. \tag{1.58}
$$

Definamos $[\mathbf{u}\geq 0] := \{x\in\mathbb{R}^n; \mathbf{u}(x)\geq 0\}$ então

$$
\begin{aligned}
F(\mathbf{u}^+)+\beta G(\mathbf{u}^+) &= \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^N}(\mu_1(u_1^+)^4+\mu_2(u_2^+)^4)+\frac{\beta}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(u_1^+)^2(u_2^+)^2 \\
&= \frac{1}{4}\int_{[u\geq 0]}(\mu_1 {u_1}^4+\mu_2 {u_2}^4)+\frac{\beta}{2}\int_{[u\geq 0]}{u_1}^2{u_2}^2 \\
&\leq \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^N}(\mu_1 {u_1}^4+\mu_2 {u_2}^4)+\frac{\beta}{2}\int_{\mathbb{R}^N}{u_1}^2{u_2}^2 \\
&= F(\mathbf{u})+\beta G(\mathbf{u}),
\end{aligned}
$$

seguindo que

$$
1 \leq \frac{F(\mathbf{u})+\beta G(\mathbf{u})}{F(\mathbf{u}^+)+\beta G(\mathbf{u}^+)} = T^2(\mathbf{u}). \tag{1.59}
$$

Observe que $\mathbf{u}_1 > 0$, logo $\mathbf{u}_1^+ = \mathbf{u}_1$, portanto, $F(\mathbf{u}_1^+) = F(\mathbf{u}_1)$ e $G(\mathbf{u}_1^+) = G(\mathbf{u}_1)$, logo $T(\mathbf{u}_1) = t(\mathbf{u}_1) = 1$ e $\Phi^+(\mathbf{u}_1) = \Phi(\mathbf{u}_1)$. Além disto $\mathbf{u}_1 \in W_\varepsilon$ dado que $\mathcal{A}(\mathbf{u}_1) = T(\mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_1$. Dado que $\mathcal{A}$ é homeomorfismo, para todo $\mathbf{v}\in W_\varepsilon$ existe $\mathbf{u}\in V_\varepsilon$ tal que $\mathbf{v} = T(\mathbf{u})\mathbf{u}$, e por (1.59) e (1.56) devemos ter tais $\mathbf{v}$ e $\mathbf{u}$ satisfazendo

$$
\Phi^+(\mathbf{v}) = \frac{\|\mathbf{v}\|^2}{4} = \frac{T^2(\mathbf{u})}{4}\|\mathbf{u}\|^2 \geq \frac{1}{4}\|\mathbf{u}\|^2 = \Phi(\mathbf{u}). \tag{1.60}
$$

Como $\beta < \Lambda$, pela Proposição 1.2 *i)* obtemos que $\mathbf{u}_1$ é mínimo estrito local de Φ em $\mathcal{M}$, ou seja, existe $\tilde{V}_\varepsilon \subset \mathcal{M}$ vizinhança de $\mathbf{u}_1$ tal que

$$\Phi(\mathbf{u}_1) < \Phi(\mathbf{u}),\ \forall \mathbf{u} \in \tilde{V}_\varepsilon. \tag{1.61}$$

Concluímos por (1.60) e (1.61) que

$$\Phi^+(\mathbf{u}_1) = \Phi(\mathbf{u}_1) < \Phi(\mathbf{u}) \leq \Phi^+(\mathbf{v}), \tag{1.62}$$

para $\mathbf{v} \in \mathcal{A}(\tilde{V}_\varepsilon \cap V_\varepsilon)$, provando que $\mathbf{u}_1$ é um mínimo estrito local de Φ^+ em $\mathcal{M}^+$. Note que $\mathcal{A}(\tilde{V}_\varepsilon \cap V_\varepsilon)$ é de fato um vizinhança de $\mathbf{u}_1$ em $\mathcal{M}^+$, pois $\mathcal{A}(\mathbf{u}) = \mathbf{u}_1$, $\tilde{V}_\varepsilon \cap V_\varepsilon$ é uma vizinhança de $\mathbf{u}_1$ em $\mathcal{M}$ e $\mathcal{A}$ é uma aplicação aberta, dado que é homeomorfismo.

Analogamente, porva-se que $\mathbf{u}_2$ é um mínimo estrito local de Φ^+ em $\mathcal{M}$.

Sendo $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ mínimos estritos locais de Φ^+, com argumentação análoga a utilizada na demonstração do item (i) do Lema 1.5 concluímos que existe $\mathbf{u}^* = (u_1^*, u_2^*) \in \mathcal{M}^+$ solução de

$$\begin{cases} -\Delta u_1 + \lambda_1 u_1 = \mu_1 (u_1^+)^3 + \beta (u_2^+)^2 u_1^+,\ u_1 \in W^{1,2}(\mathbb{R}^N), \\ -\Delta u_2 + \lambda_2 u_2 = \mu_2 (u_2^+)^3 + \beta (u_1^+)^2 u_2^+,\ u_2 \in W^{1,2}(\mathbb{R}^N), \end{cases} \tag{1.63}$$

tal que $\Phi^+(\mathbf{u}^*) > \max\{\Phi^+(\mathbf{u}_1), \Phi^+(\mathbf{u}_2)\}$. Dado que $\Phi^+(\mathbf{u}_j) = \Phi^+(\mathbf{u}_j)$, com $j = 1,2$, então $\Phi^+(\mathbf{u}^*) > \max\{\Phi(\mathbf{u}_1), \Phi(\mathbf{u}_2)\}$. Além disso, sendo $\mathbf{u}^*$ solução do sistema dado em (1.63), tomando $(\mathbf{u}^*)^- := ((u_1^*)^-, (u_2^*)^-)$ como função teste, em que $(u_j^*)^- := \max\{-u_j^*, 0\}$, encontramos

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla(u_1^*)\nabla((u_1^*)^-) + \lambda_1 u_1^*(u_1^*)^- + \nabla(u_2^*)\nabla((u_2^*)^-) + \lambda_2 u_2^*(u_2^*)^-) = \\ &\int_{\mathbb{R}^N} (\mu_1 [(u_1^*)^+]^3 (u_1^*)^- + \mu_2 [(u_2^*)^+]^3 (u_2^*)^- + \\ &\int_{\mathbb{R}^N} \beta [(u_1^*)^+]^2 (u_2^*)^+ (u_2^*)^- + \beta (u_1^*)^+ [(u_2^*)^+]^2 (u_1^*)^-). \end{aligned} \tag{1.64}$$

Pela Proposição B.4 temos que $\nabla((u_j^*)^-) = (\nabla(u_j^*))^-$, logo

$$\nabla(u_j^*)\nabla((u_j^*)^-) = |(\nabla(u_j^*))^-|^2. \tag{1.65}$$

Por definição temos que

$$(u_j^*)^+(u_j^*)^- = 0 \text{ e } (u_j^*)(u_j^*)^- = [(u_j^*)^-]^2, \tag{1.66}$$

com $j = 1,2$.

Substituindo (1.65) e (1.66) em 1.64 obtemos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |(\nabla(u_1^*))^-|^2 + \lambda_1[(u_1^*)^-]^2 + |(\nabla(u_2^*))^-|^2 + \lambda_2[(u_2^*)^-]^2) = 0,$$

ou seja, $\|(\mathbf{u}^*)^-\|^2 = 0$, isso implica que $\mathbf{u}^* \geq \mathbf{0}$.

Provemos que $\mathbf{u}^* > \mathbf{0}$.

Do fato de $\mathbf{u}^* \in \mathcal{M}^+$ obtemos que $\mathbf{u}^* \neq \mathbf{0}$. Suponha que $\mathbf{u}^*$ possua alguma de suas coordenadas nula, neste caso apenas uma delas pode ser nula, por exemplo $u_2^* = 0$. Sendo assim, dado que $\Phi'(u_1^*, 0) = 0$, temos que u_1^* satisfaz a equação

$$-\Delta u_1 + \lambda_1 u_1 = \mu_1 (u_1^+)^3, u \in H.$$

Dado que $u_1^* \geq 0$, temos que $(u_1^*)^+ = u_1^*$, portanto

$$-\Delta u_1^* + \lambda_1 u_1^* = \mu_1 (u_1^*)^3.$$

Pelo Lema 1.6 temos que $u_1^* > 0$. Assim como mencionado na Observação 1.4, equação (1.3) possui uma única solução radial positiva denotada por U_1, decorre que $\mathbf{u}^* = \mathbf{u}_1$, o que contradiz o fato de que $\Phi^+(\mathbf{u}^*) > \max\{\Phi(\mathbf{u}_1), \Phi(\mathbf{u}_2)\}$. Assim, $\mathbf{u}^*$ deve possuir ambas as coordenadas não-nulas. Neste caso, dado que $u_j^* \in H \setminus \{0\}$, no Lema 1.6 podemos considerar $\lambda = \lambda_j$, $\mu = \mu_1$ e $\beta > \Lambda' > 0$, assim obtendo que $\mathbf{u}^* > 0$.

□

1.5 Mais resultados de existência

Nesta seção exibiremos mais dois resultados de existência, nos quais são utilizadas cotas para a constante β que abaixo definimos

$$\alpha_j := \mu_j \left(\frac{\lambda_k}{\lambda_j}\right)^{1-n/4}, k, j = 1, 2, k \neq j, \tag{1.67}$$

$$\zeta_j := \max\left\{\mu_j \left(\frac{\lambda_k}{\lambda_j}\right)^{1-n/2}, \mu_j \frac{\lambda_k}{\lambda_j}\right\},\ k, j = 1, 2,\ k \neq j. \tag{1.68}$$

Teorema 1.3. i) Se $0 < \beta < \min\{\alpha_1, \alpha_2\}$, então (1.1) possui uma solução $\mathbf{u}^*$ radial positiva do tipo bound state .

ii) Se $\beta > \max\{\zeta_1, \zeta_2\}$, então (1.1) possui uma solução $\tilde{\mathbf{u}}$ radial positiva do tipo ground state .

O Teorema 1.3 decorre diretamente dos Teoremas 1.1 e 1.2, e também do lema a seguir.

Lema 1.7. $\alpha_j \le \gamma_j^2 \le \zeta_j$, $j = 1, 2$.

Demonstração. Seja

$$\sigma_j^2 \equiv \inf_{\varphi \in E\setminus\{0\}} \frac{\|\varphi\|_j^2}{\|\varphi\|_{L^4}^2} = \inf_{\varphi \in E, \|\varphi\|_{L^4}=1} \|\varphi\|_j^2$$

a melhor constante da imersão de Sobolev $\left(W^{1,2}(\mathbb{R}^N), \|\cdot\|_j\right) \hookrightarrow L^4(\mathbb{R}^N)$. Tem-se que σ_j^2 é atingido em

$$\hat{v}_j(x) = \sqrt{\lambda_j} U(\sqrt{\lambda_j} x).$$

De fato, em (1.3) considere $\mu = 1$ e $\lambda = \lambda_j$, isto é,

$$-\Delta u + \lambda_j u = u^3, u \in E. \tag{1.69}$$

Deste modo, $\hat{v}_j(x) = \sqrt{\lambda_j} U(\sqrt{\lambda_j} x)$, como visto na Observação 1.4, é a única solução radial positiva da equação (1.69). Além disso, sendo $\mathcal{N} = \{u \in E\setminus\{0\};\ \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla\varphi|^2 + \lambda_j \varphi^2) = \int_{\mathbb{R}^N} u^4\}$, a *Variedade de Nehari* associada ao funcional I tem-se que

$$\begin{aligned} I(\hat{v}_j) &= \min_{u \in E\setminus\{0\}} \left\{ I(u);\ \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + \lambda_j u^2) = \int_{\mathbb{R}^N} u^4 \right\} \\ &= \min_{u \in \mathcal{N}} I(u). \end{aligned} \tag{1.70}$$

Considerando $\varphi \in E\setminus\{0\}$ e $t > 0$. Temos que $t\varphi \in \mathcal{N}$ se, somente se,

$$t^2 = \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla\varphi|^2 + \lambda_j \varphi^2)}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \varphi^4} = \frac{\|\varphi\|_j^2}{\|\varphi\|_{L^4}^4}.$$

Dado $\varphi \in E\setminus\{0\}$, denotaremos por t_φ o numero real positivo para o qual tenhamos $t_\varphi \varphi \in \mathcal{N}$. Note que,

$$\frac{\|\varphi\|_j^2}{\|\varphi\|_{L^4}^2} = \frac{\|\varphi\|_j}{\|\varphi\|_{L^4}^2} \|\varphi\|_j = t_\varphi \|\varphi\|_j = \|t_\varphi \varphi\|_j. \tag{1.71}$$

Por (1.71) temos que

$$\sigma_j^2 := \inf_{\varphi \in E\setminus\{0\}} \frac{\|\varphi\|_j^2}{\|\varphi\|_{L^4}^2} = \inf_{\varphi \in E\setminus\{0\}} \|t_\varphi \varphi\|_j,$$

logo,

$$\sigma_j^2 = \inf_{\varphi \in E\setminus\{0\}} \|t_\varphi \varphi\|_j = \inf_{\varphi \in \mathcal{N}} \|\varphi\|_j = \left(4 \inf_{\varphi \in \mathcal{N}} \frac{\|\varphi\|_j^2}{4}\right)^{1/2} = \left(4 \min_{\varphi \in \mathcal{N}} I(\varphi)\right)^{1/2}. \tag{1.72}$$

Por (1.70) e (1.72) segue que

$$\sigma_j^2 = \left(4 \min_{\varphi \in \mathcal{N}} I(\varphi)\right)^{1/2} = \left(4 I(\hat{v}_j)\right)^{1/2} = \left(4 \frac{\|\hat{v}_j\|_j^2}{4}\right)^{1/2} = \|\hat{v}_j\|_j.$$

Dado que $\hat{v}_j \in \mathcal{N}$, então $t_{\hat{v}_j} = 1$. Logo

$$\sigma_j^2 = t_{\hat{v}_j} \|\hat{v}_j\|_j = \frac{\|\hat{v}_j\|_j}{\|\hat{v}_j\|_{L^4}^2} \|\hat{v}_j\|_j = \frac{\|\hat{v}_j\|_j^2}{\|\hat{v}_j\|_{L^4}^2}. \tag{1.73}$$

Isto é, de fato σ_j^2 é atingido em $\hat{v}_j$.
Por (1.73) e pelo fato de $t_{\hat{v}_j} = 1$ temos que

$$\sigma_j^4 = \frac{\|\hat{v}_j\|_j^4}{\|\hat{v}_j\|_{L^4}^4} = \frac{\|\hat{v}_j\|_j^4}{\|\hat{v}_j\|_{L^4}^4} \frac{\|\hat{v}_j\|_{L^4}^4}{\|\hat{v}_j\|_{L^4}^4} = t_{\hat{v}_j}^4 \|\hat{v}_j\|_{L^4}^4 = \|\hat{v}_j\|_{L^4}^4, \tag{1.74}$$

ou seja,

$$\sigma_j^4 = \lambda_j^2 \int_{\mathbb{R}^N} U^4(\sqrt{\lambda_j} x). \tag{1.75}$$

Efetuando uma mudança de variáveis em (1.75), considerando $U^4 = g$ e $F : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ dada por $F(x) = \sqrt{\lambda_j} x$ no Teorema A.12, encontramos $\sigma_j^4 = \lambda_j^{2-n/2} \int_{\mathbb{R}^N} U^4(x)$. Segue que

$$\frac{\sigma_k^2}{\sigma_j^2} = \left(\frac{\lambda_k^{2-n/2} \int_{\mathbb{R}^N} U^4(x)}{\lambda_j^{2-n/2} \int_{\mathbb{R}^N} U^4(x)}\right)^{1/2} = \left(\frac{\lambda_k}{\lambda_j}\right)^{1-n/4}, (k \neq j). \tag{1.76}$$

Note que

$$\begin{aligned}\sigma_j^4 &= \lambda_j^2 \int_{\mathbb{R}^N} U^4(\sqrt{\lambda_j} x) = \mu_j^2 \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\lambda_j^2}{\mu_j^2} U^4(\sqrt{\lambda_j} x) = \mu_j^2 \int_{\mathbb{R}^N} \left(\sqrt{\frac{\lambda_j}{\mu_j}} U\left(\sqrt{\lambda_j} x)\right)\right)^4 \\ &= \mu_j^2 \int_{\mathbb{R}^N} U_j^4.\end{aligned} \tag{1.77}$$

Pela desigualdade de Hölder, por (1.77) e (1.76) concluímos, para $j \neq k$, que

$$\gamma_j^2 = \inf_{\varphi \in H \setminus \{0\}} \frac{\|\varphi\|_k^2}{\int_{\mathbb{R}^N} U_j^2 \varphi^2} \geq \inf_{\varphi \in H \setminus \{0\}} \frac{\|\varphi\|_k^2}{\left(\int_{\mathbb{R}^N} U_j^4\right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \varphi^4\right)^{1/2}}. \tag{1.78}$$

Temos também que

$$\inf_{\varphi \in H \setminus \{0\}} \frac{\|\varphi\|_k^2}{\left(\int_{\mathbb{R}^N} U_j^4\right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \varphi^4\right)^{1/2}} = \frac{1}{\left(\int_{\mathbb{R}^N} U_j^4\right)^{1/2}} \inf_{\varphi \in H \setminus \{0\}} \frac{\|\varphi\|_k^2}{\left(\int_{\mathbb{R}^N} \varphi^4\right)^{1/2}} = \frac{\sigma_k^2}{\left(\int_{\mathbb{R}^N} U_j^4\right)^{1/2}}. \tag{1.79}$$

Segue por (1.78), (1.79), (1.77) e por (1.76) que

$$\gamma_j^2 \geq \frac{\sigma_k^2}{(\int U_j^4)^{1/2}} = \frac{\sigma_k^2 \mu_j}{\sigma_j^2} = \mu_j \left(\frac{\lambda_k}{\lambda_j}\right)^{1-n/4} = \alpha_j.$$

Da definição de γ_j^2 sabemos que

$$\gamma_1^2 \leq \frac{\|U_2^2\|_2^2}{\int U_1^2 U_2^2} = \frac{\mu_1 \mu_2 \|U_2\|_2^2}{\lambda_1 \lambda_2 \int U^2(\sqrt{\lambda_1} x) U^2(\sqrt{\lambda_2} x)}. \tag{1.80}$$

Dado que U, mencionada na Observação 1.4 é radialmente decrescente, temos os seguintes casos:

- Se $\lambda_1 > \lambda_2$ então $U(\sqrt{\lambda_1} x) \leq U(\sqrt{\lambda_2} x)$. Deste modo, por (1.80) temos

$$\gamma_1^2 \leq \frac{\mu_1 \mu_2 \|U_2\|_2^2}{\lambda_1 \lambda_2 \int U^4(\sqrt{\lambda_1} x)} = \frac{\lambda_1 \mu_1 \mu_2 \|U_2\|_2^2}{\lambda_1^2 \lambda_2 \int U^4(\sqrt{\lambda_1} x)}. \tag{1.81}$$

Desde que $U_1(x) = \sqrt{\frac{\lambda_1}{\mu_1}} U\left(\sqrt{\lambda_1} x\right)$, segue por (1.81) e (1.77) que

$$\gamma_1^2 \quad \leq \frac{\lambda_1\mu_1\mu_2\|U_2\|_2^2}{\lambda_2\mu_1^2\int U_1^4} = \frac{\lambda_1\mu_1\mu_2\|U_2\|_2^2}{\lambda_2\sigma_1^4}.$$

Dado que $\|U_2\|_2^2 = \mu_2\displaystyle\int U_2^4$, por (1.77) e (1.76) temos

$$\gamma_1^2 \leq \frac{\lambda_1\mu_1\mu_2^2\int U_2^4}{\lambda_2\sigma_1^4} = \frac{\lambda_1\mu_1\sigma_2^4}{\lambda_2\sigma_1^4} = \mu_1\frac{\lambda_2^{-1}}{\lambda_1^{-1}}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{2-n/2}.$$

- Se $\lambda_1 \leq \lambda_2$ então $U(\sqrt{\lambda_1}x) \geq U(\sqrt{\lambda_2}x)$, logo, por (1.80) e pelo fato de que $\|U_2\|_2^2 = \mu_2\displaystyle\int U_2^4$ temos

$$\gamma_1^2 \leq \frac{\mu_1\mu_2\|U_2\|_2^2}{\lambda_1\lambda_2\int U^4(\sqrt{\lambda_2}x)} = \frac{\mu_1\mu_2^2\int U_2^4}{\lambda_1\lambda_2\int U^4(\sqrt{\lambda_2}x)}. \tag{1.82}$$

Desde que $U_2(x) = \sqrt{\dfrac{\lambda_2}{\mu_2}}U\left(\sqrt{\lambda_2}x\right)$, segue por (1.82) que

$$\gamma_1^2 \leq \frac{\mu_1\mu_2^2\int U_2^4}{\lambda_1\lambda_2\int U^4(\sqrt{\lambda_2}x)} = \frac{\lambda_2\mu_1\int U_2^4}{\lambda_1\displaystyle\int\left(\frac{\sqrt{\lambda_2}}{\sqrt{\mu_2}}U(\sqrt{\lambda_2}x)\right)^4} = \mu_1\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right).$$

Concluímos que

$$\gamma_1^2 \leq \max\left\{\mu_1\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{1-n/2}, \mu_1\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right\} = \zeta_1.$$

Analogamente, prova-se que

$$\gamma_2^2 \leq \max\left\{\mu_2\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{1-n/2}, \mu_2\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right\} = \zeta_2.$$

$\square$

Capítulo 2

Sistema de equações não-lineares de Schrödinger com coeficientes não-constantes

2.1 Introdução

Neste capítulo consideraremos o problema

$$\begin{cases} -\Delta u_1 + V_1(x)u_1 = \mu_1(x)u_1^3 + \beta(x)u_2^2u_1,\ x \in \mathbb{R}^N, \\ -\Delta u_2 + V_2(x)u_2 = \beta(x)u_1^2u_2 + \mu_2(x)u_2^3,\ x \in \mathbb{R}^N, \\ u_j \in H^1(\mathbb{R}^N), j = 1,2, \end{cases} \tag{2.1}$$

com potenciais não-constantes $V_j(x), \mu_j(x), \beta(x)$, em que $N = 2,3$. Assumiremos sempre que os coeficientes são funções contínuas. Nosso estudo consiste em procurar soluções positivas para (2.1) considerando o caso em que $\beta > 0$ é grande e o caso em que $\beta > 0$ é pequeno, em termos de V_j e μ_j.

Listaremos abaixo sete hipóteses que, combinadas, nos permitirão obter os resultados de existência de solução para o problema dado em (2.1).

(H1) $0 < V_j(x) \leq V_{j\infty} := \lim_{|x|\to+\infty} V_j(x) < +\infty$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$, $j = 1,2$; $0 < \mu_{j\infty} := \lim_{|x|\to+\infty} \mu_j(x) \leq \mu_j(x)$, para $x \in \mathbb{R}^N$, $j = 1,2$;

(H2) $V_j(x)$ e $\mu_j(x)$ são positivas e τ_i-periódicas em x_i, $\tau_i > 0$, $i = 1,2,...,N$, $j = 1,2$;

Observação 2.1. A equação não-linear de Schrödinger

$$-\Delta u+V_j(x)u=\mu_j(x)u, x\in\mathbb{R}^N, u\in H^1(\mathbb{R}^N) \tag{2.2}$$

possui uma solução positiva do tipo ground state considerando a ocorrência de (H1) ([11, 22, 33]) ou de (H2) ([32, 20]). Denotaremos esta solução por ω_j, para $j=1,2$.

Considere

$$\mathcal{M}_j=\left\{u\in H^1(\mathbb{R}^N); u\neq 0, \int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u|^2+V_j u^2)=\int_{\mathbb{R}^N}\mu_j u^4\right\}$$

e

$$S_j=\inf_{u\in H^1(\mathbb{R}^N)\setminus\{0\}}\frac{\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u|^2+V_j u^2)}{\left(\int_{\mathbb{R}^N}\mu_j u^4\right)^{1/2}}.$$

S_j^2 é assumido em ω_j, portanto

$$S_j^2=\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla\omega_j|^2+V_j{\omega_j}^2)=\int_{\mathbb{R}^N}\mu_j{\omega_j}^4.$$

(H3) $0\leq\beta_\infty:=\lim\limits_{|x|\to+\infty}\beta(x)\leq\beta(x)$, para todo $x\in\mathbb{R}^N$;

(H4) $\beta(x)$ é não-negativa e τ_i-periódica em x_i, $\tau_i>0$, $i=1,2,...,N$;

(H5) $\xi:=\left|\dfrac{\beta}{(\mu_1\mu_2)^{1/2}}\right|_\infty<\min\left\{\dfrac{S_1^2S_2^2-\eta^4}{S_1S_2(S_1^2+S_2^2-2\eta^2)},\dfrac{S_1}{S_2},\dfrac{S_2}{S_1}\right\}$, em que

$$\eta=\left(\int_{\mathbb{R}^N}\beta\omega_1^2\omega_2^2\right)^{1/2}.$$

(H6) O sistema

$$\begin{cases}-\Delta u_1+V_{1\infty}u_1=\mu_{1\infty}u_1^3+\beta_\infty u_2^2u_1,\ x\in\mathbb{R}^N,\\ -\Delta u_2+V_{2\infty}u_2=\beta_\infty u_1^2u_2+\mu_{2\infty}u_2^3,\ x\in\mathbb{R}^N,\\ u_j\in H^1(\mathbb{R}^N), j=1,2,\end{cases} \tag{2.3}$$

possui uma solução positiva (v_1,v_2) do tipo ground state tal que $(v_1,v_2)\in\tilde{\mathcal{N}}_\infty$ e $I_\infty(v_1,v_2)=\inf\limits_{\mathbf{u}\in\tilde{\mathcal{N}}_\infty}I_\infty(\mathbf{u})=\tilde{c}_\infty$. Definimos $\tilde{\mathcal{N}}_\infty$ e I_∞ na próxima seção.

(H7) Existem $\rho > 0$, $\kappa > 0$, $\varphi_1, \varphi_2 \in H^1(\mathbb{R}^N)\setminus\{0\}$ tais que

$$\frac{\|(\omega_1, \rho\varphi_1)\|^4}{\int_{\mathbb{R}^N}(\mu_1\omega_1^4 + 2\rho^2\beta\omega_1^2\varphi_1^2 + \rho^4\mu_2\varphi_1^4)} < \int_{\mathbb{R}^N}\mu_1\omega_1^4 \tag{2.4}$$

e

$$\frac{\|(\kappa\varphi_2, \omega_2)\|^4}{\int_{\mathbb{R}^N}(\kappa^4\mu_1\varphi_2^4 + 2\kappa^2\beta\omega_2^2\varphi_2^2 + \mu_2\omega_2^4)} < \int_{\mathbb{R}^N}\mu_2\omega_2^4. \tag{2.5}$$

2.2 Notações

Utilizaremos as seguintes Notações:

i) $\mathcal{H} = H^1(\mathbb{R}^N) \times H^1(\mathbb{R}^N)$ munido com as normas equivalentes

$$\|\mathbf{u}\| = \left(\|u_1\|_1^2 + \|u_1\|_1^2\right)^{1/2}, \|\mathbf{u}\|_\infty = \left(\|u_1\|_{1\infty}^2 + \|u_1\|_{1\infty}^2\right)^{1/2},$$

em que $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathcal{H}$ e

$$\|u_j\|_j = \left(\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u_j|^2 + V_j u_j^2)\right)^{1/2}, \|u_j\|_{j\infty} = \left(\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u_j|^2 + V_{j\infty}u_j^2)\right)^{1/2}.$$

Observe que pela definição de $V_{j\infty}$ obtemos

$$\|u\|^2 = \int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u|^2 + V_j u^2) \leq \int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u|^2 + V_{j\infty}u^2) = \|u\|_{j\infty}^2,$$

sendo $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$. Por outro lado, considerando $0 < \varepsilon < V_{j\infty}$, novamente pela definição de $V_{j\infty}$, existe $R = R(\varepsilon) > 0$ tal que se $\|u\| \geq R$, então

$$|V_{j\infty} - V_j(x)| < \varepsilon, \text{ logo } 0 < V_{j\infty} - \varepsilon < V_j(x).$$

Além disto, $V_j(x)$, sendo contínua e positiva, assume mínimo em algum $x_0 \in B_R(0)$. Seja $C_j = \min\{V_{j\infty} - \varepsilon, V_j(x_0), 1\}$. Temos que

$$\begin{aligned}
\|u\|_{j\infty}C_j &= \int_{\mathbb{R}^N}(C_j|\nabla u|^2 + C_j V_{j\infty}u^2) \\
&\leq (1 + V_{j\infty})\int_{\mathbb{R}^N}(C_j|\nabla u|^2 + C_j u^2) \\
&\leq (1 + V_{j\infty})\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u|^2 + C_j u^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq (1+V_{j\infty})\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u|^2+C_j u^2)\\
&\leq (1+V_{j\infty})\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u|^2+V_j u^2),
\end{aligned}$$

Concluímos que $\|.\|_j$ e $\|.\|_{j\infty}$ são equivalentes, logo $\|.\|$ e $\|.\|_\infty$ são de fato equivalentes.

ii) Definimos os funcionais de energia $I:\mathcal{H}\to\mathbb{R}$, $I_\infty:\mathcal{H}\to\mathbb{R}$, dados por

$$\begin{aligned}
I(\mathbf{u}) &= \frac{1}{2}\|\mathbf{u}\|^2-\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^N}(\mu_1 u_1^4+2\beta u_1^2u_2^2+\mu_2 u_2^4),\\
I_\infty(\mathbf{u}) &= \frac{1}{2}\|\mathbf{u}\|_\infty^2-\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^N}(\mu_{1\infty} u_1^4+2\beta_\infty u_1^2u_2^2+\mu_{2\infty} u_2^4).
\end{aligned}$$

As variedades de Nehari associadas a I e I_∞ são definidas por

$$\begin{aligned}
\mathcal{N} &= \left\{\mathbf{u}\in\mathcal{H}\backslash\{0\};\langle I'(\mathbf{u}),\mathbf{u}\rangle=0\right\},\\
\mathcal{N}_\infty &= \left\{\mathbf{u}\in\mathcal{H}\backslash\{0\};\langle I'_\infty(\mathbf{u}),\mathbf{u}\rangle=0\right\},
\end{aligned}$$

e as variedades de Nehari generelizadas

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{N}} = \{&\mathbf{u}\in\mathcal{H};\ u_1\neq 0,\ u_2\neq 0,\\
&J_1(\mathbf{u})=\langle I'(\mathbf{u}),(u_1,0)\rangle=0, J_2(\mathbf{u})=\langle I'(\mathbf{u}),(0,u_2)\rangle=0\,\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{N}}_\infty = \{\,&\mathbf{u}\in\mathcal{H};\ u_1\neq 0,\ u_2\neq 0,\\
&\langle I'_\infty(\mathbf{u}),(u_1,0)\rangle=0, \langle I'_\infty(\mathbf{u}),(0,u_2)\rangle=0\,\}.
\end{aligned}$$

iii) Com respeito ao problema de minimização definimos

$$c=\inf_{\mathbf{u}\in\mathcal{N}} I(\mathbf{u}),\ c_\infty=\inf_{\mathbf{u}\in\mathcal{N}_\infty} I_\infty(\mathbf{u})$$

e

$$\tilde{c}=\inf_{\mathbf{u}\in\tilde{\mathcal{N}}} I(\mathbf{u}),\ \tilde{c}_\infty=\inf_{\mathbf{u}\in\tilde{\mathcal{N}}_\infty} I_\infty(\mathbf{u}).$$

Note que $0<c\leq\tilde{c}$ e $0<c_\infty\leq\tilde{c}_\infty$. Em verdade, se $\mathbf{u}\in\tilde{\mathcal{N}}$ então $u_1\neq 0$, $u_2\neq 0$ e $\langle I'(\mathbf{u}),(u_1,0)\rangle=\langle I'(\mathbf{u}),(0,u_2)\rangle=0$, segue que

$$\begin{aligned}
\langle I'(\mathbf{u}),(\mathbf{u})\rangle &= \langle I'(\mathbf{u}),(u_1,u_2)\rangle\\
&= \langle I'(\mathbf{u}),(u_1,0)+(0,u_2)\rangle\\
&= \langle I'(\mathbf{u}),(u_1,0)\rangle+\langle I'(\mathbf{u}),(0,u_2)\rangle\\
&= 0,
\end{aligned}$$

ou seja, $\mathbf{u} \in \mathcal{N}$. Concluimos então que $\tilde{\mathcal{N}} \subset \mathcal{N}$ e portanto

$$c = \inf_{\mathbf{u}\in\mathcal{N}} \frac{\|\mathbf{u}\|^2}{4} \leq \inf_{\mathbf{u}\in\tilde{\mathcal{N}}} \frac{\|\mathbf{u}\|^2}{4} = \tilde{c}.$$

Do mesmo modo se $\mathbf{u} \in \tilde{\mathcal{N}}_\infty$ então $u_1 \neq 0$, $u_2 \neq 0$ e $\langle I'_\infty(\mathbf{u}),(u_1,0)\rangle = \langle I'_\infty(\mathbf{u}),(0,u_2)\rangle =$ 0, segue que

$$\begin{aligned}
\langle I'_\infty(\mathbf{u}),(\mathbf{u})\rangle &= \langle I'_\infty(\mathbf{u}),(u_1,u_2)\rangle \\
&= \langle I'_\infty(\mathbf{u}),(u_1,0)+(0,u_2)\rangle \\
&= \langle I'_\infty(\mathbf{u}),(u_1,0)\rangle + \langle I'_\infty(\mathbf{u}),(0,u_2)\rangle \\
&= 0,
\end{aligned}$$

ou seja, $\mathbf{u} \in \mathcal{N}_\infty$. Concluimos então que $\tilde{\mathcal{N}}_\infty \subset \mathcal{N}_\infty$ e portanto

$$c_\infty = \inf_{\mathbf{u}\in\mathcal{N}_\infty} \frac{\|\mathbf{u}\|_\infty^2}{4} \leq \inf_{\mathbf{u}\in\tilde{\mathcal{N}}_\infty} \frac{\|\mathbf{u}\|_\infty^2}{4} = \tilde{c}.$$

Neste capítulo, diremos que $\mathbf{u} = (u_1,u_2) \in \mathcal{H}$ é um ponto cŕitico não-trivial de I se $I'(\mathbf{u}) = 0$ e $u_1 \neq 0$ e $u_2 \neq 0$. Portanto uma solução *ground state* de (1.1) é ponto crítico $\mathbf{u} = (u_1,u_2)$ de I tal que $u_1 \neq 0$ e $u_2 \neq 0$ e

$$I(\mathbf{u}) \leq I(\mathbf{v}),$$

para todo $\mathbf{v} \in \{\overline{\mathbf{v}} = (\overline{v}_1,\overline{v}_2) \in \mathcal{H};\ I'(\overline{\mathbf{v}}) = 0 \text{ e } \overline{v}_1 \neq 0,\ \overline{v}_2 \neq 0\}$.
Note que todas as soluções não-nulas de (2.1) estão contidas em $\mathcal{N}$, e todas as soluções não-triviais de (2.1) então contidas em $\tilde{\mathcal{N}}$.

2.3 Caso em que β é pequeno

A condição de "pequeno" que β assume, está associada à hipótese (H5). Assumindo esta condição, mostraremos nessa seção que $\tilde{c}$ é assumido em um ponto (u_1,u_2) com $u_1 > 0$ e $u_2 > 0$. Esta tarefa consistirá em escolher uma sequência minimizante $\{\mathbf{u}_n\} = \{(u_{1n},u_{2n})\} \in \tilde{\mathcal{N}}$ tal que $u_{1n} \geq 0$ e $u_{2n} \geq 0$, para cada n. Nestas condições veremos que $\{\mathbf{u}_n\}$ possui limite fraco $\mathbf{u} = (u_1,u_2)$ em $\mathcal{H}$, o qual provaremos ser ponto crítico de I. Para provar que $u_1 > 0$ e $u_2 > 0$ demonstraremos que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \beta u_1^2 u_2^2 > 0$.

A fim de que possamos provar nossos principais resultados desta seção, é necessário que demonstremos três lemas que se seguem.

Lema 2.1. Suponha que (H1) ou (H2) ocorra . Se β satisfaz (H5), então existe $(u_1,u_2) \in \tilde{\mathcal{N}}$ tal que

$$I(u_1,u_2) = \frac{S_1^2 S_2^2 (S_1^2 + S_2^2 - 2\eta^2)}{4(S_1^2 S_2^2 - \eta^4)}.$$

Demonstração. Supondo que ocorra (H1) ou (H2), tome ω_j solução de (2.2) e então considere o sistema de equações nas variáveis s e t abaixo

$$\begin{cases} s\int_{\mathbb{R}^N} \mu_1\omega_1^4 + t\int_{\mathbb{R}^N} \beta\omega_1^2\omega_2^2 = \int_{\mathbb{R}^N} \mu_1\omega_1^4, \\ s\int_{\mathbb{R}^N} \beta\omega_1^2\omega_2^2 + t\int_{\mathbb{R}^N} \mu_2\omega_2^4 = \int_{\mathbb{R}^N} \mu_2\omega_2^4. \end{cases} \tag{2.6}$$

Relembremos a seguinte notação:

$$S_1^2 = \int_{\mathbb{R}^N} \mu_1\omega_1^4,\ S_2^2 = \int_{\mathbb{R}^N} \mu_2\omega_2^4,\ \eta = \left(\int_{\mathbb{R}^N} \beta\omega_1^2\omega_2^2\right)^{1/2}.$$

Utilizando a desigualdade de Hölder obtemos

$$\begin{aligned} \eta^2 = \int_{\mathbb{R}^N} \beta\omega_1^2\omega_2^2 &\leq \int_{\mathbb{R}^N} \beta\frac{\mu_1^{1/2}\mu_2^{1/2}}{\mu_1^{1/2}\mu_2^{1/2}}\omega_1^2\omega_2^2 \\ &\leq \left|\frac{\beta}{\mu_1^{1/2}\mu_2^{1/2}}\right|_\infty \int_{\mathbb{R}^N} \mu_1^{1/2}\mu_2^{1/2}\omega_1^2\omega_2^2 \\ &\leq \left|\frac{\beta}{\mu_1^{1/2}\mu_2^{1/2}}\right|_\infty \left(\int_{\mathbb{R}^N} \mu_1\omega_1^4\right)^{1/2}\left(\int_{\mathbb{R}^N} \mu_2\omega_2^4\right)^{1/2} \\ &= \xi S_1 S_2. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Supondo em (2.7) que β satisfaz a hipótese (H5) segue que

$$\eta^2 = \int_{\mathbb{R}^N} \beta\omega_1^2\omega_2^2 \leq \xi S_1 S_2 < \frac{S_1}{S_2} S_1 S_2 = S_1^2.$$

Do mesmo modo

$$\eta^2 = \int_{\mathbb{R}^N} \beta\omega_1^2\omega_2^2 \leq \xi S_1 S_2 < \frac{S_2}{S_1} S_1 S_2 = S_2^2.$$

Com isto, obtemos que

$$\eta^4 < S_1^2\eta^2 < S_1^2 S_2^2 \tag{2.8}$$

e

$$\eta^4 < S_2^2\eta^2 < S_2^2 S_1^2. \tag{2.9}$$

Por (2.8) e (2.9) ocorre

$$0 < S_1^2 S_2^2 - S_1^2\eta^2 < S_1^2 S_2^2 - \eta^4, \tag{2.10}$$

e

$$0 < S_2^2 S_1^2 - S_2^2\eta^2 < S_2^2 S_1^2 - \eta^4. \tag{2.11}$$

Resolvendo o sistema (2.6) obtemos que sua solução $(s_0, t_0) \in (0,1)\times(0,1)$ é dada unicamente por

$$s_0 = \frac{S_2^2 S_1^2 - S_2^2\eta^2}{S_2^2 S_1^2 - \eta^4},\ t_0 = \frac{S_1^2 S_2^2 - S_1^2\eta^2}{S_1^2 S_2^2 - \eta^4}.$$

Em verdade, podemos reescrever o sistema (2.6) como

$$\begin{cases} sS_1^2 + t\eta^2 = S_1^2, \\ s\eta^2 + tS_2^2 = S_2^2, \end{cases}$$

deste modo,

$$\begin{cases} s\dfrac{S_1^2}{\eta^2} + t = \dfrac{S_1^2}{\eta^2}, \\ s\dfrac{\eta^2}{S_2^2} + t = 1, \end{cases}$$

subtraindo as equações obtemos

$$s\frac{S_1^2}{\eta^2} - s\frac{\eta^2}{S_2^2} = \frac{S_1^2}{\eta^2} - 1,$$

isto implica que

$$s_0 = \frac{S_2^2 S_1^2 - S_2^2\eta^2}{S_2^2 S_1^2 - \eta^4}.$$

Analogamente,

$$\begin{cases} s + t\dfrac{\eta^2}{S_1^2} = 1, \\ s + t\dfrac{S_2^2}{\eta^2} = \dfrac{S_2^2}{\eta^2}, \end{cases}$$

implica que

$$t\frac{\eta^2}{S_1^2} - t\frac{S_2^2}{\eta^2} = 1 - \frac{S_2^2}{\eta^2},$$

e então

$$t_0 = \frac{S_1^2 S_2^2 - S_1^2\eta^2}{S_1^2 S_2^2 - \eta^4}.$$

Logo por (2.10) e (2.11) temos que $(s_0,t_0) \in (0,1)\times(0,1)$.
Segue que $(\sqrt{s_0}\omega_1, \sqrt{t_0}\omega_2) \in \tilde{\mathcal{N}}$. De fato, sendo (s_0,t_0) solução do sistema dado (2.6) obtemos que

$$\begin{aligned}
\langle I'(\sqrt{s_0}\omega_1, \sqrt{t_0}\omega_2), (\sqrt{s_0}\omega_1, 0)\rangle &= \int_{\mathbb{R}^N}(s_0|\nabla\omega_1|^2 + V_1 s_0\omega_1^2) \\
&- \left(\int_{\mathbb{R}^N}\mu_1 s_0^2\omega_1^4 + \int_{\mathbb{R}^N}\beta s_0\omega_1^2 t_0\omega_2^2\right) \\
&= s_0\left(\int_{\mathbb{R}^N}\mu_1\omega_1^4\right) - s_0\left(s_0\int_{\mathbb{R}^N}\mu_1\omega_1^4 + t_0\int_{\mathbb{R}^N}\beta\omega_1^2\omega_2^2\right) \\
&= s_0\left(\int_{\mathbb{R}^N}\mu_1\omega_1^4\right) - s_0\left(\int_{\mathbb{R}^N}\mu_1\omega_1^4\right) = 0,
\end{aligned}$$

e ainda,

$$\begin{aligned}
\langle I'(\sqrt{s_0}\omega_1, \sqrt{t_0}\omega_2), (\sqrt{s_0}\omega_1, 0)\rangle &= \int_{\mathbb{R}^N}(t_0|\nabla\omega_2|^2 + V_2 t_0\omega_2^2) \\
&- \left(\int_{\mathbb{R}^N}t_0^2\mu_2\omega_2^4 + \int_{\mathbb{R}^N}\beta s_0 t_0\omega_1^2\omega_2^2\right) \\
&= t_0\left(\int_{\mathbb{R}^N}\mu_2\omega_2^4\right) - t_0\left(t_0\int_{\mathbb{R}^N}\mu_2\omega_2^4 + s_0\int_{\mathbb{R}^N}\beta\omega_1^2\omega_2^2\right) \\
&= t_0\left(\int_{\mathbb{R}^N}\mu_2\omega_2^4\right) - t_0\left(\int_{\mathbb{R}^N}\mu_2\omega_2^4\right) = 0.
\end{aligned}$$

Sendo assim, dado que $(\sqrt{s_0}\omega_1, \sqrt{t_0}\omega_2) \in \tilde{\mathcal{N}}$ e que S_j é assumido em ω_j temos

$$\begin{aligned}
I(\sqrt{s_0}\omega_1, \sqrt{t_0}\omega_2) &= \frac{\|(\sqrt{s_0}\omega_1, \sqrt{t_0}\omega_2)\|^2}{4} \\
&= \frac{1}{4}\left(s_0\|\omega_1\|^2 + t_0\|\omega_2\|^2\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(s_0\int_{\mathbb{R}^N}\mu_1\omega_1^4 + t_0\int_{\mathbb{R}^N}\mu_2\omega_2^4\right) \qquad (2.12)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{4}\left(\frac{S_2^2S_1^2 - S_2^2\eta^2}{S_2^2S_1^2-\eta^4}S_1^2 + \frac{S_1^2S_2^2 - S_1^2\eta^2}{S_1^2S_2^2-\eta^4}S_2^2\right)\\
&= \frac{S_1^2S_2^2(S_1^2+S_2^2-2\eta^2)}{4(S_1^2S_2^2-\eta^4)}
\end{aligned}
$$

□

Como consequência do Lema 2.1, pela definição de $\tilde{c}$ tem-se que

$$\tilde{c} \leq \frac{S_1^2S_2^2(S_1^2+S_2^2-2\eta^2)}{4(S_1^2S_2^2-\eta^4)}.$$

Logo, existe $\mathbf{u} = (u_1,u_2) \in \tilde{\mathcal{N}}$ tal que

$$\tilde{c} \leq I(u_1,u_2) \leq \frac{S_1^2S_2^2(S_1^2+S_2^2-2\eta^2)}{4(S_1^2S_2^2-\eta^4)}.$$

Isto nos conduz ao próximo lema.

Lema 2.2. Supondo que (H1) ou (H2) ocorra e que β satisfaz (H5). Se $\mathbf{u} = (u_1,u_2) \in \tilde{\mathcal{N}}$ é tal que

$$I(u_1,u_2) \leq \frac{S_1^2S_2^2(S_1^2+S_2^2-2\eta^2)}{4(S_1^2S_2^2-\eta^4)},$$

então temos

$$\int_{\mathbb{R}^N}\mu_1 u_1^4 \geq \alpha_1 := \left(\frac{S_1S_2(S_1^2S_2^2-\eta^4)-\xi S_1^2S_2^2(S_1^2+S_2^2-2\eta^2)}{(S_1^2S_2^2-\eta^4)(S_2-\xi S_1)}\right)^2 > 0, \quad (2.13)$$

$$\int_{\mathbb{R}^N}\mu_2 u_2^4 \geq \alpha_2 := \left(\frac{S_1S_2(S_1^2S_2^2-\eta^4)-\xi S_1^2S_2^2(S_1^2+S_2^2-2\eta^2)}{(S_1^2S_2^2-\eta^4)(S_1-\xi S_2)}\right)^2 > 0, \quad (2.14)$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N}\mu_1 u_1^4\int_{\mathbb{R}^N}\mu_2 u_2^4 - \left(\int_{\mathbb{R}^N}\beta u_1^2u_2^2\right)^2 \geq (1-\xi^2)\alpha_1\alpha_2. \quad (2.15)$$

Demonstração. Por definição temos

$$S_1 \leq \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u|^2+V_1u^2)}{\left(\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N}\mu_1 u^4\right)^{1/2}}, \forall u \in H^1(\mathbb{R}^N)\setminus\{0\},$$

logo, para $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \tilde{\mathcal{N}}$ temos

$$\begin{aligned} S_1 \left(\int_{\mathbb{R}^N} \mu_1 u_1^4 \right)^{1/2} &\leq \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u_1|^2 + V_1 u_1^2) = \int_{\mathbb{R}^N} \mu_1 u_1^4 + \int_{\mathbb{R}^N} \beta u_1^2 u_2^2 \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} \mu_1 u_1^4 + \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\beta \mu_1^{1/2} \mu_2^{1/2}}{\mu_1^{1/2} \mu_2^{1/2}} u_1^2 u_2^2 \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} \mu_1 u_1^4 + \left| \frac{\beta}{(\mu_1 \mu_2)^{1/2}} \right|_\infty \int_{\mathbb{R}^N} \mu_1^{1/2} \mu_2^{1/2} u_1^2 u_2^2 \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} \mu_1 u_1^4 + \left| \frac{\beta}{(\mu_1 \mu_2)^{1/2}} \right|_\infty \left(\int_{\mathbb{R}^N} \mu_1 u_1^4 \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \mu_2 u_2^4 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Sendo $\xi = \left| \frac{\beta}{(\mu_1 \mu_2)^{1/2}} \right|$, segue que

$$\begin{aligned} S_1 &\leq \frac{\int_{\mathbb{R}^N} \mu_1 u_1^4}{\left(\int_{\mathbb{R}^N} \mu_1 u_1^4 \right)^{1/2}} + \xi \frac{\left(\int_{\mathbb{R}^N} \mu_1 u_1^4 \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \mu_2 u_2^4 \right)^{1/2}}{\left(\int_{\mathbb{R}^N} \mu_1 u_1^4 \right)^{1/2}} \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} \mu_1 u_1^4 \right)^{1/2} + \xi \left(\int_{\mathbb{R}^N} \mu_2 u_2^4 \right)^{1/2}. \end{aligned} \tag{2.16}$$

De modo análogo obtemos

$$S_2 \leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} \mu_2 u_2^4 \right)^{1/2} + \xi \left(\int_{\mathbb{R}^N} \mu_1 u_1^4 \right)^{1/2}. \tag{2.17}$$

Por outro lado, considerando $\mathbf{u} \in \tilde{\mathcal{N}}$ tal que

$$I(u_1, u_2) \leq \frac{S_1^2 S_2^2 (S_1^2 + S_2^2 - 2\eta^2)}{4(S_1^2 S_2^2 - \eta^4)},$$

teremos que

$$\frac{S_1^2 S_2^2 (S_1^2 + S_2^2 - 2\eta^2)}{(S_1^2 S_2^2 - \eta^4)} \geq 4I(\mathbf{u}) = \|\mathbf{u}\|^2 = \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u_1|^2 + V_2 u_1^2) + \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u_2|^2 + V_2 u_2^2). \tag{2.18}$$

Utilizando a definição de S_1 e S_2 em (2.18) temos

$$\frac{S_1^2 S_2^2 (S_1^2 + S_2^2 - 2\eta^2)}{(S_1^2 S_2^2 - \eta^4)} \geq S_1 \left(\int_{\mathbb{R}^N} \mu_1 u_1^4 \right)^{1/2} + S_2 \left(\int_{\mathbb{R}^N} \mu_2 u_2^4 \right)^{1/2}. \tag{2.19}$$

Multiplicando (2.16) por S_2, (2.19) por ξ e em seguida somando os resultados, obtemos

$$S_2S_1+\xi\left[S_1\left(\int_{\mathbb{R}^N}\mu_1u_1^4\right)^{1/2}+S_2\left(\int_{\mathbb{R}^N}\mu_2u_2^4\right)^{1/2}\right]\leq$$
$$S_2\left[\left(\int_{\mathbb{R}^N}\mu_1u_1^4\right)^{1/2}+\xi\left(\int_{\mathbb{R}^N}\mu_2u_2^4\right)^{1/2}\right]+\xi\frac{S_1^2S_2^2(S_1^2+S_2^2-2\eta^2)}{(S_1^2S_2^2-\eta^4)},$$

equivalentemente,

$$S_2S_1+\xi S_1\left(\int_{\mathbb{R}^N}\mu_1u_1^4\right)^{1/2}\leq S_2\left(\int_{\mathbb{R}^N}\mu_1u_1^4\right)^{1/2}+\xi\frac{S_1^2S_2^2(S_1^2+S_2^2-2\eta^2)}{(S_1^2S_2^2-\eta^4)}$$

$$\Rightarrow\left(S_2S_1-\xi\frac{S_1^2S_2^2(S_1^2+S_2^2-2\eta^2)}{(S_1^2S_2^2-\eta^4)}\right)^2\frac{1}{(S_2-\xi S_1)^2}\leq\int_{\mathbb{R}^N}\mu_1u_1^4,$$

$$\Rightarrow\alpha_1:=\left(\frac{S_2S_1(S_1^2S_2^2-\eta^4)-\xi S_1^2S_2^2(S_1^2+S_2^2-2\eta^2)}{(S_1^2S_2^2-\eta^4)(S_2-\xi S_1)}\right)^2\leq\int_{\mathbb{R}^N}\mu_1u_1^4.$$

Para obter (2.13) precisamos demonstrar que α_1 é positiva. Para isto, notemos que por (H5),

$$\xi<\frac{S_2}{S_1}\text{ e }\xi<\frac{S_1^2S_2^2-\eta^4}{S_1S_2(S_1^2+S_2^2-2\eta^2)}.$$

Isto implica que

$$0<S_2-\xi S_1\text{ e }\xi S_1S_2(S_1^2+S_2^2-2\eta^2)<S_1^2S_2^2-\eta^4. \tag{2.20}$$

Multiplicando $\xi S_1S_2(S_1^2+S_2^2-2\eta^2)<S_1^2S_2^2-\eta^4$ por S_1S_2, obtemos também que

$$0<S_1S_2(S_1^2S_2^2-\eta^4)-\xi S_1^2S_2^2(S_1^2+S_2^2-2\eta^2). \tag{2.21}$$

Segue por (2.20) e (2.21) que $\alpha_1>0$.De modo análogo mostra-se (2.14).

Por fim, pela desigualdade de Hölder

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N}\mu_1^{1/2}u_1^2\mu_2^{1/2}u_2^2\right)^2\leq\left(\int_{\mathbb{R}^N}\mu_1u_1^4\right)\left(\int_{\mathbb{R}^N}\mu_2u_2^4\right),$$

podemos então inferir que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N}\mu_1 u_1^4\int_{\mathbb{R}^N}\mu_2 u_2^4-\left(\int_{\mathbb{R}^N}\beta u_1^2u_2^2\right)^2 &= \int_{\mathbb{R}^N}\mu_1 u_1^4\int_{\mathbb{R}^N}\mu_2 u_2^4-\left(\int_{\mathbb{R}^N}\beta\frac{\mu_1^{1/2}\mu_2^{1/2}}{\mu_1^{1/2}\mu_2^{1/2}}u_1^2u_2^2\right)^2\\
&\geq \int_{\mathbb{R}^N}\mu_1 u_1^4\int_{\mathbb{R}^N}\mu_2 u_2^4\\
&- \left|\frac{\beta}{(\mu_1\mu_2)^{1/2}}\right|_\infty^2\int_{\mathbb{R}^N}\mu_1 u_1^4\int_{\mathbb{R}^N}\mu_2 u_2^4\\
&= (1-\xi^2)\int_{\mathbb{R}^N}\mu_1 u_1^4\int_{\mathbb{R}^N}\mu_2 u_2^4, \qquad (2.22)
\end{aligned}$$

Segue por (2.22), (2.13) e (2.14) que (2.15) é válida.

□

Lema 2.3. Suponha que (H1) ou (H2) ocorra. Se β satisfaz (H5), existe então

$$\sigma=\sigma(V_1,V_2,\mu_1,\mu_2,\beta)>0$$

constante tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N}\beta u_1^2u_2^2\geq\sigma,$$

para todo $\mathbf{u}=(u_1,u_2)\in\tilde{\mathcal{N}}$ para o qual tenhamos

$$I(\mathbf{u})\leq\frac{S_1^2S_2^2(S_1^2+S_2^2-2\eta^2)}{4(S_1^2S_2^2-\eta^4)}.$$

Demonstração. Seja $\mathbf{u}=(u_1,u_2)\in\tilde{\mathcal{N}}$ tal que

$$I(\mathbf{u})\leq\frac{S_1^2S_2^2(S_1^2+S_2^2-2\eta^2)}{4(S_1^2S_2^2-\eta^4)} \qquad (2.23)$$

Desde que $u_1\neq 0$ e $u_2\neq 0$, existem constantes positivas s e t tais que $su_1\in\mathcal{M}_1$ e $tu_2\in\mathcal{M}_2$. Neste caso, pela definição de $\mathcal{M}_1$, tem-se

$$s^2\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u_1|^2+V_1u_1^2)=s^4\int_{\mathbb{R}^N}\mu_1u_1^4. \qquad (2.24)$$

Pela definição de S_1 e por (2.24) temos

$$S_1 \leq \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u_1|^2+V_1u_1^2)}{\left(\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N}\mu_1u_1^4\right)^{1/2}} = \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u_1|^2+V_1u_1^2)}{\left(\frac{1}{s^2}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_1|^2+V_1u_1^2\right)^{1/2}}$$

logo,

$$\frac{S_1^2}{s^2} \leq \int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u_1|^2+V_1u_1^2).$$

Do mesmo modo,

$$\frac{S_2^2}{t^2} \leq \int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u_2|^2+V_2u_2^2).$$

Portanto, dado que $\mathbf{u} \in \tilde{\mathcal{N}} \subset \mathcal{N}$ (item (iii) Seção 2.2) temos

$$\begin{aligned} I(\mathbf{u}) &= \frac{1}{4}\|\mathbf{u}\|^2 = \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u_1|^2+V_1u_1^2+|\nabla u_2|^2+V_2u_2^2) \\ &\geq \frac{1}{4}\left(\frac{S_1^2}{s^2}+\frac{S_2^2}{t^2}\right). \end{aligned} \tag{2.25}$$

Além disso, também pelo fato de $\mathbf{u} \in \tilde{\mathcal{N}}$ temos que

$$\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u_1|^2+V_1u_1^2) = \int_{\mathbb{R}^N}\mu_1u_1^4+\int_{\mathbb{R}^N}\beta u_1^2u_2^2$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u_2|^2+V_2u_2^2) = \int_{\mathbb{R}^N}\mu_2u_1^4+\int_{\mathbb{R}^N}\beta u_1^2u_2^2,$$

então por (2.24)

$$s^2\int_{\mathbb{R}^N}\mu_1u_1^4 = \int_{\mathbb{R}^N}\mu_1u_1^4+\int_{\mathbb{R}^N}\beta u_1^2u_2^2 \tag{2.26}$$

e

$$t^2\int_{\mathbb{R}^N}\mu_2u_2^4 = \int_{\mathbb{R}^N}\mu_2u_1^4+\int_{\mathbb{R}^N}\beta u_1^2u_2^2. \tag{2.27}$$

Segue por (2.26) e (2.27) que

$$s^2 = \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N}\mu_1u_1^4+\int_{\mathbb{R}^N}\beta u_1^2u_2^2}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N}\mu_1u_1^4},\ t^2 = \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N}\mu_2u_1^4+\int_{\mathbb{R}^N}\beta u_1^2u_2^2}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N}\mu_2u_2^4}. \tag{2.28}$$

Deste modo, por (2.25) e (2.28), obtemos a seguinte desigualdade,

$$I(\mathbf{u}) \geq \frac{1}{4}\left(S_1^2 \frac{\int_{\mathbb{R}^N} \mu_1 u_1^4}{\int_{\mathbb{R}^N} \mu_1 u_1^4 + \int_{\mathbb{R}^N} \beta u_1^2 u_2^2} + S_2^2 \frac{\int_{\mathbb{R}^N} \mu_2 u_2^4}{\int_{\mathbb{R}^N} \mu_2 u_1^4 + \int_{\mathbb{R}^N} \beta u_1^2 u_2^2} \right).$$

Definamos $\alpha = \min\{\alpha_1, \alpha_2\}$, em que α_1 e α_2 são as constantes definidas no Lema 2.2. Do fato de que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x/(x+c)$ é crescente em $(0, +\infty)$ quando $c > 0$, considerando $c = \int_{\mathbb{R}^N} \beta u_1^2 u_2^2$, temos pelo Lema 2.2 que

$$f(\alpha_j) \leq f\left(\int_{\mathbb{R}^N} \mu_j u_j^4 \right) \text{ e } f(\alpha) \leq f(\alpha_j), \text{ para } j = 1, 2.$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} I(\mathbf{u}) &\geq \frac{1}{4}\left(S_1^2 \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \int_{\mathbb{R}^N} \beta u_1^2 u_2^2} + S_2^2 \frac{\alpha_2}{\alpha_2 + \int_{\mathbb{R}^N} \beta u_1^2 u_2^2} \right) \\ &\geq \frac{1}{4}\left(S_1^2 \frac{\alpha}{\alpha + \int_{\mathbb{R}^N} \beta u_1^2 u_2^2} + S_2^2 \frac{\alpha}{\alpha + \int_{\mathbb{R}^N} \beta u_1^2 u_2^2} \right) \\ &\geq \frac{(S_1^2 + S_2^2)\alpha}{4\left(\alpha + \int_{\mathbb{R}^N} \beta u_1^2 u_2^2 \right)}. \end{aligned} \tag{2.29}$$

Por (2.23) e (2.29) concluímos que

$$\frac{S_1^2 S_2^2 (S_1^2 + S_2^2 - 2\eta^2)}{4(S_1^2 S_2^2 - \eta^4)} \geq \frac{(S_1^2 + S_2^2)\alpha}{4(\alpha + \int_{\mathbb{R}^N} \beta u_1^2 u_2^2)},$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \beta u_1^2 u_2^2 &\geq \frac{(S_1^2 S_2^2 - \eta^4)(S_1^2 + S_2^2)\alpha}{S_1^2 S_2^2 (S_1^2 + S_2^2 - 2\eta^2)} - \alpha \\ &\geq \frac{(S_1^2 S_2^2 - \eta^4)(S_1^2 + S_2^2)\alpha - S_1^2 S_2^2 (S_1^2 + S_2^2 - 2\eta^2)\alpha}{S_1^2 S_2^2 (S_1^2 + S_2^2 - 2\eta^2)} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\geq \frac{S_1^2S_2^2(S_1^2+S_2^2)\alpha-\eta^4(S_1^2+S_2^2)\alpha-S_1^2S_2^2(S_1^2+S_2^2)\alpha+S_1^2S_2^2 2\eta^2\alpha}{S_1^2S_2^2(S_1^2+S_2^2-2\eta^2)}\\
&\geq \frac{\alpha\eta^2[2S_1^2S_2^2-\eta^2(S_1^2+S_2^2)]}{S_1^2S_2^2(S_1^2+S_2^2-2\eta^2)}:=\sigma.
\end{aligned}
$$

□

A seguir exibimos um dos resultados de existência desta seção, bem como sua demonstração.

Teorema 2.1. Se (H1), (H3), (H5) e (H6) ocorrem, então (2.1) possui uma solução positiva do tipo ground state.

Demonstração. Em consequência do Lema 2.1

$$
\tilde{c}\leq \frac{S_1^2S_2^2(S_1^2+S_2^2-2\eta^2)}{4(S_1^2S_2^2-\eta^4)}, \tag{2.30}
$$

e como visto em sua demonstração, caso em (2.30) ocorra a igualdade, então $\tilde{c}$ é assumido em $\mathbf{u}=(u_1,u_2):=(\sqrt{s_0}\omega_1,\sqrt{t_0}\omega_2)$ e $\mathbf{u}$ é um ponto crítico de $I|_{\tilde{\mathcal{N}}}$. Deste modo, pelo Teorema C.5, existem $s,t\in\mathbb{R}$ tais que

$$
I'(\mathbf{u})-sJ_1'(\mathbf{u})-tJ_2'(\mathbf{u})=0. \tag{2.31}
$$

Verificando o funcional identificado em (2.31) nas direções $(u_1,0)$ e $(0,u_2)$, encontramos

$$
\begin{cases}
\langle I'(\mathbf{u}),(u_1,0)\rangle-s\langle J_1'(\mathbf{u}),(u_1,0)\rangle-t\langle J_2'(\mathbf{u}),(u_1,0)\rangle=0\\
\langle I'(\mathbf{u}),(0,u_2)\rangle-s\langle J_1'(\mathbf{u}),(0,u_2)\rangle-t\langle J_2'(\mathbf{u}),(0,u_2)\rangle=0.
\end{cases} \tag{2.32}
$$

Temos que $\langle I'(\mathbf{u}),(u_1,0)\rangle=0$, $\langle I'(\mathbf{u}),(0,u_2)\rangle=0$, desde que $\mathbf{u}\in\tilde{\mathcal{N}}$. Além disso, sendo $\varphi=(\varphi_1,\varphi_2)\in H^1(\mathbb{R}^N)\times H^1(\mathbb{R}^N)$ temos que

$$
\begin{cases}
\langle J_1'(\mathbf{u}),\varphi\rangle=2\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N}(\nabla u_1\nabla\varphi_1+V_1u_1\varphi_1)-4\int_{\mathbb{R}^N}\mu_1u_1^3\varphi_1-2\int_{\mathbb{R}^N}\beta(u_1^2u_2\varphi_2+u_2^2u_1\varphi_1)\\
\langle J_2'(\mathbf{u}),\varphi\rangle=2\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N}(\nabla u_2\nabla\varphi_2+V_2u_2\varphi_2)-4\int_{\mathbb{R}^N}\mu_2u_2^3\varphi_2-2\int_{\mathbb{R}^N}\beta(u_2^2u_1\varphi_1+u_1^2u_2\varphi_2)
\end{cases}
$$

logo,

$$
\begin{aligned}
\langle J_1'(\mathbf{u}),(u_1,0)\rangle &=2\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u_1|^2+V_1u_1^2)-4\int_{\mathbb{R}^N}\mu_1u_1^4-2\int_{\mathbb{R}^N}\beta u_2^2u_1^2\\
&=2\langle I'(\mathbf{u}),(u_1,0)\rangle-2\int_{\mathbb{R}^N}\mu_1u_1^4
\end{aligned}
$$

$$= -2\int_{\mathbb{R}^N} \mu_1 u_1^4,$$

$$\begin{aligned}\langle J_2'(\mathbf{u}),(0,u_2)\rangle &= 2\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u_2|^2 + V_2u_2^2) - 4\int_{\mathbb{R}^N}\mu_2u_2^4 - 2\int_{\mathbb{R}^N}\beta u_1^2u_2^2\\ &= 2\langle I'(\mathbf{u}),(0,u_2)\rangle - 2\int_{\mathbb{R}^N}\mu_2u_2^4\\ &= -2\int_{\mathbb{R}^N}\mu_2u_2^4,\end{aligned}$$

e

$$\langle J_1'(\mathbf{u}),(0,u_2)\rangle = -2\int_{\mathbb{R}^N}\beta u_1^2u_2^2,\ \langle J_2'(\mathbf{u}),(u_1,0)\rangle = -2\int_{\mathbb{R}^N}\beta u_2^2u_1^2.$$

Substituindo $\langle J_1'(\mathbf{u}),(u_1,0)\rangle$, $\langle J_2'(\mathbf{u}),(0,u_2)\rangle$, $\langle J_1'(\mathbf{u}),(0,u_2)\rangle$ e $\langle J_2'(\mathbf{u}),(u_1,0)\rangle$ em (2.32) concluímos que

$$\begin{cases} s\int_{\mathbb{R}^N}\mu_1u_1^4 + t\int_{\mathbb{R}^N}\beta u_1^2u_2^2 = 0,\\ s\int_{\mathbb{R}^N}\beta u_2^2u_1^2 + t\int_{\mathbb{R}^N}\mu_2u_2^4 = 0.\end{cases} \tag{2.33}$$

Da condição (H5) temos que $\xi < \dfrac{S_1}{S_2}$ e $\xi < \dfrac{S_2}{S_1}$, logo $\xi < 1$. Por ocorrer (H1) e (H5) obtemos através do Lema 2.2 que,

$$\int_{\mathbb{R}^N}\mu_1u_1^4\int_{\mathbb{R}^N}\mu_2u_2^4 - \left(\int_{\mathbb{R}^N}\beta u_1^2u_2^2\right)^2 \geq (1-\xi^2)\alpha_1\alpha_2.$$

Portanto

$$\int_{\mathbb{R}^N}\mu_1u_1^4\int_{\mathbb{R}^N}\mu_2u_2^4 - \left(\int_{\mathbb{R}^N}\beta u_1^2u_2^2\right)^2 > 0,$$

ou seja, o sistema (2.33) possui determinante positivo. Concluímos então que $s = t = 0$. Neste caso, temos por (2.31) que $I'(\mathbf{u}) = 0$. Desde que, por definição, $\mathbf{u} > \mathbf{0}$ e por hipótese $I(\mathbf{u}) = \tilde{c}$, segue que $\mathbf{u}$ é uma solução positiva do tipo ground state de (2.1).

Suponha agora, que a desigualdade (2.30) seja estrita, isto é,

$$\tilde{c} < \frac{S_1^2S_2^2(S_1^2+S_2^2-2\eta^2)}{4(S_1^2S_2^2-\eta^4)}. \tag{2.34}$$

Pelo Teorema 3.1 de [12], existem sequências $\{s_n\},\{t_n\} \subset \mathbb{R}$, $\{\mathbf{u}_n\} = (u_{1n},u_{2n}) \subset \tilde{\mathcal{N}}$ tais que,

$$I(\mathbf{u}_n) \to \tilde{c} \text{ e } I'(\mathbf{u}_n) - s_nJ_1'(\mathbf{u}_n) - t_nJ_2'(\mathbf{u}_n) = \mathbf{v}_n, \tag{2.35}$$

para alguma sequência $\{\mathbf{v}_n\} \in \mathcal{H}$ tal que $\mathbf{v}_n \to 0$ quando $n \to +\infty$.

Efetuando o produto interno de $\mathbf{v}_n$, identificado em (2.35), por $(u_{1n},0)$ e $(0,u_{2n})$ encontramos

$$\begin{cases} \langle I'(\mathbf{u}_n),(u_{1n},0)\rangle - s_n\langle J_1'(\mathbf{u}_n),(u_{1n},0)\rangle - t_n\langle J_2'(\mathbf{u}_n),(u_{1n},0)\rangle = \langle \mathbf{v}_n,(u_{1n},0)\rangle \\ \langle I'(\mathbf{u}_n),(0,u_{2n})\rangle - s_n\langle J_1'(\mathbf{u}_n),(0,u_{2n})\rangle - t_n\langle J_2'(\mathbf{u}_n),(0,u_{2n})\rangle = \langle \mathbf{v}_n,(0,u_{2n})\rangle. \end{cases} \tag{2.36}$$

Temos que $\langle I'(\mathbf{u}_n),(u_{1n},0)\rangle = 0$, $\langle I'(\mathbf{u}_n),(0,u_{2n})\rangle = 0$, desde que $\{\mathbf{u}_n\} \in \tilde{\mathcal{N}}$. Por outro lado,

$$\begin{aligned} \langle J_1'(\mathbf{u}_n),(u_{1n},0)\rangle &= 2\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u_{1n}|^2 + V_1u_{1n}^2) - 4\int_{\mathbb{R}^N}\mu_1u_{1n}^4 - 2\int_{\mathbb{R}^N}\beta u_{2n}^2u_{1n}^2 \\ &= 2\langle I'(\mathbf{u}_n),(u_{1n},0)\rangle - 2\int_{\mathbb{R}^N}\mu_1u_{1n}^4 \\ &= -2\int_{\mathbb{R}^N}\mu_1u_{1n}^4, \end{aligned} \tag{2.37}$$

$$\begin{aligned} \langle J_2'(\mathbf{u}_n),(0,u_{2n})\rangle &= 2\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u_{2n}|^2 + V_2u_{2n}^2) - 4\int_{\mathbb{R}^N}\mu_2u_{2n}^4 - 2\int_{\mathbb{R}^N}\beta u_{1n}^2u_{2n}^2 \\ &= 2\langle I'(\mathbf{u}_n),(0,u_{2n})\rangle - 2\int_{\mathbb{R}^N}\mu_2u_{2n}^4 \\ &= -2\int_{\mathbb{R}^N}\mu_2u_{2n}^4 \end{aligned} \tag{2.38}$$

e

$$\langle J_1'(\mathbf{u}_n),(0,u_{2n})\rangle = -2\int_{\mathbb{R}^N}\beta u_{1n}^2u_{2n}^2,\ \langle J_2'(\mathbf{u}_n),(u_{1n},0)\rangle = -2\int_{\mathbb{R}^N}\beta u_{2n}^2u_{1n}^2.$$

Substituindo em (2.36) obtemos

$$\begin{cases} s_n\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N}\mu_{1n}u_{1n}^4 + t_n\int_{\mathbb{R}^N}\beta u_{1n}^2u_{2n}^2 = \frac{1}{2}\langle \mathbf{v}_n,(u_{1n},0)\rangle, \\ s_n\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N}\beta u_{2n}^2u_{1n}^2 + t_n\int_{\mathbb{R}^N}\mu_{2n}u_{2n}^4 = \frac{1}{2}\langle \mathbf{v}_n,(0,u_{2n})\rangle. \end{cases} \tag{2.39}$$

Dado que $I(\mathbf{u}_n) = \dfrac{1}{4}\|\mathbf{u}_n\|^2$ é convergente, tem-se que $\{\mathbf{u}_n\}$ é limitada. Portanto, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$|\langle \mathbf{v}_n,(u_{1n},0)\rangle| \leq \|\mathbf{v}_n\|\|\mathbf{u}_n\| \to 0 \text{ quando } n \to +\infty.$$

Logo, podemos reescrever o sistema dado em (2.39) como

$$\begin{cases} s_n\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N}\mu_{1n}u_{1n}^4 + t_n\int_{\mathbb{R}^N}\beta u_{1n}^2u_{2n}^2 = o(1), \\ s_n\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N}\beta u_{2n}^2u_{1n}^2 + t_n\int_{\mathbb{R}^N}\mu_{2n}u_{2n}^4 = o(1). \end{cases} \tag{2.40}$$

Considerando a condição sobre $\tilde{c}$ expressa em (2.34) e o fato de que $I(\mathbf{u}_n) \to \tilde{c}$, temos a partir de um certo n que

$$I(\mathbf{u}_n) \leq \frac{S_1^2 S_2^2 (S_1^2 + S_2^2 - 2\eta^2)}{4(S_1^2 S_2^2 - \eta^4)}. \tag{2.41}$$

Podemos supor, sem perdas, que o fato expresso em (2.41) vale para todo n. Não sendo o caso, redefinimos a sequência $\{\mathbf{u}_n\}$ excluindo os termos que não satisfazem (2.41).
Dado que as hipóteses (H1) e (H5) são satisfeitas, e que para cada n ocorre a desigualdade expressa em (2.41), podemos recorrer ao Lema 2.2, e assim obtemos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \mu_{1n} u_{1n}^4 \int_{\mathbb{R}^N} \mu_{2n} u_{2n}^4 - \left(\int_{\mathbb{R}^N} \beta u_{1n}^2 u_{1n}^2 \right)^2 \geq (1 - \xi^2)\alpha_1 \alpha_2 > 0. \tag{2.42}$$

Sendo assim, por (2.40) segue que

$$\begin{cases} s_n + t_n \dfrac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \beta u_{1n}^2 u_{2n}^2}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \mu_{1n} u_{1n}^4} = \dfrac{o(1)}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \mu_{1n} u_{1n}^4}, \\[4ex] s_n + t_n \dfrac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \mu_{2n} u_{2n}^4}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \beta u_{2n}^2 u_{1n}^2} = \dfrac{o(1)}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \beta u_{2n}^2 u_{1n}^2}. \end{cases}$$

subtraindo as equações temos

$$t_n \left[\int_{\mathbb{R}^N} \mu_{1n} u_{1n}^4 \int_{\mathbb{R}^N} \mu_{2n} u_{2n}^4 - \left(\int_{\mathbb{R}^N} \beta u_{1n}^2 u_{1n}^2 \right)^2 \right] = o(1) \left(\int_{\mathbb{R}^N} \mu_{1n} u_{1n}^4 - \int_{\mathbb{R}^N} \beta u_{2n}^2 u_{1n}^2 \right). \tag{2.43}$$

Porém, $\{\mathbf{u}_n\}$ é uma sequência limitada em $\mathcal{H}$, logo, pelo Corolário B.3, é também limitada em $L^4(\mathbb{R}^N) \times L^4(\mathbb{R}^N)$, com isso inferimos que existe $C > 0$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \mu_{1n} u_{1n}^4 \leq |\mu_{1n}|_\infty \int_{\mathbb{R}^N} u_{1n}^4 < C, \ \forall n$$

e, adicionalmente pela desigualdade de Hölder

$$\int_{\mathbb{R}^N} \beta u_{2n}^2 u_{1n}^2 \leq |\beta|_\infty \left(\int_{\mathbb{R}^N} u_{2n}^4 \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^N} u_{1n}^4 \right)^{1/2} < \overline{C}, \ \forall n,$$

para algum $\overline{C} > 0$. Portanto,

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} \mu_{1n} u_{1n}^4 - \int_{\mathbb{R}^N} \beta u_{2n}^2 u_{1n}^2 \right| \leq \tilde{C}, \ \forall n \tag{2.44}$$

para algum $\tilde{C} > 0$. Por (2.43), (2.42) e (2.44) concluímos que

$$\begin{aligned}
|t_n| &= |t_n| \frac{\int_{\mathbb{R}^N} \mu_{1n} u_{1n}^4 \int_{\mathbb{R}^N} \mu_{2n} u_{2n}^4 - \left(\int_{\mathbb{R}^N} \beta u_{1n}^2 u_{1n}^2 \right)^2}{\int_{\mathbb{R}^N} \mu_{1n} u_{1n}^4 \int_{\mathbb{R}^N} \mu_{2n} u_{2n}^4 - \left(\int_{\mathbb{R}^N} \beta u_{1n}^2 u_{1n}^2 \right)^2} \\
&\leq |t_n| \frac{\int_{\mathbb{R}^N} \mu_{1n} u_{1n}^4 \int_{\mathbb{R}^N} \mu_{2n} u_{2n}^4 - \left(\int_{\mathbb{R}^N} \beta u_{1n}^2 u_{1n}^2 \right)^2}{(1-\xi^2)\alpha_1\alpha_2} \\
&= \frac{\left| o(1) \left(\int_{\mathbb{R}^N} \mu_{1n} u_{1n}^4 - \int_{\mathbb{R}^N} \beta u_{2n}^2 u_{1n}^2 \right) \right|}{(1-\xi^2)\alpha_1\alpha_2} \\
&\leq |o(1)| \frac{\tilde{C}}{(1-\xi^2)\alpha_1\alpha_2},
\end{aligned}$$

logo, $t_n \to 0$ quando $n \to +\infty$.
De modo análogo, prova-se também que $s_n \to 0$.
Concluímos então que

$$|I'(\mathbf{u}_n)| \leq |s_n||J_1'(\mathbf{u}_n)| + |t_n||J_2'(\mathbf{u}_n)| + |\mathbf{v}_n|,$$

e consequentemente, $I'(\mathbf{u}_n) \to 0$ quando $n \to +\infty$.
Desde que $\{\mathbf{u}_n\}$ é limitada em $\mathcal{H}$, segue pelo Teorema C.7 que

$$\begin{array}{lcll}
(u_{1n}, u_{2n}) & \rightharpoonup & (u_1, u_2) & \text{em } \mathcal{H} \\
(u_{1n}, u_{2n}) & \to & (u_1, u_2) & \text{em } L^4_{loc}(\mathbb{R}^N) \times L^4_{loc}(\mathbb{R}^N) \\
(u_{1n}, u_{2n}) & \to & (u_1, u_2) & \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^N.
\end{array} \tag{2.45}$$

para alguma subsequência $\{\mathbf{u}_n\}$. Sendo assim, desde que f_φ dado por

$$\langle f_{\mathbf{u}}, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u_1 \nabla \varphi_1 + V_1 u_1 \varphi_1 + \nabla u_2 \nabla \varphi_2 + V_2 u_2 \varphi_2)$$

é um funcional linear contínuo sobre $\mathcal{H}$, segue pela Proposição A.2 que $\langle f_{\mathbf{u}}, \mathbf{u}_n \rangle \to \langle f_{\mathbf{u}}, \mathbf{u} \rangle$ quando $n \to +\infty$.

Seja $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N) \times C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, então

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^N}(\mu_1 u_{1n}^3\varphi_1+\mu_2 u_{2n}^3\varphi_2+\beta u_{1n}^2 u_{2n}\varphi_2+\beta u_{1n}u_{2n}^2\varphi_1)=\\&\int_{supp(\varphi_1)}\mu_1 u_{1n}^3\varphi_1+\int_{supp(\varphi_2)}\mu_2 u_{2n}^3\varphi_2+\int_{supp(\varphi_2)}\beta u_{1n}^2 u_{2n}\varphi_2+\int_{supp(\varphi_1)}\beta u_{1n}u_{2n}^2\varphi_1.\end{aligned}$$

Por (2.45), $u_{1n}\to u_1$ em $L^4_{loc}(\mathbb{R}^N)$, consequentemente em $L^4(supp(\varphi_1))$. Pelo Teorema A.11 existe uma subsequência $\{\mathbf{u}_n\}$ e uma função $h_1\in L^4(supp(\varphi_1))$ tais que

(i) $u_{1n}\to u_1$ q.t.p. em $supp(\varphi_1)$,

(ii) $|u_{1n}(x)|\le h_1(x),\forall n$, q.t.p. em $supp(\varphi_1)$.

Sendo assim,

(i) $\mu_1 u_{1n}^3\varphi_1\to\mu_1 u_1^3\varphi_1$ q.t.p. em $supp(\varphi_1)$,

(ii) $|\mu_1(x)u_{1n}^3(x)\varphi_1(x)|\le\mu_1(x)h_1^3(x)|\varphi_1(x)|,\forall n$, q.t.p. em $supp(\varphi_1)$.

Desde que $\mu_1 u_{1n}^3\varphi_1$, $\mu_1 h_1^3|\varphi_1|\in L^1(supp(\varphi_1))$, segue pelo Teorema A.7 que

$$\int_{supp(\varphi_1)}\mu_1 u_{1n}^3\varphi_1\to\int_{supp(\varphi_1)}\mu_1 u_1^3\varphi_1. \tag{2.46}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}&\int_{supp(\varphi_2)}\mu_2 u_{2n}^3\varphi_2\to\int_{supp(\varphi_2)}\mu_2 u_2^3\varphi_2\\&\int_{supp(\varphi_2)}\beta u_{1n}^2 u_{2n}\varphi_2\to\int_{supp(\varphi_2)}\beta u_1^2 u_2\varphi_2\\&\int_{supp(\varphi_1)}\beta u_{1n}u_{2n}^2\varphi_1\to\int_{supp(\varphi_1)}\beta u_1 u_2^2\varphi_1.\end{aligned}\tag{2.47}$$

Por (2.46) e (2.47) obtemos que $\langle I'(\mathbf{u}_n),\varphi\rangle\to\langle I'(\mathbf{u}),\varphi\rangle$, $\forall\varphi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$. Desde que $I'(\mathbf{u}_n)\to 0$, segue que $\langle I'(\mathbf{u}),\varphi\rangle=0,\forall\varphi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$. Sendo $I'(\mathbf{u})\in\mathbb{E}^*$ e $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ denso em $H^1(\mathbb{R}^N)$, concluímos que $\langle I'(\mathbf{u}),\varphi\rangle=0,\forall\varphi\in\mathcal{H}$, isto é, $\mathbf{u}=(u_1,u_2)$ é um ponto crítico de I.

A fim de que $\mathbf{u}$ seja não-trivial, é necessário provar que $u_1\neq 0$, $u_2\neq 0$. Definamos $\mathbf{v}_n=\mathbf{u}_n-\mathbf{u}$. Tem-se então que

$$\begin{aligned}\|u_{1n}\|_1^2&=\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla v_{1n}|^2+V_1 v_{1n}^2+2\nabla v_{1n}\nabla u_1+2V_1 v_{1n}u_1+|\nabla u_1|^2+V_1 u_1^2)\\&=\|v_{1n}\|_1^2+\|u_1\|_1^2+2\int_{\mathbb{R}^N}(\nabla v_{1n}\nabla u_1+V_1 v_{1n}u_1).\end{aligned}\tag{2.48}$$

Note que, para cada u_1 fixado, pela desigualdade de Hölder, o funcional f_{u_1} dado por $f_{u_1}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla\varphi\nabla u_1 + V_1\varphi u_1$ é linear e contínuo em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Desde que $(u_{1n}, u_{2n}) \rightharpoonup (u_1, u_2)$ em $\mathcal{H}$, segue pelo item (i) da Proposição A.2 que

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla v_{1n}\nabla u_1 + V_1 v_{1n} u_1) = \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla(u_{1n} - u_1)\nabla u_1 + V_1(u_{1n} - u_1)u_1) \to 0. \tag{2.49}$$

Deste modo, por (2.48) e (2.49) inferimos que

$$\|u_{1n}\|_1^2 = \|v_{1n}\|_1^2 + \|u_1\|_1^2 + o(1). \tag{2.50}$$

Temos ainda que

$$\begin{aligned} \|v_{1n}\|_1^2 &= \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla v_{1n}|^2 + V_1 v_{1n}^2) = \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla v_{1n}|^2 + V_1 v_{1n}^2 + V_{1\infty} v_{1n}^2 - V_{1\infty} v_{1n}^2) \\ &= \|v_{1n}\|_{1\infty}^2 + \int_{\mathbb{R}^N} (V_1 - V_{1\infty}) v_{1n}^2, \end{aligned}$$

logo,

$$\|v_{1n}\|_1^2 = \|v_{1n}\|_{1\infty}^2 + o(1). \tag{2.51}$$

Em verdade, desde que $\{u_{1n}\}$ é limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$ segue pelo Corolário B.3 $\{u_{1n}\}$ é limitada em $L^4(\mathbb{R}^N)$. Isto implica que existe $C > 0$ tal que

$$\|v_{1n}\|_{L^4}^2 \leq C,$$

para todo n. Além disso, pela definição de $V_{1\infty}$, concebida pela hipótese (H1), dado $\varepsilon > 0$ existe $R > 0$ tal que

$$|x| > R \Rightarrow |V_1 - V_{1\infty}| < \frac{\varepsilon}{2C}. \tag{2.52}$$

Da convergência de $v_{1n} \to 0$ em $L^4_{loc}(\mathbb{R}^N)$, expressa em (2.45), tomemos $n_0 = n_0(B_R, \varepsilon)$ tal que

$$\int_{B_R} v_{1n}^4 < \frac{\varepsilon^2}{4\int_{B_R}(V_1 - V_{1\infty})^2}. \tag{2.53}$$

Deste modo, por (2.52) e (2.53) e pela desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} (V_1 - V_{1\infty}) v_{1n}^2 &= \int_{B_R} (V_1 - V_{1\infty}) v_{1n}^2 + \int_{\mathbb{R}\setminus\{B_R\}} (V_1 - V_{1\infty}) v_{1n}^2 \\ &< \left(\int_{B_R} (V_1 - V_{1\infty})^2\right)^{1/2} \left(\int_{B_R} v_{1n}^4\right)^{1/2} + \frac{\varepsilon}{2C} \int_{\mathbb{R}\setminus\{B_R\}} v_{1n} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&< \left(\int_{B_R}(V_1 - V_{1\infty})^2\right)^{1/2}\left(\frac{\varepsilon^2}{4\int_{B_R}(V_1 - V_{1\infty})^2}\right)^{1/2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon,
\end{aligned}
$$

quando $n > n_0$. Portanto, por (2.50) e (2.51) obtemos que

$$
\|u_{1n}\|_1^2 = \|v_{1n}\|_1^2 + \|u_1\|_1^2 + o(1) = \|v_{1n}\|_{1\infty}^2 + \|u_1\|_1^2 + o(1). \tag{2.54}
$$

Temos também, que

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N}(\mu_1 v_{1n}^4 + \beta v_{1n}^2 v_{2n}^2) = \; & \int_{\mathbb{R}^N} \mu_1(u_{1n}^4 - 4u_{1n}^3 u_1 + 6u_{1n}^2 u_1^2 - 4u_{1n}u_1^3 + u_1^4) \\
& + \int_{\mathbb{R}^N} \beta(u_{1n}^2 - 2u_{1n}u_1 + u_1^2)(u_{2n}^2 - 2u_{2n}u_2 + u_2^2) \\
= \; & \int_{\mathbb{R}^N} \mu_1(u_{1n}^4 - 4u_{1n}^3 u_1 + 6u_{1n}^2 u_1^2 - 4u_{1n}u_1^3 + u_1^4) \\
& + \int_{\mathbb{R}^N} \beta(u_{1n}^2 u_{2n}^2 - 2u_{1n}u_1 u_{2n}^2 + u_1^2 u_{2n}^2) \\
& + \int_{\mathbb{R}^N} \beta(-u_{1n}^2 2u_{2n}u_2 + 2u_{1n}u_1 2u_{2n}u_2 - u_1^2 2u_{2n}u_2) \\
& + \int_{\mathbb{R}^N} \beta(u_{1n}^2 u_2^2 - 2u_{1n}u_1 u_2^2 + u_1^2 u_2^2),
\end{aligned}
$$

logo,

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N}(\mu_1 v_{1n}^4 + \beta v_{1n}^2 v_{2n}^2) = \; & \int_{\mathbb{R}^N}(\mu_1 u_{1n}^4 + \beta u_{1n}^2 u_{2n}^2) + \int_{\mathbb{R}^N}(\mu_1 u_1^4 + \beta u_1^2 u_2^2) \\
& + \int_{\mathbb{R}^N}(-\mu_1 4u_{1n}^3 u_1 + \mu_1 6u_{1n}^2 u_1^2 - \mu_1 4u_{1n}u_1^3 - \beta 2u_{1n}u_1 u_{2n}^2) \\
& + \int_{\mathbb{R}^N} \beta(u_1^2 u_{2n}^2 - u_{1n}^2 2u_{2n}u_2 + 2u_{1n}u_1 2u_{2n}u_2 - u_1^2 2u_{2n}u_2) \\
& + \int_{\mathbb{R}^N} \beta(u_{1n}^2 u_2^2 - 2u_{1n}u_1 u_2^2) \\
= \; & \int_{\mathbb{R}^N}(\mu_1 u_{1n}^4 + \beta u_{1n}^2 u_{2n}^2) + \int_{\mathbb{R}^N}(\mu_1 u_1^4 + \beta u_1^2 u_2^2) \\
& + \int_{\mathbb{R}^N}(\mu_1 u_1^4 + \beta u_1^2 u_2^2) - \int_{\mathbb{R}^N}(\mu_1 u_1^4 + \beta u_1^2 u_2^2) \\
& + \int_{\mathbb{R}^N}(-\mu_1 4u_{1n}^3 u_1 + \mu_1 6u_{1n}^2 u_1^2 - \mu_1 4u_{1n}u_1^3 - \beta 2u_{1n}u_1 u_{2n}^2) \\
& + \int_{\mathbb{R}^N} \beta(u_1^2 u_{2n}^2 - u_{1n}^2 2u_{2n}u_2 + 2u_{1n}u_1 2u_{2n}u_2 - u_1^2 2u_{2n}u_2) \\
& + \int_{\mathbb{R}^N} \beta(u_{1n}^2 u_2^2 - 2u_{1n}u_1 u_2^2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= & \int_{\mathbb{R}^N} (\mu_1 u_{1n}^4 + \beta u_{1n}^2 u_{2n}^2) - \int_{\mathbb{R}^N} (\mu_1 u_1^4 + \beta u_1^2 u_2^2) \\
& + \int_{\mathbb{R}^N} (2\mu_1 u_1^4 + 2\beta u_1^2 u_2^2) \\
& + \int_{\mathbb{R}^N} (-\mu_1 4 u_{1n}^3 u_1 + \mu_1 6 u_{1n}^2 u_1^2 - \mu_1 4 u_{1n} u_1^3 - \beta 2 u_{1n} u_1 u_{2n}^2) \\
& + \int_{\mathbb{R}^N} \beta (u_1^2 u_{2n}^2 - u_{1n}^2 2 u_{2n} u_2 + 2 u_{1n} u_1 2 u_{2n} u_2 - u_1^2 2 u_{2n} u_2) \\
& + \int_{\mathbb{R}^N} \beta (u_{1n}^2 u_2^2 - 2 u_{1n} u_1 u_2^2).
\end{aligned}
$$

Portanto, desde que por (2.45) temos $u_{1n} \to u_1$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$, segue pelo Teorema A.7 que

$$
\int_{\mathbb{R}^N} (\mu_1 u_{1n}^4 + \beta u_{1n}^2 u_{2n}^2) = \int_{\mathbb{R}^N} (\mu_1 v_{1n}^4 + \beta v_{1n}^2 v_{2n}^2) + \int_{\mathbb{R}^N} (\mu_1 u_1^4 + \beta u_1^2 u_2^2) + o(1). \tag{2.55}
$$

Além disso,

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} (\mu_1 v_{1n}^4 + \beta v_{1n}^2 v_{2n}^2) = & \int_{\mathbb{R}^N} (\mu_1 v_{1n}^4 + \beta v_{1n}^2 v_{2n}^2) + \int_{\mathbb{R}^N} (\mu_{1\infty} v_{1n}^4 + \beta_\infty v_{1n}^2 v_{2n}^2) \\
& - \int_{\mathbb{R}^N} (\mu_{1\infty} v_{1n}^4 + \beta_\infty v_{1n}^2 v_{2n}^2) \\
= & \int_{\mathbb{R}^N} (\mu_{1\infty} v_{1n}^4 + \beta_\infty v_{1n}^2 v_{2n}^2) \\
& + \int_{\mathbb{R}^N} [(\mu_1 - \mu_{1\infty}) v_{1n}^4 + (\beta - \beta_\infty) v_{1n}^2 v_{2n}^2].
\end{aligned} \tag{2.56}
$$

Com prova análoga a prova da convergência

$$
\int_{\mathbb{R}^N} (V_1 - V_{1\infty}) v_{1n}^2 \to 0,
$$

demonstra-se que

$$
\int_{\mathbb{R}^N} (\mu_1 - \mu_{1\infty}) v_{1n}^4 \to 0, \ \int_{\mathbb{R}^N} (\beta - \beta_\infty) v_{1n}^2 v_{2n}^2 \to 0. \tag{2.57}
$$

Substituindo (2.57) em (2.56) obtemos

$$
\int_{\mathbb{R}^N} (\mu_1 v_{1n}^4 + \beta v_{1n}^2 v_{2n}^2) = \int_{\mathbb{R}^N} (\mu_{1\infty} v_{1n}^4 + \beta_\infty v_{1n}^2 v_{2n}^2) + o(1). \tag{2.58}
$$

Substituindo (2.58) em (2.55) obtemos

$$
\int_{\mathbb{R}^N} (\mu_1 u_{1n}^4 + \beta u_{1n}^2 u_{2n}^2) = \int_{\mathbb{R}^N} (\mu_{1\infty} v_{1n}^4 + \beta_\infty v_{1n}^2 v_{2n}^2) + \int_{\mathbb{R}^N} (\mu_1 u_1^4 + \beta u_1^2 u_2^2) + o(1). \tag{2.59}
$$

Do fato de que $\mathbf{u}_n \in \tilde{\mathcal{N}}$, decorre que $\langle I'(\mathbf{u}_n), (u_{1n}, 0)\rangle = 0$, ou seja,

$$\langle I'(\mathbf{u}_n), (u_{1n}, 0)\rangle = \|u_{1n}\|_1^2 - \int_{\mathbb{R}^N} (\mu_1 u_{1n}^4 + \beta u_{1n}^2 u_{2n}^2) = 0,$$

portanto,

$$\|u_{1n}\|_1^2 = \int_{\mathbb{R}^N} (\mu_1 u_{1n}^4 + \beta u_{1n}^2 u_{2n}^2). \tag{2.60}$$

Sendo $\mathbf{u}$ é um ponto crítico de I, temos que $\langle I'(\mathbf{u}), \varphi\rangle = 0, \forall \varphi \in \mathcal{H}$, em particular $\langle I'(\mathbf{u}), (u_1, 0)\rangle = 0$, ou seja,

$$\langle I'(\mathbf{u}), (u_1, 0)\rangle = \|u_1\|_1^2 - \int_{\mathbb{R}^N} \mu_1 u_1^4 + \beta u_1^2 u_2^2 = 0,$$

portanto,

$$\|u_1\|_1^2 = \int_{\mathbb{R}^N} \mu_1 u_1^4 + \beta u_1^2 u_2^2. \tag{2.61}$$

Substituindo (2.60) e (2.61) em (2.59) encontramos

$$\begin{aligned}
\|u_{1n}\|_1^2 &= \int_{\mathbb{R}^N} (\mu_{1\infty} v_{1n}^4 + \beta_\infty v_{1n}^2 v_{2n}^2) + \|u_1\|_1^2 + o(1) \\
\|u_{1n}\|_1^2 - \|u_1\|_1^2 &= \int_{\mathbb{R}^N} (\mu_{1\infty} v_{1n}^4 + \beta_\infty v_{1n}^2 v_{2n}^2) + o(1),
\end{aligned}$$

adicionando o fato expresso em (2.54) obtemos

$$\begin{aligned}
\|v_{1n}\|_{1\infty}^2 + o(1) &= \int_{\mathbb{R}^N} (\mu_{1\infty} v_{1n}^4 + \beta_\infty v_{1n}^2 v_{2n}^2) + o(1) \\
\|v_{1n}\|_{1\infty}^2 &= \int_{\mathbb{R}^N} (\mu_{1\infty} v_{1n}^4 + \beta_\infty v_{1n}^2 v_{2n}^2) + o(1).
\end{aligned} \tag{2.62}$$

De modo análogo demonstra-se que

$$\|v_{2n}\|_{2\infty}^2 = \int_{\mathbb{R}^N} (\mu_{2\infty} v_{2n}^4 + \beta_\infty v_{2n}^2 v_{1n}^2) + o(1). \tag{2.63}$$

Dado que $\mathbf{v}_n$ é limitada, as sequências de valores não-negativos $\int_{\mathbb{R}^N} \mu_{1\infty} v_{1n}^4$, $\int_{\mathbb{R}^N} \mu_{2\infty} v_{2n}^4$ e $\int_{\mathbb{R}^N} \beta_\infty v_{1n}^2 v_{2n}^2$ são também limitadas. De fato, do Corolário B.3, podemos considerar c_j a constante correspondente à imersão $(H^1(\mathbb{R}^N), \|\cdot\|_j) \hookrightarrow L^4(\mathbb{R}^N)$ com $j = 1, 2$, e então temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \mu_{1\infty} v_{1n}^4 \leq \mu_{1\infty} c_1^4 \|v_{1n}\|_1^4 \leq C_1,$$

para algum $C_1 > 0$. Analogamente,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \mu_{2\infty} v_{2n}^4 \leq C_2,$$

para algum $C_2 > 0$. Pela desigualdade de Hölder

$$\int_{\mathbb{R}^N} \beta_\infty v_{1n}^2 v_{2n}^2 \leq \beta_\infty \left(\int_{\mathbb{R}^N} v_{1n}^4\right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^N} v_{2n}^4\right)^{1/2} \leq \beta_\infty \left(c_1^4 \|v_{1n}\|_1^4\right)^{1/2} \left(c_4^4 \|v_{2n}\|_2^4\right)^{1/2} \leq \tilde{C},$$

para algum $\tilde{C} > 0$. Portanto, em virtude do *Teorema de Bolzano-Weierstrass*, para alguma subsequência devemos ter que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \mu_{1\infty} v_{1n}^4 \to \lambda_1, \int_{\mathbb{R}^N} \mu_{2\infty} v_{2n}^4 \to \lambda_3, \int_{\mathbb{R}^N} \beta_\infty v_{1n}^2 v_{2n}^2 \to \lambda_2, \tag{2.64}$$

quando $n \to +\infty$, em que $\lambda_j \geq 0,\ j = 1,2,3$. Deste modo, por (2.62) e (2.63), temos que

$$\|v_{1n}\|_{1\infty}^2 \to \lambda_1 + \lambda_2,\ \|v_{2n}\|_{2\infty}^2 \to \lambda_2 + \lambda_3, \tag{2.65}$$

quando $n \to +\infty$.
A fim de demonstrar que $u_1 \neq 0$, $u_2 \neq 0$ devemos provar que $\lambda_1 = 0$ ou $\lambda_3 = 0$, pois neste caso, por (2.64), teremos

$$\begin{aligned} \left|\int_{\mathbb{R}^N} \beta_\infty v_{1n}^2 v_{2n}^2\right| \leq & \ \beta_\infty \left(\int_{\mathbb{R}^N} v_{1n}^4\right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^N} v_{2n}^4\right)^{1/2} \\ = & \ \frac{\beta_\infty}{\mu_{1\infty}^{1/2} \mu_{2\infty}^{1/2}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \mu_{1\infty} v_{1n}^4\right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \mu_{2\infty} v_{2n}^4\right)^{1/2} \to 0, \end{aligned} \tag{2.66}$$

quando $n \to +\infty$. Isto é, $\lambda_2 = 0$. Considerando $\lambda_1 = 0$ por exemplo, sucede de (2.59) que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \beta u_{1n}^2 u_{2n}^2 - \int_{\mathbb{R}^N} \beta_\infty v_{1n}^2 v_{2n}^2 - \int_{\mathbb{R}^N} \beta u_1^2 u_2^2 = \int_{\mathbb{R}^N} \mu_1 u_1^4 - \int_{\mathbb{R}^N} \mu_1 u_{1n}^4 + \int_{\mathbb{R}^N} \mu_{1\infty} v_{1n}^4 + o(1),$$

equivalentemente,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \beta u_{1n}^2 u_{2n}^2 - \int_{\mathbb{R}^N} \beta_\infty v_{1n}^2 v_{2n}^2 - \int_{\mathbb{R}^N} \beta u_1^2 u_2^2 = \mu_1 \int_{\mathbb{R}^N} (u_1^4 - u_{1n}^4) + o(1). \tag{2.67}$$

Desde que por (2.65) temos $\|v_{1n}\|_{1\infty} \to 0$, segue, pelo Corolário B.3, que $\|v_{1n}\|_{L^4} \to 0$. Pela desigualdade triangular, segue que

$$0 \leq |\|u_{1n}\|_{L^4} - \|u_1\|_{L^4}| \leq \|u_{1n} - u_1\|_{L^4} \to 0,$$

ou seja, $\|u_{1n}\|_{L^4} \to \|u_1\|_{L^4}$, quando $n \to +\infty$.
Segue da continuidade de funções reais polinomiais que $\|u_{1n}\|_{L^4}^4 \to \|u_1\|_{L^4}^4$. Concluímos então que

$$\left|\mu_1 \int_{\mathbb{R}^N} (u_1^4 - u_{1n}^4)\right| \leq |\mu_1|_\infty \int_{\mathbb{R}^N} (u_1^4 - u_{1n}^4) = |\mu_1|_\infty \left(\|u_{1n}\|_{L^4}^4 - \|u_1\|_{L^4}^4\right) \to 0, \qquad (2.68)$$

quando $n \to +\infty$. Portanto, ao substituir (2.68) em (2.67) obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \beta u_{1n}^2 u_{2n}^2 - \int_{\mathbb{R}^N} \beta_\infty v_{1n}^2 v_{2n}^2 - \int_{\mathbb{R}^N} \beta u_1^2 u_2^2 = o(1),$$

logo, do fato de que $\lambda_2 = 0$ temos

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \beta u_{1n}^2 u_{2n}^2 - \int_{\mathbb{R}^N} \beta_\infty v_{1n}^2 v_{2n}^2 - \int_{\mathbb{R}^N} \beta u_1^2 u_2^2\right) &= 0 \\
\lim_{n\to+\infty} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \beta u_{1n}^2 u_{2n}^2 - \int_{\mathbb{R}^N} \beta_\infty v_{1n}^2 v_{2n}^2 - \int_{\mathbb{R}^N} \beta u_1^2 u_2^2\right) + \int_{\mathbb{R}^N} \beta u_1^2 u_2^2 &= \int_{\mathbb{R}^N} \beta u_1^2 u_2^2 \\
\lim_{n\to+\infty} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \beta u_{1n}^2 u_{2n}^2 - \int_{\mathbb{R}^N} \beta_\infty v_{1n}^2 v_{2n}^2\right) &= \int_{\mathbb{R}^N} \beta u_1^2 u_2^2 \\
\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \beta u_{1n}^2 u_{2n}^2 &= \int_{\mathbb{R}^N} \beta u_1^2 u_2^2.
\end{aligned}$$

Pela ocorrência de (H1) e (H5) e por $\{\mathbf{u}_n\}$ satisfazer (2.41), o Lema 2.3 nos garante que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \beta u_1^2 u_2^2 = \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \beta u_{1n}^2 u_{2n}^2 \geq \sigma,$$

isto implica que $u_1 \neq 0$ e $u_2 \neq 0$, e então $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \tilde{\mathcal{N}}$. Pela semi-continuidade inferior da norma (Proposição A.2, item (iii))

$$\tilde{c} \leq I(u_1, u_2) = \frac{\|\mathbf{u}\|^2}{4} \leq \lim_{n\to+\infty} \inf \frac{\|\mathbf{u}_n\|^2}{4} = \lim_{n\to+\infty} \inf I(u_{1n}, u_{2n}) = \lim_{n\to+\infty} I(u_{1n}, u_{2n}) = \tilde{c}, \qquad (2.69)$$

por conseguinte, $I(u_1, u_2) = \tilde{c}$, o que prova que $\mathbf{u}$ é uma solução do tipo ground state.

Provemos então, como proposto, que $\lambda_1 = 0$ ou $\lambda_3 = 0$; o façamos por cantradição.

Suponha que $\lambda_1 > 0$ e $\lambda_3 > 0$. Como verificado em (2.62) e (2.63)

$$\begin{aligned} \|v_{1n}\|_{1\infty}^2 &= \int_{\mathbb{R}^N} (\mu_{1\infty} v_{1n}^4 + \beta_\infty v_{1n}^2 v_{2n}^2) + o_1(1) \\ \|v_{2n}\|_{2\infty}^2 &= \int_{\mathbb{R}^N} (\mu_{2\infty} v_{2n}^4 + \beta_\infty v_{2n}^2 v_{1n}^2) + o_2(1). \end{aligned} \tag{2.70}$$

Definamos,

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{o_1(1)\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \mu_{2\infty} v_{2n}^4 - o_2(1)\int_{\mathbb{R}^N} \beta_\infty v_{1n}^2 v_{2n}^2}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \mu_{1\infty} v_{1n}^4 \int_{\mathbb{R}^N} \mu_{2\infty} v_{2n}^4 - \left(\int_{\mathbb{R}^N} \beta_\infty v_{1n}^2 v_{2n}^2\right)^2} + 1, \\ t_n &= \frac{o_2(1)\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \mu_{1\infty} v_{1n}^4 - o_1(1)\int_{\mathbb{R}^N} \beta_\infty v_{1n}^2 v_{2n}^2}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \mu_{1\infty} v_{1n}^4 \int_{\mathbb{R}^N} \mu_{2\infty} v_{2n}^4 - \left(\int_{\mathbb{R}^N} \beta_\infty v_{1n}^2 v_{2n}^2\right)^2} + 1. \end{aligned} \tag{2.71}$$

Note que $s_n,\ t_n$ estão bem-definidas. Em verdade, pela desigualdade de Hölder temos

$$\begin{aligned} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \beta_\infty v_{1n}^2 v_{2n}^2\right)^2 &\leq \beta_\infty^2 \int_{\mathbb{R}^N} v_{1n}^4 \int_{\mathbb{R}^N} v_{2n}^4 \\ &\leq \left|\frac{\beta}{\mu_1^{1/2}\mu_2^{1/2}}\right|_\infty^2 \int_{\mathbb{R}^N} \mu_{1\infty} v_{1n}^4 \int_{\mathbb{R}^N} \mu_{2\infty} v_{2n}^4 \\ &= \xi^2 \int_{\mathbb{R}^N} \mu_{1\infty} v_{1n}^4 \int_{\mathbb{R}^N} \mu_{2\infty} v_{2n}^4. \end{aligned}$$

Deste modo, desde que (H5) é válida, temos que $\xi < 1$, portanto

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} \beta_\infty v_{1n}^2 v_{2n}^2\right)^2 \leq \xi^2 \int_{\mathbb{R}^N} \mu_{1\infty} v_{1n}^4 \int_{\mathbb{R}^N} \mu_{2\infty} v_{2n}^4 < \int_{\mathbb{R}^N} \mu_{1\infty} v_{1n}^4 \int_{\mathbb{R}^N} \mu_{2\infty} v_{2n}^4, \tag{2.72}$$

ou seja, de fato s_n e t_n estão bem-definidas. Além disso, por (2.72) temos que

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \beta_\infty v_{1n}^2 v_{2n}^2\right)^2 &\leq \lim_{n\to+\infty} \xi^2 \int_{\mathbb{R}^N} \mu_{1\infty} v_{1n}^4 \int_{\mathbb{R}^N} \mu_{2\infty} v_{2n}^4 \\ &= \xi^2 \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \mu_{1\infty} v_{1n}^4 \int_{\mathbb{R}^N} \mu_{2\infty} v_{2n}^4, \end{aligned}$$

desde que $\xi < 1$, segue que

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \beta_\infty v_{1n}^2 v_{2n}^2\right)^2 < \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \mu_{1\infty} v_{1n}^4 \int_{\mathbb{R}^N} \mu_{2\infty} v_{2n}^4. \tag{2.73}$$

Por (2.64) e (2.73) decorre que $s_n, t_n \to 1$.
Temos então, por (2.70), que

$$
\begin{aligned}
s_n \int_{\mathbb{R}^N} \mu_{1\infty} v_{1n}^4 + t_n \int_{\mathbb{R}^N} \beta_\infty v_{1n}^2 v_{2n}^2 = {} & \frac{\left(o_1(1)\int_{\mathbb{R}^N} \mu_{2\infty} v_{2n}^4 - o_2(1)\int_{\mathbb{R}^N} \beta_\infty v_{1n}^2 v_{2n}^2\right)\int_{\mathbb{R}^N} \mu_{1\infty} v_{1n}^4}{\int_{\mathbb{R}^N} \mu_{1\infty} v_{1n}^4 \int_{\mathbb{R}^N} \mu_{2\infty} v_{2n}^4 - \left(\int_{\mathbb{R}^N} \beta_\infty v_{1n}^2 v_{2n}^2\right)^2} \\
& + \frac{\left(o_2(1)\int_{\mathbb{R}^N} \mu_{1\infty} v_{1n}^4 - o_1(1)\int_{\mathbb{R}^N} \beta_\infty v_{1n}^2 v_{2n}^2\right)\int_{\mathbb{R}^N} \beta_\infty v_{1n}^2 v_{2n}^2}{\int_{\mathbb{R}^N} \mu_{1\infty} v_{1n}^4 \int_{\mathbb{R}^N} \mu_{2\infty} v_{2n}^4 - \left(\int_{\mathbb{R}^N} \beta_\infty v_{1n}^2 v_{2n}^2\right)^2} \\
& + \int_{\mathbb{R}^N} \mu_{1\infty} v_{1n}^4 + \int_{\mathbb{R}^N} \beta_\infty v_{1n}^2 v_{2n}^2 \\
= {} & \frac{o_1(1)\left(\int_{\mathbb{R}^N} \mu_{2\infty} v_{2n}^4 \int_{\mathbb{R}^N} \mu_{1\infty} v_{1n}^4 - \int_{\mathbb{R}^N} \beta_\infty v_{1n}^2 v_{2n}^2 \int_{\mathbb{R}^N} \beta_\infty v_{1n}^2 v_{2n}^2\right)}{\int_{\mathbb{R}^N} \mu_{1\infty} v_{1n}^4 \int_{\mathbb{R}^N} \mu_{2\infty} v_{2n}^4 - \left(\int_{\mathbb{R}^N} \beta_\infty v_{1n}^2 v_{2n}^2\right)^2} \\
& + \int_{\mathbb{R}^N} \mu_{1\infty} v_{1n}^4 + \int_{\mathbb{R}^N} \beta_\infty v_{1n}^2 v_{2n}^2 \\
= {} & o_1(1) + \int_{\mathbb{R}^N} \mu_{1\infty} v_{1n}^4 + \int_{\mathbb{R}^N} \beta_\infty v_{1n}^2 v_{2n}^2 \\
= {} & \|v_{1n}\|_{1\infty}^2
\end{aligned}
\tag{2.74}
$$

e

$$
\begin{aligned}
s_n \int_{\mathbb{R}^N} \beta_\infty v_{1n}^2 v_{2n}^2 + t_n \int_{\mathbb{R}^N} \mu_{2\infty} v_{2n}^4 = {} & \frac{\left(o_1(1)\int_{\mathbb{R}^N} \mu_{2\infty} v_{2n}^4 - o_2(1)\int_{\mathbb{R}^N} \beta_\infty v_{1n}^2 v_{2n}^2\right)\int_{\mathbb{R}^N} \beta_\infty v_{1n}^2 v_{2n}^2}{\int_{\mathbb{R}^N} \mu_{1\infty} v_{1n}^4 \int_{\mathbb{R}^N} \mu_{2\infty} v_{2n}^4 - \left(\int_{\mathbb{R}^N} \beta_\infty v_{1n}^2 v_{2n}^2\right)} \\
& + \frac{\left(o_2(1)\int_{\mathbb{R}^N} \mu_{1\infty} v_{1n}^4 - o_1(1)\int_{\mathbb{R}^N} \beta_\infty v_{1n}^2 v_{2n}^2\right)\int_{\mathbb{R}^N} \mu_{2\infty} v_{2n}^4}{\int_{\mathbb{R}^N} \mu_{1\infty} v_{1n}^4 \int_{\mathbb{R}^N} \mu_{2\infty} v_{2n}^4 - \left(\int_{\mathbb{R}^N} \beta_\infty v_{1n}^2 v_{2n}^2\right)} \\
& + \int_{\mathbb{R}^N} \beta_\infty v_{1n}^2 v_{2n}^2 + \int_{\mathbb{R}^N} \mu_{2\infty} v_{2n}^4
\end{aligned}
\tag{2.75}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{o_2(1)\left(\int_{\mathbb{R}^N}\mu_{1\infty}v_{1n}^4\int_{\mathbb{R}^N}\mu_{2\infty}v_{2n}^4-\int_{\mathbb{R}^N}\beta_\infty v_{1n}^2v_{2n}^2\right)}{\int_{\mathbb{R}^N}\mu_{1\infty}v_{1n}^4\int_{\mathbb{R}^N}\mu_{2\infty}v_{2n}^4-\left(\int_{\mathbb{R}^N}\beta_\infty v_{1n}^2v_{2n}^2\right)} \\
&\quad +\int_{\mathbb{R}^N}\beta_\infty v_{1n}^2v_{2n}^2+\int_{\mathbb{R}^N}\mu_{2\infty}v_{2n}^4 \\
&= o_2(1)+\int_{\mathbb{R}^N}\beta_\infty v_{1n}^2v_{2n}^2+\int_{\mathbb{R}^N}\mu_{2\infty}v_{2n}^4 \\
&= \|v_{2n}\|_{2\infty}^2.
\end{aligned}
$$

Portanto, multiplicando (2.74) por s_n, (2.75) por t_n e somando os resultados, obtemos que

$$
\begin{cases}
s_n\|v_{1n}\|_{1\infty}^2 = s_n^2\int_{\mathbb{R}^N}\mu_{1\infty}v_{1n}^4+s_nt_n\int_{\mathbb{R}^N}\beta_\infty v_{1n}^2v_{2n}^2, \\
t_n\|v_{2n}\|_{2\infty}^2 = t_ns_n\int_{\mathbb{R}^N}\beta_\infty v_{1n}^2v_{2n}^2+t_n^2\int_{\mathbb{R}^N}\mu_{2\infty}v_{2n}^4.
\end{cases}
\tag{2.76}
$$

Por (2.76) inferimos que

$$
\begin{aligned}
\langle I'_\infty(\sqrt{s_n}v_{1n},\sqrt{t_n}v_{2n}),(\sqrt{s_n}v_{1n},0)\rangle &= s_n\|v_{1n}\|_{1\infty}^2 \\
&- s_n^2\int_{\mathbb{R}^N}\mu_{1\infty}v_{1n}^4-s_nt_n\int_{\mathbb{R}^N}\beta_\infty v_{1n}^2v_{2n}^2 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\langle I'_\infty(\sqrt{s_n}v_{1n},\sqrt{t_n}v_{2n}),(0,\sqrt{t_n}v_{2n})\rangle &= t_n\|v_{2n}\|_{2\infty}^2 \\
&- t_ns_n\int_{\mathbb{R}^N}\beta_\infty v_{1n}^2v_{2n}^2-t_n^2\int_{\mathbb{R}^N}\mu_{2\infty}v_{2n}^4 \\
&= 0,
\end{aligned}
$$

ou seja, $(\sqrt{s_n}v_{1n},\sqrt{t_n}v_{2n})$ pertence a $\tilde{\mathcal{N}}_\infty$.
Por (2.54) e (2.55) temos

$$
\begin{aligned}
\frac{\|u_{1n}\|_1^2}{2}-\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^N}(\mu_1u_{1n}^4+\beta u_{1n}^2u_{2n}^2) = {} & \frac{\|v_{1n}\|_1^2}{2}-\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^N}(\mu_1v_{1n}^4+\beta v_{1n}^2v_{2n}^2) \\
&+\frac{\|u_1\|_1^2}{2}-\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^N}(\mu_1u_1^4+\beta u_1^2u_2^2)+o(1),
\end{aligned}
\tag{2.77}
$$

e, analogamente,

$$\begin{aligned}\frac{\|u_{2n}\|_2^2}{2}-\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^N}(\mu_2u_{2n}^4+\beta u_{2n}^2u_{1n}^2) = \; & \frac{\|v_{2n}\|_2^2}{2}-\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^N}(\mu_2v_{2n}^4+\beta v_{2n}^2v_{1n}^2) \\ & +\frac{\|u_2\|_2^2}{2}-\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^N}(\mu_2u_2^4+\beta u_2^2u_1^2)+o(1).\end{aligned} \tag{2.78}$$

Somando (2.77) e (2.78) obtemos que

$$I(\mathbf{u}_n)=I(\mathbf{u})+I(\mathbf{v}_n)+o(1).$$

Desde que $\mathbf{u}$ é ponto crítico de I e então $I(\mathbf{u})=\dfrac{\|\mathbf{u}\|^2}{4}\geq 0$, segue que

$$I(\mathbf{u}_n)\geq I(\mathbf{v}_n)+o(1). \tag{2.79}$$

De fato, dado que $\mathbf{u}\in\tilde{\mathcal{N}}$ tem-se que $I(\mathbf{u})=\dfrac{\|\mathbf{u}\|^2}{4}$, logo $I(\mathbf{u})\geq 0$. Além disso, por (2.51) e (2.58) temos que

$$\|v_{1n}\|_1^2-\int_{\mathbb{R}^N}(\mu_1v_{1n}^4+\beta v_{1n}^2v_{2n}^2) = \|v_{1n}\|_{1\infty}^2-\int_{\mathbb{R}^N}(\mu_{1\infty}v_{1n}^4+\beta_\infty v_{1n}^2v_{2n}^2)+o(1), \tag{2.80}$$

e, analogamente,

$$\|v_{2n}\|_2^2-\int_{\mathbb{R}^N}(\mu_2v_{2n}^4+\beta v_{1n}^2v_{2n}^2) = \|v_{2n}\|_{2\infty}^2-\int_{\mathbb{R}^N}(\mu_{2\infty}v_{2n}^4+\beta_\infty v_{1n}^2v_{2n}^2)+o(1). \tag{2.81}$$

Somando (2.80) e (2.81) concluímos que

$$I(\mathbf{v}_n)=I_\infty(\mathbf{v}_n)+o(1). \tag{2.82}$$

Substituindo (2.82) em (2.79) obtemos

$$I(\mathbf{u}_n)\geq I_\infty(\mathbf{v}_n)+o(1). \tag{2.83}$$

Temos também que

$$\begin{aligned}I_\infty(\mathbf{v}_n) = \; & \frac{1}{2}\|\mathbf{v}_n\|_\infty^2-\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^N}(\mu_{1\infty}v_{1n}^4+2\beta_\infty u_{1n}^2u_{2n}^2+\mu_{2\infty}u_{2n}^4) \\ = \; & \frac{1}{2}\|\mathbf{v}_n\|_\infty^2-\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^N}(\mu_{1\infty}v_{1n}^4+2\beta_\infty u_{1n}^2u_{2n}^2+\mu_{2\infty}u_{2n}^4) \\ & +\frac{1}{2}(s_n\|v_{1n}\|_{1\infty}^2+t_n\|v_{2n}\|_{2\infty}^2)-\frac{1}{2}(s_n\|v_{1n}\|_{1\infty}^2+t_n\|v_{2n}\|_{2\infty}^2)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& +s_n^2\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^N}\mu_{1\infty}v_{1n}^4+s_nt_n\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^N}\beta_\infty v_{1n}^2v_{2n}^2-s_n^2\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^N}\mu_{1\infty}v_{1n}^4+s_nt_n\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^N}\beta_\infty v_{1n}^2v_{2n}^2\\
& +t_ns_n\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^N}\beta_\infty v_{1n}^2v_{2n}^2+t_n^2\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^N}\mu_{2\infty}v_{2n}^4-+t_ns_n\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^N}\beta_\infty v_{1n}^2v_{2n}^2+t_n^2\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^N}\mu_{2\infty}v_{2n}^4\\
= \;& \frac{1}{2}(s_n\|v_{1n}\|_{1\infty}^2+t_n\|v_{2n}\|_{2\infty}^2)-\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^N}(s_n^2\mu_{1\infty}v_{1n}^4-2s_nt_n\beta_\infty v_{1n}^2v_{2n}^2-t_n^2\mu_{2\infty}v_{2n}^4)\\
& +(s_n^2-1)\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^N}\mu_{1\infty}v_{1n}^4+(t_n^2-1)\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^N}\mu_{2\infty}v_{2n}^4\\
& +(s_nt_n-1)\int_{\mathbb{R}^N}(\mu_{1\infty}v_{1n}^4+2\beta_\infty u_{1n}^2u_{2n}^2+\mu_{2\infty}u_{2n}^4)\\
= \;& I_\infty(\sqrt{s_n}v_{1n},\sqrt{t_n}v_{2n})\\
& +(s_n^2-1)\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^N}\mu_{1\infty}v_{1n}^4+(t_n^2-1)\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^N}\mu_{2\infty}v_{2n}^4\\
& +(s_nt_n-1)\int_{\mathbb{R}^N}(\mu_{1\infty}v_{1n}^4+2\beta_\infty u_{1n}^2u_{2n}^2+\mu_{2\infty}u_{2n}^4),
\end{aligned}
$$

deste modo, segue por (2.64) e do fato de $s_n,t_n\to 1$ que

$$I_\infty(\mathbf{v}_n)=I_\infty(\sqrt{s_n}v_{1n},\sqrt{t_n}v_{2n})+o(1). \tag{2.84}$$

Por (2.83) e (2.84) e porque $(\sqrt{s_n}v_{1n},\sqrt{t_n}v_{2n})\in\tilde{\mathcal{N}}_\infty$ segue que

$$I(\mathbf{u}_n)\geq I_\infty(\sqrt{s_n}v_{1n},\sqrt{t_n}v_{2n})+o(1)\geq\tilde{c}_\infty+o(1). \tag{2.85}$$

Tomando o limite em (2.85)

$$\tilde{c}\geq\tilde{c}_\infty. \tag{2.86}$$

Supondo que a hipótese (H6) seja válida, considere $\mathbf{v}=(v_1,v_2)$ uma solução positiva do tipo ground state de (2.3) tal que $\mathbf{v}=(v_1,v_2)\in\tilde{\mathcal{N}}_\infty$ e $I(v_1,v_2)=\tilde{c}_\infty$. Seja $y\in\mathbb{R}^N$ e $j\in\{1,2\}$, denotemos por v_{jy} a função dado por $v_{jy}(x)=v_j(x-y)$.

Desde que $\mathbf{v}$ é ponto crítico de I_∞, segue que $\langle I_\infty'(v_1,v_2),(v_1,0)\rangle=0$, logo

$$\|v_1\|_{1\infty}^2=\int_{\mathbb{R}^N}(\mu_{1\infty}v_1^4+\beta_\infty v_1^2v_2^2).$$

Analogamente,

$$\|v_2\|_{2\infty}^2=\int_{\mathbb{R}^N}(\mu_{2\infty}v_2^4+\beta_\infty v_2^2v_1^2).$$

Para $|y|$ suficientemente grande, existem s_y,t_y bem próximos de 1 tais que

$$\|v_{1y}\|_1^2=s_y\int_{\mathbb{R}^N}\mu_1v_{1y}^4+t_y\int_{\mathbb{R}^N}\beta v_{1y}^2v_{2y}^2,\ \|v_{2y}\|_2^2=s_y\int_{\mathbb{R}^N}\beta v_{1y}^2v_{2y}^2+t_y\int_{\mathbb{R}^N}\mu_2v_{2y}^4.$$

Em verdade, é preciso demonstrar que

$$\|v_{1y}\|_1^2 = \int_{\mathbb{R}^N} \mu_1 v_{1y}^4 + \int_{\mathbb{R}^N} \beta v_{1y}^2 v_{2y}^2 + o(y),\ \|v_{2y}\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}^N} \beta v_{1y}^2 v_{2y}^2 + \int_{\mathbb{R}^N} \mu_2 v_{2y}^4 + o(y),$$

em que $o(y) \to 0$ quando $|y| \to +\infty$. Mostremos primeiro que

$$\|v_{1y}\|_1^2 - \|v_{1y}\|_{1\infty}^2 = o(y). \tag{2.87}$$

Por definição temos

$$\begin{aligned} \|v_{1y}\|_1^2 - \|v_{1y}\|_{1\infty}^2 &= \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla v_{1y}|^2 + V_1 v_{1y}^2) - \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla v_{1y}|^2 + V_{1\infty} v_{1y}^2) \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} (V_1 - V_{1\infty})\, v_{1y}^2. \end{aligned}$$

Dado $K \subset \mathbb{R}^N$ um subconjunto compacto,

$$\int_K v_{1y}^4 \to 0, \text{ quando } |y| \to +\infty. \tag{2.88}$$

De fato, como pelo Corolário B.3 temos $\int_{\mathbb{R}^N} v_1^4 < +\infty$, podemos definir a sequência $\chi_{B_n} v_1^4 \in L^4(\mathbb{R}^N)$, em que $B_n = \{x \in \mathbb{R}^N;\ |x| \leq n\}$. Dado que

$$\chi_{B_n} v_1^4 \to v_1^4 \text{ pontualmente em } \mathbb{R}^N \text{ e } |\chi_{B_n} v_1^4| \leq |v_1^4|,$$

segue, pelo Teorema da Convergência Dominada (Teorema A.7), que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \chi_{B_n} v_1^4 = \int_{B_n(0)} v_1^4 \to \int_{\mathbb{R}^N} v_1^4.$$

Sejam $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} v_1^4 - \int_{B_{n_0}(0)} v_1^4 \right| < \varepsilon,$$

K um compacto e $r > 0$ tal que $K \subset B_r(0)$.
Considere $y \in \mathbb{R}^N$ tal que $|y| > 2r + n_0$. Neste caso, temos que $B_r(y) \subset \mathbb{R}^N \backslash B_{n_0}(0)$, logo

$$\left| \int_K v_{1y}^4 \right| \leq \left| \int_{B_r(0)} v_{1y}^4 \right| = \left| \int_{B_r(y)} v_1^4 \right| \leq \left| \int_{\mathbb{R}^N \backslash B_{n_0}(0)} v_1^4 \right| = \left| \int_{\mathbb{R}^N} v_1^4 - \int_{B_{n_0}(0)} v_1^4 \right| < \varepsilon,$$

seguindo que a afirmação expressa em (2.88) é de fato verdadeira.

Por (2.88) e pela definição de $V_{1\infty}$ prova-se, com demonstração análoga à utilizada para provar (2.57), que

$$\int_{\mathbb{R}^N}(V_1 - V_{1\infty})v_{1y}^2,\ \int_{\mathbb{R}^N}(\mu_{1\infty}-\mu_1)v_{1y}^4,\ \int_{\mathbb{R}^N}(\beta_\infty-\beta)v_{1y}^2v_{2y}^2 \to 0 \tag{2.89}$$

quando $|y| \to +\infty$. Vemos então que (2.87) é válida.
Sendo $\mathbf{v} = (v_1, v_2) \in \tilde{\mathcal{N}}_\infty$ e $V_{j\infty}, \mu_{j\infty}$ e β_∞ contantes, tomando $F : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ dada por $F(x) = x - y$ no Teorema A.12 segue que

$$\|v_{1y}\|_{1\infty}^2 = \|v_1\|_{1\infty}^2 = \int_{\mathbb{R}^N}(\mu_{1\infty}v_1^4 + \beta_\infty v_1^2v_2^2) = \int_{\mathbb{R}^N}(\mu_{1\infty}v_{1y}^4 + \beta_\infty v_{1y}^2v_{2y}^2). \tag{2.90}$$

Deste modo

$$\begin{aligned}\|v_{1y}\|_{1\infty}^2 &= \int_{\mathbb{R}^N}(\mu_{1\infty}v_{1y}^4 + \beta_\infty v_{1y}^2v_{2y}^2) + \int_{\mathbb{R}^N}(\mu_1 v_{1y}^4 + \beta v_{1y}^2v_{2y}^2) - \int_{\mathbb{R}^N}(\mu_1 v_{1y}^4 + \beta v_{1y}^2v_{2y}^2)\\ &= \int_{\mathbb{R}^N}(\mu_1 v_{1y}^4 + \beta v_{1y}^2v_{2y}^2) + \int_{\mathbb{R}^N}((\mu_{1\infty}-\mu_1)v_{1y}^4 + (\beta_\infty-\beta)v_{1y}^2v_{2y}^2).\end{aligned}$$

Por (2.89)

$$\|v_{1y}\|_{1\infty}^2 = \int_{\mathbb{R}^N}(\mu_1 v_{1y}^4 + \beta v_{1y}^2v_{2y}^2) + o(y), \tag{2.91}$$

em que $o(y) \to 0$ quando $|y| \to +\infty$. Portanto, substituindo (2.91) em (2.87) concluímos que

$$\begin{aligned}\|v_{1y}\|_1^2 &= \int_{\mathbb{R}^N}(\mu_1 v_{1y}^4 + \beta v_{1y}^2v_{2y}^2) + o_1(y)\\ \|v_{2y}\|_2^2 &= \int_{\mathbb{R}^N}(\mu_2 v_{2y}^4 + \beta v_{2y}^2v_{1y}^2) + o_2(y).\end{aligned} \tag{2.92}$$

Definamos então, s_y, t_y dados por

$$\begin{aligned}s_y &= \frac{o_1(y)\int_{\mathbb{R}^N}\mu_2 v_{2y}^4 - o_2(y)\int_{\mathbb{R}^N}\beta v_{1y}^2v_{2y}^2}{\int_{\mathbb{R}^N}\mu_1 v_{1y}^4\int_{\mathbb{R}^N}\mu_2 v_{2y}^4 - \left(\int_{\mathbb{R}^N}\beta v_{1y}^2v_{2y}^2\right)^2} + 1,\\ t_y &= \frac{o_2(y)\int_{\mathbb{R}^N}\mu_1 v_{1y}^4 - o_1(y)\int_{\mathbb{R}^N}\beta v_{1y}^2v_{2y}^2}{\int_{\mathbb{R}^N}\mu_1 v_{1y}^4\int_{\mathbb{R}^N}\mu_2 v_{2y}^4 - \left(\int_{\mathbb{R}^N}\beta v_{1y}^2v_{2y}^2\right)^2} + 1.\end{aligned}$$

Temos que $s_y,\ t_y$ estão bem-definidas. Em verdade, pela desigualdade de Hölder temos

$$\begin{aligned}\left(\int_{\mathbb{R}^N}\beta v_{1y}^2v_{2y}^2\right)^2 &\leq \beta_\infty^2\int_{\mathbb{R}^N}v_{1y}^4\int_{\mathbb{R}^N}v_{2y}^4\\ &\leq \left|\frac{\beta}{\mu_1^{1/2}\mu_2^{1/2}}\right|_\infty^2\int_{\mathbb{R}^N}\mu_1v_{1y}^4\int_{\mathbb{R}^N}\mu_2v_{2y}^4\\ &= \xi^2\int_{\mathbb{R}^N}\mu_1v_{1y}^4\int_{\mathbb{R}^N}\mu_2v_{2y}^4.\end{aligned}$$

Deste modo, desde que (H5) é válida, temos que $\xi < 1$, seguindo que

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N}\beta v_{1y}^2v_{2y}^2\right)^2 \leq \xi^2\int_{\mathbb{R}^N}\mu_1v_{1y}^4\int_{\mathbb{R}^N}\mu_2v_{2y}^4 < \int_{\mathbb{R}^N}\mu_1v_{1y}^4\int_{\mathbb{R}^N}\mu_2v_{2y}^4, \tag{2.93}$$

isto é, de fato, s_y e t_y estão bem-definidas. Além disso, por (2.93) temos que

$$\begin{aligned}\lim_{|y|\to+\infty}\left(\int_{\mathbb{R}^N}\beta v_{1y}^2v_{2y}^2\right)^2 &\leq \lim_{|y|\to+\infty}\xi^2\int_{\mathbb{R}^N}\mu_1v_{1y}^4\int_{\mathbb{R}^N}\mu_2v_{2y}^4\\ &= \xi^2\lim_{|y|\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^N}\mu_1v_{1y}^4\int_{\mathbb{R}^N}\mu_2v_{2y}^4,\end{aligned}$$

desde que $\xi < 1$, segue que

$$\lim_{|y|\to+\infty}\left(\int_{\mathbb{R}^N}\beta v_{1y}^2v_{2y}^2\right)^2 < \lim_{|y|\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^N}\mu_1v_{1y}^4\int_{\mathbb{R}^N}\mu_2v_{2y}^4. \tag{2.94}$$

Portanto, por (2.94) decorre que $s_y,t_y \to 1$ quando $|y| \to +\infty$, desde que

$$\left|\int_{\mathbb{R}^N}\mu_iv_{iy}^4\right| \leq |\mu_i|_\infty\int_{\mathbb{R}^N}v_{iy}^4 \leq |\mu_i|_\infty\int_{\mathbb{R}^N}v_i^4 < +\infty.$$

Temos então, por (2.92), que

$$\begin{aligned}s_y\int_{\mathbb{R}^N}\mu_1v_{1y}^4+t_y\int_{\mathbb{R}^N}\beta v_{1y}^2v_{2y}^2 = &\frac{\left(o_1(y)\int_{\mathbb{R}^N}\mu_2v_{2y}^4-o_2(y)\int_{\mathbb{R}^N}\beta v_{1y}^2v_{2y}^2\right)\int_{\mathbb{R}^N}\mu_1v_{1y}^4}{\int_{\mathbb{R}^N}\mu_1v_{1y}^4\int_{\mathbb{R}^N}\mu_2v_{2y}^4-\left(\int_{\mathbb{R}^N}\beta v_{1y}^2v_{2y}^2\right)^2}\\ &+\frac{\left(o_2(y)\int_{\mathbb{R}^N}\mu_1v_{1y}^4-o_1(y)\int_{\mathbb{R}^N}\beta v_{1y}^2v_{2y}^2\right)\int_{\mathbb{R}^N}\beta v_{1y}^2v_{2y}^2}{\int_{\mathbb{R}^N}\mu_1v_{1y}^4\int_{\mathbb{R}^N}\mu_2v_{2y}^4-\left(\int_{\mathbb{R}^N}\beta v_{1y}^2v_{2y}^2\right)^2}\end{aligned} \tag{2.95}$$

$$
\begin{aligned}
& + \int_{\mathbb{R}^N} \mu_1 v_{1y}^4 + \int_{\mathbb{R}^N} \beta v_{1y}^2 v_{2y}^2 \\
= & \ \frac{o_1(y)\left(\int_{\mathbb{R}^N} \mu_2 v_{2y}^4 \int_{\mathbb{R}^N} \mu_1 v_{1y}^4 - \int_{\mathbb{R}^N} \beta v_{1y}^2 v_{2y}^2 \int_{\mathbb{R}^N} \beta v_{1y}^2 v_{2y}^2\right)}{\int_{\mathbb{R}^N} \mu_1 v_{1y}^4 \int_{\mathbb{R}^N} \mu_2 v_{2y}^4 - \left(\int_{\mathbb{R}^N} \beta v_{1y}^2 v_{2y}^2\right)^2} \\
& + \int_{\mathbb{R}^N} \mu_1 v_{1y}^4 + \int_{\mathbb{R}^N} \beta v_{1y}^2 v_{2y}^2 \\
= & \ o_1(y) + \int_{\mathbb{R}^N} \mu_1 v_{1y}^4 + \int_{\mathbb{R}^N} \beta v_{1y}^2 v_{2y}^2 \\
= & \ \|v_{1y}\|_1^2
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
s_y \int_{\mathbb{R}^N} \beta v_{1y}^2 v_{2y}^2 + t_y \int_{\mathbb{R}^N} \mu_2 v_{2y}^4 = & \ \frac{\left(o_1(1)\int_{\mathbb{R}^N} \mu_2 v_{2y}^4 - o_2(1)\int_{\mathbb{R}^N} \beta v_{1y}^2 v_{2y}^2\right)\int_{\mathbb{R}^N} \beta v_{1y}^2 v_{2y}^2}{\int_{\mathbb{R}^N} \mu_1 v_{1y}^4 \int_{\mathbb{R}^N} \mu_2 v_{2y}^4 - \left(\int_{\mathbb{R}^N} \beta v_{1y}^2 v_{2y}^2\right)} \\
& + \frac{\left(o_2(1)\int_{\mathbb{R}^N} \mu_1 v_{1y}^4 - o_1(1)\int_{\mathbb{R}^N} \beta v_{1y}^2 v_{2y}^2\right)\int_{\mathbb{R}^N} \mu_2 v_{2y}^4}{\int_{\mathbb{R}^N} \mu_1 v_{1y}^4 \int_{\mathbb{R}^N} \mu_2 v_{2y}^4 - \left(\int_{\mathbb{R}^N} \beta v_{1y}^2 v_{2y}^2\right)} \\
& + \int_{\mathbb{R}^N} \beta v_{1y}^2 v_{2y}^2 + \int_{\mathbb{R}^N} \mu_2 v_{2y}^4 \\
= & \ \frac{o_2(1)\left(\int_{\mathbb{R}^N} \mu_1 v_{1y}^4 \int_{\mathbb{R}^N} \mu_2 v_{2y}^4 - \int_{\mathbb{R}^N} \beta v_{1y}^2 v_{2y}^2\right)}{\int_{\mathbb{R}^N} \mu_1 v_{1y}^4 \int_{\mathbb{R}^N} \mu_2 v_{2y}^4 - \left(\int_{\mathbb{R}^N} \beta v_{1y}^2 v_{2y}^2\right)} \\
& + \int_{\mathbb{R}^N} \beta v_{1y}^2 v_{2y}^2 + \int_{\mathbb{R}^N} \mu_2 v_{2y}^4 \\
= & \ o_2(1) + \int_{\mathbb{R}^N} \beta v_{1y}^2 v_{2y}^2 + \int_{\mathbb{R}^N} \mu_2 v_{2y}^4 \\
= & \ \|v_{2y}\|_2^2.
\end{aligned}
\tag{2.96}
$$

Portanto, multiplicando (2.95) por s_y, (2.96) por t_y e somando os resultados, obtemos que

$$
\left\{
\begin{array}{l}
s_y\|v_{1y}\|_1^2 = s_y^2 \int_{\mathbb{R}^N} \mu_1 v_{1y}^4 + s_y t_y \int_{\mathbb{R}^N} \beta v_{1y}^2 v_{2y}^2, \\
t_y\|v_{2y}\|_2^2 = t_y s_y \int_{\mathbb{R}^N} \beta v_{1y}^2 v_{2y}^2 + t_y^2 \int_{\mathbb{R}^N} \mu_2 v_{2y}^4,
\end{array}
\right.
\tag{2.97}
$$

Por (2.97) inferimos que

$$\begin{aligned}\langle I'(\sqrt{s_y}v_{1y},\sqrt{t_y}v_{2y}),(\sqrt{s_y}v_{1y},\sqrt{t_y}v_{2y}))\rangle &= s_y\|v_{1y}\|_1^2\\ &- s_y^2\int_{\mathbb{R}^N}\mu_1 v_{1y}^4 - s_yt_y\int_{\mathbb{R}^N}\beta v_{1y}^2v_{2y}^2\\ &= 0\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\langle I'(\sqrt{s_y}v_{1y},\sqrt{t_y}v_{2y}),(\sqrt{s_y}v_{1y},\sqrt{t_y}v_{2y}))\rangle &= t_y\|v_{2y}\|_2^2\\ &- t_ys_y\int_{\mathbb{R}^N}\beta v_{1y}^2v_{2y}^2 - t_y^2\int_{\mathbb{R}^N}\mu_2 v_{2y}^4\\ &= 0,\end{aligned}$$

ou seja, $(\sqrt{s_y}v_{1y},\sqrt{t_y}v_{2y})$ pertence a $\tilde{\mathcal{N}}$.
Para facilitar os próximos cálculos introduzimos as seguintes notações

$$\begin{aligned} a_1 &:= \int_{\mathbb{R}^N}\mu_{1\infty}v_1^4, & \chi_1(y) &:= \int_{\mathbb{R}^N}\mu_1 v_{1y}^4,\\ a_2 &:= \int_{\mathbb{R}^N}\beta_\infty v_1^2v_2^2, & \chi_2(y) &:= \int_{\mathbb{R}^N}\beta v_{1y}^2v_{2y}^2,\\ a_3 &:= \int_{\mathbb{R}^N}\mu_{2\infty}v_2^4, & \chi_3(y) &:= \int_{\mathbb{R}^N}\mu_2 v_{2y}^4,\\ a_4 &:= \|v_1\|_{1\infty}^2, & \chi_4(y) &:= \|v_1\|_1^2,\\ a_5 &:= \|v_2\|_{2\infty}^2, & \chi_5(y) &:= \|v_2\|_1^2,\end{aligned} \tag{2.98}$$

e definimos

$$\begin{aligned}&\psi_1(y) := \chi_1(y)-a_1,\quad \psi_2(y) := \chi_2(y)-a_2\\ &\psi_3(y) := \chi_3(y)-a_3,\quad \psi_4(y) := \chi_4(y)-a_4,\quad \psi_5(y) := \chi_5(y)-a_5.\end{aligned}$$

Por (H1) e (H3) temos que

$$\psi_1(y)\ge 0,\psi_2(y)\ge 0,\psi_3(y)\ge 0,\psi_4(y)\le 0,\psi_5(y)\le 0. \tag{2.99}$$

e

$$\psi_1(y)\to 0,\psi_2(y)\to 0,\psi_3(y)\to 0,\psi_4(y)\to 0,\psi_5(y)\to 0, \tag{2.100}$$

quando $|y|\to+\infty$. Em verdade, considere por exemplo o fato de que $\mu_{1\infty}$ é constante. Decorre do Teorema A.12 que

$$\int_{\mathbb{R}^N}\mu_{1\infty}v_1^4 = \int_{\mathbb{R}^N}\mu_{1\infty}v_{1y}^4,$$

segue, por (H1), que

$$\psi_1(y) = \chi_1(y) - a_1 = \int_{\mathbb{R}^N} \mu_1 v_{1y}^4 - \int_{\mathbb{R}^N} \mu_{1\infty} v_{1y}^4 = \int_{\mathbb{R}^N} (\mu_1 - \mu_{1\infty}) v_{1y}^4 \geq 0.$$

Além disto, por (2.89)

$$\psi_1(y) = \int_{\mathbb{R}^N} (\mu_1 - \mu_{1\infty}) v_{1y}^4 \to 0.$$

Se existir $y \in \mathbb{R}^N$ para o qual tenhamos igualdade em todos os casos em (2.99), obtemos então que

$$V_j(x) = V_\infty,\ \mu_j(x) = \mu_{j\infty} \text{ e } \beta(x) = \beta_\infty, \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

De fato, se por exemplo tivermos $\psi_1(y) = 0$ para algum $y \in \mathbb{R}^N$ então, por (H1) temos

$$\psi_1(y) = \chi_1(y) - a_1 = \int_{\mathbb{R}^N} \mu_1 v_{1y}^4 - \int_{\mathbb{R}^N} \mu_{1\infty} v_{1y}^4 = \int_{\mathbb{R}^N} (\mu_1 - \mu_{1\infty}) v_{1y}^4 = 0.$$

Dado que $0 \leq (\mu_1 - \mu_{1\infty})$, e que $v_{1y} > 0$, porque (v_1, v_2) positiva, então $\mu_1 = \mu_{1\infty}$. Sucede que o sistema dado em (2.1) coincide com o sistema dado em (2.3), logo $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ é uma solução ground state de (2.1).

Suponha que para todo $y \in \mathbb{R}^N$ há ao menos uma desigualdade estrita em (2.99). Usando a notação introduzida em (2.98) temos

$$\tilde{c}_\infty = I_\infty(v_1, v_2) = \frac{1}{4}\|\mathbf{v}\|_\infty^2 = \frac{1}{4}(a_1 + 2a_2 + a_3), \tag{2.101}$$

considerando que $(\sqrt{s_y} v_{1y}, \sqrt{t_y} v_{2y}) \in \tilde{\mathcal{N}} \subset \mathcal{N}$, pela definição de $\tilde{c}$ temos

$$\tilde{c} \leq I(\sqrt{s_y} v_{1y}, \sqrt{t_y} v_{2y}) = \frac{1}{4}\|(\sqrt{s_y} v_{1y}, \sqrt{t_y} v_{2y})\|^2 = \frac{1}{4}(s_y \chi_4(y) + t_y \chi_5(y)). \tag{2.102}$$

Pelo fato de $\langle I'(\sqrt{s_y} v_{1y}, \sqrt{t_y} v_{2y}), (\sqrt{s_y} v_{1y}, 0)\rangle = 0$ e $\langle I'(\sqrt{s_y} v_{1y}, \sqrt{t_y} v_{2y}), (0, \sqrt{t_y} v_{2y})\rangle = 0$ temos que

$$\begin{cases} \chi_4(y) = s_y \chi_1(y) + t_y \chi_2(y) \\ \chi_5(y) = s_y \chi_2(y) + t_y \chi_3(y). \end{cases} \tag{2.103}$$

Note que

$$\begin{aligned} \chi_2^2(y) = \left(\int_{\mathbb{R}^N} \beta v_{1y}^2 v_{2y}^2\right)^{1/2} &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{\beta(\mu_1\mu_2)^{1/2}}{(\mu_1\mu_2)^{1/2}} v_{1y}^2 v_{2y}^2\right)^{1/2} \\ &\leq \xi^2 \left(\int_{\mathbb{R}^N} \mu_1 v_{1y}^4\right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \mu_2 v_{2y}^4\right)^{1/2}, \end{aligned}$$

logo, $0 < \chi_1(y)\chi_3(y)(1-\xi^2) \leq \chi_1(y)\chi_3(y) - \chi_2^2(y)$. Deste modo, podemos então resolver o sistema (2.103) nas variáveis s_y, t_y, e assim encontramos

$$s_y = \frac{\chi_4(y)\chi_3(y) - \chi_5(y)\chi_2(y)}{\chi_1(y)\chi_3(y) - \chi_2^2(y)}, \; t_y = \frac{\chi_5(y)\chi_1(y) - \chi_4(y)\chi_2(y)}{\chi_1(y)\chi_3(y) - \chi_2^2(y)}. \tag{2.104}$$

Substituindo s_y e t_y, como identificados em (2.104), em (2.102), obtemos

$$\begin{aligned} \tilde{c} &\leq \frac{1}{4}\left[\frac{(\chi_4(y)\chi_3(y) - \chi_5(y)\chi_2(y))\chi_4(y) + (\chi_5(y)\chi_1(y) - \chi_4(y)\chi_2(y))\chi_5(y)}{\chi_1(y)\chi_3(y) - \chi_2^2(y)}\right] \\ &= \frac{\chi_1(y)\chi_5^2(y) + \chi_3(y)\chi_4^2(u) - 2\chi_2(y)\chi_4(y)\chi_5(y)}{4(\chi_1(y)\chi_3(y) - \chi_2^2(y))}. \end{aligned} \tag{2.105}$$

Subtraindo (2.105) de (2.101) obtemos

$$\begin{aligned} \tilde{c}_\infty - \tilde{c} &\geq \frac{1}{4}\left[(a_1 + 2a_2 + a_3) - \frac{\chi_1(y)\chi_5^2(y) + \chi_3(y)\chi_4^2(u) - 2\chi_2(y)\chi_4(y)\chi_5(y)}{4(\chi_1(y)\chi_3(y) - \chi_2^2(y))}\right] \\ &= \frac{A}{4(\chi_1(y)\chi_3(y) - \chi_2^2(y))}, \end{aligned} \tag{2.106}$$

em que

$$\begin{aligned} A &= (a_1 + 2a_2 + a_3)((a_1 + \psi_1(y))(a_3 + \psi_3(y)) - (a_2 + \psi_2(y))^2) \\ &\quad -(a_1 + \psi_1(y))(a_5 + \psi_5(y))^2 - (a_3 + \psi_3(y))(a_4 + \psi_4(y))^2 \\ &\quad +2(a_2 + \psi_2(y))(a_4 + \psi_4(y))(a_5 + \psi_5(y)). \end{aligned}$$

Expandindo A e através do fato de $a_4 = a_1 + a_2$ e $a_5 = a_2 + a_3$, obtemos

$$\begin{aligned} A &= (a_1 a_3 - a_2^2)(\psi_1(y) + 2\psi_2(y) + \psi_3(y) - 2\psi_4(y) - 2\psi_5(y)) \\ &\quad -(a_1 + 2a_2 + a_3)\psi_2^2(y) - a_1\psi_5^2(y) - a_3\psi_4^2(y) + (a_1 + 2a_2 + a_3)\psi_1(y)\psi_3(y) \\ &\quad +2a_2\psi_4(y)\psi_5(y) + 2a_4\psi_2(y)\psi_5(y) - 2a_4\psi_3(y)\psi_4(y) - 2a_5\psi_1(y)\psi_5(y) \\ &\quad +2a_5\psi_2(y)\psi_4(y) - \psi_1(y)\psi_5^2(y) - \psi_3(y)\psi_4^2(y) + 2\psi_2(y)\psi_4(y)\psi_5(y). \end{aligned}$$

Considerando que ao menos uma das desigualdades em (2.99) é estrita, então

$$(\psi_1(y) + 2\psi_2(y) + \psi_3(y) - 2\psi_4(y) - 2\psi_5(y)) > 0. \tag{2.107}$$

Isto implica que

$$\begin{aligned}\frac{A}{\psi_1(y)+2\psi_2(y)+\psi_3(y)-2\psi_4(y)-2\psi_5(y)} &= (a_1a_3-a_2^2)\\ &\quad-\frac{(a_1+2a_2+a_3)\psi_2^2(y)-a_1\psi_5^2(y)-a_3\psi_4^2(y)+(a_1+2a_2+a_3)\psi_1(y)\psi_3(y)}{\psi_1(y)+2\psi_2(y)+\psi_3(y)-2\psi_4(y)-2\psi_5(y)}\\ &\quad+\frac{2a_2\psi_4(y)\psi_5(y)+2a_4\psi_2(y)\psi_5(y)-2a_4\psi_3(y)\psi_4(y)-2a_5\psi_1(y)\psi_5(y)}{\psi_1(y)+2\psi_2(y)+\psi_3(y)-2\psi_4(y)-2\psi_5(y)}\\ &\quad+\frac{2a_5\psi_2(y)\psi_4(y)-\psi_1(y)\psi_5^2(y)-\psi_3(y)\psi_4^2(y)+2\psi_2(y)\psi_4(y)\psi_5(y)}{\psi_1(y)+2\psi_2(y)+\psi_3(y)-2\psi_4(y)-2\psi_5(y)}.\end{aligned}$$

Deste modo,

$$\frac{A}{\psi_1(y)+2\psi_2(y)+\psi_3(y)-2\psi_4(y)-2\psi_5(y)} = (a_1a_3-a_2^2)-\varepsilon(|y|), \tag{2.108}$$

em que $\varepsilon(|y|)\to 0$ quando $|y|\to+\infty$. Além disto,

$$a_2^2=\left(\int_{\mathbb{R}^N}\beta_\infty v_1^2v_2^2\right)^{1/2}\leq \xi^2\left(\int_{\mathbb{R}^N}\mu_{1\infty}v_1^4\right)^{1/2}\left(\int_{\mathbb{R}^N}\mu_{2\infty}v_2^4\right)^{1/2},$$

sendo $0\leq\xi<1$, pela hipótese (H5), vemos que

$$(a_1a_3-a_2^2)\geq(1-\xi^2)a_1a_3>0. \tag{2.109}$$

Por (2.108) e (2.109) temos, para $|y|$ suficientemente grande, que

$$\frac{A}{\psi_1(y)+2\psi_2(y)+\psi_3(y)-2\psi_4(y)-2\psi_5(y)} = (a_1a_3-a_2^2)-\varepsilon(|y|)>0$$

e por (2.107) concluímos que $A>0$.
Temos também que

$$\begin{aligned}\chi_2^2(y)=\left(\int_{\mathbb{R}^N}\beta v_{1y}^2v_{2y}^2\right)^{1/2} &\leq\left(\int_{\mathbb{R}^N}\frac{\beta(\mu_1\mu_2)^{1/2}}{(\mu_1\mu_2)^{1/2}}v_{1y}^2v_{2y}^2\right)^{1/2}\\ &\leq\xi^2\left(\int_{\mathbb{R}^N}\mu_1v_{1y}^4\right)^{1/2}\left(\int_{\mathbb{R}^N}\mu_2v_{2y}^4\right)^{1/2}\\ \Rightarrow\qquad 0<\chi_1(y)\chi_3(y)(1-\xi^2) &\leq\chi_1(y)\chi_3(y)-\chi_2^2(y).\end{aligned}$$

Sendo assim, dado que $A>0$ e que $0<\chi_1(y)\chi_3(y)-\chi_2^2(y)$, temos por (2.106) que

$$\tilde{c}_\infty - \tilde{c} > 0 \Rightarrow \tilde{c}_\infty > \tilde{c},$$

o que contradiz (2.86). Com isso, concluímos que λ_1 e λ_3 não podem ser positivos simultaneamente (hipótese de contradição).
Segue, por argumentação realizada após (2.66) com desfecho em (2.69), que $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ é uma solução do tipo ground state de (2.1). Reescrevendo, se necessário, $\mathbf{u} = (|u_1|, |u_2|)$, aplicando o Lema 1.6 atestamos que $u_1, u_2 > 0$. Por tudo isto, $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ é uma solução ground state positiva de (2.1). □

É um fato que λ_1 e λ_3 devem ser ambos iguais a zero. Em verdade, suponha por exemplo que $\lambda_1 = 0$, então, assim como verificado em (2.66), temos que $\lambda_2 = 0$. Além disso, temos, pela definição de $\mathbf{v}_n$ e por (2.51) e (2.65), que

$$\lim_{n\to\infty} \|u_{1n} - u_1\|_1^2 = \lim_{n\to\infty} \|v_{1n}\|_1^2 = \lim_{n\to\infty} \|v_{1n}\|_{1\infty}^2 = \lambda_1 + \lambda_2 = 0. \tag{2.110}$$

Por (2.69) vemos que

$$\lim_{n\to\infty} (\|u_{1n}\|_1^2 + \|u_{2n}\|_2^2) = \|u_1\|_1^2 + \|u_2\|_2^2. \tag{2.111}$$

Por (2.110) e (2.111) temos

$$\lim_{n\to\infty} \|u_{2n}\|_2^2 = \lim_{n\to\infty} (\|u_{1n}\|_1^2 + \|u_{2n}\|_2^2) - \lim_{n\to\infty} \|u_{1n}\|_1^2 = \|u_2\|_2^2. \tag{2.112}$$

Decorre, do fato de que $\lambda_2 = 0$, por (2.65) e (2.51) e pela definição de $\mathbf{v}_n$ que

$$\lambda_3 = \lim_{n\to\infty} \|v_{2n}\|_{2\infty}^2 = \lim_{n\to\infty} \|v_{2n}\|_2^2 = \lim_{n\to\infty} \|u_{2n} - u_2\|_2^2. \tag{2.113}$$

Do fato de que $u_{2n} \rightharpoonup u_2$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$, como visto em (2.45), pelo item (i) da Proposição A.2 e por (2.112) temos que

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \|u_{2n} - u_2\|_2^2 = & \lim_{n\to\infty} \|u_{2n}\|_2^2 - 2\langle u_2, u_{2n}\rangle_2 + \|u_2\|_2^2 \\ = & \|u_2\|_2^2 - 2\langle u_2, u_2\rangle_2 + \|u_2\|_2^2 = 0. \end{aligned} \tag{2.114}$$

Portanto, por (2.113) e (2.114) temos que $\lambda_3 = 0$.

Teorema 2.2. Se (H2), (H4) e (H5) ocorrem, então (2.1) possui uma solução positiva do tipo ground state.

Demonstração. Esta demonstração é composta em boa parte pela demonstração do Teorema 2.1. Na verdade, a obtenção de uma solução ground state $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$, no Teorema 2.1, foi devida aos lemas desta seção, cujas as hipótese são satisfeitas pelas hipóteses que agora assumimos. A fim de demonstrar que $u_1 \neq 0$ e $u_2 \neq 0$, devemos utilizar nova estratégia, pois a prova deste fato no Teorema 2.1 utilizou fortemente as hipóteses (H1) e (H3). Para cumprir esta tarefa, mostraremos que

$$\limsup_{n\to+\infty} \sup_{y\in\mathbb{R}^N} \int_{B_r(y)} \beta u_{1n}^2 u_{2n}^2 > 0, \tag{2.115}$$

para $r > 0$. Novamente, faremos esta prova por contradição.
Suponha que a tese em questão não ocorra, ou seja, dado $r > 0$

$$\limsup_{m\to+\infty} \sup_{y\in\mathbb{R}^N} \int_{B_r(y)} \beta u_{1n}^2 u_{2n}^2 = 0.$$

Pela desigualdade de Hölder, tem-se que

$$\begin{aligned}
\int_{B_r(y)} \beta |u_{1n}u_{2n}|^{7/3} &= \int_{B_r(y)} \beta^{1/3} (\beta^{1/2}|u_{1n}u_{2n}|)^{4/3} |u_{1n}u_{2n}| \\
&\leq |\beta^{1/3}|_\infty \left(\int_{B_r(y)} u_{1n}^2 u_{2n}^2 \right)^{2/3} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u_{1n}u_{2n}|^3 \right)^{1/3} \\
&\leq |\beta|_\infty^{1/3} \left(\int_{B_r(y)} u_{1n}^2 u_{2n}^2 \right)^{2/3} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u_{1n}|^6 \right)^{1/6} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u_{2n}|^6 \right)^{1/6}.
\end{aligned}$$

Note que sendo a e b reais temos que $(a-b)^2 \geq 0$, isto implica que $a.b \leq \dfrac{a^2+b^2}{2}$, logo

$$\int_{B_r(y)} \beta |u_{1n}u_{2n}|^{7/3} \leq \frac{|\beta|_\infty^{1/3}}{2} \left(\int_{B_r(y)} \beta u_{1n}^2 u_{2n}^2 \right)^{2/3} \left[\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u_{1n}|^6 \right)^{2/6} + \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u_{2n}|^6 \right)^{2/6} \right].$$

O Corolário B.3 nos garante a existência de uma constante $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
\int_{B_r(y)} \beta |u_{1n}u_{2n}|^{7/3} &\leq C \left(\int_{B_r(y)} \beta u_{1n}^2 u_{2n}^2 \right)^{2/3} \left(\|u_{1n}\|_1^2 + \|u_{2n}\|_1^2 \right) \\
&\leq C \left(\sup_{y\in\mathbb{R}^N} \int_{B_r(y)} \beta u_{1n}^2 u_{2n}^2 \right)^{2/3} \|\mathbf{u}_n\|^2.
\end{aligned}$$

Dado que $\{\mathbf{u}_n\} \subset \tilde{\mathcal{N}}$ é uma sequência limitada (fato constatado logo após (2.34)), segue que existe $\tilde{C} > 0$ tal que

$$\int_{B_r(y)} \beta |u_{1n}u_{2n}|^{7/3} \leq \tilde{C} \left(\sup_{y\in\mathbb{R}^N} \int_{B_r(y)} \beta u_{1n}^2 u_{2n}^2 \right)^{2/3}. \tag{2.116}$$

Tomando o $\limsup$ em (2.116), por (H4) $\beta \geq 0$, e pela hipótese de contradição temos

$$\int_{B_r(y)} \beta |u_{1n}u_{2n}|^{7/3} \to 0 \tag{2.117}$$

quando $n \to +\infty$. Desde que (2.117) é válida para todo $r > 0$, segue que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \beta |u_{1n}u_{2n}|^{7/3} = 0. \tag{2.118}$$

Deste modo, pela desigualdade de Hölder

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \beta u_{1n}^2 u_{2n}^2 &= \int_{\mathbb{R}^N} \beta |u_{1n}u_{2n}||u_{1n}u_{2n}| \\ &\leq |\beta^{4/7}|_\infty \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u_{1n}u_{2n}|^{7/4} \right)^{4/7} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \beta |u_{1n}u_{2n}|^{7/3} \right)^{3/7} \\ &\leq |\beta^{4/7}|_\infty \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u_{1n}|^{7/2} \right)^{4/14} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u_{2n}|^{7/2} \right)^{4/14} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \beta |u_{1n}u_{2n}|^{7/3} \right)^{3/7}. \end{aligned}$$

Pelo Corolário B.3 e pela limitação de $\{\mathbf{u}_n\}$ temos que exite $\overline{C} > 0$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \beta u_{1n}^2 u_{2n}^2 \leq \overline{C} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \beta |u_{1n}u_{2n}|^{7/3} \right)^{3/7}. \tag{2.119}$$

Logo, por (2.118), (2.119) e (H4) temos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \beta u_{1n}^2 u_{2n}^2 \to 0. \tag{2.120}$$

Porém isto contradiz o Lema 2.3. Deste modo, ocorre o afirmado em (2.115). Neste caso, dado $r > 0$, pela definição de $\limsup$, existe uma subsequência $\{\mathbf{u}_n\}$ tal que

$$\sup_{y\in\mathbb{R}^N} \int_{B_r(y)} \beta u_{1n}^2 u_{2n}^2 > \delta, \ \forall n,$$

para algum $\delta > 0$. Temos também, pela definição de supremo, que para cara $n \in \mathbb{N}$ existe y_n tal que

$$\delta < \int_{B_r(y_n)} \beta u_{1n}^2 u_{2n}^2 \leq \sup_{y\in\mathbb{R}^N} \int_{B_r(y)} \beta u_{1n}^2 u_{2n}^2.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, y_n está contido num bloco B_n cujos vértices pertencem a $\tau_1\mathbb{Z} \times ... \times \tau_N\mathbb{Z}$. Seja $x_n \in \tau_1\mathbb{Z} \times ... \times \tau_N\mathbb{Z}$ o vértice de B_n mais próximo de y_n. Considere $R = \sup_n |y_n - x_n| + r$. Temos então que $B_r(y_n) \subset B_R(x_n)$, logo

$$\delta < \int_{B_r(y_n)} \beta u_{1n}^2 u_{2n}^2 \leq \int_{B_R(x_n)} \beta u_{1n}^2 u_{2n}^2, \ \forall n. \tag{2.121}$$

Dado que $x_n \in \tau_1\mathbb{Z} \times ... \times \tau_N\mathbb{Z}$, podemos redefinir $\{\mathbf{u}_n\}$ como $\{(u_{1n}(. + x_n), u_{2n}(. + x_n))\}$, desde que por (H2) e (H4) e pela Proposição B.2 e pelo Teorema A.12 temos que

$$I(u_{1n}, u_{2n}) = I(u_{1n}(. + x_n), u_{2n}(. + x_n)) \text{ e } I'((u_{1n}, u_{2n})) = I'(u_{1n}(. + x_n), u_{2n}(. + x_n)).$$

Segue por (2.121), (H4) e pelo Teorema A.12 que

$$\delta < \int_{B_R(x_n)} \beta u_{1n}^2 u_{2n}^2 = \int_{B_R(0)} \beta(. + x_n) u_{1n}^2(. + x_n) u_{2n}^2(. + x_n) = \int_{B_R(0)} \beta u_{1n}^2(. + x_n) u_{2n}^2(. + x_n)$$

Portanto, pela desigualdade de Hölder

$$\delta < \int_{B_r(0)} \beta u_{1n}^2 u_{2n}^2 \leq |\beta|_\infty \left(\int_{B_r(0)} u_{1n}^4 \right)^{1/2} \left(\int_{B_r(0)} u_{2n}^4 \right)^{1/2},$$

desde que por (2.45) $\mathbf{u}_n \to \mathbf{u}$ em $L^4_{loc}(\mathbb{R}^N)$, temos que

$$0 < \delta \leq \lim_{n \to +\infty} \left(\int_{B_r(0)} u_{1n}^4 \right)^{1/2} \left(\int_{B_r(0)} u_{2n}^4 \right)^{1/2} = \left(\int_{B_r(0)} u_1^4 \right)^{1/2} \left(\int_{B_r(0)} u_2^4 \right)^{1/2}$$

então $u_1 \neq 0$ e $u_2 \neq 0$. □

2.4 O caso em que β é grande

Trabalharemos nesta seção o caso em que o coeficiente de interação β é grande, num certo sentido. Primeiro, mostraremos que $c < \min\{I(\omega_1, 0), I(0, \omega_2)\}$. Seguindo que se c é atingido em algum $(u_1, u_2) \in \mathcal{N}$, então $u_1 \neq 0$ e $u_2 \neq 0$. Afinal, caso $u_1 = 0$ por exemplo, então $u_2 \neq 0$ e

$$\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u_2|^2 + V_2 u_2^2) = \int_{\mathbb{R}^N} \mu_2 u_2^4,$$

isto é, teríamos u_2 como solução de (2.2), com $j = 2$, com energia menor do que a energia de ω_2, o que contradiz o fato de ω_2 ser a solução ground state positiva de (2.2). Portanto, a fim de demonstrar a existência de uma solução positiva ground state para o nosso problema, basta provarmos que c é assumido, em $(u_1,u_2)\in\mathcal{N}$ com $u_1\geq 0$, $u_2\geq 0$.

Lema 2.4. Se (H7) é satisfeita, então $c<\min\{I(\omega_1,0),I(0,\omega_2)\}$.

Demonstração. Tomemos $t>0$ tal que $(t\omega_1,t\rho\varphi_1)\in\mathcal{N}$, em que ρ e φ_1 são definidas em (H7). Então

$$\begin{aligned}
&\langle I'(t\omega_1,t\rho\varphi_1),(t\omega_1,t\rho\varphi_1)\rangle=0\\
\Leftrightarrow\quad & t^2\|(\omega_1,\rho\varphi_1)\|^2-t^4\int_{\mathbb{R}^N}(\mu_1\omega_1^4+2\beta\omega_1^2\rho^2\varphi_1^2+\mu_2\rho^4\varphi_1^4)=0\\
\Leftrightarrow\quad & t^2=\frac{\|(\omega_1,\rho\varphi_1)\|^2}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N}(\mu_1\omega_1^4+2\beta\omega_1^2\rho^2\varphi_1^2+\mu_2\rho^4\varphi_1^4)}.
\end{aligned}$$

Portanto, por (2.4) temos

$$\begin{aligned}
c\ &\leq I(t\omega_1,t\rho\varphi_1)\\
&=\frac{t^2\|(\omega_1,\rho\varphi_1)\|^2}{4}\\
&=\frac{\|(\omega_1,\rho\varphi_1)\|^4\|(\omega_1,\rho\varphi_1)\|^2}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N}(\mu_1\omega_1^4+2\beta\omega_1^2\rho^2\varphi_1^2+\mu_2\rho^4\varphi_1^4)}\\
&<\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^N}\mu_1\omega_1^4.
\end{aligned}\tag{2.122}$$

Dado que $\omega_1\in\mathcal{M}_1$, temos que

$$\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla\omega_1|^2+V_1{\omega_1}^2)=\int_{\mathbb{R}^N}\mu_1{\omega_1}^4,\tag{2.123}$$

logo, por (2.122) e (2.123) temos que

$$c<\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^N}\mu_1\omega_1^4=\frac{\|\omega_1\|_1^2}{2}-\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^N}\mu_1\omega_1^4=I(\omega_1,0).$$

Analogamente, (2.5) implica que $c<I(0,\omega_2)$.

□

De acordo com [7], c_∞ é atingido em algum $\mathbf{u}_\infty=(u_{1\infty},u_{2\infty})$, que é um solução radial não-nula e não-negativa de (2.3).

Lema 2.5. Se (H1), (H3) e (H7) ocorrem e se ao menos uma das cinco funções V_j, μ_j e β não é uma constante, então $c<c_\infty$.

Demonstração. Há três casos possíveis.

1. $u_{2\infty} = 0$.

   Dado que $\mathbf{u}_\infty$ é não-nula, então, necessariamente $u_{1\infty} \neq 0$ e $\|u_{1\infty}\|_{1\infty}^2 = \int_{\mathbb{R}^N} \mu_{1\infty} u_{1\infty}^4$. Seja $t > 0$ tal que,

$$\|u_{1\infty}\|_1^2 = t \int_{\mathbb{R}^N} \mu_1 u_{1\infty}^4, \tag{2.124}$$

   ou seja, $\sqrt{t} u_{1\infty} \in \mathcal{M}_1$. Por (H1) tem-se que

$$\|u_{1\infty}\|_1^2 \quad \leq \|u_{1\infty}\|_{1\infty}^2. \tag{2.125}$$

   Por (2.124) e (2.125) e pela definição de $\mu_{1\infty}$ proveniente da hipótese (H1) temos que

$$t \int_{\mathbb{R}^N} \mu_1 u_{1\infty}^4 = \|u_{1\infty}\|_1^2 \leq \|u_{1\infty}\|_{1\infty}^2 = \int_{\mathbb{R}^N} \mu_{1\infty} u_{1\infty}^4 \leq \int_{\mathbb{R}^N} \mu_1 u_{1\infty}^4, \tag{2.126}$$

   logo $t \leq 1$. Deste modo, considerando que ω_1 possui energia mínima em $\mathcal{M}_1$, temos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla \omega_1|^2 + V_1 \omega_1^2) \quad &\leq \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla(\sqrt{t} u_{1\infty})|^2 + V_1 (\sqrt{t} u_{1\infty})^2) \\ &\leq t \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u_{1\infty}|^2 + V_1 u_{1\infty}^2) \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u_{1\infty}|^2 + V_1 u_{1\infty}^2). \end{aligned} \tag{2.127}$$

   Considerando válida a hipótese (H7), concluímos através do Lema 2.4 e por (2.127) que

$$c < I(\omega_1, 0) \quad = \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla \omega_1|^2 + V_1 \omega_1^2) \leq \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u_{1\infty}|^2 + V_1 u_{1\infty}^2). \tag{2.128}$$

   Pela definição de $V_{1\infty}$ proveniente da hipótese (H1) segue que

$$\frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u_{1\infty}|^2 + V_1 u_{1\infty}^2) \leq \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u_{1\infty}|^2 + V_\infty u_{1\infty}^2). \tag{2.129}$$

   Dado que c_∞ é atingido em $\mathbf{u}_\infty = (u_{1\infty}, 0)$, concluímos por (2.128) e (2.129) que

$$c < I(\omega_1, 0) \leq \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u_{1\infty}|^2 + V_\infty u_{1\infty}^2) = I(u_{1\infty}, 0) = c_\infty.$$

2. $u_{1\infty} = 0$.

   Este caso é análogo ao anterior.

3. $u_{1\infty} \neq 0$, $u_{2\infty} \neq 0$.

   Como $u_{1\infty}$ e $u_{2\infty}$ são não-negativas então o Lema 1.6 implica que $u_{1\infty}(x) > 0$, $u_{2\infty}(x) > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}^N$.

Seja $t > 0$ tal que $t\mathbf{u}_\infty \in \mathcal{N}$. Então, pelas definições de $V_{j\infty}$, $\mu_{j\infty}$ e β_∞ temos

$$t^2 = \frac{\|u_\infty\|^2}{\int_{\mathbb{R}^N}(\mu_1 u_{1\infty}^4 + 2\beta u_{1\infty}^2 u_{2\infty}^2 + \mu_2 u_{2\infty}^4)} \leq \frac{\|u_\infty\|_\infty^2}{\int_{\mathbb{R}^N}(\mu_{1\infty} u_{1\infty}^4 + 2\beta u_{1\infty}^2 u_{2\infty}^2 + \mu_{2\infty} u_{2\infty}^4)}.$$

Além disso, desde que $\mathbf{u}_\infty \in \mathcal{N}_\infty$, temos que

$$\frac{\|u_\infty\|_\infty^2}{\int_{\mathbb{R}^N}(\mu_{1\infty} u_{1\infty}^4 + 2\beta u_{1\infty}^2 u_{2\infty}^2 + \mu_{2\infty} u_{2\infty}^4)} = 1,$$

logo $t \leq 1$.
Lembremos que o polinômio $p(x) = 2x^2 - x^4$ é crescente no intervalo $(0,1]$, decorre que $p(t) \leq p(1)$, ou seja, $2t^2 - t^4 \leq 1$. Logo, sendo $t\mathbf{u}_\infty \in \mathcal{N}$, temos

$$\begin{aligned}
c_\infty = \; & I_\infty(\mathbf{u}_\infty) \\
= \; & \frac{\|\mathbf{u}_\infty\|_\infty^2}{4} \\
\geq \; & (2t^2 - t^4)\frac{\|\mathbf{u}_\infty\|_\infty^2}{4} \\
= \; & \frac{t^2\|\mathbf{u}_\infty\|_\infty^2}{2} - \frac{t^4\|\mathbf{u}_\infty\|_\infty^2}{4} \\
= \; & \frac{t^2\|\mathbf{u}_\infty\|_\infty^2}{2} - \frac{t^4}{4}\int_{\mathbb{R}^N}(\mu_{1\infty} u_{1\infty}^4 + 2\beta_\infty u_{1\infty}^2 u_{2\infty}^2 + \mu_{2\infty} u_{2\infty}^2) \\
= \; & I_\infty(t\mathbf{u}_\infty) \\
= \; & I(t\mathbf{u}_\infty) + \frac{t^2}{2}\int_{\mathbb{R}^N}[(V_{1\infty} - V_1 u_{1\infty}^2 + (V_{2\infty} - V_2 u_{2\infty}^2] \\
& + \frac{t^4}{4}\int_{\mathbb{R}^N}[(\mu_1 - \mu_{1\infty})u_{1\infty}^4 + 2(\beta - \beta_\infty)u_{1\infty}^2 u_{2\infty}^2 + (\mu_2 - \mu_{2\infty})u_{2\infty}^2]
\end{aligned}$$

considerando que ao menos uma das funções V_j, μ_j, β é não-constante, concluímos que

$$c_\infty > I(t\mathbf{u}_\infty) \geq c,$$

e isto completa a prova.

$\square$

Doravante, até o fim desta seção, assumiremos que são válidas ou as hipóteses do Teorema 2.3 ou as hipóteses do Teorema 2.4.

Lema 2.6. Existe $\delta > 0$ tal que, para $\mathbf{u} \in \mathcal{N}$, tem-se que $\|\mathbf{u}\| > \delta$.

Demonstração. Para $\mathbf{u} \in \mathcal{N}$, sendo $C = \max\{|\mu_1|_\infty, |\mu_2|_\infty, |\beta|_\infty\}$, temos que

$$\|\mathbf{u}\|^2 = \int_{\mathbb{R}^N} (\mu_1 u_1^4 + 2\beta u_1^2 u_2^2 + \mu_2 u_2^4) \leq C \int_{\mathbb{R}^N} (u_1^4 + 2u_1^2 u_2^2 + u_2^4).$$

Pelo Corolário B.3 existe $\tilde{C} > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{u}\|^2 &\leq C \left[\int_{\mathbb{R}^N} u_1^4 + 2 \left(\int_{\mathbb{R}^N} u_1^4 \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^N} u_2^4 \right)^{1/2} + \int_{\mathbb{R}^N} u_2^4 \right] \\
&= C \left[\|u_1\|_{L^4}^4 + 2\|u_1\|_{L^4}^2 \|u_2\|_{L^4}^2 + \|u_2\|_{L^4}^4 \right] \\
&= C \left(\|u_1\|_{L^4}^2 + \|u_2\|_{L^4}^2 \right)^2 \\
&\leq \tilde{C} \left(\|u_1\|^2 + \|u_2\|^2 \right)^2 = \tilde{C} \|\mathbf{u}\|^4
\end{aligned}$$

logo, $\|\mathbf{u}\| > \dfrac{1}{2\sqrt{\tilde{C}}}$. □

Considere $\{\mathbf{u}_n\} \in \mathcal{N}$ uma sequência minimizante, isto é, $I(\mathbf{u}_n) \to c$. Podemos assumir que $u_{1n} \geq 0$, $u_{2n} \geq 0$, pois não sendo o caso podemos definir novamente a sequência como $(|u_{1n}|, |u_{2n}|)$ e teremos

$$\langle I(|u_{1n}|, |u_{2n}|), (|u_{1n}|, |u_{2n}|) \rangle = \langle I(u_{1n}, u_{2n}), (u_{1n}, u_{2n}) \rangle = 0 \text{ e } I(|u_{1n}|, |u_{2n}|) = I(u_{1n}, u_{2n}) \to c.$$

Dado que $\{\mathbf{u}_n\} \in \mathcal{N}$ e então $\|\mathbf{u}_n\|^2 = 4I(\mathbf{u}_n) \to 4c$, temos que $\{\mathbf{u}_n\}$ é limitada. Segue pelo Teorema C.7 que

$$\begin{array}{lcll}
(u_{1n}, u_{2n}) & \rightharpoonup & (u_1, u_2) & \text{em } \mathcal{H} \\
(u_{1n}, u_{2n}) & \to & (u_1, u_2) & \text{em } L^4_{loc}(\mathbb{R}^N) \times L^4_{loc}(\mathbb{R}^N) \\
(u_{1n}, u_{2n}) & \to & (u_1, u_2) & \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^N.
\end{array} \tag{2.130}$$

para alguma subsequência $\{\mathbf{u}_n\} = \{(u_{1n}, u_{2n})\}$. Tomemos tal subsequência.
Definamos para cada n a correspondência ν_n dada por

$$\nu_n(\Omega) = \frac{1}{4} \int_\Omega (|\nabla u_{1n}|^2 + V_1 u_{1n}^2 + |\nabla u_{2n}|^2 + V_1 u_{2n}^2),$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um conjunto *Lebesgue mensurável* (consultar Teorema A.5). Note que, pelas propriedades da integral de Lebesgue , para cada n, ν_n define uma *medida* (consultar Definição A.5) sobre a σ-*álgebra* (consultar Definição A.4) formada pelos conjuntos Lebesgue mensuráveis (consultar Teorema A.5). Nossa intenção é aplicar em ν_n o clássico resultado estabelecido em [22] por Lions P.-L., o *Lema de Concentração e Compacidade de Lions* (Lema C.1). O próximo lema nos auxiliará a utilizar este resultado de forma conveniente.

Lema 2.7. Anulamento e dicotomia não podem ocorrer com ν_n.

Demonstração. Se anulamento ocorresse teríamos que, para todo $r > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{y\in\mathbb{R}^N} \frac{1}{4} \int_{B_r(y)} (|\nabla u_{1n}|^2 + V_1 u_{1n}^2 + |\nabla u_{2n}|^2 + V_1 u_{2n}^2) = 0. \tag{2.131}$$

Supondo que (H1) ou (H2) ocorra temos que $\inf\limits_{x\in\mathbb{R}^N} V_j(x) > 0$, logo

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^N} \frac{1}{V_j(x)} = \frac{1}{\inf_{x\in\mathbb{R}^N} V_j(x)},$$

portanto

$$\begin{aligned}
\sup_{y\in\mathbb{R}^N} \frac{1}{4} \int_{B_r(y)} (u_{1n}^2 + u_{2n}^2) &= \sup_{y\in\mathbb{R}^N} \frac{1}{4} \int_{B_r(y)} \left(\frac{V_1(x)}{V_1(x)} u_{1n}^2 + \frac{V_2(x)}{V_2(x)} u_{2n}^2 \right) \\
&\leq C \sup_{y\in\mathbb{R}^N} \frac{1}{4} \int_{B_r(y)} V_1(x) u_{1n}^2 + V_2(x) u_{2n}^2 \\
&\leq C \sup_{y\in\mathbb{R}^N} \frac{1}{4} \int_{B_r(y)} (|\nabla u_{1n}|^2 + V_1 u_{1n}^2 + |\nabla u_{2n}|^2 + V_1 u_{2n}^2),
\end{aligned} \tag{2.132}$$

em que $C = \max\limits_{j} \left(\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^N} \dfrac{1}{V_j(x)} \right)$. Por (2.131) e (2.132) concluímos que

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{y\in\mathbb{R}^N} \frac{1}{4} \int_{B_r(y)} (u_{1n}^2 + u_{2n}^2) = 0. \tag{2.133}$$

Sendo u_{1n}, u_{2n} limitadas em $H^1(\mathbb{R}^N)$, pelo Lema de Lions (Lema C.2), considerando $N = 2, 3$, segue que

$$(u_{1n}, u_{2n}) \to (0,0) \text{ em } L^4(\mathbb{R}^N) \times L^4(\mathbb{R}^N). \tag{2.134}$$

Dado que $\mathbf{u}_n \in \mathcal{N}$, temos que $\|(u_{1n}, u_{2n})\|^2 = \int_{\mathbb{R}^N} (\mu_1 u_{1n}^4 + 2\beta u_{1n}^2 u_{2n}^2 + \mu_2 u_{2n}^4)$, portanto

$$
\begin{aligned}
\|(u_{1n},u_{2n})\|^2 &= \int_{\mathbb{R}^N}(\mu_1 u_{1n}^4 + 2\beta u_{1n}^2 u_{2n}^2 + \mu_2 u_{2n}^4)\\
&\leq \tilde{C}\int_{\mathbb{R}^N}(u_{1n}^4 + 2u_{1n}^2 u_{2n}^2 + u_{2n}^4)
\end{aligned}
$$

em que $\tilde{C} = \max\{\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^N}\mu_1(x),\ \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^N}\mu_2(x),\ \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^N}\beta(x)\}$. Pela desigualdade de Hölder e por (2.134) tem-se que

$$
\begin{aligned}
\|(u_{1n},u_{2n})\|^2 &\leq \tilde{C}\left[\int_{\mathbb{R}^N} u_{1n}^4 + 2\left(\int_{\mathbb{R}^N} u_{1n}^4\right)^{1/2}\left(\int_{\mathbb{R}^N} u_{2n}^4\right)^{1/2} + \int_{\mathbb{R}^N} u_{2n}^4\right]\\
&\leq \tilde{C}(\|u_{1n}\|_{L^4}^2 + \|u_{2n}\|_{L^4}^2)^2 \to 0,
\end{aligned}
$$

o que contradiz o Lema 2.6. Vemos então que anulamento não ocorre com ν_n.

Caso dicotomia ocorra, então existirá $c_1 \in (0,c)$, $\{y_n\} \subset \mathbb{R}^N$, $\{r_n\}$ com $r_n \to +\infty$ e duas sequências de medidas não-negativas ν_{1n}, ν_{2n} tais que

$$
0 \leq \nu_{1n} + \nu_{2n} \leq \nu_n,\ supp(\nu_{1n}) \subset B_{r_n}(y_n),\ supp(\nu_{2n}) \subset \mathbb{R}^N \backslash B_{2r_n}(y_n),
$$

e

$$
\nu_{1n}(\mathbb{R}^N) \to c_1,\ \nu_{2n}(\mathbb{R}^N) \to c - c_1.
$$

Seja ρ_n uma função suave que satisfaça as seguintes condições

i) $\rho_n = 1$ em $B_{r_n}(y_n)$;

ii) $\rho_n = o$ em $\mathbb{R}^N \backslash \{B_{2r_n}(y_n)\}$;

iii) $0 \leq \rho_n \leq 1$;

iv) $|\nabla\rho_n| \leq \dfrac{2}{r_n}$.

Definamos $\mathbf{v}_n = (\rho_n u_{1n}, \rho_n u_{2n})$ e $\mathbf{w}_n = \mathbf{u}_n - \mathbf{v}_n$. Note que pela definição de ρ_n temos que

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{4}\|\mathbf{v}_n\|^2 &= \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla(\rho_n u_{1n})|^2 + V_1(\rho_n u_{1n})^2 + |\nabla(\rho_n u_{2n})|^2 + V_1(\rho_n u_{2n})^2)\\
&\geq \frac{1}{4}\int_{B_{r_n}(y_n)}(|\nabla(\rho_n u_{1n})|^2 + V_1(\rho_n u_{1n})^2 + |\nabla(\rho_n u_{2n})|^2 + V_1(\rho_n u_{2n})^2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{4}\int_{B_{r_n}(y_n)} (|\nabla u_{1n}|^2 + V_1 u_{1n}^2 + |\nabla u_{2n}|^2 + V_1 u_{2n}^2) \\
&= \nu_n(B_{r_n}(y_n)) \\
&\geq \nu_{1n}(B_{r_n}(y_n)),
\end{aligned}
$$

logo,

$$
\frac{1}{4}\|\mathbf{v}_n\|^2 \geq \nu_{1n}(B_{r_n}(y_n)) = \nu_{1n}(\mathbb{R}^N), \tag{2.135}
$$

dado que $supp(\nu_{1n}) \subset B_{r_n}(y_n)$.
Temos também, pela definição de ρ_n que

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{4}\|\mathbf{w}_n\|^2 &= \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla w_{1n}|^2 + V_1 w_{1n}^2 + |\nabla w_{2n}|^2 + V_1 w_{2n}^2) \\
&\geq \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^N \backslash B_{2r_n}(y_n)} (|\nabla w_{1n}|^2 + V_1 w_{1n}^2 + |\nabla w_{2n}|^2 + V_1 w_{2n}^2) \\
&= \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^N \backslash B_{2r_n}(y_n)} (|\nabla u_{1n}|^2 + V_1 u_{1n}^2 + |\nabla u_{2n}|^2 + V_1 u_{2n}^2) \\
&= \nu_n(\mathbb{R}^N \backslash B_{2r_n}(y_n))) \\
&\geq \nu_{2n}(\mathbb{R}^N \backslash B_{2r_n}(y_n)),
\end{aligned}
$$

logo

$$
\frac{1}{4}\|\mathbf{w}_n\|^2 \geq \nu_{2n}(\mathbb{R}^N \backslash B_{2r_n}(y_n)) = \nu_{2n}(\mathbb{R}^N), \tag{2.136}
$$

dado que $supp(\nu_{2n}) \subset \mathbb{R}^N \backslash B_{2r_n}(y_n)$.
Portanto, por (2.135) e (2.136) e dado que $\nu_{1n}(\mathbb{R}^N) \to c_1,\ \nu_{2n}(\mathbb{R}^N) \to c - c_1$, segue que

$$
\liminf_{n\to+\infty} \frac{1}{4}\|\mathbf{v}_n\|^2 \geq c_1,\ \liminf_{n\to+\infty} \frac{1}{4}\|\mathbf{w}_n\|^2 \geq c - c_1. \tag{2.137}
$$

Seja $\Omega_n = B_{2r_n}(y_n) \backslash B_{r_n}(y_n)$. Desde que $0 \leq \nu_{1n} + \nu_{2n} \leq \nu_n$ e $supp(\nu_{1n}) \subset B_{r_n}(y_n)$, $supp(\nu_{2n}) \subset \mathbb{R}^N \backslash B_{2r_n}(y_n)$ então

$$
\begin{aligned}
\nu_n(\Omega_n) &= \nu_n(\mathbb{R}^N) - \nu_n(B_{r_n}(y_n)) - \nu_n(B_{2r_n}(y_n)) \\
&\leq \nu_n(\mathbb{R}^N) - \nu_{1n}(B_{r_n}(y_n)) - \nu_{2n}(B_{2r_n}(y_n)) \\
&= \nu_n(\mathbb{R}^N) - \nu_{1n}(\mathbb{R}^N) - \nu_{2n}(\mathbb{R}^N),
\end{aligned}
$$

tomando o limite encontramos

$$
0 \leq \lim_{n\to\infty} \nu_n(\Omega_n) \leq \lim_{n\to\infty} \nu_n(\mathbb{R}^N) - \nu_{1n}(\mathbb{R}^N) - \nu_{2n}(\mathbb{R}^N) = c - c_1 - (c - c_1) = 0,
$$

ou seja,

$$\nu_n(\Omega_n) \to 0, \text{ quando } n \to +\infty.$$

Vemos também que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}\|\mathbf{u}_n\|^2 = & \ \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla(w_{1n}+\rho_n u_{1n})|^2 + V_{1n}(w_{1n}+\rho_n u_{1n})^2) \\
& + \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla(w_{2n}+\rho_n u_{2n})|^2 + V_2(w_{2n}+\rho_n u_{2n})^2) \\
= & \ \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla w_{1n}|^2 + |\nabla(\rho_n u_{1n})|^2 + 2|\nabla w_{1n}||\nabla(\rho_n u_{1n})| + V_1 w_{1n}^2 + V_1(\rho_n u_{1n})^2 \\
& + 2V_1 w_{1n}\rho_n u_{1n} + |\nabla w_{2n}|^2 + |\nabla(\rho_n u_{2n})|^2 + 2|\nabla w_{2n}||\nabla(\rho_n u_{2n})| \\
& + V_2 w_{2n}^2 + V_2(\rho_n u_{2n})^2 + 2V_2 w_{2n}\rho_n u_{2n}) \\
= & \ \frac{1}{4}\left(\|\mathbf{w}_n\|^2 + \|\mathbf{v}_n\|^2\right) \\
& + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla w_{1n}||\nabla(\rho_n u_{1n})| + V_1 w_{1n} v_{1n} + |\nabla w_{2n}||\nabla(\rho_n u_{2n})| + V_2 w_{2n}\rho_n u_{2n}).
\end{aligned} \tag{2.138}$$

Pela Proposição B.1 temos que

$$\nabla(\rho_n u_{1n}) = u_{1n}\nabla\rho_n + \rho_n \nabla u_{1n},$$

e

$$\nabla w_{1n} = \nabla(u_{1n} - \rho_n u_{1n}) = -u_{1n}\nabla\rho_n + (1-\rho_n)\nabla u_{1n},$$

logo, pela definição de ρ_n temos que

$$|\nabla(\rho_n u_{1n})| \leq |u_{1n}||\nabla\rho_n| + |\rho_n||\nabla u_{1n}| \leq |u_{1n}|\frac{2}{r_n} + |\nabla u_{1n}|, \tag{2.139}$$

e também que

$$|\nabla w_{1n}| \leq |u_{1n}||\nabla\rho_n| + |1-\rho_n||\nabla u_{1n}| \leq |u_{1n}|\frac{2}{r_n} + |\nabla u_{1n}|. \tag{2.140}$$

Dado que $supp(w_{jn}\rho_n u_{jn}) \subset \Omega_n$, para $j = 1, 2$, então

$$\begin{aligned}
0 \ \leq & \ \int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla w_{1n}||\nabla(\rho_n u_{1n})| + V_1 w_{1n}\rho_n u_{1n} + |\nabla w_{2n}||\nabla(\rho_n u_{2n})| + V_2 w_{2n}\rho_n u_{2n}) \\
= & \ \int_{\Omega_n}(|\nabla w_{1n}||\nabla(\rho_n u_{1n})| + V_1 w_{1n}\rho_n u_{1n} + |\nabla w_{2n}||\nabla(\rho_n u_{2n})| + V_2 w_{2n}\rho_n u_{2n}).
\end{aligned}$$

Pela definição de $\mathbf{v}_n$ e $\mathbf{w}_n$ temos que $0 \leq w_{in}\rho_n u_{in} = (1-\rho_n)u_{in}\rho_n u_{in} \leq u_{in}^2$, logo

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla w_{1n}||\nabla(\rho_n u_{1n})| + V_1 w_{1n}\rho_n u_{1n} + |\nabla w_{2n}||\nabla(\rho_n u_{2n})| + V_2 w_{2n}\rho_n u_{2n}) \\ &= \int_{\Omega_n} (|\nabla w_{1n}||\nabla(\rho_n u_{1n})| + V_1 w_{1n}\rho_n u_{1n} + |\nabla w_{2n}||\nabla(\rho_n u_{2n})| + V_2 w_{2n}\rho_n u_{2n}) \\ &\leq \int_{\Omega_n} (|\nabla w_{1n}||\nabla(\rho_n u_{1n})| + V_1 u_{1n}^2 + |\nabla w_{2n}||\nabla(\rho_n u_{2n})| + V_2 u_{2n}^2). \end{aligned} \tag{2.141}$$

Por (2.139) e (2.140) e pela desigualdade de Hölder segue que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_n} |\nabla w_{1n}||\nabla(\rho_n u_{1n})| &\leq \int_{\Omega_n} \left(|\nabla u_{1n}| + |u_{1n}|\frac{2}{r_n}\right)^2 \\ &\leq \int_{\Omega_n} (|\nabla u_{1n}|^2 + |u_{1n}|^2\frac{4}{r_n^2} + \frac{4}{r_n}|u_{1n}||\nabla u_{1n}|) \\ &\leq \int_{\Omega_n} \left(|\nabla u_{1n}|^2 + |u_{1n}|^2\frac{4}{r_n^2}\right) \\ &+ \left(\int_{\Omega_n} \left(\frac{4}{r_n}|u_{1n}|\right)^2\right)^{1/2} \left(\int_{\Omega_n} |\nabla u_{1n}|^2\right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Para n suficientemente grande temos que $\dfrac{16}{r_n^2} < V_j(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$, dado que V_j é positiva e $r_n \to +\infty$ quando $n \to +\infty$. Logo

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_n} |\nabla w_{1n}||\nabla(\rho_n u_{1n})| \leq & \int_{\Omega_n} \left(|\nabla u_{1n}|^2 + |u_{1n}|^2\frac{4}{r_n^2}\right) \\ & + \left(\int_{\Omega_n} \left(\frac{4}{r_n}|u_{1n}|\right)^2\right)^{1/2} \left(\int_{\Omega_n} |\nabla u_{1n}|^2\right)^{1/2} \\ \leq & \int_{\Omega_n} (|\nabla u_{1n}|^2 + V_1 u_{1n}^2) \\ & + \left(\int_{\Omega_n} (|\nabla u_{1n}|^2 + V_1 u_{1n}^2)\right)^{1/2} \left(\int_{\Omega_n} (|\nabla u_{1n}|^2 + V_1 u_{1n}^2)\right)^{1/2} \\ = & \ 2\int_{\Omega_n} (|\nabla u_{1n}|^2 + V_1 u_{1n}^2). \end{aligned} \tag{2.142}$$

Por (2.141) e (2.142) inferimos que

$$0 \leq \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla w_{1n}||\nabla(\rho_n u_{1n})| + V_1 w_{1n}\rho_n u_{1n} + |\nabla w_{2n}||\nabla(\rho_n u_{2n})| + V_2 w_{2n}\rho_n u_{2n}) \tag{2.143}$$

$$\begin{aligned}
&\leq 2\int_{\Omega_n}(|\nabla u_{1n}|^2+V_1u_{1n}^2)+\int_{\Omega_n}V_1u_{1n}^2+2\int_{\Omega_n}(|\nabla u_{2n}|^2+V_2u_{2n}^2)+\int_{\Omega_n}V_2u_{2n}^2\\
&\leq 3\int_{\Omega_n}(|\nabla u_{1n}|^2+V_1u_{1n}^2+|\nabla u_{2n}|^2+V_2u_{2n}^2)\\
&= \nu_n(\Omega_n).
\end{aligned}$$

Concluímos, através de (2.138), (2.143) e do fato de que $\nu_n(\Omega_n)\to 0$, que

$$\frac{1}{4}\|\mathbf{u}_n\|^2=\frac{1}{4}\|\mathbf{w}_n\|^2+\frac{1}{4}\|\mathbf{v}_n\|^2+o(1). \tag{2.144}$$

Tomando o limite inferior em (2.144), por (2.137) temos

$$c=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\|\mathbf{u}_n\|^2\geq \liminf_{n\to\infty}\frac{1}{4}\|\mathbf{w}_n\|^2+\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{4}\|\mathbf{v}_n\|^2\geq c_1+c-c_1=c \tag{2.145}$$

Considere subsequências que convirjam para o limite inferior, para as quais manteremos a mesma notação. Por (2.145) e (2.137) segue que

$$0\leq \lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\|\mathbf{v}_n\|^2-c_1=c-c_1-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\|\mathbf{w}_n\|^2\leq c-c_1-(c-c_1)=0$$

logo,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\|\mathbf{v}_n\|^2=c_1,\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\|\mathbf{w}_n\|^2=c-c_1. \tag{2.146}$$

Utilizando novamente o fato de $\nu_n(\Omega_n)\to 0$, obtemos que

$$\begin{aligned}
0 &\leq \int_{\Omega_n}(\mu_1u_{1n}^4+2\beta u_{1n}^2u_{2n}^2+\mu_2u_{2n}^4)\\
&= \int_{\Omega_n}(|\nabla u_{1n}|^2+V_1u_{1n}^2+|\nabla u_{2n}|^2+V_1u_{2n}^2)\to 0.
\end{aligned} \tag{2.147}$$

Por (2.144) ocorre que

$$\|\mathbf{u}_n\|^2-\|\mathbf{v}_n\|^2-\|\mathbf{w}_n\|^2=o(1),$$

logo,

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{u}_n\|^2-\int_{\mathbb{R}^N}(\mu_1u_{1n}^4+2\beta u_{1n}^2u_{2n}^2+\mu_2u_{2n}^4) &= \|\mathbf{v}_n\|^2+\|\mathbf{w}_n\|^2+o(1)\\
&\quad -\int_{\mathbb{R}^N}(\mu_1u_{1n}^4+2\beta u_{1n}^2u_{2n}^2+\mu_2u_{2n}^4),
\end{aligned}$$

reescrevendo, obtemos

$$
\begin{aligned}
\langle I'(\mathbf{u}_n),\mathbf{u}_n\rangle = \quad & \|\mathbf{v}_n\|^2+\|\mathbf{w}_n\|^2-\int_{B_{r_n}(y_n)}(\mu_1 u_{1n}^4+2\beta u_{1n}^2u_{2n}^2+\mu_2 u_{2n}^4)\\
& -\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_{2r_n}(y_n)}(\mu_1 u_{1n}^4+2\beta u_{1n}^2u_{2n}^2+\mu_2 u_{2n}^4)\\
& -\int_{\Omega_n}(\mu_1 u_{1n}^4+2\beta u_{1n}^2u_{2n}^2+\mu_2 u_{2n}^4)+o(1).
\end{aligned}
$$

Segue por (2.147) que

$$
\begin{aligned}
\langle I'(\mathbf{u}_n),\mathbf{u}_n\rangle = \quad & \|\mathbf{v}_n\|^2+\|\mathbf{w}_n\|^2\\
& -\int_{B_{r_n}(y_n)}(\mu_1(\rho_n u_{1n})^4+2\beta(\rho_n u_{1n})^2(\rho_n u_{2n})^2+\mu_2(\rho_n u_{2n})^4)\\
& -\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_{2r_n}(y_n)}(\mu_1 w_{1n}^4+2\beta w_{1n}^2w_{2n}^2+\mu_2 w_{2n}^4)+o(1)\\
= \quad & \langle I'(\mathbf{v}_n),\mathbf{v}_n\rangle+\langle I'(\mathbf{w}_n),\mathbf{w}_n\rangle\\
& +\int_{\Omega_n}(\mu_1(\rho_n u_{1n})^4+2\beta(\rho_n u_{1n})^2(\rho_n u_{2n})^2+\mu_2(\rho_n u_{2n})^4)\\
& +\int_{\Omega_n}(\mu_1 w_{1n}^4+2\beta w_{1n}^2w_{2n}^2+\mu_2 w_{2n}^4)+o(1).
\end{aligned}
\tag{2.148}
$$

Porém, dado que $\mathbf{u}_n=\mathbf{w}_n+\mathbf{v}_n$ e que $\mathbf{u}_n,\mathbf{w}_n,\mathbf{v}_n\geq\mathbf{0}$ tem-se então

$$
\begin{aligned}
0 \quad & \leq\int_{\Omega_n}(\mu_1(\rho_n u_{1n})^4+2\beta(\rho_n u_{1n})^2(\rho_n u_{2n})^2+\mu_2(\rho_n u_{2n})^4)\\
& +\int_{\Omega_n}(\mu_1 w_{1n}^4+2\beta w_{1n}^2w_{2n}^2+\mu_2 w_{2n}^4)\\
& \leq\int_{\Omega_n}(\mu_1 u_{1n}^4+2\beta u_{1n}^2u_{2n}^2+\mu_2 u_{2n}^4)\to 0,
\end{aligned}
\tag{2.149}
$$

logo, por (2.148) e (2.149), inferimos que

$$
0=\langle I'(\mathbf{u}_n),\mathbf{u}_n\rangle=\langle I'(\mathbf{v}_n),\mathbf{v}_n\rangle+\langle I'(\mathbf{w}_n),\mathbf{w}_n\rangle+o(1). \tag{2.150}
$$

Sejam $t_n,s_n\in\mathbb{R}$ tais que $t_n\mathbf{v}_n\in\mathcal{N}$ e $s_n\mathbf{w}_n\in\mathcal{N}$.
Note que se tivermos

$$
\langle I'(\mathbf{v}_n),\mathbf{v}_n\rangle=\|\mathbf{v}_n\|^2-\int_{\mathbb{R}^N}(\mu_1(\rho_n u_{1n})^4+2\beta(\rho_n u_{1n})^2(\rho_n u_{2n})^2+\mu_2(\rho_n u_{2n})^4)\leq 0
$$

então

$$
0<t_n^2=\frac{\|\mathbf{v}_n\|^2}{\int_{\mathbb{R}^N}(\mu_1(\rho_n u_{1n})^4+2\beta(\rho_n u_{1n})^2(\rho_n u_{2n})^2+\mu_2(\rho_n u_{2n})^4)}\leq 1,
$$

implicando que

$$c \leq \liminf_{n\to\infty} I(t_n\mathbf{v}_n) = \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{4} t_n^2 \|\mathbf{v}_n\|^2 \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4}\|\mathbf{v}_n\|^2 = c_1 < c,$$

o que é um absurdo.
De forma análoga não pode ocorrer $\langle I'(\mathbf{w}_n), \mathbf{w}_n\rangle \leq 0$. Portanto

$$\langle I'(\mathbf{v}_n), \mathbf{v}_n\rangle > 0 \text{ e } \langle I'(\mathbf{w}_n), \mathbf{w}_n\rangle > 0.$$

Sendo assim, inferimos por (2.150) que

$$0 \leq \lim_{n\to+\infty} \langle I'(\mathbf{v}_n), \mathbf{v}_n\rangle,\ \lim_{n\to+\infty} \langle I'(\mathbf{w}_n), \mathbf{w}_n\rangle \leq \lim_{n\to+\infty} \langle I'(\mathbf{v}_n), \mathbf{v}_n\rangle + \langle I'(\mathbf{w}_n), \mathbf{w}_n\rangle = 0,$$

ou seja, $\langle I'(\mathbf{v}_n), \mathbf{v}_n\rangle \to 0$ e $\langle I'(\mathbf{w}_n), \mathbf{w}_n\rangle \to 0$.
Decorre que as constantes positivas $t_n,\ s_n$ convergem para 1 quando $n \to +\infty$. De fato, pois caso tenhamos

$$\langle I'(\mathbf{v}_n), \mathbf{v}_n\rangle = \|\mathbf{v}_n\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} (\mu_1(\rho_n u_{1n})^4 + 2\beta(\rho_n u_{1n})^2(\rho_n u_{2n})^2 + \mu_2(\rho_n u_{2n})^4) \to 0,$$

então

$$t_n^2 - 1 = \frac{\|\mathbf{v}_n\|^2}{\int_{\mathbb{R}^N} (\mu_1(\rho_n u_{1n})^4 + 2\beta(\rho_n u_{1n})^2(\rho_n u_{2n})^2 + \mu_2(\rho_n u_{2n})^4)} - 1 \to 0,$$

dado que para todo n

$$0 < \int_{\mathbb{R}^N} (\mu_1(\rho_n u_{1n})^4 + 2\beta(\rho_n u_{1n})^2(\rho_n u_{2n})^2 + \mu_2(\rho_n u_{2n})^4).$$

Logo, $t_n \to 1$. Analogamente $s_n \to 1$.

Sendo assim, segue por (2.146) e pela definição de c que

$$\begin{aligned} c &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4}\|\mathbf{v}_n\|^2 + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4}\|\mathbf{w}_n\|^2 \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4} t_n^2\|\mathbf{v}_n\|^2 + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4} s_n^2\|\mathbf{w}_n\|^2 \\ &= \lim_{n\to\infty} \langle I'(t_n\mathbf{v}_n), t_n\mathbf{v}_n\rangle + \lim_{n\to\infty} \langle I'(s_n\mathbf{w}_n), s_n\mathbf{w}_n\rangle \\ &\geq c + c, \end{aligned}$$

o que é um absurdo. Logo, dicotomia não ocorre com v_n. □

Teorema 2.3. Se (H1), (H3) e (H7) ocorrem, então (2.1) possui uma solução positiva do tipo ground state.

Teorema 2.4. Se (H2), (H4) e (H7) ocorrem, então (2.1) possui uma solução positiva do tipo ground state.

Demonstração. (*Teoremas 2.3 e 2.4*) Considere $\{\mathbf{u}_n\} \in \mathcal{N}$ uma sequência minimizante, isto é, $I(\mathbf{u}_n) \to c$. Podemos assumir que $u_{1n} \geq 0$, $u_{2n} \geq 0$, pois não sendo o caso podemos definir novamente a sequência como $(|u_{1n}|, |u_{2n}|)$ e teremos

$$\langle I(|u_{1n}|, |u_{2n}|), (|u_{1n}|, |u_{2n}|)\rangle = \langle I(u_{1n}, u_{2n}), (u_{1n}, u_{2n})\rangle = 0 \text{ e } I(|u_{1n}|, |u_{2n}|) = I(u_{1n}, u_{2n}) \to c.$$

Dado que $\{\mathbf{u}_n\} \in \mathcal{N}$ e então $\|\mathbf{u}_n\|^2 = 4I(\mathbf{u}_n) \to 4c$, temos que $\{\mathbf{u}_n\}$ é limitada. Segue pelo Teorema C.7 que

$$\begin{array}{lcll} (u_{1n}, u_{2n}) & \rightharpoonup & (u_1, u_2) & \text{em } \mathcal{H} \\ (u_{1n}, u_{2n}) & \to & (u_1, u_2) & \text{em } L^4_{loc}(\mathbb{R}^N) \times L^4_{loc}(\mathbb{R}^N) \\ (u_{1n}, u_{2n}) & \to & (u_1, u_2) & \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^N. \end{array} \tag{2.151}$$

para alguma subsequência $\{\mathbf{u}_n\} = \{(u_{1n}, u_{2n})\}$. Tomemos tal subsequência.

Provaremos que (u_1, u_2) atinge c.

De acordo com o Lema 2.7, compacidade ocorre com ν_n, isto é, existe uma sequência $\{y_n\} \subset \mathbb{R}^N$ tal que para $\varepsilon > 0$ existe $r > 0$ com a propriedade que se segue

$$\int_{B_r(y_n)} d\nu_n \geq c - \varepsilon, \forall n.$$

Mostraremos que y_n pode ser "escolhida" sendo uma sequência limitada.

Considere que (H2) e (H4) ocorram, bem como nas hipóteses do Teorema 2.4. Para cada $n \in \mathbb{N}$, y_n está contido num bloco B_n cujos vértices pertencem a $\tau_1\mathbb{Z} \times ... \times \tau_N\mathbb{Z}$. Seja $x_n \in \tau_1\mathbb{Z} \times ... \times \tau_N\mathbb{Z}$ o vértice de B_n mais próximo de y_n. Considere $R = \sup_n |y_n - x_n| + r$, segue que $B_r(y_n) \subset B_R(x_n)$. Logo

$$\int_{B_R(x_n)} d\nu_n \geq \int_{B_r(y_n)} d\nu_n \geq c - \varepsilon, \forall n. \tag{2.152}$$

Porém,

$$\begin{aligned}\int_{B_R(x_n)} d\nu_n &= \frac{1}{4}\int_{B_R(x_n)} (|\nabla u_{1n}|^2 + V_1 u_{1n}^2 + |\nabla u_{2n}|^2 + V_1 u_{2n}^2)\\ &= \frac{1}{4}\int_{B_R(0)} (|\nabla u_{1n}(.+x_n)|^2 + V_1(.+x_n)u_{1n}^2(.+x_n)\\ &+|\nabla u_{2n}(.+x_n)|^2 + V_1(.+x_n)u_{2n}^2(.+x_n)).\end{aligned}$$

Pela hipótese (H2) temos que $V_j(.+x_n) = V_j$, logo, pelo Teorema A.12

$$\begin{aligned}\int_{B_R(x_n)} d\nu_n &= \frac{1}{4}\int_{B_R(0)} (|\nabla u_{1n}(.+x_n)|^2 + V_1 u_{1n}^2(.+x_n)\\ &+|\nabla u_{2n}(.+x_n)|^2 + V_1 u_{2n}^2(.+x_n)),\ \forall n.\end{aligned} \tag{2.153}$$

Dado que $x_n \in \tau_1\mathbb{Z}\times ...\times \tau_N\mathbb{Z}$, podemos redefinir $\{\mathbf{u}_n\}$ como $\{(u_{1n}(.+x_n), u_{2n}(.+x_n))\}$ e consequentemente ν_n, desde que por (H2) e (H4), pela Proposição B.2 e pelo Teorema A.12 temos que

$$I(u_{1n},u_{2n}) = I(u_{1n}(.+x_n),u_{2n}(.+x_n)) \text{ e } I'((u_{1n},u_{2n})) = I'(u_{1n}(.+x_n),u_{2n}(.+x_n)).$$

Deste modo, por (2.152) e (2.153) temos que dado $\varepsilon > 0$ existe $R > 0$ tal que

$$\int_{B_R(0)} d\nu_n \geq c - \varepsilon, \forall n.$$

Ou seja, caso (H2) e (H4) ocorram, tomando r suficientemente grande, a sequência y_n proveniente da *compacidade*, pode ser tomada identicamente nula.

Caso (H1) e (H3) ocorram, bem como nas hipóteses do Teorema 2.3, suponha por cantradição que $|y_n| \to +\infty$. Podemos assumir que ao menos uma das funções V_j, μ_j, β é não-constante, caso contrário (H2) e (H4) são trivialmente satisfeitas. Como $I(\mathbf{u}_n) \to c$, então para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implica em

$$I(\mathbf{u}_n) - c < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{ou seja,} \quad \int_{\mathbb{R}^N} d\nu_n - c < \frac{\varepsilon}{2} \quad ,$$

logo, quaisquer que sejam $r > 0$ e $y \in \mathbb{R}^N$ devemos ter que

$$\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_r(y)} d\nu_n + \int_{B_r(y)} d\nu_n - c < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.154}$$

Da compacidade proveniente do *Lema de concentração e compacidade de Lions*, tomando $r = r(\varepsilon/2)$ obtemos

$$c - \int_{B_r(y_n)} d\nu_n \leq \frac{\varepsilon}{2}, \ \forall n. \tag{2.155}$$

Tomando $y = y_n$ em (2.154) e somando o obtido com (2.155) concluímos que para todo $\varepsilon > 0$ existe $r > 0$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_r(y_n)} d\nu_n < \varepsilon, \tag{2.156}$$

para $n > n_0$. Então,

$$\begin{aligned}
I_\infty(\mathbf{u}_n) = \ & \frac{\|\mathbf{u}_n\|_\infty^2}{2} - \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^N}(\mu_{1\infty}u_{1n}^4 + 2\beta_\infty u_{1n}^2 u_{2n}^2 + \mu_{2\infty}u_{2n}^4) \\
= \ & I(\mathbf{u}_n) - \int_{\mathbb{R}^N}[(V_1 - V_{1\infty})u_{1n}^2 + (V_2 - V_{2\infty})u_{2n}^2 + \frac{1}{4}(\mu_{1\infty} - \mu_1)u_{1n}^4] \\
& + \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^N}[2(\beta_\infty - \beta)u_{1n}^2 u_{2n}^2 + (\mu_{2\infty} - \mu_2)u_{2n}^4] \\
= \ & I(\mathbf{u}_n) - \int_{B_r(y_n)}[(V_1 - V_{1\infty})u_{1n}^2 + (V_2 - V_{2\infty})u_{2n}^2 + \frac{1}{4}(\mu_{1\infty} - \mu_1)u_{1n}^4] \\
& + \frac{1}{4}\int_{B_r(y_n)}[2(\beta_\infty - \beta)u_{1n}^2 u_{2n}^2 + (\mu_{2\infty} - \mu_2)u_{2n}^4] \\
& - \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_r(y_n)}[(V_1 - V_{1\infty})u_{1n}^2 + (V_2 - V_{2\infty})u_{2n}^2 + \frac{1}{4}(\mu_{1\infty} - \mu_1)u_{1n}^4] \\
& + \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_r(y_n)}[2(\beta_\infty - \beta)u_{1n}^2 u_{2n}^2 + (\mu_{2\infty} - \mu_2)u_{2n}^4].
\end{aligned} \tag{2.157}$$

$\{\mathbf{u}_n\}$ é limitada em $\mathcal{H}$, é então em limitada em $L^4(\mathbb{R}^N) \times L^4(\mathbb{R}^N)$, pelo Corolário B.3. Temos então que $|u_{in}^2|_\infty < +\infty$ e $|u_{in}^4|_\infty < +\infty$, portanto

$$\begin{aligned}
\left|\int_{B_r(y_n)}(V_1 - V_{1\infty})u_{1n}^2\right| &\leq |u_{1n}^2|_\infty \int_{B_r(y_n)}|(V_1 - V_{1\infty})| \\
\left|\int_{B_r(y_n)}(V_2 - V_{2\infty})u_{2n}^2\right| &\leq |u_{2n}^2|_\infty \int_{B_r(y_n)}|(V_2 - V_{2\infty})| \\
\left|\int_{B_r(y_n)}(\mu_{1\infty} - \mu_1)u_{1n}^4\right| &\leq |u_{1n}^4|_\infty \int_{B_r(y_n)}|(\mu_{1\infty} - \mu_1)| \\
\left|\int_{B_r(y_n)}2(\beta_\infty - \beta)u_{1n}^2 u_{2n}^2\right| &\leq 2|u_{1n}^2|_\infty |u_{2n}^2|_\infty \int_{B_r(y_n)}|(\beta_\infty - \beta)| \\
\left|\int_{B_r(y_n)}(\mu_{2\infty} - \mu_2)u_{2n}^4\right| &\leq |u_{2n}^4|_\infty \int_{B_r(y_n)}|(\mu_{2\infty} - \mu_2)|.
\end{aligned}$$

Das condições (H1) e (H3) existe $R > 0$, tal que $|x| > R$ implica que

$$
\begin{aligned}
0 \quad &\leq |(V_1 - V_{1\infty})|, |(V_2 - V_{2\infty})|, |(\mu_{1\infty} - \mu_1)|, |(\beta_\infty - \beta)|, |(\mu_{2\infty} - \mu_2)| \\
&< \frac{\varepsilon}{vol(B_r(y_n)) \max\{|u_{1n}^2|_\infty, |u_{2n}^2|_\infty, |u_{1n}^4|_\infty, 2|u_{1n}^2|_\infty |u_{2n}^2|_\infty \int_{B_r(y_n)}, |u_{2n}^4|_\infty\}}.
\end{aligned}
$$

Dado que $|y_n| \to +\infty$ considere $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|y_n| > R + r$ se $n > n_0$, deste modo $B_r(y_n) \subset \mathbb{R}^N \backslash B_R(0)$, ou seja, $|x| > R$ para todo $x \in B_r(y_n)$. Logo, $n > n_0$ implica que

$$
\begin{aligned}
\left| \int_{B_r(y_n)} (V_1 - V_{1\infty}) u_{1n}^2 \right| &< |u_{1n}^2|_\infty \int_{B_r(y_n)} \frac{\varepsilon}{|u_{1n}^2|_\infty vol(B_r(y_n))} < \varepsilon \\
\left| \int_{B_r(y_n)} (V_2 - V_{2\infty}) u_{2n}^2 \right| &< |u_{2n}^2|_\infty \int_{B_r(y_n)} \frac{\varepsilon}{|u_{2n}^2|_\infty vol(B_r(y_n))} < \varepsilon \\
\left| \int_{B_r(y_n)} (\mu_{1\infty} - \mu_1) u_{1n}^4 \right| &< |u_{1n}^4|_\infty \int_{B_r(y_n)} \frac{\varepsilon}{|u_{1n}^4|_\infty vol(B_r(y_n))} < \varepsilon \\
\left| \int_{B_r(y_n)} 2(\beta_\infty - \beta) u_{1n}^2 u_{2n}^2 \right| &< 2|u_{1n}^2|_\infty |u_{2n}^2|_\infty \int_{B_r(y_n)} \frac{\varepsilon}{2|u_{1n}^2|_\infty |u_{2n}^2|_\infty vol(B_r(y_n))} < \varepsilon \\
\left| \int_{B_r(y_n)} (\mu_{2\infty} - \mu_2) u_{2n}^4 \right| &< |u_{2n}^4|_\infty \int_{B_r(y_n)} \frac{\varepsilon}{|u_{2n}^4|_\infty vol(B_r(y_n))} < \varepsilon.
\end{aligned}
$$

isto é,

$$
\begin{aligned}
\int_{B_r(y_n)} &[(V_1 - V_{1\infty}) u_{1n}^2 + (V_2 - V_{2\infty}) u_{2n}^2 + (\mu_{1\infty} - \mu_1) u_{1n}^4 \\
&+ 2(\beta_\infty - \beta) u_{1n}^2 u_{2n}^2 + (\mu_{2\infty} - \mu_2) u_{2n}^4] \to 0,
\end{aligned}
\tag{2.158}
$$

quando $n \to +\infty$. Além disto, (2.156) implica que

$$
\int_{\mathbb{R}^N \backslash B_r(y_n)} d\nu_n = \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^N \backslash B_r(y_n)} (|\nabla u_{1n}|^2 + V_1 u_{1n}^2 + |\nabla u_{2n}|^2 + V_1 u_{2n}^2) \to 0,
$$

logo

$$
0 \leq L \int_{\mathbb{R}^N \backslash B_r(y_n)} (u_{1n}^2 + u_{2n}^2) \leq \int_{\mathbb{R}^N \backslash B_r(y_n)} (|\nabla u_{1n}|^2 + V_1 u_{1n}^2 + |\nabla u_{2n}|^2 + V_1 u_{2n}^2) \to 0,
$$

com $L = \min\limits_{j=1,2} \left\{ \inf\limits_x V_j(x) \right\}$, portanto

$$
\int_{\mathbb{R}^N \backslash B_r(y_n)} (u_{1n}^2 + u_{2n}^2) \to 0, \tag{2.159}
$$

e mais,

$$\begin{aligned} 0 &\leq M\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_r(y_n)}(u_{1n}^4+2u_{1n}^2u_{2n}^2+u_{2n}^4)\\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N\setminus B_r(y_n)}(\mu_1u_{1n}^4+2\beta u_{1n}^2u_{2n}^2+\mu_2u_{2n}^4)\\ &= \int_{\mathbb{R}^N\setminus B_r(y_n)}(|\nabla u_{1n}|^2+V_1u_{1n}^2+|\nabla u_{2n}|^2+V_1u_{2n}^2)\to 0, \end{aligned}$$

em que $M=\min\{\mu_{j\infty},\beta_\infty; j=1,2\}$, logo

$$\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_r(y_n)}(u_{1n}^4+2u_{1n}^2u_{2n}^2+u_{2n}^4)\to 0 \tag{2.160}$$

assim, por (2.159) e (2.160), obtemos que

$$\begin{aligned} &\left|\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_r(y_n)}[(V_1-V_{1\infty})u_{1n}^2+(V_2-V_{2\infty})u_{2n}^2+(\mu_{1\infty}-\mu_1)u_{1n}^4]\right.\\ &\left.+\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_r(y_n)}[2(\beta_\infty-\beta)u_{1n}^2u_{2n}^2+(\mu_{2\infty}-\mu_2)u_{2n}^4]\right|\\ &\leq H\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_r(y_n)}(u_{1n}^2+u_{2n}^2+u_{1n}^4+2u_{1n}^2u_{2n}^2+u_{2n}^4)\\ &\leq H\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_r(y_n)}(u_{1n}^2+u_{2n}^2)+H\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_r(y_n)}(u_{1n}^4+2u_{1n}^2u_{2n}^2+u_{2n}^4)\to 0 \end{aligned} \tag{2.161}$$

em que $H=\max\{\sup\limits_x|(V_1-V_{1\infty})|,\sup\limits_x|(V_2-V_{2\infty})|,\sup\limits_x|(\mu_{1\infty}-\mu_1)|,\sup\limits_x|(\mu_{2\infty}-\mu_2)|,$ $\sup\limits_x|(\beta_\infty-\beta)|\}$.
Segue por (2.157), (2.158), (2.161) e do fato de que $I(\mathbf{u}_n)\to 0$ que

$$I_\infty(\mathbf{u}_n)=I(\mathbf{u}_n)+o(1)=c+o(1).$$

Analogamente,

$$\langle I_\infty'(\mathbf{u}_n),\mathbf{u}_n\rangle=\langle I'(\mathbf{u}_n),\mathbf{u}_n\rangle+o(1)=o(1).$$

Portanto, tomando $t_n>$ tal que $t_n\mathbf{u}_n\in\mathcal{N}_\infty$, dado que $\{\mathbf{u}_n\}\in\mathcal{N}$, ocorre que

$$\begin{aligned} t_n^2 &= \frac{\|\mathbf{u}_n\|_\infty^2}{\int_{\mathbb{R}^N}(\mu_{1\infty}u_{1n}^4+2\beta_\infty u_{1n}^2u_{2n}^2+\mu_{2\infty}u_{2n}^4)}\\ &= \frac{\|\mathbf{u}_n\|_\infty^2}{\int_{\mathbb{R}^N}(\mu_{1\infty}u_{1n}^4+2\beta_\infty u_{1n}^2u_{2n}^2+\mu_{2\infty}u_{2n}^4)}-\frac{\int_{\mathbb{R}^N}(\mu_{1\infty}u_{1n}^4+2\beta_\infty u_{1n}^2u_{2n}^2+\mu_{2\infty}u_{2n}^4)}{\int_{\mathbb{R}^N}(\mu_{1\infty}u_{1n}^4+2\beta_\infty u_{1n}^2u_{2n}^2+\mu_{2\infty}u_{2n}^4)}+1 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\|\mathbf{u}_n\|_\infty^2 - \int_{\mathbb{R}^N}(\mu_{1\infty}u_{1n}^4 + 2\beta_\infty u_{1n}^2u_{2n}^2 + \mu_{2\infty}u_{2n}^4)}{\int_{\mathbb{R}^N}(\mu_{1\infty}u_{1n}^4 + 2\beta_\infty u_{1n}^2u_{2n}^2 + \mu_{2\infty}u_{2n}^4)} + 1\\
&= \frac{\langle I'_\infty(\mathbf{u}_n), \mathbf{u}_n\rangle}{\int_{\mathbb{R}^N}(\mu_{1\infty}u_{1n}^4 + 2\beta_\infty u_{1n}^2u_{2n}^2 + \mu_{2\infty}u_{2n}^4)} + 1\\
&= \frac{\langle I'(\mathbf{u}_n), \mathbf{u}_n\rangle + o(1)}{\int_{\mathbb{R}^N}(\mu_{1\infty}u_{1n}^4 + 2\beta_\infty u_{1n}^2u_{2n}^2 + \mu_{2\infty}u_{2n}^4)} + 1\\
&= o(1) + 1,
\end{aligned}
$$

isto é, $t_n \to 1$. Deste modo, pela continuidade de I_∞ temos

$$c = \lim_{n\to\infty} I_\infty(\mathbf{u}_n) = \lim_{n\to\infty} I_\infty(t_n\mathbf{u}_n) \geq c_\infty,$$

o que contradiz o Lema 2.5. Concluímos então, que, caso (H1) e (H3) ocorram, y_n deve ser limitada.

Note que se em (2.156), fizermos com que $r > 0$ aumente, a desigualdade ainda é válida. Dado que $\{y_n\}$ é limitada e pela compacidade, que ocorre com ν_n, para todo ε existe $r > 0$ tal que $|y_n| < r$ e

$$\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_r(0)} d\nu_n < \varepsilon,\ \forall n. \tag{2.162}$$

Como consequência, temos

$$(u_{1n}, u_{2n}) \to (u_1, u_2) \text{ em } L^4(\mathbb{R}^N) \times L^4(\mathbb{R}^N).$$

Em verdade, por (2.162) tem-se que para todo ε existe $r > 0$ tal que

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_r(0)} d\nu_n &= \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_r(0)} (|\nabla u_{1n}|^2 + V_1u_{1n}^2 + |\nabla u_{2n}|^2 + V_1u_{2n}^2)\\
&= \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_r(0)} (\mu_1u_{1n}^4 + 2\beta u_{1n}^2u_{2n}^2 + \mu_2u_{2n}^4) < \varepsilon,\ \forall n,
\end{aligned}
$$

em particular,

$$\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_r(0)} u_{1n}^4 < \frac{4\varepsilon}{\inf\limits_x\{\mu_1(x)\}},\ \int_{\mathbb{R}^N\setminus B_r(0)} u_{2n}^4 < \frac{4\varepsilon}{\inf\limits_x\{\mu_2(x)\}}$$

ou seja, para todo ε existe $r > 0$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_r(0)} u_{1n}^4 < \varepsilon,\ \int_{\mathbb{R}^N\setminus B_r(0)} u_{2n}^4 < \varepsilon,\ \forall n. \tag{2.163}$$

Como expresso em (2.130),

$$(u_{1n},u_{2n}) \to (u_1,u_2) \text{ em } L^4_{loc}(\mathbb{R}^N)\times L^4_{loc}(\mathbb{R}^N).$$

Então, considerando o compacto $\overline{B_r(0)}$, temos que para todo $\varepsilon>0$ existe $n_0=n_0(r,\varepsilon)$ tal que

$$\int_{B_r(0)} |u_{jn}-u_j|^4 < \varepsilon,\ j=1,2, \tag{2.164}$$

quando $n>n_0$. Além disso, porque $\int_{\mathbb{R}^N} u_j < +\infty$, para todo ε existe $r>0$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_r(0)} u_1^4 < \varepsilon. \tag{2.165}$$

Tomemos $r_1=r_1(\varepsilon/6)$ em (2.163), $r_2=r_2(\varepsilon/6)$ em (2.165) e $n_0=n_0(r,\varepsilon)=n_0(\varepsilon)$ em (2.164) com $r>r_1,r_2$. Logo, se $n>n_0$ então

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N}|u_{jn}-u_j|^4 = {} & \int_{B_r(0)}|u_{jn}-u_j|^4+\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_r(0)}|u_{jn}-u_j|^4\\
= {} & \int_{B_r(0)}|u_{jn}-u_j|^4+\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_r(0)}(u_{jn}^4-4u_{jn}^3u_j+6u_{jn}^2u_j^2-4u_{jn}u_j^3+u_j^4)\\
\le {} & \int_{B_r(0)}|u_{jn}-u_j|^4+\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_r(0)}(u_{jn}^4+6u_{jn}^2u_j^2+u_j^4)\\
\le {} & \int_{B_r(0)}|u_{jn}-u_j|^4+\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_r(0)}u_{jn}^4\\
& +6\left(\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_r(0)}u_{jn}^4\right)^{1/2}\left(\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_r(0)}u_j^4\right)^{1/2}+\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_r(0)}u_j^4\\
< {} & \frac{\varepsilon}{6}+\frac{\varepsilon}{6}+6\left(\frac{\varepsilon}{6}\right)^{1/2}\left(\frac{\varepsilon}{6}\right)^{1/2}+\frac{\varepsilon}{6}\\
< {} & \varepsilon.
\end{aligned}$$

Portanto, de fato

$$(u_{1n},u_{2n}) \to (u_1,u_2) \text{ em } L^4(\mathbb{R}^N)\times L^4(\mathbb{R}^N).$$

Sendo assim, necessariamente $\mathbf{u}\neq 0$. Caso contrário, teríamos que $(u_{1n},u_{2n})\to(0,0)$ em $L^4(\mathbb{R}^N)\times L^4(\mathbb{R}^N)$ e então, desde que $\mathbf{u}_n\in\mathcal{N}$, temos

$$
\begin{aligned}
0 \leq \|\mathbf{u}_n\|^2 = &\int_{\mathbb{R}^N}(\mu_1 u_{1n}^4 + 2\beta u_{1n}^2 u_{2n}^2 + \mu_2 u_{2n}^4)\\
= \ & C\int_{\mathbb{R}^N}(u_{1n}^4 + 2u_{1n}^2 u_{2n}^2 + u_{2n}^4)\\
= \ & C\left[\int_{\mathbb{R}^N} u_{1n}^4 + 2\left(\int_{\mathbb{R}^N} u_{1n}^4\right)^{1/2}\left(\int_{\mathbb{R}^N} u_{2n}^4\right)^{1/2} + \int_{\mathbb{R}^N} u_{2n}^4\right]\\
\leq \ & C(\|u_{1n}\|_{L^4}^2 + \|u_{2n}\|_{L^4}^2)^2 \to 0
\end{aligned}
$$

ou seja, teríamos que $\mathbf{u} \to 0$ em $\mathcal{H}$, o que contradiz o Lema 2.6.
Além disto, dado que o funcional norma $\|\cdot\|$ é fracamente semicontínuo inferiormente (consultar item (iii) da Proposição A.2) inferimos que

$$
\langle I'(\mathbf{u}), \mathbf{u}\rangle \leq \liminf_{n\to\infty} \langle I'(\mathbf{u}_n), \mathbf{u}_n\rangle = 0. \tag{2.166}
$$

Dado que $\mathbf{u} \neq 0$, podemos obter $t > 0$ tal que $t\mathbf{u} \in \mathcal{N}$, deste modo, por (2.166) temos que

$$
\begin{aligned}
t^2 = \ & \frac{\|\mathbf{u}\|^2}{\int_{\mathbb{R}^N}(\mu_1 u_1^4 + 2\beta u_1^2 u_2^2 + \mu_2 u_2^4)}\\
= \ & \frac{\|\mathbf{u}\|^2}{\int_{\mathbb{R}^N}(\mu_1 u_1^4 + 2\beta u_1^2 u_2^2 + \mu_2 u_2^4)} - \frac{\int_{\mathbb{R}^N}(\mu_1 u_1^4 + 2\beta u_1^2 u_2^2 + \mu_2 u_2^4)}{\int_{\mathbb{R}^N}(\mu_1 u_1^4 + 2\beta u_1^2 u_2^2 + \mu_2 u_2^4)} + 1\\
= \ & \frac{\|\mathbf{u}\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N}(\mu_1 u_1^4 + 2\beta u_1^2 u_2^2 + \mu_2 u_2^4)}{\int_{\mathbb{R}^N}(\mu_1 u_1^4 + 2\beta u_1^2 u_2^2 + \mu_2 u_2^4)} + 1\\
= \ & \frac{\langle I'(\mathbf{u}), \mathbf{u}\rangle}{\int_{\mathbb{R}^N}(\mu_1 u_1^4 + 2\beta u_1^2 u_2^2 + \mu_2 u_2^4)} + 1,
\end{aligned}
$$

deste modo, por (2.166) temos que

$$
\begin{aligned}
t^2 = \ & \frac{\langle I'(\mathbf{u}), \mathbf{u}\rangle}{\int_{\mathbb{R}^N}(\mu_1 u_1^4 + 2\beta u_1^2 u_2^2 + \mu_2 u_2^4)} + 1\\
\leq \ & 1,
\end{aligned}
$$

logo $t \in (0,1]$, então concluímos que

$$
c \leq I(t\mathbf{u}) = \frac{1}{4}t^2\|\mathbf{u}\|^2 \leq \frac{1}{4}\|\mathbf{u}\|^2 \leq \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{4}\|\mathbf{u}_n\|^2 = \liminf_{n\to\infty} I(\mathbf{u}_n) = c,
$$

isto é, necessariamente devemos ter que $t = 1$, $\mathbf{u} \in \mathcal{N}$ e $I(\mathbf{u}) = c$.
Sendo assim (u_1, u_2) é uma solução de (2.1), e além disso $u_1 \neq 0$, $u_2 \neq 0$. Em verdade, supondo $u_2 = 0$ por exemplo, temos que u_1 é uma solução ground state de (2.1) e $u_1 \neq 0$ é uma solução ground state de (2.2). Podemos supor sem perdas que $\mathbf{u} \geq \mathbf{0}$, pois não sendo o caso definimos $\mathbf{u} = (|u_1|, |u_2|)$ e ainda temos que $I(\mathbf{u}) = c$. Portanto, $u_1 \geq 0$ é uma solução ground state de (2.1), seguindo pelo Lema 1.6 que $u_1 > 0$. Sendo ω_1 uma solução ground state de (2.1), segue que $I(\omega_1, 0) = I(u_1, 0)$. Como a hipótese (H7) é satisfeita, ocorre que

$$c < I(\omega_1, 0) = I(u_1, 0) = c,$$

o que é uma impossibilidade. Logo temos $u_1 \neq 0$, $u_2 \neq 0$. Desde que $u_1 \geq 0$, $u_2 \geq 0$, segue pelo Lema 1.6 que $u_1 > 0$, $u_2 > 0$, o que conclui nossa demonstração.

$\square$

Apêndice A

Noções de Análise Funcional

Reservamos para este apêndice, a exibição de alguns resultados de Análise Funcional que foram utilizados ao longo desta dissertação. As demonstrações destes resultados, embora edificantes, foram, em sua maioria, omitidas para que o texto não ficasse demasiado longo. Porém indicaremos abaixo de cada resultado uma referência para consulta.

A.1 Princípio de Limitação Uniforme

Consideraremos E e F dois espaços vetoriais reais normados, denoraremos por $\mathcal{L}(E,F)$ o espaço dos operadores lineares limitados (contínuos) de E em F munido com a norma

$$\|T\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \sup_{x\in B_E} \|Tx\|_F.$$

em que $B_E = \{x \in E; \|x\|_E \leq 1\}$.

O próximo teorema é uma versão do resultado conhecido como *Princípio da Limitação Uniforme*.

Teorema A.1. (Banach-Steinhaus) Sejam E e F dois espaços de Banach e sejam $\{T_i\}_{i\in I}$ uma família (não necessariamente enumerável) de operadores lineares contínuos de E em F. Assuma que

$$\sup_{i\in I}\|T_i x\|_F < +\infty,\ \forall x \in E.$$

Então

$$\sup_{i\in I}\|T_i\|_{\mathcal{L}(E,F)} < +\infty.$$

Em outras palavras, existe uma constante c tal que

$$\|T_i x\|_F \leq c\|x\|_E.$$

Demonstração: [9], Teorema 2.2.

A.2 Espaços reflexivos

Seja E um espaço vetorial normado e E^* o espaço dual com a norma

$$\|f\|_{E^*} \sup_{x\in B_E} |\|\langle f,x\rangle\||.$$

O bidual E^{**} é o dual de E^* com a norma

$$\|\xi\|_{E^{**}} = \sup_{x\in B_{E^*}} \|\langle \xi, f\rangle\|_{E^{**}}.$$

Note que $\langle f,x\rangle := f(x)$. Esta notação é corriqueiramente utilizada em cursos de graduação para denotar o produto interno de dois vetores. Porém lembremos que E pode não se tratar de um espaço com produto interno.

Define-se, de modo natural, uma aplicação de E em E^{**}, que denotaremos por $J : E^* \to E^{**}$, da seguinte forma:

Dado $x \in E$ e $f \in E^*$, em $\langle f,x\rangle$ tomamos f como variável, ou seja,

$$\langle Jx, f\rangle_{E^{**},E^*} = \langle f,x\rangle_{E^*,E}, \ \forall x \in E, \forall f \in E^*.$$

Esta correspondência é denominada *Aplicação Canônica*, .

Vemos que J é uma aplicação linear. Além disso J é isometria, em verdade

$$\|Jx\|_{E^{**}} = \sup_{f\in B_{E^*}} |\langle Jx, f\rangle| = \sup_{f\in B_{E^*}} |\langle f,x\rangle| = \|x\|_E, \tag{A.1}$$

logo, com maior razão, é também contínua.

A última igualdade em (A.1) é decorrente do *Teorema de Hahn-Banach* e pode ser vista em [9], Corolário 1.4.

Sendo J isomteria linear, é portanto uma aplicação injetiva. Porém, pode ocorrer de J não ser sobrejetiva. Como é o caso de $C(K)$, o espaço das funções contínuas sobre um espaço métrico infinito compacto K. A possível ocorrência deste evento nos conduz à próxima definição.

Definição A.1. Diz-se que E é reflexivo se J é sobrejetiva.

A.3 Topologia Fraca

Considere um conjunto X (que a priori não possui nenhuma estrutura) e uma família (não necessariamente enumerável) de *espaços topológicos* $\{Y_i\}_{i\in I}$. Considere também, uma família de aplicações $\{\varphi_i\}_{i\in I}$, de modo que para cada $i \in I$, φ_i é uma correspondência de X em Y_i. É possível construir uma *topologia* $\mathcal{T}$ em X a partir da família de aplicações $\{\varphi_i\}_{i\in I}$ de forma que $\varphi_i : X \to Y_i$ é contínua para todo $i \in I$, e que $\mathcal{T}$ seja a topologia mais econômica com esta propriedade, no sentido de que qualquer outra topologia em que $\{\varphi_i\}_{i\in I}$ seja uma família de aplicações contínuas deve conter $\mathcal{T}$. Esboçaremos esta construção nos passos a seguir:

Passo 1: Em princípio, para que φ_i seja contínua é necessário e suficiente que $\varphi_i^{-1}(\omega_i)$ seja um conjunto aberto na topologia em questão, para todo aberto ω_i em Y_i. Tomemos então a família formada pelas imagens inversas dos abertos de Y_i por φ_i, quando i varia através de I e a denotemos por $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$. Além disso, para que uma família de subconnjuntos de X definam uma topologia é necessário que tanto a interseção de uma quantidade finita destes abertos quanto a união arbitrária ainda formem um aberto desta família. Até agora não é possível garantir que $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ satisfaça essa condição. Nos próximos passo transporemos este obstáculo. Note que X e $\{\emptyset\}$ estão em $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$.

Passo 2: Considere a família Ψ formada pelas interseções $\cap_{\lambda\in\Gamma}U_\lambda$, em que Γ é um subconjunto finito qualquer em Λ. Observe que Ψ contém $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, afinal dado $\lambda \in \Lambda$, podemos considerar U_λ como uma interseção unitária. E além disso Ψ é fechada para a interseção finita. De fato, pois o conjunto de índices desta insterseção, é a união finita de subconnjuntos finitos de Λ. Porém, possivelmente Ψ não é fechada para a interseção arbitrária.

Passo 3: Considere uma nova família $\mathcal{F}$ de abertos obtidos a partir das uniões arbitrárias de elementos de Ψ. Tem-se que Ψ é fechada para a união arbitrária, pois a união arbitrária de elementos de $\mathcal{F}$ se trata de uma união arbitrária de elementos de Ψ. Porém não é óbvio que $\mathcal{F}$ é fechado para as interseções finitas. Isto nos leva ao próximo resultado.

Lema A.1. A família $\mathcal{F}$ é fechada para as interseções finitas.

Demonstração: [9], Lema 3.1.

Considere E um espaço de Banach. Assim obtemos a definição que se segue.

Definição A.2. A *topologia fraca* $\sigma(E,E^*)$ em E é a topologia obtida quando na construção acima consideramos $X = E$, $Y_i = \mathbb{R}$ para todo $i \in I$ e $\Lambda = E^*$ de forma que a família de aplicações $\{\varphi_f\}_{f\in E^*}$ é obtida pondo-se $\varphi_f = \langle f, x\rangle$.

Observe que do fato de $\sigma(E,E^*)$ ser a topologia "mais gosseira" na qual se verifica a continuidade de φ_f para todo $f \in E^*$, decorre que a topologia fraca está contida na topologia induzida pela norma de E.

Proposição A.1. A topologia fraca $\sigma(E,E^*)$ é *Hausdorff*, isto é, dados dois pontos distintos x_1 e x_2 em E, existem abertos A_1 e A_2 tais que $x_1 \in A_1$, $x_2 \in A_2$ e $A_1 \cap A_2 = \emptyset$.

Demonstração: [9], Proprosição 3.3.

Conseguimos através desta proposição concluir a unicidade para limite de uma sequência convergente em $\sigma(E,E^*)$.

Se uma sequência $\{x_n\}$ converge para x em $\sigma(E,E^*)$ denotaremos

$$x_n \rightharpoonup x.$$

Diremos neste caso que $\{x_n\}$ *converge fraco* para x em $\sigma(E,E^*)$. Se $\{x_n\}$ é converge para x segundo a topologia gerada em E pela norma, ou seja,

$$\|x_n - x\|_E \to 0, \text{ quando } n \to +\infty,$$

denotaremos $x_n \to x$, e eventualmente, a fim de evitar confusão textual, diremos que $\{x_n\}$ *converge forte* para x.

Proposição A.2. Seja x_n uma sequência em E. Então

(i) $x_n \rightharpoonup x$ fraco em $\sigma(E,E^*)$ se, e somente se, $\langle f, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$ $\forall f \in E^*$.

(ii) Se $x_n \to x$ forte, então $x_n \rightharpoonup x$ fraco em $\sigma(E,E^*)$.

(iii) Se $x_n \rightharpoonup x$ fraco em $\sigma(E,E^*)$, então $\{\|x_n\|_E\}$ é limitada e $\|x\|_E \leq \liminf \|x_n\|_E$.

(iv) Se $x_n \rightharpoonup x$ fraco em $\sigma(E,E^*)$ e $f_n \to f$ forte em E^* (ou seja, $\|f_n - f\|_{E^*} \to 0$) então $\langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$.

Demonstração: [9], Proprosição 3.5.
Porque vale (iii) diremos que $\|\cdot\|_E$ é *fracamente semicontínua inferiormente*.

Teorema A.2. Sejam E e F espaços de Banach e T um operador linear de E em F. Suponha que T seja contínuo nas topologias fortes. Então, T é um operador contínuo de E com $\sigma(E,E^*)$ em F com $\sigma(F,F^*)$. Vale também a recíproca.

Demonstração: [9], Teorema 3.10.

Em geral, aplicações não-lineares que são contínuas de E em F, ambos com a topologia da norma, não são contínuas de E com $\sigma(E,E^*)$ em F com $\sigma(F,F^*)$. Fato que gera muitas difculdades em problemas não-lineares.

Teorema A.3. Seja E um espaço de Banach. Então E é reflexivo se, e somente se, B_E é um compacto na topologia fraca $\sigma(E,E^*)$.

Demonstração: [9], Teorema 3.17.

A.4 Operadores compactos

Definição A.3. Sejam E e F espaços de Banach. Um operador limitado $T \in \mathcal{L}(E,F)$ é dito *compacto* se $T(B_E)$ possui fecho compacto segundo a topologia da norma em F.

Vale lembrar que se E possui dimensão infinita então B_E nunca é um compacto na topologia da norma. Este fato está demonstrado em [9], Teorema 6.5.

Teorema A.4. Seja $\{x_n\}$ uma sequência que converge fraco para x em E e $T \in \mathcal{L}(E,F)$. Então existe uma subsequência $\{x_{n_k}\}$ tal que $\{T(x_{n_k})\}$ converge forte para $T(x)$ em F.

Demonstração. Dado que x_n é fracamente convergente, pelo item (iii) da Proprosição A.2 existe $R > 0$ tal que $\|x_n\|_E < R$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, a sequência $\frac{1}{R}x_n$ pertence a B_E. Da compacidade de $\overline{T(B_E)}$, nos é garantida a existência de uma subsequência $\{x_{n_k}\}$ tal que $\left\{\frac{1}{R}T(x_{n_k})\right\}$ é fortemente convergente em F, portanto $\{T(x_{n_k})\}$ é fortemente convergente em F, ou seja, existe $\frac{1}{R}y \in \overline{T(B_E)}$ tal que

$$\|T(x_{n_k}) - y\|_F \to 0.$$

Logo, através do item (ii) da Proprosição A.2 concluímos que $T(x_{n_k}) \rightharpoonup y$. Pelo Teorema A.2, temos que $T(x_{n_k}) \rightharpoonup T(x)$. Dado que $\sigma(F,F^*)$ é Hausdorff obtemos que $T(x) = y$, isto implica que $\{T(x_{n_k})\}$ converge forte para $T(x)$. $\square$

A.5 Espaços L^p

Introduziremos nesta seção alguns resultados sobre os espaços L^P, porém antes é necessário que recordemos de algumas informações básicas sobre a integral de *Lebesgue*, teoria na qual estão debruçados todos os conceitos de integrais que utilizamos nesta dissertação. Para isto recorremos a majoritariamente ao Capítulo 2 do livro [1], mais precisamente à primeira seção.

A.5.1 Noções de medida e integração

Definição A.4. Diz-se que uma coleção Σ de subconnjuntos de $\mathbb{R}^N$ é uma σ-*álgebra* satisfaz as seguintes condições:

(i) $\mathbb{R}^N \in \Sigma$.

(ii) Se $A \in \Sigma$, então seu complementar $A^c \in \Sigma$.

(iii) Se $A_j \in \Sigma$, $j = 1, 2, ...$, então $\cup_{j=1}^{\infty} A_j \in \Sigma$.

Da definição acima obtemos as seguintes propriedades:

(i') O conjunto vazio $\emptyset \in \Sigma$.
Para verificar isto, basta notar que $\emptyset = (\mathbb{R}^N)^c$.

(ii') Se $A_j \in \Sigma$, $j = 1, 2, ...$, então $\cap_{j=1}^{\infty} A_j \in \Sigma$.
De fato, pelas leis de De Morgan $\cap_{j=1}^{\infty} A_j = \left(\cup_{j=1}^{\infty} A_j^c\right)^c$, que pelos itens (ii) e (iii), pertence a Σ.

(iii') Se $A, B \in \Sigma$, então $A - B = A \cap B^c \in \Sigma$.
Nos itens (i') e (ii') considere $A = A_1$, $B = A_2$ e $\emptyset = A_j$, com $j \in \{3, 4, ...\}$.

Definição A.5. Uma função μ sobre uma σ-*álgebra* Σ que assume valores em $\mathbb{R} \cup +\infty$ e é σ-*aditiva*, no sentido de que

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j),$$

para toda família enumerável formada pelos conjuntos A_j, $j = 1, 2...$, disjuntos dois-a-dois é denominada uma *medida* (positiva) sobre Σ.

Segue da definição que

a) Se A, $B \in \Sigma$ e $A \subset B$, então $\mu(A) \leq \mu(B)$. Em verdade, se $A \subset B$ podemos escrever B como
$$B = A \cup (B - A) = A \cup (A^c \cap B).$$
Dado que A e $A^c \cap B$ são disjuntos, da σ-*aditividade* de μ concluímos que
$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(A^c \cap B) \geq \mu(A).$$

b) Se $A_j \in \Sigma$, $j = 1, 2, ...$ e $A_1 \subset A_2 \subset ...$, então
$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \lim_{j \to +\infty} \mu(A_j).$$
Note que $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = A_1 \cup \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} (A_{j+1} \cap A_j^c)\right)$, dado que $A_1 \subset A_2 \subset ...$. Definido $B_1 = A_1$ e $B_{j+1} = A_{j+1} \cap A_j^c$ com $j = 1, 2, ...$ temos que $B_j \neq B_k$ se $j \neq k$, logo pela σ-*aditividade* de μ concluímos que
$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j) = \lim_{j \to +\infty} \sum_{k=1}^{j} \mu(B_k)$$
porém, $\bigcup_{k=1}^{j} B_k = \bigcup_{k=1}^{j} A_k = A_j$. Portanto,
$$\sum_{k=1}^{j} \mu(B_k) = \left(\bigcup_{k=1}^{j} A_k = A_j\right) = \mu(A_j),$$
o que conclui a demonstração do item.

Teorema A.5. (**Existência da medida de Lebesgue**)([1], Teorema 1.39) Existe uma σ-ágebra Σ de subconjuntos de $\mathbb{R}^N$ e uma medida positiva μ sobre Σ satisfazendo as seguintes propriedades:

(i) Todo aberto de $\mathbb{R}^N$ pertence a Σ

(ii) Se $A \subset B$, $B \in \Sigma$, e $\mu(B) = 0$ então $A \in \Sigma$ e $\mu(A) = 0$.

(iii) Se $A = \{x \in \mathbb{R}^N;\ a_j \leq x_j \leq b_j,\ j = 1, 2, ..., n\}$, então $A \in \Sigma$ e $\mu(A) = \prod_{j=1}^{n} (b_j - a_j)$.

(iv) μ é *invariante por tanslação*. Isto significa que se $x \in \mathbb{R}^N$ e $A \in \Sigma$, então $x+A = \{x+y;\ y \in A\} \in \Sigma$, e $\mu(x+A) = \mu(A)$.

Os elementos de Σ são chamados conjuntos *Lebesgue mensuráveis* (ou apenas conjuntos *mensuráveis*) de $\mathbb{R}^N$, e μ é denominada *medida de Lebesgue* (ou apenas *medida*) em $\mathbb{R}^N$. Caso $A \in \Sigma$ com o qual estejamos lidando seja um *retângulo* (assim como no item (iii) do Teorema A.5) ou uma bola, denotaremos $vol(A)$ em vez de $\mu(A)$.

Definição A.6. (**Quase todo ponto - q.t.p.**) Se $B \subset A \subset \mathbb{R}^N$ e $\mu(B) = 0$, então diz-se que uma condição que seja satisfeita em $A - B$ ocorre *em quase todo ponto*, ou abreviadamente ocorre *q.t.p.*, em A.

Definição A.7. (**Funções mensuráveis**) Uma função $f : A \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, em que $A \in \Sigma$, é dita *mensurável* se o conjunto

$$\{x;\ f(x) > a\}$$

é mensurável para todo valor real a.

O próximo teorema revela aspectos importantes sobre funções mensuráveis.

Teorema A.6. ([1], Teorema 1.42)

(a) Se f é mensurável, então $|f|$ também o é.

(b) Se f e g são mensuráveis, então $f+g$ e fg também o são.

(c) Se $\{f_n\}$ é uma sequência de funções mensuráveis, então são também funções mensuráveis $\sup_n f_n$, $\inf_n f_n$, $\limsup f_n$ e $\liminf f_n$.

(d) Se f, definida num conjunto mensurável, é contínua, então f é mensurável.

(e) Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua e g é uma função de valor real mensurável então a composição $f \circ g$, dada por $f \circ g(x) = f(g(x))$, é mensurável.

Definição A.8. (**Funções simples e característica**) Seja $A \subset \mathbb{R}^N$. A função definida por

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in A \\ 0, & \text{se } x \notin A \end{cases}$$

é denominada a *função característica de A*.

Uma função $s : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é chamada *função simples* se o conjunto de valores que assume é finito. Neste caso, sendo $s(x) \in \{a_1, ..., a_n\}$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$, podemos definir s por

$$s(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{A_j}(x),$$

em que $A_j = \{x \in \mathbb{R}^N;\ s(x) = a_j\}$. Observe s é mensurável se, e somente se, $A_1, ..., A_n$ são todos mensuráveis.

A.5.2 A integral de Lebesgue

Considere uma função simples s, definida sobre um conjunto mensurável A, dada por

$$s(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{A_j}(x),$$

em que $A_1, ..., A_n$ são subconjuntos mensuráveis de A. Definimos a *integral de s sobre A* como

$$\int_A s(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j \mu(A_j).$$

Se $f : A \to \mathbb{R}$ é uma função mensurável e não-negativa, definimos a *integral de f sobre A* como

$$\int_A f(x)dx = \sup_{s \in \Delta} \int_A s(x)dx,$$

em que $\Delta = \{s : A \to \mathbb{R};\ s$ é uma função simples e $0 \leq s(x) \leq f(x)\ \forall x \in A\}$.

Seja $f : A \to \mathbb{R}$ mensurável. Pelo item (e) do Teorema A.6, as funções reais não-negativas f^+ e f^- dadas por $f^+ = \max\{f, 0\}$, $f^- = \max\{-f, 0\}$ são ambas mensuráveis.

Definição A.9. Se tivermos que $\int_A f^+(x)dx < +\infty$ ou $\int_A f^-(x)dx < +\infty$, definimos a *integral de f sobre A* como

$$\int_A f(x)dx = \int_A f^+(x)dx - \int_A f^-(x)dx.$$

Se ocorrer que $\int_A f^+(x)dx < +\infty$ e $\int_A f^-(x)dx < +\infty$, diz-se que f é *Lebesgue integrável* (ou apenas *integrável*) em A. O conjunto de todas as funções integráveis em A é denotado por $L^1(A)$.

Abaixo, enunciamos um importante teorema da Teoria de Medidas.

Teorema A.7. (**Teorema da Convergência Dominada**)Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto mensurável e $\{f_n\}$ uma sequência de funções em $L^1(\Omega)$ tal que

$$f_n(x) \to f(x) \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N.$$

Se existe uma função $g \in L^1(\Omega)$ tal que $|f_n(x)| \le |g(x)|$ para todo n e todo $x \in \Omega$, então $f \in L^1(\Omega)$ e

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n(x)dx = \int_\Omega \left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x) \right) dx = \int_\Omega f(x)dx.$$

A.5.3 Definição e resultados úteis dos espaços L^p

Consideraremos nesta seção Ω um subconjunto de $\mathbb{R}^N$ Lebesgue mensurável.

Definição A.10. Seja $p \in \mathbb{R}$ com $1 < p < \infty$. Definimos

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}; f \text{ é mensurável e } |f|^p \in L^1(\Omega)\},$$

com

$$\|f\|_{L^p} = \left[\int_\Omega |f(x)|^p dx \right]^{1/p}.$$

Identificamos em $L^p(\Omega)$ funções que são iguais q.t.p. em Ω. A relação de "igualdade q.t.p." faz com os elementos de $L^p(\Omega)$ sejam classes de equivalência.

Definição A.11. Definimos

$$L^\infty(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{array}{l} f \text{ é mensurável e existe uma constante } C \\ \text{tal que } |f(x)| \le C \text{ q.t.p. em } \Omega \end{array} \right\}$$

com

$$\|f\|_{L^\infty} = \inf\{C;\ |f(x)| \le C \text{ q.t.p. em } \Omega\}.$$

Seja $1 \le p \le \infty$. Denotaremos por p' o *conjugado* de p, no sentido que p' satisfaz

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

O teorema abaixo tem como resultado uma das mais importantes desigualdades da Análise Funcional.

Teorema A.8. (**Desigualdade de Hölder**) Suponha que $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^{p'}(\Omega)$ com $1 \leq p \leq \infty$. Então $fg \in L^1(\Omega)$ e

$$\int_\Omega |f(x)g(x)|dx = \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^{p'}}.$$

Demonstração: [9], Teorema 4.6.

Teorema A.9. $L^p(\Omega)$ é um *espaço vetorial* e $\|\cdot\|_{L^p}$ é uma norma, desde que p satisfaça $1 \leq p \leq \infty$.

Demonstração: [9], Teorema 4.8.

Teorema A.10. $L^p(\Omega)$ é um espaço de Banach, desde que p satisfaça $1 \leq p \leq \infty$.

Demonstração: [9], Teorema 4.8.

Teorema A.11. Sejam $\{f_n\}$ uma sequência em $L^p(\Omega)$ e $f \in L^p(\Omega)$ tais que $\|f_n - f\|_{L^p} \to 0$. Então, existe uma subsequência $\{f_{n_k}\}$ e uma função $h \in L^p(\Omega)$ tais que

1. $f_{n_k}(x) \to f(x)$ q.t.p. em Ω;

2. $|f_{n_k}(x)| \leq h(x)$ $\forall k$, q.t.p. em Ω.

Demonstração: [9], Teorema 4.9.

Teorema A.12. Seja $F : U \to \mathbb{R}^N$ uma função de classe C^1, em que U é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^N$. Se F é injetiva em U, então, para todo conjunto mensurável $A \subset U$ e toda função mensurável $g \in L^1(\mathbb{R}^N)$ ocorre que

$$\int_A g(F(x))|\det F'(x)|dx = \int_{F(A)} g(y)dy.$$

Demonstração: [8], Teorema 3.7.1.

A.6 Espaços de Hilbert

Relembremos que um espaço de Hilbert H é um espaço vetorial equipado com um produto interno $(\cdot,\cdot) : H \times H \to \mathbb{R}$, que é completo na topologia induzida pela norma $\|\cdot\|_H$, em que

$$\|u\|_H = (u,u)^{1/2}.$$

Proposição A.3. Seja H um espaço de Hilbert. Então, H é reflexivo.

Demonstração: [9], Proprosição 5.1.

Teorema A.13. (**Teorema da Representação de Riesz-Fréchet**) Dado $\varphi \in H^*$, existe um único $f \in H$ tal que

$$\langle \varphi, u \rangle = (f, u) \ \forall u \in H.$$

Além disso, $\|f\|_H = \|\varphi\|_{H^*}$.

Demonstração: [9], Teorema 5.5.

Apêndice B

Noções de Equações Diferenciais Parciais

No decorrer desta seção designaremos o termo *domínio* e o símbolo Ω para nos referir a um subconjunto aberto e não-vazio do $\mathbb{R}^N$, que por ser aberto é também mensurável (ver Teorema A.5 item (i)).

B.1 Derivada fraca

Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ e $i = 1, 2, ..., N$. Pode existir ou não uma função $v_i \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega u(x)\frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x)dx := -\int_\Omega v_i(x)\phi(x)dx, \ \forall \phi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Caso exista, v_i, a qual denotaremos por D_iu, é única (exceto, possivelmente, sobre um conjunto de medida nula) e é denomida a *i-ésima derivada fraca* de u.

Caso u possua derivadas parciais no sentido usual (*derivadas clássicas*), ou seja, o limite

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) := \lim_{t\to 0}\frac{u(x+te_1)-u(x)}{t}$$

existe para todo $x \in \Omega$, então sua i-ésimas derivada fraca coindice com sua i-ésima derivada parcial clássica. Porém, a existência de $D_iu(x)$ não implica na existência de $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$.

Se $D_iu(x)$ existe para $i = 1, 2, ..., N$, diremos que u é *fracamente diferenciável*. Denotaremos por $W^1(\Omega)$ o conjunto de todas as funções *fracamente diferenciáveis*.

Proposição B.1. Sejam $u, v \in W^1(\Omega)$, tais que uv, $uD_iv + vD_iu \in L^1_{loc}(\Omega)$. Então

$$D_i(uv) = uD_iv + vD_iu.$$

Demonstração: [13], página 150.

Proposição B.2. Sejam $u \in W^1(\Omega), \tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^N$ um domínio e $\psi : \Omega \to \tilde{\Omega}$ um difeomorfismo de classe C^1 com inversa também de classe C^1. Então $v = u \circ \psi^{-1} \in W^1(\tilde{\Omega})$ e

$$D_i u(x) = \frac{\partial y_j}{\partial x_i} D_{y_j}(y),$$

para quase todo $x \in \Omega$ (q.t.p.), $y \in \tilde{\Omega}$, $y = \psi(x)$.

Demonstração: [13], página 151.

Proposição B.3. Sejam $f \in C^1(\mathbb{R})$, $\dfrac{df}{dt} \in L^\infty(\mathbb{R})$ e $u \in W^1(\Omega)$. Então $f \circ u \in W^1(\Omega)$ e $D_i(f \circ u) = \dfrac{df}{dt} D_i u.$

Demonstração: [13], Lema 7.5.

Considere $u^+ = \max\{u, 0\}$ e $u^- = \max\{-u, 0\}$. Temos que $u = u^+ - u^-$ e $|u| = u^+ + u^-$.

Proposição B.4. Seja $u \in W^1(\Omega)$. Então $u^+, u^-, |u| \in W^1(\Omega)$ e além disso

$$D_i u^+ = \begin{cases} D_i u, & \text{se } u > 0 \\ 0, & \text{se } u \leq 0 \end{cases}$$

$$D_i u^- = \begin{cases} 0, & \text{se } u \geq 0 \\ -D_i u, & \text{se } u < 0 \end{cases}$$

$$D_i |u| = \begin{cases} D_i u, & \text{se } u > 0 \\ 0, & \text{se } u = 0 \\ -D_i u, & \text{se } u < 0. \end{cases}$$

Demonstração: [13], Lema 7.6.

B.2 Espaços de Sobolev

Nesta seção introduziremos os *Espaços de Sobolev*, mais precisamente os espaços $W^{1,p}(\Omega)$, $W_0^{1,p}(\Omega)$ e $H^{1,p}(\Omega)$. Consideraremos nesta seção $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ sendo um domínio, isto é, um subconjunto aberto e não-vazio de $\mathbb{R}^N$. Na verdade o leitor pode encontrar uma apresentação mais geral destes espaços em [1].

A fim de definir $W^{1,p}(\Omega)$ é necessário, primeiramente, que definamos o funcional $\|\cdot\|_{1,p}$ como se segue:

$$\|u\|_{1,p} = \left(\sum_{i=0}^{N} \|D_i u\|_{L^p}^{p} \right)^{1/p} \tag{B.1}$$

em que $D_0 u = u$.

Definição B.1. São definidos três espaços vetoriais, nos quais o funcional $\|\cdot\|_{1,p}$ é uma norma:

(a) $H^{1,p}(\Omega) := \{$o completamento de $\{u \in C^1(\Omega); \|u\|_{1,p} < +\infty\}$ com respeito a norma $\|u\|_{1,p}\}$;

(b) $W^{1,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega); D_i u \in L^p(\Omega)$ com $i = 1,2...,N\}$, em que $D_i u$ é a i-ésima derivada fraca de u;

(c) $W_0^{1,p}(\Omega) := \{$ o fecho de $C_c^{\infty}(\Omega)$ no espaço $W^{1,p}(\Omega)\}$.

Costuma-se denotar $W_0^{1,2}(\Omega)$ apenas por $H_0^1(\Omega)$.

Teorema B.1. $W^{1,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach.

Demonstração: [1], Teorema 3.3.

Em particular, $W^{1,2}(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com o produto interno dado por

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=0}^{N} \int_{\Omega} D_i u D_i v.$$

Teorema B.2. $H^{1,p}(\Omega) = W^{1,p}(\Omega)$.

Demonstração: [1], Teorema 3.17.

Costuma-se denotar $H^{1,2}(\Omega)$ apenas por $H^1(\Omega)$.

Teorema B.3. $W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N) = W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.

Demonstração: [1], Corolário 3.23.

B.3 Imersões de Sobolev

Diz-se que um espaço vetorial normado X está *imerso* em um espaço vetorial normado Y se

(i) X é um subespaço de Y, e

(ii) o operador identidade I definido de X em Y, dado por $Ix = x$ para todo $X \in X$, é contínuo.

Dado que I é linear, (ii) é equivalente a dizer que existe uma constante M tal que

$$\|Ix\|_Y \leq M\|x\|_X, \ \forall x \in X.$$

Representaremos o fato de X estar imerso Y pela notação "$X \hookrightarrow Y$."

Diz-se que X está *compactamente imerso* em Y se além de serem válidas (i) e (ii) tivermos também que o operador I é compacto.

Teorema B.4. (*Sobolev, Gagliardo, Nirenberg*). Seja $1 \leq p < N$. Então

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^{p^*}(\mathbb{R}^N),$$

em que p^* satisfaz a condição de $\dfrac{1}{p^*} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{N}$, e existe uma constante $C = C(p,N)$ tal que

$$\|u\|_{p^*} \leq C\|\nabla u\|_p, \ \forall u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N).$$

Demonstração: [9], Teorema 9.9.

Corolário B.1. Seja $1 \leq p < N$. Então

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N), \ \forall q \in [p, p^*].$$

Demonstração: [9], Corolário 9.10.

Corolário B.2. Considere $p = N$. Temos que

$$W^{1,}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N), \ \forall q \in [N, +\infty).$$

Demonstração: [9], Corolário 9.11.

Corolário B.3. Considere $N = 2,3$. Então

$$W^{1,2}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N),$$

para $q = 3, 7/2, 4, 6$.

Demonstração.

- Caso $N = 2$. Pelo Corolário B.2 temos que

$$W^{1,2}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N),\ \forall q \in [2,+\infty).$$

Como $3, 7/2, 4, 6 \in [2,+\infty)$, segue o resultado.

- Caso $N = 3$. Sendo $p = 2$ temos que $p^* = 6$. Pelo Corolário B.1 temos que

$$W^{1,}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N),\ \forall q \in [2,6].$$

Como $3, 7/2, 4, 6 \in [2,6]$, segue o resultado.

□

Para o próximo resultado considere a seguinte notação:

Seja $x \in \mathbb{R}^N$, denotaremos

$$x = (x', x_N) \text{ com } x' \in \mathbb{R}^{N-1},\ x' = (x_1, x_2, ..., x_{N-1}),$$

e defnimos

$$|x'| = \left(\sum_{i=1}^{N-1} x_i^2 \right)^{1/2}.$$

Definimos também

$$\begin{aligned}
\mathbb{R}^N_+ \quad &= \{x = (x', x_N);\ x_N > 0\}, \\
\mathcal{Q} \quad &= \{x = (x', x_N);\ |x'| < 1 \text{ e } |x_N| < 1\}, \\
\mathcal{Q}_+ \quad &= \mathcal{Q} \cap \mathbb{R}^N_+, \\
\mathcal{Q}_0 \quad &= \{x = (x', 0);\ |x'| < 1\}.
\end{aligned}$$

Definição B.2. Dizemos que um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é de *classe* C^1 se para todo $x \in \partial\Omega = \Gamma$ existe uma vizinhança U de x em $\mathbb{R}^N$ e uma bijeção $H : \mathcal{Q} \to U$ tais que

$$H \in C^1(\overline{\mathcal{Q}}),\ H^{-1} \in C^1(\overline{U}),\ H(\mathcal{Q}_+) = U \cap \mathcal{Q} \text{ e } H(\mathcal{Q}_0) = U \cap \Gamma.$$

Considere $C(\overline{\Omega}) = \{u \in C(\Omega); u$ possui uma extensão contínua a $\overline{\Omega}\}$.

Teorema B.5. (**Rellich-Kondrachov**) Suponha que Ω é limitado e de classe C^1. Então, as seguintes imersões compactas são válidas:

$$\begin{aligned}
&W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \ \ \forall q \in [1, p^*), \text{ em que } \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}, && \text{se } p < N,\\
&W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \ \ \forall q \in [p, +\infty), && \text{se } p = N,\\
&W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega}), && \text{se } p > N.
\end{aligned}$$

Em particular, $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ *compactamente* para todo p e todo N.

Demonstração: [9], Teorema 9.16.

B.4 Princípio do máximo forte

Teorema B.6. (Princípio do Máximo Forte) Considere a aplicação $L : W^{1,2}(\Omega) \to L^1_{loc}(\Omega)$ dado por

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{N} D_i(a^{ij}(x)D_j u + b^i(x)u) + \sum_{i=1}^{N} c^i(x)D_i u + d(x)u,$$

em que $a^{ij}, b^i, c^i, d, i, j = 1, ..., n$, são funções mensuráveis sobre o domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, e D_j representa a derivada fraca de primeira ordem na j-ésima direção canônica. Assuma que

i) L é estritamente elíptico, isto é, existe $\lambda > 0$ tal que

$$\sum_{i,j=1}^{N} a^{ij}\xi_i\xi_j \geq \lambda|\xi|^2, \ \forall x \in \Omega, \ \xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_N) \in \mathbb{R}^N,$$

ii) L possui coeficientes limitados

iii) $d(x)$ e b^i, $i = 1, ..., N$, satisfazem

$$\int_\Omega (dv - b^i D_i v)dx \leq 0, \ \forall v \geq 0, v \in C_0^1(\Omega).$$

Se para $u \in W^{1,2}(\Omega)$ tivermos que $Lu \geq 0$ em Ω, e para alguma bola B compactamente contida em Ω valer que

$$\sup_B u = \sup_\Omega u \geq 0,$$

então u deve ser constante em Ω.

Demonstração: [13], Teorema 8.19.

Apêndice C

Noções de Análise Não-linear

C.1 Funções radiais

Definição C.1. Seja $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Diz-se que u é uma função radialmente simétrica se para cada transformação linear ortogonal $S : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ tivermos

$$u(Sx) = u(x),$$

para quase todo $x \in \mathbb{R}^N$.

A fim de que consigamos resulados de imersões compactas definimos o conjunto $H^1_{rad}(\mathbb{R}^n)$ por

$$H^1_{rad}(\mathbb{R}^n) = \left\{u \in H^1(\mathbb{R}^N) : u(Sx) = u(x), q.t.p., \text{ para toda transformação linear ortogonal } S\right\}.$$

Teorema C.1. $H^1_{rad}(\mathbb{R}^n)$ é um espaço de Hilbert.

Demonstração. Pelos Teoremas B.1 e B.2 temos que que $H^1(\mathbb{R}^N)$ é um espaço de Hilbert. Assim, basta verificarmos que $H^1_{rad}(\mathbb{R}^n)$ é um subespaço vetorial fechado de $H^1(\mathbb{R}^N)$. Claramente $0 \in H^1_{rad}(\mathbb{R}^n)$. Considere $u_1, u_2 \in H^1_{rad}(\mathbb{R}^n)$, $a \in \mathbb{R}$ e S uma transformação linear ortogonal de $\mathbb{R}^N$. Temos então que

$$(u_1 + au_2)(Sx) = u_1(Sx) + au_2(Sx) = u_1(x) + au_2(x), \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N,$$

logo, $H^1_{rad}(\mathbb{R}^n)$ é um subespaço vetorial de $H^1(\mathbb{R}^N)$.

Considere agora, uma sequência $u_n \in H^1_{rad}(\mathbb{R}^n)$ tal que $u_n \to u$ para algum $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$. Passando a uma subsequência temos, pelo Teorema A.11, que $u_n(x) \to u(x)$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$.

Portanto,

$$u(Sx) = \lim_{n\to\infty} u_n(Sx) = \lim_{n\to\infty} u_n(x) = u(x), \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N.$$

Logo, u_n é convergente em $H^1_{rad}(\mathbb{R}^n)$, o que conclui nossa prova. □

C.2 Derivadas de Fréchet e Gateaux

A *diferencial de Fréchet* é a extensão natural do conceito de derivada usual no espaço euclidiano $\mathbb{R}^N$ para espaços de Banach. As definições e teoremas desta seção foram retirados de Ambrosetti, A. e Prodi, G. [5]. Consideraremos X, Y Z espaços de Banach (sobre $\mathbb{R}$) com normas $\|\cdot\|_X$, $\|\cdot\|_Y$ e $\|\cdot\|_Z$ respectivamente, até o fim deste apêndice.

Definição C.2. Considere a aplicação $F : U \to Y$ em que U é um aberto de X. A aplicação F é dita *Fréchet-diferenciável* em $u \in X$ se existe $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ tal que, definindo

$$R(h) = I(u+h) - I(u) - A(h)] = 0,$$

ocorre que

$$R(h) = o(\|h\|_X),$$

ou seja,

$$\frac{\|R(h)\|_Y}{\|h\|_X} \to 0 \text{ quando } \|h\|_X \to 0.$$

Tal A é denominada a *diferencial* de Fréchet de F em u e a denotaremos por

$$A = \mathrm{d}F(u).$$

Se F é diferenciável em u para todo $u \in U$, então diz-se que F é diferenciável em U.

Abaixo, listamos alguns fatos sobre a diferencial de Fréchet.

(i) A é unicamente determinada.

Demonstração: [5], página 10, item (i).

(ii) Se F é diferenciável em $u \in U$ então F é também contínua em u.

Demonstração: [5], página 10, item (ii).

(iii) A definição de diferenciabilidade não depende da norma, mas apenas da topologia de X e Y. Por exemplo, se tivermos em X duas normas equivalentes $\|\cdot\|_{1,X}$ e $\|\cdot\|_{2,X}$ então F é diferenciável em $u \in (X, \|\cdot\|_{1,X})$ se, e somente se, é diferenciável em $u \in (X, \|\cdot\|_{2,X})$.

Na proposição abaixo constam as principais regras de *derivação*.

Proposição C.1. Considere U e V abertos de X e Y respectivamente.

(i) Considere as aplicações $F,G: U \to Y$. Se F e G são diferenciáveis em $u \in U$, então $aF + bG$ é diferenciável em $u \in U$ para todo a, $b \in \mathbb{R}$ e

$$\mathrm{d}(aF + bG)(u)h = a\mathrm{d}F(u)h + b\mathrm{d}G(u)h.$$

(ii) (**Regra da Cadeia**) Sejam $F: U \to Y$ e $G: V \to Z$ com $F(U) \subset V$, e considere a composição

$$G \circ F : U \to Z,\ (G \circ F)(u) := G(F(u)).$$

Se F é diferenciável em $u \in U$ e G é diferenciável em $v := F(u) \in V$, então $G \circ F$ é diferenciável em u e

$$\mathrm{d}(G \circ F)(u)h = \mathrm{d}G(F(u))[\mathrm{d}F(u)h].$$

Ou seja, a diferencial de $G \circ F$ em u é a composição das aplicações lineares $\mathrm{d}F(u)$ e $\mathrm{d}G(v)$, com $v = F(u)$.

Demonstração: [5], Proposição 1.4.

Definição C.3. Seja $F: U \to Y$ diferenciável em U. A correspondência

$$F' : U \to \mathcal{L}(X,F),\ F' : u \mapsto \mathrm{d}F(u)$$

é denominada a *derivada de Fréchet* de F. Se F' é contínua, enquanto aplicação de U em $\mathcal{L}(X,Y)$, diz-se que F é de classe C^1 e denotamos $F \in C^1(U,Y)$.

Assim como no caso de aplicações em $\mathbb{R}^N$ podemos definir uma *derivada direcional*, conhecida como *derivada de Gâteaux*.

Definição C.4. Sejam $F: U \to Y$ e $u \in U$. Diz-se que F é *Gâteaux-diferenciável* em u se existe $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ tal que para todo $h \in X$ ocorre que

$$\lim_{t \to 0} \frac{F(u+th) - F(u)}{t} = A(h).$$

A aplicação A é unicamente determinada, e é denominada a *diferencial de Gâteaux* de F, e a denotaremos por $\mathrm{d}_G F(u)$.

Por definição, se F é derivável no sentido de Fréchet é então derivável no sentido de Gâteaux, porém a recíproca é falsa (ver [5] página 13).

Teorema C.2. Suponha que $F: U \to Y$ Gâteaux-diferenciável em U e seja

$$F'_G : U \to \mathcal{L}(X,Y),\ F'_G(u) = \mathrm{d}_G F(u)$$

contínua em $v \in U$. Então F é Fréchet-diferenciável em v, e além disso $\mathrm{d}F(v) = \mathrm{d}_g F(v)$.

Demonstração: [5], Teorema 1.9.

C.2.1 Derivadas de ordem superior

Seja $F \in C(U,Y)$ diferenciável em um aberto $U \subset X$ e considere $F' : U \to \mathcal{L}(X,Y)$.

Definição C.5. Seja $u \in U$. Então F é duas vezes Fréchet-diferenciável em em u se F' é diferenciável em u. A *segunda diferencial de Fréchet de* F *em* u é definida como

$$\mathrm{d}^2F(u) = \mathrm{d}F'(u).$$

Se F é duas vezes diferenciável em todos os pontos de U diz-se que F é duas vezes diferenciável em U.

Por definição, $\mathrm{d}^2F(u) : X \to \mathcal{L}(X,Y)$ é uma aplicação linear contínua, isto é,

$$\mathrm{d}^2F(u) \in \mathcal{L}(X, \mathcal{L}(X,Y)).$$

Dado que $\mathcal{L}(X,\mathcal{L}(X,Y))$ é isomorfo a $\mathcal{L}_2(X,Y)$, o espaço das aplicações bilineares contínuas de X em Y (ver [5] página 23), é conveniente olhar para $\mathrm{d}^2F(u)$ como uma aplicação bilinear sobre X. Deste modo, o valor de $\mathrm{d}^2F(u)$ no par $(h,k) \in X \times X$ é denotado por

$$\mathrm{d}^2F(u)[h,k].$$

Definição C.6. Seja $F: U \to Y$ duas vezes diferenciável em U. A correspondência

$$F'' : U \to \mathcal{L}_2(X,F),\ F'' : u \mapsto \mathrm{d}^2F(u)$$

é denominada a *segunda derivada de Fréchet* de F. Se F'' é contínua, enquanto aplicação de U em $\mathcal{L}_2(X,Y)$, diz-se que F é de classe C^2 e denotamos $F \in C^2(U,Y)$.

Proposição C.2. Seja $F : U \to Y$ duas vezes diferenciável em $u \in U$. Considerando $h \in X$ fixado, temos que a aplicação $F_h : X \to Y$ dada por

$$F_h(v) = \mathrm{d}F(v)h$$

é diferenciável em u e além disso

$$\mathrm{d}F_h(u)k = F''(u)[h,k].$$

Demonstração: [5], Proposição 3.3.

Indutivamente, define-se a *n-ésima derivada de Fréchet*

$$F^{(n)} : U \to \mathcal{L}_n(X,F),\ F^{(n)} : u \mapsto \mathrm{d}_n F(u).$$

Se $F^{(n)}$ é contínua, enquanto aplicação de U em $\mathcal{L}_n(X,Y)$, diz-se que F é de classe C^n e denotamos $F \in C^n(U,Y)$. Para mais detalhes consultar [5], página 25.

Teorema C.3. Se $F : U \to Y$ é *n-vezes diferenciável* em U, então, dado $u \in U$ fixado, a correspondência

$$(h_1,h_2,...,h_n) \mapsto \mathrm{d}^n F(u)[h_1,h_2,...,h_n]$$

é simétrica.

Demonstração: [5], Teorema 3.5.

Proposição C.3. Seja Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^N$ e p tal que $2 < p < \infty$. Os funcionais

$$\psi(u) := \int_\Omega |u|^p,\ \chi(u) := \int_\Omega |u^+|^p$$

pertencem a $C^2(L^p(\Omega),\mathbb{R})$ e

$$\langle \psi'(u),h\rangle = p\int_\Omega |u|^{p-2}uh, \langle \chi'(u),h\rangle = p\int_\Omega (u^+)^{p-1}h.$$

Demonstração: [33], Proposição 1.12.

C.2.2 Fórmula de Taylor

Sejam $U \subset X$ aberto, $F \in C^n(U,Y)$ e $u \in U$ e $v \in X$ tais que $u+v, [u,u+v] \in U$, em que

$$[u,u+v] = \{u+tv;\ t \in [0,1] \subset \mathbb{R}\}.$$

Podemos então definir o *fórmula de Taylor* para F por

$$F(u+v) = F(u) + \mathrm{d}F(u)[v] + \frac{1}{2!}\mathrm{d}^2F(u)[v]^2 + ... + \frac{1}{n!}\mathrm{d}^nF(u)[v]^n + \varepsilon(u,v)[v]^n,$$

em que

$$\varepsilon(u,v) = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^1 (1-t)^{n-1}[\mathrm{d}^nF(u+tv) - \mathrm{d}^nF(u)]dt \to 0 \text{ quando } v \to 0.$$

Para mais detalhes consultar [5], página 28.

C.3 Pontos críticos de funcionais com restrições

Esta seção será dedicada à introdução do conceito de variedade em um espaço de dimensão infinita. Exibiremos alguns resultados clássicos de teoria de minização que, originalmente desenvolvidos para serem aplicados considerando-se funcionais definidos em espaços de Banach, podem ser aplicados nestes subconjuntos específicos os quais trataremos, chamados *Variedades de Hilbert*. Esta seção tem como principal referência Ambrosetti, A. e Malchiodi. A. [4]. O conceito de diferencial utilizado nesta seção é o mesmo introduzido na seção anterior, a diferencial de Fréchet.

C.3.1 Variedades diferenciáveis

Sejam X um espaço de Hilbert e $\mathcal{I}$ um conjunto de índices.

Definição C.7. Um espaço topológico M é uma *variedade de Hilbert modelada em* X se existe uma cobertura de M por abertos $\{U_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ e uma família de aplicações $\{\psi_i\}_{i\in\mathcal{I}}$, com $\psi_i : U_i \to X$, tais que

1. $V_i = \psi_i(U_i)$ é um aberto de X e ψ_i é um homeomorfismo de U_i em V_i;

2. $\psi_j \circ \psi_i^{-1} : \psi_i(U_i \cap U_j) \to \psi_j(U_i \cap U_j)$ é de classe C^k.

Cada par (U_i, ψ_i) é dito um *sistema de coordenadas locais* (ou *carta local*) de M, e se $p \in U_i$ diz-se que (U_i, ψ_i) é um sistema coordenadas locais (ou carta local) de M em p. As aplicações $\psi_j \circ \psi_i^{-1}$ são chamadas *mudanças de coordenadas em* M. Se $X = \mathbb{R}^N$, diz-se que M é *uma variedade diferenciável de dimensão* N *de classe* C^k. Diz-se que M possui comdimensão 1 em E se X possui codimensão 1 em E.

Para o desenvolvimento de nosso esboço consideraremos X um subespaço completo de uma espaço de Hilbert E, e $M \subset E$ um subconjunto que possui uma estrutura como na

Definição C.7, que verifica M como uma variedade de Hilbert modelada em X. Lembremos que todo subconjunto de E é um espaço topológico, considerando-se a topologia induzida. Sendo assim, assuimiremos que se $M \subset E$ é uma variedade de Hilbert modelada em X, então para todo ponto $p \in M$ existem

- um aberto $\tilde{U} \subset E$, com $p \in \tilde{U}$,
- um aberto $\tilde{\varphi} \subset E$,
- um *difeomorfismo* $\tilde{\varphi} : \tilde{V} \to \tilde{U}$,

tais que, pondo $V := \tilde{V} \cap X$ e $U := \tilde{U} \cap X$, e além disso denotando por φ a restrição de $\tilde{\varphi}$ a V, ocorre que $q = \varphi^{-1}(p) \in V$ e $\varphi(V) = U$. O par (V, φ) é uma *parametrização local de* M.

Definição C.8. O *espaço tangente de* M em p é definido como a imagem de X pela aplicação linear $\mathrm{d}\tilde{\varphi}(q) \in \mathcal{L}(X,E)$:

$$T_pM = \mathrm{d}\tilde{\varphi}(q)[X].$$

A definição de espaço tangente é independente da parametrização escolhida, além disso pela regularidade de $\tilde{\varphi}$ decorrer que T_pM é *isomorfo* a X (para ambas as afirmações consultar [4], página 90). Logo T_pM também é um espaço de Hilbert.

Considere $M_i \subset E_i$, $i = 1,2$, duas variedades de Hilbert de classe C^1 modeladas em $X_i \subset E$, e $f : M_1 \to M_2$ tais que existem

- um aberto $U_1 \subset E_1$ contendo M_1,
- uma aplicação diferenciável $\tilde{f} : U_1 \to E_2$,

tais que $\tilde{f}|_{M_1} = f$.

Definição C.9. A diferencial de $f : M_1 \to M_2$ no ponto $p \in M_1$ é a restrição de $\mathrm{d}\tilde{f}(p) \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$ ao espaço T_pM.

Denotaremos por $\mathrm{d}_{M_1} f(p)$ a diferencial de f.

Definição C.10. Diz-se que $f \in C^1(M_1, M_2)$ se f é diferenciável em todo ponto de M_1 e a aplicação $p \mapsto \mathrm{d}_{M_1} f(p)$ é contínua de M_1 em $\mathcal{L}(T_pM_1, E_2)$. Analogamente, se M_i é uma variedade de Hilbert de classe C^k, com $k \geq 1$, podemos definir uma aplicação de classe C^k.

Considere uma curva suave $\gamma : [a,b] \to M$ com $a < 0 < b$ e $\gamma(0) = p$. Podemos idenficar $\mathcal{L}(\mathbb{R}, T_{\gamma(t)}M)$ com $T_{\gamma(t)}M$ através da correspondência que leva $F \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, T_{\gamma(t)}M)$ em $F(e_1)$, em que e_1 é o vetor unitário da base canônica de $\mathbb{R}$. Assim, escrevendo $\gamma'(t)$ em vez de

$d\gamma(t)[e_1]$, o vetor $\gamma'(t)$ é denominado o *vetor tangente a curva γ em $\gamma(t)$*. Em particular, para toda curva suave γ em M, o vetor tangente $\gamma'(0)$ em p pertence ao T_pM. Reciprocamente, dado $v \in T_pM$ é possível definir uma curva suave $\gamma : [a,b] \to M$ com $a < 0 < b$, tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v$ (ver [4], página 92). Isto nos conduz ao próximo resultado

Proposição C.4. *T_pM é o espaço dos vetores tangentes à curvas suaves em M.*

Demonstração: [4], página 93.

C.3.2 Pontos críticos de restrições

Considere $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \to \mathbb{R}$ o produto interno de E e $z \in M$. Lembremos que $dJ(z) \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ e $d_M J(z) \in \mathcal{L}(T_zM, \mathbb{R})$, e que E e $T_zM, \mathbb{R}$ também são espaços de Hilbert. Deste modo o Teorema A.13 garante a existência de vetores $J'(z) \in E$ e $\nabla_M J(z) \in T_zM$, tais que

$$\langle J'(z), w \rangle = dJ(z)[w], \ \forall w \in E \text{ e } \langle \nabla_M J(z), w \rangle = dJ(z)[w], \ \forall w \in T_zM. \tag{C.1}$$

Sejam $J \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ um *funcional* diferenciável e $M \subset E$ uma variedade de Hilbert de classe C^1.

Definição C.11. Um *ponto crítico da restição de J a M* é um ponto $z \in M$ tal que $d_M J(z) = 0$, ou seja,

$$dJ(z)[v] = 0, \ \forall v \in T_zM,$$

desde que pela Definição C.9 ocorre que

$$dJ(z)[v] = d_M J(z)[v], \ \forall v \in T_zM.$$

Sendo assim, por (C.1) temos que

$$\langle \nabla_M J(z), v \rangle = 0, \ \forall v \in T_zM,$$

isto é, $\nabla_M J(z)$ é ortogonal a T_zM.

Definição C.12. Sejam $M \subset E$ uma variedade de classe C^1 modelada em um espaço de Hilbert $X \subset E$ e $J \in C(E, \mathbb{R})$. Diz-se que $z \in M$ é *um mínimo (ou máximo) da restição de J a M* se existe uma aberto $\mathcal{V}$ de E contendo z tal que

$$J(z) \leq J(u), \ (\text{ou } J(z) \geq J(u)), \ \forall u \in \mathcal{V} \cap M,$$

Proposição C.5. Sejam $M \subset E$ uma variedade de classe C^1 modelada em um espaço de Hilbert $X \subset E$ e $J \in C^1(E,\mathbb{R})$. Seja $\varphi : N \subset X \to M$ uma parametrização local de M com $\varphi(0) = z$. Temos que $z \in M$ é *um mínimo ou máximo local da restição de J a M* se, e somente se, 0 é um *um mínimo ou máximo local* de $J \circ \varphi : N \to \mathbb{R}$. Segue que se z é crítico da restrição de J a M então

$$\mathrm{d}J(z)[\mathrm{d}\varphi(0)[\xi]], \ \forall \xi \in X,$$

ou seja,

$$\mathrm{d}J(z)[v] = 0, \ \forall v \in T_z M.$$

Demonstração: [4], página 94.

C.3.3 Variedades de codimensão um

Considere $M \subset E$ uma variedade modela em um subespaço de Hilbert X.

Proposição C.6. Sejam E um espaço de Hilbert e $G \in C^1(E,\mathbb{R})$. Se $G'(u) \neq 0$ para todo $u \in G^{-1}(\{0\})$ então $M = G^{-1}(\{0\})$ é uma variedade de codimensão 1 em E e além disso, dado $p \in M$ tem-se que

$$T_p M = \{v \in E; \ \langle G'(p), v \rangle = 0\}.$$

Demonstração: [4], página 95.

Desta proposição e da Definição C.11 decorre o próximo teorema, que é uma versão para o caso de dimensão infinita do clássico *Teorema dos multiplicadores de Lagrange*.

Teorema C.4. Seja $J \in C^1(E,\mathbb{R})$. Nas condições da Proposição C.6, se $z \in M$ é um ponto crítico de J restrito a M então existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$J'(z) = \lambda G'(z).$$

Demonstração: [4], página 96.

Proposição C.7. Nas condições da Proposição C.6, dado $u \in M$ temos que

$$\nabla_M J(u) = J'(u) - \alpha G'(u),$$

em que $\alpha = \dfrac{\langle J'(u), G'(u) \rangle}{\langle G'(u), G'(u) \rangle}$.

Demonstração: [4], página 96.

Teorema C.5. Sejam $\varphi_i : E \to \mathbb{R}$, $i = 1,2,...,m$ e $f : E \to \mathbb{R}$ funcionais de classe C^1 em E. Considere o conjunto K definido por

$$K = \{v \in E;\ \varphi_i(v) = 0,\ 1 \leq 1 \leq m\}.$$

Se $u \in K$ é um ponto crítico de f restrito a K e além disse $\varphi_i'(u)$, $i = 1,2,...,m$, são linearmente independentes, então, existem escalares λ_j, $i = 1,2,...,m$ tais que

$$f'(u) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_i'(u).$$

Demonstração: [18], Observação 1.4.3.

C.4 Existência de pontos críticos para restrições

Considere $J \in C(E,\mathbb{R})$.

Definição C.13. Um sequência $u_n \in M$ é dita ser uma *sequência de Palais-Smale em M* (ou apenas *sequência PS*) se $J(u_n)$ é limitado e $\nabla_M J(u_n) \to 0$. Se além disso $J(u_n) \to c$, diz-se que u_n é uma *sequência de Palais-Smale em M de nível c* (*sequência PS_c*)

Definição C.14. Dizemos que J satisfaz a *condição (PS)* (ou *condição $(PS)_c$*) em M se toda *sequência PS* (ou PS_c), possui uma subsequência convergente.

O próximo teorema é um versão de uma ferramente desenvolvida por Ekeland I. em [12] conhecida como o *princípio variacional de Ekeland*.

Teorema C.6. Seja $J \in C^1(E,\mathbb{R})$ e suponha que $M = G^{-1}(\{0\})$ e que $G'(u) \neq 0$ para todo $u \in M$, em que $G \in C^1(E,\mathbb{R})$. Suponha ainda, que J é limitado inferiormente em M e satisfaz a condição *$(PS)_m$*, em que

$$m := \inf_{u \in M} J(u) > -\infty,$$

então m é assumido em M. Isto é, existe $z \in M$ tal que $J(z) = m$ e $\nabla_M J(u) = 0$.

Demonstração: [4], Teorema 7.12.

C.5 Lemas de Lions

Lema C.1. (*Lema de Concentração e Compacidade de Lions*)[22] Suponha que μ_n é uma sequência de medidas de probabilidade. Existe então, uma subsequência (μ_n) que satisfaz alguma das seguintes conclusões

i) (Compacidade) Existe uma sequência $\{y_n\} \subset \mathbb{R}^N$ tal que para $\varepsilon > 0$ existe $r > 0$ com a propriedade que se segue

$$\int_{B_r(y_n)} d\mu_n \geq 1 - \varepsilon, \forall n.$$

ii) (Anulamento) Para todo $r > 0$ ocorre que

$$\lim_{m\to\infty} \sup_{y\in\mathbb{R}^N} \frac{1}{4} \int_{B_r(y)} \mu_n = 0.$$

iii) (Dicotomia) Existe $\lambda \in (0,1)$ tal que para todo $\varepsilon > 0$ existe um número $r > 0$ e uma sequência $\{y_n\} \subset \mathbb{R}^N$, com a seguinte propriedade: Dado $r' > r$ existem duas sequências de medidas não-negativas $\{\mu_{1n}\}, \{\mu_{2n}\}$ tais que

$$0 \leq \mu_{1n} + \mu_{2n} \leq \mu_n,\ supp(\mu_{1n}) \subset B_r(y_n),\ supp(\mu_{2n}) \subset \mathbb{R}^N \backslash B_{r'}(y_n),$$

e

$$\limsup \left(\left| \lambda - \int_{\mathbb{R}^N} d\mu_{1n} \right| + \left| (1-\lambda) - \int_{\mathbb{R}^N} d\mu_{2n} \right| \right) \leq \varepsilon.$$

Demonstração: [31], Lema 4.3.

Lema C.2. (P.L. Lions, 1984). Seja $r > 0$ e $2 \leq q < 2^*$. Se $\{u_n\}$ é um sequência limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$ e se

$$\sup_{y\in\mathbb{R}^N} \int_{B_r(y)} |u_n|^q \to 0,\ n \to +\infty,$$

então $u_n \to 0$ em $L^p(\mathbb{R}^N)$ para $2 < p < 2^*$.

Demonstração: [33], Lema 1.21.

C.6 Resultados complementares

Teorema C.7. Seja $\{u_n\} \in W^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ uma sequência tal que $\|u_n\|_{1,2} \leq k$, para algum $k > 0$. Para $N = 2, 3$ são válidas as seguintes implicações:

i) Existe uma subsquência $\{u_n\}$ tal que

$$u_n \rightharpoonup u \text{ em } W^{1,2}(\mathbb{R}^N).$$

ii) Existe uma subsquência $\{u_n\}$ tal que

$$u_n \to u \text{ em } L^4_{loc}(\mathbb{R}^N).$$

iii) Existe uma subsquência $\{u_n\}$ tal que

$$u_n \to u \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N.$$

Demonstração. i) Pelo Proposição A.3, $W^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, sendo um espaço de Hilbert, é também reflexivo. Deste modo, pelo Teorema A.3 concluímos que a bola $\overline{B_k(0)}$ é um compacto na topologia fraca, sendo assim, toda sequência em $\overline{B_k(0)}$ possui uma subsequência convergente. Assim obtemos a primeira implicação.

ii) Seja $K \subset \mathbb{R}^N$ um compacto. Dado que $\mathbb{R}^N$ é um espaço métrico, existe $R > 0$ tal que $K \subset \overline{B_R(0)} = \Omega$. Temos que $W^{1,2}(\mathbb{R}^N) \subset W^{1,2}(\Omega)$, isto é verificado tomando-se a restrição $\tilde{v}$ ao conjunto Ω de uma função $v \in W^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ dada. Além disto

$$\|\tilde{v}\|^2_{1,2,\Omega} = \int_\Omega (|\nabla \tilde{v}|^2 + \tilde{v}^2) = \int_\Omega |\nabla v|^2 + v^2 \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 + v^2 = \|v\|^2_{1,2},$$

ou seja, $W^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ está continuamente imerso em $W^{1,2}(\Omega)$.
Sendo assim, considere $\tilde{u}_n : \Omega \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ a restrição de $u_n : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ a Ω e $\tilde{u} : \Omega \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ a restrição de $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ a Ω. Considere também um funcional $f \in (W^{1,2}(\Omega))^* \subset (W^{1,2}(\mathbb{R}^N))^*$.

Desde $u_n \rightharpoonup u$ em $\sigma(W^{1,2}(\mathbb{R}^N), (W^{1,2}(\mathbb{R}^N))^*)$, segue do item (i) da Proposição A.2 que

$$\langle f, u_n \rangle \to \langle f, u \rangle.$$

Porém, pela imersão contínua $W^{1,2}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow W^{1,2}(\Omega)$ temos que

$$\langle f, \tilde{u_n} \rangle = \langle f, u_n \rangle \text{ e } \langle f, \tilde{u} \rangle = \langle f, u \rangle,$$

logo,

$$\langle f, \tilde{u_n} \rangle \to \langle f, \tilde{u} \rangle.$$

Desde que f é qualquer em $W^{1,2}(\Omega)$, segue pela Proposição A.2 que $\tilde{u}_n \rightharpoonup \tilde{u}$.
Pelo Teorema B.5, sendo Ω limitado e de classe C^1 e $N = 2, 3$, temos que a imersão $W^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega)$ é compacta (consultar Seção B.3). Portanto, $\tilde{u}_n$ converge "forte"

para $\tilde{u}$ em $L^4(\Omega)$, ou seja

$$\int_\Omega |\tilde{u_n} - \tilde{u}|^4 \to 0.$$

Em particular,

$$\int_K |u_n - u|^4 = \int_K |\tilde{u_n} - \tilde{u}|^4 \leq \int_\Omega |\tilde{u_n} - \tilde{u}|^4 \to 0.$$

Sendo K um compacto qualque de $\mathbb{R}^N$, concluímos então o item ii).

iii) Considere a sequência $\{u_n\}$ obtida no item anterior. Seja $A \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto tal que, dada uma subsequência $\{u_n\}$, tenhamos que $u_n(x) \nrightarrow u(x)$ para todo $x \in A$.
Pelo item ii), considerando o compacto $\overline{B_k(0)} \subset \mathbb{R}^N$, com $k \in \mathbb{N}$, temos que $u_n \to u$ em $L^4(B_k(0))$. Deste modo, pelo Teorema A.11 existe uma subsquência $\{u_n\}$ tal que $u_n \to u$ q.t.p. em $B_k(0)$. Desde dado $x \in A$ temos que $u_n(x) \nrightarrow u(x)$, segue que $B_k(0) \cap A$ possui medida nula.Dado que $\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k(0) = \mathbb{R}^N$, tem-se que $\bigcup_{k=1}^{\infty} (B_k(0) \cap A) = A$. Porém "a união enumerável de conjuntos de medida nula é um conjunto de medida nula", logo A possui medida nula. Concluímos então que existe uma subsequência $\{u_n\}$ tal que $u_n \to u$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$.

$\square$

Lema C.3. Sejam $V_j(x)$, $i = 1, 2$, funções contínuas, positivas e limitadas. Então, a função que para cada $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in W^{1,2}(\mathbb{R}^N) \times W^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ associa o valor $\|\mathbf{u}\|$, dado por

$$\|\mathbf{u}\| = \left(\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u_1|^2 + V_1 u_1^2) + \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u_2|^2 + V_2 u_2^2) \right)^{1/2},$$

é uma norma em $W^{1,2}(\mathbb{R}^N) \times W^{1,2}(\mathbb{R}^N)$. Além disso, o funcional $f : W^{1,2}(\mathbb{R}^N) \times W^{1,2}(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ definido como $f(\mathbf{u}) = \|\mathbf{u}\|^2$ é duas vezes Fréchet-diferenciável em $\mathbb{E} := (W^{1,2}(\mathbb{R}^N) \times W^{1,2}(\mathbb{R}^N), \|\cdot\|)$.

Demonstração. Considerando que o funcional $\langle \cdot, \cdot \rangle : \{W^{1,2}(\mathbb{R}^N) \times W^{1,2}(\mathbb{R}^N)\} \times \{W^{1,2}(\mathbb{R}^N) \times W^{1,2}(\mathbb{R}^N)\} \to \mathbb{R}$ dado por

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u_1 \nabla v_1 + V_1 u_1 v_2) + \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u_2 \nabla v_2 + V_2 u_2 v_2)$$

define trivialmente um produto interno, segue que $\|\mathbf{u}\| := \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle^{1/2}$ define uma norma em $W^{1,2}(\mathbb{R}^N) \times W^{1,2}(\mathbb{R}^N)$.

A fim de provar que f é duas vezes Fréchet-diferenciável, provemos que f é duas vezes Gâteaux-diferenciável com segunda derivada de Gâteaux contínua, obtendo pelo Teorema

C.2 o resultado desejado. Sendo assim, considere $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in \mathbb{E}$. Temos que

$$
\begin{aligned}
A(\varphi) = & \lim_{t\to 0} \frac{f(\mathbf{u}+t\varphi) - f(\mathbf{u})}{t} \\
= & \lim_{t\to 0} \frac{\|\mathbf{u}+t\varphi\|^2 - \|\mathbf{u}\|^2}{t} \\
= & \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla(u_1+t\varphi_1)|^2 + V_1(u_1+t\varphi_1)^2 - |\nabla u_1|^2 + V_1 u^2) \\
& + \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla(u_2+t\varphi_2)|^2 + V_2(u_2+t\varphi_2)^2 - |\nabla u_2|^2 + V_2 u^2) \\
= & \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \int_{\mathbb{R}^N} (2t\nabla u_1 \nabla\varphi_1 + t^2|\nabla\varphi_1|^2 + 2V_1 t u_1 \varphi_1 + t^2\varphi_1^2) \\
& + \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \int_{\mathbb{R}^N} (2t\nabla u_2 \nabla\varphi_2 + t^2|\nabla\varphi_2|^2 + 2V_2 t u_2 \varphi_2 + t^2\varphi_2^2) \\
= & \;.
\end{aligned}
$$

Note que $A : \mathbb{E} \to \mathbb{R}$ é linear e além disso

$$A(\varphi) \le 8\|\mathbf{u}\|\|\varphi\|,$$

ou seja, em conformidade com a Definição C.4, A é a diferencial de Gâteaux de f em $\mathbf{u}$.

Calculando $f''_G : E \to \mathcal{L}_2(\mathbb{E},\mathbb{R})$, a segunda derivada de Gâteaux de f em $\mathbf{u}$, encontramos para $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$, $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{E}$ que

$$f''_G(\mathbf{u})[\varphi, h] = 2\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla\varphi_1 \nabla h_1 + V_1\varphi_1 h_1 + \nabla\varphi_2 \nabla h_2 + V_2\varphi_2 h_2).$$

Note que f''_G é constante, logo contínua. Pelo Teorema C.2 $f'_G \in C^1(\mathbb{E},\mathbb{E}^*)$, isto implica que $f \in C^2(\mathbb{E},\mathbb{R})$.

□

Lema C.4. Sejam β, μ_1 e μ_2 funções contínuas e limitadas. Então

(i) $F : L^4(\mathbb{R}^N) \times L^4(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ dada por

$$F(\mathbf{u}) = \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^N} \mu_1 u_1^4 + \mu_2 u_2^4$$

é duas vezes Fréchet-diferenciável;

(ii) $G : L^4(\mathbb{R}^N) \times L^4(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ dado por

$$G(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \beta u_1^2 u_2^2$$

é duas vezes Fréchet-diferenciável.

Demonstração. (ii) $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{F(\mathbf{u}+t\varphi)-F(\mathbf{u})}{t}=\int_{\mathbb{R}^N}(\mu_1 u_1^3\varphi_1+\mu_2 u_2^3\varphi_2)$,
Além disso,

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}^N}(\mu_1 u_1^3\varphi_1+\mu_2 u_2^3\varphi_2)\right| \leq\ & |\mu_1+\mu_2|_\infty\left[\left(\int_{\mathbb{R}^N}u_1^4\right)^{3/4}\left(\int_{\mathbb{R}^N}\varphi_1^4\right)^{1/4}\right.\\ & \left.+\left(\int_{\mathbb{R}^N}u_2^4\right)^{3/4}\left(\int_{\mathbb{R}^N}\varphi_2^4\right)^{1/4}\right]\\ \leq\ & |\mu_1+\mu_2|_\infty\left(\|u_1\|_1^{3/4}+\|u_2\|_2^{3/4}\right)\|\varphi\|_{L^4\times L^4},\end{aligned}$$

ou seja, F é Gâteaux-diferenciável com derivada de Gâteaux em $\mathbf{u}$ dada por

$$\langle F_G'(\mathbf{u}),\varphi\rangle=\int_{\mathbb{R}^N}(\mu_1 u_1^3\varphi_1+\mu_2 u_2^3\varphi_2),$$

em que $\varphi\in\mathbb{E}$. Calculando a segunda derivada de Gâteaux de F obtemos

$$F_G''(\mathbf{u}).[\varphi,h]=3\int_{\mathbb{R}^N}(\mu_1 u_1^2\varphi_1 h_1+\mu_2\varphi_2 h_2),$$

em que $\varphi,h\in\mathbb{E}$. Provemos que F_G'' é contínua. Seja $\{\mathbf{u}_n\}\subset L^4(\mathbb{R}^N)\times L^4(\mathbb{R}^N)$ e $\mathbf{u}=(u_1,u_2)\in L^4(\mathbb{R}^N)\times L^4(\mathbb{R}^N)$ tais que $\mathbf{u}_n\to\mathbf{u}$ em $L^4(\mathbb{R}^N)\times L^4(\mathbb{R}^N)$. Sendo assim,

$$\begin{aligned}\left|F_G''(\mathbf{u}_n).[\varphi,h]-F_G''(\mathbf{u}).[\varphi,h]\right| =\ & 3\left|\int_{\mathbb{R}^N}\left(\mu_1(u_{1n}^2-u_1^2)h_1\varphi_1+\mu_2(u_{2n}^2-u_2^2)h_2\varphi_2\right)\right|\\ \leq\ & 3|\mu_1+\mu_2|_\infty\left|\left(\int_{\mathbb{R}^N}(u_{1n}^2-u_1^2)^2\right)^{1/2}\|\varphi_1\|_{L^4}\|h_1\|_{L^4}\right.\\ & \left.+\left(\int_{\mathbb{R}^N}(u_{2n}^2-u_2^2)^2\right)^{1/2}\|\varphi_2\|_{L^4}\|h_2\|_{L^4}\right|\end{aligned}$$

Pelo Teorema A.11 existe uma subsequência $\{\mathbf{u}_n\}$ e $g_1\in L^4(\mathbb{R}^N)\times L^4(\mathbb{R}^N)$ tais que

(1) $u_{1n}\to u_1$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$;

(2) $|u_{1n}(x)|\leq g_1(x),\forall n$, q.t.p. em $\mathbb{R}^N$.

isto implica que

(1') $u_{1n}^2u_1^2\to u_1^4$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$;

(2') $|u_{1n}^2(x)u_1^2(x)| \leq g_1^2(x)u_1^2(x), \forall n$, q.t.p. em $\mathbb{R}^N$.

Dado que u_{1n}, h, $u_1 \in L^4(\mathbb{R}^N)$ temos que

$$0 \leq \int_{\mathbb{R}^N} u_{1n}^2 u_1^2 \leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} u_{1n}^4\right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^N} u_1^4\right)^{1/2} < +\infty$$

e

$$0 \leq \int_{\mathbb{R}^N} h_1^2 u_1^2 \leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} h_1^4\right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^N} u_1^4\right)^{1/2} < +\infty,$$

ou seja, $u_{1n}^2 u_1^2$, $h_1^2 u_1^2 \in L^1(\mathbb{R}^N)$, portanto pelo Teorema A.7

$$\int_{\mathbb{R}^N} u_{1n}^2 u_1^2 \to \int_{\mathbb{R}^N} u_1^4.$$

Desde que por hipótese

$$\int_{\mathbb{R}^N} u_{1n}^4 \to \int_{\mathbb{R}^N} u_1^4,$$

segue que

$$\int_{\mathbb{R}^N} (u_{1n}^2 - u_1^2)^2 = \int_{\mathbb{R}^N} u_{1n}^4 - 2u_{1n}^2 u_1^2 + u_1^4 \to 0.$$

Analogamente,

$$\int_{\mathbb{R}^N} (u_{2n}^2 - u_2^2)^2 = \int_{\mathbb{R}^N} u_{2n}^4 - 2u_{2n}^2 u_2^2 + u_2^4 \to 0.$$

Com isso, temos que

$$\frac{\left|F_G''(\mathbf{u}_n)[\varphi,h] - F_G''(\mathbf{u})[\varphi,h]\right|}{\|\varphi\|_{L^4\times L^4}\|h\|_{L^4\times L^4}} \to 0.$$

Desde que para toda sequência convergindo para $\mathbf{u}$ em $L^4(\mathbb{R}^N)$ temos uma subsequência $\{\mathbf{u}_n\}$ tal que

$$\left|F_G''(\mathbf{u}_n) - F_G''(\mathbf{u})\right|_{\mathcal{L}_2(\mathbb{E},\mathbb{R})} \to 0,$$

segue que F_G'' é contínua, decorrendo do Teorema C.2 que F_G' é de classe C^1 em $L^4(\mathbb{R}^N) \times L^4(\mathbb{R}^N)$ e F é de classe C^2 em $L^4(\mathbb{R}^N) \times L^4(\mathbb{R}^N)$.

(ii) Da Definição C.4 obtemos a diferencial de Gâteaux de G em $\mathbf{u}$ dada por

$$\langle G_G'(\mathbf{u}), \varphi \rangle = 2\int_{\mathbb{R}^N} \beta(u_1^2 u_2 \varphi_2 + u_2^2 u_1 \varphi_1),$$

em que $\varphi \in \mathbb{E}$.

Analogamente,

$$
\begin{aligned}
G''_G(\mathbf{u}).[\varphi,h] = & \int_{\mathbb{R}^N} (2u_1^2\varphi_2 h_2 + 4u_1u_2\varphi_2 h_1) \\
& + \int_{\mathbb{R}^N} (2u_2^2\varphi_1 h_1 + 4u_2u_1\varphi_1 h_2),
\end{aligned}
$$

em que $\varphi, h \in \mathbb{E}$. Provemos que G''_G é contínua. Seja $\{\mathbf{u}_n\} \subset L^4(\mathbb{R}^N) \times L^4(\mathbb{R}^N)$ e $\mathbf{u} = (u_1,u_2) \in L^4(\mathbb{R}^N) \times L^4(\mathbb{R}^N)$ tais que $\mathbf{u}_n \to \mathbf{u}$ em $L^4(\mathbb{R}^N) \times L^4(\mathbb{R}^N)$. Sendo assim,

$$
\begin{aligned}
|G''_G(\mathbf{u}_n).[\varphi,h] - G''_G(\mathbf{u}).[\varphi,h]| \leq 4|\beta|_\infty \|\varphi\|_{L^4\times L^4} \|h\|_{L^4\times L^4} & \left[\left(\int_{\mathbb{R}^N} (u_1^2 - u_{1n}^2)^2 \right)^{1/2} \right. \\
& + 2\left(\int_{\mathbb{R}^N} (u_1u_2 - u_{1n}u_{2n})^2 \right)^{1/2} \\
& \left. + \left(\int_{\mathbb{R}^N} (u_2^2 - u_{2n}^2)^2 \right)^{1/2} \right]
\end{aligned}
$$

Com argumento semelhante a demonstração do item (i) provamos que

$$
\frac{|G''_G(\mathbf{u}_n)[\varphi,h] - G''_G(\mathbf{u})[\varphi,h]|}{\|\varphi\|_{L^4\times L^4}\|h\|_{L^4\times L^4}} \to 0,
$$

Desde que para toda sequência convergindo para $\mathbf{u}$ em $L^4(\mathbb{R}^N)$ temos uma subsequência $\{\mathbf{u}_n\}$ tal que

$$
\left| G''_G(\mathbf{u}_n) - G''_G(\mathbf{u}) \right|_{\mathcal{L}_2(\mathbb{E},\mathbb{R})} \to 0,
$$

segue que G''_G é contínua, decorrendo do Teorema C.2 que G'_G é de classe C^1 em $L^4(\mathbb{R}^N) \times L^4(\mathbb{R}^N)$ e G é de classe C^2 em $L^4(\mathbb{R}^N) \times L^4(\mathbb{R}^N)$.

$\square$

Bibliografia

[1] Adams, R. and Fournier, J. (2003). *Sobolev Spaces*. ISSN. Elsevier Science.

[2] Ambrosetti, A. and Colorado, E. (2006). Bound and ground states of coupled nonlinear schrödinger equations. *Comptes Rendus Mathematique*, 342(7):453 – 458.

[3] Ambrosetti, A. and Colorado, E. (2007). Standing waves of some coupled nonlinear schrödinger equations. *Journal of the London Mathematical Society*, 75.

[4] Ambrosetti, A. and Malchiodi, A. (2007). *Nonlinear Analysis and Semilinear Elliptic Problems*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press.

[5] Ambrosetti, A. and Prodi, G. (1995). *A Primer of Nonlinear Analysis*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press.

[6] Ambrosetti, A. and Rabinowitz, P. H. (1973). Dual variational methods in critical point theory and applications. *Journal of Functional Analysis*, 14(4):349 – 381.

[7] Bartsch, T. and Wang, Z.-Q. (2006). Note on ground state of nonlinear Schrödinger systems. *Journal of Partial Differential Equations*, 3.

[8] Bogachev, V. (2007). *Measure Theory*. Number v. 1 in Measure Theory. Springer Berlin Heidelberg.

[9] Brezis, H. (2010). *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Universitext. Springer New York.

[10] Cipolatti, R. and Zumpichiatti, W. (2000). Orbitally stable standing waves for a system of coupled nonlinear schrödinger equations. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, 42(3):445 – 461.

[11] Ding, W.-Y. and Ni, W.-M. (1989). *On the Existence of Positive Entire Solutions of a Semilinear Elliptic Equation*, pages 17–42. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg.

[12] Ekeland, I. (1974). On the variational principle. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 47(2):324 – 353.

[13] Gilbarg, D. and Trudinger, N. (2015). *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. Classics in Mathematics. Springer Berlin Heidelberg.

[14] Goulart, C. and Silva, E. (2019). Standing waves for weakly coupled nonlinear schrödinger systems. *Communications in Contemporary Mathematics*, page 33.

[15] Griffiths, D. (2016). *Introduction to Quantum Mechanics*. Cambridge University Press.

[16] Hioe, F. T. and Salter, T. S. (2002). Special set and solutions of coupled nonlinear schrödinger equations. 35(42):8913–8928.

[17] Kawohl, B. (2006). *Rearrangements and Convexity of Level Sets in PDE*. Lecture Notes in Mathematics. Springer Berlin Heidelberg.

[18] Kesavan, S. (2004). *Nonlinear Functional Analysis: A First Course*. Texts and Readings in Mathematics. Hindustan Book Agency.

[19] Kwong, M. K. (1989). Uniqueness of positive solutions of $\Delta u - u + u^p = 0$ in $\mathbb{R}^n$. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 105(3):243–266.

[20] Li, Y., Wang, Z.-Q., and Zeng, J. (2006). Ground states of nonlinear schrödinger equations with potentials. *Annales de l'Institut Henri Poincare (C) Non Linear Analysis*, 23(6):829 – 837.

[21] Lin, T.-C. and Wei, J. (2008). Ground state of N coupled nonlinear Schrödinger equations in $\mathbb{R}^n$, $n \leq 3$. *Communications in Mathematical Physics*, 277(2):573–576.

[22] Lions, P.-L. (1984). The concentration-compactness principle in the calculus of variations. the locally compact case, part 1. *Annales de l'I.H.P. Analyse non linéaire*, 1(2):109–145.

[23] Liu, H. and Liu, Z. (2015). Ground states of a nonlinear Schrödinger system with nonconstant potentials. *Science China Mathematics*, 58(2):257–278.

[24] Manakov, S. V. (1974). On the theory of two-dimensional stationary self-focusing of electromagnetic waves. *Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 38:505–516.

[25] N. Akhmediev, N., Ankiewicz, A., and Torres, J. (2001). Solitons non-linear beams and pulses. *Optics and Photonics News - OPT PHOTONICS NEWS*, 12.

[26] Nehari, Z. (1960). On a class of nonlinear second-order differential equations. *Transactions of the American Mathematical Society*, 95(1):101–123.

[27] Nehari, Z. (1961). Characteristic values associated with a class of nonlinear second-order differential equations. *Acta Math.*, 105(3-4):141–175.

[28] Pomponio, A. (2006). Coupled nonlinear schrödinger systems with potentials. *Journal of Differential Equations*, 227(1):258 – 281.

[29] Sirakov, B. (2007). Least energy solitary waves for a system of nonlinear schrödinger equations in $\mathbb{R}^n$. *Communications in Mathematical Physics*, 271(1):199–221.

[30] Strauss, W. A. (1977). Existence of solitary waves in higher dimensions. *Comm. Math. Phys.*, 55(2):149–162.

[31] Struwe, M. (2000). *Variational Methods: Applications to Nonlinear Partial Differential Equations and Hamiltonian Systems, Third Edition*. 3]. Springer.

[32] van Heerden, F. A. (2004). Homoclinic solutions for a semilinear elliptic equation with an asymptotically linear nonlinearity. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, 20(4):431–455.

[33] Willem, M. (2012). *Minimax Theorems*. Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications. Birkhäuser Boston.