

VOLATILIDADE CAMBIAL ENDÓGENA:
ECONOMIA PEQUENA E ABERTA COM
AVERSÃO AO RISCO HETEROGÊNEA



Mauro Patrão

Brasília-DF

Fevereiro-2020



Universidade de Brasília

Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade

Programa de Pós-Graduação em Economia

**VOLATILIDADE CAMBIAL ENDÓGENA:
ECONOMIA PEQUENA E ABERTA COM
AVERSÃO AO RISCO HETEROGÊNEA**

Mauro Patrão

Orientador: Nelson Barbosa

Tese de Doutorado em Economia Política

Brasília-DF

Fevereiro-2020

À minha mãe, por ter sempre me ensinado
a importância de nos excentrarmos

Agradecimentos

Ao meu orientador, Nelson Barbosa, pelos excelentes cursos ministrados, pelas ótimas conversas e pela ampla liberdade que me deu na definição dos rumos da tese.

Aos membros da banca da minha defesa, pelas valiosas sugestões e pelos pertinentes comentários.

À minha mãe, Isa Helena, e ao meu pai, João, pelo enorme amor recebido, eternamente grato!

À minha irmã, Ana Luiza, ao meu irmão, Rafael, e à mãe dele, Maria Nilda, completando minha família mais próxima!

A@s amig@s da Economia, Henrique, Natália, Rafael, Theo, muito grato por todo apoio!

A@s amig@s Alessandra, Clarisse, Emmanuel, Jansler, João Carlos, João Gabriel, Kamila, Lucas, Luiz, Pedro, Ricardo, Thaís, Vanessa, valeu por terem me prestigiado na minha defesa!

O câmbio foi inventado por Deus para humilhar os economistas. Nunca se sabe para onde ele vai.

Edmar Bacha, Estado de São Paulo, 16 de Junho de 2013.

I've been getting some comments from people who think my magazine piece was an attack on the use of mathematics in economics. It wasn't.

Math in economics can be extremely useful. I should know! Most of my own work over the years has relied on sometimes finicky math — I spent quite a few years of my life doing tricks with constant-elasticity-of-substitution utility functions. And the mathematical grinding served an essential function — that of clarifying thought. In the economic geography stuff, for example, I started with some vague ideas; it wasn't until I'd managed to write down full models that the ideas came clear. After the math I was able to express most of those ideas in plain English, but it really took the math to get there, and you still can't quite get it all without the equations.

What I objected to in the mag article was the tendency to identify good math with good work. CAPM is a beautiful model; that doesn't mean it's right. The math of real business cycle models is much more elegant than that of New Keynesian models, let alone the kind of models that make room for crises like the one we're in; that makes RBC models seductive, but it doesn't make them any less silly.

And conversely, you can have great work in economics with little or no math. I can't pull up papers now, but as I recall, Akerlof's market for lemons had virtually no explicit math in its main exposition; yet it was transformative in its insight.

So by all means let's have math in economics — but as our servant, not our master.

Paul Krugman, Blog do New York Times, 11 de Setembro de 2009.

VOLATILIDADE CAMBIAL ENDÓGENA: ECONOMIA PEQUENA E ABERTA COM AVERSÃO AO RISCO HETEROGÊNEA

Resumo

Nesta tese de doutorado, apresentamos um modelo de economia pequena e aberta onde o resto do mundo é modelado como uma economia fechada descrita por uma curva de Phillips combinada com a lei de Okun, por uma curva IS e por uma regra de Taylor. A economia pequena e aberta é por sua vez descrita por essas mesmas equações, modificadas pelo câmbio, mais uma equação do Balanço de Pagamentos. A grande novidade é abrir a caixa preta do carry-trade através do uso da teoria da utilidade esperada mais uma hipótese sobre a heterogeneidade da aversão ao risco dos investidores. Adotando-se expectativas racionais, mostramos numericamente que o equilíbrio desse modelo é um ponto de sela, de modo que a política monetária por si só não estabiliza economia. Apresentamos também como controlar a economia utilizando também a política cambial e caracterizamos, através de uma desigualdade, a sustentabilidade fiscal desse controle. Na economia estabilizada, tanto a volatilidade cambial, quanto o prêmio de risco do carry-trade são endógenos. Outro resultado interessante do modelo é que o câmbio real de longo prazo depende dos parâmetros da regra de Taylor, ou seja, depende da política monetária. Finalmente mostramos numericamente que a variância do hiato do produto é uma função crescente e convexa do logaritmo do câmbio real de longo prazo.

Palavras-chave: economia pequena e aberta, carry-trade, aversão ao risco heterogênea, volatilidade e prêmio de risco endógenos.

ENDOGENOUS EXCHANGE RATE VOLATILITY:
SMALL AND OPEN ECONOMY WITH
HETEROGENEOUS RISK AVERSION

Abstract

In this doctoral thesis, we present a small and open economy model where the rest of the world is modeled as a closed economy described by a Phillips curve combined with Okun's law, an IS curve and a Taylor rule. The small and open economy is in turn described by these same equations, modified by the exchange rate, plus a Balance of Payments equation. The big news is to open the carry-trade black box by using the expected utility theory plus a hypothesis about the heterogeneity of the risk aversion of investors. Adopting rational expectations, we numerically show that the equilibrium of this model is a saddle point, so that monetary policy alone does not stabilize the economy. We also present how to control the economy using the exchange rate policy and characterize, through an inequality, the fiscal sustainability of this control. In the stabilized economy, both exchange rate volatility and carry-trade risk premium are endogenous. Another interesting result of the model is that the long-term real exchange rate depends on the Taylor rule parameters, that is, it depends on the monetary policy. Finally we numerically show that the output gap variance is a growing and convex function of the logarithm of the long-term real exchange rate.

Keywords: small open economy, carry-trade, heterogeneous risk aversion, endogenous risk premium and exchange rate volatility.

Sumário

1	Introdução	3
1.1	Carry-trade e volatilidade cambial	6
1.2	Dinâmica macroeconômica	9
1.3	Política macroeconômica	11
2	Carry-trade e Volatilidade Cambial	15
2.1	Prêmio de risco como função da aversão ao risco	15
2.2	Aversão ao risco como função do prêmio de risco	21
3	Dinâmica Macroeconômica	27
3.1	Economia fechada	27
3.2	Economia pequena e aberta	30
3.3	Dinâmica básica	36
4	Política Macroeconômica	49
4.1	Política cambial	49
4.2	Política fiscal	56
4.3	Política monetária	61
5	Conclusão	71

A Carry-trade e Volatilidade Cambial	73
A.1 Prêmio de risco como função da aversão ao risco	73
B Dinâmica Macroeconômica	85
B.1 Dinâmica básica	85
B.2 Códigos do Octave	93
C Política Macroeconômica	107
C.1 Códigos do Octave	107
D Da NAIRU para a NAIBU?	137

Capítulo 1

Introdução

Desde o fim do acordo de Bretton Woods e o início do câmbio flutuante, diversos autores construíram modelos para explicar a flutuação entre as moedas, como Dornbusch em [18] e Frankel em [21]. Em [27], Krugman apresenta um resumo de como se dá o processo de ajustamento da balança comercial e sua relação com a política fiscal e com a taxa de câmbio real. Alguns autores se preocuparam com a efetividade da política cambial. Por exemplo, Kohlscheen em [25] apresenta uma estimativa da denominada *pressão do mercado de câmbio* e da atividade de intervenção cambial na economia do Chile na década de noventa. Uma excelente revisão da literatura sobre câmbio desde final dos anos oitenta ao início dos anos dois mil pode ser encontrada no livro [35] de Sarno e Taylor. Mais recentemente, Krugman em [28] analisa os regimes monetários e fluxos de capital à luz dos acontecimento na zona do Euro após a crise de 2008.

A macroeconomia brasileira é fortemente influenciada pelo câmbio, especialmente desde a abertura da conta de capital no início dos anos noventa. Nos primeiros quatro anos do plano real, o câmbio administrado foi usado como

uma das principais âncoras do controle inflacionário. E, desde a mudança de regime cambial em 1999, o câmbio experimentou os mais diversos tipos de comportamento (ciclos longos de apreciação, depreciações abruptas, períodos de estabilidade e também de volatilidade intensa) e os mais diversos instrumentos de política cambial foram testados (intervenções, swaps, controle sobre diversos fluxos de capital, regulação no mercado interbancário, taxaço de derivativos). Alguns autores brasileiros de variadas posições ideológicas, como Bacha em [2] e Bresser-Pereira em [8], defendem a importância de um câmbio desvalorizado incentivar as exportações industriais, evitando a desindustrialização causada pela chamada *doença holandesa*. Alguns autores, como Rodrik em [30], se preocupam com os custos associados às reservas internacionais, enquanto outros, como Jeanne e Jancière em [24] e Vonbun em [37], procuram estimar qual seria o tamanho ótimo para essas reservas. Além disso, Rossi em [32, 33] avalia como a institucionalidade do mercado de câmbio brasileiro condiciona as políticas de câmbio no Brasil.

Além das preocupações com o custo das reservas e com os efeitos de longo prazo do câmbio, desde o início do regime de metas de inflação, os modelos de curto prazo utilizados para a política monetária levam em consideração o câmbio, como apresentado por Bogdanski, Tombini e Werlang em [12], que se baseiam nos modelos apresentados por Ball em [3, 4] e por Svensson em [36]. Mais recentemente, Airaud, Buffie e Zanna em [1] construíram um modelo onde a coordenação entre as políticas monetária e cambial melhora o desempenho da economia sob o regime de metas de inflação.

O principal objetivo da presente tese é desenvolver um modelo de economia pequena e aberta em que a volatilidade cambial e o prêmio de risco da de-

nominada *operação de carry-trade* sejam determinados endogenamente. Explorando os aspectos financeiros de risco e retorno da operação de carry-trade, utilizamos a teoria de maximização da utilidade esperada e a heterogeneidade da aversão ao risco dos agentes para essa alcançar essa finalidade. A tese é estruturada em três capítulos principais detalhados nas seções abaixo, além da presente introdução e de uma conclusão, onde são apresentadas possíveis direções para futuros desenvolvimentos. O Capítulo 2, de caráter mais microeconômico, trata da relação entre aversão ao risco, prêmio de risco e volatilidade cambial. No Capítulo 3, de caráter mais macroeconômico, a teoria desenvolvida no capítulo anterior é utilizada para modelar a equação do balanço de pagamentos da economia doméstica, modelada como economia pequena e aberta, enquanto a economia estrangeira é modelada como economia fechada. No Capítulo 4, após constatarmos, no Capítulo 3, que a economia é instável apenas com a política monetária, mostramos como controlar a economia através da política cambial e exploramos a relação dessas duas com a política fiscal. A tese também possui apêndices onde são apresentadas algumas das demonstrações matemáticas e assim como os códigos dos programas utilizados para as simulações numéricas e os gráficos elaborados. No último apêndice, apresentamos um modelo de economia fechada em que a curva de Phillips aceleracionista é modificada, como por Ball e Mazumder em [5] e por Caetano e Souza em [13], e a nova curva de Phillips é uma média ponderada da curva de Phillips aceleracionista com a curva de Phillips clássica, como por Blanchard em [10].

Finalizamos essa parte mais geral da introdução com algumas referências bibliográficas para os pré-requisitos à leitura da presente tese. Para os conteúdos de teoria de maximização da utilidade esperada, de aversão ao risco e de

prêmio de risco indicamos, as referências [15] e [19]. Para os conteúdos de teoria da probabilidade e de inferência estatística, indicamos a referências [7] e [20]. E finalmente, para os conteúdos de séries temporais, indicamos a referências [9] e [29].

1.1 Carry-trade e volatilidade cambial

Em modelos de economia aberta é necessário que duas condições sejam satisfeitas. A primeira é a denominada *paridade de poder de compra*, que deve valer no longo prazo e está associada ao balanço comercial. A segunda é a denominada *paridade descoberta da taxa de juros*, que deve valer no curto prazo e está associada a denominada *operação de carry-trade*. Essa segunda condição é semelhante à denominada *paridade coberta da taxa de juros*, que está associada a operação de hedge da operação de carry-trade e é dada por

$$i_t^f = \log \left(\frac{E_t}{F_{t+1}} \exp(i_t) \right) \quad (1.1)$$

onde i_t^f é a taxa de juros nominal externa e i_t é a taxa de juros nominal doméstica no intervalo entre t e $t + 1$, E_t é a taxa de câmbio nominal à vista no período t e F_{t+1} é a taxa de câmbio nominal futura no período $t + 1$. Ao longo de toda a tese, as taxas (de juros, de retorno, de inflação, de crescimento etc.) são definidas como o logaritmo dos respectivos fatores. Essa operação deve necessariamente ser válida pela condição de não arbitragem, uma vez que as operações são todas livres de risco. Já a paridade descoberta da taxa de juros é dada por

$$i_t^f + \bar{\rho}_t = \log \left(\frac{E_t}{E_{t+1}} \exp(i_t) \right)^e \quad (1.2)$$

onde $\bar{\rho}_t$ é denominado *prêmio de risco de mercado* e deve ser incluído, uma vez que a operação de carry-trade envolve um risco cambial, e o super-escrito e denota o valor esperado da variável aleatória condicionado às informações obtidas até o período anterior ao maior subscrito.

Do ponto de vista da teoria de maximização da utilidade esperada, um dado agente realiza a operação de carry-trade se e só se seu prêmio de risco ρ é menor ou igual ao prêmio de risco de mercado $\bar{\rho}_t$. O prêmio de risco ρ depende de parâmetros comportamentais, especificamente da função de utilidade do agente, e não comportamentais, especificamente da distribuição condicional da variável aleatória E_{t+1} . Supondo que as possíveis funções de utilidade em relação às riquezas possuem coeficiente de aversão ao risco relativa constante γ , então as correspondentes funções de utilidade em relação aos retornos possuem coeficiente de aversão ao risco absoluta constante α , onde $\alpha = \gamma - 1$. Supondo também que as possíveis distribuições condicionais da variável aleatória E_{t+1} sejam normais, mostramos que ρ é função crescente da aversão ao risco e também da volatilidade cambial σ . Esse resultado é generalizado para outras famílias de distribuição além da normal. No caso da família normal, temos que

$$\rho = \frac{\sigma^2 \alpha}{2} \quad (1.3)$$

de modo que podemos escrever

$$\alpha = \frac{2}{\sigma^2} \rho \quad (1.4)$$

No caso de outras famílias, também é possível escrever a aversão ao risco como função crescente do prêmio de risco e decrescente da volatilidade cambial σ , utilizando o teorema da função implícita. Podemos então traduzir a condição

$\rho \leq \bar{\rho}_t$ para que ocorra a operação de carry-trade na condição comportamental $\alpha \leq \bar{\alpha}_t$, onde

$$\bar{\alpha}_t = \frac{2}{\sigma_{t+1}^2} \bar{\rho}_t \quad (1.5)$$

Supondo que a distribuição de capital dos investidores estrangeiros em função dos seus coeficientes de aversão absoluta ao risco tenha densidade $\frac{dC}{d\alpha}(\alpha)$, segue que o volume total de capital C_t dos agentes que realizam operações de carry-trade no período t é dado por

$$\Delta C_t = \int_{-\infty}^{\bar{\alpha}_t} \frac{dC}{d\alpha}(\alpha) d\alpha \quad (1.6)$$

de modo que a variação desse volume total de capital $\Delta C_t = C_t - C_{t-1}$ é dada por

$$\Delta C_t = \int_{\bar{\alpha}_{t-1}}^{\bar{\alpha}_t} \frac{dC}{d\alpha}(\alpha) d\alpha \quad (1.7)$$

Supondo que a densidade $c(\alpha)$ seja constante, as equações acima explicam e tornam mais precisa a seguinte metodologia de Fernandes e Garcia apresentada em [23]:

*Para incorporar o risco da depreciação do real, seguimos sugestões já incorporadas a estudos do Banco de Compensações Internacionais (BIS) e Goldman Sachs, entre outros. **A medida de atratividade de carry-trade aqui proposta é o quociente entre o diferencial de juros ajustado pelo risco país e uma medida da volatilidade da taxa de câmbio.** A intuição é que quanto maior for a volatilidade da taxa de câmbio, maior será a probabilidade de ocorrerem depreciações do real frente ao yen que ameacem a rentabilidade do carry-trade. Assim, quanto maior a volatilidade cambial, menor a atratividade de um dado diferencial de juros.*

1.2 Dinâmica macroeconômica

No Capítulo 3, a economia estrangeira é modelada como uma economia fechada através dos modelos de Ball em [3] e de Svensson em [36], conforme apresentado em [14], descrito pelas seguintes equações. Por uma curva de Phillips combinada com a Lei de Okun, dada por

$$\pi_{t+1}^{fe} - \pi_t^f = \chi_f h_t^f \quad (1.8)$$

por uma curva IS, dada por

$$h_{t+1}^{fe} = -\xi_f (r_{t+1}^{fe} - r_f^*) \quad (1.9)$$

e finalmente por uma regra de Taylor, dada por

$$r_{t+1}^{fe} - r_f^* = \mu_f (\pi_{t+1}^{fe} - \pi_f^*) + \nu_f h_{t+1}^{fe} \quad (1.10)$$

onde χ_f , ξ_f , μ_f , ν_f são constantes positivas, π_f^* é a meta de inflação escolhida pelo Banco Central estrangeiro, r_f^* é a taxa de juros real de equilíbrio tal que a inflação é constante e igual a meta, de modo que o hiato do produto é nulo, enquanto π_t^f é a inflação do período t , h_t^f é o hiato do produto do período t , $r_{t+1}^{fe} = i_t^f - \pi_{t+1}^{fe}$ é a taxa de juros real esperada ao final do período $t+1$ e i_t^f é a taxa de juros nominal definida pelo Banco Central estrangeiro ao final do período t .

Já a economia doméstica é modelada como uma economia pequena e aberta, ajustando para o câmbio as curvas de Phillips e IS apresentadas acima e incluindo uma equação para o mercado de câmbio que incorpora a modelagem do carry-trade desenvolvida no Capítulo 2. Esse modelo é escrito pelas seguin-

tes equações. Por uma equação do Balanço de Pagamentos, dada por

$$\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1} = -a \left(\frac{2}{\sigma_{t+1}^2} (\varepsilon_t - \varepsilon_{t+1}^e + r_{t+1}^e - r_{t+1}^{fe}) - \frac{2}{\sigma_t^2} (\varepsilon_{t-1} - \varepsilon_t^e + r_t^e - r_t^{fe}) \right) - b\varepsilon_{t-1} - c^* \quad (1.11)$$

por uma curva de Phillips combinada com a Lei de Okun ajustada para o câmbio, dada por

$$\pi_{t+1}^e = \pi_t + \chi h_t + \frac{\lambda}{1-\lambda} (\varepsilon_{t+1}^e - \varepsilon_t) \quad (1.12)$$

por uma curva IS ajustada para o câmbio, dada por

$$h_{t+1}^e = -\xi r_{t+1}^e + \omega \varepsilon_t + \eta^* \quad (1.13)$$

e finalmente por uma regra de Taylor, dada por

$$r_{t+1}^e - r^* = \mu (\pi_{t+1}^e - \pi^*) + \nu h_{t+1}^e \quad (1.14)$$

onde a , b , c^* , χ , ξ , ω , η^* , μ , ν são constantes positivas, λ é o peso dos bens *tradable* na economia, π^* é a meta de inflação escolhida pelo Banco Central, r^* é a taxa de juros real de equilíbrio tal que a inflação é constante e igual a meta, de modo que o hiato do produto é nulo, enquanto ε_t é o logaritmo do câmbio real do período t , π_t é a inflação do período t , h_t é o hiato do produto do período t , $r_{t+1}^e = i_t - \pi_{t+1}^e$ é a taxa de juros real esperada ao final do período t e i_t é a taxa de juros nominal definida pela Banco Central doméstico ao final do período t .

A novidade desse modelo está na equação do Balanço de Pagamentos, onde a parcela multiplicada pela constante a é a variação do montante total das operações de carry-trade, como modelado no Capítulo 2 sob a hipótese de normalidade. A parcela multiplica pela constante b está relacionada à balança comercial sob a hipótese da condição de Marshall-Lerner. A curva IS foi ajustada para

o câmbio de modo similar ao modelo apresentado por Rodseth em [31], que é por sua vez inspirado no modelo clássico apresentado por Dornbusch em [18]. A curva de Phillips foi ajustada para o câmbio supondo que os preços dos bens tradables se ajustam instantaneamente, de modo que vale a lei do preço único para esses bens.

Adotando expectativas racionais, mostramos que a descrição da economia pode ser reduzida ao processo

$$y_{t+1} = A_{\sigma} y_t + B_{\sigma} z_{t+1} + w_{t+1} \quad (1.15)$$

onde

$$y_t = \left(r_t^f, r_t, \varepsilon_t, \varepsilon_{t-1} \right) \quad (1.16)$$

enquanto

$$z_t = \left(\delta_t^{\pi_f}, \delta_t^{\pi}, \delta_t^{\varepsilon}, \delta_{t-1}^{\pi_f}, \delta_{t-1}^{\pi}, \delta_{t-1}^{\varepsilon}, \delta_{t-1}^{h_f}, \delta_{t-1}^h \right) \quad (1.17)$$

é o vetor dos erros não sistemáticos de previsão e as matrizes A_{σ} e B_{σ} dependem da volatilidade σ^2 da operação de carry-trade, que é dada exogenamente nessa dinâmica básica.

O resultado mais importante do Capítulo 3 é mostrar numericamente que o equilíbrio dessa dinâmica básica é sempre um ponto de sela e, portanto, instável. Segue então que apenas a política monetária não é suficiente para controlar o sistema, de modo que uma política cambial ativa é sempre necessária, o que é considerado no Capítulo 4.

1.3 Política macroeconômica

No Capítulo 4, apresentamos como a política macroeconômica pode usada para estabilizar a economia doméstica. Iniciamos mostrando como, dada uma

escolha dos parâmetros μ e ν da política monetária, a política cambial pode ser usada para controlar a economia através das intervenções diretas no mercado de câmbio. Um dos principais resultados aqui é que, quando não houver mudança estrutural, a intervenção direta ι_t é uma função afim do controle dado por

$$c_t = \frac{-2au'}{\sigma^2 u' w_\iota} (B_\sigma z_t + w^*) \quad (1.18)$$

onde w_ι e w^* são vetores constantes determinados pelos parâmetros estruturais da economia, enquanto u é um vetor ortogonal ao espaço estável do sistema, dada a volatilidade σ^2 da operação de carry-trade. Por outro lado, partindo de uma dada volatilidade σ^2 da operação de carry-trade, é possível utilizar o próprio modelo para calcular a volatilidade da operação de carry-trade, que é portanto uma função $F(\sigma^2)$. Para que o modelo seja consistente, a volatilidade deve ser solução do problema de ponto fixo $F(\sigma^2) = \sigma^2$, que possui uma única solução positiva, como mostrado numericamente. A volatilidade é portanto endógena e a dinâmica do sistema é então dada por

$$y_{t+1} = A_\sigma y_t + \left(I - \frac{w_\iota u'}{u' w_\iota} \right) (B_\sigma z_{t+1} + w^*) \quad (1.19)$$

Além disso, o valor de equilíbrio da esperança da taxa de juros real r_t é dada por

$$r^* = -\frac{\omega c^*}{\xi b} + \frac{\eta^*}{\xi} \quad (1.20)$$

onde

$$c^* = \frac{-2au'}{\sigma^2 u' w_\iota} w^* \quad (1.21)$$

é a esperança do controle, de modo que o prêmio de risco de longo prazo, dado por $\rho^* = r^* - r_f^*$ também é endógeno.

Em seguida, caracterizamos através de uma desigualdade a viabilidade fiscal dessas intervenções diretas no câmbio, supondo que elas sejam completamente esterilizadas, de modo a não afetar a política monetária, ou seja, o nível das taxas de juros. E obtivemos resultados semelhantes aos de Frenkel em [22], só que agora num modelo de equilíbrio geral, mostrando que existe uma certa faixa onde é possível sustentar fiscalmente no longo prazo uma taxa de câmbio real desvalorizada.

Finalmente, determinamos como a variância do hiato do produto depende dos parâmetros μ e ν , de modo a permitir obter numericamente a política monetária ótima, que minimiza a variância do hiato do produto. Determinamos também como o logaritmo do câmbio real de longo prazo depende dos parâmetros μ e ν e concluímos que a política monetária influencia o câmbio real de longo prazo, o que é mais um resultado interessante do modelo. Além disso, comparando as curvas de nível dessas duas funções, é fácil notar que a variância do hiato do produto é função do logaritmo do câmbio real de longo prazo. O gráfico dessa função é crescente, de modo que, quanto maior for o nível da taxa de câmbio real de longo prazo, maior será a variância do hiato do produto. Entretanto o gráfico dessa função é convexo, de modo que, se a desvalorização da taxa de câmbio real de longo prazo for moderada, esse custo adicional será quase desprezível.

Capítulo 2

Carry-trade e Volatilidade Cambial

2.1 Prêmio de risco como função da aversão ao risco

A denominada *operação de carry-trade* consiste num investidor estrangeiro converter uma certa quantidade de moeda estrangeira em moeda doméstica num dado período t a uma taxa de câmbio nominal E_t , aplicar essa quantidade de moeda doméstica em títulos domésticos no intervalo entre t e $t + 1$ a uma taxa de juros nominal doméstica i_t e converter a quantidade de moeda doméstica obtida nessa aplicação em moeda estrangeira no período $t + 1$ a uma taxa de câmbio nominal E_{t+1} . Se W é a quantidade de riqueza em moeda estrangeira investida na operação de carry-trade no período t , então a quantidade de riqueza em moeda estrangeira obtida por essa operação no período $t + 1$ é dada por

$$W_{t+1} = W \frac{E_t \exp(i_t)}{E_{t+1}} \quad (2.1)$$

de modo que taxa de retorno operação de carry-trade é dada por

$$x_{t+1} = \log\left(\frac{E_t \exp(i_t)}{E_{t+1}}\right) \quad (2.2)$$

Ao longo de toda a tese, as taxas (de juros, de retorno, de inflação, de crescimento etc.) são definidas como o logaritmo dos respectivos fatores. No período t , a taxa de retorno da operação de carry-trade é desconhecida e é uma variável aleatória, uma vez que a taxa de câmbio nominal E_{t+1} é ela própria desconhecida e é uma variável aleatória. Para determinar quando um investidor estrangeiro realiza a operação de carry-trade, vamos supor que ele possa escolher entre a operação de carry-trade e aplicar em títulos estrangeiros no intervalo entre t e $t + 1$ a uma taxa de juros nominal externa i_t^f e também supor que ele escolhe a operação financeira que maximiza a esperança da sua utilidade $V(W)$. Segue então que a operação de carry-trade ocorre se e só se

$$V\left(W \exp\left(i_t^f\right)\right) \leq V\left(W \frac{E_t \exp(i_t)}{E_{t+1}}\right)^e \quad (2.3)$$

onde o super-escrito e denota o valor esperado da variável aleatória condicionado às informações obtidas até o período anterior ao período do maior subscrito e onde supusemos que aplicar em títulos estrangeiros é uma operação livre de riscos, de modo que $V\left(W \exp\left(i_t^f\right)\right)^e = V\left(W \exp\left(i_t^f\right)\right)$. Supondo que

$$V(W) = \frac{W^{1-\gamma} - 1}{1-\gamma} \quad (2.4)$$

conhecida em inglês como *Constant Relative Risk Aversion*, onde a constante γ é denominada *coeficiente de aversão relativa ao risco*, temos que a operação de carry-trade ocorre se e só se

$$U\left(i_t^f\right) \leq U\left(x_{t+1}\right)^e \quad (2.5)$$

onde

$$U(x) = \frac{1 - e^{-\alpha x}}{\alpha} \quad (2.6)$$

conhecida em inglês como *Constant Absolute Risk Aversion*, onde a constante α é denominada *coeficiente de aversão absoluta ao risco* e $\alpha = \gamma - 1$.

Proposição 2.1 *As desigualdades (2.3) e (2.5) são equivalentes.*

Prova: Vamos demonstrar essa equivalência para o caso $\alpha = \gamma - 1 > 0$. O caso $\alpha = 0$ é análogo. Usando a equação (2.4), a desigualdade (2.3) é equivalente a

$$\frac{\left(W \exp\left(i_t^f\right)\right)^{1-\gamma} - 1}{1-\gamma} \leq \left(\frac{\left(W \frac{E_t \exp(i_t)}{E_{t+1}}\right)^{1-\gamma} - 1}{1-\gamma}\right)^e \quad (2.7)$$

que por sua vez é equivalente a

$$\frac{W^{1-\gamma} \left(\exp\left(i_t^f\right)\right)^{1-\gamma} - 1}{1-\gamma} \leq \frac{W^{1-\gamma} \left(\left(\frac{E_t \exp(i_t)}{E_{t+1}}\right)^{1-\gamma}\right)^e - 1}{1-\gamma} \quad (2.8)$$

que é equivalente a

$$\left(\exp\left(i_t^f\right)\right)^{1-\gamma} \geq \left(\left(\frac{E_t \exp(i_t)}{E_{t+1}}\right)^{1-\gamma}\right)^e \quad (2.9)$$

que por sua vez é equivalente a

$$e^{-\alpha i_t^f} \geq \left(e^{-\alpha x_{t+1}}\right)^e \quad (2.10)$$

que é equivalente a

$$\frac{1 - e^{-\alpha i_t^f}}{\alpha} \leq \left(\frac{1 - e^{-\alpha x_{t+1}}}{\alpha}\right)^e \quad (2.11)$$

que, usando a equação (2.6), é equivalente à desigualdade (2.5). \square

Como a utilidade U é crescente, segue que a operação de carry-trade ocorre se e só se

$$i_t^f \leq U^{-1}(U(x_{t+1})^e) \quad (2.12)$$

onde o lado direito é denominado de *equivalente certo*. O *prêmio de risco* exigido pelo investidor para realizar a operação arriscada é definido por

$$\rho = x^e - U^{-1}(U(x_{t+1})^e) \quad (2.13)$$

de modo que a operação de carry-trade ocorre se e só se

$$\rho \leq \bar{\rho}_t \quad (2.14)$$

onde o *prêmio de risco de mercado*

$$\bar{\rho}_t = x_{t+1}^e - i_t^f \quad (2.15)$$

é o máximo valor do prêmio de risco exigido pelo investidor estrangeiro tal que a operação de carry-trade ocorre. Como a utilidade U é estritamente côncava para todo $\alpha > 0$, pela desigualdade de Jensen, temos que

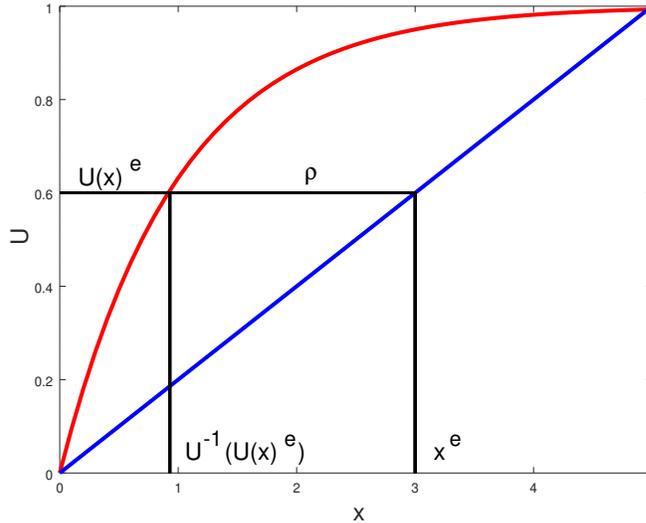
$$U(x_{t+1})^e < U(x_{t+1}^e) \quad (2.16)$$

de modo que $\rho > 0$. Vamos suprimir o subíndice temporal sempre que for conveniente. A figura 2.1 ilustra os diversos conceitos apresentados acima.

Dado uma variável aleatória x qualquer, vamos considerar a *família afim gerada por x* , definida por

$$x(\mu, \sigma) = \sigma \left(\frac{x - \mu_x}{\sigma_x} \right) + \mu \quad (2.17)$$

Figura 2.1: Utilidade e prêmio de risco



onde μ_x e σ_x^2 são, respectivamente, a esperança e a variância de x , de modo que μ e σ^2 são, respectivamente, a esperança e a variância de $x(\mu, \sigma)$. De todas elas, a mais importante é a família $N(\mu, \sigma)$, das distribuições normais. Outras bastante conhecidas são a família $B(a, b, p)$, das distribuições de Bernoulli com probabilidade p fixada, onde $a = \mu - \sigma \sqrt{\frac{1-p}{p}}$ e $b = \mu + \sigma \sqrt{\frac{p}{1-p}}$, e a família $U(a, b)$, das distribuições uniformes, onde $a = \mu - \sqrt{3}\sigma$ e $b = \mu + \sqrt{3}\sigma$. O resultado geral seguinte, demonstrado na Proposição A.1, mostra que o prêmio de risco é uma função da volatilidade e da aversão ao risco.

Proposição 2.2 *Se x possui função geradora de momentos M_x , então*

$$\rho = \frac{1}{\alpha} \log(M_{x(0,1)}(-\alpha\sigma)) \quad (2.18)$$

onde $M_{x(0,1)}(t) = (e^{tx(0,1)})^e$ é a função geradora de momentos de $x(0, 1)$. Além

disso, escrevendo $\rho = R(\sigma, \alpha)$, temos que

$$\frac{\partial R}{\partial \alpha}(\sigma, \alpha) > 0 \quad e \quad \frac{\partial R}{\partial \sigma}(\sigma, \alpha) > 0 \quad (2.19)$$

para todo σ positivo, onde a primeira desigualdade vale para todo α suficientemente pequeno, dependendo de σ , enquanto a segunda desigualdade vale para todo α positivo e suficientemente pequeno, dependendo de σ .

Restringindo nossas famílias às distribuições normais, Bernoulli e uniforme, obtemos o seguinte resultado mais forte, que é demonstrado nas Proposições A.2, A.3 e A.4.

Proposição 2.3 *Se $x(\mu, \sigma)$ possui distribuição $N(\mu, \sigma)$, então*

$$\rho = \frac{\sigma^2 \alpha}{2} \quad (2.20)$$

Por outro lado, se $x(\mu, \sigma)$ possui distribuição $B(a, b, p)$, então

$$\rho = \log \left(p e^{\alpha \sigma \sqrt{\frac{1-p}{p}}} + (1-p) e^{-\alpha \sigma \sqrt{\frac{p}{1-p}}} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \quad (2.21)$$

Finalmente, se $x(\mu, \sigma)$ possui distribuição $U(a, b)$, então

$$\rho = \log \left(\frac{e^{\sqrt{3}\alpha\sigma} - e^{-\sqrt{3}\alpha\sigma}}{2\sqrt{3}\alpha\sigma} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \quad (2.22)$$

Nesses três casos, escrevendo $\rho = R(\sigma, \alpha)$, temos que

$$\frac{\partial R}{\partial \sigma}(\sigma, \alpha) > 0 \quad e \quad \frac{\partial R}{\partial \alpha}(\sigma, \alpha) > 0 \quad (2.23)$$

para todos σ e α positivos.

2.2 Aversão ao risco como função do prêmio de risco

Nessa seção, vamos mostrar que é possível traduzir a desigualdade (2.14), que caracteriza quais são os prêmios de riscos de risco exigidos por investidores estrangeiros tais que a operação de carry-trade ocorre, num desigualdade que caracteriza quais são os coeficientes de aversão ao risco de investidores estrangeiros tais que a operação de carry-trade ocorre. Isso é fundamental para a descrição do fluxo de capital associado à operação de carry-trade, uma vez que o prêmio de risco exigido depende da volatilidade da operação de carry-trade, enquanto o coeficiente de aversão ao risco é um parâmetro puramente comportamental. A seguir uma consequência imediata dos resultados anteriores.

Corolário 2.4 *É possível escrever $\alpha = A(\sigma, \rho)$ e temos que*

$$\frac{\partial A}{\partial \sigma}(\sigma, \rho) < 0 \quad e \quad \frac{\partial A}{\partial \rho}(\sigma, \rho) > 0 \quad (2.24)$$

para todos σ e ρ positivos e suficientemente pequenos, se x possui função geradora de momentos M_x , e para todos σ e ρ positivos, se restringirmos nossas famílias às distribuições normais, Bernoulli e uniforme.

Prova: Como $\frac{\partial R}{\partial \alpha} > 0$, pelo Teorema da Função Implícita, é possível escrever $\alpha = A(\sigma, \rho)$, onde $\rho = R(\sigma, A(\sigma, \rho))$. Além disso, temos que

$$0 = \frac{\partial \rho}{\partial \sigma} = \frac{\partial R}{\partial \alpha} \frac{\partial A}{\partial \sigma} + \frac{\partial R}{\partial \sigma} \quad (2.25)$$

de modo que $\frac{\partial A}{\partial \sigma} < 0$, uma vez que $\frac{\partial R}{\partial \alpha} > 0$ e que $\frac{\partial R}{\partial \sigma} > 0$. Temos também que

$$1 = \frac{\partial \rho}{\partial \rho} = \frac{\partial R}{\partial \alpha} \frac{\partial A}{\partial \rho} \quad (2.26)$$

de modo que $\frac{\partial A}{\partial \rho} > 0$, uma vez que $\frac{\partial R}{\partial \alpha} > 0$. □

Em virtude dos resultados acima, o máximo coeficiente de aversão absoluta ao risco $\bar{\alpha}_t$ de um investidor estrangeiro que realiza a operação de carry-trade no intervalo entre t e $t + 1$ corresponde ao máximo prêmio de risco $\bar{\rho}_t$ tal que a operação de carry-trade ocorre, de modo que

$$\bar{\alpha}_t = A(\sigma_{t+1}, \bar{\rho}_t) \quad (2.27)$$

Pela equação (2.15), temos que

$$\bar{\alpha}_t = A(\sigma_{t+1}, x_{t+1}^e - i_t^f) \quad (2.28)$$

Segue então que a desigualdade (2.14) é traduzida na desigualdade

$$\alpha \leq \bar{\alpha}_t \quad (2.29)$$

onde os investidores estrangeiros que realizam a operação de carry-trade são precisamente aqueles cujo coeficiente de aversão absoluta ao risco α é menor ou igual a $\bar{\alpha}_t$. Supondo que a distribuição de capital dos investidores estrangeiros em função dos seus coeficientes de aversão absoluta ao risco tenha densidade $\frac{dC}{d\alpha}(\alpha)$, segue que o volume total de capital C_t dos agentes que realizam operações de carry-trade no período t é dado por

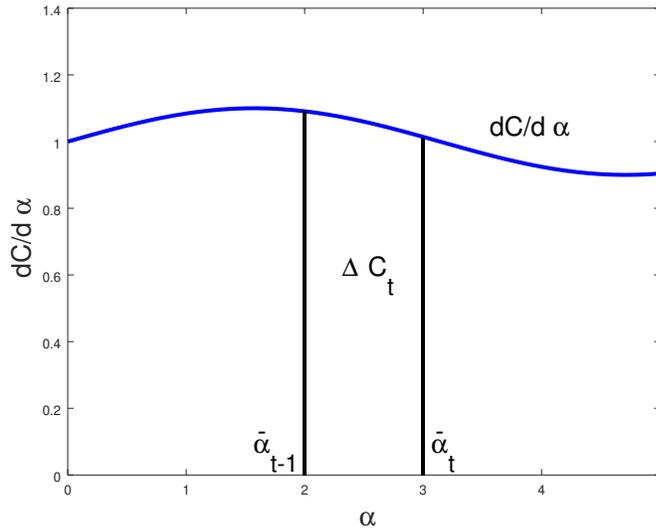
$$\Delta C_t = \int_{-\infty}^{\bar{\alpha}_t} \frac{dC}{d\alpha}(\alpha) d\alpha \quad (2.30)$$

de modo que a variação desse volume total de capital $\Delta C_t = C_t - C_{t-1}$ é dada por

$$\Delta C_t = \int_{\bar{\alpha}_{t-1}}^{\bar{\alpha}_t} \frac{dC}{d\alpha}(\alpha) d\alpha \quad (2.31)$$

A figura 2.2 ilustra os diversos conceitos apresentados acima.

Figura 2.2: Distribuição de capital em função da aversão ao risco



Se a volatilidade σ_{t+1} diminui, *ceteris paribus*, então o máximo coeficiente de aversão absoluta ao risco $\bar{\alpha}_t$ aumenta, de modo que ΔC_t é positivo, ou seja, aumenta o montante total C_t das operações de carry-trade. Por outro lado, se a esperança de apreciação cambial aumenta, *ceteris paribus*, então a esperança x_{t+1}^e do fator de juros da operação de carry-trade aumenta, de modo que $\bar{\alpha}_t$ aumenta e ΔC_t é positivo. Finalmente, se a taxa de juros nominal i_t^f dos títulos estrangeiros diminui, *ceteris paribus*, então $\bar{\alpha}_t$ aumenta, de modo que ΔC_t é positivo.

No que segue, vamos nos restringir ao caso em que x_{t+1} possui distribuição $N(\mu_{t+1}, \sigma_{t+1}^2)$, onde μ_{t+1} e σ_{t+1}^2 são, respectivamente, a esperança e a variância de x_{t+1} . Vamos também supor que a distribuição de capital dos investidores estrangeiros em função dos seus coeficientes de aversão absoluta ao risco seja

uniforme. O próximo resultado descreve o máximo coeficiente de aversão absoluta ao risco $\bar{\alpha}_t$ e a variação ΔC_t do montante total das operações de carry-trade em termos do logaritmo do câmbio real, dado por

$$\varepsilon_t = \log \left(\frac{E_t P_t^f}{P_t} \right) \quad (2.32)$$

onde P_t^f e P_t são os índices de preços medidos ao final do período t , respectivamente, externo e doméstico, e em termos das taxas de juros reais, definidas através da denominada *Equação de Fisher*, externa

$$r_{t+1}^f = i_t^f - \pi_{t+1}^f \quad (2.33)$$

e doméstica

$$r_{t+1} = i_t - \pi_{t+1} \quad (2.34)$$

onde

$$\pi_{t+1}^f = \log \left(\frac{P_{t+1}^f}{P_t^f} \right) \quad (2.35)$$

e

$$\pi_{t+1} = \log \left(\frac{P_{t+1}}{P_t} \right) \quad (2.36)$$

são as respectivas taxas de inflação para o período $t + 1$. O próximo resultado é fundamental para o modelo macroeconômico desenvolvido nos capítulos seguintes.

Proposição 2.5 *Temos que*

$$x_{t+1} = \varepsilon_t - \varepsilon_{t+1} + r_{t+1} + \pi_{t+1}^f \quad (2.37)$$

Se x_{t+1} possui distribuição $N(\mu_{t+1}, \sigma_{t+1})$, então

$$\bar{\alpha}_t = \frac{2}{\sigma_{t+1}^2} \left(\varepsilon_t - \varepsilon_{t+1}^e + r_{t+1}^e - r_{t+1}^{fe} \right) \quad (2.38)$$

Além disso, se $\frac{dC}{d\alpha}(\alpha) = a$, então

$$\Delta C_t = a \left(\frac{2}{\sigma_{t+1}^2} (\varepsilon_t - \varepsilon_{t+1}^e + r_{t+1}^e - r_{t+1}^{fe}) - \frac{2}{\sigma_t^2} (\varepsilon_{t-1} - \varepsilon_t^e + r_t^e - r_t^{fe}) \right) \quad (2.39)$$

Prova: Temos que

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= \log(X_{t+1}) \\ &= \log\left(\frac{E_t \exp(i_t)}{E_{t+1}}\right) \\ &= \log(E_t) - \log(E_{t+1}) + i_t \end{aligned} \quad (2.40)$$

Pelas equações de Fisher (2.33) e (2.34), segue que

$$\begin{aligned} x_{t+1} - i_t^f &= \log(E_t) - \log(E_{t+1}) + i_t - i_t^f \\ &= \log(E_t) - \log(E_{t+1}) + r_{t+1} + \log\left(\frac{P_{t+1}}{P_t}\right) - r_{t+1}^f - \log\left(\frac{P_{t+1}^f}{P_t^f}\right) \\ &= \log\left(\frac{E_t P_t^f}{P_t}\right) - \log\left(\frac{E_{t+1} P_{t+1}^f}{P_{t+1}}\right) + r_{t+1} - r_{t+1}^f \\ &= \varepsilon_t - \varepsilon_{t+1} + r_{t+1} - r_{t+1}^f \end{aligned} \quad (2.41)$$

de modo que a equação (2.37) segue da equação (2.33). Além disso, segue que

$$x_{t+1}^e - i_t^f = \varepsilon_t - \varepsilon_{t+1}^e + r_{t+1}^e - r_{t+1}^{fe} \quad (2.42)$$

Por outro lado, pela equação (2.20), temos que

$$\alpha_t = \frac{2}{\sigma_{t+1}^2} \rho_t \quad (2.43)$$

Pela equação (2.28), segue então que

$$\bar{\alpha}_t = \frac{2}{\sigma_{t+1}^2} (x_{t+1}^e - i_t^f) \quad (2.44)$$

de modo que a equação (2.38) segue da equação (2.42). Finalmente, se $\frac{dC}{d\alpha}(\alpha) = a$, então

$$\Delta C_t = \int_{\bar{\alpha}_{t-1}}^{\bar{\alpha}_t} a d\alpha = a(\bar{\alpha}_t - \bar{\alpha}_{t-1}) \quad (2.45)$$

de modo que a equação (2.39) segue da equação (2.38). \square

Capítulo 3

Dinâmica Macroeconômica

3.1 Economia fechada

Vamos primeiro considerar o modelo de Svensson–Ball (ver [3] e [36]), conforme apresentado por Carlin-Soskice em [14], onde se afirma que esse é o modelo mais realístico apresentado nesse artigo, uma vez que sua estrutura de defasagens temporais é a mais próxima da visão dos Bancos Centrais, como pode ser constatado na seguinte passagem do relatório [6] do Banco da Inglaterra:

The empirical evidence is that on average it takes up to about one year in this and other industrial economies for the response to a monetary policy change to have its peak effect on demand and production, and that it takes up to a further year for these activity changes to have their fullest impact on the inflation rate

O modelo de Svensson–Ball considera uma economia fechada e é descrito

pelas seguintes equações. Por uma curva de Phillips aceleracionista dada por

$$\pi_{t+1}^e - \pi_t = -\phi(u_t - u^*) \quad (3.1)$$

onde o super-escrito e denota o valor esperado da variável aleatória condicionado às informações obtidas até o período anterior ao do subscrito da variável,

$$\pi_t = \log\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) \quad (3.2)$$

é a inflação do período t , P_t é o nível de preços medido ao final do período t , ϕ é uma constante positiva, u_t é a taxa de desemprego no período t e u^* é a denominada *taxa natural de desemprego*, em inglês, *non-accelerating inflation rate of unemployment*. Pela lei de Okun, dada por

$$q_t - q_{t-1} = g^* - \varphi(u_t - u_{t-1}) \quad (3.3)$$

onde q_t é o logaritmo do produto real Q_t no período t e g^* é a denominada *taxa de crescimento potencial do produto*. Combinando essa curva de Phillips com a Lei de Okun, obtemos então o seguinte resultado.

Proposição 3.1 *Definindo o logaritmo do produto potencial por*

$$q_t^* = g^* t + q_0 + \varphi(u_0 - u^*) \quad (3.4)$$

e o hiato do produto por

$$h_t^* = q_t - q_t^* \quad (3.5)$$

temos que

$$\pi_{t+1}^e - \pi_t = \chi h_t \quad (3.6)$$

onde

$$\chi = \frac{\phi}{\varphi} \quad (3.7)$$

Prova: Temos por indução que

$$q_t - q_0 = g^* t - \varphi(u_t - u_0) \quad (3.8)$$

Para $t = 1$ isso segue direto da Lei de Okun e, supondo que vale para $t > 0$, temos que

$$\begin{aligned} q_{t+1} - q_0 &= q_{t+1} - q_t + q_t - q_0 \\ &= g^* - \varphi(u_{t+1} - u_t) + g^* t - \varphi(u_t - u_0) \\ &= g^* (t+1) - \varphi(u_{t+1} - u_0) \end{aligned} \quad (3.9)$$

Da equação (3.8), segue que

$$\begin{aligned} h_t &= q_t - q_t^* \\ &= g^* t + q_0 - \varphi(u_t - u_0) - (g^* t + q_0 + \varphi(u_0 - u^*)) \\ &= -\varphi(u_t - u^*) \end{aligned} \quad (3.10)$$

Da curva de Phillips, segue então que

$$\pi_{t+1}^e - \pi_t = \frac{\phi}{\varphi} (-\varphi(u_t - u^*)) = \chi h_t \quad (3.11)$$

□

O modelo de Svensson–Ball é completado por uma curva IS, dada por

$$h_{t+1}^e = -\xi r_{t+1}^e + \eta \quad (3.12)$$

onde ξ e η são constantes positivas,

$$r_{t+1}^e = i_t - \pi_{t+1}^e \quad (3.13)$$

é a taxa de juros real esperada ao final do período $t + 1$ e i_t é a taxa de juros nominal definida pela Banco Central ao final do período t . Essas são as taxas correspondentes a capitalização em tempo contínuo, de modo que o fator de juros é a exponencial dessas taxas. E finalmente por uma regra de Taylor, dada por

$$r_{t+1}^e - r^* = \mu(\pi_{t+1}^e - \pi^*) + \nu h_{t+1}^e \quad (3.14)$$

onde μ e ν são constantes positivas e π^* é a meta de inflação escolhidas pelo Banco Central, enquanto r^* é a taxa de juros real de equilíbrio tal que a inflação é constante e igual a meta, de modo que o hiato do produto é nulo. Essa regra é equivalente a

$$i_t - i^* = (1 + \mu)(\pi_{t+1}^e - \pi^*) + \nu h_{t+1}^e \quad (3.15)$$

onde $i^* = r^* + \pi^*$ é a taxa de juros nominal de equilíbrio. É fácil observar que

$$r^* = \frac{\eta}{\xi} \quad (3.16)$$

de modo que a equação (3.12) pode ser escrita como

$$h_{t+1}^e = -\xi(r_{t+1}^e - r^*) \quad (3.17)$$

3.2 Economia pequena e aberta

Agora vamos modificar o modelo de Svensson–Ball de modo a abrir a economia e incluir o governo. Para isso é fundamental considerarmos o grau de abertura da economia e o funcionamento do mercado de câmbio. Existem quatro forças principais atuando no mercado de câmbio. A primeira é a demanda e oferta de moeda estrangeira relacionada ao comércio de bens e serviços *tradable*. A segunda é a demanda e oferta de moeda estrangeira relacionada às operações de

carry trade. A terceira é a demanda e oferta de moeda estrangeira relacionada aos investimentos diretos de empresas estrangeiras e empresas domésticas. A quarta são as intervenções diretas da autoridade monetária através da compra e venda de moeda estrangeira e administração das reservas internacionais. Vamos analisar o funcionamento de cada uma dessas forças.

Em relação ao comércio de bens e serviços *tradable*, vamos dividi-los em dois grupos: o setor primário, composto pela mineração e pela agropecuária, e os demais setores, relativos aos bens industriais e serviços modernos. Haverá um aumento na quantidade de bens primários exportados e uma diminuição na quantidade de bens primários importados sempre que o câmbio real primário

$$\frac{E_t P_t^p}{P_t} \quad (3.18)$$

aumentar, onde P_t^p é o índice dos preços internacionais dos bens primários e E_t denota o câmbio nominal, ambos medidos ao final do período t . Como o índice dos preços internacionais dos bens industriais e serviços modernos tem comportamento muito similar ao índice geral dos preços internacionais P_t^f , vamos supor que esses dois índices são iguais, de modo que haverá um aumento na quantidade de bens industriais e serviços modernos exportados e uma diminuição na quantidade de bens industriais e serviços modernos importados sempre que o câmbio real

$$\frac{E_t P_t^f}{P_t} \quad (3.19)$$

aumentar. Vamos normalizar os índices de preços de modo que, se os respectivos câmbios reais estiverem iguais a unidade, então as respectivas balanças comerciais estarão equilibradas. Vamos então supor que o efeito dos câmbios reais sobre as respectivas balanças comerciais seja proporcional ao logaritmo

dos respectivos câmbios reais, denotados respectivamente por ε_t^p e ε_t . Isso modifica a curva IS do modelo de Svensson–Ball, que agora é dada por

$$h_{t+1}^e = -\xi r_{t+1}^e + \omega (\lambda^p \varepsilon_t^p + (1 - \lambda^p) \varepsilon_t) + \zeta \gamma_t + \eta \quad (3.20)$$

onde ω , ζ e η são constantes positivas, λ^p é o peso dos bens primários na balança comercial, enquanto $\gamma_t = G_t/Y_t$, com G_t denotando a diferença entre o gasto e a arrecadação nominais do governo no período t e $Y_t = P_t Q_t$ denotando produto nominal em moeda doméstica no período t . Uma vez que

$$\frac{E_t P_t^p}{P_t} = \frac{E_t P_t^f}{P_t} \frac{P_t^p}{P_t^f} \quad (3.21)$$

tomando logaritmos, segue que

$$\varepsilon_t^p = \varepsilon_t + \theta_t \quad (3.22)$$

onde θ_t é o logaritmo da razão do nível de preços dos bens primários pelo nível de preços dos bens industriais e serviços modernos

$$\frac{P_t^p}{P_t^f} \quad (3.23)$$

A curva IS pode ser então reescrita como

$$h_{t+1}^e = -\xi r_{t+1}^e + \omega (\varepsilon_t + \lambda^p \theta_t) + \zeta \gamma_t + \eta \quad (3.24)$$

Em relação aos efeitos do câmbio sobre o próprio mercado de câmbio, primeiro supomos que $\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}$ é proporcional à saída líquida de moeda estrangeira como proporção do produto nominal em moeda estrangeira no período t em paridade de poder de compra. Além disso, como estamos supondo economia pequena, a entrada ou saída de moeda estrangeira em nada afeta θ_t ,

de modo que, pela equação (3.22), podemos nos concentrar nos efeitos sobre ε_t . Supondo a condição de Marshall-Lerner, haverá uma maior entrada do que saída de moeda estrangeira no setor primário, quando ε_t^p for positivo, reduzindo ε_t , e haverá uma maior saída do que entrada de moeda estrangeira no setor primário, quando ε_t^p for negativo, aumentando ε_t . Do mesmo modo, haverá uma maior entrada do que saída de moeda estrangeira nos demais setores, quando ε_t for positivo, reduzindo ε_t , e haverá uma maior saída do que entrada de moeda estrangeira nos demais setores, quando ε_t for negativo, aumentando ε_t .

Em relação às operações de *carry trade*, pela Proposição 2.5, a entrada menos a saída de moeda estrangeira nessas operações é proporcional a

$$\frac{2}{\sigma_{t+1}^2} \left(\varepsilon_t - \varepsilon_{t+1}^e + r_{t+1}^e - r_{t+1}^{fe} \right) - \frac{2}{\sigma_t^2} \left(\varepsilon_{t-1} - \varepsilon_t^e + r_t^e - r_t^{fe} \right) \quad (3.25)$$

de modo que, se levarmos em conta apenas os efeitos do comércio de bens *tradable* e das operações de *carry trade*, a equação do Balanço de Pagamentos é dada por

$$\begin{aligned} \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1} = & -a \left(\frac{2}{\sigma_{t+1}^2} \left(\varepsilon_t - \varepsilon_{t+1}^e + r_{t+1}^e - r_{t+1}^{fe} \right) - \frac{2}{\sigma_t^2} \left(\varepsilon_{t-1} - \varepsilon_t^e + r_t^e - r_t^{fe} \right) \right) \\ & - b(\lambda^p \varepsilon_{t-1}^p + (1 - \lambda^p) \varepsilon_{t-1}) \end{aligned} \quad (3.26)$$

Se também levarmos em conta os efeitos dos investimentos diretos de empresas e as intervenções diretas da autoridade monetária, a equação do Balanço de Pagamentos é dada por

$$\begin{aligned} \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1} = & -a \left(\frac{2}{\sigma_{t+1}^2} \left(\varepsilon_t - \varepsilon_{t+1}^e + r_{t+1}^e - r_{t+1}^{fe} \right) - \frac{2}{\sigma_t^2} \left(\varepsilon_{t-1} - \varepsilon_t^e + r_t^e - r_t^{fe} \right) \right) \\ & - b(\lambda^p \varepsilon_{t-1}^p + (1 - \lambda^p) \varepsilon_{t-1}) - c(\kappa_t + \iota_t) \end{aligned} \quad (3.27)$$

onde

$$\kappa_t = \frac{K_t}{P_t^f Q_t} \quad \text{e} \quad \iota_t = \frac{I_t}{P_t^f Q_t} \quad (3.28)$$

com K_t denotando o investimento direto líquido em moeda estrangeira no período t , I_t denotando a diferença entre a venda e a compra de moeda estrangeira pela autoridade monetária no período t , enquanto $P_t^f Q_t$ é o produto nominal em moeda estrangeira no período t em paridade de poder de compra, enquanto a , b e c são constantes positivas que dependem das intensidades de cada uma das forças. Usando a equação (3.22), essa equação pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1} = & -a \left(\frac{2}{\sigma_{t+1}^2} (\varepsilon_t - \varepsilon_{t+1}^e + r_{t+1}^e - r_{t+1}^{fe}) - \frac{2}{\sigma_t^2} (\varepsilon_{t-1} - \varepsilon_t^e + r_t^e - r_t^{fe}) \right) \\ & - b (\varepsilon_{t-1} + \lambda^p \theta_{t-1}) - c (\kappa_t + \iota_t) \end{aligned} \quad (3.29)$$

Em relação à inflação, o câmbio afeta diretamente o nível de preços dos bens *tradable* e indiretamente os preços dos bens *non-tradable*, através do seu efeito direto no hiato do produto. Como a economia doméstica é pequena em relação ao resto da economia mundial, o índice de preço dos bens primários e o índice de preço dos bens industriais e serviços modernos em moeda estrangeira, respectivamente, P_t^p e P_t^f , não são afetados pela taxa de câmbio E_t . A inflação esperada π_{t+1}^{Tpe} dos bens primários em moeda nacional é então dada pelo logaritmo de

$$\frac{E_{t+1}^e P_{t+1}^p}{E_t P_t^p} \quad (3.30)$$

de modo que

$$\pi_{t+1}^{Tpe} = \varepsilon_{t+1}^{ep} - \varepsilon_t^p + \pi_{t+1}^e \quad (3.31)$$

Por outro lado, a inflação esperada π_{t+1}^{Tfe} dos bens industriais e serviços modernos em moeda nacional é então dada pelo logaritmo de

$$\frac{E_{t+1}^e P_{t+1}^f}{E_t P_t^f} \quad (3.32)$$

de modo que

$$\pi_{t+1}^{Tfe} = \varepsilon_{t+1}^e - \varepsilon_t + \pi_{t+1}^e \quad (3.33)$$

Já a inflação esperada π_{t+1}^{Ne} do bens *non-tradable* é descrita por uma curva de Phillips, combinada com a Lei de Okun, dada por

$$\pi_{t+1}^{Ne} = \pi_t + \chi h_t \quad (3.34)$$

A inflação esperada π_{t+1}^e da economia doméstica é então dada por

$$\pi_{t+1}^e = \lambda \lambda^p \pi_{t+1}^{Tpe} + \lambda (1 - \lambda^p) \pi_{t+1}^{Tfe} + (1 - \lambda) \pi_{t+1}^{Ne} \quad (3.35)$$

onde λ é o peso dos bens *tradable* na economia.

Proposição 3.2 *Temos que*

$$\pi_{t+1}^e = \pi_t + \chi h_t + \frac{\lambda}{1 - \lambda} (\varepsilon_{t+1}^e - \varepsilon_t + (\lambda^p \theta_{t+1}^e - \lambda^p \theta_t)) \quad (3.36)$$

Prova: Usando a equação (3.22), segue que

$$\pi_{t+1}^{Tpe} = \varepsilon_{t+1}^e - \varepsilon_t + \pi_{t+1}^e + \theta_{t+1}^e - \theta_t \quad (3.37)$$

Substituindo as equações (3.37), (3.33) e (3.34) na equação (3.35), segue que

$$\begin{aligned} \pi_{t+1}^e &= \lambda \lambda^p (\varepsilon_{t+1}^e - \varepsilon_t + \pi_{t+1}^e + \theta_{t+1}^e - \theta_t) + \lambda (1 - \lambda^p) (\varepsilon_{t+1}^e - \varepsilon_t + \pi_{t+1}^e) \\ &\quad + (1 - \lambda) (\pi_t + \chi h_t) \end{aligned} \quad (3.38)$$

de modo que

$$\pi_{t+1}^e = \lambda(\varepsilon_{t+1}^e - \varepsilon_t + \pi_{t+1}^e + (\lambda^p \theta_{t+1}^e - \lambda^p \theta_t)) + (1 - \lambda)(\pi_t + \chi h_t) \quad (3.39)$$

Segue então que

$$\pi_{t+1}^e = \pi_t + \chi h_t + \frac{\lambda}{1 - \lambda} (\varepsilon_{t+1}^e - \varepsilon_t + (\lambda^p \theta_{t+1}^e - \lambda^p \theta_t)) \quad (3.40)$$

□

A política monetária do Banco Central da economia pequena é conduzida através de uma regra de Taylor, dada por

$$r_{t+1}^e - r^* = \mu(\pi_{t+1}^e - \pi^*) + \nu h_{t+1}^e \quad (3.41)$$

onde μ e ν são constantes positivas e π^* é a meta de inflação escolhidas pelo Banco Central, enquanto r^* é a taxa de juros real de equilíbrio tal que a inflação é constante e igual a meta, de modo que o hiato do produto é nulo.

3.3 Dinâmica básica

Nesta seção, consideramos a interação entre a economia estrangeira, modelada como se fosse uma economia fechada como apresentado na primeira seção deste capítulo, e a economia doméstica, modelada como uma economia pequena e aberta como apresentado na segunda seção deste capítulo, mas sem modelar suas políticas fiscal e cambial, nem modelar o investimento direto ou os bens primários, de modo que γ_t , ι_t , κ_t e θ_t são as constantes dadas respectivamente por γ^* , ι^* , κ^* e θ^* .

A economia estrangeira é modelada pelas seguintes equações, onde utilizamos o subscrito f nas suas constantes, bem como o superescrito f nas suas variáveis, para indicar *foreign economy*. Por uma curva de Phillips combinada com a Lei de Okun, dada por

$$\pi_{t+1}^{fe} - \pi_t^f = \chi_f h_t^f \quad (3.42)$$

por uma curva IS, dada por

$$h_{t+1}^{fe} = -\xi_f (r_{t+1}^{fe} - r_f^*) \quad (3.43)$$

e finalmente por uma regra de Taylor, dada por

$$r_{t+1}^{fe} - r_f^* = \mu_f (\pi_{t+1}^{fe} - \pi_f^*) + \nu_f h_{t+1}^{fe} \quad (3.44)$$

onde $\chi_f, \xi_f, \mu_f, \nu_f$ são constantes positivas, π_f^* é a meta de inflação escolhida pelo Banco Central estrangeiro, r_f^* é a taxa de juros real de equilíbrio tal que a inflação é constante e igual a meta, de modo que o hiato do produto é nulo, enquanto

$$\pi_t^f = \log \left(\frac{P_t^f}{P_{t-1}^f} \right) \quad (3.45)$$

é a inflação do período t , P_t^f é o nível de preços medido ao final do período t , h_t^f é o hiato do produto do período t ,

$$r_{t+1}^{fe} = i_t^f - \pi_{t+1}^{fe} \quad (3.46)$$

é a taxa de juros real esperada ao final do período $t+1$ e i_t^f é a taxa de juros nominal definida pela Banco Central estrangeiro ao final do período t . Adotando expectativas racionais, temos que

$$h_t^{fe} = h_t^f + \delta_t^{h_f} \quad \text{e} \quad \pi_t^{fe} = \pi_t^f + \delta_t^{\pi_f} \quad (3.47)$$

onde $\delta_t^{h_f}$ e $\delta_t^{\pi_f}$ são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com esperanças nulas e variâncias dadas por $\sigma_{h_f}^2$ e $\sigma_{\pi_f}^2$. Vamos também supor que $\delta_t^{h_f}$ e $\delta_t^{\pi_f}$ são normalmente distribuídas. Pela *Equação de Fisher*, temos que

$$r_{t+1}^f = i_{t+1}^f - \pi_{t+1}^f \quad (3.48)$$

de modo que

$$r_t^{fe} = r_t^f - \delta_t^{\pi_f} \quad (3.49)$$

Segue então o seguinte resultado.

Proposição 3.3 *A dinâmica da taxa de juros real no modelo de Svensson–Ball é descrita pelo seguinte processo estocástico ARMA(1,1)*

$$\begin{aligned} (1 + \nu_f \xi_f) r_{t+1}^f + (\mu_f \chi_f \xi_f - \nu_f \xi_f - 1) r_t^f &= \mu_f \chi_f \xi_f \pi_f^* - \\ &- \mu_f \chi_f \delta_t^{h_f} + (1 + \nu_f \xi_f) \delta_{t+1}^{\pi_f} \\ &+ (\mu_f \chi_f \xi_f - 1 - \nu_f \xi_f - \mu_f) \delta_t^{\pi_f} \end{aligned} \quad (3.50)$$

cuja condição de estabilidade nesse caso é equivalente a

$$0 < \mu_f < \frac{2}{\chi_f \xi_f} + \frac{2\nu_f}{\chi_f} \quad (3.51)$$

Além disso, o hiato do produto é dado por

$$h_{t+1}^f = -\xi_f r_{t+1}^f + \xi_f r_f^* - \delta_{t+1}^{h_f} + \xi_f \delta_{t+1}^{\pi_f} \quad (3.52)$$

enquanto a inflação é dada por

$$\begin{aligned} \pi_{t+1}^f &= \left(\frac{1 + \nu_f \xi_f}{\mu_f} \right) r_{t+1}^f - \left(\frac{1 + \nu_f \xi_f}{\mu_f} \right) r_f^* + \pi_f^* - \\ &- \left(\frac{1 + \nu_f \xi_f}{\mu_f} + 1 \right) \delta_{t+1}^{\pi_f} \end{aligned} \quad (3.53)$$

Prova: Substituindo a primeira das equações (3.47) e a equação (3.49) na equação (3.43), segue que

$$h_{t+1}^f + \delta_{t+1}^{h_f} = -\xi_f \left(r_{t+1}^f - \delta_{t+1}^{\pi_f} - r_f^* \right) \quad (3.54)$$

que é claramente equivalente à equação (3.52). Substituindo a equação (3.43) na equação (3.44), segue que

$$r_{t+1}^{fe} - r_f^* = \mu_f \left(\pi_{t+1}^{fe} - \pi_f^* \right) - \nu_f \xi_f \left(r_{t+1}^{fe} - r_f^* \right) \quad (3.55)$$

que é equivalente a

$$\left(1 + \nu_f \xi_f \right) \left(r_{t+1}^{fe} - r_f^* \right) = \mu_f \left(\pi_{t+1}^{fe} - \pi_f^* \right) \quad (3.56)$$

Substituindo a segunda das equações (3.47) e a equação (3.49) na equação acima, segue que

$$\left(1 + \nu_f \xi_f \right) \left(r_{t+1}^f - \delta_{t+1}^{\pi_f} - r_f^* \right) = \mu_f \left(\pi_{t+1}^f + \delta_{t+1}^{\pi_f} - \pi_f^* \right) \quad (3.57)$$

que é claramente equivalente à equação (3.53) após isolar π_{t+1}^f . A primeira variação temporal da equação (3.56) é dada por

$$\left(1 + \nu_f \xi_f \right) \left(r_{t+1}^{fe} - r_t^{fe} \right) = \mu_f \left(\pi_{t+1}^{fe} - \pi_t^{fe} \right) \quad (3.58)$$

Substituindo a segunda das equações (3.47) na equação (3.42), segue que

$$\pi_{t+1}^{fe} - \pi_t^{fe} = \chi_f h_t^f - \delta_t^{\pi_f} \quad (3.59)$$

Substituindo a equação (3.52) defasada temporalmente na equação acima, obtemos

$$\pi_{t+1}^{fe} - \pi_t^{fe} = \chi_f \left(-\xi_f r_t^f + \xi_f r_f^* + \xi_f \delta_t^{\pi_f} - \delta_t^{h_f} \right) - \delta_t^{\pi_f} \quad (3.60)$$

Substituindo a equação acima na equação (3.58), segue que

$$(1 + v_f \xi_f) (r_{t+1}^{fe} - r_t^{fe}) = \mu_f \chi_f (-\xi_f r_t^f + \xi_f r_f^* + \xi_f \delta_t^{\pi_f} - \delta_t^{h_f}) - \mu_f \delta_t^{\pi_f} \quad (3.61)$$

Substituindo a equação (3.49) na equação acima e rearranjando seus termos, obtemos a equação (3.50), cuja condição de estabilidade é dada por

$$\left| \frac{\chi_f \xi_f \mu_f - v_f \xi_f - 1}{1 + v_f \xi_f} \right| < 1 \quad (3.62)$$

de modo que

$$-1 < \frac{\chi_f \xi_f \mu_f - v_f \xi_f - 1}{1 + v_f \xi_f} < 1 \quad (3.63)$$

que é equivalente a

$$0 < \mu_f < \frac{2}{\chi_f \xi_f} + \frac{2v_f}{\chi_f} \quad (3.64)$$

□

A figura 3.1 apresenta a simulação da dinâmica da economia estrangeira com os seguintes valores ilustrativos para os seus parâmetros:

$$\mu_f = 0.8$$

$$v_f = 0.9$$

$$\chi_f = 1.7$$

$$\xi_f = 1.7$$

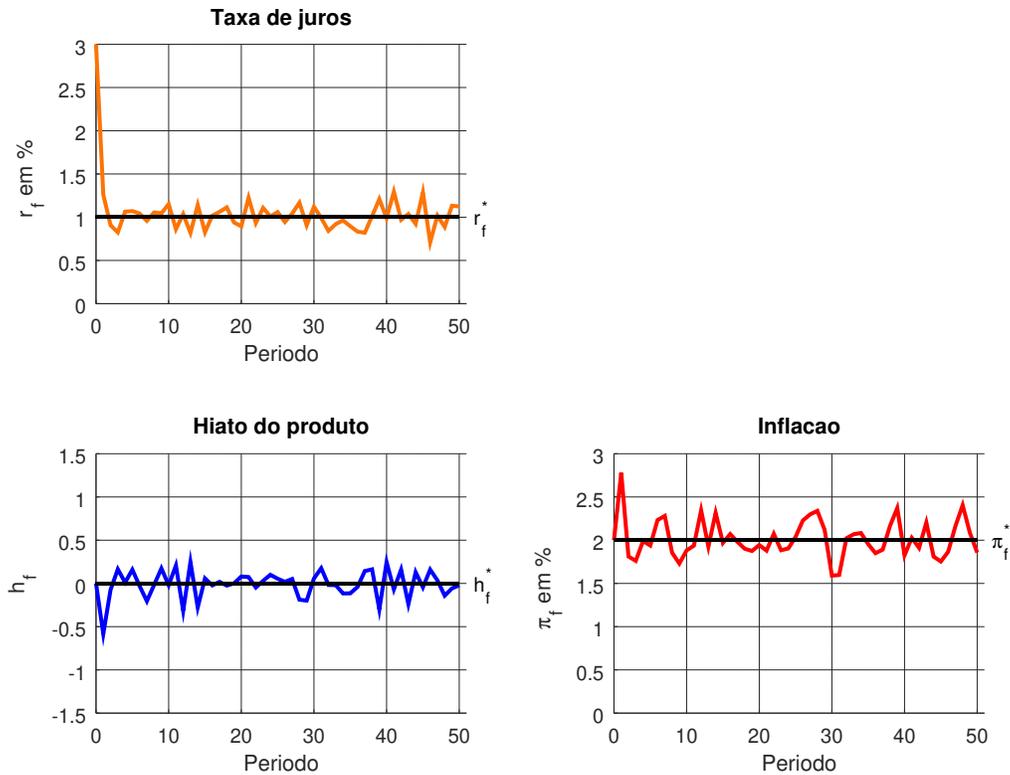
$$r_f^* = 1$$

$$\pi_f^* = 2$$

$$\sigma_{h_f}^2 = 0.01$$

$$\sigma_{\pi_f}^2 = 0.01$$

Figura 3.1: Dinâmica da economia estrangeira



Os valores acima são apenas ilustrativos e não são relevantes para a primeira conclusão importante sobre o modelo, apresentada no final deste capítulo, obtida numericamente através de inúmeros sorteios aleatórios dos valores dos parâmetros.

Já a economia doméstica é modelada pelas seguintes equações. Por uma

equação do Balanço de Pagamentos, dada por

$$\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1} = -a \left(\frac{2}{\sigma_{t+1}^2} (\varepsilon_t - \varepsilon_{t+1}^e + r_{t+1}^e - r_{t+1}^{fe}) - \frac{2}{\sigma_t^2} (\varepsilon_{t-1} - \varepsilon_t^e + r_t^e - r_t^{fe}) \right) - b\varepsilon_{t-1} - c^* \quad (3.65)$$

onde

$$c^* = b\lambda^p\theta^* + c(\kappa^* + \iota^*) \quad (3.66)$$

por uma curva de Phillips combinada com a Lei de Okun ajustada para o câmbio, dada por

$$\pi_{t+1}^e = \pi_t + \chi h_t + \frac{\lambda}{1-\lambda} (\varepsilon_{t+1}^e - \varepsilon_t) \quad (3.67)$$

por uma curva IS ajustada para o câmbio, dada por

$$h_{t+1}^e = -\xi r_{t+1}^e + \omega \varepsilon_t + \eta^* \quad (3.68)$$

onde

$$\eta^* = \omega\lambda^p\theta^* + \zeta\gamma^* + \eta \quad (3.69)$$

e finalmente por uma regra de Taylor, dada por

$$r_{t+1}^e - r^* = \mu (\pi_{t+1}^e - \pi^*) + \nu h_{t+1}^e \quad (3.70)$$

onde $a, b, c, \chi, \xi, \omega, \eta, \mu, \nu$ são constantes positivas, λ é o peso dos bens *tradeable* na economia, π^* é a meta de inflação escolhida pelo Banco Central, r^* é a taxa de juros real de equilíbrio tal que a inflação é constante e igual a meta, de modo que o hiato do produto é nulo, enquanto

$$\varepsilon_t = \log \left(\frac{E_t P_t^f}{P_t} \right) \quad (3.71)$$

é o logaritmo do câmbio real do período t ,

$$\pi_t = \log \left(\frac{P_t}{P_{t-1}} \right) \quad (3.72)$$

é a inflação do período t , P_t é o nível de preços medido ao final do período t , h_t é o hiato do produto do período t ,

$$r_{t+1}^e = i_t - \pi_{t+1}^e \quad (3.73)$$

é a taxa de juros real esperada ao final do período t e i_t é a taxa de juros nominal definida pela Banco Central ao final do período t .

Adotando expectativas racionais, temos que

$$h_t^e = h_t + \delta_t^h, \quad \pi_t^e = \pi_t + \delta_t^\pi \quad \text{e} \quad \varepsilon_t^e = \varepsilon_t + \delta_t^\varepsilon \quad (3.74)$$

onde δ_t^h , δ_t^π e δ_t^ε são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com esperanças nulas e variâncias σ_h^2 , σ_π^2 e σ_ε^2 . Vamos também supor que δ_t^h , δ_t^π e δ_t^ε são normalmente distribuídas. Pela definição *Equação de Fisher*, temos que

$$r_{t+1} = i_t - \pi_{t+1} \quad (3.75)$$

de modo que

$$r_t^e = r_t - \delta_t^\pi \quad (3.76)$$

Segue então o seguinte resultado, que é demonstrado na Proposição B.1.

Proposição 3.4 *A dinâmica da economia é descrita pelo seguinte processo estocástico ARMA(1,1)*

$$y_{t+1} = \left(\sigma_{t+1}^2 S_{\sigma_t^2} + T \right) y_t + \left(\sigma_{t+1}^2 Q_{\sigma_t^2} + R \right) z_{t+1} + w_{\sigma_{t+1}^2} \quad (3.77)$$

onde a volatilidade da operação de carry-trade é dada por

$$\sigma_t^2 = \sigma_{\pi_f}^2 + \sigma_\pi^2 + \sigma_\varepsilon^2 \quad (3.78)$$

o vetor que descreve a economia possui distribuição normal multivariada e é dado por

$$y_t = \begin{pmatrix} r_t^f \\ r_t \\ \varepsilon_t \\ \varepsilon_{t-1} \end{pmatrix} \quad (3.79)$$

o vetor dos erros estocásticos é dado por

$$z_t = \begin{pmatrix} \delta_t^{\pi_f} \\ \delta_t^\pi \\ \delta_t^\varepsilon \\ \delta_{t-1}^{\pi_f} \\ \delta_{t-1}^\pi \\ \delta_{t-1}^\varepsilon \\ \delta_{t-1}^{h_f} \\ \delta_{t-1}^h \end{pmatrix} \quad (3.80)$$

o vetor determinístico é dado por

$$w_{\sigma_t^2} = \Lambda^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\mu_f \chi_f \xi_f r_f^*}{1 + v_f \xi_f} \\ \mu \chi \eta^* + \frac{\mu \lambda}{1 - \lambda} \frac{c^* \sigma_t^2}{2a} - \frac{\mu \lambda}{1 - \lambda} \frac{\mu_f \chi_f \xi_f r_f^*}{1 + v_f \xi_f} \\ \frac{\mu \chi \eta^*}{1 + v \xi} + \frac{c^* \sigma_t^2}{2a} - \frac{\mu_f \chi_f \xi_f r_f^*}{1 + v_f \xi_f} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.81)$$

com

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + v \xi - \frac{\mu \lambda}{1 - \lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \frac{\mu \lambda}{(1 - \lambda)(1 + v \xi)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.82)$$

enquanto as transpostas das matrizes determinísticas são dadas por

$$S'_{\sigma_t^2} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\mu\lambda}{1-\lambda} \frac{1}{\sigma_t^2} & \frac{1}{\sigma_t^2} & 0 \\ 0 & -\frac{\mu\lambda}{1-\lambda} \frac{1}{\sigma_t^2} & -\frac{1}{\sigma_t^2} & 0 \\ 0 & \frac{\mu\lambda}{1-\lambda} \frac{1}{2a} \left(1 + \frac{2a}{\sigma_t^2}\right) & \frac{1}{2a} \left(1 + \frac{2a}{\sigma_t^2}\right) & 0 \\ 0 & \frac{\mu\lambda}{1-\lambda} \left[-\frac{1}{2a} \left(1 + \frac{2a}{\sigma_t^2}\right) + \frac{b}{2a}\right] & -\frac{1}{2a} \left(1 + \frac{2a}{\sigma_t^2}\right) + \frac{b}{2a} & 0 \end{pmatrix} \Lambda^{-1} \quad (3.83)$$

por

$$T' = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\mu_f \chi_f \xi_f}{1 + \nu_f \xi_f} & \frac{\mu\lambda}{1-\lambda} \left(\frac{\mu_f \chi_f \xi_f}{1 + \nu_f \xi_f} - 1\right) & \frac{\mu_f \chi_f \xi_f}{1 + \nu_f \xi_f} - 1 & 0 \\ 0 & 1 - (\mu\chi - \nu)\xi & \frac{1 - (\mu\chi - \nu)\xi}{1 + \nu\xi} & 0 \\ 0 & \nu\omega & 1 + \frac{\nu\omega}{1 + \nu\xi} - \frac{\mu\lambda}{(1-\lambda)(1 + \nu\xi)} & 1 \\ 0 & (\mu\chi - \nu)\omega & \frac{(\mu\chi - \nu)\omega}{1 + \nu\xi} & 0 \end{pmatrix} \Lambda^{-1} \quad (3.84)$$

por

$$Q'_{\sigma_t^2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\mu\lambda}{1-\lambda} \frac{1}{\sigma_t^2} & -\frac{1}{\sigma_t^2} & 0 \\ 0 & \frac{\mu\lambda}{1-\lambda} \frac{1}{\sigma_t^2} & \frac{1}{\sigma_t^2} & 0 \\ 0 & \frac{\mu\lambda}{1-\lambda} \frac{1}{\sigma_t^2} & \frac{1}{\sigma_t^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Lambda^{-1} \quad (3.85)$$

por

$$R' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + v\xi - \frac{\mu\lambda}{1-\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\mu\lambda}{(1-\lambda)(1+v\xi)} - 1 & 0 \\ -1 + \frac{\mu_f(\chi_f\xi_f-1)}{1+v_f\xi_f} & \frac{\mu\lambda}{1-\lambda} \left(1 - \frac{\mu_f(\chi_f\xi_f-1)}{1+v_f\xi_f} \right) & 1 - \frac{\mu_f(\chi_f\xi_f-1)}{1+v_f\xi_f} & 0 \\ 0 & (\mu\chi-v)\xi - (1+\mu) & \frac{(\mu\chi-v)\xi - (1+\mu)}{1+v\xi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\mu_f\chi_f}{1+v_f\xi_f} & \frac{\mu\lambda}{1-\lambda} \left(\frac{\mu_f\chi_f}{1+v_f\xi_f} \right) & \frac{\mu_f\chi_f}{1+v_f\xi_f} & 0 \\ 0 & -\mu\chi & -\frac{\mu\chi}{1+v\xi} & 0 \end{pmatrix} \Lambda^{-1} \quad (3.86)$$

Além disso, o hiato do produto é dado por

$$h_{t+1} = -\xi r_{t+1} + \omega \varepsilon_t + \eta^* - \delta_{t+1}^h + \xi \delta_{t+1}^\pi \quad (3.87)$$

enquanto a inflação é dada por

$$\pi_{t+1} = \left(\frac{1+v\xi}{\mu} \right) r_{t+1} - \frac{v\omega}{\mu} \varepsilon_t + \pi^* - \frac{r^*}{\mu} - \frac{v\eta^*}{\mu} - \left(\frac{1+v\xi}{\mu} + 1 \right) \delta_{t+1}^\pi \quad (3.88)$$

A dinâmica da economia dos valores esperados da economia é descrita pelo seguinte processo determinístico linear

$$\overline{y}_{t+1} = A_\sigma \overline{y}_t + w_{\sigma^2} \quad (3.89)$$

onde a barra denota o valor esperado incondicional e

$$A_\sigma = \sigma^2 S_{\sigma^2} + T \quad (3.90)$$

cujo equilíbrio é dado por

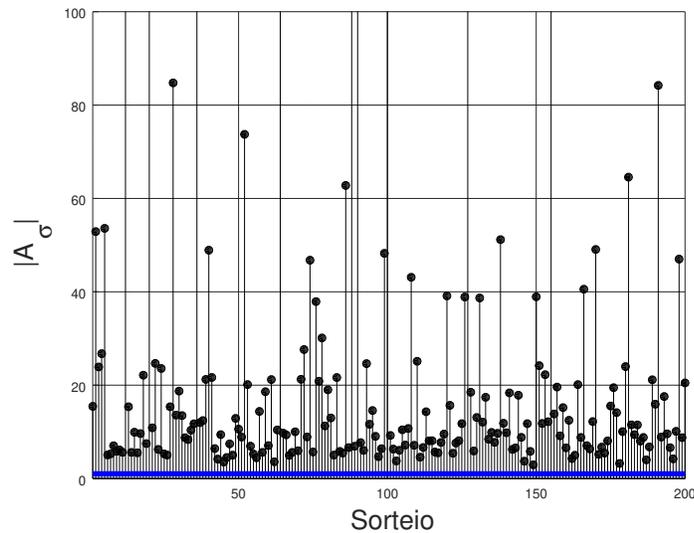
$$y^* = \begin{pmatrix} r_f^* \\ r^* \\ \varepsilon^* \\ \varepsilon^* \end{pmatrix} \quad (3.91)$$

onde

$$\varepsilon^* = -\frac{c^*}{b} \quad \text{e} \quad r^* = -\frac{\omega c^*}{\xi b} + \frac{\eta^*}{\xi} \quad (3.92)$$

Como a autoridade monetária estrangeira escolhe os parâmetros μ_f e ν_f para que a condição de estabilidade (3.51) seja satisfeita, a matriz A_σ do sistema sempre possui um autovalor com valor absoluto menor que um. Por outro lado, os cálculos numéricos abaixo mostram que, para diversos valores dos parâmetros escolhidos de modo aleatório, a matriz A_σ do sistema possui norma de operador maior do que um, o que implica que ela sempre possui um autovalor com valor absoluto maior que um, de modo que o equilíbrio acima é um ponto de sela. A figura 3.2 mostra o gráfico da norma de operador $|A_\sigma|$ da matriz do sistema para 200 sorteios aleatórios dos parâmetros, onde a linha horizontal azul de altura também é mostrada para comparação. O mínimo da norma de

Figura 3.2: Norma de A_σ para diversos sorteios



operador $|A_\sigma|$ da matriz do sistema para um milhão de sorteios aleatórios do parâmetros é igual

$$\text{mín}|A_\sigma| = 2.2213 \quad (3.93)$$

que foi atingido com os seguintes valores para os parâmetros:

$$\begin{array}{lll} \mu_f = 0.41493 & \sigma^2 = 0.00013680 & \chi = 1.5212 \\ \nu_f = 2.7315 & a = 0.027372 & \xi = 0.028995 \\ \chi_f = 1.4207 & b = 0.13302 & \lambda = 0.43335 \\ \xi_f = 0.064598 & \mu = 4.9995 & \omega = 0.10355 \\ & \nu = 0.41986 & \end{array} \quad (3.94)$$

O equilíbrio é portanto instável. Entretanto o sistema pode ser controlado através da política cambial, como será apresentado no próximo capítulo.

Capítulo 4

Política Macroeconômica

4.1 Política cambial

Nessa seção, vamos mostrar como a política cambial, através da intervenção direta no mercado de câmbio dada pela diferença ι_t entre a venda e a compra de moeda estrangeira pela autoridade monetária no período t , pode ser usada para estabilizar a macroeconomia da economia pequena e aberta. Vamos continuar assumindo que os choques são variáveis aleatórias independentes, identicamente e normalmente distribuídas, de modo que a volatilidade da operação de carry-trade é uma constante σ^2 em relação ao tempo, como mostrado na Proposição 3.4. Entretanto, como veremos a seguir, a intervenção cambial necessária para a estabilização macroeconômica altera σ^2 e a torna dependente dos demais parâmetros macroeconômicos. Como esses parâmetros podem mudar de um período para outro, vamos denotar por σ^2 a volatilidade determinada pelos parâmetros macroeconômicos vigentes no tempo $t+1$ e denotar por $\bar{\sigma}^2$ a volatilidade determinada pelos parâmetros macroeconômi-

cos vigentes no tempo t . Para simplificar a notação utilizada na Proposição 3.4, denotamos

$$A_{\bar{\sigma}}^{\sigma} = \sigma^2 S_{\bar{\sigma}^2} + T \quad (4.1)$$

e

$$B_{\bar{\sigma}}^{\sigma} = \sigma^2 Q_{\bar{\sigma}^2} + R \quad (4.2)$$

de modo que a dinâmica da economia é descrita por

$$y_{t+1} = A_{\bar{\sigma}}^{\sigma} y_t + B_{\bar{\sigma}}^{\sigma} z_{t+1} + w_{t+1} \quad (4.3)$$

onde

$$w_{t+1} = c_{t+1} \frac{\sigma^2}{2a} w_t + w^* \quad (4.4)$$

com

$$c_{t+1} = b\lambda^p \theta^* + c(\kappa^* + \iota_{t+1}) \quad (4.5)$$

e também

$$w_t = \Lambda^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\mu\lambda}{1-\lambda} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad w^* = \Lambda^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\mu_f \chi_f \xi_f r_f^*}{1+v_f \xi_f} \\ \mu\chi\eta^* - \frac{\mu\lambda}{1-\lambda} \frac{\mu_f \chi_f \xi_f r_f^*}{1+v_f \xi_f} \\ \frac{\mu\chi\eta^*}{1+v\xi} - \frac{\mu_f \chi_f \xi_f r_f^*}{1+v_f \xi_f} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

onde

$$\eta^* = \omega\lambda^p \theta^* + \zeta\gamma^* + \eta \quad (4.7)$$

enquanto

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1+v\xi - \frac{\mu\lambda}{1-\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \frac{\mu\lambda}{(1-\lambda)(1+v\xi)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

Quando não houver mudança estrutural, temos que $\sigma^2 = \bar{\sigma}^2$ e denotamos

$$A_\sigma = A_\sigma^\sigma \quad \text{e} \quad B_\sigma = B_\sigma^\sigma \quad (4.9)$$

Considere

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

a matriz dos autovalores de A_σ e a matriz $P = [v_1 v_2 v_3 v_4]$, onde v_i é autovetor associado ao autovalor d_i , de modo que $A_\sigma = PDP^{-1}$. Como sugerido no final do capítulo anterior, vamos supor que $|d_1| > 1 > |d_2|, |d_3|, |d_4|$. Devemos escolher ι_t e portanto c_t de modo que y_{t+1} seja combinação linear de $\{v_2, v_3, v_4\}$.

Para isso, considere a uma única solução u para o sistema

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ v'_2 \\ v'_3 \\ v'_4 \end{pmatrix} u = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

de modo que

$$u = \begin{pmatrix} u_{rf} \\ u_r \\ -1 \\ u_\varepsilon \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

A primeira coordenada do vetor do lado direito da equação acima e a primeira linha da matriz dos coeficientes são totalmente arbitrárias, tendo sido escolhidas apenas por conveniência para que a terceira coordenada do vetor u tenha valor igual a menos um. Segue então que y_{t+1} é combinação linear de

$\{v_2, v_3, v_4\}$ se e só se seu produto escalar com u é nulo. O próximo resultado apresenta as fórmulas que descrevem como a economia funciona sob a política cambial de estabilização.

Proposição 4.1 *Se a intervenção direta ι_t for escolhida de modo que y_{t+1} seja combinação linear de $\{v_2, v_3, v_4\}$, então o controle é dado por*

$$c_{t+1} = \frac{-2au'}{\sigma^2 u' w_l} (A_{\bar{\sigma}}^{\sigma} y_t + B_{\bar{\sigma}}^{\sigma} z_{t+1} + w^*) \quad (4.13)$$

de modo que

$$\iota_{t+1} = \frac{c_{t+1}}{c} - \frac{b}{c} \lambda^p \theta^* - \kappa^* \quad (4.14)$$

enquanto a dinâmica é dada

$$y_{t+1} = \left(I - \frac{w_l u'}{u' w_l} \right) (A_{\bar{\sigma}}^{\sigma} y_t + B_{\bar{\sigma}}^{\sigma} z_{t+1} + w^*) \quad (4.15)$$

Além disso, para que o modelo seja consistente, a volatilidade da operação de carry-trade deve satisfazer a equação

$$F(\sigma^2) = \sigma^2 \quad (4.16)$$

onde

$$F(\sigma^2) = X' \left(I - \frac{w_l u'}{u' w_l} \right) M \left(I - \frac{w_l u'}{u' w_l} \right)' X \quad (4.17)$$

com

$$X = (-1, 1, -1, 0) \quad (4.18)$$

e

$$M = \begin{pmatrix} \sigma_{\pi_f}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\pi}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\varepsilon}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.19)$$

Prova: Pela equação (4.3), segue que

$$y_{t+1} = A_{\bar{\sigma}}^{\sigma} y_t + B_{\bar{\sigma}}^{\sigma} z_{t+1} + c_{t+1} \frac{\sigma^2}{2a} w_t + w^* \quad (4.20)$$

de modo que

$$u' y_{t+1} = u' A_{\bar{\sigma}}^{\sigma} y_t + u' B_{\bar{\sigma}}^{\sigma} z_{t+1} + u' \left(c_{t+1} \frac{\sigma^2}{2a} w_t + w^* \right) = 0 \quad (4.21)$$

se e só se

$$c_{t+1} = \frac{-2au'}{\sigma^2 u' w_t} (A_{\bar{\sigma}}^{\sigma} y_t + B_{\bar{\sigma}}^{\sigma} z_{t+1} + w^*) \quad (4.22)$$

demonstrando a equação (4.13). A equação (4.14) segue então imediatamente da equação (4.5). Segue também que

$$y_{t+1} = A_{\bar{\sigma}}^{\sigma} y_t + B_{\bar{\sigma}}^{\sigma} z_{t+1} + w^* - \frac{u'}{u' w_t} (A_{\bar{\sigma}}^{\sigma} y_t + B_{\bar{\sigma}}^{\sigma} z_{t+1} + w^*) w_t \quad (4.23)$$

Como

$$u' (A_{\bar{\sigma}}^{\sigma} y_t + B_{\bar{\sigma}}^{\sigma} z_{t+1} + w^*) \quad (4.24)$$

é um escalar, comuta com w_t , de modo que

$$y_{t+1} = \left(I - \frac{w_t u'}{u' w_t} \right) (A_{\bar{\sigma}}^{\sigma} y_t + B_{\bar{\sigma}}^{\sigma} z_{t+1} + w^*) \quad (4.25)$$

demonstrando a equação (4.14). Por outro lado, segue então que

$$y_{t+1}^e = \left(I - \frac{w_t u'}{u' w_t} \right) (A_{\bar{\sigma}}^{\sigma} y_t + B_{\bar{\sigma}}^{\sigma} z_{t+1}^e + w^*) \quad (4.26)$$

de modo que

$$y_{t+1}^e - y_{t+1} = \left(I - \frac{w_t u'}{u' w_t} \right) B_{\bar{\sigma}}^{\sigma} (z_{t+1}^e - z_{t+1}) \quad (4.27)$$

Como

$$B_{\bar{\sigma}}^{\sigma} (z_{t+1}^e - z_{t+1}) = \begin{pmatrix} -\delta_{t+1}^{\pi_f} \\ -\delta_{t+1}^{\pi} \\ \delta_{t+1}^{\varepsilon} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.28)$$

segue que

$$y_{t+1}^e - y_{t+1} = \left(I - \frac{w_t u'}{u' w_t} \right) \begin{pmatrix} -\delta_{t+1}^{\pi_f} \\ -\delta_{t+1}^{\pi} \\ \delta_{t+1}^{\varepsilon} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.29)$$

Agora vamos determinar a volatilidade da operação de carry-trade através do próprio modelo. Pela equação (2.37), temos que

$$x_{t+1} = \varepsilon_t - \varepsilon_{t+1} + r_{t+1} + \pi_{t+1}^f \quad (4.30)$$

de modo que

$$\begin{aligned} x_{t+1}^e - x_{t+1} &= -(\varepsilon_{t+1}^e - \varepsilon_{t+1}) + (r_{t+1}^e - r_{t+1}) + (\pi_{t+1}^{fe} - \pi_{t+1}^f) \\ &= -(\varepsilon_{t+1}^e - \varepsilon_{t+1}) + (r_{t+1}^e - r_{t+1}) - (r_{t+1}^{fe} - r_{t+1}^f) \\ &= X' (y_{t+1}^e - y_{t+1}) \end{aligned} \quad (4.31)$$

Segue então que

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \left((x_{t+1}^e - x_{t+1})^2 \right)^e \\ &= X' \left((y_{t+1}^e - y_{t+1}) (y_{t+1}^e - y_{t+1})' \right)^e X \\ &= X' \left(I - \frac{w_t u'}{u' w_t} \right) M \left(I - \frac{w_t u'}{u' w_t} \right)' X \end{aligned} \quad (4.32)$$

demonstrando a equação (4.14). □

O próximo resultado é um corolário quase imediato do resultado acima quando não houver mudança estrutural e fizer então sentido pensar no comportamento de longo prazo da esperança das variáveis da economia doméstica.

Corolário 4.2 Quando não houver mudança estrutural, o controle é dado por

$$c_{t+1} = \frac{-2au'}{\sigma^2 u' w_t} (B_\sigma z_{t+1} + w^*) \quad (4.33)$$

enquanto que a dinâmica do sistema é dada por

$$y_{t+1} = A_\sigma y_t + \left(I - \frac{w_t u'}{u' w_t} \right) (B_\sigma z_{t+1} + w^*) \quad (4.34)$$

Além disso, os valores de equilíbrio das esperanças da intervenção direta ι_t , do logaritmo do câmbio real ε_t e da taxa de juros real r_t são dados, respectivamente, por

$$\iota^* = \frac{c^*}{c} - \frac{b}{c} \lambda^p \theta^* - \kappa^*, \quad \varepsilon^* = -\frac{c^*}{b}, \quad e \quad r^* = -\frac{\omega c^*}{\xi b} + \frac{\zeta}{\xi} \gamma^* + \frac{\omega}{\xi} \lambda^p \theta^* + \frac{\eta}{\xi} \quad (4.35)$$

onde

$$c^* = \frac{-2au'}{\sigma^2 u' w_t} w^* \quad (4.36)$$

é a esperança do controle e w^* é uma função de deficit primário γ^* .

Prova: As equações (4.33) e (4.34) seguem direto das equações (4.13) e (4.15), uma vez que $u' A_\sigma y_t = 0$, se y_t seja combinação linear de $\{v_2, v_3, v_4\}$. Além disso, calculando a esperança das equações (4.14) e (4.33), obtemos a primeira das equações (4.35) e a equação (4.36). Pelas equações (3.92), temos que

$$\varepsilon^* = -\frac{c^*}{b} \quad e \quad r^* = -\frac{\omega c^*}{\xi b} + \frac{\eta^*}{\xi} \quad (4.37)$$

de modo que

$$r^* = -\frac{\omega c^*}{\xi b} + \frac{\zeta}{\xi} \gamma^* + \frac{\omega}{\xi} \lambda^p \theta^* + \frac{\eta}{\xi} \quad (4.38)$$

uma vez que

$$\eta^* = \omega \lambda^p \theta^* + \zeta \gamma^* + \eta \quad (4.39)$$

pela equação (4.7). □

4.2 Política fiscal

Nessa seção, vamos analisar o aspecto fiscal das políticas monetária e cambial para estabilizar a economia. O passivo do governo no período t é dado por

$$L_t = B_t + D_t \quad (4.40)$$

onde B_t é a base monetária e D_t é dívida bruta nominal ambas no período t . Supondo toda intervenção cambial seja esterilizada, segue que a variação do passivo do governo entre os períodos t e $t + 1$, $\Delta L_t = L_{t+1} - L_t$, é dada por

$$\Delta L_t = -I_t E_t + i^* D_t + G_t \quad (4.41)$$

onde I_t é a diferença entre os dólares vendidos e comprados pelo governo, E_t é a taxa de câmbio nominal, G_t é a diferença entre o gasto e a arrecadação nominais do governo, todos no período t , e i^* é a taxa de juros nominal de equilíbrio dada por $r^* + \pi^*$, onde r^* é a taxa de juros real de equilíbrio e π^* é a meta de inflação. A condição de sustentabilidade fiscal do governo será dada pelo não crescimento da razão

$$\frac{D_t}{Y_t} \quad (4.42)$$

onde Y_t é o produto potencial nominal no período t . Vamos supor que a taxa de crescimento do produto nominal é dada por

$$\frac{\Delta Y_t}{Y_t} = g^* + \pi^* \quad (4.43)$$

onde g^* é a taxa de crescimento real do produto potencial. Vamos supor também que a base monetária e o produto nominal sejam proporcionais, de modo que B_t/Y_t é constante e igual a B/Y e também

$$\frac{\Delta B_t}{B_t} = \frac{\Delta Y_t}{Y_t} \quad (4.44)$$

Finalmente, vamos supor que

$$\gamma^* = \frac{G_t}{Y_t} \quad \text{e} \quad i^* = \frac{I_t}{P_t^f Q_t} \quad (4.45)$$

são constantes.

Proposição 4.3 *Temos que a razão D_t/Y_t é não crescente se e só se*

$$r^* + \pi^* \leq \left(\frac{B/Y}{D_t/Y_t} + 1 \right) (g^* + \pi^*) - \left(\frac{-i^* \exp(\varepsilon^*) + \gamma^*}{D_t/Y_t} \right) \quad (4.46)$$

Prova: Temos que D_t/Y_t é não crescente se e só se

$$\frac{D_{t+1}}{Y_{t+1}} \leq \frac{D_t}{Y_t} \quad (4.47)$$

que é equivalente a

$$D_{t+1} Y_t \leq D_t Y_{t+1} \quad (4.48)$$

que por sua vez é equivalente a

$$(D_t + \Delta D_t) Y_t \leq D_t (Y_t + \Delta Y_t) \quad (4.49)$$

Essa equação é equivalente a

$$\Delta D_t Y_t \leq D_t \Delta Y_t \quad (4.50)$$

que por sua vez é equivalente a

$$\frac{\Delta D_t}{D_t} \leq \frac{\Delta Y_t}{Y_t} \quad (4.51)$$

Pelas equações (4.40) e (4.41), temos que

$$\Delta B_t + \Delta D_t = \Delta L_t = -I_t E_t + i^* D_t + G_t \quad (4.52)$$

de modo que

$$\Delta D_t = -I_t E_t + i^* D_t + G_t - \Delta B_t \quad (4.53)$$

Pelas equações (4.43) e (4.51), segue que

$$\frac{-I_t E_t + G_t}{D_t} + i^* - \frac{\Delta B_t}{D_t} \leq g^* + \pi^* \quad (4.54)$$

que é equivalente a

$$\frac{-I_t E_t + G_t}{D_t} + i^* - \frac{\Delta B_t}{B_t} \frac{B_t}{D_t} \leq g^* + \pi^* \quad (4.55)$$

que, pela equação (4.44), é equivalente a

$$\frac{-I_t E_t + G_t}{D_t} + i^* - \frac{B_t}{D_t} (g^* + \pi^*) \leq g^* + \pi^* \quad (4.56)$$

que por sua vez é equivalente a

$$i^* \leq \left(\frac{B_t}{D_t} + 1 \right) (g^* + \pi^*) - \left(\frac{-I_t E_t + G_t}{D_t} \right) \quad (4.57)$$

Essa equação é equivalente a

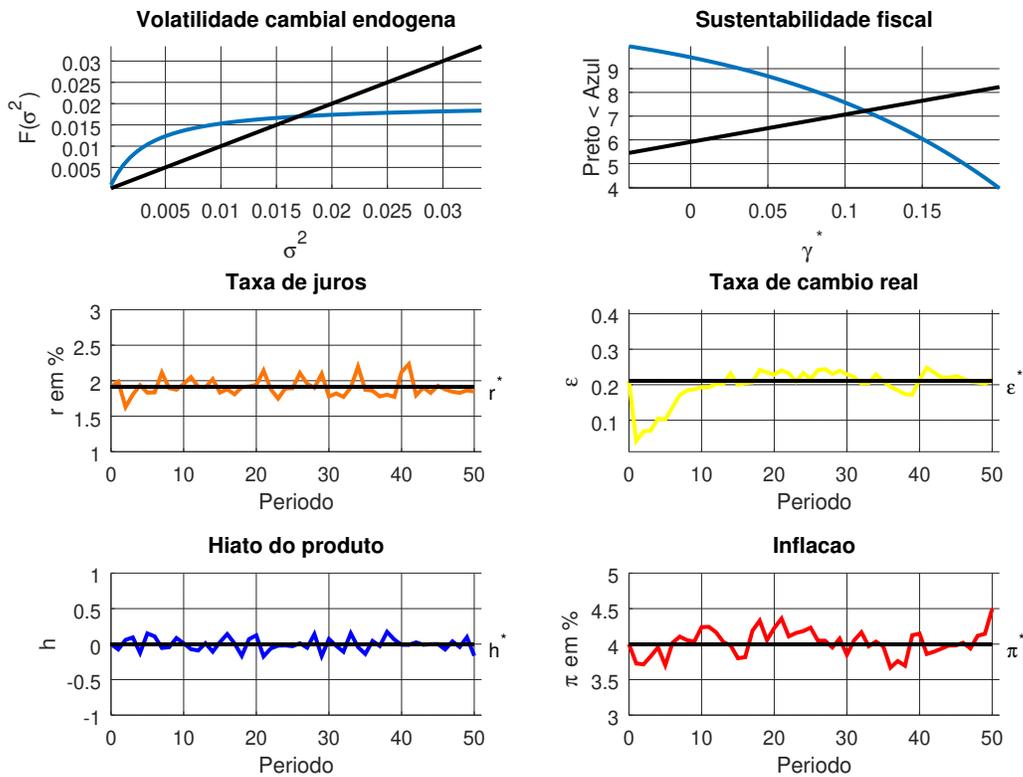
$$r^* + \pi^* \leq \left(\frac{B_t/Y_t}{D_t/Y_t} + 1 \right) (g^* + \pi^*) - \left(\frac{-I_t E_t/Y_t + G_t/Y_t}{D_t/Y_t} \right) \quad (4.58)$$

A equação (4.46) segue das equações (4.45), observando que

$$\begin{aligned} \frac{-I_t E_t}{Y_t} &= \frac{-I_t \exp(\varepsilon^*) P_t}{P_t Q_t P_t^f} \\ &= \frac{-I_t}{P_t^f Q_t} \exp(\varepsilon^*) \\ &= -i^* \exp(\varepsilon^*) \end{aligned} \quad (4.59)$$

□

Figura 4.1: Dinâmica da economia doméstica



A figura 4.6 apresenta a simulação da dinâmica da economia doméstica com os mesmo valores para os parâmetros da economia estrangeira:

$$\begin{aligned}
 \mu_f &= 0.8 & r_f^* &= 1 \\
 \nu_f &= 0.9 & \pi_f^* &= 2 \\
 \chi_f &= 1.7 & \sigma_{h_f}^2 &= 0.01 \\
 \xi_f &= 1.7 & \sigma_{\pi_f}^2 &= 0.01
 \end{aligned}
 \tag{4.60}$$

e com os seguintes valores para os parâmetros da economia doméstica:

$$\begin{array}{lll}
 a = 0.001 & \chi = 1.7 & B/Y = 1 \\
 b = 0.2 & \lambda = 0.1 & D_t/Y_t = 1 \\
 c = 0.1 & \xi = 0.9 & g^* = 1 \\
 \kappa^* = 0 & \omega = 0.1 & \sigma_h^2 = 0.01 \\
 \theta^* = 0 & \zeta = 10 & \sigma_\pi^2 = 0.01 \\
 \lambda_p = 0 & \eta = 1.7 & \sigma_\varepsilon^2 = 0.01
 \end{array} \tag{4.61}$$

Se os valores dos parâmetros escolhidos pela política macroeconômica são dados pela primeira coluna baixo, então os valores de equilíbrio da volatilidade do câmbio σ^2 , das esperanças da intervenção direta ι_t , do logaritmo do câmbio real ε_t e da taxa de juros real r_t :

$$\begin{array}{ll}
 \mu = 0.8 & \sigma^2 = 0.01697 \\
 \nu = 0.9 & \iota^* = -0.42265 \\
 \pi^* = 4 & \varepsilon^* = 0.21132 \\
 \gamma^* = 0 & r^* = 1.9124
 \end{array} \tag{4.62}$$

Temos que a taxa de câmbio real de equilíbrio está desvalorizada, uma vez que ε^* é positivo, o que torna as exportações mais competitivas. Entretanto existe um custo fiscal associado à esterilização da necessária intervenção direta no câmbio, uma vez que ι^* é negativo, de modo que a autoridade monetária é compradora líquida de moeda estrangeira. Observe que autoridade monetária doméstica não pode ser vendedora líquida de moeda estrangeira no longo prazo, pois as reservas internacionais são finitas, de modo que a política macroeconômica só é sustentável se $\iota^* \leq 0$. O gráfico de sustentabilidade fiscal acima, mostra que essa política macroeconômica também é fiscalmente sustentável, uma vez que para $\gamma^* = 0$, a curva azul, que é o gráfico do lado direito

da desigualdade (4.46) como função de γ^* , está de fato acima da reta preta, que é o gráfico do lado esquerdo da desigualdade (4.46) como função de γ^* .

4.3 Política monetária

Nessa seção, vamos mostrar como a variância $\text{var}(h)$ do hiato do produto depende dos parâmetros μ e ν da regra de Taylor e também vamos verificar numericamente que $\text{var}(h)$ é de fato uma função crescente de ε^* . Portanto, além do custo fiscal de esterilização associado a uma dada taxa de câmbio real de equilíbrio desvalorizada, existe também um segundo custo econômico, uma vez que quanto mais desvalorizada for a taxa de câmbio real de equilíbrio, maior será a variância do hiato do produto. Entretanto, devido à relação não linear entre $\text{var}(h)$ e ε^* , esse segundo custo é quase irrelevante se a desvalorização da taxa de câmbio de equilíbrio for moderada. Outra observação importante é que, pelas equações (4.35), se $\kappa^* = \theta^* = 0$, então a condição de sustentabilidade $l^* \leq 0$ é equivalente a condição $\varepsilon^* \geq 0$.

Para determinarmos a expressão de $\text{var}(h)$ como função de μ e ν , considere a matriz P talque $A_\sigma = PDP^{-1}$, apresentada na primeira seção desse capítulo. Multiplicando a equação (4.34) por P^{-1} e denotando

$$p_t = P^{-1}y_t, \quad q = P^{-1}\left(I - \frac{w_t u'}{u' w_t}\right)w^* \quad \text{e} \quad C = P^{-1}\left(I - \frac{w_t u'}{u' w_t}\right)B_\sigma \quad (4.63)$$

segue que

$$p_{t+1} = Dp_t + Cz_{t+1} + q \quad (4.64)$$

onde a primeira entrada de p_t e de q e a primeira linha de C são todas nulas.

Proposição 4.4 *Temos que a variância do hiato do produto é dada por*

$$\text{var}(h) = H' \text{cov}(y) H + \sigma_h^2 + \xi^2 \sigma_\pi^2 + 2\xi H' \left(I - \frac{w_t u'}{u' w_t} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma_\pi^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.65)$$

onde

$$H = (0, -\xi, 0, \omega) \quad (4.66)$$

a matriz de covariância da varável aleatória estacionária y_t é dada por

$$\text{cov}(y) = P \text{cov}(p) P' \quad (4.67)$$

enquanto a matriz de covariância da varável aleatória estacionária p_t é dada por

$$\text{cov}(p)_{ij} = \frac{1}{1 - d_i d_j} Z_{ij} \quad (4.68)$$

onde a matriz

$$Z = C \text{cov}(z) C' + D C \text{cov}(z, z_{+1}) C' + C \text{cov}(z, z_{+1})' C' D' \quad (4.69)$$

enquanto a matriz

$$\text{cov}(z) = \begin{pmatrix} \sigma_{\pi_f}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\pi^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_\varepsilon^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{\pi_f}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_\pi^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_\varepsilon^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{h_f}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_h^2 \end{pmatrix} \quad (4.70)$$

é a esperança da variável aleatória estacionária $z_t z_t'$, e a matriz

$$\text{cov}(z, z_{+1}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \sigma_{\pi_f}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{\pi}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{\varepsilon}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.71)$$

é a esperança da variável aleatória estacionária $z_t z_{t+1}'$.

Prova: Da equação (4.64), segue que

$$\hat{p}_{t+1} = D\hat{p}_t + Cz_{t+1} \quad (4.72)$$

onde o sinal de circunflexo significa o desvio da variável aleatória em relação a sua esperança incondicional. Defasando no tempo, segue que

$$\hat{p}_t = D\hat{p}_{t-1} + Cz_t \quad (4.73)$$

de modo que

$$\begin{aligned} \hat{p}_{t+1}\hat{p}_{t+1}' &= D\hat{p}_t\hat{p}_t'D' + Cz_{t+1}z_{t+1}'C' + D\hat{p}_t z_{t+1}'C' + Cz_{t+1}\hat{p}_t'D' \\ &= D\hat{p}_t\hat{p}_t'D' + Cz_{t+1}z_{t+1}'C' + \\ &\quad + D(D\hat{p}_{t-1} + Cz_t)z_{t+1}'C' + Cz_{t+1}(D\hat{p}_{t-1} + Cz_t)'D' \\ &= D\hat{p}_t\hat{p}_t'D' + Cz_{t+1}z_{t+1}'C' + \\ &\quad + D^2\hat{p}_{t-1}z_{t+1}'C' + DCz_t z_{t+1}'C' + \\ &\quad + Cz_{t+1}\hat{p}_{t-1}'D^2 + Cz_{t+1}z_t'C'D' \end{aligned} \quad (4.74)$$

Supondo que p_t é estacionária e calculando a esperança da equação acima, segue que a esperança da variável aleatória estacionária $\hat{p}_t \hat{p}'_t$ é dada por

$$\text{cov}(p) = D\text{cov}(p)D' + C\text{cov}(z)C' + DC\text{cov}(z, z_{+1})C' + C\text{cov}(z, z_{+1})'C'D' \quad (4.75)$$

onde usamos que a esperança da variável aleatória estacionária $\hat{p}_{t-1}z'_{t+1}$ é nula, que $\text{cov}(z)$ é a esperança da variável aleatória estacionária $z_t z'_t$ e que $\text{cov}(z, z_{+1})$ é a esperança da variável aleatória estacionária $z_t z'_{t+1}$. Pela equação acima e pela equação (4.69), segue que

$$\text{cov}(p) - D\text{cov}(p)D' = Z \quad (4.76)$$

de modo que

$$\text{cov}(p)_{ij} = \frac{1}{1 - d_i d_j} Z_{ij} \quad (4.77)$$

Por outro lado, como $y_t = Pp_t$, segue que

$$\text{cov}(y) = P\text{cov}(p)P' \quad (4.78)$$

Além disso, pela equação (3.87), temos que

$$h_{t+1} = -\xi r_{t+1} + \omega \varepsilon_t + \eta^* - \delta_{t+1}^h + \xi \delta_{t+1}^\pi \quad (4.79)$$

de modo que

$$h_{t+1} = H'y_{t+1} + \eta^* - \delta_{t+1}^h + \xi \delta_{t+1}^\pi \quad (4.80)$$

Segue então que

$$\hat{h}_{t+1} = H'\hat{y}_{t+1} - \delta_{t+1}^h + \xi \delta_{t+1}^\pi \quad (4.81)$$

de modo que

$$\begin{aligned} \hat{h}_{t+1}^2 &= H'\hat{y}_{t+1}\hat{y}'_{t+1}H + \left(\delta_{t+1}^h\right)^2 + \xi^2 \left(\delta_{t+1}^\pi\right)^2 - \\ &\quad - 2H'\hat{y}_{t+1}\delta_{t+1}^h + 2H'\hat{y}_{t+1}\xi\delta_{t+1}^\pi - 2\delta_{t+1}^h\xi\delta_{t+1}^\pi \end{aligned} \quad (4.82)$$

Da equação (4.34), temos que

$$y_{t+1} = A_\sigma y_t + \left(I - \frac{w_t u'}{u' w_t} \right) (B_\sigma z_{t+1} + w^*) \quad (4.83)$$

de modo que

$$\hat{y}_{t+1} = A_\sigma \hat{y}_t + \left(I - \frac{w_t u'}{u' w_t} \right) B_\sigma z_{t+1} \quad (4.84)$$

e então que

$$\begin{aligned} \hat{h}_{t+1}^2 &= H' \hat{y}_{t+1} \hat{y}_{t+1}' H + \left(\delta_{t+1}^h \right)^2 + \xi^2 \left(\delta_{t+1}^\pi \right)^2 - \\ &\quad - 2H' \left(A_\sigma \hat{y}_t + \left(I - \frac{w_t u'}{u' w_t} \right) B_\sigma z_{t+1} \right) \delta_{t+1}^h + \\ &\quad + 2H' \left(A_\sigma \hat{y}_t + \left(I - \frac{w_t u'}{u' w_t} \right) B_\sigma z_{t+1} \right) \xi \delta_{t+1}^\pi - 2\delta_{t+1}^h \xi \delta_{t+1}^\pi \end{aligned} \quad (4.85)$$

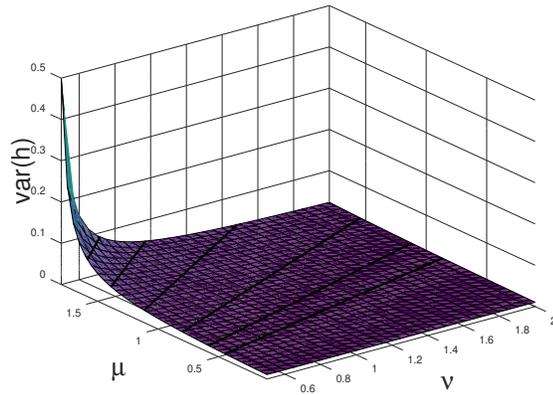
Calculando a esperança da equação acima, temos que

$$\text{var}(h) = H' \text{cov}(y) H + \sigma_h^2 + \xi^2 \sigma_\pi^2 + 2\xi H' \left(I - \frac{w_t u'}{u' w_t} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma_\pi^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.86)$$

onde usamos que a esperança da variáveis aleatórias estacionárias $\hat{y}_t \delta_{t+1}^h$, $\hat{y}_t \delta_{t+1}^\pi$ e $z_{t+1} \delta_{t+1}^h$ são todas nulas e que a esperança da variável aleatória estacionária $B_\sigma z_{t+1} \delta_{t+1}^\pi$ é dada por $(0, \sigma_\pi^2, 0, 0)$. \square

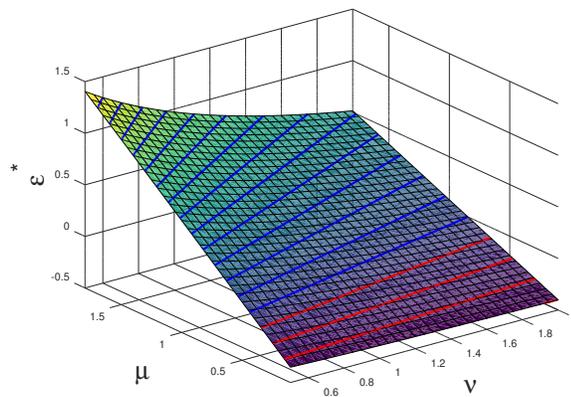
A figura 4.2 mostra o gráfico de $\text{var}(h)$ como função de μ e ν e algumas das suas curvas de nível em preto. A minimização $\text{var}(h)$ deve ser feita respeitando-se a condição de sustentabilidade $\varepsilon^* \geq 0$. A figura 4.3 mostra o gráfico de ε^* como função de μ e ν e algumas das suas curvas de nível em azul e vermelho. A curva de nível em azul mais baixa apresentada corresponde ao nível $\varepsilon^* = 0$.

Figura 4.2: Variância do hiato do produto



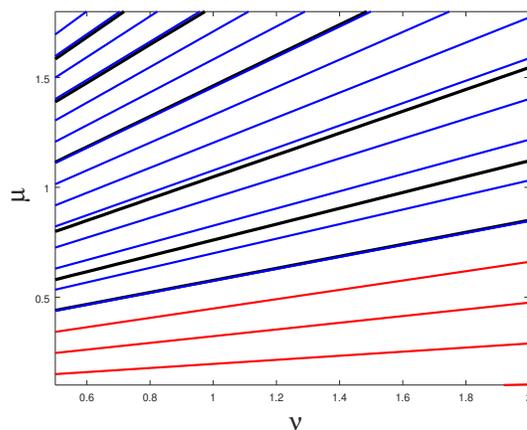
Se compararmos as projeções das curvas de nível de $\text{var}(h)$ e ε^* no plano de μ e v , como ilustrado pela figura 4.4, percebemos que elas parecem coincidir.

Figura 4.3: Logaritmo do câmbio real de equilíbrio



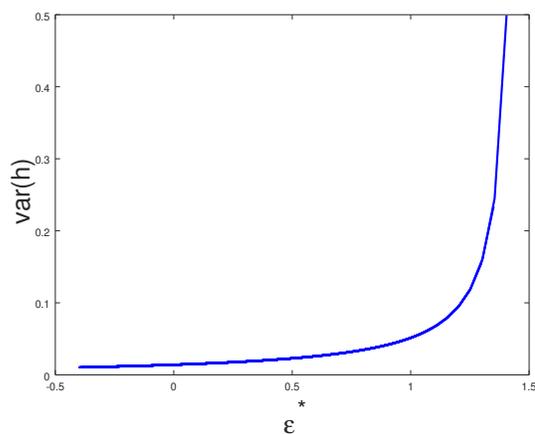
De fato, como indicado pela figura 4.5, temos que $\text{var}(h)$ é uma função cres-

Figura 4.4: Curvas de nível projetadas



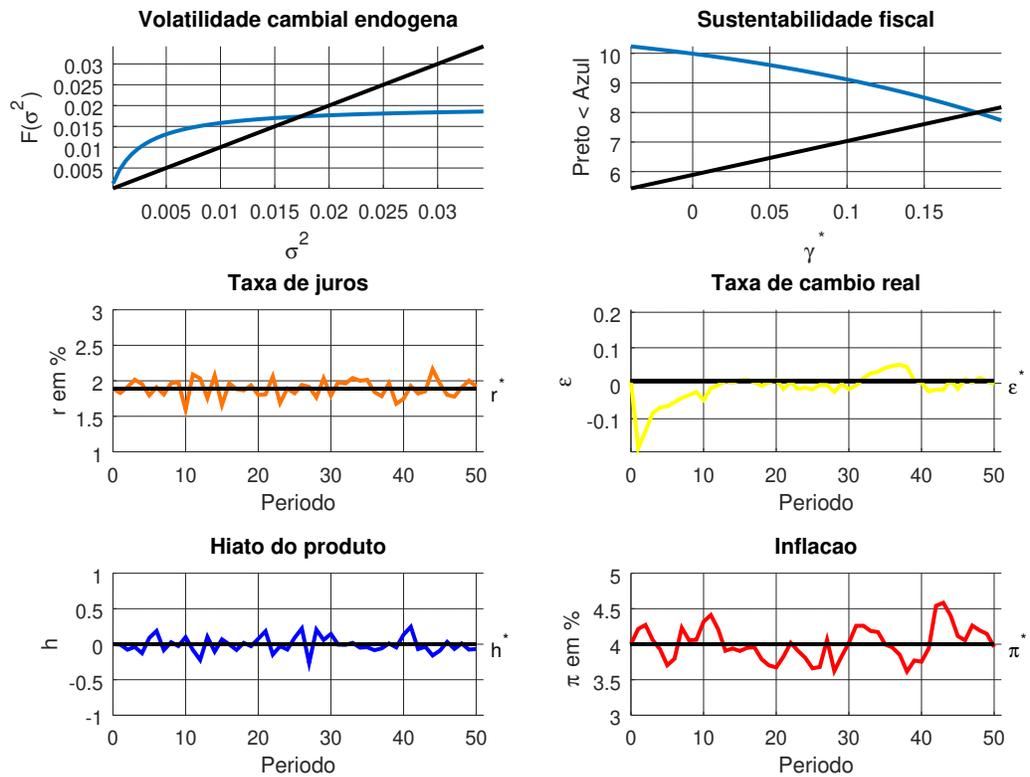
cente de ε^* , de modo que o menor valor da variância do hiato do produto corresponde ao menor valor possível do logaritmo do câmbio real de equilíbrio, que é $\varepsilon^* = 0$.

Figura 4.5: Variância do hiato como função do câmbio



Além disso, a convexidade do gráfico mostra que o custo associado à variância do hiato do produto é quase irrelevante se a desvalorização da taxa de câmbio de equilíbrio for moderada.

Figura 4.6: Dinâmica da economia doméstica otimizada



A figura 4.6 apresenta a simulação da dinâmica da economia doméstica com os mesmo valores para os parâmetros das economias estrangeira e doméstica da seção anterior, trocando apenas os valores de μ e ν , escolhidos de

modo a aproximadamente minimizar a variância do hiato, que é equivalente a obter $\varepsilon^* = 0$ pelo que vimos acima.

$$\begin{array}{ll} \mu = 0.5 & \sigma^2 = 0.017348 \\ \nu = 0.7 & \iota^* = -0.013904 \\ \pi^* = 4 & \varepsilon^* = 0.0069522 \\ \gamma^* = 0 & r^* = 1.8897 \end{array} \quad (4.87)$$

Capítulo 5

Conclusão

Neste capítulo, apresentamos alguns pontos para possíveis desenvolvimentos futuros a partir do que foi apresentado nesta tese.

O primeiro ponto, de caráter mais matemático, é determinar se a afirmação final da Proposição 2.3 sobre o sinal das derivadas parciais da função prêmio de risco $\rho = R(\sigma, \alpha)$, válida para as famílias normal, Bernoulli e uniforme, também é válida para quais quer famílias afins. Caso não seja, determinar condições sobre as famílias afins, que incluam as famílias normal, Bernoulli e uniforme, para que as derivadas parciais $\frac{\partial R}{\partial \sigma}$ e $\frac{\partial R}{\partial \alpha}$ sejam positivas para todos σ e α positivos.

Um segundo ponto é reformular o modelo macroeconômico desenvolvido nesta tese de modo a obter um modelo macroeconômico completamente micro-fundamentado, especialmente a equação do Balanço de Pagamentos. Outro desenvolvimento que pode ser útil é obter uma versão em tempo contínuo desse modelo micro-fundamentado. Além disso, para realizar testes econométricos com o modelo, será necessário adotar uma estrutura de defasagens temporais mais realista, levando-se em conta inclusive que certas variáveis, como

o câmbio, modificam-se mais rapidamente do outras variáveis, como a taxa de juros. No caso de modelos de tempo contínuo, isso pode ser abordado do ponto de vista das dinâmicas com múltiplas escalas temporais, como apresentado em [26]. Outro ponto necessário para a realização de testes econométricos é modelar a variável θ_t , relacionada aos índices de preços dos bens primários e industriais, e também a variável κ_t , relacionada aos investimentos diretos. Isso é especialmente importante em relação ao Brasil, uma vez que nosso comércio é superavitário em relação aos bens primários e deficitário em relação aos bens industriais.

Um terceiro ponto é também realizar testes econométricos do modelo de economia fechada com curva de Phillips modificada apresentado no último capítulo dos apêndices.

Finalmente, ainda existem algumas conclusões a serem derivadas do modelo. Conclusões sobre a política monetária ótima (minimizar a variância da inflação dada uma variância do hiato do produto), sobre política cambial ótima no longo prazo, sobre o nível ótimo de reservas internacionais (ver por exemplo [24] e também [37]) e sobre os efeitos distributivos da política macroeconômica e o sistema tributário ótimo (ver por exemplo [17]).

Apêndice A

Carry-trade e Volatilidade Cambial

A.1 Prêmio de risco como função da aversão ao risco

Nessa seção demonstramos os resultados utilizados na respectiva seção do texto principal.

Proposição A.1 *Se x possui função geradora de momentos M_x , então*

$$\rho = \frac{1}{\alpha} \log(M_{x(0,1)}(-\alpha\sigma)) \quad (\text{A.1})$$

onde $M_{x(0,1)}(t) = (e^{tx(0,1)})^e$ é a função geradora de momentos de $x(0,1)$. Além disso, escrevendo $\rho = R(\sigma, \alpha)$, temos que

$$\frac{\partial R}{\partial \alpha}(\sigma, \alpha) > 0 \quad e \quad \frac{\partial R}{\partial \sigma}(\sigma, \alpha) > 0 \quad (\text{A.2})$$

para todo σ positivo, onde a primeira desigualdade vale para todo α suficientemente pequeno, dependendo de σ , enquanto a segunda desigualdade vale para todo α positivo e suficientemente pequeno, dependendo de σ .

Prova: Como o prêmio de risco é definido por

$$\rho = x^e - V^{-1}(V^e) \quad (\text{A.3})$$

e como

$$V(x) = \frac{1 - e^{-\alpha x}}{\alpha} \quad (\text{A.4})$$

segue que

$$V^{-1}(V^e) = \frac{1}{-\alpha} \log((e^{-\alpha x})^e) \quad (\text{A.5})$$

de modo que

$$\rho = \mu - \frac{1}{-\alpha} \log((e^{-\alpha x(\mu, \sigma)})^e) \quad (\text{A.6})$$

para $x(\mu, \sigma)$. Temos então que

$$\begin{aligned} (e^{-\alpha x(\mu, \sigma)})^e &= (e^{-\alpha(\sigma x(0,1) + \mu)})^e \\ &= (e^{-\alpha \sigma x(0,1)} e^{-\alpha \mu})^e \\ &= e^{-\alpha \mu} (e^{-\alpha \sigma x(0,1)})^e \\ &= e^{-\alpha \mu} M_{x(0,1)}(-\alpha \sigma) \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

de modo que

$$\begin{aligned} \rho &= \mu - \frac{1}{-\alpha} \log((e^{-\alpha x(\mu, \sigma)})^e) \\ &= \mu - \frac{1}{-\alpha} \log(e^{-\alpha \mu} M_{x(0,1)}(-\alpha \sigma)) \\ &= \frac{1}{\alpha} \log(M_{x(0,1)}(-\alpha \sigma)) \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Escrevendo $\rho = R(\sigma, \alpha)$, segue então que

$$\frac{\partial R}{\partial \sigma}(\sigma, \alpha) = \frac{1}{\alpha} \frac{M'_{x(0,1)}(-\alpha \sigma)(-\alpha)}{M_{x(0,1)}(-\alpha \sigma)} \quad (\text{A.9})$$

e também que

$$\frac{\partial R}{\partial \alpha}(\sigma, \alpha) = \frac{-1}{\alpha^2} \log(M_{x(0,1)}(-\alpha\sigma)) + \frac{1}{\alpha} \frac{M'_{x(0,1)}(-\alpha\sigma)(-\sigma)}{M_{x(0,1)}(-\alpha\sigma)} \quad (\text{A.10})$$

Por outro lado, temos que $M_{x(0,1)}(0) = 1$, que $M'_{x(0,1)}(0) = 0$ e que $M''_{x(0,1)}(0) = 1$.

Segue então que

$$\frac{\partial R}{\partial \sigma}(\sigma, 0) = \frac{1}{\alpha} \frac{M'_{x(0,1)}(0)(-\alpha)}{M_{x(0,1)}(0)} = 0 \quad (\text{A.11})$$

Podemos então usar L'Hospital para calcular

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\alpha} \frac{M'_{x(0,1)}(-\alpha\sigma)(-\sigma)}{M_{x(0,1)}(-\alpha\sigma)} &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{M'_{x(0,1)}(-\alpha\sigma)(-\sigma)}{\alpha M_{x(0,1)}(-\alpha\sigma)} \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{M''_{x(0,1)}(-\alpha\sigma)(-\sigma)^2}{M_{x(0,1)}(-\alpha\sigma) + \alpha M'_{x(0,1)}(-\alpha\sigma)(-\sigma)} \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{M''_{x(0,1)}(0)(-\sigma)^2}{M_{x(0,1)}(0) + 0 M'_{x(0,1)}(0)(-\sigma)} \\ &= \sigma^2 \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

e também para calcular

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{-1}{\alpha^2} \log(M_{x(0,1)}(-\alpha\sigma)) &= - \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\log(M_{x(0,1)}(-\alpha\sigma))}{\alpha^2} \\ &= - \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\frac{M'_{x(0,1)}(-\alpha\sigma)(-\sigma)}{M_{x(0,1)}(-\alpha\sigma)}}{2\alpha} \\ &= - \frac{1}{2} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\alpha} \frac{M'_{x(0,1)}(-\alpha\sigma)(-\sigma)}{M_{x(0,1)}(-\alpha\sigma)} \\ &= - \frac{\sigma^2}{2} \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Pelas equações (A.10), (A.12) e (A.13), segue que

$$\frac{\partial R}{\partial \alpha}(\sigma, 0) = \frac{\sigma^2}{2} \quad (\text{A.14})$$

de modo que

$$\frac{\partial^2 R}{\partial \alpha \partial \sigma}(\sigma, 0) = \frac{\partial^2 R}{\partial \sigma \partial \alpha}(\sigma, 0) = \sigma \quad (\text{A.15})$$

Por continuidade, para α suficientemente pequeno, dependendo de σ , pela equação (A.14), segue que

$$\frac{\partial R}{\partial \alpha}(\sigma, \alpha) > \frac{\sigma^2}{4} > 0 \quad (\text{A.16})$$

e, pela equação (A.15), segue que

$$\frac{\partial^2 R}{\partial \alpha \partial \sigma}(\sigma, \alpha) > \frac{\sigma}{2} \quad (\text{A.17})$$

Pela equação (A.11) e pelo Teorema do Valor Médio, para α positivo suficientemente pequeno, dependendo de σ , segue que

$$\frac{\partial R}{\partial \sigma}(\sigma, \alpha) = \frac{\partial R}{\partial \sigma}(\sigma, \alpha) - \frac{\partial R}{\partial \sigma}(\sigma, 0) > \frac{\sigma \alpha}{2} > 0 \quad (\text{A.18})$$

□

Proposição A.2 *Se $x(\mu, \sigma)$ possui distribuição $N(\mu, \sigma)$, então*

$$\rho = \frac{\sigma^2 \alpha}{2} \quad (\text{A.19})$$

Além disso, escrevendo $\rho = R(\sigma, \alpha)$, temos que

$$\frac{\partial R}{\partial \sigma}(\sigma, \alpha) > 0 \quad e \quad \frac{\partial R}{\partial \alpha}(\sigma, \alpha) > 0 \quad (\text{A.20})$$

para todos positivos σ e α .

Prova: Como $x(\mu, \sigma)$ possui distribuição $N(\mu, \sigma)$, segue que

$$M_{x(0,1)}(t) = \left(e^{tx(0,1)} \right)^e = e^{\frac{t^2}{2}} \quad (\text{A.21})$$

de modo que a equação (A.19) segue então direto da equação (A.1). As desigualdades (A.20) seguem imediatas da equação (A.19). \square

Proposição A.3 *Se $x(\mu, \sigma)$ possui distribuição $B(a, b, p)$, temos que*

$$a = \mu - \sigma \sqrt{\frac{1-p}{p}} \quad e \quad b = \mu + \sigma \sqrt{\frac{p}{1-p}} \quad (\text{A.22})$$

e também que

$$\rho = \log \left(p e^{\alpha \sigma \sqrt{\frac{1-p}{p}}} + (1-p) e^{-\alpha \sigma \sqrt{\frac{p}{1-p}}} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \quad (\text{A.23})$$

Além disso, escrevendo $\rho = R(\sigma, \alpha)$, temos que

$$\frac{\partial R}{\partial \sigma}(\sigma, \alpha) > 0 \quad e \quad \frac{\partial R}{\partial \alpha}(\sigma, \alpha) > 0 \quad (\text{A.24})$$

para todos positivos σ e α .

Prova: Temos que

$$\begin{aligned} \mu &= pa + (1-p)b \\ &= b - p(b-a) \\ &= a + (1-p)(b-a) \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

e também que

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= pa^2 + (1-p)b^2 - \mu^2 \\ &= pa^2 + (1-p)b^2 - pa^2 - 2p(1-p)ab - (1-p)^2b^2 \\ &= p(1-p)a^2 + p(1-p)b^2 - p(1-p)2ab \\ &= p(1-p)(b-a)^2 \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

de modo que

$$b - a = \frac{\sigma}{\sqrt{p(1-p)}} \quad (\text{A.27})$$

e também que

$$a = \mu - \sigma \sqrt{\frac{1-p}{p}} \quad \text{e} \quad b = \mu + \sigma \sqrt{\frac{p}{1-p}} \quad (\text{A.28})$$

Logo, para $x(0, 1)$, temos que

$$a = -\sqrt{\frac{1-p}{p}} \quad \text{e} \quad b = \sqrt{\frac{p}{1-p}} \quad (\text{A.29})$$

Segue que

$$M_{x(0,1)}(t) = (e^{tx(0,1)})^e = pe^{-t\sqrt{\frac{1-p}{p}}} + (1-p)e^{t\sigma\sqrt{\frac{p}{1-p}}} \quad (\text{A.30})$$

de modo que a equação (A.23) segue então direto da equação (A.1).

Para determinar o sinal de $\frac{\partial R}{\partial \sigma}(\sigma, \alpha)$, primeiro observamos que, pela equação (A.22), podemos escrever

$$R(\sigma, \alpha) = \frac{1}{\alpha} \log(f(\sigma)) \quad (\text{A.31})$$

onde

$$f(\sigma) = pe^{\alpha\sigma\sqrt{\frac{1-p}{p}}} + (1-p)e^{-\alpha\sigma\sqrt{\frac{p}{1-p}}} \quad (\text{A.32})$$

de modo que

$$\frac{\partial R}{\partial \sigma}(\sigma, \alpha) = \frac{1}{\alpha} \frac{f'(\sigma)}{f(\sigma)} \quad (\text{A.33})$$

cujo sinal é dado pelo sinal de $f'(\sigma)$, uma vez que α e $f(\sigma)$ são positivos.

$$\begin{aligned} f'(\sigma) &= pe^{\alpha\sigma\sqrt{\frac{1-p}{p}}} \alpha \sqrt{\frac{1-p}{p}} - (1-p)e^{-\alpha\sigma\sqrt{\frac{p}{1-p}}} \alpha \sqrt{\frac{p}{1-p}} \\ &= \alpha \sqrt{p(1-p)} \left(e^{\alpha\sigma\sqrt{\frac{1-p}{p}}} - e^{-\alpha\sigma\sqrt{\frac{p}{1-p}}} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$

que é positivo para todos α e $f(\sigma)$ positivos.

Para determinar o sinal de $\frac{\partial R}{\partial \alpha}(\sigma, \alpha)$, primeiro observamos que, pela equação (A.22), podemos escrever

$$R(\sigma, \alpha) = \sigma \sqrt{\frac{1-p}{p}} + \frac{1}{\alpha} g(\alpha) \quad (\text{A.35})$$

onde

$$g(\alpha) = \log \left(p + (1-p) e^{-\alpha \sigma \left(\sqrt{\frac{1-p}{p}} + \sqrt{\frac{p}{1-p}} \right)} \right) \quad (\text{A.36})$$

de modo que

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial \alpha}(\sigma, \alpha) &= \frac{-1}{\alpha^2} g(\alpha) + \frac{1}{\alpha} g'(\alpha) \\ &= \frac{1}{\alpha^2} h(\alpha) \end{aligned} \quad (\text{A.37})$$

onde

$$h(\alpha) = -g(\alpha) + \alpha g'(\alpha) \quad (\text{A.38})$$

Resta agora mostrar que essa função é positiva para todo α positivo. Pela equação (A.36), temos que

$$\begin{aligned} g'(\alpha) &= \frac{-(1-p) e^{-\alpha \sigma \left(\sqrt{\frac{1-p}{p}} + \sqrt{\frac{p}{1-p}} \right)} \sigma \left(\sqrt{\frac{1-p}{p}} + \sqrt{\frac{p}{1-p}} \right)}{p + (1-p) e^{-\alpha \sigma \left(\sqrt{\frac{1-p}{p}} + \sqrt{\frac{p}{1-p}} \right)}} \\ &= \frac{-(1-p) \sigma \left(\sqrt{\frac{1-p}{p}} + \sqrt{\frac{p}{1-p}} \right)}{p e^{\alpha \sigma \left(\sqrt{\frac{1-p}{p}} + \sqrt{\frac{p}{1-p}} \right)} + 1 - p} \end{aligned} \quad (\text{A.39})$$

de modo que $g''(\alpha) > 0$. Segue então que $h(0) = -g(0) + 0g'(0) = 0$ e que $h'(\alpha) = \alpha g''(\alpha)$ é positiva para todo α positivo, de modo que $h(\alpha)$ é positiva para todo α positivo. \square

Proposição A.4 Se $x(\mu, \sigma)$ possui distribuição $U(a, b)$, temos que

$$a = \mu - \sqrt{3}\sigma \quad e \quad b = \mu + \sqrt{3}\sigma \quad (\text{A.40})$$

e também que

$$\rho = \log \left(\frac{e^{\sqrt{3}\alpha\sigma} - e^{-\sqrt{3}\alpha\sigma}}{2\sqrt{3}\alpha\sigma} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \quad (\text{A.41})$$

Além disso, escrevendo $\rho = R(\sigma, \alpha)$, temos que

$$\frac{\partial R}{\partial \sigma}(\sigma, \alpha) > 0 \quad e \quad \frac{\partial R}{\partial \alpha}(\sigma, \alpha) > 0 \quad (\text{A.42})$$

para todos positivos σ e α .

Prova: Temos que

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{1}{b-a} \int_a^b x dx \\ &= \frac{1}{b-a} \left(\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} \right) \\ &= \frac{b+a}{2} \end{aligned} \quad (\text{A.43})$$

e também que

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \frac{1}{b-a} \int_a^b x^2 dx - \mu^2 \\ &= \frac{1}{b-a} \left(\frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3} \right) - \left(\frac{b+a}{2} \right)^2 \\ &= \frac{b^2 + ab + a^2}{3} - \frac{b^2 + 2ab + a^2}{4} \\ &= \frac{b^2 - 2ab + a^2}{12} \\ &= \frac{(b-a)^2}{12} \end{aligned} \quad (\text{A.44})$$

de modo que

$$b+a = 2\mu \quad e \quad b-a = 2\sqrt{3}\sigma \quad (\text{A.45})$$

e portanto que

$$a = \mu - \sqrt{3}\sigma \quad e \quad b = \mu + \sqrt{3}\sigma \quad (\text{A.46})$$

Além disso, temos que

$$\begin{aligned} (e^{tx(\mu,\sigma)})^e &= \frac{1}{b-a} \int_a^b e^{tx} dx \\ &= \frac{1}{b-a} \left(\frac{e^{tb}}{t} - \frac{e^{ta}}{t} \right) \\ &= \frac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b-a)} \end{aligned} \quad (\text{A.47})$$

Logo, para $x(0, 1)$, temos que

$$a = -\sqrt{3} \quad e \quad b = \sqrt{3} \quad (\text{A.48})$$

de modo que

$$M_{x(0,1)}(t) = (e^{tx(0,1)})^e = \frac{e^{\sqrt{3}t} - e^{-\sqrt{3}t}}{2\sqrt{3}t} \quad (\text{A.49})$$

de modo que a equação (A.23) segue então direto da equação (A.1).

Para determinar o sinal de $\frac{\partial R}{\partial \sigma}(\sigma, \alpha)$, primeiro observamos que, pela equação (A.41), podemos escrever

$$R(\sigma, \alpha) = \frac{1}{\alpha} \log(f(\sigma)) \quad (\text{A.50})$$

onde

$$f(\sigma) = \frac{e^{\sqrt{3}\alpha\sigma} - e^{-\sqrt{3}\alpha\sigma}}{2\sqrt{3}\alpha\sigma} \quad (\text{A.51})$$

de modo que

$$\frac{\partial R}{\partial \sigma}(\sigma, \alpha) = \frac{1}{\alpha} \frac{f'(\sigma)}{f(\sigma)} \quad (\text{A.52})$$

cujo sinal é dado pelo sinal de $f'(\sigma)$, uma vez que α e $f(\sigma)$ são positivos. Por outro lado, temos que

$$f(\sigma) = \frac{1}{2} g(\sqrt{3}\alpha\sigma) \quad (\text{A.53})$$

onde

$$g(y) = \frac{e^y - e^{-y}}{y} \quad (\text{A.54})$$

de modo que

$$f'(\sigma) = \frac{\sqrt{3}\alpha}{2} g'(\sqrt{3}\alpha\sigma) \quad (\text{A.55})$$

cujo sinal é dado pelo sinal de $g'(y)$, para y positivo, uma vez que α e σ são positivos. Além disso, temos que

$$\begin{aligned} g'(y) &= \frac{(e^y + e^{-y})y - (e^y - e^{-y})}{y^2} \\ &= \frac{e^y h(y)}{y^2} \end{aligned} \quad (\text{A.56})$$

onde

$$h(y) = y - 1 + (y + 1)e^{-2y} \quad (\text{A.57})$$

de modo que

$$h'(y) = 1 - 2ye^{-2y} - e^{-2y} \quad \text{e} \quad h''(y) = 4ye^{-2y} \quad (\text{A.58})$$

Segue então que $h(0) = h'(0) = 0$ e que $h''(y)$ é positiva, para todo y positivo, mostrando que $h(y)$, e portanto também $g'(y)$, é positiva, para todo y positivo.

Para determinar o sinal de $\frac{\partial R}{\partial \alpha}(\sigma, \alpha)$, primeiro observamos que, pela equação (A.41), podemos escrever

$$R(\sigma, \alpha) = -\frac{1}{\alpha} \log(\alpha) + \frac{1}{\alpha} \log(f(\alpha)) \quad (\text{A.59})$$

onde

$$f(\alpha) = \frac{e^{\sqrt{3}\sigma\alpha} - e^{-\sqrt{3}\sigma\alpha}}{2\sqrt{3}\sigma} \quad (\text{A.60})$$

de modo que

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial \alpha}(\sigma, \alpha) &= \frac{1}{\alpha^2} \log(\alpha) - \frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha^2} \log(f(\alpha)) + \frac{1}{\alpha} \frac{f'(\alpha)}{f(\alpha)} \\ &= \frac{1}{\alpha^2} g(\alpha) \end{aligned} \quad (\text{A.61})$$

onde

$$g(\alpha) = -1 + \frac{f'(\alpha)}{f(\alpha)}\alpha + \log(\alpha) - \log(f(\alpha)) \quad (\text{A.62})$$

Como $f(0) = 0$ e $f'(0) = 1$, podemos utilizar L'Hospital para calcular

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{f'(\alpha)\alpha}{f(\alpha)} &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{f''(\alpha)\alpha + f'(\alpha)}{f'(\alpha)} \\ &= \frac{f''(0)0 + f'(0)}{f'(0)} \\ &= 1 \end{aligned} \quad (\text{A.63})$$

e também para calcular

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \log(\alpha) - \log(f(\alpha)) &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \log\left(\frac{\alpha}{f(\alpha)}\right) \\ &= \log\left(\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha}{f(\alpha)}\right) \\ &= \log\left(\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{f'(\alpha)}\right) \\ &= \log\left(\frac{1}{f'(0)}\right) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.64})$$

de modo que $g(0) = 0$. Além disso, temos que

$$\begin{aligned} g'(\alpha) &= \left(\frac{f'(\alpha)}{f(\alpha)}\right)' \alpha + \frac{f'(\alpha)}{f(\alpha)} + \frac{1}{\alpha} - \frac{f'(\alpha)}{f(\alpha)} \\ &= \frac{f''(\alpha)f(\alpha) - f'(\alpha)^2}{f(\alpha)^2} \alpha + \frac{1}{\alpha} \\ &= \frac{f(\alpha)^2 + \alpha^2 f''(\alpha)f(\alpha) - \alpha^2 f'(\alpha)^2}{\alpha f(\alpha)^2} \end{aligned} \quad (\text{A.65})$$

Denotando $u = e^{-\sqrt{3}\sigma\alpha}$ e $v = e^{\sqrt{3}\sigma\alpha}$, segue que

$$\begin{aligned}
 g'(\alpha) &= \frac{(v-u)^2 + \alpha^2 (3\sigma^2 v - 3\sigma^2 u)(v-u) - \alpha^2 (\sqrt{3}\sigma v + \sqrt{3}\sigma u)^2}{\alpha (v-u)^2} \\
 &= \frac{(v-u)^2 + 3\sigma^2 \alpha^2 (v-u)^2 - 3\sigma^2 \alpha^2 (v+u)^2}{\alpha (v-u)^2} \\
 &= \frac{(v-u)^2 + 3\sigma^2 \alpha^2 ((v-u)^2 - (v+u)^2)}{\alpha (v-u)^2} \\
 &= \frac{(v-u)^2 - 12\sigma^2 \alpha^2}{\alpha (v-u)^2}
 \end{aligned} \tag{A.66}$$

Basta então mostrar que

$$v - u - 2\sqrt{3}\sigma\alpha > 0 \tag{A.67}$$

que é o mesmo que mostrar que

$$h(\alpha) = e^{\sqrt{3}\sigma\alpha} - e^{-\sqrt{3}\sigma\alpha} - 2\sqrt{3}\sigma\alpha > 0 \tag{A.68}$$

Temos

$$h'(\alpha) = \sqrt{3}\sigma e^{\sqrt{3}\sigma\alpha} + \sqrt{3}\sigma e^{-\sqrt{3}\sigma\alpha} - 2\sqrt{3}\sigma \tag{A.69}$$

e também que

$$h''(\alpha) = 3\sigma^2 e^{\sqrt{3}\sigma\alpha} - 3\sigma^2 e^{-\sqrt{3}\sigma\alpha} \tag{A.70}$$

de modo que $h(0) = h'(0) = 0$ e que $h''(\alpha)$ é positiva, para todo α positivo, mostrando que $h(\alpha)$, e portanto também $g'(\alpha)$ e $g(\alpha)$, é positiva, para todo α positivo.

□

Apêndice B

Dinâmica Macroeconômica

B.1 Dinâmica básica

Proposição B.1 *A dinâmica da economia é descrita pelo seguinte processo estocástico ARMA(1,1)*

$$y_{t+1} = \left(\sigma_{t+1}^2 S_{\sigma_t^2} + T \right) y_t + \left(\sigma_{t+1}^2 Q_{\sigma_t^2} + R \right) z_{t+1} + w_{\sigma_{t+1}^2} \quad (\text{B.1})$$

onde a volatilidade da operação de carry-trade é dada por

$$\sigma_t^2 = \sigma_{\pi_f}^2 + \sigma_{\pi}^2 + \sigma_{\varepsilon}^2 \quad (\text{B.2})$$

o vetor que descreve a economia possui distribuição normal multivariada e é dado por

$$y_t = \begin{pmatrix} r_t^f \\ r_t \\ \varepsilon_t \\ \varepsilon_{t-1} \end{pmatrix} \quad (\text{B.3})$$

o vetor dos erros estocásticos é dado por

$$z_t = \begin{pmatrix} \delta_t^{\pi_f} \\ \delta_t^\pi \\ \delta_t^\varepsilon \\ \delta_{t-1}^{\pi_f} \\ \delta_{t-1}^\pi \\ \delta_{t-1}^\varepsilon \\ \delta_{t-1}^{h_f} \\ \delta_{t-1}^h \end{pmatrix} \quad (\text{B.4})$$

o vetor determinístico é dado por

$$w_{\sigma_t^2} = \Lambda^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\mu_f \chi_f \xi_f r_f^*}{1 + v_f \xi_f} \\ \mu \chi \eta^* + \frac{\mu \lambda}{1 - \lambda} \frac{c^* \sigma_t^2}{2a} - \frac{\mu \lambda}{1 - \lambda} \frac{\mu_f \chi_f \xi_f r_f^*}{1 + v_f \xi_f} \\ \frac{\mu \chi \eta^*}{1 + v \xi} + \frac{c^* \sigma_t^2}{2a} - \frac{\mu_f \chi_f \xi_f r_f^*}{1 + v_f \xi_f} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.5})$$

com

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + v \xi - \frac{\mu \lambda}{1 - \lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \frac{\mu \lambda}{(1 - \lambda)(1 + v \xi)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{B.6})$$

enquanto as transpostas das matrizes determinísticas são dadas por

$$S'_{\sigma_t^2} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\mu \lambda}{1 - \lambda} \frac{1}{\sigma_t^2} & \frac{1}{\sigma_t^2} & 0 \\ 0 & -\frac{\mu \lambda}{1 - \lambda} \frac{1}{\sigma_t^2} & -\frac{1}{\sigma_t^2} & 0 \\ 0 & \frac{\mu \lambda}{1 - \lambda} \frac{1}{2a} \left(1 + \frac{2a}{\sigma_t^2}\right) & \frac{1}{2a} \left(1 + \frac{2a}{\sigma_t^2}\right) & 0 \\ 0 & \frac{\mu \lambda}{1 - \lambda} \left[-\frac{1}{2a} \left(1 + \frac{2a}{\sigma_t^2}\right) + \frac{b}{2a}\right] & -\frac{1}{2a} \left(1 + \frac{2a}{\sigma_t^2}\right) + \frac{b}{2a} & 0 \end{pmatrix} \Lambda^{-1} \quad (\text{B.7})$$

por

$$T' = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\mu_f \chi_f \xi_f}{1 + \nu_f \xi_f} & \frac{\mu \lambda}{1 - \lambda} \left(\frac{\mu_f \chi_f \xi_f}{1 + \nu_f \xi_f} - 1 \right) & \frac{\mu_f \chi_f \xi_f}{1 + \nu_f \xi_f} - 1 & 0 \\ 0 & 1 - (\mu \chi - \nu) \xi & \frac{1 - (\mu \chi - \nu) \xi}{1 + \nu \xi} & 0 \\ 0 & \nu \omega & 1 + \frac{\nu \omega}{1 + \nu \xi} - \frac{\mu \lambda}{(1 - \lambda)(1 + \nu \xi)} & 1 \\ 0 & (\mu \chi - \nu) \omega & \frac{(\mu \chi - \nu) \omega}{1 + \nu \xi} & 0 \end{pmatrix} \Lambda^{-1} \quad (\text{B.8})$$

por

$$Q'_{\sigma_t^2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\mu \lambda}{1 - \lambda} \frac{1}{\sigma_t^2} & -\frac{1}{\sigma_t^2} & 0 \\ 0 & \frac{\mu \lambda}{1 - \lambda} \frac{1}{\sigma_t^2} & \frac{1}{\sigma_t^2} & 0 \\ 0 & \frac{\mu \lambda}{1 - \lambda} \frac{1}{\sigma_t^2} & \frac{1}{\sigma_t^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Lambda^{-1} \quad (\text{B.9})$$

por

$$R' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \nu \xi - \frac{\mu \lambda}{1 - \lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\mu \lambda}{(1 - \lambda)(1 + \nu \xi)} - 1 & 0 \\ -1 + \frac{\mu_f (\chi_f \xi_f - 1)}{1 + \nu_f \xi_f} & \frac{\mu \lambda}{1 - \lambda} \left(1 - \frac{\mu_f (\chi_f \xi_f - 1)}{1 + \nu_f \xi_f} \right) & 1 - \frac{\mu_f (\chi_f \xi_f - 1)}{1 + \nu_f \xi_f} & 0 \\ 0 & (\mu \chi - \nu) \xi - (1 + \mu) & \frac{(\mu \chi - \nu) \xi - (1 + \mu)}{1 + \nu \xi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\mu_f \chi_f}{1 + \nu_f \xi_f} & \frac{\mu \lambda}{1 - \lambda} \left(\frac{\mu_f \chi_f}{1 + \nu_f \xi_f} \right) & \frac{\mu_f \chi_f}{1 + \nu_f \xi_f} & 0 \\ 0 & -\mu \chi & -\frac{\mu \chi}{1 + \nu \xi} & 0 \end{pmatrix} \Lambda^{-1} \quad (\text{B.10})$$

Além disso, o hiato do produto é dado por

$$h_{t+1} = -\xi r_{t+1} + \omega \varepsilon_t + \eta^* - \delta_{t+1}^h + \xi \delta_{t+1}^\pi \quad (\text{B.11})$$

enquanto a inflação é dada por

$$\pi_{t+1} = \left(\frac{1 + v\xi}{\mu} \right) r_{t+1} - \frac{v\omega}{\mu} \varepsilon_t + \pi^* - \frac{r^*}{\mu} - \frac{v\eta^*}{\mu} - \left(\frac{1 + v\xi}{\mu} + 1 \right) \delta_{t+1}^{\pi} \quad (\text{B.12})$$

Prova: Em primeiro lugar, das equações (3.47), (3.49), (3.74) e (3.76), adotando expectativas racionais, temos que

$$r_t^{fe} = r_t^f - \delta_t^{\pi f}, \quad h_t^e = h_t + \delta_t^h, \quad r_t^e = r_t - \delta_t^{\pi}, \quad \pi_t^e = \pi_t + \delta_t^{\pi}, \quad \varepsilon_t^e = \varepsilon_t + \delta_t^{\varepsilon} \quad (\text{B.13})$$

onde $\delta_t^{\pi f}$, δ_t^h , δ_t^{π} , δ_t^{ε} são variáveis aleatórias independentes, normalmente identicamente distribuídas e com esperança nula. Além disso, pela equação (2.37), temos que

$$x_{t+1} = \varepsilon_t - \varepsilon_{t+1} + r_{t+1} + \pi_{t+1}^f \quad (\text{B.14})$$

de modo que

$$x_{t+1}^e = \varepsilon_t - \varepsilon_{t+1}^e + r_{t+1}^e + \pi_{t+1}^{fe} \quad (\text{B.15})$$

Segue então que

$$x_{t+1} - x_{t+1}^e = \delta_{t+1}^{\varepsilon} + \delta_{t+1}^{\pi} + \delta_{t+1}^{\pi f} \quad (\text{B.16})$$

de modo que a equação (B.2) segue da equação acima. Vamos agora obter a equação (B.1). Da equação (3.65) defasada em um período e das equações (3.67), (3.68), (3.70), temos uma equação do Balanço de Pagamentos, dada por

$$\begin{aligned} \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1} = & -a \left(\frac{2}{\sigma_{t+1}^2} \left(\varepsilon_t - \varepsilon_{t+1}^e + r_{t+1}^e - r_{t+1}^{fe} \right) - \frac{2}{\sigma_t^2} \left(\varepsilon_{t-1} - \varepsilon_t^e + r_t^e - r_t^{fe} \right) \right) \\ & - b\varepsilon_{t-1} - c^* \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

por uma curva de Phillips combinada com a Lei de Okun ajustada para o câmbio, dada por

$$\pi_{t+1}^e = \pi_t + \chi h_t + \frac{\lambda}{1 - \lambda} (\varepsilon_{t+1}^e - \varepsilon_t) \quad (\text{B.18})$$

por uma curva IS ajustada para o câmbio, dada por

$$h_{t+1}^e = -\xi r_{t+1}^e + \omega \varepsilon_t + \eta^* \quad (\text{B.19})$$

e finalmente por uma regra de Taylor, dada por

$$r_{t+1}^e - r^* = \mu(\pi_{t+1}^e - \pi^*) + \nu h_{t+1}^e \quad (\text{B.20})$$

Substituindo as equações (B.13) nas equações (B.17), (B.18), (B.19), (B.20), obtemos que

$$\begin{aligned} \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1} = & -a \left(\frac{2}{\sigma_{t+1}^2} \left(\varepsilon_t - \varepsilon_{t+1} - \delta_{t+1}^\varepsilon + r_{t+1} - \delta_{t+1}^\pi - r_{t+1}^f + \delta_{t+1}^{\pi f} \right) - \right. \\ & \left. - \frac{2}{\sigma_t^2} \left(\varepsilon_{t-1} - \varepsilon_t - \delta_t^\varepsilon + r_t - \delta_t^\pi - r_t^f + \delta_t^{\pi f} \right) \right) \\ & - b \varepsilon_{t-1} - c^* \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

$$\pi_{t+1} + \delta_{t+1}^\pi = \pi_t + \chi h_t + \frac{\lambda}{1-\lambda} (\varepsilon_{t+1} + \delta_{t+1}^\varepsilon - \varepsilon_t) \quad (\text{B.22})$$

$$h_{t+1} + \delta_{t+1}^h = -\xi (r_{t+1} - \delta_{t+1}^\pi) + \omega \varepsilon_t + \eta^* \quad (\text{B.23})$$

$$r_{t+1} - \delta_{t+1}^\pi - r^* = \mu(\pi_{t+1} + \delta_{t+1}^\pi - \pi^*) + \nu (h_{t+1} + \delta_{t+1}^h) \quad (\text{B.24})$$

Para obter a equação (B.11), basta isolar h_{t+1} na equação (B.23). Para obter a equação (B.12), basta substituir a equação (B.23) na equação (B.24) e então isolar π_{t+1} . Por outro lado, podemos rearranjar os termos das equações acima e escrever

$$\begin{aligned} \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1} = & -a \left(\frac{2}{\sigma_{t+1}^2} \left(\varepsilon_t - \varepsilon_{t+1} + r_{t+1} - r_{t+1}^f \right) - \frac{2}{\sigma_t^2} \left(\varepsilon_{t-1} - \varepsilon_t + r_t - r_t^f \right) \right) \\ & - b \varepsilon_{t-1} - c^* + A_t \end{aligned} \quad (\text{B.25})$$

$$\pi_{t+1} = \pi_t + \chi h_t + \frac{\lambda}{1-\lambda} (\varepsilon_{t+1} - \varepsilon_t) + B_t \quad (\text{B.26})$$

$$h_{t+1} = -\xi r_{t+1} + \omega \varepsilon_t + \eta^* + C_t \quad (\text{B.27})$$

$$r_{t+1} - r^* = \mu(\pi_{t+1} - \pi^*) + \nu h_{t+1} + D_t \quad (\text{B.28})$$

onde

$$A_t = -\frac{2a}{\sigma_t^2}\delta_t^\varepsilon + \frac{2a}{\sigma_{t+1}^2}\delta_{t+1}^\varepsilon + \frac{2a}{\sigma_{t+1}^2}\delta_{t+1}^\pi - \frac{2a}{\sigma_{t+1}^2}\delta_{t+1}^{\pi f} - \frac{2a}{\sigma_t^2}\delta_t^\pi + \frac{2a}{\sigma_t^2}\delta_t^{\pi f} \quad (\text{B.29})$$

$$B_t = -\delta_{t+1}^\pi + \frac{\lambda}{1-\lambda}\delta_{t+1}^\varepsilon \quad (\text{B.30})$$

$$C_t = -\delta_{t+1}^h + \xi\delta_{t+1}^\pi \quad (\text{B.31})$$

$$D_t = (1+\mu)\delta_{t+1}^\pi + \nu\delta_{t+1}^h \quad (\text{B.32})$$

Da equação (B.25), segue que

$$-\frac{2a}{\sigma_{t+1}^2}(\varepsilon_{t+1} - \varepsilon_t) = -\frac{2a}{\sigma_{t+1}^2}(r_{t+1} - r_{t+1}^f) + \frac{2a}{\sigma_t^2}(r_t - r_t^f) + \left(1 + \frac{2a}{\sigma_t^2}\right)(\varepsilon_{t-1} - \varepsilon_t) - b\varepsilon_{t-1} - c^* + A_t \quad (\text{B.33})$$

de modo que

$$\varepsilon_{t+1} - \varepsilon_t = r_{t+1} - r_{t+1}^f - \frac{\sigma_{t+1}^2}{\sigma_t^2}(r_t - r_t^f) - \frac{\sigma_{t+1}^2}{2a}\left(1 + \frac{2a}{\sigma_t^2}\right)(\varepsilon_{t-1} - \varepsilon_t) + \frac{b\sigma_{t+1}^2}{2a}\varepsilon_{t-1} + \frac{c^*\sigma_{t+1}^2}{2a} - \frac{A_t\sigma_{t+1}^2}{2a} \quad (\text{B.34})$$

A primeira variação temporal da equação (B.28) é dada por

$$r_{t+1} - r_t = \mu(\pi_{t+1} - \pi_t) + \nu(h_{t+1} - h_t) + D_t - D_{t-1} \quad (\text{B.35})$$

Substituindo a equação (B.26) na equação acima, segue que

$$r_{t+1} - r_t = \mu\chi h_t + \frac{\mu\lambda}{1-\lambda}(\varepsilon_{t+1} - \varepsilon_t) + \nu(h_{t+1} - h_t) + \mu B_t + D_t - D_{t-1} \quad (\text{B.36})$$

Substituindo a equação (B.27) na equação acima, obtemos que

$$r_{t+1} - r_t = -(\mu\chi - \nu)\xi r_t + (\mu\chi - \nu)\omega\varepsilon_{t-1} + (\mu\chi - \nu)\eta^* - \nu\xi r_{t+1} + \nu\omega\varepsilon_t + \nu\eta^* + \frac{\mu\lambda}{1-\lambda}(\varepsilon_{t+1} - \varepsilon_t) + \mu B_t + \nu C_t + (\mu\chi - \nu)C_{t-1} + D_t - D_{t-1} \quad (\text{B.37})$$

Substituindo a equação (B.34) na equação acima, segue que

$$\begin{aligned}
r_{t+1} - r_t &= -(\mu\chi - \nu)\xi r_t + (\mu\chi - \nu)\omega\varepsilon_{t-1} + \mu\chi\eta^* - \\
&\quad - \nu\xi r_{t+1} + \nu\omega\varepsilon_t + \frac{\mu\lambda}{1-\lambda} \left(r_{t+1} - r_{t+1}^f \right) - \frac{\mu\lambda}{1-\lambda} \frac{\sigma_{t+1}^2}{\sigma_t^2} \left(r_t - r_t^f \right) \\
&\quad - \frac{\mu\lambda}{1-\lambda} \frac{\sigma_{t+1}^2}{2a} \left(1 + \frac{2a}{\sigma_t^2} \right) (\varepsilon_{t-1} - \varepsilon_t) + \frac{\mu\lambda}{1-\lambda} \frac{b\sigma_{t+1}^2}{2a} \varepsilon_{t-1} + \frac{\mu\lambda}{1-\lambda} \frac{c^*\sigma_{t+1}^2}{2a} \\
&\quad - \frac{\mu\lambda}{1-\lambda} \frac{A_t\sigma_{t+1}^2}{2a} + \mu B_t + \nu C_t + (\mu\chi - \nu) C_{t-1} + D_t - D_{t-1} \quad (B.38)
\end{aligned}$$

Isolando r_{t+1} na equação (B.37) e substituindo na equação (B.34), obtemos que

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{t+1} - \varepsilon_t &= -r_{t+1}^f - \frac{\sigma_{t+1}^2}{\sigma_t^2} \left(r_t - r_t^f \right) - \frac{\sigma_{t+1}^2}{2a} \left(1 + \frac{2a}{\sigma_t^2} \right) (\varepsilon_{t-1} - \varepsilon_t) + \\
&\quad + \frac{b\sigma_{t+1}^2}{2a} \varepsilon_{t-1} + \frac{c^*\sigma_{t+1}^2}{2a} + \frac{1 - (\mu\chi - \nu)\xi}{1 + \nu\xi} r_t + \frac{(\mu\chi - \nu)\omega}{1 + \nu\xi} \varepsilon_{t-1} \\
&\quad + \frac{\mu\chi\eta^*}{1 + \nu\xi} + \frac{\nu\omega}{1 + \nu\xi} \varepsilon_t + \frac{\mu\lambda}{(1-\lambda)(1+\nu\xi)} (\varepsilon_{t+1} - \varepsilon_t) \\
&\quad - \frac{A_t\sigma_{t+1}^2}{2a} + \frac{\mu}{1 + \nu\xi} B_t + \frac{\nu}{1 + \nu\xi} C_t + \frac{\mu\chi - \nu}{1 + \nu\xi} C_{t-1} + \frac{1}{1 + \nu\xi} (D_t - D_{t-1}) \quad (B.39)
\end{aligned}$$

Isolando r_{t+1} na equação (B.38), segue que

$$\begin{aligned}
\left(1 + v\xi - \frac{\mu\lambda}{1-\lambda}\right)r_{t+1} &= \sigma_{t+1}^2 \frac{\mu\lambda}{1-\lambda} \frac{1}{\sigma_t^2} r_t^f - \frac{\mu\lambda}{1-\lambda} r_{t+1}^f + \\
&\quad \left(-\sigma_{t+1}^2 \frac{\mu\lambda}{1-\lambda} \frac{1}{\sigma_t^2} + 1 - (\mu\chi - v)\xi\right)r_t + \\
&\quad + \left(\sigma_{t+1}^2 \frac{\mu\lambda}{1-\lambda} \frac{1}{2a} \left(1 + \frac{2a}{\sigma_t^2}\right) + v\omega\right)\varepsilon_t \\
&\quad + \left(\sigma_{t+1}^2 \frac{\mu\lambda}{1-\lambda} \left(-\frac{1}{2a} \left(1 + \frac{2a}{\sigma_t^2}\right) + \frac{b}{2a}\right) + (\mu\chi - v)\omega\right)\varepsilon_{t-1} \\
&\quad + \mu\chi\eta^* + \frac{\mu\lambda}{1-\lambda} \frac{c^* \sigma_{t+1}^2}{2a} \\
&\quad - \frac{\mu\lambda}{1-\lambda} \frac{A_t \sigma_{t+1}^2}{2a} + \mu B_t + vC_t + (\mu\chi - v)C_{t-1} + D_t - D_{t-1}
\end{aligned} \tag{B.40}$$

Isolando ε_{t+1} na equação (B.39), obtemos que

$$\begin{aligned}
\left(1 - \frac{\mu\lambda}{(1-\lambda)(1+v\xi)}\right)\varepsilon_{t+1} &= \sigma_{t+1}^2 \frac{1}{\sigma_t^2} r_t^f - r_{t+1}^f + \\
&\quad \left(-\sigma_{t+1}^2 \frac{1}{\sigma_t^2} + \frac{1 - (\mu\chi - v)\xi}{1 + v\xi}\right)r_t + \\
&\quad + \left(\sigma_{t+1}^2 \frac{1}{2a} \left(1 + \frac{2a}{\sigma_t^2}\right) + 1 + \frac{v\omega}{1 + v\xi} - \frac{\mu\lambda}{(1-\lambda)(1+v\xi)}\right)\varepsilon_t \\
&\quad + \left(\sigma_{t+1}^2 \left(-\frac{1}{2a} \left(1 + \frac{2a}{\sigma_t^2}\right) + \frac{b}{2a}\right) + \frac{(\mu\chi - v)\omega}{1 + v\xi}\right)\varepsilon_{t-1} \\
&\quad + \frac{\mu\chi\eta^*}{1 + v\xi} + \frac{c^* \sigma_{t+1}^2}{2a} \\
&\quad - \frac{A_t \sigma_{t+1}^2}{2a} + \frac{\mu}{1 + v\xi} B_t + \frac{v}{1 + v\xi} C_t + \frac{\mu\chi - v}{1 + v\xi} C_{t-1} \\
&\quad + \frac{1}{1 + v\xi} (D_t - D_{t-1})
\end{aligned} \tag{B.41}$$

Da equação (B.29), segue que

$$\begin{aligned} \frac{A_t \sigma_{t+1}^2}{2a} &= \sigma_{t+1}^2 \left(-\frac{1}{\sigma_t^2} \delta_t^\varepsilon - \frac{1}{\sigma_t^2} \delta_t^\pi + \frac{1}{\sigma_t^2} \delta_t^{\pi_f} \right) + \\ &\quad + \delta_{t+1}^\varepsilon + \delta_{t+1}^\pi - \delta_{t+1}^{\pi_f} \end{aligned} \quad (\text{B.42})$$

Da equação (3.50), temos que

$$\begin{aligned} r_{t+1}^f &= \left(1 - \frac{\mu_f \chi_f \xi_f}{1 + \nu_f \xi_f} \right) r_t^f + \frac{\mu_f \chi_f \xi_f \pi_f^*}{1 + \nu_f \xi_f} - \\ &\quad - \frac{\mu_f \chi_f}{1 + \nu_f \xi_f} \delta_t^{h_f} + \delta_{t+1}^{\pi_f} + \left(\frac{\mu_f (\chi_f \xi_f - 1)}{1 + \nu_f \xi_f} - 1 \right) \delta_t^{\pi_f} \end{aligned} \quad (\text{B.43})$$

A equação (B.1) segue então das quatro equações acima e substituindo as equações (B.30), (B.31), (B.32).

□

B.2 Códigos do Octave

B.2.1 Mínimo da norma de A_σ para diversos sorteios

```

1 %
2 % M nimo da norma de A para diversos sorteios
3 %
4
5 %%
6 clc
7 clear all
8 close all
9
```

```
10 minnormA = 100;
11
12
13 %
14 % Par metros iniciais da economia externa
15 %
16
17 minmuf = 2;
18
19 minnuf = 2;
20
21 minchif = 2;
22
23 minxif = 2;
24
25 minsigma2 = 2;
26
27
28 %
29 % Par metros iniciais da economia domestica
30 %
31
32 mina = 0.05;
33
34 minb = 0.5;
35
36 minmu = 2;
37
38 minnu = 2;
39
```

```
40 minchi = 2;
41
42 minxi = 2;
43
44 minlambda = 0.2;
45
46 minomega = 0.2;
47
48
49 for n=1:1000000
50
51 %
52 % Par metros da economia externa
53 %
54
55 muf = 5*rand;
56
57 nuf = 5*rand;
58
59 chif = 5*rand;
60
61 xif = 5*rand;
62
63 sigma2 = 0.5*rand;
64
65
66 %
67 % Par metros da economia domestica
68 %
69
```

```

70 a = 0.1*rand;
71
72 b = rand;
73
74 mu = 5*rand;
75
76 nu = 5*rand;
77
78 chi = 5*rand;
79
80 xi = 5*rand;
81
82 lambda = 0.5*rand;
83
84 omega = 0.5*rand;
85
86 %
87 % F r m u l a s q u e n ã o d e p e n d e m d e s i g m a
88 %
89
90 Lambda = diag([1, 1 + nu*xi - (mu*lambda)/(1 - lambda), 1 - (mu*lambda)
    /((1 - lambda)*(1 + nu*xi)), 1]);
91
92 invLambda = inv(Lambda);
93
94 TLambda = [1 - (muf*chif*xif)/(1 + nuf*xif), (mu*lambda)/(1 - lambda))
    *((muf*chif*xif)/(1 + nuf*xif) - 1), (muf*chif*xif)/(1 + nuf*xif) - 1,
    0;
95 0, 1 - (mu*chi - nu)*xi, (1 - (mu*chi - nu)*xi)/(1 + nu*xi), 0;
96 0, nu*omega, 1 + (nu*omega)/(1 + nu*xi) - (mu*lambda)/((1 - lambda)*(1 +

```

```

    nu*xi)), 1;
97 0, (mu*chi - nu)*omega, ((mu*chi - nu)*omega)/(1 + nu*xi), 0];
98
99 T = invLambda*TLambda';
100
101 RLambda = [1, 0, 0, 0;
102 0, 1 + nu*xi - (mu*lambda)/(1 - lambda), 0, 0;
103 0, 0, (mu*lambda)/((1 - lambda)*(1 + nu*xi)) - 1, 0;
104 (muf*(chif*xif - 1))/(1 + nuf*xif) - 1, ((mu*lambda)/(1 - lambda))*(1 - (
    muf*(chif*xif - 1))/(1 + nuf*xif)), 1 - (muf*(chif*xif - 1))/(1 + nuf*
    xif), 0;
105 0, xi*(mu*chi - nu) - (1 + mu), (xi*(mu*chi - nu) - (1 + mu))/(1 + nu*xi)
    , 0;
106 0, 0, 0, 0;
107 - (muf*chif)/(1 + nuf*xif), ((mu*lambda)/(1 - lambda))*((muf*chif)/(1 +
    nuf*xif)), (muf*chif)/(1 + nuf*xif), 0;
108 0, - mu*chi, - (mu*chi)/(1 + nu*xi), 0];
109
110 R = invLambda*RLambda';
111
112 QLambda = [0, 0, 0, 0;
113 0, 0, 0, 0;
114 0, 0, 0, 0;
115 0, -((mu*lambda)/(1 - lambda))*(1/sigma2), -1/sigma2, 0;
116 0, ((mu*lambda)/(1 - lambda))*(1/sigma2), 1/sigma2, 0;
117 0, ((mu*lambda)/(1 - lambda))*(1/sigma2), 1/sigma2, 0;
118 0, 0, 0, 0;
119 0, 0, 0, 0];
120
121 Q = invLambda*QLambda';

```

```

122
123 SLambda = [0, ((mu*lambda)/(1 - lambda))*(1/sigma2), 1/sigma2, 0;
124             0, -((mu*lambda)/(1 - lambda))*(1/sigma2), -1/sigma2, 0;
125             0, ((mu*lambda)/(1 - lambda))*(1/(2*a))*(1 + (2*a)/sigma2), (1/(2*a)
                )*(1 + (2*a)/sigma2), 0;
126             0, ((mu*lambda)/(1 - lambda))*(- (1/(2*a))*(1 + (2*a)/sigma2) + b
                /(2*a)), - (1/(2*a))*(1 + (2*a)/sigma2) + b/(2*a), 0];
127
128 S = invLambda*SLambda';
129
130 A = sigma2*S + T;
131
132 if (minnormA > norm(A))
133
134     minnormA = norm(A);
135
136     %
137     % Par metros da economia externa
138     %
139
140     minmuf = muf;
141
142     minnuf = nuf;
143
144     minchif = chif;
145
146     minxif = xif;
147
148     minsigma2 = sigma2;
149

```

```
150
151      %
152      % Par metros da economia dom stica
153      %
154
155      mina = a;
156
157      minb = b;
158
159      minmu = mu;
160
161      minnu = nu;
162
163      minchi = chi;
164
165      minxi = xi;
166
167      minlambda = lambda;
168
169      minomega = omega;
170
171      end
172
173      end
174
175      minnormA
176
177      %
178      % Par metros extremais da economia externa
179      %
```

180

181 minmuf

182

183 minnuf

184

185 minchif

186

187 minxif

188

189 minsigma2

190

191

192 %

193 % *Par metros extremais da economia domestica*

194 %

195

196 mina

197

198 minb

199

200 minmu

201

202 minnu

203

204 minchi

205

206 minxi

207

208 minlambda

209

210 minomega

B.2.2 Gráfico da norma de A_σ para diversos sorteios

```
1 %
2 % Gráfico da norma de A para diversos sorteios
3 %
4
5 %%
6 clc
7 clear all
8 close all
9
10 for n=1:200
11
12 %
13 % Parâmetros da economia externa
14 %
15
16 muf = 5*rand;
17
18 nuf = 5*rand;
19
20 chif = 5*rand;
21
22 xif = 5*rand;
23
24 sigma2 = 0.5*rand;
25
26
27 %
```

```

28 % Par metros da economia domestica
29 %
30
31 a = 0.1*rand;
32
33 b = rand;
34
35 mu = 5*rand;
36
37 nu = 5*rand;
38
39 chi = 5*rand;
40
41 xi = 5*rand;
42
43 lambda = 0.5*rand;
44
45 omega = 0.5*rand;
46
47 %
48 % Formulas que n o dependem de sigma
49 %
50
51 Lambda = diag([1, 1 + nu*xi - (mu*lambda)/(1 - lambda), 1 - (mu*lambda)
                /((1 - lambda)*(1 + nu*xi)), 1]);
52
53 invLambda = inv(Lambda);
54
55 TLambda = [1 - (muf*chif*xif)/(1 + nuf*xif), ((mu*lambda)/(1 - lambda))
             *((muf*chif*xif)/(1 + nuf*xif) - 1), (muf*chif*xif)/(1 + nuf*xif) - 1,

```

```

0;
56 0, 1 - (mu*chi - nu)*xi, (1 - (mu*chi - nu)*xi)/(1 + nu*xi), 0;
57 0, nu*omega, 1 + (nu*omega)/(1 + nu*xi) - (mu*lambda)/((1 - lambda)*(1 +
    nu*xi)), 1;
58 0, (mu*chi - nu)*omega, ((mu*chi - nu)*omega)/(1 + nu*xi), 0];
59
60 T = invLambda*TLambda';
61
62 RLambda = [1, 0, 0, 0;
63 0, 1 + nu*xi - (mu*lambda)/(1 - lambda), 0, 0;
64 0, 0, (mu*lambda)/((1 - lambda)*(1 + nu*xi)) - 1, 0;
65 (muf*(chif*xif - 1))/(1 + nuf*xif) - 1, ((mu*lambda)/(1 - lambda))*(1 - (
    muf*(chif*xif - 1))/(1 + nuf*xif)), 1 - (muf*(chif*xif - 1))/(1 + nuf*
    xif), 0;
66 0, xi*(mu*chi - nu) - (1 + mu), (xi*(mu*chi - nu) - (1 + mu))/(1 + nu*xi)
    , 0;
67 0, 0, 0, 0;
68 - (muf*chif)/(1 + nuf*xif), ((mu*lambda)/(1 - lambda))*((muf*chif)/(1 +
    nuf*xif)), (muf*chif)/(1 + nuf*xif), 0;
69 0, - mu*chi, - (mu*chi)/(1 + nu*xi), 0];
70
71 R = invLambda*RLambda';
72
73 QLambda = [0, 0, 0, 0;
74 0, 0, 0, 0;
75 0, 0, 0, 0;
76 0, -((mu*lambda)/(1 - lambda))*(1/sigma2), -1/sigma2, 0;
77 0, ((mu*lambda)/(1 - lambda))*(1/sigma2), 1/sigma2, 0;
78 0, ((mu*lambda)/(1 - lambda))*(1/sigma2), 1/sigma2, 0;
79 0, 0, 0, 0;

```

```

80     0, 0, 0, 0];
81
82     Q = invLambda*QLambda';
83
84     SLambda = [0, ((mu*lambda)/(1 - lambda))*(1/sigma2), 1/sigma2, 0;
85                0, -((mu*lambda)/(1 - lambda))*(1/sigma2), -1/sigma2, 0;
86                0, ((mu*lambda)/(1 - lambda))*(1/(2*a))*(1 + (2*a)/sigma2), (1/(2*a)
87                   )*(1 + (2*a)/sigma2), 0;
88                0, ((mu*lambda)/(1 - lambda))*(- (1/(2*a))*(1 + (2*a)/sigma2) + b
89                   /(2*a)), - (1/(2*a))*(1 + (2*a)/sigma2) + b/(2*a), 0];
90
91     S = invLambda*SLambda';
92
93     A = sigma2*S + T;
94
95     t(n) = n;
96
97     u(n) = 1;
98
99     normA(n) = norm(A);
100
101 end
102
103
104 %
105 % Gr ficos
106 %
107

```

```
108 sela = figure ();
109
110 subplot(1,1,1)
111 hold on;
112 stem(t,normA,'filled','k');
113 plot(t,u,'b',"linewidth",4);
114 hold off;
115 grid on
116 axis tight
117 ylim ([0 100])
118 xlabel '\fontsize{20}_Sorteio';
119 ylabel '\fontsize{20}_|A_\sigma|';
120
121 print (sela, "~/Tese/Octave/Figuras/sela.eps");
```


Apêndice C

Política Macroeconômica

C.1 Códigos do Octave

C.1.1 Dinâmica com política cambial e sustentabilidade fiscal

```
1 %  
2 % Dinâmica com política cambial e sustentabilidade fiscal  
3 %  
4  
5 %%  
6 clc  
7 clear all  
8 close all  
9  
10  
11  
12 %  
13 % Parâmetros da economia estrangeira  
14 %
```

```
15
16 muf = 0.8;
17
18 nuf = 0.9;
19
20 chif = 1.7;
21
22 xif = 1.7;
23
24 sig = 0.1;
25
26 rfstar = 1;
27
28 pifstar = 2;
29
30 sigmahf = sig;
31
32 sigmapif = sig;
33
34
35
36 %
37 % Par metros da economia dom stica
38 %
39
40 a = 0.001;
41
42 b = 0.2;
43
44 %mu = 0.8;
```

```
45 mu = 0.5;
46
47 %nu = 0.9;
48 nu = 0.7;
49
50 chi = 1.7;
51
52 xi = 0.9;
53
54 lambda = 0.1;
55
56 omega = 0.1;
57
58 etastar = xif*rfstar;
59
60 sigmah = sig;
61
62 sigmapi = sig;
63
64 sigmaepsilon = sig;
65
66
67
68 %
69 % F rmulas que n o dependem de sigma
70 %
71
72 Lambda = diag([1, 1 + nu*xi - (mu*lambda)/(1 - lambda), 1 - (mu*lambda)
    /((1 - lambda)*(1 + nu*xi)), 1]);
73
```

```

74 invLambda = inv(Lambda);
75
76 TLambda = [1 - (muf*chif*xif)/(1 + nuf*xif), ((mu*lambda)/(1 - lambda))
              *((muf*chif*xif)/(1 + nuf*xif) - 1), (muf*chif*xif)/(1 + nuf*xif) - 1,
              0;
77 0, 1 - (mu*chi - nu)*xi, (1 - (mu*chi - nu)*xi)/(1 + nu*xi), 0;
78 0, nu*omega, 1 + (nu*omega)/(1 + nu*xi) - (mu*lambda)/((1 - lambda)*(1 +
              nu*xi)), 1;
79 0, (mu*chi - nu)*omega, ((mu*chi - nu)*omega)/(1 + nu*xi), 0];
80
81 T = invLambda*TLambda';
82
83 RLambda = [1, 0, 0, 0;
84 0, 1 + nu*xi - (mu*lambda)/(1 - lambda), 0, 0;
85 0, 0, (mu*lambda)/((1 - lambda)*(1 + nu*xi)) - 1, 0;
86 (muf*(chif*xif - 1))/(1 + nuf*xif) - 1, ((mu*lambda)/(1 - lambda))*(1 - (
              muf*(chif*xif - 1))/(1 + nuf*xif)), 1 - (muf*(chif*xif - 1))/(1 + nuf*
              xif), 0;
87 0, xi*(mu*chi - nu) - (1 + mu), (xi*(mu*chi - nu) - (1 + mu))/(1 + nu*xi)
              , 0;
88 0, 0, 0, 0;
89 - (muf*chif)/(1 + nuf*xif), ((mu*lambda)/(1 - lambda))*((muf*chif)/(1 +
              nuf*xif)), (muf*chif)/(1 + nuf*xif), 0;
90 0, - mu*chi, - (mu*chi)/(1 + nu*xi), 0];
91
92 R = invLambda*RLambda';
93
94 wstarLambda = [(muf*chif*xif*rfstar)/(1 + nuf*xif);
95 mu*chi*etastar - ((mu*lambda)/(1 - lambda))*((muf*chif*xif*rfstar)/(1 +
              nuf*xif))];

```

```

96 (mu*chi*etastar)/(1 + nu*xi) - ((muf*chif*xif*rfstar)/(1 + nuf*xif));
97 0];
98
99 wstar = invLambda*wstarLambda;
100
101 wiotaLambda = [0;
102 (mu*lambda)/(1 - lambda);
103 1;
104 0];
105
106 wiota = invLambda*wiotaLambda;
107
108 X = [-1; 1; -1; 0];
109
110 M = [sigmapif^2, 0, 0, 0;
111 0, sigmapi^2, 0, 0;
112 0, 0, sigmaepsilon^2, 0;
113 0, 0, 0, 0];
114
115 sigmax = diag([sigmapif, sigmapi, sigmaepsilon, sigmahf, sigmah]);
116
117 covz = diag([sigmapif^2, sigmapi^2, sigmaepsilon^2, sigmapif^2, sigmapi
    ^2, sigmaepsilon^2, sigmahf^2, sigmah^2]);
118
119 covzz = [0, 0, 0, sigmapif^2, 0, 0, 0, 0;
120          0, 0, 0, 0, sigmapi^2, 0, 0, 0;
121          0, 0, 0, 0, 0, sigmaepsilon^2, 0, 0;
122          0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0;
123          0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0;
124          0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0;

```

```

125         0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0;
126         0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0];
127
128
129
130 %
131 % Volatilidade cambial end gena
132 %
133
134 sigma2 = 0.001;
135
136 for n=1:50
137
138     QLambda = [0, 0, 0, 0;
139               0, 0, 0, 0;
140               0, 0, 0, 0;
141               0, -(mu*lambda)/(1 - lambda))*(1/sigma2), -1/sigma2, 0;
142               0, ((mu*lambda)/(1 - lambda))*(1/sigma2), 1/sigma2, 0;
143               0, ((mu*lambda)/(1 - lambda))*(1/sigma2), 1/sigma2, 0;
144               0, 0, 0, 0;
145               0, 0, 0, 0];
146
147     Q = invLambda*QLambda';
148
149     SLambda = [0, ((mu*lambda)/(1 - lambda))*(1/sigma2), 1/sigma2, 0;
150              0, -(mu*lambda)/(1 - lambda))*(1/sigma2), -1/sigma2, 0;
151              0, ((mu*lambda)/(1 - lambda))*(1/(2*a))*(1 + (2*a)/sigma2), (1/(2*a)
152                *(1 + (2*a)/sigma2), 0;
153              0, ((mu*lambda)/(1 - lambda))*(- (1/(2*a))*(1 + (2*a)/sigma2) + b
154                /(2*a)), - (1/(2*a))*(1 + (2*a)/sigma2) + b/(2*a), 0];

```

```

153
154     S = invLambda*SLambda';
155
156     A = sigma2*S + T;
157
158     [P, D] = eig(A);
159
160     u = inv(cat(2,[0 0 1 0]',P(:, 2:4)))'*[-1 0 0 0]';
161
162     sigma2 = X*(eye(4) - (1/(u'*wiota))*(wiota*u'))*M*(eye(4) - (1/(u'*
163         wiota))*(wiota*u'))'*X;
164
165 end
166
167
168 %
169 % Gráfico da volatilidade cambial endógena
170 %
171
172 sigma2grafico=0.0001:sigma2/30:2*sigma2;
173
174 for n=1:length(sigma2grafico)
175
176     QLambda = [0, 0, 0, 0;
177         0, 0, 0, 0;
178         0, 0, 0, 0;
179         0, -(mu*lambda)/(1 - lambda))*(1/sigma2grafico(n)), -1/
180         sigma2grafico(n), 0;
181         0, (mu*lambda)/(1 - lambda))*(1/sigma2grafico(n)), 1/sigma2grafico(

```

```

n), 0;
181 0, ((mu*lambda)/(1 - lambda))*(1/sigma2grafico(n)), 1/sigma2grafico(
n), 0;
182 0, 0, 0, 0;
183 0, 0, 0, 0];
184
185 Q = invLambda*QLambda';
186
187 SLambda = [0, ((mu*lambda)/(1 - lambda))*(1/sigma2grafico(n)), 1/
sigma2grafico(n), 0;
188 0, -((mu*lambda)/(1 - lambda))*(1/sigma2grafico(n)), -1/
sigma2grafico(n), 0;
189 0, ((mu*lambda)/(1 - lambda))*(1/(2*a))*(1 + (2*a)/sigma2grafico(n))
, (1/(2*a))*(1 + (2*a)/sigma2grafico(n)), 0;
190 0, ((mu*lambda)/(1 - lambda))*(- (1/(2*a))*(1 + (2*a)/sigma2grafico(
n)) + b/(2*a)), - (1/(2*a))*(1 + (2*a)/sigma2grafico(n)) + b/(2*a
), 0];
191
192 S = invLambda*SLambda';
193
194 A = sigma2grafico(n)*S + T;
195
196 [P, D] = eig(A);
197
198 u = inv(cat(2,[0 0 1 0]',P(:, 2:4)'))*[-1 0 0 0]';
199
200 F(n) = X'*(eye(4) - (1/(u'*wiota))*(wiota*u'))*M*(eye(4) - (1/(u'*
wiota))*(wiota*u'))'*X;
201
202

```

```

203 end
204
205
206 %
207 % F rmulas que dependem de sigma
208 %
209
210 QLambda = [0, 0, 0, 0;
211 0, 0, 0, 0;
212 0, 0, 0, 0;
213 0,  $-(\mu*\lambda)/(1 - \lambda))*(1/\sigma^2)$ ,  $-1/\sigma^2$ , 0;
214 0,  $(\mu*\lambda)/(1 - \lambda))*(1/\sigma^2)$ ,  $1/\sigma^2$ , 0;
215 0,  $(\mu*\lambda)/(1 - \lambda))*(1/\sigma^2)$ ,  $1/\sigma^2$ , 0;
216 0, 0, 0, 0;
217 0, 0, 0, 0];
218
219 Q = invLambda*QLambda';
220
221 SLambda = [0,  $(\mu*\lambda)/(1 - \lambda))*(1/\sigma^2)$ ,  $1/\sigma^2$ , 0;
222 0,  $-(\mu*\lambda)/(1 - \lambda))*(1/\sigma^2)$ ,  $-1/\sigma^2$ , 0;
223 0,  $(\mu*\lambda)/(1 - \lambda))*(1/(2*a))*(1 + (2*a)/\sigma^2)$ ,  $(1/(2*a))*(1$ 
      +  $(2*a)/\sigma^2)$ , 0;
224 0,  $(\mu*\lambda)/(1 - \lambda)*(- (1/(2*a))*(1 + (2*a)/\sigma^2) + b/(2*a))$ ,
      -  $(1/(2*a))*(1 + (2*a)/\sigma^2) + b/(2*a)$ , 0];
225
226 S = invLambda*SLambda';
227
228 A = sigma2*S + T;
229
230 [P, D] = eig(A);

```

```

231
232 u = inv(cat(2,[0 0 1 0]’,P(:, 2:4))’)*[-1 0 0 0]’;
233
234 B = sigma2*Q + R;
235
236
237 cstar = (-2*a*(u’*wstar))/(sigma2*(u’*wiota));
238
239 epsilonstar = -cstar/b;
240
241 rstar = (omega/xi)*epsilonstar + etastar/xi;
242
243
244 C = inv(P)*(eye(4) - (1/(u’*wiota))*(wiota*u’))*B;
245
246 q = inv(P)* (eye(4) - (1/(u’*wiota))*(wiota*u’))*wstar;
247
248 D = D(2:4, 2:4);
249
250 C = C(2:4, :);
251
252 q = q(2:4, :);
253
254 ystar = inv(eye(4) - A)*(eye(4) - (1/(u’*wiota))*(wiota*u’))*wstar;
255
256 pstar = inv(eye(3) - D)*q;
257
258 n=0:1:50;
259
260

```

```
261
262 %
263 % Din mica macroecon mica
264 %
265
266 p = zeros(3,length(n));
267
268 y = zeros(4,length(n));
269
270 x = stdnormal_rnd(5, length(n)+1);
271
272 x = sigmax*x;
273
274 y0 = ystar + [2; 0; 0; 0];
275
276 p0 = inv(P)*y0;
277
278 p0 = p0(2:4, :);
279
280 eta = xif*rfstar;
281
282 pistar = 4;
283
284 for t=1:length(n)
285     if (n(t)<=0)
286         p(:,t) = p0;
287         y(:,t) = y0;
288         hf(t) = 0;
289         pif(t) = pifstar;
290         h(t) = 0;
```

```

291     pi(t) = pistar;
292 end
293 if (n(t)>0)
294     z = [x(1,t+1); x(2,t+1); x(3,t+1); x(1,t); x(2,t); x(3,t); x(4,t)
          ; x(5,t)];
295     p(:,t) = D*p(:,t-1) + C*z + q;
296     y(:,t) = P*cat(2,0,p(:,t)')';
297     hf(t) = -xif*y(1,t) + xif*rfstar - x(4,t+1) + xif*x(1,t+1);
298     pif(t) = ((1 + nuf*xif)/muf)*y(1,t) - ((1 + nuf*xif)/muf)*rfstar
          + pifstar - ((1 + nuf*xif)/muf + 1)*x(1,t+1);
299     h(t) = -xi*y(2,t) + omega*y(4,t) + eta - x(5,t+1) + xi*x(2,t+1);
300     pi(t) = ((1 + nu*xi)/mu)*y(2,t) - ((nu*omega)/mu)*y(4,t) + pistar
          - ystar(2)/mu - (nu*eta)/mu - ((1 + nu*xi)/mu + 1)*x(2,t+1);
301 end
302 end
303
304
305
306 %
307 % Gr ficos dos equil brios estrangeiros
308 %
309
310 graficohfstar = zeros(length(n));
311
312 graficopifstar = pifstar*ones(length(n));
313
314 graficorfstar = rfstar*ones(length(n));
315
316
317

```

```
318 %
319 % Gr ficos dos equil brios dom sticos
320 %
321
322 graficohstar = zeros(length(n));
323
324 graficopistar = pistar*ones(length(n));
325
326 graficorstar = rstar*ones(length(n));
327
328 graficoepsilonstar = epsilonstar*ones(length(n));
329
330
331
332
333 %
334 % Gr fico da sustentabilidade cambial
335 %
336
337 gammastar=-0.04:0.001:0.2;
338
339 c = 0.1;
340
341 lambdap = 0;
342
343 thetastar = 0;
344
345 kappastar = 0;
346
347 zeta = 10;
```

```

348
349 gstar = 1;
350
351 BY = 1;
352 % BY = 1.4;
353
354 DY = 1;
355 % DY = 0.8;
356
357
358 for m=1:length(gammastar)
359
360     etastar = omega*lambda*p*thetastar + zeta*gammastar(m) + eta;
361
362     wstarLambda = [(muf*chif*xif*rfstar)/(1 + nuf*xif);
363 mu*chi*etastar - ((mu*lambda)/(1 - lambda))*((muf*chif*xif*rfstar)/(1
364     + nuf*xif));
365 (mu*chi*etastar)/(1 + nu*xi) - ((muf*chif*xif*rfstar)/(1 + nuf*xif));
366     0];
367
368     wstar = invLambda*wstarLambda;
369
370     cstar = (-2*a*(u'*wstar))/(sigma2*(u'*wiota));
371
372     epsilonstar = -cstar/b;
373
374     rstar = (omega/xi)*epsilonstar + etastar/xi;
375
376     iotastar = cstar/c - (b/c)*lambda*p*thetastar - kappastar;

```

```
377 Preto(m) = rstar + pstar;
378
379 Azul(m) = ((BY)/(DY) + 1)*(pstar + gstar) - ((-iotastar*exp(
        epsilonstar) + gammastar(m))/(DY));
380
381
382
383 end
384
385
386 iotastar = -(b/c)*graficoepsilonstar(1);
387
388
389 %
390 % Gr ficos
391 %
392
393 estrangeira = figure ();
394
395 subplot(2,2,1)
396 hold on;
397 plot(n,y(1,:), 'color',[252/255 116/255 5/255],"linewidth",2)
398 plot(n,graficorfstar, 'k',"linewidth",1.5)
399 hold off;
400 grid on
401 axis ([0 length(n) 0 3])
402 xlabel 'Periodo';
403 ylabel 'r_f_em%';
404 title 'Taxa_de_juros';
405 text (length(n)+1, graficorfstar(1), 'r_f^*');
```

```
406
407 subplot(2,2,3)
408 hold on;
409 plot(n,hf,'b',"linewidth",2)
410 plot(n,graficohfstar,'k',"linewidth",1.5)
411 hold off;
412 grid on
413 axis ([0 length(n) -1.5 1.5])
414 xlabel 'Periodo';
415 ylabel 'h_f';
416 title 'Hiato_do_produto';
417 text (length(n)+1, graficohfstar(1), 'h_f^*');
418
419 subplot(2,2,4)
420 hold on;
421 plot(n,pif,'r',"linewidth",2)
422 plot(n,graficopifstar,'k',"linewidth",1.5)
423 hold off;
424 grid on
425 axis ([0 length(n) 0 3])
426 xlabel 'Periodo';
427 ylabel '\pi_f_{em} %';
428 title 'Inflacao';
429 text (length(n)+1, graficopifstar(1), '\pi_f^*');
430
431 print (estrangeira, "~/Tese/Octave/Figuras/estrangeira.eps");
432
433
434
435 domestica = figure ();
```

```
436
437 subplot(3,2,1)
438 hold on;
439 plot(sigma2grafico,F,"linewidth",2)
440 plot(sigma2grafico,sigma2grafico,'k',"linewidth",2)
441 hold off;
442 grid on
443 axis tight
444 xlabel '\sigma^2';
445 ylabel 'F(\sigma^2)';
446 title 'Volatilidade_cambial_endogena';
447
448 subplot(3,2,2)
449 hold on;
450 plot(gammastar,Azul,"linewidth",2)
451 plot(gammastar,Preto,'k',"linewidth",2)
452 hold off;
453 grid on
454 axis tight
455 xlabel '\gamma^*';
456 ylabel 'Preto_<_Azul';
457 title 'Sustentabilidade_fiscal';
458
459 subplot(3,2,3)
460 hold on;
461 plot(n,y(2,:), 'color',[252/255 116/255 5/255],"linewidth",2)
462 plot(n,graficorstar,'k',"linewidth",1.5)
463 hold off;
464 grid on
465 axis ([0 length(n) 1 3])
```

```
466 xlabel 'Periodo';
467 ylabel 'r_em_%';
468 title 'Taxa_de_juros';
469 text (length(n)+1, graficorstar(1), 'r^*');
470
471 subplot(3,2,4)
472 hold on;
473 plot(n,y(3,:), 'y', "linewidth",2)
474 plot(n,graficoepsilonstar, 'k', "linewidth",1.5)
475 hold off;
476 grid on
477 axis ([0 length(n) graficoepsilonstar(1)-0.2 graficoepsilonstar(1)+0.2])
478 xlabel 'Periodo';
479 ylabel '\epsilon';
480 title 'Taxa_de_cambio_real';
481 text (length(n)+1, graficoepsilonstar(1), '\epsilon^*');
482
483 subplot(3,2,5)
484 hold on;
485 plot(n,h, 'b', "linewidth",2)
486 plot(n,graficohstar, 'k', "linewidth",1.5)
487 hold off;
488 grid on
489 axis ([0 length(n) -1 1])
490 xlabel 'Periodo';
491 ylabel 'h';
492 title 'Hiato_do_produto';
493 text (length(n)+1, graficohstar(1), 'h^*');
494
495 subplot(3,2,6)
```

```
496 hold on;
497 plot(n, pi, 'r', "linewidth", 2)
498 plot(n, graficopistar, 'k', "linewidth", 1.5)
499 hold off;
500 grid on
501 axis ([0 length(n) 3 5])
502 xlabel 'Periodo';
503 ylabel '\pi_{em_%}';
504 title 'Inflacao';
505 text (length(n)+1, graficopistar(1), '\pi^{*}');
506
507 print (domestica, "~/Tese/Octave/Figuras/domestica.epsc");
```

C.1.2 Política monetária ótima

```
1 %
2 % Pol tica monet ria tima
3 %
4
5 %%
6 clc
7 clear all
8 close all
9
10
11 %
12 % Par metros da economia estrangeira
13 %
14
15 muf = 0.8;
16
```

17 $nuf = 0.9;$

18

19 $chif = 1.7;$

20

21 $xif = 1.7;$

22

23 $sig = 0.1;$

24

25 $rfstar = 1;$

26

27 $sigmahf = sig;$

28

29 $sigmapif = sig;$

30

31

32

33 %

34 % *Par metros da economia domestica*

35 %

36

37 $a = 0.001;$

38

39 $b = 0.2;$

40

41 $chi = 1.7;$

42

43 $xi = 0.9;$

44

45 $lambda = 0.1;$

46

```
47 omega = 0.1;
48
49 etastar = xif*rfstar;
50
51 sigmah = sig;
52
53 sigmapi = sig;
54
55 sigmaepsilon = sig;
56
57
58
59 mu=0.1:0.05:1.8;
60
61 nu=0.5:0.05:2;
62
63 for i=1:length(mu)
64
65     for j=1:length(nu)
66
67
68         %
69         % Formulas que n o dependem de sigma
70         %
71
72         Lambda = diag([1, 1 + nu(j)*xi - (mu(i)*lambda)/(1 - lambda), 1 - (mu(i)*
73             lambda)/((1 - lambda)*(1 + nu(j)*xi)), 1]);
74
75     invLambda = inv(Lambda);
```

76 $TLambda = [1 - (muf*chif*xif)/(1 + nuf*xif), ((mu(i)*lambda)/(1 - lambda)$
 $)*((muf*chif*xif)/(1 + nuf*xif) - 1), (muf*chif*xif)/(1 + nuf*xif) -$
 $1, 0;$

77 $0, 1 - (mu(i)*chi - nu(j))*xi, (1 - (mu(i)*chi - nu(j))*xi)/(1 + nu(j)*xi$
 $), 0;$

78 $0, nu(j)*omega, 1 + (nu(j)*omega)/(1 + nu(j)*xi) - (mu(i)*lambda)/((1 -$
 $lambda)*(1 + nu(j)*xi)), 1;$

79 $0, (mu(i)*chi - nu(j))*omega, ((mu(i)*chi - nu(j))*omega)/(1 + nu(j)*xi),$
 $0];$

80

81 $T = invLambda*TLambda';$

82

83 $RLambda = [1, 0, 0, 0;$

84 $0, 1 + nu(j)*xi - (mu(i)*lambda)/(1 - lambda), 0, 0;$

85 $0, 0, (mu(i)*lambda)/((1 - lambda)*(1 + nu(j)*xi)) - 1, 0;$

86 $(muf*(chif*xif - 1))/(1 + nuf*xif) - 1, ((mu(i)*lambda)/(1 - lambda))*(1$
 $- (muf*(chif*xif - 1))/(1 + nuf*xif)), 1 - (muf*(chif*xif - 1))/(1 +$
 $nuf*xif), 0;$

87 $0, xi*(mu(i)*chi - nu(j)) - (1 + mu(i)), (xi*(mu(i)*chi - nu(j)) - (1 +$
 $mu(i)))/(1 + nu(j)*xi), 0;$

88 $0, 0, 0, 0;$

89 $- (muf*chif)/(1 + nuf*xif), ((mu(i)*lambda)/(1 - lambda))*((muf*chif)/(1$
 $+ nuf*xif)), (muf*chif)/(1 + nuf*xif), 0;$

90 $0, - mu(i)*chi, - (mu(i)*chi)/(1 + nu(j)*xi), 0];$

91

92 $R = invLambda*RLambda';$

93

94 $wstarLambda = [(muf*chif*xif*rfstar)/(1 + nuf*xif);$

95 $mu(i)*chi*etastar - ((mu(i)*lambda)/(1 - lambda))*((muf*chif*xif*rfstar)$
 $/(1 + nuf*xif));$

```

96 (mu(i)*chi*etastar)/(1 + nu(j)*xi) - ((muf*chif*xif*rfstar)/(1 + nuf*xif)
    );
97 0];
98
99 wstar = invLambda*wstarLambda;
100
101 wiotaLambda = [0;
102 (mu(i)*lambda)/(1 - lambda);
103 1;
104 0];
105
106 wiota = invLambda*wiotaLambda;
107
108 X = [-1; 1; -1; 0];
109
110 M = [sigmapif^2, 0, 0, 0;
111 0, sigmapi^2, 0, 0;
112 0, 0, sigmaepsilon^2, 0;
113 0, 0, 0, 0];
114
115 covz = diag([sigmapif^2, sigmapi^2, sigmaepsilon^2, sigmapif^2, sigmapi
    ^2, sigmaepsilon^2, sigmaahf^2, sigmaah^2]);
116
117 covzz = [0, 0, 0, sigmapif^2, 0, 0, 0, 0;
118          0, 0, 0, 0, sigmapi^2, 0, 0, 0;
119          0, 0, 0, 0, 0, sigmaepsilon^2, 0, 0;
120          0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0;
121          0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0;
122          0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0;
123          0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0;

```

```

124         0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0];
125
126
127
128 %
129 % Volatilidade end gena
130 %
131
132 sigma2 = 0.001;
133
134 for n=1:50
135
136     QLambda = [0, 0, 0, 0;
137               0, 0, 0, 0;
138               0, 0, 0, 0;
139               0, -(mu(i)*lambda)/(1 - lambda)*(1/sigma2), -1/sigma2, 0;
140               0, (mu(i)*lambda)/(1 - lambda)*(1/sigma2), 1/sigma2, 0;
141               0, (mu(i)*lambda)/(1 - lambda)*(1/sigma2), 1/sigma2, 0;
142               0, 0, 0, 0;
143               0, 0, 0, 0];
144
145     Q = invLambda*QLambda';
146
147     SLambda = [0, (mu(i)*lambda)/(1 - lambda)*(1/sigma2), 1/sigma2, 0;
148               0, -(mu(i)*lambda)/(1 - lambda)*(1/sigma2), -1/sigma2, 0;
149               0, (mu(i)*lambda)/(1 - lambda)*(1/(2*a))*(1 + (2*a)/sigma2),
150                   (1/(2*a))*(1 + (2*a)/sigma2), 0;
151               0, (mu(i)*lambda)/(1 - lambda)*(- (1/(2*a))*(1 + (2*a)/sigma2) + b
152                   / (2*a)), - (1/(2*a))*(1 + (2*a)/sigma2) + b/(2*a), 0];

```

```

152     S = invLambda*SLambda';
153
154     A = sigma2*S + T;
155
156     [P, D] = eig(A);
157
158     u = inv(cat(2,[0 0 1 0]',P(:, 2:4)))'*[-1 0 0 0]';
159
160     sigma2 = X'*(eye(4) - (1/(u'*wiota))*(wiota*u'))*M*(eye(4) - (1/(u'*
           wiota))*(wiota*u'))'*X;
161
162
163 end
164
165
166 %
167 % F rmulas que dependem de sigma
168 %
169
170 QLambda = [0, 0, 0, 0;
171 0, 0, 0, 0;
172 0, 0, 0, 0;
173 0, -((mu(i)*lambda)/(1 - lambda))*(1/sigma2), -1/sigma2, 0;
174 0, ((mu(i)*lambda)/(1 - lambda))*(1/sigma2), 1/sigma2, 0;
175 0, ((mu(i)*lambda)/(1 - lambda))*(1/sigma2), 1/sigma2, 0;
176 0, 0, 0, 0;
177 0, 0, 0, 0];
178
179 Q = invLambda*QLambda';
180

```

```

181 SLambda = [0, ((mu(i)*lambda)/(1 - lambda))*(1/sigma2), 1/sigma2, 0;
182 0, -((mu(i)*lambda)/(1 - lambda))*(1/sigma2), -1/sigma2, 0;
183 0, ((mu(i)*lambda)/(1 - lambda))*(1/(2*a))*(1 + (2*a)/sigma2), (1/(2*a))
      *(1 + (2*a)/sigma2), 0;
184 0, ((mu(i)*lambda)/(1 - lambda))*(- (1/(2*a))*(1 + (2*a)/sigma2) + b/(2*a
      )), - (1/(2*a))*(1 + (2*a)/sigma2) + b/(2*a), 0];
185
186 S = invLambda*SLambda';
187
188 A = sigma2*S + T;
189
190 [P, D] = eig(A);
191
192 u = inv(cat(2,[0 0 1 0]'),P(:, 2:4)))*[-1 0 0 0]';
193
194 B = sigma2*Q + R;
195
196 C = inv(P)*(eye(4) - (1/(u'*wiota))*(wiota*u'))*B;
197
198 D = D(2:4, 2:4);
199
200 C = C(2:4, :);
201
202 Z = C*covz*C' + D*C*covzz*C' + C*covzz'*C'*D';
203
204 covp = [0, 0, 0, 0;
205          0, (1/(1 - D(1,1)*D(1,1)))*Z(1,1), (1/(1 - D(1,1)*D(2,2)))*Z(1,2)
          , (1/(1 - D(1,1)*D(3,3)))*Z(1,3);
206          0, (1/(1 - D(2,2)*D(1,1)))*Z(2,1), (1/(1 - D(2,2)*D(2,2)))*Z(2,2)
          , (1/(1 - D(2,2)*D(3,3)))*Z(2,3);

```

```

207         0, (1/(1 - D(3,3)*D(1,1)))*Z(3,1), (1/(1 - D(3,3)*D(2,2)))*Z(3,2)
           , (1/(1 - D(3,3)*D(3,3)))*Z(3,3) ];
208
209 covy = P*covp*P';
210
211 H = [0; -xi; 0; omega];
212
213 varh(i,j) = H'*covy*H + sigma_h^2 + (xi^2)*(sigma_pi^2) + 2*xi*H'*(eye(4) -
           (1/(u'*wiota))*(wiota*u'))*[0; sigma_pi^2; 0; 0];
214
215 epsilonstar(i,j) = ((2*a/b)*(u'*wstar))/(sigma2*(u'*wiota));
216
217
218 end
219
220 end
221
222
223
224 %
225 % Gr ficos
226 %
227
228
229 variancah = figure ();
230
231 [nuu, muu] = meshgrid(nu, mu);
232 surf(nuu, muu, varh); hold on
233 contour3(nuu, muu, varh,[0.0142,0.016,0.02,0.03,0.05,0.09], 'k', "linewidth
           ",2); hold on

```

```

234 xlabel( '\fontsize{24}_\nu' );
235 ylabel( '\fontsize{24}_\mu' );
236 zlabel( '\fontsize{24}_\var(h)' );
237
238 print( variancah , "~/Tese/Octave/Figuras/variancah.eps" );
239
240
241 epstar = figure ();
242
243 [nuu, muu] = meshgrid( nu, mu );
244 surf( nuu, muu, epsilonstar ); hold on
245 contour3( nuu, muu, epsilonstar
           , [0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1, 1.1, 1.2, 1.3], 'b', "linewidth
           ", 2); hold on
246 contour3( nuu, muu, epsilonstar, [-0.5, -0.4, -0.3, -0.2, -0.1], 'r', "linewidth
           ", 2);
247 xlabel( '\fontsize{24}_\nu' );
248 ylabel( '\fontsize{24}_\mu' );
249 zlabel( '\fontsize{24}_\epsilon^*' );
250
251 print( epstar , "~/Tese/Octave/Figuras/epsilonstar.eps" );
252
253
254 epstarvarh = figure ();
255
256 [nuu, muu] = meshgrid( nu, mu );
257 contour( nuu, muu, varh, [0.0141, 0.016, 0.02, 0.03, 0.05, 0.09], 'k', "linewidth
           ", 3); hold on
258 contour( nuu, muu, epsilonstar
           , [0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1, 1.1, 1.2, 1.3], 'b', "linewidth

```

```
    ",2); hold on
259 contour(nuu, muu, epsilonstar,[-0.5,-0.4,-0.3,-0.2,-0.1], 'r',"linewidth
    ",2);
260 xlabel(' \fontsize{24}\nu');
261 ylabel(' \fontsize{24}\mu');
262
263 print(epstarvarh, "~/Tese/Octave/Figuras/epstarvarh.eps");
264
265
266 varhepstar = figure ();
267
268 plot(epsilonstar, varh, 'b',"linewidth",2)
269 xlabel(' \fontsize{24}\epsilon^*');
270 ylabel(' \fontsize{24}\var(h)');
271
272 print(varhepstar, "~/Tese/Octave/Figuras/varhepstar.eps");
```


Apêndice D

Da NAIRU para a NAIBU?

A hipótese da existência da denominada *non-accelerating inflation rate of unemployment* (NAIRU) surgiu nos anos sessenta em meio à crítica da estabilidade no longo prazo do trade-off entre desemprego e inflação dado pela *curva de Phillips clássica*, cuja versão linear é dada por

$$\pi_{t+1}^e = -\zeta u_t + \psi \quad (\text{D.1})$$

onde ζ e ψ são constantes positivas. Os críticos afirmavam que, no longo prazo, esse trade-off desapareceria e a curva de Phillips seria vertical em cima da NAIRU. A aceleração da inflação do final dos anos sessenta até o final dos anos setenta tornou a hipótese da NAIRU hegemônica no meio acadêmico, levando à denominada *curva de Phillips aceleracionista*, dada por

$$\pi_{t+1}^e - \pi_t = -\phi(u_t - u^*) \quad (\text{D.2})$$

onde u^* é a NAIRU, foi primeiramente justificada através das expectativas adaptativas e posteriormente através das expectativas racionais. A curva de Phillips

aceleracionista descreve razoavelmente bem os dados empíricos dos anos setenta e oitenta, mas não muito bem os dados empíricos dos anos dois mil, especialmente após a crise de 2008. Em [11], Blanchard, Cerutti e Summers fazem uma regressão de um modelo que é a média ponderada das curvas de Phillips clássica (Equação D.1) e aceleracionista (Equação D.2), dada por

$$\pi_{t+1}^e = \lambda\pi_t - (\lambda\phi + (1-\lambda)\zeta)u_t + \lambda\phi u^* + (1-\lambda)\psi \quad (\text{D.3})$$

onde λ é o peso dado à curva de Phillips aceleracionista. Os dados mais recentes mostram que o peso é muito maior para a curva de Phillips clássica, ou seja, foi encontrado um valor muito pequeno para o coeficiente λ . Nesse modelo, a NAIRU desaparece e volta a aparecer, no longo prazo, o trade-off entre desemprego e inflação, dado agora pela seguinte curva de Phillips clássica

$$\pi = -\frac{\lambda\phi + (1-\lambda)\zeta}{1-\lambda}u + \frac{\lambda\phi u^* + (1-\lambda)\psi}{1-\lambda} \quad (\text{D.4})$$

onde π e u são os valores de longo prazo para, respectivamente, a inflação e o desemprego. Uma possibilidade simples para conciliar a existência do trade-off entre desemprego e inflação no longo prazo, observado nos anos cinquenta e nos anos dois mil, com a aceleração da inflação, observada nos anos setenta e nos anos oitenta, é utilizar a seguinte modificação da curva de Phillips aceleracionista

$$\frac{\pi_{t+1}^e - \pi_t}{\pi_t} = -\phi(u_t - u^*) \quad (\text{D.5})$$

ou seja, trocar a variação da inflação pela variação proporcional da inflação. Uma justificativa para essa mudança pode ser dada em termos de expectativas adaptativas, pois, no processo de indexação, são as variações percentuais que importam, de modo que a correção acima deve ser feita, uma vez que a inflação não está em logaritmo. Fazendo a média ponderada das curvas de Phillips

clássica (Equação D.1) e aceleracionista modificada (Equação D.5), obtemos um modelo cuja forma reduzida é dada por

$$\pi_{t+1}^e = \lambda(1 + \phi u^*)\pi_t - (1 - \lambda)\zeta u_t - \lambda\phi u_t \pi_t + (1 - \lambda)\psi \quad (\text{D.6})$$

Nesse modelo, o trade-off entre desemprego e inflação no longo prazo só existe, quando

$$-1 < \lambda(1 + \phi u^*) - \lambda\phi u < 1 \quad (\text{D.7})$$

ou, equivalentemente, quando

$$\frac{\lambda(1 + \phi u^*)}{\lambda\phi} - \frac{1}{\lambda\phi} < u < \frac{\lambda(1 + \phi u^*)}{\lambda\phi} + \frac{1}{\lambda\phi} \quad (\text{D.8})$$

Faz sentido então denominar esse intervalo *non-accelerating inflation band of unemployment* (NAIBU), uma vez que nele aparece o trade-off entre desemprego e inflação, dado agora pela seguinte curva de Phillips clássica

$$\pi = \frac{-(1 - \lambda)\zeta u + (1 - \lambda)\psi}{1 - \lambda(1 + \phi u^*) + \lambda\phi u} \quad (\text{D.9})$$

Quando o desemprego é menor do $\frac{\lambda(1 + \phi u^*)}{\lambda\phi} - \frac{1}{\lambda\phi}$, aparece uma espiral inflacionária e, quando o desemprego é maior do $\frac{\lambda(1 + \phi u^*)}{\lambda\phi} + \frac{1}{\lambda\phi}$, aparece uma espiral deflacionária. Pela Lei de Okun, segue a equação (3.10), dada por

$$h_t = -\varphi(u_t - u^*) \quad (\text{D.10})$$

onde h_t é o hiato do produto no período t , de modo que

$$u_t = -\frac{1}{\varphi}h_t + u^* \quad (\text{D.11})$$

A equação (D.6) pode então ser escrita como

$$\pi_{t+1}^e = \lambda\pi_t + ah_t + bh_t\pi_t + c \quad (\text{D.12})$$

onde

$$a = \frac{(1-\lambda)\zeta}{\varphi}, \quad b = \frac{\lambda\phi}{\varphi} \quad \text{e} \quad c = (1-\lambda)(\psi - \zeta u^*) \quad (\text{D.13})$$

O modelo é completado por uma curva IS, dada por

$$h_{t+1}^e = -\xi(r_{t+1}^e - r^*) \quad (\text{D.14})$$

onde r^* é a taxa de juros real de equilíbrio, e por uma regra de Taylor, dada por

$$r_{t+1}^e - r^* = \mu(\pi_{t+1}^e - \pi^*) + \nu h_{t+1}^e \quad (\text{D.15})$$

onde μ e ν são constantes positivas e π^* é a meta de inflação escolhidas pelo Banco Central. Adotando expectativas racionais, temos que

$$h_t^e = h_t + \alpha_t \quad \text{e} \quad \pi_t^e = \pi_t + \beta_t \quad (\text{D.16})$$

onde α_t e β_t são variáveis aleatórias independentes, identicamente e normalmente distribuídas, com esperança nula e variâncias dadas por σ_α^2 e σ_β^2 .

Proposição D.1 *Temos que*

$$\begin{aligned} h_{t+1} &= b h_t^2 + \left(\lambda + b \alpha_t - \frac{\xi \mu}{1 + \nu \xi} (a + b(\pi^* - \beta_t)) \right) h_t + \\ &+ \frac{\xi \mu}{1 + \nu \xi} ((1 - \lambda) \pi^* + \lambda \beta_t - c) + \lambda \alpha_t - \alpha_{t+1} \end{aligned} \quad (\text{D.17})$$

Além disso, temos que

$$h_{t+1}^e = b (h_t^e)^2 + \left(\lambda - \frac{\xi \mu}{1 + \nu \xi} (a + b \pi^*) \right) h_t^e + b \sigma_\alpha^2 + \frac{\xi \mu}{1 + \nu \xi} ((1 - \lambda) \pi^* - c) \quad (\text{D.18})$$

e essa dinâmica possui um ponto fixo estável se e só se

$$0 < \left(-1 + \lambda - \frac{\xi \mu}{1 + \nu \xi} (a + b \pi^*) \right)^2 - 4b^2 \sigma_\alpha^2 - \frac{4b \xi \mu}{1 + \nu \xi} ((1 - \lambda) \pi^* - c) \leq 4 \quad (\text{D.19})$$

Prova: Substituído a equação (D.14) na equação (D.15), segue que

$$-\frac{1}{\xi}h_{t+1}^e = \mu(\pi_{t+1}^e - \pi^*) + \nu h_{t+1}^e \quad (\text{D.20})$$

de modo que

$$\pi_{t+1}^e - \pi^* = -\frac{1 + \nu\xi}{\xi\mu}h_{t+1}^e \quad (\text{D.21})$$

Defasando a equação acima em um período e usando as equações (D.16), obtemos que

$$\pi_t = -\frac{1 + \nu\xi}{\xi\mu}h_t + \pi^* - \frac{1 + \nu\xi}{\xi\mu}\alpha_t - \beta_t \quad (\text{D.22})$$

Por outro lado, substituído a equação (D.15) na equação (D.14), segue que

$$h_{t+1}^e = -\xi\mu(\pi_{t+1}^e - \pi^*) - \xi\nu h_{t+1}^e \quad (\text{D.23})$$

Substituindo a equação (D.12) na equação acima, obtemos que

$$h_{t+1}^e = -\xi\mu\lambda\pi_t - \xi\mu a h_t - \xi\mu b h_t \pi_t - \xi\mu c + \xi\mu\pi^* - \xi\nu h_{t+1}^e \quad (\text{D.24})$$

de modo que

$$h_{t+1}^e = -\frac{\xi\mu\lambda}{1 + \nu\xi}\pi_t - \frac{\xi\mu a}{1 + \nu\xi}h_t - \frac{\xi\mu b}{1 + \nu\xi}h_t\pi_t + \frac{\xi\mu(\pi^* - c)}{1 + \nu\xi} \quad (\text{D.25})$$

Substituindo a equação (D.22) na equação acima, segue que

$$\begin{aligned} h_{t+1}^e &= \lambda h_t + \lambda\alpha_t - \frac{\xi\mu\lambda}{1 + \nu\xi}(\pi^* - \beta_t) - \frac{\xi\mu a}{1 + \nu\xi}h_t + \\ &+ b h_t^2 + b\alpha_t h_t - \frac{\xi\mu b}{1 + \nu\xi}(\pi^* - \beta_t)h_t + \frac{\xi\mu(\pi^* - c)}{1 + \nu\xi} \end{aligned} \quad (\text{D.26})$$

de modo que a equação (D.17) segue substituindo a primeira equação de (D.16) na equação acima e rearranjando os termos. Além disso, da primeira equação de (D.16), obtemos que

$$h_t^2 = (h_t^e)^2 - 2h_t^e\alpha_t + \alpha_t^2 \quad (\text{D.27})$$

de modo que, substituindo a equação acima na equação anterior, segue que

$$\begin{aligned} h_{t+1} = & b \left((h_t^e)^2 - 2h_t^e \alpha_t + \alpha_t^2 \right) + \left(\lambda + b\alpha_t - \frac{\xi\mu}{1+\nu\xi} (a + b(\pi^* - \beta_t)) \right) h_t + \\ & + \frac{\xi\mu}{1+\nu\xi} \left((1-\lambda)\pi^* + \lambda\beta_t - c \right) + \lambda\alpha_t - \alpha_{t+1} \end{aligned} \quad (\text{D.28})$$

A equação (D.18) segue então calculando a esperança da equação acima. Finalmente, um ponto fixo h da dinâmica dada pela equação (D.18) é por definição uma solução da seguinte equação quadrática

$$h = F(h) = bh^2 + \left(\lambda - \frac{\xi\mu}{1+\nu\xi} (a + b\pi^*) \right) h + b\sigma_\alpha^2 + \frac{\xi\mu}{1+\nu\xi} \left((1-\lambda)\pi^* - c \right) \quad (\text{D.29})$$

que tem solução real se e só se seu discriminante

$$\Delta = \left(-1 + \lambda - \frac{\xi\mu}{1+\nu\xi} (a + b\pi^*) \right)^2 - 4b^2\sigma_\alpha^2 - \frac{4b\xi\mu}{1+\nu\xi} \left((1-\lambda)\pi^* - c \right) \quad (\text{D.30})$$

é não negativo. Se $\Delta = 0$, a parábola dada por F tangencia a bissetriz no único ponto fixo da dinâmica. Neste caso, a órbita de todo ponto maior do que o ponto fixo tende para o infinito, de modo que o ponto fixo não é estável. Isso mostra que para a existência de ponto fixo estável é necessário que $\Delta > 0$, mostrando a primeira desigualdade de (D.19). Para que o ponto fixo h seja estável é necessário que $|F'(h)| \leq 1$ e suficiente que $|F'(h)| < 1$. Mas

$$F'(h) = 2bh + \lambda - \frac{\xi\mu}{1+\nu\xi} (a + b\pi^*) = 1 \pm \sqrt{\Delta} \quad (\text{D.31})$$

de modo que podemos excluir caso $F'(h) = 1 + \sqrt{\Delta}$, que tem sempre módulo maior do que um, e considerar apenas o caso em que $F'(h) = 1 - \sqrt{\Delta}$, que tem módulo menor ou igual a um se e só se $\Delta \leq 4$. Quando $\Delta < 4$, temos que $|F'(h)| < 1$, de modo que o ponto é estável. Quando $\Delta = 4$, temos que $F'(h) = -1$, e é possível mostrar que o ponto é estável, mostrando a segunda desigualdade de (D.19). \square

Referências Bibliográficas

- [1] M. Airaud, E. Buffie e L.-F. Zanna: *Inflation Targeting and Exchange Rate Management In Less Developed Countries*. IMF Working Paper **55** (2016), 1-64.
- [2] E. Bacha: *Integrar para crescer: o Brasil na economia mundial*, em *Sob a Luz do Sol, uma agenda para o Brasil*, Centro de Debates de Políticas Públicas, (2014), 106-116.
- [3] L. Ball: *Efficient Rules for Monetary Policy*. *International Finance* **2** (1999), 63-83.
- [4] L. Ball: *Policy Rules for Open Economies*, em J. Taylor (ed.), *Monetary Policy Rules*, University of Chicago Press, (1999), 127-156.
- [5] L. Ball e S. Mazumder: *Inflation Dynamics and the Great Recession*. *Brookings Papers on Economic Activity*, Spring (2011), 337-405.
- [6] Bank of England: *The Transmission of Monetary Policy*. (1999).
<http://www.bankofengland.co.uk/publications/other/monetary/montrans.pdf>.
- [7] R. Berger e G. Casella: *Statistical Inference*. Cengage Learning, 2nd edition, Boston (2001).

- [8] L. Bresser-Pereira: *The Dutch disease and its neutralization: a ricardian approach*. Revista de Economia Política **28** (2008), 47-71.
- [9] P. Brockwell e R. Davis: *Introduction to Time Series and Forecasting*. Springer, 3rd edition, Switzerland (2016).
- [10] O. Blanchard: *The US Phillips Curve: Back to the 60s?*. Peterson Institute, Policy Brief **1** (2016), 1-4.
- [11] O. Blanchard, E. Cerutti, and L. Summers: *Inflation and Activity: Two Explorations and Their Monetary Policy Implications*. In *Inflation and Unemployment in Europe: Conference proceedings*. ECB Forum on Central Banking. European Central Bank (2015).
- [12] J. Bogdanski, A. Tombini e S. Werlang: *Implementing Inflation Targeting in Brazil*. Banco Central do Brasil, Working Paper Series **1** (2000), 1-29.
- [13] S. Caetano e J. Souza Jr.: *Regra de Taylor, Inércia na Política Monetária e Influência do Hiato do Produto*. Ipea, Carta de Conjuntura (2014), 95-103.
- [14] W. Carlin e D. Soskice: *The 3-Equation New Keynesian Model - A Graphical Exposition*. Contributions to Macroeconomics **5** (2005).
- [15] L. Castro e J. Faro: *Introdução à Teoria da Escolha*. 25° Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA (2005).
- [16] D. Chrity, M. Garcia e M. Medeiros: *Tendenciosidade do Mercado Futuro de Cambio: Risco Cambial ou Erros Sistemáticos de Previsão?*. Revista Brasileira de Finanças **4** (2006), 123-140.

- [17] P. Diamond e E. Saez: *The Case for a Progressive Tax: From Basic Research to Policy Recommendations*. Journal of Economic Perspectives **25** (2011), 165-190.
- [18] R. Dornbusch: *Expectations and Exchange Rate Dynamics*. Journal of Political Economy **84** (1976), 1161-1176.
- [19] L. Eeckhoudt, C. Gollier e H. Schlesinger: *Economic and Financial Decisions under Risk*. Princeton University Press, Princeton (2005).
- [20] P. Fernandez: *Introdução à Teoria das Probabilidades*. Livros Técnicos e Científicos, Rio de Janeiro (1973).
- [21] J. Frankel: *On the Mark: A Theory of Floating Exchange Rates Based on Real Interest Differentials*. The American Economic Review **69** (1979), 610-622.
- [22] R. Frenkel: *The Sustainability of Sterilization Policy*. CEPAL Review **93** (2007), 29-36.
- [23] A. Fernandes e M. Garcia: *Diferencial de Juros e Carry-Trade*. Valor, 2 de agosto, de 2007.
- [24] O. Jeanne e R. Rancière: *The Optimal Level of International Reserves For Emerging Market Countries: A New Formula and Some Applications*. The Economic Journal **121** (2011), 905-930.
- [25] E.-W. Kohlscheen: *Estimating Exchange Market Pressure and Intervention Activity*. Banco Central do Brasil, Working Paper Series **9** (2000), 1-19.
- [26] C. Kuehn: *Multiple Time Scale Dynamics*. Springer, 1st edition, Switzerland (2015).

- [27] P. Krugman: *Adjustment in the World Economy*. Group of 30, Occasional Papers **24** (1987), 1-40.
- [28] P. Krugman: *Currency Regimes, Capital Flows, and Crises*, IMF Economic Review **62** (2014), 470-493.
- [29] K. Neusser: *Statistical Inference*. Springer, Switzerland (2016).
- [30] D. Rodrik: *The Social Cost of Foreign Exchange Reserves*, International Economic Journal **20** (2006), 253-266.
- [31] A. Rodseth: *Exchange rate determination under inflation targeting*, University of Oslo, Econ 4330 Lecture **9** (2008), 1-12.
- [32] P. Rossi: *Taxa de câmbio no Brasil: dinâmicas da especulação e da arbitragem*. Tese de Doutorado, Unicamp, Instituto de Economia (2012).
- [33] P. Rossi: *Política cambial no Brasil: um esquema analítico*. Revista de Economia Política **35** (2015), 708-727.
- [34] G. Rudebusch e L. Svensson: *Policy Rules for Inflation Targeting*, em J. Taylor (ed.), *Monetary Policy Rules*, University of Chicago Press, (1999), 203-262.
- [35] L. Sarno e M. Taylor: *The Economics of Exchange Rates*. Cambridge University Press, Cambridge (2003).
- [36] L. Svensson: *Inflation Forecast Targeting: Implementing and Monitoring Inflation Targets*. European Economic Review **41** (1997), 1111-1146.

- [37] C. Vonbun: *Reservas Internacionais Revisitadas: Novas Estimativas de Patamares Ótimos*. Ipea, Texto para Discussão **1885** (2013).