Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Soluções para Problemas Elípticos do tipo Côncavo-Convexo

por

Adriana Flores de Almeida

2009

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Soluções para Problemas Elípticos do tipo Côncavo-Convexo

por

Adriana Flores de Almeida

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos para obtenção do grau de

MESTRE EM MATEMÁTICA

Brasília, 2009.

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Marcelo Fernandes Furtado - UnB (Orientador)

Prof. Dr. Carlos Alberto Pereira dos Santos - UnB

Prof. Dr. Fábio Rodrigues Pereira -UFJF

Dedicatória

À minha mãe, Cida, um exemplo de força e determinação.

Agradecimentos

A Deus, que me concede a cada dia saúde e capacidade sobre todas as coisas. Agradeço a Ele pelas bênçãos e graças alcançadas.

À minha família, de maneira mais especial à minha mãe pelo apoio e confiança depositada em mim.

Ao professor Marcelo Fernandes Furtado pela orientação sempre disponível e eficiente, que me permitiu adquirir os conhecimentos necessários para a minha formação e pelo exemplo profissional que se tornou pra mim.

Aos Professores Carlos Alberto Pereira dos Santos e Fábio Rodrigues Pereira por terem aceitado me avaliar, fazendo parte da banca examinadora.

Aos professores da Pós-Graduação que me ajudaram a percorrer essa difícil trajetória em busca de conhecimento, em especial aos professores Carlos Alberto Pereira dos Santos, Kátia Regina Gonçalves e Marcelo Fernandes Furtado.

A todos os que fazem parte do Departamento de Matemática da UnB.

A todos os meus amigos da UnB pelo companherismo, motivação e que diretamente contribuíram para a elaboração deste trabalho, em especial a Kaliana, Mariana, Ricardo, Thaynara, Kélem, João Paulo e Igor pelos momentos compartilhados nessa jornada, momentos que nunca irei esquecer, sem essas pessoas teria sido muito mais difícil para mim. "*Só enquanto eu respirar vou me lembrar de vocês.*"

A todos que contribuíram, de forma direta, ou indiretamente, para concretização deste trabalho, meu muito obrigada!

Resumo

Neste trabalho mostraremos a existência de soluções fracas para a seguinte classe de problemas elípticos

$$(P) \qquad \begin{cases} -\Delta u &= h(x)u^q + f(x,u), \quad x \in \Omega, \\ u &\geq 0, \quad \Omega, \\ u &= 0, \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

As principais ferramentas utilizadas são o Princípio Variacional de Ekeland e o Teorema do Passo da Montanha.

Abstract

In this work we show the existence of weak solutions for the following class for elliptic problems

$$(P) \qquad \begin{cases} -\Delta u &= h(x)u^q + f(x,u), \qquad x \in \Omega, \\ u &\geq 0, \qquad \Omega, \\ u &= 0, \qquad \partial\Omega. \end{cases}$$

The main tools used are Ekeland's Variational Principle and Mountain Pass Theorem.

Índice

Introdução

A existência de soluções para o problema

$$(P_1) \qquad \begin{cases} -\Delta u &= g_\lambda(x,u), & x \in \Omega, \\ u &= 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

onde $g_\lambda : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e λ é um parâmetro real, tem sido amplamente investigada nos últimos anos. Mas encontrar solução de (P_1) depende do comportamento de g_λ. Quando g_λ é sublinear, por exemplo, $g_\lambda = \lambda u^q$, $0 < q < 1$, o método de sub-super solução nos fornece uma única solução positiva para (P_1) quando $\lambda > 0$, veja [2, 7]. Para o caso em que g_λ é superlinar, por exemplo, $g_\lambda = \lambda u + |u|^{k-1} u$, $1 < k < 2^* - 1$, mostra-se que o problema (P_1) possui infinitas soluções para $\lambda > 0$ e pelo menos uma solução positiva para $\lambda < \lambda_1$, ver [4]. Quando $k = 2^*$, o problema é mais delicado, devido a falta de compacidade da imersão de Sobolev $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$. Contudo a existência de uma solução positiva de (P_1) para todo $0 < \lambda < \lambda_1$, quando $N > 3$ e, $0 < \lambda^* < \lambda < \lambda_1$, quando $N = 3$, foi provada em [7] via métodos variacionais.

Em um celebrado artigo de 1994, Ambrosetti, Brézis e Cerami [3], estudaram o problema (P_1) no caso em que g_λ é a soma de um termo sublinear e um termo superlinear, isto é, consideraram o seguinte problema

$$(P_2) \qquad \begin{cases} -\Delta u &= \lambda u^q + u^k, & x \in \Omega, \\ u &> 0, & x \in \Omega. \\ u &= 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

com $0 < q < 1$ e $\lambda > 0$. Quando $k > 1$ é arbitrário, foi demonstrado a existência de uma constante real $\Lambda > 0$ tal que existe uma solução de (P_2) se, e somente se, $0 < \lambda < \Lambda$. Além disso, se $\lambda = \Lambda$, então o problema (P_2) tem pelo menos uma solução fraca e, se $\lambda > \Lambda$, o problema (P_2) não tem solução. Quando $1 < k < 2^* - 1$, os autores demonstraram que para todo $0 < \lambda < \Lambda$ o problema (P_2) possui pelo menos duas soluções. Em seguida apareceram vários trabalhos envolvendo não linearidades côncavas e convexas.

Nessa dissertação apresentamos um estudo baseado no artigo de Li, Wu e Zhou [11], sobre a existência de solução fraca para o problema de Dirichlet não-linear do tipo

$$(P) \qquad \begin{cases} -\Delta u &= h(x)u^q + f(x,u), & x \in \Omega, \\ u &\geq 0, & \Omega, \\ u &= 0, & \partial\Omega \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio suave e limitado, $N \geq 3$, $u \in H_0^1(\Omega)$, $0 < q < 1$ e as funções h e f satisfazem as seguintes condições:

(h_1) $h \in C(\overline{\Omega}),\ h(x) \neq 0;$

(f_0) $f \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^+);$

(f_1) $f(x,0) = 0$ e $f(x,s) \geq (\neq)\ 0 \quad \forall\ s \geq 0,\ x \in \Omega;$

(f_2) $\lim_{s \to 0^+} \dfrac{f(x,s)}{s} = \mu\ \in\ [0, \lambda_1)$ uniformemente em $x \in \Omega;$

onde λ_1 é o primeiro autovalor associado ao problema

$$(P_3) \qquad \begin{cases} -\Delta u &= \lambda u, & x \in \Omega, \\ u &= 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Mostramos a existência de soluções fracas não-triviais do problema (P) via métodos variacionais. Por uma solução fraca do problema (P), entendemos uma função $u \in H_0^1(\Omega)$ que satisfaz

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \phi dx = \int_\Omega h(x)(u^+)^q \phi dx + \int_\Omega f(x,u^+)\phi dx, \quad \forall \ \ \phi \in H_0^1(\Omega).$$

Conforme será mostrado, procurar solução fraca do problema (P) é equivalente encontrar um ponto crítico do funcional $I : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ definido por

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx - \frac{1}{q+1}\int_\Omega h(x)(u^+)^{q+1} dx - \int_\Omega F(x,u^+)dx,$$

onde $u^+ = \max\{u, 0\}$ e $F(x,u) = \displaystyle\int_0^u f(x,s)ds.$

Nosso trabalho está dividido da seguinte maneira:

No **Capítulo 1**, apresentamos e demontramos o Princípio Variacional de Ekeland e o Teorema do Passo da Montanha que serão as ferramentas utilizadas para obtenção dos pontos críticos para funcional I.

No **Capítulo 2**, estudamos o caso onde $f(x,s)$ é assintoticamente linear com respeito a s no infinito, isto é,

(f_3) $\lim_{s\to\infty} \dfrac{f(x,s)}{s} = \ell \in (\lambda_1, +\infty)$ uniformemente em $x \in \Omega$.

Mais precisamente provamos os seguintes teoremas:

Teorema A *Suponha que* $0 < q < 1$, $(h_1), (f_0) - (f_3)$ *e que existe* $v \in H_0^1(\Omega)$ *tal que*

$$(h_2) \qquad \int_\Omega h(x)(v^+)^{q+1}dx > 0.$$

Então existe uma constante $m = m(\mu, q, f, N, \Omega) > 0$ *tal que, se* $|h|_\infty < m$, *o problema* (P) *tem uma solução fraca* $v_1 \in H_0^1(\Omega)$ *tal que* $I(v_1) < 0$. *Além disso, se* $h(x) \geq 0$, *então* $v_1 > 0$ *q.t.p. em* Ω.

Teorema B *Suponha que* $0 < q < 1, (h_1), (f_0) - (f_3)$. *Então existe uma constante* $m = m(\mu, q, f, N, \Omega) > 0$ *tal que, se* $|h|_\infty < m$, *o problema* (P) *tem uma solução fraca* $v_2 \in H_0^1(\Omega)$ *tal que* $I(v_2) > 0$. *Além disso, se* $h(x) \geq 0$, *então* $v_2 > 0$ *q.t.p. em* Ω.

Para provar o Teorema A, tomamos uma bola $\overline{B}_\rho \subset H_0^1(\Omega)$ centrada na origem e provamos que o funcional I restrito a $\overline{B}_\rho$ é limitado inferiormente e semicontínuo inferiormente. Definimos então o ínfimo de I, c_1, em $\overline{B}_\rho$. Tomamos uma sequência $(u_n) \subset \overline{B}_\rho$ tal que $I(u_n) \to c_1$ e, usando o Princípio Variacional de Ekeland, mostramos que $I'(u_n) \to 0$ e também que (u_n) é uma sequência de Palais-Smale no nível c_1 limitada. Feito isso, provamos que existe uma subsequência de (u_n) que converge para um ponto crítico de I no nível c_1.

O Teorema B nos dá uma solução fraca de (P) diferente da solução fraca encontrada no Teorema A. Usamos os Lemas 2.3 e 2.4, para encontrar uma sequência de Palais-Smale no nível c. Mostramos que essa sequência é limitada, implicando que o funcional I definido acima, satisfaz as hipóteses do Teorema do Passo da Montanha, encontrando assim um ponto crítico para I.

Observe que, como $I(v_1) < 0 < I(v_2)$, as duas soluções obtidas são distintas. Logo como consequência temos o seguinte corolário:

Corolário *Sob as condições do Teorema A, existe uma constante* $m > 0$ *tal que, se* $|h|_\infty < m$, *o problema* (P) *possui pelo menos duas soluções fracas* $v_1, v_2 \in H_0^1(\Omega)$ *tal que* $I(v_1) < 0 < I(v_2)$. *Além disso, se* $h(x) \geq 0$, *então* $v_1, v_2 > 0$ *q.t.p. em* Ω.

No **Capítulo 3**, estudamos o caso superlinear e subcrítico, isto é,

$(\widehat{f_3})$ $\displaystyle\lim_{s\to\infty}\frac{f(x,s)}{s}=\infty$ uniformemente em $x\in\Omega$;

(f_4) existe $k\in(1,2^*-1)$ tal que $\displaystyle\lim_{s\to\infty}\frac{f(x,s)}{s^k}=0.$

Nesse caso, vamos precisar de mais regularidade e monotonicidade para f

$(\widehat{f_0})$ $f\in C^1(\Omega\times\mathbb{R},\mathbb{R}^+)$;

(f_5) $\dfrac{f(x,s)}{s}$ é não decrescente em $s>0$ para todo $x\in\Omega$.

Provamos os seguintes teoremas:

Teorema C *Suponha* $(h_1),(\widehat{f_0}),(f_1),(f_2),(\widehat{f_3}),(f_4),(f_5)$ *e que h satisfaz*

(h_3) $$h\not\leq 0.$$

Então o problema (P) possui pelo menos uma solução fraca.

Observe que (h_2) e (h_3) são imcompatíveis. No Teorema C assumimos (h_3) e não existe restrição na norma de h em L^∞, contudo obtemos somente uma solução fraca de (P). Quando (h_2) é assumida e a norma de h é pequena, obtemos uma versão dos Teoremas A e B para o caso em que f é superlinear.

Teorema D *Suponha* $(h_1),(h_2),(\widehat{f_0}),(f_1),(f_2),(\widehat{f_3}),(f_4),(f_5)$. *Suponha ainda que*

(f_6) *Existem $\sigma\in(0,1)$ e $\tau>0$ com $\sigma>q+(1+q)\tau$ tais que*

(i) $\displaystyle\lim_{s\to\infty}\frac{f(x,s)}{s^{1+\tau}}=0$ *uniformemente em* $x\in\Omega$;

(ii) $\displaystyle\lim_{s\to\infty}\frac{f(x,s)s-2F(x,s)}{s^{1+\sigma}}=\omega\in(0,\infty]$ *uniformemente em* $x\in\Omega$.

Então existe $m>0$ tal que, se $|h|_\infty<m$, o problema (P) possui duas soluções fracas $v_1,\ v_2\in H_0^1(\Omega)$ com $I(v_1)<0<I(v_2)$. Além disso, se $h(x)\geq 0$ então $v_1,v_2>0$ q.t.p. em Ω.

Para a prova dos Teoremas C e D usamos o Teorema do Passo da Montanha com a condição de Cerami no nível c. Mostramos que o funcional I satisfaz as condições geométricas do Teorema do Passo da Montanha. Então tomamos uma sequência de Cerami no nível c e provamos que essa sequência é limitada. A prova segue de maneira análoga à prova do Teorema B.

A seguir daremos alguns exemplos relativos aos teoremas anteriores.

Exemplo 1: Para que (h_2) seja satisfeita é suficiente que exista $x_0 \in \Omega$ tal que $h(x_0) > 0$. Neste caso, como h é contínua, existe $\delta > 0$ tal que $h > 0$ em $B_\delta(x_0) \subseteq \Omega$ e podemos tomar $v \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ uma função não negativa tal que $v > 0$ em $B_\delta(x_0)$. Em particular, nos Teoremas A, B e D podemos tomar $h \equiv \lambda$ com $\lambda > 0$ suficientemente pequeno, como no problema (P_2).

Exemplo 2: Para $\mu \in [0, \lambda_1)$ e $\ell \in (\lambda_1, \infty)$ a função

$$f(x,s) = \begin{cases} \mu s & \text{se} \quad 0 \leq s < t, \\ \ell s & \text{se} \quad s \geq t, \\ 0, & \text{se} \quad s \leq 0. \end{cases}$$

satisfaz as hipóteses do Teorema A e do Teorema B.

Exemplo 3: Considere a função dada por $f(x,s) = |s|^{p-2}s$ onde $1 < p < 2^* - 1$. Então f satisfaz as hipóteses $(\widehat{f_0}), (f_1), (f_2), (\widehat{f_3})$ e (f_5) e para f satisfazer (f_4) basta tomar $p < k < 2^* - 1$. Dessa forma, f satisfaz as hipóteses do Teorema C.

Exemplo 4: Defina $f(x,s) = \begin{cases} s\ln(s+1), & \text{se} \quad s \geq 0, \\ 0, & \text{se} \quad s \leq 0. \end{cases}$

Então f satisfaz $(\widehat{f_0}), (f_1), (f_2), (\widehat{f_3}), (f_4)$ e (f_5). Além disso, usando L'Hospital temos que para todo $\tau > 0$

$$\lim_{s\to\infty} \frac{s\ln(s+1)}{s^{1+\tau}} = 0$$

e portanto, f satisfaz (f_6)(i). Finalmente, como

$$F(x,s) = \frac{s^2}{2}\ln(s+1) - \frac{1}{2}\ln(s+1) - \frac{s^2}{4} + \frac{s}{2},$$

então para todo $\sigma \in (0,1)$ vale

$$\begin{aligned} \lim_{s\to\infty} \frac{f(x,s)s - 2F(x,s)}{s^{1+\sigma}} &= \lim_{s\to\infty} \frac{\ln(s+1)}{s^{1+\sigma}} + \frac{s^2}{2s^{1+\sigma}} - \frac{s}{s^{1+\sigma}} \\ &= \lim_{s\to\infty} \frac{\ln(s+1)}{s^{1+\sigma}} + \frac{1}{2}s^{1-\sigma} - \frac{1}{s^\sigma} = \infty, \end{aligned}$$

isto é, f satisfaz (f_6)(ii).

Nos **Apêndices**, apresentamos alguns resultados e teoremas que foram utilizados no decorrer do trabalho.

Capítulo 1

Resultados Abstratos

Nosso objetivo neste capítulo é demonstrar o Princípio Variacional de Ekeland [8] e o Teorema do Passo da Montanha devido a Ambrosetti-Rabinowitz [4], que são teoremas importantes para encontrar soluções de certas equações elípticas.

1.1 Princípio Variacional de Ekeland

Teorema 1.1 (Princípio Variacional de Ekeland) *Seja* $M = (M, d)$ *um espaço métrico e seja* $F : M \to \mathbb{R}$ *uma função semicontínua inferiormente e limitada inferiormente. Sejam* $\epsilon > 0$ *e* $u \in M$ *tais que*

$$F(u) \leq \inf_M F + \epsilon.$$

Então existe $v \in M$ *tal que*

$$F(v) \leq F(u), \ d(u, v) \leq 1$$

e, para cada $w \neq v$ *em* M,

$$F(w) > F(v) - \epsilon d(v, w).$$

Demonstração: Sejam $w, v \in M$ e defina a seguinte relação

$$w \sim v \quad \text{se, e somente se,} \quad F(w) + \epsilon d(v, w) \leq F(v).$$

Observe que esta relação é reflexiva, antissimétrica e transitiva. Mais especificamente, para quaisquer $v, w, x \in M$ tem-se

(R_1) $v \sim v$;

(R_2) se $v \sim w$ e $w \sim v$, então $v = w$;

(R_3) se $v \sim w$ e $w \sim x$, então $v \sim x$.

Vamos verificar as três propriedades acima:
(R_1): Como $F(w) + \epsilon d(w, w) = F(w) \leq F(w)$, temos que $w \sim w$. Logo $\sim$ é reflexiva.

(R_2): Se $v \sim w$ e $w \sim v$, então

$$F(v) + \epsilon d(w, v) \leq F(w) \quad \text{e} \quad F(w) + \epsilon d(v, w) \leq F(v).$$

Segue que,

$$\begin{aligned} F(v) + \epsilon d(w, v) &\leq F(w) \\ &\leq F(w) + \epsilon d(v, w) \\ &\leq F(v) \end{aligned}$$

o que implica $d(w, v) = 0$ e, portanto, $w = v$. Assim $\sim$ é antissimétrica.

(R_3): Se $v \sim w$ e $w \sim x$ então

$$F(v) + \epsilon d(w, v) \leq F(w) \quad \text{e} \quad F(w) + \epsilon d(x, w) \leq F(x).$$

Segue daí e da desigualdade triangular que,

$$\begin{aligned} F(v) + \epsilon d(v, x) &\leq F(v) + \epsilon d(v, w) + \epsilon d(w, x) \\ &\leq F(w) + \epsilon d(w, x) \\ &\leq F(x). \end{aligned}$$

Dessa forma $v \sim x$, o que mostra que $\sim$ é transitiva.

Como $\sim$ satisfaz $(R_1), (R_2)$ e (R_3) concluímos que $\sim$ é uma relação de ordem parcial em M.

Construiremos indutivamente uma sequência $(u_n) \subset M$ como segue. Seja $u \in M$ dado no enunciado do teorema, considere $u_0 = u$ e defina

$$S_0 = \{w \in M : w \sim u_0\}.$$

Lembrando que $u_0 \sim u_0$, temos que $S_0 \neq \emptyset$. Além disso, como F é limitada inferiormente em S_0, podemos tomar $u_1 \in S_0$ tal que

$$F(u_1) \leq \inf_{S_0} F + 1.$$

Suponha que $u_n \in M$ seja conhecido e considere

$$S_n = \{w \in M : w \sim u_n\}.$$

Tome $u_{n+1} \in S_n$ tal que

$$F(u_{n+1}) \leq \inf_{S_n} F + \frac{1}{n+1}.$$

Assim, $S_0 \supset S_1 \supset S_2 \supset \cdots \supset S_n \supset \cdots$. De fato, se $x \in S_1$ então $x \sim u_1$. Como $u_1 \in S_0$ então $u_1 \sim u_0$, assim, por transitividade, $x \sim u_0$. Logo $x \in S_0$ e, portanto, $S_1 \subset S_0$. Usando o mesmo raciocínio concluímos que $S_0 \supset S_1 \supset S_2 \supset \cdots \supset S_n \supset \cdots$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, S_n é fechado. De fato, seja $(x_j) \subset S_n$ tal que $x_j \to x \in M$. Então $x_j \sim u_n$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Logo,

$$F(x_j) + \epsilon d(u_n, x_j) \leq F(u_n).$$

Como F é semicontínua inferiormente temos que

$$F(x) \leq \liminf_{j\to\infty} F(x_j).$$

Isso e a continuidade da distância d implica que

$$\begin{aligned} F(u_n) &= \liminf_{j\to\infty} F(u_n) \\ &\geq \liminf_{j\to\infty} [F(x_j) + \epsilon d(u_n, x_j)] \\ &\geq F(x) + \epsilon d(u_n, x). \end{aligned}$$

Assim, $x \sim u_n$, donde $x \in S_n$. Portanto, S_n é fechado.

Observe ainda que o diâmetro de S_n tende a zero quando $n \to \infty$. De fato, se $x \in S_{n+1} \subset S_n$, temos que

$$\inf_{S_n} F \leq \inf_{S_{n+1}} F \leq F(x).$$

Como $x \sim u_{n+1}$, temos

$$\begin{aligned} \epsilon d(x, u_{n+1}) &\leq F(u_{n+1}) - F(x) \\ &\leq \inf_{S_n} F + \frac{1}{n+1} - \inf_{S_n} F \\ &= \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Se $x, y \in S_{n+1}$, temos

$$\begin{aligned} d(x, y) &\leq d(x, u_{n+1}) + d(u_{n+1}, y) \\ &\leq \frac{1}{\epsilon(n+1)} + \frac{1}{\epsilon(n+1)} \\ &= \frac{2}{\epsilon(n+1)}. \end{aligned}$$

Tomando o supremo com $x, y \in S_{n+1}$, concluímos que $\operatorname{diam}(S_n) \leq \dfrac{2}{\epsilon(n+1)}$. Logo, $\operatorname{diam}(S_n) \to 0$ quando $n \to \infty$.

Visto que M é um espaço métrico completo, $\operatorname{diam}(S_n) \to 0$ quando $n \to \infty$, S_n é fechado e $S_0 \supset S_1 \supset S_2 \supset \cdots \supset S_n \cdots$, temos que existe um único $v \in M$ tal que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} S_n = v$ (cf. Proposição $C.1$). Em particular, $v \in S_0$, isto é, $v \sim u_0 = u$. Então segue

$$F(v) \leq F(u) - \epsilon d(u,v) \leq F(u)$$

e

$$\begin{aligned} d(u,v) &\leq \frac{1}{\epsilon}(F(u) - F(v)) \\ &\leq \frac{1}{\epsilon}\left(\inf_M F + \epsilon - \inf_M F\right) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Observe agora que se $w \neq v$, então $w \not\sim v$. De fato, suponha que $w \sim v$. Como $v \in S_0$, então $v \sim u_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Segue por transitividade que $w \sim u_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Dessa forma, $w \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} S_n$, o que implica que $w = v$ pois v é o único elemento que está em todos os conjuntos S_n. Logo $w \not\sim v$, isto é,

$$F(w) + \epsilon d(u,v) > F(v).$$

Isso conclui a prova do teorema.

□

1.2 Teorema do Passo da Montanha

Nesta seção demonstraremos o Teorema do Passo da Montanha, usando o Lema de Deformação Quantitativo. Esse teorema garante que, sob certas condições, é possível obter pontos críticos para um funcional.

Vamos denotar por X um espaço de Banach com norma $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|_{X'}$ a norma do dual de X.

Dado $I \in C^1(X,\mathbb{R})$, dizemos que $d \in \mathbb{R}$ é um valor crítico de I se existe $u \in X$ com $I'(u) = 0$ e $I(u) = d$. O conjunto de todos os pontos críticos no nível d será designado por

$$K_d = \{u \in X : I'(u) = 0 \quad \text{e} \quad I(u) = d\}.$$

Denotaremos por I^d o conjunto de todos os pontos em níveis menores ou iguais a d, isto é,

$$I^d = \{u \in X : I(u) \leq d\}.$$

Vamos primeiro recordar uma condição de compacidade, que é extramamente útil na demonstração de existência de pontos críticos de funcionais definidos em espaços de Banach. Um funcional $I \in C^1(X,\mathbb{R})$ satisfaz a condição de Palais-Smale no nível $d \in \mathbb{R}$, denotada por $(PS)_d$, se toda sequência $(u_n) \subset X$ tal que

$$I(u_n) \to d \quad \text{e} \quad \|I'(u_n)\|_{X'} \to 0, \tag{1.1}$$

possui subsequência convergente.

Teorema 1.2 (Teorema do Passo da Montanha) *Seja X um espaço de Banach, $I \in C^1(X,\mathbb{R})$. Suponha que $I(0) = 0$ e I satisfaz*

(I_1) *existem constantes $\rho > 0,\ \alpha > 0$ tais que $I|_{\partial B_\rho(0)} \geq \alpha$;*

(I_2) *existe $e \in X$ tal que $\|e\| > \rho$ e $I(e) \leq I(0)$.*

Seja

$$c = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} I(\gamma(t)),$$

onde

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1],X) : \gamma(0) = 0 \quad e \quad \gamma(1) = e\}.$$

Se I satisfaz $(PS)_c$, então c é um valor crítico de I.

Para a prova do Teorema do Passo da Montanha, vamos precisar do seguinte resultado.

Lema 1.1 (Lema de Deformação Quantitativo) *Seja X um espaço de Banach, $I \in C^1(X,\mathbb{R}), c \in \mathbb{R}$ e $\epsilon > 0$ tais que*

$$||I'(u)||_{X'} \geq 2\epsilon,\ \forall\ u\ \in\ I^{-1}([c-2\epsilon, c+2\epsilon]).$$

Então existe uma função $\eta \in C([0,1]\times X, X)$ tal que

(i) $\eta(0,u) = u$ *para todo* $u \in X$;

(ii) $\eta(t,u) = u,$ *para todo* $(t,u) \notin [0,1]\times I^{-1}([c-2\epsilon, c+2\epsilon])$;

(iii) $\eta(1, I^{c+\epsilon}) \subset I^{c-\epsilon}$.

Demonstração: Vamos definir

$$A = I^{-1}([c-2\epsilon, c+2\epsilon])$$

$$B = I^{-1}([c-\epsilon, c+\epsilon])$$

e $\psi : X \to \mathbb{R}$ dada por

$$\psi(u) = \frac{d(u, X\backslash A)}{d(u, X\backslash A) + d(u,B)},$$

onde d é a função distância. Temos que ψ está bem definida pois, como $A \subset X$ e $B \subset X$ são conjuntos fechados e disjuntos, então para todo $u \in X$, $d(u, X\backslash A) + d(u, B) > 0$. De fato, caso contrário, existiria $u \in X$ tal que $d(u, X\backslash A) + d(u, B) = 0$, donde $d(u, X\backslash A) = d(u, B) = 0$. De $d(u, B) = 0$, segue que $u \in \overline{B} = B$, pois B é fechado. Daí

$$c - \epsilon \leq I(u) \leq c + \epsilon. \tag{1.2}$$

Por outro lado, como $d(u, X\backslash A) = 0$, então $u \in \overline{X\backslash A}$. Logo existe uma sequência $(u_n) \subset X\backslash A$ tal que $u_n \to u$. Mas como $(u_n) \subset X\backslash A$, então para alguma subsequência $(u_{n_j}) \subseteq u_n$, temos que

$$I(u_{n_j}) > c + 2\epsilon \quad \text{ou} \quad I(u_{n_j}) < c - 2\epsilon.$$

Como I é contínua, passando ao limite, obtemos

$$I(u) \geq c + 2\epsilon \quad \text{ou} \quad I(u) \leq c - 2\epsilon,$$

o que contraria (1.2). Logo o denominador na expressão que define ψ é sempre positivo.

Observe que, como

$$0 \leq d(u, X\backslash A) \leq d(u, X\backslash A) + d(u, B),$$

segue que

$$\frac{d(u, X\backslash A)}{d(u, X\backslash A) + d(x, B)} \leq 1.$$

Logo, $0 \leq \psi(u) \leq 1$ para todo $u \in X$. Além disso,

$$\psi(u) = \begin{cases} 1, & \text{se } u \in B; \\ 0, & \text{se } u \in X\backslash A. \end{cases}$$

Afirmação 1: ψ é localmente lipschitziana. (cf. Definição $C.3$)

De fato, vamos denotar, para cada $T \subseteq X$ e $u \in X$, $d_T(u) = d(u, T)$. Fixado $u \in X$, temos para todo $v \in X$,

$$\begin{aligned}
|\psi(u)-\psi(v)| &= \left|\frac{d_{X\setminus A}(u)}{d_{X\setminus A}(u)+d_B(u)} - \frac{d_{X\setminus A}(v)}{d_{X\setminus A}(v)+d_B(v)}\right| \\
&= \left|\frac{d_{X\setminus A}(u)[d_{X\setminus A}(v)+d_B(v)] - d_{X\setminus A}(v)[d_{X\setminus A}(u)+d_B(u)]}{[d_{X\setminus A}(u)+d_B(u)][d_{X\setminus A}(v)+d_B(v)]}\right| \\
&= \left|\frac{d_{X\setminus A}(u)d_B(v) - d_{X\setminus A}(v)d_B(u)}{[d_{X\setminus A}(u)+d_B(u)][d_{X\setminus A}(v)+d_B(v)]}\right| \\
&= \left|\frac{d_{X\setminus A}(u)d_B(v) + d_B(v)[d_{X\setminus A}(v)-d_{X\setminus A}(v)] - d_{X\setminus A}(v)d_B(u)}{[d_{X\setminus A}(u)+d_B(u)][d_{X\setminus A}(v)+d_B(v)]}\right| \\
&= \left|\frac{d_B(v)[d_{X\setminus A}(u)-d_{X\setminus A}(v)] + d_{X\setminus A}(v)[d_B(v)-d_B(u)]}{[d_{X\setminus A}(u)+d_B(u)][d_{X\setminus A}(v)+d_B(v)]}\right| \\
&\leq \frac{d_B(v)|d_{X\setminus A}(u)-d_{X\setminus A}(v)| + d_{X\setminus A}(v)|d_B(v)-d_B(u)|}{[d_{X\setminus A}(u)+d_B(u)][d_{X\setminus A}(v)+d(v,B)]}
\end{aligned}$$

Como a função distância é uma contração fraca (cf. Proposição C.2) segue que,

$$|\psi(u)-\psi(v)| \leq \frac{\|u-v\|\,[d_B(v)+d_{X\setminus A}(v)]}{[d_{X\setminus A}(u)+d_B(u)][d_{X\setminus A}(v)+d_B(v)]} = \frac{\|u-v\|}{d_{X\setminus A}(u)+d_B(u)}.$$

Notemos que a aplicação $u \mapsto d(u, X\setminus A) + d(u, B)$ é limitada inferiormante por uma constante positiva em cada subconjunto limitado de X. Pois como $d(u, X\setminus A) + d(u, B) > 0$ para todo $u \in X$, então existe $K > 0$ e uma vizinhança V_u de u tal que $d(w, X\setminus A) + d(w, B) \geq \frac{1}{K} > 0$ para todo $w \in V_u$. Dessa forma, se $u_1, u_2 \in V_u$, então

$$|\psi(u_1)-\psi(u_2)| \leq K||u_1-u_2||,$$

e portanto, ψ é localmente lipschitziana.

Como $I \in C^1(X,\mathbb{R})$, então pelo Lema $A.1$ existe um campo pseudogradiente para I em $\widetilde{X} = \{u \in X : I'(u) \neq 0\}$, isto é, uma aplicação localmente lipschitiziana $g : \widetilde{X} \to X$ tal que, para todo $u \in \widetilde{X}$,

(PG1) $\|g(u)\| \leq 2\,\|I'(u)\|_{X'}$;

(PG2) $I'(u)g(u) \geq \|I'(u)\|^2_{X'}$.

Considere a aplicação $f : X \to X$ dada por

$$f(u) = \begin{cases} -\psi(u)\dfrac{g(u)}{\|g(u)\|^2}, & \text{se } u \in A, \\ 0, & \text{se } u \in X\setminus A. \end{cases}$$

Afirmação 2: f é limitada e localmente lipschitziana.

Por (PG2), para $u \in A$ temos

$$\|I'(u)\|_{X'}^2 \leq I'(u)g(u) \leq \|I'(u)\|_{X'} \|g(u)\|.$$

Se $u \in A$ então $I'(u) \neq 0$, e portanto,

$$\|I'(u)\|_{X'} \leq \|g(u)\|.$$

Logo,

$$\frac{1}{\|g(u)\|} \leq \frac{1}{\|I'(u)\|_{X'}} \leq \frac{1}{2\epsilon}. \tag{1.3}$$

Dessa forma, dado $u \in A$, temos

$$\|f(u)\| = |-\psi(u)| \frac{\|g(u)\|}{\|g(u)\|^2} \leq \frac{1}{\|g(u)\|} \leq \frac{1}{\|I'(u)\|_{X'}} \leq \frac{1}{2\epsilon}. \tag{1.4}$$

Além disso, se $u \notin A$, então $f(u) = 0$. Logo, f é limitada.

Observe que, dado $u \in X$ existe uma vizinhança $V_u \subseteq X$ tal que ψ e g são localmente lipschitizianas em V_u. Sendo assim, dados $u_1, u_2 \in V_u$, temos:

Caso 1: se $u_1, u_2 \in X \backslash A$, segue que

$$||f(u_1) - f(u_2)|| = 0 \leq ||u_1 - u_2||.$$

Caso 2: se $u_1 \in X \backslash A$ e $u_2 \in A$, então usando (1.3) e o fato de ψ ser localmente lipschitiziana, segue que,

$$\begin{aligned}
\|f(u_1) - f(u_2)\| &= \left\| -\psi(u_2) \frac{g(u_2)}{||g(u_2)||^2} \right\| \\
&= \left\| -\psi(u_2) \frac{g(u_2)}{||g(u_2)||^2} + \psi(u_1) \frac{g(u_2)}{||g(u_2)||^2} \right\| \\
&= \frac{1}{||g(u_2)||} |\psi(u_1) - \psi(u_2)| \\
&\leq \frac{1}{2\epsilon} \|u_1 - u_2\|.
\end{aligned}$$

Caso 3: se $u_1, u_2 \in A$, note que

$$\begin{aligned}
\|f(u_1) - f(u_2)\| &= \left\| -\psi(u_1) \tfrac{g(u_1)}{\|g(u_1)\|^2} + \psi(u_2) \tfrac{g(u_2)}{\|g(u_2)\|^2} \right\| \\
&= \left\| -\psi(u_1) \tfrac{g(u_1)}{\|g(u_1)\|^2} \pm \psi(u_1) \tfrac{g(u_2)}{\|g(u_2)\|^2} + \psi(u_2) \tfrac{g(u_2)}{\|g(u_2)\|^2} \right\| \\
&\leq |\psi(u_1)| \left\| \tfrac{g(u_1)}{\|g(u_1)\|^2} - \tfrac{g(u_2)}{\|g(u_2)\|^2} \right\| + \left\| \tfrac{g(u_2)}{\|g(u_2)\|^2} \right\| |\psi(u_1) - \psi(u_2)| \\
&\leq \left\| \tfrac{g(u_1)}{\|g(u_1)\|^2} - \tfrac{g(u_2)}{\|g(u_2)\|^2} \right\| + \tfrac{1}{2\epsilon} |\psi(u_1) - \psi(u_2)|.
\end{aligned}$$

Como ψ é localmente lipschitiziana, segue que

$$|\psi(u_1) - \psi(u_2)| \leq C_1 \|u_1 - u_2\| .$$

Por outro lado, usando o fato de g ser localmente lipschitiziana, temos que

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{g(u_1)}{\|g(u_1)\|^2} - \frac{g(u_2)}{\|g(u_2)\|^2} \right\| &= \left\| \frac{g(u_1)}{\|g(u_1)\|^2} - \frac{g(u_1)}{\|g(u_2)\|^2} + \frac{g(u_1)}{\|g(u_2)\|^2} - \frac{g(u_2)}{\|g(u_2)\|^2} \right\| \\
&= \|g(u_1)\| \left\| \frac{1}{\|g(u_1)\|^2} - \frac{1}{\|g(u_2)\|^2} \right\| + \frac{1}{\|g(u_2)\|^2} \|g(u_1) - g(u_2)\| \\
&\leq \|g(u_1)\| \left\| \frac{\|g(u_2)\|^2 - \|g(u_1)\|^2}{\|g(u_1)\|^2 \|g(u_2)\|^2} \right\| + \frac{1}{4\epsilon^2} \|g(u_1) - g(u_2)\| \\
&= \frac{|\langle g(u_2) - g(u_1), g(u_2) + g(u_1) \rangle|}{\|g(u_1)\|^2 \|g(u_2)\|^2} + \frac{1}{4\epsilon^2} \|g(u_1) - g(u_2)\| \\
&\leq \frac{\|g(u_2) - g(u_1)\| \; \|g(u_2) + g(u_1)\|}{\|g(u_1)\|^2 \|g(u_2)\|^2} + \frac{1}{4\epsilon^2} \|g(u_1) - g(u_2)\| \\
&= \frac{\|g(u_2) + g(u_1)\|}{\|g(u_1)\|^2 \|g(u_2)\|^2} \|g(u_2) - g(u_1)\| + \frac{1}{4\epsilon^2} \|g(u_1) - g(u_2)\| \\
&= C_2 \|g(u_1) - g(u_2)\| \\
&\leq C_3 \|u_1 - u_2\| .
\end{aligned}$$

Sendo assim,

$$\|f(u_1) - f(u_2)\| \leq C \|u_1 - u_2\| .$$

Portanto, considerando os 3 casos acima, temos que f é localmente lipschitizana.

Considere agora, para cada $u \in X$ fixado, o problema de Cauchy

$$(PC)_u \qquad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\sigma(t,u) &= f(\sigma(t,u)) \\ \sigma(0,u) &= u \end{cases}$$

Como f é limitada e localmente lipschitziana, então $(PC)_u$ tem uma única solução contínua definida para t em um intervalo maximal $(t^-(u), t^+(u))$.

Afirmação 3: $t^+(u) = +\infty$ e $t^-(u) = -\infty$.

De fato, suponha por contradição que $t^+(u) < +\infty$. Seja $(t_n) \subset (-\infty, t^+(u))$ uma sequência tal que $t_n \to t^+(u)$. Como f é limitada, temos que

$$\begin{aligned}
\|\sigma(t_m,u)-\sigma(t_n,u)\| &= \left\|\int_{t_n}^{t_m}\frac{d}{ds}(\sigma(s,u))ds\right\| \\
&= \left\|\int_{t_n}^{t_m} f(\sigma(s,u))ds\right\| \\
&\leq \int_{t_n}^{t_m}\|f(\sigma(s,u))\|\,ds \\
&\leq K\|t_m-t_n\| \longrightarrow 0 \quad \text{quando} \quad m,n\to\infty,
\end{aligned}$$

visto que $(t_n)\subset\mathbb{R}$ é uma sequência de Cauchy. Então $(\sigma(t_n,u))$ também é uma sequência de Cauchy em X. Portanto, $(\sigma(t_n,u))$ converge para algum $\widetilde{u}\in X$ quando $t_n\to t^+(u)$. Considerando agora o problema de Cauchy

$$(PC)_{\widetilde{u}} \qquad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\sigma(t,u) = f(\sigma(t,u)), \\ \sigma(t^+(u),u) = \widetilde{u} \end{cases}$$

obteríamos uma extensão de $\sigma(t,u)$ no intervalo $[t^+(u)-\delta, t^-(u)+\delta]$, para algum $\delta>0$. Mas isto é um absurdo pois, como já vimos, o intervalo $(t^+(u),t^-(u))$ é maximal. Analogamente provamos que $t^-(u)=-\infty$.

A dependência contínua de soluções do problema $(PC)_u$ com relação aos dados iniciais implica que σ é contínua em $\mathbb{R}\times X$. Sendo assim, podemos definir $\eta\in C([0,1]\times X,X)$ por

$$\eta(t,u)=\sigma(8\epsilon t,u). \tag{1.5}$$

Observe que $I(\sigma(\cdot,u))$ é não crescente para todo $u\in X$. De fato, note que se $\sigma(t,u)\in X\backslash A$, então $\psi(\sigma(t,u))=0$, donde $\dfrac{d}{dt}I(\sigma(t,u))=0$. Considerando agora $u\in A$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}I(\sigma(t,u)) &= I'(\sigma(t,u))\frac{d}{dt}\sigma(t,u) \\
&= I'(\sigma(t,u))f(\sigma(t,u)) \\
&= -I'(\sigma(t,u))\psi(\sigma(t,u))g(\sigma(t,u))\|g(\sigma(t,u))\|^{-2}.
\end{aligned}$$

Como ψ é não negativa, segue de (PG1) e (PG2) que

$$\frac{d}{dt}I(\sigma(t,u)) \leq -\frac{\psi(\sigma(t,u))}{4} \leq 0. \tag{1.6}$$

Logo, $\dfrac{d}{dt}I(\sigma(t,u))\leq 0$ para todo $u\in X$, e portanto, $I(\sigma(\cdot,u))$ é não crescente.

Vamos agora verificar que η definida como em (1.5) satisfaz (i)-(iii).

Por definição $\eta(0,u) = u$ para todo $u \in X$, e portanto, vale (i). Se $u \notin I^{-1}([c-2\epsilon, c+2\epsilon])$ então $u \in X \backslash A$, donde $f(u) = 0$. Daí $\sigma(t,u) = u$ é solução de $(PC)_u$. Segue da unicidade de soluções de $(PC)_u$ que $\eta(t,u) = \sigma(t,u) = u$ para todo $t \in [0,1]$. Logo, vale (ii).

Resta mostrar que $\eta(1, I^{c+\epsilon}) \subset I^{c-\epsilon}$. Dado $u \in I^{c+\epsilon}$, vamos dividir a prova de (iii) em dois casos:

Caso 1: existe $t_0 \in [0, 8\epsilon]$ tal que $I(\sigma(t_0,u)) < c - \epsilon$.

Neste caso, como $I(\sigma(t,u))$ é não crescente, temos

$$I(\sigma(t,u)) \leq I(\sigma(t_0,u)) < c - \epsilon,$$

para todo $t \geq t_0$. Em particular para $t = 8\epsilon$, obtemos:

$$I(\eta(1,u)) = I(\sigma(8\epsilon,u)) < c - \epsilon.$$

Caso 2: para todo $t \in [0, 8\epsilon]$ tem-se $\sigma(t,u) \in I^{-1}([c-\epsilon, c+\epsilon]) = B$.

Neste caso, usando (1.6),

$$\begin{aligned} I(\eta(1,u)) &= I(\sigma(8\epsilon,u)) \\ &= I(u) + \int_0^{8\epsilon} \frac{d}{dt} I(\sigma(t,u))dt \\ &\leq I(u) - \frac{1}{4}\int_0^{8\epsilon} \psi(\sigma(t,u))dt. \end{aligned}$$

Como $\sigma(t,u) \in B$ para todo $t \in [0, 8\epsilon]$, temos que $\psi(\sigma(t,u)) = 1$ em $[0, 8\epsilon]$ e, portanto,

$$\begin{aligned} I(\eta(1,u)) &\leq I(u) - \frac{1}{4}\int_0^{8\epsilon} \psi(\sigma(t,u))dt \\ &= I(u) - \frac{1}{4}\int_0^{8\epsilon} 1dt \\ &\leq c + \epsilon - 2\epsilon \\ &= c - \epsilon. \end{aligned}$$

Os dois casos acima mostram que $\eta(1, I^{c+\epsilon}) \subset I^{c-\epsilon}$. O lema está provado.

$\square$

Teorema 1.3 *Seja X um espaço de Banach, $I \in C^1(X, \mathbb{R})$. Suponha que $I(0) = 0$ e I satisfaz*

(I_1) *existem constantes $\rho > 0$, $\alpha > 0$ tais que $I|_{\partial B_\rho(0)} \geq \alpha$;*

(I_2) *existe $e \in X$ tal que $\|e\| > \rho$ e $I(e) \leq I(0)$.*

Então, para cada $\epsilon > 0$, existe $u \in X$ tal que

(a) $c - 2\epsilon \leq I(u) \leq c + 2\epsilon$;

(b) $\|I'(u)\|_{X'} < 2\epsilon$

onde

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I(\gamma(t))$$

e

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], X) : \gamma(0) = 0 \quad e \quad \gamma(1) = e\}.$$

Demonstração: Observe primeiramente que, para cada $\gamma \in \Gamma$,

$$\max_{t \in [0,1]} I(\gamma(t)) \geq \alpha.$$

De fato, se $e \in X$ é dado por (I_2), então $e \notin B_\rho(0)$. Como $\gamma \in \Gamma$, existe $t_0 \in [0,1]$ tal que $\gamma(t_0) \in \partial B_\rho(0)$, isto é, $\gamma([0,1]) \cap \partial B_\rho(0) \neq \emptyset$. Por (I_1), temos que

$$\inf_{w \in \partial B_\rho(0)} I(w) \geq \alpha.$$

Mas

$$\max_{t \in [0,1]} I(\gamma(t)) \geq I(\gamma(t_0)) \geq \inf_{w \in \partial B_\rho(0)} I(w) \geq \alpha.$$

Logo,

$$\max_{t \in [0,1]} I(\gamma(t)) \geq \alpha.$$

Tomando o ínfimo para $\gamma \in \Gamma$, temos que

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I(\gamma(t)) \geq \alpha > 0,$$

isto é, $c \geq \alpha > 0$.

Suponha, por absurdo, que a conclusão do teorema seja falsa. Então existe $\epsilon > 0$ tal que para todo $u \in I^{-1}([c - 2\epsilon, c + 2\epsilon])$ tem-se $\|I'(u)\|_{X'} \geq 2\epsilon$. Observe que podemos supor, sem perda de generalidade, que $c - 2\epsilon > 0$. De fato, basta notar que se $\epsilon_0 \in (0, \epsilon)$, então como $I^{-1}([c - 2\epsilon_0, c + 2\epsilon_0]) \subset I^{-1}([c - 2\epsilon, c + 2\epsilon])$, tem-se $\|I'(u)\|_{X'} \geq 2\epsilon > 2\epsilon_0$. Então, diminuindo ϵ se necessário, podemos assumir $I(e) \leq I(0) = 0 < c - 2\epsilon$.

Pelo Lema de Deformação, existe uma função $\eta \in C([0,1] \times X, X)$ tal que

(i) $\eta(t, u) = u$ para todo $u \notin I^{-1}([c - 2\epsilon, c + 2\epsilon])$;

(ii) $\eta(1, I^{c+\epsilon}) \subset I^{c-\epsilon}$.

Dado $\gamma \in \Gamma$, considere $h : [0,1] \to X$ dada por $h(t) = \eta(1, \gamma(t))$. Como $\eta \in C([0,1] \times X, X)$ e $\gamma \in C([0,1], X)$, então $h \in C([0,1], X)$. Além disso, como $0, e \notin I^{-1}[c - 2\epsilon, c + 2\epsilon]$, segue do item (i) acima que

$$h(0) = \eta(1, \gamma(0)) = \eta(1, 0) = 0,$$

e

$$h(1) = \eta(1, \gamma(1)) = \eta(1, e) = e.$$

Logo $h \in \Gamma$, e portanto,

$$c \leq \max_{t \in [0,1]} I(h(t)).$$

Usando a definição de c, existe $\widetilde{\gamma} \in \Gamma$ tal que

$$\max_{t \in [0,1]} I(\widetilde{\gamma}(t)) \leq c + \epsilon.$$

Então $\widetilde{\gamma}(t) \in I^{c+\epsilon}$ e segue de (ii) do Lema de Deformação que $\eta(1, \widetilde{\gamma}(t)) \in I^{c-\epsilon}$. Logo, $h(t) = \eta(1, \widetilde{\gamma}(t)) \in I^{c-\epsilon}$, daí

$$\max_{t \in [0,1]} I(h(t)) \leq c - \epsilon.$$

Sendo assim,

$$c \leq \max_{t \in [0,1]} I(h(t)) \leq c - \epsilon,$$

o que é uma contradição.

□

Estamos prontos para provar o Teorema do Passo da Montanha.

Demonstração do Teorema 1.2: Tomando $\epsilon_n = \dfrac{1}{n} > 0$ e aplicando o Teorema 1.3, obtemos $(u_n) \subset X$ tal que

$$c - \epsilon_n \leq I(u_n) \leq c + \epsilon_n,$$

e

$$\|I'(u_n)\|_{X'} < 2\epsilon_n.$$

Como $\epsilon_n \to 0$ quando $n \to \infty$, $(u_n) \subset X$ é uma sequência de Palais-Smale no nível c. Logo, como I satisfaz a condição $(PS)_c$, existe uma subsequência $(u_{n_j}) \subset (u_n)$ tal que $u_{n_j} \to u \in X$. Como $I \in C^1(X, R)$, então $I(u) = c$ e $I'(u) = 0$, ou seja, c é um valor crítico de I.

□

No que segue, apresentamos uma versão do Teorema do Passo da Montanha com uma condição de compacidade um pouco mais geral, cuja prova pode ser encontrada em [5]. Lembremos inicialmente que um funcional $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ satisfaz a condição de Cerami no nível $d \in \mathbb{R}$, denotada por $(Ce)_d$, se toda sequência $(u_n) \subset X$ cumprindo

$$I(u_n) \to d \;\text{ e }\; (1 + \|u_n\|) \, \|I'(u_n)\|_{X'} \to 0, \tag{1.7}$$

possui subsequência convergente.

Teorema 1.4 *Seja X um espaço de Banach, $I \in C^1(X, \mathbb{R})$. Suponha que $I(0) = 0$ e I satisfaz*

(I_1) existem constantes $\rho > 0$, $\alpha > 0$ tais que $I|_{\partial B_\rho(0)} \geq \alpha$;

(I_2) existe $e \in X$ tal que $\|e\| > \rho$ e $I(e) \leq I(0)$.

Seja

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I(\gamma(t)),$$

onde

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], X) : \gamma(0) = 0 \quad e \quad \gamma(1) = e\}.$$

Se I satisfaz $(Ce)_c$, então c é um valor crítico de I.

Capítulo 2

Caso Assintoticamente Linear

Neste capítulo vamos estudar a existência de solução fraca para o problema

$$(P) \qquad \begin{cases} -\Delta u &= h(x)u^q + f(x,u), \quad & x \in \Omega, \\ u &\geq 0, & \Omega, \\ u &= 0, & \partial\Omega \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio suave e limitado, $N \geq 3$, $u \in H_0^1(\Omega)$, $0 < q < 1$ e as funções h e f satisfazem as seguintes condições:

(h_1) $h \in C(\overline{\Omega}),\ h(x) \neq 0$;

(f_0) $f \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$;

(f_1) $f(x,0) = 0$ e $f(x,s) \geq (\neq)\ 0 \quad \forall\ s \geq 0,\ x \in \Omega$;

(f_2) $\displaystyle\lim_{s\to 0^+} \frac{f(x,s)}{s} = \mu \in [0, \lambda_1)$ uniformemente em $x \in \Omega$;

(f_3) $\displaystyle\lim_{s\to \infty} \frac{f(x,s)}{s} = \ell \in (\lambda_1, +\infty)$ uniformemente em $x \in \Omega$;

onde λ_1 é o primeiro autovalor associado ao problema

$$\begin{cases} -\Delta u &= \lambda u, \quad x \in \Omega, \\ u &= 0, \quad x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Conforme explicado na introdução, as soluções fracas do problema (P) são os pontos críticos do funcional $I : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ dado por

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx - \frac{1}{q+1}\int_\Omega h(x)(u^+)^{q+1} dx - \int_\Omega F(x,u^+)dx \tag{2.1}$$

onde $u^+ = \max\{u, 0\}$ e $F(x,u) = \displaystyle\int_0^u f(x,s)ds$.

Os principais resultados deste capítulo são:

Teorema A *Suponha que* $0 < q < 1$, $(h_1), (f_0) - (f_3)$ *e que existe* $v \in H_0^1(\Omega)$ *tal que*

$$(h_2) \qquad \int_\Omega h(x)(v^+)^{q+1}dx \;\; > \;\; 0.$$

Então existe uma constante $m = m(\mu, q, f, N, \Omega) > 0$ *tal que, se* $|h|_\infty < m$, *o problema* (P) *tem uma solução fraca* $v_1 \in H_0^1(\Omega)$ *tal que* $I(v_1) < 0$. *Além disso, se* $h(x) \geq 0$, *então* $v_1 > 0$ *q.t.p. em* Ω.

Teorema B *Suponha que* $0 < q < 1, (h_1), (f_0) - (f_3)$. *Então existe uma constante* $m = m(\mu, q, f, N, \Omega) > 0$ *tal que se* $|h|_\infty < m$, *o problema* (P) *tem uma solução fraca* $v_2 \in H_0^1(\Omega)$ *tal que* $I(v_2) > 0$. *Além disso, se* $h(x) \geq 0$, *então* $v_2 > 0$ *q.t.p. em* Ω.

No que segue, denotamos por H o espaço $H_0^1(\Omega)$ munido com a norma

$$\|u\| = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

e H^* o dual de $H_0^1(\Omega)$. Vamos escrever $C_0^\infty(\Omega)$ para indicar o conjunto das funções de classe C^∞ que tem suporte compacto em Ω e indicaremos por $|u|_r$ a L^r-norma de uma função $u \in L^r(\Omega)$.

Vamos enunciar e provar alguns lemas que serão necessários para demonstrar os Teoremas A e B. Observe incialmente que fixado $k \in (1, 2^* - 1)$ segue de (f_3) que

$$(f_4) \;\; \lim_{s \to \infty} \frac{f(x,s)}{s^k} = \lim_{s \to \infty} \frac{f(x,s)}{s} \frac{1}{s^{k-1}} = 0 \text{ uniformemente em } x \in \Omega.$$

Começamos com algumas estimativas para f e sua primitiva.

Lema 2.1 *Suponha* $(f_0) - (f_2)$ *e* (f_4). *Então para todo* $\epsilon > 0$, *existe* $C_\epsilon = C(\epsilon, k, f, \Omega) > 0$ *tal que*

$$f(x,s) \leq (\mu + \epsilon)s + C_\epsilon s^k, \tag{2.2}$$

e

$$F(x,s) \leq \frac{\mu + \epsilon}{2} s^2 + \frac{C_\epsilon}{k+1} s^{k+1}, \tag{2.3}$$

para todo $(x,s) \in \overline{\Omega} \times [0, \infty)$.

Demonstração: Dado $\epsilon > 0$, como

$$\lim_{s \to \infty} \frac{f(x,s)}{s^k} = 0,$$

existe um $R_\epsilon > 0$ tal que

$$\left|\frac{f(x,s)}{s^k}\right| < \epsilon, \quad \text{para todo} \quad s \geq R_\epsilon,$$

e portanto,

$$f(x,s) < \epsilon s^k, \quad \text{para todo} \quad s \geq R_\epsilon. \tag{2.4}$$

Por outro lado, usando (f_2), obtemos $\delta > 0$ tal que

$$\left|\frac{f(x,s)}{s} - \mu\right| < \epsilon, \quad \text{para todo} \quad 0 \leq s < \delta,$$

donde

$$f(x,s) < (\epsilon + \mu)s, \quad \text{para todo} \quad 0 \leq s < \delta. \tag{2.5}$$

Note que, como f é contínua, então a função $\dfrac{f(x,s)}{s^k}$ é contínua em $[\delta, R_\epsilon]$. Assim, existe $M_\epsilon \geq 0$ tal que

$$\left|\frac{f(x,s)}{s^k}\right| \leq M_\epsilon, \quad \text{para todo} \quad s \in [\delta, R_\epsilon]$$

e consequentemente

$$f(x,s) < M_\epsilon s^k, \quad \text{para todo} \quad s \in [\delta, R_\epsilon]. \tag{2.6}$$

Dessa forma, como $f(x,s) \geq 0$, segue de (2.4), (2.5) e (2.6) que, para todo $(x,s) \in \overline{\Omega} \times [0,\infty)$

$$\begin{aligned} f(x,s) &\leq (\mu+\epsilon)s + M_\epsilon s^k + \epsilon s^k \\ &= (\mu+\epsilon)s + C_\epsilon s^k. \end{aligned}$$

Integrando a última desigualdade, obtemos para todo $(x,s) \in \overline{\Omega} \times [0,\infty)$

$$F(x,s) \leq \frac{(\mu+\epsilon)}{2}s^2 + \frac{C_\epsilon}{k+1}s^{k+1},$$

o que conclui o lema.

$\square$

No que segue provamos a regularidade do funcional I definido em (2.1).

Proposição 2.1 *Suponha $(h_1), (f_0) - (f_2)$ e (f_4). Então o funcional I é de classe C^1 em H e*

$$I'(u)v = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx - \int_\Omega (h(x)(u^+)^q + f(x,u^+))v dx, \quad \textit{para todo} \quad v \in H.$$

Demonstração: Considerando $P, p : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dados por

$$P(x,s) = \frac{1}{q+1} h(x)(s^+)^{q+1} + F(x,s^+)$$

e

$$p(x,s) = h(x)(s^+)^q + f(x,s^+),$$

temos que

$$I(u) = J_0(u) - J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx - \int_\Omega P(x,u)dx$$

onde $P(x,t) = \displaystyle\int_0^t p(x,s)ds.$

Pela Proposição $B.2$ (ver Apêndice) J_0 é de classe C^1 em H. Para mostrar que J é de classe C^1 em H, basta verificar que p satisfaz (p_0) e (p_1) da Proposição $B.3$, (ver Apêndice). Como $h \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$ e $f \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ então $p \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$. Pelo Lema 2.1, temos

$$f(x,s) \leq (\mu+\epsilon)s + C_\epsilon s^k \quad \text{para todo} \quad s \geq 0, x \in \Omega,$$

então

$$|f(x,s)| \leq C_1 |s| + C_2 |s|^k.$$

Note que

$$C_1|s| + C_2|s|^k \leq \begin{cases} C_3 |s|^k, & \text{se} \quad |s| \geq 1; \\ C_4 + C_5 |s|^k, & \text{se} \quad |s| \leq 1. \end{cases}$$

Logo,

$$|f(x,s)| \leq \widehat{C}_1 + \widehat{C}_2 |s|^k \quad \text{para todo} \quad s \geq 0, x \in \Omega. \tag{2.7}$$

Além disso, como $0 < q < 1$ e $1 < k < 2^* - 1$, segue que

$$|s|^q \leq \begin{cases} |s|^k, & \text{se} \quad |s| \geq 1; \\ C_6, & \text{se} \quad |s| \leq 1. \end{cases}$$

Logo, $|s|^q \leq C_7 + |s|^k$. Dessa forma,

$$\left|h(x)(s^+)^q\right| \leq |h|_\infty |s|^q \leq C_8 + C_9 |s|^k \quad \text{para todo} \quad s \geq 0, x \in \Omega. \tag{2.8}$$

Por (2.7) e (2.8), temos

$$\begin{aligned} |p(x,s)| &= |h(x)(s^+)^q + f(x,s^+)| \\ &\leq |h(x)(s^+)^q| + |f(x,s^+)| \\ &\leq a_1 + a_2 |s|^k. \end{aligned}$$

Assim (p_1) é satisfeita. Segue da Proposição $B.3$ que I é de classe C^1 em H com

$$I'(u)v = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx - \int_\Omega h(x)(u^+)^q dx - \int_\Omega f(x,u^+)dx.$$

□

O lema que demonstraremos abaixo será utilizado na demonstração dos Teoremas A e B. Ele mostra que toda sequência de Palais-Smale no nível d que é limitada possui subsequência convergente.

Lema 2.2 *Seja $(u_n) \subset H$ uma sequência de Palais-Smale no nível d. Se (u_n) é limitada, então existe uma subsequência $(u_{n_j}) \subset (u_n)$ tal que $u_{n_j} \to v \in H$.*

Demonstração: Temos que $I(u) = J_0(u) - J(u)$, onde

$$J_0(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx$$

e

$$J(u) = \frac{1}{q+1}\int_\Omega (h(x)(u^+)^{q+1} + F(x,u^+))dx.$$

Pela Proposição 2.1

$$I'(u) = u - J'(u)$$

e, pelo Teorema B.1, (ver Apêndice), J' é compacto. Dessa forma, sendo (u_n) limitada, existe uma subsequência $(u_{n_j}) \subset (u_n)$ tal que

$$J'(u_{n_j}) \to v \in H^*.$$

Como,

$$u_{n_j} = I'(u_{n_j}) + J'(u_{n_j})$$

e $I'(u_{n_j}) \to 0$ em H^*, obtemos

$$u_{n_j} \to v.$$

□

2.1 Existência de uma solução via minimização

Nesta seção, provamos o teorema A. Para tal utilizaremos o seguinte lema:

Lema 2.3 *Suponha $(h_1), (f_0) - (f_2)$ e (f_4). Então existe $m = m(\mu, q, f, N, \Omega) > 0$ tal que, se $|h|_\infty < m$, existem $\rho > 0$ e $\alpha > 0$ tais que $I(u) \geq \alpha > 0$ para todo $u \in H$ com $||u|| = \rho$.*

Demonstração: Por (f_2), temos $\mu < \lambda_1$. Logo podemos tomar $\epsilon_0 > 0$ tal que $\mu + \epsilon_0 < \lambda_1$. Assim, usando (2.3) obtemos para todo $(x,s) \in \overline{\Omega} \times [0,\infty)$,

$$\begin{aligned} F(x,s) &\leq \frac{(\mu+\epsilon_0)}{2}s^2 + \frac{C_{\epsilon_0}}{k+1}s^{k+1} \\ &\leq \frac{(\mu+\epsilon_0)}{2}s^2 + C_0 s^{k+1} \end{aligned}$$

onde $C_0 = C_0(k, \mu, f, \Omega)$. Como $h(x) \leq |h(x)| \leq |h|_\infty$, segue que

$$\begin{aligned} I(u) &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \frac{1}{q+1}\int_\Omega h(x)(u^+)^{q+1}dx - \int_\Omega F(x,u^+)dx \\ &\geq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \frac{|h|_\infty}{q+1}\int_\Omega |u|^{q+1}dx - \frac{(\mu+\epsilon_0)}{2}\int_\Omega u^2 dx - C_0\int_\Omega |u|^{k+1}dx. \end{aligned}$$

Lembrando que

$$\lambda_1 \int_\Omega |u|^2 dx \leq \int_\Omega |\nabla u|^2 dx \quad \text{para todo} \;\; u \in H,$$

e $\mu + \epsilon_0 < \lambda_1$, segue que

$$\begin{aligned} I(u) &\geq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \frac{|h|_\infty}{q+1}\int_\Omega |u|^{q+1}dx - \frac{(\mu+\epsilon_0)}{2\lambda_1}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - C_0\int_\Omega |u|^{k+1}dx \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{(\mu+\epsilon_0)}{2\lambda_1}\right)||u||^2 - \frac{1}{q+1}|h|_\infty |u|_{q+1}^{q+1} - C_0|u|_{k+1}^{k+1}. \end{aligned}$$

Pelas imersões de Sobolev $H \hookrightarrow L^{k+1}(\Omega)$ e $H \hookrightarrow L^{q+1}(\Omega)$, obtemos

$$\begin{aligned} I(u) &\geq C_1||u||^2 - C_2|h|_\infty ||u||^{q+1} - C_3||u||^{k+1} \\ &= \left(C_1 - C_2|h|_\infty ||u||^{q-1} - C_3||u||^{k-1}\right)||u||^2, \end{aligned} \tag{2.9}$$

onde $C_1 = \left(\frac{1}{2} - \frac{(\mu+\epsilon_0)}{2\lambda_1}\right) > 0$, $C_2 = C_2(q, N, \Omega)$ e $C_3 = C_3(C_0, k, N, \Omega)$.

Considere para $t \geq 0$, a função g dada por

$$g(t) = C_2|h|_\infty t^{q-1} + C_3 t^{k-1}.$$

Queremos encontrar um $t > 0$ tal que $g(t) < C_1$. Para tal, encontraremos o ponto onde g assume o seu menor valor. Observe que g é diferenciável em $(0, +\infty)$ e

$$g'(t) = C_2(q-1)|h|_\infty t^{q-2} + C_3(k-1)t^{k-2}.$$

Fazendo $g'(t_0) = 0$, temos

$$C_2(q-1)|h|_\infty t_0^{q-2} + C_3(k-1)t_0^{k-2} = 0,$$

assim

$$t_0 = \left(\frac{C_2(1-q)|h|_\infty)}{C_3(k-1)}\right)^{\frac{1}{k-q}} = (C_4|h|_\infty)^{\frac{1}{k-q}}.$$

Então g atinge o seu valor de mínimo em t_0, pois como $0 < q < 1 < k$ temos que

$$\lim_{t\to\infty} g(t) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{t\to 0^+} g(t) = +\infty.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} g(t_0) &= C_2|h|_\infty (C_4|h|_\infty)^{\frac{q-1}{k-q}} + C_3(C_4|h|_\infty)^{\frac{k-1}{k-q}} \\ &= C_2 C_4^{\frac{q-1}{k-q}} |h|_\infty^{\frac{k-1}{k-q}} + C_3 C_4^{\frac{k-1}{k-q}} |h|_\infty^{\frac{k-1}{k-q}} \\ &= \left(C_2 C_4^{\frac{q-1}{k-q}} + C_3 C_4^{\frac{k-1}{k-q}} \right) |h|_\infty^{\frac{k-1}{k-q}} \\ &= C_5 |h|_\infty^{\frac{k-1}{k-q}}, \end{aligned}$$

onde $C_5 = C_5(q, k, \mu, f, N, \Omega)$ e $\dfrac{k-1}{k-q} > 0$ desde que $0 < q < 1 < k$. Assim, $g(t_0) < C_1$ se, e somente se, $C_5|h|_\infty^{\frac{k-1}{k-q}} < C_1$, ou seja, se $|h|_\infty < \left(\frac{C_1}{C_5}\right)^{\frac{k-q}{k-1}}$. Portanto, para todo $k > 1$ fixo, existe $m = m(\mu, q, f, N, \Omega) > 0$ tal se $|h|_\infty < m$, então $g(t_0) < C_1$, isto é, $C_1 - g(t_0) = C_6 > 0$.

Tomando $\rho = t_0$ em (2.9), temos $||u|| = t_0$ e

$$\begin{aligned} I(u) &\geq (C_1 - g(t_0)){t_0}^2 \\ &= C_6 \|u\|^2 \\ &\geq C_6 \rho^2 = \alpha > 0. \end{aligned}$$

Isso conclui a prova do lema.

$\square$

Estamos prontos para obter a primeira solução para o problema (P).

Demonstração do Teorema A: Seja $\rho > 0$ dado pelo Lema 2.3 e sejam

$$\overline{B}_\rho = \{u \in H : ||u|| \leq \rho\},$$

$$\partial B_\rho = \{u \in H : ||u|| = \rho\}.$$

Observe que $\overline{B}_\rho$ é um espaço métrico completo com a função distância definida por $d(u, v) = ||u - v||$ para $u, v \in \overline{B}_\rho$. Ainda pelo Lema 2.3, temos que

$$I|_{\partial B_\rho} \geq \alpha > 0. \tag{2.10}$$

Observe que I restrito a $\overline{B}_\rho$ é limitado. De fato, para todo $u \in H$ tal que $||u|| \leq \rho$ temos, pelo Lema 2.1, que

$$\begin{aligned} |I(u)| &\leq \frac{1}{2}\|u\|^2 dx + \frac{1}{q+1}\int_\Omega \left|h(x)(u^+)^{q+1}\right| dx + \int_\Omega \left|F(x, u^+)\right| dx \\ &\leq \frac{1}{2}\|u\|^2 dx + \frac{1}{q+1}|h|_\infty \int_\Omega |u|^{q+1} dx + \int_\Omega (C_1|u|^2 + C_2|u|^{k+1}) dx. \end{aligned}$$

Pela imersão $H \hookrightarrow L^r(\Omega)$, com $1 < r \leq 2^*$, segue que

$$\begin{aligned} |I(u)| &\leq \frac{1}{2}\|u\|^2 + C_3\|u\|^{q+1} + C_4\|u\|^2 + C_5\|u\|^{k+1} \\ &\leq \frac{1}{2}\rho^2 + C_3\rho^{q+1} + C_4\rho^2 + C_5\rho^{k+1} \\ &= M_\rho. \end{aligned}$$

Temos também que $I \in C^1(\overline{B}_\rho, \mathbb{R})$. Logo, I é semicontínuo inferiormente e limitado em $\overline{B}_\rho$. Podemos então definir

$$c_1 = \inf\{\ I(u) : u \in \overline{B}_\rho\ \}. \tag{2.11}$$

Afirmação: $c_1 < 0$.

De fato, seja $v \in H$ dado pela hipótese (h_2). Observe que como $f(x,s) \geq 0$ para todo $(x,s) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}$, então

$$F(x,s^+) = \int_0^{s^+} f(x,t)dt \geq 0,$$

donde

$$\int_\Omega F(x,u^+)dx \geq 0, \quad \forall \ \ u \ \in H.$$

Dessa forma, para $t > 0$, temos

$$\begin{aligned} I(tv) &= \frac{t^2}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 dx - \frac{t^{q+1}}{q+1}\int_\Omega h(x)(v^+)^{q+1}dx - \int_\Omega F(x,tv^+)dx \\ &\leq \frac{t^2}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 dx - \frac{t^{q+1}}{q+1}\int_\Omega h(x)(v^+)^{q+1}dx \\ &= t^{q+1}\left(\frac{t^{2-(q+1)}}{2}||v||^2 - \frac{1}{q+1}\int_\Omega h(x)(v^+)^{q+1}dx\right) \\ &= t^{q+1}\left(t^{2-(q+1)}C_3 - C_4\right), \end{aligned}$$

com $C_3, C_4 > 0$. Como $q+1 < 2$, então $t^{2-(q+1)}C_3 \to 0$ quando $t \to 0$. Logo, para $t > 0$ suficientemente pequeno, $I(tv) < 0$ e $tv \in \overline{B}_\rho$. Isso mostra que $c_1 < 0$.

Seja $(u_n) \subset \overline{B}_\rho$ uma sequência tal que

$$c_1 \leq I(u_n) \leq c_1 + \frac{1}{n}. \tag{2.12}$$

Como I é semicontínuo inferiormante e limitado em $\overline{B}_\rho$, segue do Princípio Variacional de Ekeland (cf. Teorema 1.1) que

$$I(w) > I(u_n) - \frac{1}{n}||u_n - w||, \ \forall \ w \ \in \ \overline{B}_\rho, \ w \ \neq \ u_n. \tag{2.13}$$

Vamos provar que $||u_n|| < \rho$ para $n \geq 1$ suficientemente grande. De fato, suponha por contradição, que $||u_{n_j}|| = \rho$, para alguma subsequência $(u_{n_j}) \subset (u_n)$. Por (2.10) segue que

$$I(u_{n_j}) \geq \alpha > 0.$$

Fazendo $n_j \to \infty$ e usando (2.12), temos

$$c_1 = \lim_{n_j \to \infty} I(u_{n_j}) \geq \alpha > 0,$$

contrariando $c_1 < 0$. Portanto, $||u_n|| < \rho$ para $n \geq 1$ suficientemente grande.

Provaremos agora que, $I'(u_n) \to 0$ em H. Para tanto, fixe $n \in \mathbb{N}$ e $u \in H$ tal que $\|u\| = 1$ e considere a sequência

$$w_n = u_n + tu.$$

Como $||u_n|| < \rho$, para $t > 0$ suficientemente pequeno, temos

$$||w_n|| \leq ||u_n|| + t < \rho,$$

o que implica $w_n \in \overline{B}_\rho$. Assim, segue de (2.13) que

$$\begin{aligned} I(u_n + tu) &> I(u_n) - \frac{1}{n}||u_n - (u_n + tu)|| \\ &= I(u_n) - \frac{t}{n}||u|| \\ &= I(u_n) - \frac{t}{n}, \end{aligned}$$

isto é,

$$\frac{I(u_n + tu) - I(u_n)}{t} > -\frac{1}{n}.$$

Fazendo $t \to 0^+$, vemos que

$$I'(u_n)u \geq -\frac{1}{n}, \text{ para todo } u \in H \text{ tal que } ||u|| = 1. \tag{2.14}$$

Observe que trocando u por $(-u)$, obtemos

$$I'(u_n)u \leq \frac{1}{n},$$

e assim

$$|I'(u_n)u| \leq \frac{1}{n} \quad \forall\ u \ \in \ H, \ \ ||u|| = 1.$$

Logo,

$$||I'(u_n)||_{H^*} = \sup_{||u||=1} |I'(u_n)u| \leq \frac{1}{n},$$

donde se conclui,

$$I'(u_n) \to 0.$$

Mas por (2.12), temos que $I(u_n) \to c_1$. Segue então que (u_n) é um sequência de Palais-Smale no nível c_1. Como (u_n) é limitada, segue do Lema 2.2 que existe uma subsequência

$$(u_{n_j}) \subset (u_n) \quad \text{tal que} \;\; u_{n_j} \to v_1 \in H.$$

Como $I \in C^1(X, \mathbb{R})$, segue que

$$I(v_1) = c_1 \;\; \text{e} \;\; I'(v_1) = 0,$$

ou seja, v_1 satisfaz a primeira equação de (P).

Observe agora que v_1 é não negativa. De fato, sendo v_1 uma solução fraca do problema (P), então

$$0 = I'(v_1)\phi = \int_\Omega \nabla v_1 \nabla \phi dx - \int_\Omega h(x)(v_1^+)^q \phi dx - \int_\Omega f(x, v_1^+)\phi dx, \quad \forall \;\; \phi \in H.$$

Em particular, tomando $\phi = v_1^- = \max\{-v_1, 0\}$ obtemos,

$$0 = I'(v_1)v_1^- = \int_\Omega \nabla v_1 \nabla v_1^- dx - \int_\Omega h(x)(v_1^+)^q v_1^- dx - \int_\Omega f(x, v_1^+)v_1^- dx.$$

Note que,

$$\text{se} \;\; v_1 < 0 \;\; \text{então} \;\; v_1^- = v_1 \quad \text{e} \;\; v_1^+ = 0.$$

Segue daí e de (f_1) que

$$\int_\Omega h(x)(v_1^+)^q v_1^- dx = 0 = \int_\Omega f(x, v_1^+)v_1^- dx.$$

Portanto,

$$\int_\Omega \nabla v_1 \nabla v_1^- dx = \int_\Omega \left|\nabla v_1^-\right|^2 dx = 0,$$

e assim, $v_1^- \equiv 0$ e portanto, $v_1 = v_1^+ \geq 0$. Dessa forma, v_1 é uma solução fraca do problema (P).

Além disso, se $h(x) \geq 0$, então $v_1 > 0$. De fato, sendo v_1 uma solução fraca de (P), usando a teoria de regularidade elíptica provamos que $v_1 \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ satisfaz

$$-\Delta v_1 = h(x)(v_1)^q + f(x, v_1) \geq 0,$$

Segue do Princípio do Máximo Forte (cf. [10], Teorema 8.19) que $v_1 > 0$ em Ω.

$\square$

2.2 Existência de uma solução via Teorema Passo da Montanha

Nesta seção vamos provar a existência de uma segunda solução para o problema (P). Para usar o Teorema do Passo da Montanha, mostraremos que o funcional I possui a geometria do Teorema do Passo da Montanha usando o Lema 2.3 e próximo resultado.

Lema 2.4 *Suponha* (h_1), $(f_1) - (f_3)$ *Seja* $\rho > 0$ *dado pelo Lema* 2.3. *Então existe* $m = m(\mu, q, f, N, \Omega) > 0$ *tal que, se* $|h|_\infty < m$, *existe* $e \in H \setminus \overline{B}_\rho(0)$ *tal que* $I(e) < 0$.

Demonstração: Segue de (f_3) que

$$\lim_{s\to\infty} \frac{f(x,s)}{s} = \ell \quad \text{uniformemente em} \quad x \in \Omega.$$

Usando a regra de L'Hospital, temos

$$\lim_{s\to\infty} \frac{F(x,s)}{s^2} = \lim_{s\to\infty} \frac{f(x,s)}{2s} = \frac{\ell}{2} > \frac{\lambda_1}{2},$$

uniformemente em $x \in \overline{\Omega}$. Então existem $s_0 > 0$ e $\tau > 0$ tais que,

$$\frac{F(x,s)}{s^2} \geq \frac{\ell - \tau}{2} > \frac{\lambda_1}{2} \quad \forall x \in \Omega, \quad s \geq s_0. \tag{2.15}$$

Usando (f_2), temos que existe $0 < \delta < s_0$ tal que, se $0 < s < \delta$ então

$$\left| \frac{f(x,s)}{s} - \mu \right| < \frac{\mu}{2},$$

assim,

$$\frac{f(x,s)}{s} \geq \frac{\mu}{2}, \quad \forall\ x \in \Omega, \quad 0 < s < \delta.$$

Integrando a última inequação, obtemos

$$\frac{F(x,s)}{s^2} \geq \frac{\mu}{4}, \quad \forall\ x \in \Omega, \quad 0 < s < \delta. \tag{2.16}$$

No intervalo $[\delta, s_0]$ a função $\dfrac{F(x,s)}{s^2}$ é contínua, pois em $[\delta, s_0]$, f é contínua. Logo

$$\frac{F(x,s)}{s^2} \geq C_1, \quad \forall\ x \in \Omega, \quad s \in [\delta, s_0]. \tag{2.17}$$

Portanto, por (2.15), (2.16) e (2.17) seque que

$$F(x,s) \geq \frac{(\ell - \tau)}{2} s^2 - C,$$

para alguma constante $C > 0$.

Seja $\varphi_1 > 0$ uma λ_1-autofunção. Segue de (2.15) que,

$$\begin{aligned} I(t\varphi_1) &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla(t\varphi_1)|^2 dx - \frac{1}{q+1}\int_\Omega h(x)(t\varphi_1^+)^{q+1}dx - \int_\Omega F(x,t\varphi_1)dx \\ &\leq \frac{t^2}{2}\int_\Omega |\nabla\varphi_1|^2 dx - \frac{t^{q+1}}{q+1}\int_\Omega h(x)(\varphi_1^+)^{q+1}dx - \frac{t^2}{2}\int_\Omega (\ell-\tau)\varphi_1^2 dx + C\,|\Omega|\,, \end{aligned}$$

onde $|\Omega|$ denota a medida do conjunto Ω. Lembrando que

$$\lambda_1 \int_\Omega |\varphi_1|^2 dx = \int_\Omega |\nabla\varphi_1|^2 dx,$$

segue que

$$\begin{aligned} \frac{I(t\varphi_1)}{t^2} &\leq \frac{\lambda_1}{2}\int_\Omega \varphi_1^2 dx - \frac{t^{(q+1)-2}}{q+1}\int_\Omega h(x)(\varphi_1^+)^{q+1}dx - \frac{1}{2}\int_\Omega (\ell-\tau)\varphi_1^2 dx + \frac{C\,|\Omega|}{t^2} \\ &= \frac{1}{2}\int_\Omega (\lambda_1 - \ell + \tau)\varphi_1^2 dx - \frac{t^{(q+1)-2}}{q+1}\int_\Omega h(x)(\varphi_1^+)^{q+1}dx + \frac{C\,|\Omega|}{t^2}. \end{aligned}$$

Como $q+1 < 2$, então

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t^{(q+1)-2}}{q+1}\int_\Omega h(x)(\varphi_1^+)^{q+1}dx - \frac{C\,|\Omega|}{t^2} = 0.$$

Por (2.15), $\lambda_1 - \ell - \tau < 0$. Daí

$$\frac{1}{2}\int_\Omega (\lambda_1 - \ell + \tau)\varphi_1^2 dx < 0.$$

Logo,

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{I(t\varphi_1)}{t^2} < 0,$$

e portanto, para algum $t > 0$ suficientemente grande, $I(t\varphi_1) < 0$. Deste modo, tomando ρ dado pelo Lema 2.3 e considerando $e = t\varphi_1 \in H$, com t suficientemente grande, tem-se

$$||e|| > \rho \;\text{ e }\; I(e) < 0.$$

Isto finaliza a prova do lema.

□

Vamos provar o Teorema B.

Demonstração do Teorema B: O funcional I satisfaz a geometria do Teorema do Passo da Montanha, pois $I(0) = 0$ e $I|_{\partial B_\rho(0)} \geq \alpha > 0$ onde ρ, α são dados pelo Lema 2.3. Além disso, pelo Lema 2.4, temos que existe $e \in H$ com $\|e\| > \rho$ tal que $I(e) < 0$.

Resta somente verificar que I satisfaz $(PS)_c$, onde $c \geq \alpha > 0$ é o nível dado pelo Teorema 1.2. Seja então $(u_n) \subset H$ tal que

$$I(u_n) \to c \quad \text{e} \quad \|I'(u_n)\|_{H^*} \to 0. \tag{2.18}$$

Vamos mostrar que (u_n) é limitada em H.

Observe primeiramente que (2.18) implica que

$$I(u_n) = \frac{1}{2}\|u_n\|^2 - \frac{1}{q+1}\int_\Omega h(x)(u_n^+)^{q+1}dx - \int_\Omega F(x, u_n^+)dx = c + o(1), \tag{2.19}$$

e, para toda $\phi \in H$,

$$I'(u_n)\phi = \int_\Omega \nabla u_n \nabla \phi dx - \int_\Omega h(x)(u_n^+)^q \phi dx - \int_\Omega f(x, u_n^+)\phi dx = o(1), \tag{2.20}$$

em que $o(1)$ denota uma quantidade que tende a zero quando $n \to \infty$. Suponha, por contradição, que (u_n) não seja limitada em H. Então, a menos de subsequência, $\|u_n\| \to \infty$. Considere a sequência limitada

$$w_n = \frac{u_n}{\|u_n\|}. \tag{2.21}$$

Sendo (w_n) limitada no espaço reflexivo H temos que, a menos de subsequência,

$$w_n \rightharpoonup w \quad \text{fracamente em} \quad H. \tag{2.22}$$

Como a imersão de Sobolev $H \hookrightarrow L^r(\Omega)$ é compacta para $1 \leq r < 2^*$, segue que, a menos de subsequência,

$$\begin{cases} w_n \to w \quad \text{fortemente em} \quad L^r(\Omega), \\ w_n(x) \to w(x) \quad \text{q.t.p. em} \quad \Omega \\ |w_n(x)| \leq \psi_r(x) \quad \text{q.t.p. em} \quad \Omega, \quad \text{para alguma função} \quad \psi_r \in L^r(\Omega). \end{cases} \tag{2.23}$$

Analogamente,

$$w_n^+ = \frac{u_n^+}{\|u_n\|}$$

satisfaz

$$\begin{cases} w_n^+ \rightharpoonup w^+ \quad \text{fracamente em} \quad H; \\ w_n^+ \to w^+ \quad \text{fortemente em} \quad L^r(\Omega); \\ w_n^+(x) \to w^+(x) \quad \text{q.t.p em} \quad \Omega; \\ |w_n^+(x)| \leq \psi_r(x) \quad \in \quad L^r(\Omega). \end{cases} \tag{2.24}$$

Afirmação 1: $w \neq 0$.

De fato, suponha por contradição, que $w = 0$. Então

$$w_n^+(x) \to w^+(x) = 0 \;\; \text{q.t.p em} \;\; \Omega.$$

Observe primeiramente que,

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega h(x)(w_n^+)^{q+1}dx = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega F(x, w_n^+(x))dx = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f(x, w_n^+(x))w_n(x)dx = 0.$$

De fato, note inicialmente que

$$h(x)(w_n^+(x))^{q+1} \longrightarrow h(x)(w^+(x))^{q+1} = 0 \;\; \text{q.t.p em} \;\; \Omega. \tag{2.25}$$

Como $q + 1 < 2 < 2^*$, segue de (2.24) que existe $\psi_{q+1} \in L^{q+1}(\Omega)$ tal que $|w_n^+(x)| \leq \psi_{q+1}(x)$. Dessa forma, tem-se

$$\left|h(x)(w_n^+(x))^{q+1}\right| \leq |h|_\infty (\psi_{q+1}(x))^{q+1} \in L^1(\Omega). \tag{2.26}$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada, segue

$$\int_\Omega h(x)(w_n^+)^{q+1}dx \longrightarrow 0.$$

Por outro lado, pelo Lema 2.1 temos que,

$$F(x, s) \leq C_1 s^2 + C_2 s^{k+1}, \;\; \forall \;\; (x, s) \in \Omega \times [0, \infty).$$

Logo, por (f_1) e (2.24), temos

$$0 \leq F(x, w_n^+(x)) \leq C_1(w_n^+(x))^2 + C_2(w_n^+(x))^{k+1} \longrightarrow 0 \;\; \text{q.t.p em} \;\; \Omega.$$

isto é,

$$F(x, w_n^+(x)) \longrightarrow 0 \;\; \text{q.t.p em} \;\; \Omega. \tag{2.27}$$

Pelo mesmo argumento feito anteriormente, temos que

$$\begin{aligned} \left|F(x, w_n^+(x))\right| &\leq C_1 \left|(w_n^+(x))^2\right| + C_2 \left|(w_n^+(x))^{k+1}\right| \\ &\leq C_1(\psi_2(x))^2 + C_2(\psi_{k+1}(x))^{k+1} \;\; \in \;\; L^1(\Omega). \end{aligned}$$

Pelo Teorema da Convegência Dominada, segue

$$\int_\Omega F(x, w_n^+(x))dx \longrightarrow 0.$$

Ainda pelo Lema 2.1 temos que,

$$f(x, s) \leq (\mu + \epsilon)s + C_\epsilon s^k.$$

Usando (2.23), (2.24) e um argumento análogo ao feito acima, concluímos que

$$\int_\Omega f(x, w_n^+(x))w_n(x)dx \longrightarrow 0.$$

Note que como $I'(u_n) \to 0$ então, para uma sequência $(z_n) \subset H$ limitada, tem-se $I'(u_n)z_n \to 0$. Segue então de (2.20) que

$$\begin{aligned} o(1) &= I'(u_n)\frac{u_n}{\|u_n\|^2} \\ &= \frac{1}{\|u_n\|^2}\int_\Omega \nabla u_n \nabla u_n dx - \int_\Omega h(x)(u_n^+)^q \frac{u_n}{\|u_n\|^2}dx - \int_\Omega f(x, u_n^+)\frac{u_n}{\|u_n\|^2}dx, \end{aligned}$$

isto é,

$$\|w_n\|^2 - \int_\Omega h(x)(u_n^+)^q \frac{u_n}{\|u_n\|^2}dx - \int_\Omega f(x, u_n^+)\frac{u_n}{\|u_n\|^2}dx = o(1). \tag{2.28}$$

Observe que

$$\int_\Omega h(x)(u_n^+)^q u_n dx = \int_\Omega h(x)(u_n^+)^{q+1}dx.$$

De fato, pois como $u_n^+ = u_n$ se $u_n \geq 0$ e $u_n^+ = 0$ se $u_n < 0$, segue que

$$\begin{aligned} \int_\Omega h(x)(u_n^+)^q u_n dx &= \int_{\{u_n \geq 0\}} h(x)(u_n^+)^q u_n dx + \int_{\{u_n < 0\}} h(x)(u_n^+)^q u_n dx \\ &= \int_{\{u_n \geq 0\}} h(x)(u_n^+)^q u_n^+ dx + \int_{\{u_n < 0\}} h(x)(0)^q u_n dx \\ &= \int_{\{u_n \geq 0\}} h(x)(u_n^+)^q u_n^+ dx + 0 \\ &= \int_\Omega h(x)(u_n^+)^{q+1}dx. \end{aligned}$$

Dessa forma, como $w_n^+ = \dfrac{u_n^+}{\|u_n\|}$, obtemos

$$\int_\Omega h(x)(u_n^+)^q \frac{u_n}{\|u_n\|^2}dx = \frac{1}{\|u_n\|^{1-q}}\int_\Omega h(x)(w_n^+)^{q+1}dx. \tag{2.29}$$

Do mesmo modo, por (f_1) tem-se

$$\begin{aligned}
\int_\Omega f(x,u_n^+)u_n dx &= \int_{\{u_n\geq 0\}} f(x,u_n^+)u_n dx + \int_{\{u_n<0\}} f(x,u_n^+)u_n dx \\
&= \int_{\{u_n\geq 0\}} f(x,u_n^+)u_n^+ dx + \int_{\{u_n<0\}} f(x,0)u_n dx \\
&= \int_{\{u_n\geq 0\}} f(x,u_n^+)u_n^+ dx + \int_{\{u_n<0\}} 0u_n dx \\
&= \int_\Omega f(x,u_n^+)u_n^+ dx.
\end{aligned}$$

Sendo assim,

$$\int_\Omega f(x,u_n^+)\frac{u_n}{\|u_n\|^2}dx = \int_\Omega p(x,u_n)(w_n^+)^2 dx,$$

onde

$$p(x,s) = \begin{cases} \dfrac{f(x,s^+)}{s^+}, & \text{se} \quad s>0, \\ 0, & \text{se} \quad s\leq 0. \end{cases}$$

Portanto, segue de (2.28) e dos resultados obtidos acima, que

$$\|w_n\|^2 - \frac{1}{\|u_n\|^{1-q}}\int_\Omega h(x)(w_n^+)^{q+1}dx - \int_\Omega p(x,u_n)(w_n^+)^2 dx = o(1). \tag{2.30}$$

Note que como $1-q>0$, então $\dfrac{1}{\|u_n\|^{1-q}}$ é limitada e, como $\displaystyle\int_\Omega h(x)(w_n^+)^{q+1}dx \longrightarrow 0$, segue que

$$\frac{1}{\|u_n\|^{1-q}}\int_\Omega h(x)(w_n^+)^{q+1}dx \longrightarrow 0. \tag{2.31}$$

Logo,

$$\|w_n\|^2 - \int_\Omega p(x,u_n)(w_n^+)^2 dx = o(1). \tag{2.32}$$

Note também que existe uma constante $M>0$ tal que

$$|p(x,s)| \leq M \quad \forall \quad (x,s)\in\Omega\times\mathbb{R}. \tag{2.33}$$

De fato, considere $s\geq 0$. Dado $\epsilon>0$, por (f_2) existe $\delta>0$ tal que

$$\left|\frac{f(x,s)}{s} - \mu\right| < \epsilon, \quad \forall \quad 0<s<\delta$$

e portanto,

$$\frac{f(x,s)}{s} < (\epsilon+\mu), \quad \forall \quad 0<s<\delta.$$

Por outro lado, por (f_3), obtemos $R_\epsilon > 0$ tal que

$$\left|\frac{f(x,s)}{s} - \ell\right| < \epsilon, \quad \forall \quad s \geq R_\epsilon,$$

assim

$$\frac{f(x,s)}{s} < (\epsilon + \ell), \quad \forall \quad s \geq R_\epsilon.$$

Como f é contínua, segue que se $0 < \delta \leq s \leq R_\epsilon$, então $\dfrac{f(x,s)}{s}$ também é contínua e, neste intervalo, temos $\left|\dfrac{f(x,s)}{s}\right| \leq M_1$. Dessa forma, como

$$\frac{f(x,s)}{s} \geq 0 \quad \text{para todo} \quad s > 0,$$

então existe $M > 0$ tal que

$$0 \leq p(x,s) \leq M \quad \text{para todo} \quad x \in \Omega, \ s \in \mathbb{R}.$$

Sendo assim,

$$\begin{aligned}
\left|\int_\Omega p(x,u_n)(w_n^+)^2 dx\right| &\leq \int_\Omega |p(x,u_n)| \left|(w_n^+)\right|^2 dx \\
&\leq M \int_\Omega (w_n^+)^2 dx.
\end{aligned}$$

Por (2.23) temos que $(w_n(x))^2 \longrightarrow 0$ q.t.p em Ω e existe $\psi_2 \in L^2(\Omega)$ tal que $|w_n^+(x)| \leq \psi_2(x)$. Portanto, pelo Teorema da Convergência Dominada, segue que

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega (w_n^+)^2 dx = 0,$$

donde

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega p(x,u_n)(w_n^+)^2 dx = 0.$$

Portanto, voltando em (2.32), concluímos que

$$\|w_n\|^2 \to 0,$$

o que é uma contradição, visto que $\|w_n\| = 1$. Deste modo, $w \neq 0$.

Afirmação 2: $w > 0$ q.t.p em Ω.

De fato, e como $\dfrac{1}{\|u_n\|}$ é limitada, então para toda $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$,

$$I'(u_n)\phi \frac{1}{\|u_n\|} \to 0,$$

isto é,

$$\frac{1}{||u_n||}\int_\Omega \nabla u_n \nabla \phi dx - \frac{1}{||u_n||}\int_\Omega h(x)(u_n^+)^q \phi dx - \frac{1}{||u_n||}\int_\Omega f(x,u_n^+)\phi dx = o(1),$$

donde

$$\int_\Omega \nabla w_n \nabla \phi dx - \frac{1}{||u_n||^{1-q}}\int_\Omega h(x)(w_n^+)^q \phi dx - \int_\Omega p(x,u_n)(w_n^+)\phi dx = o(1). \qquad (2.34)$$

Por (2.33), temos que $p(x,u_n)$ é limitada em $L^2(\Omega)$. Logo, a menos de subsequência, temos

$$p(x,u_n) \rightharpoonup v(x) \text{ fracamente em } L^2(\Omega). \qquad (2.35)$$

Note que, dada $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ e como $w_n^+ \to w^+$ em $L^2(\Omega)$, segue que

$$\int_\Omega \left|w_n^+\phi - w^+\phi\right|^2 dx \leq |\phi|_\infty^2 \int_\Omega \left|w_n^+ - w^+\right|^2 dx \to 0.$$

Ou seja,

$$w_n^+\phi \to w^+\phi \text{ em } L^2(\Omega). \qquad (2.36)$$

Dessa forma, por (2.35), (2.36) e pela Proposição $C.4$ (ver Apêndice) segue que

$$\left\langle p(\cdot,u_n), w_n^+\phi\right\rangle_{L^2(\Omega)} \to \left\langle v(\cdot), w^+\phi\right\rangle_{L^2(\Omega)}.$$

Logo,

$$\int_\Omega p(x,u_n)w_n^+\phi dx \to \int_\Omega v(x)w^+\phi dx, \quad \forall \ \ \phi \in C_0^\infty(\Omega). \qquad (2.37)$$

Observe também que

$$\frac{1}{\|u_n\|^{1-q}}\int_\Omega h(x)(w_n^+)^q\phi dx \longrightarrow 0, \text{ para toda } \phi \in C_0^\infty(\Omega).$$

De fato, pois

$$\left|\int_\Omega h(x)(w_n^+)^q\phi dx\right| \leq |h|_\infty |\phi|_\infty \int_\Omega |w_n|^q dx.$$

Mas, como $q<1$, temos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |w_n|^q dx &= \int_{\{|w_n|<1\}} |w_n|^q dx + \int_{\{|w_n|\geq 1\}} |w_n|^q dx \\
&\leq \int_{\{|w_n|<1\}} 1 dx + \int_{\{|w_n|\geq 1\}} |w_n|^2 dx \\
&\leq |\Omega| + \int_\Omega |w_n|^2 dx \\
&= |\Omega| + |w_n|_2^2 \\
&\leq |\Omega| + C\|w_n\|^2 \\
&\leq |\Omega| + C \\
&= \widetilde{C}.
\end{aligned}$$

Logo, $\displaystyle\int_\Omega h(x)(w_n^+)^q \phi dx$ é limitada e, como $\dfrac{1}{\|u_n\|^{1-q}} \to 0$, segue que

$$\frac{1}{\|u_n\|^{1-q}} \int_\Omega h(x)(w_n^+)^q \phi dx \longrightarrow 0, \quad \forall \ \ \phi \in C_0^\infty(\Omega). \tag{2.38}$$

Como $w_n \rightharpoonup w$ fracamente em H, então

$$\int_\Omega \nabla w_n \nabla \phi dx \longrightarrow \int_\Omega \nabla w \nabla \phi dx, \quad \forall \ \ \phi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Passando (2.34) ao limite, usando a convergência acima, (2.37) e (2.38) obtemos

$$\int_\Omega \nabla w \nabla \phi dx = \int_\Omega v(x) w^+ \phi dx, \quad \forall \ \ \phi \in C_0^\infty(\Omega). \tag{2.39}$$

Observe que $v \geq 0$. De fato, defina $A = \{x \in \Omega : v(x) < 0\}$ e suponha $|A| > 0$. Como $\chi_A \in L^2(\Omega)$, onde χ_A é a função caracterítica de A, segue que

$$0 \leq \int_\Omega p_n \chi_A \to \int_\Omega v \chi_A = \int_A v < 0,$$

o que é um absurdo.

Como $C_0^\infty(\Omega)$ é denso em H, então (2.39) vale para toda $\phi \in H$. Assim, para $\phi = w^- = \max\{0, w\}$, temos

$$0 = \int_\Omega \nabla w \nabla w^- dx = \int_\Omega \left|\nabla w^-\right|^2 dx,$$

e portanto, $w^- \equiv 0$. Logo, $w = w^+ \geq 0$ é uma solução fraca para o seguinte problema

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta w & = & v(x) w^+ \geq 0, & \text{em } \ \Omega, \\ w & = & 0, & \text{em } \ \partial\Omega. \end{array} \right. \tag{2.40}$$

Segue do Princípio do Máximo Forte para soluções fracas (cf. [10], Teorema 8.19) que $w > 0$ em Ω.

Finalmente vamos mostrar que w satisfaz a seguinte identidade

$$\int_\Omega \nabla w \nabla \phi dx = \ell \int_\Omega w \phi dx, \quad \forall \ \ \phi \in H.$$

Por (2.21) temos que

$$w_n^+(x) \|u_n\| = u_n^+.$$

Como $\|u_n\| \to \infty$ e $w_n^+(x) \to w^+(x) = w(x) > 0$ q.t.p em Ω, então

$$u_n^+(x) \to \infty \ \text{ q.t.p em } \ \Omega.$$

Segue de (f_3) que

$$p(x,u_n^+) = \frac{f(x,u_n^+)}{u_n^+} \to \ell \ \text{ uniformemente em } \ x \in \Omega.$$

Logo, $v = \ell$ em (2.39), e portanto

$$\int_\Omega \nabla w \nabla \phi dx = \ell \int_\Omega w \phi dx \ \text{ para toda } \ \phi \in H. \tag{2.41}$$

Ou seja, w é solução fraca não nula do problema

$$\begin{cases} -\Delta w = \ell w, & x \in \Omega, \\ w = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Como $\ell > \lambda_1$ temos que w é ortogonal a uma λ_1-autofunção $\varphi_1 > 0$. Assim, tomando $\phi = \varphi_1$ na expressão (2.41), obtemos

$$0 = \int_\Omega \nabla w \nabla \varphi_1 dx = \ell \int_\Omega w \varphi_1 dx.$$

Como φ_1 tem sinal definido e $\ell > \lambda_1$, concluímos que w muda de sinal em Ω. Absurdo, pois $w > 0$. Logo (u_n) é limitada. Sendo (u_n) uma sequência de Palais-Smale no nível c limitada, segue então do Lema 2.2 que existe uma subsequência $(u_{n_j}) \subset (u_n)$ tal que

$$u_{n_j} \to v_2 \ \text{ em } \ H.$$

Logo, I satisfaz a condição de Palais-Smale no nível c. Dessa forma, as hipóteses do Teorema do Passo da Montanha são satisfeitas, donde

$$I(v_2) = c > 0 \ \text{ e } \ I'(v_2) = 0,$$

ou seja, $v_2 \neq 0$ satisfaz a equação do problema (P).

Analogamente ao Teorema A provamos que v_2 é não negativa e portanto v_2 é uma solução fraca do problema (P). Da mesma forma, se $h(x) \geq 0$ prova-se que $v_2 > 0$.

$\square$

Capítulo 3

Caso Superlinear

Neste capítulo estudamos a solubilidade do problema

$$(P) \qquad \begin{cases} -\Delta u &= h(x)u^q + f(x,u), & x \in \Omega, \\ u &\geq 0, & \Omega, \\ u &= 0, & \partial\Omega \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio suave e limitado, $N \geq 3$, $u \in H_0^1(\Omega)$, $0 < q < 1$ e as funções h e f satisfazem as hipóteses $(h_1), (f_1)$ e (f_2) do capítulo anterior. Porém, vamos exigir mais regularidade de f, a saber

$(\widehat{f_0})$ $f \in C^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$.

Além disso, vamos considerar agora o caso em que f é superlinear e subcrítica, isto é, f satisfaz

$(\widehat{f_3})$ $\displaystyle\lim_{s\to\infty} \frac{f(x,s)}{s} = \infty$ uniformemente em $x \in \Omega$;

(f_4) existe $k \in (1, 2^* - 1)$ tal que $\displaystyle\lim_{s\to\infty} \frac{f(x,s)}{s^k} = 0$ uniformemente em $x \in \Omega$.

Finalmente, vamos assumir também a seguinte condição de monotonicidade para f

(f_5) $\displaystyle\frac{f(x,s)}{s}$ é não decrescente em $s > 0$ para todo $x \in \Omega$.

O primeiro resultado a ser provado é:

Teorema C *Suponha* $(h_1), (\widehat{f_0}), (f_1), (f_2), (\widehat{f_3}), (f_4), (f_5)$ *e que* h *satisfaz*

$$(h_3) \qquad h \not\leq 0.$$

Então o problema (P) possui pelo menos uma solução fraca.

No nosso segundo resultado obtemos uma versão dos Teoremas A e B para o caso superlinear. Vamos então provar:

Teorema D *Suponha* $(h_1), (h_2), (\widehat{f_0}), (f_1), (f_2), (\widehat{f_3}), (f_4), (f_5)$. *Suponha ainda a seguinte condição sobre* f :

(f_6) *Existem* $\sigma \in (0,1)$ *e* $\tau > 0$ *com* $\sigma > q + (1+q)\tau$ *tais que*

(i) $\displaystyle\lim_{s\to\infty} \frac{f(x,s)}{s^{1+\tau}} = 0$ *uniformemente em* $x \in \Omega$;

(ii) $\displaystyle\lim_{s\to\infty} \frac{f(x,s)s - 2F(x,s)}{s^{1+\sigma}} = \omega \in (0,\infty]$ *uniformemente em* $x \in \Omega$.

Então existe $m > 0$ *tal que, se* $|h|_\infty < m$, *o problema* (P) *tem duas soluções fracas* $v_1, v_2 \in H$ *com* $I(v_1) < 0 < I(v_2)$. *Além disso, se* $h(x) \geq 0$ *então* $v_1, v_2 > 0$ *q.t.p. em* Ω.

A notação utilizada é a mesma do Capítulo 2.

3.1 Existência de uma solução via Teorema do Passo da Montanha

Nesta seção vamos provar o Teorema C. Para isto, iremos demonstrar que sob certas hipóteses, o funcional I satisfaz a geometria do Teorema do Passo da Montanha.

Lema 3.1 *Suponha* $(h_1), (h_3), (\widehat{f_0}), (f_1), (f_2), (\widehat{f_3}), (f_4)$ *e* (f_5). *Então*

(i) *existem* $\rho > 0$ *e* $\alpha > 0$ *tais que* $I(u) \geq \alpha > 0$ *para todo* $u \in H$ *com* $||u|| = \rho$;

(ii) *existe* $e \in H\backslash\overline{B_\rho(0)}$ *tal que* $I(e) < 0$.

Demonstração: Observe que, assim como no Lema 2.3, usando $(\widehat{f_0}), (f_1), (f_2)$ e (f_4) obtemos a desigualdade

$$F(x,s) \leq \frac{\mu + \epsilon_0}{2} s^2 + C_0 s^{k+1} \tag{3.1}$$

para algum $\epsilon_0 > 0$ tal que $\mu + \epsilon_0 < \lambda_1$. Dessa forma, como $h \not\leq 0$, segue

$$\begin{aligned} I(u) &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx - \frac{1}{q+1}\int_\Omega h(x)(u^+)^{q+1} dx - \int_\Omega F(x,u^+)dx \\ &\geq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx - \int_\Omega F(x,u^+)dx. \end{aligned}$$

Usando (3.1), a desigualdade acima e o mesmo argumento do Lema 2.3 obtemos

$$I(u) \geq \left(C_1 - C_3||u||^{k-1}\right)||u||^2, \tag{3.2}$$

onde $C_1 > 0$ e $C_2 > 0$. Escolhendo ρ de modo que $C_3\rho^{k-1} = \dfrac{C_1}{2}$, isto é, $\rho = \left(\dfrac{C_1}{2C_3}\right)^{\frac{1}{k-1}}$ obtemos que se $\|u\| = \rho$, então

$$\begin{aligned} I(u) &\geq (C_1 - C_3\rho^{k-1})\rho^2 \\ &= \frac{C_1}{2}\rho^2 = \alpha > 0, \end{aligned}$$

provando (i).

Vamos provar (ii). Seja $\varphi_1 > 0$ uma λ_1-autofunção. Usando resultados de regularidade segue que $\varphi_1 \in C(\overline{\Omega})$. Então existe $\Omega_0 \subset\subset \Omega$ tal que $|\Omega_0| > 0$, e

$$\min_{\overline{\Omega}_0} \varphi_1 \geq \beta > 0, \tag{3.3}$$

para algum $\beta > 0$. Consequentemente,

$$\lim_{t\to\infty} t\varphi_1(x) = +\infty.$$

Observe que

$$0 \leq 2F(x,t) \leq f(x,t)t, \quad \forall \ (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}. \tag{3.4}$$

De fato, considere para $(x,t) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}$ a função

$$g(x,t) = f(x,t)t - 2F(x,t).$$

Note que $g(x,0) = 0$ e derivando g em relação a t, segue que

$$g'(x,t) = f'(x,t)t + f(x,t) - 2f(x,t) = f'(x,t)t - f(x,t).$$

Por (f_5), f é não decrescente, então

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{f(x,t)}{t}\right) = \frac{tf'(x,t) - f(x,t)}{t^2} \geq 0.$$

Portanto $g'(x,t) \geq 0$, logo, g é não decrescente. Portanto, como $g(x,0) = 0$, temos que para todo $t \geq 0$, $g(x,t) \geq 0$, que é equivalente a (3.4).

Por outro lado, a desigualdade (3.4) nos garante que

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{F(x,t)}{t^2}\right) = \frac{f(x,t)t^2 - F(x,t)2t}{t^4} \geq 0,$$

assim segue que $\dfrac{F(x,t)}{t^2}$ é não decrescente. Para $t > 0$, segue de (3.3) que

$$t\varphi_1 \geq t\min_{\overline{\Omega}_0} \varphi_1 \geq t\beta.$$

Logo,

$$\frac{F(x,t\varphi_1)}{(t\varphi_1)^2} \geq \frac{F(x,t\beta)}{(t\beta)^2}.$$

Note que por L'Hospital e por $(\widehat{f}_3)$ temos

$$\lim_{t\to\infty} \frac{F(x,t\beta)}{(t\beta)^2} = \lim_{t\to+\infty} \frac{f(x,t\beta)}{2(t\beta)} = \infty \text{ uniformemente em } x \in \Omega,$$

e consequentemente,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{F(x,t\varphi_1)}{(t\varphi_1)^2} = \infty \text{ uniformemente em } x \in \overline{\Omega}_0.$$

Então para todo $R > 0$, existe $T = T(\beta, R) > 0$ tal que

$$\frac{F(x,t\varphi_1)}{(t\varphi_1)^2} \geq R > 0 \text{ para todo } t \geq T, x \in \overline{\Omega}_0. \tag{3.5}$$

Disto segue que,

$$\begin{aligned}
\frac{I(t\varphi_1)}{t^2} &\leq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla\varphi_1|^2\,dx - \frac{t^{q-1}}{q+1}\int_\Omega h(x)(\varphi_1)^{q+1}dx - \int_{\Omega_0} \frac{F(x,t\varphi_1)}{t^2}dx \\
&\leq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla\varphi_1|^2\,dx - \frac{t^{q-1}}{q+1}\int_\Omega h(x)(\varphi_1)^{q+1}dx - \int_{\Omega_0} R\varphi_1^2 dx.
\end{aligned}$$

Como $q - 1 < 0$,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t^{q-1}}{q+1}\int_\Omega h(x)(\varphi_1)^{q+1}dx = 0.$$

Logo, se R e t são suficientemente grandes,

$$\frac{I(t\varphi_1)}{t^2} < 0,$$

o que implica

$$I(t\varphi_1) < 0.$$

Dessa forma, tomando $\rho > 0$ dado em (i), segue que para t_0 suficientemente grande, existe $e = t_0\varphi_1$ tal que $\|e\| > \rho$ e $I(e) < 0$.

$\square$

Lema 3.2 *Suponha $(h_1), (h_3), (f_0) - (f_5)$ e que existe $(u_n) \subset H$ satisfazendo*

$$I'(u_n)u_n \to 0.$$

Então para todo $t > 0$, extraindo uma subsequência adequada, temos que

$$I(tu_n) \leq \frac{t^2+1}{2n} + \left[\frac{t^2}{2} - \frac{t^{q+1}}{q+1}\right]\int_\Omega h(x)(u_n^+)^{q+1}dx + I(u_n).$$

Demonstração: Por hipótese, podemos assumir que existe uma subsequência, denotada ainda por (u_n), tal que para todo $n \geq 1$, tem-se

$$-\frac{1}{n} \leq I'(u_n)u_n \leq \frac{1}{n},$$

isto é,

$$-\frac{1}{n} \leq \|u_n\|^2 - \int_\Omega h(x)(u_n^+)^{q+1}dx - \int_\Omega f(x,u_n^+)u_n^+dx \leq \frac{1}{n},$$

assim,

$$-\frac{1}{n} + \int_\Omega f(x,u_n^+)u_n^+dx \leq \|u_n\|^2 - \int_\Omega h(x)(u_n^+)^{q+1}dx \leq \frac{1}{n} + \int_\Omega f(x,u_n^+)u_n^+dx. \quad (3.6)$$

Então, para todo $t > 0$, usando o lado direito da desigualdade (3.6), temos

$$\begin{aligned}
I(tu_n) &= \frac{t^2}{2}\|u_n\|^2 - \frac{t^{q+1}}{q+1}\int_\Omega h(x)(u_n^+)^{q+1}dx - \int_\Omega F(x,tu_n^+)dx \\
&\leq \left[\frac{t^2}{2n} + \frac{t^2}{2}\int_\Omega h(x)(u_n^+)^{q+1}dx + \frac{t^2}{2}\int_\Omega f(x,u_n^+)u_n^+dx \right.\\
&\quad \left. -\frac{t^{q+1}}{q+1}\int_\Omega h(x)(u_n^+)^{q+1}dx - \int_\Omega F(x,tu_n^+)dx\right] \\
&= \left[\frac{t^2}{2n} + \left(\frac{t^2}{2} - \frac{t^{q+1}}{q+1}\right)\int_\Omega h(x)(u_n^+)^{q+1}dx \right.\\
&\quad \left. + \int_\Omega \left(\frac{t^2}{2}f(x,u_n^+)u_n^+ - F(x,tu_n^+)\right)dx\right]. \qquad (3.7)
\end{aligned}$$

Para $s \geq 0$, $t \geq 0$ seja

$$g(t) = \frac{1}{2}t^2 f(x,s)s - F(x,ts).$$

Observe que g é diferenciável para todo $t \geq 0$, com

$$g'(t) = tsf(x,s) - sf(x,ts).$$

Note que se $s > 0$ e $0 < t \leq 1$, então $ts \leq s$. Logo, por (f_5), segue que

$$\frac{f(x,ts)}{ts} \leq \frac{f(x,s)}{s},$$

ou seja,

$$stf(x,s) - sf(x,ts) \geq 0.$$

Da mesma forma, para $s > 0$ e $t \geq 1$, temos

$$tsf(x,s) - f(x,ts)s \leq 0.$$

Logo,

$$g'(t) = \begin{cases} \geq 0, & \text{se} \quad 0 \leq t \leq 1 \\ \leq 0, & \text{se} \quad t \geq 1 \end{cases}$$

Isto mostra que $g(t) \leq g(1)$ para todo $t \geq 0$. Assim, segue de (3.7) que

$$I(tu_n) \leq \frac{t^2}{2n} + \left(\frac{t^2}{2} - \frac{t^{q+1}}{q+1}\right) \int_\Omega h(x)(u_n^+)^{q+1}dx + \int_\Omega \left(\frac{1}{2}f(x,u_n^+)u_n^+ - F(x,u_n^+)\right)dx. \tag{3.8}$$

Por outro lado, usando o lado esquerdo da inequação (3.6), temos que

$$\begin{aligned} I(u_n) &= \frac{1}{2}\|u_n\|^2 - \frac{1}{q+1}\int_\Omega h(x)(u_n^+)^{q+1}dx - \int_\Omega F(x,u_n^+)dx \\ &\geq \Bigg[-\frac{1}{2n} + \frac{1}{2}\int_\Omega h(x)(u_n^+)^{q+1}dx + \frac{1}{2}\int_\Omega f(x,u_n^+)u_n^+dx \\ &\quad -\frac{1}{q+1}\int_\Omega h(x)(u_n^+)^{q+1}dx - \int_\Omega F(x,u_n^+)dx \Bigg] \\ &= \Bigg[-\frac{1}{2n} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q+1}\right)\int_\Omega h(x)(u_n^+)^{q+1}dx \\ &+ \int_\Omega \left(\frac{1}{2}f(x,u_n^+)u_n^+ - F(x,u_n^+)\right)dx \Bigg]. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Como $q+1 < 2$, então $\frac{1}{2} - \frac{1}{q+1} < 0$. Assim, se $h(x) \leq 0$, temos que

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q+1}\right)\int_\Omega h(x)(u_n^+)^{q+1}dx \geq 0.$$

Logo, em (3.9), temos que

$$I(u_n) \geq -\frac{1}{2n} + \int_\Omega \left(\frac{1}{2}f(x,u_n^+)u_n^+ - F(x,u_n^+)\right)dx,$$

isto é,

$$\int_\Omega \left(\frac{1}{2}f(x,u_n^+)u_n^+ - F(x,u_n^+)\right)dx \leq \frac{1}{2n} + I(u_n). \tag{3.10}$$

Dessa forma, de (3.8) e (3.10) segue

$$\begin{aligned} I(tu_n) &\leq \frac{t^2}{2n} + \left(\frac{t^2}{2} - \frac{t^{q+1}}{q+1}\right)\int_\Omega h(x)(u_n^+)^{q+1}dx + \int_\Omega \left(\frac{1}{2}f(x,u_n^+)u_n^+ - F(x,u_n^+)\right)dx \\ &\leq \frac{t^2}{2n} + \left(\frac{t^2}{2} - \frac{t^{q+1}}{q+1}\right)\int_\Omega h(x)(u_n^+)^{q+1}dx + \frac{1}{2n} + I(u_n), \end{aligned}$$

ou seja,

$$I(tu_n) \leq \frac{t^2+1}{2n} + \left(\frac{t^2}{2} - \frac{t^{q+1}}{q+1}\right) \int_\Omega h(x)(u_n^+)^{q+1} dx + I(u_n),$$

provando o lema.

□

Agora podemos demonstrar o Teorema C.

Demonstração do Teorema C: Pelo Lema 3.1 vemos que I satisfaz as condições geométricas do Teorema do Passo da Montanha. Assim, tendo em vista a versão do Teorema do Passo da Montanha com a condição de Cerami (cf. Teorema 1.4), é suficiente mostrar que I satisfaz a condição de Cerami no nível c do Teorema 1.4. Seja $(u_n) \subset H$ tal que

$$I(u_n) \to c \quad \text{e} \quad (1 + \|u_n\|) \|I'(u_n)\|_{H^*} \to 0.$$

Vamos mostrar que (u_n) é limitada. Suponha, por contradição, que (u_n) não seja limitada. Então, a menos de subsequência, $\|u_n\| \to \infty$. Sejam

$$t_n = \frac{2\sqrt{c}}{\|u_n\|} \qquad \text{e} \qquad w_n = t_n u_n = \frac{2u_n\sqrt{c}}{\|u_n\|}. \tag{3.11}$$

Então (w_n) é limitada em H, pois $\|w_n\| = 2\sqrt{c}$. Assim, a menos de subsequência,

$$\begin{cases} w_n \rightharpoonup w \ \text{ fracamente em } \ H, \\ w_n \to w \ \text{ fortemente em } \ L^r(\Omega), \ 1 \leq r < 2^*; \\ w_n(x) \to w(x) \ \text{ q.t.p em } \ \Omega, \\ |w_n(x)| \leq \psi_r(x) \ \text{ q.t.p em } \ \Omega \ \text{ para alguma função } \ \psi_r \in L^r(\Omega). \end{cases} \tag{3.12}$$

Da mesma forma, para $w_n^+ = \dfrac{2u_n^+\sqrt{c}}{\|u_n\|}$, tem-se

$$\begin{cases} w_n^+ \rightharpoonup w^+ \ \text{ fracamente em } \ H; \\ w_n^+ \to w^+ \ \text{ fortemente em } \ L^r(\Omega), \ 1 \leq r < 2^*; \\ w_n^+(x) \to w^+(x) \ \text{ q.t.p. em } \ \Omega; \\ |w_n^+(x)| \leq \psi_r(x) \in L^r(\Omega). \end{cases} \tag{3.13}$$

Afirmação: $w^+ \not\equiv 0$.

Suponha, por contradição, que $w^+ = 0$. Então por (3.13), temos que $w_n^+ \to 0$ em $L^1(\Omega)$ e em $L^{q+1}(\Omega)$. Usando o mesmo argumento da prova do Teorema B, temos

$$\lim_{n\to\infty} h(x)(w_n^+)^{q+1} dx = 0 = \lim_{n\to\infty} F(x, w_n^+(x)) dx. \tag{3.14}$$

Portanto

$$I(w_n) = \frac{1}{2}\|w_n\|^2 - \frac{1}{q+1}\int_\Omega h(x)(w_n^+)^{q+1}dx - \int_\Omega F(x, w_n^+)dx = 2c - o(1). \qquad (3.15)$$

Por outro lado, como $\|u_n\| \to \infty$ quando $n \to \infty$, segue de (3.11) que $t_n \to 0$. Como $I'(u_n)u_n \to 0$, o Lema 3.2 implica que,

$$\begin{aligned} I(w_n) &= I(t_n u_n) \\ &\leq \frac{t_n^2+1}{2n} + \left[\frac{t_n^2}{2} - \frac{t_n^{q+1}}{1+q}\right]\int_\Omega h(x)(u_n^+)^{q+1}dx + I(u_n) \\ &\leq \frac{t_n^2+1}{2n} + \left[\frac{t_n^{2-(q+1)}}{2} - \frac{1}{1+q}\right]\int_\Omega h(x)(w_n^+)^{q+1}dx + I(u_n). \end{aligned}$$

Como $\left[\frac{t_n^{2-(q+1)}}{2} - \frac{1}{1+q}\right]$ é limitado , segue de (3.14) que

$$\left[\frac{t_n^{2-(q+1)}}{2} - \frac{1}{1+q}\right]\int_\Omega h(x)(w_n^+)^{q+1}dx \to 0.$$

Assim, como $\frac{t_n^2+1}{2n} \to 0$ e $I(u_n) \to c$, concluímos que $I(w_n) \leq c + o(1)$, contrariando (3.15), pois $c > 0$. Logo $w^+ \not\equiv 0$.

Vamos dividir Ω em duas partes:

$$\Omega_1 = \{x \in \Omega \;:\; w^+(x) = 0\} \;\text{ e }\; \Omega_2 = \{x \in \Omega \;:\; w^+(x) > 0\}.$$

Note que por (3.11), $u_n = \frac{w_n}{t_n}$ e, por (3.13), $w_n^+(x) \to w^+(x)$ q.t.p em Ω. Logo $u_n(x) \to +\infty$ q.t.p em Ω_2. Dessa forma, como no Teorema B, temos que

$$\int_\Omega \nabla w_n \nabla \phi dx - \frac{1}{\|u_n\|^{1-q}}\int_\Omega h(x)(w_n^+)^q \phi dx - \int_\Omega p_n(x, u_n^+)w_n^+\phi dx = o(1),$$

onde

$$p_n(x, u_n(x)) = \begin{cases} \dfrac{f(x, u_n(x))}{u_n(x)}, & \text{se } \; u_n(x) > 0, \\ 0, & \text{se } \; u_n(x) \leq 0. \end{cases}$$

Tomando $\phi = w^+ = \max\{0, w\}$, temos

$$\int_\Omega \nabla w_n \nabla w^+ dx - \frac{1}{\|u_n\|^{1-q}}\int_\Omega h(x)(w_n^+)^q w^+ dx - \int_\Omega p_n(x, u_n^+)w_n^+ w^+ dx = o(1). \quad (3.16)$$

Como em (2.38) temos que

$$\frac{1}{\|u_n\|^{1-q}} \int_\Omega h(x)(w_n^+)^q w^+ dx \longrightarrow 0$$

e portanto, como $w_n \rightharpoonup w$, segue de (3.16) que

$$\begin{aligned} \int_\Omega \left|\nabla w^+\right|^2 dx &= \int_\Omega p_n(x, u_n^+) w_n^+ w^+ dx + o(1) \\ &= \int_\Omega \frac{f(x, u_n^+)}{u_n^+} w_n^+ w^+ dx + o(1). \end{aligned}$$

Usando $(\widehat{f_3})$ e a definição de Ω_2 obtemos

$$\frac{f(x, u_n^+)}{u_n^+} w_n^+ w^+ \longrightarrow \infty \quad \text{q.t.p em} \quad \Omega_2.$$

Logo, se $|\Omega_2| > 0$, o Lema de Fatou implica

$$\int_\Omega \left|\nabla w^+\right|^2 dx \geq \int_\Omega \lim_{n\to\infty} \inf \frac{f(x, u_n^+)}{u_n^+} w_n^+ w^+ dx = \infty,$$

o que mostra que $|\Omega_2| = 0$. Assim $\Omega_1 = \Omega$, o que contraria $w^+ \not\equiv 0$. Essa contradição mostra que (u_n) é limitada.

Observe que sendo (u_n) uma sequência de Cerami no nível c então (u_n) é uma sequência de Palais-Smale no nível c. De fato, como

$$(1 + \|u_n\|) \|I'(u_n)\|_{H^*} \to 0,$$

segue que

$$\|I'(u_n)\|_{H^*} \to 0.$$

Logo, (u_n) é uma sequência de Palais-Smale no nível c que é limitada. Como na prova do Teorema B, obtemos uma solução $v_2 \in H$ do problema (P) tal que $I(v_2) > 0$.

$\square$

3.2 Existência de duas soluções

Observe inicialmente que, usando $(h_1), (h_2), (f_1), (f_2)$ e (f_4), e procedendo como na prova do Teorema A, obtemos uma solução $v_1 \in H$ tal que $I(v_1) < 0$. Para a segunda solução note que, pelos Lemas 2.3 e 3.1 (ii), I satisfaz as condições geométricas do Teorema do Passo da Montanha. Como no Teorema C, basta verificar que toda sequência de Cerami no nível c do Teorema do Passo da Montanha é limitada. Seja então $(u_n) \subset H$ tal que

$$I(u_n) \to c \;\text{ e }\; (1 + \|u_n\|) \|I'(u_n)\|_{H^*} \to 0.$$

Assim

$$I(u_n) = \frac{1}{2}\|u_n\|^2 - \frac{1}{q+1}\int_\Omega h(x)(u_n^+)^{q+1}dx - \int_\Omega F(x,u_n^+)dx = c + o(1), \tag{3.17}$$

$$I'(u_n)\phi = \int_\Omega \nabla u_n \nabla \phi dx - \int_\Omega h(x)(u_n^+)^q \phi dx - \int_\Omega f(x,u_n^+)\phi dx = o(1), \forall\, \phi \in H, \tag{3.18}$$

e, portanto,

$$I'(u_n)u_n = \int_\Omega |\nabla u_n|^2\, dx - \int_\Omega h(x)(u_n^+)^{q+1}dx - \int_\Omega f(x,u_n^+)u_n dx = o(1). \tag{3.19}$$

Dado $\epsilon > 0$, segue de (f_6)(i) que existe $T_1 > 0$ tal que

$$\left|\frac{f(x,t)}{t^{1+\tau}}\right| < \epsilon, \quad \forall \;\; x \in \Omega, \quad t \geq T_1.$$

Logo,

$$f(x,t) \leq \epsilon t^{1+\tau}, \quad \forall \;\; x \in \Omega, \quad t \geq T_1. \tag{3.20}$$

Afirmamos agora que existe $T_2 > 0$ tal que

$$f(x,t)t - 2F(x,t) > \frac{\overline{\omega}}{2}t^{1+\sigma} > 0, \quad \forall \;\; x \in \Omega, \quad t \geq T_2, \tag{3.21}$$

onde $\overline{\omega} = \omega$ se (f_6)(ii) ocorre com $\omega < \infty$ ou $\overline{\omega}$ é um número positivo qualquer se $\omega = \infty$ em (f_6)(ii). De fato, se $\omega < \infty$, então existe $T_2 > 0$ tal que

$$\left|\frac{f(x,t)t - 2F(x,t)}{t^{1+\sigma}} - \omega\right| < \frac{\omega}{2}, \quad \forall \;\; x \in \Omega, \quad t \geq T_2,$$

donde

$$f(x,t)t - 2F(x,t) > \frac{\omega}{2}t^{1+\sigma} > 0, \quad \forall \;\; x \in \Omega, \quad t \geq T_2.$$

No caso em que $\omega = \infty$, basta fixar $\overline{\omega} > 0$ qualquer e observar que como $\omega = \infty$, existe $T_2 > 0$ tal que

$$\left|\frac{f(x,t)t - 2F(x,t)}{t^{1+\sigma}}\right| > \frac{\overline{\omega}}{2}, \quad \forall \;\; x \in \Omega, \quad t \geq T_2.$$

Logo, segue de (3.4) que (3.21) é verdadeira.

Seja $T = \max\{T_1, T_2\}$ e, para cada $n \geq 1$, considere

$$A_n = \{x \in \Omega : |u_n(x)| \geq T\}, \quad B_n = \{x \in \Omega : |u_n(x)| \leq T\}.$$

Como f é contínua, existe $C_0 = C_0(T)$ tal que

$$-C_0 \leq \int_{B_n} (f(x,u_n)u_n - 2F(x,u_n))dx \leq C_0. \tag{3.22}$$

Além disso,

$$f(x,u_n)u_n - 2F(x,u_n) \geq 0 \ \text{ em } \ A_n. \tag{3.23}$$

Para $T>0$ definido acima, segue de (3.17) e (3.19) que

$$\left(\frac{2}{q+1}-1\right)\int_\Omega h(x)(u_n^+)^{q+1}dx + 2c + o(1) \ = \ \int_\Omega \Big(f(x,u_n^+)u_n - 2F(x,u_n^+)\Big)dx,$$

Mas, de (3.21) – (3.23), temos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \Big(f(x,u_n^+)u_n - 2F(x,u_n^+)\Big)dx \ &= \ \Big[\int_{A_n}\Big(f(x,u_n^+)u_n - 2F(x,u_n^+)\Big)dx \\
&\quad + \int_{B_n}\Big(f(x,u_n^+)u_n - 2F(x,u_n^+)\Big)dx\Big] \\
&\geq \ \int_{A_n}\Big(f(x,u_n^+)u_n - 2F(x,u_n^+)\Big)dx - C_0 \\
&\geq \ \frac{\overline{\omega}}{2}\int_{A_n}\left|u_n^+\right|^{1+\sigma}dx - C_0.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\left(\frac{2}{q+1}-1\right)\int_\Omega h(x)(u_n^+)^{q+1}dx + 2c + o(1) \geq \frac{\overline{\omega}}{2}\int_{A_n}\left|u_n^+\right|^{1+\sigma}dx - C_0.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{2}{q+1}-1\right)\int_\Omega h(x)(u_n^+)^{q+1}dx \ &\leq \ \left(\frac{2}{q+1}-1\right)|h|_\infty\int_\Omega |u_n|^{q+1}dx \\
&\leq \ C_1\left(\frac{2}{q+1}-1\right)|h|_\infty \|u_n\|^{q+1}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{\overline{\omega}}{2}\int_{A_n}\left|u_n^+\right|^{1+\sigma}dx - C_0 \ \leq \ C_1\left(\frac{2}{q+1}-1\right)|h|_\infty \|u_n\|^{q+1} + 2c + o(1),$$

e consequentemente

$$\int_{A_n}\left|u_n^+\right|^{1+\sigma}dx \leq C_2 + C_3\|u_n\|^{q+1} + o(1), \tag{3.24}$$

onde $C_2 = C_2(C_0, c, \overline{\omega})$, $C_3 = C_3(\overline{\omega}, q, |h|_\infty, C_1)$.

Observe que fixado $m = \dfrac{1+q}{q} > 2$, segue de (3.17) e (3.19) que

$$\frac{1-q}{2(1+q)}\|u_n\|^2 - \frac{1-q}{q+1}\int_\Omega h(x)\left|u_n^+\right|^{q+1}dx - \int_\Omega \left((F(x,u_n^+) - \frac{1}{m}f(x,u_n^+)u_n^+\right)dx = c + o(1). \tag{3.25}$$

Note que pela imersão de Sobolev, tem-se

$$\frac{1-q}{1+q}\int_\Omega h(x)\left|u_n\right|^{q+1}dx \leq \frac{1-q}{1+q}|h|_\infty |u_n|_{q+1}^{q+1} \leq C_4\|u_n\|^{q+1}, \tag{3.26}$$

por (f_1) e pela definição de B_n, existe $C_5 > 0$ tal que

$$\left|\int_{B_n}\left(F(x,u_n^+) - \frac{1}{m}f(x,u_n^+)u_n^+\right)dx\right| \leq C_5. \tag{3.27}$$

Usando (3.23), temos que

$$\int_{A_n}\left(F(x,u_n^+) - \frac{1}{m}f(x,u_n^+)u_n^+\right)dx \leq \int_{A_n}\left(\frac{1}{2}f(x,u_n^+)u_n^+ - \frac{q}{q+1}f(x,u_n^+)u_n^+\right)dx. \tag{3.28}$$

Dessa forma, usando (3.26), (3.27) e (3.28), segue de (3.25) que

$$\begin{aligned}
&\frac{1-q}{2(1+q)}\|u_n\|^2 + o(1) = \\
&\left[c + \frac{1-q}{1+q}\int_\Omega h(x)\left|u_n^+\right|^{q+1}dx + \int_\Omega\left(F(x,u_n^+) - \frac{1}{m}f(x,u_n^+)u_n^+\right)dx\right] \leq \\
&\left[c + C_5 + C_4\|u_n\|^{q+1} + \int_{A_n}\left(\frac{1}{2}f(x,u_n^+)u_n^+ - \frac{q}{q+1}f(x,u_n^+)u_n^+\right)dx\right] = \\
&\left[c + C_5 + C_4\|u_n\|^{q+1} + \frac{1-q}{2(q+1)}\int_{A_n} f(x,u_n^+)u_n^+dx\right].
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Tomando $\epsilon = \dfrac{2(1+q)}{1-q}$ em (3.20), temos

$$\left(\frac{1-q}{2(1+q)}\right)f(x,t) \leq t^{1+\tau}.$$

Logo

$$\begin{aligned}\frac{1-q}{2(1+q)}\|u_n\|^2+o(1) &\leq c+C_5+C_4\|u_n\|^{q+1}+\int_{A_n}\left|u_n^+\right|^{2+\tau}dx\\ &= c+C_5+C_4\|u_n\|^{q+1}+\int_{A_n}\left|u_n^+\right|^{1+\tau}u_n^+dx\\ &\leq c+C_5+C_4\|u_n\|^{q+1}+\int_{A_n}|u_n|^{1+\tau}|u_n|\,dx. \qquad (3.30)\end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Hölder com expoentes $\dfrac{1+\sigma}{1+\tau}$, $\dfrac{1+\sigma}{\sigma-\tau}$ e a imersão de Sobolev $H\hookrightarrow L^{\frac{1+\sigma}{\sigma-\tau}}(\Omega)$, obtemos

$$\begin{aligned}\int_{A_n}|u_n|^{1+\tau}|u_n|\,dx &\leq \left(\int_{A_n}\left|u_n^{1+\tau}\right|^{\frac{1+\sigma}{1+\tau}}dx\right)^{\frac{1+\tau}{1+\sigma}}\left(\int_{A_n}|u_n|^{\frac{1+\sigma}{\sigma-\tau}}dx\right)^{\frac{\sigma-\tau}{1+\sigma}}\\ &= \left(\int_{A_n}|u_n|^{1+\sigma}dx\right)^{\frac{1+\tau}{1+\sigma}}|u_n|_{\frac{1+\sigma}{\sigma-\tau}}\\ &\leq C_6\left(\int_{A_n}|u_n|^{1+\sigma}dx\right)^{\frac{1+\tau}{1+\sigma}}\|u_n\|.\end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Young com $\epsilon=\dfrac{1+q}{1-q}$, temos

$$C_6\left(\int_{A_n}|u_n|^{1+\sigma}dx\right)^{\frac{1+\tau}{1+\sigma}}\|u_n\|\leq\frac{1+q}{1-q}C_6^2\left(\int_{A_n}|u_n|^{1+\sigma}dx\right)^{\frac{2(1+\tau)}{1+\sigma}}+\frac{1-q}{4(1+q)}\|u_n\|^2.$$

Dessa forma,

$$\int_{A_n}|u_n|^{1+\tau}|u_n|\,dx\leq\frac{1+q}{1-q}C_6^2\left(\int_{A_n}|u_n|^{1+\sigma}dx\right)^{\frac{2(1+\tau)}{1+\sigma}}+\frac{1-q}{4(1+q)}\|u_n\|^2.$$

Logo, por (3.30), obtemos

$$\begin{aligned}\frac{1-q}{2(1+q)}\|u_n\|^2+o(1) &\leq \Bigg[c+C_5+C_4\|u_n\|^{q+1}+\\ &\quad\frac{1+q}{1-q}C_6^2\left(\int_{A_n}|u_n|^{1+\sigma}dx\right)^{\frac{2(1+\tau)}{1+\sigma}}+\frac{1-q}{4(1+q)}\|u_n\|^2\Bigg],\end{aligned}$$

e, por (3.24), temos que

$$\frac{1-q}{2(1+q)}\left\|u_n\right\|^2+o(1) \;\leq\; \Bigg[c+C_5+C_4\left\|u_n\right\|^{q+1}+$$

$$\frac{1+q}{1-q}C_6^2\Big(C_2+C_3\left\|u_n\right\|^{q+1}\Big)^{\frac{2(1+\tau)}{1+\sigma}}+\frac{1-q}{4(1+q)}\left\|u_n\right\|^2\Bigg],$$

assim,

$$\frac{1-q}{4(1+q)}\left\|u_n\right\|^2+o(1) \;\leq\; C_7+C_4\left\|u_n\right\|^{q+1}+C_9\Big(C_1+C_2\left\|u_n\right\|^{q+1}\Big)^{\frac{2(1+\tau)}{1+\sigma}}. \tag{3.31}$$

Suponha, por contradição, que (u_n) não seja limitada. Então, a menos de subsequência, $\|u_n\| \to \infty$. Multiplicando (3.31) por $\|u_n\|^{-2}$, temos

$$\frac{1-q}{4(1+q)}+o(1) \leq \frac{C_7}{\left\|u_n\right\|^2}+C_4\left\|u_n\right\|^{(q+1)-2}+\frac{C_9}{\left\|u_n\right\|^2}\Big(C_1+C_2\left\|u_n\right\|^{q+1}\Big)^{\frac{2(1+\tau)}{1+\sigma}}. \tag{3.32}$$

Note agora que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{C_7}{\left\|u_n\right\|^2}=\lim_{n\to\infty}C_4\left\|u_n\right\|^{(q+1)-2}=0,$$

visto que $q+1<2$. Por outro lado, como $q+(1+q)\tau<\sigma<1$, então $(q+1)+(q+1)\tau<\sigma+1<2$, donde

$$\frac{2(q+1)(1+\tau)}{1+\sigma}<2,$$

e portanto

$$\lim_{n\to\infty}\frac{C_9}{\left\|u_n\right\|^2}\Big(C_1+C_2\left\|u_n\right\|^{q+1}\Big)^{\frac{2(1+\tau)}{1+\sigma}}=0.$$

Assim, passando (3.32) ao limite obtemos $0<\dfrac{1-q}{4(1+q)}\leq 0$, o que é um absurdo. Portanto (u_n) é limitada. Como no Teorema C, obtemos uma solução $v_2 \in H$ do problema (P) tal que $I(v_2)>0$. Como antes, se $h(x)\geq 0$, então v_1 e v_2 são positivas.

$\square$

Apêndice A

Campo Pseudogradiente

Vamos denotar por X um espaço de Banach com norma $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|_{X'}$ a norma do dual de X.

Definição A.1 *Dizemos que $v \in X$ é um vetor pseudogradiente para I em $u \in X$, se*

(PG1) $\|v\| \leq 2\|I'(u)\|_{X'}$;

(PG2) $I'(u)v \geq \|I'(u)\|_{X'}^2$.

Observações:
(1) Se X é um espaço de Hilbert com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, então $\nabla I(u)$ é um vetor pseudogradiente para $I \in X$. De fato, pelo Teorema da Representação de Riez, para cada $u \in X$, temos que $\nabla I(u) \in X$ é o único vetor que satisfaz

$$I'(u)v = \langle \nabla I(u), v \rangle$$

e

$$\|I'(u)\|_{X'} = \|\nabla I(u)\|.$$

Dessa forma, para todo $u \in X$, temos

(i) $\|\nabla I(u)\| = \|I'(u)\|_{X'} \leq 2\|I'(u)\|_{X'}$

(ii) $I'(u)\nabla I(u) = \langle \nabla I(u), \nabla I(u) \rangle_X = \|\nabla I(u)\|^2 = \|I'(u)\|_{X'}^2$,

ou seja, $\nabla I(u)$ é um vetor pseudogradiente para I em u.

(2) Se $I'(u) \neq 0$, então existe um vetor pseudogradiente para I em u. De fato, lembrando que

$$\|I'(u)\|_{X'} = \sup_{\|w\|=1} I'(u)w,$$

então obtemos $w \in X$ tal que $\|w\| = 1$ e

$$I'(u)w > \frac{2}{3}\|I'(u)\|_{X'}.$$

Assim

$$y = \frac{3}{2}\|I'(u)\|_{X'}\, w$$

é um vetor pseudogradiente para I em u, pois

$$\|y\| = \frac{3}{2}\|I'(u)\|_{X'}\|w\| = \frac{3}{2}\|I'(u)\|_{X'} \leq 2\|I'(u)\|_{X'}$$

e

$$I'(u)y = I'(u)\frac{3}{2}\|I'(u)\|_{X'}\, w > \|I'(u)\|^2_{X'}.$$

Definição A.2 *Seja* $\widetilde{X} = \{u \in X \ : \ I'(u) \neq 0\}$. *Um campo pseudogradiente para* I *em* $\widetilde{X}$ *é uma aplicação* $g : \widetilde{X} \to X$ *tal que*

(i) *para cada* $u \in \widetilde{X}$, $g(u)$ *é um vetor pseudogradiente para* I *em* u;

(ii) g *é localmente lipschitziana.*

Lema A.1 *Se* $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ *então existe um campo pseudogradiente para* I *em* $\widetilde{X}$.

Demonstração: Dado $u \in \widetilde{X}$, temos que $y = \frac{3}{2}\|I'(u)\|_{X'}\, w$ é um vetor pseudogradiente para I em $u \in X$. Como I' é contínua, existe uma vizinhança aberta N_u de u tal que para todo $v \in N_u$ tem-se

$$\|y\| \leq 2\|I'(v)\|_{X'} \quad \text{e} \quad I'(v)y \geq \|I'(v)\|^2_{X'}. \tag{A.1}$$

Note que a família $\mathcal{N} = \{N_u : u \in X\}$ é uma cobertura aberta de $\widetilde{X}$. Como $\widetilde{X}$ é um espaço métrico, então $\widetilde{X}$ é paracompacto. Logo, existe uma cobertura aberta e localmente finita $\mathcal{M} = \{M_i : i \in \Lambda\}$ de $\widetilde{X}$ que refina $\mathcal{N}$. Assim, para cada $i \in \Lambda$, existe $v \in \widetilde{X}$ tal que $M_i \subset N_v$. Consequentemente, existe $y = y_i$ satisfazendo $(A.1)$ para todo $u \in M_i$.

Defina

$$d_i(u) = d(u, X \backslash M_i)$$

e

$$g(u) = \sum_{i \in \Lambda} \frac{d_i(u)}{\displaystyle\sum_{j \in \Lambda} d_j(u)} y_i.$$

Como o refinamento é localmente finito, cada $u \in \widetilde{X}$ pertence apenas a um número finito de M_i. Assim, as somas definidas em g são finitas, pois d_i se anula em $X \backslash M_i$. Logo, g está bem definida. E ainda, temos

$$0 \leq \frac{d_i(u)}{\sum_{j \in \Lambda} d_j(u)} \leq 1$$

e

$$\sum_{i\in\Lambda} \frac{d_i(u)}{\displaystyle\sum_{j\in\Lambda} d_j(u)} = \frac{1}{\displaystyle\sum_{j\in\Lambda} d_j(u)} \sum_{i\in\lambda} d_i(u) = 1.$$

Vamos verificar que g é um campo pseudogradiente para I em $\widetilde{X}$.

Como y_i satisfaz $(A.1)$ para todo $u \in M_i$, temos

$$\|g(u)\| = \left\| \sum_{i\in\Lambda} \frac{d_i(u)}{\displaystyle\sum_{j\in\Lambda} d_j(u)} y_i \right\| = \|y_i\| \leq 2\,\|I'(u)\|_{X'}$$

e

$$I'(u)g(u) = I'(u) \sum_{i\in\Lambda} \frac{d_i(u)}{\displaystyle\sum_{j\in\Lambda} d_j(u)} y_i = I'(u)y_i \geq \|I'(u)\|_{X'}^2 .$$

Além disso, g é localmente lipschitziana. De fato, por um procedimento análogo ao que fizemos para mostrar que a função ψ definida no Lema 1.1 é localmente lipschitiziana, mostramos que cada parcela

$$\frac{d_i(u)}{\sum_{j\in\Lambda} d_j(u)} y_i$$

é localmente lipschitiziana. Dessa forma, para cada $u \in \widetilde{X}$ existe uma vizinhança $V_u \subseteq \widetilde{X}$ tal que g restrito a V_u é uma soma finita de funções localmente lipschitizianas. Isso mostra que g é localmente lipschitiziana e conclui a prova do lema.

$\square$

Apêndice B

Funcionais Diferenciáveis

Consideremos os funcionais J, J_0 no espaço $H_0^1(\Omega)$ definidos por

$$J_0(u) = \frac{1}{2}\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx = \frac{1}{2}\|u\|^2$$

e

$$J(u) = \int_{\Omega} P(x,u)dx,$$

onde $P(x,s) = \displaystyle\int_0^s p(x,t)dt$, $p : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satifaz as propriedades que serão introduzidas no decorrer do texto.

Definição B.1 *Sejam X um espaço de Banach e U um subconjunto aberto de X. Considere o funcional $I : U \to \mathbb{R}$. Dizemos que I tem derivada de Gateux $L \in X'$ em $u \in U$ se, para $v \in X$,*

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t}[I(u+tv) - I(u) - Ltv] = 0.$$

A derivada de Gateux I em u é denotada por $I'(u)$. O funcional I tem uma derivada de Fréchet $L \in X'$ em $u \in U$, se

$$\lim_{v \to 0} \frac{1}{\|v\|}[I(u+v) - I(u) - Lv] = 0.$$

Dizemos que o funcional $I \in C^1(U, \mathbb{R})$ se a derivada de Fréchet de I existe e é contínua sobre U.

Observações:

(1) A derivada de Gateux é dada por

$$I'(u)v = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}[I(u+tv) - I(u)].$$

(2) Todo funcional Fréchet diferenciável é também Gateux diferenciável.

Proposição B.1 *Se I tem derivada de Gateux contínua em U, então $I \in C^1(U, \mathbb{R})$.*

Demonstração: Sejam $u+v$ e $u \in U$. Como I possui derivada de Gateaux sobre U, então pelo Teorema do Valor Médio existe $\theta \in (0,1)$ tal que

$$I(u+v) - I(u) = I'(u+\theta v)v.$$

Note que

$$I(u+v) - I(u) - I'(u)v = I'(u+\theta v)v - I'(u)v,$$

donde

$$\begin{aligned} \frac{1}{\|v\|}[I(u+v) - I(u) - I'(u)v] &= \frac{1}{\|v\|}[I'(u+\theta v)v - I'(u)v] \\ &= [I'(u+\theta v) - I'(u)]\frac{v}{\|v\|}. \end{aligned}$$

Deste modo,

$$\left| \frac{1}{\|v\|}[I(u+v) - I(u) - I'(u)v] \right| \leq \| \ [I'(u+\theta v) - I'(u)] \ \|.$$

Como, por hipótese, a derivada de Gateux é contínua, segue que dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $||v|| < \delta$, então

$$\| \ [I'(u+\theta v) - I'(u)] \ \| < \epsilon.$$

Logo,

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{\|v\|}[I(u+v) - I(u) - I'(u)v] = 0.$$

Deste modo, temos que a derivada de Fréchet existe e é igual a derivada de Gateux que, por hipótese, é contínua. Logo, $I \in C^1(U, \mathbb{R})$.

□

Proposição B.2 $J_0 \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$.

Demonstração: Vamos verificar a existência da derivada de Gateux de J_0. Dado $u \in H_0^1(\Omega)$, para cada $v \in H_0^1(\Omega)$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\lim_{t \to 0} \frac{\|u+tv\|^2 - \|u\|^2}{t} &= \frac{1}{2}\lim_{t \to 0}[2\langle u, v\rangle + t\|v\|^2] \\ &= \langle u, v\rangle \end{aligned}$$

Logo, a derivada de Gateux existe e é dada por

$$J_0'(u)v = \langle u, v\rangle.$$

Vamos mostrar que ela é contínua. Para tal, tome $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$ com $u_n \to u$ em $H_0^1(\Omega)$. Dado $\epsilon > 0$ e $v \in H_0^1(\Omega)$ tal que $\|v\| \leq 1$, temos que, para n suficentemente grande,

$$\begin{aligned} |(J_0'(u_n) - J_0'(u))v| &= |J_0'(u_n - u)v| \\ &= |\langle u_n - u, v\rangle| \\ &\leq \|u_n - u\| \ \|v\| \\ &< \epsilon, \end{aligned}$$

implicando que

$$\|J_0'(u_n) - J_0'(u)\|_{H_0^1(\Omega)'} = \sup_{\substack{\|v\|\leq 1 \\ v\in H_0^1(\Omega)}} |(J_0'(u_n) - J_0'(u))v| \leq \epsilon.$$

Portanto,

$$\|J_0'(u_n) - J_0'(u)\|_{H_0^1(\Omega)'} \to 0 \ \text{ quando } \ n \to \infty.$$

Logo, J_0' é contínuo. Pela Proposição $B.1$, $J_0 \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$.

□

Para provar que o funcional $J \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$, precisaremos dos lemas que enunciaremos a seguir.

Lema B.1 *Sejam Ω um domínio limitado, $p \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, $r, q \geq 1$, $a \geq 0$ e $b \geq 0$ tais que*

$$|p(x,s)| \leq a + b|s|^{\frac{r}{q}} \ \text{ para todo } \ (x,s) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}.$$

Então o operador $G : L^r(\Omega) \to L^q(\Omega)$ dado por

$$G(u) = p(x, u(x))$$

é contínuo e limitado.

Demonstração: Seja $(u_n) \in L^r(\Omega)$ tal que $u_n \to u \in L^r(\Omega)$. Então, a menos de subsequência, temos

$$u_n(x) \to u(x) \ \text{ q.t.p em } \ \Omega \ \text{ e } \ |u_n(x)| \leq \psi_r(x) \in L^r(\Omega).$$

Note que, usando a hipótese, temos

$$
\begin{aligned}
|p(x,u_n(x)) - p(x,u)|^q &\leq (|p(x,u_n(x))| + |p(x,u)|)^q \\
&\leq 2^{q-1}(|p(x,u_n(x))|^q + |p(x,u)|^q) \\
&\leq 2^{q-1}\left[\left(a + b|u_n(x)|^{\frac{r}{q}}\right)^q + \left(a + b|u(x)|^{\frac{r}{q}}\right)^q\right] \\
&\leq 2^{q-1}[2^{q-1}(a^q + b^q|u_n(x)|^r) + 2^{q-1}(a^q + b^q|u(x)|^r)] \\
&\leq C_1 + C_2(|u_n(x)|^r + |u(x)|^r), \\
&\leq C_1 + 2C_2\psi_r^r(x) \in L^1(\Omega)
\end{aligned}
$$

onde $C_1 = 2^{2(q-1)}2a^q$ e $C_2 = 2^{2(q-1)}b^q$.

Usando o Teorema da Convergência Dominada segue que,

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} |G(u_n) - G(u)|_q^q &= \lim_{n\to\infty} \int_\Omega |G(u_n) - G(u)|^q \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_\Omega |p(x,u_n(x)) - p(x,u)|^q \\
&= \int_\Omega \lim_{n\to\infty} |p(x,u_n(x)) - p(x,u)|^q \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Portanto, $G(u_n) \to G(u)$ em $L^q(\Omega)$, donde G é um operador contínuo.

Vamos mostrar que G é limitado. Para tal, tome $u \in L^r(\Omega)$ com $|u|_r = 1$. Observe que,

$$
\begin{aligned}
|G(u)|_q^q &= \int_\Omega |p(x,u(x))|^q \\
&\leq \int_\Omega \left(a + b\,|u(x)|^{\frac{r}{q}}\right)^q \\
&\leq 2^{q-1}\int_\Omega \left(a^q + b^q\,|u(x)|^r\right) \\
&= 2^{q-1}a^q\,|\Omega| + 2^{q-1}b^q\,|u|_r^r \\
&= 2^{q-1}(a^q\,|\Omega| + b^q).
\end{aligned}
$$

Portanto G é limitado.

□

Dados $r_1, r_2, q_1, q_2 \geq 1$, considere os seguintes conjuntos

$$\Pi_1 = L^{r_1}(\Omega) \cap L^{r_2}(\Omega) \text{ e } \Pi_2 = L^{q_1}(\Omega) + L^{q_2}(\Omega).$$

Pode-se mostrar (cf. [1]) que Π_2 é um espaço vetorial com norma

$$\|u\|_{\Pi_2} = \inf\{|u_1|_{q_1} + |u_2|_{q_2} : u = u_1 + u_2,\ u_1 \in L^{q_1}(\Omega) \text{ e } u_2 \in L^{q_2}(\Omega)\}.$$

Lema B.2 *Sejam Ω um domínio limitado, $p \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ e $a, b \geq 0$ tais que*

$$|p(x,s)| \leq a\,|s|^{\frac{r_1}{q_1}} + b\,|s|^{\frac{r_2}{q_2}} \quad \textit{para todo} \quad (x,s) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R},$$

e defina o operador $G : \Pi_1 \to \Pi_2$ por

$$G(u) = p(x, u(x)).$$

Então $G = G_1 + G_2$, onde G_i é uma aplicação contínua e limitada de $L^{r_i}(\Omega)$ em $L^{q_i}(\Omega)$, $i = 1, 2$. Em particular, G é uma aplicação contínua e limitada de Π_1 em Π_2.

Demonstração: Seja $\xi \in C(\mathbb{R}, [0,1])$ tal que

$$\xi(s) = \begin{cases} 1 & \text{se } s \in [-1/2, 1/2] \\ 0 & \text{se } s \in \mathbb{R}\backslash(-2,2) \end{cases}$$

e defina $\alpha : \Omega \times [-1/2, 1/2] \to \mathbb{R}$ por

$$\alpha(x,s) = \xi(s)p(x,s)$$

e ainda $\beta : \Omega \times \mathbb{R}\backslash(-2,2) \to \mathbb{R}$ por

$$\beta(x,s) = (1 - \xi(s))p(x,s).$$

Sem perda de generalidade, suponha $\frac{r_1}{q_1} \leq \frac{r_2}{q_2}$. Como $\xi = 1$ em $[-1/2, 1/2]$ temos que,

$$\begin{aligned} |\alpha(x,s)| &= |p(x,s)| \\ &\leq a\,|s|^{\frac{r_1}{q_1}} + b\,|s|^{\frac{r_2}{q_2}} \\ &\leq a\,|s|^{\frac{r_1}{q_1}} + b\,|s|^{\frac{r_1}{q_1}} \\ &\leq 2C_3\,|s|^{\frac{r_1}{q_1}}, \end{aligned}$$

onde $C_3 = \max\{a, b\}$. Analogamente temos que

$$|\beta(x,s)| \leq 2C_3\,|s|^{\frac{r_2}{q_2}}.$$

Definindo as aplicações

$$G_1 : L^{r_1}(\Omega) \to L^{q_1}(\Omega), \quad G_1(u) = \alpha(x, u(x))$$

$$G_2 : L^{r_2}(\Omega) \to L^{q_2}(\Omega), \quad G_2(u) = \alpha(x, u(x))$$

segue do Lema $B.1$ que G_1 e G_2 são aplicações contínuas e limitadas. Além disso, como

$$u_0 = (G_1 + G_2)(u) = G_1(u) + G_2(u) = u_1 + u_2,$$

onde $u_1 \in L^{q_1}(\Omega)$ e $u_2 \in L^{q_2}(\Omega)$, então $G = G_1 + G_2$. Logo, $G = G_1 + G_2$ é uma aplicação contínua e limitada de Π_1 em Π_2.

$\square$

Teorema B.1 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado. Suponha que $p \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, que existam constantes $r, q > 0$ e $a, b > 0$ tais que*

$$|p(x,s)| \leq a\,|s|^r + b\,|s|^q \quad \textit{para todo} \quad (x,s) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R},$$

e que as imersões abaixo sejam contínuas

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{r+1}(\Omega), \quad H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{q+1}(\Omega).$$

Então o funcional $J(u) = \displaystyle\int_\Omega P(x,u)dx$ onde

$$P(x,u) = \int_0^u p(x,s)ds,$$

satisfaz $J \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$, $J'(u)v = \displaystyle\int_\Omega p(x,u)vdx$ para todo $v \in H_0^1(\Omega)$. Além disso, se as imersões acima forem compactas, então

$$J' : H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega)'$$

é compacto.

Demonstração: Para mostrar que $J \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ devemos mostrar que J possui derivada de Gateux e ela é contínua. Fixe $u, v \in H_0^1(\Omega)$ e considere a função $\gamma \in C(\mathbb{R}, [0,1])$ definida por

$$\alpha(\gamma(s)) = p(x, u + \gamma(s)v)v.$$

Fixando $x \in \Omega$, podemos supor, sem perda de generalidade, que $u(x) < u(x) + tv(x)$. Então definimos a função $\xi : [u, u+tv] \to \mathbb{R}$ por,

$$\xi(s) = P(x,s).$$

Note que ξ é contínua e derivável em $(u, u+tv)$ com $\xi'(s) = p(x,s)$. Segue do Teorema do Valor Médio, que existe $\theta \in (0,1)$ tal que,

$$\xi(u+tv) - \xi(u) = \xi'(u+\theta tv)tv,$$

ou seja,

$$\frac{P(x,u+tv) - P(x,u)}{t} = p(x,u+\theta tv)v,$$

fazendo $t \to 0$ temos que,

$$p(x,u+\theta tv)v \longrightarrow p(x,u)v,$$

isto é,

$$\alpha(\theta t) \longrightarrow \alpha(0). \tag{B.1}$$

Vamos provar que $\alpha(\gamma)$ é limitada por uma função que é integrável. Para tal, observe que, por hipótese e pela Desigualdade de Young com $\frac{r+1}{r}$, $r+1$ e $\frac{q+1}{q}$, $q+1$, temos:

$$\begin{aligned}
|\alpha(\gamma)| &= |p(x,u+\gamma(s)v)v| \\
&\leq \{a\,|u+\gamma v|^r + b\,|u+\gamma v|^q\}\,|v| \\
&\leq \frac{a}{r+1}\left\{r\,|u+\gamma v|^{r+1} + |v|^{r+1}\right\} + \frac{b}{q+1}\left\{q\,|u+\gamma v|^{q+1} + |v|^{q+1}\right\},
\end{aligned}$$

ou seja,

$$|\alpha(\gamma)| \leq \frac{a}{r+1}\left\{r\,|u+\gamma v|^{r+1} + |v|^{r+1}\right\} + \frac{b}{q+1}\left\{q\,|u+\gamma v|^{q+1} + |v|^{q+1}\right\}. \tag{B.2}$$

Observe que,

$$\frac{a}{r+1}\left\{r\,|u+\gamma v|^{r+1} + |v|^{r+1}\right\} \leq a2^r\frac{r}{r+1}\left\{|u|^{r+1} + |\gamma|^{r+1}|v|^{r+1}\right\} + \frac{a}{r+1}|v|^{r+1}$$

e

$$\frac{b}{r+1}\left\{q\,|u+\gamma v|^{q+1} + |v|^{q+1}\right\} \leq b2^q\frac{q}{q+1}\left\{|u|^{q+1} + |\gamma|^{q+1}|v|^{q+1}\right\} + \frac{b}{q+1}|v|^{q+1}.$$

Tomando $C_4 = \max\left\{a2^r\dfrac{r}{r+1}, b2^q\dfrac{q}{q+1}\right\}$ e como $\gamma(s) \in [0,1]$, obtemos de $(B.2)$ que

$$|\alpha(\gamma)| \leq C_4(|u|^{r+1} + |u|^{r+1} + |u|^{q+1} + |u|^{q+1}) < \infty, \tag{B.3}$$

pois $L^{r+1}(\Omega) \subseteq L^1(\Omega)$ e $L^{q+1}(\Omega) \subseteq L^1(\Omega)$ já que Ω é limitado.

Dessa forma, por $(B.1)$ e $(B.3)$ podemos usar o Teorema da Convergência Dominada, para obter

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0}\frac{J(u+tv)-J(u)}{t} &= \lim_{t\to 0}\int_\Omega \frac{P(x,u+tv)-P(x,u)}{t}dx \\
&= \lim_{t\to 0}\int_\Omega p(x,u+\theta tv)vdx \\
&= \lim_{t\to 0}\int_\Omega \alpha(\theta t)dx \\
&= \int_\Omega \lim_{t\to 0}\alpha(\theta t)dx \\
&= \int_\Omega \alpha(0)dx \\
&= \int_\Omega p(x,u)vdx,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\lim_{t\to 0}\frac{J(u+tv)-J(u)}{t} = \int_\Omega p(x,u)vdx.$$

Considere o funcional

$$\begin{aligned}
T_u \ : \ H_0^1(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\
v &\longmapsto \int_\Omega p(x,u)vdx
\end{aligned}$$

Vamos mostrar que T_u é linear e limitado. Para tal, tome $v_1, v_2 \in H_0^1(\Omega)$ e $C \in \mathbb{R}$. Note que,

$$\begin{aligned}
T_u(v_1 + Cv_2) &= \int_\Omega p(x,u)(v_1 + Cv_2)dx \\
&= \int_\Omega p(x,u)v_1 + p(x,u)Cv_2 dx \\
&= \int_\Omega p(x,u)v_1 dx + \int_\Omega p(x,u)Cv_2 dx \\
&= \int_\Omega p(x,u)v_1 dx + C\int_\Omega p(x,u)v_2 dx \\
&= T_u(v_1) + CT_u(v_2).
\end{aligned}$$

e, usando a hipótese temos

$$\begin{aligned}
|T_u(v)| &= \left|\int_\Omega p(x,u)v dx\right| \\
&\leq \int_\Omega |p(x,u)v|\, dx \\
&\leq \int_\Omega (a\,|u|^r + b\,|u|^q)\,|v|)dx \\
&= \int_\Omega (a\,|r|^r\,|v|)dx + \int_\Omega (b\,|u|^q\,|v|)dx.
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$|T_u(v)| \leq \int_\Omega (a\,|u|^r\,|v|)dx + \int_\Omega (b\,|u|^q\,|v|)dx. \tag{B.4}$$

Pela Desigualdade de Hölder com expoentes $\frac{r+1}{r}$, $r+1$ e $\frac{q+1}{q}$, $q+1$, temos

$$\int_\Omega |u|^r\,|v|\,dx \leq \left(\int_\Omega |u|^{r+1}\,dx\right)^{\frac{r}{r+1}} \left(\int_\Omega |v|^{r+1}\,dx\right)^{\frac{1}{r+1}} = |u|_{r+1}^r\,|v|_{r+1} \tag{B.5}$$

e

$$\int_\Omega |u|^q\,|v|\,dx \leq \left(\int_\Omega |u|^{q+1}\,dx\right)^{\frac{q}{q+1}} \left(\int_\Omega |v|^{q+1}\,dx\right)^{\frac{1}{q+1}} = |u|_{q+1}^q\,|v|_{q+1}. \tag{B.6}$$

Como $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{r+1}(\Omega)$ e $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{q+1}(\Omega)$, então existem constantes positivas C_5 e C_6 tais que

$$|u|_{r+1} \leq C_5\,\|u\| \quad \text{e} \quad |u|_{q+1} \leq C_6\,\|u\| \quad \text{para todo} \quad u \in H_0^1(\Omega).$$

Segue em $(B.5)$ e $(B.6)$ que,

$$\int_\Omega |u|^r \, |v| \, dx \leq C_7 \, \|u\|^r \, \|v\|$$

e

$$\int_\Omega |u|^q \, |v| \, dx \leq C_8 \, \|u\|^q \, \|v\| \, .$$

Logo,

$$|T_u(v)| \leq a \int_\Omega |u|^r \, |v| \, dx + b \int_\Omega |u|^q \, |v| \, dx \leq C_9 \, \|v\| \quad \text{para todo} \quad v \in H_0^1(\Omega).$$

Portanto, T_u é linear e limitado, ou seja $T_u \in H_0^1(\Omega)'$. Dessa forma, J possui derivada de Gateux no ponto u e a mesma é dada por $J'(u)v = T_u v$.

Vamos mostrar que J' é contínua em u. Seja $(u_n) \subset H_0^1(\Omega) \subset (L^{r+1}(\Omega) \cap L^{q+1}(\Omega))$ tal que $u_n \to u \in H_0^1(\Omega)$. Defina a aplicação

$$G : L^{r+1}(\Omega) \cap L^{q+1}(\Omega) \longrightarrow L^{\frac{r+1}{r}}(\Omega) + L^{\frac{q+1}{q}}(\Omega)$$

dada por

$$G(u) = p(x, u).$$

Segue do Lema $B.2$ que $G = G_1 + G_2$, onde

$$G_1 : L^{r+1}(\Omega) \to L^{\frac{r+1}{r}}(\Omega) \;\; \text{e} \;\; G_2 : L^{q+1}(\Omega) \to L^{\frac{q+1}{q}}(\Omega)$$

são aplicações contínuas e limitadas. Note que,

$$\begin{aligned}
\left|(J'(u_n) - J'(u))v\right| &= \left|\int_\Omega (p(x, u_n) - p(x, u))v dx\right| \\
&= \left|\int_\Omega (G(u_n) - G(u))v dx\right| \\
&= \left|\int_\Omega (G_1(u_n) + G_2(u_n) - G_1(u) - G_2(u))v dx\right| \\
&\leq \int_\Omega |G_1(u_n) - G_1(u)||v| dx + \int_\Omega |G_2(u_n) - G_2(u)||v| dx
\end{aligned}$$

Como $v \in H_0^1(\Omega)$, então usando novamente as imersões de Sobolev $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{r+1}(\Omega)$ e $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{q+1}(\Omega)$ e pela Desigualdade de Hölder com expoentes $\frac{r}{r+1}, r+1$ e $\frac{q}{q+1}, q+1$ obtemos da desigualdade acima que

$$\begin{aligned}
\left|(J'(u_n) - J'(u))v\right| &\leq |G_1(u_n) - G_1(u)|_{\frac{r+1}{r}} |v|_{r+1} + |G_2(u_n) - G_2(u)|_{\frac{q+1}{q}} |v|_{q+1} \\
&\leq C_{10} \, \|v\| \left(|G_1(u_n) - G_1(u)|_{\frac{r+1}{r}} + |G_2(u_n) - G_2(u)|_{\frac{q+1}{q}} \right).
\end{aligned}$$

Como $G_1(u_n) \to G_1(u)$ e $G_2(u_n) \to G_2(u)$ em $L^{\frac{r+1}{r}}(\Omega)$ e $L^{\frac{q+1}{q}}(\Omega)$ respectivamente, então quando $n \to \infty$, temos

$$|(J'(u_n) - J(u))v| \longrightarrow 0.$$

Então segue que,

$$\lim_{n\to\infty} \|J'(u_n) - J'(u)\|_{H_0^1(\Omega)'} = \lim_{n\to\infty} \sup_{\|v\|\neq 0} \frac{|(J'(u_n) - J'(u))v|}{\|v\|} = 0.$$

Logo, J' é contínua em u. Portanto, $J \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$.

Vamos mostrar que J' é compacto. Para tal, suponha então que as imersões $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{r+1}(\Omega)$ e $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{q+1}(\Omega)$ sejam compactas. Assim, se $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$ é uma sequência limitada, então a menos de subsequência, $u_n \to u$ em $L^{r+1}(\Omega)$ e $L^{q+1}(\Omega)$. Então

$$G_1(u_n) \to G_1(u) \text{ em } L^{\frac{r+1}{r}}(\Omega) \text{ e } G_2(u_n) \to G_2(u) \text{ em } L^{\frac{q+1}{q}}(\Omega). \tag{B.7}$$

Mas $J'(u) = T_u$, isto é, é linear e limitado, então usando $(B.7)$ podemos concluir analogamente ao que foi feito anteriormente que $J'(u_n) \longrightarrow J'(u)$. Portanto J' é compacto.

□

Proposição B.3 *Suponha que* $p : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *satisfaz*
(p_0) $p \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$;
(p_1) *existem constantes* $a_1 \geq 0, a_2 > 0$ *e* $k \in [1, 2^* - 1)$ *tal que*

$$|p(x,s)| \leq a_1 + a_2 |s|^k \quad \textit{para todo} \quad (x,s) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}.$$

Então o funcional $I : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ *definido por*

$$I(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx - \int_\Omega P(x,u) dx$$

é de classe C^1 *em* H.

Demonstração: Considerando os funcionais $J_0, J : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$, dados respectivamente por

$$J_0(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx$$

e

$$J(u) = \int_\Omega P(x,u) dx,$$

temos pela Proposição $B.2$ e pelo Teorema $B.1$ que eles são de classe C^1 em H. Logo

$$I(u) = J_0(u) - J(u)$$

é de classe C^1 em H. Além disso,

$$I'(u)v = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx - \int_\Omega p(x,u) v dx \quad \text{para todo} \quad v \in H_0^1(\Omega).$$

$\square$

Apêndice C

Resultados Gerais

Nesta seção enunciaremos algumas definições e os principais teoremas utilizados nesta dissertação.

Proposição C.1 (cf. [12], Prop. 18, Cap.7) *Um espaço métrico M é completo se, e somente se, para toda sequência decrescente*

$$F_1 \supset F_2 \supset \ldots \supset F_n \supset \ldots$$

de subconjuntos fechados não-vazios $F_n \subset M$, com $\lim\limits_{n\to\infty} \text{diam} F_n = 0$, existe um ponto $a \in M$ tal que $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} = \{a\}$.

Definição C.1 *Dados $x \in X$ e um conjunto não vazio $T \subset X$, definimos a distância de x até o conjunto T por*

$$d(x, T) = \inf\{||x - y|| : y \in T\}.$$

Proposição C.2 *Para $T \subset X$ não vazio, a aplicação $d_T : X \to \mathbb{R}$ dada por $d_T(x) = d(x, T)$ é uma contração fraca, isto é, para $x, y \in X$ tem-se*

$$|d(x, T) - d(y, T)| \leq ||x - y||.$$

Demonstração: Usando a desigualdade triangular e fixando $t \in T$ qualquer, temos

$$d(x, T) \leq d(x, t) \leq d(x, y) + d(y, t),$$

ou seja, $d(x, T) - d(x, y) \leq d(y, t)$. Esta desigualdade valendo para todo t, concluímos que $d(x, T) - d(x, y) \leq d(y, T)$, ou seja,

$$d(x, T) - d(y, T) \leq d(x, y).$$

Trocando x por y, mostramos analogamente que

$$-d(x,y) \leq d(x,T) - d(y,T)$$

Portanto,

$$|d(x,T) - d(y,T)| \leq d(x,y) \leq ||x-y||.$$

$\square$

Sejam M, N espaços métricos.

Definição C.2 *Dada $f : M \to N$, suponhamos que exista uma constante $c > 0$ (chamada constante de Lipschitz) tal que*

$$\|f(x) - f(y)\|_N \leq c\,\|x - y\|_M$$

quaisquer que sejam $x, y \in M$. Dizemos então que f é uma aplicação lipschitiziana.

Definição C.3 *Uma aplicação $f : M \to N$ chama-se localmente lipschitiziana quando cada ponto $a \in M$ é centro de uma bola $B_a(r)$ tal que a restrição $f|_B$ é lipschitiziana.*

Proposição C.3 *A aplicação $d_T : X \to \mathbb{R}$ dada por $d_T(x) = d(x,T)$ é localmente lipschitizana.*

Demonstração: Tomando $c = 1$, temos pela Proposição $C.2$ que

$$|d(x,T) - d(y,T)| \leq ||x-y||,$$

isto é, é d_T é lipschitiziana, donde é localmente lipschitiziana.

$\square$

Teorema C.1 (cf. [6]) *Seja X um espaço de Banach reflexivo. Se (u_n) é uma sequência limitada em X, então existem uma subsequência $(u_{n_j}) \subset (u_n)$ e $u \in X$ tais que*

$$u_{n_j} \rightharpoonup u \ \textit{ fracamente em } \ X.$$

Proposição C.4 *Sejam (u_n) e (v_n) sequências em $L^2(\Omega)$ tais que*

(i) *$u_n \rightharpoonup u$ em $L^2(\Omega)$;*

(ii) *$v_n \to v$ em $L^2(\Omega)$.*

Então

$$\langle u_n, v_n \rangle_{L^2} \to \langle u, v \rangle_{L^2}.$$

Demonstração: Note que

$$\begin{aligned}
\left|\langle u_n, v_n\rangle_{L^2} - \langle u, v\rangle_{L^2}\right| &= \left|\langle u_n, v_n\rangle_{L^2} - \langle u, v\rangle_{L^2} \pm \langle u_n, v\rangle_{L^2}\right| \\
&\leq \left|\langle u_n, v_n\rangle_{L^2} - \langle v_n, v\rangle_{L^2}\right| - \left|\langle u, v\rangle_{L^2} - \langle u_n, v\rangle_{L^2}\right| \\
&\leq \|u_n\|_{L^2} \|v_n - v\|_{L^2} + \left|\langle u_n - u, v\rangle_{L^2}\right|.
\end{aligned}$$

Por (i) segue que $\langle u_n - u, v\rangle_{L^2} \to 0$. Por (ii) e como $\|u_n\|_{L^2}$ é limitada, temos que $\|u_n\| \|v_n - v\|_{L^2} \to 0$. Logo $\langle u_n, v_n\rangle_{L^2} \to \langle u, v\rangle_{L^2}$.

Os resultados abaixo estão provados em [9].

Teorema C.2 *Seja (f_n) uma sequência em $L^p(\Omega)$ e $f \in L^q(\Omega)$, tais que*

$$\|f_n - f\|_{L^p} \to 0.$$

Então existe uma subsequência $(f_{n_j}) \subset (f_n)$ tal que

(i) $f_{n_j} \to f(x)$ *q.t.p. em* Ω;

(ii) $\left|f_{n_j}\right| \leq h(x)\ \forall j$ *e q.t.p em* Ω, *com* $h \in L^p(\Omega)$

Teorema C.3 (Desigualdade de Hölder) *Sejam $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$ com $1 \leq p \leq \infty$. Então $f.g \in L^1(\Omega)$ e*

$$\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}.$$

Teorema C.4 (Teorema da Convegência Dominada de Lebesgue) *Seja (f_n) uma sequência de funções de $L^1(\Omega)$. Suponhamos que*

(i) $f_n(x) \to f(x)$ *q.t.p em* Ω;

(ii) *existe uma função $g \in L^1(\Omega)$ tal que para cada n, $|f_n(x)| \leq g(x)$ q.t.p em Ω.*

Então $f \in L^1(\Omega)$ e $\|f_n - f\|_{L^1} \to 0$.

Lema C.1 (Lema de Fatou) *Seja f_n uma sequência de funções de $L^1(\Omega)$ tal que*

(i) *para cada n, $f_n(x) \geq 0$ q.t.p em Ω;*

(ii) $\sup\limits_n \int f_n < \infty$.

Para cada $x \in \Omega$ tem-se $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. Então $f \in L^1(\Omega)$ e

$$\int f \leq \liminf_{n\to\infty} f_n.$$

Referências Bibliográficas

[1] ADAMS, R. A., *Sobolev Spaces.* Academic Press, New York, 1975.

[2] AMBROSETTI, A., *Critical points and nonlinear variational problems*, Bull. Soc. Math. France 120(1992),memoire n.49.

[3] AMBROSETTI, A. BRÉZIS, H. and CERAMI, G., *Combined effects of concave and convex nonlinearities in some elliptic problems,* J. Funct. Anal. 122(1994), $519 - 543$.

[4] AMBROSETTI, A. and RABINOWITZ, P., *Dual variational methods in critical points theory an applications,* J. Funct. Anal. 14 (1973), 343-381.

[5] BARTOLO, V. B. and FORTUNATO, D., *Abstract critical theorems and applications to some nonlinear problems whit strong resonance at infinity.* Nonlinear Anal. 7 (1983), 981-1012.

[6] BRÉZIS, H., *Analyse fonctionelle.* MASSON, 1987.

[7] BRÉZIS, H., and NIRENBENG. L., *Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents,* Comm. Pure Appl. Math. 36(1993) 437-477

[8] EKELAND, I., *On the variational principle,* J. Math. Anal. Appl. 47(1974), $324 - 353$.

[9] FOLLAND, G., B., *Real analysis modern techniques and their applications.* New York- 1984

[10] GILBARG, D. e TRUNDINGER, N. S., *Elliptic partial differential equations of second order.* Springer-Verlag, 1984.

[11] LI, S., WU, S. and ZHOU, H-S., *Solutions to semilinear elliptic problems with combined non linearities, Journal of Differential Equations* 185, $200 - 224$(2002).

[12] LIMA, E. L., *Espaços Métricos.* Projeto Euclides, CNPq-IMPA, 2005.