UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Soma de Potências de Números Consecutivos de Fibonacci k-Generalizados

por

Alessandra Kreutz

Brasília
2019

Alessandra Kreutz

Soma de Potências de Números Consecutivos de Fibonacci k-Generalizados

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade de Brasília, como requisito parcial para obtenção do título de Doutora em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Diego Marques Ferreira.

Brasília

2019

Ficha catalográfica elaborada automaticamente,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

KK92s

Kreutz, Alessandra
Soma de Potências de Números Consecutivos de Fibonacci k Generalizados / Alessandra Kreutz; orientador Diego Marques Ferreira. -- Brasília, 2019.
66 p.

Tese (Doutorado - Doutorado em Matemática) -- Universidade de Brasília, 2019.

1. Sequência de Fibonacci generalizada. 2. Formas lineares em logaritmos. 3. Equações Diofantinas. I. Marques Ferreira, Diego, orient. II. Título.

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Soma de Potências de Números Consecutivos de Fibonacci K-Generalizados

Por

Alessandra Kreutz

Tese apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática-UnB, como requisito parcial para obtenção do grau de

DOUTORA EM MATEMÁTICA

Brasília, 16 de dezembro de 2019.

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Diego Marques Ferreira (MAT-UnB)

Prof. Dr. Leandro Martins Cioletti (MAT-UnB)

Profa. Dra. Ana Paula de Araújo Chaves (UFG)

Prof. Dr. Matheus Bernardini de Souza (UnB-Gama)

Ao meu amado esposo,

aos meus pais e meu irmão.

Agradecimentos

Primeiramente, gostaria de agradecer a Deus por ter me mantido forte durante todo o doutorado, atendendo minhas preces em cada etapa desafiadora do processo. Agradeço também a minha família, meus pais, Vitor e Ana, e meu irmão Rafael. Eles acompanham e incentivam minha vida acadêmica desde o começo, quando ainda criança, sonhava em ser professora.

Meu agradecimento mais especial vai para o meu esposo Guilherme, meu amor e companheiro de vida. Foi ele que não me deixou desistir. Obrigada por estar do meu lado, mesmo quando eu, estressada e desanimada, te afastava de mim. Você suportou todas as minhas dores e entendeu que nossos momentos de passeio, filmes, viagens e aventuras, por vezes teriam que ser adiados, para que eu concluísse com êxito mais essa etapa. Obrigada por todo seu bom humor, você sempre alegra meus dias. Por fim, agradeço especialmente por todo seu amor e generosidade, você ilumina meus dias, me traz paz e felicidade. Nem todas as palavras do mundo seriam suficientes para expressar minha gratidão e meu amor por você. Te amo muito. Aproveito também para agradecer seus pais, meus sogros, Anoldo e Mara. Eu sei que muitas vezes estive em suas orações, obrigada por todo carinho.

Gostaria de agradecer também aos meus colegas, Anna, Carol, Jean, Elaine e tantos outros que me apoiaram e incentivaram durante esse doutorado. Em especial, gostaria de agradecer aos meus amigos Gláucia e Michell. Foi com eles que a história aqui em Brasília começou, desde o mestrado. Obrigada pela amizade sincera e pelo apoio incondicional de vocês. Saibam que sempre os levarei em meu coração.

Agradeço também a todos os professores que cruzaram meu caminho, cada um deles deixou sua contribuição e sua marca em minha vida. Agradeço ao meu orientador Diego Marques pela paciência e dedicação durante o doutorado. Agradeço também a banca examinadora, professores Leando Cioletti, Ana Paula Chaves e Matheus Bernardini, pela disponibilidade e contribuições ao trabalho.

Por fim, agradeço à Capes e ao CNPq, pelo apoio financeiro na realização desta pesquisa. E agradeço ao IFB, Instituto Federal de Brasília, em particular ao Campus Taguatinga, por possibilitar meu afastamento das atividades docentes para que eu pudesse me dedicar exclusivamente a este trabalho.

"Quem não se melhora, piora o mundo."

Fabrício Carpinejar

Resumo

Uma generalização conhecida da sequência de Fibonacci, chamada de sequência de Fibonacci k-generalizada $(F_n^{(k)})_n$, é definida pelos valores iniciais $0, 0, \ldots, 0, 1$ (k termos) e tal que cada termo subsequente é a soma dos k termos anteriores. Motivados pela identidade $F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_{2n+1}$, Chaves e Marques, em 2014, provaram que a equação Diofantina $(F_n^{(k)})^2 + (F_{n+1}^{(k)})^2 = F_m^{(k)}$ não possui soluções em inteiros positivos n, m e k, com $n > 1$ e $k \geq 3$. Depois disso, outras generalizações foram feitas por Freitas *et al.*, trocando $F_m^{(k)}$ por $F_m^{(l)}$ com $l > k$, e por Luca e Ruiz, que mostraram que $(F_n^{(k)})^s + (F_{n+1}^{(k)})^s = F_m^{(k)}$ não tem solução com $k \geq 3$ e $s \geq 2$. Neste trabalho, estudamos a equação generalizada $(F_n^{(k)})^s + (F_{n+1}^{(k)})^s = F_m^{(l)}$, obtendo limitantes efetivos para as variáveis e resolvendo completamente alguns casos particulares.

Palavras-chave: Sequência de Fibonacci generalizada. Formas lineares em logaritmos. Equações Diofantinas.

Abstract

A well-known generalization of the Fibonacci sequence is the k-generalized Fibonacci sequence $(F_n^{(k)})_n$ whose first k terms are $0, 0, \ldots, 0, 1$ and each term aftwards is the sum of the preceding k terms. Motivated by the identity $F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_{2n+1}$, Chaves and Marques, in 2014, proved that the Diophantine equation $(F_n^{(k)})^2 + (F_{n+1}^{(k)})^2 = F_m^{(k)}$ has no solution in positive integers n, m and k, with $n > 1$ and $k \geq 3$. After that, another generalizations were provided by Freitas *et al.*, replacing $F_m^{(k)}$ to $F_m^{(l)}$, with $l > k$, and by Luca and Ruiz, whom proved that $(F_n^{(k)})^s + (F_{n+1}^{(k)})^s = F_m^{(k)}$ has no solution with $k \geq 3$ and $s \geq 2$. In this work, we study the generalized equation $(F_n^{(k)})^s + (F_{n+1}^{(k)})^s = F_m^{(l)}$. In particular, we obtained some effective upper bounds for the variables and also we solved completely some particular cases.

Keywords: Generalized Fibonacci sequence. Linear forms in logarithms. Diophantine equations.

Sumário

Introdução

As equações com soluções no conjunto dos números inteiros são chamadas de *equações Diofantinas*, em homenagem a Diofanto de Alexandria que estabeleceu o estudo dessas equações e suas soluções. Historicamente, muitos estudiosos de Teoria dos Números se dedicaram a esse objeto de estudo. Algumas das equações mais conhecidas são, por exemplo, as equações de Pell, as equações pitagóricas e, talvez a mais famosa, a equação do último Teorema de Fermat.

Nos dedicaremos neste trabalho a um caso particular de equação Diofantina envolvendo sequências recorrentes, em particular, a sequência de Fibonacci e sua generalização mais conhecida. Para isso, utilizaremos o método de formas lineares em logaritmos devido a Baker, que nos permitirá limitar as variáveis envolvidas na equação.

Considere, portanto, $(F_n)_{n\geq 0}$ a sequência de Fibonacci dada por

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \text{ para } n \geq 2,$$

e termos iniciais dados por $F_0 = 0$ e $F_1 = 1$. Entre as diversas relações conhecidas para essa sequência, uma que chama bastante a nossa atenção é a que nos diz que se somarmos os quadrados de números de Fibonacci consecutivos, ainda temos um número de Fibonacci, o que pode ser traduzido matematicamente como a identidade

$$F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_{2n+1}. \tag{1}$$

Motivados por essa relação, Marques e Togbé [15], em 2010, levantaram a questão se esse tipo de identidade seria possível para potências $s > 2$, no entanto, eles provaram que se s é um inteiro tal que $F_n^s + F_{n+1}^s$ é um número de Fibonacci para todo n suficientemente grande, então $s = 1$ ou 2.

Já em 2011, Luca e Oyono [14] fecharam esse resultado, mostrando que a equação

$$F_n^s + F_{n+1}^s = F_m \tag{2}$$

não tem solução em inteiros (n, m, s) com $n \geq 2$ e $s \geq 3$.

Considere agora um número inteiro $k \geq 2$. Definimos a *sequência de Fibonacci k-generalizada* pela recorrência

$$F_n^{(k)} = F_{n-1}^{(k)} + \cdots + F_{n-k}^{(k)},\ \forall\ n \geq 2, \tag{3}$$

onde os k termos iniciais são dados por $F_{-(k-2)}^{(k)} = F_{-(k-3)}^{(k)} = \cdots = F_0^{(k)} = 0$ e $F_1^{(k)} = 1$. Tal sequência também é conhecida por *sequência de Fibonacci generalizada de ordem k* ou *sequência de k-bonacci.*

Observe que se $k = 2$ temos a sequência de Fibonacci, definida anteriormente, cujos primeiros termos são:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \ldots.$$

Se $k = 3$, chamamos os termos $F_n^{(3)} = T_n$ de números de *Tribonacci*, veja alguns dos seus primeiros termos:

$$0, 1, 1, 2, 4, 7, 13, 24, 44, 81, 149, 274, \ldots.$$

Apesar de muitos associarem o termo "tri"ao número três *(three)*, na verdade, o nome foi estabelecido por Feinberg [12], em 1963, e remetia a palavra *tree*, pois Feinberg analisava a sequência como ramos de uma árvore.

Inicialmente, Chaves e Marques [6], generalizaram o resultado da relação (1) para números de Fibonacci k-generalizados, provando que

$$(F_n^{(k)})^2 + (F_{n+1}^{(k)})^2 = F_m^{(k)} \tag{4}$$

não tem solução em inteiros (n, m, k) com $n \geq 2$ e $k \geq 3$. A fim de generalizar o resultado principal de [14] no contexto de sequências de Fibonacci k-generalizada, Chaves e Marques [7], conseguiram um resultado parcial para a equação

$$(F_n^{(k)})^s + (F_{n+1}^{(k)})^s = F_m^{(k)}, \tag{5}$$

sendo necessária a condição $3 \leq k \leq \min\{n, \log s\}$ para garantir que não há solução também neste caso. No mesmo ano, Luca e Ruiz [13], determinaram que a equação (5) não tem solução em inteiros (n, m, k, s) com $k \geq 3$, $n \geq 2$ e $s \geq 2$.

Aparentemente, as propriedades bem particulares da sequência de Fibonacci são o que garantem que a soma de quadrados de números de Fibonacci consecutivos é ainda um número desta sequência. Qualquer outra variação dessa equação parece não recair na sequência envolvida na equação. Questiona-se então, se a soma de quadrados de números consecutivos de k-bonacci poderiam ter interseção com alguma outra sequência, por exemplo, l-bonacci? Freitas *et al.* [1], provaram que a equação

$$(F_n^{(k)})^2 + (F_{n+1}^{(k)})^2 = F_m^{(l)} \tag{6}$$

não tem solução em inteiros (n, m, k, l) com $2 \leq k < l$ e $n \geq 2$.

Neste trabalho, queremos estudar a equação

$$(F_n^{(k)})^s + (F_{n+1}^{(k)})^s = F_m^{(l)} \tag{7}$$

em inteiros positivos (n, m, k, l, s) com $k, l \geq 3$, $s \geq 2$ e $n, m \geq 2$.

Este trabalho foi dividido em três capítulos principais. No primeiro capítulo, desenvolveremos as ferramentas fundamentais usadas para demonstração do nosso resultado, são elas: resultados sobre a sequência de Fibonacci k-generalizada, formas lineares em logaritmos e métodos de redução, como o algoritmo LLL, por exemplo.

No segundo capítulo, inicialmente, demonstraremos que a equação (6) também não tem solução no caso em que $l < k$, fechando portanto o seguinte resultado

Teorema 0.1. *A equação Diofantina*

$$(F_n^{(k)})^2 + (F_{n+1}^{(k)})^2 = F_m^{(l)}$$

não tem solução em inteiros positivos m, n, k *e* l *com* $k \geq 3$ *ou* $l \geq 3$ *e* $n \geq 3$.

Precisamos especialmente da condição $n \geq 3$ pois no caso em que $n = 2$ temos uma família de soluções para a equação acima: $(n, m, k, l) = (2, 5, k, 2)$, com $k \geq 3$. Ou seja, como $F_2^{(k)} = 1$ e $F_3^{(k)} = 2$ para todo $k \geq 3$, temos

$$(F_2^{(k)})^2 + (F_3^{(k)})^2 = 1^2 + 2^2 = 5 = F_5^{(2)}.$$

Resolveremos então o caso geral, quando $l < k$, provando o seguinte teorema:

Teorema 0.2. *Seja* (n, m, k, l, s) *solução da equação Diofantina*

$$(F_n^{(k)})^s + (F_{n+1}^{(k)})^s = F_m^{(l)}, \tag{8}$$

com $n, m \geq 2$, $k > l \geq 2$, $s \geq 3$ inteiros. Então:

$$s < 8,11 \cdot 10^{210} k^{100} \log^{43} k,$$

$$n < 1,49 \cdot 10^{39} k^{22} \log^{8} k,$$

$$m < 1,97 \cdot 10^{230} k^{110} \log^{47} k.$$

Para o caso em que $l > k$ temos um resultado análogo, onde as variáveis s, n, m são limitadas todas em função da variável l.

Observamos então que, sempre que l é escrito em função de k, por exemplo, $l = k - 1$, é possível obter limitantes efetivos para as variáveis utilizando um método devido a Bravo e Luca [2] e neste caso obtemos

Teorema 0.3. *Seja (n, m, k, s) uma solução para a equação Diofantina*

$$(F_n^{(k)})^s + (F_{n+1}^{(k)})^s = F_m^{(k-1)}$$

com $n, m \geq 2$, $s \geq 3$ e $k \geq 3$ inteiros, então

$$k \leq 4487, \ n < 8,21 \cdot 10^{126}, \ m < 2,97 \cdot 10^{675} \ e \ s < 7,39 \cdot 10^{615}.$$

Com estes limitantes não é possível realizar os cálculos computacionais e, neste caso, nem é viável utilizarmos algum método de redução. A fim de explicitar um caso particular para esta equação geral, resolveremos o caso em que $k = 3$ (Tribonacci T_n) e $l = 2$ (Fibonacci F_m):

Teorema 0.4. *Se (s, n, m) é solução para a equação*

$$T_n^s + T_{n+1}^s = F_m,$$

com $s \geq 2$ e $n \geq 2$, então $(s, n, m) = (2, 2, 5)$.

Neste caso, foi possível reduzir os limitantes para as variáveis e fazer os casos finitos computacionalmente utilizando o método do algoritmo LLL, que será descrito no Capítulo 1.

Por fim, no terceiro capítulo, daremos uma outra generalização da soma de potências de números de Fibonacci, obtendo o seguinte resultado assintótico:

Teorema 0.5. *Seja s um inteiro positivo. Se $F_{n+1}^s + F_{n+2}^s + \cdots + F_{n+s}^s$ é um número de Fibonacci para todo n suficientemente grande, então $s = 1$ ou $s = 2$.*

Para os cálculos computacionais deste trabalho utilizamos, especialmente, o software *Mathematica* e, ao longo do texto, explicitaremos alguns dos comandos básicos utilizados para encontrar termos das sequências, resolver casos particulares, obter limitantes e aplicar os métodos de redução.

Capítulo 1

Preliminares

Antes de desenvolver os resultados principais deste trabalho, vamos precisar de alguns resultados preliminares. Inicialmente, falaremos um pouco sobre o método de formas lineares em logaritmos devido a Baker. De modo geral, Baker provou que dada uma forma linear em logaritmos

$$\Lambda = \sum_{i=1}^{n} b_i \log \alpha_i,$$

onde $b_i \in \mathbb{Z}$ e α_i são números algébricos, para $i = 1, 2, \ldots, n$, temos que ou $\Lambda = 0$ ou Λ é transcendente. Para o caso em que $\Lambda \neq 0$, é possível obter um limitante inferior para $|\Lambda|$:

$$|\Lambda| > (eB)^{-C},$$

em que $B = \max\{|b_1|, \ldots, |b_n|\}$ e C é uma constante efetivamente computável dependendo somente de n e dos números algébricos $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Após Baker, diversos matemáticos trabalharam a fim de melhorar a constante C obtida por Baker, neste trabalho em particular usaremos o resultado devido a Matveev [16], para obter limitantes para as variáveis envolvidas na equação que estamos estudando.

Em seguida, trataremos rapidamente do método de redução dado por Dujella e Pethö [10] cujo resultado envolve convergentes de uma fração contínua. Falaremos sobre a aplicação do algoritmo LLL (devido a Lenstra-Lenstra-Lovasz) para formas lineares em logaritmos, que também nos permitirá reduzir limitantes para as variáveis.

Por fim, dissertaremos sobre as sequências de Fibonacci k-generalizadas e suas propriedades. Por exemplo, explicitaremos o resultado obtido por Dresden e Du [9], que nos fornece uma fórmula fechada para $F_n^{(k)}$ em função das raízes do polinômio característico associado à sequência recorrente. Tal fórmula será amplamente utilizada no decorrer do trabalho.

Ainda, a última seção deste capítulo versará sobre alguns lemas auxiliares nas nossas demonstrações.

1.1 Formas lineares em logaritmos

Uma forma linear em logaritmos de números algébricos é uma expressão da forma

$$\sum_{i=1}^{n} b_i \log \alpha_i,$$

onde estamos considerando $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ números algébricos e $b_1, \ldots, b_n$ inteiros. Sempre que nos referirmos a logaritmo neste trabalho, estamos pensando no logaritmo natural de base e.

Chamaremos também de forma linear em logaritmos a expressão $\Lambda = \alpha_1^{b_1}\alpha_2^{b_2}\cdots\alpha_n^{b_n} - 1$ que é a forma exponencial da nossa forma linear em logaritmos de números algébricos. Observe que, neste caso, $\log(\Lambda+1)$ é uma forma linear em logaritmos como anteriormente e, além disso, para Λ pequeno temos $\log(\Lambda+1) \approx \Lambda$. De modo geral, vale que $|\Lambda| < e^{|\Lambda|} - 1$.

Considere o seguinte caso particular: para $i = 1, \ldots, n$, sejam x_i/y_i racionais não nulos e b_i inteiro positivo. Defina $A_i := \max\{|x_i|, |y_i|, 3\}$ e $B = \max\{b_1, \ldots, b_n, 3\}$. Seja então a forma linear em logaritmos

$$\Lambda = \left(\frac{x_1}{y_1}\right)^{b_1} \cdots \left(\frac{x_n}{y_n}\right)^{b_n} - 1.$$

Supondo Λ não nulo, obtemos um limitante inferior para $\log|\Lambda|$ dado por:

$$\log|\Lambda| \geq -\sum_{i=1}^{n} b_i \log|y_i| \geq -B \sum_{i=1}^{n} \log A_i.$$

Apesar de conseguirmos limitarmos inferiormente $\log|\Lambda|$, essa limitação não será satisfatória para resolvermos equações Diofantinas. Precisamos então de uma melhor estimativa para B. Em 1966, Alan Baker deu um limitante para o valor absoluto de uma forma linear em logaritmos. Ele conseguiu uma estimativa em $\log B$ para as formas lineares, o que possibilitou a resolução de alguns tipos de equações Diofantinas, por exemplo, equações Diofantinas onde as variáveis desconhecidas estão no expoente (chamadas equações Diofantinas exponenciais). Ressalto ainda que Baker obteve uma estimativa para Λ substituindo x_i/y_i por números algébricos não nulos.

Inicialmente, faremos considerações sobre números algébricos. Seja α um número algébrico de grau d e seja $f(x) = \sum_{i=0}^{d} a_i x^{d-i} \in \mathbb{Z}[x]$ seu polinômio minimal, com $a_0 > 0$ e $\mathrm{mdc}(a_0, \ldots, a_d) = 1$. Escrevendo $f(x) = a_0 \prod_{i=1}^{d} (x - \alpha^{(i)})$, onde $\alpha = \alpha^{(1)}$ e $\alpha^{(i)}$ são os conjugados de α, definimos a *altura logarítmica de* α como

$$h(\alpha) = \frac{1}{d}\left(\log |a_0| + \sum_{i=1}^{d} \log \max\{1, |\alpha^{(i)}|\}\right).$$

Como estamos tratando de limitantes para as formas lineares em logaritmos de números algébricos, muitas vezes basta estimar a altura logarítmica do número algébrico α em vez de calculá-la efetivamente. Para isso, podemos utilizar as seguintes propriedades que podem ser encontradas em [19].

Sejam x e y números algébricos, então valem:

(i) $h(x^{-1}) = h(x)$;

(ii) $h(x/y) \leq h(x) + h(y)$;

(iii) $h(xy) \leq h(x) + h(y)$;

(iv) $h(x + y) \leq h(x) + h(y) + \log 2$.

Abaixo daremos uma versão apresentada por Baker e Wüstholz:

Teorema 1.1. *Sejam $\gamma_1, \ldots, \gamma_t$ números algébricos diferentes de 0 e 1, $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\gamma_1, \ldots, \gamma_t)$ e D o grau da extensão $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}]$. Para $i = 1, \ldots, t$ seja*

$$A_i \geq \max\left\{h(\gamma_i), \frac{|\log(\gamma_i)|}{D}, \frac{1}{D}\right\}.$$

Para $b_1, \ldots, b_t \in \mathbb{Z}$ seja $\Lambda = b_1 \log \gamma_1 + \cdots + b_t \log \gamma_t \neq 0$ e defina $B \geq \max\{|b_1|, \ldots, |b_t|\}$. Então, temos

$$\log |\Lambda| > -18(t+1)!\, t^{t+1} (32D)^{t+2} \log(2tD) A_1 \ldots A_t \log B.$$

O próximo teorema é uma versão que nos dá uma limitação inferior para formas lineares logarítmicas *à la Baker* (mais precisamente, a exponencial da forma linear em logaritmos) e é devido a Matveev [16]. A contribuição de Matveev ao resultado anterior é em relação a ordem da constante que é $O(c^t)$, para $c > 1$, enquanto o resultado anterior é $O(t^t)$, onde t é o número de logaritmos que aparece na forma linear.

Teorema 1.2 (Matveev)**.** *Seja $\mathbb{K}$ um corpo de números de grau D sobre $\mathbb{Q}$, sejam $\gamma_1, \ldots, \gamma_t$ números reais positivos de $\mathbb{K}$, e sejam $b_1, \ldots, b_t$ números inteiros. Suponha $B \geq \max\{|b_1|, \ldots, |b_t|\}$, e considere $\Lambda := \gamma_1^{b_1} \cdots \gamma_t^{b_t} - 1$. Sejam $A_1, \ldots, A_t$ números reais tais que*

$$A_i \geq \max\{Dh(\gamma_i), |\log \gamma_i|, (0, 16)\}, \ i = 1, \ldots t.$$

Então, assumindo que $\Lambda \neq 0$, temos

$$|\Lambda| > \exp(-1, 4 \cdot 30^{t+3} \cdot t^{4,5} \cdot D^2(1 + \log D)(1 + \log B)A_1 \cdots A_t).$$

Muitas vezes, quando utilizamos o resultado acima para resolução de equações Diofantinas, obtemos limitantes muito grandes para as variáveis envolvidas na equação e mesmo com o auxílio do computador, não é viável computar os casos finitos. Assim, precisamos utilizar estratégias que reduzam os limitantes das variáveis, o que podemos fazer, em alguns casos, com a ajuda do seguinte lema devido a Dujella e Pethö [10].

Lema 1.3 (Dujella e Pethö)**.** *Seja M um inteiro positivo e p/q um convergente da fração contínua do irracional γ tal que $q > 6M$ e seja μ um número real. Seja $\varepsilon = \|\mu q\| - M\|\gamma q\|$, onde $\|\cdot\|$ é a distância até o inteiro mais próximo. Se $\varepsilon > 0$, então não existe solução para*

$$0 < m\gamma - n + \mu < A \cdot B^{-k}$$

em inteiros positivos m, n e k com

$$m \leq M \text{ e } k \geq \frac{\log(Aq/\varepsilon)}{\log B}.$$

Outro método de redução para variáveis em uma forma linear em logaritmos é dada pelo algoritmo LLL, para esse método, dedicamos a nossa próxima seção.

1.2 Algoritmo LLL para formas lineares em logaritmos

Falaremos nesta seção sobre o algoritmo LLL aplicado a formas lineares em logaritmos, sem nos preocuparmos com o algoritmo em si, visto que, na maioria dos programas conhecidos, esse algoritmo já está implementado.

Primeiramente, definimos um reticulado d-dimensional (*lattice d-dimensional*) $\mathcal{L}$ de $\mathbb{R}^n$ como um subgrupo discreto de $\mathbb{R}^n$ de posto d, isto é, existem vetores $b_1, b_2, \ldots, b_d$ de $\mathbb{R}^n$, linearmente independentes sobre $\mathbb{R}$ tal que

$$\mathcal{L} = \oplus_{i=1}^{d} \mathbb{Z} b_i.$$

Na prática, podemos sempre considerar reticulados $\mathcal{L} \subset \mathbb{Z}^d$, isto é, $b_i \in \mathbb{Z}^d$, o que auxilia nos cálculos computacionais, evitando problema de estabilidade numérica. Com essa notação, estabeleceu-se os seguintes problemas:

Problema SVP (The Shortest Vector Problem): *dada uma base $b_1, \ldots, b_d \in \mathbb{Z}^n$ de um reticulado $\mathcal{L}$, computar um x tal que $|x| = \min\limits_{y \in \mathcal{L}\setminus\{0\}} |y|$.*

Problema CVP (The Closest Vector Problem): *dada uma base $b_1, \ldots, b_d \in \mathbb{Z}^n$ de um reticulado $\mathcal{L}$ e um vetor $t \in \mathbb{Z}^n$, computar um x tal que $|x - t| = \min\limits_{y \in \mathcal{L}} |y - t|$.*

Uma descoberta feita por H. W. Lenstra, A. Lenstra e L. Lovasz foi que, embora em geral não seja possível encontrar rapidamente uma base que satisfaça o problema SVP ou ainda o problema CVP (ver [18]), é possível encontrar uma boa aproximação em um tempo polinomial para esse tipo de problema. O método deles ficou conhecido como algoritmo LLL e tem diversas aplicações na matemática e computação.

Os resultados que daremos a seguir vão na direção da solução desses problemas, e os aplicaremos para obter limitantes inferiores para formas lineares em logaritmos.

Seja $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^n$ um reticulado dado pela base $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Definimos os vetores b_i^*, para $i = 1, \ldots, n$, e os valores $\mu_{i,j}$, para $1 \leq j < i \leq n$, indutivamente por

$$b_i^* = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} \mu_{i,j} b_j^* \text{ e } \mu_{i,j} = \frac{\langle b_i, b_j^* \rangle}{\langle b_j^*, b_j^* \rangle}.$$

Então, $b_1^*, \ldots, b_n^*$ é uma base ortogonal para $\mathbb{R}^n$, chamada base de Gram-Schmidt.

Chamamos $b_1, b_2, \ldots, b_n$ de $\mathcal{L}$ de base *LLL-reduzida* (ou somente *reduzida*) se

$$|\mu_{i,j}| \leq \frac{1}{2},\ 1 \leq j < i \leq n \tag{1.1}$$

$$|b_i^* + \mu_{i,i-1} b_{i-1}^*|^2 \geq \frac{3}{4}|b_{i-1}^*|^2,\ 1 < i \leq n. \tag{1.2}$$

Portanto, uma base LLL-reduzida é próxima de uma ortogonal.

Para o caso bidimensional, Gauss forneceu um algoritmo que encontra uma base reduzida para o reticulado. Tal base contém os dois primeiros vetores minimais do reticulado, ou seja, resolve completamente o problema SVP para duas dimensões. Além disso, é possível ver o algoritmo de Gauss como uma extensão do algoritmo Euclidiano, assim como o algoritmo LLL é uma extensão do algoritmo dado por Gauss.

Seja $y \in \mathbb{R}^n$ um ponto fora do reticulado. Denotamos por $d(\mathcal{L})$ o comprimento do menor vetor não nulo da rede:

$$d(\mathcal{L}) = \min_{0 \neq x \in \mathcal{L}} |x|,$$

e $d(\mathcal{L}, y)$ a distância de y à rede:

$$d(\mathcal{L}, y) = \min_{x \in \mathcal{L}} |x - y|.$$

Com essa notação, temos o seguinte resultado, que pode ser encontrado em [8].

Lema 1.4. *Seja $\{b_1, \ldots, b_n\}$ uma base LLL-reduzida de um reticulado $\mathcal{L}$ e $\{b_1^*, \ldots, b_n^*\}$ a correspondente base de Gram-Schmidt.*

(a) Para qualquer vetor não nulo $x \in \mathcal{L}$ temos

$$|x| \geq \frac{|b_1|}{c_1},$$

onde $c_1 = \max\limits_{1 \leq i \leq n}(|b_1|/|b_i^*|)$. Em particular,

$$d(\mathcal{L}) \geq \frac{|b_1|}{c_1},$$

(b) Considere $y \notin \mathcal{L}$ e escreva $y = \sum_{i=1}^{n} y_i b_i$. Seja i_0 o maior índice tal que $\|y_i\| \neq 0$. Então, para todo $x \in \mathcal{L}$ temos

$$|x - y| \geq \|y_{i_0}\| \frac{|b_1|}{c_1},$$

onde $\|\cdot\|$ é a distância até o inteiro mais próximo.

Aplicaremos esses resultados para obter limitantes inferiores para formas lineares em logaritmos. Para isso, considere $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ números reais e fixe uma constante grande positiva C (em breve daremos uma boa escolha para esta constante). Se $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ é a base canônica do $\mathbb{R}^n$, considere para $1 \leq j \leq n-1$:

$$b_j = e_j + \lfloor C\alpha_j \rceil e_n,$$

e

$$b_n = \lfloor C\alpha_n \rceil e_n,$$

onde $\lfloor x \rceil$ é o inteiro mais próximo de x.

Observação 1.5. *Definimos o inteiro mais próximo de x por $\lfloor x \rceil = \lfloor x + 1/2 \rfloor$, onde $\lfloor y \rfloor$ é o maior inteiro menor ou igual a y.*

Considere $\mathcal{L}$ o reticulado gerado por $\{b_1, \ldots, b_n\}$. A matriz associada a esse reticulado é dada pelos vetores $b_1, \ldots, b_n$ nas colunas:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lfloor C\alpha_1 \rceil & \lfloor C\alpha_2 \rceil & \cdots & \lfloor C\alpha_n \rceil \end{pmatrix}.$$

Com essa base definida para o reticulado $\mathcal{L}$, usamos o software *Mathematica* para encontrar uma base LLL-reduzida através do comando `LatticeReduce`. Por abuso de notação, chamaremos essa base reduzida também de $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$.

Finalmente, defina

$$y = -\lfloor C\alpha_0 \rceil e_n = (0, 0, \ldots, -\lfloor C\alpha_0 \rceil).$$

Com essa notação, temos o seguinte resultado dado em [8]:

Proposição 1.6. *Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ inteiros positivos. Sejam*

$$Q = \sum_{i=1}^{n-1} X_i^2 \quad e \quad T = \frac{1 + \sum\limits_{i=1}^{n} X_i}{2}$$

e assuma que $d(\mathcal{L},y)^2 \geq T^2+Q$. *Se* $x_i \in \mathbb{Z}$ *são tais que* $|x_i| \leq X_i$ *para todo* $1 \leq i \leq n$, *então ou*

$$\left|\alpha_0 + \sum_{i=1}^{n} x_i\alpha_i\right| \geq \frac{\sqrt{d(\mathcal{L},y)^2 - Q} - T}{C},$$

ou $x_1 = \cdots = x_{n-1} = 0$ *e* $x_n = -\lfloor C\alpha_0 \rceil / \lfloor C\alpha_n \rceil$.

Cabe ressaltar que geralmente é muito difícil calcular $d(\mathcal{L},y)$ diretamente, no entanto, como queremos apenas um limitante inferior, podemos utilizar o Lema 1.4 para isso.

Agora, sobre a constante C escolhida anteriormente, devemos escolhê-la de modo que seja maior que X^n, onde $X = \max\{X_1,\ldots,X_n\}$. Caso a condição da Proposição 1.6 $d(\mathcal{L},y)^2 \geq T^2+Q$ não seja satisfeita, devemos aumentar a constante e repetir o processo. Ressalto ainda que a vantagem do algoritmo LLL em relação ao método de redução dado pelo Lema 1.3, é que podemos aplicá-lo para formas lineares com mais de três logaritmos, o que não é possível no Lema 1.3.

Faremos agora um exemplo de como o algoritmo LLL pode ser utilizado em formas lineares em logaritmos. Ressalto que o exemplo abaixo pode ser resolvido com técnicas mais elementares, mas o objetivo é mostrar como a técnica de redução pelo algoritmo LLL pode ser usada em conjunto com as técnicas para formas lineares em logaritmos.

A equação que resolveremos é a seguinte:

$$3 \cdot 5^n - 2^m = 11, \text{ para } n,m \geq 1.$$

Se $m \geq 3$, observamos que $3 \cdot 5^n \equiv 3 \pmod 8 \Rightarrow 5^n \equiv 1 \pmod 8$, portanto n é par. Agora, pela equação, $-2^m \equiv 2 \pmod 3 \Rightarrow 2^m \equiv 1 \pmod 3$, e portanto m é par. Assim, a equação se torna um caso particular da equação de Pell $x^2 - 3y^2 = -11$.

Vejamos agora como resolver com as técnicas apresentadas neste capítulo:

Exemplo 1.7. *Considere a equação*

$$3 \cdot 5^n - 2^m = 11, \text{ para } n,m \geq 1.$$

Observe que $3 \cdot 5^n = 11 + 2^m < 3 \cdot 2^m$, *para* $m \geq 4$, *o que nos dá* $n < m$. *O caso em que* $m < 4$ *pode ser resolvido separadamente e nos dá a solução* $(n,m) = (1,2)$. *Além disso, podemos reescrever a equação como a forma exponencial de uma forma linear em logaritmos da seguinte maneira:*

$$\Lambda = 3 \cdot 5^n 2^{-m} - 1 = 11 \cdot 2^{-m} > 0.$$

Pelo Teorema 1.2, obtemos:

$$|\Lambda| > \exp(-7,95 \cdot 10^{12} \log m),$$

portanto, $m < 3,9 \cdot 10^{14}$ *e como* $n < m$*, temos* $n < 3,9 \cdot 10^{14}$.

Seja $\Gamma = \log 3 + n \log 5 - m \log 2$. *Temos*

$$0 < \Gamma < e^{\Gamma} - 1 = \Lambda = 11 \cdot 2^{-m}.$$

Vamos aplicar a Proposição 1.6 e o Lema 1.4 para obter um limitante inferior para Γ. *Para isso, considere*

$$\alpha_0 = \log 3,\ \ \alpha_1 = \log 5,\ \ \alpha_2 = \log 2,\ \ x_1 = n \ \text{ e } x_2 = -m.$$

Podemos considerar $X_1 = X_2 = 10^{15}$ *e escolher* $C := 10^{35}$. *Defina a matriz cujas colunas geram um reticulado* $\mathcal{L}$ *por:*

$$B := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lfloor 10^{35} \log 5 \rceil & \lfloor 10^{35} \log 2 \rceil \end{pmatrix},$$

e defina

$$y := (0, -\lfloor 10^{35} \log 3 \rceil).$$

Através do comando

```
LLL:=LatticeReduce[{{1,Round[10^35*Log[5]]},{0,Round[10^35*Log[2]]}}]
```

obtemos os seguintes vetores LLL reduzidos que geram o reticulado $\mathcal{L}$:

$$b_1 := (165736237459304329, 193725177550755356),$$

$$b_2 := (199573345342948375, -184946495497462733).$$

Definimos então

$$\begin{aligned} b_1^* &= b_1 \\ b_2^* &= b_2 + \mu_{2,1} b_1^*, \ \text{ onde } \mu_{2,1} = \frac{\langle b_2, b_1^* \rangle}{\langle b_1^*, b_1^* \rangle}. \end{aligned}$$

Para esses vetores definidos acima, observamos que as condições para ser base LLL-reduzida são realmente satisfeitas.

Além disso, computamos

$$\frac{|b_1|}{|b_1^*|} = 1 \ \ e \ \frac{|b_1|}{|b_2^*|} < 0,94,$$

e pelo Lema 1.4 podemos escolher $c_1 := 1$.

Devemos agora escrever y *como combinação linear de* b_1 *e* b_2. *Fazemos isso através do seguinte comando:*

```
LinearSolve[Transpose[LLL],{0,-Round[10^35*Log[3]]}]
```

Assim, para $y = y_1 b_1 + y_2 b_2$ *obtemos* $\|y_2\| \geq 0,31$ *e podemos aplicar o Lema 1.4 e obter*

$$d(\mathcal{L}, y) \geq 0,31 \cdot 2,5 \cdot 10^{17} \geq 7,75 \cdot 10^{16}.$$

Daí, computamos T *e* Q *conforme a Proposição 1.6 e obtemos* $d(\mathcal{L}, y)^2 \geq T^2 + Q$. *Assim*

$$|\Gamma| \geq \frac{\sqrt{d(\mathcal{L}, y)^2 - Q} - T}{C} > 7,6 \cdot 10^{-19},$$

o que nos dá $m \leq 63$ *e portanto* $n \leq 63$.

Basta testar as possibilidades para ver que essa equação possui somente as seguintes soluções:

$$(n, m) \in \{(1,2), (2,6)\},$$

o que conclui nosso exemplo.

Para mais informações sobre o método do algoritmo LLL e demonstrações dos resultados citados nessa seção, sugerimos as referências [8] e [18].

1.3 Sequências de Fibonacci k-generalizadas

Sequências recorrentes são sequências $(u_n)_n$ nas quais cada termo é determinado em função de termos anteriores. Particularmente trabalhamos com as sequências recorrentes que são lineares e com coeficientes inteiros, isto é, quando existem $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{Z}$ tais que

$$u_{n+k} = c_1 u_{n+k-1} + \cdots + c_k u_n, \ \forall \ n \geq 0. \tag{1.3}$$

Note que esse tipo de sequência fica unicamente determinada pela escolha dos k valores iniciais $u_1, \ldots, u_k$. Neste caso, dizemos que $(u_n)_n$ é uma *sequência recorrente linear de ordem* k (supondo que $c_k \neq 0$).

Um dos exemplos mais famosos de sequência recorrente linear de ordem 2 é a *sequência de Fibonacci*, que foi estabelecida por Leonardo de Pisa, em 1202, a partir de um problema envolvendo a quantidade populacional de coelhos. Sua recorrência é dada por

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \ \forall \ n \geq 2, \tag{1.4}$$

onde os termos iniciais são $F_0 = 0$ e $F_1 = 1$.

A sequência de Fibonacci já foi amplamente estudada e possui inúmeras propriedades já conhecidas. Dentre as quais, destacamos a *Fórmula de Binet*:

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}}, \tag{1.5}$$

onde $\alpha = (1 + \sqrt{5})/2$ e $\beta = (1 - \sqrt{5})/2$ são as raízes do polinômio característico $\psi(x) = x^2 - x - 1$.

Considere agora um número inteiro $k \geq 2$. Definimos a *sequência de Fibonacci k-generalizada* por

$$F_n^{(k)} = F_{n-1}^{(k)} + \cdots + F_{n-k}^{(k)}, \ \forall \ n \geq 2, \tag{1.6}$$

onde os k termos iniciais são dados por $F_{-(k-2)}^{(k)} = F_{-(k-3)}^{(k)} = \cdots = F_0^{(k)} = 0$ e $F_1^{(k)} = 1$.

Para essa sequência de Fibonacci k-generalizada (ou sequência de k-bonacci) temos o seguinte polinômio característico associado:

$$\psi_k(x) = x^k - x^{k-1} - \cdots - x - 1, \tag{1.7}$$

que possui somente uma raiz real positiva, pela Lei dos Sinais de Descartes. Tal raiz será denotada por $\alpha^{(k)}$, ou somente α quando não houver ambiguidades. Ainda, chamaremos essa raiz de *raiz dominante* associada à $F_n^{(k)}$.

Neste trabalho, usaremos como ferramenta computacional o software *Mathematica*. Nele, definimos os números de k-bonacci e sua raiz dominante por:

```
F[n_,k_]:=SeriesCoefficient[Series[x/(1-Sum[x^j,{j,1,k}]),{x,0,4000}],n]
s[x_,k_]:=x^k-Sum[x^j, {j,0,k - 1}]
alphasd[k_]:=x/.Last[NSolve[s[x, k], x, 4000]]
```

Assim como a sequência de Fibonacci, sua generalização dada por (1.6) possui diversas propriedades, as quais destacaremos algumas fundamentais na sequência.

Como foi observado em [20, Lemma 3.6], temos

Lema 1.8. *Para todo $k \geq 2$, temos*

$$2(1 - 2^{-k}) < \alpha < 2.$$

Demonstração. Inicialmente observe que, pelo Teorema do Valor Intermediário, $\alpha^{(k)} \in (1, 2)$, pois $\psi_k(1) = 1 - k < 0$ para $k \geq 2$ e $\psi_k(2) = 1 > 0$.

Agora, note que podemos reescrever o polinômio característico ψ_{k+1} como

$$\psi_{k+1}(x) = x \left(x^k - \frac{x^k - 1}{x - 1} \right) - 1 = x\psi_k(x) - 1$$

e logo $\psi_{k+1}(\alpha^{(k)}) = -1$. Daí, existe uma raiz entre $\alpha^{(k)}$ e 2, que só pode ser $\alpha^{(k+1)}$, pois é a única raiz positiva de $\psi_{k+1}(x)$. Assim, $\alpha^{(k+1)} > \alpha^{(k)}$, para todo $k \geq 2$.

Note agora que $\psi_k(2(1 - 2^{-k})) < 0$ portanto $\alpha^{(k)}$ está entre $2(1 - 2^{-k})$ e 2. □

As outras raízes de $\psi_k(x)$ estarão todas dentro do círculo unitário, pelo seguinte resultado provado por Miller [17]:

Lema 1.9. *Toda raiz $\beta \neq \alpha^{(k)}$ de $\psi_k(x)$ satisfaz $|\beta| < 1$.*

Demonstração. Como já comentado, $\psi_k(x)$ tem uma única raiz real positiva, que chamaremos de $\alpha = \alpha^{(k)}$. Além disso, para todo $x \in \mathbb{R}$, se $x > \alpha$ então $\psi_k(x) > 0$. Por outro lado, se $0 < x < \alpha$ então $\psi_k(x) < 0$. Considere agora a função

$$g(x) = (x - 1)\psi_k(x) = x^{k+1} - 2x^k + 1.$$

Neste caso, para todo $x \in \mathbb{R}$, se $x > \alpha$ então $g(x) > 0$ e se $1 < x < \alpha$ então $g(x) < 0$.

Afirmação 1: $\psi_k(x)$ não tem zeros complexos β com $|\beta| > \alpha$.

De fato, se $\psi_k(\beta) = 0$ com $|\beta| > \alpha$, então $\beta^k = \beta^{k-1} + \cdots + \beta + 1$ nos dá

$$|\beta|^k \leq |\beta|^{k-1} + \cdots + |\beta| + 1.$$

Mas, isso implica que $\psi_k(|\beta|) \leq 0$, o que é um absurdo pois assumimos $|\beta| > \alpha$.

Afirmação 2: $\psi_k(x)$ não tem zeros complexos β com $1 < |\beta| < \alpha$.

De fato, nesse caso, se $\psi_k(\beta) = 0$ então $g(\beta) = 0$ com $1 < |\beta| < \alpha$. Mas aí,

$$|2\beta^k| \leq |\beta|^{k+1} + 1$$

nos dá $g(|\beta|) \geq 0$, o que é um absurdo.

Afirmação 3: $\psi_k(x)$ não tem zeros complexos β com $|\beta| = \alpha$ ou $|\beta| = 1$.

Supondo que $\psi_k(\beta) = g(\beta) = 0$ com $|\beta| = \alpha$ ou $|\beta| = 1$ temos $2\beta^k = \beta^{k+1} + 1$, o que nos dá

$$2|\beta|^k = |\beta^{k+1} + 1| \leq |\beta|^{k+1} + 1.$$

Mas, a igualdade acima só ocorre se β^{k+1} é real, portanto, β^k é real, e segue que β é real. Aplicando a regra de Sinal de Descartes para $g(x) = x^{k+1} - 2x^k + 1 = (x-1)\psi_k(x)$ temos que $g(x)$ possui duas raízes reais positivas e, ou uma raiz real negativa (se k é par) ou nenhuma raiz real negativa (se k é ímpar). Portanto, $\psi_k(x)$ possui ou uma raiz real negativa (se k é par) ou nenhuma raiz real negativa (se k é ímpar). Se k é par, então $\psi_k(0) = -1$ e $\psi_k(-1) = 1$, portanto, nenhum zero de $\psi_k(x)$, além de α, tem valor absoluto igual a 1 ou α.

Assim, toda raiz $\beta \neq \alpha$ de $\psi_k(x)$ é tal que $|\beta| < 1$, como queríamos demonstrar. $\square$

Agora, consideramos para um inteiro $k \geq 2$, a função

$$f_k(x) = \frac{x-1}{2+(k+1)(x-2)} \tag{1.8}$$

para todo $x > 2(1-2^{-k})$.

No *Mathematica*, essa função aplicada em $\alpha^{(k)}$ pode ser definida por:

```
gsd[k_] := (alphasd[k] - 1)/(2 + (k + 1)*(alphasd[k] - 2))
```

Com essa notação Dresden e Du, em [9, Teorema 1], obtiveram a seguinte fórmula, chamada de "Binet-like formula",

$$F_n^{(k)} = \sum_{i=1}^{k} f_k(\alpha_i)\alpha_i^{n-1} \tag{1.9}$$

onde $\alpha_1 = \alpha, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ são as raízes do polinômio $\psi_k(x) = x^k - x^{k-1} - \cdots - x - 1$.

Nesse mesmo artigo, eles mostraram que a contribuição dos zeros que estão dentro do círculo unitário, para a fórmula (1.9), é muito pequena. Mais precisamente,

$$|E_k(n)| = |F_n^{(k)} - f_k(\alpha)\alpha^{n-1}| < \frac{1}{2} \tag{1.10}$$

para todo $n \geq 1$.

Vamos expor mais alguns resultados sobre números de k-bonacci:

Lema 1.10. *Se* $2 \leq n \leq k+1$, *então*

$$F_n^{(k)} = 2^{n-2}.$$

Demonstração. Observe inicialmente que pela definição da sequência de Fibonacci k-generalizada temos

$$\begin{aligned} F_n^{(k)} &= F_{n-1}^{(k)} + \cdots + F_{n-k}^{(k)}, \ \forall\, n \geq 2 \\ F_{n-1}^{(k)} &= F_{n-2}^{(k)} + \cdots + F_{n-(k+1)}^{(k)}, \end{aligned}$$

daí

$$F_n^{(k)} - F_{n-1}^{(k)} = F_{n-1}^{(k)} - F_{n-(k+1)}^{(k)},$$

o que nos dá

$$F_n^{(k)} = 2F_{n-1}^{(k)} - F_{n-(k+1)}^{(k)}.$$

Como, para $2 \leq n \leq k+1$, $F_{n-(k+1)}^{(k)} = 0$ temos

$$F_n^{(k)} = 2F_{n-1}^{(k)} = 2^2 F_{n-2}^{(k)} = 2^3 F_{n-3}^{(k)} = \cdots = 2^{n-2} F_{n-(n-2)}^{(k)} = 2^{n-2} F_2^{(k)} = 2^{n-2},$$

como queríamos. $\square$

Um dos resultados que utilizaremos sobre sequências de Fibonacci k-generalizada foi dado por Bravo e Luca em [4]:

Lema 1.11. *Para todo* $k \geq 2$ *temos que*

$$\alpha^{n-2} \leq F_n^{(k)} \leq \alpha^{n-1},$$

para todo $n \geq 1$.

Demonstração. Para $n = 1$ temos $1/\alpha \leq F_1^{(k)} = 1 \leq \alpha^0 = 1$. Vamos provar por indução em $n \geq 2$ para um $k \geq 2$ dado. Observe que para $2 \leq n \leq k+1$ temos, pelo Lema 1.10, $F_n^{(k)} = 2^{n-2}$. Como $\alpha < 2$, a desigualdade $\alpha^{n-2} \leq F_n^{(k)}$ segue diretamente. Para a outra desigualdade, observe que como $\alpha > 2(1-2^{-k})$, é suficiente provar que $2^{n-1}(1-2^{-k})^{n-1} \geq 2^{n-2}$, ou seja, $(1-2^{-k})^{n-1} > 1/2$. No entanto, vale que $(1-x)^n > 1 - nx$, para todo $n > 1$ e $x > 0$, daí

$$(1-2^{-k})^{n-1} > 1 - \frac{n-1}{2^k} \geq 1 - \frac{k}{2^k} \geq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

onde usamos os fatos que $n \leq k+1$ e $2^{k-1} \geq k$.

Suponha então que o resultado seja verdadeiro para todo inteiro menor que $n \geq k+2$, logo

$$\begin{aligned}
\alpha^{n-3} \leq & \; F_{n-1}^{(k)} && \leq \alpha^{n-2} \\
\alpha^{n-4} \leq & \; F_{n-2}^{(k)} && \leq \alpha^{n-3} \\
& \;\;\vdots && \\
\alpha^{n-k-2} \leq & \; F_{n-k}^{(k)} && \leq \alpha^{n-k-1}.
\end{aligned}$$

Somando as desigualdades da hipótese de indução acima temos

$$\begin{aligned}
\alpha^{n-3} + \alpha^{n-4} + \cdots + \alpha^{n-k-2} \leq & \; F_n^{(k)} && \leq \alpha^{n-2} + \alpha^{n-3} + \cdot + \alpha^{n-k-1} \\
\alpha^{n-k-2}(\alpha^{k-1} + \alpha^{k-2} + \cdots + \alpha + 1) \leq & \; F_n^{(k)} && \leq \alpha^{n-k-1}(\alpha^{k-1} + \alpha^{k-2} + \cdots + \alpha + 1) \\
\alpha^{n-k-2}\alpha^k \leq & \; F_n^{(k)} && \leq \alpha^{n-k-1}\alpha^k \\
\alpha^{n-2} \leq & \; F_n^{(k)} && \leq \alpha^{n-1},
\end{aligned}$$

pois $\alpha^k = \alpha^{k-1} + \alpha^{k-2} + \cdots + \alpha + 1$, o que completa a demonstração.

$\square$

O próximo lema nos dá uma estimativa de $f_k(\alpha)$ e sua altura logarítmica.

Lema 1.12. *Para todo $k \geq 2$, sejam $\alpha = \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ as raízes do polinômio característico de $F_n^{(k)}$ e considere a função $f_k(x)$ definida anteriormente em* (1.8). *Então*

(a) Se $i \in [2,k]$ então $|f_k(\alpha_i)| < 1$;

(b) $1/2 < f_k(\alpha) < 3/4$;

(c) $h(f_k(\alpha)) < 4 \log k$.

Demonstração. Para o item (a), observe que quando $k = 2$, $\alpha_2 = (1-\sqrt{5})/2$ e portanto $f_2(\alpha_2) = 0,27639\ldots$, o que nos dá $|f_2(\alpha_2)| < 1$. Para $k \geq 3$, usando que $|\alpha_i| < 1$ para $i \in [2,k]$ temos

$$\begin{aligned}
|2 + (k+1)(\alpha_i - 2)| & \geq (k+1)|\alpha_i - 2| - 2 \\
& \geq (k+1)(|2| - |\alpha_i|) - 2 \\
& > k + 1 - 2 = k - 1 \geq 2,
\end{aligned}$$

daí

$$|f_k(\alpha_i)| = \left|\frac{\alpha_i - 1}{2 + (k+1)(\alpha_i - 2)}\right| < \frac{|\alpha_i| + 1}{2} < 1.$$

No item (b), considere a derivada de $f_k(x)$ em relação a x:

$$f_k'(x) = \frac{1-k}{(2+(k+1)(x-2))^2} < 0.$$

Portanto $f_k(x)$ é decrescente. Pelo Lema 1.8 temos $2(1-2^{-k}) < \alpha < 2$, assim $f_k(2) < f_k(\alpha) < f_k(2(1-2^{-k}))$.

Observe que $f_k(2) = 1/2$ e

$$f_k(2(1-2^{-k})) = \frac{2^{k-1}-1}{2^k - k - 1} \leq \frac{3}{4}$$

para $k \geq 3$. Para $k = 2$ basta calcular $f_2((1+\sqrt{5})/2) = 0,72360\ldots < 3/4$.

Vamos agora provar o item (c).

$$\begin{aligned} h(f_k(\alpha)) &= h\left(\frac{\alpha - 1}{2 + (k+1)(\alpha - 2)}\right) \\ &= \frac{1}{k}\left(\log a_0 + \sum_{i=1}^{k} \log \max\left\{\left|\frac{\alpha_i - 1}{2+(k+1)(\alpha_i - 2)}\right|, 1\right\}\right), \end{aligned}$$

onde a_0 é o coeficiente líder do polinômio minimal de $f_k(\alpha)$ e $\alpha_1 = \alpha$.

Como $|2+(k+1)(\alpha_i - 2)| \geq (k+1)|\alpha_i - 2| - 2 > k - 1 \geq 1$, pois $|\alpha_i| < 1$, para $i > 1$. Além disso,

$$\begin{aligned} 2 + (k+1)(\alpha - 2) &> 2 + 3(2(1-2^{-k}) - 2) \\ &= 2 + 3(-2^{-k+1}) \geq 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\left|\frac{\alpha_i - 1}{2+(k+1)(\alpha_i - 2)}\right| < 2, \forall\ 1 \leq i \leq k.$$

Temos ainda, $a_0 < 2^k(k+1)^k$. De fato: considere $g_k(x) = \prod_{i=1}^{k}(x - f_k(\alpha_i)) \in \mathbb{Q}[x]$. Então o coeficiente líder do polinômio minimal de $f_k(\alpha)$ sobre os inteiros divide

$$\prod_{i=1}^{k}(2 + (k+1)(\alpha_i - 2)).$$

Mas,

$$\left|\prod_{i=1}^{k}(2+(k+1)(\alpha_i - 2))\right| = (k+1)^k \left|\prod_{i=1}^{k}\left(2 - \frac{2}{k+1} - \alpha_i\right)\right| = (k+1)^k \left|\psi_k\left(2 - \frac{2}{k+1}\right)\right|,$$

onde $\psi_k(x) = \prod_{i=1}^{k}(x - \alpha_i) = x^k - x^{k-1} - \cdots - x - 1$.

Como $|\psi_k(x)| \leq \max\{x^k, 1 + x + \cdots + x^{k-1}\} < 2^k$, para $0 < x < 2$, obtemos

$$|a_0| \leq (k+1)^k \left|\psi_k\left(2 - \frac{2}{k+1}\right)\right| < 2^k(k+1)^k.$$

Logo,

$$\begin{aligned} h(f_k(\alpha)) &< \frac{1}{k}(k\log 2 + k\log(k+1) + k\log 2) \\ &= \log(k+1) + \log 4 < 4\log k, \end{aligned}$$

como queríamos. □

1.4 Outros resultados auxiliares

Mostraremos nesta seção alguns resultados auxiliares que serão utilizados nas demonstrações dos resultados principais.

Lema 1.13. *Se $A \geq 3$ e $y/\log y < A$ então $y < 2A\log A$.*

Demonstração. Como a função $f(y) = y/\log y$ é crescente para $y > e$, suponha, por absurdo, que $y \geq 2A\log A$. Daí,

$$\frac{y}{\log y} \geq \frac{2A\log A}{\log(2A\log A)} > \frac{2A\log A}{2\log A} = A,$$

onde usamos o fato que para $A \geq 3$, $2\log A < A$ e portanto $\log(2A\log A) < \log A^2 = 2\log A$. Mas isso contradiz a hipótese $y/\log y < A$. □

Lema 1.14. *Se $A \geq 3$ e $y/\log^2 y < A$ então $y < 16A\log^2 A$.*

Demonstração. Como a função $f(y) = y/\log^2 y$ é crescente para $y > e^2$, suponha, por absurdo, que $y \geq 16A\log^2 A$. Daí,

$$\frac{y}{\log^2 y} \geq \frac{16A\log^2 A}{\log^2(16A\log^2 A)} > \frac{16A\log^2 A}{\log^2(A^4)} = A,$$

onde usamos o fato que para $A \geq 3$, $16\log^2 A < A^3$ e portanto $\log^2(16A\log^2 A) < \log^2(A^4) = 16\log^2 A$. Mas isso contradiz a hipótese $y/\log^2 y < A$. □

Lema 1.15. *A equação Diofantina*

$$x^s + y^s = 2^t, \tag{1.11}$$

não tem solução em inteiros (x, y, s, t) *para* $x \neq y$, $x, y > 1$, $s > 1$ *e* $t \geq 1$.

Demonstração. Para s par vamos considerar a equação

$$x^2 + y^2 = 2^t, \tag{1.12}$$

pois assim, se (1.12) não tiver solução então basta reescrever $s = 2s_1$ e a equação $x^s + y^s = (x^{s_1})^2 + (y^{s_1})^2 = 2^t$, não tem solução. Como $x \neq y$ e $x, y > 1$ temos que $t \geq 2$.

Suponha (x, y, t) solução de $x^2 + y^2 = 2^t$. Pelo Princípio da Boa Ordem, podemos considerar t mínimo no conjunto $\{t; (x, y, t) \text{ é solução}\}$.

Como $t \geq 2$, olhando a equação módulo 4 temos que $x \equiv 0, 2 \pmod 4$ e $y \equiv 0, 2 \pmod 4$. Em qualquer caso obtemos

$$x_1^2 + y_1^2 = 2^{t-2}.$$

Novamente, como $x \neq y$ e $x, y > 1$ temos $t - 2 \geq 2$. O que contraria a minimalidade de t. Portanto, não temos solução para $x^2 + y^2 = 2^t$.

Agora suponha s ímpar. Como $2^s < x^s + y^s = 2^t$, temos $s < t$. Suponha (x, y, s, t) solução de $x^s + y^s = 2^t$. Pelo Princípio da Boa Ordem, podemos considerar t mínimo no conjunto $\{t; (x, y, s, t) \text{ é solução}\}$.

Como s é ímpar

$$2^t = x^s + y^s = (x + y)(x^{s-1} - x^{s-2}y + \cdots + (-1)^{s-1}y^{s-1}),$$

então

$$x + y = 2^a \tag{1.13}$$

$$\sum_{k=0}^{s-1} (-1)^k x^{s-1-k} y^k = 2^b, \tag{1.14}$$

com $a, b \geq 1$ (observe que se $a = 0$ então x e y tem paridades diferentes, mas aí teríamos um absurdo com (1.14); e se $b = 0$ então $x^s + y^s = x + y$, o que é um absurdo pois $s > 1$).

Logo, $y \equiv -x \pmod 2$ e então

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{s-1}(-1)^k x^{s-1-k} y^k &\equiv 0 \pmod 2 \\
\sum_{k=0}^{s-1}(-1)^k x^{s-1-k} (-x)^k &\equiv 0 \pmod 2 \\
\sum_{k=0}^{s-1}(-1)^{2k} x^{s-1} &\equiv 0 \pmod 2 \\
s x^{s-1} &\equiv 0 \pmod 2.
\end{aligned}$$

Como s é ímpar, x é par e portanto y também é par. Considere $x = 2^m x_1$ e $y = 2^n y_1$, com $2 \nmid x_1$ e $2 \nmid y_1$. Assim,

$$x^s + y^s = 2^t \Rightarrow 2^{ms} x_1^s + 2^{ns} y_1^s = 2^t.$$

Daí, temos que $m = n$ e portanto

$$x_1^s + y_1^s = 2^{t-ms}.$$

Se $t - ms \geq 1$ então temos uma contradição com a minimalidade de t. Se $t = ms$ então $x^s + y^s = (2^m)^s$. Como $s > 1$ é ímpar temos que não existe solução pois é a Equação de Fermat para $s \geq 3$. $\square$

Capítulo 2

A Equação $(F_n^{(k)})^s + (F_{n+1}^{(k)})^s = F_m^{(l)}$

A história dessa equação começa com o seguinte resultado para sequência de Fibonacci:

Proposição 2.1. *Seja $(F_n)_{n\geq 0}$ a sequência de Fibonacci, então para todo $n \geq 0$ temos*

$$F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_{2n+1}.$$

Demonstração. Para provar esse resultado, considere a fórmula de Binet dada em (1.5) por

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}},$$

onde $\alpha = (1+\sqrt{5})/2$ e $\beta = (1-\sqrt{5})/2$.

Temos assim

$$\begin{aligned} F_n^2 + F_{n+1}^2 &= \left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(\frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\sqrt{5}}\right)^2 \\ &= \frac{\alpha^{2n} + \beta^{2n} + \alpha^{2n+2} + \beta^{2n+2}}{5}, \end{aligned}$$

pois $\alpha\beta = -1$. Agora, observe que $\alpha^2 + 1 = \sqrt{5}\alpha$ e $\beta^2 + 1 = -\sqrt{5}\beta$, portanto

$$\begin{aligned} F_n^2 + F_{n+1}^2 &= \frac{\alpha^{2n}(\alpha^2+1) + \beta^{2n}(\beta^2+1)}{5} \\ &= \frac{\alpha^{2n+1}\sqrt{5} - \beta^{2n+1}\sqrt{5}}{5} \\ &= \frac{\alpha^{2n+1} - \beta^{2n+1}}{\sqrt{5}} = F_{2n+1}, \end{aligned}$$

o que prova o resultado. □

Motivados por esse resultado, a pergunta natural para sequências generalizadas de k-bonacci é: *É possível que a soma de quadrados consecutivos de k-bonacci ainda seja um número de k-bonacci?*.

Em 2014, Chaves e Marques [6] resolveram a equação Diofantina

$$(F_n^{(k)})^2 + (F_{n+1}^{(k)})^2 = F_m^{(k)},$$

em inteiros $m, n \geq 2$ e $k \geq 3$, mostrando que não há solução nesse caso.

Uma generalização natural para a Proposição 2.1, é pensar no que acontece com potências maiores que dois. Marques e Togbé [15], em 2010, provaram que se s é um inteiro tal que $F_n^s + F_{n+1}^s$ é um número de Fibonacci para todo n suficientemente grande, então $s = 1$ ou 2. Já em 2011, Luca e Oyono [14] resolveram o problema completamente, mostrando que a equação

$$F_n^s + F_{n+1}^s = F_m$$

não tem solução em inteiros (n, m, s) com $n \geq 2$ e $s \geq 3$.

Pensando se a soma de potências consecutivas de números de k-bonacci ainda são números de k-bonacci, Chaves e Marques [7] mostraram que

$$(F_n^{(k)})^s + (F_{n+1}^{(k)})^s = F_m^{(k)},$$

não tem solução em inteiros positivos com a condição $n \geq 2$ e $3 \leq k \leq \min\{n, \log s\}$. Essa última condição foi removida por Luca e Ruiz [13] no mesmo ano.

Freitas *et al.* [1], em 2018, mostraram que

$$(F_n^{(k)})^2 + (F_{n+1}^{(k)})^2 = F_m^{(l)},$$

não tem solução em inteiros com $l > k \geq 2$ e $n \geq 2$.

Queremos estudar a equação

$$(F_n^{(k)})^s + (F_{n+1}^{(k)})^s = F_m^{(l)} \tag{2.1}$$

em inteiros positivos (n, m, k, l, s) com $k, l \geq 3$, $s \geq 2$ e $n, m \geq 2$.

Considere inicialmente o seguinte lema auxiliar:

Lema 2.2. *Se (n, m, k, l, s) é solução da equação (2.1) então $m \geq l + 2$.*

Demonstração. De fato, se $m < l + 2$, temos pelo Lema 1.10 que $F_m^{(l)} = 2^{m-2}$ e então

$$(F_n^{(k)})^s + (F_{n+1}^{(k)})^s = 2^{m-2}.$$

Segue do Lema 1.15 que não existe solução nesse caso, portanto $m \geq l + 2$. $\square$

Observe que, ao longo de todo o estudo sobre a equação (2.1), o caso $s = 2$ já foi resolvido para $l = k$ (por Chaves e Marques) e para $l > k$ (por Freitas *et al.*). A fim de resolver completamente essa equação, vamos dedicar uma seção especial para o caso em que $s = 2$ e $l < k$.

Antes disso, vamos estabelecer a seguinte notação que será usada ao longo de todo trabalho: considere α a raiz dominante do polinômio característico associado à $F_n^{(k)}$ e β tal raiz associada à $F_m^{(l)}$. Temos $\beta < \alpha$, sempre que $l < k$. Pela fórmula dada por Dresden e Du [9] para sequência de Fibonacci k-generalizada dada em (1.9) e (1.10), podemos escrever

$$F_n^{(k)} = f_k(\alpha)\alpha^{n-1} + E_k(n) \text{ e } F_m^{(l)} = f_l(\beta)\beta^{m-1} + E_l(m)$$

onde $|E_k(n)| < 1/2$ e $|E_l(m)| < 1/2$.

2.1 O caso $s = 2$

Seguindo as ideias de Freitas *et al.* [1] resolveremos a equação (2.1) para $s = 2$ e $l < k$, obtendo assim o seguinte teorema:

Teorema 2.3. *A equação Diofantina*

$$(F_n^{(k)})^2 + (F_{n+1}^{(k)})^2 = F_m^{(l)}$$

não tem solução em inteiros positivos m, n, k e l com $k \geq 3$ ou $l \geq 3$ e $n \geq 3$.

Observe que se $k = l = 2$ então a equação possui infinitas soluções, com $m = 2n + 1$, pela Proposição 2.1.

Vamos então para a demonstração desse resultado.

Demonstração do Teorema 2.3. Como já mencionado, podemos supor $k > l \geq 2$.

Usando o Lema 1.11, temos

$$\begin{aligned}
\beta^{m-1} &\geq F_m^{(l)} = (F_n^{(k)})^2 + (F_{n+1}^{(k)})^2 \\
&\geq \alpha^{2(n-2)} + \alpha^{2(n-1)} = \alpha^{2(n-2)}(1+\alpha^2) \\
&> \alpha^{2(n-2)+2} = \alpha^{2(n-1)} > \beta^{2(n-1)}
\end{aligned}$$

o que nos dá $m - 1 > 2(n-1)$. Por outro lado, como $\sqrt{2} < \beta < \alpha < 2$, temos

$$\begin{aligned}
(\sqrt{2})^{m-2} &< \beta^{m-2} \leq F_m^{(l)} = (F_n^{(k)})^2 + (F_{n+1}^{(k)})^2 \\
&\leq \alpha^{2(n-1)} + \alpha^{2n} = \alpha^{2n}(\alpha^{-2}+1) \\
&< \alpha^{2n}\alpha = \alpha^{2n+1} < 2^{2n+1}
\end{aligned}$$

obtendo assim $(m-2)/2 < 2n+1$. Portanto,

$$2n - 1 < m < 4n + 4. \tag{2.2}$$

Pela fórmula de Binet generalizada (1.9), podemos escrever

$$(f_k(\alpha)\alpha^{n-1} + E_k(n))^2 + (f_k(\alpha)\alpha^n + E_k(n+1))^2 = f_l(\beta)\beta^{m-1} + E_l(m)$$

o que nos dá

$$\begin{aligned}
|f_k(\alpha)^2\alpha^{2(n-1)}(1+\alpha^2) - f_l(\beta)\beta^{m-1}| &< 1 + |2f_k(\alpha)\alpha^{n-1}(E_k(n) + \alpha E_k(n+1))| \\
&< 1 + 2\cdot\frac{3}{4}\alpha^{n-1}\left(\frac{1}{2}+1\right) < 3\alpha^{n-1},
\end{aligned} \tag{2.3}$$

onde usamos o Lema 1.8 e o Lema 1.12 para obter a limitação acima.

Dividindo (2.3) por $f_k(\alpha)^2\alpha^{2(n-1)}(1+\alpha^2)$ e usando novamente o Lema 1.12, como

$$f_k(\alpha)^2\alpha^{2(n-1)}(1+\alpha^2) > \frac{1}{4}(1+1^2)\alpha^{2(n-1)} = \frac{1}{2}\alpha^{2(n-1)},$$

obtemos,

$$\left|1 - \frac{f_l(\beta)\beta^{m-1}}{f_k(\alpha)^2\alpha^{2(n-1)}(1+\alpha^2)}\right| < \frac{6}{\alpha^{n-1}} < \frac{10}{(1,6)^n}. \tag{2.4}$$

Considere a forma linear em logaritmos dada por

$$\Lambda_1 := \frac{f_l(\beta)}{f_k(\alpha)^2(1+\alpha^2)}\beta^{m-1}\alpha^{-2(n-1)} - 1.$$

Inicialmente, observe que $\Lambda_1 \neq 0$ (o argumento para isso é o mesmo utilizado em [1] e faremos em maiores detalhes nas próximas seções). Agora, com

$$\gamma_1 := \frac{f_l(\beta)}{f_k(\alpha)^2(1+\alpha^2)}, \ \gamma_2 := \beta, \ \gamma_3 := \alpha$$

$$b_1 := 1, \ b_2 := m-1 \text{ e } b_3 := -2(n-1)$$

podemos aplicar o Teorema 1.2. Para esta escolha, temos $D = [\mathbb{Q}(\alpha,\beta) : \mathbb{Q}] \leq kl \leq k^2$, $B = 4n+3$ e ainda

$$h(\gamma_1) < 12\log k + \frac{1,4}{k} + 0,7, \ \text{(usando o Lema 1.12)},$$

$$h(\gamma_2) < \frac{0,7}{l} \text{ e } h(\gamma_3) < \frac{0,7}{k}.$$

Assim, $A_1 := 14k^2\log k$, onde usamos o fato que $12k^2\log k + 1,4k + 0,7k^2 < 14k^2\log k$ para $k \geq 3$, $A_2 := 0,7k$ e $A_3 := 0,7k$. Portanto,

$$\begin{aligned} |\Lambda_1| &> \exp(-1,4\cdot 30^6\cdot 3^{4,5}k^4(1+2\log k)(1+\log(4n+3))\cdot 14k^2\log k\cdot 0,7k\cdot 0,7k) \\ &> \exp(-1,5\cdot 10^{13}k^8\log^2 k\log n), \end{aligned} \quad (2.5)$$

onde usamos os fatos que $1+2\log k < 3\log k$ para $k \geq 3$ e $1+\log(4n+3) < 5\log n$ para $n \geq 2$.

Comparando (2.4) e (2.5) obtemos

$$\frac{n}{\log n} < 3,2\cdot 10^{13}k^8\log^2 k,$$

e, utilizando o Lema 1.13, segue que

$$n < 2,37\cdot 10^{15}k^8\log^3 k \text{ e } m < 2,38\cdot 10^{15}k^8\log^3 k. \quad (2.6)$$

O caso k grande

Considere $k \geq 243$, nesse caso temos $n < 2^{k/2}$. Utilizando o método Bravo e Luca (ver [2], faremos o método em mais detalhes em seções posteriores), obtemos

$$|\delta_1| := |\alpha^{n-1} - 2^{n-1}| < \frac{2^n}{2^{k/2}}, \quad (2.7)$$

$$|\delta_2| := |\alpha^n - 2^n| < \frac{2^{n+1}}{2^{k/2}}, \quad (2.8)$$

$$|\eta| := |f_k(\alpha) - f_k(2)| < \frac{2k}{2^k}. \tag{2.9}$$

Sabendo que $f_k(2) = 1/2$, podemos escrever

$$f_k(\alpha)\alpha^{n-1} = 2^{n-2} + 2^{n-1}\eta + \frac{\delta_1}{2} + \delta_1\eta$$

e

$$f_k(\alpha)\alpha^{n} = 2^{n-1} + 2^{n}\eta + \frac{\delta_2}{2} + \delta_2\eta.$$

Elevando as igualdades acima ao quadrado e utilizando as desigualdades (2.7), (2.8) e (2.9), obtemos

$$\begin{aligned} |2^{2n-4} - f_k(\alpha)^2\alpha^{2n-2}| &< 2^{2n-4}\left(\frac{2^5k}{2^{3k/2}} + \frac{4}{2^{k/2}} + \frac{2^5k}{2^{2k}} + \frac{2^4k^2}{2^k} + \frac{2^6k^2}{2^{5k/2}} + \frac{4}{2^k} + \frac{2^6k^2}{2^{3k}} + \frac{2^3k}{2^k}\right) \\ &< 2^{2n-4}\frac{11}{2^{k/2}}, \end{aligned} \tag{2.10}$$

onde na última desigualdade usamos o fato que $k \geq 243$.

Analogamente,

$$|2^{2n-2} - f_k(\alpha)^2\alpha^{2n}| < 2^{2n-4}\frac{23}{2^{k/2}}. \tag{2.11}$$

Assim,

$$\begin{aligned} &|2^{2n-4}\cdot 5 - f_l(\beta)\beta^{m-1}| = |2^{2n-4} + 2^{2n-2} - f_l(\beta)\beta^{m-1}| \\ \leq\ & |2^{2n-2} - f_k(\alpha)^2\alpha^{2n}| + |2^{2n-4} - f_k(\alpha)^2\alpha^{2n-2}| + |f_k(\alpha)^2(1+\alpha^2)\alpha^{2n-2} - f_l(\beta)\beta^{m-1}| \\ <\ & 2^{2n-4}\frac{23}{2^{k/2}} + 2^{2n-4}\frac{11}{2^{k/2}} + 3\alpha^{n-1}, \end{aligned} \tag{2.12}$$

utilizando as desigualdades (2.3), (2.10) e (2.11).

Consideraremos agora dois casos: se $m \leq 2^{l/2}$ e se $m > 2^{l/2}$.

Caso 1:

Se $m \leq 2^{l/2}$ então, novamente pelo argumento de Bravo e Luca [2] obtemos

$$|\delta_3| := |\beta^{m-1} - 2^{m-1}| < \frac{2^m}{2^{l/2}} \tag{2.13}$$

e

$$|\eta_3| := |f_l(\beta) - f_l(2)| < \frac{2l}{2^l}. \tag{2.14}$$

Assim,

$$f_l(\beta)\beta^{m-1} = 2^{m-2} + 2^{m-1}\eta_3 + \frac{\delta_3}{2} + \delta_3\eta_3$$

e usando as limitações dadas em (2.13) e (2.14) segue que

$$\begin{aligned} |2^{m-2} - f_l(\beta)\beta^{m-1}| &< 2^{m-2}\left(\frac{4l}{2^l} + \frac{2}{2^{l/2}} + \frac{8l}{2^{3l/2}}\right) \\ &< 2^{m-2}\frac{11}{2^{l/2}}, \end{aligned} \tag{2.15}$$

onde usamos o fato de $l \geq 2$.

Agora, utilizando as desigualdades obtidas acima temos

$$\begin{aligned} |2^{2n-4}\cdot 5 - 2^{m-2}| &\leq |2^{2n-4}\cdot 5 - f_l(\beta)\beta^{m-1}| + |f_l(\beta)\beta^{m-1} - 2^{m-2}| \\ &< 2^{2n-4}\frac{34}{2^{k/2}} + 3\alpha^{n-1} + 2^{m-2}\frac{11}{2^{l/2}}. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Dividindo por 2^{m-2}

$$\left|\frac{2^{2n-4}\cdot 5}{2^{m-2}} - 1\right| < \frac{2^{2n-4}}{2^{m-2}}\cdot\frac{34}{2^{k/2}} + \frac{3\alpha^{n-1}}{2^{m-2}} + \frac{11}{2^{l/2}}. \tag{2.17}$$

Por (2.2), $m > 2n-1$ assim $2n - m - 2 < -1$, portanto

$$\frac{2^{2n-4}}{2^{m-2}} < \frac{1}{2},$$

além disso, como $\alpha^{2n-2} < 2^{m-1} \Rightarrow \alpha^{n-1} < 2^{\frac{m-1}{2}} \Rightarrow 3\alpha^{n-1} < 2^{\frac{m-1}{2}+2} = 2^{\frac{m+3}{2}}$. Pelo Lema 2.2 temos $m \geq l+2$, portanto $m - (l-5)/2 - 2 \geq (m+3)/2$, logo

$$3\alpha^{n-1} < 2^{5/2}\frac{2^{m-2}}{2^{l/2}}.$$

Voltando em (2.17), como $k > l$,

$$\left|\frac{2^{2n-4}\cdot 5}{2^{m-2}} - 1\right| < \frac{17}{2^{l/2}} + \frac{2^{5/2}}{2^{l/2}} + \frac{11}{2^{l/2}} < \frac{34}{2^{l/2}}.$$

Como vimos, $2n - m - 2 < -1$, portanto, em qualquer caso,

$$\frac{1}{4} \leq \left|\frac{2^{2n-4}\cdot 5}{2^{m-2}} - 1\right| < \frac{34}{2^{l/2}}.$$

Assim, $l \leq 14$ e como nesse caso $m \leq 2^{l/2}$ temos $m < 128$ e de (2.2) obtemos $n < 65$. Ainda, como $n \geq k+1$ temos $k < 64$, o que é uma contradição, pois $k \geq 243$. Cabe ressaltar que estamos supondo $n \geq k+1$, pois se $n < k+1$ então $F_m^{(l)} = 5\cdot 2^{2n-4}$, que já está resolvido em [3, Teorema 2].

Caso 2:

Se $m > 2^{l/2}$ então $l < 2\log m/\log 2$ e como $m < 2,38 \cdot 10^{15} k^8 \log^3 k$, temos $l < 45 \log k$ para $k \geq 243$.

Considerando agora a desigualdade (2.12) e dividindo por $2^{2n-4} \cdot 5$, como $n \geq k+1$ e $\alpha < 2$ segue que

$$\begin{aligned} \left|1 - \frac{f_l(\beta)\beta^{m-1}}{2^{2n-4} \cdot 5}\right| &< \frac{34}{5 \cdot 2^{k/2}} + \frac{3\alpha^{n-1}}{5 \cdot 2^{2n-4}} \\ &< \frac{34}{5 \cdot 2^{k/2}} + \frac{3}{5 \cdot 2^{k-2}} < \frac{7}{2^{k/2}}. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Analisando a forma linear

$$\Lambda_2 := \frac{f_l(\beta)\beta^{m-1}}{2^{2n-4} \cdot 5} - 1$$

observe que $\Lambda_2 \neq 0$, pois utilizando a conjugação sobre $\mathbb{Q}(\beta)$ obtemos

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{m-1} < |\beta|^{m-1} = \frac{|f_l(\beta_i)|}{|f_l(\beta)|}|\beta_i|^{m-1} < 2,$$

onde usamos o Lema 1.12 para obter $|f_l(\beta_i)| < 1 < 2|f_l(\beta)|$. Portanto, $m \leq 3$, o que não ocorre pois $m \geq l+2 \geq 4$. Assim, aplicando o Teorema 1.2 obtemos:

$$|\Lambda_2| > \exp(-2,11 \cdot 10^{12} l^4 \log^2 l \log n).$$

Portanto,

$$k < 6,09 \cdot 10^{12} l^4 \log^2 l \log n,$$

e como $n < 2,37 \cdot 10^{15} k^8 \log^3 k < k^{16}$, para $k \geq 243$, temos

$$\frac{k}{\log k} < 9,75 \cdot 10^{13} l^4 \log^2 l,$$

e pelo Lema 1.13,

$$k < 9,75 \cdot 10^{15} l^4 \log^3 l.$$

Como $l < 45 \log k$ temos $l \leq 3403$ e assim, $k < 7,04 \cdot 10^{32}$. Além disso, de (2.6),

$$n < 6,19 \cdot 10^{283} \text{ e } m < 6,22 \cdot 10^{283}.$$

Vamos analisar o caso em que $l \leq 3403$: para isso, considere

$$\Gamma = (m-1)\log\beta - (2n-4)\log 2 + \log(f_l(\beta)/5),$$

então por (2.18)

$$|1-e^{\Gamma}|<\frac{7}{2^{k/2}}.$$

Se $\Gamma>0$,

$$0<\Gamma\leq e^{\Gamma}-1<\frac{7}{2^{k/2}}$$

e portanto

$$0<(m-1)\frac{\log\beta}{2\log 2}-n+\left(2+\frac{\log(f_l(\beta)/5)}{2\log 2}\right)<5,1\cdot 2^{-k/2}.$$

Por outro lado, se $\Gamma<0$ por (2.18), $1-e^{\Gamma}\leq|1-e^{\Gamma}|<1/2$, para $k\geq 243$. Como $\Gamma<0$ temos $e^{|\Gamma|}e^{\Gamma}=1$ e portanto $e^{|\Gamma|}<2$. Assim,

$$0<|\Gamma|\leq e^{|\Gamma|}-1=e^{|\Gamma|}|e^{\Gamma}-1|<\frac{14}{2^{k/2}}.$$

Logo,

$$0<(2n-4)\log 2-(m-1)\log\beta-\log(f_l(\beta)/5)<14\cdot 2^{-k/2}.$$

Como o argumento de trabalho para $\Gamma>0$ e $\Gamma<0$ são análogos, consideraremos somente o caso $\Gamma>0$, para evitar repetições desnecessárias. Então,

$$0<(m-1)\gamma_l-n+\mu_l<5,1\cdot 2^{-k/2},$$

onde

$$\gamma_l:=\frac{\log\beta}{2\log 2}\text{ e }\mu_l:=2+\frac{\log(f_l(\beta)/5)}{2\log 2}.$$

A fim de utilizarmos o Lema 1.3, precisamos garantir que γ_l é irracional. Para isso, suponha por absurdo que $\gamma_l=a/b$, com $a,b\in\mathbb{N}$, assim

$$a\log\beta=b\log 4\Rightarrow\beta^a=4^b.$$

Conjugando sobre o corpo $\mathbb{Q}(\beta)$ temos

$$(1,5)^a<|\beta|^a=|\beta_i|^a<1,\text{ o que é um absurdo.}$$

Seja $q_{r,l}$ o denominador do r-ésimo convergente da fração contínua de γ_l. De (2.6) temos m,n limitados em função de k, mas como $k<9,75\cdot 10^{15}l^4\log^3 l$ podemos considerar um limitante para m,n em função de l dado por

$$M_l:=3,42\cdot 10^{148}l^{32}\log^{27}l<M_{3403}$$

e usamos o software *Mathematica* para obtermos que

$$\min_{2\leq l\leq 3403}(q_{600,l}) > 6M_l \text{ e } q := \max_{2\leq l\leq 3403}(q_{600,l}) < 10^{900}$$

Para os cálculos acima, podemos definir no *Mathematica* os seguinte comandos:

```
DeFrac[x_,n_]:=Last[Denominator[Convergents[x,n]]]
gama[k_]:=Log[alphasd[k]]/(2*Log[2])
Timing[Min[Table[DeFrac[gama[k],600],{k,2,3403}]]>6*M_l]
Timing[Max[Table[DeFrac[gama[k],600],{k,2,3403}]]]
```

Estes últimos dois comandos, nos dão, respectivamente, o mínimo e o máximo do denominador do convergente de γ_l. Ambos os cálculos, demoraram cerca de um mês para serem efetuados, o que pode ser observado através do comando `Timing`.

Definimos $\varepsilon_l = \|\mu_l q_{600,l}\| - M_l\|\gamma_l q_{600,l}\|$ para $2 \leq l \leq 3403$, e obtemos que

$$\varepsilon := \min_{2\leq l\leq 3403} \varepsilon_l > 1,05 \cdot 10^{-4}.$$

No *Mathematica*:

```
Near[x_]:=Min[Abs[x-Floor[x]],Abs[Ceiling[x]-x]]
Mi[k_]:=2+Log[gsd[k]/5]/(2*Log[2])
Eps[k_]:=Near[Mi[k]*DeFrac[gama[k],600]]-
-3.42*10^148*k^32*Log[k]^27*Near[gama[k]*DeFrac[gama[k],600]]
Timing[Min[Table[Eps[k],{k,2,3403}]]]
```

Portanto, pelo Lema 1.3, a inequação Diofantina acima não tem solução com $m < M_l$ e

$$k \geq \frac{\log(5,1q/\varepsilon)}{\log\sqrt{2}}.$$

Assim, temos $k < 6011$, e ainda $l < 392$. Repetindo o processo, é suficiente escolher $q_{450,l}$ para obtermos

$$\min_{2\leq l\leq 392}(q_{450,l}) > 6M_l \text{ e } q := \max_{2\leq l\leq 392}(q_{450,l}) < 9,7 \cdot 10^{384}.$$

Ainda, com $\varepsilon_l = \|\mu_l q_{450,l}\| - M_l\|\gamma_l q_{450,l}\|$ temos

$$\varepsilon := \min_{2\leq l\leq 392} \varepsilon_l > 6,4 \cdot 10^{-4}.$$

Portanto, pelo Lema 1.3, $k < 2583$ e $l < 353$. Nesse caso, segue de (2.6),

$$n < 2,28 \cdot 10^{45} \text{ e } m < 2,29 \cdot 10^{45}.$$

O caso k pequeno

Vamos analisar agora $k < 2583$, observe que assim, já estamos tratando do caso $k < 243$. Considere a forma linear

$$\Gamma := (m-1)\log\beta - 2(n-1)\log\alpha + \log\left(\frac{f_l(\beta)}{f_k(\alpha)^2(1+\alpha^2)}\right).$$

Se $\Gamma > 0$ (novamente, o caso $\Gamma < 0$ é análogo) temos, por (2.4),

$$0 < \Gamma < e^{\Gamma} - 1 < \frac{10}{1,6^n},$$

portanto

$$0 < (m-1)\frac{\log\beta}{2\log\alpha} - n + \left(1 + \frac{\log\left(\frac{f_l(\beta)}{f_k(\alpha)^2(1+\alpha^2)}\right)}{2\log\alpha}\right) < 15 \cdot 1,6^{-n}.$$

Considerando $\gamma_{k,l} := (\log\beta)/(2\log\alpha)$ precisamos verificar que ele é irracional. Como $k > l$, basta considerar os automorfismos sobre $\mathbb{Q}(\alpha)$, pois existe um tal que $\sigma_i(\alpha) = \alpha_i$, mas $\sigma_i(\beta) = \beta$. Supondo que $\gamma_{k,l}$ é racional, chegamos em um absurdo.

Agora, escolhemos $M_k = 2,38 \cdot 10^{15} k^8 \log^3 k$ e utilizamos o *Mathematica* para obter:

$$\min_{2 \le l < k \le 2583}(q_{700,k,l}) > 6M_k \text{ e } \max_{2 \le l < k \le 2583}(q_{700,k,l}) < 1,1 \cdot 10^{1100}.$$

Definimos $\varepsilon_{k,l} := \|\mu_{k,l} q_{700,k,l}\| - M_k \|\gamma_{k,l} q_{700,k,l}\|$ para $2 \le l < k \le 2583$, e obtemos que

$$\min_{2 \le l < k \le 2583} \varepsilon_{k,l} > 2,1 \cdot 10^{-7}.$$

Isso nos dá $n < 5429$ e, como $m < 4n + 4$, $m < 21720$. Agora, basta computar os casos no computador e não obtemos solução com $n \ge 3$, como queríamos. $\square$

Observe que não há nada de especial em resolver o caso $s = 2$, pois dado um s fixo, pelos mesmos argumentos, é possível resolver a equação completamente (notamos, no entanto, que os cálculos computacionais podem piorar muito conforme aumentamos o valor de s). Resolver o caso $s = 2$, além de resolver completamente a equação

$$(F_n^{(k)})^2 + (F_{n+1}^{(k)})^2 = F_m^{(l)},$$

(recorde que $l = k$ foi resolvido em [6] e $k < l$ em [1]), nos permite analisar a equação

$$(F_n^{(k)})^s + (F_{n+1}^{(k)})^s = F_m^{(l)}$$

somente para $s \ge 3$.

2.2 O caso $s > 2$

2.2.1 O caso $l < k$

Resolveremos agora o caso mais geral com $l < k$. Um teorema análogo a esse será dado na Seção 2.2.4 para o caso em que $l > k$.

Teorema 2.4. *Seja (n, m, k, l, s) solução da equação Diofantina*

$$(F_n^{(k)})^s + (F_{n+1}^{(k)})^s = F_m^{(l)}, \tag{2.19}$$

com $n, m \geq 2$, $k > l \geq 2$, $s \geq 3$ inteiros. Então,

$$s < 8,11 \cdot 10^{210} k^{100} \log^{43} k,$$

$$n < 1,49 \cdot 10^{39} k^{22} \log^{8} k,$$

$$m < 1,97 \cdot 10^{230} k^{110} \log^{47} k.$$

Demonstração. Dividiremos a prova desse teorema em algumas partes. A ideia principal é obter uma relação entre as variáveis envolvidas na equação e trabalhar com formas lineares em logaritmos para obter limitantes para essas variáveis.

Desigualdade entre m, n e s

Como estabelecido anteriormente, considere α a raiz dominante do polinômio característico associado à $F_n^{(k)}$ e β tal raiz associada à $F_m^{(l)}$. Temos $\beta < \alpha$. Pela fórmula de Binet para sequência de Fibonacci k-generalizada dada em (1.9) e (1.10), podemos escrever

$$F_n^{(k)} = f_k(\alpha)\alpha^{n-1} + E_k(n) \text{ e } F_m^{(l)} = f_l(\beta)\beta^{m-1} + E_l(m),$$

onde $|E_k(n)| < 1/2$ e $|E_l(m)| < 1/2$.

Usando o Lema 1.11, temos

$$\begin{aligned} \beta^{m-1} &\geq F_m^{(l)} = (F_n^{(k)})^s + (F_{n+1}^{(k)})^s \\ &\geq \alpha^{(n-2)s} + \alpha^{(n-1)s} = \alpha^{(n-2)s}(1 + \alpha^s) \\ &> \alpha^{(n-2)s+s} = \alpha^{(n-1)s} > \beta^{(n-1)s} \end{aligned}$$

o que nos dá $m-1 > (n-1)s$. Por outro lado, como $\sqrt{2} < \beta < \alpha < 2$,

$$\begin{aligned}(\sqrt{2})^{m-2} &< \beta^{m-2} \leq F_m^{(l)} = (F_n^{(k)})^s + (F_{n+1}^{(k)})^s \\ &\leq \alpha^{(n-1)s} + \alpha^{ns} = \alpha^{ns}(\alpha^{-s}+1) \\ &< \alpha^{ns}\cdot\alpha = \alpha^{ns+1} < 2^{ns+1}\end{aligned}$$

obtendo assim $(m-2)/2 < ns+1$.

Logo, obtemos a seguinte desigualdade entre m, n e s:

$$(n-1)s+1 < m < 2(ns+2). \tag{2.20}$$

Limitante para s em termos de n e k

Encontraremos um limitante para s em função de n e k. Da equação (2.1),

$$\begin{aligned}(F_n^{(k)})^s + (F_{n+1}^{(k)})^s &= F_m^{(l)} = f_l(\beta)\beta^{m-1} + E_l(m) \\ f_l(\beta)\beta^{m-1} - (F_{n+1}^{(k)})^s &= (F_n^{(k)})^s - E_l(m).\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}|f_l(\beta)\beta^{m-1} - (F_{n+1}^{(k)})^s| &= |(F_n^{(k)})^s - E_l(m)| \\ &\leq (F_n^{(k)})^s + \frac{1}{2} < 2(F_n^{(k)})^s.\end{aligned}$$

Daí,

$$\left|\frac{f_l(\beta)\beta^{m-1}}{(F_{n+1}^{(k)})^s} - 1\right| < 2\left(\frac{F_n^{(k)}}{F_{n+1}^{(k)}}\right)^s. \tag{2.21}$$

Como $F_{n+1}^{(k)} = 2F_n^{(k)} - F_{n-k}^{(k)}$, temos para $k \geq 3$

$$\frac{F_{n+1}^{(k)}}{F_n^{(k)}} = 2 - \frac{F_{n-k}^{(k)}}{F_n^{(k)}},$$

mas $F_n^{(k)} = F_{n-1}^{(k)} + \cdots + F_{n-k}^{(k)} \geq kF_{n-k}^{(k)}$ nos dá

$$\frac{F_{n+1}^{(k)}}{F_n^{(k)}} = 2 - \frac{F_{n-k}^{(k)}}{F_n^{(k)}} \geq 2 - \frac{1}{k} \geq 2 - \frac{1}{3} > 1,65.$$

Voltando em (2.21), segue que

$$|f_l(\beta)\beta^{m-1}(F_{n+1}^{(k)})^{-s} - 1| < \frac{2}{1,65^s}. \tag{2.22}$$

Usaremos o Teorema 1.2 para formas lineares em logaritmos para limitar inferiormente

$$\Lambda_1 := f_l(\beta)\beta^{m-1}(F_{n+1}^{(k)})^{-s} - 1.$$

Primeiramente, observe que $\Lambda_1 > 0$. De fato,

$$\begin{aligned}
\Lambda_1 := f_l(\beta)\beta^{m-1}(F_{n+1}^{(k)})^{-s} - 1 &= (F_{n+1}^{(k)})^{-s}[f_l(\beta)\beta^{m-1} - (F_{n+1}^{(k)})^{s}] \\
&= (F_{n+1}^{(k)})^{-s}[(F_{n}^{(k)})^{s} - E_l(m)] \\
&> (F_{n+1}^{(k)})^{-s}[(F_{n}^{(k)})^{s} - \frac{1}{2}] > 0.
\end{aligned}$$

Considere

$$\gamma_1 := f_l(\beta),\ \gamma_2 := \beta,\ \gamma_3 := F_{n+1}^{(k)} \text{ e } b_1 := 1,\ b_2 := m-1,\ b_3 := -s$$

e ainda, $D := [\mathbb{Q}(\alpha, \beta) : \mathbb{Q}] \leq kl < k^2$. Por (2.20), podemos escolher $B := 2ns + 3 \geq \max\{m-1, s\}$.

Vamos agora calcular as alturas logarítmicas de cada γ_i, para $i = 1, 2, 3$. Pelo Lema 1.12,

$$h(\gamma_1) = h(f_l(\beta)) < 4\log l < 4\log k.$$

Também,

$$h(\gamma_2) = h(\beta) = \frac{\log\beta}{l} < \frac{\log 2}{l} < \frac{0,7}{l}$$

e

$$h(\gamma_3) = h(F_{n+1}^{(k)}) = \log F_{n+1}^{(k)} \leq \log\alpha^n < n\log 2 < 0,7n.$$

Com isso, podemos escolher

$$A_1 := 4k^2\log k,\ A_2 := 0,7k \text{ e } A_3 := 0,7nk^2.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
|\Lambda_1| &> \exp(-1,4\cdot 30^6\cdot 3^{4,5}\cdot k^4(1+2\log k)(1+\log(2ns+3))4k^2\log k\cdot(0,7)k\cdot(0,7)nk^2) \\
&> \exp(-2,81\cdot 10^{11}k^9 n(1+2\log k)(1+\log(2ns+3))\log k) \\
&> \exp(-4,21\cdot 10^{12}nk^9\log^2 k\log(ns)), \qquad (2.23)
\end{aligned}$$

onde usamos o fato que $1 + 2\log k < 3\log k$ e $1 + \log(2ns+3) < 5\log(ns)$ para $k \geq 3$ e $ns \geq 2$.

Comparando (2.23) com (2.22), obtemos

$$\begin{aligned}
2\cdot(1,65)^{-s} &> \exp(-4,21\cdot 10^{12}nk^9\log^2 k\log(ns))\\
\log 2 - s\log(1,65) &> -4,21\cdot 10^{12}nk^9\log^2 k\log(ns).
\end{aligned}$$

Assim,

$$s < 8,41\cdot 10^{12}nk^9\log^2 k\log(ns). \tag{2.24}$$

Logo, multiplicando a desigualdade (2.24) por n, segue que:

$$\frac{ns}{\log(ns)} < 8,41\cdot 10^{12}n^2k^9\log^2 k. \tag{2.25}$$

Usando Lema 1.13, obtemos

$$\begin{aligned}
ns &< 1,69\cdot 10^{13}n^2k^9\log^2 k\cdot\log(8,41\cdot 10^{12}n^2k^9\log^2 k)\\
&< 1,69\cdot 10^{13}n^2k^9\log^2 k\cdot[\log(8,41\cdot 10^{12}) + 9\log k + 2\log\log k + 2\log n]\\
&< 7,23\cdot 10^{14}n^2k^9\log^2 k\cdot\max\{\log k,\log n\}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$s < 7,23\cdot 10^{14}nk^9\log^2 k\max\{\log k,\log n\}. \tag{2.26}$$

Se $n\le k$, temos limitantes para as variáveis em função de k como desejado:

$$s < 7,23\cdot 10^{14}k^{10}\log^3 k$$

e

$$m < 2(ns+2) < 1,45\cdot 10^{15}k^{11}\log^3 k.$$

Logo, resta analisar o caso em que $n>k$. De (2.26),

$$s < 7,23\cdot 10^{14}n^{10}\log^3 n. \tag{2.27}$$

Usaremos as mesmas técnicas que Luca e Ruiz [13]. Como $F_n^{(k)} = f_k(\alpha)\alpha^{n-1} + E_k(n)$,

$$\begin{aligned}
(F_n^{(k)})^s &= (f_k(\alpha)\alpha^{n-1} + E_k(n))^s\\
&= \left(f_k(\alpha)\alpha^{n-1}\left(1+\frac{E_k(n)}{f_k(\alpha)\alpha^{n-1}}\right)\right)^s\\
&= f_k(\alpha)^s\alpha^{(n-1)s}\left(1+\frac{E_k(n)}{f_k(\alpha)\alpha^{n-1}}\right)^s.
\end{aligned}$$

Considere

$$r := \frac{E_k(n)}{f_k(\alpha)\alpha^{n-1}} \text{ e } z := sr.$$

Como $\alpha > 1,75$ (pois $k \geq 3$), $f_k(\alpha) > 1/2$ (pelo Lema 1.12) e $|E_k(n)| < 1/2$, temos

$$|r| < \frac{1}{1,75^{n-1}}.$$

Além disso, de (2.27),

$$|z| = s|r| < \frac{7,23 \cdot 10^{14} n^{10} \log^3 n}{1,75^{n-1}}. \tag{2.28}$$

Assim, para $n \geq 350$,

$$|z| < \frac{1}{1,32^n}. \tag{2.29}$$

O caso em que $n < 350$ pode ser analisado separadamente. De fato, como $l < k < n$ temos $l < k < 350$ e de (2.27) obtemos $s < 4,01 \cdot 10^{42}$ e, portanto, $m < 2(ns+2) < 2,81 \cdot 10^{45}$, o que nos garante limitantes efetivos para todas as variáveis. Nos atentemos ao caso $n \geq 350$. Por (2.29), obtemos, em particular $|z| < 10^{-42}$. Assim,

- Se $r < 0$, então

$$\begin{aligned} 1 > (1+r)^s &= (1-|r|)^s = \exp(s\log(1-|r|)) \\ &\geq \exp(-2s|r|) = \exp(-2|z|) > 1 - 2|z| \end{aligned}$$

  daí, $0 > (1+r)^s - 1 > -2|z|$.

- Se $r > 0$, então

$$1 < (1+r)^s = \left(1 + \frac{|z|}{s}\right)^s < \exp(|z|) < 1 + 2|z|$$

  daí, $0 < (1+r)^s - 1 < 2|z|$.

Assim, de modo geral, obtemos $|(1+r)^s - 1| < 2|z|$.

Como $(F_n^{(k)})^s = f_k(\alpha)^s \alpha^{(n-1)s}(1+r)^s$,

$$(F_n^{(k)})^s - f_k(\alpha)^s\alpha^{(n-1)s} = f_k(\alpha)^s\alpha^{(n-1)s}((1+r)^s - 1),$$

logo

$$|(F_n^{(k)})^s - f_k(\alpha)^s\alpha^{(n-1)s}| < 2|z| f_k(\alpha)^s\alpha^{(n-1)s}. \tag{2.30}$$

Analogamente,

$$|(F_{n+1}^{(k)})^s - f_k(\alpha)^s\alpha^{ns}| < 2|z| f_k(\alpha)^s\alpha^{ns}. \tag{2.31}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
F_m^{(l)} &= (F_n^{(k)})^s - f_k(\alpha)^s\alpha^{(n-1)s} + f_k(\alpha)^s\alpha^{(n-1)s} + (F_{n+1}^{(k)})^s - f_k(\alpha)^s\alpha^{ns} + f_k(\alpha)^s\alpha^{ns} \\
&= ((F_n^{(k)})^s - f_k(\alpha)^s\alpha^{(n-1)s}) + ((F_{n+1}^{(k)})^s - f_k(\alpha)^s\alpha^{ns}) + f_k(\alpha)^s\alpha^{(n-1)s}(1+\alpha^s).
\end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned}
f_l(\beta)\beta^{m-1} - f_k(\alpha)^s\alpha^{(n-1)s}(1+\alpha^s) &= ((F_n^{(k)})^s - f_k(\alpha)^s\alpha^{(n-1)s}) \\
&\quad + ((F_{n+1}^{(k)})^s - f_k(\alpha)^s\alpha^{ns}) - E_l(m)
\end{aligned}$$

o que nos dá

$$\begin{aligned}
|f_l(\beta)\beta^{m-1} - f_k(\alpha)^s\alpha^{(n-1)s}(1+\alpha^s)| &< 2|z|f_k(\alpha)^s\alpha^{(n-1)s} + 2|z|f_k(\alpha)^s\alpha^{ns} + \frac{1}{2} \\
&= 2|z|f_k(\alpha)^s\alpha^{(n-1)s}(1+\alpha^s) + \frac{1}{2}. \qquad (2.32)
\end{aligned}$$

Dividindo por $f_k(\alpha)^s\alpha^{ns}$,

$$\begin{aligned}
|f_l(\beta)\beta^{m-1}f_k(\alpha)^{-s}\alpha^{-ns} - (1+\alpha^{-s})| &< 2|z|(1+\alpha^{-s}) + \frac{1}{2f_k(\alpha)^s\alpha^{ns}} \\
&< 2|z|\left(1+\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2(1,75)^{(n-2)s}} \\
&< \frac{3}{1,32^n} + \frac{1}{1,32^{(n-2)s+1}} \\
&< \frac{4}{1,32^n}, \qquad (2.33)
\end{aligned}$$

onde usamos (2.29) e os seguintes fatos: $\alpha^s > (1,75)^2 > 2$, portanto $\alpha^{-s} < 1/2$, $f_k(\alpha)^s\alpha^{ns} = (f_k(\alpha)\alpha^n)^s > (1,75)^{(n-2)s}$ e $(n-2)s+1 > n$ para todo $n \geq 3$.

Assim,

$$\begin{aligned}
|f_l(\beta)\beta^{m-1}f_k(\alpha)^{-s}\alpha^{-ns} - 1| &= |f_l(\beta)\beta^{m-1}f_k(\alpha)^{-s}\alpha^{-ns} - (1+\alpha^{-s}) + \alpha^{-s}| \\
&\leq |f_l(\beta)\beta^{m-1}f_k(\alpha)^{-s}\alpha^{-ns} - (1+\alpha^{-s})| + |\alpha^{-s}| \\
&< \frac{4}{1,32^n} + \frac{1}{1,32^s} \\
&< \frac{5}{1,32^t}, \qquad (2.34)
\end{aligned}$$

onde : $t = \min\{n, s\}$ e usamos (2.33) na penúltima desigualdade.

Considere agora a forma linear em logaritmos

$$\Lambda_2 := f_l(\beta)\beta^{m-1}f_k(\alpha)^{-s}\alpha^{-ns} - 1.$$

Note que $\Lambda_2 \neq 0$. De fato, suponha que $\Lambda_2 = 0$, então

$$f_l(\beta)\beta^{m-1} = f_k(\alpha)^s \alpha^{ns}. \tag{2.35}$$

Seja $\mathbb{L} = \mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_l)$ o fecho normal de $\mathbb{Q}(\alpha, \beta)$ e sejam $\sigma_1, \ldots, \sigma_k \in Gal(\mathbb{L}/\mathbb{Q})$ tal que $\sigma_i(\alpha) = \alpha_i$. Como $k > l$, existe $i \neq j$ em $\{1, 2, \ldots, k\}$ tal que $\sigma_i(\beta) = \sigma_j(\beta)$. Aplicando $\sigma_j^{-1}\sigma_i$ em (2.35) temos que se $\sigma_j^{-1}(\alpha_i) = \alpha_r$, então $r \neq i$ (pois $\sigma_j(\alpha_i) = \alpha_j \neq \alpha_i$), e

$$\begin{aligned} f_k(\sigma_j^{-1}\sigma_i(\alpha))^s(\sigma_j^{-1}\sigma_i(\alpha))^{ns} &= f_l(\sigma_j^{-1}\sigma_i(\beta))(\sigma_j^{-1}\sigma_i(\beta))^{m-1} \\ f_k(\sigma_j^{-1}(\alpha_i))^s(\sigma_j^{-1}(\alpha_i))^{ns} &= f_l(\beta)\beta^{m-1} \\ f_k(\alpha_r)^s\alpha_r^{ns} &= f_l(\beta)\beta^{m-1}. \end{aligned} \tag{2.36}$$

De (2.35) e (2.36) temos $f_k(\alpha_r)^s\alpha_r^{ns} = f_k(\alpha)^s\alpha^{ns}$. Daí,

$$2^s > \left|\frac{f_k(\alpha_r)}{f_k(\alpha)}\right|^s |\alpha_r|^{ns} = |\alpha|^{ns} > \left(\frac{7}{4}\right)^{ns},$$

pois $|f_k(\alpha_r)| < 1 < 2|f_k(\alpha)|$ (pelo Lema 1.12) e $|\alpha_r| < 1$ (pelo Lema 1.9). Mas, $2 > (7/4)^n$ é impossível. Portanto, $\Lambda_2 \neq 0$.

Podemos portanto aplicar o Teorema 1.2 com:

$$\gamma_1 := f_l(\beta), \gamma_2 := \beta, \gamma_3 := f_k(\alpha), \gamma_4 := \alpha,$$

$$b_1 := 1, b_2 := m-1, b_3 := -s, b_4 := -ns.$$

De forma análoga à calculada para Λ_1, temos as seguintes estimativas para as alturas logarítmicas: $h(\gamma_1) \leq 4\log k, h(\gamma_2) < 0,7/l, h(\gamma_3) \leq 4\log k$ e $h(\gamma_4) \leq 0,7/k$, o que nos permite escolher

$$A_1 := 4k^2\log k,\ A_2 := 0,7k,\ A_3 := 4k^2\log k, \text{ e } A_4 := 0,7k.$$

Ainda, como $B \geq \max\{m-1, s, ns\}$ e por (2.20), podemos escolher $B := 2ns+3$. Assim,

$$\begin{aligned} |\Lambda_2| &> \exp(-1,4 \cdot 30^7 \cdot 4^{4,5}k^4(1+2\log k)(1+\log(2ns+3)) \cdot (4k^2\log k)^2 \cdot (0,7k)^2) \\ &> \exp(-1,85 \cdot 10^{15}k^{10}\log^3 k\log(ns)), \end{aligned} \tag{2.37}$$

onde usamos os fatos que $1+2\log k < 3\log k$ e $1+\log(2ns+3) < 5\log(ns)$ para $k \geq 2$ e $ns \geq 2$.

Comparando (2.34) e (2.37),

$$t < 6,67 \cdot 10^{15} k^{10} \log^3 k \log(ns). \tag{2.38}$$

Como $t = \min\{n, s\}$ temos dois casos a considerar.

Caso 1: $t = n$**.**

Nesse caso, por (2.38) e usando o limitante de s dado em (2.27),

$$\begin{aligned} n &< 6,67 \cdot 10^{15} k^{10} \log^3 k \log(7,23 \cdot 10^{14} n^{11} \log^3 n) \\ &< 1,21 \cdot 10^{17} k^{10} \log^3 k \log n, \end{aligned}$$

aqui usamos o fato que $\log(7,23 \cdot 10^{14} n^{11} \log^3 n) < 18 \log n$ para $n \geq 350$. Assim, pelo Lema 1.13, obtemos

$$\begin{aligned} n &< 2,42 \cdot 10^{17} k^{10} \log^3 k \log(1,21 \cdot 10^{17} k^{10} \log^3 k) \\ &< 1,21 \cdot 10^{19} k^{10} \log^4 k. \end{aligned}$$

Daí, novamente de (2.27),

$$s < 8,11 \cdot 10^{210} k^{100} \log^{43} k.$$

Como $m < 2(ns + 2)$, segue que $m < 1,97 \cdot 10^{230} k^{110} \log^{47} k$.

Caso 2: $t = s$**.**

Nesse caso, $s < n$ e, por (2.38), segue que

$$\begin{aligned} s &< 6,67 \cdot 10^{15} k^{10} \log^3 k \log(ns) \\ &< 1,34 \cdot 10^{16} k^{10} \log^3 k \log n \end{aligned} \tag{2.39}$$

Agora, dividindo (2.32) por $f_k(\alpha)^s \alpha^{(n-1)s}(1 + \alpha^s)$, obtemos

$$\begin{aligned} |f_l(\beta)\beta^{m-1} f_k(\alpha)^{-s} \alpha^{-(n-1)s}(1 + \alpha^s)^{-1} - 1| &< 2|z| + \frac{1}{2 f_k(\alpha)^s \alpha^{(n-1)s}(1 + \alpha^s)} \\ &< \frac{2}{1,32^n} + \frac{1}{6(1,75)^{(n-3)s}} \\ &< \frac{3}{1,32^n} \end{aligned} \tag{2.40}$$

onde usamos os fatos que $1+\alpha^s > 1+1,75^2 > 3$, $(f_k(\alpha)\alpha^{n-1})^s > 1,75^{(n-3)s}$ e $(n-3)s+3 > n$.

Considere agora a forma linear $\Lambda_3 := f_l(\beta)\beta^{m-1}f_k(\alpha)^{-s}\alpha^{-(n-1)s}(1+\alpha^s)^{-1}-1$. Observe que $\Lambda_3 \neq 0$. De fato, suponha por absurdo que

$$f_l(\beta)\beta^{m-1} = f_k(\alpha)^s\alpha^{(n-1)s}(1+\alpha^s)^1. \tag{2.41}$$

De forma análoga a feita para Λ_2, considere $\mathbb{L} = \mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_l)$ o fecho normal de $\mathbb{Q}(\alpha, \beta)$ e sejam $\sigma_1, \ldots, \sigma_k \in Gal(\mathbb{L}/\mathbb{Q})$ tal que $\sigma_i(\alpha) = \alpha_i$. Como $k > l$, existe $i \neq j$ em $\{1, 2, \ldots, k\}$ tal que $\sigma_i(\beta) = \sigma_j(\beta)$. Daí, aplicando $\sigma_j^{-1}\sigma_i$ em (2.41) temos que se $\sigma_j^{-1}(\alpha_i) = \alpha_r$, então $r \neq i$ (pois $\sigma_j(\alpha_i) = \alpha_j \neq \alpha_i$), e

$$\left(\frac{3}{4}\right)^s\left(\frac{7}{4}\right)^{(n-1)s} < |\alpha|^{(n-1)s}|1+\alpha^s| = \frac{|f_k(\alpha_r)^s|}{|f_k(\alpha)^s|}|\alpha_r|^{(n-1)s}|1+\alpha_r^s| < 2^s \cdot 2^s = 4^s, \tag{2.42}$$

onde usamos os fatos que $\alpha > 7/4$, $|1+\alpha^s| > (3/4)^s$, $|f_k(\alpha_r)| < 1 < 2|f_k(\alpha)|$ e $|\alpha_r| < 1$. Daí, $3/4 \cdot (7/4)^{n-1} < 4$ o que nos dá $n \leq 3$. Absurdo, pois estamos supondo $n \geq 350$. Logo, $\Lambda_3 \neq 0$.

Usando o Teorema 1.2 com

$$\gamma_1 := f_l(\beta), \gamma_2 := \beta, \gamma_3 := f_k(\alpha), \gamma_4 := \alpha, \gamma_5 := 1+\alpha^s$$

$$b_1 := 1, b_2 := m-1, b_3 := -s, b_4 := -(n-1)s, b_5 := -1$$

temos $B \geq \max\{m-1, s, (n-1)s\}$, e por (2.20) podemos escolher $B := 2ns+3$.

Como já fizemos anteriormente para $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ e γ_4, precisamos agora calcular a altura logarítmica de γ_5. Observe que, para $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\alpha)$, $\gamma_5 = 1+\alpha^s \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}$, $1+\alpha^s < 2^{s+1}$ para todo $s \geq 2$ e $|1+(\alpha^{(i)})^s| < 2$ para todo $i = 2, \ldots, k$. Portanto, se d é o grau do polinômio minimal de $1+\alpha^s$ sobre $\mathbb{Z}$, então

$$\begin{aligned} h(1+\alpha^s) &= \frac{1}{d}\left(\log(1+\alpha^s) + \sum_{i=2}^{d}\log\max\{|1+(\alpha^{(i)})^s|, 1\}\right) \\ &< (s+1)\log 2 + (d-1)\log 2 < 0,7(s+k). \end{aligned}$$

Logo, podemos escolher $A_5 := 0,7k^2(s+k)$.

Assim:

$$\begin{aligned} |\Lambda_3| &> \exp(-1,4 \cdot 30^8 \cdot 5^{4,5} \cdot k^4(1+2\log k)(1+\log(2ns+3))(4k^2\log k)^2(0,7k)^2(0,7)k^2(s+k)) \\ &> \exp(-1,06 \cdot 10^{17}k^{12}(s+k)\log^3 k\log(ns)), \end{aligned} \tag{2.43}$$

onde usamos o fato que $1 + 2\log k < 3\log k$ e $1 + \log(2ns + 3) < 5\log(ns)$.

Daí, comparando (2.40) e (2.43), temos

$$n < 3,82 \cdot 10^{17} k^{12} (s + k) \log^3 k \log(ns).$$

Usando a limitação para s dada por (2.39) e o fato que $s < n$, segue que

$$\begin{aligned} n &< 3,82 \cdot 10^{17} k^{12} \cdot [1,34 \cdot 10^{16} k^{10} \log^3 k \log n + k] \log^3 k \log(n^2) \\ &< 1,03 \cdot 10^{34} k^{22} \log^6 k \log^2 n \qquad (2.44) \end{aligned}$$

Pelo Lema 1.14, $n < 1,49 \cdot 10^{39} k^{22} \log^8 k$, onde usamos o fato que $\log(1,03 \cdot 10^{34} k^{22} \log^6 k) < 95\log k$ para $k \geq 3$. Daí temos as limitações para s e m em função de k:

$$s < n < 1,49 \cdot 10^{39} k^{22} \log^8 k$$

e

$$m < 2(ns + 2) < 4,45 \cdot 10^{78} k^{44} \log^{16} k.$$

Isso termina a demonstração, pois, em qualquer caso:

$$s < 8,11 \cdot 10^{210} k^{100} \log^{43} k,\ n < 1,49 \cdot 10^{39} k^{22} \log^8 k \text{ e}$$

$$m < 1,97 \cdot 10^{230} k^{110} \log^{47} k.$$

□

2.2.2 O caso $l = k - 1$

Como vimos na Seção 2.2.1, sempre que $l < k$ é possível obter limitantes para n, m e s em função de k, mas, ao mantermos l como qualquer, não conseguimos dar limitantes efetivos para as variáveis e resolver completamente a equação. O caso $l = k - 1$ não tem nada de especial se comparado aos casos $l = k - 2, k - 3, \ldots$, pois, em qualquer um desses casos, é possível obter limitantes efetivos para a equação. Nos limitaremos ao caso $l = k - 1$.

Teorema 2.5. *Seja (n, m, k, s) uma solução para a equação Diofantina*

$$(F_n^{(k)})^s + (F_{n+1}^{(k)})^s = F_m^{(k-1)}$$

com $n, m \geq 2$, $s \geq 3$ e $k \geq 3$ inteiros, então

$$k \leq 4487,\ n < 8,21 \cdot 10^{126},\ m < 2,97 \cdot 10^{675} \text{ e } s < 7,39 \cdot 10^{615}.$$

Antes de iniciarmos a demonstração, cabe ressaltar que esses limitantes ainda são muito grandes para o cálculo computacional, mas acreditamos que a equação

$$(F_n^{(k)})^s + (F_{n+1}^{(k)})^s = F_m^{(k-1)}$$

não possui solução em geral para $s \geq 3$.

Demonstração do Teorema 2.5. Pelo Teorema 2.4,

$$s < 8,11 \cdot 10^{210} k^{100} \log^{43} k, \; n < 1,49 \cdot 10^{39} k^{22} \log^{8} k \text{ e}$$

$$m < 1,97 \cdot 10^{230} k^{110} \log^{47} k.$$

O caso k grande

Considere $k \geq 4488$, nesse caso, $m < 2^{k/2}$ e $n < 2^{k/2}$. Agora, apresentaremos um argumento chave dado por Bravo e Luca [2].

Seja $\lambda = 2 - \beta > 0$. Como $2(1 - 2^{-(k-1)}) < \beta < 2$ temos

$$0 < 2 - \beta < 2^{-k+2},$$

ou seja,

$$0 < \lambda < \frac{1}{2^{k-2}}.$$

Daí,

$$\begin{aligned} \beta^{m-1} &= (2-\lambda)^{m-1} = 2^{m-1}\left(1 - \frac{\lambda}{2}\right)^{m-1} \\ &= 2^{m-1} e^{(m-1)\log(1-\lambda/2)}, \end{aligned}$$

como $\log(1-x) \geq -2x$ para todo $x < 1/2$ e $e^{-x} \geq 1 - x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, segue que

$$\begin{aligned} \beta^{m-1} &\geq 2^{m-1} e^{-\lambda(m-1)} \\ &\geq 2^{m-1}(1 - \lambda(m-1)) = 2^{m-1} - 2^{m-1}\lambda(m-1). \end{aligned}$$

O que nos dá $\beta^{m-1} - 2^{m-1} \geq -2^{m-1}\lambda(m-1)$. Como $\lambda < 1/2^{k-2}$ e $m < 2^{k/2}$ temos $\lambda(m-1) < 4/2^{k/2}$, portanto

$$\beta^{m-1} - 2^{m-1} \geq -\frac{2^{m+1}}{2^{k/2}}.$$

Por outro lado, como $\beta < 2$,

$$\beta^{m-1} < 2^{m-1} < 2^{m-1} + \frac{2^{m+1}}{2^{k/2}}.$$

Daí, $\beta^{m-1} - 2^{m-1} < 2^{m+1}/2^{k/2}$. O que nos dá

$$|\beta^{m-1} - 2^{m-1}| < \frac{2^{m+1}}{2^{k/2}} \tag{2.45}$$

Pelo Teorema do Valor Médio, existe $\theta \in (\beta, 2)$ tal que

$$f_{k-1}(\beta) = f_{k-1}(2) + (\beta - 2) f'_{k-1}(\theta).$$

mas $|f'_{k-1}(\theta)| < k - 1 < k$ nos dá

$$|f_{k-1}(\beta) - f_{k-1}(2)| = |\beta - 2||f'_{k-1}(\theta)| < \frac{4k}{2^k}, \tag{2.46}$$

onde na última desigualdade usamos o fato que $|\beta - 2| = |\lambda| < 1/2^{k-2}$. Observe ainda que $f_{k-1}(2) = 1/2$ e daí

$$\begin{aligned}
|f_{k-1}(\beta)\beta^{m-1} - 2^{m-2}| &\leq |f_{k-1}(\beta)\beta^{m-1} - f_{k-1}(\beta)2^{m-1} - {}^{\beta^{m-1}}/_2 + {}^{2^{m-1}}/_2| + \\
&\quad + |f_{k-1}(\beta)2^{m-1} - {}^{2^{m-1}}/_2| + |{}^{\beta^{m-1}}/_2 - {}^{2^{m-1}}/_2| \\
&\leq |f_{k-1}(\beta) - f_{k-1}(2)||\beta^{m-1} - 2^{m-1}| + 2^{m-1}|f_{k-1}(\beta) - f_{k-1}(2)| + \\
&\quad + \frac{|\beta^{m-1} - 2^{m-1}|}{2} \\
&< \frac{4k}{2^k}\frac{2^{m+1}}{2^{k/2}} + 2^{m-1}\frac{4k}{2^k} + \frac{2^m}{2^{k/2}} \\
&= 2^{m-2}\left(\frac{32k}{2^{3k/2}} + \frac{8k}{2^k} + \frac{4}{2^{k/2}}\right),
\end{aligned}$$

onde usamos (2.45) e (2.46). Como estamos com $k \geq 4488$, temos $32k/2^{3k/2} < 1/2^{k/2}$ e $8k/2^k < 1/2^{k/2}$, portanto

$$|f_{k-1}(\beta)\beta^{m-1} - 2^{m-2}| < 2^{m-2}\frac{6}{2^{k/2}}. \tag{2.47}$$

Analogamente,

$$|\alpha^n - 2^n| < \frac{2^{n+1}}{2^{k/2}}. \tag{2.48}$$

e

$$|f_k(\alpha)\alpha^n - 2^{n-1}| < 2^{n-1}\frac{6}{2^{k/2}} \tag{2.49}$$

Seja $n \leq k$, então nesse caso,

$$2^{(n-2)s} + 2^{(n-1)s} = F_m^{(k-1)} = f_{k-1}(\beta)\beta^{m-1} + E_l(m),$$

portanto

$$|f_{k-1}(\beta)\beta^{m-1} - 2^{(n-1)s}| < 2^{(n-2)s} + \frac{1}{2}.$$

Daí, por (2.47),

$$\begin{aligned} |2^{m-2} - 2^{(n-1)s}| &< |2^{m-2} - f_{k-1}(\beta)\beta^{m-1}| + |f_{k-1}(\beta)\beta^{m-1} - 2^{(n-1)s}| \\ &< 2^{m-2}\frac{6}{2^{k/2}} + 2^{(n-2)s} + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Dividindo por 2^{m-2}, temos

$$|1 - 2^{(n-1)s-(m-2)}| < \frac{6}{2^{k/2}} + \frac{1}{2^{(m-2)-(n-2)s}} + \frac{1}{2^{m-1}} < \frac{1}{2^s} + (0,1251).$$

A última desigualdade segue pois $(m-2) - (n-2)s \geq s$, por (2.20), $m \geq l + 2 \geq 4$ e $k \geq 4488$.

Agora, se $m - 2 = (n-1)s$ temos $2^{(n-2)s} + 2^{(n-1)s} = F_{(n-1)s+2}^{(l)} \leq 2^{(n-1)s}$, o que é uma contradição. Se $m - 2 \neq (n-1)s$ então

$$\frac{1}{2} \leq |1 - 2^{(n-1)s-(m-2)}| < \frac{1}{2^s} + (0,1251),$$

que também não é possível. Portanto, podemos considerar $n > k$.

Note que, usando os resultados anteriores,

$$\begin{aligned} |f_k(\alpha)^s\alpha^{ns} - 2^{(n-1)s}| &= |f_k(\alpha)\alpha^n - 2^{n-1}|((f_k(\alpha)\alpha^n)^{s-1} + \cdots + 2^{(n-1)(s-1)}) \\ &< |f_k(\alpha)\alpha^n - 2^{n-1}| \cdot s \cdot (\max\{f_k(\alpha)\alpha^n, 2^{n-1}\})^{s-1} \\ &< 2^{n-1}\frac{6}{2^{k/2}} \cdot s \cdot 2^{(n-1)(s-1)} \\ &= s \cdot 2^{(n-1)s+1}\frac{3}{2^{k/2}}. \end{aligned} \tag{2.50}$$

Note que usamos o fato que $f_k(\alpha)\alpha^n < 2^{n-1}$ para $n \geq k+1$. Isso segue pelo resultado provado por Bravo e Luca [2, Lema 2], que $F_n^{(k)} \leq 2^{n-2}$ para $n \geq 2$. Assim,

$$\begin{aligned} f_k(\alpha)\alpha^n &= F_{n+1}^{(k)} - E_k(n+1) = (F_n^{(k)} + F_{n-1}^{(k)} + \cdots + F_{n-(k-1)}^{(k)}) - E_k(n+1) \\ &\leq 2^{n-2} + 2^{n-3} + \cdots + 2^{n-k-1} - E_k(n+1) \\ &= 2^{n-k-1}(2^{k-1} + 2^{k-2} + \cdots + 1) - E_k(n+1) \\ &= 2^{n-k-1}(2^k - 1) - E_k(n+1) = 2^{n-1} - 2^{n-k-1} - E_k(n+1) \\ &< 2^{n-1} - 2^{n-k-1} + \frac{1}{2} \leq 2^{n-1}, \end{aligned}$$

pois $|E_k(n+1)| < 1/2$ e $n \geq k+1$.

Agora, usando (2.29), (2.32), (2.47) e (2.50),

$$\begin{aligned} |2^{m-2} - 2^{(n-1)s}| &\leq |2^{m-2} - f_{k-1}(\beta)\beta^{m-1}| + |f_{k-1}(\beta)\beta^{m-1} - f_k(\alpha)^s\alpha^{ns}| + |f_k(\alpha)^s\alpha^{ns} - 2^{(n-1)s}| \\ &< 2^{m-2}\frac{6}{2^{k/2}} + 2|z|f_k(\alpha)^s\alpha^{(n-1)s}(1+\alpha^s) + \frac{1}{2} + f_k(\alpha)^s\alpha^{(n-1)s} + s2^{(n-1)s+1}\frac{3}{2^{k/2}} \\ &< 2^{m-2}\frac{6}{2^{k/2}} + \frac{2}{1,32^n}f_k(\alpha)^s\alpha^{(n-1)s}(1+\alpha^s) + \frac{1}{2} + f_k(\alpha)^s\alpha^{(n-1)s} + \\ &\quad + s2^{(n-1)s+1}\frac{3}{2^{k/2}}. \end{aligned} \tag{2.51}$$

Consideraremos três casos:

Caso 1: $(n-1)s < m-2$.

Neste caso, dividimos (2.51) por 2^{m-2} obtendo:

$$\begin{aligned} |1 - 2^{(n-1)s-m+2}| &< \frac{6}{2^{k/2}} + \frac{2}{1,32^n}\cdot\frac{f_k(\alpha)^s\alpha^{ns}(1+\alpha^{-s})}{2^{m-2}} + \frac{1}{2^{m-1}} + \frac{f_k(\alpha)^s\alpha^{(n-1)s}}{2^{m-2}} + \\ &\quad + s\frac{2^{(n-1)s+1}}{2^{m-2}}\frac{3}{2^{k/2}}. \end{aligned} \tag{2.52}$$

Como $(f_k(\alpha)\alpha^n)^s < 2^{(n-1)s} < 2^{m-2}$ e $1+\alpha^{-s} < 3/2$, segue que

$$\frac{2}{1,32^n}\cdot\frac{f_k(\alpha)^s\alpha^{ns}(1+\alpha^{-s})}{2^{m-2}} < \frac{3}{1,32^n}.$$

Analogamente,

$$\frac{f_k(\alpha)^s\alpha^{(n-1)s}}{2^{m-2}} = \frac{f_k(\alpha)^s\alpha^{ns}}{2^{m-2}}\cdot\frac{1}{\alpha^s} < \frac{1}{1,32^s}.$$

Assim, de (2.52),

$$|1 - 2^{(n-1)s-m+2}| < \frac{6}{2^{k/2}} + \frac{3}{1,32^n} + \frac{1}{2^{m-1}} + \frac{1}{1,32^s} + \frac{6s}{2^{k/2}},$$

onde usamos a hipótese que $(n-1)s < m-2$.

Pelo Teorema 2.4, temos $s < 8,11\cdot 10^{210}k^{100}\log^{43}k$ e para $k \geq 4488$,

$$\frac{6\cdot 8,11\cdot 10^{210}k^{100}\log^{43}k}{2^{k/2}} < \frac{1}{2^{k/25}}.$$

Logo,

$$|1 - 2^{(n-1)s-m+2}| < \frac{6}{2^{k/2}} + \frac{3}{1,32^n} + \frac{1}{2^{m-1}} + \frac{1}{1,32^s} + \frac{1}{2^{k/25}}.$$

Por outro lado, $|1 - 2^{(n-1)s-m+2}| \geq 1/2$. Como $k \geq 4488$, $n \geq 350$ e $m \geq k+1 > 4488$,

$$\frac{1}{2} \leq |1 - 2^{(n-1)s-m+2}| < \frac{1}{1,32^s} + 1,9\cdot 10^{-42},$$

o que nos dá $s \leq 2$ e o caso $s = 2$ já foi resolvido na Seção 2.1.

Caso 2: $(n-1)s > m-2$.

Nesse caso, dividimos (2.51) por $2^{(n-1)s}$ obtendo

$$\begin{aligned} |2^{m-2-(n-1)s}-1| &< \frac{6}{2^{k/2}}+\frac{2}{1,32^n}\cdot\frac{f_k(\alpha)^s\alpha^{ns}(1+\alpha^{-s})}{2^{(n-1)s}}+ \\ &+ \frac{1}{2^{(n-1)s+1}}+\frac{f_k(\alpha)^s\alpha^{(n-1)s}}{2^{(n-1)s}}+s\frac{6}{2^{k/2}}. \end{aligned} \tag{2.53}$$

De maneira análoga a feita no Caso 1, temos que $s \leq 2$.

Caso 3: $(n-1)s = m-2$.

Da equação (2.1), segue que

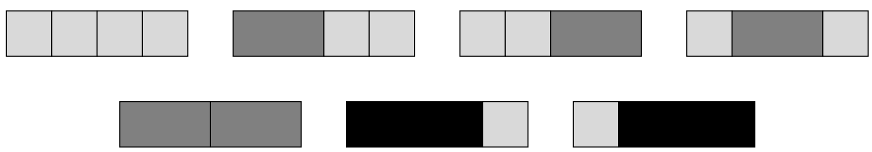
$$(F_n^{(k)})^s + (F_{n+1}^{(k)})^s = F_{(n-1)s+2}^{(k-1)}.$$

Se $n \geq k+1$, vamos mostrar que $(F_{n+1}^{(k)})^s > F_{(n-1)s+2}^{(k)}$. Com isso, teremos que

$$(F_n^{(k)})^s + (F_{n+1}^{(k)})^s > (F_{n+1}^{(k)})^s > F_{(n-1)s+2}^{(k)} > F_{(n-1)s+2}^{(k-1)}$$

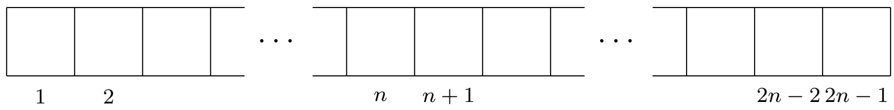
e portanto não temos solução também nesse caso.

Para isso, vamos usar um fato conhecido de que $F_{r+1}^{(k)}$ conta o número de maneiras de cobrir um $(1\times r)$-tabuleiro com peças de tamanho até k (ver [5]). Observe o seguinte exemplo: na figura abaixo vemos que o número de maneiras de cobrir um (1×4)-tabuleiro com peças de tamanho até 3 é exatamente $F_5^{(3)} = 7$.



Vamos agora provar por indução em s que $(F_{n+1}^{(k)})^s > F_{(n-1)s+2}^{(k)}$. Considere $s=2$, então queremos mostrar que $(F_{n+1}^{(k)})^2 > F_{(n-1)2+2}^{(k)} = F_{2n}^{(k)}$. Para isso, considere um tabuleiro de tamanho $1\times(2n-1)$, portanto existem $F_{2n}^{(k)}$ maneiras de cobrir o tabuleiro.

Faremos agora outra cobertura para esse tabuleiro. Primeiramente, divida esse tabuleiro em duas partes: uma de tamanho n e outra de tamanho $n-1$. Cobrindo de maneira que não tenha interseção com a fronteira $(n, n+1)$ temos $F_{n+1}^{(k)}F_n^{(k)}$ maneiras de cobrir o tabuleiro. Agora, para os casos em que há interseção podemos ter pedaços de tamanho t aparecendo no lado direito do tabuleiro original para $t \in \{1, 2, \dots, k-1\}$, pois $k-1 < n-1$. Assim, temos no máximo $F^{(k)}_{n+1}F^{(k)}_{n-t}$ maneiras para cada t.



Logo, obtemos no máximo

$$F^{(k)}_{n+1}F^{(k)}_{n} + \sum_{t=1}^{k-1} F^{(k)}_{n+1}F^{(k)}_{n-t} = F^{(k)}_{n+1}\sum_{t=0}^{k-1} F^{(k)}_{n-t} = (F^{(k)}_{n+1})^2$$

maneiras de cobrir o tabuleiro original. O que demonstra que $(F^{(k)}_{n+1})^2 > F^{(k)}_{(n-1)2+2} = F^{(k)}_{2n}$.

Suponha agora verdadeiro para s: $(F^{(k)}_{n+1})^s > F^{(k)}_{(n-1)s+2}$, e considere um tabuleiro de tamanho $1 \times ((n-1)(s+1)+1)$. Sabemos que podemos cobri-lo com peças de tamanho até k de $F^{(k)}_{(n-1)(s+1)+2}$ maneiras.

Divida esse tabuleiro em duas partes, uma de tamanho $(n-1)s+1$ e outra de tamanho $n-1$. De forma análoga a feita no caso $s = 2$, podemos cobrir o tabuleiro de forma que não tenha interseções na fronteira $((n-1)s+1, (n-1)s+2)$ de $F^{(k)}_{(n-1)s+2}F^{(k)}_{n}$ maneiras. E, olhando as interseções com pedaços de tamanho t no lado direito temos no máximo $F^{(k)}_{(n-1)s+2}F^{(k)}_{n-t}$ maneiras. O que nos dá, no máximo,

$$F^{(k)}_{(n-1)s+2}\sum_{t=0}^{k-1} F^{(k)}_{n-t} = F^{(k)}_{(n-1)s+2}F^{(k)}_{n+1},$$

e usando a hipótese de indução temos:

$$F^{(k)}_{(n-1)s+2}F^{(k)}_{n+1} < (F^{(k)}_{n+1})^{s+1}.$$

Portanto,

$$(F^{(k)}_{n+1})^{s+1} > F^{(k)}_{(n-1)s+2}F^{(k)}_{n+1} > F^{(k)}_{(n-1)(s+1)+2},$$

como queríamos demonstrar.

O caso k pequeno

Considere $k < 4488$. Se $m < 2^{k/2}$ e $n < 2^{k/2}$, procedemos de maneira análoga ao caso em que k é grande. Mas agora, usamos os fatos que $s \geq 3$, $n > 350$ e $m > (n-1)s+1 > 1048$ para obter de (2.52) ou de (2.53),

$$\frac{1}{2} < \frac{6}{2^{k/2}} + \frac{1}{2^{k/25}} + (0,44),$$

o que nos dá $k \leq 101$. Portanto, $n, m < 1,6 \cdot 10^{15}$.

Se $n \geq 2^{k/2}$, então

$$k \leq \frac{2}{\log 2} \log n.$$

Pelo Teorema 2.4, $n < 1,49 \cdot 10^{39} k^{22} \log^8 k$, daí $k < 303 \log k$ e portanto $k \leq 2352$.

Com isso, substituindo no limitante de n obtemos $n \leq 2,92 \cdot 10^{120}$. Como

$$k \leq \frac{2}{\log 2} \log n < \frac{2}{\log 2} \log(2,92 \cdot 10^{120}) \leq 800.$$

Novamente, substituindo o limitante para k em $n < 1,49 \cdot 10^{39} k^{22} \log^8 k$ temos $n \leq 4,39 \cdot 10^{109}$ e daí $k \leq 728$. Repetindo o processo obtemos

$$k \leq 722 \text{ e } n < 4,06 \cdot 10^{108}.$$

Como, pelo Teorema 2.4, $s < 8,11 \cdot 10^{210} k^{100} \log^{43} k$ e $m < 1,97 \cdot 10^{230} k^{110} \log^{47} k$ temos

$$s < 8,96 \cdot 10^{531} \text{ e } m < 1,58 \cdot 10^{583}.$$

Agora, se $m \geq 2^{k/2}$, usando um argumento análogo ao anterior, não obtemos melhora no limitante para k, ou seja, $k \leq 4487$ e aí $m < 2,97 \cdot 10^{675}$. Nesse caso,

$$n < 8,21 \cdot 10^{126} \text{ e } s < 7,39 \cdot 10^{615}.$$

$\square$

Observe que, na demonstração acima, só conseguiríamos melhorar o limitante dado para a variável k usando o método de redução do algoritmo LLL para $2 < k \leq 4487$. No entanto, esse cálculo não é viável computacionalmente. Para explicitar um exemplo, faremos abaixo o caso $k = 3$. Com esse caso, será possível observar que a ferramenta de redução do algoritmo LLL é muito eficiente, mas é realmente complicado resolver o caso para todos os valores $2 < k \leq 4487$.

2.2.3 O caso $k = 3$ e $l = 2$

Seja T_n o n-ésimo número de Tribonacci ($k = 3$) e F_n o n-ésimo número de Fibonacci ($l = 2$), então temos o seguinte resultado:

Teorema 2.6. *Se (s, n, m) é solução para a equação*

$$T_n^s + T_{n+1}^s = F_m,$$

com $s \geq 2$ e $n \geq 2$, então $(s, n, m) = (2, 2, 5)$.

O objetivo deste capítulo é repetir a prova do Teorema 2.4 para o caso em que $k = 3$ e $l = 2$ a fim de conseguir limitantes melhores para as variáveis envolvidas na equação, pois, usando o Teorema 2.4 diretamente, obteríamos os seguintes limitantes:

$$s < 2,39 \cdot 10^{260},\ n < 9,93 \cdot 10^{49} \text{ e } m < 4,99 \cdot 10^{284}.$$

Nesse caso, usaremos os métodos de redução dado pelo Lema 1.3 e o algoritmo LLL dado na Seção 1.2 para reduzir os limitantes e resolver completamente a equação.

Para demonstração do Teorema 2.6, considere $T_n = f_3(\alpha)\alpha^{n-1} + E_3$ e $F_m = f_2(\beta)\beta^{m-1} + E_2$ como as "Binet-like formulas" obtidas por Dresden e Du [9], dadas por (1.9) e (1.10).

Vamos à demonstração:

Demonstração do Teorema 2.6. Como feito em (2.20), já que $\alpha > \beta$,

$$(n-1)s + 1 < m < 2(ns + 2).$$

Ainda, obtemos de (2.34),

$$|\Lambda_1| := |f_2(\beta)\beta^{m-1} f_3(\alpha)^{-s}\alpha^{-ns} - 1| < \frac{4}{1,32^n} + \frac{1}{1,32^s} < \frac{5}{1,32^t}, \tag{2.54}$$

onde $t = \min\{n, s\}$.

Temos $\Lambda_1 \neq 0$ e ainda, para

$$\gamma_1 := f_2(\beta),\ \gamma_2 := \beta,\ \gamma_3 := f_3(\alpha),\ \gamma_4 := \alpha,$$

$$b_1 := 1,\ b_2 := m - 1,\ b_3 := -s \text{ e } b_4 := -ns,$$

obtemos, pelo Teorema 1.2,

$$|\Lambda_1| > \exp(-1,02 \cdot 10^{19} \log{(ns)}),$$

portanto

$$t < 3,68 \cdot 10^{19} \log(ns).$$

Separaremos em dois casos: quando n é o mínimo e quando s é o mínimo.

Caso $n \leq s$

Neste caso,

$$n < 3,68 \cdot 10^{19} \log(ns). \tag{2.55}$$

Considere agora a forma linear em logaritmos dada por (2.22):

$$|\Lambda_2| := |f_2(\beta)\beta^{m-1}T_{n+1}^{-s} - 1| < \frac{2}{1,65^s}. \tag{2.56}$$

Pelo mesmo argumento utilizado anteriormente, temos que $\Lambda_1 \neq 0$, e portanto podemos aplicar o Teorema 1.2, com:

$$\gamma_1 := f_2(\beta),\ \gamma_2 := \beta,\ \gamma_3 := T_{n+1},$$

$$b_1 := 1,\ b_2 := m-1 \text{ e } b_3 := -s.$$

Portanto,

$$|\Lambda_2| > \exp(-1,04 \cdot 10^{16} n \log{(ns)}).$$

Daí,

$$s < 2,08 \cdot 10^{16} n \log(ns).$$

Usando o fato que $n \leq s$ segue que

$$s < 4,16 \cdot 10^{16} n \log s.$$

Pelo Lema 1.13 obtemos

$$s < 3,33 \cdot 10^{18} n \log n. \tag{2.57}$$

Utilizando (2.57) em (2.55) segue que

$$n < 3,68 \cdot 10^{19} \log(3,33 \cdot 10^{18} n^2 \log n),$$

e assim,

$$n < 5,40 \cdot 10^{21}.$$

Voltando em (2.57), temos $s < 9 \cdot 10^{41}$ e $m < 2(ns+2) < 9,73 \cdot 10^{63}$.

Nosso objetivo agora é reduzir esses limitantes através do algoritmo LLL comentado na Seção 1.2. Primeiramente, considere a forma linear dada por

$$\Gamma_1 := \log f_2(\beta) + (m-1)\log\beta - s\log f_3(\alpha) - ns\log\alpha.$$

Se $\Gamma_1 > 0$ temos $0 < \Gamma_1 < e^{\Gamma_1} - 1 < 5/(1,32)^n$, por (2.54). Se $\Gamma_1 < 0$ então, ainda por (2.54), temos que $|e^{\Gamma_1} - 1| < 1/2$ para $n \geq 9$ (observe que o caso $n < 9$ pode ser resolvido separadamente). Assim, para $\Gamma_1 < 0$ temos $1 - e^{\Gamma_1} \leq |e^{\Gamma_1} - 1| < 1/2$ e portanto, $e^{|\Gamma_1|} = 1/e^{\Gamma_1} < 2$. Logo, $0 < |\Gamma_1| < e^{|\Gamma_1|}|e^{\Gamma_1} - 1| < 10/(1,32)^n$. Para evitar repetições desnecessárias, considere $\Gamma_1 > 0$.

Com a notação na Proposição 1.6 da Seção 1.2 considere:

$$\begin{aligned}
|x_1| &= |m-1| \leq 9,73 \cdot 10^{63} =: X_1 \\
|x_2| &= |s| \leq 9 \cdot 10^{41} =: X_2 \\
|x_3| &= |ns| \leq 4,86 \cdot 10^{63} =: X_3.
\end{aligned}$$

Devemos escolher uma constante $C \geq X^3$, onde $X = \max\{|X_1|, |X_2|, |X_3|\}$. Assim, $C := 10^{200}$ é uma boa escolha. Considere agora a matriz cujas colunas geram nosso reticulado $\mathcal{L}$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \lfloor 10^{200}\log\beta\rceil & \lfloor 10^{200}\log f_3(\alpha)\rceil & \lfloor 10^{200}\log\alpha\rceil \end{pmatrix}.$$

Com a ajuda do software *Mathematica*, computamos a base LLL-reduzida com o seguinte comando:

```
LatticeReduce[{{1,0,Round[10^{200}*Log[alphasd[2]]]},
{0,1, Round[10^{200}*Log[gsd[3]]]}, {0,0,Round[10^{200}*Log[alphasd[3]]]}}]
```

Para os vetores encontrados $\{b_1, b_2, b_3\}$ da base LLL-reduzida, precisamos encontrar os vetores da base de Gram-Schmidt associados $\{b_1^*, b_2^*, b_3^*\}$ e calcular

$$\frac{|b_1|}{|b_1^*|} = 1, \frac{|b_1|}{|b_2^*|} \leq 0,37 \text{ e } \frac{|b_1|}{|b_3^*|} \leq 0,08,$$

o que pode ser feito através do comando `N[Norm[b_1]/Norm[b_i^*]]`. Pelo Lema 1.4, podemos escolher $c_1 := 1$.

Considere agora $y = (0, 0, -\lfloor 10^{200} \log f_2(\beta) \rceil)$. Para utilizarmos o Lema 1.4, precisamos escrever y na base $\{b_1, b_2, b_3\}$, por exemplo,

$$y = y_1 b_1 + y_2 b_2 + y_3 b_3$$

e encontrar o maior índice i, com $i \in \{1, 2, 3\}$, tal que $y_i \notin \mathbb{Z}$, e então, calculamos a distância até o inteiro mais próximo, denotado por $\|y_i\|$, através do comando `Near[y_i]`, onde `Near[x_] := Min[Abs[x - Floor[x]], Abs[Ceiling[x] - x]]`. Neste caso, obtemos $\|y_3\| > 0,062$. Assim, temos pelo Lema 1.4

$$d(\mathcal{L}, y) \geq 0,062 \cdot \frac{|b_1|}{1} \geq 0,062 \cdot 1,18 \cdot 10^{66} > 7,31 \cdot 10^{64}.$$

Por fim, verificamos a condição $d(\mathcal{L}, y)^2 > 1,48 \cdot 10^{128} \geq T^2 + Q$, para T e Q como definidos na Proposição 1.6 e obtemos

$$|\Gamma_1| \geq \frac{\sqrt{d(\mathcal{L}, y)^2 - Q} - T}{C} > 6,5 \cdot 10^{-136}.$$

Comparando com (2.54), e usando que $n \leq s$, obtemos $n \leq 1126$. Daí, $s < 2,64 \cdot 10^{22}$ e $m < 5,95 \cdot 10^{25}$.

Repetindo o processo por mais duas vezes (na primeira vez com $C := 10^{85}$ e na segunda com $C := 10^{80}$) obtemos

$$n \leq 456, \;\; s < 9,3 \cdot 10^{21} \text{ e } m < 8,5 \cdot 10^{24}.$$

Usar esse argumento mais vezes não nos dará melhores limitantes, por isso, atacaremos agora a forma linear dada em (2.56).

Neste caso, temos $\Lambda_2 = e^{\Gamma_2} - 1 > 0$, (como mostrado na Seção 2.2.1) e portanto

$$0 < \Gamma_2 < e^{\Gamma_2} - 1 < \frac{2}{1,65^s},$$

com $\Gamma_2 := (m-1)\log\beta - s\log T_{n+1} + \log f_2(\beta)$.

Dividindo por $\log T_{n+1}$, segue que

$$0 < (m-1)\frac{\log\beta}{\log T_{n+1}} - s + \frac{\log f_2(\beta)}{\log T_{n+1}} < \frac{2}{\log 2} \cdot (1,65)^{-s}.$$

Usaremos o método de redução dado pelo Lema 1.3, onde

$$\gamma_n := \frac{\log\beta}{\log T_{n+1}}$$

é irracional, e definimos

$$\mu_n := \frac{\log f_2(\beta)}{\log T_{n+1}}, \ A := \frac{2}{\log 2} \text{ e } B := 1,65.$$

Também, com os limitantes obtidos anteriormente, temos $M := 8,5 \cdot 10^{24}$.

Agora, utilizando a mesma ideia da Seção 2.1, considere $q_{n,r}$ o denominador do r-ésimo convergente da fração contínua associada a γ_n, obtemos com o software *Mathematica*:

$$\min_{2 \leq n \leq 456} q_{n,80} > 6M \text{ e } q := \max_{2 \leq n \leq 456} q_{n,80} < 9,2 \cdot 10^{54}.$$

Ainda, com $\varepsilon_n := \|\mu_n q_{n,80}\| - M\|\gamma_n q_{n,80}\|$, temos

$$\varepsilon := \min_{2 \leq n \leq 456} \varepsilon_n > 0,0067.$$

Pelo Lema 1.3, segue que

$$s < \frac{\log(Aq/\varepsilon)}{\log B} < 265.$$

Portanto, como estamos com $n \leq s$, segue que $n < 265$ e $m < 2(ns+2) < 140454$.

Caso $s < n$

Neste caso, $s < 3,68 \cdot 10^{19} \log(ns)$, e usando que $s < n$ temos

$$s < 7,36 \cdot 10^{19} \log n. \tag{2.58}$$

Considere agora a forma linear dada em (2.40)

$$|\Lambda_3| := |f_2(\beta)\beta^{m-1} f_3(\alpha)^{-s} \alpha^{-(n-1)s}(1+\alpha^s)^{-1} - 1| < \frac{3}{1,32^n}. \tag{2.59}$$

De maneira análoga a feita na Seção 2.2.1, podemos escolher $A_5 := 11s$. Então, obtemos pelo Teorema 1.2:

$$|\Lambda_3| > \exp(-1,52 \cdot 10^{21} s \log(ns)),$$

o que nos dá

$$n < 5,48 \cdot 10^{21} s \log(ns) \tag{2.60}$$

e portanto, utilizando (2.58) em conjunto com $s < n$, segue que

$$n < 8,07 \cdot 10^{41} \log^2 n.$$

Logo, $n < 9,04 \cdot 10^{45}$ e, de (2.58), $s < 7,79 \cdot 10^{21}$. Assim, obtemos de (2.20) $m < 1,41 \cdot 10^{68}$.

Para essas limitações, usaremos o algoritmo LLL com a forma linear dada por (2.54), como feito no caso anterior:

$$|\Gamma_1| := |\log f_2(\beta) + (m-1)\log\beta - s\log f_3(\alpha) - ns\log\alpha| < \frac{5}{1,32^s}.$$

Considere

$$X_1 := 1,41 \cdot 10^{68}, \ X_2 := 7,79 \cdot 10^{21} \text{ e } X_3 := 7,05 \cdot 10^{67}.$$

Escolha $C := 10^{220}$. Então, após os cálculos computacionais, obtemos

$$d(\mathcal{L}, y) \geq 0,09 \cdot \frac{|b_1|}{1} > 8,34 \cdot 10^{71},$$

portanto $d(\mathcal{L}, y)^2 > 3,2 \cdot 10^{136} \geq T^2 + Q$ e assim:

$$|\Gamma_1| \geq \frac{\sqrt{d(\mathcal{L}, y)^2 - Q} - T}{C} > 8,3 \cdot 10^{-149}.$$

Obtendo assim, $s < 1233$. Como $n < 5,48 \cdot 10^{21} s \log(ns)$, temos $n < 4,63 \cdot 10^{26}$ e $m < 1,15 \cdot 10^{30}$. Repetindo o processo, obtemos $s \leq 567$ e daí $n < 2,08 \cdot 10^{26}$ e $m < 2,36 \cdot 10^{29}$.

Considere agora a forma linear dada por

$$\Gamma_3 = \log\left(\frac{f_2(\beta)}{(1+\alpha^s)}\right) + (m-1)\log\beta - s\log f_3(\alpha) - (n-1)s\log\alpha.$$

Podemos considerar $\Gamma_3 > 0$, pois o caso $\Gamma_3 < 0$ é análogo. Assim, pela desigualdade (2.59), temos

$$0 < \Gamma_3 < e^{\Gamma_3} - 1 = \Lambda_3 < \frac{3}{1,32^n}. \tag{2.61}$$

Com a notação na Proposição 1.6 da Seção 1.2, considere:

$$\begin{aligned} |x_1| &= |m-1| \leq 2,36 \cdot 10^{29} =: X_1 \\ |x_2| &= |s| \leq 567 =: X_2 \\ |x_3| &= |(n-1)s| \leq 1,18 \cdot 10^{29} =: X_3. \end{aligned}$$

Devemos escolher uma constante $C \geq X^3$, onde $X = \max\{|X_1|, |X_2|, |X_3|\}$. Assim, escolha $C := 10^{100}$.

Considere agora a matriz cujas colunas geram um reticulado $\mathcal{L}$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \lfloor 10^{100}\log\beta \rceil & \lfloor 10^{100}\log f_3(\alpha) \rceil & \lfloor 10^{100}\log\alpha \rceil \end{pmatrix}.$$

Computamos a base LLL-reduzida e para os vetores encontrados $\{b_1, b_2, b_3\}$, precisamos encontrar os vetores da base de Gram-Schmidt associados $\{b_1^*, b_2^*, b_3^*\}$ e calcular

$$\frac{|b_1|}{|b_1^*|} = 1, \ \frac{|b_1|}{|b_2^*|} < 0,58 \text{ e } \frac{|b_1|}{|b_3^*|} < 0,64.$$

Pelo Lema 1.4, podemos escolher $c_1 := 1$.

Considere agora $y(s) = (0, 0, -\lfloor 10^{100} \log(f_2(\beta)/(1+\alpha^s)) \rceil)$. Para utilizarmos o Lema 1.4, precisamos escrever $y(s)$ na base $\{b_1, b_2, b_3\}$ para todo $2 \leq s \leq 567$, isto é,

$$y(s) = y_1(s)b_1 + y_2(s)b_2 + y_3(s)b_3.$$

Para cada $2 \leq s \leq 567$, devemos encontrar o maior índice i, $(i \in \{1, 2, 3\})$ tal que $y_i(s) \notin \mathbb{Z}$, e então, calculamos a distância até o inteiro mais próximo, denotado por $\|y_i(s)\|$. Fazendo isso, obtemos

$$\min_{2 \leq s \leq 567} \|y_i(s)\| > 0,0011.$$

Assim, temos pelo Lema 1.4

$$d(\mathcal{L}, y) \geq \|y_i(s)\| \cdot \frac{|b_1|}{c_1} > 0,0011 \cdot 1,31 \cdot 10^{33} > 1,56 \cdot 10^{30}.$$

Por fim, verificamos a condição $d(\mathcal{L}, y)^2 > 8,7 \cdot 10^{58} \geq T^2 + Q$, para T e Q como definidos na Proposição 1.6 e obtemos

$$|\Gamma_3| \geq \frac{\sqrt{d(\mathcal{L}, y)^2 - Q} - T}{C} > 1,36 \cdot 10^{-70}.$$

Comparando com (2.61) temos $n \leq 583$, o que nos dá $m < 658794$.

Repetindo o processo para a mesma forma linear Γ_3, com

$$X_1 := 658794, \ X_2 := 567, \text{ e } X_3 := 329395$$

e considerando $C := 10^{30}$, temos

$$|\Gamma_3| > 4,1 \cdot 10^{-23}.$$

O que nos dá, comparando com (2.61), $n < 189$, e portanto $m < 213574$. Podemos repetir o processo mais uma vez e obter $n < 174$. Repetir o processo mais vezes não nos dará limitantes muito melhores. Neste caso, como $s < n$, temos também $s < 174$ e aí $m < 60556$. Isso conclui este caso.

Assim, em qualquer caso, resta usar o *Mathematica* para procurar as soluções com

$$2 \leq s \leq 265, \quad 2 \leq n \leq 265 \text{ e } (n-1)s + 1 < m < 2(ns+2).$$

Podemos fazer isso através do comando:

```
Catch[Do[{s,n,m};If[F[n,3]^s+F[n+1,3]^s==F[m,2], Print[{s,n,m}]],
{s,2,265},{n,2,265},{m,(n-1)*s+1,2*(n*s+2)}]]
```

O *Mathematica* retorna como única solução $(s, n, m) = (2, 2, 5)$, o que conclui a demonstração.

□

2.2.4 O caso $l > k$

Procedendo de maneira análoga a feita no caso $l < k$, é possível obter limitantes para m, n e s em termos de l.

Teorema 2.7. *Seja (n, m, k, l, s) solução da equação Diofantina*

$$(F_n^{(k)})^s + (F_{n+1}^{(k)})^s = F_m^{(l)}, \tag{2.62}$$

com $n, m \geq 2$, $l > k \geq 2$, $s \geq 2$ inteiros. Então:

$$\begin{aligned} s &< 1,48 \cdot 10^{213} l^{100} \log^{43} l, \\ n &< 6,39 \cdot 10^{38} l^{22} \log^{8} l, \\ m &< 3,2 \cdot 10^{232} l^{110} \log^{47} l. \end{aligned}$$

Como $l > k$, com a mesma notação da Seção 2.2.1, temos $\beta > \alpha$, e assim, a principal diferença em relação ao caso $l < k$ é a relação entre m, n e s, que neste caso é dada por

$$\frac{(n-1)s}{2} + 1 < m < ns + 3.$$

Os demais passos da demonstração são análogos ao da Seção 2.2.1 e omitiremos neste trabalho.

Capítulo 3

A Equação $F_{n+1}^s + F_{n+2}^s + \cdots + F_{n+s}^s = F_m$

Toda a inspiração para estudar somas de potências de números de Fibonacci é dada pela seguinte relação, mostrada por indução,

$$F_{n+1}^2 + F_{n+2}^2 = F_{2n+3}.$$

Observamos então, que uma possível generalização é dada por

$$F_{n+1}^s + F_{n+2}^s + \cdots + F_{n+s}^s = F_m. \tag{3.1}$$

Pensando nisso, obtemos o seguinte resultado:

Teorema 3.1. *Seja s um inteiro positivo. Se $F_{n+1}^s + F_{n+2}^s + \cdots + F_{n+s}^s$ é um número de Fibonacci para todo n suficientemente grande, então $s = 1$ ou $s = 2$.*

Demonstração. Considere a fórmula de Binet dada por (1.5) e escreva $\beta = \alpha^{-1}$ (pois $\alpha\beta = -1$):

$$F_n = \frac{\alpha^n + (-1)^{n+1}\alpha^{-n}}{\sqrt{5}}.$$

Usando o Teorema Binomial, temos

$$\begin{aligned}(\sqrt{5})^s(F_{n+1}^s + F_{n+2}^s + \cdots + F_{n+s}^s) &= \sum_{i=0}^{s}\binom{s}{i}(-1)^{(n+2)i}\alpha^{(n+1)(s-i)}\alpha^{-(n+1)i} + \cdots \\ &\cdots + \sum_{i=0}^{s}\binom{s}{i}(-1)^{(n+s+1)i}\alpha^{(n+s)(s-i)}\alpha^{-(n+k)i}.\end{aligned}$$

Dividindo por $\alpha^{(n+1)s}$ temos

$$
\begin{aligned}
(\sqrt{5})^s \frac{(F_{n+1}^s + F_{n+2}^s + \cdots + F_{n+s}^s)}{\alpha^{(n+1)s}} \quad = \quad & \sum_{i=0}^{s} \binom{s}{i} (-1)^{(n+2)i} \alpha^{-2(n+1)i} \\
& + \sum_{i=0}^{s} \binom{s}{i} (-1)^{(n+3)i} \alpha^{s-2(n+2)i} + \cdots \\
& \cdots + \sum_{i=0}^{s} \binom{s}{i} (-1)^{(n+s+1)i} \alpha^{(s-1)s-2(n+s)i}
\end{aligned}
$$

Note que, como $|\alpha| > 1$,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{s} \binom{s}{i} (-1)^{(n+2)i} \alpha^{-2(n+1)i} = 1$$

e para $l = 1, 2, \ldots, s-1$, temos

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{s} \binom{s}{i} (-1)^{(n+l+2)i} \alpha^{ls-2(n+l+1)i} = \alpha^{ls}.$$

Portanto,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}^s + F_{n+2}^s + \cdots + F_{n+s}^s}{\alpha^{(n+1)s}} = \frac{1}{(\sqrt{5})^s}(1 + \alpha^s + \alpha^{2s} + \cdots + \alpha^{(s-1)s}) = \frac{1}{(\sqrt{5})^s} \cdot \frac{\alpha^{s^2} - 1}{\alpha^s - 1}.$$

Por outro lado, se supomos a existência de $N_0 > 0$ e uma subsequência $(m_n)_{n\geq 0} \subset \mathbb{N}$ tal que

$$F_{n+1}^s + F_{n+2}^s + \cdots + F_{n+s}^s = F_{m_n}, \text{ para todo } n \geq N_0, \tag{3.2}$$

então

$$\frac{1}{(\sqrt{5})^s} \cdot \frac{\alpha^{s^2} - 1}{\alpha^s - 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{F_{m_n}}{\alpha^{(n+1)s}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^{m_n-(n+1)s} - (-1)^{m_n} \alpha^{-m_n-(n+1)s})}{\sqrt{5}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^{m_n-(n+1)s}}{\sqrt{5}}.$$

Como $m_n - (n+1)s$ é um inteiro e $|\alpha| > 1$ temos que $m_n - (n+1)s$ tem que ser constante com respeito a n, para n suficientemente grande. Digamos $\lim\limits_{n\to\infty} (m_n - (n+1)s) = t$. Logo,

$$\frac{1}{(\sqrt{5})^s} \cdot \frac{\alpha^{s^2} - 1}{\alpha^s - 1} = \frac{\alpha^t}{\sqrt{5}},$$

ou ainda

$$\alpha^{s^2} = (\alpha^s - 1)(\sqrt{5})^{s-1} \alpha^t + 1. \tag{3.3}$$

Além disso, note que pela equação (3.2), temos $m_n \geq (n+s-2)s+1$, usando o Lema 1.11. Assim,

$$t > \lim_{n\to\infty}((n+s-2)s+1-(n+1)s) = s^2-3s+1.$$

Por fim, conjugando por automorfismos de Galois a equação (3.3), temos

$$\beta^{s^2} = (\beta^s-1)(-\sqrt{5})^{s-1}\beta^t + 1. \tag{3.4}$$

Multiplicando (3.3) por (3.4), segue que

$$(-1)^{s^2} - 1 - (\beta^s-1)(-\sqrt{5})^{s-1}\beta^t = (\alpha^s-1)(\beta^s-1)(-1)^{s-1}5^{s-1}(-1)^t + (\alpha^s-1)(\sqrt{5})^{s-1}\alpha^t. \tag{3.5}$$

Por um lado, como $|\beta| < 1$,

$$|(-1)^{s^2} - 1 - (\beta^s-1)(-\sqrt{5})^{s-1}\beta^t| \leq 2 + |\beta^s-1|\cdot 5^{(s-1)/2} < 2 + 2\cdot 5^{(s-1)/2}. \tag{3.6}$$

Por outro lado,

$$|(\alpha^s-1)(\sqrt{5})^{s-1}\alpha^t + (\alpha^s-1)(\beta^s-1)(-1)^{s-1}5^{s-1}(-1)^t|$$

é maior ou igual que

$$(\alpha^s-1)(\sqrt{5})^{s-1}\alpha^t - (\alpha^s-1)|\beta^s-1|\cdot 5^{s-1}.$$

Daí,

$$\begin{aligned}(\alpha^s-1)(\sqrt{5})^{s-1}\alpha^t - (\alpha^s-1)|\beta^s-1|\cdot 5^{s-1} &\geq (\alpha^s-1)(\sqrt{5})^{s-1}\alpha^t - 5^{2s}\\ &> (\sqrt{5})^{s-1}(\sqrt[4]{5})^t - 5^{2s}\\ &> (\sqrt{5})^{s-1}(\sqrt[4]{5})^{s^2-3s+1} - 5^{2s}\\ &> 5^{\frac{s^2-s-1}{4}} - 5^{2s}, \end{aligned} \tag{3.7}$$

onde usamos os fatos que $\alpha > \sqrt[4]{5}$, $1 < \alpha^s - 1 < 5^s$ e $|\beta^s-1| < 2$, para $s \geq 2$.

Comparando (3.6) com (3.7) na igualdade (3.5), obtemos

$$5^{\frac{s^2-s-1}{4}} - 5^{2s} < 2 + 2\cdot 5^{(s-1)/2},$$

mas isso só ocorre se $s \leq 9$. Computacionalmente, usando a igualdade (3.3), vemos que para n suficientemente grande,

$$t = \frac{\log\left(\dfrac{\alpha^{s^2}-1}{(\alpha^s-1)(\sqrt{5})^{s-1}}\right)}{\log\alpha}$$

é inteiro somente quando $s = 1$ ou $s = 2$, como queríamos.

□

Observe que a dificuldade de se resolver completamente o problema encontra-se na dependência do índice $n+s$ de F_{n+s} com o expoente s, não sendo possível aplicar as técnicas de formas lineares em logaritmos de forma semelhante aos casos resolvidos anteriormente.

Agora, definindo no *Mathematica* a seguinte função

```
SomaF[n_, s_] := Sum[F[n + i, 2]^s, {i, 1, s}]
```

que denota a soma $F_{n+1}^s + F_{n+2}^s + \cdots + F_{n+s}^s$. E, sabendo que pela equação

$$F_{n+1}^s + F_{n+2}^s + \cdots + F_{n+s}^s = F_m$$

e pelo Lema 1.11 é possível obter

$$(n+s-2)s + 1 \leq m \leq (n+s)s + 2.$$

Computamos

```
Timing[Catch[Do[If[SomaF[n, s] == F[m, 2], Print[{s, n, m}]], {s, 3, 100},
{n,1,100}, {m, (n + s - 2)*s + 1, (n + s)*s + 2}]]]
```

no entanto, não obtemos nenhuma solução, o que nos leva a conjecturar que a equação

$$F_{n+1}^s + F_{n+2}^s + \cdots + F_{n+s}^s = F_m$$

só possui solução quando $s = 1$ ou 2.

Referências Bibliográficas

[1] BEDNARIK, D., FREITAS, G., MARQUES, D., TROJOVSKÝ, P., *On the sum of squares of consecutive k-bonacci numbers which are l-bonacci numbers*, Colloquium Mathematicum, v. 156, p. 153-164, 2019.

[2] BRAVO, J. J., LUCA, F., *Powers of two in generalized Fibonacci sequences*, Rev. Colombiana Matemáticas, v. 46, n.1, p. 67-79, 2012.

[3] BRAVO, J. J., LUCA F., *On the largest prime factor of the k-Fibonacci numbers*, Int. J. of Number Theory, v. 9, n.5, p. 1351-1366, 2013.

[4] BRAVO, J. J., LUCA, F., *On a conjecture about repdigits in k-generalized Fibonacci sequences*, Publ. Math. Debrecen, v. 82, n.3-4, p. 623-639, 2013.

[5] BOVO, E., SILVA, R. da, MARQUES, D., SANTOS, J.P. de O., *Tópicos em Combinatória Enumerativa*, No prelo 2020.

[6] CHAVES, A. P., MARQUES, D., *A Diophantine equation related to the sum of squares of consecutive k-generalized Fibonacci numbers*, The Fibonacci Quarterly, v. 52, n.1, p. 70-74, 2014.

[7] CHAVES, A. P., MARQUES, D., *A Diophantine equation related to the sum of powers of two consecutive generalized Fibonacci numbers*, Journal of Number Theory, v. 156, p. 1-14, 2015.

[8] COHEN, H., *Number Theory: Volume I: Tools and Diophantine Equations*, Springer Science and Business Media, 2008.

[9] DRESDEN, G. P., DU, Z., *A simplified Binet formula for k-generalized Fibonacci numbers*, Journal of Integer Sequences, v.17, n.4, 2014.

[10] DUJELLA, A., PETHÖ, A., *A generalization of a theorem of Baker and Davenport*, The Quarterly J. of Mathematics, v. 49, n.195, p. 291-306, 1998.

[11] DUJELLA, A., *Continued fractions and RSA with small secret exponents*, Tatra Mt. Math. Publ., v. 29, p. 101-112, 2004.

[12] FEINBERG, M., *Fibonacci-Tribonacci*, The Fibonacci Quarterly, v. 1, n.3, p. 70-74, 1963.

[13] LUCA, F., RUIZ, C. A. G., *An exponential Diophantine equation related to the sum of powers of two consecutive k-generalized Fibonacci numbers*, Colloquium Mathematicum, v. 137, p. 171-188, 2014.

[14] LUCA, F., OYONO, R., *An exponential Diophantine equation related to powers of two consecutive Fibonacci numbers*, Proc. Japan Acad. Ser. A, v. 87, p. 45-50, 2011.

[15] MARQUES, D., TOGBÉ, A., *On the sum of powers of two consecutive Fibonacci numbers*, Proc. Japan Acad. Ser. A, v. 86, p. 174-176, 2010.

[16] MATVEEV, E. M., *An explicit lower bound for a homogeneous rational linear form in logarithms of algebraic numbers II*, Izvestiya: Mathematics, v. 64, n.6, p. 1217-1269, 2000.

[17] MILLER, M. D., *On generalized Fibonacci numbers*, Amer. Math. Monthly, v. 78, p. 1108-1109, 1971.

[18] NGUYEN, P. Q., VALLÉE, B., *The LLL Algorithm: survey and applications*, Springer Berlin Heidelberg, 2010.

[19] WALDSCHMIDT, M., *Diophantine approximation on linear algebraic groups: transcendence properties of the exponential function in several variables*, Springer Science and Business Media, 2013.

[20] WOLFRAM, A., *Solving generalized Fibonacci recurrences*, Fibonacci Quarterly, v.36, n.2, p. 129-145, 1998.