UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

BFC-Teoremas para Comutadores

por

Gláucia Lenita Dierings

Brasília
2019

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

BFC-Teoremas para Comutadores

por

Gláucia Lenita Dierings

sob orientação do

Prof. Dr. Pavel Shumyatsky - UnB

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Doutora em Matemática.

Brasília
2019

Ficha catalográfica elaborada automaticamente,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

DD563b

Dierings, Gláucia Lenita
BFC-Teoremas para Comutadores / Gláucia Lenita Dierings; orientador Pavel Shumyatsky. -- Brasília, 2019.
62 p.

Tese (Doutorado - Doutorado em Matemática) -- Universidade de Brasília, 2019.

1. Classes de Conjugação. 2. Grupo Derivado. 3. BFC grupos. 4. Comutadores. I. Shumyatsky, Pavel, orient. II. Título.

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

BFC-teoremas para comutadores

Por

Gláucia Lenita Dierings*

Tese apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática-UnB, como requisito parcial para obtenção do grau de

DOUTORA EM MATEMÁTICA

Brasília, 21 de novembro de 2019.

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Pavel Shumyatsky (MAT-UnB)

Profa. Dra. Sheila Campos Chagas (MAT-UnB)

Ana Cristina Vieira

Profa. Dra. Ana Cristina Vieira (UFMG)

Jhone Caldeira Silva

Prof. Dr. Jhone Caldeira Silva (UFG)

* A autora foi bolsista CAPES e CNPq durante a elaboração desta tese.

Aos meus pais João e Celi, à minha irmã Milena

e ao meu amor Fernando.

"A Matemática é o alfabeto com o qual Deus escreveu o Universo."

Galileu Galilei

Agradecimentos

Foram 10 anos de dedicação à matemática para conquistar este tão sonhado título. Não foi uma jornada fácil e o apoio da minha família e dos meus amigos foi fundamental para esta conquista.

Em primeiro lugar, agradeço a Deus por ter iluminado minha caminhada até aqui. Sua benção e proteção sempre me fizeram seguir em frente e alcançar meus objetivos.

Agradeço à minha família, pai João Dierings, mãe Celi Maria Zimmer Dierings e irmã Milena Beatriz Dierings. Vocês são minha base e meu porto seguro, o amor de vocês foi essencial durante esses anos de estudo. Muito obrigada por sempre estarem presentes em minha vida e acreditarem em mim.

Estar em Brasília fazendo o Doutorado, me fez conhecer o amor da minha vida. Fernando, obrigada por estar ao meu lado, me apoiando e me fazendo feliz. Seu abraço muitas vezes me deu forças para continuar e acreditar que eu conseguiria.

Um agradecimento em especial à minha amiga irmã Alessandra Kreutz. Embarcamos juntas nesta jornada e enfrentamos todos os desafios que apareceram, sempre uma apoiando a outra. Obrigada por ser minha principal incentivadora, obrigada por todos os momentos vividos. Depois de seis anos em Brasília, perdemos as contas de quantas pessoas nos perguntaram se somos irmãs, podemos não ser irmãs de sangue, mas o sentimento é verdadeiro. Agradeço também às minhas queridas amigas do Quarteto, Débora Dalmolim e Bruna Pavlack. Como é bom ter a amizade de vocês e saber que o tempo e a distância nos deixam ainda mais próximas.

Agradeço ao meu amigo e colega algebrista Michell L. Dias, pelo seu incentivo e por tantos estudos juntos. Sua amizade é um dos melhores presentes de Brasília.

Agradeço também a todas as queridas amigas que, mesmo longe, sempre torceram por mim: Alesandra T. Ximendes, Edinéia Filipiak, Jaqueline e Janaíne Welter, Kelli M. Freisleben, Rosângela Kunzler, Geanine Rambo.

Agradeço de maneira especial ao meu orientador, professor Pavel Shumyatsky, pela grande oportunidade de trabalhar sob sua orientação. Muito obrigada por sua dedicação, paciência e por tantos ensinamentos nesses quatro anos de convívio.

Agradeço também aos demais professores que contribuíram para minha formação ao longo de toda minha vida acadêmica.

Agradeço aos professores Sheila Campos Chagas, Ana Cristina Vieira e Jhone Caldeira Silva pela disponibilidade de avaliar meu trabalho. Muito obrigada pelos conselhos e elogios.

Por fim, agradeço ao CNPq e à CAPES pelo apoio financeiro durante a realização do Doutorado.

Resumo

Dado um grupo G e um elemento $x \in G$, escrevemos x^G para a classe de conjugação contendo x. Um grupo é dito ser um BFC-grupo se suas classes de conjugação são finitas de tamanho limitado. Em 1954, B. H. Neumann demonstrou que G é um BFC-grupo se, e somente se, seu grupo derivado G' é finito. Em 1957, J. Wiegold encontrou o primeiro limitante para a ordem de G'.

Neste trabalho estamos interessados em grupos nos quais as classes de conjugação contendo comutadores são finitas de tamanho limitado e também em grupos nos quais as classes de conjugação contendo elementos-quadrados são finitas de tamanho limitado. Obtivemos os seguintes resultados:

Sejam G um grupo e n um inteiro positivo. Se $|x^G| \leq n$ para qualquer comutador $x \in G$, então o segundo grupo derivado G'' tem ordem finita n-limitada. Se $|x^{G'}| \leq n$ para qualquer comutador $x \in G$, então $\gamma_3(G')$ tem ordem finita n-limitada. Além disso, se H é o subgrupo gerado por todos os elementos-quadrados de G e $|x^H| \leq n$ para qualquer quadrado $x \in G$, então $\gamma_3(H)$ tem ordem finita n-limitada.

Além da demonstração dos resultados, apresentamos um limitante explícito para a ordem de cada um dos subgrupos citados.

Palavras-chave: Classes de Conjugação, Grupo Derivado, BFC-grupos, Comutadores.

Abstract

Given a group G and an element $x \in G$, we write x^G for the conjugacy class containg x. A group is said to be a BFC-group if its conjugacy classes are finite of bounded size. In 1954, B. H. Neumann discovered that G is a BFC-group if, and only if, the derived group G' is finite. In 1957, J. Wiegold found the first explicit bound for the order of G'.

In this work we deal with groups in which the conjugacy classes containing commutators are finite with bounded size and also with groups in which the conjugacy classes containing squares are finite with bounded size. We obtain the following results:

Let G be a group and n a positive integer. If $|x^G| \leq n$ for any commutator $x \in G$, then the second derived group G'' is finite with n-bounded order. If $|x^{G'}| \leq n$ for any commutator $x \in G$, then $\gamma_3(G')$ is finite with n-bounded order. Furthermore, if H is the subgroup generated by all squares in G and $|x^H| \leq n$ for any square $x \in G$, then $\gamma_3(H)$ is finite with n-bounded order.

In addition to the proof of the results, we compute an explicit bound for the order of the subgroups.

Keywords: Conjugacy Classes, Derived Group, BFC-groups, Commutators.

Lista de Símbolos

x^G	classe de conjugação do elemento $x \in G$
$[x, y]$	$x^{-1}y^{-1}xy$, comutador dos elementos $x, y \in G$
x^g	$g^{-1}xg$, se $x, g \in G$
$\langle g^G \rangle$	fecho normal de $\{g\}$ em G
$C_G(x)$	centralizador do elemento x em G
$Z(G)$	centro do grupo G
$\langle S \rangle$	subgrupo gerado pelos elementos de S
$\|S\|$	cardinalidade do conjunto S
$H \leq G$	H é um subgrupo de G
$H \trianglelefteq G$	H é um subgrupo normal de G
$[G : H]$	índice do subgrupo H em G
$[H, K]$	comutador dos subconjuntos H e K
G'	$[G, G]$, grupo derivado de G
$G^{(k)}$	k-ésimo grupo derivado de G
$\gamma_k(G)$	k-ésimo termo da série central inferior de G
$\zeta_k(G)$	k-ésimo termo da série central superior de G
$\lambda(m)$	número de divisores primos de m contando suas multiplicidades
$T(G)$	conjunto dos elementos de torção do grupo G
$\mathrm{Ker}(\varphi)$	núcleo do homomorfismo de grupos φ

Sumário

Introdução

Sejam G um grupo e x um elemento de G. Escrevemos x^G para a classe de conjugação de G contendo x. Um grupo é dito ser um FC-grupo se suas classes de conjugação são finitas. Quando suas classes de conjugação são finitas de tamanho limitado, o grupo é dito um BFC-grupo.

Existem muitos resultados interessantes sobre BFC-grupos. B. H. Neumann [11] começou a estudar as propriedades dos FC-grupos em 1951 e, em 1954, demonstrou em [12] que G é um BFC-grupo se, e somente se, seu grupo derivado G' é finito. Em 1957, J. Wiegold em [19] encontrou o primeiro limitante para a ordem de G': se G é um grupo tal que $|x^G| \leq n$ para cada $x \in G$, então $|G'| \leq n^{(1/2)n^4(\log_2 n)^3}$. Além disso, conjecturou que o melhor limitante possível seria $|G'| \leq n^{(1/2)(1+\log_2 n)}$.

No ano de 1961, I. D. Macdonald em [10] melhorou a estimativa encontrada por Wiegold, mostrando que $|G'| \leq n^{6n(\log_2 n)^3}$. Em 1974, Vaughan-Lee em [18] provou a conjectura de Wiegold para grupos nilpotentes. Outros matemáticos que melhoraram o limitante para a ordem de G' foram Cartwright em [3] e Segal e Shalev em [17]. O melhor limitante conhecido até hoje para a ordem de G' foi obtido em 2011 por R. M. Guralnick e A. Maroti: $|G'| < n^{(1/2)(7+\log_2 n)}$ (ver [8]).

Neste trabalho, nosso principal interesse é em grupos nos quais as classes de conjugação contendo comutadores são finitas de tamanho limitado.

Sejam G um grupo e $x_1, x_2 \in G$. O elemento $[x_1, x_2] = x_1^{-1}x_2^{-1}x_1x_2$ chama-se o comutador de x_1 e x_2. Em geral, um elemento $x \in G$ é um comutador se existem x_1 e x_2 tais que $x = [x_1, x_2]$. O grupo derivado G' é gerado por todos comutadores $x = [x_1, x_2]$, para $x_1, x_2 \in G$. Observa-se que nem todo elemento de G' é um comutador. Por exemplo, o inverso de um comutador é novamente um comutador, já o produto de comutadores pode não ser um comutador. De fato, no grupo simétrico S_{16} existe um subgrupo G, gerado por oito permutações, tal que $|G| = 256$, $|G'| = 16$ e G' possui um elemento que não é um comutador (para mais informações veja [2, p. 39]).

Nosso primeiro resultado pode ser enunciado da seguinte forma:

Teorema 0.1. *Sejam n um inteiro positivo e G um grupo no qual $|x^G| \leq n$, para qualquer comutador x. Então G'' tem ordem finita n-limitada.*

No teorema, G'' denota o segundo grupo derivado de G. Para simplificar a notação, ao longo de todo trabalho usaremos o termo "$\{a, b, \dots\}$-limitado" para expressar que uma quantidade é finita e limitada superiormente por uma função dependendo somente dos parâmentros $a, b, \dots$.

Depois, considerando grupos G nos quais $|x^{G'}| \leq n$, sempre que x é um comutador, obtemos o teorema:

Teorema 0.2. *Sejam n um inteiro positivo e G um grupo no qual $|x^{G'}| \leq n$, para qualquer comutador x. Então $\gamma_3(G')$ tem ordem finita n-limitada.*

O símbolo $\gamma_3(G')$ denota o terceiro termo da série central inferior de G'. Utilizando o limitante inicialmente encontrado por Wiegold para a ordem do grupo derivado G', no caso em que G possui centro de índice finito, obtemos limitantes explícitos para as ordens de G'' no Teorema 0.1 e $\gamma_3(G')$ no Teorema 0.2. As demonstrações dos teoremas nos fornecem limitantes na ordem de $n^{54n^{11}(\log_2 n)^3}$ e $n^{12n^8(\log_2 n)^2}$, respectivamente. É bem provável que estes limitantes possam ser melhorados. Entretanto, acreditamos que a melhora não será muito significativa, ficando distante do limitante conjecturado para a ordem de G', por exemplo.

Sob as hipóteses do Teorema 0.2, não sabemos quando o segundo grupo derivado G'' é finito. Sob as hipóteses do Teorema 0.1, a ordem de $\gamma_3(G)$ pode ser infinita. Isso pode ser mostrado usando um exemplo de um grupo infinito metabeliano livre de torção, cujo quociente pelo subgrupo derivado é finito (exemplos de tais grupos podem ser encontrados, por exemplo, em [9]). Veremos a explicação detalhada desse fato na seção 2.1.

Observando os Teoremas 0.1 e 0.2, é natural questionar se esses resultados são parte de resultados mais gerais. Seja $F = F(X)$ um grupo livre, onde $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ é um conjunto de geradores livres de F. Um elemento não trivial do grupo livre F é chamado de palavra. Sejam $w = w(x_1, x_2, \dots, x_s)$ uma palavra e G um grupo. Dados $g_1, g_2, \dots, g_s \in G$, o elemento $w(g_1, g_2, \dots, g_s)$ é chamado de w-valor em G. Observe que um comutador em elementos de G, isto é, $w(g_1, g_2) = [g_1, g_2] = g_1^{-1}g_2^{-1}g_1g_2$, é um w-valor de G, para $g_1, g_2 \in G$. Dessa forma, é possível questionar se os resultados obtidos nos Teoremas 0.1 e 0.2 podem ser generalizados para outros w-valores além de comutadores. A resposta é afirmativa para certos casos.

Adequando alguns argumentos utilizados nas demonstrações dos resultados anteriores, provamos um resultado semelhante ao Teorema 0.2 para o caso de grupos nos quais as classes de conjugação contendo elementos-quadrados são finitas de tamanho limitado. Aqui, um elemento $x \in G$ é dito ser um quadrado se existe $y \in G$ tal que $y^2 = x$. Obtemos o seguinte resultado:

Teorema 0.3. *Sejam n um inteiro positivo, G um grupo e H o subgrupo gerado por todos os elementos-quadrados em G. Se $|x^H| \leq n$ para qualquer quadrado $x \in G$, então $\gamma_3(H)$ tem ordem finita n-limitada.*

Nesse caso, utilizando limitantes semelhantes aos usados nos Teoremas 0.1 e 0.2, obtemos $|\gamma_3(H)| \leq n^{18n^8(\log_2 n)^2}$. Cabe ressaltar que não sabemos se é possível provar um resultado análogo ao Teorema 0.1 para o caso de elementos-quadrados, isto é, não sabemos quando é correto afirmar que se $|x^G| \leq n$ para qualquer quadrado $x \in G$, então a ordem de H' é finita e n-limitada.

Em [4], Eloisa Detomi, Marta Morigi e Pavel Shumyatsky, utilizando alguns argumentos que serão desenvolvidos neste trabalho, demonstraram a generalização dos Teoremas 0.1 e 0.2 para o caso de comutadores multilineares. Os resultados por eles obtidos podem ser enunciados como:

Teorema 0.4. *Sejam $w = w(x_1, \ldots, x_n)$ um comutador multilinear e G um grupo. Se $|x^G| \leq m$ para cada w-valor x em G, então o subgrupo derivado de $w(G)$ tem ordem finita $\{m, n\}$-limitada. Se $|x^{w(G)}| \leq m$ para cada w-valor x em G, então $[w(w(G)), w(G)]$ tem ordem finita $\{m, n\}$-limitada.*

Descreveremos agora a estrutura deste trabalho. No primeiro capítulo, apresentamos alguns resultados e definições da Teoria de Grupos, os quais serão utilizados ao longo de todo texto e nas demonstrações dos principais resultados. Abordamos, por exemplo, classes de conjugação, propriedades dos comutadores, grupo derivado, séries e geradores de um grupo. Apresentamos também uma breve discussão sobre grupos com classes de conjugação limitadas, com o intuito de introduzir nosso principal objeto de estudo.

A apresentação dos resultados principais foi dividida em dois capítulos. Na primeira parte, trabalhamos com os grupos nos quais as classes de conjugação contendo comutadores são limitadas, onde são apresentadas as demonstrações dos Teoremas 0.1 e 0.2 e encontrados os respectivos limitantes. No capítulo seguinte, trabalhamos com grupos nos quais as classes de conjugação contendo elementos-quadrados são limitadas, apresentamos a demonstração do Teorema 0.3 e encontramos o limitante do subgrupo em questão.

Cabe ressaltar que os resultados apresentados neste trabalho foram publicados em [5] e [6].

Capítulo 1

Resultados Preliminares

Neste capítulo apresentamos algumas notações, definições e resultados da Teoria de Grupos que serão utilizados ao longo do texto.

1.1 Conceitos Básicos da Teoria de Grupos

Dado um subconjunto S de um grupo G, definimos o *subgrupo gerado por* S, denotado por $\langle S\rangle$, como sendo o menor subgrupo de G contendo S. Formalmente, $\langle S\rangle$ é a interseção de todos os subgrupos de G que contém S. O subgrupo gerado por S é o conjunto de todos os produtos finitos de elementos de S ou seus inversos:

$$\langle S\rangle = \{s_1 s_2 \cdots s_n \ : \ n \in \mathbb{N},\ s_i \in S \cup S^{-1}\}.$$

No caso em que $S = \{g\}$ é um conjunto unitário, temos

$$\langle g\rangle = \{g^n \ : \ n \in \mathbb{Z}\}.$$

A seguir, introduzimos o conceito de elementos conjugados de um grupo, para depois definir classe de conjugação.

Definição 1.1. *Sejam G um grupo e $x, y \in G$. Dizemos que y é um conjugado de x em G se $y = g^{-1}xg$, para algum $g \in G$.*

A relação definida acima é uma relação de equivalência. A classe de equivalência de um elemento $x \in G$, sob essa relação, é chamada de *classe de conjugação* de x e é denotada por x^G. É claro que a classe de conjugação x^G é o conjunto de todos os conjugados de x em G.

Para contar o número de elementos de uma classe de conjugação, vamos definir o subgrupo centralizador de um elemento $x \in G$.

Definição 1.2. *Dado G um grupo e $x \in G$, o centralizador de x em G é o subgrupo $C_G(x)$ que consiste de todos os elementos de G que comutam com x, isto é,*

$$C_G(x) = \{g \in G : xg = gx\}.$$

Com essa definição, temos o seguinte resultado, cuja demonstração pode ser encontrada em [15, Theorem 3.2].

Teorema 1.3. *Se $x \in G$, o número de conjugados de x em G é igual ao índice do seu centralizador em G:*

$$|x^G| = [G : C_G(x)].$$

Definição 1.4. *O centro $Z(G)$ de um grupo G é definido como a interseção de todos os centralizadores dos elementos de G:*

$$Z(G) = \bigcap_{x \in G} C_G(x).$$

Passamos agora à definição de comutadores, com o objetivo de introduzir algumas classes de grupos e de apresentar algumas propriedades importantes dos mesmos.

Definição 1.5. *Se $x, y \in G$, o comutador de x e y, denotado por $[x, y]$, é definido como*

$$[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy.$$

As propriedades elementares dos comutadores podem ser observadas no próximo lema.

Lema 1.6. *Sejam x, y, z elementos de um grupo G, então:*

i) $[x, y] = 1$ *se, e somente se,* $xy = yx$*;*

ii) $[x, y]^{-1} = [y, x]$*;*

iii) $[x, y]^z = [x^z, y^z]$*;*

iv) $[xy, z] = [x, z]^y[y, z]$*;*

v) $[x, yz] = [x, z][x, y]^z$*.*

Uma demonstração desse resultado pode ser encontrada em [14] e decorre da definição de comutador. A partir da definição de comutador e de suas propriedades, podemos definir alguns subgrupos muito conhecidos na Teoria dos Grupos.

O *grupo derivado* de G, denotado por G', é o subgrupo de G que é gerado por todos os comutadores $[x, y]$, para $x, y \in G$. De maneira geral, podemos definir o *k-ésimo grupo derivado* de G, denotado por $G^{(k)}$, da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} G^{(0)} &= G; \\ G^{(1)} &= G' = [G, G]; \\ G^{(2)} &= G'' = [G', G']; \\ &\vdots \\ G^{(k)} &= [G^{(k-1)}, G^{(k-1)}], \text{ para } k \geq 1. \end{aligned}$$

Tal construção gera uma cadeia de subgrupos

$$G \geq G' \geq G'' \geq \cdots \ .$$

Esta série é chamada de *série derivada* de G e tem a propriedade de que cada subgrupo pertencente a ela é normal em G. Existem outras séries com essa propriedade.

De maneira geral, uma série de subgrupos

$$1 = G_0 \leq G_1 \leq \cdots \leq G_{n-1} \leq G_n = G,$$

com a condição de que G_i seja normal em G, para $i = 0, \ldots, n-1$, é dita ser uma *série normal* de G e os grupos quocientes G_i/G_{i-1} são chamados de *fatores* da série.

Observe que pelo item (i) do Lema 1.6 e pela definição do grupo derivado G', o grupo G é abeliano se, e somente se, $G' = 1$. Além disso, se $\varphi : G \to H$ é um homomorfismo sobrejetivo de grupos, então φ leva o conjunto de comutadores de G sobrejetivamente no conjunto de comutadores de H, logo $\varphi(G') = H'$. Portanto, segue que H é abeliano se, e somente se, $G' \subseteq \mathrm{Ker}(\varphi)$.

Em particular, se N é um subgrupo normal de G, então G/N é abeliano se, e somente se, $G' \subseteq N$. Dessa forma, o grupo quociente G/G' é chamado de *abelianização* de G e é o maior quociente de G que é abeliano.

Agora, se H e K são subconjuntos do grupo G, definimos o subgrupo comutador entre H e K por

$$[H, K] = \langle [h, k] : h \in H, k \in K \rangle.$$

Note que quando $H = K = G$, temos o grupo derivado $G' = [G, G]$ de G. Além disso, o subgrupo $[H, K]$ é normal em $\langle H, K \rangle$, como veremos no lema abaixo.

Lema 1.7. *Sejam H e K subconjuntos de um grupo G. Então $[H, K] \trianglelefteq \langle H, K \rangle$.*

Demonstração. Pela afirmação (ii) do Lema 1.6, os comutadores que geram $[K, H]$ são os inversos dos comutadores que geram $[H, K]$, portanto $[H, K] = [K, H]$. Dessa forma, por simetria, é suficiente provar que $H \subseteq N_G([H, K])$.

Sejam $h, x \in H$ e $k \in K$. Temos $[hx, k] = [h, k]^x [x, k]$, pela propriedade (iv) do Lema 1.6, logo

$$[h, k]^x = [hx, k][x, k]^{-1} \in [H, K].$$

Portanto, $[H, K]^x \subseteq [H, K]$ e o lema está demonstrado. $\square$

Se $x \in G$, podemos definir também o subgrupo

$$[G, x] = \langle [g, x] : g \in G \rangle.$$

Note que esse subgrupo é sempre normal em G. De fato, se $g_1, g_2 \in G$ então temos $[g_1g_2, x] = [g_1, x]^{g_2}[g_2, x]$, pelo item (iv) do Lema 1.6. Logo, segue que

$$[g_1, x]^{g_2} = [g_1g_2, x][g_2, x]^{-1} \in [G, x].$$

Vamos agora definir outras duas séries para o grupo G. Seja k um inteiro positivo. Para todo grupo G, definimos o subgrupo $\gamma_k(G)$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \gamma_1(G) &= G; \\ \gamma_2(G) &= [G, G]; \\ \gamma_3(G) &= [[G, G], G]; \\ &\vdots \\ \gamma_k(G) &= [\gamma_{k-1}(G), G], \text{ para } k \geq 2. \end{aligned}$$

Tais subgrupos formam uma série

$$G = \gamma_1(G) \geq \gamma_2(G) \geq \gamma_3(G) \geq \cdots,$$

de tal forma que seus fatores $\gamma_i(G)/\gamma_{i+1}(G)$ são centrais, isto é,

$$\gamma_i(G)/\gamma_{i+1}(G) \leq Z(G/\gamma_{i+1}(G)),$$

para cada $i \geq 1$. Tal série é chamada de *série central inferior* de G. A partir desta série e de uma condição de finitude sobre ela, definimos uma classe muito importante de grupos: os *grupos nilpotentes*.

Definição 1.8. *Dizemos que um grupo G é nilpotente de classe c, quando c é o menor número natural tal que $\gamma_{c+1}(G) = 1$.*

Podemos definir também uma série para o grupo G a partir do conceito de centro do grupo. Considere $\zeta_0(G) = 1$, $\zeta_1(G) = Z(G)$, e defina indutivamente $\zeta_i(G)$ como sendo o único subgrupo de G tal que $\zeta_i(G)/\zeta_{i-1}(G) = Z(G/\zeta_{i-1}(G))$. Assim, definimos a *série central superior* de G:

$$1 = \zeta_0(G) \leq \zeta_1(G) = Z(G) \leq \zeta_2(G) \leq \cdots \leq \zeta_i(G) \leq \cdots,$$

onde o subgrupo $\zeta_i(G)$ chama-se o *i-ésimo termo* da série central superior de G.

A série central superior e a série central inferior de G apresentam uma relação muito interessante que pode ser observada no próximo teorema, cuja demonstração pode ser encontrada em [15, Theorem 5.31.].

Teorema 1.9. *Se G é um grupo, então existe um inteiro c com $\zeta_c(G) = G$ se, e somente se, $\gamma_{c+1}(G) = 1$. Além disso, neste caso, $\gamma_{i+1}(G) \leq \zeta_{c-i}(G)$, para todo i.*

Este teorema nos mostra que se G for um grupo nilpotente, então suas séries centrais superior e inferior são séries normais de mesmo comprimento. Tal número é exatamente a classe de nilpotência de G.

Observa-se que um grupo é nilpotente de classe 1 se, e somente se, ele for abeliano. Ainda, pelo Teorema 1.9, podemos descrever um grupo nilpotente de classe 2 pela seguinte inclusão: $\gamma_2(G) = G' \leq Z(G) = \zeta_1(G)$.

Para finalizar esta seção, vamos destacar um resultado sobre um automorfismo do grupo G, o qual será utilizado na demonstração do resultado 3.7. Lembrando que se G é um grupo, um automorfismo de G é um isomorfismo de G em G.

Lema 1.10. *Se um grupo G admite um automorfismo φ tal que $x^{\varphi} = x^{-1}$, para todo elemento $x \in G$, então G é abeliano.*

Demonstração. Sejam $x, y \in G$, então $x = x^{-\varphi}$ e $y = y^{-\varphi}$. Assim,

$$xy = x^{-\varphi}y^{-\varphi} = (xy)^{-\varphi} = (y^{-1}x^{-1})^{\varphi} = y^{-\varphi}x^{-\varphi} = yx.$$

Logo, G é abeliano. □

Cabe ressaltar que aqui usamos a notação $x^{-\varphi} = (x^{-1})^{\varphi}$.

1.2 Geradores de um Grupo

Seja G um grupo. Se G é gerado por uma quantidade finita de elementos, dizemos que o grupo G é *finitamente gerado*. Seja m um número natural. Dizemos que um grupo G é *m-gerado* se G possui um subconjunto X com m elementos tal que $G = \langle X \rangle$. Vamos denotar por $d(G)$ o número minimal de elementos de G que são necessários para gerar o grupo G.

Dado H um subgrupo de índice finito em G, é possível calcular o número minimal de elementos necessários para gerar o grupo G em adição aos elementos de H. Para isso, considere $m \in \mathbb{N}$. Denotamos por $\lambda(m)$ o número de divisores primos de m, contando suas multiplicidades.

Então, se

$$m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k},$$

onde $p_1, p_2, \ldots, p_k$ são números primos e $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \geq 1$, temos

$$\lambda(m) = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k.$$

Agora, note que

$$\begin{aligned}
\lambda(m) &= \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k \\
&\leq \alpha_1 \log_2 p_1 + \alpha_2 \log_2 p_2 + \cdots + \alpha_k \log_2 p_k \\
&= \log_2 p_1^{\alpha_1} + \log_2 p_2^{\alpha_2} + \cdots + \log_2 p_k^{\alpha_k} \\
&= \log_2 (p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}) \\
&= \log_2 m,
\end{aligned}$$

sendo que a desigualdade é válida pois $p_1, p_2, \ldots, p_k$ são primos maiores ou iguais a 2. Logo,

$$\lambda(m) \leq \log_2 m. \tag{1.1}$$

Com essa observação, obtemos o seguinte resultado:

Lema 1.11. *Sejam H um subgrupo de índice m em G e d o número minimal de elementos necessários em adição aos elementos de H para gerar G. Então, $d \leq \log_2 m$.*

Demonstração. Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_d$ os elementos de algum conjunto minimal de geradores de G módulo H. Assim, $G = \langle x_1, x_2, \ldots, x_d, H\rangle$.

Considere

$$G_0 = \langle H\rangle = H,\ G_1 = \langle x_1, H\rangle,\ G_2 = \langle x_1, x_2, H\rangle,\ \ldots,\ G_d = \langle x_1, x_2, \ldots, x_d, H\rangle = G.$$

Então,

$$H = G_0 \subset G_1 \subset \cdots \subset G_{d-1} \subset G_d = G,$$

onde as inclusões são estritas. Assim, temos:

$$m = [G : H] = [G_d : H] = [G_d : G_{d-1}] \cdots [G_1 : H].$$

Logo, concluímos que

$$d \leq \lambda([G : H]) = \lambda(m) \leq \log_2 m,$$

onde a última desigualdade segue de (1.1). □

A limitação fornecida por esse lema, para o número minimal de elementos necessários para gerar um grupo em adição aos elementos de um subgrupo de índice finito, será bastante útil posteriormente para encontrar os limitantes para as ordens dos subgrupos nos teoremas principais.

1.3 Grupos com classes de conjugação limitadas

Sejam G um grupo e x um elemento qualquer de G. Como definimos anteriormente, a classe de conjugação x^G é o conjunto de todos os conjugados de x em G e podemos contar o número de elementos nessa classe de conjugação. Se o número de elementos em cada classe de conjugação do grupo G for finito, o grupo recebe um nome especial.

Definição 1.12. *Um grupo G é dito um FC-grupo se para todo $x \in G$ temos que a classe de conjugação x^G é finita. Se as classes de conjugação do grupo são finitas de tamanho limitado, G é dito um BFC-grupo.*

O termo FC da definição de FC-grupo se origina das palavras em inglês *Finite Conjugacy Classes*. Já o termo BFC significa *Boundedly Finite Conjugacy Classes*.

Como vimos no Teorema 1.3, se o número de elementos em x^G for finito, temos $|x^G| = [G : C_G(x)]$. Como o centro de um grupo é a interseção de todos os centralizadores dos elementos do grupo, o índice do centro $Z(G)$ em G é um limitante superior para a cardinalidade das classes de conjugação dos elementos do grupo. Logo, se $[G : Z(G)]$ é finito, G é um BFC-grupo.

Agora, se G é um grupo finitamente gerado e um elemento $y \in G$ comuta com cada elemento de um conjunto gerador de G, então $y \in Z(G)$. Em particular, se $G = \langle g_1, g_2, \ldots, g_k \rangle$, então

$$Z(G) = \bigcap_{i=1}^{k} C_G(g_i)$$

e

$$[G : Z(G)] \leq \prod_{i=1}^{k} [G : C_G(g_i)].$$

Note que o produtório na desigualdade acima é finito se G for um FC-grupo. Portanto, um FC-grupo finitamente gerado é um BFC-grupo.

O conceito de FC-grupo foi introduzido em 1948 por R. Baer (veja [1]) e, posteriormente, outros matemáticos começaram a estudar esses grupos. Os FC-grupos podem ser pensados como um generalização dos grupos abelianos, uma vez que todo elemento de um FC-grupo tem "poucos" conjugados. Os grupos abelianos e os grupos finitos são exemplos de FC-grupos.

Neste trabalho estamos interessados no trabalho desenvolvido por B. H. Neumann, que começou a estudar as propriedades dos FC-grupos em 1951 (veja [11]) e, em 1954, demonstrou que os BFC-grupos possuem uma caracterização muito interessante, que é a de ter grupo derivado finito.

Vamos apresentar aqui a demonstração do resultado principal de B.H. Neumann. Para isso, precisamos primeiro de algumas definições e propriedades dos FC-grupos que foram demonstradas pelo próprio autor e que podem ser encontradas em [11] e [12].

Definição 1.13. *Dizemos que um grupo G é localmente normal-finito se todo subconjunto finito de G estiver contido em um subgrupo normal finito de G.*

Note que todo grupo localmente normal-finito é também localmente finito. Antes de passar aos resultados, vamos denotar por $T(G)$ o conjunto dos elementos de torção de um grupo G, isto é, $T(G)$ é o conjunto de todos os elementos de ordem finita do grupo G.

Teorema 1.14 (B. H. Neumann)**.** *Se G é um FC-grupo, então $T(G)$ é um subgrupo característico de G e contém G'. Particularmente, $T(G)$ é localmente normal-finito.*

Teorema 1.15 (B. H. Neumann)**.** *Se G é um FC-grupo finitamente gerado e H é um subgrupo de G, então H é finitamente gerado. Particularmente, $T(G)$ é finito.*

Com esses resultados, podemos demonstrar a principal caracterização dos BFC-grupos.

Teorema 1.16 (B. H. Neumann)**.** *Um grupo G é um BFC-grupo se, e somente se, G' é finito.*

Demonstração. Suponha inicialmente que G' é finito, digamos $|G'| = n$. Seja $x \in G$ arbitrário, então o número de comutadores $[x, g]$, com $g \in G$, é no máximo n. Como a aplicação $\varphi : x^G \to G'$, onde $\varphi(x^g) = [x, g]$, é injetiva, temos $|x^G| \leq n$. Logo G é um BFC-grupo.

Reciprocamente, suponha que G é um BFC-grupo tal que $|x^G| \leq n$, para cada $x \in G$. Escolha $a \in G$ tal que $|a^G| = n$. Seja $\{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ um transversal à direita para $C_G(a)$ em G. Dessa forma, $a^{t_1}, a^{t_2}, \dots, a^{t_n}$ são os n distintos conjugados de a em G.

Defina $C = \bigcap_{i=1}^{n} C_G(t_i)$. Dessa forma, o índice de C em G é finito e existe um transversal à direita $\{s_1, s_2, \ldots, s_k\}$ para C em G. Agora, considere

$$N = \langle \{a, s_1, s_2, \ldots, s_k\}^G \rangle.$$

Observe que N é um FC-grupo finitamente gerado e, ainda, $G = NC$.

Seja $x \in C$, então temos $(xa)^{t_i} = xa^{t_i}$, o que mostra que os n conjugados $(xa)^{t_i}$ são todos distintos e, portanto, esgotam os conjugados de xa. Então, se $y \in C$ temos $(xa)^y = xa^{t_i}$, para algum i. Consequentemente,

$$[x, y] = x^{-1}x^y = a^{t_i}(a^y)^{-1} \in N,$$

e, então, $C' \leq N$.

Desde que $G = NC$, temos

$$G' = (NC)' \leq NC' = N.$$

Pelo Teorema 1.14, G' é de torção. Por outro lado, N é um FC-grupo finitamente gerado, logo, pelo Teorema 1.15, $T(N)$ é finitamente gerado. Portanto, pelo Teorema 1.14, $T(N)$ é finito. Como $G' \leq T(N)$, segue que G' é finito e o resultado está demonstrado. □

Alguns anos depois, em 1957, J. Wiegold [19] encontrou o primeiro limitante para a ordem de G': se G é um grupo tal que $|x^G| \leq n$ para cada $x \in G$, então $|G'| \leq n^{(1/2)n^4(\log_2 n)^3}$. Ele também conjecturou que o melhor limitante possível seria $|G'| \leq n^{(1/2)(1+\log_2 n)}$. Tal conjectura ainda não foi demonstrada.

Em 1961, I. D. Macdonald em [10] melhorou a estimativa encontrada por Wiegold, mostrando que $|G'| \leq n^{6n(\log_2 n)^3}$. Em 1974, Vaughan-Lee em [18] provou a conjectura de Wiegold para grupos nilpotentes. Outros matemáticos que melhoraram o limitante para a ordem de G' foram Cartwright em [3] e Segal e Shalev em [17]. O melhor limitante conhecido até hoje para a ordem de G' foi obtido em 2011 por R. M. Guralnick e A. Maróti em [8]: $|G'| < n^{(1/2)(7+\log_2 n)}$.

O nosso principal interesse é estudar grupos nos quais as classes de conjugação contendo comutadores são finitas de tamanho limitado. Para isso, iremos utilizar um resultado anterior aos fatos descritos acima. Issai Schur, em 1904, demonstrou em [16] o seguinte teorema:

Teorema 1.17 (Schur)**.** *Se G é um grupo cujo centro tem índice finito n, então G' é finito e tem ordem n-limitada.*

Uma demonstração deste teorema pode ser encontrada em [14, Theorem 10.1.4].

Além de encontrar um limitante para a ordem de G' dependendo apenas do valor que limita a cardinalidade das classes de conjugação do grupo G, Wiegold, em [19], encontrou um limitante para a ordem de G' no caso do Teorema de Schur, isto é, quando G é um grupo cujo centro tem índice finito. Para encontrar esse limitante, ele utilizou alguns resultados do trabalho de I. Schur [16] sobre o Multiplicador de Schur de um grupo finito, e um resultado de Green (veja [7]).

O resultado obtido por Wiegold pode ser assim enunciado:

Teorema 1.18 (Wiegold)**.** *Se G é um grupo cujo centro $Z(G)$ tem índice finito n, então*

$$|G'| \leq n^{\frac{1}{2}(\log_2 n+1)}. \tag{1.2}$$

O limitante descrito no teorema acima será fundamental para limitar a ordem de certos subgrupos ao longo do texto.

Capítulo 2

Comutadores

Neste capítulo apresentamos os resultados obtidos envolvendo comutadores. Como comentado na introdução, nosso principal interesse é em grupos nos quais as classes de conjugação contendo comutadores são limitadas.

Dado um grupo G, ao limitar o tamanho das classes de conjugação do grupo contendo comutadores, obtemos uma limitação para a ordem do subgrupo G'', o segundo grupo derivado de G. Ao limitar o tamanho das classes de conjugação no grupo derivado G' contendo comutadores, obtemos um limitante para a ordem de $\gamma_3(G')$, o terceiro termo da série central inferior de G'.

Na primeira seção deste capítulo, apresentamos os resultados obtidos sem se preocupar em encontrar limitantes explícitos para a ordem dos subgrupos. Na segunda seção do capítulo, apresentamos os passos seguidos para encontrar tais limitantes.

2.1 Grupos nos quais as classes de conjugação contendo comutadores são limitadas

Seja H um grupo gerado por um conjunto X tal que $X = X^{-1}$. Dado $h \in H$, escrevemos $l_X(h)$ para o menor número l com a propriedade que h pode ser escrito como um produto de l elementos de X. Diremos que $l_X(h)$ é o *comprimento* de h com respeito a X. Observe que $l_X(h) = 0$ se, e somente se, $h = 1$.

A partir dessa definição, temos um primeiro resultado que será bastante utilizado na construção das próximas demonstrações.

Lema 2.1. *Sejam H um grupo gerado por um conjunto $X = X^{-1}$ e M um subgrupo de índice finito m em H. Então, cada classe lateral Mb contém um elemento g tal que $l_X(g) \leq m - 1$.*

Demonstração. Primeiro, note que se $b \in M$ o resultado é direto, pois podemos tomar $g = 1$. Então, vamos assumir que $b \notin M$. Escolha $g \in Mb$ de tal modo que $s = l_X(g)$ é o menor possível e suponha que $s \geq m$.

Escreva $g = x_1 x_2 \cdots x_s$, com $x_i \in X$ para $i = 1, \ldots, s$. Para $j = 1, \ldots, s$, considere $y_j = x_1 \cdots x_j$. Como s é o menor dos comprimentos dos elementos em Mb, segue que nenhum dos elemetos $y_1, \ldots, y_s$ está em M. Então, esses s elementos pertencem a união de no máximo $m - 1$ classes laterais de M em H. Assim, para algum $1 \leq i < j \leq s$, devemos ter y_i e y_j pertencentes a mesma classe lateral, ou seja,

$$My_i = My_j.$$

Note que $My_j x_{j+1} \cdots x_s = My_i x_{j+1} \cdots x_s$, assim o elemento $h = y_i x_{j+1} \cdots x_s$ pertence a Mb. Além disso, $l_X(h) < l_X(g)$, o que é uma contradição com a escolha de g. Portanto, $l_X(g) \leq m - 1$. □

Usaremos o lema acima na situação em que H é o grupo derivado de um grupo G e X é o conjunto dos comutadores em G, ou seja, a partir de agora consideraremos

$$H = G'$$

e

$$X = \{[a, b] : a, b \in G\}.$$

Dessa forma, como $H = \langle X \rangle$, seus elementos são produtos de comutadores. Vamos escrever $l(h)$ para denotar o menor número l tal que um elemento $h \in H$ pode ser escrito como um produto de l comutadores.

Seja K um subgrupo de G contendo H e suponha que, para cada comutador $x \in X$, o centralizador $C_K(x)$ tem índice no máximo n em K. Seja m o máximo dos índices de $C_H(x)$ em H, onde $x \in X$.

Observe que $m \leq n$. De fato, como $H \leq K$ segue que

$$[H : C_H(x)] = [H : H \cap C_K(x)] \leq [K : C_K(x)] \leq n,$$

para $x \in X$. Logo, $[H : C_H(x)] \leq m \leq n$.

Escolha um comutador $a \in X$ tal que $C_H(a)$ tem índice precisamente m em H. Pelo Lema 2.1, podemos escolher elementos $b_1, \dots, b_m \in H$ tais que $l(b_i) \leq m-1$, com $i = 1, \dots, m$, e, assim, a classe de conjugação de H contendo a será dada por

$$a^H = \{a^{b_i} : i = 1, \dots, m\}.$$

Defina agora o subgrupo $U = C_K(\langle b_1, \dots, b_m \rangle)$. Note que U tem índice finito n-limitado em K. De fato, temos

$$[K : U] = [K : C_K(\langle b_1, \dots, b_m \rangle)] \leq [K : C_K(b_1)] \cdots [K : C_K(b_m)].$$

Além disso, cada b_i pode ser escrito como um produto de no máximo $m-1$ comutadores e $[K : C_K(x)] \leq n$, para cada comutador $x \in X$. Então, usando o fato que $m \leq n$, segue que

$$\begin{aligned} [K : U] &\leq [K : C_K(b_1)] \cdots [K : C_K(b_m)] \\ &\leq \underbrace{n^{m-1} \cdots n^{m-1}}_{m} \\ &= n^{m(m-1)} \\ &\leq n^{n(n-1)}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

As hipóteses descritas acima serão assumidas ao longo de todo o capítulo e podem ser resumidas da seguinte maneira:

Hipóteses 2.2. *Sejam G um grupo, K um subgrupo de G contendo $H = G'$ e X o conjunto de comutadores em G. Suponha que, para cada comutador $x \in X$, tenhamos* *i)* $[K : C_K(x)] \leq n$*;*

ii) $[H : C_H(x)] \leq m$*.*

Suponha também que $a \in X$ *é tal que* $C_H(a)$ *tem índice precisamente* m *em* H*. Dessa forma, podemos escolher* $b_1, \ldots, b_m \in H$ *tais que* $l(b_i) \leq m-1$*, com* $i = 1, \ldots, m$*, e* $a^H = \{a^{b_i} : i = 1, \ldots, m\}$*. Além disso, defina* $U = C_K(\langle b_1, \ldots, b_m \rangle)$*.*

Vamos considerar agora o subgrupo $[H, x] = \langle [h, x] : h \in H \rangle$, para um comutador $x \in X$. Esse subgrupo é sempre normal em H e assumindo as Hipóteses 2.2, podemos provar que ele tem ordem finita m-limitada.

Lema 2.3. *Para cada* $x \in X$*, o subgrupo* $[H, x]$ *tem ordem finita* m*-limitada.*

Demonstração. Escolha $x \in X$. Como $C_H(x)$ tem índice no máximo m em H, pelo Lema 2.1 podemos escolher $y_1, \ldots, y_m \in H$ tais que $l(y_i) \leq m-1$, para $i = 1, \ldots, m$. Assim, $[H, x]$ é gerado pelos comutadores $[y_i, x]$. Agora, para cada $i = 1, \ldots, m$, podemos escrever $y_i = y_{i1} \cdots y_{i(m-1)}$, onde $y_{ij} \in X$:

$$\begin{aligned} y_1 &= y_{11} \cdots y_{1(m-1)} \\ y_2 &= y_{21} \cdots y_{2(m-1)} \\ &\vdots \\ y_m &= y_{m1} \cdots y_{m(m-1)}. \end{aligned}$$

Note que, nos produtos acima, temos um número m-limitado de comutadores. Além disso, usando a identidade de comutadores $[xy, z] = [x, z]^y [y, z]$, podemos escrever cada $[y_i, x]$ como um produto de conjugados em H dos comutadores $[y_{ij}, x]$:

$$[y_i, x] = [y_{i1} \cdots y_{i(m-1)}, x] = [y_{i1}, x]^{y_{i2} \cdots y_{i(m-1)}} [y_{i2}, x]^{y_{i3} \cdots y_{i(m-1)}} \cdots [y_{i(m-1)}, x].$$

Dessa forma, $[H, x]$ é gerado por conjugados em H dos comutadores $[y_{ij}, x]$, onde $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq m-1$.

Sejam $h_1, \ldots, h_s$ os conjugados em H dos elementos do conjunto

$$\{x, y_{ij} : 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq m-1\}.$$

Note que esse conjunto possui um número m-limitado de comutadores e, como para cada $b \in X$ temos $[H : C_H(b)] \leq m$, segue que cada um desses comutadores possui no máximo m conjugados. Portanto, s é m-limitado.

Seja $T = \langle h_1, \ldots, h_s \rangle$. Note que $[H, x] \leq T'$. Então, é suficiente mostrar que T' tem ordem m-limitada. Para isso, observe que cada h_i é também um comutador, então $C_H(h_i)$ tem índice no máximo m em H, para $i = 1, \ldots, s$. Assim, considerando o centro de T, que por definição é dado por $Z(T) = \bigcap_{i=1}^{s} C_T(h_i)$, e usando o fato que $T \leq H$, temos

$$\begin{aligned} [T : Z(T)] &\leq \prod_{i=1}^{s} [T : C_T(h_i)] \\ &= \prod_{i=1}^{s} [T : T \cap C_H(h_i)] \\ &\leq \prod_{i=1}^{s} [H : C_H(h_i)] \\ &\leq m^s. \end{aligned}$$

Logo, como $Z(T)$ tem índice finito m-limitado em T, pelo Teorema 1.17 de Schur, segue que T' tem ordem finita m-limitada, como queríamos. Portanto, a ordem do subgrupo $[H, x]$ é limitada por $|T'|$. $\square$

Como observado anteriormente, temos $m \leq n$, então segue que o subgrupo $[H, x]$ tem também ordem n-limitada, para cada $x \in X$.

O próximo lema pode ser considerado uma generalização do Lema 4.5 demonstrado por Wiegold em [19].

Lema 2.4. *Assuma as Hipóteses 2.2. Sejam $u \in U$, $a \in X$ e suponha que $ua \in X$. Então $[H, u] \leq [H, a]$.*

Demonstração. Como $u \in U = C_K(\langle b_1, \ldots, b_m \rangle)$, segue que $(ua)^{b_i} = ua^{b_i}$, para cada $i = 1, \ldots, m$. Assim, os elementos ua^{b_i} formam a classe de conjugação $(ua)^H$.

Para um elemento arbitrário $g \in H$, existe $h \in \{b_1, \ldots, b_m\}$ tal que $(ua)^g = ua^h$ e então $u^g a^g = ua^h$. Portanto,

$$[u, g] = u^{-1}u^g = u^{-1}ua^h a^{-g} = a^h a^{-g} = [gh^{-1}, a]^{a^{-1}h} \in [H, a].$$

Logo, $[H, u] \leq [H, a]$. □

Observe que uma das hipóteses do lema acima é que o elemento ua seja um comutador, onde $u \in U$ e $a \in X$, porém nem sempre isso acontece. Para garantir que $ua \in X$, precisamos considerar um determinado subgrupo de U, como veremos na proposição abaixo.

Proposição 2.5. *Assuma as Hipóteses 2.2 e escreva $a = [d, e]$, onde $d, e \in G$. Existe um subgrupo $U_1 \leq U$ com as seguintes propriedades:*

1) $[K : U_1] \leq n^{3n(n-1)}$ *;*

2) $[H, U_1'] \leq [H, a]^{d^{-1}}$*;*

3) $[H, [U_1, d]] \leq [H, a]$.

Demonstração. Considere o subgrupo

$$U_1 = U \cap U^{d^{-1}} \cap U^{d^{-1}e^{-1}}.$$

Como visto em (2.1), o índice de U em K é n-limitado. Então o índice de U_1 em K também é finito n-limitado:

$$\begin{aligned} [K : U_1] &= [K : U \cap U^{d^{-1}} \cap U^{d^{-1}e^{-1}}] \\ &\leq [K : U][K : U^{d^{-1}}][K : U^{d^{-1}e^{-1}}] \\ &\leq n^{n(n-1)} \cdot n^{n(n-1)} \cdot n^{n(n-1)} \\ &= n^{3n(n-1)}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Portanto, está demonstrada a propriedade 1.

Agora, escolha elementos arbitrários $h_1, h_2 \in U_1$. Usando as propriedades dos comutadores vistas no Lema 1.6, podemos escrever

$$[h_1 d, eh_2] = [h_1, h_2]^d [d, h_2][h_1, e]^{dh_2}[d, e]^{h_2}$$

e, assim,

$$[h_1 d, eh_2]^{h_2^{-1}} = [h_1, h_2]^{dh_2^{-1}}[d, h_2]^{h_2^{-1}}[h_1, e]^d[d, e].$$

Denote por u o produto $[h_1, h_2]^{dh_2^{-1}}[d, h_2]^{h_2^{-1}}[h_1, e]^d$. Desse modo, o lado direito da igualdade acima é ua, enquanto o lado esquerdo é um comutador.

Vamos verificar que $u \in U$. Note que $[h_1, h_2]^{dh_2^{-1}} \in U_1^{dh_2^{-1}} \leq U$, pois $U_1^d \leq U$. Da mesma forma, $[d, h_2]^{h_2^{-1}} = (h_2^{-d} h_2)^{h_2^{-1}} \in U$, pois $U_1^d \leq U$. Finalmente, observe que $[h_1, e]^d = (h_1^{-1} h_1^e)^d \in U_1^d U_1^{ed} \leq U$. Então, $u \in U$.

Assim, como $u \in U$, $a \in X$ e $ua \in X$, pelo Lema 2.4 segue que $[H, u] \leq [H, a]$, e isso vale para qualquer escolha de $h_1, h_2 \in U_1$. Em particular, observe que:

i) se $h_1 = 1$, temos $[H, [d, h_2]^{h_2^{-1}}] \leq [H, a]$;

ii) se $h_2 = 1$, temos $[H, [h_1, e]^d] \leq [H, a]$.

Então, segue que $[H, [h_1, h_2]^{dh_2^{-1}}] \leq [H, a]$. Como $[H, a]$ é normal em H, obtemos $[H, [h_1, h_2]] \leq [H, a]^{d^{-1}}$. Assim, como h_1 e h_2 são elementos arbitrários de U_1, segue que $[H, U_1'] \leq [H, a]^{d^{-1}}$, o que prova o item 2.

Examinando novamente a inclusão $[H, [d, h_2]^{h_2^{-1}}] \leq [H, a]$, como $[H, a]$ é normal em H, segue que $[H, [U_1, d]] \leq [H, a]$. Portanto, vale a propriedade 3. $\square$

Com esta proposição, estamos prontos para passar aos resultados principais. A proposição será utilizada como ferramenta principal nas demonstrações, onde consideraremos $K = G$ ou $K = H$.

Teorema 2.6. *Sejam n um inteiro positivo e G um grupo no qual $|x^G| \leq n$, para qualquer comutador x. Então G'' tem ordem finita n-limitada.*

Demonstração. Como anteriormente, vamos denotar por X o conjunto de comutadores em G e $H = G'$. Suponha que $[H : C_H(x)] \leq m$, para cada $x \in X$. Como já observado, temos $m \leq n$, pois $[H : H \cap C_G(x)] \leq [G : C_G(x)] \leq n$.

Escolha $a \in X$ tal que $[H : C_H(a)] = m$. Então, pelo Lema 2.1, podemos escolher elementos $b_1, \ldots, b_m \in H$ tais que cada b_i pode ser escrito como produto de comutadores de comprimento $l(b_i) \leq m - 1$. Dessa forma, a classe de conjugação de H contendo a será $a^H = \{a^{b_i} : i = 1, \ldots, m\}$.

Seja $U = C_G(\langle b_1, \ldots, b_m \rangle)$. Note que o índice de U em G é n-limitado, pois temos $[G : C_G(x)] \leq n$, para qualquer $x \in X$, então

$$[G : U] \leq [G : C_G(b_1)] \cdots [G : C_G(b_m)] \leq n^{m(m-1)} \leq n^{n(n-1)}.$$

Vamos usar a Proposição 2.5 com $K = G$. Dessa forma, encontramos um subgrupo $U_1 \leq U$ de índice n-limitado em G. Além disso, pelo item (2) da proposição, temos $[H, U_1'] \leq \langle [H, a]^G \rangle$.

Como o índice de U_1 em G é n-limitado, é possível encontrar $c_1, \ldots, c_s \in X$ tais que $H = \langle c_1, \ldots, c_s, H \cap U_1 \rangle$. Agora, note que o índice de $H \cap U_1$ em H é no máximo o índice $[G : U_1]$. De fato, podemos escrever $[G : U_1] = [G : HU_1][HU_1 : U_1]$ e $[HU_1 : U_1] = [H : H \cap U_1]$. Logo, pelo Lema 1.11, o número de comutadores s é n-limitado.

Seja T_1 o fecho normal em G do produto dos subgrupos $[H, a]$ e $[H, c_i]$, com $i = 1, \ldots, s$:

$$T_1 = \langle ([H, a][H, c_1] \cdots [H, c_s])^G \rangle.$$

Note que T_1 é o produto de um número n-limitado de subgrupos, normalizando uns aos outros e, pelo Lema 2.3, cada subgrupo tem ordem n-limitada. Além disso, por hipótese, cada um possui no máximo n conjugados em G. Dessa forma, T_1 é o produto de um número n-limitado de subgrupos da forma $[H, x]$, com $x \in X$, e podemos limitar sua ordem.

Como T_1 tem ordem n-limitada, podemos passar ao quociente G/T_1 e basta mostrar que o segundo grupo derivado desse quociente tem ordem finita n-limitada.

Assim, a partir de agora vamos trabalhar com o quociente G/T_1 e denotaremos as imagens de G, H e X pelos mesmos símbolos. Em outras palavras, assumiremos $T_1 = 1$.

Considere o subgrupo $HU_1 = \langle c_1, \ldots, c_s, U_1 \rangle$. Note que o grupo derivado de HU_1 está contido no centro $Z(H)$. De fato, como $T_1 = 1$, temos $[H, a]^G$ trivial, assim como cada um dos $[H, c_i]$, $i = 1, \ldots, s$. Então, como $[H, U_1'] \leq \langle [H, a]^G \rangle$, segue que $U_1' \leq Z(H)$ e $c_1, \ldots, c_s \in Z(H)$.

Vamos considerar agora uma família de subgrupos que satisfaz as mesmas propriedades do subgrupo HU_1. Seja $\mathcal{X}$ a família de todos os subgrupos $S \leq G$ com as propriedades:

1) $H \leq S$;

2) $S' \leq Z(H)$;

3) S tem índice finito em G.

Note que HU_1 está contido na família $\mathcal{X}$, pois $H \leq HU_1$, $(HU_1)' \leq Z(H)$ e $[G : HU_1] \leq [G : U_1]$, que é n-limitado. Agora, escolha $J \in \mathcal{X}$ de índice minimal j em G. Como o índice de U_1 em G é n-limitado, o índice j é n-limitado também. Vamos provar por indução em j que a ordem de G'' é finita e n-limitada.

Se $j = 1$, temos $J = G$ e assim $H \leq Z(H)$, logo $G'' = 1$. Então, assumiremos $j \geq 2$. Escolha um comutador $a_0 \in X$ tal que $[H : C_H(a_0)]$ é maximal e escreva $a_0 = [d, e]$, para $d, e \in G$. Note que, se ambos d e e pertencerem a J, teremos $a_0 \in J'$ e, como $J' \leq Z(H)$, seguiria que $H \leq Z(H)$ e $G'' = 1$. Então, vamos assumir sem perda de generalidade que pelo menos um deles, digamos d, não pertença a J.

Usaremos novamente a Proposição 2.5 com $K = G$. Pelo item (3) da proposição, existe um subgrupo V de índice n-limitado em G tal que $[H, [V, d]] \leq [H, a_0]$. Trocando, se necessário, V por $V \cap J$, podemos assumir, sem perda de generalidade, que $V \leq J$. Considere $L = J\langle d \rangle$. Usando as propriedades dos comutadores vistas no

Lema 1.6 e o fato de que J é subgrupo normal de G, pois $H \leq J$, obtemos:

$$L' = [J\langle d\rangle, J\langle d\rangle] = [J\langle d\rangle, \langle d\rangle][J\langle d\rangle, J]^{\langle d\rangle} = [J, \langle d\rangle]^{\langle d\rangle}[\langle d\rangle, \langle d\rangle]J' = J'[J, d].$$

Ou seja, temos $L' = J'[J, d]$. Note também que L satisfaz as propriedades 1 e 3 da família $\mathcal{X}$.

Agora observe que o índice de V em J é no máximo o índice de V em G, logo é n-limitado. Seja $1 = g_1, \ldots, g_t$ um sistema completo de representantes das classes laterais à direita de V em J e observe que t será um número n-limitado. Então, o subgrupo $[J, d]$ é gerado por $[V, d]^{g_1}, \ldots, [V, d]^{g_t}$ e $[g_1, d], \ldots, [g_t, d]$, o que segue do fato de $[vg, d] = [v, d]^g[g, d]$, para quaisquer $v, g \in G$. Para cada $i = 1, \ldots, t$, denote $x_i = [g_i, d]$.

Seja T_2 o fecho normal em G do produto dos subgrupos $[H, a_0]^{g_i}$ e $[H, x_i]$, para $i = 1, \ldots, t$:

$$T_2 = \langle ([H, a_0]^{g_1} \cdots [H, a_0]^{g_t}[H, x_1] \cdots [H, x_t])^G\rangle.$$

Dessa forma, T_2 é o produto de um número n-limitado de subgrupos de ordem finita n-limitada, pelo Lema 2.3. Além disso, os subgrupos normalizam uns aos outros e, por hipótese, cada subgrupo possui no máximo n conjugados. Então, T_2 é o produto de no máximo $2tn$ subgrupos da forma $[H, x]$, com $x \in X$, e concluímos que T_2 tem ordem finita n-limitada.

Passando ao quociente G/T_2, vamos provar que $[H, L'] = [H, J'[J, d]] \leq T_2$. De fato, observe que pela escolha de $J \in \mathcal{X}$, temos $J' \leq Z(H)$. Resta ver que $[H, [J, d]] \leq T_2$. Observe que o subgrupo $[J, d]$ é gerado por $[V, d]^{g_1}, \ldots, [V, d]^{g_t}$ e $x_1, \ldots, x_t$. Além disso, $[H, x_i] \leq T_2$, para cada $i = 1, \ldots, t$, e valem as seguintes inclusões:

$$[H, [V, d]^{g_1}] \leq [H, a_0]^{g_1}, \ldots, [H, [V, d]^{g_t}] \leq [H, a_0]^{g_t},$$

pois $[H, [V, d]] \leq [H, a_0]$. Logo, $[H, [J, d]] \leq T_2$. Portanto, no quociente G/T_2 temos $[H, L'] = 1$, ou seja, $L' \leq Z(H)$ e L também satisfaz a propriedade 2 da família $\mathcal{X}$.

Agora, como $d \notin J$, o índice de L em G é estritamente menor do que j, digamos $[G : L] = l < j$. Logo, por hipótese de indução em j, o segundo grupo derivado de

G/T_2 tem ordem n-limitada. Como T_2 é finito de ordem n-limitada, segue que G'' tem ordem n-limitada. A demonstração agora está completa. $\square$

Um limitante para a ordem de G'' dependendo apenas de n será explicitado na próxima seção.

No próximo resultado, vamos considerar grupos G nos quais as classes de conjugação no grupo derivado G' contendo comutadores são limitadas, isto é, consideraremos $|x^{G'}| \leq n$, sempre que x é um comutador. Assumindo tal limitação, obtemos um limitante para a ordem de um dos subgrupos pertencentes à série central inferior de G'.

Teorema 2.7. *Sejam n um inteiro positivo e G um grupo no qual $|x^{G'}| \leq n$, para qualquer comutador x. Então $\gamma_3(G')$ tem ordem finita n-limitada.*

Demonstração. Denote por X o conjunto de comutadores em G e $H = G'$. Escolha um comutador $a \in X$ tal que o índice de $C_H(a)$ em H é o maior possível. Vamos usar a Proposição 2.5 com $K = H$.

Pelo item (2) da proposição, H possui um subgrupo U_1 de índice n-limitado tal que $[H, U_1'] \leq [H, a]^{d^{-1}}$, para algum $d \in G$. Escreva $a^{d^{-1}} = b_0$, então $[H, U_1'] \leq [H, b_0]$. Como o índice de U_1 em H é n-limitado, pelo Lema 1.11 podemos encontrar um número n-limitado de comutadores $b_1, \ldots, b_s \in X$, tais que $H = \langle b_1, \ldots, b_s, U_1 \rangle$.

Considere

$$T = [H, b_0][H, b_1] \cdots [H, b_s].$$

Pelo Lema 2.3, cada um desses subgrupos possui ordem n-limitada. Além disso, cada um dos subgrupos é normal em H, logo T é normal em H e tem ordem n-limitada. Vamos passar ao quociente H/T.

Note que nesse quociente temos $[H, b_i] = 1$ para $i = 0, 1, \ldots, s$, e, pelo observado anteriormente, $[H, U_1'] \leq [H, b_0]$. Assim, o centro de H/T contém as imagens de U_1' e $b_1, \ldots, b_s$. Logo, fazendo o quociente de H/T pelo seu centro, o único subgrupo que restará será U_1/U_1', que é abeliano. Dessa forma, H/T é nilpotente de classe 2 e $\gamma_3(H/T) = 1$. Portanto, $\gamma_3(H) \leq T$ e como T tem ordem n-limitada, segue que $\gamma_3(H)$ tem ordem n-limitada. □

Encontraremos um limitante dependendo apenas de n para a ordem de $\gamma_3(G')$ na próxima seção.

Cabe ressaltar que não sabemos sob as hipóteses do Teorema 2.7 quando o segundo grupo derivado G'' é finito. Sob as hipóteses do Teorema 2.6, a ordem de $\gamma_3(G)$ pode ser infinita. Como comentado na introdução do trabalho, isso pode ser mostrado usando um exemplo de um grupo infinito metabeliano livre de torção, cujo quociente pelo subgrupo derivado é finito (exemplos de tais grupos podem ser encontrados em [9]).

De fato, seja G um grupo infinito metabeliano livre de torção tal que o índice $[G : G']$ é finito e suponha que a ordem de $\gamma_3(G)$ seja finita. Passando ao quociente $G/\gamma_3(G)$, nota-se que esse quociente é nilpotente de classe de nilpotência 2. Além disso, por propriedades de grupos nilpotentes (veja [14, 5.2.]), existe um epimorfismo do produto tensorial

$$\underbrace{G/G' \otimes \cdots \otimes G/G'}_{i}$$

em

$$\gamma_i(G)/\gamma_{i+1}(G).$$

Logo, como G/G' é finito, segue que $G/\gamma_3(G)$ é finito, o que é uma contradição.

2.2 Limitantes para as ordens de G'' e $\gamma_3(G')$

Como comentado na introdução deste trabalho, desde 1954, quando B. H. Neumann demonstrou que se G é um BFC-grupo então seu grupo derivado G' é finito, há grande interesse em cotas explícitas para a ordem de G'. No nosso caso, estamos trabalhando com grupos nos quais as classes de conjugação contendo comutadores são limitadas, mas é natural questionar-se sobre cotas explícitas para as ordens dos subgrupos que já demonstramos ter ordem finita.

Sendo assim, encontraremos limitantes explícitos para as ordens de G'' e $\gamma_3(G')$ nos Teoremas 2.6 e 2.7, respectivamente. Para isso, o principal resultado que utilizaremos é o limitante (1.2) obtido por Wiegold em [19] e que foi descrito no Teorema 1.18. O resultado nos apresenta um limitante para a ordem de G' quando G é um grupo cujo centro tem índice finito n:

$$|G'| \leq n^{\frac{1}{2}(\log_2 n+1)}.$$

Além disso, usaremos também a limitação descrita no Lema 1.11 para o número minimal de elementos necessários para gerar um grupo em adição aos elementos de um subgrupo de índice finito.

Considere novamente G um grupo, $H = G'$ o grupo derivado de G e X o conjunto de comutadores em G. Assuma as Hipóteses 2.2.

2.2.1 Limitante para a ordem do subgrupo $[H, x]$, com $x \in X$

No Lema 2.3, provamos que o subgrupo $[H, x]$ tem ordem finita m-limitada, para cada $x \in X$. Vamos encontrar um limitante explícito para a ordem deste subgrupo.

Vimos que $[H, x]$ é gerado pelos comutadores $[y_i, x]$, para cada $x \in X$, onde $y_i \in H$ e $l(y_i) \leq m-1$, para $i = 1, \ldots, m$. Então, para cada $i = 1, \ldots, m$, podemos escrever $y_i = y_{i1} \cdots y_{i(m-1)}$, onde $y_{ij} \in X$, ou seja, cada y_i é escrito como produto de no máximo $m-1$ comutadores. Como são m elementos escritos dessa forma, contabilizando todos os comutadores que aparecem nesses produtos, obtemos no máximo $m(m-1)$ comutadores.

Agora, usando propriedades dos comutadores, cada $[y_i, x]$ é um produto de conjugados em H dos comutadores $[y_{ij}, x]$. Assim, $[H, x]$ é gerado por conjugados em H dos comutadores $[y_{ij}, x]$, onde $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq m-1$. Considerando $h_1, \ldots, h_s$ os conjugados em H dos elementos do conjunto $\{x, y_{ij}; 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq m-1\}$, observamos que esse conjunto possui $m(m-1)+1$ comutadores e como cada comutador tem no máximo m conjugados, segue que

$$s \leq m^2(m-1)+m.$$

Considerando $T = \langle h_1, \ldots, h_s \rangle$, temos $[H,x] \leq T'$ e vimos que $[T : Z(T)] \leq m^s$. Usando a estimativa (1.2) encontrada por Wiegold, podemos explicitar um limitante para a ordem de T' em termos de $[T : Z(T)]$:

$$|T'| \leq (m^s)^{\frac{1}{2}(\log_2(m^s)+1)}.$$

E, como $s \leq m^2(m-1)+m$, segue que

$$|T'| \leq m^{\frac{m^2(m-1)+m}{2}(\log_2(m^{m^2(m-1)+m})+1)}.$$

Dessa forma, como a ordem do subgrupo $[H,x]$ é limitada pela ordem de T', segue que

$$|[H,x]| \leq m^{\frac{m^2(m-1)+m}{2}(\log_2(m^{m^2(m-1)+m})+1)}.$$

Porém, como observado na seção anterior, temos $m \leq n$, logo obtemos a seguinte limitação para a ordem do subgrupo $[H,x]$ dependendo apenas de n:

$$|[H,x]| \leq n^{\frac{n^2(n-1)+n}{2}(\log_2(n^{n^2(n-1)+n})+1)}. \tag{2.3}$$

O limitante da ordem desse subgrupo é fundamental para limitarmos a ordem dos outros subgrupos que queremos.

2.2.2 Limitante para a ordem de G''

No Teorema 2.6 provamos que se n é um inteiro positivo e G é um grupo no qual $|x^G| \leq n$, para qualquer comutador x, então a ordem de G'' é finita e n-limitada. Vamos reescrever a demonstração do teorema, explicitando em cada passo os limitantes encontrados para, por fim, encontrar um limitante para ordem de G'' dependendo apenas de n.

Suponha que para qualquer comutador $x \in X$ tenhamos $[H : C_H(x)] \leq m$ e $[G : C_G(x)] \leq n$. Escolhendo $a \in X$ tal que $[H : C_H(a)] = m$, obtemos a classe de conjugação de H contendo a, que será $a^H = \{a^{b_i}; i = 1, \ldots, m\}$, onde $b_1, \ldots, b_m \in H$ e $l(b_i) \leq m - 1$.

Na sequência, considerando $U = C_G(\langle b_1, \ldots, b_m \rangle)$ e tomando $K = G$ em (2.1), observamos que U tem índice n-limitado em G:

$$[G : U] \leq n^{n(n-1)}.$$

Usando a Proposição 2.5 com $K = G$, encontramos um subgrupo $U_1 \leq U$ de índice n-limitado em G. Por (2.2), tal índice terá a seguinte limitação:

$$[G : U_1] \leq n^{3n(n-1)}.$$

Dessa forma, podemos encontrar $c_1, \ldots, c_s \in X$ tais que $H = \langle c_1, \ldots, c_s, H \cap U_1 \rangle$. Como o índice de $H \cap U_1$ em H é no máximo o índice $[G : U_1]$, temos

$$[H : H \cap U_1] \leq n^{3n(n-1)}.$$

Logo, pelo Lema 1.11, precisamos de no máximo $\log_2 n^{3n(n-1)}$ comutadores em adição aos elementos de $H \cap U_1$ para gerar H, ou seja,

$$s \leq \log_2 n^{3n(n-1)}.$$

Considerando $T_1 = \langle ([H, a][H, c_1] \cdots [H, c_s])^G \rangle$, nota-se que T_1 é o produto de um número n-limitado de subgrupos de ordem n-limitada, normalizando uns aos outros e cada um possui no máximo n conjugados em G. Então, T_1 é o produto de no máximo $(s+1) \cdot n$ subgrupos da forma $[H, x]$, com $x \in X$, ou seja, é o produto de no máximo $(\log_2 n^{3n(n-1)} + 1) \cdot n$ subgrupos.

Podemos limitar a ordem de T_1 utilizando a limitação encontrada em (2.3) para a ordem de cada subgrupo da forma $[H, x]$, com $x \in X$. Assim, obtemos

$$|T_1| \leq n^{\alpha_1},$$

onde

$$\alpha_1 = \left(n \log_2 n^{3n(n-1)} + n\right) \left(\frac{n^2(n-1)+n}{2} \left(\log_2 \left(n^{n^2(n-1)+n}\right) + 1\right)\right). \tag{2.4}$$

Passando ao quociente G/T_1, mostramos que o segundo grupo derivado desse quociente tem ordem finita n-limitada. Para isso, foi suficiente assumir $T_1 = 1$.

Considerando o subgrupo $HU_1 = \langle c_1, \ldots, c_s, U_1 \rangle$, o grupo derivado de HU_1 está contido no centro $Z(H)$. Então, define-se $\mathcal{X}$ como sendo a família de todos os subgrupos $S \leq G$ com as propriedades:

1) $H \leq S$;

2) $S' \leq Z(H)$;

3) S tem índice finito em G.

Dessa forma, o subgrupo HU_1 está contido em $\mathcal{X}$. Seja $J \in \mathcal{X}$ tal que seu índice j em G é o menor possível. O índice j é limitado pelo índice de U_1 em G, logo é limitado por $n^{3n(n-1)}$.

Em seguida, prova-se por indução em j que a ordem de G'' é finita e n-limitada. Como vimos, podemos assumir $j \geq 2$ e escolhe-se um comutador $a_0 \in X$ tal que $[H : C_H(a_0)]$ é maximal e $a_0 = [d, e]$, para $d, e \in G$, com $d \notin J$. Usando o item (3) da Proposição 2.5 com $K = G$, existe um subgrupo V de índice n-limitado em G tal que $[H, [V, d]] \leq [H, a_0]$ e assume-se que $V \leq J$. Além disso, considera-se $L = J\langle d \rangle$ e, então, $L' = J'[J, d]$.

O índice de V em J é no máximo o índice de V em G, logo por (2.2), temos

$$[J : V] \leq n^{3n(n-1)}.$$

Considerando $1 = g_1, \ldots, g_t$ um sistema completo de representantes das classes laterais à direita de V em J, como o índice de V em J é n-limitado, pelo Lema 1.11 temos

$$t \leq \log_2 n^{3n(n-1)}.$$

Dessa forma, o subgrupo $[J, d]$ é gerado por $[V, d]^{g_1}, \ldots, [V, d]^{g_t}$ e $[g_1, d], \ldots, [g_t, d]$ e para cada $i = 1, \ldots, t$, denota-se $x_i = [g_i, d]$.

Seja $T_2 = \langle([H, a_0]^{g_1} \cdots [H, a_0]^{g_t}[H, x_1] \cdots [H, x_t])^G\rangle$. Assim, T_2 é o produto de um número n-limitado de subgrupos de ordem finita n-limitada. Como cada subgrupo nesse produto possui no máximo n conjugados, segue que T_2 é o produto de no máximo $2tn$ subgrupos da forma $[H, x]$, com $x \in X$. Utilizando a limitação para t e o limitante encontrado em (2.3) para a ordem de cada subgrupo da forma $[H, x]$, com $x \in X$, obtemos um limitante para a ordem de T_2:

$$|T_2| \leq n^{\alpha_2},$$

onde

$$\alpha_2 = \left(2n \log_2 n^{3n(n-1)}\right) \left(\frac{n^2(n-1)+n}{2} \left(\log_2 \left(n^{n^2(n-1)+n}\right) + 1\right)\right). \tag{2.5}$$

O passo seguinte é passar ao quociente G/T_2, onde observa-se que $[H, L'] = [H, J'[J, d]] \leq T_2$ e, portanto, $L' \leq Z(H)$. Como L satisfaz as propriedades da família $\mathcal{X}$ e o índice de L em G é estritamente menor do que j, digamos $[G : L] = l < j$, conclui-se que o segundo grupo derivado de G/T_2 tem ordem n-limitada e, portanto, G'' tem ordem n-limitada.

Note que ao fazer o quociente de G por T_2, encontramos um subgrupo $L \in \mathcal{X}$ de índice $l < j$ em G. Podemos repetir o processo descrito acima, agora para o subgrupo L. De maneira análoga, podemos construir um subgrupo de ordem n-limitada T_3. Passando ao quociente de G/T_2 por T_3, encontraremos um outro subgrupo $M \in \mathcal{X}$ tal que $[G : M] < l$. Usando novamente a hipótese de indução, teremos que o segundo grupo derivado desse quociente tem ordem n-limitada.

Podemos repetir esse processo um número finito de vezes, digamos k vezes, até encontrar um subgrupo $A \in \mathcal{X}$ tal que $[G : A] = 1$ e, nesse caso, $G'' = 1$. Dessa forma, encontramos um limitante para a ordem de G'':

$$|G''| \leq |T_1||T_2| \cdots |T_k|.$$

Como o índice j considerado inicialmente é tal que $j \leq 2^{\log_2 n^{3n(n-1)}}$, segue que precisamos repetir esse processo $k \leq \log_2 n^{3n(n-1)}$ vezes. Além disso, encontramos $|T_1| \leq n^{\alpha_1}$ (veja (2.4)) e $|T_2| \leq n^{\alpha_2}$ (veja (2.5)), de onde observamos que $\alpha_1 < \alpha_2$, para $n > 1$. Logo, $n^{\alpha_1} < n^{\alpha_2}$, para $n > 1$.

Observa-se que para os demais subgrupos T_k, com $k = 3, \ldots, \log_2 n^{3n(n-1)}$, teremos $|T_k| \leq n^{\alpha_2}$. Portanto, podemos considerar a seguinte limitação para a ordem de G'':

$$|G''| \leq \underbrace{n^{\alpha_2} \cdots n^{\alpha_2}}_{\log_2 n^{3n(n-1)}} = (n^{\alpha_2})^{\log_2 n^{3n(n-1)}},$$

ou seja,

$$|G''| \leq n^N,$$

onde

$$N = n \left(\log_2 n^{3n(n-1)}\right)^2 \left((n^2(n-1)+n)\left(\log_2 (n^{n^2(n-1)+n}) + 1\right)\right).$$

Com o objetivo de apresentar um limitante mais simples para a ordem de G'', podemos limitar o valor de N encontrado acima da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
N &= n \left(\log_2 n^{3n(n-1)}\right)^2 \left((n^2(n-1)+n)\left(\log_2 \left(n^{n^2(n-1)+n}\right) + 1\right)\right) \\
&= n(3n(n-1))^2(\log_2 n)^2 \left((n^2(n-1)+n)^2 \log_2 n + n^2(n-1)+n\right) \\
&< n(3n \cdot n)^2(\log_2 n)^2 \left((n^2 \cdot n+n)^2 \log_2 n + n^2 \cdot n + n\right) \\
&= n(3n^2)^2(\log_2 n)^2 \left((n^3+n)^2 \log_2 n + n^3 + n\right) \\
&= n \cdot 9n^4(\log_2 n)^2 \left((n^3+n)^2 \log_2 n + n^3 + n\right) \\
&\leq 9n^5(\log_2 n)^2 \left((2n^3)^2 \log_2 n + 2n^3\right) \\
&= 9n^5(\log_2 n)^2 \left(4n^6 \log_2 n + 2n^3\right) \\
&= 36n^{11}(\log_2 n)^3 + 18n^8(\log_2 n)^2 \\
&\leq 36n^{11}(\log_2 n)^3 + 18n^{11}(\log_2 n)^3 \\
&= 54n^{11}(\log_2 n)^3.
\end{aligned}$$

Observe que na primeira desigualdade usamos o fato que $n-1<n$. Na segunda desigualdade usamos o fato que $n^3+n \leq 2n^3$. Por fim, na última desigualdade usamos o fato que $n^8 \leq n^{11}$ e $(\log_2 n)^2 \leq (\log_2 n)^3$, para todo $n \geq 1$.

Logo, obtemos que

$$|G''| \leq n^{54n^{11}(\log_2 n)^3}.$$

2.2.3 Limitante para a ordem de $\gamma_3(G')$

No Teorema 2.7 provamos que se n é um inteiro positivo e G é um grupo no qual $|x^{G'}| \leq n$, para qualquer comutador x, então a ordem de $\gamma_3(G')$ é finita e n-limitada. Reescrevendo a demonstração do teorema, vamos obter um limitante dependendo apenas de n para a ordem de $\gamma_3(G')$.

Vamos denotar $H = G'$. Primeiramente, escolhe-se um comutador $a \in X$ tal que o índice de $C_H(a)$ em H é o maior possível. Usando a Proposição 2.5 com $K = H$, notamos que H possui um subgrupo U_1 de índice n-limitado tal que $[H, U_1'] \leq [H, a]^{d^{-1}}$, para algum $d \in G$. Escrevendo $a^{d^{-1}} = b_0$, temos $[H, U_1'] \leq [H, b_0]$.

Como o índice de U_1 em H é n-limitado, podemos encontrar um número n-limitado de comutadores $b_1, \ldots, b_s \in X$ tais que $H = \langle b_1, \ldots, b_s, U_1 \rangle$. Como observado em (2.2), temos $[H : U_1] \leq n^{3n(n-1)}$, logo usando o Lema 1.11, obtemos a seguinte limitação para o número de comutadores s:

$$s \leq \log_2 n^{3n(n-1)}.$$

Seja $T = [H, b_0][H, b_1] \cdots [H, b_s]$. Pelo Lema 2.3, cada um desses subgrupos possui ordem n-limitada, mais especificamente, por (2.3), temos para cada $i = 0, 1, \ldots, s$:

$$|[H, b_i]| \leq n^{\frac{n^2(n-1)+n}{2}\left(\log_2\left(n^{n^2(n-1)+n}\right)+1\right)}.$$

Além disso, cada um dos subgrupos no produto é normal em H, logo T é normal em H e tem ordem n-limitada.

Passando ao quociente H/T, temos $[H, b_i] = 1$ para $i = 0, 1, \ldots, s$, e pelo observado anteriormente, $[H, U_1'] \leq [H, b_0]$. Assim, o centro de H/T contém as imagens de U_1' e $b_1, \ldots, b_s$. Portanto, o quociente de H/T pelo seu centro é abeliano, logo H/T é nilpotente de classe 2 e, então, $\gamma_3(H) \leq T$. Como T tem ordem n-limitada, segue que $\gamma_3(H)$ tem ordem n-limitada.

Note que a ordem de T será menor que o produto das ordens dos subgrupos $[H, b_i]$, para $i = 0, 1, \ldots, s$:

$$|T| \leq |[H, b_0]| \cdot |[H, b_1]| \cdot \ \cdots \ \cdot |[H, b_s]|.$$

Nesse produto temos $s + 1$ subgrupos e como conhecemos um limitante para a ordem de cada um deles, segue que:

$$|\gamma_3(H)| \leq |T| \leq n^M,$$

onde

$$M = \left(\log_2 n^{3n(n-1)} + 1\right) \left(\frac{n^2(n-1) + n}{2} \left(\log_2 \left(n^{n^2(n-1)+n}\right) + 1\right)\right).$$

Para apresentar um limitante mais simples para a ordem de $\gamma_3(H)$, podemos limitar M da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
M &= \left(\log_2 n^{3n(n-1)} + 1\right)\left(\frac{n^2(n-1)+n}{2}\left(\log_2\left(n^{n^2(n-1)+n}\right)+1\right)\right)\\
&= \log_2 n^{3n(n-1)}\left(\frac{n^2(n-1)+n}{2}\left(\log_2\left(n^{n^2(n-1)+n}\right)+1\right)\right)\\
&\quad + \left(\frac{n^2(n-1)+n}{2}\left(\log_2\left(n^{n^2(n-1)+n}\right)+1\right)\right)\\
&= \frac{3n(n-1)}{2}\log_2 n\left((n^2(n-1)+n)^2\log_2 n + n^2(n-1)+n\right)\\
&\quad +\frac{1}{2}\left((n^2(n-1)+n)^2\log_2 n + n^2(n-1)+n\right)\\
&\leq \frac{3n\cdot n}{2}\log_2 n\left((n^2\cdot n+n)^2\log_2 n + n^2\cdot n+n\right)\\
&\quad +\frac{1}{2}\left((n^2\cdot n+n)^2\log_2 n + n^2\cdot n+n\right)\\
&= \frac{3n^2}{2}\log_2 n\left((n^3+n)^2\log_2 n + n^3+n\right) + \frac{1}{2}\left((n^3+n)^2\log_2 n + n^3+n\right)\\
&\leq \frac{3n^2}{2}\log_2 n((2n^3)^2\log_2 n + 2n^3) + \frac{1}{2}((2n^3)^2\log_2 n + 2n^3)\\
&= \frac{3n^2}{2}\log_2 n(4n^6\log_2 n + 2n^3) + 2n^6\log_2 n + n^3\\
&= 6n^8(\log_2 n)^2 + 3n^5\log_2 n + 2n^6\log_2 n + n^3\\
&\leq 6n^8(\log_2 n)^2 + 3n^8(\log_2 n)^2 + 2n^8(\log_2 n)^2 + n^8(\log_2 n)^2\\
&= 12n^8(\log_2 n)^2.
\end{aligned}
$$

Observe que na primeira desigualdade usamos o fato que $n-1 < n$. Na segunda desigualdade usa-se o fato que $n^3 + n \leq 2n^3$. Na última desigualdade usamos os fatos que $3n^5\log_2 n \leq 3n^8(\log_2 n)^2$ e $2n^6\log_2 n \leq 2n^8(\log_2 n)^2$, para todo $n \geq 1$ e $n^3 < n^8(\log_2 n)^2$ para $n > 1$.

Dessa forma, obtemos que

$$|\gamma_3(G')| \leq n^{12n^8(\log_2 n)^2}.$$

Cabe ressaltar que, provavelmente, os limitantes encontrados para a ordem de G'' e de $\gamma_3(G')$ possam ser melhorados. Entretanto, acreditamos que a melhora não será muito significativa, ficando distante do limitante conjecturado para a ordem de G', por exemplo.

Capítulo 3

Quadrados

Neste capítulo, considere $F = F(X)$ um grupo livre, onde $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ é um conjunto de geradores livres de F. Um elemento não trivial do grupo livre F é chamado de *palavra de grupo* ou, simplesmente, *palavra*.

Considere $w = w(x_1, x_2, \dots, x_s)$ uma palavra. Podemos escrever

$$w = x_{i_1}^{n_1} x_{i_2}^{n_2} \dots x_{i_k}^{n_k},$$

onde n_j é um inteiro, $i_j \in \{1, \dots, s\}$ e $j = 1, \dots, k$.

Se G é um grupo e $g_1, g_2 \dots, g_s \in G$, o elemento $w(g_1, g_2 \dots, g_s)$ é chamado de *w-valor* em G. O conjunto de todos os w-valores em G é denotado por G_w e o *subgrupo verbal* $w(G)$ é definido como sendo o subgrupo gerado pelo conjunto G_w.

Observe que um comutador em elementos de G, isto é,

$$w(g_1, g_2) = [g_1, g_2] = g_1^{-1} g_2^{-1} g_1 g_2,$$

é um w-valor de G, para $g_1, g_2 \in G$. Dessa forma, analisando os resultados obtidos nos Teoremas 2.6 e 2.7 do capítulo anterior, é possível generalizá-los para outros w-valores além de comutadores?

Neste capítulo, veremos que a resposta é afirmativa para um caso em especial: os elementos-quadrados do grupo. Tais elementos podem ser definidos da seguinte forma:

Definição 3.1. *Sejam G um grupo e x um elemento de G. O elemento x é dito ser um quadrado se existe $y \in G$ tal que $x = y^2$.*

O nosso objetivo é estudar grupos nos quais as classes de conjugação contendo elementos-quadrados são limitadas. Usaremos as ideias desenvolvidas no capítulo anterior para estabelecer alguns resultados similares para tais elementos. Veremos que é possível mostrar um análogo ao Teorema 2.7 para os elementos-quadrados do grupo. Mas, não sabemos se é possível provar um resultado análogo ao Teorema 2.6 para o caso desses elementos.

Citaremos aqui uma generalização dos Teoremas 2.6 e 2.7 estabelecida por Eloisa Detomi, Marta Morigi e Pavel Shumyatsky em [4]. Utilizando alguns dos argumentos desenvolvidos na seção anterior, os autores demonstraram uma generalização dos Teoremas 2.6 e 2.7 para o caso de comutadores multilineares, que são as palavras construídas por agrupar os comutadores sempre usando variáveis diferentes.

Formalmente, a palavra $w(x) = x$ é um comutador multilinear. Se u e v são comutadores multilineares envolvendo diferentes variáveis, então a palavra $w = [u, v]$ é um comutador multilinear. Todos os comutadores multilineares são obtidos nesse caminho. Os resultados obtidos por eles podem ser enunciados como:

Teorema 3.2. *Sejam $w = w(x_1, \dots, x_n)$ um comutador multilinear e G um grupo. Se $|x^G| \leq m$ para cada w-valor x em G, então o subgrupo derivado de $w(G)$ tem ordem finita $\{m, n\}$-limitada. Se $|x^{w(G)}| \leq m$ para cada w-valor x em G, então $[w(w(G)), w(G)]$ tem ordem finita $\{m, n\}$-limitada.*

Passamos agora ao estudo dos grupos nos quais as classes de conjugação contendo elementos-quadrados são limitadas.

3.1 Grupos nos quais as classes de conjugação contendo quadrados são limitadas

Considere $X = \{x \in G : x = y^2,\ y \in G\}$ o conjunto de todos os elementos-quadrados em um grupo G e H o subgrupo de G gerado por X. Seja n um inteiro positivo e suponha que

$$[H : C_H(x)] \leq n,$$

para qualquer quadrado $x \in X$.

Como $H = \langle X \rangle$, seus elementos são produtos de elementos-quadrados. Assim, dado um elemento $h \in H$, vamos escrever $l(h)$ para o número minimal l com a propriedade de que h pode ser escrito como um produto de l quadrados. Então, $l(h) = 0$ se, e somente se, $h = 1$.

O próximo lema é imediato do Lema 2.1 do capítulo anterior e será fundamental para as nossas demonstrações.

Lema 3.3. *Seja K um subgrupo de índice finito n em H. Então cada classe lateral Kb contém um elemento h tal que $l(h) \leq n-1$.*

Estamos considerando $H = \langle X \rangle = \langle x \in G : x = y^2,\ y \in G \rangle$ e, de maneira análoga ao visto na seção anterior para o caso de comutadores, podemos mostrar que o subgrupo $[H, x]$ tem ordem finita n-limitada, sempre que x é um quadrado. O próximo lema tem demonstração semelhante ao Lema 2.3, mas vamos reescrevê-lo considerando a situação de que agora x é um quadrado.

Lema 3.4. *Para cada $x \in X$, o subgrupo $[H, x]$ tem ordem finita n-limitada.*

Demonstração. Escolha um quadrado $x \in X$. Como $C_H(x)$ tem índice no máximo n em H, pelo Lema 3.3 podemos escolher $y_1, \ldots, y_n \in H$ tais que $l(y_i) \leq n-1$, para $i = 1, \ldots, n$. Assim, $[H, x]$ é gerado pelos comutadores $[y_i, x]$. Agora, para cada $i = 1, \ldots, n$, podemos escrever $y_i = y_{i1} \cdots y_{i(n-1)}$, onde $y_{ij} \in X$:

$$\begin{aligned} y_1 &= y_{11} \cdots y_{1(n-1)} \\ y_2 &= y_{21} \cdots y_{2(n-1)} \\ &\vdots \\ y_n &= y_{n1} \cdots y_{n(n-1)}. \end{aligned}$$

Note que nos produtos acima temos um número n-limitado de quadrados. Além disso, usando a identidade de comutadores $[xy, z] = [x, z]^y[y, z]$, podemos escrever cada $[y_i, x]$ como um produto de conjugados em H dos comutadores $[y_{ij}, x]$:

$$[y_i, x] = [y_{i1} \cdots y_{i(n-1)}, x] = [y_{i1}, x]^{y_{i2} \cdots y_{i(n-1)}} [y_{i2}, x]^{y_{i3} \cdots y_{i(n-1)}} \cdots [y_{i(n-1)}, x].$$

Dessa forma, $[H, x]$ é gerado por conjugados em H dos comutadores $[y_{ij}, x]$, onde $1 \leq i \leq n$ e $1 \leq j \leq n - 1$.

Sejam $h_1, \ldots, h_s$ os conjugados em H dos elementos do conjunto

$$\{x, y_{ij} : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n - 1\}.$$

Note que esse conjunto possui um número n-limitado de quadrados e, como para cada $h \in X$ temos $[H : C_H(h)] \leq n$, segue que cada um desses quadrados possui no máximo n conjugados. Portanto, s é n-limitado.

Seja $T = \langle h_1, \ldots, h_s \rangle$. Note que $[H, x] \leq T'$. Logo, é suficiente mostrar que T' tem ordem n-limitada. Para isso, observe que cada h_i é também um quadrado, então $C_H(h_i)$ tem índice no máximo n em H, para $i = 1, \ldots, s$. Assim, considerando o centro de T, que por definição é dado por $Z(T) = \bigcap_{i=1}^{s} C_T(h_i)$, e usando o fato que $T \leq H$, temos

$$
\begin{aligned}
[T : Z(T)] &\leq \prod_{i=1}^{s}[T : C_T(h_i)] \\
&= \prod_{i=1}^{s}[T : T \cap C_H(h_i)] \\
&\leq \prod_{i=1}^{s}[H : C_H(h_i)] \\
&\leq n^s.
\end{aligned}
$$

Assim, como $Z(T)$ tem índice finito n-limitado em T, pelo Teorema 1.17 de Schur, segue que T' tem ordem finita n-limitada, como queríamos. Logo, a ordem do subgrupo $[H, x]$ é limitada por $|T'|$. □

Vamos assumir que o inteiro positivo n considerado acima é o menor para o qual $[H : C_H(x)] \leq n$, para cada quadrado $x \in X$.

Escolha um elemento $b = a^2 \in X$, tal que $[H : C_H(b)] = n$. Pelo Lema 3.3, podemos escolher elementos $c_1, \ldots, c_n \in H$ tais que $l(c_i) \leq n-1$, com $i = 1, \ldots, n$, e, assim, a classe de conjugação de H contendo b será dada por

$$b^H = \{b^{c_i}; i = 1, \ldots, n\}.$$

Considere agora o subgrupo $U = C_H(\langle c_1, \ldots, c_n \rangle)$. Note que U tem índice finito n-limitado em H. De fato, temos

$$[H : U] = [H : C_H(\langle c_1, \ldots, c_n \rangle)] \leq [H : C_H(c_1)] \cdots [H : C_H(c_n)].$$

Além disso, cada c_i pode ser escrito como um produto de no máximo $n-1$ quadrados e $[H : C_H(x)] \leq n$, para cada quadrado $x \in X$. Então, segue que

$$
\begin{aligned}
[H : U] &\leq [H : C_H(c_1)] \cdots [H : C_H(c_n)] \\
&\leq \underbrace{n^{n-1} \cdots n^{n-1}}_{n} \\
&= n^{n(n-1)}. \qquad (3.1)
\end{aligned}
$$

A partir de agora assumiremos as hipóteses acima para provar os demais resultados. O próximo lema é, de certa maneira, análogo ao Lema 2.4 visto no capítulo anterior.

Lema 3.5. *Sejam $u \in U$, $b = a^2 \in X$ e suponha que $ub \in X$. Então $[H, u] \leq [H, b]$.*

Demonstração. Como $u \in U = C_H(\langle c_1, \ldots, c_n \rangle)$, segue que $(ub)^{c_i} = ub^{c_i}$, para cada $i = 1, \ldots, n$. Assim, os elementos ub^{c_i} formam a classe de conjugação $(ub)^H$.

Para um elemento arbitrário $g \in H$, existe $h \in \{c_1, \ldots, c_n\}$ tal que $(ub)^g = ub^h$ e então $u^g b^g = ub^h$. Portanto,

$$[u, g] = u^{-1}u^g = u^{-1}ub^h b^{-g} = b^h b^{-g} = [gh^{-1}, b]^{b^{-1}h} \in [H, b].$$

Logo, $[H, u] \leq [H, b]$ como queríamos. □

Note que uma das hipóteses do lema acima é que o elemento ub seja um quadrado, onde $u \in U$ e $b \in X$, porém isso não acontece para qualquer elemento $u \in U$. Para garantir que $ub \in X$, precisamos considerar um determinado subgrupo de U. Vamos definir então um subgrupo $U_1 \leq U$ da seguinte forma:

$$U_1 = U \cap U^a.$$

Observe que, como U tem índice n-limitado em H, o subgrupo U_1 também tem índice n-limitado em H. Usando (3.1) temos:

$$\begin{aligned} [H : U_1] &= [H : U \cap U^a] \\ &\leq [H : U][H : U^a] \\ &\leq n^{n(n-1)} \cdot n^{n(n-1)} \\ &= n^{2n(n-1)}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

No próximo lema veremos que estabelecendo uma condição para o elemento $u \in U$, garantimos o Lema 3.5.

Lema 3.6. *Sejam $h \in U_1$, $b = a^2 \in X$ e $u = h^2[h, a^{-1}]$. Então, $[H, u] \leq [H, b]$.*

Demonstração. Escreva

$$(ha)^2 = haha = h^2h^{-1}aha^{-1}a^2 = h^2[h, a^{-1}]a^2.$$

Observe que o lado mais à direita da igualdade é ub, enquanto o lado mais à esquerda é um quadrado. Assim, $ub \in X$. Resta verificar que $u \in U$.

Observe que $h^2 \in U_1 \leq U$ e $[h, a^{-1}] = h^{-1}h^{a^{-1}} \in U_1U_1^{a^{-1}} \leq U$. Assim, $u \in U$ e pelo Lema 3.5, temos $[H, u] \leq [H, b]$, como queríamos. □

Assumindo as hipóteses e os resultados anteriores, podemos passar ao resultado principal desta seção.

Teorema 3.7. *Sejam n um inteiro positivo, G um grupo e H o subgrupo gerado por todos os quadrados em G. Se $|x^H| \leq n$ para qualquer quadrado $x \in G$, então $\gamma_3(H)$ tem ordem finita n-limitada.*

Demonstração. Primeiramente, como o índice de U_1 em H é n-limitado, pelo Lema 1.11 podemos encontrar um número n-limitado de quadrados $x_1, \ldots, x_s \in X$, tais que

$$H = \langle x_1, \ldots, x_s, U_1 \rangle.$$

Considere o subgrupo

$$T = [H, b][H, x_1] \cdots [H, x_s],$$

onde $b = a^2 \in X$, como definido anteriormente. Pelo Lema 3.4, cada um dos subgrupos na definição de T possui ordem n-limitada. Além disso, cada um desses subgrupos é normal em H. Portanto, T é normal em H e tem ordem n-limitada.

Considere agora $L = H\langle a \rangle$ e $T_1 = TT^a$. Como o subgrupo H tem índice no máximo 2 em L e o subgrupo T é normal em H, segue que T_1 é um subgrupo normal de L e tem ordem n-limitada. Então, vamos passar ao quociente $\overline{L} = L/T_1$ e denotaremos $\overline{H} = H/T_1$. Note que o centro de $\overline{H}$ contém as imagens de $x_1, \ldots, x_s$.

Além disso, pelo Lema 3.6, o centro de $\overline{H}$ contém as imagens de $u = h^2[h, a^{-1}]$, sempre que $h \in U_1$.

Passe agora ao grupo quociente $\overline{L}/Z(\overline{H})$. Nesse quociente temos $h^2[h, a^{-1}] = 1$, sempre que $h \in U_1$. Assim, $haha^{-1} = 1$, o que implica que $aha^{-1} = h^{-1}$. Logo, em $\overline{L}/Z(\overline{H})$, o elemento a normaliza U_1 e age via automorfismo levando cada elemento de U_1 em seu inverso. Pelo Lema 1.10, segue que a imagem de U_1 no quociente $\overline{L}/Z(\overline{H})$ é abeliana.

Como $H = \langle x_1, \ldots, x_s, U_1\rangle$, a imagem de H em $\overline{L}/Z(\overline{H})$ é também abeliana, ou seja, $\overline{H}/Z(\overline{H})$ é abeliano, o que implica que $\overline{H} = H/T_1$ é nilpotente de classe 2. Portanto, $\gamma_3(H) \leq T_1$. Como T_1 tem ordem n-limitada, segue que $\gamma_3(H)$ tem ordem n-limitada. □

Podemos encontrar um limitante para a ordem de $\gamma_3(H)$ dependendo somente de n, o que descreveremos na próxima seção.

Como citado na introdução do capítulo, não sabemos se é possível provar um resultado análogo ao Teorema 2.6 para o caso de elementos-quadrados, isto é, não sabemos quando é correto afirmar que se $|x^G| \leq n$ para qualquer quadrado $x \in G$, então a ordem de H' é finita e n-limitada.

3.2 Limitante para a ordem de $\gamma_3(H)$

Vamos encontrar um limitante explícito para a ordem de $\gamma_3(H)$ no Teorema 3.7. Para isso, como feito na seção anterior, o principal resultado que utilizaremos é o limitante para a ordem de G', descrito no Teorema 1.18, no caso em que G é um grupo cujo centro tem índice finito n: $|G'| \leq n^{\frac{1}{2}(\log_2 n+1)}$. Além disso, utilizaremos a limitação descrita no Lema 1.11.

Considere novamente $X = \{x \in G : x = y^2, y \in G\}$ o conjunto de todos os elementos-quadrados em G e $H = \langle X\rangle$. Seja n um inteiro positivo e suponha que

$[H : C_H(x)] \leq n$, para qualquer quadrado $x \in X$.

No Lema 3.4 provamos que para cada quadrado $x \in X$, o subgrupo $[H, x]$ tem ordem finita n-limitada. Como esse lema é análogo ao Lema 2.3 no caso de comutadores, limitando cada passo da demonstração, como feito na Subseção 2.2.1, encontraremos o mesmo limitante para a ordem do subgrupo $[H, x]$, que será dado por

$$|[H, x]| \leq n^{\frac{n^2(n-1)+n}{2}(\log_2(n^{n^2(n-1)+n})+1)}. \tag{3.3}$$

Passando ao Teorema 3.7, provamos que se $|x^H| \leq n$ para qualquer quadrado $x \in G$, então $\gamma_3(H)$ tem ordem finita n-limitada. Vamos reescrever os passos da demonstração para encontrar um limitante para ordem de $\gamma_3(H)$ dependendo apenas de n.

Primeiro, como o índice de U_1 em H é n-limitado, encontra-se um número n-limitado de quadrados $x_1, \ldots, x_s$ tais que $H = \langle x_1, \ldots, x_s, U_1 \rangle$. Mais especificamente, por (3.2), temos $[H : U_1] \leq n^{2n(n-1)}$. Logo, pelo Lema 1.11 segue que

$$s \leq \log_2 n^{2n(n-1)}.$$

Depois, considera-se o subgrupo $T = [H, b][H, x_1] \cdots [H, x_s]$, onde $b = a^2 \in X$, que é normal em H e tem ordem n-limitada. Além disso, consideram-se os subgrupos $L = H\langle a \rangle$ e $T_1 = TT^a$, sendo que T_1 é normal em L e tem ordem n-limitada também. Passando primeiro ao quociente $\overline{L} = L/T_1$ e depois ao quociente $\overline{L}/Z(\overline{H})$, obtem-se que $\gamma_3(H) \leq T_1$. Logo, basta encontrar um limitante para a ordem de T_1. Para isso, observa-se que a ordem de T_1 é limitada pelo produto das ordens de T e T^a.

Note que a ordem de T será menor que o produto das ordens dos subgrupos $[H, b]$, $[H, x_1], \ldots [H, x_s]$:

$$|T| \leq |[H, b]| \cdot |[H, x_1]| \cdot \ \cdots \ \cdot |[H, x_s]|.$$

O mesmo ocorre para a ordem do subgrupo T^a. Dessa forma, a ordem de T_1 será limitada pelo produto das ordens de $2(s+1)$ subgrupos da forma $[H, x]$, com $x \in X$.

Usando a limitação encontrada para s e para $|[H,x]|$ em (3.3), obtemos

$$|T_1| \leq n^{\beta},$$

onde

$$\beta = (\log_2 n^{2n(n-1)} + 1)\left((n^2(n-1)+n)(\log_2(n^{n^2(n-1)+n}) + 1)\right).$$

Para apresentar um limitante mais simples para a ordem de $\gamma_3(H)$, podemos limitar β da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\beta &= (2n(n-1)\log_2 n + 1)\left((n^2(n-1)+n)(\log_2(n^{n^2(n-1)+n}) + 1)\right) \\
\beta &= (2n(n-1)\log_2 n)((n^2(n-1)+n)^2\log_2 n) + (2n(n-1)\log_2 n)(n^2(n-1)+n) \\
&\quad +(n^2(n-1)+n)^2\log_2 n + n^2(n-1)+n \\
&\leq (2n^2\log_2 n)(n^3+n)^2\log_2 n + (2n^2\log_2 n)(n^3+n) + (n^3+n)^2\log_2 n + n^3 + n \\
&\leq (2n^2\log_2 n)(2n^3)^2\log_2 n + (2n^2\log_2 n)(2n^3) + (2n^3)^2\log_2 n + 2n^3 \\
&= (2n^2\log_2 n)(4n^6\log_2 n) + (2n^2\log_2 n)(2n^3) + 4n^6\log_2 n + 2n^3 \\
&= 8n^8(\log_2 n)^2 + 4n^5\log_2 n + 4n^6\log_2 n + 2n^3 \\
&\leq 8n^8(\log_2 n)^2 + 4n^8(\log_2 n)^2 + 4n^8(\log_2 n)^2 + 2n^8(\log_2 n)^2 \\
&= 18n^8(\log_2 n)^2.
\end{aligned}$$

Observe que na primeira desigualdade usamos o fato que $n-1 < n$. Na segunda desigualdade usa-se o fato que $n^3 + n \leq 2n^3$. Na última desigualdade usamos os fatos que $4n^5\log_2 n \leq 4n^8(\log_2 n)^2$ e $4n^6\log_2 n \leq 4n^8(\log_2 n)^2$, para todo $n \geq 1$ e $2n^3 < 2n^8(\log_2 n)^2$ para $n > 1$.

Dessa forma, obtemos que

$$|\gamma_3(H)| \leq n^{18n^8(\log_2 n)^2}.$$

Semelhante ao caso dos comutadores, é possível que o limitante para a ordem de $\gamma_3(H)$ possa ser melhorado. Mas, acreditamos que a melhora não será muito significativa e estamos interessados somente em uma estimativa para a ordem do subgrupo.

Com isso, concluímos os resultados deste trabalho.

Referências Bibliográficas

[1] R. Baer, Finiteness Properties of Groups. Duke Math. J.15 (1948), 1021-1032.

[2] R. Carmichael, Introduction to the Theory of Groups, Ginn, 1937.

[3] M. Cartwright, The order of the derived group of a BFC group. J. London Math. Soc. (2), **30** (1984), 227-243.

[4] E. Detomi, M. Morigi, P. Shumyatsky, BFC-theorems for higher commutator subgroups, Quart. J. Math. Oxford **70** (2019), 849-858.

[5] G. Dierings, P. Shumyatsky, Groups with boundedly finite conjugacy classes of commutators, Quart. J. Math. Oxford **69** (2018), 1047-1051.

[6] G. Dierings, P. Shumyatsky, Groups in which squares have boundedly many conjugates, Journal of Group Theory, **22** (2019), 133-136.

[7] J. A. Green, On the number of automorphisms of a finite group, Proc. Roy. Soc. London Ser. A **237** (1956), 574-581.

[8] R. M. Guralnick, A. Maroti, Average dimension of fixed point spaces with applications, Journal of Algebra, **226** (2011), 298-308.

[9] N. Gupta, S. Sidki, On torsion-free metabelian groups with commutator quotients of prime exponent, International Journal of Algebra and Computation, **9** (1999), 493–520.

[10] I. D. Macdonald, Some explicit bounds in groups with finite derived groups, Proc. London Math. Soc. (3), **11** (1961), 23-56.

[11] B. H. Neumann, Groups with finite classes of conjugate elements, Proc. London Math. Soc. (3), **1** (1951), 178-187.

[12] B. H. Neumann, Groups covered by permutable subsets, J. London Math. Soc. (3), **29** (1954), 236–248.

[13] P. M. Neumann, M.R. Vaughan-Lee, An essay on BFC groups, Proc. Lond. Math. Soc. **35** (1977), 213-237.

[14] D. J. S. Robinson, A course in the theory of groups, Second edition. Graduate Texts in Mathematics, 80. Springer-Verlag, New York, 1996.

[15] J. J. Rotman, An Introduction to the Theory of Groups, Fourth Edition. Springer-Verlag, New York, 1994.

[16] I. Schur, Über die Darstellungen der endlichen Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen. J. reine angew. Math. 127 (1904), 20-50.

[17] D. Segal, A. Shalev, On groups with bounded conjugacy classes, Quart. J. Math. Oxford **50** (1999), 505-516.

[18] M. R. Vaughan-Lee, Breadth and commutator subgroups of p-groups, J. Algebra **32** (1974), 278-285.

[19] J. Wiegold, Groups with boundedly finite classes of conjugate elements, Proc. Roy. Soc. London Ser. A **238** (1957), 389-401.