



DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**Controle de Sistemas de Alta Ordem
Via Modelos Reduzidos**

Eduardo Bezerra Rufino Ferreira Paiva

Brasília, novembro de 2019

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

FACULDADE DE TECNOLOGIA

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
Faculdade de Tecnologia

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**Controle de Sistemas de Alta Ordem
Via Modelos Reduzidos**

Eduardo Bezerra Rufino Ferreira Paiva

*Dissertação submetida ao Departamento de Engenharia Mecânica
da Faculdade de Tecnologia da Universidade de Brasília como requisito parcial
para obtenção do grau de Mestre Engenheiro em Sistemas Mecatrônicos.*

Banca Examinadora

Prof. Dr. Eugênio Libório Feitosa Fortaleza _____
ENM/UnB
Orientador

Prof. Dr. Adriano Todorovic Fabro ENM/UnB _____
Examinador externo

Prof. Dr. Henrique Cezar Ferreira ENE/UnB _____
Examinador externo

FICHA CATALOGRÁFICA

PAIVA, EDUARDO BEZERRA RUFINO FERREIRA
Controle de Sistemas de Alta Ordem Via Modelos Reduzidos

[Distrito Federal] 2019.

vii, 39, 210 x 297 mm (ENM/FT/UnB, Mestre, Sistemas Mecatrônicos, 2019).
Dissertação de Mestrado - Universidade de Brasília. Faculdade de Tecnologia.
Departamento de Engenharia Mecânica.

- | | |
|----------------------------------|-------------------------------|
| 1. Sistemas de Alta Ordem | 2. Redução de Ordem do Modelo |
| 3. Desigualdade Matricial Linear | 4. Planicidade Diferencial |
| I. ENM/FT/UnB | II. Sistemas Mecatrônicos |

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

PAIVA, E.B.R.F. (2019). Controle de Sistemas de Alta Ordem Via Modelos Reduzidos, Dissertação de Mestrado em Sistemas Mecatrônicos, Publicação , Departamento de Engenharia Mecânica, Faculdade de Tecnologia, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 39.

CESSÃO DE DIREITOS

AUTOR: Eduardo Bezerra Rufino Ferreira Paiva

TÍTULO: Controle de Sistemas de Alta Ordem Via Modelos Reduzidos.

GRAU: Mestre ANO: 2019

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta dissertação e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desse trabalho de conclusão de curso pode ser reproduzida sem autorização por escrito do autor.

Eduardo Bezerra Rufino Ferreira Paiva
SRES 12 Bloco F Casa 50
Cruzeiro Velho
70645-065 - Brasília - DF - Brasil

Agradecimentos

Agradeço à minha família e a todos que de alguma forma me ajudaram nestes dois anos de Mestrado. Agradeço em especial ao professor Eugênio Fortaleza que me orientou por toda esta jornada desde o último ano da minha Graduação. Agradeço também aos professores Adriano Todorovic Fabro e Henrique Cezar Ferreira por participarem da banca examinadora.

Eduardo Bezerra Rufino Ferreira Paiva

RESUMO

Este trabalho apresenta um método sistemático para projetar controladores para sistemas de alta ordem a partir de modelos de baixa ordem. A partir de condições de Desigualdades Matriciais Lineares é possível garantir que os controladores projetados estabilizam o sistema de alta ordem apesar do erro gerado devido à redução de ordem de modelo. Também é apresentada uma estratégia de controle em malha aberta para que a saída do sistema siga uma trajetória suave entre dois níveis de referência e atinja o novo valor de referência em tempo finito.

Palavras Chave: Sistemas de Alta Ordem, Redução de Ordem do Modelo, Desigualdade Matricial Linear, Planicidade Diferencial,

ABSTRACT

This work presents a systematic procedure to design controllers for high-order system from low-order models. From Linear Matrix Inequalities conditions it is possible to assure the designed controllers stabilize the high-order plant in spite of the error due to the model order reduction. Also, an open-loop control strategy to make the system follow a smooth trajectory from one setpoint to another in finite-time is presented.

Keywords: High-order systems, Model Order Reduction, Linear Matrix Inequality, Differential Flatness

SUMÁRIO

1	Introdução	1
1.1	CONTEXTUALIZAÇÃO E OBJETIVO	1
1.2	APRESENTAÇÃO DO MANUSCRITO	2
2	Fundamentos	3
2.1	INTRODUÇÃO	3
2.2	PLANICIDADE DIFERENCIAL	3
2.2.1	SISTEMAS LINEARES INVARIANTES NO TEMPO	4
2.3	REDUÇÃO DA ORDEM DO MODELO	6
2.3.1	RESIDUALIZAÇÃO	6
2.3.2	TRUNCAMENTO	6
2.3.3	REDUÇÃO MODAL COM INSERÇÃO DE TRANSFERÊNCIA DIRETA E ATRASO	7
2.4	DESIGUALDADE MATRICIAL LINEAR	7
2.5	TRANSFORMAÇÃO LINEAR FRACIONAL E O TEOREMA DO PEQUENO GANHO	10
3	Controle a Partir do Modelo Reduzido	11
3.1	INTRODUÇÃO	11
3.2	MODELO REDUZIDO SEM ATRASO	11
3.2.1	REGULAÇÃO ROBUSTA A PARTIR DO MODELO REDUZIDO	12
3.2.2	ALOCÇÃO DE POLOS	13
3.3	MODELO REDUZIDO COM ATRASO	14
3.3.1	SISTEMAS SISO	14
3.3.2	SISTEMAS MIMO	17
3.4	CONTROLE EM MALHA ABERTA	21
4	Aplicações	24
4.1	INTRODUÇÃO	24
4.2	CASO SISO	24
4.3	CASO MIMO	29
5	Conclusões	33
5.1	PERSPECTIVAS FUTURAS	33
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	34

Anexos.....	37
I Prova do Teorema 3.2.1	38

LISTA DE FIGURAS

2.1	Comparação da resposta ao degrau entre o modelo original, (2.9) e (2.10).....	8
2.2	Representação LFT	10
3.1	Preditor de Smith.....	15
3.2	Diagrama resultante ao substituir $G(s)$ por $G_u(s) + G_d e^{-\epsilon s} + \Delta(s)$	15
3.3	Preditor de Smith em Malha Fechada	17
3.4	Aproximação da ação de controle como uma perturbação	20
3.5	Estrutura de controle utilizada no caso MIMO com atrasos	21
3.6	Controle malha aberta e malha fechada com planejamento de trajetória para o sistema reduzido	23
3.7	Controle malha aberta e malha fechada com planejamento de trajetória para o sistema de alta ordem	23
4.1	Saída da planta para referência degrau - Taxa de decaimento 0,35 - Caso 1	26
4.2	Saída da planta para referência degrau - Taxa de Decaimento 0,35 - Caso 2	26
4.3	Saída da planta para controle em malha aberta e malha fechada	27
4.4	Ação de controle em malha aberta	28
4.5	Comparação entre saídas com e sem o controle em malha fechada	28
4.6	Saída da planta com parâmetro não nominal, referência degrau	29
4.7	Simulação MIMO, gráficos das saídas da planta em malha fechada	31
4.8	Simulação MIMO, gráficos das saídas da planta em malha aberta	31
4.9	Simulação MIMO, gráficos das entradas da planta em malha fechada	32

LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolos Gregos

Δ	Função de transferência representando o erro do modelo
ϵ	Atraso
ζ	Saída plana

Símbolos Latinos

A	Matriz de estado
B, b	Matriz de entrada
C, c	Matriz de saída
\mathcal{C}	Matriz de controlabilidade
\mathbb{C}	Plano complexo
D, d	Matriz de transferência direta
\mathcal{D}	Sub-região do plano complexo
G	Função de transferência
I	Matriz identidade
K	Ganho de realimentação
\mathcal{K}	Matriz de controlabilidade reduzida
L	Ganho de observação
s	Escalar complexo
t	Tempo
u	Entrada de controle
v	Entrada de controle ou entrada virtual
w	Entrada exógena
x	Estado
y	Saída mensurável
z	Saída de desempenho

Grupos Adimensionais

i, j	Contadores
m, n	Dimensões de matrizes

Sobrescritos

\cdot	Varição Temporal
T	Transposto
-1	Matriz inversa

Subscritos

d	Referente ao modelo reduzido com atraso
m	Referente ao modelo
nom	Nominal
obs	Referente ao observador
r	Referente ao modelo reduzido

Siglas

EDO	Equação Diferencial Ordinária
EDP	Equação Diferencial Parcial
LFT	<i>Linear Fractional Transformation</i> (Transformação Linear Fracional)
LMI	<i>Linear Matrix Inequality</i> (Desigualdade Matricial Linear)
MIMO	<i>Multiple Input Multiple Output</i> (Múltiplas Entradas e Múltiplas Saídas)
SISO	<i>Single Input Single Output</i> (Uma Entrada e Uma Saída)

Capítulo 1

Introdução

1.1 Contextualização e Objetivo

Em muitas situações de interesse prático, é necessário projetar controladores para sistemas de ordem muito alta, tais como quando um esquema de discretização espacial é utilizado para criar um sistema de ordem finita a partir de uma Equação Diferencial Parcial (EDP), ou quando há um sistema de larga escala criado pela interconexão de diversos sistemas de baixa ordem. Nestas situações, é comum se trabalhar com métodos de redução de ordem para tornar o problema mais tratável.

O foco deste trabalho são os casos em que o sistema de alta ordem advém da discretização de uma EDP. Exemplos de problemas envolvendo sistemas de parâmetros distribuídos são: controle de vibração e/ou posicionamento de estruturas flexíveis [1–9], gerenciamento de reservatórios de petróleo [10, 11], controle de reatores químicos [12, 13] entre outros. Alguns dos trabalhos mais clássicos nessa área são [1, 2, 14–16]. Mais recentemente, vários trabalhos nessa área buscam resolver o problema de controle sem recorrer à discretização da EDP, como em, [3–5, 17, 18]. No entanto, essas soluções estão limitadas a uma gama relativamente pequena de sistemas, pois em cada caso são utilizadas propriedades específicas da EDP em questão para se conseguir uma solução analítica. O método de discretização, embora menos formal, tem maior aplicabilidade. Outra área de interesse crescente em que se encontram sistemas de alta ordem é a de *smart grid*, alguns trabalhos nessa área são [19–22].

O objetivo desta dissertação é generalizar a técnica proposta por [6] para que também seja aplicável a sistemas com múltiplas entradas e múltiplas saída (MIMO, sigla em Inglês). Resultados preliminares foram alcançados em [23], mas a técnica lá mostrada é muito pouco formal, e os resultados apenas mostram que havia um potencial a ser explorado. Neste trabalho, é proposto um método baseado em Desigualdades Matriciais Lineares e na Teoria de Controle Robusto para projetar controladores de baixa ordem para sistemas de alta ordem garantindo estabilidade e desempenho apesar do erro de modelagem cometido devido à redução. Também é possível incorporar erros de modelagem que possam existir no modelo de alta ordem. O método apresentado pode ser usado tanto para sistemas de uma entrada e uma saída (SISO, sigla em Inglês) e MIMO.

O método utilizado em [6] consiste em diminuir a ordem do modelo SISO via uma redução modal e então introduzir um atraso na entrada. Para o caso MIMO, este trabalho propõe a representação do sistema MIMO como vários SISO e então a aplicação da técnica de [6] em cada um deles.

1.2 Apresentação do manuscrito

O Capítulo 2 mostra alguns conceitos que são utilizados ao longo do trabalho. O Capítulo 3 apresenta o método de controle propriamente dito. O Capítulo 4 apresenta aplicações da técnica proposta. Por fim, o Capítulo 5 apresenta conclusões e algumas sugestões para trabalhos futuros.

Capítulo 2

Fundamentos

2.1 Introdução

Neste capítulo, são apresentados os conceitos matemáticos utilizados ao longo deste trabalho. A Seção 2.2 apresenta o conceito de sistema plano e as condições de planicidade para sistemas LIT. A Seção 2.3 apresenta os métodos de redução de ordem utilizados neste trabalho. A Seção 2.4 apresenta algumas condições de Desigualdades Matriciais Lineares e o conceito de \mathcal{D} -estabilidade. Por fim, a Seção 2.5 apresenta a representação de incertezas por Transformação Linear Fracional e o Teorema do Pequeno Ganho.

2.2 Planicidade Diferencial

O conceito de sistema (diferencialmente) plano foi introduzido em [24]. Segundo [25], um sistema

$$\dot{x} = f(x, u), \quad (2.1)$$

onde $x \in \mathfrak{R}^n$ é o vetor de estados, $u \in \mathfrak{R}^m$ é o vetor de entradas e f é um campo vetorial suave, é plano se existe um vetor $\zeta \in \mathfrak{R}^m$ tal que

$$\begin{aligned} \zeta &= \alpha(x, u, \dot{u}, \dots, u^{(r)}), \\ x &= \beta(\zeta, \dot{\zeta}, \dots, \zeta^{(q)}), \\ u &= \gamma(\zeta, \dot{\zeta}, \dots, \zeta^{(q)}), \end{aligned}$$

com α , β e γ funções adequadas e q e r inteiros finitos. O vetor ζ , se existir, é chamado de vetor de saídas planas. As saídas planas possuem a propriedade de não precisarem satisfazer nenhuma equação diferencial, ou seja, enquanto para o vetor $[x^T, u^T]^T$ apenas trajetórias que satisfaçam (2.1) são possíveis, o vetor ζ pode seguir qualquer trajetória, o que facilita a problema de geração de trajetória quando se trabalha com sistemas planos, tendo em vista que, ao se definir as trajetórias das saídas planas, todas as trajetórias para as demais variáveis do sistema são diretamente determinadas.

2.2.1 Sistemas Lineares Invariantes no Tempo

No caso de sistemas lineares invariantes no tempo (LIT), a equação de estado (2.1) toma a forma

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (2.2)$$

com A e B matrizes constantes de dimensões adequadas. Neste caso, planicidade é equivalente a controlabilidade, i.e., o sistema (2.2) é plano se e somente se a matriz de controlabilidade de Kalman,

$$\mathcal{C}(A, B) = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix},$$

tem posto n [26].

Seja $B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_m \end{bmatrix}$ com posto m e (2.2) plano. Conforme [26], podemos criar uma matriz de controlabilidade reduzida invertível

$$\mathcal{K}(A, B) = \begin{bmatrix} b_1 & Ab_1 & \dots & A^{n_1-1}b_1 & b_2 & \dots & A^{n_2-1}b_2 & \dots & b_m & \dots & A^{n_m-1}b_m \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{n \times n}, \quad (2.3)$$

onde n_1, \dots, n_m são chamados de índices de controlabilidade e satisfazem $n_1 + \dots + n_m = n$. Então

$$\zeta = \Phi [\mathcal{K}(A, B)]^{-1} x \quad (2.4)$$

é um vetor de saídas planas válido, onde $\Phi \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ é uma matriz tal que seu elemento na i -ésima linha e j -ésima coluna é dado por

$$\phi_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{se } n_1 + \dots + n_i = j \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (2.5)$$

Note que $\mathcal{C} = \mathcal{K}$ quando $m = 1$. Quando $m > 1$, a escolha dos índices de controlabilidade pode não ser única. Ainda conforme [26], para sistemas LIT planos sempre existe uma matriz invertível M tal que

$$\begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \dot{\zeta}_1 \\ \vdots \\ \zeta_1^{(n_1)} \\ \vdots \\ \zeta_m \\ \vdots \\ \zeta_m^{(n_m)} \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}.$$

As linhas de M correspondentes a ζ_1, \dots, ζ_m são dadas por (2.4) e as demais podem ser encontradas por diferenciação de (2.4).

Exemplo 2.2.1 Considere o sistema LIT com vetor de estados $x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{bmatrix}^T \in$

\mathbb{R}^5 , vetor de entradas $u = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^2$ e

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Usando $n_1 = 3$ e $n_2 = 2$, temos

$$\mathcal{K}(A, B) = \begin{bmatrix} b_1 & Ab_1 & A^2b_1 & b_2 & Ab_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix},$$

$$[\mathcal{K}(A, B)]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

e

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Daí,

$$\zeta = \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{bmatrix} = \Phi [\mathcal{K}(A, B)]^{-1} x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

é um vetor de saídas planas válido.

Derivando a expressão para ζ , obtemos

$$\begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \dot{\zeta}_1 \\ \ddot{\zeta}_1 \\ \ddot{\zeta}_1 \\ \zeta_2 \\ \dot{\zeta}_2 \\ \ddot{\zeta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ -6 & 15 & -20 & 15 & -6 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ u_1 \\ u_2 \end{bmatrix},$$

invertendo a matriz do lado direito, temos

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 10 & 6 & 1 & -3 & -4 & -1 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \dot{\zeta}_1 \\ \ddot{\zeta}_1 \\ \ddot{\zeta}_1 \\ \zeta_2 \\ \dot{\zeta}_2 \\ \ddot{\zeta}_2 \end{bmatrix}.$$

Logo, há de fato uma relação invertível entre as variáveis do sistema (estados e entradas) e as saídas planas e suas derivadas.

2.3 Redução da Ordem do Modelo

Seja

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \\ y = Cx + Du, \end{cases} \quad (2.6)$$

uma realização mínima de um sistema LIT estável com vetor de estados $x = \begin{bmatrix} x_1^T & x_2^T \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^n$, com $x_1 \in \mathbb{R}^k$ e $x_2 \in \mathbb{R}^{n-k}$, entrada $u \in \mathbb{R}^m$ e saída $y \in \mathbb{R}^p$. Queremos obter um modelo reduzido eliminando os estados x_2 . Particionando adequadamente as matrizes do sistema, temos a representação equivalente

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + B_1u, \\ \dot{x}_2 = A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + B_2u, \\ y = C_1x_1 + C_2x_2 + Du. \end{cases} \quad (2.7)$$

2.3.1 Residualização

Na residualização, fazemos $\dot{x}_2 = \mathbf{0}$ em (2.7) e então eliminamos x_2 das equações. Daí, temos

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})x_1 + (B_1 - A_{12}A_{22}^{-1}B_2)u, \\ y = (C_1 - C_2A_{22}^{-1}A_{21})x_1 + (D - C_2A_{22}^{-1}B_2)u, \end{cases}$$

se A_{22} for invertível. A residualização, em geral, não mantém nenhum polo do sistema, mas mantém o ganho estático do mesmo.

2.3.2 Truncamento

Um truncamento de ordem k de (2.6) é obtido simplesmente eliminando a segunda equação de (2.7), i.e., teremos a realização (A_{11}, B_1, C_1, D) como modelo reduzido para (A, B, C, D) .

Se a matriz A está na forma de Jordan, então os elementos da diagonal de A são seus autovalores e assim podemos ordenar os estados de tal forma que os estados mantidos, x_1 , representem a dinâmica dominante do sistema original (2.6). Note que, nesse caso, temos A_{12} e A_{21} nulas, então (2.7) se reduz a

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_{11}x_1 + B_1u, \\ \dot{x}_2 = A_{22}x_2 + B_2u, \\ y = C_1x_1 + C_2x_2 + Du. \end{cases} \quad (2.8)$$

Este tipo de redução é chamado de truncamento modal, e tem a vantagem de que os polos do sistema reduzido são um subconjunto dos polos do modelo original.

2.3.3 Redução Modal com Inserção de Transferência Direta e Atraso

A redução modal com inserção de transferência direta e atraso foi originalmente proposta em [6] para ser usada em sistemas LIT SISO estáveis que representem discretizações de sistemas de EDPs com uma entrada e uma saída, i.e., com $m = p = 1$. Desde então este método tem se mostrado eficiente em diversos problemas envolvendo controle de sistemas de parâmetros distribuídos [7–9, 23].

Considere que A em (2.6) é uma matriz na forma de Jordan. Considere a realização

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_{11}x_1 + B_1u, \\ y_r = C_1x + D_ru, \end{cases} \quad (2.9)$$

onde

$$D_r = D - CA^{-1}B + C_1A_{11}^{-1}B_1.$$

Esta realização mantém o ganho estático do sistema original e seus polos são um subconjunto dos polos originais.

Para melhor representar a dinâmica que foi negligenciada, é inserido um atraso de transporte no modelo reduzido. De acordo com [6], o sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_d = A_{11}x_d + B_du(t - \epsilon), \\ y_d = C_1x_1 + D_du(t - \epsilon), \end{cases} \quad (2.10)$$

com

$$\begin{aligned} B_d &= A_{11} \left(e^{\epsilon A_{11}} - I \right) A_{11}^{-1} B_1 + B_1, \\ D_d &= C_1 \left(e^{\epsilon A_{11}} - I \right) A_{11}^{-1} B_1 + D_r \end{aligned}$$

é tal que $y_r(t) = y_d(t)$ para todo $t > \epsilon$. O atraso ϵ é escolhido igual ao tempo em que a resposta ao degrau de (2.9) é mínima em módulo, esse critério introduzido por [6] parte do princípio que qualquer entrada pode ser escrita como uma soma de (possivelmente infinitos) degraus de diferentes amplitudes e diferentes tempos de ativação (o momento em que o degrau passa de 0 para o valor final). A Figura 2.1 mostra um exemplo típico desta redução, em que um sistema foi reduzido de ordem 100 para 2.

2.4 Desigualdade Matricial Linear

Uma Desigualdade Matricial Linear (*Linear Matrix Inequality*, LMI) é uma desigualdade da forma

$$F(a_1, \dots, a_n) = F_0 + F_1a_1 + \dots + F_na_n < \mathbf{0},$$

onde os escalares a_1, \dots, a_n são as variáveis de decisão e F_0, F_1, \dots, F_n são matrizes simétricas fixas. Também existem LMIs das formas $F(a_1, \dots, a_n) > \mathbf{0}$, $F(a_1, \dots, a_n) \geq \mathbf{0}$ e $F(a_1, \dots, a_n) \leq \mathbf{0}$. Pode-se mostrar que o conjunto de soluções de uma LMI é convexo e que uma solução (caso exista)

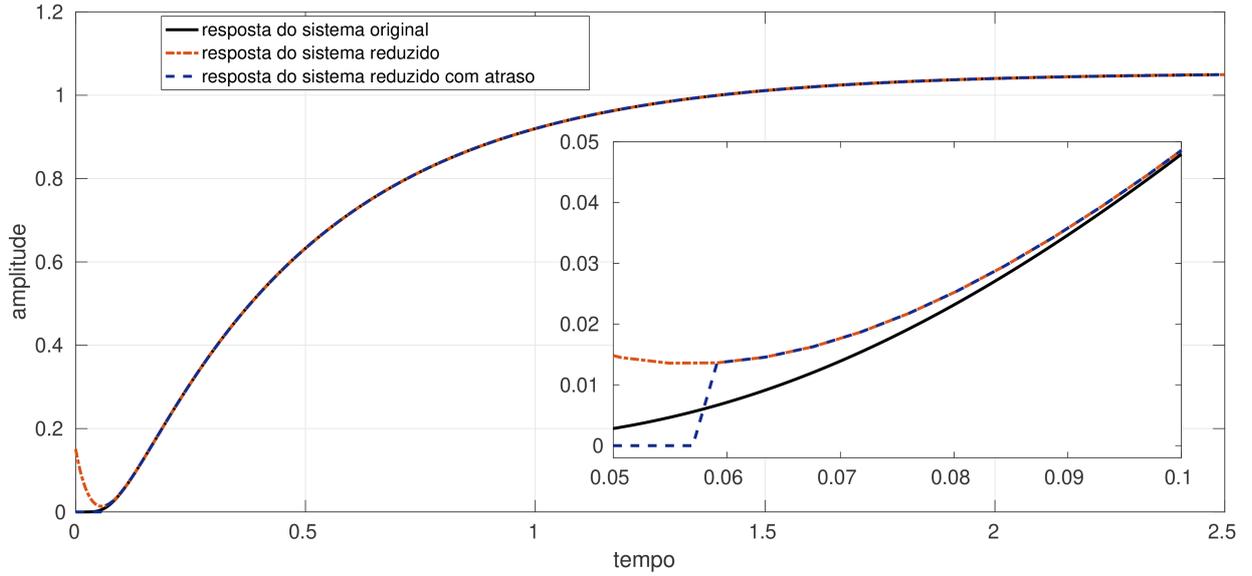


Figura 2.1: Comparação da resposta ao degrau entre o modelo original, (2.9) e (2.10)

poder ser encontrada em tempo polinomial. Veja, e.g., [27–30] para discussões mais detalhadas sobre LMIs e suas aplicações em Teoria de Controle.

A seguir, são apresentados alguns lemas e definições importantes que serão usados nas derivações de LMIs neste trabalho. Antes, é necessário introduzir a notação utilizada neste trabalho: seja uma matriz M , M^T representa sua transposta, M^{-1} representa sua inversa, $M_S = M + M^T$, $M > \mathbf{0}$ indica que a matriz M é positiva-definida e $M < \mathbf{0}$ indica que a matriz M é negativa-definida. A matriz identidade é representada por I , a matriz nula por $\mathbf{0}$ e o símbolo $*$ indica blocos simétricos em matrizes simétricas particionadas.

Definição 2.4.1 (*\mathcal{D} -estabilidade*) O sistema LIT $\dot{x} = Ax$ é dito \mathcal{D} -estável se, e somente se, todos os autovalores de A pertencem à sub-região \mathcal{D} do plano complexo.

Definição 2.4.2 (*Região LMI*) Uma sub-região \mathcal{D} do plano complexo \mathbb{C} é chamada de região LMI se existem matrizes $Q = Q^T$ e W de dimensões adequadas tais que

$$\mathcal{D} = \left\{ s \in \mathbb{C} \text{ tal que } Q + sW + s^*W^T < \mathbf{0} \right\}, \quad (2.11)$$

onde s^* é o conjugado complexo de s .

Alguns exemplos de regiões LMI e as respectivas matrizes Q e W são:

1. O semiplano $\mathcal{D} = \{s \in \mathbb{C} \text{ tal que a parte real de } s \text{ é menor que } -\alpha\}$. Nesse caso, $Q = 2\alpha$ e $W = 1$ em (2.11).
2. O disco de raio r e centro em $(-c, 0)$. Nesse caso,

$$Q = \begin{bmatrix} -r & c \\ c & -r \end{bmatrix},$$

$$W = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

3. O setor cônico com ângulo interno 2θ . Nesse caso,

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$W = \begin{bmatrix} \sin(\theta) & \cos(\theta) \\ -\cos(\theta) & \sin(\theta) \end{bmatrix}.$$

Teorema 2.4.1 (*D-estabilidade*) *O sistema LIT $\dot{x} = Ax$ é D-estável para uma região \mathcal{D} dada por (2.11) se, e somente se, existir $P = P^T > \mathbf{0}$ de dimensão adequada tal que*

$$Q \otimes P + W \otimes (PA) + W^T \otimes (A^T P) < \mathbf{0},$$

onde o símbolo \otimes denota produto de Kronecker.

Lema 2.4.1 (*Complemento de Schur*). *Se*

$$M = \begin{bmatrix} A & * \\ B & C \end{bmatrix},$$

então

$$M > \mathbf{0} \iff \begin{cases} C > \mathbf{0}, \\ A - B^T C^{-1} B > \mathbf{0}. \end{cases}$$

Lema 2.4.2 (*Transformação de Congruência*). *Se N é uma matriz invertível de dimensão adequada, então*

$$M > \mathbf{0} \iff N^T M N > \mathbf{0}.$$

Lema 2.4.3 (*Norma \mathcal{H}_∞*) *Considere a função de transferência $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$. A norma \mathcal{H}_∞ de $G(s)$ é menor que $\sqrt{\mu}$ se, e somente se, existir $P = P^T > \mathbf{0}$ tal que*

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA & * & * \\ B^T P & -I & * \\ C & D & -\mu I \end{bmatrix} < \mathbf{0}.$$

Provas para o Teorema 2.4.1 e para os Lemas 2.4.1, 2.4.2 e 2.4.3 podem ser encontradas, e.g., em [30] e nas referências lá apresentadas.

Lema 2.4.4 *Sejam $\Omega = \Omega^T > \mathbf{0}$, U e V matrizes de dimensões adequadas. Vale*

$$U^T V + V^T U \leq U^T \Omega U + V^T \Omega^{-1} V.$$

Prova: Note que

$$\mathbf{0} \leq (\Omega^{1/2} U - \Omega^{-1/2} V)^T (\Omega^{1/2} U - \Omega^{-1/2} V),$$

onde $\Omega^{1/2} \Omega^{1/2} = \Omega$ e $\Omega^{-1/2} \Omega^{-1/2} = \Omega^{-1}$. Daí

$$\mathbf{0} \leq U^T \Omega U + V^T \Omega^{-1} V - U^T V - V^T U.$$

Portanto

$$U^T V + V^T U \leq U^T \Omega U + V^T \Omega^{-1} V.$$

□

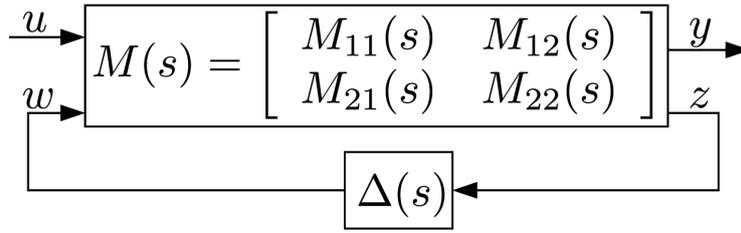


Figura 2.2: Representação LFT

2.5 Transformação Linear Fracional e o Teorema do Pequeno Ganho

Considere o sistema mostrado na Figura 2.2. A sua função de transferência da entrada u para a saída z é dada por

$$T_{yu}(s) = M_{11}(s) + M_{12}(s)\Delta(s)(I - M_{22}\Delta(s))^{-1}M_{21}(s). \quad (2.12)$$

O lado direito da Eq. (2.12) é chamado de Transformação Linear Fracional (*Linear Fractional Transformation*, LFT) com respeito a $\Delta(s)$. Neste trabalho, para um sistema com representação LFT como na Figura 2.2, a função de transferência $M(s)$ é chamada de modelo nominal e $\Delta(s)$ de incerteza. Veja [28,31] para mais sobre LFTs.

Para concluir esta seção, apresentamos um importante teorema da Teoria de Controle Robusto.

Teorema 2.5.1 (*Teorema do Pequeno Ganho*) *O sistema da Figura 2.2 é estável se, e somente se,*

$$\|T_{zw}(s)\|_{\infty} \|\Delta(s)\|_{\infty} < 1,$$

onde $T_{zw}(s)$ é a função de transferência de w para z , vendo w como uma entrada exógena e z como saída do sistema.

Veja [31] para uma abordagem formal do Teorema do Pequeno Ganho (*Small-Gain Theorem*).

Capítulo 3

Controle a Partir do Modelo Reduzido

3.1 Introdução

Este capítulo apresenta o método de controle utilizado em diversas variações. A Seção 3.2 apresenta o caso em que é usado um modelo reduzido sem inserção de atraso e a condição LMI utilizada para projetar os ganhos de observação e realimentação. A Seção 3.3 traz o caso em que são usados modelos reduzidos com atraso, nesta situação o método será diferente para os casos SISO e MIMO. Por fim, a Seção 3.4 traz a estratégia de controle em malha aberta utilizando o modelo reduzido.

3.2 Modelo Reduzido sem Atraso

Considere um sistema LIT

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \\ y = Cx + Du, \end{cases} \quad (3.1)$$

com estado $x \in \mathbb{R}^n$, entrada $u \in \mathbb{R}^m$ e saída $y \in \mathbb{R}^m$. Considere ainda um modelo

$$\begin{cases} \dot{x}_m = A_m x_m + B_m u, \\ y_m = C_m x_m + D_m u, \end{cases} \quad (3.2)$$

que $G(s)$ é a matriz de transferência de (3.1), $G_m(s)$ é a matriz de transferência de (3.2),

$$\Delta(s) = G(s) - G_m(s),$$

e que existe um escalar conhecido $\delta > 0$ tal que

$$\|\Delta(s)\|_\infty = \|G(s) - G_m(s)\|_\infty < \delta. \quad (3.3)$$

Considerando $G(s)$ uma planta com modelo nominal $G_m(s)$ e incerteza aditiva $\Delta(s)$, pode-se colocar $G(s)$ na forma de LFT com modelo nominal

$$\begin{cases} \dot{x}_m = A_m x_m + B_1 w + B_2 u, \\ y = C_1 x_m + D_{11} w + D_{12} u, \\ z = C_2 x_m + D_{21} w + D_{22} u, \end{cases} \quad (3.4)$$

com $B_1 = \mathbf{0}$, $B_2 = B_m$, $C_1 = C_m$, $C_2 = \mathbf{0}$, $D_{11} = I$, $D_{12} = D_m$, $D_{21} = \mathbf{0}$ e $D_{22} = I$. A função de transferência de z para w é $\Delta(s)$.

3.2.1 Regulação Robusta a Partir do Modelo Reduzido

Para controlar a planta $G(s)$, projeta-se um regulador robusto a partir do modelo nominal (3.4) considerando-se uma incerteza $\Delta(s)$. A estratégia de controle proposta é uma realimentação de estados observados. Para tanto, utiliza-se um observador de Luenberger dado por

$$\dot{x}_{obs} = A_m x_{obs} + B_1 u + L (y - (C_1 x_{obs} + D_{12} u)) \quad (3.5)$$

e a ação de controle

$$u = K x_{obs}, \quad (3.6)$$

com K e L ganhos a serem projetados.

Fechando a malha com (3.4), (3.5) e (3.6), obtém-se o sistema nominal em malha fechada

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}} = \underline{A} \underline{x} + \underline{B} w, \\ z = \underline{C} \underline{x} + D_{21} w, \end{cases} \quad (3.7)$$

com

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} A_m + B_2 K & -B_2 K \\ \mathbf{0} & A_m - L C_1 \end{bmatrix}, \quad (3.8)$$

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} B_1^T & (B_1 - L D_{11})^T \end{bmatrix}^T, \quad (3.9)$$

$$\underline{C} = \begin{bmatrix} C_2 + D_{22} K & -D_{22} K \end{bmatrix}, \quad (3.10)$$

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_m \\ x_m - x_{obs} \end{bmatrix}. \quad (3.11)$$

Para um controle robusto, é necessário escolher K e L de forma a garantir estabilidade e desempenho mesmo na presença de uma incerteza $\Delta(s)$. Note que não é suficiente escolher quaisquer K e L tais que os autovalores de \underline{A} sejam estáveis, pois isso garante apenas a estabilidade do modelo nominal, podendo o sistema real se tornar instável com esses ganhos devido à presença da incerteza $\Delta(s)$. O Teorema 3.2.1 apresenta uma condição LMI que pode ser usada para obter tais ganhos.

Teorema 3.2.1 *Se existirem matrizes $X = X^T > \mathbf{0}$, $Y = Y^T > \mathbf{0}$, W_1 e W_2 de dimensões adequadas e um escalar $\mu > 0$ tais que*

$$\begin{bmatrix} (A_m X + B_2 W_1)_S & * & * & * & * & * & * & * \\ \mathbf{0} & (Y A_m - W_2 C_1)_S & * & * & * & * & * & * \\ B_1^T & B_1^T Y - D_{11}^T W_2^T & -I & * & * & * & * & * \\ C_2 X + D_{22} W_1 & \mathbf{0} & D_{21} & -\mu I & * & * & * & * \\ -W_1^T B_2^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -X & * & * & * \\ \mathbf{0} & I & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -X & * & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -W_1^T D_{22}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -X & * \\ \mathbf{0} & I & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -X \end{bmatrix} < \mathbf{0},$$

então o sistema (3.7) (considerando w como entrada exógena e z como saída) com $K = W_1 X^{-1}$ e $L = Y^{-1} W_2$ é assintoticamente estável e a função de transferência de w para z tem norma \mathcal{H}_∞ menor que $\sqrt{\mu}$.

Prova: Veja o Anexo I. □

Observação 3.2.1 *Note que, se a LMI do Teorema 3.2.1 for satisfeita para μ tal que $\|\Delta(s)\|_\infty < 1/\sqrt{\mu}$, então, pelo Teorema 2.5.1, o sistema (3.5), (3.6) e (3.7) com incerteza $\Delta(s)$ é estável se forem usados os ganhos K e L calculados pelo Teorema 3.2.1.*

Observação 3.2.2 *Outras opções possíveis são utilizar uma realimentação estática de saída, $u = Ky$, e um controlador dinâmico de saída de ordem completa [32]. Os problemas com essas opções são que a realimentação estática é um problema difícil de se escrever em condições convexas que ainda garantam outras restrições (como norma \mathcal{H}_∞) além de usar pouca informação disponível, já o controlador dinâmico de ordem completa tem um número muito grande de variáveis a serem escolhidas (cresce quadraticamente com o número de estados) o que pode tornar seu uso proibitivo em sistemas de ordem muito alta, mesmo quando usando modelos reduzidos.*

3.2.2 Alocação de Polos

Note que com o Teorema 3.2.1 podemos projetar controladores que garantem apenas a estabilidade assintótica do sistema em malha fechada, mas não é possível garantir desempenho. Para obter garantia de desempenho, podemos utilizar a condição do Teorema 2.4.1 para fazer alocação de polos. Combinando os Teoremas 2.4.1 e 3.2.1 temos uma alocação de polos robusta que garante desempenho (da parte representada) e estabilidade do sistema completo.

Um caso particular que será utilizado nas simulações apresentadas posteriormente (veja o Capítulo 4) é a garantia de uma taxa de decaimento $\alpha > 0$. Para isto, é necessário que todos os polos em malha fechada estejam no semiplano $\text{Re}(s) < -\alpha$. A condição de \mathcal{D} -estabilidade é então existir $P = P^T > \mathbf{0}$ tal que

$$\underline{A}^T P + P \underline{A} + 2\alpha P < \mathbf{0}. \quad (3.12)$$

Pode-se mostrar que para que (3.12) e a condição da norma \mathcal{H}_∞ , i.e.,

$$\begin{bmatrix} \underline{A}^T P + P \underline{A} & * & * \\ \underline{B}^T P & -I & * \\ \underline{C} & D_{21} & -\mu I \end{bmatrix} < \mathbf{0},$$

sejam satisfeitas simultaneamente é necessário e suficiente que [33]

$$\begin{bmatrix} \underline{A}^T P + P \underline{A} + 2\alpha P & * & * \\ \underline{B}^T P & -I & * \\ \underline{C} & D_{21} & -\mu I \end{bmatrix} < \mathbf{0}.$$

Com essa nova condição LMI, seguindo o mesmo procedimento da prova do Teorema 3.2.1, podemos obter o Teorema 3.2.2.

Teorema 3.2.2 *Se existirem matrizes $X = X^T > \mathbf{0}$, $Y = Y^T > \mathbf{0}$, W_1 e W_2 de dimensões adequadas e um escalar $\mu > 0$ tais que*

$$\begin{bmatrix} (A_m X + B_2 W_1 + \alpha X)_S & * & * & * & * & * & * & * \\ \mathbf{0} & (Y A_m - W_2 C_1 + \alpha Y)_S & * & * & * & * & * & * \\ B_1^T & B_1^T Y - D_{11}^T W_2^T & -I & * & * & * & * & * \\ C_2 X + D_{22} W_1 & \mathbf{0} & D_{21} & -\mu I & * & * & * & * \\ -W_1^T B_2^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -X & * & * & * \\ \mathbf{0} & I & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -X & * & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -W_1^T D_{22}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -X & * \\ \mathbf{0} & I & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -X \end{bmatrix}$$

é negativa-definida, para um dado escalar $\alpha > 0$, então o sistema (3.7) (considerando w como entrada exógena e z como saída) com $K = W_1 X^{-1}$ e $L = Y^{-1} W_2$ é assintoticamente estável e a função de transferência de w para z tem norma \mathcal{H}_∞ menor que $\sqrt{\mu}$. Além disso, os autovalores de \underline{A} tem parte real menor que $-\alpha$.

3.3 Modelo Reduzido com Atraso

3.3.1 Sistemas SISO

Considere um sistema dinâmico LIT SISO estável

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + bv, \\ y = c^T x, \end{cases} \quad (3.13)$$

com estado $x \in \mathfrak{R}^n$, entrada $v \in \mathfrak{R}$ e saída $y \in \mathfrak{R}$, e um modelo reduzido para este sistema dado por

$$\begin{cases} \dot{x}_r = A_r x_r + b_r v, \\ y_r = c_r^T x_r + d_r v, \end{cases} \quad (3.14)$$

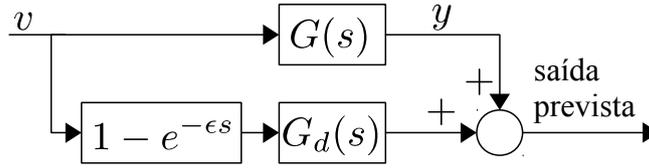


Figura 3.1: Preditor de Smith.

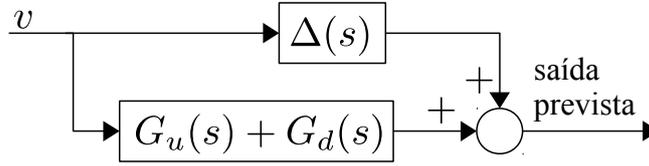


Figura 3.2: Diagrama resultante ao substituir $G(s)$ por $G_u(s) + G_d(s)e^{-\epsilon s} + \Delta(s)$.

de onde pode-se obter, conforme mostrado na Seção 2.3.3, o modelo com atraso

$$\begin{cases} \dot{x}_r = A_r x_r + b_d v(t - \epsilon), \\ y_r = c_r^T x_r + d_d v(t - \epsilon). \end{cases} \quad (3.15)$$

Sejam $G(s)$ a função de transferência de (3.13), $G_d(s)e^{-\epsilon s}$ a função de transferência de (3.15) e $\Delta(s) = G(s) - G_d(s)e^{-\epsilon s}$, ou seja,

$$G(s) = G_d(s)e^{-\epsilon s} + \Delta(s). \quad (3.16)$$

Considere ainda que existe um escalar conhecido $\delta > 0$ tal que

$$\|\Delta(s)\|_\infty = \|G(s) - G_d(s)e^{-\epsilon s}\|_\infty < \delta. \quad (3.17)$$

Para projetar o controlador, é utilizada a estrutura de Preditor de Smith (veja, e.g., [34]) mostrada na Figura 3.1, que permite que o controlador seja projetado independente do atraso. Ao substituir o bloco $G(s)$ pelo lado direito de (3.16), obtém-se o diagrama equivalente mostrado na Figura 3.2 (com $G_u(s) = 0$).

Interpretando $G_d(s)$ como um modelo nominal e $\Delta(s)$ como uma incerteza aditiva, pode-se escrever a planta $G_d(s) + \Delta(s)$ na forma de LFT

$$\begin{cases} \dot{x}_{LFT} = A_r x_{LFT} + b_1 w + b_2 v, \\ y_F = c_1^T x_{LFT} + d_{11} w + d_{12} v, \\ z = c_2^T x_{LFT} + d_{21} w + d_{22} v, \end{cases} \quad (3.18)$$

com $b_1 = \mathbf{0}$, $b_2 = b_d$, $c_1 = c_r$, $c_2 = \mathbf{0}$, $d_{11} = d_{22} = 1$, $d_{12} = d_d$ e $d_{21} = 0$, e função de transferência de z para w igual a $\Delta(s)$.

3.3.1.1 Caso Instável

Se (3.13) tem autovalores instáveis, a técnica proposta por [6] tem que ser modificada. Neste caso, todos os autovalores instáveis tem que ser representados em (3.14) e apenas a parte estável é substituída pelo modelo com atraso.

Suponha que os estados de (3.14) estejam ordenados de tal forma que

$$x_r = \begin{bmatrix} x_{ru} \\ x_{rs} \end{bmatrix},$$

$$\left[\begin{array}{c|c} A_r & b_r \\ \hline c_r^T & d_r \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} A_{ru} & \mathbf{0} & b_{ru} \\ \mathbf{0} & A_{rs} & b_{rs} \\ \hline c_{ru}^T & c_{rs}^T & d_r \end{array} \right],$$

onde os autovalores da matriz A_{ru} são instáveis e os da matriz A_{rs} são estáveis. Então, calcula-se as matrizes do modelo com atraso apenas com A_{rs} , b_{rs} , c_{rs} e d_r :

$$b_d = A_{rs} (e^{\epsilon A_{rs}} - I) A_{rs}^{-1} b_{rs} + b_{rs},$$

$$d_d = c_{rs}^T (e^{\epsilon A_{rs}} - I) A_{rs}^{-1} b_{rs} + d_r.$$

O modelo final é dado por

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_{ru} \\ \dot{x}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{ru} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_{rs} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{ru} \\ x_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{ru} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & b_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v(t) \\ v(t - \epsilon) \end{bmatrix}, \\ y_d = \begin{bmatrix} c_{ru}^T & c_{rs}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{ru} \\ x_d \end{bmatrix} + d_d v(t - \epsilon), \end{cases} \quad (3.19)$$

com ϵ escolhido a partir da resposta ao degrau de

$$\begin{cases} \dot{x}_{rs} = A_{rs} x_{rs} + b_{rs} v, \\ y_{rs} = C_{rs} x_{rs} + d_r v. \end{cases}$$

Considere $G(s) = G_u(s) + G_s(s)$ a função de transferência de (3.13) com $G_u(s)$ representando a parte instável e $G_s(s)$ a parte estável, $G_u(s) + G_d(s)e^{-\epsilon s}$ a função de transferência de (3.19) e $\Delta(s) = G(s) - (G_u(s) + G_d(s)e^{-\epsilon s}) = G_s(s) - G_d(s)e^{-\epsilon s}$, ou seja,

$$G(s) = G_u(s) + G_d(s)e^{-\epsilon s} + \Delta(s).$$

Usando o Preditor de Smith como antes, há a equivalência entre os diagramas das Figuras 3.1 e 3.2. O sistema pode ser representado por uma LFT da mesma forma que no caso estável.

3.3.1.2 Realimentação de Estados Observados

Para a estrutura de controle com observador, utiliza-se o observador de Luenberger da ordem do modelo reduzido

$$\dot{x}_{obs} = A_r x_{obs} + \tilde{b}_d u + L (y_F - (c_r^T x_{obs} + d_d v)) \quad (3.20)$$

para estimar os estados da planta, onde

$$\tilde{b}_d = \begin{cases} b_d, & \text{se } G_u(s) = 0, \\ \begin{bmatrix} b_{ru} \\ b_d \end{bmatrix}, & \text{se } G_u(s) \neq 0. \end{cases}$$

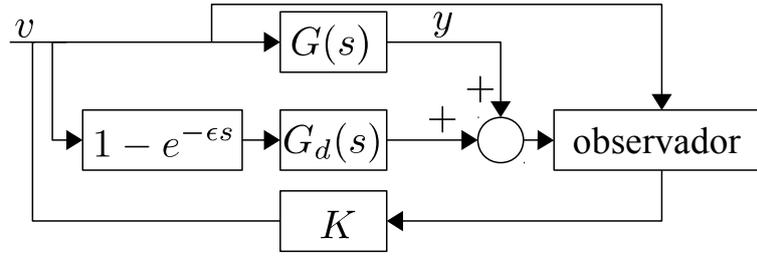


Figura 3.3: Preditor de Smith em Malha Fechada

A ação de controle é dada por

$$v = Kx_{obs}. \quad (3.21)$$

As matrizes K e L são ganhos a serem projetados.

Fechando a malha com (3.18), (3.20) e (3.21), obtém-se o sistema nominal em malha fechada

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}} = \underline{A}\underline{x} + \underline{b}w, \\ z = \underline{c}^T \underline{x} + d_{21}w, \end{cases} \quad (3.22)$$

com

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} A_r + b_2K & -b_2K \\ \mathbf{0} & A_r - Lc_1^T \end{bmatrix}, \quad (3.23)$$

$$\underline{b} = \begin{bmatrix} b_1^T & (b_1 - Ld_{11})^T \end{bmatrix}^T, \quad (3.24)$$

$$\underline{c}^T = \begin{bmatrix} c_2^T + d_{22}K & -d_{22}K \end{bmatrix}. \quad (3.25)$$

Os ganhos K e L podem ser projetados usando o Teorema 3.2.1. O sistema em malha fechada é mostrado na Figura 3.3.

3.3.2 Sistemas MIMO

Considere um sistema dinâmico LIT controlável

$$\begin{cases} \dot{\chi} = A\chi + Bu, \\ y = C\chi, \end{cases} \quad (3.26)$$

com estado $\chi \in \mathfrak{R}^n$, entrada $u \in \mathfrak{R}^m$ e saída $y \in \mathfrak{R}^m$ ($m > 1$). Considere $C = \Phi[\mathcal{K}(A, B)]^{-1}$, com \mathcal{K} e Φ como em (2.3) e (2.5), respectivamente, ou seja, as saídas mensuráveis são um conjunto possível de saídas planas. A estratégia, nesse caso, é desacoplar o sistema MIMO em vários SISOs e então utilizar o procedimento descrito na seção anterior para cada um desses SISOs. Essa estratégia é similar à apresentada em [23].

3.3.2.1 Desacoplamento

De acordo com [35], a matriz

$$S = \begin{bmatrix} [\Phi\mathcal{K}^{-1}]_1 \\ [\Phi\mathcal{K}^{-1}]_1 A \\ \vdots \\ [\Phi\mathcal{K}^{-1}]_1 A^{n_1-1} \\ \vdots \\ [\Phi\mathcal{K}^{-1}]_m A \\ \vdots \\ [\Phi\mathcal{K}^{-1}]_m A^{n_m-1} \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{n \times n}, \quad (3.27)$$

onde $[\Phi\mathcal{K}^{-1}]_i$ é a i -ésima linha da matriz $\Phi\mathcal{K}^{-1}$, é tal que

$$\tilde{A} = SAS^{-1} = \begin{bmatrix} \left[\begin{array}{cc} \mathbf{0}_{(n_1-1) \times 1} & I_{n_1-1} \end{array} \right] & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \blacklozenge & \blacklozenge & \dots & \blacklozenge \\ \mathbf{0} & \left[\begin{array}{cc} \mathbf{0}_{(n_2-1) \times 1} & I_{n_2-1} \end{array} \right] & \dots & \mathbf{0} \\ \blacklozenge & \blacklozenge & \dots & \blacklozenge \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \left[\begin{array}{cc} \mathbf{0}_{(n_m-1) \times 1} & I_{n_m-1} \end{array} \right] \\ \blacklozenge & \blacklozenge & \dots & \blacklozenge \end{bmatrix}, \quad (3.28)$$

$$\tilde{B} = SB = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(n_1-1) \times 1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 1 & \blacklozenge & \blacklozenge & \dots & \blacklozenge & \blacklozenge \\ \mathbf{0}_{(n_2-1) \times 1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 0 & 1 & \blacklozenge & \dots & \blacklozenge & \blacklozenge \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.29)$$

onde cada \blacklozenge representa um escalar ou vetor linha. Definindo um novo estado

$$x = S\chi = \left[y_1 \quad \dot{y}_1 \quad \dots \quad y_1^{(n_1-1)} \quad \dots \quad y_m \quad \dot{y}_m \quad \dots \quad y_m^{(n_m-1)} \right]^T, \quad (3.30)$$

com y_i a i -ésima componente do vetor y , tem-se que (3.26) pode ser escrita como

$$\begin{cases} \dot{x} = \tilde{A}x + \tilde{B}u, \\ y = \tilde{C}x, \end{cases} \quad (3.31)$$

com

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}_{1 \times (\kappa_1-1)} & 0 & \mathbf{0}_{1 \times (\kappa_2-1)} & \dots & 0 & \mathbf{0}_{1 \times (\kappa_m-1)} \\ 0 & \mathbf{0} & 1 & \mathbf{0} & \dots & 0 & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & \mathbf{0} & 0 & \mathbf{0} & \dots & 1 & \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (3.32)$$

Considere uma matriz $\Theta_u \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ tal que sua i -ésima linha seja igual à i -ésima linha de \tilde{B} que não é apenas zeros, e uma matriz $\Theta_x \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ tal que sua i -ésima linha é igual à i -ésima linha de \tilde{A} contendo os \blacklozenge 's, exceto que os elementos nas posições correspondentes a y_i e suas derivadas temporais são substituídos por 0. Ou seja,

$$\Theta_u = \begin{bmatrix} 1 & \blacklozenge & \blacklozenge & \dots & \blacklozenge & \blacklozenge \\ 0 & 1 & \blacklozenge & \dots & \blacklozenge & \blacklozenge \\ & & \vdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.33)$$

$$\Theta_x = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{\kappa_1 \times \kappa_1} & \blacklozenge & \dots & \blacklozenge \\ \blacklozenge & \mathbf{0}_{\kappa_2 \times \kappa_2} & \dots & \blacklozenge \\ & \vdots & & \\ \blacklozenge & \blacklozenge & \dots & \mathbf{0}_{\kappa_m \times \kappa_m} \end{bmatrix}. \quad (3.34)$$

Note que a matriz Θ_u é invertível. Definindo uma entrada virtual

$$v = \begin{bmatrix} v_1 & \dots & v_m \end{bmatrix}^T = \Theta_u u + \Theta_x x, \quad (3.35)$$

obtém-se a equação de estado equivalente

$$\dot{x} = A_{dec}x + B_{dec}v, \quad (3.36)$$

com

$$A_{dec} = \text{diag} \left\{ \left[\begin{array}{cc} \mathbf{0}_{(\kappa_1-1) \times 1} & I_{\kappa_1-1} \\ & \blacklozenge \end{array} \right], \dots, \left[\begin{array}{cc} \mathbf{0}_{(\kappa_m-1) \times 1} & I_{\kappa_m-1} \\ & \blacklozenge \end{array} \right] \right\}, \quad (3.37)$$

$$B_{dec} = \text{diag} \left\{ \left[\begin{array}{c} \mathbf{0}_{(\kappa_1-1) \times 1} \\ 1 \end{array} \right], \dots, \left[\begin{array}{c} \mathbf{0}_{(\kappa_m-1) \times 1} \\ 1 \end{array} \right] \right\}. \quad (3.38)$$

Assim, pode-se interpretar o sistema MIMO (3.26) como um grupo de m sistemas SISO, sendo o i -ésimo desses SISOs com entrada v_i , saída y_i e estado $\begin{bmatrix} y_i & \dot{y}_i & \dots & y_i^{(\kappa_i-1)} \end{bmatrix}^T$.

3.3.2.2 Controle

Uma vez que o sistema MIMO (3.26) tenha sido dividido em vários SISOs utilizando o procedimento da subseção anterior, projeta-se um controlador para cada um desses SISOs da forma mostrada na Seção 3.3.1. No entanto, esses controladores geram o sinal de controle v para o sistema virtual (3.36) e, para controlar a planta original, é necessário o sinal de controle u .

Os sinais u e v são relacionados por (3.35), que pode ser escrita como

$$u = \Theta_u^{-1} (v - \Theta_x x). \quad (3.39)$$

Assim, seria necessário medir todo o estado x para obter u , mas apenas y está disponível para medição. Portanto, utiliza-se a seguinte aproximação

$$u \approx \Theta_u^{-1} (v - \Theta_y y) = \Theta_u^{-1} (v - \Theta_y \tilde{C}x), \quad (3.40)$$

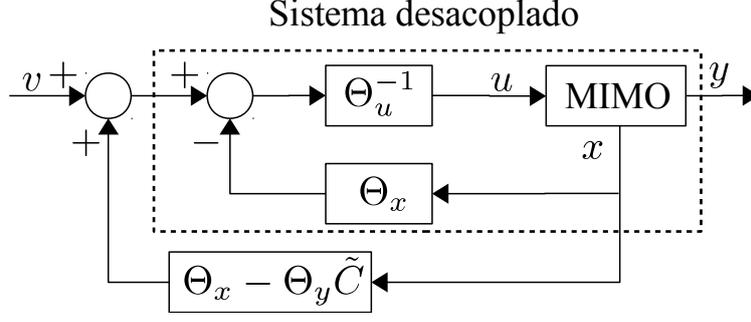


Figura 3.4: Aproximação da ação de controle como uma perturbação

com Θ_y uma variável a ser projetada. Pode-se representar essa aproximação como uma perturbação $(\Theta_x - \Theta_y \tilde{C})x$ que se soma ao controle v , conforme a Figura 3.4.

Pode-se representar o sistema desacoplado da Figura 3.4 como uma LFT com sistema nominal

$$\begin{cases} \dot{x} = A_{dec}x + B_{dec}v + B_{dec}w, \\ y = \tilde{C}x, \\ z = x \end{cases} \quad (3.41)$$

e incerteza $\Theta_x - \Theta_y \tilde{C}$. Pelo Teorema do Pequeno Ganho, a função de transferência de w para z tem que ter norma \mathcal{H}_∞ menor que $1/\|\Theta_x - \Theta_y \tilde{C}\|_\infty$ para que o sistema controlado seja estável. Devido a isso, a variável Θ_y é escolhida de forma a minimizar $\|\Theta_x - \Theta_y \tilde{C}\|_\infty$ através da condição LMI do Lema 3.3.1. A Figura 3.5 mostra a estrutura de controle utilizada.

Lema 3.3.1 *Seja o escalar $\delta > 0$.*

$$\|\Theta_x - \Theta_y \tilde{C}\|_\infty < \sqrt{\delta} \iff \begin{bmatrix} -\delta I & * \\ \Theta_x - \Theta_y \tilde{C} & -I \end{bmatrix} < \mathbf{0}.$$

Prova: Pela definição de norma \mathcal{H}_∞ , tem-se

$$\|\Theta_x - \Theta_y \tilde{C}\|_\infty < \sqrt{\delta} \iff w^T w - \delta z^T z < 0.$$

Como $w = (\Theta_x - \Theta_y \tilde{C})z$, nesse caso, obtém-se

$$\begin{aligned} z^T (\Theta_x - \Theta_y \tilde{C})^T (\Theta_x - \Theta_y \tilde{C}) z - \delta z^T z &< 0 \\ -z^T (\delta I) z - z^T (\Theta_x - \Theta_y \tilde{C})^T (-I) (\Theta_x - \Theta_y \tilde{C}) z &< 0 \\ z^T \left(-\delta I - (\Theta_x - \Theta_y \tilde{C})^T (-I) (\Theta_x - \Theta_y \tilde{C}) \right) z &< 0 \\ -\delta I - (\Theta_x - \Theta_y \tilde{C})^T (-I) (\Theta_x - \Theta_y \tilde{C}) &< \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Como $-\delta I < \mathbf{0}$, pode-se aplicar o complemento de Schur para obter a condição equivalente

$$\begin{bmatrix} -\delta I & * \\ \Theta_x - \Theta_y \tilde{C} & -I \end{bmatrix} < \mathbf{0}.$$

□

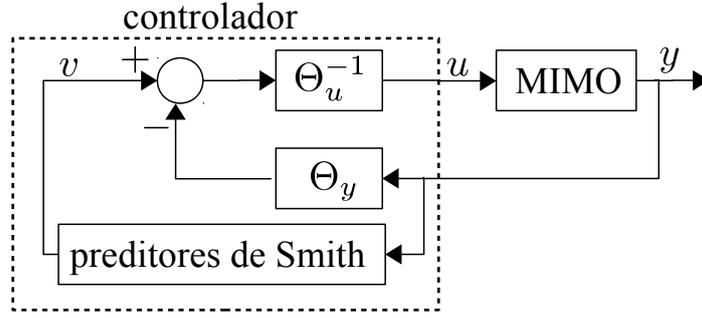


Figura 3.5: Estrutura de controle utilizada no caso MIMO com atrasos

3.4 Controle em Malha Aberta

As seções anteriores deste capítulo trataram do projeto de controladores para estabilizar o sistema em malha fechada, porém, além disso, é comumente desejável que a saída do sistema atinja um determinado valor de referência. Esta seção tem por objetivo mostrar uma estratégia de controle em malha aberta que pode ser usada para tal fim. O desenvolvimento será feita para o caso do modelo reduzido sem atraso, mas pode-se também utilizar esta técnica quando são usados os modelos reduzidos com o preditor de Smith como mostrado anteriormente.

Considere o sistema completo LIT (3.1) e o modelo (3.2)¹. Considere ainda que o modelo (3.2) é plano (que no caso linear é equivalente a ser controlável), ou seja, existe um vetor de saídas planas

$$\zeta = \Phi [\mathcal{K}(A_m, B_m)]^{-1} x_m \quad (3.42)$$

com \mathcal{K} e Φ como em (2.3) e (2.5), respectivamente. Lembrando que existe uma matriz M tal que²

$$\begin{bmatrix} x_m \\ u \end{bmatrix} = M^{-1} \tilde{\zeta}, \quad \tilde{\zeta} = \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \dot{\zeta}_1 \\ \vdots \\ \zeta_1^{(n_1)} \\ \vdots \\ \zeta_m \\ \vdots \\ \zeta_m^{(n_m)} \end{bmatrix},$$

podemos particionar esta matriz como

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} M_x \\ M_u \end{bmatrix},$$

de forma que

$$\begin{bmatrix} x_m \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_x \tilde{\zeta} \\ M_u \tilde{\zeta} \end{bmatrix}. \quad (3.43)$$

¹No caso de modelo com atraso, usamos as matrizes de (3.19).

²Note que os n_i 's se referem aos índices de controlabilidade do modelo reduzido nesta seção.

Note que a saída y_m do modelo reduzido é dada por

$$y_m = C_m x_m + D_m u = C_m M_x \tilde{\zeta} + D_m \tilde{\zeta} = M_y \tilde{\zeta}, \quad (3.44)$$

onde $M_y = C_m M_x + D_m M_u$.

Considere valores iniciais e finais nominais para a saída: $y_{\text{nom}}(0)$ e $y_{\text{nom}}(\infty)$, onde $y_{\text{nom}}(0)$ é dado pelas condições iniciais e $y_{\text{nom}}(\infty)$ é o *setpoint* desejado. Queremos que o sistema siga uma trajetória suave entre esses dois pontos e que atinja o valor final em tempo finito. Projetar um comando em malha aberta diretamente seria trabalhoso, pois apenas trajetórias que obedecem às equações do modelo são possíveis. Ao se trabalhar com as saídas planas, essa restrição não existe, pois qualquer trajetória suficientemente suave para o vetor de saídas planas equivale a trajetórias contínuas realizáveis para os estados e as entradas do sistema. Considere uma trajetória nominal para a i -ésima saída plana

$$\zeta_{i,\text{nom}}(t) = \begin{cases} \zeta_{i,\text{nom}}(0), & t \leq t_{i,0}, \\ f(t), & t_{i,0} < t \leq t_{i,f}, \\ \zeta_{i,\text{nom}}(\infty), & t > t_{i,f}, \end{cases}$$

onde $\zeta_{i,\text{nom}}(0)$ e $\zeta_{i,\text{nom}}(\infty)$ são escalares e $f(t)$ é uma função escolhida de forma que $\zeta_{i,\text{nom}}(t)$ tenha derivadas de ordem n_i contínuas, desta forma, o controle nominal

$$u_{\text{nom}}(t) = M_u \tilde{\zeta}_{\text{nom}}(t)$$

será contínuo. Escolhendo $\zeta_{i,\text{nom}}(0)$ e $\zeta_{i,\text{nom}}(\infty)$ adequadamente, o controle $u_{\text{nom}}(t)$ aplicado ao modelo (3.2) leva sua saída de $y_{\text{nom}}(0)$ a $y_{\text{nom}}(\infty)$ no intervalo de tempo de $\min_i(t_{i,0})$ a $\max_i(t_{i,f})$. Antes de $t = \min_i(t_{i,0})$, o valor se mantém constante igual a $y_{\text{nom}}(0)$ e, após $t = \max_i(t_{i,f})$, o valor se mantém constante igual a $y_{\text{nom}}(\infty)$.

Fazendo

$$\tilde{\zeta} = \begin{bmatrix} \zeta_{1,\text{nom}}(0) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ \zeta_{m,\text{nom}}(0) \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad y_m = y_{\text{nom}}(0)$$

em (3.44), temos

$$y_{\text{nom}}(0) = \begin{bmatrix} M_{y,1,1} & M_{y,1,2} & \cdots & M_{y,1,m} \\ M_{y,2,1} & M_{y,2,2} & \cdots & M_{y,2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{y,1,1} & M_{y,1,2} & \cdots & M_{y,1,m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta_{1,\text{nom}}(0) \\ \zeta_{2,\text{nom}}(0) \\ \vdots \\ \zeta_{m,\text{nom}}(0) \end{bmatrix},$$

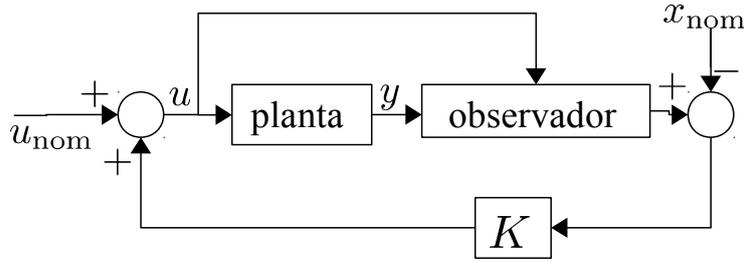


Figura 3.6: Controle malha aberta e malha fechada com planejamento de trajetória para o sistema reduzido

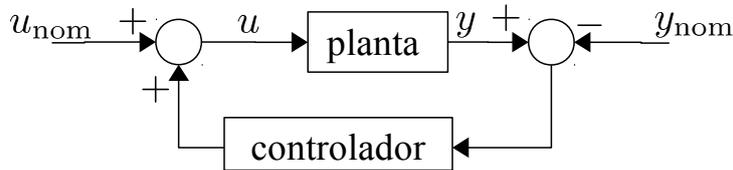


Figura 3.7: Controle malha aberta e malha fechada com planejamento de trajetória para o sistema de alta ordem

onde $M_{y,i,j}$ é o elemento da matriz M_y na i -ésima linha e na coluna correspondente a $\zeta_{j,nom}(0)$. Agora basta resolver este sistema de equações para encontrar $\zeta_{1,nom}(0), \dots, \zeta_{m,nom}(0)$. Para encontrar $\zeta_{1,nom}(0), \dots, \zeta_{m,nom}(0)$, fazemos um processo similar, mas usando os valores finais ao invés dos iniciais.

A Figura 3.6 mostra a estrutura de controle com malha aberta e malha fechada, onde x_{nom} é a trajetória de x_m correspondente a ζ_{nom} . No caso em que as saídas mensuráveis são saídas planas, podemos planejar a trajetória diretamente para o sistema de alta ordem e usar uma estrutura como a mostrada na Figura 3.7. Com estas estruturas, o controle em malha fechada atua apenas sobre erros de modelagem, incerteza na condição inicial e perturbações, de forma que o sinal de controle total tende a ser mais suave sem variações bruscas, o que evita a excitação de dinâmicas mais rápidas não-modeladas do sistema.

Capítulo 4

Aplicações

4.1 Introdução

Este capítulo apresenta exemplos de aplicação da teoria apresentada nos capítulos anteriores. Primeiro é apresentado um caso SISO e em seguida um caso MIMO.

4.2 Caso SISO

Considere a EDP difusiva unidimensional

$$\frac{\partial \theta}{\partial t}(\xi, t) = \eta \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2}(\xi, t) + \lambda \theta(0, t),$$

com condições de contorno

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial \xi}(0, t) &= 0, \\ \frac{\partial \theta}{\partial \xi}(l, t) &= u(t), \end{aligned}$$

onde os escalares $\eta > 0$, $l > 0$ e $\lambda \geq 0$ são constantes conhecidas, $\theta(z, t)$ é um campo escalar (como a temperatura), t é o tempo, ξ é uma dimensão espacial e $u(t) \in \mathfrak{R}$ é uma entrada de controle. O termo $\lambda \theta(0, t)$ aparece em alguns sistemas com uma característica de autoaquecimento (como em [36]), aqui, ele é usado para tornar o sistema em malha aberta instável e assim gerar um problema de controle mais interessante.

Para criar o modelo discretizado, foi utilizado um esquema de diferenças centradas de 3 pontos para aproximar as derivadas espaciais. O modelo tem um autovalor igual a λ , logo, para $\lambda > 0$, o modelo é instável. Foram considerados dois casos: no primeiro, a saída mensurável do sistema é $y(t) = \theta(0, t) \in \mathfrak{R}$; no segundo, a saída mensurável do sistema é $y(t) = \theta(l, t) \in \mathfrak{R}$. Note que, no primeiro caso, a saída e a entrada não estão na mesma posição espacial. O sistema de alta ordem é dado por

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu, \\ y = c^T x + du, \end{cases}$$

com

$$A = \frac{\eta}{\Delta\xi^2} \begin{bmatrix} -2 + \lambda & 2 & & & & \\ 1 + \lambda & -2 & 1 & & & \\ \lambda & 1 & -2 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \lambda & & & 1 & -2 & 1 \\ \lambda & & & & 2 & -2 \end{bmatrix},$$

$$b = \frac{2\eta}{\Delta\xi} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$c^T = \begin{cases} \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \end{bmatrix}, & \text{no primeiro caso,} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}, & \text{no segundo caso,} \end{cases}$$

$$d = 0,$$

onde $\Delta\xi = l/(n - 1)$ e n é o número de estados. Foram utilizados os parâmetros $l = 1$, $\eta = 1$ e $\lambda = 0, 1$. E a discretização da EDP criou um sistema de ordem 100.

Utilizando a redução modal com atraso, foi obtido um modelo de ordem 2 da forma (3.19) com

$$A_r = \begin{bmatrix} A_{ru} & 0 \\ 0 & A_{rs} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,1 & 0 \\ 0 & -9,8688 \end{bmatrix},$$

$$b_{ru} = -1,2248$$

$$b_d = \begin{cases} 1,4479 & \text{no primeiro caso,} \\ -1,7633 & \text{no segundo caso,} \end{cases}$$

$$c_r^T = \begin{bmatrix} c_{ru}^T & c_{rs}^T \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} -0,8030 & -1,1225 \end{bmatrix}, & \text{no primeiro caso,} \\ \begin{bmatrix} -0,8030 & -1,1456 \end{bmatrix}, & \text{no segundo caso,} \end{cases}$$

$$d_d = \begin{cases} -6,0051 \times 10^{-5}, & \text{no primeiro caso,} \\ 0,1306, & \text{no segundo caso,} \end{cases}$$

$$\epsilon = \begin{cases} 0,0200 & \text{no primeiro caso,} \\ 0, & \text{no segundo caso.} \end{cases}$$

Note que no segundo caso não há atraso, e assim a redução é equivalente a uma residualização feita na forma modal do sistema.

As Figuras 4.1 e 4.2 mostram a saída da planta em cada caso para um entrada degrau unitário, note que, em cada caso, a saída é o valor de θ em um ponto diferente do domínio. Em ambos os casos, a taxa de decaimento mínima é 0,35. Esse exemplo mostra a versatilidade do método em relação a abordagens em que não é feita discretização espacial do sistema. O método apresentado em [17], que também utiliza LMIs, por exemplo, consegue lidar apenas com o segundo caso onde a entrada e a saída estão na mesma posição espacial.

A Figura 4.3 mostra o caso 1 com controle em malha aberta e malha fechada, o objetivo é alcançar o valor final 1 partir do valor inicial 0 com $t_0 = 0$ e $t_f = 10$, a referência mostrada na

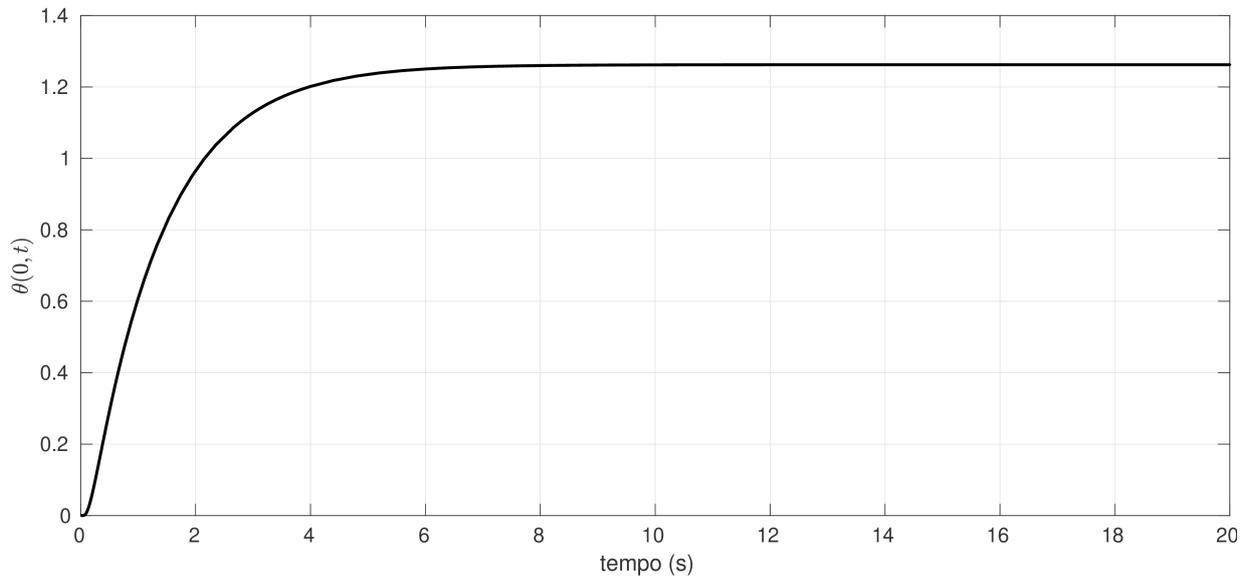


Figura 4.1: Saída da planta para referência degrau - Taxa de decaimento 0,35 - Caso 1

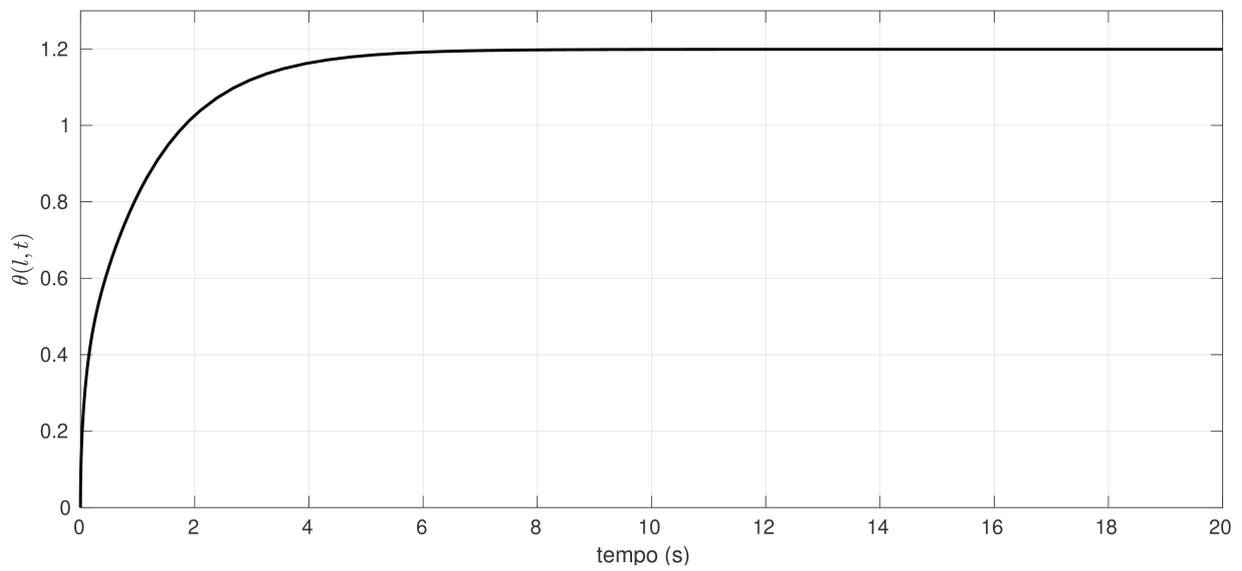


Figura 4.2: Saída da planta para referência degrau - Taxa de Decaimento 0,35 - Caso 2

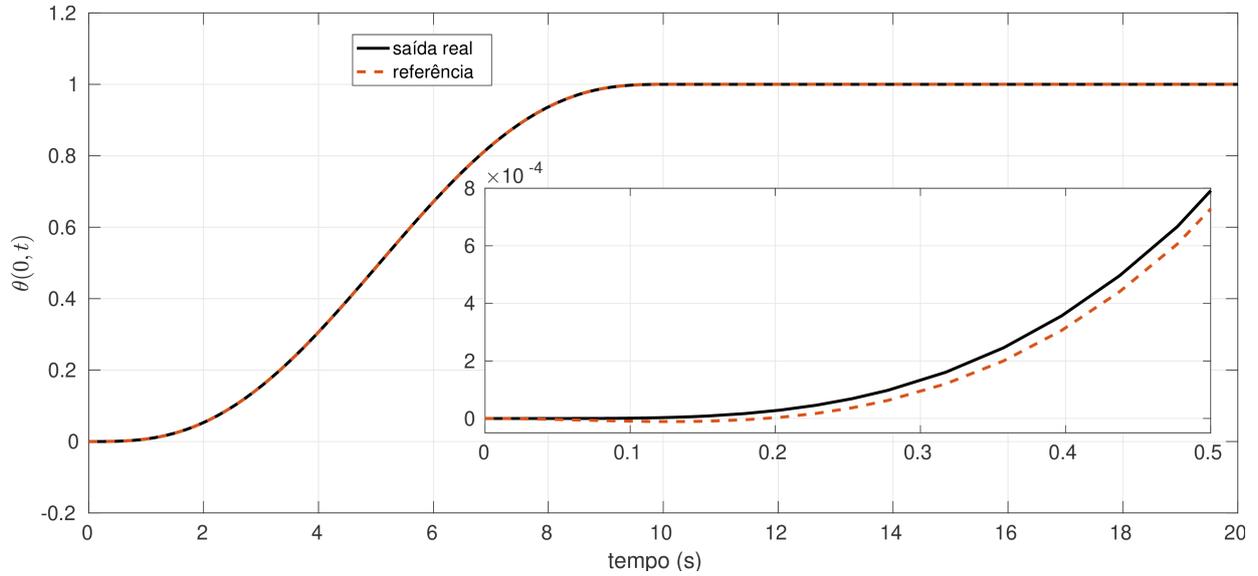


Figura 4.3: Saída da planta para controle em malha aberta e malha fechada

Figura 4.3 é a trajetória da saída do modelo correspondente à trajetória escolhida para a saída plana. A trajetória escolhida para a saída plana do modelo reduzido é

$$\zeta_{\text{nom}}(t) = \begin{cases} 0, & t \leq t_0, \\ f(t), & t_0 < t \leq t_f, \\ 0, 1013, & t > t_f. \end{cases}$$

A função $f(t)$ é o único polinômio de 5ª ordem que satisfaz

$$\begin{cases} f(t_0) = 0, \\ f(t_f) = 0, 1013, \\ \dot{f}(t_0) = 0, \\ \dot{f}(t_f) = 0, \\ \ddot{f}(t_0) = 0, \\ \ddot{f}(t_f) = 0, \end{cases}$$

dessa forma, $\zeta_{\text{nom}}(t)$ tem derivada de ordem 2 contínua. A Figura 4.4 mostra a ação de controle em malha aberta, note que é uma função contínua devido à suavidade de $\zeta_{\text{nom}}(t)$, a parcela da ação de controle vinda do controle em malha fechada é várias ordens de grandeza menor, por isso o gráfico comparando a ação de controle total com a de malha aberta foi omitido. A Figura 4.5 mostra o resultado de aplicar apenas a ação de controle em malha aberta no sistema completo, note que o valor da saída diverge. Os gráficos correspondentes para o caso 2 são praticamente iguais aos do caso 1 e foram omitidos. O controle em malha aberta foi projetado para o sistema reduzido e foi utilizada a estrutura da Figura 3.6.

Em todos os casos até aqui, o modelo exato da planta completa foi utilizado para fazer a redução. A Figura 4.6 mostra um caso em que há uma incerteza em relação aos parâmetros da planta. É usado o mesmo controle da situação da Figura 4.3, mas a planta real tem $\lambda = 0.2$.

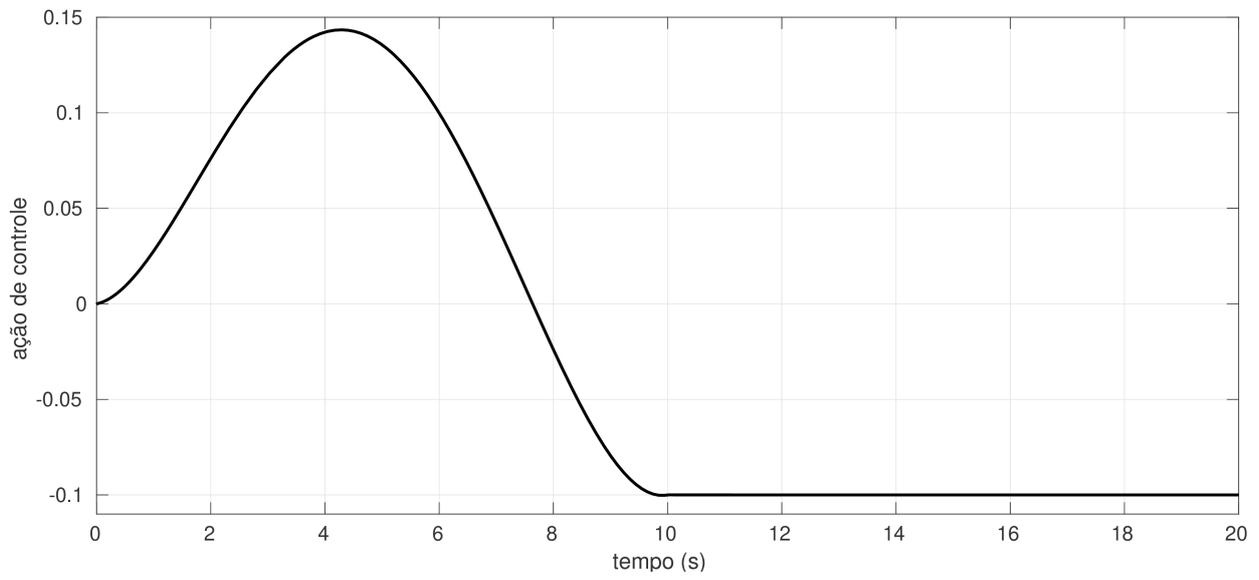


Figura 4.4: Ação de controle em malha aberta

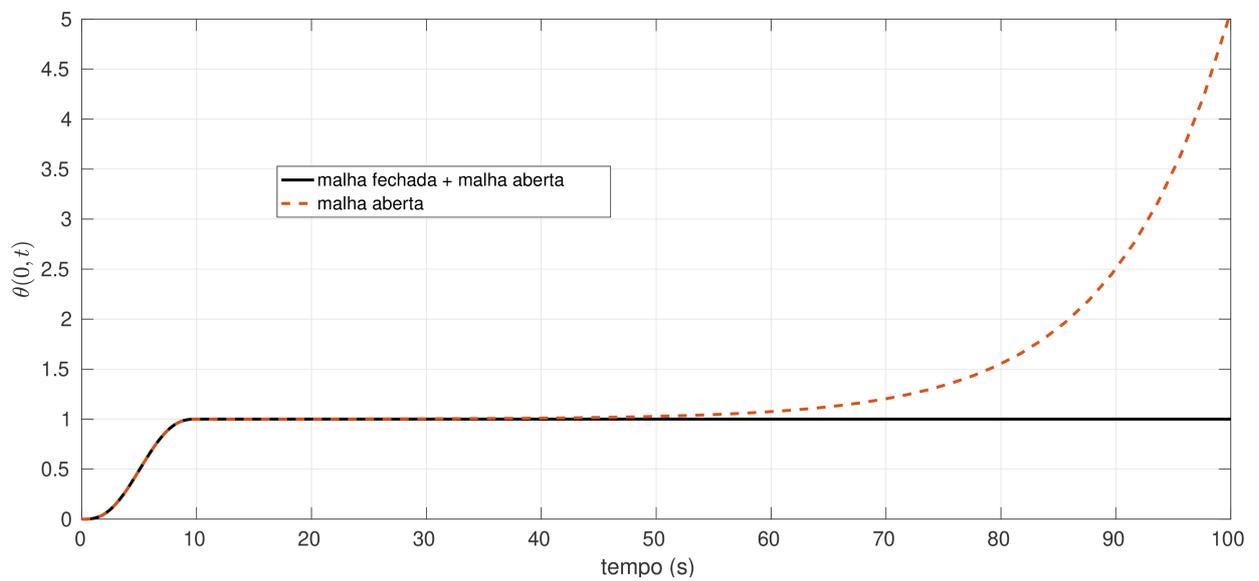


Figura 4.5: Comparação entre saídas com e sem o controle em malha fechada

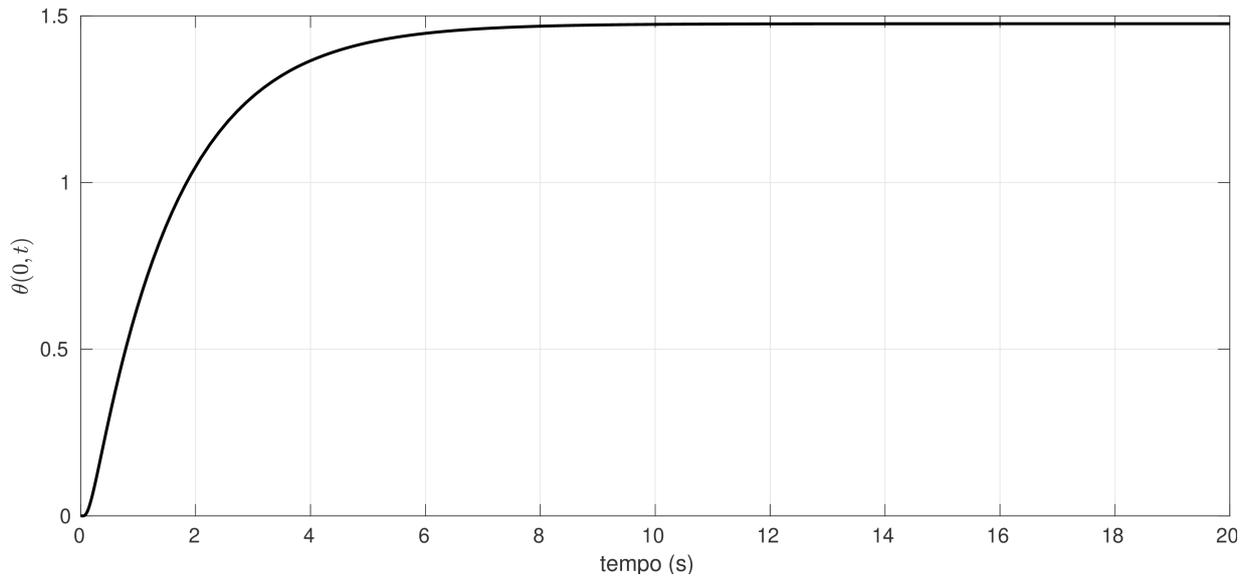


Figura 4.6: Saída da planta com parâmetro não nominal, referência degrau

4.3 Caso MIMO

Considere um reator de leito fixo isotérmico com reações de primeira ordem transferência de massa linear através do fluido. O modelo matemático desse reator é [13]

$$\frac{\partial c}{\partial t}(\xi, t) = G \frac{\partial^2 c}{\partial \xi^2}(\xi, t) - v \frac{\partial c}{\partial \xi}(\xi, t) - Rc(\xi, t) \quad (4.1)$$

com condições de contorno

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial \xi}(0, t) &= 0, \\ c(l, t) &= u(t), \end{aligned}$$

onde $c(\xi, t) \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de concentrações dos reagentes, m é o número de reagentes, $G = G^T > \mathbf{0}$ é a matriz de difusão com dimensão $m \times m$, o escalar $v \leq 0$ é a velocidade de transporte, $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$ é uma matriz modelando as reações, $u(t) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ é a entrada de controle, $l > 0$ é o comprimento do reator, ξ é uma dimensão espacial e t é o tempo. Note que para $m > 1$, (4.1) é um conjunto de EDPs acopladas. As saídas mensuráveis da planta são as concentrações em $\xi = 0$, i.e., $y(t) = c(0, t) \in \mathbb{R}^m$.

Os parâmetros utilizados foram

$$m = 5,$$

$$G = 8,8359 \times 10^{-5} I_5,$$

$$R = 3,3369 \times 10^{-4} \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix},$$

$$v = -2,777 \times 10^{-5},$$

$$l = 0,37$$

em unidades adequadas. Estes valores foram adaptados do caso SISO de [12,13]. Foi utilizado um esquema de diferenças finitas para criar um sistema de ordem 100 a partir da EDP. Em seguida, foram obtidos 5 modelos SISO de ordem 20 cada, e cada um foi reduzido para um modelo de ordem 5 com atraso. Devido aos valores escolhidos para as matrizes G e R , todos os modelos SISO com atraso são iguais, dados por

$$A_r = -\text{diag}\{0,9247; 0,5993; 0,1202; 0,0398\}, \quad (4.2)$$

$$b_d = 10^9 \begin{bmatrix} -1,9776 & 2,0160 & -1,7330 & 1,5519 & 0,7475 \end{bmatrix}^T, \quad (4.3)$$

$$c_r^T = \begin{bmatrix} -0,3893 & 0,8006 & 0,8614 & 0,9927 & 0,9992 \end{bmatrix}, \quad (4.4)$$

$$d_d = -11117, \quad (4.5)$$

$$\epsilon = 8,5 \times 10^{-4}. \quad (4.6)$$

A Figura 4.7 mostra o resultado da simulação com referência degrau para cada saída em malha fechada. Para efeitos de comparação, a Figura 4.8 mostra a simulação em malha aberta. A Figura 4.9 mostra a o sinal de controle da planta em malha fechada. Note que a condição inicial para cada saída é diferente, mas a referência é a mesma para todas. Podemos verificar que a resposta em malha fechada é mais rápida do que a resposta em malha aberta. Neste caso foi utilizada a estrutura da Figura 3.7, ou seja, o controle em malha aberta (que nesse caso são apenas degraus) foi calculado para o sistema completo.

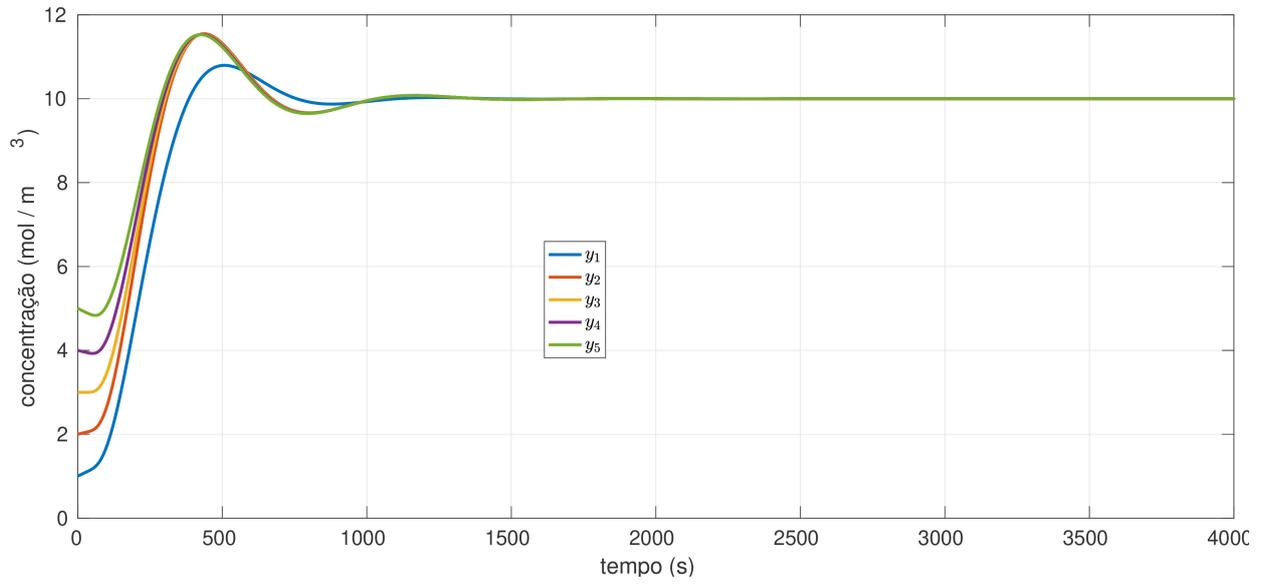


Figura 4.7: Simulação MIMO, gráficos das saídas da planta em malha fechada

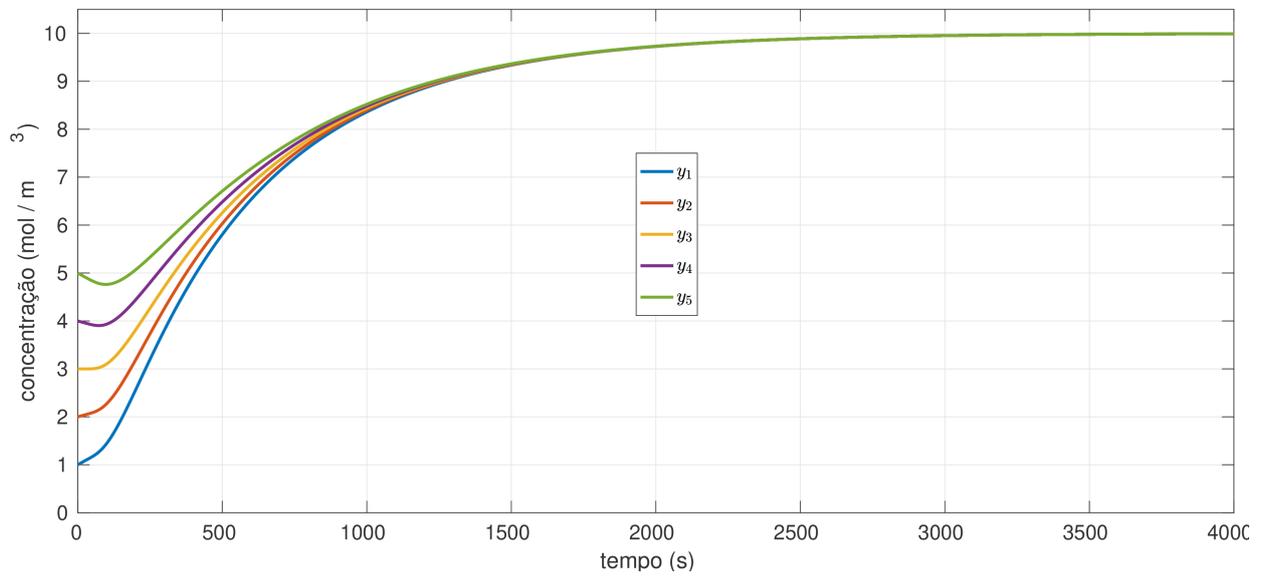


Figura 4.8: Simulação MIMO, gráficos das saídas da planta em malha aberta

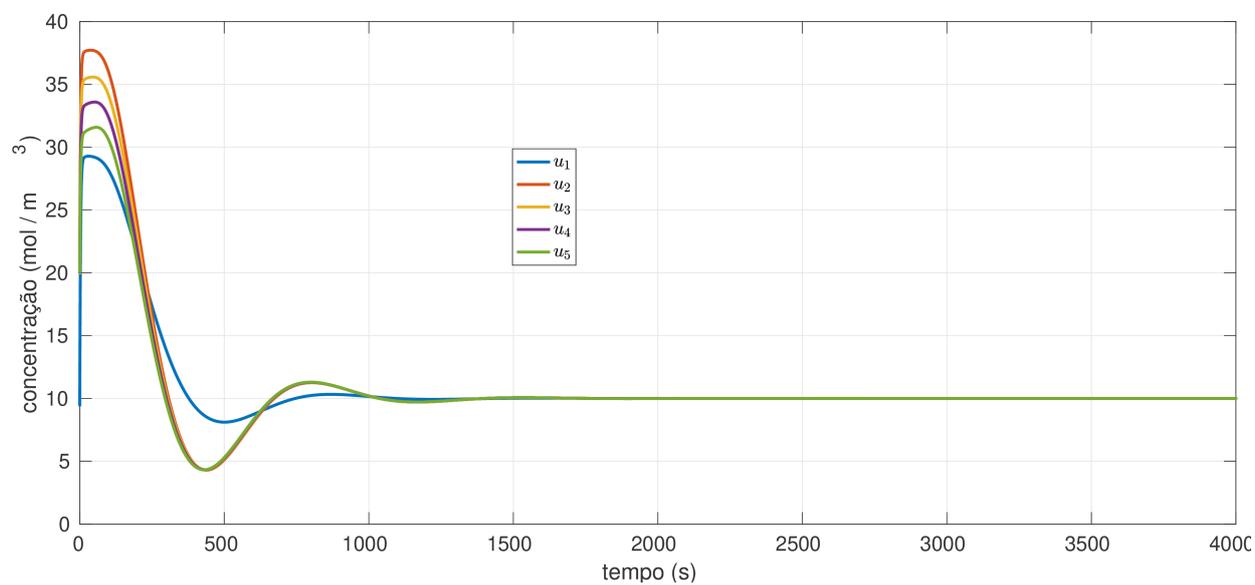


Figura 4.9: Simulação MIMO, gráficos das entradas da planta em malha fechada

Capítulo 5

Conclusões

Este trabalho apresentou um método sistemático para controle de sistemas de alta ordem a partir de modelos reduzidos, ilustrando a técnica com exemplos de sistemas de parâmetros distribuídos.

A técnica apresentada se baseia em transformar a condição de estabilidade em uma restrição de Desigualdade Matricial Linear e então usar esta condição para encontrar ganhos de realimentação que estabilizem o sistema de ordem completa utilizando um observador de estados da ordem do modelo reduzido. No caso MIMO, também foi apresentada uma técnica de desacoplamento para se obter vários SISOs a partir do sistema MIMO original e foi mostrada uma condição LMI para minimizar os efeitos de se negligenciar o acoplamento entre as saídas na síntese do controle. Também foi proposta uma técnica de cálculo de controle em malha aberta utilizando o modelo reduzido.

O método proposto foi capaz de estabilizar uma planta instável em malha aberta e de controlar uma planta descrita por um sistema de EDPs acopladas. Também foi capaz de lidar tanto com o caso em que a entrada e saída da planta estão colocadas na mesma posição espacial quanto com o caso em que elas não estão. Neste último, nota-se a diferença da técnica de redução utilizada em relação às mais comuns, que não envolvem atrasos no modelo reduzido, pois é um caso em que a saída do sistema original demora a reagir à variação na entrada.

5.1 Perspectivas Futuras

As sugestões deixadas para trabalhos futuros são:

1. Incorporar mais restrições de desempenho na condição LMI usada para projetar os ganhos, como respeitar limites na entrada e na saída do sistema para evitar saturações.
2. Buscar novas adaptações do método para o MIMO para sistemas não-planos e para casos onde as saídas mensuráveis não são saídas planas.
3. Explorar extensões para casos não-lineares.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] BALAS, M. J. Active control of flexible systems. *Journal of Optimization theory and Applications*, Springer, v. 25, n. 3, p. 415–436, 1978.
- [2] BALAS, M. Feedback control of flexible systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, IEEE, v. 23, n. 4, p. 673–679, 1978.
- [3] HE, W.; SUN, C.; GE, S. S. Top tension control of a flexible marine riser by using integral-barrier lyapunov function. *IEEE/ASME Trans. Mechatronics*, IEEE, v. 20, n. 2, p. 497–505, 2015.
- [4] HE, W.; GE, S. S. Vibration control of a nonuniform wind turbine tower via disturbance observer. *IEEE/ASME Trans. Mechatronics*, IEEE, v. 20, n. 1, p. 237–244, 2015.
- [5] HE, W.; GE, S. S. Vibration control of a flexible beam with output constraint. *IEEE Trans. Ind. Electron.*, IEEE, v. 62, n. 8, p. 5023–5030, 2015.
- [6] FORTALEZA, E. *Active Control applied to offshore structures: positioning and attenuation of vortex induced vibrations*. Tese (Doutorado) — École Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2009.
- [7] FORTALEZA, E. Active control of a reduced scale riser undergoing vortex-induced vibrations. *J. Offshore Mechanics and Arctic Eng.*, American Society of Mechanical Engineers, v. 135, n. 1, p. 011802, 2013.
- [8] MONTEIRO, F. R.; FILHO, J. O. de A. L.; FORTALEZA, E. Modal reduction based tracking control for installation of subsea equipments. *IFAC-PapersOnLine*, Elsevier, v. 48, n. 6, p. 15–20, 2015.
- [9] SIMÕES, R. D. P. et al. Analytical solution to motion planning and modal-based tracking control for dynamic positioning of subsea equipment. *Ocean Engineering*, Elsevier, v. 164, p. 712–721, 2018.
- [10] BROUWER, D. R.; JANSEN, J. et al. Dynamic optimization of water flooding with smart wells using optimal control theory. In: SOCIETY OF PETROLEUM ENGINEERS. *European Petroleum Conference*. [S.l.], 2002.
- [11] JANSEN, J.-D.; BOSGRA, O. H.; HOF, P. M. Van den. Model-based control of multiphase flow in subsurface oil reservoirs. *J. Process Control*, Elsevier, v. 18, n. 9, p. 846–855, 2008.

- [12] ZHENG, Y.; GU, T. Analytical solution to a model for the startup period of fixed-bed reactors. *Chemical Engineering Science*, Citeseer, v. 51, p. 3773–3779, 1996.
- [13] FLIESS, M. et al. A distributed parameter approach to the control of a tubular reactor: a multivariable case. In: IEEE. *Decision and Control, 1998. Proceedings of the 37th IEEE Conference on*. [S.l.], 1998. v. 1, p. 439–442.
- [14] BALAS, M. J. Direct velocity feedback control of large space structures. *Journal of Guidance and Control*, v. 2, n. 3, p. 252–253, 1979.
- [15] BALAS, M. J. Feedback control of linear diffusion processes. *International Journal of Control*, Taylor & Francis, v. 29, n. 3, p. 523–534, 1979.
- [16] WANG, P. Control of distributed parameter systems. In: *Advances in control systems*. [S.l.]: Elsevier, 1964. v. 1, p. 75–172.
- [17] FRIDMAN, E.; ORLOV, Y. An LMI approach to \mathcal{H}_∞ boundary control of semilinear parabolic and hyperbolic systems. *Automatica*, Elsevier, v. 45, n. 9, p. 2060–2066, 2009.
- [18] PARANJAPE, A. A. et al. PDE boundary control for flexible articulated wings on a robotic aircraft. *IEEE Transactions on Robotics*, IEEE, v. 29, n. 3, p. 625–640, 2013.
- [19] MOLDERINK, A. et al. Management and control of domestic smart grid technology. *IEEE transactions on Smart Grid*, IEEE, v. 1, n. 2, p. 109–119, 2010.
- [20] BIRMAN, K. P.; GANESH, L.; RENESSE, R. V. Running smart grid control software on cloud computing architectures. In: CITESEER. *Workshop Computational Needs for the Next Generation Electric Grid. Cornell University*. [S.l.], 2011. p. 1–33.
- [21] SCHÄFER, B. et al. Decentral smart grid control. *New journal of physics*, IOP Publishing, v. 17, n. 1, p. 015002, 2015.
- [22] LI, X. et al. Constrained optimization of multicast routing for wide area control of smart grid. *IEEE Transactions on Smart Grid*, IEEE, 2018.
- [23] PAIVA, E. B. R. F.; FORTALEZA, E. L. F.; FILHO, J. O. d. A. L. Control of multiple input and multiple output infinite dimensional systems based on modal reduction and flatness theory. In: *XXII Congresso Brasileiro de Automática (CBA 2018), João Pessoa/PB*. [S.l.: s.n.], 2018.
- [24] FLIESS, M. et al. Flatness and defect of non-linear systems: introductory theory and examples. *Int. J. Control*, Taylor & Francis, v. 61, n. 6, p. 1327–1361, 1995.
- [25] RIGATOS, G. G. *Nonlinear control and filtering using differential flatness approaches: applications to electromechanical systems*. [S.l.]: Springer, 2015. v. 25.
- [26] SIRA-RAMIREZ, H.; AGRAWAL, S. K. *Differentially flat systems*. [S.l.]: Crc Press, 2004.
- [27] BOYD, S. et al. *Linear matrix inequalities in system and Control theory*. [S.l.]: Siam, 1994. v. 15.

- [28] DOYLE, J.; PACKARD, A.; ZHOU, K. Review of LFTs, LMIs, and μ . In: IEEE. *Decision and Control, 1991., Proceedings of the 30th IEEE Conference on*. [S.l.], 1991. p. 1227–1232.
- [29] VANANTWERP, J. G.; BRAATZ, R. D. A tutorial on linear and bilinear matrix inequalities. *J. Process Control*, Elsevier, v. 10, n. 4, p. 363–385, 2000.
- [30] DUAN, G.-R.; YU, H.-H. *LMIs in Control systems: analysis, design and appl.* [S.l.]: CRC press, 2013.
- [31] ZHOU, K.; DOYLE, J. C. *Essentials of robust Control*. [S.l.]: Prentice hall Upper Saddle River, NJ, 1998. v. 104.
- [32] GAHINET, P.; APKARIAN, P. A linear matrix inequality approach to H_∞ control. *International journal of robust and nonlinear control*, Wiley Online Library, v. 4, n. 4, p. 421–448, 1994.
- [33] CHILALI, M.; GAHINET, P.; APKARIAN, P. Robust pole placement in LMI regions. *IEEE Trans. Autom. Control*, IEEE, v. 44, n. 12, p. 2257–2270, 1999.
- [34] BAHILL, A. A simple adaptive smith-predictor for controlling time-delay systems: A tutorial. *IEEE Control Syst. magazine*, IEEE, v. 3, n. 2, p. 16–22, 1983.
- [35] LUENBERGER, D. Canonical forms for linear multivariable systems. *IEEE Trans. Autom. Control*, IEEE, v. 12, n. 3, p. 290–293, 1967.
- [36] BOŠKOVIĆ, D. M.; KRSTIĆ, M. Stabilization of a solid propellant rocket instability by state feedback. *International Journal of Robust and Nonlinear Control: IFAC-Affiliated Journal*, Wiley Online Library, v. 13, n. 5, p. 483–495, 2003.

ANEXOS

I. PROVA DO TEOREMA 3.2.1

Para norma \mathcal{H}_∞ menor que $\sqrt{\mu}$, é necessário e suficiente, pelo Lema 2.4.3, existir $P = P^T > \mathbf{0}$ tal que

$$\begin{bmatrix} \underline{A}^T P + P \underline{A} & * & * \\ \underline{B}^T P & -I & * \\ \underline{C} & D_{21} & -\mu I \end{bmatrix} < \mathbf{0}.$$

Substituindo \underline{A} , \underline{B} e \underline{C} com as expressões em (3.8), (3.9) e (3.10), respectivamente, e assumindo

$$P = \begin{bmatrix} Z & * \\ \mathbf{0} & Y \end{bmatrix},$$

com Z e Y matrizes com as mesmas dimensões, e multiplicando à direita e à esquerda (Lema 2.4.2) por

$$Q = \begin{bmatrix} Z^{-1} & * \\ \mathbf{0} & I \end{bmatrix},$$

obtém-se

$$\begin{bmatrix} (A_m X + B_2 K X)_S & * & * & * \\ -K^T B_2^T & (Y A_m - Y L C_1)_S & * & * \\ B_1^T & B_1^T Y - D_{11}^T L^T Y & -I & * \\ C_2^T X + D_{22} K X & -D_{22} K & D_{21} & -\mu I \end{bmatrix} < \mathbf{0},$$

com $X = Z^{-1}$. Esta última LMI pode ser escrita como

$$R + \left\{ \begin{bmatrix} -B_2 \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} K \begin{bmatrix} \mathbf{0} & I & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \right\}_S + \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ I \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} K^T \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -D_{22}^T \end{bmatrix} \right\}_S < \mathbf{0},$$

com

$$R = \begin{bmatrix} (A_m X + B_2 W_1)_S & * & * & * \\ \mathbf{0} & (Y A_m - W_2 C_1)_S & * & * \\ B_1^T & B_1^T Y - D_{11}^T W_2^T & -I & * \\ C_2^T X + D_{22} W_1 & \mathbf{0} & D_{21} & -\mu I \end{bmatrix},$$

$W_1 = KX$ e $W_2 = YL$. Aplicando o Lema 2.4.4, com $\Omega = X^{-1}$, obtém-se a condição suficiente

$$\begin{aligned} & R + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ I \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} X^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ I \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ I \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} X^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ I \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}^T \\ & + \begin{bmatrix} -B_2 \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} W_1 X^{-1} W_1^T \begin{bmatrix} -B_2 \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ -D_{22} \end{bmatrix} W_1 X^{-1} W_1^T \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ -D_{22} \end{bmatrix}^T < \mathbf{0}, \end{aligned}$$

ou,

$$R - M^T \begin{bmatrix} -X & * & * & * \\ \mathbf{0} & -X & * & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -X & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -X \end{bmatrix}^{-1} M < \mathbf{0},$$

com

$$M = \begin{bmatrix} -W_1^T B_2^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -W_1^T D_{22}^T \\ \mathbf{0} & I & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

Pelo complemento de Schur (Lema 2.4.1), obtém-se

$$\begin{bmatrix} R \\ M \begin{bmatrix} -X & * & * & * \\ \mathbf{0} & -X & * & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -X & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -X \end{bmatrix} \end{bmatrix} < \mathbf{0},$$

que é a LMI do Teorema.