Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Aplicação de Gauss em um grupo de Lie com métrica bi-invariante

por

Lindemberg Sousa Massa

Brasília
2008

Agradecimentos

-Primeiramente a Deus.

-A meus pais Dionisio Massa e Divina M. Alves Sousa.

-Ao professor Pedro Roitman.

-Aos colegas do Departamento de Matemática da UnB e do Instituto de Matemática e Estatística da UFG.

-Aos professores da banca examinadora: Profa. Keti Tenenblat e Prof. Walterson Pereira Ferreia.

-Aos professores e funcionários da Universidade de Brasilia (UnB).

-Aos professores e funcionários da Universidade Federal de Goiás (UFG).

-Ao Conselho Nacional de Pesquisa e Desenvolvimento Científico (CNPq).

À minha família.

Resumo

O tema principal deste trabalho é a chamada aplicação de Gauss em um grupo de Lie $\mathbb{G}$ munido de uma métrica bi-invariante. Em particular, com base em, Espirito Santo, Fornari, Frensel, Ripoll, apresentamos uma versão para hipersuperfícies orientadas imersas em $\mathbb{G}$ do teorema de Ruh-Vilms sobre a harmonicidade da aplicação de Gauss.

Seguindo Masal'tsev, fazemos um estudo detalhado sobre o caso particular importante em que $\mathbb{G}$ é a esfera tridimensional $\mathbb{S}^3$, munida da métrica canônica, e, inspirados em Urbano e Castro, relacionamos via aplicação de Gauss, superfícies mínimas em $\mathbb{S}^3$ com superfícies mínimas lagrangeanas no produto de esferas $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ munido com a métrica produto canônica.

Abstract

The main theme of this work is the so-called Gauss map in a Lie group $\mathbb{G}$ with a bi-invariant metric. In particular, based in Espirito Santo, Fornari, Frensel, Ripoll, we present a version for oriented hypersurfaces immersed in $\mathbb{G}$ of the Ruh-Vilms theorem about the harmonicity of the Gauss map.

Following Masal'tsev, we also treat in detail the important special case where $\mathbb{G}$ is the three-dimensional sphere $\mathbb{S}^3$, with the canonical metric, and relate, inspired by Urbano e Castro, using the Gauss map, minimal surfaces in $\mathbb{S}^3$ with minimal Lagrangian surfaces in the product of spheres $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ whith the canonical product metric.

Sumário

Introdução

A aplicação de Gauss clássica para superfícies orientadas no espaço euclidiano tri-dimensional $\mathbb{R}^3$ é sem dúvida um dos conceitos mais importantes da geometria diferencial clássica. Propriedades analíticas desta aplicação refletem propriedades geométricas das superfícies.

A aplicação de Gauss de uma superfície S orientada em $\mathbb{R}^3$ é harmônica se, e somente se, S tem curvatura média constante.

É natural tentar estender este resultado, e as suas conseqüências, definindo de maneira conveniente uma aplicação que faça o papel da aplicação de Gauss em variedades Riemannianas.

Em [19], X. Liu sugeriu uma abordagem para a definição da aplicação de Gauss de uma subvariedade em um grupo de Lie compacto $\mathbb{G}$. Esta abordagem é a seguinte. Denote por $G_k(\mathfrak{g})$ a variedade Grassmaniana que consiste de todos subespaços vetoriais k-dimensionais da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de um dado grupo de Lie $\mathbb{G}$. Seja L_x a translação à esquerda por um elemento $x \in \mathbb{G}$, e seja dL_x a diferencial desta translação. A diferencial $(dL_x)_y$ em $y \in \mathbb{G}$, leva vetores tangentes de T_yM em vetores tangentes de $T_{L_x(y)}M$, e esta ação pode ser estendida por linearidade a subespaços vetoriais de T_yM. Liu chamou a aplicação

$$G : M^k \to G_k(\mathfrak{g}), \qquad x \to (dL_{x^{-1}})T_xM,$$

onde $x \in M^k \subset \mathbb{G}$, a aplicação de Gauss de uma subvariedade $M^k \subset \mathbb{G}$. Portanto, de acordo com Liu, a aplicação de Gauss associa a cada $x \in M$ um subespaço vetorial k-dimensional na álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. De maneira análoga esta aplicação pode ser definida pela translação à direira R_x, por um elemento $x \in \mathbb{G}$.

O tema desta dissertação consiste em explicar a noção introduzida por Liu no caso em que M é uma hipersuperfície orientada suave contida em um grupo de

Lie (n+1)-dimensional $\mathbb{G}$, com uma métrica bi-invariante, definindo a aplicação de Gauss da seguinte forma:

$$g(\eta) : M \to \mathbb{S}^n, \qquad x \to (dL_{x^{-1}})_x(\eta(x)),$$

onde $x \in M$ e η é o campo normal unitário à hipersuperfície M, e $\mathbb{S}^n$ é a esfera unitária de $\mathfrak{g}$.

Para relacionar a noção acima com a introduzida por Liu, note que os subespaços orientados k-dimensionais se identificam naturalmente com pontos da esfera unitária da álgebra de Lie.

A invariância à esquerda da métrica, permite descrever a aplicação introduzida por Liu em termos do campo η.

Estruturamos este trabalho da seguinte maneira:

No capítulo 1 foi feito um breve estudo sobre grupos Lie, abordando temas como a álgebra de Lie, grupo de Lie com métrica bi-invariante e aplicação exponencial em um grupo de Lie. Incluimos também uma noção sobre a álgebra dos quatérnios e sobre os grupos $O(n)$ e $SO(n)$.

No capítulo 2, baseado em [11], estudamos o caso específico em que M é uma superfície orientada em $\mathbb{S}^3$, onde olhamos $\mathbb{S}^3$ como o grupo de Lie dos quaternios unitários. E temos por objetivo principal provar uma versão análoga ao teorema de Ruh-Vilms para hipersuperfícies M^n do espaço euclidiano.

Teorema 2.2. *A aplicação de Gauss $g(\eta) : M^2 \to \mathbb{S}^2$ é harmônica se, e somente se, M^2 tem curvatura média constante.*

No capítulo 3, baseado em [4], abordamos a aplicação de Gauss de uma hipersuperfície orientada em um grupo de Lie (n+1)-dimensional com métrica bi-invariante, e provamos que o laplaciano da aplicação de Gauss, denota neste caso por N, é dado pela seguinte expressão.

$$\Delta N(p) = -n\, d(L_p^{-1})_p(\nabla H(p)) - \left(||B||^2 + Ric(\eta(p))\right) N(p),$$

onde B denota a segunda forma fundamental de M em $\mathbb{G}$, $Ric(\eta)$ a curvatura de Ricci de $\mathbb{G}$ na direção de η, H a curvatura média de M e ∇H o gradiente de M. (Teorema 3.1). Em particular, a equação acima implica que N é harmônica se, e somente se, H é constante.

No capítulo 4, baseado em [3], voltamos a trabalhar com superfícies orientadas em $\mathbb{S}^3$, e definimos a aplicação $\Phi : M \subset \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$, $\Phi = (N_-, -N_+)$, onde N_- e N_+ são as aplicações de Gauss dadas pelas translações à esquerda e à direita, respectivamente. Introduzimos a noção de imersão Lagrangeana e provamos o seguinte resultado.

Teorema 4.4. *Seja $M \subset \mathbb{S}^3$ uma superfície mínima orientada. Se a aplicação induzida $\Phi : M \to \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ é uma imersão, então Φ é uma imersão Lagrangeana mínima. Além disso, a métrica induzida por Φ é conforme à métrica de M.*

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Grupos de Lie

Definição 1.1. *Um **grupo de Lie** é um grupo cujo conjunto subjacente tem uma estrutura de variedade diferenciável, de tal forma que a aplicação produto*

$$p : (g, h) \in \mathbb{G} \times \mathbb{G} \longmapsto gh \in \mathbb{G}$$

é diferenciável.

Dado $g \in \mathbb{G}$, as translações à esquerda e à direita $L_g : \mathbb{G} \to \mathbb{G}$ e $R_g : \mathbb{G} \to \mathbb{G}$, são definidas respectivamente por $L_g(h) = gh$ e $R_g(h) = hg$. Nota-se facilmente que são aplicações diferenciáveis.

Exemplo 1.2. *Seja $Gl(n, \mathbb{R})$ o grupo das transformações lineares inversíveis de $\mathbb{R}^n$, que é naturalmente isomorfo ao grupo das matrizes $n \times n$ inversíveis. Esse grupo é um subconjunto aberto do espaço vetorial $M_n(\mathbb{R})$ das matrizes $n \times n$, e portanto é uma variedade diferenciável. O produto no grupo $Gl(n, \mathbb{R})$ é proveniente do produto usual de matrizes. Se $X = (x_{ij})$ e $Y \in (y_{ij})$ são matrizes $n \times n$, então $Z = XY = (z_{ij})$ é dado por*

$$z_{ij} = \sum_{k=1}^{n} x_{ik} y_{kj},$$

que é um polinômio de grau dois nas variáveis x_{ij}, y_{ij} e, portanto, é uma aplicação diferenciável. Por esta razão $Gl(n, \mathbb{R})$ é um grupo de Lie.

1.1.1 A álgebra de Lie

Uma álgebra de Lie consiste de um espaço vetorial $\mathfrak{g}$ munido de um produto (colchete) $[.,.] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ que satisfaz as propriedades:

1. O colchete $[.,.]$ é bilinear, isto é, linear em cada uma das variáveis.
2. Anti-simetria, isto é, $[A, B] = -[B, A]$, para $A,\ B \in \mathfrak{g}$.
3. Identidade de Jacobi: para $A,\ B,\ C \in \mathfrak{g}$,

$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0$$

Um subespaço $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é uma *subálgebra de Lie* se for fechado para a operação colchete. Nesse caso $\mathfrak{g}$ é também uma álgebra de Lie.

Um exemplo de álgebra de Lie é dado pelo espaço vetorial dos campos de vetores sobre uma variedade diferenciável munido do colchete de Lie de campos de vetores. Outro exemplo é a álgebra $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ formada pelas matrizes reais $n \times n$ com o colchete dado pelo comutador de matrizes

$$[A, B] = AB - BA.$$

Definição 1.3. *Seja $\mathbb{G}$ um grupo de Lie. Um campo de vetores X em $\mathbb{G}$ é dito invariante à esquerda se para todo $g \in \mathbb{G}$, $d(L_g)_h X(h) = X(gh)$ para todo $g,\ h \in \mathbb{G}$.*

Os campos invariantes à esquerda ou à direita são completamente determinados por seus valores no elemento neutro $e \in \mathbb{G}$, pois para todo $g \in \mathbb{G}$ a condição de invariança à esquerda, por exemplo, implica que $X(g) = d(L_g)_e(X(e))$. Portanto, cada elemento do espaço tangente $T_e\mathbb{G}$ determina um único campo invariante à esquerda e um único campo invariante à direita.

Lema 1.4. *Sejam X e Y campos invariantes à esquerda num grupo de Lie $\mathbb{G}$. Então, o colchete de Lie $[X, Y]$ é invariante à esquerda. A mesma afirmação vale para campos invariantes à direita.*

Demonstração: Ver em [8], seção 1.7. ■

Dito de outra maneira, os espaços dos campos invariantes à esquerda (inv^L) e de campos invariantes à direita (inv^R) são subálgebras de Lie da álgebra de Lie de todos os campos de vetores em $\mathbb{G}$. Em particular, ambos os espaços vetoriais admitem estruturas de álgebra de Lie. A álgebra de Lie do grupo $\mathbb{G}$ é qualquer uma das álgebras de Lie inv^L ou inv^R.

Dado $A \in T_e\mathbb{G}$, a notação A^L indica o campo invariante à esquerda, tal que $A^L(e) = A$. E analogamente A^R denota campos invariantes à direita.

O espaço tangente $T_e\mathbb{G}$ é isomorfo tanto a inv^L quanto a inv^R. Através dos isomorfismos o colchete de Lie restrito aos subespaços de campos invariantes induz colchetes $[.,.]_L$ e $[.,.]_R$ em $T_e\mathbb{G}$. Esses colchetes são dados por $[A,B]_L = [A^L, B^L](e)$ e $[A,B]_R = [A^R, B^R](e)$, $A, B \in T_e\mathbb{G}$.

Definição 1.5. *A álgebra de Lie de $\mathbb{G}$, denotada por $\mathfrak{g}$, é qualquer uma das álgebras de Lie isomorfas inv^L, inv^R ou ainda $(T_e\mathbb{G}, [.,.]_e)$.*

Para o estudo de grupos de Lie pode-se considerar qualquer umas dessas álgebras de Lie para representar $(T_e\mathbb{G}, [.,.]_e)$. No entanto iremos considerar $(T_e\mathbb{G}, [.,.]_e)$, como sendo a álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ do grupo de Lie $\mathbb{G}$.

1.1.2 Grupo de Lie com métrica bi-invariante

Definição 1.6. *Uma métrica Riemanniana em $\mathbb{G}$ é invariante à esquerda se:*

$$\langle u, v\rangle_h = \langle (dL_g)_h(u), (dL_g)_h(v)\rangle_{L_g(h)}, \quad g, h \in \mathbb{G}, \quad u, v \in T_g\mathbb{G}.$$

Isto é, se L_g é uma isometria.

De maneira análoga definimos métrica Riemanniana invariante à direita em $\mathbb{G}$. Uma métrica invariante à esquerda e à direita é chamada bi-invariante.

Proposição 1.7. *Seja $\mathbb{G}$ um grupo de Lie com métrica bi-invariante, e X, Y, Z, campos unitários e invariantes à esquerda em $\mathbb{G}$, então:*

- *A conexão Riemanniana de $\mathbb{G}$ é dada por:*

$$\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X, Y].$$

- *O tensor de curvatura R de $\mathbb{G}$ é dado por:*

$$R(X,Y)Z = \frac{1}{4}[[X,Y],Z].$$

- *É válida a seguinte identidade.*

$$\langle [X,Y],Z\rangle + \langle [Z,Y],X\rangle = 0$$

Demonstração: Ver em [2]. ∎

1.1.3 Aplicação exponencial

Seja X um campo invariante (à esquerda ou à direita em $\mathbb{G}$). Denote por φ_t o seu fluxo. Em princípio φ_t é um fluxo local, isto é, para t fixado, o domínio $dom\varphi_t$ de φ_t é um subconjunto aberto de $\mathbb{G}$ das condições iniciais cujas soluções se prolongam até t.

A invariância de X acarreta a seguinte simetria do fluxo φ_t: suponha que $X \in inv^L$, tome $g, h \in \mathbb{G}$ com $h \in dom\varphi_t$ e considere a curva $\gamma(t) = L_g(\varphi_t(h)) = g\varphi_t(h)$. O seu domínio é um intervalo aberto de $\mathbb{R}$, contendo 0 com $\gamma(0) = gh$ pois $\varphi_0(h) = h$. Além disso, pela regra da cadeia $\gamma'(t) = d(L_g)_{\varphi_t(h)}(X(\varphi_t(h)))$, e como X é invariante à esquerda, segue que

$$\gamma'(t) = X(g\varphi_t(h)) = X(\gamma(t)).$$

Portanto, γ é solução de $\frac{dg}{dt} = X(g)$ com condição inicial $\gamma(0) = gh$, isto é, $\gamma(t) = \varphi_t(gh)$. Isto significa que

$$\varphi_t(gh) = g\varphi_t(h) \qquad X \in inv^L.$$

Tomando $h = e$, fica $\varphi_t(g) = g\varphi_t(e)$. Isto é, a solução que passa por g é obtida por translação à esquerda da solução que passa pela identidade.

De maneira análoga, se mostra que

$$\varphi_t(hg) = \varphi_t(h)g \qquad X \in inv^R.$$

(e $\varphi_t(g) = \varphi_t(e)g$) se X é campo invariante à direita.

Proposição 1.8. *Seja $\mathbb{G}$ um grupo de Lie, $\mathfrak{g}$ sua álgebra de Lie, e $X \in \mathfrak{g}$. As trajetórias de X, ($X \in inv^L$ ou $X \in inv^R$), determinam uma aplicação $\varphi : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{G}$ com $\varphi(0) = e$, $\varphi'(t) = X(\varphi(t))$. Então $\varphi(t)$ está definida para todo $t \in \mathbb{R}$ e $\varphi(t+s) = \varphi(t).\varphi(s)$, ($\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{G}$ é chamado de um subgrupo a 1-parâmetro de $\mathbb{G}$).*

Demonstração: Ver [2], capítulo 3. ∎

Essa descrição das trajetórias dos campos invariantes permite definir a aplicação exponencial.

Definição 1.9. *Seja $X \in T_e\mathbb{G}$. Então, $expX = (X^L)_{t=1}(e) = (X^R)_{t=1}(e)$.*

A aplicação exponencial é da forma $exp : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{G}$. Considerando a álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de $\mathbb{G}$ como espaço tangente ao elemento neutro. Pela identificação acima, se X é um campo invariante $exp\,X$ faz sentido e é o valor em $t = 1$ da solução de X que passa pelo elemento neutro quando $t = 0$. Em virtude da proposição acima, a aplicação $t \mapsto exp\,(tX)$, $X \in \mathfrak{g}$, é um homomorfismo. Portanto,

$$\{exp\,(tX) : t \in \mathbb{R}\}$$

é um subgrupo de $\mathbb{G}$, denominado de *subgrupo a 1-parâmetro* gerado por X.

A seguinte proposição reúne algumas propriedades da aplicação exponencial e dos fluxos dos campos invariantes.

Proposição 1.10. *São válidas as seguintes afirmações:*

1. *Se X é campo invariante à direita então $\varphi_t = R_{exp(tX)}$, isto é, $\varphi_t(g) = exp(tX)\ g$.*

2. *Se X é campo invariante à esquerda então $\varphi_t = L_{exp(tX)}$, isto é, $\varphi_t(g) = g\ exp(tX)$.*

3. *$exp(0) = e$.*

4. *Para todo $X \in \mathfrak{g}$, e $t, s \in \mathbb{R}$,*

   $$exp((t+s)X) = exp(tX)\ exp(sX) = exp(sX)\ exp(tX),$$

   isto é, os elementos do subgrupo $\{exp(tX) :\ t \in \mathbb{R}\}$ comutam entre si.

5. *Sejam $X,\ Y \in \mathfrak{g}$. Então, $[X,Y] = 0$ se, e só se, $exp(tX)\ exp(sY) = exp(sY)\ exp(tX)$.*

Demonstração: Apenas a última propriedade não foi provada ainda. Mas ela é consequência da propriedade geral de campos de vetores que afirma que seus fluxos comutam se, e só se, o colchete de Lie entre eles se anula em todos os pontos. ■

O item 4 garante que $(expX)^n = exp(nX)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Em particular, $(expX)^{-1} = exp(-X)$.

1.2 A álgebra dos Quatérnios

A álgebra dos quatérnios é o espaço vetorial real,

$$\mathbb{H} = \{a\mathbf{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}\} \qquad a, b, c, d \in \mathbb{R},$$

A multiplicação em $\mathbb{H}$ é definida por bilinearidade de acordo com a seguinte tabela:

.	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	$-j$
j	j	$-k$	-1	i
k	k	j	$-i$	-1

(1.1)

As operações de adição e multiplicação em $\mathbb{H}$ satisfazem todos os axiomas para corpos, exceto a comutatividade para multiplicação.

É conveniente decompor um quatérnio em duas partes que são tradicionalmente chamadas de parte escalar e parte vetorial. Se $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$, então escrevemos

$$q = q_0 + \overrightarrow{q},$$

onde $q_0 = q_0 1$ e $\overrightarrow{q} = q_1 i + q_2 j + q_3 k$. Chamando q_0 parte escalar e $\overrightarrow{q}$ parte vetorial de q. Verifica-se que o produto

$$pq = (p_0 + \overrightarrow{p})(q_0 + \overrightarrow{q}) = (p_0 q_0 - \overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{q}) + (p_0 \overrightarrow{q} + q_0 \overrightarrow{p} + \overrightarrow{p} \times \overrightarrow{q}), \tag{1.2}$$

onde $\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{q}$ e $\overrightarrow{p} \times \overrightarrow{q}$ são, respectivamente, produto interno e produto vetorial usuais em $\mathbb{R}^3$.

Tem-se também a operação conjugação em $\mathbb{H}$. Se $q = q_0 + \overrightarrow{q}$ pertence a $\mathbb{H}$ então $\overline{q} = q_0 - \overrightarrow{q}$ é chamado conjugado de q. Vejamos algumas propriedade com relação à conjugação:

$$\overline{pq} = \overline{q}\,\overline{p}.$$

Da equação (1.2) obtemos

$$q\overline{q} = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = \overline{q}q.$$

Assim, se identificado $\mathbb{H}$ com $\mathbb{R}^4$, associando q com o vetor (q_0, q_1, q_2, q_3) e denotando o produto interno euclidiano de p e q por $\langle p, q\rangle$, então $q\overline{q} = \langle q, q\rangle$. Usando o fato de que $q\overline{q}$ e $\langle q, q\rangle$ são formas quadráticas, verifica-se:

$$p\overline{q} + q\overline{p} = 2\left\langle p, q\right\rangle. \tag{1.3}$$

Em particular, p é ortogonal a q se, e somente se, $p\overline{q} + q\overline{p} = 0$.

Denota-se a norma euclidiana de um quatérnio q por $|q|$. Como um escalar comuta com qualquer quatérnio,

$$|pq|^2 = \langle pq, pq\rangle = pq\ \overline{pq} = p\ q\ \overline{q}\ \overline{p} = p|q|^2\overline{p} = |p|^2|q|^2.$$

Temos então

$$|pq| = |p||q|.$$

Tendo determinado a norma de um quatérnio, pode-se obter a fórmula do inverso de um quatérnio. Se $q \neq 0$, então

$$q^{-1} = \frac{\overline{q}}{|q|^2}.$$

Se $q \in \mathbb{H}$, com $|q| = 1$, que é chamado *quatérnio unitário*. Neste caso vale, $q^{-1} = \overline{q}$. Se, em particular, u é um quatérnio unitário puro (isto é, $u = \overrightarrow{u}$), então $u^{-1} = -u$.

1.3 Os grupos O(n) e SO(n)

O grupo ortogonal $O(n)$ pode ser definido como o grupo de isometrias do $\mathbb{R}^n$ que fixa a origem. Equivalentemente, é o grupo das matrizes $A_{n\times n}$ com entradas em $\mathbb{R}$ tal que $AA^t = I$ onde A^t é a matriz transposta de A.

$O(n)$ é um subgrupo de $GL_n(\mathbb{R})$, "general linear group", já apresentado no exemplo (1.2).

A aplicação determinante $O(n) \to \{\pm 1\}$ é um homomorfismo sobrejetivo, tendo como núcleo o subgrupo $SO(n)$, "special orthogonal group", o qual tem índice 2.

Além disso, com esta aplicação temos que $O(n)$ *tem duas componentes conexas*, distinguidas por $det\, A = \pm 1$. (Ver em [13], seção 8.4).

A estrutura topologica de $SO(n)$ para pequenos valores de n pode ser descrita em termos de alguns espaços conhecidos.

- $SO(1)$, é um ponto.
- $SO(2)$, são rotações de $\mathbb{R}^2$, e respectivamente homeomorfo e isomorfo a $\mathbb{S}^1$ e aos números complexos unitários.
- $SO(3)$ é homeomorfo a $\mathbb{R}\mathrm{P}^3$.
- $SO(4)$ é homeomorfo a $\mathbb{S}^3 \times SO(3)$.

(Ver em [6]).

Seja
$$\mathbb{S}^3 = \{\text{quatérnios unitários}\} = \{q \in \mathbb{H} \mid q\,\overline{q} = 1\}.$$

Note que $\mathbb{S}^3$ tem duas estruturas: trata-se de um grupo sob multiplicação, e também tem a sua própria geometria como esfera unitária em $\mathbb{R}^4$.

Seja $L_x : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^3$ a translação à esquerda por um elemento $x \in \mathbb{S}^3$, e $(dL_x)_y : T_y\mathbb{S}^3 \to T_{xy}\mathbb{S}^3$ sua diferencial. Com isto iremos considerar $(dL_{x^{-1}})v$ a translação à esquerda de um vetor arbitrário $v \in T_x\mathbb{S}^3$. Vemos facilmente que $\mathbb{S}^3$ é um grupo de Lie, e que sua álgebra $T_e\mathbb{S}^3 = T_{(1,0,0,0)}\mathbb{S}^3 \backsimeq \mathbb{R}^3$.

Usando a representação ortogonal do grupo dos quatérnios unitários. Seja $x = x^0 + ix^1 + jx^2 + kx^3$, $v = v^0 + iv^1 + jv^2 + kv^3$ e $x^{-1} = x^0 - ix^1 - jx^2 - kx^3$. Temos

$$dL_{x^{-1}}v = \phi(x^{-1})\phi(v) = \begin{pmatrix} x^0 & x^1 & x^2 & x^3 \\ -x^1 & x^0 & x^3 & -x^2 \\ -x^2 & -x^3 & x^0 & x^1 \\ -x^3 & x^2 & -x^1 & x^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^0 & -v^1 & -v^2 & -v^3 \\ v^1 & v^0 & -v^3 & v^2 \\ v^2 & v^3 & v^0 & -v^1 \\ v^3 & -v^2 & v^1 & v^0 \end{pmatrix}$$

onde $\phi : \mathbb{H} \to SO(4)$.

Calculando os elementos da primeira coluna no produto das matrizes, notamos que

$$(dL_{x^{-1}})v = \begin{pmatrix} x^0 & x^1 & x^2 & x^3 \\ -x^1 & x^0 & x^3 & -x^2 \\ -x^2 & -x^3 & x^0 & x^1 \\ -x^3 & x^2 & -x^1 & x^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^0 \\ v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} = A_x v, \tag{1.4}$$

$A_x \in SO(4)$.

Para o próximo teorema identificamos $\mathbb{H}$ com $\mathbb{R}^4$, a forma quadrática $|q|$ com a métrica euclidiana e o subespaço dos quatérnios puramente imaginários com $\mathbb{R}^3$.

Teorema 1.11. .

1. *Para todo $p \in \mathbb{S}^3$, a multiplicação à esquerda $a_p : x \mapsto px$ define uma aplicação $\mathbb{H} \to \mathbb{H}$ que é uma isometria que preserva orientação de $\mathbb{H} = \mathbb{R}^4$ com ponto fixo na origem; o mesmo vale pra multiplicação à direita $b_q : x \mapsto x\overline{q}$.*

2. *O homomorfismo $\phi(p, q) : \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3 \to SO(4)$ definido por*

$$\phi(p, q) = a_p \circ b_q : x \mapsto p\, x\, \overline{q}$$

é sobrejetivo, e $\phi(p, q) = id_{\mathbb{H}}$ se, e somente se, $(p, q) = (1, 1)$ ou $(p, q) = (-1, -1)$.

3. *Para todo $q \in \mathbb{S}^3$, a aplicação $r_q : x \mapsto q\, x\, \overline{q}$ é uma isometria que preserva orientação de $\mathbb{H} = \mathbb{R}^4$, o qual é a aplicação identidade para elementos reais de $\mathbb{H}$ e toma quatérnio puro imaginário de $\mathbb{H}$ e leva em quatérnio puro imaginário. Assim define uma rotação do subespaço $\mathbb{R}^3 \subset \mathbb{H}$ dos quatérnios puro imaginários.*

4. *Todo $q \in \mathbb{S}^3$, q não real, tem uma única expressão com a forma $q = cos\,\theta + I sen\,\theta$, onde $I \in \mathbb{S}^3$ é um puro imaginário e $\theta \in (0, \pi)$. Então $r_q = Rot(I, 2\theta)$ é rotação de $\mathbb{R}^3$ sobre o eixo definido por I e um ângulo 2π.*

5. *O homomorfismo $\psi : \mathbb{S}^3 \to SO(3)$ definido por*

$$\psi(q) = r_q$$

é sobrejetivo, e $\psi(q_1) = \psi(q_2)$ se, e somente se, $q_1 = \pm q_2$.

Demonstração: Ver [13], seção 8.5. ∎

Capítulo 2

Aplicação de Gauss em superfícies de curvatura média constante em $\mathbb{S}^3$

Neste capítulo apresentamos uma versão da aplicação de Gauss para uma superfície M^2 imersa em $\mathbb{S}^3$ e, como resultado principal, uma versão análoga do teorema de Ruh-Vilms para hipersupefíces M^n do espaço euclidiano, onde a aplicação de Gauss $n : M^n \to \mathbb{S}^n$ é harmônica se, e somente se, M^n tem curvatura média constante.

Os resultados apresentados foram obtidos por Masal'tsev [11].

2.1 Observações Preliminares

Seja $M \subset \mathbb{S}^3$ uma superfície orientada imersa em $\mathbb{S}^3$, com campo normal unitário η. Considerando $\mathbb{S}^3$ como um grupo de Lie, ver capítulo 1 seção 1.3, podemos definir a chamada aplicação de Gauss $g(\eta) : M \to \mathbb{S}^2 \subset T_e\mathbb{S}^3$ da seguinte maneira

$$g(\eta)(x) = (dL_{x^{-1}})_x(\eta(x)), \tag{2.1}$$

onde $x \in M$. Note que como a métrica é invariante à esquerda $g(\eta)(x)$ é um ponto da esfera unitária.

Neste capítulo, será conveniente introduzir um parametrização local para M e expressar $g(\eta)$ em coordenadas locais.

Seja

$$X(u,v) = (X^0(u,v),\ X^1(u,v),\ X^2(u,v),\ X^3(u,v)), \tag{2.2}$$

uma parametrização local de M.

Temos que $\{X_u, X_v, \eta, X\}$ forma uma base de $\mathbb{R}^4$, onde os três primeiros vetores formam uma base para $T_X\mathbb{S}^3$ e η é o vetor normal unitário da superfície em $\mathbb{S}^3$.
Em coordenadas locais temos

$$g(\eta)(u,v) := A_X\eta(X(u,v)), \tag{2.3}$$

onde o operador A_X é dado pela equação (1.4).
Introduzimos as matrizes $J_1,\ J_2,\ J_3 \in SO(4)$:

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Onde J_1 representa a multiplicação à direita pelo quatérnio $i : x \to y = xi$. Analogamente, J_2 e J_3 representam a translação à direita pelos quatérnios j e k, respectivamente.

Então a equação (2.3) define a aplicação de Gauss $g(\eta)$ da seguinte forma:

$$g(\eta)(x) = (\langle J_1x, \eta(x)\rangle\,,\ \langle J_2x, \eta(x)\rangle\,,\ \langle J_3x, \eta(x)\rangle). \tag{2.4}$$

Proposição 2.1. *Seja $X(u,v)$ uma superfície parametrizada suave em $\mathbb{S}^3$, tal que a primeira e segunda forma são dadas por:*

$$I = e^{2w(u,v)}(du^2 + dv^2), \tag{2.5}$$

$$II = L(u,v)du^2 + 2M(u,v)dudv + N(u,v)dv^2. \tag{2.6}$$

Seja η o campo normal unitário induzido por $X(u,v)$. Então:

- *Os símbolos de Christoffel da primeira forma da superfície podem ser escritos da seguinte forma:*

$$(\Gamma^1_{ij}) = \begin{pmatrix} w_u & w_v \\ w_v & -w_u \end{pmatrix}, \quad (\Gamma^2_{ij}) = \begin{pmatrix} -w_v & w_u \\ w_u & w_v \end{pmatrix}.$$

- *As derivadas dos vetores X_u, X_v e η, são espressadas por:*

$$\begin{aligned} X_{uu} &= w_uX_u - w_vX_v + L\eta - e^{2w}X, \qquad X_{uv} = w_vX_u + w_uX_v + M\eta, \\ X_{vv} &= -w_uX_u + w_vX_v + N\eta - e^{2w}X, \\ \eta_u &= -e^{-2w}(LX_u + MX_v), \qquad \eta_v = -e^{-2w}(MX_u + NX_v). \end{aligned} \tag{2.7}$$

• *As equações de Codazzi e a expressão da curvatura média H são dadas por:*

$$M_v + w_u(L+N) = N_u, \qquad M_u + w_v(L+N) = L_v. \tag{2.8}$$

$$e^{-2w}(L+N) = 2H. \tag{2.9}$$

Demonstração: Análoga à demonstração feita no caso das superfícies em $\mathbb{R}^3$. ■

No caso em que a superfície tem curvatura média constante, derivando (2.9), obtemos:

$$L_u + N_u = 2w_u(L+N), \qquad L_v + N_v = 2w_v(L+N). \tag{2.10}$$

Combinando as equações acima com as equações de Codazzi, tem-se:

$$(L+N)w_u = L_u + M_v, \qquad (L+N)w_v = N_v + M_u. \tag{2.11}$$

Na demonstração do Teorema 2.2, iremos usar o seguinte critério para harmonicidade de uma aplicação $f = (f^1, ..., f^{n+1})$ de uma variedade Riemanniana M^m com métrica $\gamma = (\gamma_{\alpha\beta})$, $\alpha, \beta = 1, ..., m$, na esfera $\mathbb{S}^n \subset R^{n+1}$ com métrica usual g_0 (ver [8], cap. 8). A aplicação $f : (M^m, \gamma) \to (\mathbb{S}^n, g_0)$ é harmônica se, e somente se,

$$\Delta_M f(x) = -2e(f)f(x), \qquad x \in M^m, \tag{2.12}$$

isto é,

$$\Delta_M f^i(x) = -2e(f)f^i(x), \tag{2.13}$$

para todo $i = 1, ..., n+1$, onde $e(f)$ denota a densidade de energia de f,

$$e(f) = \frac{1}{2}\gamma^{\alpha\beta}(x)(g_0)_{ij}(f(x))\frac{\partial f^i(x)}{\partial x^\alpha}\frac{\partial f^j(x)}{\partial x^\beta}, \tag{2.14}$$

e

$$\Delta_M f^i(x) = \gamma^{\alpha\beta}\left(\frac{\partial^2 f^i}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} - \Gamma^\tau_{\alpha\beta}\frac{\partial f^i}{\partial x^\tau}\right) \tag{2.15}$$

é o valor em f^i do operador de Beltrami-Laplace da variedade M^m.

2.2 Aplicação de Gauss em superfícies de curvatura média constante em $\mathbb{S}^3$

Teorema 2.2. *A aplicação de Gauss $g(\eta) : M^2 \to \mathbb{S}^2$ é harmônica se, e somente se, M^2 tem curvatura média constante.*

Demonstração: Sem perda de generalidade, vamos utilizar uma parametrização local como na Proposição 2.1.

Primeiro calculamos a densidade de energia $e(g(\eta))$ de $g(\eta)$ de $M^2 \subset \mathbb{S}^3$. Da equação (2.14) e da primeira forma da superfície, tem-se:

$$e(g(\eta)) = \frac{e^{-2w}}{2}\sum_{i=1}^{3}\left(\left(\frac{\partial g^i}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial g^i}{\partial v}\right)^2\right).$$

Pelas expressões de (2.7) e da definição de $g^i(\eta)$ temos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial g^i}{\partial u} &= \frac{\partial}{\partial u}\langle \eta, J_i X\rangle = \langle \eta_u, J_i X\rangle + \langle \eta, J_i X_u\rangle \\ &= -e^{-2w}(L\langle X_u, J_i X\rangle + M\langle X_v, J_i X\rangle) + \langle \eta, J_i X_u\rangle, \end{aligned} \tag{2.16}$$

analogamente,

$$\frac{\partial g^i}{\partial v} = -e^{-2w}(M\langle X_u, J_i X\rangle + N\langle X_v, J_i X\rangle) + \langle \eta, J_i X_v\rangle. \tag{2.17}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial g^i}{\partial u}\right)^2 &= L^2 e^{-4w}\sum_{i=1}^{3}\langle X_u, J_i X\rangle^2 \\ &\quad +2LMe^{-4w}\sum_{i=1}^{3}\langle X_u, J_i X\rangle\langle X_v, J_i X\rangle \\ &\quad +M^2 e^{-4w}\sum_{i=1}^{3}\langle X_v, J_i X\rangle^2 \\ &\quad -2Le^{-2w}\sum_{i=1}^{3}\langle X_u, J_i X\rangle\langle \eta, J_i X_u\rangle \\ &\quad -2Me^{-2w}\sum_{i=1}^{3}\langle X_v, J_i X\rangle\langle \eta, J_i X_u\rangle \\ &\quad +\sum_{i=1}^{3}\langle \eta, J_i X_u\rangle^2. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Vejamos como cada um dos somatórios acima pode ser reescrito de uma maneira simples.

Notemos que para um vetor unitário $a \in \mathbb{R}^4$, os vetores a, J_1a, J_2a, J_3a formam uma base ortonormal de $\mathbb{R}^4$, portanto

$$X_u = \sum_{i=1}^{3}\langle X_u, J_i X\rangle J_i X$$

onde $\langle X_u, X\rangle = 0$. Os valores $\langle X_u, J_iX\rangle$ são as projeções do vetor X_u sobre os vetores da base ortonormal J_iX. Com isto temos que,

$$\sum_{i=1}^{3} \langle X_u, J_iX\rangle^{\,2} = |X_u|^2 = e^{2w}. \tag{2.19}$$

Analogamente, o somatório da terceira linha da equação (2.18) fica determinado. Temos ainda que

$$\sum_{i=1}^{3} \langle \eta, J_iX_u\rangle^{\,2} = \sum_{i=1}^{3} \langle J_i\eta, X_u\rangle^{\,2} = |X_u|^2 = e^{2w}, \tag{2.20}$$

onde foi usado o fato de que a matriz J_i é anti-simétrica ($\langle J_ia, b\rangle = -\langle a, J_ib\rangle$). Decompondo η e X como combinação linear da base $\{X_u, J_1X_u, J_2X_u, J_3X_u\}$, e fazendo uso da ortogonalidade de η e X temos:

$$0 = \langle \eta, X\rangle = \sum_{i=1}^{3} \langle \eta, J_iX_u\rangle \langle X, J_iX_u\rangle e^{2w} = -e^{2w} \sum_{i=1}^{3} \langle \eta, J_iX_u\rangle \langle J_iX, X_u\rangle\,,$$

portanto,

$$\sum_{i=1}^{3} \langle X_u, J_iX\rangle \langle \eta, J_iX_u\rangle = 0. \tag{2.21}$$

Com argumento análogo, temos que

$$\sum_{i=1}^{3} \langle X_u, J_iX\rangle \langle X_v, J_iX\rangle = 0. \tag{2.22}$$

Usando a definição das matrizes $\{J_i\}$, mostraremos que

$$\sum_{i=1}^{3} \langle X_u, J_iX\rangle \langle \eta, J_iX_v\rangle = -e^{2w}, \tag{2.23}$$

$$\sum_{i=1}^{3} \langle X_v, J_iX\rangle \langle \eta, J_iX_u\rangle = e^{2w}. \tag{2.24}$$

Faremos os cálculos para verificar (2.24), os cálculo referentes a (2.23) são análogos. Temos que

$$\begin{aligned}
\langle J_1X_u, \eta\rangle \langle J_1X, X_v\rangle &= \langle X_ui, \eta\rangle \langle Xi, X_v\rangle = \frac{1}{4}(\overline{X_ui}\eta + \overline{\eta}X_ui)(\overline{Xi}X_v + \overline{X}_vX_i)\\
&= \frac{1}{4}(-i\overline{X}_u\eta + \overline{\eta}X_ui)(-i\overline{X}X_v + \overline{X}_vXi) = \left\langle i, \overline{X}_u\eta\right\rangle \left\langle i, \overline{X}X_v\right\rangle
\end{aligned}$$

análogamente, conclui-se que

$$\langle J_2X_u,\eta\rangle\langle J_2X,X_v\rangle=\left\langle j,\overline{X}_u\eta\right\rangle\left\langle j,\overline{X}X_v\right\rangle,$$
$$\langle J_3X_u,\eta\rangle\langle J_3X,X_v\rangle=\left\langle k,\overline{X}_u\eta\right\rangle\left\langle k,\overline{X}X_v\right\rangle.$$

Portanto,

$$\sum_{i=1}^{3}\langle X_v,J_iX\rangle\langle\eta,J_iX_u\rangle=\left\langle\overline{X}_u\eta,\overline{X}X_v\right\rangle.$$

Sabendo que $\{X,X_u,X_v,\eta\}$ constitui uma base ortogonal e determina a mesma orientação, podemos assumir, sem perda de generalidade, que em (u_0,v_0),
$X(u_0,v_0)=1, X_u(u_0,v_0)=e^{2w(u_0,v_0)}i, X_v(u_0,v_0)=e^{2w(u_0,v_0)}j, \eta(u_0,v_0)=k.$
Então,

$$\left\langle\overline{X}_u\eta,\overline{X}X_v\right\rangle=\left\langle-e^{w(u_0,v_0)}ik,1e^{w(u_0,v_0)}j\right\rangle=-e^{2w(u_0,v_0)}\langle ik,j\rangle=e^{2(u_0,v_0)},\tag{2.25}$$

verificando assim a equação (2.24).
Logo, por (2.18), (2.19), (2.20), (2.21), (2.22) e (2.24) obtemos

$$\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial g^i}{\partial u}\right)^2=e^{-2w}(L^2+M^2)+e^{2w}-2M.\tag{2.26}$$

Similarmente,

$$\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial g^i}{\partial v}\right)^2=e^{-2w}(M^2+N^2)+e^{2w}+2M.\tag{2.27}$$

Portanto, a densidade de energia da aplicação de Gauss é

$$e(g(\eta))=\frac{e^{-2w}}{2}\sum_{i=1}^{3}\left(\left(\frac{\partial g^i}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial g^i}{\partial v}\right)^2\right)=\frac{e^{-4w}}{2}(L^2+N^2+2M^2)+1.\tag{2.28}$$

Agora iremos calcular o valor do operador de Beltrami-Laplace em uma coordenada arbitrária $g^i(\eta)$, $(i=1,2,3)$.
Da equação (2.15) e da métrica da superfície (2.5), obtemos:

$$\Delta_M g^i=e^{-2w}\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2}+\frac{\partial^2}{\partial v^2}\right)g^i.$$

Derivando (2.16), e utilizando (2.7) juntamente com a igualdade $\langle X_u, J_iX_u\rangle = 0$, obtemos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 g^i}{\partial u^2} &= \frac{\partial}{\partial u}(-e^{-2w}(L\langle X_u, J_iX\rangle + M\langle X_v, J_iX\rangle) + \langle \eta, J_iX_u\rangle) \qquad (2.29)\\
&= (-L_u + 2Lw_uM)e^{-2w}\langle X_u, J_iX\rangle - Me^{-2w}\left\langle w_uX_u - w_vX_v + L\eta - e^{2w}X, J_iX\right\rangle\\
&\quad +(-M_u + 2w_uM)\langle X_v, J_iX\rangle - Me^{-2w}\langle w_vX_u + w_uX_v + M\eta, J_iX\rangle\\
&\quad -2Me^{-2w}\langle X_v, J_iX_u\rangle + \left\langle \eta, J_i(w_uX_u - w_vX_v + L\eta - e^{2w}X)\right\rangle\\
&= e^{-2w}(-L_u + w_uL - Mw_v)\langle X_u, J_iX\rangle + e^{-2w}(-M_u + w_uM + Lw_v)\langle X_v, J_iX\rangle\\
&\quad -((L^2 + M^2)e^{-2w} + e^{2w})\langle \eta, J_iX\rangle - 2Me^{-2w}\langle X_v, J_iX_u\rangle\\
&\quad +w_u\langle \eta, J_iX_u\rangle - w_v\langle \eta, J_iX_v\rangle .
\end{aligned}$$

Analogamente, de (2.17) obtemos a expressão para a segunda derivada com relação à v:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 g^i}{\partial v^2} &= \frac{\partial}{\partial v}(-e^{-2w}(M\langle X_u, J_iX\rangle + N\langle X_v, J_iX\rangle) + \langle \eta, J_iX_v\rangle) \qquad (2.30)\\
&= e^{-2w}(-M_v + w_vM + Nw_u)\langle X_u, J_iX\rangle + e^{-2w}(-N_v + w_vN - Mw_u)\langle X_v, J_iX\rangle\\
&\quad -((M^2 + N^2)e^{-2w} + e^{2w})\langle \eta, J_iX\rangle - 2Me^{-2w}\langle X_u, J_iX_v\rangle\\
&\quad -w_u\langle \eta, J_iX_u\rangle + w_v\langle \eta, J_iX_v\rangle .
\end{aligned}$$

Portanto, somando (2.29) e (2.30) e multiplicando o resultado por e^{-2w} obtemos assim o valor do operador de Beltrami-Laplace da função g^i, $\quad i = 1, 2, 3$

$$\begin{aligned}
\Delta_M g^i &= -(e^{-4w}(L^2 + N^2 + 2M^2) + 2)\langle \eta, J_iX\rangle\\
&\quad +e^{-4w}((L + N)w_u - L_u - M_v)\langle X_u, J_iX\rangle\\
&\quad +e^{-4w}((L + N)w_v - N_v - M_u)\langle X_v, J_iX\rangle .
\end{aligned}$$

Da equação de densidade de energia (2.28), e da definição das funções coordenadas da aplicação g, temos então:

$$\begin{aligned}
\Delta_M g^i &= -2e(g(\eta))g^i + e^{-4w}((L + N)w_u - L_u - M_v)\langle X_u, J_iX\rangle \qquad (2.31)\\
&\quad +e^{-4w}((L + N)w_v - N_v - M_u)\langle X_v, J_iX\rangle .
\end{aligned}$$

Como estamos assumindo que M tem curvatura média constante, de (2.11) e (2.31) segue que

$$\Delta_M g^i = -2e(g(\eta))g^i, \qquad i = 1, 2, 3. \qquad (2.32)$$

Portanto, o critério de harmonicidade (2.13) é satisfeito.

Agora supondo que a aplicação $g(\eta) : M \to \mathbb{S}^2$ é harmônica, isto é, o critério (2.13) é satisfeito, então a equação (2.32) é satisfeita. Segue que a equação (2.31) implica que para $i = 1, 2, 3$, vale a seguinte equação:

$$((L + N)w_u - L_u - M_v) \langle X_u, J_i X\rangle + ((L + N)w_v - N_v - M_u) \langle X_v, J_i X\rangle = 0.$$

Multiplicando a equação acima por $J_i X$ e somando em i, $i = 1, 2, 3$, obtemos:

$$((L + N)w_u - L_u - M_v) X_u + ((L + N)w_v - N_v - M_u) X_v = 0.$$

Logo, como X_u e X_v são linearmente independentes, as equações (2.11) são satisfeitas. O que implica que a superfície M tem curvatura média constante. ∎

Exemplo 2.3. *Considere a superfície de revolução em* $\mathbb{S}^3$.

$$X(u, v) = (a \cos\frac{u}{a}, a sen\frac{u}{a}, b \cos\frac{v}{b}, b sen\frac{v}{b}),$$

onde $a^2 + b^2 = 1$ *e as variáveis* u *e* v *pertencem aos intervalos* $0 \leq u \leq 2\pi$, $0 \leq v \leq 2\pi$. *A curvatura média da superfície em* $\mathbb{S}^3$ *é constante*

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right).$$

A aplicação de Gauss $g(\eta)$ *da superfície é dada por*

$$g(\eta)(u, v) = \left(0, -\cos\left(\frac{u}{a} - \frac{v}{b}\right), sen\left(\frac{u}{a} - \frac{v}{b}\right)\right).$$

Onde a desidade de energia de $g(\eta)$ *é igual a:*

$$e(g(\eta)) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right).$$

Como a métrica da superfície $X(u, v)$ *é* $ds^2 = du^2 + dv^2$, *temos*

$$\Delta_M = \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2},$$

donde se verifica diretamente o critério para harmonicidade de $g(\eta)$

$$\Delta g^i(\eta) = -2e(g(\eta))g^i(\eta), \qquad i = 1, 2, 3.$$

Agora estudaremos algumas propriedades geométricas da aplicação $g(\eta)$. Seja $X(u,v)$, como em (2.2), uma parametrização para a superfície M^2. Então, para uma matriz $C \in SO(4)$, a superfície transformada $Y(u,v) = CX(u,v)$ pode ser representada em forma de quatérnios por $Y = q_1Xq_2$, onde q_1 e q_2 são quatérnios com norma unitária. Como $Y_u = CX_u$, $Y_v = CX_v$, $\eta(Y) = C\eta(X)$, temos $\eta(Y) = q_1\eta(X)q_2$, e a aplicação de Gauss da superfície $Y(u,v)$ tem a seguinte forma.

$$\begin{aligned} g(\eta(Y)) &= dL_{Y^{-1}}\eta(Y) = \phi(Y^{-1})\phi(\eta(Y)) = \phi((q_1Xq_2)^{-1}\phi(q_1\eta(X)q_2) \\ &= \phi(q_2^{-1})\phi(X^{-1})\phi(\eta(X))\phi(q_2) = \phi(q_2^{-1})g(\eta(X))\phi(q_2). \end{aligned} \tag{2.33}$$

Em particular, se a superfície $Y(u,v)$ é obtida de $X(u,v)$ por translação à esquerda $Y = q_1X$, a aplicação de Gauss das superfícies coincidem: $g(\eta(X)) = g(\eta(Y))$.

Descreveremos agora a situação em que a aplicação de Gauss $g(\eta) : M^2 \to \mathbb{S}^2$ é conforme. O resultado a seguir contrasta com a situação para superfícies em $\mathbb{R}^3$, onde a aplicação de Gauss é conforme se, e somente se a superfície é totalmente umbílica ou mínima (ver em [15]).

Teorema 2.4. .

a) *Seja $X(u,v)$ uma parametrização isotérmica de uma superfície M^2 imersa em $\mathbb{S}^3$, de forma que as expressões das formas fundamentais de M sejam dadas por (2.5) e (2.6). Então a métrica canônica de $\mathbb{S}^2$ induzida pela aplicação de Gauss g é dado por:*

$$\begin{aligned} ds_g^2 &= (e^{-2w}(L^2+M^2)+e^{2w}-2M)du^2 + 2(e^{-2w}M(L+N)+L-N)dudv \\ &\quad +(e^{-2w}(N^2+M^2)+e^{2w}+2M)dv^2. \end{aligned} \tag{2.34}$$

b) *A aplicação de Gauss $g(\eta) : M^2 \to \mathbb{S}^2$ é conforme se, e somente se, M^2 é totalmente umbílica em $\mathbb{S}^3$.*

Demonstração: Os coeficientes $g_{11} = \left|\frac{\partial g(\eta)}{\partial u}\right|^2$ e $g_{22} = \left|\frac{\partial g(\eta)}{\partial v}\right|^2$ já estão determinados pela equações (2.26) e (2.27); então devemos encontrar o coeficiente g_{12}. Usando (2.16) e (2.17) temos:

$$g_{12} = \left\langle \frac{\partial g(\eta)}{\partial u}, \frac{\partial g(\eta)}{\partial v} \right\rangle$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{3} -e^{-2w}(L\langle X_u, J_iX\rangle + M\langle X_v, J_iX\rangle) + \langle \eta, J_iX_u\rangle) \\
&\quad . \sum_{i=1}^{3} \left(-e^{-2w}(M\langle X_u, J_iX\rangle + N\langle X_v, J_iX\rangle) + \langle \eta, J_iX_v\rangle\right) \\
&= e^{-4w}\{\sum_{i=1}^{3} \left[LM\langle X_u, J_iX\rangle^2 + M^2\langle X_u, J_iX\rangle\langle X_v, J_iX\rangle\right] \\
&\quad + \sum_{i=1}^{3} \left[NM\langle X_v, J_iX\rangle^2 + LN\langle X_v, J_iX\rangle\langle X_u, j_iX\rangle\right]\} \\
&\quad -e^{-2w}\{\sum_{i=1}^{3} [M\langle X_u, J_iX\rangle\langle \eta, J_iX_u\rangle + N\langle X_v, J_iX\rangle\langle \eta, J_iX_u\rangle] \\
&\quad + \sum_{i=1}^{3} [L\langle X_u, J_iX\rangle\langle \eta, J_iX_v\rangle + M\langle X_v, J_iX\rangle\langle \eta, j_iX_v\rangle]\} \\
&\quad + \sum_{i=1}^{3} \langle \eta, J_iX_u\rangle\langle \eta, J_iX_v\rangle .
\end{aligned}
$$

Usando as equações (2.23), (2.24) e as equações (2.19) e (2.21), onde obtidas também para X_v. Então simplificando obtemos:

$$g_{12} = e^{-2w}M(L+N) + L - N. \tag{2.35}$$

Donde concluimos o primeiro item do teorema.

Para o segundo item, sem perda de generalidade consideramos uma parametrização isotérmica. Basta comparar a métrica da superfície (2.5) e a métrica da aplicação de Gauss em $\mathbb{S}^2$, dada por (2.34). Com isto obtemos um sistema de equações $g_{11} = g_{22}$, $g_{12} = 0$.

$$(L^2 - N^2)e^{2w} = 4M, \qquad M(L+N)e^{-2w} + L - N = 0.$$

Com a análise do sistema chegaremos que $M = 0$, e assim $L = N$, ou seja a superfície é totalmente umbílica. ∎

Corolário 2.5. *A imagem da aplicação de Gauss da superfície M^2 é degenerada se, e somente se, a curvatura intrínseca da superfície for nula, isto é: $K_{int} = 0$.*

Demonstração: Sem perda de generalidade podemos supor uma parametrização isotérmica, como no teorema 2.4.

A imagem da aplicação $g(M^2)$ é degenerada se, e somente se,, $D = g_{11}g_{22} - (g_{12})^2$ for nulo.

$$\begin{aligned} D &= (e^{-2w}(L^2 + M^2) + e^{2w} - 2M)(e^{-2w}(N^2 + M^2) + e^{2w} + 2M) \\ &\quad -(e^{-2w}M(L+N) + L - N)^2 \\ &= (e^{-2w}(LN - M^2) + e^{2w})^2 = 0, \end{aligned} \tag{2.36}$$

que é equivalente a, $e^{4w} + LN - M^2 = 0$.
Temos que, pela equação de Gauss, $K_{int} - K_{ext} = 1$, (ver [2], pág. 144). A superfície tem primeira e segunda forma fundamental dadas por (2.5), (2.6), então $K_{int} = -\frac{\Delta w}{e^{2w}}$, (ver [1], pág. 283) e $K_{ext} = \frac{LN-M^2}{e^{4w}}$. Logo,

$$K_{int} = -\frac{\Delta w}{e^{2w}} = 1 + \frac{LN - M^2}{e^{4w}} = \frac{e^{4w} + LN - M^2}{e^{4w}} = 0$$

■

O elemento de área de $\mathbb{S}^2$ induzido pela aplicação g em coordenadas isotérmicas (u, v) é dado por,

$$d\sigma_g = |e^{-2w}(LN - M^2) + e^{2w}|\, du\, dv = |K_{ext} + 1|e^{2w}\, du\, dv. \tag{2.37}$$

Note que o elemento de área da métrica (2.5) é $e^{2w}dudv$. Com isto temos o seguinte corolário.

Corolário 2.6. *Para qualquer domínio $A \subset M^2$ temos que:*

1. *Se $-2 < K_{ext} < 0$, então: área$(g(A)) <$ área(A).*

2. *Se $K_{ext} < -2$ ou $K_{ext} > 0$, então: área$(g(A)) >$ área(A).*

3. *Se $K_{ext} = 0$, ou $K_{ext} = -2$, então: área$(g(A)) =$ área(A).*

Apresentaremos agora um resultado similar à conjectura de Nirenberg, onde, se uma superfície mínima S em $\mathbb{R}^3$ não é um plano, então a aplicação de Gauss é densa sobre a esfera unitária. Resultado provado por R. Osserman em [12]. Posteriormente, F. Xavier provou que a aplicacação de Gauss dessa superfície pode omitir no máximo seis pontos, [18]. Em 1989 Fujimoto provou que o complemento da imagem da aplicação de Gauss de uma superfície mínima não planar em $\mathbb{R}^3$, consiste em no máximo quatro pontos. [5].

Lema 2.7. *A aplicação $g(n) : M^2 \to \mathbb{S}^2$ de uma superfície regular $M^2 \subset \mathbb{S}^3$ de curvatura média constante não pode ser constante.*

Demonstração: Suponha que $p \in M$ é um ponto não umbílico. Como M tem curvatura média constante, então existe uma parametrização local $X(u, v)$ de uma vizinhança de p que é isotérmica e por linhas de curvatura.

Suponha que a aplicação de Gauss é constante em uma superfície regular $X(u, v)$ em $\mathbb{S}^3$, $g(\eta) = (c^1, c^2, c^3)$. Sem perda de generalidade podemos supor que $(c^1, c^2, c^3) = (1, 0, 0)$, já que a equação (2.33) implica que existe uma transformação $C \in SO(4)$ tal que $g(\eta(CX)) = (1, 0, 0)$. Como os vetores X, J_1X, J_2X, J_3X formam uma base ortonormal $g^i = \langle J_iX, \eta\rangle$, temos então

$$\eta = \sum_{i=1}^{3} \langle J_iX, \eta\rangle\, J_iX = J_1X. \tag{2.38}$$

Por (2.7), como $M = 0$, para a parametrização $X(u, v)$, obtemos $\eta_u = -Le^{-2w}X_u$, e fazendo o produto interno por X_u obtemos, $-L = \langle \eta_u, X_u\rangle = \langle J_1X_u, X_u\rangle = 0$ e, analogamente, o produto interno de $\eta_v = -Ne^{-2w}X_v$ com X_v, implica $-N = \langle \eta_v, X_v\rangle = \langle J_iX_v, X_v\rangle = 0$. Portanto, a segunda forma fundamental (2.6) é nula e a superfície é uma grande esfera, com vetor normal constante $\eta = (\eta_0^1, \eta_0^2, \eta_0^3)$. Então a equação (2.38) implica que $X(u, v) = -J_1\eta = constante$, o que contradiz o fato de que a superfície $X(u, v)$ seja regular.

Se p é um ponto umbílico isolado, então existe uma vizinhança de p onde conseguimos uma sequência de pontos não umbílicos convergindo para p. Assim para cada ponto da sequência é válido o resultado obtido acima. Portanto, por continuidade, temos que o resultado é válido também para p.

Se p não é isolado, então M é parte de uma esfera umbílica. Neste caso, verifica-se facilmente que a aplicação de Gauss não é constante.

Observação: No capítulo 4, Proposição 4.1, obtemos a aplicação de Gauss, como translação à esquerda e à direita, para o caso em que p não é um ponto umbílico isolado em $M^2 \subset \mathbb{S}^3$. ∎

No trabalho de B. Solomon ([16], Teorema 1) prova-se que, uma aplicação harmônica de uma variedade compacta em um hemisfério aberto é necessáriamente constante.

Portanto nos servindo de tal resultado e do Lema 2.7 chegaremos ao seguinte corolário.

Corolário 2.8. *A imagem da aplicação de Gauss* $g(\eta) : M^2 \to \mathbb{S}^2$ *de uma superfície compacta de curvatura média constante em* $\mathbb{S}^3$ *intersecta todos os grandes círculos* $\Sigma \subset \mathbb{S}^2$.

Capítulo 3

Aplicação de Gauss em hipersuperfícies de curvatura média constante em um grupo de Lie com métrica bi-invariante

Faremos neste capítulo um estudo mais amplo do que o apresentado no capítulo anterior. Estudaremos agora a aplicação de Gauss N em hipersuperfícies orientadas em um grupo de Lie $\mathbb{G}$ $(n+1)$-dimensional com métrica bi-invariante. Mostraremos como o cálculo do Laplaciano de N nos leva a resultados interessantes quando a hipersuperfície tem curvatura média constante.

Este capítulo é baseado no artigo de Espirito-Santo, Fornari, Frensel, Ripoll, [4].

3.1 Aplicação de Gauss em hipersuperfícies de curvatura média constante em um grupo de Lie com métrica bi-invariante

Seja $\mathbb{G}$ um grupo de Lie com métrica bi-invariante. Dada uma hipersuperfície orientada $M \subset \mathbb{G}$, definimos

$$N : M \to \mathbb{S}^n \subset T_e\mathbb{G},$$

por

$$N(p) = d(L_p^{-1})_p(\eta(p)),$$

onde η é um campo unitário normal a M em $\mathbb{G}$. Observamos que se

$$N(p) = \sum_{i=1}^{n+1} a_i e_i(p),$$

onde $\{e_1, ...e_{n+1}\}$ é uma base ortonormal de $T_e\mathbb{G}$, então o Laplaciano de N é definido por:

$$\Delta N = \sum_{i=1}^{n+1} \Delta a_i \; e_i,$$

onde Δa_i é o Laplaciano de a_i determinado pela métrica de M.
Temos que N é harmônica se

$$\Delta_{\mathbb{S}^n} N = (\Delta N)^T = 0,$$

onde $(\ \ )^T$ denota a projeção ortogonal em $T\mathbb{S}^n$.

Dado $p \in \mathbb{G}$, o tensor de Ricci Ric_p de $\mathbb{G}$ é dado por:

$$\begin{aligned} Ric_p &= \text{traço}(X \mapsto R(U,X)V) \\ &= \sum_{j=1}^{n+1} \langle R(U,E_j)V, E_j \rangle , \end{aligned}$$

onde $\{E_i\}_{i=1,...,n+1}$ é uma base ortonormal de $T_p\mathbb{G}$. A curvatura de Ricci de $\mathbb{G}$ na direção $x = E_{n+1}$ é $Ric_p(x) = Ric_p(x,x)$.

Teorema 3.1. *Seja $\mathbb{G}$ um grupo de Lie com métrica bi-invariante e seja M uma hipersuperfície orientada de $\mathbb{G}$. Denota-se por $||B||$ a norma da segunda forma fundamental de M em $\mathbb{G}$ e por H a curvatura média de M. Então*

$$\Delta N(p) = -nd(L_p^{-1})_p(\nabla H(p)) - \left(||B||^2 + Ric(\eta(p))\right) N(p) \tag{3.1}$$

para todo $p \in M$, onde ∇H denota o gradiente de H em M.

Demonstração: Seja p um ponto fixado em M, e seja $E_i(p),\ i = 1, ..., n$, uma base ortonormal de autovetores da segunda forma de M em $\mathbb{G}$ com relação ao vetor normal η. Denotando por E_i um referencial geodésico extendendo $E_i(p)$ em uma vizinhança de p em M.

Considere Z_i, $i = 1, 2, ..., n + 1$, campos de vetores invariantes à esquerda de $\mathbb{G}$, tais que $Z_i(p) = E_i(p)$, se $\ i = 1, ..., n$ e $Z_{n+1}(p) = \eta(p)$. Escrevendo

$$\eta = \sum_{j=1}^{n+1} a_j Z_j, \tag{3.2}$$

obtemos

$$N = \sum_{j=1}^{n+1} a_j Z_j(e),$$

com

$$a_j(p) = 0, \qquad j = 1, ..., n \quad a_{n+1}(p) = 1. \tag{3.3}$$

Temos então

$$\Delta N = \sum_{k=1}^{n+1} \sum_{i=1}^{n} E_i E_i(a_k) Z_k(e). \tag{3.4}$$

Derivando η com relação a E_i, usando (3.2), obtemos

$$\nabla_{E_i} \eta = \sum_{j=1}^{n+1} E_i(a_j) Z_j + \sum_{j=1}^{n+1} a_j \nabla_{E_i} Z_j. \tag{3.5}$$

Portanto, de (3.3), em p,

$$\nabla_{E_i} \eta = \sum_{j=1}^{n+1} E_i(a_j) Z_j + \nabla_{E_i} Z_{n+1}. \tag{3.6}$$

O produto interno de Z_{n+1} e Z_j, $j = 1, 2, ..., n$, com os lados esquerdo e direito de (3.6) implicam, respectivamente,

$$E_i(a_{n+1})(p) = 0, \qquad i = 1, ..., n$$

e

$$E_i(a_j)(p) = -\lambda_i \delta_{ij} - \langle \nabla_{E_i} Z_{n+1}, Z_j \rangle, \qquad i, j = 1, ..., n, \tag{3.7}$$

onde λ_i é o autovalor do operador $S_\eta : T_pM \to T_pM$, associado ao autovetor E_i, onde $S_\eta X = -(\nabla_X \eta)$, $X \in T_pM$.

De (3.5) obtemos,

$$\nabla_{E_i} \nabla_{E_i} \eta = \sum_{j=1}^{n+1} E_i E_i(a_j) Z_j + 2 \sum_{j=1}^{n+1} E_i(a_j) \nabla_{E_i} Z_j + \sum_{j=1}^{n+1} a_j \nabla_{E_i} \nabla_{E_i} Z_j. \tag{3.8}$$

Agora, usando (3.3) e somando (3.8) em i,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \nabla_{E_i} \nabla_{E_i} \eta \; &= \; \sum_{j=1}^{n+1} \sum_{i=1}^{n} E_i E_i(a_j) Z_j + 2 \sum_{j=1}^{n+1} \sum_{i=1}^{n} E_i(a_j) \nabla_{E_i} Z_j \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n} \nabla_{E_i} \nabla_{E_i} Z_{n+1}. \end{aligned} \tag{3.9}$$

O produto interno de Z_k com os lados direito e esquerdo de (3.9), implica, em p,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} E_iE_i(a_k) &= \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{E_i}\nabla_{E_i}\eta, Z_k\rangle - 2\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} E_i(a_j)\langle \nabla_{E_i}Z_j, Z_k\rangle \\ &\quad - \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{E_i}\nabla_{E_i}Z_{n+1}, Z_k\rangle . \qquad (3.10)\end{aligned}$$

Para finalizar a demonstração, é necessário expressar o lado direito de (3.10) em termos geométricos envolvendo ∇H e $Ric(\eta)$ e $||B||^2$.

Temos da definição de curvatura média e do tensor curvatura R que, em p, para $k = 1, ..., n$,

$$\begin{aligned}E_k(nH) &= E_k\left(\sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{E_i}E_i, \eta\rangle\right) = \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{E_k}\nabla_{E_i}E_i, \eta\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n}(\langle \nabla_{E_i}\nabla_{E_k}E_i, \eta\rangle - \langle R(E_k, E_i)E_i, \eta\rangle - \left\langle \nabla_{[E_i,E_k]}E_i, \eta\right\rangle) \\ &= \sum_{i=1}^{n}(\langle \nabla_{E_i}\nabla_{E_k}E_i, \eta\rangle - \langle R(Z_k, Z_i)Z_i, Z_{n+1}\rangle). \qquad (3.11)\end{aligned}$$

A última igualdade se justifica pelo fato de que, como $\{E_i\}$, $i = 1, 2, ..., n$ é um referencial geodésico em M, vale, em p,

$$[E_i, E_k] = ([E_i, E_k])^T = (\nabla_{E_i}E_k - \nabla_{E_k}E_i)^T = 0.$$

Então $\langle [E_i, E_k], \eta\rangle = 0$ em M, e $\langle \nabla_{E_i}[E_i, E_k], \eta\rangle + \langle [E_i, E_k], \nabla_{E_i}\eta\rangle = 0$,

$$\langle \nabla_{E_i}\nabla_{E_i}E_k - \nabla_{E_i}\nabla_{E_k}E_i, \eta\rangle = 0.$$

Assim, temos em (3.11),

$$E_k(nH) = \sum_{i=1}^{n}(\langle \nabla_{E_i}\nabla_{E_i}E_k, \eta\rangle - \langle R(Z_k, Z_i)Z_i, Z_{n+1}\rangle). \qquad (3.12)$$

Como $\langle E_k, \eta\rangle = 0$, então de (3.12), temos

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{E_i}\nabla_{E_i}\eta, Z_k\rangle &= -\sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{E_i}\nabla_{E_i}E_k, \eta\rangle \\ &= -E_k(nH) - \sum_{i=1}^{n} \langle R(Z_k, Z_i)Z_i, Z_{n+1}\rangle \\ &= -E_k(nH) + Ric(Z_k, Z_{n+1}). \qquad (3.13)\end{aligned}$$

Assim, obtemos uma expressão para a primeira parcela do lado direito de (3.10).

Vamos agora obter uma expressão para a segunda parcela de (3.10). Note que $\langle \eta, \eta \rangle = 1$ implica que $\langle \nabla_{E_i}\eta, \eta \rangle = 0$ e $\langle \nabla_{E_i}\nabla_{E_i}\eta, \eta \rangle + \langle \nabla_{E_i}\eta, \nabla_{E_i}\eta \rangle = 0$. Como λ_i são autovalores da segunda forma fundamental de M em $\mathbb{G}$, temos:

$$\langle \nabla_{E_i}\nabla_{E_i}\eta, \eta \rangle (p) = -\lambda_i^2, \tag{3.14}$$

e

$$\sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{E_i}\nabla_{E_i}\eta, \eta \rangle (p) = -||B||^2. \tag{3.15}$$

De (3.7) e do fato que $\nabla_{E_i} Z_i = \nabla_{Z_i} Z_i = [Z_i, Z_i] = 0$ em p,

$$\begin{aligned} -2\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} E_i(a_j)\langle \nabla_{E_i} Z_j, Z_k \rangle &= 2\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} (\lambda_i \delta_{ij} + \langle \nabla_{E_i} Z_{n+1}, Z_j \rangle)\langle \nabla_{E_i} Z_j, Z_k \rangle \\ &= 2\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{E_i} Z_{n+1}, Z_j \rangle \langle \nabla_{E_i} Z_j, Z_k \rangle . \end{aligned}$$

Fazendo uso da proposição 1.7, notemos que:

$$\begin{aligned} & 2\textstyle\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{E_i} Z_{n+1}, Z_j \rangle \langle \nabla_{E_i} Z_j, Z_k \rangle \\ &= \tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \langle [Z_i, Z_{n+1}], Z_j \rangle \langle [Z_i, Z_j], Z_k \rangle \\ &= \tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \langle [Z_j, Z_{n+1}], Z_i \rangle \langle [Z_k, Z_j], Z_i \rangle \\ &= \tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{j=1}^{n} \left\langle [Z_k, Z_j], \sum_{i=1}^{n+1} \langle [Z_j, Z_{n+1}], Z_i \rangle Z_i \right\rangle \\ &= \tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{j=1}^{n} \langle [Z_k, Z_j], [Z_j, Z_{n+1}] \rangle \\ &= \tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{j=1}^{n+1} \langle [[Z_{n+1}, Z_j], Z_j], Z_k \rangle \\ &= 2\textstyle\sum_{j=1}^{n+1} \langle R(Z_{n+1}, Z_j) Z_j, Z_k \rangle \\ &= -2\textstyle\sum_{j=1}^{n+1} \langle R(Z_{n+1}, Z_j) Z_k, Z_j \rangle . \end{aligned} \tag{3.16}$$

Contudo, para $1 \leqslant k \leqslant n$ temos

$$-2\sum_{j=1}^{n+1} \langle R(Z_{n+1}, Z_j) Z_k, Z_j \rangle = -2Ric(Z_k, Z_{n+1}), \tag{3.17}$$

e, para $k = n+1$

$$-2\sum_{j=1}^{n+1}\langle R(Z_{n+1},Z_j)Z_{n+1},Z_j\rangle = -2Ric(\eta). \tag{3.18}$$

E segue que

$$-2\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}E_i(a_j)\langle\nabla_{E_i}Z_j,Z_k\rangle = \begin{cases} -2Ric(\eta(p)) & se\ \ k=n+1\\ -2Ric(Z_k,Z_{n+1}) & se\ \ k\in\{1,...,n\}\end{cases} \tag{3.19}$$

Falta então identificar a última parcela de (3.10).
Para tal, façamos $E_i = \sum_{j=1}^{n+1} b_j Z_j$, onde $b_j(p) = 0$ se $j \neq i$ e $b_i(p) = 1$. Então

$$\nabla_{E_i}Z_{n+1} = \sum_{j=1}^{n+1} b_j\nabla_{Z_j}Z_{n+1} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n+1} b_j[Z_j,Z_{n+1}]. \tag{3.20}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\nabla_{E_i}E_i(p) &= \sum_{j=1}^{n+1}E_i(b_j)Z_j + \sum_{j=1}^{n+1} b_j\nabla_{E_i}Z_j\\ &= \sum_{j=1}^{n+1}E_i(b_j)Z_j + \nabla_{E_i}Z_i. \end{aligned}\tag{3.21}$$

Sendo $\{E_i\}$ um referêncial geodésico em p, $\nabla_{E_i}E_i(p) = (\nabla_{E_i}E_i(p))^{\perp} = 0$, e como em p, $\nabla_{E_i}Z_i = 0$, segue de (3.21) que $E_i(b_j)(p) = 0,\ \ j = 1,...,n$.
De (3.20) obtemos:

$$\begin{aligned}\nabla_{E_i}\nabla_{E_i}Z_{n+1} &= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n+1}\nabla_{E_i}(b_j[Z_j,Z_{n+1}])\\ &= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n+1}(E_i(b_j)[Z_j,Z_{n+1}] + b_j\nabla_{E_i}[Z_j,Z_{n+1}])\\ &= \frac{1}{2}\nabla_{E_i}[Z_i,Z_{n+1}] = \frac{1}{4}[Z_i,[Z_i,Z_{n+1}]] = R(Z_{n+1},Z_i)Z_i. \end{aligned}\tag{3.22}$$

Portanto, de (3.22), temos que, para $k = 1,...,n$,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\langle\nabla_{E_i}\nabla_{E_i}Z_{n+1},Z_k\rangle &= \sum_{i=1}^{n}\langle R(Z_{n+1},Z_i)Z_i,Z_k\rangle\\ &= -\sum_{i=1}^{n}\langle R(Z_{n+1},Z_i)Z_k,Z_i\rangle = -Ric(Z_k,Z_{n+1})\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\langle \nabla_{E_i}\nabla_{E_i}Z_{n+1}, Z_{n+1}\rangle &= \langle R(Z_{n+1}, Z_i)Z_i, Z_{n+1}\rangle \\ &= -\langle R(Z_{n+1}, Z_i)Z_{n+1}, Z_i\rangle .\end{aligned}$$

Então

$$\sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{E_i}\nabla_{E_i}Z_{n+1}, Z_k\rangle (p) = \begin{cases} -Ric(\eta(p)) & se \;\; k = n+1 \\ -Ric(Z_k, Z_{n+1}) & se \;\; k \in \{1, ..., n\} \end{cases} \tag{3.23}$$

Temos, portanto, de (3.15), (3.19) e (3.23)

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} E_iE_i(a_{n+1}) &= -||B||^2 - 2Ric(\eta(p)) + Ric(\eta(p)) \\ &= -||B||^2 - Ric(\eta(p))\end{aligned}$$

e, para $k = 1, ..., n$, de (3.13), (3.19) e (3.23) obtemos

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} E_iE_i(a_k) &= -E_k(nH) + Ric(Z_k, Z_{n+1}) - 2Ric(Z_k, Z_{n+1}) + Ric(Z_k, Z_{n+1}) \\ &= -E_k(nH).\end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}\Delta N(p) &= \sum_{k=1}^{n+1}\sum_{i=1}^{n} E_iE_i(a_k)Z_k(e) \\ &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} E_iE_i(a_k)Z_k(e) + \sum_{i=1}^{n} E_iE_i(a_{n+1})Z_{n+1}(e) \\ &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} E_iE_i(a_k)Z_k(e) - (||B||^2 + Ric(\eta(p)))N(p) \\ &= \sum_{k=1}^{n}(-E_k(nH))Z_k(e) - (||B||^2 + Ric(\eta(p)))N(p) \\ &= -nd(L_p^{-1})_p(\nabla H(p)) - (||B||^2 + Ric(\eta(p)))N(p).\end{aligned}$$

Obtendo (3.1), finalizando assim o teorema. ■

Tendo obtido tal fórmula para o Laplaciano da aplicação de Gauss da hipersuperfície M, esta nos servirá como base para os seguintes corolários, análogos aos já obtidos no primeiro capítulo para a aplicação de Gauss de uma superfície em $\mathbb{S}^3$.

Corolário 3.2. *Seja $\mathbb{G}$ um grupo de Lie com métrica bi-invariante. Seja M uma hipersuperfície conexa orientada em $\mathbb{G}$, η um campo de vetores normal unitário de M em $\mathbb{G}$, e $N : M \to \mathbb{S}^n \subset T_e\mathbb{G}$, $N(p) = d(L_p^{-1})_p(\eta(p))$. Então as seguintes alternativas são equivalentes:*

i) *M tem curvatura média constante,*

ii) *a aplicação $N : M \to \mathbb{S}^n$ é harmônica,*

iii) *N satisfaz a equação:*

$$\Delta N(p) = -(||B|| + Ric(\eta(p)))N(p).$$

Corolário 3.3. *Seja $\mathbb{G}$ um grupo de Lie com métrica bi-invariante. Seja M uma hipersuperfície conexa orientada em $\mathbb{G}$, sem fronteira e com curvatura média constante. Então as seguintes alternativas são equivalentes:*

i) *$N(M)$ está contido em um hemisfério fechado de $\mathbb{S}^n$,*

ii) *$N(M)$ está contido em um equador de $\mathbb{S}^n$,*

iii) *M é invariante por um subgrupo a 1-parâmetro de isometrias de M gerado por um campo de vetores invariantes à esquerda de $\mathbb{G}$.*

Demonstração: Seja p um ponto fixado de M, e seja $E_i(p)$, $i = 1, .., n$, e Z_i, $i = 1, .., n+1$, como no teorema 3.1.
$(i) \longrightarrow (ii)$.
Assumindo que $N(M)$ está contido em um hemisfério fechado de $\mathbb{S}^n$, existe $v \in \mathbb{S}^n$ tal que

$$\langle N(p), v\rangle \leqslant 0$$

para todo $p \in M$. Observe que $Ric(\eta) \geqslant 0$,

De fato, pela equação (3.18), e pela equação (3.16), onde para $k = n+1$ e observando a quarta igualdade, tem-se em p,

$$-2Ric(\eta) \;=\; -2\sum_{j=1}^{n+1} \langle R(Z_{n+1}, Z_j)Z_{n+1}, Z_j\rangle$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\langle [Z_{n+1}, Z_j], [Z_j, Z_{n+1}]\rangle$$
$$= -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}||[Z_j, Z_{n+1}]||^2.$$

Assim,

$$Ric(\eta) = \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{n}||[Z_j, Z_{n+1}]||^2 \geqslant 0.$$

Usando (3.1), e o fato que $Ric(\eta) \geqslant 0$, obtemos:

$$\Delta\langle N, v\rangle = \langle \Delta N, v\rangle = -(||B||^2 + Ric(\eta))\langle N, v\rangle \geqslant 0,$$

onde vemos que $\langle N, v\rangle$ é uma função subharmonica em uma variedade compacta M (ver [2], página 96). Segue portanto que $\langle N, v\rangle$ é constante e então $\Delta\langle N, v\rangle = 0$; temos portanto $(||B||^2 + Ric(\eta)) = 0$ ou $\langle N, v\rangle = 0$. Se $\langle N, v\rangle = 0$, então $N(M)$ está contido em um equador

$$\{x \in \mathbb{S}^n | \langle x, v\rangle = 0\}; \tag{3.24}$$

Agora suponha que $||B||^2 + Ric(\eta) = 0$. Temos, $||B||^2 = 0$ e M é totalmente geodésica.

Note que as curvas integrais dos campos Z_i, $i = 1, ..., n$, são geodésicas de $\mathbb{G}$, isto segue do primeiro item do teorema 1.7. Assim, como M é totalmente geodésica os campos Z_i, $i = 1, ..., n$, são tangentes a M não apenas em p, mas globalmente. Como $\langle Z_{n+1}, Z_i\rangle = 0$ em $\mathbb{G}$, a afirmação anterior implica que Z_{n+1} restrito a M é um campo ortogonal a M. Logo, pela conexidade de M e pelo fato de $\eta(p) = Z_{n+1}(p)$, Z_{n+1} restrito a M coincide com η.

Finalmente, como Z_{n+1} é invariante à esquerda

$$N(p) = (dL_p^{-1})_p(\eta(p)) = (dL_p^{-1})_p(Z_{n+1}(p)), \quad \forall p \in M.$$

Assim, $N(M)$ é um único ponto. Com isto termina primeira implicação.

$(ii) \longleftrightarrow (iii)$

Dado $v \in \mathfrak{g}$, $v \neq 0$, seja V o campo invariante à esquerda gerado por v, $V(e) = v$. Então, dado $p \in M$, temos:

$$\langle \eta(p), V(p)\rangle = \left\langle d(L_p)_p^{-1}\eta(p), d(L_p)_p^{-1}V(p)\right\rangle = \langle N(p), v\rangle,$$

assim $N(M)$ está contido no hemisfério (3.24) se, e somente se, V é um campo de vetores em M, isto é, se, e somente se, M é invariante por um subgrupo de isometrias determinado por V, a saber, $\Phi_t = L_{exp(tv)} : t \in \mathbb{R}$, onde $exp : T_e\mathbb{G} \rightarrow \mathbb{G}$ é a aplicação exponencial.

$(ii) \longrightarrow (i)$

É obvia. $\blacksquare$

Capítulo 4

Superfícies mínimas Lagrangeanas

Neste capítulo, mostramos como definir imersões de superfícies Lagrangeanas em $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$, o produto de esferas com a métrica produto canônica, partindo das aplicações de Gauss à esquerda e à direita de uma superfície orientada $M \subset \mathbb{S}^3$. Mostramos que se M é uma superfície mínima a imersão mencionada acima é também mínima.

Este capítulo é baseado no trabalho de artigo de Castro e Urbano [3], e em notas obtidas por contato pessoal com W. P. Ferreira e P. Roitman.

4.1 Observações Preliminares

Seja $\mathbb{S}^2$ a esfera unitária em $\mathbb{R}^3$ munida com a métrica canônica $\langle , \rangle$ e estrutura complexa dada por $J_p v = p \times v$, $p \in \mathbb{S}^2$, $v \in T_p\mathbb{S}^2$, onde $\times$ é o produto vetorial usual do $\mathbb{R}^3$. A 2-forma de Área em $\mathbb{S}^2$ será denotada por ω_0. Para $p \in \mathbb{S}^2$, temos $\omega_0(v, w) = \langle J_p v, w \rangle = det\{p, v, w\}$, $\forall\ v, w \in T_p\mathbb{S}^2$.

Dotando $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ com a métrica produto (também denotado por $\langle , \rangle$), vamos considerar estrutura complexa J em $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ dada por:

$$J_{(p_1,p_2)}(v) = (J_{p_1}v_1, J_{p_2}v_2) = (p_1 \times v_1, p_2 \times v_2),$$

$v = (v_1, v_2) \in T_{(p_1,p_2)}(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2)$, $(p_1, p_2) \in (\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2)$.

Seja $\Phi = (\phi, \psi) : M \to \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ uma imersão de uma superfície M e $g = \phi^* \langle , \rangle + \psi^* \langle , \rangle$ a métrica induzida. A 2-forma ω em $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$, dada por $\omega = \pi_1^*\omega_0 + \pi_2^*\omega_0$, onde π_i, $i = 1, 2$, são as projeções canônicas de $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$, torna $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ uma variedade simplética.

A imersão é dita *Lagrangeana* se $\Phi^*\omega = 0$, isto é, $\phi^*\omega_0 + \psi^*\omega_0 = 0$. Isto significa que

$$\begin{array}{ll} \omega_0(d\phi_p(u), d\phi_p(v)) + \omega_0(d\psi_p(u), d\psi_p(v)) & = \\ \langle Jd\phi_p(u), d\phi_p(v)\rangle + \langle Jd\phi_p(u), d\phi_p(v)\rangle & = \\ \langle Jd\Phi_p(u), d\Phi_p(v)\rangle = 0, & \end{array} \tag{4.1}$$

para quaisquer $p \in M$ e $v, w \in T_pM$.

Se $\Phi = (\phi, \psi) : M \to \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ é uma imersão de uma superfíce orientada com 2-forma de área ω_M, podemos definir o jacobiano de ϕ e ψ por

$$\phi^*\omega_0 = Jac(\phi)\omega_M, \quad \psi^*\omega_0 = Jac(\psi)\omega_M.$$

Portanto, Φ é Langrangeana se, e somente se, $Jac(\psi) = -Jac(\phi)$.

4.2 Superfícies mínimas Lagrangeanas

Vamos agora mostrar como uma superfície orientada imersa em $\mathbb{S}^3$, induz, via suas aplicações de Gauss, uma imersão Lagrangeana em $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$. O nosso ponto de vista difere de Castro e Urbano, onde utiliza-se a noção de aplicação de Gauss introduzida por Hoffman e Osserman para induzir imersões Lagrangeanas.

Seja M uma superfície orientada com campo normal unitário η em $\mathbb{S}^3$. Como vimos no segundo capítulo, podemos definir as aplicações N_-, $N_+ : M \subset \mathbb{S}^3 \to T_e\mathbb{S}^3$.

$$\begin{aligned} N_-(p) = (dL_{p^{-1}})_p\eta(p) &= \overline{p}\,\eta(p), \\ N_+(p) = (dR_{p^{-1}})_p\eta(p) &= \eta(p)\,\overline{p}, \end{aligned}$$

onde L_p, R_p são translações à esquerda e à direita, respectivamente, por um elemento $p \in M$, e (dL_p) e (dR_p) suas respectivas derivadas. A notação envolvendo quatérnios introduzida no capítulo 1 será utilizada.

Definimos a aplicação $\Phi : M \subset \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$.

$$\Phi(p) = (N_-(p), -N_+(p)). \tag{4.2}$$

Mostraremos a seguir que a aplicação Φ, caso seja uma imersão, será uma imersão Lagrangeana.

Por conveniência, ao longo deste capítulo, vamos utilizar uma parametrização local por linhas de curvatura para simplificar os cálculos. Para estender os resultados de tais cálculos aos pontos umbílicos, utilizamos os argumentos usuais envolvendo continuidade e a classificação das superfícies totalmente umbílicas de $\mathbb{S}^3$.

Seja então $p : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{S}^3$ uma parametrização local de M por linhas de curvatura, onde U é um aberto de $\mathbb{R}^3$, tal que p, p_x, p_y, η, forma uma base ortogonal de $\mathbb{R}^4$ orientada positivamente. Utilizamos coordenadas (x, y) para denotar os pontos de U.

Proposição 4.1. *Se a aplicação* $\Phi : M \subset \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ *definida em (4.2) é uma imersão, então* Φ *é uma imersão lagrangeana.*

Demonstração: Seja p um ponto não umbílico de M, e $p(x, y)$ uma parametrização por linhas de curvatura em uma vizinhança de p. Note que

$$\begin{aligned} J_{-N_+}(-N_+)_x &= J(-N_+)_x = N_+ \times (N_+)_x, \\ J_{N_-}(N_-)_x &= J(N_-)_x = N_- \times (N_-)_x. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Analogamente para as derivadas em y.
Então

$$\begin{aligned} \langle J\Phi_x, \Phi_y \rangle &= \langle (J(N_-)_x, J(-N_+)_x), ((N_-)_y, (-N_+)_y) \rangle \\ &= \langle J(N_-)_x, (N_-)_y \rangle + \langle J(-N_+)_x, -(N_+)_y \rangle \\ &= \langle N_- \times (N_-)_x, (N_-)_y \rangle - \langle N_+ \times (N_+)_x, (N_+)_y \rangle \\ &= 0. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Por (4.1) vemos que Φ é uma imersão Lagrangeana.

Vamos analisar agora o caso em que p é um ponto umbílico. Suponha que existe uma seqüência de pontos não umbílicos convergindo para p. Assim, para cada ponto da sequência obtemos o resultado acima. Logo, por continuidade, podemos estender o resultado e Φ é uma imersão lagrangeana.

Caso a seqüência acima não exista, existe uma vizinhança de p composta de pontos umbílicos. Esta vizinhança é parte de uma esfera umbílica. Neste caso, sem perda de generalidade, podemos parametrizar a esfera de raio $sen\, z_0$ em $\mathbb{S}^3$ da seguinte forma:

$$p(x, y) = (sen\, z_0\, cos\, x\, sen\, y,\ cos\, z_0,\ sen\, z_0\, sen\, x\, sen\, y,\ sen\, z_0\, sen\, y),$$

onde $0 < y < \pi$, $0 < x < 2\pi$ e z_0 é uma constante. Temos que o campo normal unitário η em $\mathbb{S}^3$ é dado por:

$$\eta(x,y) = (cos\, z_0\, cos\, x\, sen\, y,\ -sen\, z_0,\ cos\, z_0\, sen\, x\, sen\, y,\ cos\, z_0\, cos\, y).$$

A aplicação $\Phi(p) = (N_-, -N_+)$.

$$\begin{array}{l} N_- = (0,\ -cos\, x\, sen\, y,\ -cos\, y,\ -sen\, x,\ cos\, y), \\ N_+ = (0,\ -cos\, x\, sen\, y,\ -cos\, y,\ -sen\, x,\ cos\, y). \end{array} \tag{4.5}$$

E por (4.1), vemos claramente que M é uma imersão lagrangeana. ■

Lema 4.2. *Os coeficientes induzidos pela aplicação da primeira forma fundamental da esfera $\mathbb{S}^2$ pelas aplicações N_- e N_+, para uma parametrização p de M por linhas de curvatura são dados, respectivamente por:*

$$\begin{array}{l} E_- = E(1+k_1^2), \\ F_- = \sqrt{EG}(k_2 - k_1), \\ G_- = G(1+k_2^2), \end{array} \tag{4.6}$$

$$\begin{array}{l} E_+ = E(1+k_1^2), \\ F_+ = -\sqrt{EG}(k_2 - k_1), \\ G_+ = G(1+k_2^2). \end{array} \tag{4.7}$$

Demonstração: Note que

$$\begin{array}{l} (N_-)_x = \overline{p}_x\eta + \overline{p}\eta_x = \overline{p}_x\eta - k_1\overline{p}p_x, \\ (N_-)_y = \overline{p}_y\eta + \overline{p}\eta_y = \overline{p}_y\eta - k_2\overline{p}p_y, \end{array} \tag{4.8}$$

e

$$\begin{array}{l} (N_+)_x = \eta_x\overline{p} + \eta\overline{p}_x = -k_1p_x\overline{p} + \eta\overline{p}_x, \\ (N_+)_y = \eta_y\overline{p} + \eta\overline{p}_y = -k_2p_y\overline{p} + \eta\overline{p}_y. \end{array} \tag{4.9}$$

k_1 e k_2 são as curvaturas principais de M correspondentes às direções p_x e p_y respectivamente em $p(x,y)$.

$$\begin{aligned} E_- &= \langle (N_-)_x,\, (N_-)_x \rangle = \langle \overline{p}_x\eta + \overline{p}\eta_x,\ \overline{p}_x\eta + \overline{p}\eta_x \rangle \\ &= \langle \overline{p}_x\eta,\, \overline{p}_x\eta \rangle + 2\langle \overline{p}_x\eta,\, \overline{p}\eta_x \rangle + \langle \overline{p}\eta_x,\, \overline{p}\eta_x \rangle \\ &= E + k_1^2E = E(1+k_1^2). \end{aligned}$$

pois

$$\langle \overline{p}_x\eta,\, \overline{p}\eta_x \rangle = k_1\langle \overline{\eta}p_x,\, \overline{p}p_x \rangle = k_1|p_x|^2\langle \overline{\eta},\, \overline{p} \rangle = k_1|p_x|^2\langle \eta,\, p \rangle = 0.$$

Analogamente, teremos que $\quad G_- = G(1+k_2^2)$.

Tendo que $\overline{p}_y\eta \in T_e\mathbb{S}^3$, podemos escrever $\overline{p}_y\eta$ como combinação linear dos vetores que forma a base ortogonal de $T_e\mathbb{S}^3$, $\overline{p}_y\eta = a\overline{p}p_x + b\overline{p}p_y + c\overline{p}\eta$.
Temos que $c = \left\langle \overline{p}_y\eta,\, \overline{p}\eta \right\rangle = 0$, e $b = \frac{\left\langle \overline{p}_y\eta, \overline{p}p_y \right\rangle}{G} = -\frac{\left\langle \overline{p}_y\eta, \overline{p}_y p \right\rangle}{G} = 0$, portanto, $\overline{p}_y\eta = a\overline{p}p_x$.

Pela escolha da orientação da superfície temos que, fazendo $a = -\frac{\sqrt{G}}{\sqrt{E}}$, chegamos que $\eta = \frac{ap_y\overline{p}p_x}{G} = -\frac{ap_y\overline{p}_x p}{G} = \frac{1}{\sqrt{EG}}p_x\overline{p}_y p$. Então:

$$\begin{aligned}
F_- &= \langle (N_-)_x,\, (N_-)_y \rangle \;=\; \left\langle \overline{p}_x\eta + \overline{p}\eta_x,\; \overline{p}_y\eta + \overline{p}\eta_y \right\rangle = \left\langle \overline{p}_x\eta - k_1\overline{p}p_x,\, \overline{p}_y\eta - k_2\overline{p}p_y \right\rangle \\
&= \left\langle \overline{p}_x\eta,\, \overline{p}_y\eta \right\rangle - k_2 \left\langle \overline{p}_x\eta,\, \overline{p}p_y \right\rangle - k_1 \left\langle \overline{p}p_x,\, \overline{p}_y\eta \right\rangle + k_1k_2 \left\langle \overline{p}p_x,\, \overline{p}p_y \right\rangle \\
&= -k_2\langle \overline{p}p_y,\, \frac{E}{\sqrt{EG}}\overline{p}_y p\rangle - k_1\langle -\frac{G}{\sqrt{EG}}\overline{p}_x p,\, \overline{p}p_x\rangle \\
&= k_2\frac{EG}{\sqrt{EG}} - k_1\frac{EG}{\sqrt{EG}} \;=\; \sqrt{EG}(k_2 - k_1).
\end{aligned}$$

E com cálculos análogos chegaremos aos coeficientes para a aplicação N_+. ■

Reescrevendo (4.3), as expressões análogas envolvendo y, temos

$$\begin{array}{lll}
J'(-N_+)_x & = N_+ \times (N_+)_x = -k_1 p_x\overline{\eta} + p_x\overline{p}, \\
J(N_-)_x & = N_- \times (N_-)_x = -\overline{p}p_x + k_1\overline{\eta}p_x.
\end{array} \tag{4.10}$$

$$\begin{array}{lll}
J'(-N_+)_y & = N_+ \times (N_+)_y = -k_2 p_y\overline{\eta} + p_y\overline{p}, \\
J(N_-)_y & = N_- \times (N_-)_y = -\overline{p}p_y + k_2\overline{\eta}p_y.
\end{array} \tag{4.11}$$

Onde J' denota a ação de J em N_+.

Escrevendo os vetores normais a $\Phi(x,y)$ em $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$,

$$\begin{array}{l}
\eta_1 = \frac{J\Phi_x}{|J\Phi_x|} = \left(\frac{J(N_-)_x}{|J\Phi_x|},\;\; \frac{J'(-N_+)_x}{|J\Phi_x|} \right), \\
\eta_2 = \frac{J\Phi_y}{|J\Phi_y|} = \left(\frac{J(N_-)_y}{|J\Phi_y|},\;\; \frac{J'(-N_+)_y}{|J\Phi_y|} \right).
\end{array} \tag{4.12}$$

Iremos considerar $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ como uma subvariedade de $\mathbb{R}^6$ de maneira natural e denotar por $\widehat{\nabla}$, e d as respectivas conexões Riemannianas. Vamos denotar por ∇ a conexão Riemanniana em M.

Sendo $X = (X_1, Y_1)$ e $Y = (X_2, Y_2)$ campos em $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$, temos:

$$\widehat{\nabla}_X Y = dY_q(X) - B_q(X, Y),$$

onde $B_q(X,Y) = -(\langle X_1, Y_1\rangle\, q_1,\ \langle X_2, Y_2\rangle\, q_2)$, é a segunda forma fundamental de $\mathbb{S}^2\times\mathbb{S}^2$ como subvariedade de $\mathbb{R}^6$.

$$\begin{aligned}\widehat{\nabla}_{\Phi_x}\eta_i &= d\eta_i(\Phi_x) - B_\Phi(\eta_i,\Phi_x) &(4.13)\\ \widehat{\nabla}_{\Phi_y}\eta_i &= d\eta_i(\Phi_y) - B_\Phi(\eta_i,\Phi_y). &(4.14)\end{aligned}$$

$i=1,2$.

Então os coeficientes da segunda forma fundamental da imersão são dados por:

$$\begin{aligned}L_i = II^i(\Phi_x,\Phi_x) &= -\left\langle \widehat{\nabla}_{\Phi_x}\eta_i, \Phi_x\right\rangle &= -\left\langle d\eta_i(\Phi_x),\, \Phi_x\right\rangle,\\ N_i = II^i(\Phi_x,\Phi_y) &= -\left\langle \widehat{\nabla}_{\Phi_x}\eta_i, \Phi_y\right\rangle &= -\left\langle d\eta_i(\Phi_x),\, \Phi_y\right\rangle,\\ M_i = II^i(\Phi_y,\Phi_y) &= -\left\langle \widehat{\nabla}_{\Phi_y}\eta_i, \Phi_y\right\rangle &= -\left\langle d\eta_i(\Phi_y),\, \Phi_y\right\rangle.\end{aligned} \tag{4.15}$$

$i=1,2$.

Lema 4.3. *Seja $p(x,y)$ uma parametrização local por linhas de curvatura de uma superfície $M\subset\mathbb{S}^3$. Se a aplicação Φ é uma imersão definida por (4.2), os coeficientes da segunda forma fundamental de Φ, segundo η_1 e η_2, definidas por (4.12), são dados respectivamente por:*

$$\begin{aligned}L_1 &= \tfrac{2(k_1)_xE}{\sqrt{2E_-}},\\ M_1 &= \tfrac{2(k_1)_yE}{\sqrt{2E_-}},\\ N_1 &= \tfrac{2(k_2)_xG}{\sqrt{2E_-}},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}L_2 &= \tfrac{2(k_1)_yE}{\sqrt{2G_-}},\\ M_2 &= \tfrac{2(k_2)_xG}{\sqrt{2G_-}},\\ N_2 &= \tfrac{2(k_2)_yG}{\sqrt{2G_-}}.\end{aligned}$$

Demonstração: De (4.10), (4.6) e observando que $\{p, p_x, p_y, \eta\}$ forma uma base ortogonal de $\mathbb{R}^4$, temos,

$$\begin{aligned}|J\Phi_x|^2 &= \langle J\Phi_x, J\Phi_x\rangle = \langle (J(N_-)_x, (J(-N_+)_x),\ ((J(N_-)_x, (J(-N_+)_x)\rangle\\ &= \langle (J(N_-)_x, (J(N_-)_x\rangle + \langle (J(-N_+)_x, (J(-N_+)_x\rangle\\ &= \langle -\overline{p}p_y + k_1\overline{\eta}p_y, -\overline{p}p_y + k_1\overline{\eta}p_y\rangle + \langle p_x\overline{p} + k_1p_x\overline{\eta},\ p_x\overline{p} + k_1p_x\overline{\eta}\rangle\\ &= 2E(1+k_1^2) = 2E_-. \end{aligned}\tag{4.16}$$

Tendo $\eta_1 = \frac{J\Phi_x}{|J\Phi_x|} = \left(\frac{J(N_-)_x}{\sqrt{2E_-}}, \frac{J'(-N_+)_x}{\sqrt{2E_-}}\right) = (\alpha, \beta)$ e (4.15) para $i = 1$.

$$\begin{array}{rclcl} L_1 & = & II^1(\Phi_x, \Phi_x) & = & -\langle \alpha_x, (N_-)_x\rangle + \langle \beta_x, (N_+)_x\rangle, \\ N_1 & = & II^1(\Phi_x, \Phi_y) & = & -\langle \alpha_x, (N_-)_y\rangle + \langle \beta_x, (N_+)_y\rangle, \\ M_1 & = & II^1(\Phi_y, \Phi_y) & = & -\langle \alpha_y, (N_-)_y\rangle + \langle \beta_y, (N_+)_y\rangle. \end{array}$$

Por (4.8) e (4.10) temos que

$$\begin{aligned} \alpha_x &= \left(\frac{J(N_-)_x}{\sqrt{2E_-}}\right)_x = \left(\frac{1}{\sqrt{2E_-}}\right)_x J(N_-)_x + \frac{1}{\sqrt{2E_-}}(J(N_-)_x)_x \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2E_-}}\right)_x J(N_-)_x + \frac{1}{\sqrt{2E_-}}(-E - \overline{p}p_{xx} + (k_1)_x\overline{\eta}p_x - k_1^2 E + k_1\overline{\eta}p_{xx}). \end{aligned}$$

Lembrando que $(N_-)_x$ é um quatérnio com parte escalar nula, temos:

$$\begin{aligned} \langle \alpha_x, (N_-)_x\rangle &= \langle \left(\frac{1}{\sqrt{2E_-}}\right)_x J(N_-)_x + \frac{1}{\sqrt{2E_-}}(J(N_-)_x)_x, (N_-)_x\rangle \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2E_-}}\right)_x \langle J(N_-)_x, (N_-)_x\rangle + \frac{1}{\sqrt{2E_-}}\langle (J(N_-)_x)_x, (N_-)_x\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2E_-}}\langle (J(N_-)_x)_x, (N_-)_x\rangle, \end{aligned}$$

Usando a primeira expressão de (4.8), e a derivada com relação a x da segunda expressão de (4.10), segue que

$$\begin{aligned} \langle \alpha_x, (N_-)_x\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2E_-}}\langle (J(N_-)_x)_x, (N_-)_x\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2E_-}}(-\langle \overline{p}_x\eta, \overline{p}p_{xx}\rangle + (k_1)_x\langle \overline{\eta}p_x, \overline{p}_x\eta\rangle + k_1\langle \overline{p}_x\eta, \overline{\eta}p_{xx}\rangle \\ &\quad + k_1\langle p_x, p_{xx}\rangle - k_1^2\langle \overline{p}p_x, \overline{\eta}p_{xx}\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2E_-}}(\frac{\sqrt{E}}{\sqrt{G}}\langle p_y, p_{xx}\rangle - (k_1)_x E - k_1\langle p_x, p_{xx}\rangle \\ &\quad + k_1\langle p_x, p_{xx}\rangle + k_1^2\frac{\sqrt{E}}{\sqrt{G}}\langle p_y, p_{xx}\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2E_-}}\left(\frac{\sqrt{E}}{\sqrt{G}}\langle p_y, p_{xx}\rangle(1 + k_1^2) - (k_1)_x E\right). \end{aligned} \tag{4.17}$$

E, por (4.9) e (4.10),

$$\begin{aligned} \beta_x &= \left(\frac{J'(-N_+)_x}{\sqrt{2E_-}}\right)_x = \left(\frac{1}{\sqrt{2E_-}}\right)_x J'(-N_+)_x + \frac{1}{\sqrt{2E_-}}(J'(-N_+)_x)_x \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2E_-}}\right)_x J'(-N_+)_x + \frac{1}{\sqrt{2E_-}}(-(k_1)_x p_x\overline{\eta} - k_1 p_{xx}\overline{\eta} + k_1^2 E + p_{xx}\overline{p} + E), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle \beta_x,\, (N_+)_x\rangle &= \langle \left(\frac{1}{\sqrt{2E_-}}\right)_x J'(-N_+)_x + \frac{1}{\sqrt{2E_-}}(J'(-N_+)_x)_x,\, (N_+)_x\rangle \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2E_-}}\right)_x \langle J'(-N_+)_x,\, (N_+)_x\rangle + \frac{1}{\sqrt{2E_-}} \langle (J'(-N_+)_x)_x,\, (N_+)_x\rangle \\
&= \langle (J'(-N_+)_x)_x,\, (N_+)_x\rangle \\
&= k_1^2 \langle p_x\overline{p},\, p_{xx}\overline{\eta}\rangle - k_1 \langle p_x,\, p_{xx}\rangle - (k_1)_x \langle \eta\overline{p_x},\, p_x\overline{\eta}\rangle \\
&\quad -k_1 \langle \eta\overline{p}_x,\, p_{xx}\overline{\eta}\rangle + \langle \eta\overline{p}_x,\, p_{xx}\overline{p}\rangle \\
&= \frac{\sqrt{E}}{\sqrt{G}} \langle p_y,\, p_{xx}\rangle (1+k_1^2) + (k_1)_x E. \qquad (4.18)
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
L_1 &= -\langle \alpha_x,\, (N_-)_x\rangle + \langle \beta_x,\, (N_+)_x\rangle \qquad (4.19) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2E_-}}(-\langle J(N_-)_x,\, (N_-)_x\rangle + \langle J'(-N_+)_x,\, (N_+)_x\rangle) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2E_-}}\left(-\frac{\sqrt{E}}{\sqrt{G}} \langle p_y,\, p_{xx}\rangle (1+k_1^2) + (k_1)_x E + \frac{\sqrt{E}}{\sqrt{G}} \langle p_y,\, p_{xx}\rangle (1+k_1^2) + (k_1)_x E\right) \\
&= \frac{2(k_1)_x E}{\sqrt{2E_-}}.
\end{aligned}$$

Com cálculos análogos chegamos aos demais coeficientes.

$$\begin{aligned}
M_1 &= \frac{2(k_1-k_2)}{\sqrt{2E_-}} \langle p_y,\, p_{xx}\rangle = -\frac{(k_1-k_2)}{\sqrt{2E_-}} E_y \\
N_1 &= \frac{2(k_1-k_2)}{\sqrt{2E_-}} \langle p_y,\, p_{xy}\rangle = \frac{(k_1-k_2)}{\sqrt{2E_-}} G_x
\end{aligned}$$

Agora, combinando com as equações de Codazzi da superfície,

$$\begin{aligned}
(k_1)_y &= \frac{E_y(k_2-k_1)}{2E}, \\
(k_2)_x &= \frac{G_x(k_1-k_2)}{2G},
\end{aligned}$$

obtem-se,

$$\begin{aligned}
L_1 &= \frac{2(k_1)_x E}{\sqrt{2E_-}}, \\
M_1 &= \frac{2(k_1)_y E}{\sqrt{2E_-}}, \qquad (4.20) \\
N_1 &= \frac{2(k_2)_x G}{\sqrt{2E_-}}.
\end{aligned}$$

Da mesma forma podemos obter: $\eta_2 = \frac{J\Phi_y}{|J\Phi_y|} = \left(\frac{J(N_-)_y}{\sqrt{2G_-}}, \frac{J'(-N_+)_y}{\sqrt{2G_-}}\right) = (\gamma, \theta)$.

$$\begin{array}{rcccl} L_2 &=& II^2(\Phi_x, \Phi_x) &=& -\langle \gamma_x, (N_-)_x\rangle + \langle \theta_x, (N_+)_x\rangle, \\ N_2 &=& II^2(\Phi_x, \Phi_y) &=& -\langle \gamma_x, (N_-)_y\rangle + \langle \theta_x, (N_+)_y\rangle, \\ M_2 &=& II^2(\Phi_y, \Phi_y) &=& -\langle \gamma_y, (N_-)_y\rangle + \langle \theta_y, (N_+)_y\rangle, \end{array}$$

e assim

$$\begin{aligned} L_2 &= \frac{2(k_1)_y E}{\sqrt{2G_-}}, \\ M_2 &= \frac{2(k_2)_x G}{\sqrt{2G_-}}, \\ N_2 &= \frac{2(k_2)_y G}{\sqrt{2G_-}}. \end{aligned} \tag{4.21}$$

■

Tendo em mãos os coeficientes da primeira e segunda forma fundamental de Φ podemos então descrever o vetor curvatura média da aplicação Φ em $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$. Observamos que:

$$E_\Phi = \langle \Phi_x, \Phi_x\rangle = |\Phi_x|^2,$$

$$G_\Phi = \langle \Phi_y, \Phi_y\rangle = |\Phi_y|^2,$$

e

$$\begin{aligned} \overrightarrow{H} &= \frac{B(u_1, u_1) + B(u_2, u_2)}{2} \qquad (4.22) \\ &= \frac{1}{2}(II^1(u_1, u_1) + II^1(u_2, u_2))\eta_1 + \frac{1}{2}(II^2(u_1, u_1) + II^2(u_2, u_2))\eta_2, \end{aligned}$$

onde $\{u_1, u_2\}$ é base ortonormal de $T\Phi$.

$$u_1 = \frac{\Phi_x}{|\Phi_x|} = \left(\frac{(N_-)_x}{\sqrt{2E_-}}, \frac{(-N_+)_x}{\sqrt{2E_-}}\right),$$

$$u_2 = \frac{\Phi_y}{|\Phi_y|} = \left(\frac{(N_-)_y}{\sqrt{2G_-}}, \frac{(-N_+)_y}{\sqrt{2G_-}}\right),$$

e $II^1(u_1, u_1) = \frac{L_1}{|\Phi_x|^2}$, $II^1(u_2, u_2) = \frac{N_1}{|\Phi_y|^2}$, $II^2(u_1, u_1) = \frac{L_2}{|\Phi_x|^2}$ e $II^2(u_2, u_2) = \frac{N_1}{|\Phi_y|^2}$.

Então:

$$\overrightarrow{H} = \frac{1}{2}\left(\frac{L_1 G_\Phi + N_1 E_\Phi}{E_\Phi G_\Phi}\right)\eta_1 + \frac{1}{2}\left(\frac{L_2 G_\Phi + N_2 E_\Phi}{E_\Phi G_\Phi}\right)\eta_2. \tag{4.23}$$

Teorema 4.4. *Seja $M \subset \mathbb{S}^3$ uma superfície conexa mínima orientada. Se a aplicação induzida $\Phi : M \to \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ é uma imersão, então Φ é uma imersão Lagrangeana mínima. Além disso, a métrica induzida por Φ é conforme à métrica de M.*

Demonstração: Seja $p \in M$ um ponto não umbílico, então podemos obter uma parametrização $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{S}^3$, em uma vizinhança de p por linhas de curvatura, onde são válidos os lemas 4.2 e 4.3.

Por (4.23) a imersão induzida por Φ será mínima se

$$\begin{aligned} L_1 G_\Phi &= -N_1 E_\Phi, \\ L_2 G_\Phi &= -N_2 E_\Phi. \end{aligned} \tag{4.24}$$

Temos que,

$$\begin{aligned} E_\Phi &= \langle \Phi_x, \Phi_x \rangle = \langle ((N_-)_x, (-N_+)_x), ((N_-)_x, (-N_+)_x) \rangle \\ &= \langle (N_-)_x, (N_-)_x \rangle + \langle (-N_+)_x, (-N_+)_x \rangle \\ &= E_- + E_+ = E(1+k_1^2) + E(1+k_1^2) = 2(1+k_1^2)E, \end{aligned} \tag{4.25}$$

e

$$\begin{aligned} G_\Phi &= \langle \Phi_y, \Phi_y \rangle = \langle ((N_-)_y, (-N_+)_y), ((N_-)_y, (-N_+)_y) \rangle \\ &= \langle (N_-)_y, (N_-)_y \rangle + \langle (-N_+)_y, (-N_+)_y \rangle \\ &= G_- + G_+ = G(1+k_2^2) + G(1+k_2^2) = 2(1+k_2^2)G. \end{aligned} \tag{4.26}$$

Sendo M mínima em $\mathbb{S}^3$, $k_1 = -k_2$, e $(k_1)_x = -(k_2)_x$, $(k_1)_y = -(k_2)_y$. Portanto de (4.20), (4.25) e (4.26) temos:

$$\begin{aligned} L_1 G_\Phi &= \frac{2(k_1)_x E}{\sqrt{2E_-}}\, 2(1+k_2^2)G = \frac{-2(k_2)_x G}{\sqrt{2E_-}}\, 2(1+(-k_1)^2)E \\ &= \frac{-2(k_2)_x G}{\sqrt{2E_-}}\, 2(1+k_1^2)E = -N_1 E_\Phi \end{aligned}$$

de (4.21), (4.25) e (4.26)

$$\begin{aligned} L_2 G_\Phi &= \frac{2(k_1)_y E}{\sqrt{2G_-}}\, 2(1+k_2^2)G = \frac{-2(k_2)_y G}{\sqrt{2G_-}}\, 2(1+(-k_1)^2)E \\ &= \frac{-2(k_2)_y G}{\sqrt{2E_-}}\, 2(1+k_1^2)E = -N_2 E_\Phi. \end{aligned}$$

Concluimos que as equações (4.24) são satisfeitas, e portanto Φ é mínima.

Caso p seja um ponto umbílico isolado, então existe uma vizinhança de p onde conseguimos uma sequência de pontos não umbílicos convergindo para p. Assim para cada ponto da sequência é válido o resultado obtido acima. Portanto, por continuidade, temos que o resultado é válido também para p.

Caso seja um ponto umbílico não isolado, então, (por [9], lema 1.4), $M = \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{S}^3$, e claramente $\mathbb{S}^2$ é mínima em $\mathbb{S}^3$, assim, $\Phi(x, y) = (p(x, y), -p(x, y)) = (p, -p)$, e vemos em [3], que Φ é uma mínima lagrangeana.

E, para finalizar o teorema, vemos por (4.6) e (4.7), e com a hipótese de que M seja uma superfície mínima, que a métrica induzida por Φ é conforme à métrica de M, tendo como coeficiente de conformalidade $\lambda^2 = (1 + k_1^2)$. ■

Referências Bibliográficas

[1] Carmo, M. do, *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*, SBM, 2005.

[2] Carmo, M. do, *Geometria Riemanniana*, Projeto Euclides, Rio de Janeiro, 2005.

[3] Castro, I., Urbano, F., *Minimal lagrangian surfaces in* $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$, Comm. Anal. Geom. Volume 15, Number 2 (2007), 217-248.

[4] Espirito-Santo, N., Fornari, S., Frensel, K., Ripoll, J., *Constant mean curvature hypersurfaces in a Lie group with a bi-invariant metric*, Manuscripta Mathematica, 111-4 (2003), 459-470.

[5] Fujimoto, H., *Modified defect relations for the Gauss map of minimal surfaces*, J. Diff. Geom., 29 (1989), 245-262.

[6] Hatcher, A., *Algebric Topology*, Cambrige University Press, 2002.

[7] Hopf, H., *Differential Geometry in the Large*, Lectures notes in Mathematics 1000, Berlin, Springer-Verlag 1983.

[8] Jost, J., *Riemannian Geometry and Geometric Analysis*, Springer Universitext, 4^{th} Edition, 2005.

[9] Lawson, B., *Complete minimal surface in* S^3. Ann. of Math., 92(1970), no. 3, 335-374.

[10] Lima, E., *Curso de análise*, vol. 2, Projeto Euclides, Rio de Janeiro, 2006.

[11] Masal'tsev, L., *A Version of the Ruh-Vilms theorem for surfaces of constant mean curvature in* $\mathbb{S}^3$, Mathematical Notes, 73 (2003), no. 1, 85-96.

[12] Osserman, R., *Proof of a conjecture of Nirenberg*, Comm. Pure Appl. Math., 12 (1959), 229-232.

[13] Reid, M., Szendroi, B., *Geometry and Topology*, Cambridge University Press, 2005.

[14] Ruh, E., Vilms, J., *The tension field of Gauss map*, Trans. Amer. Math. Soc., 149 (1970), no. 2, 569-573.

[15] Spivak, M., *A comprehensive introduction to differential geometry*, vol. 4, Publish or Perish, Boston 1975; 2nd Ed., Berkeley 1979.

[16] Solomon, B., *Harmonic maps to spheres*, J . Diff. Geom., 21 (1985), no. 2, 151-162.

[17] Weiner, L., Wilkens, R., *Quaternions and Rotations in* $\mathbb{E}^4$, American Mathematical Monthly, 112 (2005), no. 1, 69-75.

[18] Xavier, F., *The Gauss map of a complete nonflat minimal surface cannot omit 7 points of the sphere*, Ann. of Math. (2) 133 (1981), 211-214.

[19] Xiabo Liu, *Rigidity of the Gauss map in compact Lie group*, Duke Math. J., 77 (1995), no. 2, 447-480.