UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
INSTITUTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Brasília

2019

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
INSTITUTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Teoria Espinorial da Gravitação

João Gilberto Fernandes
Orientador: Prof. Dr. Sérgio Costa Ulhoa.

Brasília
2019

Teoria Espinorial da Gravitação

João Gilberto Fernandes

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade de Brasília como parte dos requisitos ncessários para obtenção do título de Mestre em Física.
Orientador: Prof. Dr. Sérgio Costa Ulhoa.

Banca Examinadora

Prof. Dr. Sérgio Costa Ulhoa (Orientador)

Prof. Dra. Nome do Membro 2 da Banca Examinadora (Membro Externo)

Prof. Dr. Nome do Membro 3 da Banca Examinadora (Membro Interno)

Brasília

2019

Resumo

A Teoria Espinorial da Gravitação tem como objetivo descrever a interação gravitacional através de campos de espinores. Partindo do formalismo lagrangiano do Teleparalelismo Equivalente à Relatividade Geral (TEGR) é possível obter duas equações acopladas para dois campos espinoriais fundamentais, Ψ e Y, do qual resulta a dinâmica das tétradas autoparalelas. No limite em que Y é constante, a nova equação de campo obtida da lagrangiana gravitacional indica uma expressão para Ψ em um espaço-tempo plano.

Brasília

2019

Abstract

The Spinor Theory of Gravity aims to describe the gravitational interaction by spinor fields. From the Lagrangian formalism of Teleparallel Equivalent of General Relativity (TEGR) it is possible to obtain two coupled equations for two fundamental spinel fields, Ψ and Y, which results in the dynamics of the autoparallel tetrads. At the limit where Y is constant, the new field equation obtained from the gravitational lagrangian indicates an expression for Ψ in a flat space-time.

Brasília

2019

"Dedico este trabalho ao meu Pai, Jairo Moreira Fernandes (em memória),
e à minha mãe pelo suporte em todos os momentos da minha vida. "

"A maior dádiva de um homem é poder conhecer o universo onde habita,
e sua maior maldição é permanecer ignorante.
Ou talvez seja justamente o contrário".

Agradecimentos

À minha mãe Anamélia Lima Rocha Moreira Fernandes.

Aos meus irmãos Victor Hugo Lima Rocha Moreira Fernandes e Ana Carolina Lima Rocha Moreira Fernandes.

À minha namorada e companheira Indira Alencar Ribeiro.

Aos meus avós João Baptista Rocha, Arlene Aparecida Dias de Lima Rocha, Lourival José Fernandes e Dilma Moreira Fernandes.

Ao meu professor e orientador Sérgio Costa Ulhoa.

Aos meus tios e primos.

Aos meus colegas e amigos, em especial à minha amiga Gabriella Ribeiro do Monte.

Aos professores e alunos do Instituto de Física da Universidade de Brasília.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Em 1687 Isaac Newton (1642 – 1727) publica o que provavelmente seria o trabalho mais importante da física produzido por uma única pessoa [1], o *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* [2]. Neste livro Newton formaliza as leis do movimento, implicitamente assumidas por Galileu Galilei (1564 – 1642), e a Lei da Gravitação Universal, que explica as órbitas elípticas dos planetas através da hipótese da força inversamente proporcional ao quadrado da distância ao Sol. Perto da superfície da Terra, Galileu já havia demonstrado que o deslocamento de um corpo em queda livre é proporcional ao quadrado do intervalo de tempo decorrido, independente da massa desse corpo.

No *Principia* [2], Newton introduziu o conceito de tempo absoluto, onde ele alegava que o intervalo de tempo entre dois eventos era igualmente medido por todos os relógios, independente do movimento destes. Assim, na Mecânica Newtoniana é possível determinar se eventos em diferentes pontos do espaço ocorreram simultaneamente, mas não é possível dizer se eventos em tempos distintos ocorreram no mesmo lugar: para referenciais com movimento relativo, eventos em tempos distintos ocorrem geralmente em pontos diferentes do espaço. A ideia de espaço absoluto, embora inicialmente introduzida pelo próprio Isaac Newton, tinha sido abandonada.

A mecânica e a gravitação newtoniana permaneceram aceitas por mais de duzentos anos. Mesmo nos dias de hoje ainda são base para a descrição de quase todos os fenômenos cotidianos [3]. Apenas em situações específicas as modificações contidas nas teorias da Relatividade Especial [4, 5] e Relatividade Geral [6, 7, 8] – propostas por Albert Einstein (1879 – 1855) em 1905 e 1915, respectivamente – são necessárias. Na Relatividade Especial a ideia de tempo absoluto é abandonada. O intervalo de tempo entre dois eventos medido por um relógio depende da sua velocidade, ou seja, do movimento do sistema de referência onde o tempo é medido. Essa implicação surge de dois princípios: a velocidade da luz independente do movimento da fonte e o princípio da relatividade, inicialmente proposto por Galileu, e que estabelece a invariância das leis da física sob mudança de referencial.

A equivalência entre referenciais inerciais, ditos como aqueles que possuem velocidade relativa constante, é construída na Relatividade Especial a partir desses dois princípios. Contudo, um referencial sob a presença de um campo gravitacional descreve fenômenos físicos tais quais um referencial não-inercial. A Relatividade Geral parte do Princípio da Equivalência [9, 10] – além dos dois princípios presentes na Relatividade Restrita – para descrever fenômenos físicos em sistemas de referência arbitrários. A interação gravitacional na teoria de Einstein é caracterizada pela curvatura do espaço-tempo e não mais por uma força de atração como na teoria newtoniana.

Uma outra revolução na física acontece simultaneamente ao desenvolvimento da Teoria da Relatividade, a Mecânica Quântica [11]. No final do século XIX a comunidade científica acreditava que o arcabouço teórico da física estava completo, restando apenas alguns poucos fenômenos a serem explicados. A Mecânica Quântica e a Relatividade quebram praticamente todos os paradigmas científicos da época e mudam os conceitos mais básicos que se tinha sobre espaço, tempo, matéria e energia. A quantização da energia e de outras propriedades da matéria revoluciona também o entendimento sobre as interações fundamentais da natureza. As teorias quânticas de campo [12, 13, 14, 15] (ou teorias de segunda quantização) admitem não só a quantização de observáveis ligados à matéria, mas também a quantização do próprio campo.

Sendo uma das interações fundamentais da natureza, a gravidade necessitava ser explicada também pelo ponto de vista da Mecânica Quântica? A construção de uma teoria quântica da gravitação é um problema até hoje não resolvido. Sistemas de grande escala sujeitos a campos gravitacionais intensos são de domínio da Relatividade Geral, enquanto o universo subatômico é regido pelas leis da Mecânica Quântica. A interação gravitacional no mundo quântico é desprezível quando comparada com as outras forças fundamentais da natureza. Mas sendo a gravidade um fenômeno descrito por meios de campos, o chamado campo gravitacional deve ser quantizado se inserido na teoria quântica. Assim, a busca de uma gravidade quântica deve pressupor o casamento entre Relatividade Geral (ou outra teoria alternativa a ela) e Mecânica Quântica.

Muitos físicos acreditam que essa dificuldade em se casar as duas teorias indica que talvez uma delas esteja incompleta, e dado o poder de previsibilidade e aplicação da Mecânica Quântica e da Teoria Quântica de Campos, a aposta parece se voltar para a Relatividade Geral. Além do mais, a teoria de Einstein enfrenta problemas. Um deles é a dificuldade de se definir localmente a energia do campo gravitacional. Uma vez que a gravitação é o estudo do próprio espaço-tempo, grandezas como energia e momento do campo gravitacional devem estar bem definidas em todos os pontos dessa estrutura. A formulação da Relatividade Geral em termos da dinâmica do tensor métrico permite apenas a definição de pseudo-tensores de energia-momento, dependentes do sistema de coordenadas adotado, o que inviabiliza definir localmente a densidade energia do campo gravitacional, já que para cada mudança de coordenada se obtém um resultado diferente. No Teleparalelismo Equivalente à Relatividade Geral (TEGR) [17, 18, 19, 20], uma formulação geométrica alternativa á teoria vigente, o campo gravitacional é descrito por tétradas autoparalelas. Uma expressão para a densidade de energia gravitacional surge naturalmente do formalismo Hamiltoniano dessa teoria.

Outros problemas surgem com novas descobertas. Matéria escura e energia escura ainda não possuem explicações consensuais. A energia de vácuo, que alguns astrofísicos acreditam estar relacionada com a energia escura, foi prevista com um erro de cento e vinte ordens de grandeza. Segundo os próprios físicos, a pior previsão teórica da história da física. Então, tanto em níveis cosmológicos quanto em níveis microscópicos, as teorias da gravidade falham quase que totalmente. Depois de mais de trezentos anos da publicação da Lei da Gravitação Universal, ainda não entendemos a gravidade!

Neste trabalho propomos uma teoria espinorial da gravitação em conformidade com o formalismo geométrico da TEGR, que descreve a interação gravitacional através dos campos de tétradas autoparalelas em um espaço-tempo sem curvatura e com torção não nula. Iniciamos com uma breve revisão da gravitação na mecânica não-relativística, explicitando a lei do inverso do quadrado da distância e a independência da massa no movimento de um corpo sujeito a um campo gravitacional. Nesta primeira seção explicamos também Princípio da Equivalência, que permite igualar as propriedades cinemáticas em um referencial não inercial com aquelas de um sistema inercial na presença de um campo gravitacional. Na seção 2.2 revisamos a Teoria da Relatividade Especial, a primeira teoria do espaço-tempo construída sob uma geometria plana, que estabelece a conexão entre referenciais inerciais. Aqui definimos o intervalo espaço-temporal, o tempo próprio, a métrica de Minkowski e as transformações de Lorentz. A seção 2.3 aborda a conexão entre sistemas de referência arbitrários, feita por um sistema de coordenadas curvilíneas que descreve uma geometria não-euclidiana. Ainda nessa seção apresentamos o conceito de tensor métrico, transporte paralelo, derivada covariante, conexão afim, além da equação da geodésica. Os tensores de curvatura e de energia momento são abordados nas seções 2.4 e 2.5 respectivamente. A Equação de Einstein, obtida através da ação de Hilbert-Einstein, é introduzida na seção 2.6. O capítulotermina com a transição das equações de campo da Relatividade Geral para a Lei da Gravitação Universal de Isaac Newton, no limite de baixas velocidades e campos gravitacionais pouco intensos.

No capítulo 3 introduzimos a teoria teleparalela, apresentando os campos de tétradas na seção 3.1, as características geométricas do espaço de Weitzenböck e a formulação lagragiana do teleparalelismo na seção 3.2. Nesta última mostramos a equivalência entre TEGR e a Relatividade Geral e a construção do tensor de energia-momento do campo gravitacional, da qual se derivam uma equação de continuidade e um momento generalizado.

No capítulo final é trabalhada a gravitação espinorial. Primero com a introdução da teoria espinorial da gravitação de Novello [21, 22], que propõe uma nova implementação do Princípio da Equivalência através de uma nova interpretação da dinâmica do tensor métrico. Na teoria de Novello, a geometria que age na matéria não é um campo independente e nem possui dinâmica própria. Ao invés disso, ela herda sua dinâmica de dois campos espinoriais fundamentais, responsáveis pelos fenômenos gravitacionais e que obedecem à equação de movimento não linear de Heisenberg. Novello assume que esses dois campos interagem universalmente com todas as formas de matéria e energia. Dessa interação resulta uma mudança na métrica do espaço-tempo.

Por fim, na última seção deste trabalho, propomos uma teoria espinorial da gravitação construída no formalismo geométrico da TEGR. Diferentemente do trabalho de Novello, os campos espinoriais utilizados aqui não estão relacionados com o tensor métrico, mas sim definidos de forma que contração destes resulte num campo de tétradas. Deste seguem as características geométricas dos espinores. As equações de campo espinoriais são obtidas através da lagrangiana teleparalela escrita explicitamente em função das tétradas e suas derivadas. Por substituição direta, chegamos a uma expressão para a lagrangiana gravitacional em termos dos dois campos espinoriais. Após obtermos duas equações acopladas para os dois espinores, aplicamos o limite no qual um desses campos é constante. A interpretação dada para as novas equações de campo obtidas da lagragiana gravitacional para esse limite é discutida na final do capítulo 4e na conclusão do trabalho.

Neste trabalho será utilizada a notação de Einstein, no qual índices repetidos se somam.

Capítulo 2

Relatividade Geral

2.1 Gravitação na Mecânica Não Relativística

A interação gravitacional, diferentemente das outras interações fundamentais da natureza, possui a propriedade de que todos os corpos, independente da massa, se movem da mesma maneira em um campo gravitacional, desde que as condições iniciais sejam as mesmas. Essa propriedade decorre diretamente das Leis do Movimento e da Lei Universal da Gravitação, elaboradas por Sir Isaac Newton (1642 – 1727). Esta última afirma que a força gravitacional entre dois corpos é proporcional ao produto de suas massas, e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre eles.

Utilizando a teoria newtoniana, pode-se estabelecer dois elementos básicos: uma equação para o campo gravitacional gerado por uma massa, e outra equação para a resposta da matéria a esse campo. Assim, o campo gerado por uma massa **M** a uma distância **r** dessa massa é dado por

$$\dot{g} = -tt\frac{M}{r^2}\dot{e_r}. \tag{2.1}$$

De maneira equivalente, pode-se definir uma função escalar das coordenadas e de tempo que caracteriza o campo denominada potencial gravitacional, relacionada com a densidade de massa ρ pela equação de Poisson

$$\nabla^2\varphi = 4\pi tt\rho. \tag{2.2}$$

O movimento de uma partícula de massa $\mathbf{m}$ em um campo gravitacional, para um sistema de referência inercial, é determinado pela Lagrangiana

$$\mathsf{L} = \frac{1}{2}mv^2 - m\varphi. \tag{2.3}$$

A equação de movimento da partícula é dada por

$$\ddot{r} = \nabla\varphi. \tag{2.4}$$

A equação (2.4) não contém a massa ou nenhuma outra grandeza relaciona as propriedades intrínsecas da partícula.

A independência da massa no movimento de um corpo em um campo gravitacional permite compará-lo com o movimento de um objeto não sujeito a um campo externo, porém observado sob o ponto de vista de um referencial não inercial. Dito de forma direta, as propriedades cinemáticas em um sistema de referência não inercial são as mesmas daquelas em um sistema inercial na presença de um campo gravitacional. Este é o chamado *Princípio da Equivalência*.

Existe, entretanto, uma diferença essencial entre o campo "real" de um referencial inercial e o campo equivalente a um sistema não inercial quanto aos seus comportamentos no infinito. Diferentemente do segundo, o primeiro se aproxima de zero a distâncias infinitas da fonte do campo. Dessa forma, não é possível, por qualquer escolha de referencial, eliminar um campo gravitacional "real" em todos os pontos do espaço. Sendo viável, apenas, por uma escolha adequada de referencial, anular o campo em uma região do espaço suficientemente pequena, no qual o mesmo possa ser considerado uniforme.

2.2 Relatividade Especial

A Relatividade Especial é uma teoria da estrutura do *espaço-tempo*, o palco onde partículas e campos evoluem. A descrição da evolução de sistemas físicos é feita a partir de um *sistema de referência* associado um conjunto de coordenadas que indica a posição de uma partícula do espaço, assim como um relógio fixado nesse sistema para indicar o tempo.

Espaço-tempo pode, então, ser definido como um conjunto quadridimensional de elementos classificados por três coordenadas espaciais e uma coordenada temporal. Um ponto individual no espaço-tempo é denominado *evento*. A trajetória de uma partícula, ou sua *linha de universo*, é um conjunto parametrizado de eventos, representada por uma curva através do espaço-tempo.

O intervalo ds entre dois eventos infinitesimalmente separados, em coordenadas cartesianas, para um espaço-tempo plano (espaço de Minkowski), é dado por

$$ds^2 = -c^2dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2. \tag{2.5}$$

O intervalo espaço-temporal entre dois eventos é invariante sob mudança de coordenadas cartesianas e sob transformações de Lorentz.

O *tempo próprio*, definido como o intervalo de tempo entre dois eventos ocorridos em um mesmo ponto do espaço para um dado referencial inercial, é escrito como

$$c^2d\tau^2 = -ds^2. \tag{2.6}$$

As coordenadas de um evento podem ser consideradas como componentes de um vetor em um espaço de quatro dimensões. Denota-se essas componentes por $x^\mu = \left(x^0, x^1, x^2, x^3\right)$, onde o índice μ assume os valores $0, 1, 2, 3$. Em alguns casos, é conveniente referir-se às componentes espaciais e temporais de x^μ separadamente, então se utilizam índices latinos para representar as componentes espaciais tridimensionais: $x^i = \left(x^1, x^2, x^3\right)$.

Dessa maneira, pode-se escrever o intervalo ds em uma forma mais compacta, introduzindo a *métrica de Minkowski*, representada por uma matriz 4×4 e denotada por dois índices subscritos.

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{2.7}$$

onde as componentes da matriz $\eta_{\mu\nu}$ são representadas em coordenadas cartesianas

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu. \tag{2.8}$$

Para que o intervalo (2.8) permaneça invariante sob mudanças de coordenadas entre referenciais inerciais, as componentes do quadrivetor x^μ devem ser transformar de acordo com

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_{\ \nu} x^\nu, \tag{2.9}$$

onde $\Lambda^\mu_{\ \nu}$ satisfaz

$$\eta_{\mu\nu} = \Lambda^\lambda_{\ \mu}\, \eta_{\lambda\sigma} \Lambda^\sigma_{\ \nu}. \tag{2.10}$$

As matrizes que satisfazem (2.9) e (2.10) são denominadas *transformações de Lorentz*. O conjunto de todas as transformações de Lorentz no espaço de Minkowski forma o *grupo de Lorentz*.

2.3 Sistema de Coordenadas Generalizadas

Como abordado na seção 2.1, o estudo da gravitação requer a consideração de fenômenos em sistemas de referência arbitrários. Sendo assim, é necessário o desenvolvimento de uma geometria em coordenadas curvilíneas generalizadas.

Dada a mudança de um sistema de coordenadas $x^\mu = \left(x^0, x^1, x^2, x^3\right)$ para outro sistema de coordenadas $x'^\mu = \left(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3\right)$, seus diferenciais se transformam de acordo com a relação

$$dx^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} dx'^\nu. \tag{2.11}$$

Todo vetor de componentes $A^\mu = \left(A^0, A^1, A^2, A^3\right)$ que, sob mudança de coordenada, se transformam de acordo com (2.11) é chamado de vetor contravariante

$$A^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} A'^\nu. \tag{2.12}$$

Dado um escalar φ, sob mudança de coordenada, as derivadas $\partial\varphi/\partial x^\mu$ se transformam pela relação

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x^\mu} = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu}\frac{\partial \varphi}{\partial x'^\nu}. \tag{2.13}$$

Todo vetor de componentes $A_\mu = (A_0, A_1, A_2, A_3)$ que, sob mudança de coordenada, se transforma de acordo com (2.13) é chamado vetor *covariante*

$$A_\mu = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} A'_\nu. \tag{2.14}$$

A generalização direta de vetores covariantes e contravariantes é a noção de *tensor*. Um tensor do tipo (n, m) é um objeto geométrico de n índices contravariantes e m índices covariantes que obedece a relação de transformação

$$T^{\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n}_{\nu_1,\nu_2,\cdots,\nu_m} = \frac{\partial x^{\mu_1}}{\partial x'^{\lambda_1}}\frac{\partial x^{\mu_2}}{\partial x'^{\lambda_2}}\cdots\frac{\partial x^{\mu_n}}{\partial x'^{\lambda_n}}\frac{\partial x'^{\sigma_1}}{\partial x^{\nu_1}}\frac{\partial x'^{\sigma_2}}{\partial x^{\nu_2}}\cdots\frac{\partial x'^{\sigma_m}}{\partial x^{\nu_m}} T'^{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n}_{\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_m}. \tag{2.15}$$

O quadrado do elemento de linha em coordenadas generalizadas é escrito na forma

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu, \tag{2.16}$$

onde $g_{\mu\nu}$ é um tensor covariante simétrico denominado *tensor métrico*.

O tensor métrico contravariante ou métrica inversa é o tensor $g^{\mu\nu}$, recíproco a $g_{\mu\nu}$, tal que

$$g_{\mu\lambda}g_{\lambda\nu} = \delta^{\mu}{}_{\nu} \tag{2.17}$$

A conexão entre as formas covariante e contravariante é feita através do tensor métrico.

$$A^{\mu} = g^{\mu\nu} A_{\nu}, \qquad A_{\mu} = g_{\mu\nu} A^{\nu}, \tag{2.18a}$$

$$T_{\mu\nu} = g_{\mu\lambda}g_{\nu\sigma}T^{\lambda\sigma}, \qquad T^{\mu\nu} = g^{\mu\lambda}g^{\nu\sigma}T_{\lambda\sigma}. \tag{2.18b}$$

O produto interno entre dois vetores, obtido pela *contração* entre suas formas covariante e contravariante, pode ser escrito como

$$A^{\mu}B_{\mu} = A_{\mu}B^{\mu} = g_{\mu\nu}A^{\mu}B^{\nu} = g^{\mu\nu}A_{\mu}B_{\nu}. \tag{2.19}$$

Em coordenadas curvilíneas o elemento diferencial dA^{μ} e a derivada $\partial A^{\mu}/\partial x^{\nu}$ não se transformam como (2.12) e (2.15), respectivamente. Isso se deve ao fato de que o incremento é a diferença entre vetores localizados em pontos distintos do espaço, onde seus coeficientes de transformação são diferentes, já que são funções das coordenadas. Dessa maneira, é necessário definir uma operação para qual os vetores subtraídos estejam localizados no mesmo ponto do espaço, intitulada *transporte paralelo*.

A mudança nas componentes de um vetor A^{μ} localizado no ponto x^{μ}, quando transportado paralelamente para um ponto $x^{\mu} + dx^{\mu}$, onde seu valor igual a $A^{\mu} + dA^{\mu}$, é dada por

$$\delta A^{\mu} = -\Gamma^{\mu}_{\lambda\nu} A^{\lambda} dx^{\nu}, \tag{2.20}$$

onde as quantidades $\Gamma^{\mu}_{\lambda\nu}$ são os coeficientes de conexão, simétricos em relação aos índices subscritos

$$\Gamma^{\mu}_{\lambda\nu} = \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}.$$

O elemento diferencial DA^{μ} entre os vetores $A^{\mu} + dA^{\mu}$ e $A^{\mu} + \delta A^{\mu}$ é expresso por

$$DA^{\mu} = dA^{\mu} - \delta A^{\mu} = \left(\partial_{\nu} A^{\mu} + \Gamma^{\mu}{}_{\lambda\nu} A^{\lambda}\right) dx^{\nu}. \tag{2.21}$$

A expressão entre parênteses na equação (2.21) é chamada *derivada covariante*, denotada por

$$\nabla_\nu A^\mu = A^\mu_\nu = \partial_\nu A^\mu + \Gamma^\mu_{\lambda\nu} A^\lambda \, . \tag{2.22}$$

De maneira similar, para um vetor covariante

$$\nabla_\nu A_\mu = A_{\mu\nu} = \partial_\nu A_\mu - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} A_\lambda . \tag{2.23}$$

A derivada covariante do tensor métrico $g_{\mu\nu}$ é expressa por

$$\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = \partial_\alpha g_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\mu\alpha} g_{\nu\lambda} - \Gamma^\lambda_{\nu\alpha} g_{\mu\lambda} = \partial_\alpha g_{\mu\nu} - \Gamma_{\mu\nu\alpha} - \Gamma_{\nu\mu\alpha}, \tag{2.24}$$

tal que, para uma conexão compatível com a métrica

$$\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = 0. \tag{2.25}$$

Usando (2.25) e permutando os índices α, μ, ν em (2.24),

$$\partial_\alpha g_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\nu\alpha} + \Gamma_{\nu\mu\alpha}, \tag{2.26a}$$

$$\partial_\nu g_{\mu\alpha} = \Gamma_{\mu\alpha\nu} + \Gamma_{\alpha\mu\nu}, \tag{2.26b}$$

$$\partial_\mu g_{\nu\alpha} = \Gamma_{\nu\alpha\mu} + \Gamma_{\alpha\nu\mu}. \tag{2.26c}$$

Somando (2.26b) com (2.26c) e subtraindo (2.26a) do resultado

$$\Gamma_{\alpha\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu g_{\alpha\nu} + \partial_\nu g_{\mu\alpha} + \partial_\alpha g_{\mu\nu}\right). \tag{2.27}$$

Fazendo $\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = g^{\lambda\alpha}\Gamma_{\alpha\mu\nu}$,

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\alpha}\left(\partial_\mu g_{\alpha\nu} + \partial_\nu g_{\mu\alpha} - \partial_\alpha g_{\mu\nu}\right). \tag{2.28}$$

Os coeficientes da expressão (2.28) são chamados *símbolos de Christoffel*.

Em um espaço curvo, o resultado do transporte paralelo de um vetor de um ponto a outro depende do caminho entre eles. A *derivada direcional covariante* ao longo de uma curva parametrizada $x^\mu = x^\mu(\lambda)$ é definida como

$$\frac{D}{d\lambda} = \frac{dx^\mu}{d\lambda}\nabla_\mu. \tag{2.29}$$

O transporte paralelo de um vetor através do caminho $x^\mu(\lambda)$ é tal que a sua derivada direcional se anule ao longo da trajetória

$$\frac{dA^\mu}{d\lambda} + \Gamma^\mu_{\alpha\nu}\frac{dx^\alpha}{d\lambda}A^\nu = 0. \tag{2.30}$$

Uma *geodésica* é a curva ao longo do qual o seu vetor tangente é paralelamente transportado. Assim, dada uma curva $x^\mu(\lambda)$, da condição de transporte paralelo (2.30) para o vetor tangente $dx^\mu/d\lambda$ é obtida a *equação da geodésica*

$$\frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\nu}\frac{dx^\alpha}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0. \tag{2.31}$$

É fácil perceber que (2.31) reproduz a generalização da ideia de linha reta. Em coordenadas cartesianas $\Gamma^\mu_{\alpha\nu} = 0$, e a equação da geodésica se reduz a $d^2x^\mu/d\lambda^2 = 0$, a equação da reta em um espaço euclidiano.

2.4 Tensor de Curvatura

Como visto na seção 2.3, o descolamento paralelo de um vetor é definido como sendo aquele em que as componentes do vetor não se modificam em um sistema de coordenadas considerado cartesiano para um dado elemento de volume infinitesimal. Ao longo de uma geodésica, o deslocamento do vetor tangente à curva é paralelo a si mesmo. Dessa maneira, um vetor mantém suas componentes inalteradas quando paralelamente transportado ao longo de uma geodésica, já que o ângulo entre o vetor deslocado e a tangente à curva permanece o mesmo.

Como consequência disso, o resultado obtido ao se deslocar paralelamente um vetor de um ponto ao outro, em um espaço curvo, depende do caminho tomado. Assim, o transporte paralelo de um vetor ao longo de um caminho fechado resultará em uma transformação do mesmo, ou seja, os valores de suas componentes após o deslocamento não coincidem com seus valores originais.

Sendo nula a derivada covariante direcional de um vetor submetido a um transporte paralelo, então o comutador de duas derivadas covariantes $[\nabla_\mu, \nabla_\nu]$ do vetor A^α expressa a diferença, em um caminho fechado, entre o deslocamento paralelo do vetor por um dado sentido, e o deslocamento paralelo do vetor pelo sentido oposto ao primeiro

$$
\begin{aligned}
[\nabla_\mu, \nabla_\nu]A^\alpha &= \nabla_\mu\nabla_\nu A^\alpha - \nabla_\nu \nabla_\mu A^\alpha, \\
&= \left(\partial_\mu\Gamma^\alpha{}_{\lambda\nu} - \partial_\nu\Gamma^\alpha_{\lambda\mu} + \Gamma^\alpha_{\sigma\mu}\Gamma^\sigma_{\lambda\nu} - \Gamma^\alpha_{\sigma\nu}\Gamma^\sigma_{\lambda\mu}\right) A^\lambda.
\end{aligned} \tag{2.32}
$$

A expressão (2.32) pode ser escrita como

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]A^\alpha = R^\alpha{}_{\lambda\mu\nu}A^\lambda, \tag{2.33}$$

onde

$$R^\alpha_{\lambda\mu\nu} = \partial_\mu\Gamma^\alpha_{\lambda\nu} - \partial_\nu\Gamma^\alpha_{\lambda\mu} + \Gamma^\alpha_{\sigma\mu}\Gamma^\sigma_{\lambda\nu} - \Gamma^\alpha_{\sigma\nu}\Gamma^\sigma_{\lambda\mu}, \tag{2.34}$$

é o *tensor de curvatura* ou *tensor Riemann*, antissimétrico nos últimos dois índices

$$R^\alpha_{\lambda\mu\nu} = -R^\alpha_{\lambda\nu\mu}. \tag{2.35}$$

As propriedades de simetria do tensor de Riemann são mais facilmente verificáveis na sua forma covariante

$$R_{\alpha\lambda\mu\nu} = g_{\alpha\sigma} R^{\sigma}_{\lambda\mu\nu}. \tag{2.36}$$

O tensor covariante em (2.36) é antissimétrico para cada par de índices α, λ e $\mu\nu$, e simétrico sob permutação do primeiro par de índices com o segundo

$$R_{\alpha\lambda\mu\nu} = R_{\mu\nu\alpha\lambda} = -R_{\alpha\lambda\nu\mu} = -R_{\lambda\alpha\mu\nu}. \tag{2.37}$$

O somatório das permutações cíclicas de quaisquer três índices de $R_{\alpha\lambda\mu\nu}$ é nulo

$$R_{\alpha\lambda\mu\nu} + R_{\alpha\nu\lambda\mu} + R_{\alpha\mu\nu\lambda} = 0. \tag{2.38}$$

O tensor de curvatura também obedece a *identidade de Bianchi*

$$\nabla_{\sigma} R_{\alpha\lambda\mu\nu} + \nabla_{\alpha} R_{\lambda\sigma\mu\nu} + \nabla_{\lambda} R_{\sigma\alpha\mu\nu} = 0. \tag{2.39}$$

O *tensor de Ricci* $R_{\mu\nu}$ e o *escalar de curvatura* R são obtidos a partir da contração do tensor de Riemann

$$R_{\mu\nu} = g^{\alpha\lambda} R_{\alpha\mu\lambda\nu} = R^{\lambda}{}_{mu\lambda\nu}, \tag{2.40}$$

$$R = g^{\alpha\mu} g^{\lambda\nu} R_{\alpha\lambda\mu\nu} = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = R^{\mu}{}_{\cdot\,\mu} \tag{2.41}$$

Um resultado bastante importante é obtido da identidade de Bianchi na forma contraída

$$g^{\mu\sigma} g^{\nu\lambda} \left(\nabla_{\sigma} R_{\alpha\lambda\mu\nu} + \nabla_{\alpha} R_{\lambda\alpha\mu\nu} + \nabla_{\lambda} R_{\sigma\alpha\mu\nu} \right) = \nabla^{\mu} R_{\alpha\mu} - \nabla_{\alpha} R + \nabla^{\nu} R_{\alpha\nu} = 0, \tag{2.42}$$

ou

$$\nabla^{\mu} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right) = 0, \tag{2.43}$$

onde

$$tt_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}, \tag{2.44}$$

é definido como o *tensor de Einstein*, que obedece a equação de continuidade

$$\nabla^{\mu}\ tt_{\mu\nu} = 0. \tag{2.45}$$

O tensor de Einstein, visto com mais detalhes na seção 2.6, representa um papel central nas equações de campo da Relatividade Geral. Pela expressão (2.45) é possível estabelecer, de maneira informal, a relação entre $tt_{\mu\nu}$ e o tensor de energia-momento $T_{\mu\nu}$, que será trabalhado na próxima seção.

2.5 Tensor de Energia – Momento

O tensor de energia-momento $T^{\mu\nu}$ é um tensor simétrico que descreve os campos de matéria, ou seja, contém todas as informações sobre os aspectos relacionados à energia de um sistema. De maneira geral, o tensor de energia-momento é definido como o fluxo do quadrivetor energia-momento $p^{\mu} = \left(E/c, p^{i}\right)$ através da superfície $x^{\mu} = constante$

$$p^{\mu} = \frac{1}{c}\int \sqrt{-g}\,T^{\mu\nu}dS_{\nu}, \tag{2.46}$$

onde dS_{α} é equivalente ao elemento de "área" da hipersuperfície $x^{\alpha} = constante$

$$dS_{\alpha} = -\frac{1}{6}\varepsilon_{\alpha\mu\nu\lambda}\,dS^{\mu\nu\lambda}. \tag{2.47}$$

Assim, a componente T^{00} exprime a densidade de energia ρ. As componentes T^{0i} representam as densidades de momento. As componentes espaciais T^{ij} caracterizam o fluxo de momento, ou tensão. Termos não-diagonais em T^{ij} simbolizam as tensões de cisalhamento. Já o elemento diagonal T^{ii} corresponde à componente da pressão na direção i.

O tensor de energia-momento é obtido a partir do *Princípio da Mínima Ação*. Assim, dado um sistema cuja a ação de matéria S_M, em coordenadas curvilíneas, é da forma

$$S_M = \frac{1}{c}\int \sqrt{-g}\,\mathcal{L}_M\,d\Omega, \tag{2.48}$$

onde $\mathcal{L}_M$ é a densidade de Lagrangiana de matéria, e $\sqrt{-g}d\Omega$ é o elemento de volume invariante em quatro dimensões

$$d\Omega = dx^0dx^1dx^2dx^3 = cdtdV. \tag{2.49}$$

As equações para os campos de matéria derivam da variação da ação δS_M em relação à métrica $g_{\mu\nu}$

$$\delta S_M = \frac{1}{c}\int \left[\frac{\partial\left(\sqrt{-g}\mathcal{L}_M\right)}{\partial g^{\mu\nu}}\delta g^{\mu\nu} + \frac{\partial\left(\sqrt{-g}\mathcal{L}_M\right)}{\partial\left(\partial_\lambda g^{\mu\nu}\right)}\delta\left(\partial_\lambda g^{\mu\nu}\right)\right]d\Omega. \tag{2.50}$$

Usando o teorema de Gauss e fixando $\delta g^{\mu\nu}$ nos limites de integração, δS_M pode ser escrita como

$$\delta S_M = \frac{1}{c}\int\left[\frac{\partial(\sqrt{-g}L_M)}{\partial g^{\mu\nu}} + \partial_\lambda\left(\frac{\partial(\sqrt{-g}L_M)}{\partial(\partial_\lambda g^{\mu\nu})}\right)\right]\delta g^{\mu\nu} d\Omega. \tag{2.51}$$

Defininindo

$$\frac{1}{2}\sqrt{-g}T_{\mu\nu} = \frac{\partial(\sqrt{-g}L_M)}{\partial g^{\mu\nu}} + \partial_\lambda\left(\frac{\partial(\sqrt{-g}L_M)}{\partial(\partial_\lambda g^{\mu\nu})}\right). \tag{2.52}$$

A expressão (2.51) assume a forma

$$\delta S_M = \frac{1}{2c}\int\sqrt{-g}T_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} d\Omega. \tag{2.53}$$

Sob a transformação de coordenada $x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu$, $g^{\mu\nu}$ se transforma de acordo com a expressão

$$g'^{\mu\nu}\left(x'^\lambda\right) = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda}\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\sigma}g^{\lambda\sigma}\left(x^\lambda\right) \approx g^{\mu\nu}\left(x^\lambda\right) + g^{\mu\sigma}\frac{\partial\xi^\nu}{\partial x^\sigma} + g^{\nu\lambda}\frac{\partial\xi^\mu}{\partial x^\lambda}. \tag{2.54}$$

Expandindo $g'^{\mu\nu}\left(x^\lambda + \xi^\lambda\right)$ em potências de ξ^λ até a primeira ordem, temos

$$g'^{\mu\nu}\left(x^\lambda + \xi^\lambda\right) = g'^{\mu\nu}\left(x^\lambda\right) + \xi^\lambda\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\lambda}. \tag{2.55}$$

Comparando as equações (2.54) e (2.55), podemos escrever

$$\begin{aligned} g'^{\mu\nu}\left(x^\lambda\right) &= g^{\mu\nu}\left(x^\lambda\right) + g^{\mu\lambda}\frac{\partial\xi^\nu}{\partial x^\lambda} + g^{\nu\lambda}\frac{\partial\xi^\mu}{\partial x^\lambda} - \xi^\lambda\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\lambda}, \\ &= g^{\mu\nu}\left(x^\lambda\right) + \nabla^\mu\xi^\nu + \nabla^\nu\xi^\mu. \end{aligned} \tag{2.56}$$

Assim,

$$g'^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} + \delta g^{\mu\nu}, \qquad \delta g^{\mu\nu} = \nabla^\mu\xi^\nu + \nabla^\nu\xi^\mu. \tag{2.57}$$

Os vetores ξ^μ que determinam a transformação de coordenada na qual a métrica é invariante, ou seja, satisfazem a equação

$$\nabla^\mu\xi^\nu + \nabla^\nu\xi^\mu = 0, \tag{2.58}$$

são denominados *vetores de Killing*.

Substituindo (2.57) para $\delta g^{\mu\nu}$ em (2.53), encontramos

$$\begin{aligned}
\delta S_M &= \frac{1}{2c}\int \sqrt{-g}\,T_{\mu\nu}\left(\nabla^{\mu}\xi^{\nu} + \nabla^{\nu}\xi^{\mu}\right) d\Omega = \frac{1}{c}\int \sqrt{-g}\,T_{\mu\nu}\nabla^{\mu}\xi^{\nu} d\Omega, \\
&= \frac{1}{c}\int \sqrt{-g}\,\nabla_{\mu}\left(T^{\mu}_{\nu}\xi^{\nu}\right) d\Omega - \frac{1}{c}\int \sqrt{-g}\,\xi^{\nu}\nabla_{\mu}T^{\mu}_{\nu} d\Omega, \\
&= \frac{1}{c}\int \partial_{\mu}\left(\sqrt{-g}\,T^{\mu}_{\nu}\xi^{\nu}\right) d\Omega - \frac{1}{c}\int \sqrt{-g}\,\xi^{\nu}\nabla_{\mu}T^{\mu}_{\nu} d\Omega, \\
&= \frac{1}{c}\oint \sqrt{-g}\,T^{\mu}_{\nu}\xi^{\nu} dS_{\mu} - \frac{1}{c}\int \sqrt{-g}\,\xi^{\nu}\nabla_{\mu}T^{\mu}_{\nu} d\Omega. \qquad (2.59)
\end{aligned}$$

Como ξ^{ν} é zero nos limites de integração, a integral de superfície em (2.58) se anula. Aplicando o Princípio da Mínima Ação

$$\delta S_M = -\frac{1}{c}\int \sqrt{-g}\,\xi^{\nu}\,\nabla_{\mu}T^{\mu}_{\nu} d\Omega = 0. \qquad (2.60)$$

Da arbitrariedade de ξ^{ν} segue que

$$\nabla_{\mu}T^{\mu\nu} = 0. \qquad (2.61)$$

Da simetria do tensor métrico $g^{\mu\nu}$ decorre que o tensor de energia momento $T_{\mu\nu}$ obtido pela expressão (2.52) é sempre simétrico.

2.6 Equação de Einstein

A equações de campo na Relatividade Geral estabelecem a relação entre a geometria do espaço-tempo e sua distribuição de matéria, ou seja, descrevem como a métrica responde à energia e momento. No limite não relativístico, para velocidades baixas e campos gravitacionais pouco intensos, a equação de Einstein se reduzem a equação de Poisson para o potencial Newtoniano, dada pela expressão (2.2). Assim, a equação de campo Einstein deve ser uma equação diferencial de segunda ordem covariante, proporcional ao tensor de energia-momento.

Para se chegar às equações de campo gravitacional, é necessário antes determinar a ação gravitacional S_{tt} para esses campos. Sendo a métrica a variável dinâmica utilizada na Teoria da Relatividade Geral, o único escalar invariante construído a partir da métrica, que contém suas derivadas até segunda ordem, é o escalar de Ricci. Dessa forma, a ação para o campo gravitacional, conhecida como a *ação de Hilbert-Einstein*, é expressa como

$$S_{tt} = -\frac{c^3}{16\pi tt}\int \sqrt{-g}\, R\, d\Omega. \tag{2.62}$$

Aplicando o princípio da mínima ação, temos

$$S_{tt} = -\frac{c^3}{16\pi tt}\delta\int \sqrt{-g}\, R\, d\Omega = -\frac{c^3}{16\pi tt}\delta\int \sqrt{-g}\, g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}\, d\Omega. \tag{2.63}$$

Usando

$$\begin{aligned}
\delta\sqrt{-g} &= -\frac{1}{2\sqrt{-g}}\delta g = -\frac{1}{2} g_{\mu\nu}\sqrt{-g}\,\delta g^{\mu\nu}, \\
g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} &= \nabla_\lambda\left(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu} - g^{\nu\lambda}\delta\Gamma^\mu_{\mu\nu}\right) = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\lambda\left(\sqrt{-g}\,W^\lambda\right),
\end{aligned}$$

onde $W^\lambda = g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu} - g^{\nu\lambda}\delta\Gamma^\mu_{\mu\nu}$.

A integral em $\delta R_{\mu\nu}$ se transforma em uma integral de superfície, se anulando nos limites de integração

$$\int \sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}\, d\Omega = \int \partial_\lambda\left(\sqrt{-g}\,W^\lambda\right) d\Omega = 0.$$

A expressão (2.63) pode ser escrita como

$$\delta S_{tt} = -\frac{c^3}{16\pi tt}\int \sqrt{-g}\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R g_{\mu\nu}\right)\delta g^{\mu\nu}\, d\Omega. \tag{2.64}$$

A variação total é a soma da variação ação gravitacional δS_{tt} com a ação para os campos de matéria δS_M , dada pela expressão (2.53).

$$\delta S = \delta S_{tt} + \delta S_M.$$

Assim, fazendo $\delta S = 0$

$$-\frac{c^3}{16\pi tt}\int \left[R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} - \frac{8\pi tt}{c^4}T_{\mu\nu}\right]\delta g^{\mu\nu} d\Omega = 0, \tag{2.65}$$

obtemos

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \frac{8\pi tt}{c^4}T_{\mu\nu}, \tag{2.66a}$$

$$tt_{\mu\nu} = \frac{8\pi tt}{c^4}T_{\mu\nu}. \tag{2.66b}$$

As equações acima, conhecidas como as equações de campo de Einstein, expressam a relação entre a geometria do espaço-tempo e a distribuição de matéria/energia. Diferentemente da Lei da Gravitação Universal de Newton, as equações de campo da Relatividade Geral descrevem a interação gravitacional não como uma força, mas como uma curvatura no espaço-tempo, expressa pelo tensor $tt_{\mu\nu}$. A ligação entre matéria e gravidade é expressa pela relação entre o tesnor de Einstein e o tensor de energia-momento. Contraindo a equação (2.66a) nos índices μ e ν, temos

$$R = \frac{8\pi tt}{c^4}\left[T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right]. \tag{2.67}$$

Substituindo (2.67) em (2.66a), as equações de campo são expressas como

$$R_{\mu\nu} = \frac{8\pi tt}{c^4}\left[T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right]. \tag{2.68}$$

2.6.1 Limite não-relativístico

A transição das equações de campo da Relatividade Geral para a mecânica não-relativística ocorre nos limites de pequenas velocidades (comparadas à velocidade luz) e campos gravitacionais pouco intensos.

O movimento de uma partícula sujeita a um campo gravitacional descrita na mecânica não-relativística por um potencial φ, é dado pela Lagrangiana

$$L = -mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 - m\varphi. \tag{2.69}$$

Consequentemente, a ação S é escrita na forma

$$S = \int L dt = -mc \int \left(c - \frac{1}{2c} v^2 + \frac{1}{c}\varphi \right) dt. \tag{2.70}$$

Comparando com a expressão para ação escrita em função do intervalo dS, temos

$$S = -mc \int ds, \tag{2.71}$$

$$ds = \left(c - \frac{1}{2c} v^2 + \frac{1}{c} \varphi \right). \tag{2.72}$$

Aplicando o limite de $c \to \infty$, o quadrado do intervalo espaço-temporal é expresso como

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2}{c^2}\varphi \right) c^2 dt^2 + dr^2. \tag{2.73}$$

Dessa forma, a componente temporal g_{00} do tensor métrico (a única responsável pela dinâmica) é dada por

$$g_{00} = 1 + \frac{2}{c^2}\varphi. \tag{2.74}$$

O tensor de energia momento para um corpo macroscópico, no limite considerado, é obtido da fórmula

$$T_{\mu\nu} = \rho c^2 U_\mu U_\nu, \tag{2.75}$$

onde ρ é a densidade do corpo, e U^μ é o quadrivetor velocidade. No limite para pequenas velocidades, as componentes espaciais U^i são negligenciadas. Assim, apenas a componente temporal $U^0 = 1$ é conservada. Consequentemente, das componentes do tensor de energia momento $T_{\mu\nu}$, resta somente $T_{00} = \rho c^2$.

As equações de campo em (2.68) se restringem a

$$R^0_0 = \frac{8\pi G}{c^4}\left(T^0_0 - \frac{1}{2}T\right) = -\frac{4\pi G\rho}{c^2}. \tag{2.76}$$

O cálculo de R_{00} é obtido pelas equações (2.34) e (2.40)

$$R_{\mu\nu} = R^\lambda_{\mu\lambda\nu} = \partial_\lambda\Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \partial_\nu\Gamma^\lambda_{\lambda\nu} + \Gamma^\lambda_{\sigma\lambda}\Gamma^\sigma_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\sigma\nu}\Gamma^\sigma_{\lambda\mu}. \tag{2.77}$$

Desprezando os termos de segunda ordem em (2.77), resultantes dos produtos das conexões, e as derivadas em relação à componente temporal $x^0 = ct$ (consideradas muito pequenas em comparação às derivadas com relação as componentes espaciais x^i), temos que

$$R_{00} = \partial_i\Gamma^i_{00} = \partial_i\left(-\frac{1}{2}g^{ij}\partial_j g_{00}\right) = -\frac{1}{2}\partial_i\partial^i g_{00}. \tag{2.78}$$

Assim, as equações de campo de Einstein no limite não-relativístico se reduzem a

$$\nabla^2\varphi = 4\pi G\rho. \tag{2.79}$$

A expressão em (2.79) é a mesma que em (2.2), ou seja, a equação de Poisson para o campo gravitacional, descrita em função do potencial φ para uma dada distribuição de massa. Dessa forma, no limite não-relativístico, as equações de campo de Einstein se reduzem à Lei Universal da Gravitação de Newton.

Capítulo 3

Teleparalelismo

O Teleparalelismo ou Teoria Teleparalela foi uma ideia incialmente formulada por Albert Einstein na tentativa de unificar as teorias da gravidade e do eletromagnetismo em uma única estrutura matemática baseada no paralelismo à distância, também referido como paralelismo absoluto [27, 28, 29]. Porém, a falta de solução de Schwarzschild para as suas equações de campo fez com que essa tentativa fosse abandonada por ele. O Teleparalelismo Equivalente à Relatividade Geral (TERG) é uma formulação geométrica alternativa à Relatividade Geral, construída no espaço-tempo de Weitzenböck e em termos dos campos de tétradas $e^{a}{}_{\mu}$. O objetivo da TERG é preservar as características físicas da teoria de Einstein – produzindo resultados equivalentes – além de propor explicações para fenômenos físicos ainda não abrangidos por esta.

3.1 Campo das Tétradas

Um campo de tétradas é um conjunto de vetores ortogonais, linearmente independentes, que descrevem, simultaneamente, o espaço-tempo físico e o espaço tangente com simetria $SO(3,1)$, ou seja, formam uma base para um sistema de coordenadas locais em um ponto arbitrário do espaço-tempo.

Assim, seja x^{μ} uma coordenada do espaço-tempo, que determina a coordenada das bases do espaço vetorial, formada pelo conjunto dos gradientes

$$\partial_{\mu} \equiv \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}, \tag{3.1}$$

e do espaço dual, formada pelo conjunto dos diferenciais dx^μ, tal que

$$dx^\mu\left(\partial_\nu\right) = \delta^\mu_\nu, \tag{3.2}$$

o *campo de tétradas*, denotado por

$$e_\alpha = e^\mu_\alpha \partial_\mu \quad \text{e} \quad e^\alpha = e^\alpha_\mu dx^\mu. \tag{3.3}$$

Representa um sistema de referência local de um observador que se move ao longo de uma trajetória no espaço-tempo. Os índices $\mu = \{0, 1, 2, 3\}$ se referem às coordenadas do espaço-tempo, e as quantidades a eles relacionadas se transformam como tensores sob mudança de coordenadas. Enquanto os índices $\alpha = \{(0)\ , (1)\ , (2)\ , (3)\}$ se referem às coordenadas locais do espaço tangente, sujeitas a métrica de Minkowski, preservada pelas transformações de Lorentz

$$\tilde{e}^a_\mu = \Lambda^a_b\, e^b_\mu, \tag{3.4}$$

e obedecem às transformações de coordenadas

$$e'^a_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} e^a_\nu, \tag{3.5}$$

onde Λ^a_b são matrizes do grupo $SO(3, 1)$ e satisfazem a relação (2.10)

$$e_{a\mu} = \eta_{ab} e^b_\mu = g_{\mu\nu} e^\nu_a \tag{3.6}$$

O tensor métrico $g_{\mu\nu}$, e a métrica de Minkowski η_{ab} são obtidos pelas relações

$$g_{\mu\nu} = \eta_{ab} e^e_\mu e^b_\nu, \tag{3.7}$$

$$\eta_{ab} = g_{\mu\nu} e^\mu_a e^\nu_b. \tag{3.8}$$

Da condição de ortogonalidade, segue que

$$e^\mu_a e^a_\nu = \delta^\mu_\nu \quad \text{e} \quad e^a_\mu e^\mu_b = \delta^a_b. \tag{3.9}$$

O quadrado do elemento de linha escrito no formalismo das tétradas é obtido a partir de (3.7)

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \eta_{ab} e^a_\mu e^b_\nu dx^\mu dx^\nu. \tag{3.10}$$

As quantidades A^a são definidas como as projeções no espaço tangente de suas coordenadas A^μ do espaço-tempo

$$A^a = e^a_\mu A^\mu, \tag{3.11a}$$

$$A_a = \eta_{ab} A^b = \eta_{ab} e^b_\nu g^{\mu\nu} A_\mu = e^\mu_a A_\mu. \tag{3.11b}$$

De maneira recíproca

$$A^\mu = e^\mu_a A^a, \tag{3.12a}$$

$$A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu = g_{\mu\nu} e^\nu_b \eta^{ab} A_a = e^a_\mu A_a. \tag{3.12b}$$

Dois vetores em pontos distantes são chamados paralelos se suas componentes em relação às tétradas locais são as mesmas nos pontos considerados. Dessa forma, dado um campo vetorial A^ν, suas componentes em relação às tétradas no ponto $x^\lambda + dx^\lambda$ são representadas por

$$\begin{aligned} A^a(x + dx) &= A^a(x) + \nabla_\lambda A^a(x)\, dx^\lambda, \\ \nabla_\lambda A^a &= \partial A^a + \omega_{\mu b}{}^{a} A^b, \end{aligned} \tag{3.13}$$

onde $\omega_{\mu ab}$ é a conexão de spin do grupo $SO(3,1)$ (Lorentz).

A condição de *paralelismo absoluto* é definida quando a derivada covariante em (3.13) se anula. Aplicando a exigência para o campo das tétradas, consequentemente

$$\nabla_\mu e^a_\nu \equiv 0. \tag{3.14}$$

Então, para campos de tétradas auto paralelos, a derivada covariante em (3.14) é expressa como

$$\begin{aligned} \nabla_\mu A^a &= e^a_\lambda \nabla_\mu A^\lambda = e^a_\lambda \left[\partial_\mu A^\lambda + \Gamma^\lambda_{\mu\nu} A^\nu \right], \\ &= \partial_\mu A^a - e^\lambda_b A^b \partial_\mu e^a_\lambda + e^a_\lambda e^\nu_b \Gamma^\lambda_{\mu\nu} A^b, \end{aligned} \tag{3.15}$$

onde $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ é a conexão afim. Comparando as expressões (3.13) e (3.15), pode-se estabelecer a relação entre a conexões de spin e afim [23]

$$\omega_{\mu ab} = e_{a\lambda} e^{\nu}_{b} \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} - e^{\lambda}_{b} \partial_{\mu} e_{a\lambda}, \tag{3.16a}$$

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = e^{a\lambda} e^{b}_{\nu} \omega_{\mu ab} + e^{a\lambda} \partial_{\mu} e_{a\nu}. \tag{3.16b}$$

A derivada covariante da tétrada fica

$$\nabla_{\mu} e^{a}_{\nu} = \partial_{\mu} e^{a}_{\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} e^{a}_{\lambda} + \omega^{a}{}_{\mu b} e^{b}_{\nu} \equiv 0. \tag{3.17}$$

Usando (3.16a), o tensor de torção $T^{\lambda}_{\mu\nu} = \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\nu\mu}$, e o tensor de curvatura $R^{\sigma}{}_{\lambda\mu\nu}$ definido em (2.34), são expressos de acordo com

$$T_{a\mu\nu}(e, \omega) = e_{a\lambda} T^{\lambda}_{\mu\nu} = \partial_{\mu} e_{a\nu} - \partial_{\nu} e_{a\mu} + \omega_{\mu ab} e^{b}_{\nu} - \omega_{\nu ab} e^{b}_{\mu}, \tag{3.18}$$

$$R^{\sigma}{}_{\lambda\mu\nu}(\Gamma) = R^{\sigma}{}_{\lambda\mu\nu}(e, \omega) = e^{\sigma}_{a} e^{b}_{\lambda} \left(\partial_{\mu} \omega^{a}{}_{\nu b} - \partial_{\nu} \omega^{a}{}_{\mu b} + \omega^{a}{}_{\mu c} \omega^{c}{}_{\nu b} - \omega^{a}{}_{\nu c} \omega^{c}{}_{\mu b} \right). \tag{3.19}$$

A conexão de spin é escrita como

$$\omega_{\mu ab} \equiv {}^{\circ}\omega_{\mu ab} + K_{\mu ab}, \tag{3.20}$$

onde $K_{\mu ab}$ é o tensor de contorção, e ${}^{\circ}\omega_{\mu ab}$ é a *conexão de Levi–Civita livre de torção*, definidos por

$$K_{\mu ab} = \frac{1}{2} e^{\lambda}_{a} e^{\nu}_{b} \left(T_{\lambda\mu\nu} + T_{\mu\lambda\nu} + T_{\nu\lambda\mu} \right), \tag{3.21}$$

$${}^{\circ}\omega_{\mu ab} = \frac{1}{2} e^{c}_{\mu} \left(\Omega_{bac} + \Omega_{cab} - \Omega_{abc} \right), \tag{3.22}$$

com Ω_{abc} dado por

$$\Omega_{abc} = e_{a\nu} \left(e^{\mu}_{b} \partial_{\mu} e^{\nu}_{c} - e^{\mu}_{c} \partial_{\mu} e^{\nu}_{b} \right). \tag{3.23}$$

O escalar de curvatura R, é obtido pela contração do tensor de curvatura

$$R = g^{\sigma\mu} g^{\lambda\nu} R_{\sigma\lambda\mu\nu} = \eta_{ac} \eta_{bd} e^{a\mu} e^{c\sigma} e^{b\nu} e^{d\lambda} R_{\sigma\lambda\mu\nu} = e^{a\mu} e^{b\nu} R_{ab\mu\nu}.$$

Usando a identidade (3.20), podemos escrever

$$
\begin{aligned}
R^{\sigma}{}_{\lambda\mu\nu}(e,\omega) &= \partial_\mu \omega^{\sigma}{}_{\nu\lambda} - \partial_\nu \omega^{\sigma}{}_{\mu\lambda} + \omega^{\sigma}{}_{\mu\rho}\omega^{\rho}{}_{\nu\lambda} - \omega^{\sigma}{}_{\nu\rho}\omega^{\rho}{}_{\mu\lambda}, \\
&= \partial_\mu {}^{\circ}\omega^{\sigma}{}_{\nu\lambda} - \partial_\nu {}^{\circ}\omega^{\sigma}{}_{\mu\lambda} + {}^{\circ}\omega^{\sigma}{}_{\mu\rho}{}^{\circ}\omega^{\rho}{}_{\nu\lambda} - {}^{\circ}\omega^{\sigma}{}_{\nu\rho}{}^{\circ}\omega^{\rho}{}_{\mu\lambda} \\
&\quad + \partial_\mu K^{\sigma}{}_{\nu\lambda} - \partial_\nu K^{\sigma}{}_{\mu\lambda} + K^{\sigma}{}_{\mu\rho}K^{\rho}{}_{\nu\lambda} - K^{\sigma}{}_{\nu\rho}K^{\rho}{}_{\mu\lambda} \\
&\quad + {}^{\circ}\omega^{\sigma}{}_{\mu\rho}K^{\rho}{}_{\nu\lambda} + K^{\sigma}{}_{\mu\rho}{}^{\circ}\omega^{\rho}{}_{\nu\lambda} - {}^{\circ}\omega^{\sigma}{}_{\nu\rho}K^{\rho}{}_{\mu\lambda} - K^{\sigma}{}_{\nu\rho}{}^{\circ}\omega^{\rho}{}_{\mu\lambda}.
\end{aligned}
$$

Contraindo os índices σ com μ, e λ com ν

$$
\begin{aligned}
R(e,\omega) &= R(e) + g^{\lambda\nu}\Big[\partial_\mu K^{\mu}{}_{\nu\lambda} - \partial_\nu K^{\mu}{}_{\mu\lambda} + K^{\mu}{}_{\mu\rho}K^{\rho}{}_{\nu\lambda} - K^{\mu}{}_{\nu\rho}K^{\rho}{}_{\mu\lambda} \\
&\quad + {}^{\circ}\omega^{\mu}{}_{\mu\rho}K^{\rho}{}_{\nu\lambda} + K^{\mu}{}_{\mu\rho}{}^{\circ}\omega^{\rho}{}_{\nu\lambda} - {}^{\circ}\omega^{\mu}{}_{\nu\rho}K^{\rho}{}_{\mu\lambda} - K^{\mu}{}_{\nu\rho}{}^{\circ}\omega^{\rho}{}_{\mu\lambda}\Big].
\end{aligned}
$$

De (3.21)

$$
K^{\mu}{}_{\mu\lambda} = T_\lambda, \quad K^{\lambda\mu}{}_{\mu} = -T^{\lambda} \quad \text{e} \quad K^{\mu\nu\lambda}K_{\nu\lambda\mu} = \frac{1}{4}T^{\mu\nu\lambda}T_{\mu\nu\lambda} + \frac{1}{2}T^{\mu\nu\lambda}T_{\nu\mu\lambda},
$$

$$
\begin{aligned}
R(e,\omega) &= R(e) - \partial^{\lambda}T_\lambda - T_\rho T^{\rho} + \frac{1}{4}T^{\nu\mu\rho}T_{\nu\mu\rho} + \frac{1}{2}T^{\mu\nu\rho}T_{\nu\mu\rho} + T_\rho{}^{\circ}\omega^{\rho\nu}{}_{\nu} \\
&\quad + g^{\lambda\nu}\Big[\partial_\mu K^{\mu}{}_{\nu\lambda} + {}^{\circ}\omega^{\mu}{}_{\mu\rho}K^{\rho}{}_{\nu\lambda} - K^{\mu}{}_{\nu\rho}{}^{\circ}\omega^{\rho}{}_{\mu\lambda} - {}^{\circ}\omega^{\mu}{}_{\nu\rho}K^{\rho}{}_{\mu\lambda}\Big].
\end{aligned}
$$

Com as relações

$$
\begin{aligned}
{}^{\circ}\nabla_\mu K^{\mu}{}_{\nu\lambda} &= \partial_\mu K^{\mu}{}_{\nu\lambda} + {}^{\circ}\omega^{\mu}{}_{\mu\rho}K^{\rho}{}_{\nu\lambda} - {}^{\circ}\omega^{\rho}{}_{\mu\lambda}K^{\mu}{}_{\nu\rho} - {}^{\circ}\omega^{\rho}{}_{\mu\nu}K^{\mu}{}_{\lambda\rho}, \\
{}^{\circ}\nabla_\nu T_\lambda &= \partial_\nu T_\lambda - {}^{\circ}\omega^{\rho}{}_{\nu\lambda}T_\rho,
\end{aligned}
$$

finalmente, o escalar de curvatura é escrito na forma

$$
R(e,\omega) = R(e) + \frac{1}{4}T^{abc}T_{abc} + \frac{1}{2}T^{abc}T_{abc} + T^{a}T_a - 2\,{}^{\circ}\nabla_\mu T^{\mu}. \tag{3.24}
$$

O escalar de curvatura obtido em (3.24) serve de base para o desenvolvimento da formulação lagrangiana do *Teleparalelismo Equivalente á Relatividade Geral* (TEGR), abordada na próxima seção. A TEGR se utiliza do campo das tétradas auto paralelas para construir uma base que descreva um espaço-tempo sem curvatura e com torção não nula, intitulado *espaço-tempo de Weitzenböck*.

3.2 Formulação Lagrangiana da TEGR

As teorias teleparalelas da gravidade são construídas a partir da descrição do espaço-tempo de Weitzenböck, caracterizado por uma curvatura nula – que implica no paralelismo absoluto das tétradas, expresso pela condição (3.15) – e uma torção não nula – do qual resultam os efeitos gravitacionais. A formulação lagragiana da TEGR exibe invariância global sob transformações de Lorentz (grupo $SO(3,1)$ global), que acarreta na anulação da conexão de spin $\omega_{\mu ab}$ do grupo local $SO(3,1)$ (Lorentz): $\omega_{\mu ab} = 0$. Desta imposição, segue que a conexão afim $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ expressa em (3.16b), se reduz à conexão de Weitzenböck, definida por

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = e^{a\lambda}\partial_{\mu}e_{a\nu}. \tag{3.25}$$

Consequentemente, a condição de paralelismo absoluto da tétrada é automaticamente satisfeita

$$\nabla_{\mu}e^{a}{}_{\nu} = \partial_{\mu}e^{a}{}_{\nu} - \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}e^{a}{}_{\lambda} \equiv 0, \tag{3.26}$$

e o tensor de torção em (3.18) se restringe a

$$T_{a\mu\nu} = \partial_{\mu}e_{a\nu} - \partial_{\nu}e_{a\mu}. \tag{3.27}$$

Ainda em decorrência da invariância global de Lorentz ($\omega_{\mu ab} = 0$), o escalar de curvatura $R(e,\omega)$ apresentado na equação (3.24) se anula, e a sua expressão se limita a

$$R(e) = -\left(\frac{1}{4}T^{abc}T_{abc} + \frac{1}{2}T^{abc}T_{bac} - T^{a}T_{a}\right) + 2\nabla_{\mu}T^{\mu}. \tag{3.28}$$

Introduzindo o tensor Σ^{abc} definido por

$$\Sigma^{abc} = \frac{1}{4}\left(T^{abc} + T^{bac} - T^{cab}\right) + \frac{1}{2}\left(\eta^{ac}T^{b} - \eta^{ab}T^{c}\right), \tag{3.29}$$

de forma que,

$$\Sigma^{abc}T_{abc} = \frac{1}{4}T^{abc}T_{abc} + \frac{1}{2}T^{abc}T_{bac} - T^{a}T_{a}. \tag{3.30}$$

Dessa maneira, a expressão em (3.28) pode ser escrita como

$$eR\,(e) = -e\Sigma^{abc}T_{abc} + 2\partial_\mu\,(eT^\mu)\,, \tag{3.31}$$

onde $e = \det\left(e^a_\mu\right) = \sqrt{-g}$.

Desprezando o termo de divergência $\partial_\mu\,(eT^\mu)$, a densidade de Lagrangiana da TEGR, para um e*spaço-tempo assintoticamente plano*, é dada por

$$\mathsf{L}(e) = -ke\Sigma^{abc}T_{abc} + \frac{1}{c}\mathsf{L}_M\,, \tag{3.32}$$

tal que L_M é a densidade de Lagragiana para os campos de matéria, e $k = c^3/16\pi tt$.

As equações de campo são obtidas pela variação de L em relação aos campos de tétradas, e^a_μ. Pelo Princípio da Mínima ação

$$\delta\mathsf{L} = \delta\mathsf{L}_{tt} + \frac{1}{c}\delta\mathsf{L}_M = 0, \tag{3.33}$$

onde $\mathsf{L}_{tt} = -ke\Sigma^{abc}T_{abc}$ é a Lagragiana gravitacional

$$\delta\mathsf{L}_{tt} = \delta\left(-ke\Sigma^{abc}T_{abc}\right) = \delta\mathsf{L}_e + \delta\mathsf{L}_\Sigma + \delta\mathsf{L}_T\,, \tag{3.34}$$

em que as partes da variação da lagragiana $\delta\mathsf{L}_{tt}$ são

$$\delta\mathsf{L}_e = -k\,(\delta e)\,\Sigma^{abc}T_{abc}, \qquad \delta\mathsf{L}_\Sigma = -ke\left(\delta\Sigma^{abc}\right)T_{abc} \qquad \text{e} \qquad \delta\mathsf{L}_T = -ke\Sigma^{abc}\,(\delta T_{abc})\,.$$

Como $\delta e = ee^{a\mu}\delta e_{a\mu}$

$$\delta\mathsf{L}_e = ee^{a\mu}\Sigma^{bcd}T_{bcd}\delta e_{a\mu}. \tag{3.35}$$

Para $\delta\mathsf{L}_\Sigma$, temos

$$\frac{1}{4}\left(\delta T^{abc} + \delta T^{bac} - \delta T^{cab}\right)\delta T^{abc} + \frac{1}{2}\left(\eta^{ac}\delta T^b - \eta^{ab}\delta T^c\right)T_{abc}$$
$$= \frac{1}{4}\left(T_{abc} + T_{bac} - T_{cab}\right)\delta T^{abc} + \frac{1}{2}\left(\eta_{ac}T_b - \eta_{ab}T_c\right)\delta T^{abc}.$$

Assim,

$$\delta L_{\Sigma} = \delta L_T = -ke\Sigma^{abc}\delta T_{abc}. \tag{3.36}$$

Utilizando a identidade (3.27), temos

$$\delta T_{abc} = e_b{}^{\mu} e_c{}^{\nu} \delta T_{a\mu\nu} + e_b{}^{\mu} \delta e_c{}^{\nu} T_{a\mu\nu} + e_c{}^{\nu} \delta e_b{}^{\mu} T_{a\mu\nu},$$

$$e e_b{}^{\mu} e_c{}^{\nu} \Sigma^{abc} \delta T_{a\mu\nu} = e\Sigma^{a\mu\nu}\left(\partial_\mu \delta e_{a\nu} - \partial_\nu \delta e_{a\mu}\right) = \delta e_{a\nu}\partial_\mu\left(e\Sigma^{a\mu\nu}\right) + \delta e_{a\mu}\partial_\nu\left(e\Sigma^{a\mu\nu}\right),$$

onde as divergências $\partial_\mu\left(\delta e_{a\nu}\, e\Sigma^{a\mu\nu}\right)$ e $\partial_\nu\left(\delta e_{a\mu} e\Sigma^{a\mu\nu}\right)$ foram desprezadas.

A soma das variações δL_{Σ} e δL_T é expressa pela equação

$$\delta L_{\Sigma} + \delta L_T = -4k\left[\partial_\nu\left(e\Sigma^{a\mu\nu}\right) - e\Sigma^{ab\nu}T^{\mu}{}_{b\nu}\right]\delta e_{a\mu}. \tag{3.37}$$

A variação da lagragiana gravitacional é, então, dada por

$$\delta L_{tt} = -4k\left[\partial_\nu\left(e\Sigma^{a\mu\nu}\right) - e\left(\partial_\nu\left(e\Sigma^{a\mu\nu}\right) - \frac{1}{4}e^{a\mu}\Sigma^{bcd}T_{bcd}\right)\right]\delta e_{a\mu}. \tag{3.38}$$

A variação da lagragiana de matéria com relação $e_{a\mu}$ é dada por

$$\delta L_M = eT^{a\mu}\delta e_{a\mu}. \tag{3.39}$$

De acordo com (3.33), as equações de campo são

$$e_{a\lambda}e_{b\mu}\partial_\nu\left(e\Sigma^{b\lambda\nu}\right) - e\left(\Sigma^{b\nu}{}_{a}T_{b\nu\mu} - \frac{1}{4}e_{a\mu}\Sigma^{bcd}T_{bcd}\right) = \frac{1}{4kc}eT_{a\mu}. \tag{3.40}$$

Como o $\Sigma^{abc}T_{abc}$ é proporcional ao escalar de curvatura $R\,(e)$ a menos de uma divergência, é possível mostrar que o lado esquerdo da equação (3.40) é proporcional ao tensor de Einstein $tt_{\mu\nu}$ em (2.44). Assim

$$e_{a\lambda}e_{b\mu}\partial_\nu\left(e\Sigma^{b\lambda\nu}\right) - e\left(\Sigma^{b\nu}{}_{a}T_{b\nu\mu} - \frac{1}{4}e_{a\mu}\Sigma^{bcd}T_{bcd}\right) = \frac{1}{2}\left(R_{a\mu} - \frac{1}{2}e_{a\mu}R\right). \tag{3.41}$$

Dessa forma a equação (3.41) pode ser reduzida à equação de Einstein expressa em (2.66a) e em

(2.66b)

$$R_{a\mu} - \frac{1}{2} e_{a\mu} R = \frac{1}{2kc} T_{a\mu}. \tag{3.42}$$

Isso mostra a equivalência entre o *Teleparalelismo* e a *Relatividade Geral*.

Outra forma de se escrever a fórmula (3.40) que evidencia a equivalência entre as duas teorias é

$$\partial_\nu \left(e\Sigma^{a\lambda\nu} \right) = \frac{1}{4kc} e e^a{}_\mu \left(t^{\lambda\mu} + T^{\lambda\mu} \right), \tag{3.43}$$

onde $T^{\lambda\mu} = e^\nu{}_a T^{a\mu}$ e $t^{\lambda\mu}$ é definido por

$$t^{\lambda\mu} = k \left(\Sigma^{ab\mu} T_{ab}{}^{\nu} - g^{\mu\nu} \Sigma^{abc} T_{abc} \right), \tag{3.44}$$

é o tensor de energia-momento do campo gravitacional, tal que o momento generalizado é expresso por

$$P^a = \frac{1}{c} \int e e^a{}_\mu \left(t^{j\mu} + T^{j\mu} \right) dS_j \tag{3.45}$$

Da propriedade de antissimetria do tensor $\Sigma^{a\mu\nu}$ nos últimos dois índices ($\Sigma^{a\mu\nu} = -\Sigma^{a\nu\mu}$), segue que

$$\partial_\lambda \partial_\nu \left(e\Sigma^{a\lambda\mu} \right) = \partial_\lambda \left(e t^{\lambda\mu} + e T^{\lambda\mu} \right) = 0, \tag{3.46}$$

que representa uma lei de conservação, descrita por uma equação de continuidade, para os campos de matéria e o campo gravitacional.

Capítulo 4

Gravitação Espinorial

4.1 Teoria Espinorial da Gravitação

O *Princípio da Equivalência* estabelece que a interação gravitacional pode ser descrita como uma mudança na geometria do espaço-tempo. Na Relatividade Geral essa ideia é concebida nas equações de campo de Einstein, que descrevem a evolução da geometria do espaço-tempo sob o pressuposto de que o campo gravitacional possui a sua própria dinâmica. Embora relacionados, o Princípio da Equivalências e as equações de campo da Relatividade Geral são independentes. A *Teoria Espinorial da Gravitação* segundo o trabalho de Novello [21, 22], propõe que os efeitos gravitacionais se originam da dinâmica de dois campos espinoriais fundamentais Ψ e Y – que obedecem à equação de movimento não linear de Heisenberg – do qual uma geometria efetiva é construída [24]. Consequentemente, a métrica do espaço-tempo não é considerada um campo independente, assim como não possui dinâmica própria.

Esses dois campos espinoriais interagem universalmente com todas as formas de matéria e energia, sendo sua influência nestas, completamente equivalente à uma mudança na geometria de fundo do espaço-tempo. Assim, o acoplamento dos espinores com a matéria produz, como consequência, uma métrica efetiva. Esta última, por sua vez, herda sua dinâmica através relação com os campos espinoriais.

Os espinores Ψ e Y, na teoria de Novello, são definidos pelos vetores de corrente J^{μ} e I^{μ} na forma padrão [15]

$$J^{\mu} \equiv \overline{\Psi}\gamma^{\mu}\Psi, \quad j^{\mu} \equiv \overline{Y}\gamma^{\mu}Y,$$
$$I^{\mu} \equiv \overline{\Psi}\gamma^{\mu}\gamma^{5}\Psi, \quad i^{\mu} \equiv \overline{Y}\gamma^{\mu}\gamma^{5}Y,$$

onde as quantidades γ^{μ} obedecem à álgebra de Clifford

$$\frac{1}{2}\{\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\} = g^{\mu\nu}, \tag{4.1}$$

com $\gamma^{5} = i\gamma^{0}\gamma^{1}\gamma^{2}\gamma^{3}$, $\overline{\Psi}(\overline{Y}) \equiv \Psi^{\dagger}(Y^{\dagger})\gamma^{0}$

Das identidades de *Pauli-Kofink* obtém-se que os vetores J_{μ} e I_{μ} são ortogonais e suas normas possuem mesmos valores com sinais opostos

$$\begin{aligned} J^{\mu}J_{\mu} &= -I^{\mu}I_{\mu}, \\ J^{\mu}I_{\mu} &= 0. \end{aligned}$$

Das relações acima segue que as correntes J_{μ} e I_{μ} são vetores do tipo tempo e do tipo espaço, respectivamente.

A derivada covariante dos campos espinoriais, cujas as propriedades necessárias para obtê-las foram mostradas por de Fock e Ivanenko [25, 26], é definida como

$$\nabla\Psi = \partial_{\mu}\Psi - i\Gamma_{\mu}\Psi. \tag{4.2}$$

As quantidades $i\Gamma_{\mu}$ são construídas de forma que a conexão seja compatível com a métrica. Para tal, usamos a propriedade

$$\frac{1}{2}\{\gamma_{\mu}\gamma_{\nu}\} = g_{\mu\nu}, \tag{4.3}$$

tal que a derivada covariante de γ_{μ} é definida por

$$\nabla_{\mu}\gamma_{\nu} = [U_{\mu}, \gamma_{\nu}], \tag{4.4}$$

onde U_{μ} é um elemento arbitrário da álgebra de Clifford.

Usando as relações acima com $U_{\mu} = A_{\mu} + B_{\mu}\gamma^{5}$, e o fato de que γ^{5} anti-comuta com todos os γ_ν, segue que a derivada da métrica é

$$\nabla_\lambda g_{\mu\nu} = [U_\lambda, \gamma_\mu]\, \gamma_\nu + \gamma_\mu\, [\gamma_\nu\, U_\lambda, \gamma_\nu] + [U_\lambda, \gamma_\nu]\, \gamma_\mu + \gamma_\nu\, [U_\lambda, \gamma_\mu] = 0.$$

Assim, a conexão interna Γ_μ assume a forma

$$\Gamma_\mu = -iU_\mu. \tag{4.5}$$

Apropriando-se da abordagem de Heisenberg [24] – uma equação de movimento não linear para os constituintes fundamentais da matéria – a dinâmica dos campos espinoriais Ψ e Y é dada pela lagrangiana de auto interação

$$\mathsf{L} = \mathsf{k}c\left(\frac{i}{2}\bar{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi - \frac{i}{2}\partial_\mu\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi\right) - V(\Psi), \tag{4.6}$$

onde potencial V é dado pelo escalar

$$V = sJ^\mu J_\mu,$$

em que s é um parâmetro real de dimensão $(comprimento)^2$.

O termo de auto acoplamento pode ser entendido a partir da conexão interna Γ_μ escrita como

$$\Gamma_\mu = -i\,(aJ_\mu + bI_\mu)\left(1 + \gamma^5\right), \tag{4.7}$$

e escrevendo a lagragiana da expressão (4.6) na forma covariante

$$\begin{aligned}
\mathsf{L} &= \mathsf{k}c\left(\frac{i}{2}\bar{\Psi}\gamma^\mu\nabla_\mu\Psi - \frac{i}{2}\nabla_\mu\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi\right), \\
&= \mathsf{k}c\left(\frac{i}{2}\bar{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi - \frac{i}{2}\partial_\mu\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi + \frac{1}{2}\bar{\Psi}\gamma^\mu\,\Gamma_\mu\Psi - \frac{1}{2}\Gamma_\mu\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi\right), \\
&= \mathsf{k}c\left(\frac{i}{2}\bar{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi - \frac{i}{2}\partial_\mu\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi\right) + \frac{i}{2}\mathsf{k}c\left[(a - \bar{a}) - \left(b - \bar{b}\right)\right] J^\mu J_\mu.
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Comparando as expressões (4.7) e (4.8), identificamos

$$s = \frac{i}{2}\mathsf{k}c\left[(a - \bar{a}) - \left(b - \bar{b}\right)\right], \tag{4.9}$$

a interação entre os campos Ψ e Y é obtida com a mudança de conexão

$$\Gamma_\mu = i\left[a\left(J^\mu - j^\mu\right) - b\left(I^\mu - i^\mu\right)\right]\left(1 + \gamma^5\right). \tag{4.10}$$

A lagrangiana de interação entre os dois espinores é, então, dada por

$$\mathsf{L}_{int} = \frac{i}{2}\mathsf{k}c\left[(a - \bar{a})\left(J^\mu - j^\mu\right) + \left(b - \bar{b}\right)\left(I^\mu - i^\mu\right)\left[J^\mu + j^\mu + I^\mu + i^\mu\right]\right]. \tag{4.11}$$

Fazendo $b - \bar{b} = \beta\,(a - \bar{a})$, temos

$$\begin{aligned}\mathsf{L}_{int} &= \frac{i}{2}\mathsf{k}c\,(a - \bar{a})\,(1 - \beta)\,(J^\mu J_\mu + j^\mu j_\mu)\\ &+ i\mathsf{k}c\,(a - \bar{a})\,(j^\mu J_\mu + \beta i_\mu I^\mu)\\ &+ \frac{i}{2}\mathsf{k}c\,(a - \bar{a})\,(1 - \beta)\,(J^\mu i_\mu + I^\mu j_\mu)\,.\end{aligned} \tag{4.12}$$

Interessante observar que, para o caso $\beta = 1$, os termos de Heisenberg desaparecem e a lagrangiana de interação se reduz a

$$\mathsf{L}_F = g_F\bar{\Psi}\gamma^\mu\left(1 + \gamma^5\right)\Psi\bar{Y}\gamma_\mu\left(1 + \gamma^5\right)Y. \tag{4.13}$$

onde $g_F \equiv i\mathsf{k}c\,(a - \bar{a})$.

A ação para uma distribuição de matéria na ausência de forças gravitacionais é dada por

$$S_0 = \int d\Omega\sqrt{-\gamma}L_0 \int d\Omega\sqrt{-\gamma}B^{\mu\nu}\gamma_{\mu\nu}, \tag{4.14}$$

onde $\gamma_{\mu\nu}$ é a métrica de Minkowski escrita em um sistema de coordenadas arbitrário, e $B^{\mu\nu}$ pode ser escrito em termos do tensor de energia-momento

$$B^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} - \frac{1}{2}T\gamma^{\mu\nu}.$$

A ação total, incluída a interação gravitacional, é obtida pela mudança na métrica $\gamma_{\mu\nu}$ pela métrica efetiva

$$g_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} + \phi_{\mu\nu}. \tag{4.15}$$

$$\sqrt{-g}g_{\mu\nu} = \sqrt{-\gamma}(\gamma_{\mu\nu} + \phi_{\mu\nu}) \tag{4.16}$$

O acoplamento do tensor $\phi_{\mu\nu}$ com a matéria produz uma mudança na estrutura da métrica. Assim

$$S = \int d\Omega\sqrt{-g}B^{\mu\nu}g_{\mu\nu} = S_0 + \int d\Omega\sqrt{-\gamma}B^{\mu\nu}\phi_{\mu\nu}, \tag{4.17}$$

onde a ação gravitacional $L_g = B^{\mu\nu}\phi_{\mu\nu}$ é obtida por uma mudança na conexão interna. Desse modo, $U\mu$ é substituído por

$$U_\mu = U^1_\mu + U^2_\mu, \tag{4.18}$$

tal que

$$U^1_\mu = [a\,(J_\mu + j_\mu) + b\,(I_\mu + i_\mu)]\left(1 + \gamma^5\right),$$

e

$$U^2_\mu = -\frac{\Lambda}{\sqrt{X}}\,[a\,(J_\nu + j_{J_\nu}) + b\,(I_{J_\nu} + i_{J_\nu})]\,B_\mu{}^\nu\left(1 + \gamma^5\right),$$

onde Λ é uma constante de dimensão $(energia)^{-1}$ e $X = J^\mu J_\mu + j^\mu j^\mu$.

O termo U^2_μ representa a interação dos espinores com a matéria/energia, enquanto U^1_μ é responsável pela livre interação entre os campos. Substituindo U^2_μ na equação (4.8) e levando em conta a simetria de $B_{\mu\nu}$ nos índices μ e ν, temos

$$L_g = -g_F\,\frac{\Lambda}{4}\frac{(c_{\mu\nu} + c_{\nu\mu})}{\sqrt{X}}B_{\mu\nu}, \tag{4.19}$$

onde $c_{\mu\nu} = [J^\mu + j^\mu + I^\mu + i^\mu]\,[J_\nu + j_\nu + \beta\,(I_\nu + i_\nu\,)]$.

O campo $\phi_{\mu\nu}$ é determinado comparando as igualdades em (4.17) e em (4.19). Escolhendo $\phi_{\mu\nu}$ de forma que este seja adimensional, podemos definir

$$\phi_{\mu\nu} = -\frac{g_F}{4}\frac{\Lambda}{\sqrt{X}}(c_{\mu\nu} + c_{\nu\mu})\,. \tag{4.20}$$

A equação (4.19) para a lagrangiana gravitacional leva à definição de uma métrica análoga àquela representada na teoria de campo da Relatividade Geral, expressa na fórmula (4.15). Devido a escolha da métrica $g_{\mu\nu}$ neste equação, segue que $B^{\mu\nu}$ também é equivalente ao da teoria de Einstein. Assim, o acoplamento da matéria com os campos espinoriais mantém a validade da análise relativística no que diz respeito ao comportamento da matéria para uma dada geometria do espaço-tempo.

4.2 Gravitação Espinorial na TEGR

Na seção anterior apresentamos a Teoria Espinorial da Gravitação de Novello, que é formulada em acordo com a Relatividade Geral, onde a proposta é obter uma métrica efetiva a partir de dois campos de espinores fundamentais. Neste caso, a mudança na geometria de fundo do espaço-tempo é resultado da interação desses campos com a matéria, e a dinâmica da métrica é herdada da sua relação com os dois espinores.

Na TEGR a métrica $g_{\mu\nu}$ não possui caráter fundamental, sua dinâmica é obtida dos campos de tétradas auto paralelas e^a_μ. Além do mais, a formulação geométrica do espaço-tempo no Teleparalelismo difere da elaborada na Relatividade Geral. Esta parte de uma geometria sem torção e com curvatura não nula, enquanto aquela é caracterizada espaço-tempo de Weitzenböck – o exato "oposto" do espaço-tempo de Riemann. Assim, a concepção de uma teoria espinorial da gravitação em consonância com a TEGR deve partir de espinores relacionados com os campos de tétradas, e que esta relação preserve as características do espaço-tempo de Weitzenböck (curvatura nula e torção diferente de zero). Então, dados dois campos Ψ e Y, definimos

$$e^a_\mu = Y^a_{\mu\nu}\Psi^\nu. \tag{4.21}$$

As características geométricas dos campos Ψ e Y podem ser obtidas das relações de ortogonalidade dos campos de tétradas

$$\begin{aligned} e^a_\mu b^{b\mu} &= \eta^{ab}, \\ Y^a_{\mu\nu}\Psi^\nu Y^{b\mu\lambda}\Psi_\lambda &= \eta^{ab}, \\ \Psi^\nu\Psi_\lambda \frac{1}{2}\left[Y^a_{\mu\nu}Y^{b\mu\lambda} + Y^a_{\mu\lambda}Y^{b\mu\nu}\right] &= \eta^{ab}. \end{aligned} \tag{4.22}$$

Da igualdade acima, estabelecemos

$$\Psi^\mu\Psi_\nu = \delta^\mu_\nu. \tag{4.23}$$

Assim, segue que

$$\frac{1}{2}\left[Y^a_{\mu\nu}Y^{b\mu\lambda} + Y^a_{\mu\lambda}Y^{b\mu\nu}\right] = \eta^{ab}\delta^\lambda{}_\nu \tag{4.24}$$

A proposta dessa teoria é obter uma equação que represente a dinâmica dos campos Ψ e Y. Para tal, podemos partir da lagrangiana teleparalela dada pela expressão (3.32)

$$\mathrm{L} = -ke\Sigma^{abc}T_{abc} - \frac{1}{c}\mathrm{L}_M .$$

A representação da lagrangiana acima não permite a substituição direta dos campos de tétradas pelos campos de espinores, conforme (4.21). O modo mais conveniente de se proceder é escrever a lagrangiana explicitamente em função das tétradas e suas derivadas. Procedendo dessa maneira

$$\Sigma^{abc}T_{abc} = \Sigma^{abc}e_b^{\ \mu}e_c^{\ \nu}\,T_{a\mu\nu}.$$

Utilizando (3.27), a equação acima resulta em

$$\Sigma^{abc}T_{abc} = \Sigma^{abc}e_b^{\ \mu}e_c^{\ \nu}\,(\partial_\mu e_{a\nu} - \partial_\nu e_{a\mu}) .$$

Apropriando-se da antissimetria de Σ^{abc} em relação os últimos dois índices e trocando b com c e μ com ν, podemos escrever

$$\begin{aligned}\Sigma^{abc}e_b^{\ \mu}e_c^{\ \nu}\partial_\nu e_{a\mu} &= -\Sigma^{acb}e_b^{\ \mu}e_c^{\ \nu}\partial_\nu e_{a\mu}, \\ &= -\Sigma^{abc}e_b^{\ \mu}e_c^{\ \nu}\partial_\mu e_{a\nu}.\end{aligned}$$

Logo

$$\mathrm{L}_g = -2ke\Sigma^{abc}e_b^{\ \mu}e_c^{\ \nu}(\partial_\mu e_{a\nu}).$$

As quantidades Σ^{abc} são obtidas das torções T^{abc} pela relação em (3.29)

$$\Sigma^{abc} = \frac{1}{4}\left(T^{abc} + T^{bac} - T^{cab}\right) + \frac{1}{2}\left(\eta^{ac}T^b - \eta^{ab}T^c\right).$$

Trabalhando cada termo por vez, temos

$$\begin{aligned}T^{abc}e_b^{\ \mu}e_c^{\ \nu}(\partial_\mu e_{a\nu}) &= e^b_{\ \lambda}e^c_{\ \sigma}T^{a\sigma\lambda}e_b^{\ \mu}e_c^{\ \nu}(\partial_\mu e_{a\nu}) , \\ &= e^b_{\ \lambda}e^c_{\ \sigma}\left(\partial^\lambda e^{a\sigma} - \partial^\sigma e^{a\lambda}\right)e_b^{\ \mu}e_c^{\ \nu}(\partial_\mu e_{a\nu}) , \\ &= \delta^\mu_\lambda\delta^\nu_\sigma\partial_\mu e_{a\nu}\left(\partial^\lambda e^{a\sigma} - \partial^\sigma e^{a\lambda}\right) , \\ &= \partial_\mu e_{a\nu}\,(\partial^\mu e^{a\nu} - \partial^\nu e^{a\mu}) ,\end{aligned}$$

e

$$
\begin{aligned}
T^{bac} e_b^{\ \mu} e_c^{\ \nu} (\partial_\mu e_{a\nu}) &= e^a_{\ \lambda} e^c_{\ \sigma} T^{b\lambda\sigma} e_b^{\ \mu} e_c^{\ \nu} (\partial_\mu e_{a\nu}) \, , \\
&= e^a_{\ \lambda} e^c_{\ \sigma} \left(\partial^\lambda e^{b\sigma} - \partial^\sigma e^{b\lambda} \right) e_b^{\ \mu} e_c^{\ \nu} (\partial_\mu e_{a\nu}) \, .
\end{aligned}
$$

Fazendo

$$
\begin{aligned}
e^c_{\ \sigma} \left(\partial^\lambda e^{b\sigma} \right) &= \partial^\lambda \left(e^c_{\ \sigma} e^{b\sigma} \right) - e^{b\sigma} \left(\partial^\lambda e^c_{\ \sigma} \right) , \\
&= \partial^\lambda \eta^{bc} - e^{b\sigma} \left(\partial^\lambda e^c_{\ \sigma} \right) , \\
&= -e^{b\sigma} \left(\partial^\lambda e^c_{\ \sigma} \right) ,
\end{aligned}
$$

em seguida

$$
\begin{aligned}
e^a_{\ \lambda} \left(\partial^\sigma e^{b\lambda} \right) &= \partial^\sigma \left(e^a_{\ \lambda} e^{b\lambda} \right) - e^{b\lambda} \left(\partial^\sigma e^a_{\ \lambda} \right) , \\
&= \partial^\sigma \eta^{ab} - e^{b\lambda} \left(\partial^\sigma e^a_{\ \lambda} \right) , \\
&= -e^{b\lambda} \left(\partial^\sigma e^a_{\ \lambda} \right) ,
\end{aligned}
$$

e por fim

$$
\begin{aligned}
e_c^{\ \nu} (\partial_\nu e_{a\nu}) &= \partial_\mu (e_{a\nu} e_c^{\ \nu}) - e_{a\nu} (\partial_\mu e_c^{\ \nu}) \, , \\
&= \partial_\mu \eta^{ab} - e_{a\nu} (\partial_\mu e_c^{\ \nu}) \, , \\
&= -e_{a\nu} (\partial_\mu e^\nu_{\ c}) \, .
\end{aligned}
$$

Temos

$$
\begin{aligned}
e^a_{\ \lambda} e^c_{\ \sigma} \left(\partial^\lambda e^{b\sigma} \right) e_b^{\ \mu} e_c^{\ \nu} (\partial_\mu e_{a\nu}) &= e^a_{\ \lambda} e_{a\nu} \left(\partial^\lambda e^c_{\ \sigma} \right) e^\mu_{\ b} e^{b\sigma} (\partial_\mu e^\nu_{\ c}) \, , \\
&= g_{\lambda\nu} \left(\partial^\lambda e^c_{\ \sigma} \right) g^{\mu\sigma} (\partial_\mu e^\nu_{\ c}) \, , \\
&= (\partial_\nu e^c_{\ \sigma}) (\partial^\sigma e^\nu_{\ c}) \, ,
\end{aligned}
$$

e também

$$
\begin{aligned}
e^a_\lambda e^c_\sigma \left[\partial^\sigma e^{b\lambda}\right] e^\mu_b e^\nu_c (\partial_\mu e_{a\nu}) &= -e^c_\sigma e^\nu_c (\partial^\sigma e^a)_\lambda e^\mu_b e^{b\lambda} (\partial_\mu e_{a\nu}) , \\
&= -\delta^\nu_\sigma (\partial^\sigma e^a)_\lambda g^{\mu\lambda} (\partial_\mu e_{a\nu}) , \\
&= -(\partial^\nu e^a_\lambda) \left[\partial^\lambda e_{a\nu}\right] .
\end{aligned}
$$

Desta forma

$$
\begin{aligned}
T^{bac} e^\mu_b e^\nu_c (\partial_\mu e_{a\nu}) &= (\partial_\nu e^c)_\sigma (\partial^\sigma e^\nu)_c + (\partial^\nu e^a)_\lambda \left[\partial^\lambda e_{a\nu}\right] , \\
T^{cab} e^\mu_b e^\nu_c (\partial_\mu e_{a\nu}) &= e^a_\lambda e^b_\sigma \left[\partial^\lambda e^{c\sigma} - \partial^\sigma e^{c\lambda}\right] e^\mu_b e^\nu_c (\partial_\mu e_{a\nu}) ,
\end{aligned}
$$

sendo

$$
\begin{aligned}
e^a_\lambda e^b_\sigma \left[\partial^\lambda e^{c\sigma}\right] e^\mu_b e^\nu_c (\partial_\mu e_{a\nu}) &= -e^a_\lambda e_{a\nu} e^b_\sigma e^\mu_b \left[\partial^\lambda e^{c\sigma}\right] (\partial_\mu e^\nu)_c , \\
&= -\delta^\mu_\sigma g_{\lambda\nu} \left[\partial^\lambda e^{c\sigma}\right] (\partial_\mu e^\nu)_c , \\
&= -(\partial_\nu e^{c\mu}) (\partial_\mu e^\nu_c) ,
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
e^a_\lambda e^b_\sigma \left[\partial^\sigma e^{c\lambda}\right] e^\mu_b e^\nu_c (\partial_\mu e_{a\nu}) &= -e^a_\lambda e_{a\nu} e^b_\sigma e^\mu_b \left[\partial^\sigma e^{c\lambda}\right] (\partial_\mu e^\nu)_c , \\
&= -\delta^\mu_\sigma g_{\lambda\nu} \left[\partial^\sigma e^{c\lambda}\right] (\partial_\mu e^\nu)_c , \\
&= -g_{\lambda\nu} \left[\partial^\mu e^{c\lambda}\right] (\partial_\mu e^\nu)_c ,
\end{aligned}
$$

assim, obtemos

$$
T^{cab} e^\mu_b e^\nu_c (\partial_\mu e_{a\nu}) = g_{\lambda\nu} \left[\partial^\mu e^{c\lambda}\right] (\partial_\mu e^\nu)_c - (\partial_\nu e^{c\mu}) (\partial_\mu e^\nu)_c
$$

e

$$
\begin{aligned}
\left[T^{abc} + T^{bac} - T^{cab}\right] e^\mu_b e^\nu_c (\partial_\mu e_{a\nu}) &= \partial_\mu e_{a\nu} (\partial^\mu e^{a\nu} - \partial^\nu e^{a\mu}) + (\partial_\nu e^c)_\sigma (\partial^\sigma e^\nu)_c + (\partial^\nu e^a)_\lambda \left[\partial^\lambda e_{a\nu}\right] \\
&+ (\partial_\nu e^{c\mu}) (\partial_\mu e^\nu_c) - g_{\lambda\nu} \left[\partial^\mu e^{c\lambda}\right] (\partial_\mu e^\nu)_c .
\end{aligned}
$$

Escrevemos também

$$
\begin{aligned}
\eta^{ac}T^{b}e^{\mu}{}_{b}e^{\nu}{}_{c}(\partial_\mu e_{a\nu}) &= T^{db}e^{a\nu}{}_{d}\,e^{\mu}{}_{b}\,(\partial_\mu e_{a\nu}),\\
&= e_{d\lambda}e^{b}{}_{\sigma}\left(\partial^\lambda e^{d\sigma}-\partial^\sigma e^{d\lambda}\right)e^{a\nu}e^{\mu}{}_{b}(\partial_\mu e_{a\nu}),\\
&= \delta^{\mu}_{\sigma}e_{d\lambda}\left(\partial^\lambda e^{d\sigma}-\partial^\sigma e^{d\lambda}\right)e^{a\nu}(\partial_\mu e_{a\nu}),\\
&= e_{d\lambda}\left(\partial^\lambda e^{d\mu}-\partial^\mu e^{d\lambda}\right)e^{a\nu}(\partial_\mu e_{a\nu}),
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\eta^{ab}T^{c}e^{\mu}{}_{b}e^{\nu}{}_{c}(\partial_\mu e_{a\nu}) &= T^{dc}e^{a\mu}{}_{d}\,e^{\nu}{}_{c}\,(\partial_\mu e_{a\nu}),\\
&= e_{d\lambda}e^{c}{}_{\sigma}\left(\partial^\lambda e^{d\sigma}-\partial^\sigma e^{d\lambda}\right)e^{a\mu}e^{\nu}{}_{c}(\partial_\mu e_{a\nu}),\\
&= \delta^{\nu}_{\sigma}e_{d\lambda}\left(\partial^\lambda e^{d\sigma}-\partial^\sigma e^{d\lambda}\right)e^{a\mu}(\partial_\mu e_{a\nu}),\\
&= e_{d\lambda}\left(\partial^\lambda e^{d\nu}-\partial^\nu e^{d\lambda}\right)e^{a\mu}(\partial_\mu e_{a\nu}),
\end{aligned}
$$

temos que

$$
\begin{aligned}
e_{d\lambda}\left(\partial^\lambda e^{d\nu}\right)e^{a\mu}(\partial_\mu e_{a\nu}) &= e^{d\nu}e_{a\nu}\left(\partial^\lambda e_{d\lambda}\right)(\partial_\mu e^{a\mu}),\\
&= \delta^{d}_{a}\left(\partial^\lambda e_{d\lambda}\right)(\partial_\mu e^{a\mu}),\\
&= \left(\partial^\lambda e_{a\lambda}\right)(\partial_\mu e^{a\mu}).
\end{aligned}
$$

Ademais, explicitamos

$$
\begin{aligned}
\left(\eta^{ac}T^{b}-\eta^{ab}T^{c}\right)e^{\mu}{}_{b}e^{\nu}{}_{c}(\partial_\mu e_{a\nu}) &= e_{d\lambda}\left(\partial^\lambda e^{d\mu}-\partial^\mu e^{d\lambda}\right)e^{a\nu}(\partial_\mu e_{a\nu})+e_{d\lambda}\left(\partial^\nu e^{d\lambda}\right)(\partial_\mu e_{a\nu})\\
&- \left(\partial^\lambda e_{a\lambda}\right)(\partial_\mu e^{a\mu}),
\end{aligned}
$$

como $\partial_\mu e = e e^{\nu}{}_{a}\,\partial_\mu e^{a}{}_{\nu}$ reescrevemos a expressão acima

$$
\begin{aligned}
\left(\eta^{ac}T^{b}-\eta^{ab}T^{c}\right)e^{\mu}{}_{b}e^{\nu}{}_{c}(\partial_\mu e_{a\nu}) &= \frac{1}{e}e_{d\lambda}\left(\partial^\lambda e^{d\mu}\right)(\partial_\mu e)+\frac{1}{e^2}(\partial^\mu e)(\partial_\mu e)\\
&- \frac{1}{e}e^{a\mu}(\partial_\mu e_{a\nu})-\left(\partial^\lambda e_{a\lambda}\right)(\partial_\mu e^{a\mu}).
\end{aligned}
$$

Então a lagragiana gravitacional é escrita como

$$
\begin{aligned}
\mathsf{L}_g = & -2ke\left\{\frac{1}{4}\left(\partial_\mu e_{a\nu} - \partial_\nu e_{a\mu}\right)\left(\partial^\mu e^{a\nu} - \partial^\nu e^{a\mu}\right) + \left(\partial_\nu e^c_\sigma\right)\left(\partial^\sigma e^\nu_c\right) + \left(\partial^\nu e^a_\lambda\right)\left(\partial^\lambda e_{a\nu}\right)\right. \\
& + \left(\partial_\nu e^{c\mu}\right)\left(\partial_\mu e^\nu_c\right) - g_{\lambda\nu}\left(\partial^\mu e^{c\lambda}\right)\left(\partial_\mu e^\nu\right)_c \\
& \left. + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{e}e_{d\lambda}\left(\partial^\lambda e^{d\mu}\right)\left(\partial_\mu e\right) + \frac{1}{e^2}\left(\partial^\mu e\right)\left(\partial_\mu e\right) - \frac{1}{e}e^{a\mu}\left(\partial_\mu e_{a\nu}\right) - \left(\partial^\lambda e_{a\lambda}\right)\left(\partial_\mu e^{a\mu}\right)\right]\right\}.
\end{aligned}
\tag{4.25}
$$

Como

$$
\begin{aligned}
e^{a\mu}\left(\partial^\mu e_{a\nu}\right)\left(\partial^\nu e\right) &= e^{a\mu}\left(\partial^\mu e_{a\nu}\right)g^{\lambda\nu}\left(\partial_\lambda e\right), \\
&= e^{a\mu}\left(\partial^\lambda e\right)\left[\left(\partial_\mu e^\lambda_a\right) - e_{a\nu}\left(\partial_\mu g^{\lambda\nu}\right)\right], \\
&= \left(\partial_\lambda e\right)\left[e^{a\mu}\left(\partial_\mu e^\lambda_a\right) - \left(\partial_\nu g^{\lambda\nu}\right)\right], \\
&= \left(\partial_\lambda e\right)\left[g^{\mu\nu}\eta^{ad}e_{d\nu}\left(\partial_\mu e^\lambda_a\right) - \left(\partial_\nu g^{\lambda\nu}\right)\right], \\
&= \left(\partial_\lambda e\right)\left[e_{d\nu}\left(\partial^\nu e^{d\lambda}\right) - \left(\partial_\nu g^{\lambda\nu}\right)\right],
\end{aligned}
$$

a expressão (4.25) se reduz a

$$
\begin{aligned}
\mathsf{L}_g = & -ke\left\{\frac{1}{2}\left(\partial_\mu e_{c\nu}\right)\left(\partial^\mu e^{c\nu}\right) + \left(\partial_\nu e^c_\mu\right)\left(\partial^\mu e^\nu\right)_c + \left(\partial^\nu e^c_\mu\right)\left(\partial^\mu e_{c\nu}\right) + \left(\partial_\nu e^{c\mu}\right)\left(\partial_\mu e^\nu_c\right)\right. \\
& - \left(\partial_\mu e_{c\nu}\right)\left(\partial^\nu e^{c\mu}\right) - g_{\lambda\nu}\left(\partial^\mu e^{c\lambda}\right)\left(\partial_\mu e^\nu\right)_c - 2\left(\partial^\nu e_{c\nu}\right)\left(\partial^\mu e^{c\mu}\right) \\
& \left. + \frac{1}{e}\left(\partial_\lambda e\right)\left(\partial_\nu g^{\lambda\nu}\right) + \frac{1}{e}\left(\partial^\mu e\right)\left(\partial_\mu e\right)\right\}.
\end{aligned}
\tag{4.26}
$$

Com a lagragiana explicitada em termos das tétradas, podemos escrevê-la em função dos campos espinoriais por substituição direta. Trabalhando termo a termo

$$
\begin{aligned}
\left(\partial_\mu e_{c\nu}\right)\left(\partial^\mu e^{c\nu}\right) &= \partial_\mu\left(Y_{c\nu\alpha}\Psi^\alpha\right)\partial^\mu\left(Y^{c\nu\beta}\Psi_\beta\right), \\
&= Y_{c\nu\alpha}\partial_\mu\left(\Psi^\alpha\right)Y^{c\nu\beta}\partial^\mu\left(\Psi_\beta\right) + \Psi^\alpha\partial_\mu\left(Y_{c\nu\alpha}\right)\Psi_\beta\partial^\mu\left(Y^{c\nu\beta}\right) \\
&+ Y_{c\nu\alpha}\partial_\mu\left(\Psi^\alpha\right)\Psi_\beta\partial^\mu\left(Y^{c\nu\beta}\right) + \Psi^\alpha\partial_\mu\left(Y_{c\nu\alpha}\right)Y^{c\nu\beta}\partial^\mu\left(\Psi_\beta\right), \\
&= \partial_\mu\left(\Psi^\alpha\right)\partial^\mu\left(\Psi_\alpha\right) + \partial_\mu\left(Y_{c\nu\alpha}\right)\partial^\mu\left(Y^{c\nu\alpha}\right) - 2\left(Y_{c\nu\alpha}\Psi^\alpha\right)\partial_\mu\left(\Psi_\beta\right)\partial^\mu\left(Y^{c\nu\beta}\right).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left(\partial_\nu e^c_\mu\right)(\partial^\mu e^\nu_c) &= \partial_\nu\left(Y^c_{\mu\alpha}\Psi^\alpha\right)\partial^\mu\left(Y^{\nu\beta}_c\Psi_\beta\right),\\
&= Y^c_{\mu\alpha}\,\partial_\nu(\Psi^\alpha)\,Y^{\nu\beta}_c\partial^\mu(\Psi_\beta) + \Psi^\alpha\partial_\nu\left(Y^c_{\mu\alpha}\right)\Psi_\beta\partial^\mu\left(Y^{\nu\beta}_c\right) + Y^c_{\mu\alpha}\,\partial_\nu(\Psi^\alpha)\,\Psi_\beta\partial^\mu\left(Y^{\nu\beta}_c\right)\\
&+ \Psi^\alpha\partial_\nu\left(Y^c_{\mu\alpha}\right)Y^{\nu\beta}_c\partial^\mu(\Psi_\beta),\\
&= Y^c_{\mu\alpha}\,\partial_\nu(\Psi^\alpha)\,Y^{\nu\beta}_c\partial^\mu(\Psi_\beta) + \partial_\nu\left(Y^c_{\mu\alpha}\right)\partial^\mu\left(Y^{\nu\alpha}_c\right) - \left(Y^c_{\mu\alpha}\Psi^\alpha\right)\partial_\nu(\Psi_\beta)\,\partial^\mu\left(Y^{\nu\beta}_c\right)\\
&- \left(Y^{\nu\beta}_c\Psi_\beta\right)\partial_\nu\left(Y^c_{\mu\alpha}\right)\partial^\mu(\Psi^\alpha),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left(\partial^\nu e^c_\mu\right)(\partial^\mu e_{c\nu}) &= \partial^\nu\left(Y^c_{\mu\alpha}\Psi^\alpha\right)\partial^\mu\left(Y^\beta_{c\nu}\Psi_\beta\right),\\
&= Y^c_{\mu\alpha}\,\partial^\nu(\Psi^\alpha)\,Y^\beta_{c\nu}\,\partial^\mu(\Psi_\beta) + \Psi^\alpha\partial^\nu\left(Y^c_{\mu\alpha}\right)\Psi_\beta\partial^\mu\left(Y^\beta_{c\nu}\right) + Y^c_{\mu\alpha}\,\partial^\nu(\Psi^\alpha)\,\Psi_\beta\partial^\mu\left(Y^\beta_{c\nu}\right)\\
&+ \Psi^\alpha\partial^\nu\left(Y^c_{\mu\alpha}\right)Y^\beta_{c\nu}\,\partial^\mu(\Psi_\beta),\\
&= Y^c_{\mu\alpha}\,\partial^\nu(\Psi^\alpha)\,Y^\beta_{c\nu}\,\partial^\mu(\Psi_\beta) + \partial^\nu\left(Y^c_{\mu\alpha}\right)\partial^\mu\left(Y^\alpha_{c\nu}\right) - \left(Y^c_{\mu\alpha}\Psi^\alpha\right)\partial^\nu(\Psi_\beta)\,\partial^\mu\left(Y^\beta_{c\nu}\right)\\
&- \left(Y^\beta_{c\nu}\Psi_\beta\right)\partial^\nu\left(Y^c_{\mu\alpha}\right)\partial^\mu(\Psi^\alpha),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\partial_\nu e^{c\mu})(\partial_\mu e^\nu_c) &= \partial_\nu\left(Y^{c\mu}_\alpha\Psi^\alpha\right)\partial_\mu\left(Y^{\nu\beta}_c\Psi_\beta\right),\\
&= Y^{c\mu}_\alpha\partial_\nu(\Psi^\alpha)\,Y^{\nu\beta}_c\partial_\mu(\Psi_\beta) + \Psi^\alpha\partial_\nu\left(Y^{c\mu}_\alpha\right)\Psi_\beta\partial_\mu\left(Y^{\nu\beta}_c\right) + Y^{c\mu}_\alpha\partial_\nu(\Psi^\alpha)\,\Psi_\beta\partial_\mu\left(Y^{\nu\beta}_c\right)\\
&+ \Psi^\alpha\partial_\nu\left(Y^{c\mu}_\alpha\right)Y^{\nu\beta}_c\partial_\mu(\Psi_\beta),\\
&= Y^{c\mu}_\alpha\partial_\nu(\Psi^\alpha)\,Y^{\nu\beta}_c\partial_\mu(\Psi_\beta) + \partial_\nu\left(Y^{c\mu}_\alpha\right)\partial_\mu\left(Y^{\nu\alpha}_c\right) - \left(Y^{c\mu}_\alpha\Psi^\alpha\right)\partial_\nu(\Psi_\beta)\,\partial_\mu\left(Y^{\nu\beta}_c\right)\\
&- \left(Y^{\nu\beta}_c\Psi_\beta\right)\partial_\nu\left(Y^{c\mu}_\alpha\right)\partial_\mu(\Psi^\alpha),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\partial_\mu e_{c\nu})(\partial^\nu e^{c\mu}) &= \partial_\mu\left(Y_{c\nu\alpha}\Psi^\alpha\right)\partial^\nu\left(Y^{c\mu\beta}\Psi_\beta\right),\\
&= Y_{c\nu\alpha}\partial_\mu(\Psi^\alpha)\,Y^{c\mu\beta}\partial^\nu(\Psi_\beta) + \Psi^\alpha\partial_\mu\left(Y_{c\nu\alpha}\right)\Psi_\beta\partial^\nu\left(Y^{c\mu\beta}\right) + Y_{c\nu\alpha}\partial_\mu(\Psi^\alpha)\,\Psi_\beta\partial^\nu\left(Y^{c\mu\beta}\right)\\
&+ \Psi^\alpha\partial_\mu\left(Y_{c\nu\alpha}\right)Y^{c\mu\beta}\partial^\nu(\Psi_\beta),\\
&= Y_{c\nu\alpha}\partial_\mu(\Psi^\alpha)\,Y^{c\mu\beta}\partial^\nu(\Psi_\beta) + \partial_\mu\left(Y_{c\nu\alpha}\right)\partial^\nu\left(Y^{c\mu\beta}\right) - \left(Y_{c\nu\alpha}\Psi^\alpha\right)\partial_\mu(\Psi_\beta)\,\partial^\nu\left(Y^{c\mu\beta}\right)\\
&- \left(Y^{c\mu\beta}\Psi_\beta\right)\partial_\mu\left(Y_{c\nu\alpha}\right)\partial^\nu(\Psi^\alpha),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g_{\lambda\nu}\left[\partial^{\mu}e^{c\lambda}\right](\partial_{\mu}e^{\nu}_{c}) &= g_{\lambda\nu}\partial^{\mu}\left[Y^{c\lambda}_{\alpha}\Psi^{\alpha}\right]\partial_{\mu}\left[Y^{\nu\beta}_{c}\Psi_{\beta}\right],\\
&= Y^{c}_{\nu\alpha}\,\partial^{\mu}(\Psi^{\alpha})\,Y^{\nu\beta}_{c}\partial_{\mu}(\Psi_{\beta}) + g_{\lambda\nu}\Psi^{\alpha}\partial^{\mu}\left[Y^{c\lambda}_{\alpha}\right]\Psi_{\beta}\partial_{\mu}\left[Y^{\nu\beta}_{c}\right]\\
&+ \Psi^{\alpha}\partial^{\mu}\left[Y^{c\lambda}_{\alpha}\right]Y^{\beta}_{c\lambda}\partial_{\mu}(\Psi_{\beta}) + Y^{c}_{\nu\alpha}\partial^{\mu}(\Psi^{\alpha})\,\Psi_{\beta}\partial_{\mu}\left[Y^{\nu\beta}_{c}\right],\\
&= \partial^{\mu}(\Psi^{\alpha})\,\partial_{\mu}(\Psi_{\alpha}) + g_{\lambda\nu}\partial^{\mu}\left[Y^{c\lambda}_{\alpha}\right]\partial_{\mu}(Y^{\nu\alpha}_{c}) - \left[Y^{\beta}_{c\lambda}\Psi_{\beta}\right]\partial^{\mu}\left[Y^{c\lambda}_{\alpha}\right]\partial_{\mu}(\Psi^{\alpha})\\
&- (Y^{c}_{\nu\alpha}\Psi^{\alpha})\,\partial^{\mu}(\Psi_{\beta})\,\partial_{\mu}\left[Y^{\nu\beta}_{c}\right],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\partial^{\nu}e_{c\nu})(\partial_{\mu}e^{c\mu}) &= \partial^{\nu}(Y_{c\nu\alpha}\Psi^{\alpha})\,\partial_{\mu}\left[Y^{c\mu\beta}\Psi_{\beta}\right],\\
&= Y_{c\nu\alpha}\partial^{\nu}(\Psi^{\alpha})\,Y^{c\mu\beta}\partial_{\mu}(\Psi_{\beta}) + \Psi^{\alpha}\partial^{\nu}(Y_{c\nu\alpha})\,\Psi_{\beta}\partial_{\mu}\left[Y^{c\mu\beta}\right] + Y_{c\nu\alpha}\partial^{\nu}(\Psi^{\alpha})\,\Psi_{\beta}\partial_{\mu}\left[Y^{c\mu\beta}\right]\\
&+ \Psi^{\alpha}\partial^{\nu}(Y_{c\nu\alpha})\,Y^{c\mu\beta}\partial_{\mu}(\Psi_{\beta}),\\
&= Y_{c\nu\alpha}\partial^{\nu}(\Psi^{\alpha})\,Y^{c\mu\beta}\partial_{\mu}(\Psi_{\beta}) + \partial^{\nu}(Y_{c\nu\alpha})\,\partial_{\mu}\left[Y^{c\mu\beta}\right] - (Y_{c\nu\alpha}\Psi^{\alpha})\,\partial^{\nu}(\Psi_{\beta})\,\partial_{\mu}\left[Y^{c\mu\beta}\right]\\
&- \left[Y^{c\mu\beta}\right]\partial^{\nu}(Y_{c\nu\alpha})\,\partial_{\mu}(\Psi^{\alpha}),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{e}(\partial_{\lambda}e)\left[\partial_{\nu}g^{\lambda\nu}\right] &= \left[\partial_{\nu}g^{\lambda\nu}\right]\left[Y^{\mu\beta}_{c}\Psi_{\beta}\,\partial_{\lambda}\left(Y^{c}_{\mu\alpha}\Psi^{\alpha}\right)\right],\\
&= \left[\partial_{\nu}g^{\lambda\nu}\right]\left[Y^{\mu\beta}_{c}\Psi_{\beta}\left[Y^{c}_{\mu\alpha}\partial_{\lambda}(\Psi^{\alpha}) + \Psi^{\alpha}\partial_{\lambda}\left(Y^{c}_{\mu\alpha}\right)\right]\right],\\
&= \left[\partial_{\nu}g^{\lambda\nu}\right]\left[\Psi_{\alpha}\partial_{\lambda}(\Psi^{\alpha}) + Y^{\mu\alpha}_{c}\partial_{\lambda}\left(Y^{c}_{\mu\alpha}\right)\right],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{e^{2}}(\partial^{\mu}e)(\partial_{\mu}e) &= \left[Y^{\nu\beta}_{c}\Psi_{\beta}\,\partial^{\mu}(Y^{c}_{\nu\alpha}\Psi^{\alpha})\right]\left[Y^{\alpha\lambda}_{\sigma}\Psi^{\sigma}\,\partial_{\mu}\left(Y^{\rho}_{\alpha\lambda}\Psi_{\rho}\right)\right],\\
&= g^{\nu\lambda}\partial^{\mu}(Y^{c}_{\nu\alpha}\Psi^{\alpha})\,\partial_{\mu}\left(Y^{\rho}_{c\lambda}\Psi_{\rho}\right),\\
&= g^{\nu\lambda}\left[Y^{c}_{\nu\alpha}\partial^{\mu}(\Psi^{\alpha})\,Y^{\rho}_{c\lambda}\partial_{\mu}(\Psi_{\rho}) + \Psi^{\alpha}\partial^{\mu}(Y^{c}_{\nu\alpha})\,\Psi_{\rho}\partial_{\mu}\left(Y^{\rho}_{c\lambda}\right)\right.\\
&+ \left.Y^{c}_{\nu\alpha}\partial^{\mu}(\Psi^{\alpha})\,\Psi_{\rho}\partial_{\mu}\left(Y^{\rho}_{c\lambda}\right) + \Psi^{\alpha}\partial^{\mu}(Y^{c}_{\nu\alpha})\,Y^{\rho}_{c\lambda}\partial_{\mu}(\Psi_{\rho})\right],\\
&= \partial^{\mu}(\Psi^{\alpha})\,\partial_{\mu}(\Psi_{\alpha}) - 2Y^{c\lambda}_{\alpha}\Psi^{\alpha}\partial^{\mu}(\Psi_{\rho})\,\partial_{\mu}\left(Y^{\rho}_{c\lambda}\right) + g^{\nu\lambda}\partial^{\mu}(Y^{c}_{\nu\alpha})\,\partial_{\mu}(Y^{\alpha}_{c\lambda}),
\end{aligned}
$$

Então, substituindo os termos acima, a expressão (4.26) é escrita como

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_g = & -ke\Big\{\partial^\mu\Psi^\alpha\partial_\mu\Psi_\alpha + \left(\partial_\nu g^{\lambda\nu}\right)\Big[\Psi_\alpha\partial_\lambda\left(\Psi^\alpha\right) - Y_{c\nu\alpha}\partial^\nu\Psi^\alpha Y^{c\mu\beta}\partial_\mu\Psi_\beta \\
& + \frac{1}{2}\Big(-\partial^\mu\Psi^\alpha\partial_\mu\Psi_\alpha + Y_{c\nu\alpha}\partial_\mu\Psi^\alpha Y^{c\mu\beta}\partial^\nu\Psi_\beta + Y^{c\mu}_{\alpha}\partial_\nu\Psi^\alpha Y^{\nu\beta}_{c}\partial_\mu\Psi_\beta \\
& + Y^{c}_{\mu\alpha}\partial^\nu\Psi^\alpha Y^{\beta}_{c\nu}\partial^\mu\Psi_\beta + Y^{c}_{\mu\alpha}\partial_\nu\Psi^\alpha Y^{\nu\beta}_{c}\partial^\mu\Psi_\beta + \partial_\mu\Psi^\alpha\partial^\mu\Psi_\alpha\Big)\Big]\Big\} \\
& + \Big\{g^{\nu\lambda}\partial^\mu Y^{c}_{\nu\alpha}\partial_\mu Y^{\alpha}_{c\lambda} + \left(\partial_\nu g^{\lambda\nu}\right)\Big[Y^{\mu\alpha}_{c}\partial_\lambda Y^{c}_{\mu\alpha} - \partial^\nu Y_{c\nu\alpha}\partial_\mu Y^{c\mu\alpha} \\
& + \frac{1}{2}\Big(-g_{\lambda\nu}\partial^\mu Y^{c\lambda}_{\alpha}\partial_\mu Y^{\nu\alpha}_{c} - \partial_\mu Y_{c\nu\alpha}\partial^\nu Y^{c\mu\alpha} + \partial_\nu Y^{c\mu}_{\alpha}\partial_\mu Y^{\nu\alpha}_{c} + \partial^\nu Y^{c}_{\mu\alpha}\partial^\mu Y^{\alpha}_{c\nu} \\
& + \partial_\nu Y^{c}_{\mu\alpha}\partial^\mu Y^{\nu\alpha}_{c} + \partial_\mu Y_{c\nu\alpha}\partial^\mu Y^{c\nu\alpha}\Big)\Big]\Big\} \\
& + \Big\{-2\left(Y^{c}_{\nu\alpha}\Psi^\alpha\right)\partial^\mu\Psi_\beta\partial_\mu Y^{\beta}_{c\nu} + \left(Y_{c\nu\alpha}\Psi^\alpha\right)\partial^\nu\Psi_\beta\partial_\mu Y^{c\mu\beta} + \left(Y^{c\mu\beta}\Psi_\beta\right)\Big[\partial^\nu Y_{c\nu\alpha}\partial_\mu\Psi^\alpha \\
& - \left(Y_{c\nu\alpha}\Psi^\alpha\right)\partial_\mu\Psi_\beta\partial^\mu Y^{c\nu\beta} + \frac{1}{2}\Big(\left(Y^{\beta}_{c\nu}\Psi_\beta\right)\Big[\partial^\mu Y^{c}_{\nu\alpha}\partial_\mu\Psi^\alpha\Big] + \left(Y^{c}_{\nu\alpha}\Psi^\alpha\right)\partial^\mu\Psi_\beta\partial_\mu Y^{\beta}_{c\nu} \\
& + \left(Y_{c\nu\alpha}\Psi^\alpha\right)\partial_\mu\Psi_\beta\partial^\nu Y^{c\mu\beta} + \left(Y^{c\mu\beta}\Psi_\beta\right)\Big[\partial_\mu Y_{c\nu\alpha}\partial^\nu\Psi^\alpha\Big] - \left(Y^{c}_{\mu\alpha}\Psi^\alpha\right)\Big[\partial_\nu\Psi_\beta\partial_\mu Y^{\nu\beta}_{c}\Big] \\
& - \left(Y^{\nu\beta}_{c}\Psi_\beta\right)\Big[\partial_\nu Y^{c}_{\mu\alpha}\partial_\mu\Psi^\alpha\Big] - \left(Y^{c}_{\mu\alpha}\Psi^\alpha\right)\Big[\partial^\nu\Psi_\beta\partial^\mu Y^{\beta}_{c\nu}\Big] - \left(Y^{\beta}_{c\nu}\Psi_\beta\right)\Big[\partial^\nu Y^{c}_{\mu\alpha}\partial^\mu\Psi^\alpha\Big]\Big)\Big]\Big\} .
\end{aligned} \tag{4.27}
$$

Reagrupando os termos, a Lagrangiana gravitacional finalmente é

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_g = & -ke\Big\{\partial_\mu\Psi^\alpha\partial^\mu\Psi_\alpha + \Psi_\alpha\partial_\mu\Psi^\alpha\partial_\nu g^{\mu\nu} + Y^{c}_{\mu\alpha}Y^{\nu\beta}_{c}\left(\partial^\mu\Psi^\alpha\partial_\nu\Psi_\beta + \partial_\nu\Psi^\alpha\partial^\mu\Psi_\beta\right) \\
& + \frac{1}{2}\Big[2g^{\nu\lambda}\partial^\mu Y^{c}_{\nu\alpha}\partial_\mu Y^{\alpha}_{c\lambda} + Y^{\mu\alpha}_{c}\partial_\lambda Y^{c}_{\mu\alpha}\partial_\nu g^{\lambda\nu} - g_{\lambda\nu}\partial^\mu Y^{c\lambda}_{\alpha}\partial_\mu Y^{\nu\alpha}_{c} - 2\partial^\nu Y_{c\nu\alpha}\partial_\mu Y^{c\mu\alpha} \\
& + \partial_\nu Y^{c\mu}_{\alpha}\partial_\mu Y^{\nu\alpha}_{c} + \partial^\nu Y^{c}_{\mu\alpha}\partial^\mu Y^{\alpha}_{c\nu} + \partial_\mu Y_{c\nu\alpha}\partial^\mu Y^{c\nu\alpha} + Y^{c}_{\mu\alpha}\Psi^\alpha\Big(-4\partial^\nu\Psi_\beta\partial_\nu Y^{\mu\beta}_{c} + 2\partial^\mu\Psi_\beta\partial_\nu Y^{\nu\beta}_{c} \\
& + 2\partial^\mu\Psi_\beta\partial^\nu Y^{\beta}_{c\nu} - \partial_\nu\Psi_\beta\partial^\mu Y^{\nu\beta}_{c} - \partial^\nu\Psi_\beta\partial^\mu Y^{\beta}_{c\nu}\Big)\Big]\Big\} .
\end{aligned} \tag{4.28}
$$

As equações de campo são obtidas pela equação de Euler-Lagrange, fazendo a variação da lagrangiana em relação aos dois espinores Y e Ψ. Como

$$
g^{\nu\lambda} = \frac{1}{2}\left(e^{a\nu}e^{\lambda}_{a} + e^{a\lambda}e^{\nu}_{a}\right) = \frac{1}{2}\left(Y^{a\nu}_{\alpha}Y^{\lambda\alpha}_{a} + Y^{a\lambda}_{\alpha}Y^{\nu\alpha}_{a}\right),
$$

$$
\frac{\partial g^{\nu\sigma}}{\partial\Psi^\lambda} = \frac{\partial(\partial_\nu g^{\nu\sigma})}{\partial(\partial_\rho\Psi^\lambda)} = 0.
$$

$$
\delta e = e e^{\mu}_{a}\delta e^{a}_{\mu} = eY^{\mu\nu}_{a}\Psi_\nu\delta\left(Y^{a}_{\mu\lambda}\Psi^\lambda\right),
$$

à vista disso,

$$\frac{\partial e}{\partial \Psi^{\lambda}} = e\, Y^{\mu\nu}_{a} \Psi_{\nu}\, Y^{a}_{\mu\lambda} = e\Psi_{\lambda}.$$

e podemos concluir que

$$\frac{\partial e}{\partial(\partial_{\rho} \Psi^{\lambda})} = 0.$$

A derivada parcial da lagrangiana em respeito a Ψ assume a forma

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathsf{L}_g}{\partial \Psi^{\lambda}} &= \Psi_{\lambda} \mathsf{L}_g - ke \Big[-\partial_{\nu} g^{\mu\nu} \partial_{\mu} \Psi_{\lambda} + \frac{1}{2} Y^{c}_{\mu\lambda}(-4\partial^{\nu} \Psi_{\alpha} \partial_{\nu} Y^{\mu\alpha}_{c} + 2\partial^{\mu}\Psi_{\alpha} \partial_{\nu} Y^{\nu\alpha}_{c} + 2\partial^{\mu}\Psi_{\alpha} \partial^{\nu} Y^{\alpha}_{c\nu} \\
&- \partial_{\nu} \Psi_{\alpha} \partial^{\mu} Y^{\nu\alpha}_{c} - \partial^{\nu} \Psi_{\alpha} \partial^{\mu} Y^{\alpha}_{c\nu})\Big].
\end{aligned} \tag{4.29}$$

$$\begin{aligned}
\Psi_{\lambda} \mathsf{L}_g &= -ke \Big[-\partial_{\nu} g^{\mu\nu} \partial_{\mu} \Psi_{\lambda} + Y^{c}_{\mu\alpha} Y^{\nu\beta}_{c} \Psi_{\beta} (\partial^{\mu}\Psi_{\lambda}\partial_{\nu} \Psi^{\alpha} + \partial_{\nu}\Psi_{\lambda}\partial^{\mu}\Psi^{\alpha}) + \frac{1}{2} Y^{c}_{\mu\lambda}(-4\partial^{\nu} \Psi_{\alpha} \partial_{\nu} Y^{\mu\alpha}_{c} \\
&+ 2\partial^{\mu}\Psi_{\alpha}\partial_{\nu} Y^{\nu\alpha}_{c} + 2\partial^{\mu}\Psi_{\alpha}\partial^{\nu} Y^{\alpha}_{c\nu} - \partial_{\nu}\Psi_{\alpha}\partial^{\mu} Y^{\nu\alpha}_{c} - \partial^{\nu}\Psi_{\alpha}\partial^{\mu} Y^{\alpha}_{c\nu}) \\
&+ \frac{1}{2} \Psi_{\lambda} \Big(2g^{\nu\sigma}\partial^{\mu} Y^{c}_{\nu\alpha}\partial_{\mu} Y^{\alpha}_{c\sigma} + Y^{\mu\alpha}_{c}\partial_{\sigma} Y^{c}_{\mu\alpha}\partial_{\nu} g^{\sigma\nu} - g_{\sigma\nu}\partial^{\mu} Y^{c\sigma}_{\alpha}\partial_{\mu} Y^{\nu\alpha}_{c} - 2\partial^{\nu} Y_{c\nu\alpha}\partial_{\mu} Y^{c\mu\alpha} \\
&+ \partial_{\nu} Y^{c\mu}_{\alpha}\partial_{\mu} Y^{\nu\alpha}_{c} + \partial^{\nu} Y^{c}_{\mu\alpha}\partial^{\mu} Y^{\alpha}_{c\nu} + \partial_{\mu} Y_{c\nu\alpha}\partial^{\mu} Y^{c\nu\alpha} + 2\partial_{\mu}\Psi^{\alpha}\partial^{\mu}\Psi_{\alpha} \Big)\Big],
\end{aligned} \tag{4.30}$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathsf{L}_g}{\partial (\partial_{\mu}\Psi^{\lambda})} &= -ke \Big[2\partial^{\mu}\Psi_{\lambda} + 2\partial_{\nu}\Psi^{\alpha} \left(Y^{c}_{\mu\lambda} Y^{\nu}_{c\alpha} + Y^{c}_{\mu\alpha} Y^{\nu}_{c\lambda} \right) + \frac{1}{2}\Psi^{\alpha} \Big(-4Y^{c}_{\nu\alpha}\partial^{\mu} Y^{\nu}_{c\lambda} \\
&+ 2Y^{c\mu}_{\alpha}\partial_{\nu} Y^{\nu}_{c\lambda} + 2Y^{c\mu}_{\alpha}\partial^{\nu} Y_{c\nu\lambda} - Y^{c\nu}_{\alpha}\partial_{\nu} Y^{\mu}_{c\lambda} - g^{\mu\sigma} Y^{c}_{\nu\alpha}\partial^{\nu} Y_{c\sigma\lambda} + 2g_{\alpha\lambda}\partial_{\nu} g^{\mu\nu}\Big)\Big].
\end{aligned} \tag{4.31}$$

$$\begin{aligned}
\partial_{\mu}\frac{\partial \mathsf{L}_g}{\partial (\partial_{\mu}\Psi^{\lambda})} &= (\Psi_{\alpha}\partial_{\mu}\Psi^{\alpha} + Y^{\sigma\alpha}_{a}\partial_{\mu} Y^{a}_{\sigma\alpha})\frac{\partial \mathsf{L}_g}{\partial (\partial_{\mu}\Psi^{\lambda})} - ke\Big[2\partial_{\mu}\partial^{\mu}\Psi_{\lambda} + 2\partial_{\mu}\partial_{\nu}\Psi^{\alpha} \left(Y^{c\mu}_{\lambda} Y^{\nu}_{c\alpha} + Y^{c\mu}_{\alpha} Y^{\nu}_{c\lambda} \right) \\
&+ \partial_{\nu}\Psi^{\alpha}\partial_{\mu}\left(Y^{c\mu}_{\lambda} Y^{\nu}_{c\alpha} + Y^{c\mu}_{\alpha} Y^{\nu}_{c\lambda} \right) + \frac{1}{2}\partial_{\mu}\Psi^{\alpha}\Big(-4Y^{c\nu}_{\alpha}\partial^{\mu} Y^{\nu}_{c\lambda} + 2Y^{c\mu}_{\alpha}\partial_{\nu} Y^{\nu}_{c\lambda} + 2Y^{c\mu}_{\alpha}\partial^{\nu} Y_{c\nu\lambda} \\
&- Y^{c\nu}_{\alpha}\partial_{\nu} Y^{\mu}_{c\lambda} - g^{\mu\sigma} Y^{c}_{\nu\alpha}\partial^{\nu} Y_{c\sigma\lambda} + 2g_{\alpha\lambda}\partial_{\nu} g^{\mu\nu}\Big) + \frac{1}{2}\Psi^{\alpha}\,\partial_{\mu}\Big(-4Y^{c\nu}_{\alpha}\partial^{\mu} Y^{\nu}_{c\lambda} + 2Y^{c\mu}_{\alpha}\partial_{\nu} Y^{\nu}_{c\lambda} \\
&+ 2Y^{c\mu}_{\alpha}\partial^{\nu} Y_{c\nu\lambda} - Y^{c\nu}_{\alpha}\partial_{\nu} Y^{\mu}_{c\lambda} - g^{\mu\sigma} Y^{c}_{\nu\alpha}\partial^{\nu} Y_{c\sigma\lambda} + 2g_{\alpha\lambda}\partial_{\nu} g^{\mu\nu}\Big)\Big].
\end{aligned} \tag{4.32}$$

$$
\begin{aligned}
(\Psi_\alpha \partial_\mu \Psi^\alpha + Y^{\sigma\alpha}_a \partial_\mu Y^a_{\sigma\alpha}) \frac{\partial \mathcal{L}_g}{\partial(\partial_\mu \Psi^\lambda)} = & -ke\{-2\,(\Psi_\lambda \partial^\mu \Psi_\alpha \partial_\mu \Psi^\alpha + Y^{\sigma\alpha}_{a} \partial_\mu Y^a_{\sigma\alpha} \partial^\mu \Psi_\lambda) \\
& - 2\Psi^\alpha \partial_\mu \Psi_\alpha \partial^\mu \left(Y^{\mu\nu}_\lambda + Y^{\nu\mu}_\lambda \right) + \partial_\nu \left(\Psi^\alpha \partial_\mu Y^a_{\sigma\beta} \times \right. \\
& \times \left. \left(Y^{\sigma\beta}_a Y^{c\mu}_\lambda Y^\nu_{c\alpha} + Y^{\sigma\beta}_a Y^{c\mu}_\alpha Y^\nu_{c\lambda} \right) + \frac{1}{2} \partial_\mu \Psi^\alpha + Y^{\sigma\beta}_a \partial_\mu Y^a_{\sigma\beta} \Psi^\alpha \right) \times \\
& \times \left(-4 Y^c_{\nu\alpha} \partial^\mu Y^\nu_{c\lambda} + 2 Y^{c\mu}_a \partial_\nu Y^\nu_{c\lambda} + 2 Y^{c\mu}_a \partial^\nu Y_{c\nu\lambda} - Y^{c\nu}_a \partial_\nu Y^\mu_{c\lambda} \right. \\
& - \left. g^{\mu\nu} Y^c_{\nu\alpha} \partial^\nu Y_{c\sigma\lambda} + 2 g_{\alpha\lambda} \partial_\nu g^{\mu\nu} \right)\}
\end{aligned} \tag{4.33}
$$

$$
\delta \mathcal{L}_M = e T^{a\mu} \delta e_{a\mu} = e T^{a\mu} \delta \left(Y_{a\mu\nu} \Psi^\nu \right). \tag{4.34}
$$

Assim, as equações para o campo Ψ são escritas como

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \Psi_\lambda \left(2 g^{\nu\sigma} \partial^\mu Y^c_{\nu\alpha} \partial_\mu Y^\alpha_{c\sigma} + Y^{\mu\alpha}_c \partial_\sigma Y^c_{\mu\alpha} \partial_\nu g^{\sigma\nu} - g_{\sigma\nu} \partial^\mu Y^{c\sigma}_a \partial_\mu Y^{\nu\alpha}_c - 2 \partial^\nu Y_{c\nu\alpha} \partial_\mu Y^{c\mu\alpha} \right. \\
& + \partial_\nu Y^{c\mu}_a \partial_\mu Y^{\nu\alpha}_c + \partial^\nu Y^c_{\mu\alpha} \partial^\mu Y^\alpha_{c\nu} + \partial_\mu Y_{c\nu\alpha} \partial^\mu Y^{c\nu\alpha} + 6 \partial^\mu \Psi_\alpha \partial_\mu \Psi^\alpha - \left. 2 Y^{\sigma\beta}_a \partial_\mu Y^a_{\sigma\beta} \partial_\nu g^{\mu\nu} \right) \\
& + \partial_\mu \Psi_\lambda \left[2 Y^a_{\sigma\alpha} \partial^\mu Y^{\sigma\alpha}_a - \partial_\nu \Psi_\alpha \left(Y^{\mu\nu\alpha} + Y^{\nu\mu\alpha} \right) \right] + 2 \partial_\mu \partial^\mu \Psi_\lambda \\
& - \partial_\nu \Psi^\alpha \partial_\mu Y^a_{\sigma\beta} \left(Y^{\sigma\beta}_a Y^{c\mu}_\lambda Y^\nu_{c\alpha} + Y^{\sigma\beta}_a Y^{c\mu}_\alpha Y^\nu_{c\lambda} \right) - \left(2 \partial_\mu \Psi^\alpha + \frac{1}{2} Y^{\sigma\beta}_a \partial_\mu Y^a_{\sigma\beta} \Psi^\alpha \right) \times \\
& - \times \left(-4 Y^c_{\nu\alpha} \partial^\mu Y^\nu_{c\lambda} + 2 Y^{c\mu}_a \partial_\nu Y^\nu_{c\lambda} + 2 Y^{c\mu}_a \partial^\nu Y_{c\nu\lambda} - Y^{c\nu}_a \partial_\nu Y^\mu_{c\lambda} - g^{\mu\nu} Y^c_{\nu\alpha} \partial^\nu Y_{c\sigma\lambda} \right) \\
& - \frac{1}{2} \Psi^\alpha \partial_\mu \left(-4 Y^c_{\nu\alpha} \partial^\mu Y^\nu_{c\lambda} + 2 Y^{c\mu}_a \partial_\nu Y^\nu_{c\lambda} + 2 Y^{c\mu}_a \partial^\nu Y_{c\nu\lambda} - Y^{c\nu}_a \partial_\nu Y^\mu_{c\lambda} - g^{\mu\nu} Y^c_{\nu\alpha} \partial^\nu Y_{c\sigma\lambda} \right) \\
& - 2 \partial_\mu \partial_\nu \Psi^\alpha \left(Y^{c\mu}_\lambda Y^\nu_{c\alpha} - Y^{c\mu}_\alpha Y^\nu_{c\lambda} \right) - \partial_\nu \Psi^\alpha \partial_\mu \left(Y^{c\mu}_\lambda Y^\nu_{c\alpha} - Y^{c\mu}_\alpha Y^\nu_{c\lambda} \right) - \Psi^\alpha \partial_\mu \left(g_{\alpha\lambda} \partial_\nu g^{\mu\nu} \right) = \\
& = -\frac{1}{k} Y_{a\mu\lambda} T^{a\mu}.
\end{aligned} \tag{4.35}
$$

Para o campo Y, definimos as seguintes relações

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial g^{\lambda\sigma}}{\partial Y^a_{\mu\nu}} &= g^{\lambda\sigma} Y^{\mu\nu}_a, \\
\frac{\partial \left(\partial_\sigma g^{\lambda\sigma} \right)}{\partial Y^a_{\mu\nu}} &= g^{\mu\lambda} \partial_\sigma Y^{\mu\nu}_a + \partial^\mu Y^{\lambda\nu}_a, \\
\frac{\partial \left(\partial_\sigma g^{\lambda\sigma} \right)}{\partial \left(\partial_\rho Y^a_{\mu\nu} \right)} &= 2 g^{\lambda\rho} Y^{\lambda\nu}_a, \\
\frac{\partial e}{\partial Y^a_{\mu\nu}} &= e Y^{\mu\nu}_a.
\end{aligned}
$$

Dessa forma, para se chegar na equação de Euler-Lagrange, começamos pela derivada parcial da lagrangiana L_g em função de Y escrita como

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial L_g}{\partial Y^a_{\mu\nu}} = {} & Y^{\mu\nu}_a L_g - ke \Big\{ \Psi_a \partial_\lambda \Psi^a \left(g^{\mu\lambda} \partial_\sigma Y^{\mu\nu}_a + \partial^\mu Y^{\lambda\nu}_a \right) + 2 Y^{\lambda a}_a \left(\partial^\mu \Psi^\nu \partial_\lambda \Psi_a + \partial_\lambda \Psi^\nu \partial^\mu \Psi_a \right) \\
& + \frac{1}{2} \Big\{ Y^{\mu\nu}_a \left[2 g^{\lambda\sigma} \partial^\rho Y^c_{\sigma a} \partial_\rho Y^a_{c\lambda} - g_{\lambda\sigma} \partial_\rho Y^{c\lambda}_a \partial^\rho Y^{\sigma a}_c \right] + Y^{\rho a}_c \left[\partial^\mu Y^c_{\rho a} \partial_\sigma Y^{\sigma\nu}_a + \partial_\lambda Y^c_{\rho a} \partial^\mu Y^{\lambda\nu}_a \right] \Big\} \\
& + \Psi^\nu \left[-4 \partial^\lambda \Psi_a \partial_\lambda Y^{\mu a}_a + 2 \partial^\mu \Psi_a \partial_\lambda Y^{\lambda a}_a + 2 \partial^\mu \Psi_a \partial^\lambda Y^a_{a\lambda} - \partial_\lambda \Psi_a \partial^\mu Y^{\lambda a}_a - \partial^\lambda \Psi_a \partial^\mu Y^a_{a\lambda} \right] \Big\}, \qquad (4.36)
\end{aligned}
$$

em seguida fazemos

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial L_g}{\partial \left(\partial_\lambda Y^a_{\mu\nu} \right)} = {} & -ke \Big\{ Y^{\mu\nu}_a \left[2 \Psi_a \partial^\lambda \Psi_a + Y^{\rho a}_c \partial^\lambda Y^c_{\rho a} + \frac{1}{2} \partial_\sigma g^{\lambda\sigma} \right] + \Psi^\nu \left[6 Y^{\mu a}_a \partial^\lambda \Psi_a - 4 g^{\mu\lambda} Y^{a\sigma}_a \partial_\sigma \Psi_a \right] \\
& + \frac{1}{2} \Big\{ 7 g^{\mu\sigma} \partial^\lambda Y^\nu_{a\sigma} - 2 g^{\mu\lambda} \left(\partial_\sigma Y^{\sigma\nu}_a + \partial^\sigma Y^a_{\sigma\nu} \right) + \partial^\lambda Y^{\mu\nu}_a \Big\} \Big\}, \qquad (4.37)
\end{aligned}
$$

aplicando o operador ∂_λ em (4.37), obtemos

$$
\begin{aligned}
\partial_\lambda \frac{\partial L_g}{\partial \left(\partial_\lambda Y^a_{\mu\nu} \right)} = {} & Y_a \Psi^\beta_\beta \partial_\lambda \left(Y^a_{a\gamma} \Psi^\gamma \frac{\partial L_g}{\partial \left(\partial_\lambda Y^a_{\mu\nu} \right)} \right) - ke \Big\{ \partial_\lambda Y^{\mu\nu}_a \left[2 \Psi_a \partial^\lambda \Psi_a + Y^{\rho a}_c \partial^\lambda Y^c_{\rho a} + \frac{1}{2} \partial_\sigma g^{\lambda\sigma} \right] \\
& + Y^{\mu\nu}_a \partial_\lambda \left[2 \Psi^a \partial^\lambda \Psi^a + Y^{\rho a}_c \partial^\lambda Y^c_{\rho a} + \frac{1}{2} \partial_\sigma g^{\lambda\sigma} \right] + \partial^\lambda \Psi^\nu \left[6 Y^{\mu a}_a \partial^\lambda \Psi_a - 4 g^{\mu\lambda} Y^{a\sigma}_a \partial_\sigma \Psi_a \right] \\
& - \Psi^\gamma_\lambda \partial_\lambda \left[6 Y^{\mu a}_a \partial^\lambda \Psi_a - 4 g^{\mu\lambda} Y^{a\sigma}_a \partial_\sigma \Psi_a \right] + \frac{1}{2} \Big\{ \partial_\lambda \left[7 g^{\mu\sigma} \partial^\lambda Y^\nu_{a\sigma} \right] + \partial_\lambda \partial^\lambda Y^{\mu\nu}_a \\
& - \partial_\lambda g^{\mu\lambda} \left(\partial_\sigma Y^{\sigma\nu}_a + \partial^\sigma Y^a_{\sigma\nu} \right) - g^{\mu\lambda} \partial_\lambda \left(\partial_\sigma Y^{\sigma\nu}_a + \partial^\sigma Y^a_{\sigma\nu} \right) \Big\} \Big\}, \qquad (4.38)
\end{aligned}
$$

sendo (4.38) a equação de Euler-Lagrange.

Uma vez obtido (4.38) estamos habilitados a obter as equações de movimento, escrevemos

$$
\begin{aligned}
& Y^{\mu\nu}_a\Big\{\partial_\lambda\Psi^\alpha\partial^\lambda\Psi_\alpha - \frac{1}{2}\Psi_\alpha\partial^\lambda\Psi^\alpha\partial_\sigma g^{\lambda\sigma} + Y^c_{\lambda\alpha}Y^{\sigma\beta}_c\left(\partial^\lambda\Psi^\alpha\partial_\sigma\Psi_\beta + \partial_\sigma\Psi^\alpha\partial^\lambda\Psi_\beta\right) \\
& - Y^{\sigma\beta}_b\partial_\lambda Y^b_{\sigma\beta}\left(\Psi_\alpha\partial^\lambda\Psi^\alpha + Y^\alpha_{c\rho}\partial^\lambda Y^{c\rho}_\alpha\right) + \partial_\lambda\left(2\Psi_\alpha\partial^\lambda\Psi^\alpha + Y^{\rho\alpha}_c\partial^\lambda Y^c_{\rho\alpha} + \frac{1}{2}\partial_\sigma g^{\lambda\sigma}\right) \\
& + \frac{1}{2}\Big[2\partial^\lambda Y_{c\lambda\alpha}\partial_\sigma Y^{c\lambda\alpha} + \partial_\sigma Y^{c\lambda}_\alpha\partial_\lambda Y^{\sigma\alpha}_c + \partial^\sigma Y^c_{\lambda\alpha}\partial^\lambda Y^\alpha_{c\sigma} + \partial_\lambda Y_{c\sigma\alpha}\partial^\lambda Y^{c\sigma\alpha}\Big]\Big\} \\
& + Y^{c\lambda\alpha}_a\Psi^\alpha\Big[-4\partial^\sigma\Psi_\beta\partial_\sigma Y^{\lambda\beta}_c + 2\partial^\lambda\Psi_\beta\partial_\sigma Y^{\sigma\beta}_c + 2\partial^\lambda\Psi_\beta\partial^\sigma Y^\beta_{c\sigma} - \partial_\sigma\Psi_\beta\partial^\lambda Y^{\sigma\beta}_c - \partial^\sigma\Psi_\beta\partial^\lambda Y^\beta_{c\sigma}\Big] \\
& + \left(2g^{\lambda\sigma}\partial^\rho Y^c_{\sigma\alpha}\partial_\rho Y^\alpha_{c\lambda} - g_{\lambda\sigma}\partial^\rho Y^{c\lambda}_\alpha\partial_\rho Y^{\sigma\alpha}_c\right)\Big], \\
& + \frac{1}{2}\Big\{Y^{\lambda\alpha}_c\left(\partial^\mu Y^c_{\lambda\alpha}\partial_\sigma Y^{\sigma\nu}_a + \partial_\sigma Y^c_{\lambda\alpha}\partial^\mu Y^{\sigma\nu}_a\right) + \Psi_\alpha\partial_\lambda\Psi^\alpha\left(g^{\mu\lambda}\partial_\sigma Y^{\sigma\nu}_a + \partial^\mu Y^{\lambda\nu}_a\right) \\
& + \Psi^\nu\Big[-4\partial^\lambda\Psi_\alpha\partial_\lambda Y^{\mu\alpha}_a + 2\partial^\mu\Psi_\alpha\partial_\lambda Y^{\lambda\alpha}_a + 2\partial^\mu\Psi_\alpha\partial^\lambda Y^\alpha_{a\lambda} - \partial_\lambda\Psi_\alpha\partial^\mu Y^{\lambda\alpha}_a - \partial^\lambda\Psi_\alpha\partial^\mu Y^\alpha_{a\lambda}\Big] \\
& + 2Y^{\lambda\alpha}_a\left(\partial^\mu\Psi^\nu\partial_\lambda\Psi_\alpha + \partial_\lambda\Psi^\nu\partial^\mu\Psi_\alpha\right) - \partial_\lambda\Big[7g^{\mu\sigma}\partial^\lambda Y^\nu_{a\sigma} - 2g^{\mu\lambda}\left(\partial_\sigma Y^{\sigma\nu}_a + \partial^\sigma Y^\nu_{a\sigma}\right) + \partial^\lambda Y^{\mu\nu}_a\Big]\Big\} \\
& - Y^{\gamma\beta}_c\partial_\lambda Y^c_{\gamma\beta}\Big(\Psi_\beta\partial_\lambda\Psi^\beta - \Big[7g^{\mu\sigma}\partial^\lambda Y^\nu_{a\sigma} - 2g^{\mu\lambda}\left(\partial_\sigma Y^{\sigma\nu}_a + \partial^\sigma Y^\nu_{a\sigma}\right) + \partial^\lambda Y^{\mu\nu}_a\Big]\Big), \\
& - \Psi^\nu Y^{\gamma\beta}_c\partial_\lambda Y^c_{\gamma\beta}\left(6Y^{\mu\alpha}_a\partial^\lambda\Psi_\alpha - 4g^{\mu\lambda}Y^\alpha_{a\sigma}\partial^\sigma\Psi_\alpha\right) - \Psi^\nu\partial_\lambda\left(6Y^{\mu\alpha}_a\partial^\lambda\Psi_\alpha - 4g^{\mu\lambda}Y^\alpha_{a\sigma}\partial^\sigma\Psi_\alpha\right) \\
& - \partial_\lambda Y^{\mu\nu}_a\left(2\Psi_\alpha\partial^\lambda\Psi_\alpha + Y^{\rho\alpha}_c\partial^\lambda Y^c_{\rho\alpha} + \frac{1}{2}\partial_\sigma g^{\lambda\sigma}\right) = \frac{1}{kc}T^\mu_\alpha\Psi^\nu.
\end{aligned}
\tag{4.39}
$$

As equações de campo acopladas para Ψ e Y não possuem soluções óbvias e provavelmente só podem ser resolvidas numericamente. No entanto é fácil observar que, para o limite de Y constante, as derivadas da métrica se anulam ($g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(Y)$) e a Lagrangiana em (4.28) assume uma forma muito mais simplificada

$$\mathcal{L}_g = -ke\left[\partial_\mu\Psi^\alpha\partial^\mu\Psi_\alpha + Y^c_{\mu\alpha}Y^{\nu\beta}_c\left(\partial^\mu\Psi^\alpha\partial_\nu\Psi_\beta + \partial_\nu\Psi^\alpha\partial^\mu\Psi_\beta\right)\right]. \tag{4.40}$$

A variação da Lagrangiana é feita apenas em relação ao campo Ψ

$$\frac{\partial\mathcal{L}_g}{\partial\Psi^\lambda} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}_g}{\partial\left(\partial_\mu\Psi^\lambda\right)} = 2k\left[\partial_\mu\partial^\mu\Psi_\lambda + 2Y^{c\mu}_\lambda Y^{\nu\alpha}_c\partial_\mu\partial_\nu\Psi_\alpha\right]. \tag{4.41}$$

As equações de campo são expressas como

$$\partial_\mu\partial^\mu\Psi_\lambda + 2\partial_\mu\partial_\nu\left(Y^{a\mu}_\lambda Y^{\nu\alpha}_a\Psi_\alpha\right) = \frac{1}{2kc}Y^{a\mu}_\lambda T_{a\mu}, \tag{4.42}$$

A expressão obtida acima é a equação espinorial para um espaço onde $Y = constante$. Dessa forma, toda dinâmica do campo gravitacional está contida em Ψ.

Por outro lado, se Y é constante, a derivada do tensor métrico se anula

$$\partial_\lambda g^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\partial_\lambda \left(Y^{a\mu}_{\alpha} Y^{\nu\alpha}_{a} + Y^{a\nu}_{\alpha} Y^{\mu\alpha}_{a} \right) = 0.$$

Se a derivada de métrica é nula, a conexão de Levi – Civita definida como

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\alpha} \left(\partial_\mu g_{\alpha\nu} + \partial_\nu g_{\mu\alpha} - \partial_\alpha g_{\mu\nu} \right),$$

também se anulam.

Consequentemente, o tensor de curvatura expresso pelos símbolos de Christoffel e suas derivadas é igualmente nulo

$$R^{\alpha}_{\lambda\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^{\alpha}_{\lambda\nu} - \partial_\nu \Gamma^{\alpha}_{\lambda\mu} + \Gamma^{\alpha}_{\sigma\mu} \Gamma^{\sigma}_{\lambda\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\sigma\nu} \Gamma^{\sigma}_{\lambda\mu} = 0.$$

Assim, no caso limite para Y= constante, a expressão (4.42) representa uma equação espinorial para Ψ em um espaço-tempo plano de Minkowski. Sendo a TERG e a Relatividade Geral dinamicamente equivalentes, a expressão (4.42) representa também uma equação no espaço-tempo plnao de Weitzenböck

Capítulo 5

Conclusão

A abordagem desenvolvida neste trabalho foi direcionada para a proposição de uma teoria espinorial da gravidade descrita pela formulação geométrica da TEGR. Iniciamos com uma breve revisão da mecânica não relativística, que em sua descrição a partir do formalismo newtoniano estabelece a interação gravitacional como uma força definida como o produto do campo gravitacional pela massa de um objeto sujeito a esse campo, no qual as equações de movimento para tal objeto são obtidas pela segunda lei de Newton. Já o formalismo lagrangiano se apoia no conceito de potencial gravitacional e as equações de movimento são dadas pelo princípio da mínima ação. Ambos os modelos, assim como qualquer teoria da gravitação, partem da propriedade de que corpos sujeitos a interação gravitacional se movem da mesma maneira, independente de sua massa. O princípio da equivalência, um dos alicerces da teoria de Einstein, decorre diretamente dessa característica cinemática da interação gravitacional.

A seção seguinte foi destinada à revisão da relatividade restrita, primeiro passo no desenvolvimento de uma teoria da estrutura do espaço-tempo. A relatividade especial aborda a descrição de fenômenos físicos por diferentes referenciais inerciais, assim como a mudança ou invariância nas quantidades físicas sobre transformação de coordenadas quando mudamos de um referencial inercial para outro. Esse modelo adota um espaço-tempo plano e um sistema de coordenadas galileanas.

A terceira seção do primeiro capítulo foi dirigida à revisão de uma geometria em coordenadas curvilíneas generalizadas, que estabelecem a conexão entre sistemas de referência arbitrários, necessária para formalizar o princípio da equivalência. Nas seções seguintes deste primeiro capítulo abordamos os tensores de curvatura e de energia-momento, e o formalismo lagrangiano que relaciona esses dois objetos na equação de Einstein. Mostramos também que no limite não-relativístico as equações de campo da Relatividade Geral se restringem à Lei Universal da Gravitação de Newton.

No penúltimo capítulo, destinado à gravitação teleparalela, mostramos a equivalência entre as teorias (teleparalelismo e Relatividade Geral). A TEGR é construída a partir de um espaço-tempo sem curvatura e torção não nula, e a dinâmica gravitacional decorre dos campos de tétradas autoparalelas. Essa teoria, além de se mostrar equivalente à sua antecessora, propõe a resolução de problemas existentes nesta última, como a definição local da energia gravitacional.

Por fim, no último capítulo, abordamos a teoria espinorial da gravitação. Na primeira seção fizemos uma revisão bibliográfica do modelo proposto por Novello [21, 22], que descreve a métrica como um campo não independente e sem dinâmica própria, esta última herdada de dois campos espinoriais fundamentais que interagem com a matéria e produzem os efeitos gravitacionais. A teoria de Novello é formulada de acordo com a teoria de Einstein, em que as equações de campo são derivadas da variação da Lagrangiana em termos da métrica.

Na última seção propomos uma teoria espinorial da gravitação em concordância com a TEGR. O primeiro passo foi definir a relação entre os campos de tétrada e os campos espinoriais. As características geométricas destes campos decorrem das propriedades das tétradas. O segundo passo foi escrever a Lagrangiana gravitacional teleparalela explicitamente em função dos campos de tétradas e suas derivadas, e em seguida substituir os campos espinoriais nesta Lagrangiana de acordo com a relação estabelecida entre tétradas e espinores. Por fim, as equações de campo foram obtidas a partir da variação da lagrangiana em relação aos campos espinoriais separadamente, resultando em duas equações acopladas para os dois espinores.

A primeira observação dos resultados obtidos foi que, embora se chegasse a uma equação de campo complicada – com soluções ainda mais complexas – a simples obtenção de uma Lagrangiana gravitacional em termos de campos espinoriais torna, se não possível, pelo menos esperado o confronto entre as teorias gravitacionais vigentes com a previsão das propriedades de uma partícula associada ao campo gravitacional (gráviton), tal como spin e massa. A geometrização dos campos espinoriais, se bem-sucedida, pode resultar na quantização do campo gravitacional. Já que a união entre Mecânica Quântica e Gravitação pressupõe a junção entre uma teoria da matéria e energia com uma teoria da estrutura do espaço-tempo.

Outro resultado obtido foi uma equação para o limite de Y constante. A lagrangiana para este limite assume uma forma bem simples, tal como desejado, pois esperamos obter uma equação de campo de um espaço-tempo plano. De fato, quando Y é constante, suas derivadas se anulam assim como as derivadas do tensor métrico $g^{\mu\nu}$, de acordo com a expressão (4.29). Com a anulação da métrica, a conexão de Levi – Civita e o tensor de curvatura são igualmente nulos. Na geometria riemanniana, curvatura nula representa um espaço-tempo plano.

Referências Bibliográficas

[1] Stephen Hawking and Werner Israel, *Three hundred years of gravitation* (Cambridge University Press, Cambridge, 1989).

[2] I. Newton, *Principia. Princípios Matemáticos de Filosofia Natural - Livro I*, (EdUSP, São Paulo, 2012).

[3] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Mechanics, 2nd edition*, (Pergamon Press Ltd, Oxford, 1969).

[4] A. Einstein, *Zur Elektrodynamik bewegter Körper*, Ann. der Phys. **17**, (1905) 891.

[5] A. Einstein, *Ist die Trägheit eines Körpers von seinem Energieinhalt abhängig?*, Ann. der Phys. **18**, (1905) 639.

[6] A. Einstein, *Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie*, Ann. der Phys. **49**, (1915) 50.

[7] A. Einstein, *Über Fr. Kottlers Abhandlung: Einsteins Äquivalenzhypothese und die Gravitation*, Ann. der Phys. **50**, (1916) 955.

[8] S. Carrol, *Spacetime and Geometry: An introduction to General Relativity* (Pearson, London, 2003).

[9] T. Shirafuji et al., *Equivalence Principle in the New General Relativity*, Progr. of Theor. Phys. **96**, (1996) 933.

[10] C. M. Will *The Confrontation between General Relativity and Experiment: A 1998 Update*, arXiv:gr-qc/9811036 (1998).

[11] P. A. M. Dirac, *The principles of quantum mechanics, 4th ed.*, (Oxford University Press, London, 1958).

[12] P. A. M. Dirac, *The Quantum Theory of Electron*, Proc. Roy. **117**, (1928) 610.

[13] P. A. M. Dirac, *The Quantum Theory of Electron part. II*, Proc. Roy. **126**, (1930) 360.

[14] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *The Classical Theory of Fields 2nd edition* (Pergamon Press Ltd, Oxford, 1969).

[15] J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics* (Addison Wesley, Massachusetts, 1993).

[16] P. A. M. Dirac, *The Quantum Theory of Electron part. II*, Proc. Roy. **126**, (1930) 360.

[17] J. W. Maluf, *Hamiltonian formulation of the teleparallel description of general relativity*, J. Math. Phys. **35**, (1994) 335.

[18] J. W. Maluf, *Localization of energy in general relativity*, J. Math. Phys. **36**, (1995) 4242.

[19] J. W. Maluf, *The teleparallel equivalent of general relativity*, Ann. Phys. **525**, (2013) 339.

[20] R. Aldrovandi and J. G. Pereira, *Teleparallel Gravity: An Introduction*, (Springer, Heidelberg, 2013).

[21] M. Novello, *Spinor Theory of Gravity*, arXiv:gr-qc/0609033.

[22] M. Novello, *A spinor theory of gravity and the cosmological framework*, J. Cosm. Astr. Phys. (2007) P06.

[23] C. Ulhoa, *O teleparalelismo equivalente à relatividade geral e o momento angular gravitacional*. Physcae **8** (2009) 11.

[24] H. Heisenberg, *Quantum Theory of Fields and Elementary Particles*, Rev. Mod. Phys. **29**, (1957) 269.

[25] V. Fock and D. Ivanenko, *Über eine mögliche geometrische Deutung der relativistischen Quantentheorie*, Zeit. f. Phys. **54** (1929).

[26] V. Fock and D. Ivanenko, *Géometrie quantique linéaire et déplacement paralléle*, C. R. Acad. Sci. Paris **188** (1929) 1470.

[27] A. Einstein, Berliner Sitzungsber, (1928), 217

[28] E. Cartan, A. Einstein, and R. Debever *Elie Cartan-Albert Einstein: letters on ´ absolute parallelism.*, Princeton University Press (1979)

[29] M. Israelit and N. Rosen. Found. Phys **15**, 365 (1985)