

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL

“MODELAGENS NUMÉRICAS PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS EM PROBLEMAS DE INTERAÇÃO FLUIDO-ESTRUTURA”

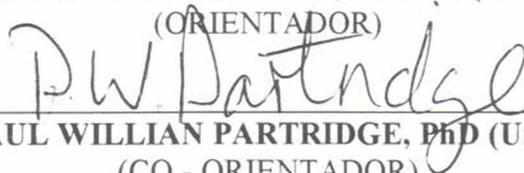
MARCUS VINICIUS GIRÃO DE MORAIS

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO SUBMETIDA AO DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL DA FACULDADE DE TECNOLOGIA DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA, COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE.

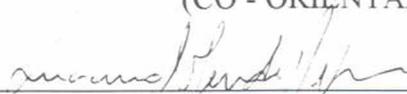
APROVADA POR:



LINEU JOSÉ PEDROSO, Dr. ING (UnB)
(ORIENTADOR)



PAUL WILLIAN PARTRIDGE, PhD (UnB)
(CO - ORIENTADOR)



LUCIANO MENDES BEZERRA, PhD. (UnB)
(EXAMINADOR INTERNO)



RENATO PAVANELLO, Dr. ING (UNICAMP)
(EXAMINADOR EXTERNO)

BRASÍLIA/DF, 28 de JUNHO DE 2000

FICHA CATALOGRÁFICA

MORAIS, MARCUS VINICIUS GIRÃO DE. Modelagens Numéricas pelo Método dos Elementos Finitos em Problemas de Interação Fluido-Estrutura [Distrito Federal] 2000. xx, 157p., 297 mm (ENC/FT/UnB, Mestre, Estruturas e Construção Civil, 2000),
Dissertação de Mestrado – Universidade de Brasília. Faculdade de Tecnologia.
Departamento de Engenharia Civil e Ambiental.

- | | |
|---------------------------------|---------------------|
| 1. Interação Fluido-Estrutura | 2. Acústica |
| 3. Método dos Elementos Finitos | 4. Valores Próprios |
| I. ENC/FT/UnB | II. Título (série) |

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

MORAIS, M. V. G.de (2000). Modelagens Numéricas pelo Método dos Elementos Finitos em Problemas de Interação Fluido-Estrutura. Dissertação de Mestrado. Publicação E.DM 008A/00, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 157p.

CESSÃO DE DIREITOS

NOME DO AUTOR: Marcus Vinicius Girão de Moraes

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO: Modelagens Numéricas pelo Método dos Elementos Finitos em Problemas de Interação Fluido-Estrutura

GRAU / ANO: Mestre / 2000

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta dissertação de mestrado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desta dissertação de mestrado pode ser reproduzida sem a autorização por escrito do autor.



Marcus Vinicius Girão de Moraes
QE 03 conj."N" casa 104 Guará I
Brasília - DF
CEP - 71020-143

A minha esposa, Rosa, e
a meus pais, Raimundo e Hildecí,
com todo o carinho.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, Mestre de todos os mestres, pois sem Sua ajuda nada seria possível.

Minha profunda gratidão ao professor Lineu José Pedroso, meu orientador, pelos anos de investimento, sacrifícios, paciência e apoio sem os quais minha vida acadêmica não seria possível. Ao prof. Paul William Partridge, meu co-orientador, agradeço por seu apoio nestes momentos finais do trabalho de dissertação.

Aos professores André Luiz A. de C. e Souza, José L. Vital de Brito, Graciela N. Doz de Carvalho, Luciano Mendes Bezerra e William Taylor Matias Silva, do Mestrado em Estruturas - PECC/EnC, agradeço pela disponibilidade, incentivo e por minha formação acadêmica. Ao professor Antonio Carlos Brasil Jr., da Engenharia Mecânica, agradeço minha iniciação no mundo dos elementos finitos aplicados aos fluidos.

A Rosa Helena de Santana Girão de Morais, minha esposa, por seu eterno apoio e compreensão.

A meus amigos Miguel, Aldo e Pedro Cláudio (Pedrão) pelas conversas inspiradoras, dicas e incentivos. A André Barbosa, Luís André, Stephan, Leonardo, Daniel, Antoniel, companheiros de pesquisa com quem tive o prazer de trabalhar. A todos os colegas do Mestrado em Estruturas pelo companheirismo e amizade.

Aos funcionários do Departamento de Engenharia Civil, Elma, Gilmar, D.Maria, Teo, e aos da Secretaria da Pós-graduação de Engenharia Civil, Adélias, Simone, Severino, Xavier, por manter sempre a casa em ordem. Também, ao pessoal da Copiadora Exata e ao COMUT, pela eterna paciência frente a urgência dos pedidos.

A CAPES e a FAP-DF, respectivamente, pela bolsa e pelo material de pesquisa.

A UnB pela infra-estrutura.

RESUMO

O estudo da interação fluido-estrutura, onde um domínio sólido encontra-se em contato com um domínio fluido, faz-se necessário em diversas áreas da engenharia, como aeronáutica, civil, mecânica, nuclear, naval e até mesmo a bioengenharia. Estes problemas podem ser abordados de diversas formas. Problemas de vibrações induzidas por um escoamento, problemas não-lineares do tipo choque ou explosões em sistemas limitados ou ilimitados e problemas de vibrações de estruturas flexíveis acopladas a um meio acústico linear, são exemplos típicos com aplicações diretas em reatores nucleares, barragens, aviões, plataformas marítimas, turbinas, entre outros. Por essa razão, o estudo da interação fluido-estrutura tem um lugar de destaque em diversos grupos de pesquisa internacionais.

Neste trabalho estuda-se problemas acoplados fluido-estrutura bidimensionais a partir de uma formulação com descrição Lagrangeana para o sólido e Euleriana para o fluido pelo método dos elementos finitos (MEF). Objetiva-se construir um aparato conceitual e desenvolvimentos computacionais para possibilitar aplicações mais complexas no futuro. Logo, optou-se por uma formulação variacional mista do tipo acoplamento - de - massa $(\bar{u}, p, \pi, \bar{\eta})$ que considera sistemas acoplados com dissipação, valendo-se do formalismo de Morse e Feshbach. Os deslocamentos \bar{u} descrevem o comportamento do sólido, enquanto a pressão p , o potencial de deslocamento π e a elevação da superfície livre $\bar{\eta}$ são as variáveis do fluido.

Neste primeiro enfoque, são estudados problemas simples bidimensionais onde a estrutura possui comportamento elástico linear e o fluido é compressível, irrotacional e invíscido (problema acústico). A implementação computacional é validada por problemas dinâmicos típicos com soluções analíticas desacopladas e/ou acopladas e da literatura no domínio do tempo e da frequência.

Devido a formulação apresentar matrizes muito esparsas e mal-condicionadas, foi necessário um estudo para minimizar a instabilidade numérica por meio do balanceamento das matrizes.

Por fim, a formulação representa bem a classe de problemas propostos. E os resultados numéricos obtidos pelas implementações computacionais desenvolvidas apresentaram um bom acordo com relação as soluções analíticas e os resultados da literatura.

SUMMARY

The study of fluid-structure interaction in which the solid domain is in contact with the fluid, is necessary for many problems encountered in aeronautical, civil, mechanical, nuclear, naval and bioengineering. Such problems may be of different types: problems of vibrations caused by fluid flow, non-linear problems due to impact or explosions in closed systems and problems of vibrations in flexible structures connected to a linear acoustic medium are typical examples with direct application in nuclear reactors, dams, aircraft, offshore platforms, turbines and others. For this reason, the study of fluid-structure interaction has become an important area of international research.

In this work, there 2D problems of fluid-structure interaction are considered using a Lagrangean formulation for the solid and an Eulerian formulation for the fluid using the finite elements method. The objective is to build a computational tool which will enable more complex studies to be carried out in the future. For this reason a mixed variational formulation was adopted with dissipation (\bar{u}, p, π, η) using the formalism of Morse and Feshbach. The displacements \bar{u} describe the behaviour of the solid, while the pressure p , the displacement potential π and the surface elevation η describe the behaviour of the fluid.

In this preliminary study, simple 2D problems are considered in which the structure is linear elastic and the fluid is compressible, irrotational and inviscid (acoustic problem). The computational formulation is tested for typical dynamic problems with uncoupled or coupled analytical solutions and with results obtained from the literature for both the time and frequency domain.

The formulation considered involves very sparse ill-conditioned matrices and as a consequence it was necessary to study the minimization of instabilities by balancing the matrices.

Finally, it is concluded that the formulation represents properly the class of problems considered and the numerical results obtained are in good agreement with the analytical results and with the results obtained from the literature.

ÍNDICE

Capítulo	Página
1 – INTRODUÇÃO	1
1.1 – INTRODUÇÃO	1
1.2 – COLOCAÇÃO DO PROBLEMA	2
1.3 – PEQUENA REVISÃO DA LITERATURA	5
1.4 – OBJETIVOS E ORGANIZAÇÃO DA DISSERTAÇÃO	11
1.5 – ORGANIZAÇÃO DA DISSERTAÇÃO	12
2 – RUDIMENTOS DO CÁLCULO VARIACIONAL	13
2.1 – INTRODUÇÃO	13
2.2 – CONSIDERAÇÕES PRELIMINARES	13
2.2.1 – Continuidade e diferenciabilidade discreta	13
2.2.2 – Diferenciação total e parcial	14
2.2.3 – Diferenciação de uma integral	15
2.2.4 – Integração por partes	15
2.2.5 – Método dos multiplicadores de Lagrange	15
2.2.6 – Expansão de Taylor para funções de várias variáveis	15
2.2.7 – Derivada normal	16
2.2.8 – Teorema de Green - problemas bidimensionais	17
2.3 – LEMA BÁSICO	18
2.4 – EQUAÇÃO DE EULER-LAGRANGE	19
2.5 – OPERADOR VARIACIONAL OU DELTA δ	23
2.5.1 – Dedução alternativa da equação de Euler-Lagrange	23
2.6 – MINIMIZAÇÃO DE FUNCIONAL DE MUITAS VARIÁVEIS SOB DETERMINADAS RESTRIÇÕES	24
2.7 – SISTEMAS DISSIPATIVOS	27

3 – FORMULAÇÃO VARIACIONAL DO PROBLEMA DE INTERAÇÃO FLUIDO-ESTRUTURA	29
3.1 – INTRODUÇÃO	29
3.2 – A ESTRUTURA	31
3.2.1 – Equação de Movimento	31
3.2.2 – Equações Constitutiva Viscoelástica	32
3.2.3 – Lagrangeano da estrutura	35
3.3 – O FLUIDO	37
3.3.1 – Formulação do Fluido	37
3.3.2 – Equações Governante para o Fluido	37
3.3.3 – Lagrangeano do fluido	40
3.4 – FORMULAÇÃO VARIACIONAL DO SISTEMA ACOPLADO	42
3.4.1 – Identificação dos Multiplicadores de Lagrange	42
3.4.2 – Funcional de acoplamento - de - massa \mathfrak{I}_1	48
3.5 – EFEITOS DE INTERESSE	50
3.5.1 – Cavitação	50
3.6 – DISCRETIZAÇÃO PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS	51
3.6.1 – Discretização do Domínio Sólido	51
3.6.2 – Discretização do Domínio Fluido	52
3.6.3 – Montagem das matrizes elementares	52
3.6.4 – Sistemas de equação matricial do princípio de acoplamento - de - massa	53
4–ANÁLISE NUMÉRICA DO PROBLEMA FLUIDO-ESTRUTURA	55
4.1 – INTRODUÇÃO	55
4.2 – ANÁLISE NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA	56
4.3 – ANÁLISE TRANSIENTE	60
4.3.1 – Método de integração direta <i>versus</i> métodos de superposição modal	60
4.3.2 – Integração Direta pelo Método de Newmark - MID - MNw	61
4.4 – BALANCEAMENTO DAS MATRIZES DO SISTEMA ACOPLADO	64

5 – RESULTADOS NUMÉRICOS	67
5.1 – INTRODUÇÃO	67
5.2 – CASO I - CAVIDADE 1-D LONGA	68
5.2.1 – Esquema do problema	68
5.2.2 – Formulação teórica do sistema estrutural 1D	68
5.2.3 – Formulação teórica da cavidade fluida 1D	69
5.3 – CASO 1A - CONDIÇÃO DE CONTORNO ABERTA	70
5.3.1 – Solução Desacoplada	70
5.3.2 – Solução Acoplada	70
5.3.3 – Resultados no domínio da frequência do caso 1A	73
5.3.4 – Resposta transiente do caso 1A	82
5.4 – CASO 1B - CAVIDADE FLUIDA UNIDIMENSIONAL FECHADA	86
5.4.1 – Solução Desacoplada	86
5.4.2 – Solução Acoplada	86
5.4.3 – Resultados numéricos - Solução de problemas de vibração livre	87
5.4.4 – Resultados transientes do caso 1B	96
5.5 – CASO 2A - CAVIDADE ABERTA CURTA	101
5.5.1 – Solução desacoplada	101
5.5.2 – Solução acoplada	101
5.5.3 – Resultados numéricos do caso 2A no domínio da frequência	102
5.6 – CASO 2H - CAVIDADE LONGA COM SUPERFÍCIE LIVRE	112
5.6.1 – Esquema do Problema	112
5.6.2 – Solução Desacoplada	112
5.6.3 – Resultados Numéricos do caso 2H	113
6 – CONCLUSÕES E SUGESTÕES	125
6.1 – INTRODUÇÃO	125
6.2 – CONCLUSÕES GERAIS	126
6.3 – CONCLUSÕES ESPECÍFICAS	127
6.4 – SUGESTÕES	128

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	129
ANEXO A – SOLUÇÃO ANALÍTICA DA EQUAÇÃO DA ONDA PARA O CASO UNIDIMENSIONAL	135
A.1 – INTRODUÇÃO	135
A.2 – RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE ONDA 1-D	135
A.3 – EXEMPLO I: CASOS SIMPLES	138
A.3.1 – Caverna Fechado-Fechada	138
A.3.2 – Caverna Aberto-Aberta	139
A.3.3 – Caverna Aberto-Fechada	141
ANEXO B – PROBLEMAS DE SUPERFÍCIE LIVRE	143
B.1 – SOBRE PROBLEMAS DE SUPERFÍCIE LIVRE	143
B.2 – HIPÓTESE SIMPLIFICADORAS	143
B.3 – FORMULAÇÃO BÁSICA	144
B.3.1 – Sobre a superfície livre (Γ_S) em termos de pressão p :	145
B.3.2 – Sobre a superfície livre (Γ_S) em termos de potencial de velocidade ϕ :	145
B.4 – SOLUÇÃO DO PROBLEMA	146
B.4.1 – Movimento da onda ao longo de uma vertical z	146
B.4.2 – Introdução da condição de superfície livre	147
B.4.3 – Solução da equação da onda no plano (x - z)	148
B.4.4 – Discussão sobre o parâmetro m	150
B.5 – ONDAS DE SUPERFÍCIE LIVRE TRIDIMENSIONAIS NUMA CAVIDADE RETANGULAR	151
ANEXO C – PROBLEMAS ACÚSTICOS	154
C.1 – PROBLEMA DE VALORES PRÓPRIOS PARA UMA CAVIDADE PRISMÁTICA	154
C.1.1 – Caverna com paredes rígidas	154
C.1.2 – Caverna aberta na direção z para $z = h$	156
C.1.3 – Caverna aberta nas extremidades $z = 0$ e $z = h$	157

LISTA DE FIGURAS

Figura	Página
1.1 - Esquema de alguns tipos de problemas de IFE. (Pedroso (1998)	3
1.2 - Reator nuclear PWR (a), esquema do sistema primário (b), e modelização simplificada do sistema cavidade-tubulação (c).	3
1.3 - Esquema do sistema comporta - cavidade - pilares: (a) conjunto comporta - reservatório, esquema de comporta isolada - (b) perspectiva, e (c) em planta -, e (d) exemplo real de barragem e seu conjunto de comportas. (Léger e Tinawi(2000)	3
2.1 - Critério de continuidade em um intervalo.	14
2.2 - Definição de domínio Ω , contorno Γ e da derivada normal.	17
2.3 - Representação da família de funções $Y(x)$.	20
3.1 - Esquema do problema fluido-estrutura - domínios e contornos.	31
3.2 - Comportamento mecânico do sólido de Voigt-Kelvin.(modificado-Popov(1978).	33
3.3 - Comportamento mecânico do sólido de Maxwell. (modificado - Popov (1978)	34
4.1 - Representação gráfica das matrizes totais (a) de massa e (b) de rigidez de um exemplo típico de problema acoplado fluido-estrutura.	58
4.2 - Esquema de aceleração constante média do método de Newmark.	61
5.1 - Esquema geral do modelo do Caso 1.	68
5.2 - Condições de contorno tratados pelo Caso 1.	68
5.3 - Esquema do exemplo 1A-1, descrição das condições de contorno da malha em elementos finitos e das características da malha utilizada.	73
5.4 - Modos acústicos desacoplados: (a) 1º, (b) 2º, (c) 3º e (d) 4º modos numéricos.	74
5.5 - Modos acústicos acoplados:(a) 1º, (b) 2º, (c) 3º e (d) 4º modos numéricos.	75
5.6 - Modos acústicos acoplados - Solução Analítica -	75

5.7 - Gráfico da variação de espessura t do sólido <i>versus</i> primeiras frequências adimensionais: - linha cheia - solução analítica e - marcas - resultado numérico.	79
5.8 - Gráfico da variação da rigidez K do sólido <i>versus</i> primeiras frequências adimensionais: - linha cheia - solução analítica e - marcas - resultado numérico.	79
5.9 - Gráfico da variação da densidade ρ_0 do fluido <i>versus</i> primeiras frequências adimensionais: - linha cheia - solução analítica e - marcas - resultado numérico.	80
5.10 - Gráfico da variação do comprimento L <i>versus</i> primeiras frequências adimensionais: - linha cheia - solução analítica e - marcas - resultado numérico.	80
5.11 - Resposta transiente do sólido (a) , carga impulsiva aplicada (b) , e resultado da literatura (c) , Barbosa (1998).	82
5.12 - Resposta transiente da cavidade a uma carga impulsiva: (a) vista em perspectiva e (b) superior.	83
5.13 - Resposta transiente do sólido (a) excitado por carga senoidal $F = 800\text{sen}(\pi t)$, detalhe da resposta (b) e resultado da literatura (c) , Barbosa (1998).	84
5.14 - Batimento na resposta transiente da cavidade: (a) vista em perspectiva e (b) superior.	85
5.15 - Esquema do exemplo 1B-1, descrição das condições de contorno da malha em elementos finitos e das características da malha utilizada.	88
5.16 - Modos de pressão desacoplados: (a) 1º, (b) 2º, (c) 3º e (d) 4º modos numéricos.	89
5.17 - Modos acústico acoplados. (a) 1º, (b) 2º, (c) 3º e (d) 4º modos numéricos.	90
5.18 - Modos acústicos acoplados - Solução Analítica -.	90
5.19 - Gráfico da variação de espessura t do sólido <i>versus</i> primeiras frequências adimensionais: - linha cheia - solução analítica e - marcas - resultado numérico.	94
5.20 - Gráfico da variação da rigidez K do sólido <i>versus</i> primeiras frequências adimensionais: - linha cheia - solução analítica e - marcas - resultado numérico.	94
5.21 - Gráfico da variação da densidade ρ_0 do fluido <i>versus</i> primeiras frequências adimensionais: - linha cheia - solução analítica e - marcas - resultado numérico.	95
5.22 - Gráfico da variação do comprimento L <i>versus</i> primeiras frequências adimensionais: - linha cheia - solução analítica e - marcas - resultado numérico.	95
5.23 - Resposta transiente em deslocamento (a) a uma carga impulsiva de curta duração (b) , detalhe da resposta (c) e Barbosa (1998) (d) .	97
5.24 - Resposta transiente em pressão adimensional p' : vistas em perspectiva (a) e superior (b) .	98

5.25 - Resposta transiente em deslocamento (a) a uma carga senoidal ($F = 80.000 \text{sen}(2\pi t)$), e Barbosa (1998) (b) .	99
5.26 - Resposta transiente em pressão adimensional: (a) vista em perspectiva e (b) na parede fechada.	100
5.27 - Esquema geral do modelo do caso 2.	101
5.28 - Malha em elementos finitos do exemplo 2-1 com a descrição das condições de contorno.	102
5.29 - Modos acústicos numéricos desacoplados: (a) modo 1-0, (b) modo 1-1, (c) modo 2-0, e (d) modo 2-1.	104
5.30 - Modos acústicos acoplados: (a) 1º, (b) 2º, (c) 3º e (d) 4º modos numéricos.	105
5.31 - Malha em elementos finitos do exemplo 2-2 com a descrição das condições de contorno.	106
5.32 - Modos desacoplados de superfície livre: (a) 1º, (b) 2º, (c) 3º e (d) 4º modos numéricos.	108
5.33 - Modos acústicos numéricos desacoplados com superfície livre: (a) modo 1-0, (b) modo 1-1, (c) modo 2-0, e (d) modo 2-1.	109
5.34 - Modos acoplados de superfície livre: (a) 1º, (b) 2º, (c) 3º e (d) 4º modos numéricos.	110
5.35 - Modos acústicos com superfície livre: (a) 1º, (b) 2º, (c) 3º e (d) 4º modos numéricos.	111
5.36 - Esquema geral do modelo físico para caso 3.	112
5.37 - Esquema do exemplo 3-1 (a) , e malha em elementos finitos (b) .	114
5.38 - Modos de deslocamento desacoplados: (a) 1º, (b) 2º, (c) 3º e (d) 4º modos numéricos.	116
5.39 - Primeiros modos de superfície livre desacoplados: (a) 1º, (b) 2º, (c) 3º modos numéricos.	116
5.40 - Primeiros modos acústicos desacoplados: (a) 1º, (b) 2º, (c) 3º modos numéricos.	117
5.41 - Primeiros modos acústicos desacoplados com a influência da superfície livre: (a) 1º, (b) 2º, (c) 3º modos numéricos.	117
5.42 - Primeiros modos acústicos acoplados do exemplo 3-2 com a influência da condição de superfície livre: (a) 1º, (b) 2º, (c) 3º e (d) 4º modos numéricos.	118

5.43 - Resposta transiente em pressão adimensional p' ao carregamento senoidal $F \sin(0,8 \cdot \omega_{c,1}t)$: vistas em perspectiva (a) e superior (b) .	120
5.44 - Resposta do deslocamento u_x no nó 31.	121
5.45 - Esquema do modelo acoplado equivalente.	121
5.46 - Primeiras modos acústicos acoplados do exemplo 2H com influência da superfície livre: (a) 1º, (b) 2º e (c) 3º modos numéricos.	122
5.47 - Resposta transiente em pressão adimensional p' ao carregamento senoidal $F \sin(0,8 \cdot \omega_{c,1}t)$: vistas em perspectiva (a) e superior (b) .	123
5.48 - Resposta do deslocamento u_x no nó 31 do exemplo 3-3.	124
A.1 - Esquema do conduto reto.	135
A.2 - Modos de vibração da cavidade fechado-fechada: (a) 1º, (b) 2º, (c) 3º e (d) 4º modos.	139
A.3 - Modos de vibração da cavidade aberto-aberta: (a) 1º, (b) 2º, (c) 3º e (d) 4º modos.	140
A.4 - Modos de vibração da cavidade aberto-fechada: (a) 1º, (b) 2º, (c) 3º e (d) 4º modos.	142
B.1 - Esquemas de uma cavidade retangular com superfície livre (a) , e das coordenadas para a análise da onda (b) .	144
B.2 - Corte horizontal da cavidade tridimensional no plano x-y.	151
C.1 - Cavidade prismática tridimensional.	154

LISTA DE TABELAS

Tabela	Página
5.1 - Frequências naturais desacopladas.	74
5.2 - Frequências naturais acopladas.	75
5.3 - Resultados da variação da espessura t do sólido.	77
5.4 - Resultados da variação da rigidez de mola K .	77
5.5 - Resultados da variação densidade ρ_0 do fluido.	78
5.6 - Resultados da variação do comprimento L da cavidade fluida.	78
5.7 - Resumo das variações paramétricas do exemplo 1A-2.	81
5.8 - Frequências naturais desacopladas.	89
5.9 - Frequências naturais acopladas.	89
5.10 - Resultados da variação da espessura t .	92
5.11 - Resultados da variação da rigidez de mola K .	92
5.12 - Resultados da variação da densidade ρ_0 do fluido.	93
5.13 - Resultados da variação do comprimento L da cavidade.	93
5.14 - Resumo das variações paramétricas do exemplo 1B-2.	96
5.15 - Resultados em frequência do exemplo 2-1.	103
5.16 - Resultados em frequência do exemplo 2-2.	107
5.17 - Resultados em frequência do exemplo 3-1.	115
5.18 - Resultados em frequência do exemplo 3-2.	118
5.19 - Resultados em frequência do exemplo 3-3.	122

LISTA DE SIMBOLOS

Salvo indicação contrária, a seguinte notação é utilizada em todo o trabalho.

1: Termos Gerais

Símbolo	Significado
A	área do elemento triangular
c	velocidade do som
d	amortecimento do sistema 1D massa-mola
\bar{e}	energia interna
E	módulo de Young
f	freqüência natural
g	aceleração da gravidade
H	largura do tubo reto
K, k	rigidez da mola do sistema 1D massa-mola
L	comprimento do tubo reto
m	massa do sistema 1D massa-mola
p	<i>momenta</i>
p	pressão
P_o	pressão hidrostática
q	vazão acústica
S	seção transversal do tubo reto
$S_m(\dots)$	operador do contorno de truncamento ($S_m(\dots) = \nabla(\dots) \cdot \vec{n}$)
t_o	tempo inicial
T	periodo da estrutura
X_s	deslocamento do sólido do sistema 1D massa-mola
\mathcal{L}	lagrangeano
\mathcal{F}	energia cinética
\mathcal{V}	energia potencial
\mathfrak{L}	lagrangeano do sistema acoplado dissipativo
\mathcal{L}	lagrangeano do sistema acoplado conservativo

\mathcal{H}	hamiltoniano
U, P, F, E	funções aproximadas
W, R, G, ρ	funções peso

2: Matrizes e Vetores

Símbolo	Significado
\bar{b}	força de corpo
\bar{D}	tensor de deformação
\bar{n}	normal a um domínio
\bar{t}	tração prescrita
\bar{u}	deslocamento da partícula
\bar{u}_0	deslocamento inicial
\bar{v}	velocidade da partícula
\bar{d}	vetor de deslocamento nodal
\bar{p}	vetor de pressão nodal
$\bar{\pi}$	vetor de potencial de deslocamento nodal
\bar{z}	vetor de elevação da superfície livre nodal
\bar{K}_1	matriz de rigidez da estrutura
\bar{K}_2	matriz de amortecimento da estrutura
\bar{M}_1	matriz de massa da estrutura
\bar{f}	vetor de força
\bar{Q}	matriz de massa do fluido
\bar{E}	matriz de rigidez do fluido
\bar{H}_1	matriz de rigidez do termo de superfície livre
\bar{H}_2	matriz de acoplamento $\eta - \pi$
\bar{C}_1	matriz de acoplamento $\bar{u} - \pi$
\bar{D}_1	matriz de acoplamento $p - \pi$
\bar{B}	matriz de amortecimento por radiação

\bar{C}	matriz de amortecimento global
\bar{K}	matriz de rigidez global
\bar{M}	matriz de massa global
U	vetor "deslocamento" global
\bar{N}	matriz de função de forma do elemento finito

3: Letras Gregas

Símbolo	Significado
α	relação adimensional de rigidez
μ	relação adimensional de massa
β	módulo de Bulk ou volumétrico
δ	operador variacional ou delta
$\bar{\delta}$	delta de Kronecker
ϕ	potencial de velocidade
γ	coeficiente de viscosidade
$\eta, \bar{\eta}$	elevação da superfície livre
$\lambda = \omega L/c$	freqüência adimensional ($\lambda = \omega L/c$)
$\bar{\lambda}$	multiplicador de Lagrange
π	potencial de deslocamento
ρ	densidade
ρ_0	densidade do fluido
$\bar{\sigma}$	tensor de tensão
$\bar{\epsilon}$	tensor de deformação
ω	freqüência circular ($\omega = 2\pi/T = 2\pi f$)
Γ	contorno
Ω	domínio

4: Subscrito e Sobrescrito

Símbolo	Significado
$(...)^*$	termo adjunto ou "espelho"
$(...)_u, (...)_\bar{u}$	contorno de deslocamento

$(\dots)_f$	refere-se ao fluido
$(\dots)_i$	contorno da interface fluido-estrutura
$(\dots)_p$	contorno de parede rígida
$(\dots)_s$	refere-se ao sólido
$(\dots)_s$	contorno da superfície livre
$(\dots)_{x, y, z}$	direções x, y, z
$(\dots)_\sigma$	contorno de tensão
$(\dots)_\infty$	contorno de truncagem

5: Abreviações

Símbolo	Significado
IFE	Interação Fluido-Estrutura
MEF	Método dos Elementos Finitos
MEC	Método dos Elementos de Contorno
S.A.N	Sistema de Amortecimento Negativo
S.A.P	Sistema de Amortecimento Positivo
T3	elemento triangular linear (3 nós)

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

1.1 INTRODUÇÃO

Efeitos de interação entre estruturas e escoamentos internos ou externos possui um papel importante numa grande gama de sistemas físicos. Diversas áreas da engenharia, como aeronáutica, civil, mecânica, nuclear, naval e até mesmo a bioengenharia precisam lidar com problemas acoplados. Destacam-se os problemas de vibrações induzidas por um escoamento, problemas não lineares do tipo choque ou explosões em sistemas limitados ou ilimitados e problemas de vibrações de estruturas flexíveis acopladas a um meio acústico linear. Por essa razão o estudo da interação fluido-estrutura (IFE) tem um lugar de destaque entre os grupos de pesquisa internacionais.

A grande parte dos enfoques do problema presentes na literatura apresentam simplificações consideráveis quanto à complexidade dos modelos aos quais podem ser aplicadas. Essas limitações dizem respeito ao tipo de modelização do fluido (escoamentos potenciais, problemas acústicos,...) ou da estrutura (corpos rígidos, elasticidade linear,...), bem como da geometria do problema (modelos 2D, discretizações simplificadas,...).

Dentre as áreas que se beneficiaram da experiência em interação fluido-estrutura, a área nuclear teve um desenvolvimento singular comparável apenas a indústria aeroespacial, fomentada por vários fatores econômicos e tecnológicos. As questões estratégicas decorrentes da Crise do Petróleo impulsionou ainda mais a corrida tecnológica para o desenvolvimento desta alternativa energética. Em busca de tecnologias mais seguras, de baixo impacto ambiental, e baixo custo de manutenção, os pesquisadores foram levados a estudos cada vez mais profundos de grandes estruturas esbeltas contendo grandes volumes de água à altas pressões.

1.2 COLOCAÇÃO DO PROBLEMA

Dada a fenomenologia complexa dos problemas da interação fluido-estrutura, os fenômenos passaram por diversas tentativas de classificação para agrupar aquelas de características similares. Os trabalhos de Zienkiewicz e Bettess(1978) e Gibert (1988) são exemplos algumas destas tentativas. Numa adaptação da literatura, Pedroso (1998), sugere-se a seguinte classificação, ilustrada na Figura 1.1:

- a) **Problemas com grandes deslocamentos relativos** – governados pelas características do escoamento. Nesses casos se costuma desconsiderar a compressibilidade do fluido. Casos como oscilações em cabos, *flutter* em asas de aviões, e oscilações em pontes suspensas são exemplos típicos desta classe.
- b) **Problemas com pequenos deslocamentos** – presentes em estruturas *off-shore*, oscilação de navios, ventos sobre construções, sismos em barragens, correntes sobre pilares, vibrações nas barras de combustível nuclear devido ao fluxo refrigerante, entre outros, são casos caracterizados por excitação de longa duração, e estrutura com vinculação em pontos fixos e/ou móveis e o fluido não apresentam compressibilidade.
- c) **Problemas de curta duração com pequenos deslocamentos no fluido** – o fluido é compressível, confinado ou sujeito a perturbações localizadas, e a estrutura está fixa. Encaixam neste perfil os casos de explosões em cavidades, cargas de impacto ou o choque entre estruturas e fluido com superfície livre, variações bruscas no fluxo sob pressão em tubulações devido a manobras previstas ou acidentais.
- d) **Problemas com movimentos relativos apreciáveis** – veículos aerodinâmicos, naves supersônicas, projéteis, explosões submarinas, são exemplos de problemas onde estrutura encontra-se livre e mergulhada num meio ilimitado e o fluido é descrito como compressível ou não.

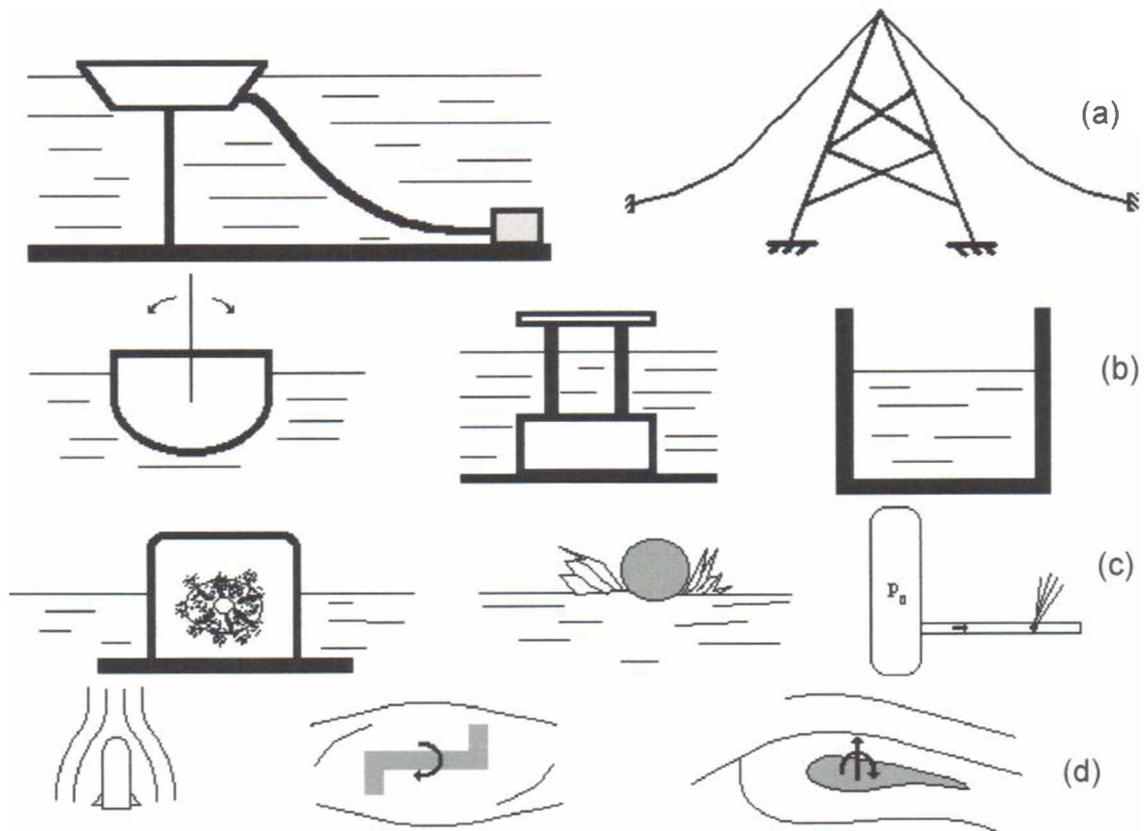


Figura 1.1 - Esquema de alguns tipos de problemas de IFE. Pedroso (1998)

Serão estudados neste trabalho, segundo a Figura 1.1, exemplos do caso **c** e alguns casos especiais da classe **b** que se encaixam dentro da formulação acústica linear para o fluido, e elástico e/ou viscoelástico para a estrutura. Alguns exemplos podem ser vistos nas Figura 1.2 e 1.3.

Exemplo de IFE em Reatores Nucleares (PWR)

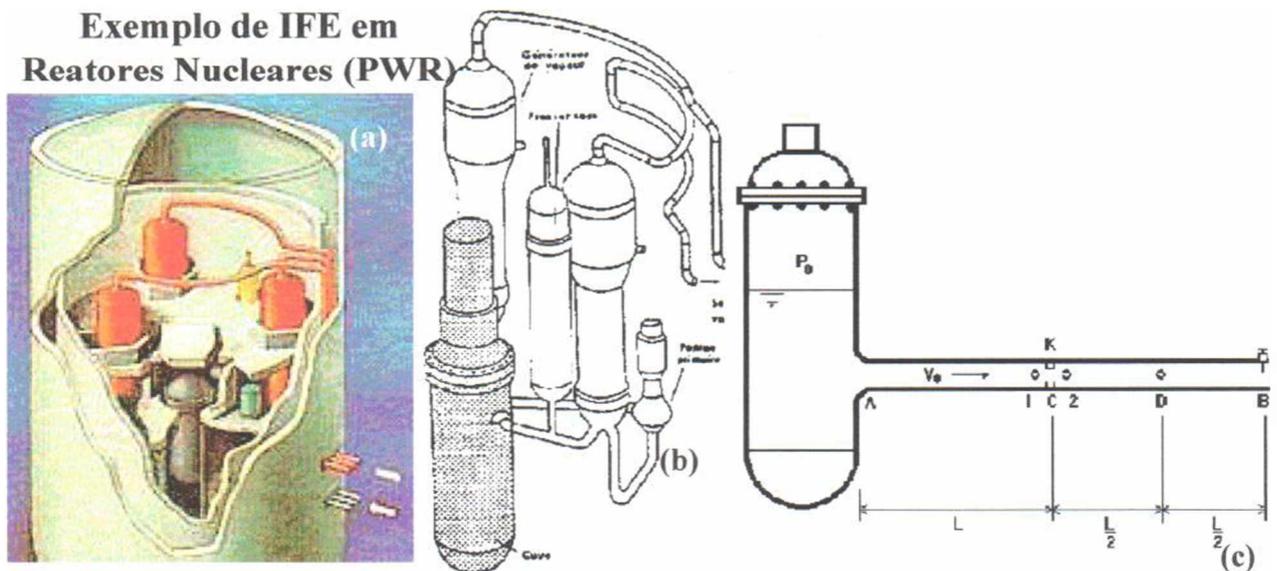


Figura 1.2 - Reator nuclear PWR (a), esquema do sistema primário (b), e modelização simplificada do sistema cavidade-tubulação (c).

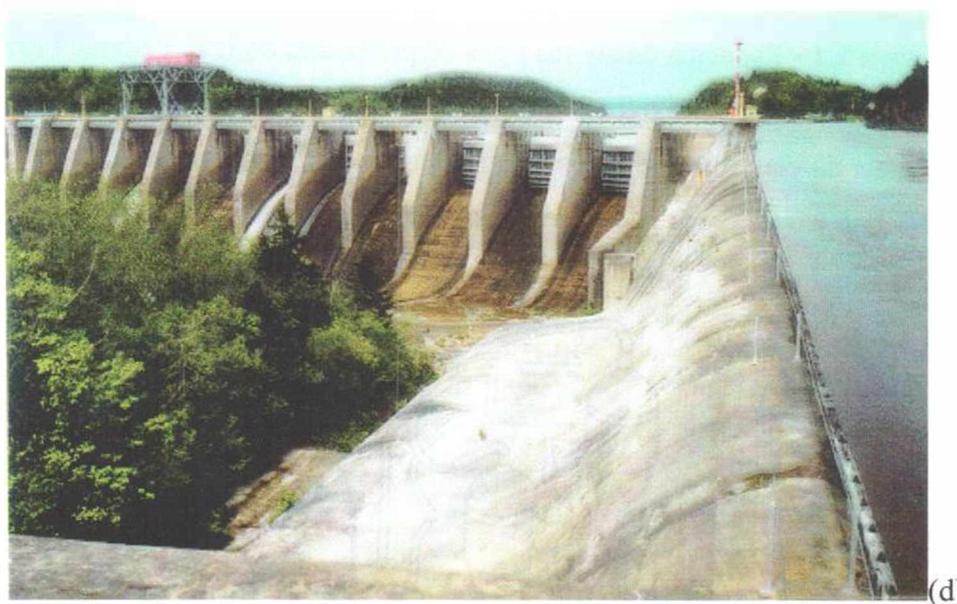
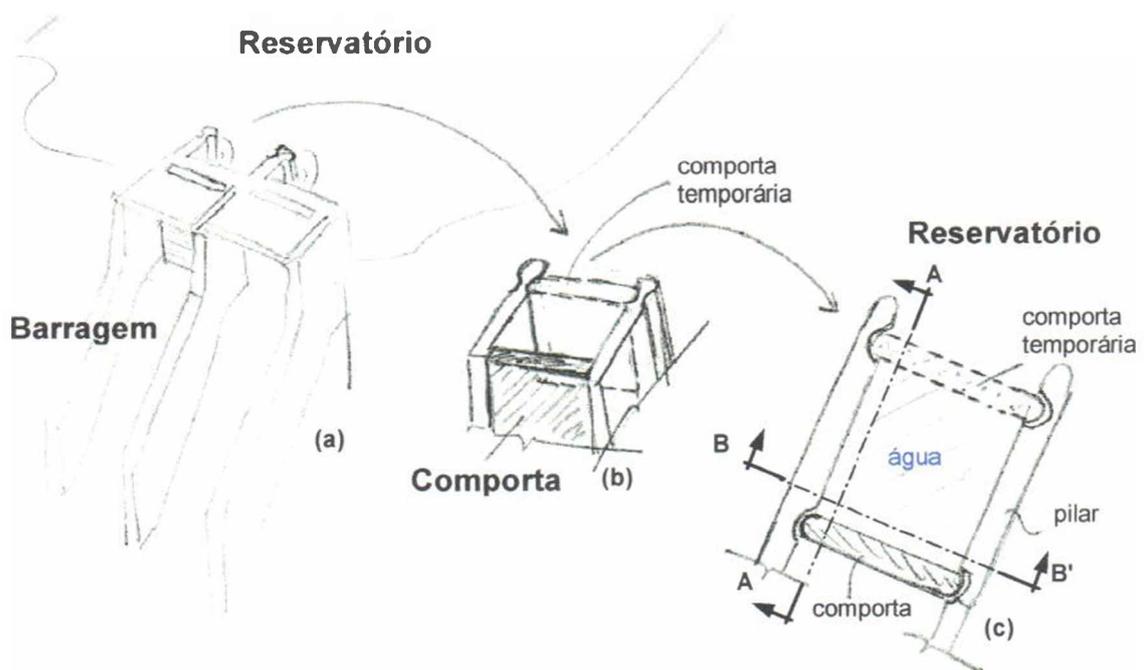


Figura 1.3 - Esquema do sistema comporta - cavidade - pilares: (a) conjunto comporta - reservatório, esquema de comporta isolada - (b) perspectiva, e (c) em planta -, e (d) exemplo real de barragem e seu conjunto de comportas (Léger e Tinawi(2000)).

1.3 REVISÃO SUCINTA DA LITERATURA

Os primeiros estudos de IFE tiveram origem na indústria naval, Morrison *et al* (1950). Com a Crise do Petróleo, a interação fluido-estrutura teve um acentuado desenvolvimento dirigido para a tecnologia *off-shore*, Pedroso (1982).

Por apresentar resultados conservadores, o conceito de massa adicional, fundamentado nos aspectos inerciais da dinâmica do fluido, caracterizaram a pesquisa nestes primeiros momentos, Morrison *et al* (1950). Este método de cálculo consiste em somar na matriz de massa a parcela de fluido perturbada pelo movimento da estrutura. A solução sob a forma de coeficientes de massa adicional é obtida da equação de Laplace para geometrias bastantes simples através de métodos analíticos ou aproximados, Blenvis(1979) e Gibert(1988). Com advento dos computadores e o método dos elementos finitos (MEF), este método iniciou uma nova fase no qual o tratamento geral e unificado permitiu o estudo de problemas mais e mais complexos. De imediato, este tipo de análise passou a ser simplória, segundo Zienkiewicz *et al* (1965). Contudo, ainda é uma alternativa interessante à análise de problemas acoplados com fluidos incompressíveis, Gonçalves e Ramos (1996), e Lakis e Neagu (1997).

Em seguida, uma das primeiras tentativas de solução computacional para problemas IFE foi baseada no cálculo iterativo das formulações desacopladas de ambos os domínios solucionando por elementos finitos o sólido e por diferenças finitas o fluido, Rivard e Torrey (1978). Porém, segundo Bathe e Hahn(1979), essa abordagem gera resultados conservadores. Desde então, as formulações concentram-se em descrever e modelar de forma conjunta por métodos numéricos o sistema acoplado.

Utiliza-se ordinariamente o método do elementos finitos para solucionar problemas de IFE. O método dos elementos de contorno (MEC) é outro método com grande potencial para resolver problema externos com acoplamento sólido-fluido ilimitado, mas que vem enfrentando dificuldades para se tornar popular devido as seguintes desvantagens:

- a) Usualmente, as matrizes produzidas são assimétricas.
- b) A despeito da diminuição da dimensão do problema, o custo computacional é alto, devido a necessidade da inversão de matrizes para efetuar o acoplamento.

A equação básica que descreve o comportamento dinâmico tanto do fluido como do sólido é a equação da conservação da quantidade de movimento que desconsiderando as forças de corpo é, Belytschko (1980):

$$\rho \dot{\bar{v}}_i = \rho (\bar{v}_{i,i} + \bar{v}_{i,j} \bar{v}_j) = \bar{\sigma}_{i,j} \quad (1.1)$$

onde ρ é a densidade; \bar{v} é a velocidade; e $\bar{\sigma}$ é o tensor de tensões.

Existem várias simplificações possíveis para o domínio do fluido, de acordo com o tipo de modelo que se deseja. Para escoamentos invíscidos as tensões são hidrostáticas:

$$\bar{\sigma}_{ij} = -p \bar{\delta}_{ij} \quad (1.2)$$

onde, p é a pressão; e $\bar{\delta}$ é o delta de Kronecker.

A equação de movimento fica:

$$\rho \dot{\bar{v}}_i = -p_{,i} \quad (1.3)$$

A pressão é obtida através de uma equação de estado:

$$p = p(\rho, \bar{e}) \quad (1.4)$$

onde, \bar{e} é a energia interna.

A energia interna e a densidade são obtidas pelas equações da conservação de massa e de energia:

$$\begin{aligned} \dot{\rho} + \rho \bar{v}_{i,i} &= 0 \\ \rho \dot{\bar{e}} &= p \bar{v}_{i,i} \end{aligned} \quad (1.5)$$

Se por outro lado, o escoamento for considerado como incompressível, a equação da continuidade deve ser escrita como:

$$\dot{\bar{u}}_{i,i} = \bar{v}_{i,i} = 0 \quad (1.6)$$

Pode-se considerar, ainda, uma outra simplificação importante, quando os deslocamentos no meio fluido são limitados. Esse é um problema classificado como acústico, e as equações de momento e de estado podem ser linearizadas.

$$\dot{p} = \frac{\beta}{\rho} \dot{\rho} \quad (1.7)$$

onde, β é módulo volumétrico ou de Bulk. Diferenciando no tempo a Eq.(1.5) e combinando a Eq.(1.7), o resultado substitui-se na Eq.(1.3) diferenciada no espaço. Logo,

$$\rho \ddot{v}_i = \beta \bar{v}_{j,ji} \quad (1.8)$$

ou, integrando a Eq.(1.8) uma vez no tempo:

$$\rho \dot{u}_i = \beta \bar{u}_{j,ji} \quad (1.9)$$

A Eq.(1.9) representa uma abordagem **Lagrangeana** do problema do fluido, onde a variável deslocamento caracteriza uma observação do problema do ponto de vista material.

Diferenciando a Eq.(1.9), em relação a x_i , tem-se:

$$\rho \ddot{p} = \beta p_{,ii} \quad (1.10)$$

A Eq.(1.10) utiliza como variável a pressão, definida em um ponto do espaço. Esse tipo de descrição do problema fluido é dito **Euleriano**.

O problema sólido é resolvido associando-se a equação da conservação da quantidade de movimento, Eq.(1.1), à uma equação constitutiva:

$$\bar{\sigma}_{ij} = \bar{\sigma}_{ij}(\bar{D}_{ij}) \quad (1.11)$$

onde \bar{D}_{ij} é o tensor de deformação, e as equações que relacionam deslocamento e deformação são:

$$\bar{D}_{ij} = \frac{1}{2}(\bar{u}_{i,j} + \bar{u}_{j,i}) \quad (1.12)$$

As equações acústicas (1.9) e (1.10), associadas às equações que descrevem o comportamento dinâmico no sólido, correspondem às duas formas clássicas de análise de um problema de acoplamento, Lagrangeana e Euleriana. Segundo a Figura (1.1), o caso **c** e algumas exceções do caso **b** encaixam-se dentro desse tipo de modelagem.

Várias formulações para a análise de problemas de interação fluido-estrutura tem sido propostas na literatura. Ao passo que estas formulações invariavelmente concordam na escolha do deslocamento como a variável da estrutura, elas diferem na representação do fluido onde a região finita de fluido é tratada por elementos finitos, diferenças finitas, elementos de contorno, etc... Quatro categorias de formulações podem distinguir com base na representação do fluido:

1. Formulações Vetoriais ou Lagrangeanas

Em um desenvolvimento Lagrangeano, o fluido é tratado como um sólido elástico com módulo de cisalhamento nulo.

A facilidade na implementação em códigos padrão em elementos finitos baseados em variáveis de deslocamento e a simetria do sistema acoplado de segunda ordem no tempo renderam popularidade a tais formulações. Formulações baseadas no deslocamento do fluido \bar{u}_f podem ser encontradas em Gladwell (1966), Gladwell e Zimmerman (1966), Hamdi *et al* (1978), Zienkiewicz e Bettess (1978), Belytschko e Kennedy (1976), Bathe e Hahn (1978), Belytschko e Schumann (1980), e Belytschko e Mullen (1981).

Contudo, estas formulações apresentam uma séria desvantagens uma vez que ocorrem modos espúrios de circulação devido ao não respeito à condição de irrotacionalidade do fluido. Estes modos circulatórios não só tornam-se mais frequentes com o refinamento da malha como também surgem como valores de frequência não-nulos. Isto impossibilita a separação dos modos espúrios dos com significado físico, Hamdi *et al* (1978).

O uso de um ínfimo valor para o módulo de cisalhamento para eliminar esta dificuldade resultou apenas em um sucesso parcial, Zienkiewicz e Bettess (1978).

No trabalho de Hamdi *et al* (1978) foi introduzida uma restrição de penalidade para inibir modos espúrios de circulação. Subseqüentes desenvolvimentos podem ser encontrados em Zienkiewicz e Bettess (1978), Olson e Bathe (1983), e Wilson e Khalvati (1983). Contudo, Olson e Bathe (1983) relatam uma performance insatisfatória da formulação (\bar{u}, \bar{u}_f) com restrição de penalidade próximo do limite da incompressibilidade.

Além disto, a formulação de Hamdi exige uma habilidade ao calibrar o parâmetro de penalidade para avaliar a frequência. Isto dificulta em muito a aplicação do problema a uma análise mais geral. Neste caso, a determinação do parâmetro de penalidade é precisada pelo método da tentativa e erro.

Outras estratégias numéricas que vem apresentando certo sucesso em contornar o problema dos modos de circulação são propostas por: Bermúdez e Rodríguez (1994, 1995 e 1997), Bathe *et al* (1995), Chen e Taylor (1990), e Wang e Bathe (1997).

2. Formulações Escalares ou Eulerianas Puras

Neste tipo de descrição, as incógnitas de fluido são usualmente representadas por variáveis de pressão, de potencial de velocidade, ou de potencial de deslocamento. As principais vantagens das formulações escalares sobre as vetoriais são a sensível redução do número de graus de liberdade do elemento fluido e a satisfação *a priori* da condição de irrotacionalidade.

A primeira formulação fluido-estrutura que emprega o método dos elementos finitos foi uma formulação escalar proposta por Zienkiewicz e Newton (1969). Este estudo apresentou as bases para uma grande diversidade de formulações que o seguiram.

As formulações em variável de pressão (\bar{u}, p) e de potencial de deslocamento (\bar{u}, π) resultam em sistemas matriciais assimétricos requerendo assim tratamento especial e inibindo o uso de algoritmos padrão para sistemas simétricos, por exemplo, Felippa e Deruntz (1984), Gladwell (1966), Zienkiewicz e Bettess (1978).

A alternativa simétrica usando um campo escalar foi proposta por Everstine (1980) no qual transforma pressão p em potencial de velocidade ϕ através de uma expressão clássica. A formulação em potencial de velocidade (\bar{u}, ϕ) resulta num sistema acoplado simétrico de segunda ordem no tempo com uma matriz tipo-amortecimento ("giroscópica") que não possui características dissipativas.

Sendo as formulações em pressão e em potencial de velocidade a escolha mais comum entre os pesquisadores, e a simetria uma característica esperada para problemas lineares e conservativos, um enorme esforço tem sido efetuado no sentido de simetrizar estas formulações. Alguns exemplos encontram-se em Zienkiewicz e Newton (1969), Zienkiewicz e Bettess (1978), Daniel (1980), Sandberg (1995). Tais esforços limitaram-se, contudo, a problemas internos não-amortecidos.

Buscando a simetria do problema, conforme os trabalhos de Gladwell e Zimmerman (1966) e Tabarrok (1978), é feito uso de variáveis duais (tipo-força) em ambos os domínios fluido (pressão) e sólido (tensão). Tais formulações, contudo, despertaram pouco interesse.

3. Formulações Mistas Escalar - Vetorial ou Arbitrárias Eulerianas Lagrangeanas ou Quasi-Eulerianas

Neste caso, o fluido é representado pelas variáveis escalares e vetoriais. Este tipo de formulação tem sido utilizada por Belytschko (1980), Fenves e Vargas-Loli (1988). Estas formulações mostram-se servir melhor para casos de escoamentos viscosos compressíveis no qual a solução acústica é apenas um caso especial, segundo Abboud (1990).

4. Formulações Mistas Escalar - Escalar ou Eulerianas Mistas

O uso de uma abordagem variacional para tratar problemas lineares e conservativos asseguram a simetria do sistema matricial. Jeanpierre *et al* (1979) e Morand e Ohayon (1979) introduziram a formulação mista de pressão e potencial de deslocamento do tipo acoplamento - de - massa (\bar{u}, p, π) aplicado a problemas de valores próprios em sistemas acoplados internos juntamente com técnicas de subestruturação. A formulação mista do tipo acoplamento - de - massa foi estendida para problemas interiores por Combescure *et al* (1980) derivando o desenvolvimento via multiplicadores de Lagrange.

A formulação do tipo acoplamento - de - rigidez (\bar{u}, p, π) foi deduzida inicialmente a problemas internos e apresenta a possibilidade do estudo do caso estático. Em Felippa e Ohayon (1990), todas as formulações mistas tratadas acima foram derivadas das especificações obtidas de um princípio conservativo geral.

Olson e Bathe (1985) acrescentou à formulação em potencial de velocidade para problemas internos empregando a pressão hidrostática representada por um único grau de liberdade por elemento fluido para tratar o caso estático. A adição desta variável resulta num sistema simétrico mas com termos de acoplamento aparecendo na matriz "giroscópica" e na matriz de rigidez.

Nesta categoria de formulação, destacam-se as contribuições nacionais de Pavanello e Henry (1989), Galli e Pavanello (1993), Casas e Pavanello (1996), Barbosa (1998), Barbosa e Pedroso (1997), Barbosa e Pedroso (1998), Pedroso (1998), Pedroso e Morais (1999a, 1999b), Morais e Pedroso (2000), Pedroso (2000), e Pedroso *et al* (2000), no estudo de problemas fluido-estrutura para as formulações escalares simples e mistas.

1.4 OBJETIVOS

Este trabalho trata-se do estudo de problemas acoplados fluido-estrutura por uma formulação com descrição Lagrangeana para o sólido e Euleriana para o fluido através do método dos elementos finitos (MEF). Utiliza-se elementos triangulares bidimensionais do estado plano para a estrutura e triangulares lineares para o fluido para resolver problemas acoplados simples. Este problema é solucionado no domínio do tempo e da frequência através de implementações computacionais.

Formula-se o princípio variacional geral para problemas fluido-estrutura que consideram a interação entre estruturas e fluido com comportamento dissipativo valendo-se do formalismo de Morse e Feshbach (1953). Porém, neste primeiro enfoque, a estrutura possui comportamento elástico linear, e o fluido é compressível, irrotacional, invíscido e sujeito a pequenas oscilações a partir de uma condição de equilíbrio estático inicial (problema acústico). Usando por base os trabalhos de Gibert (1988), Abboud (1990) e Morand e Ohayon (1995), a formulação mista $(\bar{u}, p, \pi, \bar{\eta})$ escolhida representa o sólido por seus deslocamentos, e o fluido por variáveis de pressão, de potencial de deslocamento e pela elevação da superfície livre.

Após primeira variação do princípio variacional e a aplicação da técnica dos elementos finitos, as matrizes do sistema acoplado resultantes são simétricas.

Dado as simplificações e simetria da formulação geral, bem como, a simplicidade dos problemas abordados, utiliza-se o algoritmo clássico de QZ para a solução de problemas de vibrações livre, e o método de Newmark para a análise no domínio do tempo.

Porém o problema apresenta matrizes muito esparsas e mal-condicionadas implicando em estudos para minimizar a instabilidade numérica através do balanceamento do sistema matricial.

Por fim, a implementação computacional é validada por problemas dinâmicos típicos simples com soluções analíticas desacopladas e/ou acopladas.

1.5 ORGANIZAÇÃO DA DISSERTAÇÃO

O corpo do trabalho foi subdividido em seis capítulos e três anexos.

No primeiro capítulo é constituído de uma pequena introdução acerca da problemática da interação fluido-estrutura. A colocação do problema descreve os diferentes tipos de fenômenos classificáveis como o acoplamento entre um meio sólido e um meio fluido. Em seguida, na revisão bibliográfica considera-se os desenvolvimentos numéricos mais importantes no último meio século e faz-se a tentativa de classificar os problemas acoplados a partir da representação dada ao fluido. E por fim, apresenta-se os objetivos do trabalho e sua organização.

O segundo capítulo é composto por aspectos iniciais do cálculo variacional os quais fundamentam as bases matemáticas necessárias para o entendimento do trabalho. E por fim, estuda-se a aplicação dos multiplicadores de Lagrange em princípios variacionais e o formalismo de Morse e Feshbach para o uso do cálculo variacional em problemas dissipativos.

No terceiro capítulo, formula-se os princípios variacionais dos domínios sólido e fluido. Desenvolve-se ainda o funcional do sistema acoplado através de multiplicadores de Lagrange. E após a primeira variação do problema e aplicação das funções interpoladoras da técnica dos elementos finitos, obtém-se o sistema matricial necessário para a implementação computacional.

No quarto capítulo, é discutido a solução computacional para os problemas de vibrações livres e de integração no tempo. No domínio da frequência, estuda-se as características das matrizes do problema acoplado para escolher o algoritmo de valores próprios mais adequado. E no domínio do tempo, avalia-se os métodos de integração no tempo e devido as suas características de estabilidade e precisão escolhe-se o método de Newmark. Ao final, estuda-se a aplicação da técnica de balanceamento nas matrizes acopladas para melhorar a estabilidade da solução computacional.

No quinto capítulo, encontram-se as aplicações usadas para a validação das implementações numéricas consideradas no trabalho. Apresenta-se no sexto e último capítulo as conclusões do trabalho e sugestões para a continuidade da pesquisa.

Por fim, nos apêndices estão desenvolvidos as soluções acopladas e desacopladas utilizadas no quinto capítulo.

CAPÍTULO 2

RUDIMENTOS DO CÁLCULO VARIACIONAL

2.1 INTRODUÇÃO

A integral,

$$I = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y') dx \quad (2.1)$$

é chamada de funcional e resulta numa quantidade - um número - quando x_1 e x_2 possuem valores constantes, e quando y for uma função de x . Cabe lembrar, que o termo **funcional** refere-se à funções de funções, ou seja, expressões que assumem determinados valores na dependência das funções usadas.

Este problema básico do cálculo variacional envolve a comparação de vários valores que a Eq.(2.1) pode assumir para as diferentes escolhas $y = y(x)$. Busca-se com isto uma função $y = y(x)$ que resulte no valor mínimo (ou máximo). Isto inclui a solução de problemas como os isoperimétricos (menor distância entre dois pontos numa dada superfície), os da baristócrona (curva que permite o percurso mais rápido entre dois pontos), entre outros.

Este ramo da matemática é uma potente ferramenta em diversas áreas, da Elasticidade à Mecânica dos Fluidos. Fundamentada nos problemas de máximo e mínimo do cálculo diferencial elementar, gerou por sua simplicidade uma intrincada rede de novos conhecimentos. Logo, buscou-se seu detalhamento e sistematização o mais didático possível, a partir Weinstock (1974) e Bezerra (1997), para compreensão do trabalho.

2.2 CONSIDERAÇÕES PRELIMINARES

Este item tem por intuito citar de forma sucinta os conhecimentos matemáticos elementares necessários ao bom entendimento dos capítulos posteriores.

2.2.1 Continuidade e diferenciabilidade discreta

Ao definir que a nomenclatura $x \rightarrow x_0^-$ e $x \rightarrow x_0^+$ representa x tendendo a x_0 pela direita e pela esquerda, respectivamente, e considerando-se apenas funções $f(x)$ no qual

ambos $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ existam para todo x_0 pertencente ao intervalo $x_1 \leq x \leq x_2$, bem como nos respectivos pontos extremos x_1 e x_2 , conforme Figura 2.1, tem-se que:

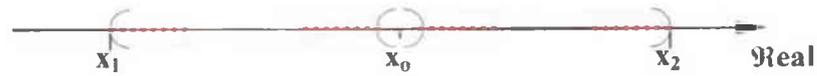


Figura 2.1 - Critério de continuidade em um intervalo.

- a) Se, para um ponto qualquer $x_1 \leq x_0 \leq x_2$, $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$, então $f(x)$ é **contínuo** em $x = x_0$; do contrário, $f(x)$ exibe uma **descontinuidade** neste ponto;
- b) Se $\lim_{x \rightarrow x_1^+} f(x) = f(x_1)$, então $f(x)$ é **contínuo** no ponto extremo esquerdo $x = x_1$; caso contrário, $f(x)$ exibe uma **descontinuidade** em $x = x_1$. De forma análoga, obtém-se uma definição equivalente para o lado direito no ponto $x = x_2$; e,
- c) Logo, uma função $f(x)$ qualquer será contínua, se e somente se, as prescrições acima forem respeitadas. Todavia, uma função é dita **discretamente contínua** num intervalo se este possui no máximo um número finito de descontinuidades.

Uma função é dita diferenciável em $x = x_0$, se o limite de $x \rightarrow x_0$ da razão $\Delta f / \Delta x = [f(x) - f(x_0)] / [x - x_0]$ existe. Logo,

- d) Se $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \Delta f / \Delta x$ e $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \Delta f / \Delta x$ existem, a função $f(x)$ diz-se **diferenciável** pela direita e esquerda, respectivamente, em $x = x_0$.

Em concordância com os critérios supracitados, uma função é dita **discretamente diferenciável** no intervalo $x_1 \leq x \leq x_2$, se este for diferenciável pela direita e esquerda para todos os pontos interiores e os dois são iguais para todos.

2.2.2 Diferenciação total e parcial

Se $f = f(u_1, u_2, \dots, u_n)$, $u_1 = u_1(r, s, \dots, t)$, $u_2 = u_2(r, s, \dots, t)$, ..., $u_n = u_n(r, s, \dots, t)$, então:

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial u_2} \frac{\partial u_2}{\partial r} + \dots + \frac{\partial f}{\partial u_n} \frac{\partial u_n}{\partial r} \quad (2.2)$$

e a expressão (2.2) pode ser repetida para as outras variáveis u_1, u_2, \dots, u_n .

Se $f = f(u_1, u_2, \dots, u_n)$, $u_1 = u_1(t)$, $u_2 = u_2(t)$, ..., $u_n = u_n(t)$, então:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial u_1} \frac{du_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial u_2} \frac{du_2}{dt} + \dots + \frac{\partial f}{\partial u_n} \frac{du_n}{dt} \quad (2.3)$$

2.2.3 Diferenciação de uma integral

Se,

$$I = I(\varepsilon) = \int_{x_1(\varepsilon)}^{x_2(\varepsilon)} f(x, \varepsilon) dx \quad (2.4)$$

então,

$$\frac{dI}{d\varepsilon} = I'(\varepsilon) = f(x, \varepsilon) \frac{dx}{d\varepsilon} \Big|_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1(\varepsilon)}^{x_2(\varepsilon)} \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} dx \quad (2.5)$$

desde que, $(\partial f / \partial \varepsilon)$ seja uma função discretamente contínua para ε e x no intervalo $x_1 \leq x_0 \leq x_2$. No caso x_1 e x_2 serem constantes (independentes de ε), a expressão reduz-se ao termo final.

2.2.4 Integração por partes

Seja, f e g funções contínuas e discretamente diferenciáveis em $x_1 \leq x_0 \leq x_2$, tem-se:

$$\int_{x_1}^{x_2} g \frac{df}{dx} dx = gf \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} f \frac{dg}{dx} dx \quad (2.6)$$

2.2.5 Método dos multiplicadores de Lagrange

A condição necessária para $F(u_1, u_2, \dots, u_n)$ ter um mínimo (ou máximo), com respeito as variáveis u_1, u_2, \dots, u_n , é

$$\frac{\partial F^*}{\partial u_1} = \frac{\partial F^*}{\partial u_2} = \dots = \frac{\partial F^*}{\partial u_n} = 0 \quad (2.7)$$

onde $F^* = F + \sum_{i=1}^n \bar{\lambda}_i G_i$, deve satisfazer as seguintes restrições,

$$G_i(u_1, u_2, \dots, u_n) = c_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (2.8)$$

sendo c_i constantes conhecidas.

Os significados das constantes $\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \dots, \bar{\lambda}_n$, chamadas de multiplicadores de Lagrange, são avaliadas em função das variáveis de maximização (ou minimização) u_1, u_2, \dots, u_n , através da manipulação do campo de Eqs.(2.7) e (2.8).

2.2.6 Expansão de Taylor para funções de várias variáveis

Se, na vizinhança de (x_0, y_0, \dots, z_0) , $F(x, y, \dots, z)$ possui derivadas parciais de ordem

N com respeito a todas as combinações das variáveis x, y, \dots, z , obtém-se a seguinte expansão nesta vizinhança:

$$\begin{aligned}
 F(x, y, \dots, z) &= \\
 &= F(x_0, y_0, \dots, z_0) + \frac{1}{1!} \left(\xi \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial y} + \dots + \zeta \frac{\partial}{\partial z} \right) F \Big|_0 + \\
 &+ \frac{1}{2!} \left(\xi \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial y} + \dots + \zeta \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 F \Big|_0 + \dots + \frac{1}{N!} \left(\xi \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial y} + \dots + \zeta \frac{\partial}{\partial z} \right)^N F \Big|_0
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
 F(x, y, \dots, z) &= \\
 &= F(x_0, y_0, \dots, z_0) + \frac{1}{1!} \left(\xi \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial y} + \dots + \zeta \frac{\partial}{\partial z} \right) F \Big|_0 + \\
 &+ \frac{1}{2!} \left(\xi^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \eta^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \dots + \zeta^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} + 2\xi\eta \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \dots + 2\xi\zeta \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} + \dots \right) F \Big|_0 + \dots + \\
 &+ \frac{1}{N!} \left(\xi \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial y} + \dots + \zeta \frac{\partial}{\partial z} \right)^N F \Big|_0
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

onde, $\xi = x - x_0$, $\eta = y - y_0$, ... $\zeta = z - z_0$. O subscrito 0 implica na avaliação das derivadas em $x = x_0$, $y = y_0$, ... , $z = z_0$.

2.2.7 Derivada normal

A integração de linha de contorno convexos Γ no plano xy envolve frequentemente o conceito da **derivada normal** definida por,

$$\lim_{\Delta \bar{n} \rightarrow 0} \frac{w(x, y) - w(x', y')}{\Delta \bar{n}} = \frac{\partial w}{\partial \bar{n}} \tag{2.11}$$

onde, $w(x, y)$ refere-se a equação do contorno Γ , (x, y) repousa sobre Γ , (x', y') está na área definida por Γ sobre a normal desenhada para Γ em (x, y) , e $\Delta \bar{n}$ é a distância de (x', y') a (x, y) medida ao longo da normal, conforme Figura 2.2.

Uma relação útil é,

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{n}} = \nabla w \cdot \bar{n} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{dy}{ds} - \frac{\partial w}{\partial y} \frac{dx}{ds} \tag{2.12}$$

onde (dy/ds) e (dx/ds) são computadas em relação ao contorno Γ .

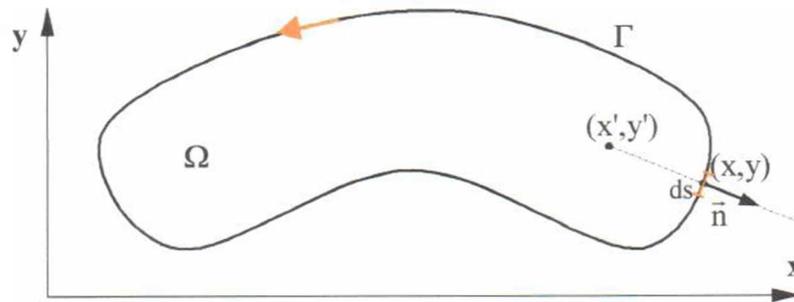


Figura 2.2 - Definição de domínio Ω , contorno Γ e da derivada normal.

2.2.8 Teorema de Green - problemas bidimensionais

Considera-se um domínio Ω no plano xy cujo o contorno é uma curva fechada Γ composta de um número finito de arcos suaves, conforme Figura 2.2. A integral de linha é executada ao longo de Γ de forma que um observador caminhando sobre o contorno Γ mantém o domínio Ω sempre a sua direita.

Se $P(x,y)$ e $Q(x,y)$ são contínuos para todo o domínio Ω e discretamente contínuos para o contorno Γ , e se Ω pode ser subdividido num número finito de sub-domínios, no qual cada uma das primeiras derivadas de P e Q são contínuas, então:

$$\iint_{\Omega} \left(\frac{dP}{dx} + \frac{dQ}{dy} \right) dx dy = \int_{\Gamma} (Pdy - Qdx) \quad (2.13)$$

a) Ao definir $P = \tau G$ e $Q = \tau F$ em (2.13), obtém-se o análogo bidimensional da integração por partes,

$$\iint_{\Omega} \left(G \frac{d\tau}{dx} + F \frac{d\tau}{dy} \right) dx dy = - \iint_{\Omega} \left(\tau \frac{dG}{dx} + \tau \frac{dF}{dy} \right) dx dy + \int_{\Gamma} \tau (Gdy - Fdx) \quad (2.14)$$

b) Sendo $\tau = \psi$, $G = \partial\psi/\partial x$, e $F = \partial\psi/\partial y$ na (2.14) e com o auxílio da Eq.(2.12), a expressão resulta em,

$$\iint_{\Omega} (\psi \nabla^2 \phi) dx dy = - \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{\partial\phi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y} \frac{\partial\phi}{\partial y} \right) dx dy + \int_{\Gamma} \psi \frac{\partial\phi}{\partial n} ds \quad (2.15)$$

Um caso especial de (2.15) observa-se ao assumir $\psi = \phi$.

c) Pela troca de ψ por ϕ em (2.15) e subtraindo o resultado por (2.15) obtém-se a Equação de Green.

$$\iint_{\Omega} (\psi \nabla^2 \phi - \phi \nabla^2 \psi) dx dy = \int \left(\psi \frac{\partial \phi}{\partial \bar{n}} - \phi \frac{\partial \psi}{\partial \bar{n}} \right) ds \quad (2.16)$$

d) Ao fixar $Q = 0$ e $P = [G (\partial \tau / \partial x) - \tau (\partial G / \partial x)]$ em (2.13) obtemos:

$$\iint_{\Omega} G \frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} dx dy = \iint_{\Omega} \tau \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} dx dy + \int \left(G \frac{\partial \tau}{\partial x} - \tau \frac{\partial G}{\partial x} \right) dy \quad (2.17)$$

Além disto, de forma análoga,

$$\iint_{\Omega} G \frac{\partial^2 \tau}{\partial y^2} dx dy = \iint_{\Omega} \tau \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} dx dy - \int \left(G \frac{\partial \tau}{\partial y} - \tau \frac{\partial G}{\partial y} \right) dy \quad (2.18)$$

e) Obtém-se finalmente, ao definir $P = \frac{1}{2}[G \partial \tau / \partial y - \tau \partial G / \partial y]$ e $Q = \frac{1}{2}[G \partial \tau / \partial x - \tau \partial G / \partial x]$ em (2.13), obtém-se finalmente:

$$\iint_{\Omega} G \frac{\partial^2 \tau}{\partial x \partial y} dx dy = \iint_{\Omega} \tau \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{1}{2} \int \left(G \frac{\partial \tau}{\partial y} - \tau \frac{\partial G}{\partial y} \right) dy - \frac{1}{2} \int \left(G \frac{\partial \tau}{\partial x} - \tau \frac{\partial G}{\partial x} \right) dx \quad (2.19)$$

2.3 LEMA BÁSICO

Neste trabalho será empregado uma ou outra variação do seguinte lema básico:

Definição: Se x_1 e x_2 ($x_2 > x_1$) são constantes fixas e $G(x)$ é uma função qualquer contínua no intervalo $[x_1, x_2]$, e se:

$$\int_{x_1}^{x_2} \tau(x) G(x) dx = 0 \quad (2.20)$$

para qualquer função continuamente diferenciável $\tau(x)$ escolhida, no qual,

$$\tau(x_1) = \tau(x_2) = 0 \quad (2.21)$$

Conclui-se que:

$$\therefore G(x) = 0 \quad \text{para } x_2 \leq x \leq x_1 \quad (2.22)$$

Prova: A verificação deste lema pode ser efetuada através de uma demonstração por absurdo negando a conclusão (2.22) e, ao final da dedução, comprovar a existência de ao menos uma função possível $\tau(x)$ no qual a Eq.(2.20) é violada para uma função $G(x) \neq 0$. Logo, sendo $G(x)$ uma função contínua, supõem-se que exista um intervalo $x'_1 \leq x' \leq x'_2$ no qual $G(x) > 0$.

Ao considerar a função $\tau(x)$ definida por:

$$\tau(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x_1 \leq x' \leq x'_1 \\ (x - x'_1)^2 (x - x'_2)^2 & \text{para } x'_1 \leq x \leq x'_2 \\ 0 & \text{para } x'_2 \leq x \leq x_2 \end{cases} \quad (2.23)$$

tem-se que esta satisfaz condição (2.21) e é uma função discretamente diferenciável. Logo, a integral (2.20) torna-se:

$$\int_{x_1}^{x_2} \tau(x)G(x)dx = \int_{x'_1}^{x'_2} (x - x'_1)^2 (x - x'_2)^2 G(x)dx \quad (2.24)$$

No intervalo $x'_1 \leq x' \leq x'_2$, a função $G(x)$ é positiva, por hipótese, e por conseguinte o lado direito da expressão (2.24) é positiva, determinando-se assim, uma violação da hipótese expressa pela Eq.(2.20). Desta forma, encontrou-se o "absurdo" na hipótese de $G(x) \neq 0$.

A escolha de uma função $G(x) < 0$, de modo análogo, leva a mesma contradição forçando-nos a afirmar que a única opção de $G(x)$ é ser nula.

a) Algumas aplicações do lema básico requerem mais de uma forma restritiva. Exige-se, por exemplo, que a integral (2.20) seja nula para funções contínuas $\tau(x)$ duas vezes diferenciável. Esta prova é uma seqüência da anterior substituindo apenas a função elevada ao quadrado pelo cubo.

b) Da mesma forma, ao tratar um domínio Ω bidimensional, a integral de área abaixo,

$$\int_{\Omega} \tau(x,y)G(x,y)d\Omega = 0 \quad (2.25)$$

onde $\tau(x,y)$ é uma função contínua qualquer e anula-se no contorno Γ , se a função $G(x,y)$ for identicamente nula e contínua no domínio Ω .

2.4 EQUAÇÃO DE EULER-LAGRANGE

As soluções de problemas de minimização ou maximização correspondem a uma área da matemática cuja principal pergunta é em simples palavras a seguinte:

Qual função num determinado intervalo minimiza (ou maximiza) uma ou mais características de um problema?

Buscando um maior formalismo para a pergunta acima, estabelece-se o seguinte questionamento principal do cálculo variacional:

Encontrar a função $y = y(x)$ contínua e duas vezes diferenciável discretamente contínua que satisfaça a condição $y_1 = y(x_1)$ e $y_2 = y(x_2)$ e minimize (ou maximize) a integral,

$$I = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y') dx \quad (2.26)$$

Disto observa-se que são dados do problema as constantes x_1 , y_1 , x_2 e y_2 e a função $f = f(x, y, y')$ duas vezes diferenciável. Logo, assumindo $y(x)$ por mínimo da Eq.(2.26), procede-se a formação de uma família de funções $Y(x)$, definida por,

$$Y(x) = y(x) + \delta y = y(x) + \varepsilon \tau(x) \quad (2.27)$$

onde, $\delta y = \varepsilon \tau(x)$ e $\tau(x)$ é uma função arbitrária no qual,

$$\tau(x_1) = \tau(x_2) = 0 \quad (2.28)$$

e, ε consiste no parâmetro de variação desta família de funções.

Assim, as expressões (2.27) e (2.28) asseguram a minimização (ou maximização) do problema. O valor de ε , para uma função $\tau(x)$ qualquer, designa um único membro desta família de funções. Logo, o caráter essencial da Eq.(2.27) repousa na impossibilidade de haver na família de funções $Y(x)$ uma outra expressão para alcançar o objetivo de minimizar a integral (2.26) que não seja $y = y(x)$ ($\varepsilon = 0$).

Enquanto, (2.28) estabelece a condição $Y(x_1) = y(x_1) = y_1$ e $Y(x_2) = y(x_2) = y_2$, ou seja, todas as funções variantes respeitam a exigência de pontos extremos fixos. Desta forma, todos os termos integrados que saem fora pela integração por parte são necessariamente nulos e estabelecem no máximo condições de contorno essenciais ou naturais para o problema.

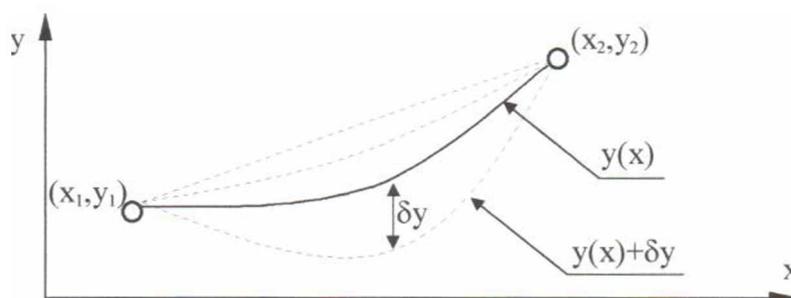


Figura 2.3 - Representação da família de funções $Y(x)$.

De forma geométrica, todos estes conceitos podem ser representados na Figura 2.3, onde uma família de funções $Y(x)$ está conectada aos pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) , e cujo arco mínimo $y = y(x)$ é um dos membros desta família - um caso particular - para $\varepsilon = 0$.

Substituindo y e y' da Eq.(2.26), por $Y(x)$ e $Y'(x)$, tem-se,

$$I(\varepsilon) = \int_{x_1}^{x_2} f(x, Y, Y') dx \quad (2.29)$$

onde a integral I é função de ε . O argumento Y' é expresso por:

$$Y'(x) = y'(x) + \delta y' = y'(x) + \varepsilon \tau'(x) \quad (2.30)$$

Nota-se, ao atribuir a $\varepsilon = 0$, que Y e Y' tornam-se equivalentes a y e y' , respectivamente. Desta forma, integral (2.29) encontra o ponto de mínimo e observa-se a não importância na escolha de $\tau(x)$. A função $\varepsilon \tau(x)$ passa a ser interpretada como um perturbação ou variação¹ δy da função mínimo $y(x)$. Logo, a nova notação altera a Eq.(2.29) da seguinte forma,

$$I(\delta y) = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y + \delta y, y' + \delta y') dx \quad (2.31)$$

Esta condição de mínimo

$$I(\varepsilon = 0) = 0 \quad (2.32)$$

é necessária porém não é suficiente para minimizar o funcional I . Do cálculo diferencial ordinário, o mínimo (ou máximo) de uma função está associado ao ponto de inflexão da curva que é identificável por meio da raiz da derivada da função.

Mas já que o funcional I pode ser extremizado pela variação de um único parâmetro ε , desenvolve-se o funcional I por séries de potência da seguinte forma:

$$I = I|_{\varepsilon=0} + \frac{1}{1!} \frac{dI}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \cdot \varepsilon + \frac{1}{2!} \frac{d^2 I}{d\varepsilon^2} \Big|_{\varepsilon=0} \cdot \varepsilon^2 + \dots + \mathcal{O}_n(\varepsilon^n) \quad (2.33)$$

Para que o funcional I seja um extremo para $\varepsilon = 0$, pelas considerações do cálculo diferencial na determinação de mínimos e máximos de funções, faz-se necessário,

¹ Com este conceito cunhou-se o nome cálculo variacional ou das variações desta área da matemática.

$$\left. \frac{dI}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = 0 \quad (2.34)$$

Esta condição é denominada **primeira variação** do funcional I. Contudo, esta ainda não é suficiente, pois apenas determina a existência de uma inflexão na curva sem estabelecer se este ponto consiste num ponto de mínimo, máximo ou de sela. Logo, para se determinar com exatidão o ponto de mínimo, tem-se que a **segunda variação** do funcional I deve ser:

$$\left. \frac{d^2 I}{d\varepsilon^2} \right|_{\varepsilon=0} > 0 \quad (2.35)$$

No caso de problemas de mecânica dos meios contínuos a serem estudados neste trabalho, a condição (2.35) está previamente atendida.

Logo, ao expandir por séries de Taylor a Eq.(2.29), temos:

$$\frac{dI}{d\varepsilon} = I'(\varepsilon) = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial f}{\partial Y'} \frac{\partial Y'}{\partial \varepsilon} \right] dx = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial Y} \tau + \frac{\partial f}{\partial Y'} \tau' \right] dx = 0 \quad (2.36)$$

Já que $(Y, Y') = (y, y')$ para $\varepsilon = 0$, então

$$I'(0) = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} \tau + \frac{\partial f}{\partial y'} \tau' \right] dx = 0 \quad (2.37)$$

Através da integração por partes, o segundo termo desta integral torna-se,

$$I'(0) = \tau \frac{\partial f}{\partial y'} \Big|_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right] \tau dx = 0 \quad (2.38)$$

O primeiro termo é nulo por definição, Eq.(2.28), e valendo-se do lema básico, Eq.(2.20), conclui-se que o termo entre parênteses é:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0 \quad (2.39)$$

sendo $\tau(x)$ uma função qualquer.

2.5 OPERADOR VARIACIONAL OU DELTA δ

No item anterior e na Figura 2.2, apresentou-se os rudimentos do operador linear variacional ou Delta δ . Uma definição mais formal deste operador é,

$$\delta y = \delta y(x) = Y(x) - y(x) \quad (2.40)$$

significando uma pequena variação na função $y(x)$, ou seja, para um determinado intervalo $[x_1, x_2]$, o operador δy pode ser interpretado como a distância entre as curvas $Y(x)$ e $y(x)$ para um mesmo x e nos extremos do intervalo estudado vale a seguinte expressão:

$$\delta y(x_1) = \delta y(x_2) = 0 \quad (2.41)$$

Como todo operador linear, o operador variacional ou Delta satisfaz as seguintes propriedades:

$$(a) \quad \delta[y_1 + y_2] = [Y_1(x) - y_1(x)] + [Y_2(x) - y_2(x)] \quad (2.42)$$

$$(b) \quad \delta[\alpha y_1] = \alpha [Y_1(x) - y_1(x)] \quad (2.43)$$

bem como as propriedades de comutatividade com os operadores derivada e integral,

$$(c) \quad \delta y'_1 = \delta \left(\frac{dy_1}{dx} \right) = \frac{d}{dx} (\delta y_1) \quad (2.44)$$

$$(d) \quad \int \delta y_1 dx = \delta \left(\int y_1 dx \right) \quad (2.45)$$

onde y_1 e y_2 são duas funções distintas e α é uma constante real.

2.5.1 Dedução alternativa da equação de Euler-Lagrange

Com o intuito de observar as vantagens do operador δ no cálculo variacional, repete-se o procedimento adotado no item 2.4. Para tanto, desenvolvendo o funcional I , Eq.(2.29), em séries de Taylor em torno de x , y e y' , tem-se:

$$\begin{aligned} I(x, Y, Y') &= I(x, y + \delta y, y' + \delta y') = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y + \delta y, y' + \delta y') dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx + \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{\partial F}{\partial y} (y + \delta y - y) + \frac{\partial F}{\partial y'} (y' + \delta y' - y') \right\} dx + \mathcal{O}_2(\delta y) \end{aligned} \quad (2.46)$$

Após algumas manipulações algébricas e integrando por partes o segundo termo da última integral, obtém-se,

$$\Delta I = I(x, y + \delta y, y' + \delta y') - I(x, y, y') = \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y \Big|_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{\partial F}{\partial y} \delta y - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right\} \delta y dx + \mathcal{O}_2(\delta y) \quad (2.47)$$

Segundo a Eq.(2.41), o termo $[(\partial F/\partial y')\delta y]$ é nulo e resulta na seguinte expressão:

$$\Delta I = \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{\partial F}{\partial y} \delta y - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right\} \delta y dx + \mathcal{O}_2(\delta y) \quad (2.48)$$

Na busca do mínimo da Eq.(2.29), sabe-se de antemão que o primeiro termo da Eq.(2.48) é análogo à condição de derivada nula no cálculo diferencial. Desta forma, o funcional I , Eq.(2.26), é dito estacionário quando for satisfeita a expressão abaixo,

$$\delta^{(1)}I = \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right\} \delta y dx = 0 \quad (2.49)$$

idêntica a expressão (2.39). Tanto a família de funções $\epsilon\eta(x)$ quanto o operador Delta $\delta y(x)$ chegam ao mesmo resultado, porém este operador variacional mostra-se mais prático para solução de alguns problemas.

2.6 MINIMIZAÇÃO DE FUNCIONAL DE MUITAS VARIÁVEIS SOB DETERMINADAS RESTRIÇÕES

Neste item, procede-se a minimização de funcional dependentes a mais de uma variável sujeita a um campo de restrições compostas por um grupo de equações quaisquer. Estas restrições consistem num grupo de funções algébricas, diferenciais, ou da combinação de ambas.

O funcional I a ser tratado possui a seguinte forma:

$$I = \int_{x_1}^{x_2} F(u_1, u_2, \dots, u_k, u'_1, u'_2, \dots, u'_k, t) dx \quad (2.50)$$

onde u_1, u_2, \dots, u_k são funções continuamente diferenciáveis no intervalo $[x_1, x_2]$, e o campo de restrições a ser satisfeito é dadas por,

$$G_j(u_1, u_2, \dots, u_k, u'_1, u'_2, \dots, u'_k, x) = 0 \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, N < k \quad (2.51)$$

Estabelece-se uma perturbação $\delta u_i(t)$ nas funções $u_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, k$). Logo,

$$U_1(x) = u_1(x) + \delta u_1(x), \quad U_2(x) = u_2(x) + \delta u_2(x), \quad \dots, \quad U_k(x) = u_k(x) + \delta u_k(x) \quad (2.52)$$

onde as perturbações $\delta u_1(x), \delta u_2(x), \dots, \delta u_k(x)$ respeitam as restrições impostas pela Eq.(2.41), ou seja,

$$\delta u_i(x_1) = \delta u_i(x_2) = 0 \quad , \text{ para } i = 1, 2, \dots, k \quad (2.53)$$

Logo, ao efetuar uma pequena perturbação δu_i ($i = 1, 2, \dots, k$) nas Eqs.(2.50 e 51), obtém-se,

$$I = \int_{x_1}^{x_2} F(u_1 + \delta u_1, u_2 + \delta u_2, \dots, u_k + \delta u_k, u'_1 + \delta u'_1, u'_2 + \delta u'_2, \dots, u'_k + \delta u'_k, t) dx \quad (2.54)$$

e,

$$G_j(u_1 + \delta u_1, u_2 + \delta u_2, \dots, u_k + \delta u_k, u'_1 + \delta u'_1, u'_2 + \delta u'_2, \dots, u'_k + \delta u'_k) = 0 \quad (2.55)$$

, para $j = 1, 2, \dots, N < k$

Repetindo a metodologia do item anterior, expande-se o funcional (2.54) por séries de Taylor, e após algumas manipulações algébricas a primeira variação do funcional I é:

$$\delta^{(1)}I = \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{\partial f}{\partial u_1} \delta u_1 + \frac{\partial f}{\partial u'_1} \delta u'_1 + \frac{\partial f}{\partial u_2} \delta u_2 + \frac{\partial f}{\partial u'_2} \delta u'_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial u_k} \delta u_k + \frac{\partial f}{\partial u'_k} \delta u'_k \right\} dx \quad (2.56)$$

Deste ponto em diante não é possível continuar a metodologia conforme apresentada no item 2.5, pois há mútua dependência entre as funções $\delta u_1, \delta u_2, \dots, \delta u_k$, expresso pela Eq.(2.55). Logo, através da expansão de Taylor e após algumas manipulações algébricas, a Eq.(2.55) toma a seguinte expressão,

$$\delta G_j = \frac{\partial G_j}{\partial u_1} \delta u_1 + \frac{\partial G_j}{\partial u'_1} \delta u'_1 + \frac{\partial G_j}{\partial u_2} \delta u_2 + \frac{\partial G_j}{\partial u'_2} \delta u'_2 + \dots + \frac{\partial G_j}{\partial u_k} \delta u_k + \frac{\partial G_j}{\partial u'_k} \delta u'_k = 0 \quad (2.57)$$

, para $j = 1, 2, \dots, N < k$

O produto entre δG_j do sistema (2.57) e os multiplicadores de Lagrange $\bar{\lambda}_j(x)$, para $j = 1, 2, \dots, N$, que integrados em relação x e somados a Eq.(2.56), resulta em,

$$\delta^{(1)}I^* = \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \left[\frac{\partial F}{\partial u_1} + \sum_{j=1}^N \bar{\lambda}_j \frac{\partial G_j}{\partial u_1} \right] \delta u_1 + \left[\frac{\partial F}{\partial u'_1} + \sum_{j=1}^N \bar{\lambda}_j \frac{\partial G_j}{\partial u'_1} \right] \delta u'_1 + \dots \right. \quad (2.58)$$

$$\left. + \left[\frac{\partial F}{\partial u_k} + \sum_{j=1}^N \bar{\lambda}_j \frac{\partial G_j}{\partial u_k} \right] \delta u_k + \left[\frac{\partial F}{\partial u'_k} + \sum_{j=1}^N \bar{\lambda}_j \frac{\partial G_j}{\partial u'_k} \right] \delta u'_k \right\} dx = 0$$

Logo,

$$\delta^{(1)}I^* = \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{\partial F^*}{\partial u_1} \delta u_1 + \frac{\partial F^*}{\partial u'_1} \delta u'_1 + \frac{\partial F^*}{\partial u_1} \delta u_1 + \frac{\partial F^*}{\partial u'_1} \delta u'_1 + \dots + \frac{\partial F^*}{\partial u_k} \delta u_k + \frac{\partial F^*}{\partial u'_k} \delta u'_k \right\} dx = 0 \quad (2.59)$$

onde $F^* = F + \sum_{j=1}^N \bar{\lambda}_j(x) G_j$. E, integrando por partes a Eq.(2.59) com o auxílio de (2.53), obtém-se,

$$\int_1^2 \left\{ \left[\frac{\partial F^*}{\partial u_1} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F^*}{\partial u'_1} \right) \right] \delta u'_1 + \left[\frac{\partial F^*}{\partial u'_2} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F^*}{\partial u'_2} \right) \right] \delta u'_2 + \dots + \left[\frac{\partial F^*}{\partial u'_k} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F^*}{\partial u'_k} \right) \right] \delta u'_k \right\} dx = 0 \quad (2.60)$$

Porém, devido ao campo de N equações expresso na Eq.(2.55), não se pode considerar as k funções $\delta u_1, \delta u_2, \dots, \delta u_k$ como sendo livres para uma escolha arbitrária. De fato, existem alguns subcampos de N ($< k$) destas funções dependentes das funções restantes ($k - N$). Supõem-se que $\delta u_1, \delta u_2, \dots, \delta u_N$ é um campo de perturbações cuja dependência devido às escolhas arbitrárias de $\delta u_{N+1}, \delta u_{N+2}, \dots, \delta u_k$ são governadas pela Eq.(2.55). Neste ponto, com o desenvolvimento da Eq.(2.60), é determinado o campo de multiplicadores $\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \dots, \bar{\lambda}_N$ que torne nulo as perturbações $\delta u_1, \delta u_2, \dots, \delta u_N$ no integrando (2.60), ou seja,

$$\frac{\partial F^*}{\partial u_j} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F^*}{\partial u'_j} \right) = 0 \quad , \text{ para } j=1,2,\dots,N \quad (2.61)$$

Com a escolha de todos os multiplicadores $\bar{\lambda}_j$, lê-se (2.60) da seguinte forma:

$$\int_1^2 \left\{ \left[\frac{\partial F^*}{\partial u_{N+1}} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F^*}{\partial u'_{N+1}} \right) \right] \delta u'_{N+1} + \left[\frac{\partial F^*}{\partial u'_{N+2}} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F^*}{\partial u'_{N+2}} \right) \right] \delta u'_{N+2} + \dots + \left[\frac{\partial F^*}{\partial u'_k} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F^*}{\partial u'_k} \right) \right] \delta u'_k \right\} dx = 0 \quad (2.62)$$

E, já que as perturbação $\delta u_{N+1}, \delta u_{N+2}, \dots, \delta u_k$ são arbitrárias, é possível estabelecer num caso especial, no qual a perturbação δu_1 é qualquer, enquanto $\delta u_2, \dots, \delta u_k$ são nulos. Logo,

$$\frac{\partial F^*}{\partial u_j} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F^*}{\partial u'_j} \right) = 0 \quad , \text{ para } j = N+1, N+2, \dots, k \quad (2.63)$$

Assim, combinando as expressões (2.61) e (2.63), tem-se que as k funções u_1, u_2, \dots, u_k satisfazem o sistema de k equações de Euler-Lagrange,

$$\frac{\partial F^*}{\partial u_1} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F^*}{\partial u_1'} \right) = 0, \quad \frac{\partial F^*}{\partial u_2} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F^*}{\partial u_2'} \right) = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial F^*}{\partial u_k} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F^*}{\partial u_k'} \right) = 0 \quad (2.64)$$

2.7 SISTEMAS DISSIPATIVOS

A seguir, será introduzido o formalismo que permitirá tratar sobre sistemas dissipativos (i.e., em sólidos com comportamento viscoelástico, fluidos viscosos ou com a condição de radiação de Sommerfeld). Este formalismo para sistemas dissipativos foi a princípio introduzido por Morse e Feshback (1953). O "truque" está em considerar, simultaneamente com um Sistema com Amortecimento Positivo (S.A.P.), um outro Sistema dinâmico "espelho" com Amortecimento Negativo (S.A.N.), no qual a energia gerada no S.A.N. será drenada pelo sistema dissipativo S.A.P. Desta forma, a energia total conserva-se, e pode-se formular um funcional de Lagrange conservativo.

Um exemplo bem conhecido é o oscilador amortecido (um sistema dinâmico simples de um grau de liberdade) expresso com a seguinte equação de movimento,

$$m\ddot{X}_s - d\dot{X}_s + kX_s = 0 \quad (2.65)$$

Deseja-se obter para esta equação sua correspondente função de Lagrange pelo uso de técnicas variacionais. Logo, segue-se a proposta do sistema "espelho", tem-se:

$$m\ddot{X}_s^* - d\dot{X}_s^* + kX_s^* = 0 \quad (2.66)$$

Logo, soma-se o resultado da multiplicação das Eqs.(2.65) e (2.66) pelos campos de deslocamento virtuais δX_s^* e δX_s , respectivamente, e a integra no intervalo de tempo $[t_1; t_2]$, cujo resultado é a equação de Euler-Lagrange do sistema conservativo \mathcal{L} ,

$$\delta \mathcal{L}' = \int_{t_1}^{t_2} \delta \mathcal{L} dt \quad \Rightarrow \quad \therefore \delta \mathcal{L} = (m\ddot{X}_s - d\dot{X}_s + kX_s) \delta x^* + (m\ddot{X}_s^* - d\dot{X}_s^* + kX_s^*) \delta x \quad (2.67)$$

Integra-se por partes a Eq.(2.67),

$$\delta \mathcal{L} = (-m\dot{X}_s \delta \dot{X}_s^* + d\dot{X}_s \delta X_s^* + kX_s \delta X_s^*) + (-m\dot{X}_s^* \delta \dot{X}_s - d\dot{X}_s^* \delta X_s + kX_s^* \delta X_s) \quad (2.68)$$

Logo, o funcional \mathcal{L} destes dois sistemas correspondente a primeira variação $\delta \mathcal{L}$ será,

$$\mathcal{L} = -2m\dot{X}_s \dot{X}_s^* - d(\dot{X}_s^* X_s - X_s \dot{X}_s^*) + 2kX_s X_s^* \quad (2.69)$$

E sem alterar em nada o problema, o funcional \mathcal{L} pode ser rescrito da seguinte forma,

$$\mathcal{L}' = -\mathcal{L}/2 = m\dot{X}_s\dot{X}_s^* - \frac{1}{2}d(\dot{X}_s X_s^* - X_s \dot{X}_s^*) - kX_s X_s^* \quad (2.70)$$

Para transformar o funcional acima num hamiltoniano, é necessário definir para os dois sistemas dinâmicos as expressões de *momenta*, ou seja,

$$p = m\dot{X}_s^* - \frac{1}{2}dX_s^* \quad \text{e} \quad p^* = m\dot{X}_s + \frac{1}{2}dX_s \quad (2.71)$$

onde, $\mathcal{L} = p\dot{X}_s + kX_s X_s^*$. Logo, o hamiltoniano de \mathcal{L} é:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= p\dot{X}_s + p^*\dot{X}_s^* - \mathcal{L} = m\dot{X}_s\dot{X}_s^* + kX_s X_s^* \\ \therefore \mathcal{H} &= \frac{1}{m} \left(p + \frac{1}{2}dX_s^* \right) \left(p^* - \frac{1}{2}dX_s \right) + kX_s X_s^* \end{aligned} \quad (2.72)$$

Na Eq.(2.72), pode-se observar algo semelhante a um sistema conservativo. Na medida em que o sistema dinâmico X_s^* , Eq.(2.66), gera energia, esta é consumida pelo sistema X_s , Eq.(2.65), mantendo o balanço de energia constante. Logo, através deste "truque", habilita-se ao cálculo variacional tratar de sistemas dissipativos como estes fossem conservativos.

CAPÍTULO 3

FORMULAÇÃO VARIACIONAL DO PROBLEMA DE INTERAÇÃO FLUIDO-ESTRUTURA

3.1 INTRODUÇÃO

Nesta dissertação, as bases da formulação variacional para o problema de interação fluido-estrutura são desenvolvidas pela abordagem Hamiltoniana. Apresenta-se o princípio variacional misto, mais especificamente, por variáveis do fluido de pressão p , de potencial de deslocamento π e pela elevação da superfície livre η .

A formulação de interação fluido-estrutura conduz a um problema acoplado entre as variáveis da estrutura e do fluido. A estrutura é representada pelo campo de deslocamentos (um sistema de variáveis), enquanto que o fluido acústico é representado por dois campos de incógnitas: o potencial de deslocamento ($\vec{u}_f = \nabla\pi$) e a pressão. A relação entre eles pode ser expressa pela avaliação do equilíbrio da quantidade de movimento, ou seja, $\nabla p + \rho_o \ddot{\vec{u}}_f = \nabla(p + \rho_o \ddot{\pi}) = 0 \Rightarrow p + \rho_o \ddot{\pi} = 0$.

Uma questão premente é se a dedução de um princípio variacional misto para o problema em questão faz-se necessário para obter uma solução por elementos finitos. A resposta é negativa; outros métodos matemáticos podem ser utilizados para a obtenção da forma fraca. A primeira abordagem por Zienkiewicz e Newton (1969) do problema baseou-se no método de Galerkin, e provou ser suficiente mesmo não apresentando simetria. Entretanto, a abordagem variacional utilizada neste trabalho apresenta as seguintes características:

- a) O princípio variacional misto é um caminho sistemático, racional e mais tradicional para a dedução de diversas formulações acopladas alternativas através da equação governante restringida por multiplicadores de Lagrange. Uma outra alternativa mais recente é o método dos resíduos ponderados que resultam em expressões equivalentes.
- b) A simetria do acoplamento fluido-estrutura é possível pela utilização de um princípio variacional.

- c) O uso de uma descrição mista no fluido mostrado a seguir resulta em um sistema de equações simétricas e computacionalmente convenientes.

A formulação de acoplamento fluido-estrutura apresenta em seu desenvolvimento a implementação de problemas não-conservativos pela dissipação por radiação e pelo comportamento viscoelástico na estrutura. Sabe-se que a introdução de termos dissipativos impede o uso do formalismo variacional de Hamilton destinado a sistemas dinâmicos conservativos. A fim de descrever de forma consistente a dissipação e ainda utilizar das vantagens de simetria do princípio variacional, será feito uso do conceito do sistema adjunto ou "espelho" associado ao formalismo variacional não-conservativo introduzido por Morse e Feshbach (1953), conforme a abordagem da seção 2.7.

O formalismo de Morse e Feshbach envolve o uso de um sistema adjunto "espelho" que gera energia ao mesmo tempo em que o sistema físico a dissipa. O sistema ampliado, composto pelo sistema físico e o adjunto, é conservativo e suas equações de movimento podem ser escritas sob a forma canônica de Hamilton. A primeira variação do funcional resultante das variáveis adjuntas, indicada por um asterisco ao longo desta dissertação, origina as equações de Euler-Lagrange governantes do problema físico, enquanto a variação com respeito as variáveis originais do problema produzem aquelas equações governantes do sistema adjunto.

O desenvolvimento variacional é empregado para obter o funcional que descreva o movimento de um sistema acoplado fluido-estrutura. Nota-se que apenas a forma fraca da equação governante do problema físico será discretizada, já que a discretização dos sistema "espelho" não é de nosso interesse.

O formalismo de Morse e Feshbach é apenas utilizado para assegurar o acoplamento simétrico aos vários campos de incógnitas do sistema físico, ou seja, visa garantir a compatibilidade da descrição energética nos diversos subsistemas envolvidos no problema acoplado. Na literatura, observa-se que o formalismo não-conservativo foi inicialmente aplicado a sistemas discretos, e em seguida estendido para problemas contínuos por Gladwell (1966) e Craggs (1971 e 1973) para problemas acústico-estruturais amortecidos.

Em suma, a proposta principal deste capítulo é desenvolver uma metodologia variacional a mais geral possível para a derivação da formulação para problemas transientes de interação fluido-estruturas dissipativos.

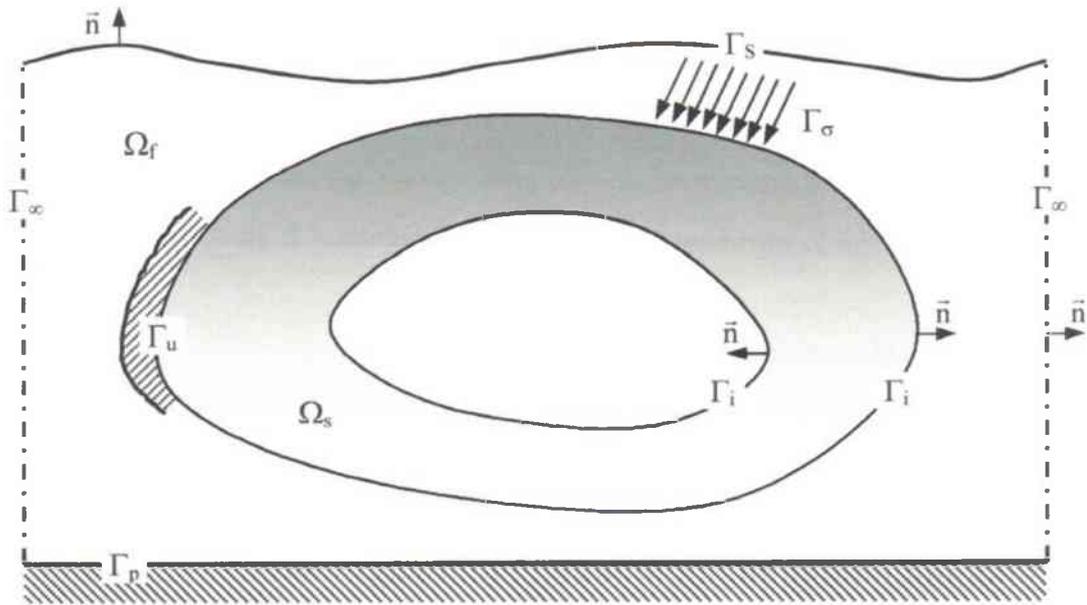


Figura 3.1 - Esquema do problema fluido-estrutura - domínios e contornos.

3.2 A ESTRUTURA

3.2.1 Equação de Movimento

Considera-se a estrutura ocupando um domínio Ω_s , conforme Figura 3.1. A forma diferencial ou forte deste problema de valores de contorno de equilíbrio de momento pode ser estabelecida como:

Encontrar o campo de deslocamento $\bar{u}(\bar{x}, t): \Omega_s \times I \mapsto \mathfrak{R}^2$, tal que:

$$\nabla \cdot \bar{\sigma} + \bar{b} = \rho_s \ddot{\bar{u}} \quad \text{em } \Omega_s \times I \quad (3.1)$$

sujeito a condição de contorno de deslocamento ou essencial:

$$\bar{u} = \bar{u}(\bar{x}, t) \quad \text{em } \Gamma_u \times I \quad (3.2)$$

e a condição de contorno de tração ou natural:

$$\bar{\sigma} \cdot \bar{n} = \bar{t}(\bar{x}, t) \quad \text{em } \Gamma_\sigma \times I \quad (3.3)$$

e, a condição de valor inicial:

$$\bar{u}(\bar{x}, t_0) = \bar{u}_0(\bar{x}) \quad \text{para } \bar{x} \in \Omega_s \quad (3.4)$$

$$\dot{\bar{u}}(\bar{x}, t_0) = \dot{\bar{u}}_0(\bar{x}) \quad \text{para } \bar{x} \in \Omega_s \quad (3.5)$$

onde, $\Gamma_u \cap \Gamma_\sigma = \emptyset$, $\Gamma_u \cup \Gamma_\sigma = \partial\Omega_s$, $\Omega_s \cap \partial\Omega_s = \bar{\Omega}_s$, $[t_0, t_1] = \bar{I}$, $]t_0, t_1[= I$, \bar{u} é o vetor de deslocamento da estrutura, $\bar{\sigma}$ o tensor de tensão, \bar{b} o vetor de força de corpo, ρ_s a densidade da estrutura, I o intervalo temporal em estudo, e \bar{n} o vetor normal exterior relativo ao contorno da estrutura $\partial\Omega_s$. O contorno de interação fluido-estrutura Γ_i , mostrado na Figura 3.1, será tratado mais adiante.

3.2.2 Equações Constitutivas Viscoelásticas

O comportamento de materiais viscoelásticos é essencialmente caracterizado pelo fato de que a corrente razão de fluência (*creep*) depende não apenas dos presentes estados de tensão e de deformação, mas do histórico de tensão e de deformação do material. Logo, o estado de tensão em um determinado ponto no tempo é representado pela integral de convolução (hereditária) sobre o histórico de deformação.

Um grande esforço tem sido perpetrado, nestes últimos 150 anos, desde os primeiros estudos de Maxwell em 1868, Meyer em 1874, Kelvin em 1875, e Voigt em 1889, acerca dos problemas viscoelásticos. A respeito da viscoelasticidade linear, a publicação de Flügge (1975) consegue realizar uma excelente sistematização do problema de forma ampla, consistente, mas complexa. Já, Malvern (1969) destaca-se por sua simplicidade com que ataca o assunto em seus escritos. Dentre os diversos pesquisadores da área, pode-se pontuar os trabalhos de Pinsky e Abboud (1989) e Abboud (1990) que tratam da aplicação da formulação viscoelástica linear em problemas de interação fluido-estrutura.

Elementos da Teoria Viscoelástica

Sobre as relações entre tensão e deformação, admite-se que os materiais sejam invíscidos, isto é, não exibem fenômenos de escoamento dependentes do tempo. Os pavimentos de asfalto, propelentes sólidos em motores de foguete, polímeros plásticos e concretos, assim como elementos de máquinas a elevadas temperaturas, deformam-se de modo gradual sob tensão mas não apresentam recuperação total. Algumas noções elementares sobre esse problema serão consideradas a seguir, para o estado de tensão uniaxial. Uma investigação mais completa sobre o assunto é feita na reologia.

Se para materiais elásticos, a tensão é dita uma função única da deformação, por outro lado, para materiais viscosos a tensão não depende apenas da deformação, mas também da velocidade com que ela ocorre. Isso se torna claro pelo exame dos modelos conceituais da Figura 3.2. Para a mola linear, a tensão é proporcional à deformação. Para

um modelo com líquido viscoso no amortecedor, quanto maior for a razão da deformação, maior a tensão necessária para manter o movimento decorrente da força aplicada. Para resumir, a taxa de deformação - derivada da deformação no tempo - será indicada por $\dot{\epsilon}$.

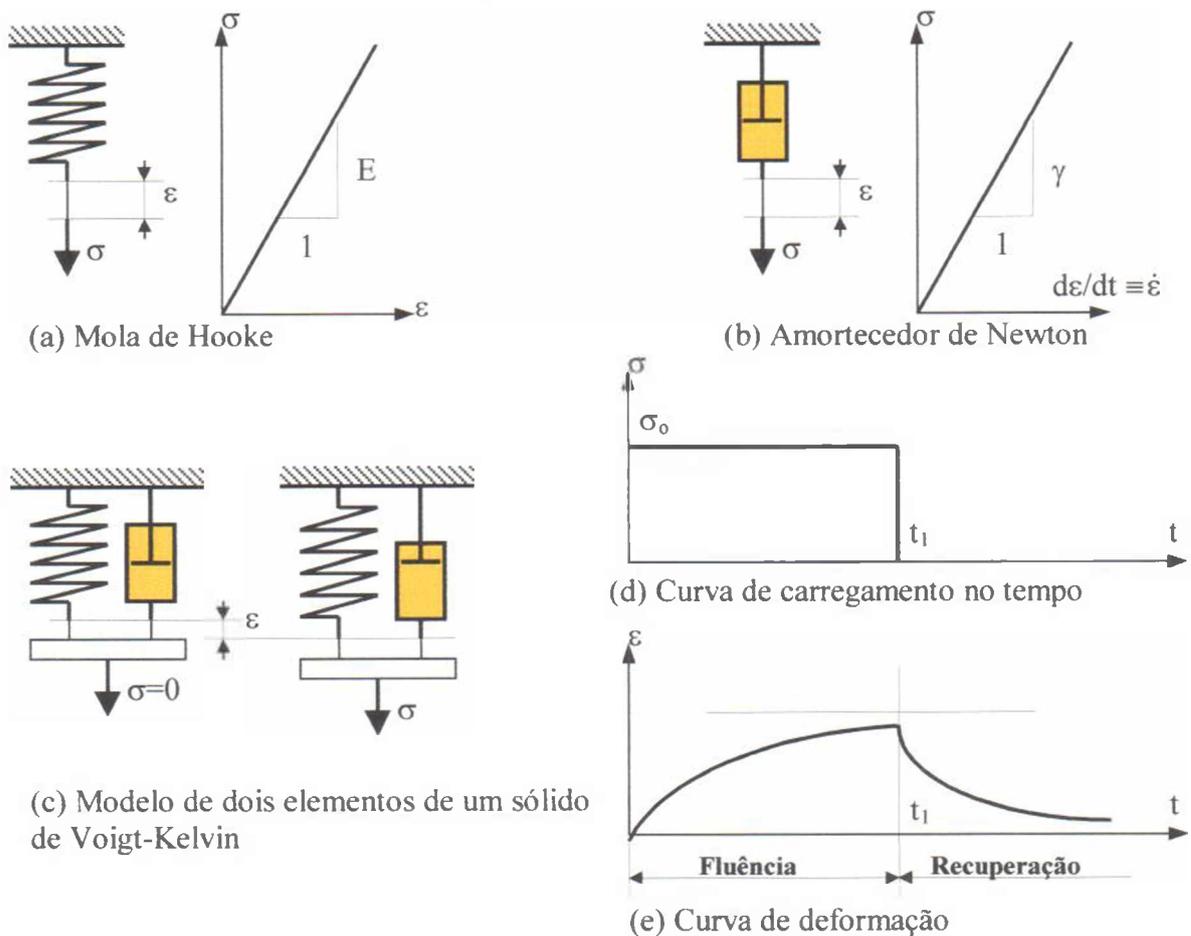


Figura 3.2 - Comportamento mecânico do sólido de Voigt-Kelvin. (modificado - Popov (1978))

Para um material elástico, $\sigma = \sigma(\epsilon)$; mas para um material viscoelástico, a tensão é função da deformação e da sua variação no tempo, $\sigma = \sigma(\epsilon, \dot{\epsilon})$. A relação mais simples destas quantidades para o modelo de Kelvin, Figura 3.2, pode ser escrita,

$$\sigma = E\epsilon + \gamma\dot{\epsilon} \quad (3.6)$$

onde, a constante γ é o coeficiente de viscosidade. O último termo relaciona linearmente a tensão com a razão da variação da deformação, como mostra a Figura 3.2(b). Se esse termo é nulo, retorna-se a lei de Hooke ordinária. O comportamento do material, descrito pela Eq.(3.6) está associado com os nomes de Voigt e Kelvin. Por essa razão, o material idealizado na Eq.(3.6) é referido como *sólido de Voigt-Kelvin*.

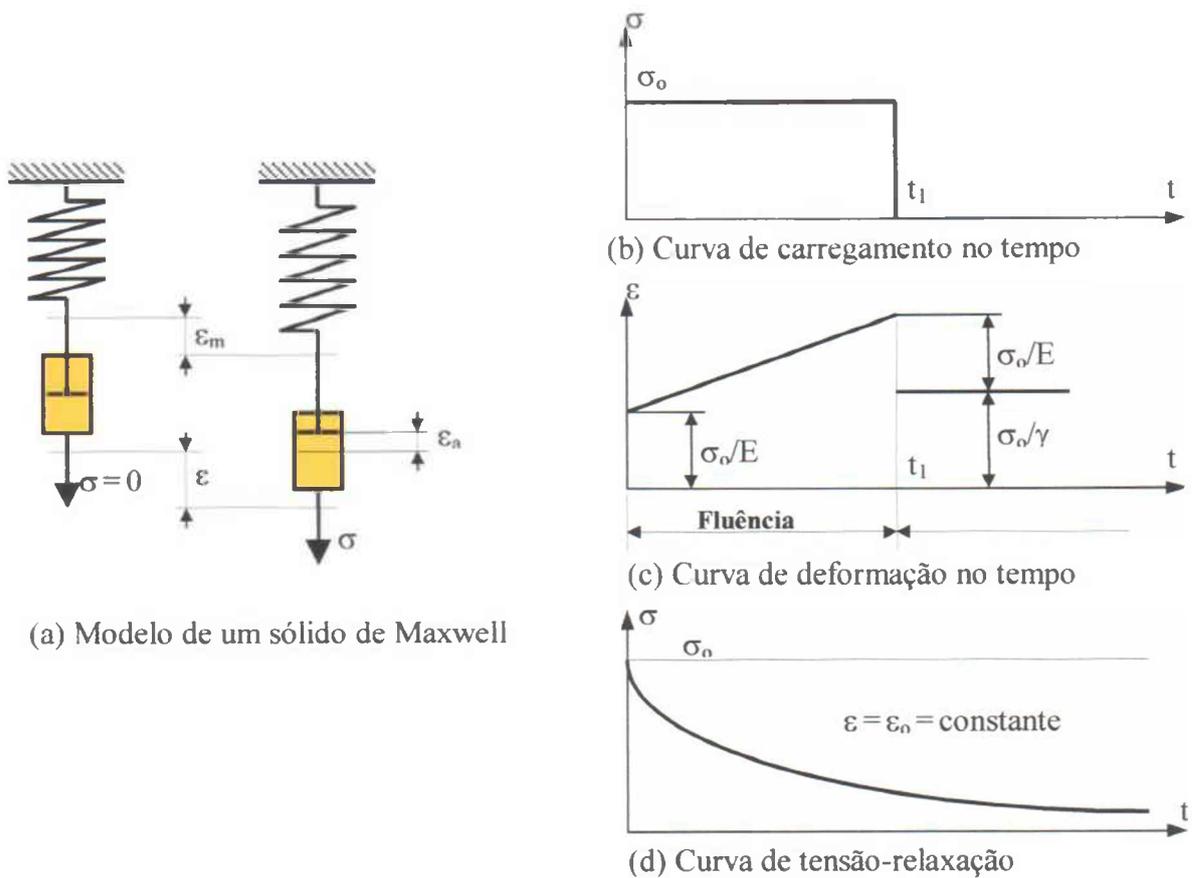


Figura 3.3 - Comportamento mecânico do sólido de Maxwell. (modificado - Popov (1978))

É conveniente introduzir um modelo conceitual para clarear o significado da Eq.(3.6). Tal modelo é obtido através de uma sistema mola-amortecedor em paralelo, Figura 3.2(c). Quando a tensão σ é aplicada, a mesma deformação é introduzida na mola e no amortecedor, isto é, $\epsilon_a = \epsilon_m = \epsilon$, onde os índices a , e m referem-se ao amortecedor e a mola, respectivamente. Logo, a tensão total $\sigma = \sigma_a + \sigma_m$, e usando a lei de Hooke e uma relação linear de tensão-taxa de deformação para o amortecedor newtoniano.

A solução acima mostra que o material de Voigt-Kelvin exibe uma resposta inelástica, e seu comportamento assemelha-se muito a de uma esponja elástica imersa num líquido viscoso, no qual o estágio final corresponde à carga sendo suportado pelo núcleo elástico. A experimentação mostra que este comportamento não é típico da maioria dos materiais. Já a combinação linear entre as taxas de variação de tensão e de deformação representa melhor materiais físicos.

Ao submeter um corpo a uma resposta elástica instantânea, juntamente com um deslocamento dependente do tempo, pode-se obter uma aproximação razoável do comportamento de muitos materiais viscoelásticos. O modelo mais simples com tais

propriedades pode ser visualizado pelo sistema mola-amortecedor combinado em série, Figura 3.3, denominado de *sólido de Maxwell*. No modelo da Figura 3.3(a), se uma tensão é aplicada, a tensão σ_a no amortecedor é a mesma aplicada em σ_m na mola. Por conseguinte, a deformação total do sistema será $\varepsilon = \varepsilon_a + \varepsilon_m$. A taxa de deformação deve ser derivada em relação ao tempo, porque nos materiais viscosos conhece-se apenas a ligação entre tensão e taxa de variação da deformação. Supondo E constante, tem-se a seguinte relação $\dot{\varepsilon} = \dot{\sigma}/E$ pela diferenciação no tempo. Adiciona-se as variações de deformação para os dois elementos, e após algumas manipulações algébricas obtém-se então a equação diferencial básica para a resposta do sólido de Maxwell:

$$\dot{\sigma} + (E/\gamma)\sigma = E\dot{\varepsilon} \quad (3.7)$$

Os procedimentos anteriores podem ser generalizados para vários outros materiais. Uma contribuição em série dos modelos de Maxwell e Voigt-Kelvin estabelece o modelo básico, o *sólido padrão*, para estudo de materiais viscoelásticos lineares. Outras combinações de molas e amortecedores com diferentes constantes foram efetivamente usadas para representar polímeros, fibras e concretos.

Formulação Dissipativa do Sólido (Viscoelásticos)

Dentre as diversas formulações viscoelásticas na literatura, estudou-se a proposta empírica de Clough (1993), que descreve o seguinte comportamento viscoelástico semelhante a relação tensão-deformação uniaxial da Eq.(3.6), ou seja

$$\bar{\sigma} = \bar{J}_1 : \bar{\varepsilon} + \bar{J}_2 : \dot{\bar{\varepsilon}} \quad (3.8a)$$

$$\bar{J}_1 = \bar{D} \quad \text{e} \quad \bar{J}_2 = \gamma \bar{D} \quad (3.8b)$$

onde \bar{D} é o tensor de tensões elástico e γ o coeficiente de viscosidade do material.

3.2.3 Lagrangeano da estrutura

Usando o formalismo de Morse e Feshbach, os Lagrangeanos do sistema real e do sistema adjunto são, respectivamente, expressos por $\mathcal{L}_s = \mathcal{F}_s - \mathcal{V}_s$ e $\mathcal{L}_s^* = \mathcal{F}_s^* - \mathcal{V}_s^*$, no qual \mathcal{F}_s é a energia cinética, \mathcal{V}_s é a energia potencial e o sobrescrito * diferencia o sistema adjunto do real. Logo,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_s = \mathcal{F}_s - \mathcal{V}_s = & \frac{1}{2} \int_{\Omega_s} \rho_s \dot{\bar{\mathbf{u}}} \cdot \dot{\bar{\mathbf{u}}}^* d\Omega - \frac{1}{2} \int_{\Omega_s} \bar{\boldsymbol{\sigma}} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^* d\Omega \\ & - \int_{\Omega_s} \bar{\mathbf{b}} \cdot \bar{\mathbf{u}}^* d\Omega - \int_{\Gamma_\sigma} \bar{\mathbf{t}} \cdot \bar{\mathbf{u}}^* d\Gamma \end{aligned} \quad (3.9a)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_s^* = \mathcal{F}_s^* - \mathcal{V}_s^* = & \frac{1}{2} \int_{\Omega_s} \rho_s \dot{\bar{\mathbf{u}}}^* \cdot \dot{\bar{\mathbf{u}}} d\Omega - \frac{1}{2} \int_{\Omega_s} \bar{\boldsymbol{\sigma}}^* : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} d\Omega \\ & - \int_{\Omega_s} \bar{\mathbf{b}}^* \cdot \bar{\mathbf{u}} d\Omega - \int_{\Gamma_\sigma} \bar{\mathbf{t}}^* \cdot \bar{\mathbf{u}} d\Gamma \end{aligned} \quad (3.9b)$$

onde o símbolo $:$ corresponde a operação de multiplicação tensorial, $\bar{\mathbf{u}}^*$ é o adjunto do vetor de deslocamento da estrutura $\bar{\mathbf{u}}$, $\bar{\mathbf{b}}^*$ é o adjunto do campo de forças de corpo da estrutura $\bar{\mathbf{b}}$, $\bar{\mathbf{t}}^*$ é o adjunto do vetor de trações externo $\bar{\mathbf{t}}$ aplicado sobre o contorno Γ_σ , e $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{2}(\bar{u}_{i,j} + \bar{u}_{j,i}) = \nabla \bar{\mathbf{u}}$. Admite-se que os campos de deslocamentos fisicamente admissíveis nos contornos do problema tanto no sistema físico quanto no adjunto ($\bar{\mathbf{u}} = \bar{\bar{\mathbf{u}}}$, $\bar{\mathbf{u}}^* = \bar{\bar{\mathbf{u}}}^*$). A contribuição do termo viscoso do sólido é fácil de ser obtida. A partir do formalismo de Morse e Feshbach e das Eqs.(3.9), as equações constitutivas viscoelásticas do sistema real e do adjunto são os seguintes:

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \bar{\mathbf{J}}_1 : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \bar{\mathbf{J}}_2 : \dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}} \quad \text{e} \quad \bar{\boldsymbol{\sigma}}^* = \bar{\mathbf{J}}_1 : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^* - \bar{\mathbf{J}}_2 : \dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}^* \quad (3.10)$$

onde, o termo viscoso do tensor de tensão adjunto $\bar{\boldsymbol{\sigma}}^*$, Eq.(3.10), é negativo para gerar a energia consumida pelo sistema real e manter todo o conjunto conservativo, isto já foi discutido em itens anteriores.

Desta forma, de posse dos lagrangeanos do sistema real e do adjunto e introduzindo as equações constitutivas viscoelásticas, o lagrangeano da estrutura é dado por:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_s' = \frac{\mathcal{L}_s + \mathcal{L}_s^*}{2} = & \frac{\mathcal{F}_s + \mathcal{F}_s^*}{2} - \frac{\mathcal{V}_s + \mathcal{V}_s^*}{2} = \\ \mathcal{L}_s' = & \frac{1}{2} \int_{\Omega_s} \rho_s \dot{\bar{\mathbf{u}}} \cdot \dot{\bar{\mathbf{u}}}^* d\Omega - \frac{1}{2} \int_{\Omega_s} (\nabla \bar{\mathbf{u}} : \bar{\mathbf{J}}_1 : \nabla \bar{\mathbf{u}}^*) d\Omega \\ & - \frac{1}{4} \int_{\Omega_s} (\nabla \dot{\bar{\mathbf{u}}} : \bar{\mathbf{J}}_2 : \nabla \dot{\bar{\mathbf{u}}}^* - \nabla \bar{\mathbf{u}} : \bar{\mathbf{J}}_2 : \nabla \dot{\bar{\mathbf{u}}}^*) d\Omega + \\ & - \frac{1}{2} \int_{\Omega_s} (\bar{\mathbf{b}} \cdot \bar{\mathbf{u}}^* + \bar{\mathbf{b}}^* \cdot \bar{\mathbf{u}}) d\Omega - \frac{1}{2} \int_{\Gamma_\sigma} (\bar{\mathbf{t}} \cdot \bar{\mathbf{u}}^* + \bar{\mathbf{t}}^* \cdot \bar{\mathbf{u}}) d\Gamma \end{aligned} \quad (3.11)$$

Logo, as equações de Euler-Lagrange encontradas pela variação de $\int_1^2 \mathcal{L}_s' dt$ com respeito ao adjunto \bar{u}^* corresponde a equação de movimento e as condições de contorno de força para a estrutura real no vácuo expressa em termos de deslocamentos \bar{u} .

3.3 O FLUIDO

3.3.1 Formulação do Fluido

Desde a primeira formulação de interação fluido-estrutura apresentada por Zienkiewicz e Newton (1969), diversas outras formulações fluido-estrutura tem sido propostas. Existe uma concordância na escolha dos deslocamentos como variável da estrutura dentre as diversas possibilidades de formulações. Há, contudo, bastante divergência quanto a representação do fluido, e é costumeiro tratá-las em quatro categorias distintas, conforme foi visto no primeiro capítulo.

Neste item será desenvolvida uma formulação do tipo mista escalar-escalar apresentada nos trabalhos de Morand e Ohayon (1979), Jeanpierre *et al* (1979) e Gibert (1988), ou seja, uma aplicação de potencial de pressão e deslocamento para análise transiente e modal para problemas de interação externa.

3.3.2 Equações Governantes para o Fluido

A aproximação acústica clássica para pequenos deslocamentos de um fluido invíscido e irrotacional admite como equações governantes:

$$\text{– Eq. de Quantidade de Movimento} \quad p + \rho_o \ddot{\pi} = 0 \quad \text{em } \Omega_f \quad (3.12)$$

$$\text{– Eq. de Continuidade} \quad \rho + \rho_o \nabla^2 \pi = 0 \quad \text{em } \Omega_f \quad (3.13)$$

$$\text{– Eq. de Estado} \quad p - c^2 \rho = 0 \quad \text{em } \Omega_f \quad (3.14)$$

onde π , p e ρ são, respectivamente, as variáveis de pequenas perturbações nos potenciais de deslocamento, pressão e densidade do fluido para um estado de referência não perturbado dos potenciais de deslocamento, pressão hidrostática $P_o \gg p$, e densidade constante $\rho_o \gg \rho$. A velocidade de propagação da onda é denominada c e assumida constante.

Substituindo a Eq.(3.14) em (3.13), elimina-se a densidade ρ do problema e as equações do campo fluido tornam-se:

$$p + \rho_0 \ddot{\pi} = 0 \quad \text{em } \Omega_f \quad (3.15)$$

$$p + \rho_0 c^2 \nabla^2 \pi = 0 \quad \text{em } \Omega_f \quad (3.16)$$

A eliminação das variáveis p , ou π , aplicando a Eq.(3.15) em (3.16), resulta na equação clássica da onda em função da variável remanescente, ou seja,

$$(1/\rho_0) \nabla^2 p - (1/\rho_0 c^2) \ddot{p} = 0 \quad \text{em } \Omega_f \quad (3.17)$$

ou,

$$(1/\rho_0) \nabla^2 \pi - (1/\rho_0 c^2) \ddot{\pi} = 0 \quad \text{em } \Omega_f \quad (3.18)$$

É fácil mostrar que a equação de onda realmente governa todas as variáveis termodinâmicas do problema, tais como o deslocamento, a densidade, a condensação, e não somente a pressão e o potencial de deslocamento. As equações governantes (3.15) e (3.16) serão utilizadas como base para representar o fluido na formulação variacional, a ser tratada no próximo item.

A forma diferencial ou forte do problema acústico também requer a especificação das condições de borda. O contorno fluido consiste de uma interface fluido-estrutura Γ_i , de um contorno de truncamento Γ_∞ , e um de superfície livre Γ_s .

A interface fluido-estrutura requer uma condição de contorno cinemática que forneça a compatibilidade entre o deslocamento normal Γ_i , e uma condição natural que efetue o equilíbrio das forças hidrodinâmicas:

$$\bar{u} \cdot \bar{n} = \nabla \pi \cdot \bar{n} \quad \text{em } \Gamma_i \quad (3.19)$$

$$\bar{\sigma} \cdot \bar{n} = -p \bar{n} = \rho_0 \ddot{\pi} \bar{n} \quad \text{em } \Gamma_i \quad (3.20)$$

onde \bar{n} é a normal externa a Ω_s , conforme Figura 3.1.

A superfície de truncagem Γ_∞ , necessita de uma condição tipo-Neumann de radiação ou infinita que estabeleça garantias para que toda perturbação ondulatória direcione-se somente para fora do domínio físico do problema. Toda oscilação acústica

deve ser absorvida em sua totalidade sem nenhum tipo de reflexão neste contorno. No trabalho, implementou-se a condição de radiação de Sommerfeld podendo assumir as seguintes formas:

$$S_m(\pi) = \nabla \pi \cdot \bar{n} = -\frac{1}{c} \dot{\pi} \quad \text{em } \Gamma_\infty \quad (3.21a)$$

$$S_m(p) = \nabla p \cdot \bar{n} = -\frac{1}{c} \dot{p} \quad \text{em } \Gamma_\infty \quad (3.21b)$$

onde \bar{n} é a normal direcionada para fora do contorno do fluido em Γ_∞ . Da mesma forma como nas equações constitutivas viscoelásticas do sólido (3.8), a condição de radiação introduz características dissipativas no sistema. Logo, o problema acústico adjunto é governado pelas mesmas equações diferenciais como no problema físico no domínio Ω_f e sobre a interface fluido-estrutura Γ_i , Eqs.(3.15) a (3.20), e pela condição de contorno sobre o contorno de truncamento Γ_∞ que assume as seguintes formas:

$$S_m^*(\pi^*) = \nabla \pi^* \cdot \bar{n} = +\frac{1}{c} \dot{\pi}^* \quad \text{em } \Gamma_\infty \quad (3.22a)$$

$$S_m^*(p^*) = \nabla p^* \cdot \bar{n} = +\frac{1}{c} \dot{p}^* \quad \text{em } \Gamma_\infty \quad (3.22b)$$

É possível ainda considerar uma condição de radiação alternativa para Γ_∞ . Aplicando a Eq.(3.15) nas expressões (3.21) e (3.22), obtém-se uma condição de Sommerfeld mista para o problema físico,

$$S_m(\dot{\pi}) = \nabla \dot{\pi} \cdot \bar{n} = \frac{1}{\rho_o c} p \quad \text{em } \Gamma_\infty \quad (3.23a)$$

$$S_m(p) = \nabla p \cdot \bar{n} = \frac{\rho_o}{c} \ddot{\pi} \quad \text{em } \Gamma_\infty \quad (3.23b)$$

e para o problema espelho,

$$S_m^*(\dot{\pi}^*) = \nabla \dot{\pi}^* \cdot \bar{n} = -\frac{1}{\rho_o c} p^* \quad \text{em } \Gamma_\infty \quad (3.24a)$$

$$S_m^*(p^*) = \nabla p^* \cdot \bar{n} = -\frac{\rho_o}{c} \ddot{\pi}^* \quad \text{em } \Gamma_\infty \quad (3.24b)$$

É conveniente lembrar, que existe uma variedade enorme de condições de radiação, e este assunto encontra-se nos trabalhos de Abboud (1990), Puppim-Macedo *et al* (1999) e Puppim-Macedo (1999), Pavanello e Zavalla (1999).

Para o contorno de superfície livre Γ_s , o efeito da gravidade é desprezível em cavidades fluida de grandes dimensões. Logo, a correspondente condição de contorno é:

$$p = \pi = 0 \quad \text{em } \Gamma_s \quad (3.25)$$

Quando o efeito de *sloshing* torna-se significativo, conforme anexo B, as expressões em função da pressão p , do potencial de deslocamento, e da elevação do nível η relativas a condição linearizada de superfície livre são:

$$\rho_o \ddot{\pi} = -\rho_o g \bar{\eta} \text{ e } \nabla \pi \cdot \bar{n} = -\frac{1}{g} \ddot{\pi} = \frac{1}{\rho_o g} p = \bar{\eta} \quad \text{em } \Gamma_s \quad (3.26a)$$

$$p = \rho_o g \bar{\eta} \text{ e } \nabla p \cdot \bar{n} = -\frac{1}{g} \ddot{p} = \frac{\rho_o}{g} \frac{\partial^4 \pi}{\partial t^4} = \rho_o \ddot{\eta} \quad \text{em } \Gamma_s \quad (3.26b)$$

onde g é aceleração da gravidade e para o sistema espelho o resultado é análogo.

3.3.3 Lagrangeano do fluido

Usando o formalismo de Morse e Feshbach para sistemas não-conservativos, as energia cinemática acústica \mathcal{F}'_f e da energia potencial do fluido \mathcal{U}'_s são expressos por,

$$\mathcal{L}'_f = \mathcal{F}'_f - \mathcal{U}'_f \quad (3.27)$$

onde,

$$\mathcal{F}'_f = \frac{1}{2} \int_{\Omega_f} \rho_o \nabla \dot{\pi} \cdot \nabla \dot{\pi}^* d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_s} [\rho_o \dot{\pi}^* \dot{\eta} + \rho_o \dot{\pi} \dot{\eta}^*] d\Gamma \quad (3.28)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{U}'_f = & \frac{1}{2} \int_{\Omega_f} \frac{1}{\rho_o c^2} p p^* d\Omega - \frac{1}{2} \int_{\Gamma_s} (p \bar{u}^* + p \bar{u}) \cdot \bar{n} d\Gamma \\ & + \frac{1}{4} \int_{\Gamma_s} (p S_m^*(\pi^*) + p^* S_m(\pi)) d\Gamma + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_s} [\rho_o g \bar{\eta} \cdot \bar{\eta}^*] d\Gamma \end{aligned} \quad (3.29)$$

e, p^* , π^* , η^* , e S_m^* são os correspondentes adjuntos de p , π , η , e S_m , respectivamente. A Eq.(3.28) é a soma da expressão clássica da energia potencial ou da parcela de rigidez de um fluido acústico, e da energia cinética conferida pela condição de superfície livre. Na segunda integral dc (3.29) refere-se ao trabalho efetuado pelos deslocamentos da estrutura

sobre Γ_i . Sob o ponto de vista das Eqs.(3.21a) e (3.22a), $S_m(\pi)$ e $S_m^*(\pi)$ podem ser interpretadas como os deslocamentos do fluido sobre o contorno Γ_∞ , logo a terceira integral de (3.29) é identificada como o trabalho efetuado por estes deslocamentos sobre Γ_∞ . A última integral de (3.29) refere-se ao trabalho da superfície livre devido a elevação da superfície Γ_s .

Sendo a energia cinética do fluido expressa em termos de π e π^* e a energia potencial escrita em sua totalidade com as variáveis de pressão p e p^* , a equação de equilíbrio da quantidade de movimento (3.15) precisa ser introduzida como uma restrição a fim de garantir o acoplamento entre este dois campos potenciais. Com a expressão do equilíbrio da quantidade de movimento, o lagrangeano do fluido $\mathcal{L}_T' = \mathcal{F}_T' - \mathcal{U}_T'$ é então dado por:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_T' = & \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[\rho_o \nabla \pi \cdot \nabla \pi^* - \frac{1}{\rho_o c^2} p p^* \right] d\Omega \\
 & + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_i} [p \bar{u}^* + p \bar{u}] \cdot \bar{n} d\Gamma \\
 & - \frac{1}{4} \int_{\Gamma_z} [p S_m^*(\pi^*) + p^* S_m(\pi)] d\Gamma \\
 & + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_s} [\rho_o \dot{\pi}^* \dot{\eta} + \rho_o \dot{\pi} \dot{\eta}^* - \rho_o g \bar{\eta} \cdot \bar{\eta}^*] d\Gamma \\
 & + \frac{1}{2} \int_{\Omega} [\bar{\lambda}_1 (p^* + \rho_o \ddot{\pi}^*) + \bar{\lambda}_1^* (p + \rho_o \ddot{\pi})] d\Omega \\
 & + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_1} [\bar{\lambda}_2 (p^* + \rho_o \ddot{\pi}^*) + \bar{\lambda}_2^* (p + \rho_o \ddot{\pi})] d\Gamma \\
 & + \frac{1}{4} \int_{\Gamma_x} [\bar{\lambda}_3 (p^* + \rho_o \ddot{\pi}^*) + \bar{\lambda}_3^* (p + \rho_o \ddot{\pi})] d\Gamma
 \end{aligned} \tag{3.30}$$

onde, $\bar{\lambda}_1$, $\bar{\lambda}_2$, $\bar{\lambda}_3$, e seus adjuntos $\bar{\lambda}_1^*$, $\bar{\lambda}_2^*$, $\bar{\lambda}_3^*$, são multiplicadores de Lagrange.

3.4 FORMULAÇÃO VARIACIONAL DO SISTEMA ACOPLADO

3.4.1 Identificação dos Multiplicadores de Lagrange

O funcional que governa o presente problema de acoplamento fluido-estrutura é formado pela combinação entre o lagrangeano da estrutura e do fluido como segue:

$$\mathfrak{I} = \int_1^2 (\mathcal{L}_s' - \mathcal{L}_f') dt \quad (3.31)$$

onde os lagrangeanos são subtraídos ao invés de somados devido a formulação do tipo-deslocamento adotada pela estrutura e a formulação do tipo-força no domínio fluido serem de naturezas complementares, Manson e Souza (1976) e Gladwell (1966).

O funcional resultante é assim expresso em termos de seis variáveis independentes $(\bar{u}, p, \pi, \eta, \bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \bar{\lambda}_3)$ e seus respectivos adjuntos $(\bar{u}^*, p^*, \pi^*, \eta^*, \bar{\lambda}_1^*, \bar{\lambda}_2^*, \bar{\lambda}_3^*)$. Seguindo o procedimento de funcionais com restrições - item 2.5 - para eliminar os multiplicadores de Lagrange, deriva-se o funcional misto com acoplamento de massa em função de (\bar{u}, p, π) e seus adjuntos $(\bar{u}^*, p^*, \pi^*, \eta^*)$. Este desenvolvimento segue a metodologia apresentada por Abboud (1990). Metodologias alternativas podem ser observadas na literatura, como o desenvolvimento adotado por Lius e Uras (1988) e Morand e Ohayon (1995) para problemas conservativos e internos.

Explicitando abaixo o funcional (3.31), tem-se:

$$\begin{aligned} \mathfrak{I} = & \int_1^2 \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega_s} \rho_s [\dot{\bar{u}} \cdot \dot{\bar{u}}^*] d\Omega - \frac{1}{2} \int_{\Omega_f} [\nabla \bar{u} : \bar{J}_1 : \nabla \bar{u}^*] d\Omega \right. \\ & - \frac{1}{4} \int_{\Omega_f} [\nabla \dot{\bar{u}} : \bar{J}_2 : \nabla \bar{u}^* - \nabla \bar{u} : \bar{J}_2 : \nabla \dot{\bar{u}}^*] d\Omega + \\ & - \frac{1}{2} \int_{\Omega_f} [\bar{b} \cdot \bar{u}^* + \bar{b}^* \cdot \bar{u}] d\Omega - \frac{1}{2} \int_{\Gamma} [\bar{t} \cdot \bar{u}^* + \bar{t}^* \cdot \bar{u}] d\Gamma \\ & - \frac{1}{2} \int_{\Omega_f} \left[\rho_o \nabla \pi \cdot \nabla \pi^* - \frac{1}{\rho_o c^2} p p^* \right] d\Omega \\ & - \frac{1}{2} \int_{\Gamma} [p \bar{u}^* + p^* \bar{u}] \cdot \bar{n} d\Gamma + \frac{1}{4} \int_{\Gamma} [p S_m(\pi^*) + p^* S_m(\pi)] d\Gamma \\ & \left. + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_s} [\rho_o \dot{\pi}^* \dot{\eta} + \rho_o \dot{\pi} \dot{\eta}^* - \rho_o g \bar{\eta} \cdot \bar{\eta}^*] d\Gamma \right\} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2} \int_{\Omega} [\bar{\lambda}_1(\mathbf{p}^* + \rho_o \ddot{\pi}^*) + \bar{\lambda}_1(\mathbf{p} + \rho_o \ddot{\pi})] d\Omega \\
& -\frac{1}{2} \int_{\Gamma} [\bar{\lambda}_2(\mathbf{p}^* + \rho_o \ddot{\pi}^*) + \bar{\lambda}_2(\mathbf{p} + \rho_o \ddot{\pi})] d\Gamma \\
& -\frac{1}{4} \int_{\Sigma} [\bar{\lambda}_3(\mathbf{p}^* + \rho_o \ddot{\pi}^*) + \bar{\lambda}_3(\mathbf{p} + \rho_o \ddot{\pi})] d\Gamma \Big\} dt
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Ao efetuar a primeira variação do problema, tem-se

$$\begin{aligned}
\delta \mathfrak{Z} = 0 = & \int_{\Omega} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho_s [\delta \dot{\mathbf{u}} \cdot \dot{\mathbf{u}}^* + \dot{\mathbf{u}} \cdot \delta \dot{\mathbf{u}}^*] d\Omega \right. \\
& -\frac{1}{2} \int_{\Omega} [\nabla \delta \bar{\mathbf{u}} : \bar{\mathbf{J}}_1 : \nabla \bar{\mathbf{u}}^* + \nabla \bar{\mathbf{u}} : \bar{\mathbf{J}}_1 : \nabla \delta \bar{\mathbf{u}}^*] d\Omega \\
& -\frac{1}{4} \int_{\Omega} [\nabla \delta \dot{\mathbf{u}} : \bar{\mathbf{J}}_2 : \nabla \dot{\mathbf{u}}^* + \nabla \dot{\mathbf{u}} : \bar{\mathbf{J}}_2 : \nabla \delta \dot{\mathbf{u}}^* - \nabla \delta \bar{\mathbf{u}} : \bar{\mathbf{J}}_2 : \nabla \dot{\mathbf{u}}^* - \nabla \bar{\mathbf{u}} : \bar{\mathbf{J}}_2 : \nabla \delta \dot{\mathbf{u}}^*] d\Omega + \\
& +\frac{1}{2} \int_{\Omega} [\bar{\mathbf{b}} \cdot \delta \bar{\mathbf{u}}^* + \bar{\mathbf{b}}^* \cdot \delta \bar{\mathbf{u}}] d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} [\bar{\mathbf{t}} \cdot \delta \bar{\mathbf{u}}^* + \bar{\mathbf{t}}^* \cdot \delta \bar{\mathbf{u}}] d\Gamma \\
& -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[\rho_o \nabla \delta \dot{\pi} \cdot \nabla \dot{\pi}^* + \rho_o \nabla \dot{\pi} \cdot \nabla \delta \dot{\pi}^* - \frac{1}{\rho_o c^2} \delta p \dot{p}^* - \frac{1}{\rho_o c^2} p \delta \dot{p}^* \right] d\Omega \\
& -\frac{1}{2} \int_{\Gamma} [\delta p \bar{\mathbf{u}}^* + p \delta \bar{\mathbf{u}}^* + \delta p^* \bar{\mathbf{u}} + p^* \delta \bar{\mathbf{u}}] \cdot \bar{\mathbf{n}} d\Gamma \\
& +\frac{1}{2} \int_{\Sigma} [\rho_o \delta \dot{\pi}^* \cdot \dot{\eta} + \rho_o \dot{\pi}^* \cdot \delta \dot{\eta} + \rho_o \delta \dot{\pi} \cdot \dot{\eta}^* + \rho_o \dot{\pi} \cdot \delta \dot{\eta}^* - \rho_o g \delta \bar{\eta} \cdot \bar{\eta}^* - \rho_o g \bar{\eta} \cdot \delta \bar{\eta}^*] d\Gamma \\
& +\frac{1}{4} \int_{\Sigma} [\delta p S_m^*(\pi^*) + p S_m^*(\delta \pi^*) + \delta p^* S_m(\pi) + p^* S_m(\delta \pi)] d\Gamma \\
& -\frac{1}{2} \int_{\Omega} [\delta \bar{\lambda}_1(\mathbf{p}^* + \rho_o \ddot{\pi}^*) + \bar{\lambda}_1(\delta p^* + \rho_o \delta \ddot{\pi}^*) + \delta \bar{\lambda}_1(\mathbf{p} + \rho_o \ddot{\pi}) + \bar{\lambda}_1(\delta p + \rho_o \delta \ddot{\pi})] d\Omega \\
& -\frac{1}{2} \int_{\Gamma} [\delta \bar{\lambda}_2(\mathbf{p}^* + \rho_o \ddot{\pi}^*) + \bar{\lambda}_2(\delta p^* + \rho_o \delta \ddot{\pi}^*) + \delta \bar{\lambda}_2(\mathbf{p} + \rho_o \ddot{\pi}) + \bar{\lambda}_2(\delta p + \rho_o \delta \ddot{\pi})] d\Gamma \\
& -\frac{1}{4} \int_{\Sigma} [\delta \bar{\lambda}_3(\mathbf{p}^* + \rho_o \ddot{\pi}^*) + \bar{\lambda}_3(\delta p^* + \rho_o \delta \ddot{\pi}^*) + \delta \bar{\lambda}_3(\mathbf{p} + \rho_o \ddot{\pi}) + \bar{\lambda}_3(\delta p + \rho_o \delta \ddot{\pi})] d\Gamma \Big\} dt
\end{aligned} \tag{3.33}$$

Com o teorema do divergente, Eq.(2.15), pode-se explicitar os termos onde a variação aparece diferenciada, e sabendo que,

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma} \int_{\Sigma} \delta p^* S_m(p) d\Gamma dt & = \int_{\Gamma} \int_{\Sigma} \delta p^* \left(-\frac{1}{c} \dot{p} \right) d\Gamma dt = -\frac{1}{c} p \delta p^* \Big|_{\Gamma} - \int_{\Gamma} \int_{\Sigma} p \left(-\frac{1}{c} \delta \dot{p}^* \right) d\Gamma dt \\
\therefore \int_{\Gamma} \int_{\Sigma} \delta p^* S_m(p) d\Gamma dt & = \int_{\Gamma} \int_{\Sigma} p S_m^*(\delta p^*) d\Gamma dt
\end{aligned} \tag{3.34}$$

A dedução para as variantes é análoga,

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \int_x \delta p^* S_m(\pi) d\Gamma dt &= \int_1^2 \int_x \phi S_m^*(\delta p^*) d\Gamma dt - \int_1^2 \int_x p^* S_m(\delta \pi) d\Gamma dt = \int_1^2 \int_x \delta \pi S_m^*(p^*) d\Gamma dt \\
\int_1^2 \int_x \delta \pi^* S_m(p) d\Gamma dt &= \int_1^2 \int_x p S_m^*(\delta \pi^*) d\Gamma dt - \int_1^2 \int_x \pi^* S_m(\delta p) d\Gamma dt = \int_1^2 \int_x \delta p S_m^*(\pi^*) d\Gamma dt
\end{aligned} \tag{3.35}$$

Logo, usando a integração por partes sobre os termos variantes diferenciados no tempo e agrupando os termos, a Eq.(3.33) toma a seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\delta \mathfrak{S} = & \int_1^2 \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[\delta \bar{u} \cdot (\nabla \cdot (\bar{J}_1 : \nabla \bar{u}^* - \bar{J}_2 : \nabla \dot{\bar{u}}^*)) + \bar{b}^* - \rho_s \ddot{\bar{u}}^* \right] + \right. \\
& \left. + \delta \bar{u}^* \cdot (\nabla \cdot (\bar{J}_1 : \nabla \bar{u} + \nabla \cdot (\bar{J}_2 : \nabla \dot{\bar{u}})) + \bar{b} - \rho_s \ddot{\bar{u}} \right] d\Omega \\
& + \frac{1}{2} \int_{\sigma} \left[\delta \bar{u} \cdot (\bar{t}^* - (\bar{J}_1 : \nabla \bar{u}^* - \bar{J}_2 : \nabla \dot{\bar{u}}^*) \cdot \bar{n}) + \delta \bar{u}^* \cdot (\bar{t} - (\bar{J}_1 : \nabla \bar{u} + \bar{J}_2 : \nabla \dot{\bar{u}}) \cdot \bar{n}) \right] d\Gamma \\
& - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[\rho_o \delta \pi \cdot (\ddot{\bar{\lambda}}_1 + \nabla^2 \ddot{\pi}^*) + \rho_o \delta \pi^* \cdot (\ddot{\bar{\lambda}}_1 + \nabla^2 \ddot{\pi}) \right. \\
& \left. + \delta p \left(\bar{\lambda}_1 - \frac{1}{\rho_o c^2} p^* \right) + \delta p^* \left(\bar{\lambda}_1 - \frac{1}{\rho_o c^2} p \right) \right. \\
& \left. + \delta \bar{\lambda}_1 (p^* + \rho_o \ddot{\pi}^*) + \delta \bar{\lambda}_1^* (p + \rho_o \ddot{\pi}) \right] d\Omega \\
& - \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \left[\delta \bar{u} \cdot (\bar{n} p^* + (\bar{J}_1 : \nabla \bar{u}^* - \bar{J}_2 : \nabla \dot{\bar{u}}^*) \cdot \bar{n}) + \delta \bar{u}^* \cdot (\bar{n} p + (\bar{J}_1 : \nabla \bar{u} + \bar{J}_2 : \nabla \dot{\bar{u}}) \cdot \bar{n}) \right. \\
& \left. + \rho_o \delta \pi \cdot (\ddot{\bar{\lambda}}_2 + \nabla \ddot{\pi}^* \cdot \bar{n}) + \rho_o \delta \pi^* \cdot (\ddot{\bar{\lambda}}_2 + \nabla \ddot{\pi} \cdot \bar{n}) \right. \\
& \left. + \delta p (\bar{\lambda}_2 + \bar{u}^* \cdot \bar{n}) + \delta p^* (\bar{\lambda}_2 + \bar{u} \cdot \bar{n}) \right. \\
& \left. + \delta \bar{\lambda}_2 (p^* + \rho_o \ddot{\pi}^*) + \delta \bar{\lambda}_2^* (p + \rho_o \ddot{\pi}) \right] d\Gamma \\
& - \frac{1}{4} \int_x \left[\rho_o \delta \pi (\ddot{\bar{\lambda}}_3 - 2 \nabla \ddot{\pi}^* \cdot \bar{n} - S_m^*(p^*/\rho_o)) \right. \\
& \left. + \rho_o \delta \pi^* (\ddot{\bar{\lambda}}_3 - 2 \nabla \ddot{\pi} \cdot \bar{n} - S_m(p/\rho_o)) \right. \\
& \left. + \delta p (\bar{\lambda}_3 - S_m^*(\pi^*)) + \delta p^* (\bar{\lambda}_3 - S_m(\pi)) \right. \\
& \left. + \delta \bar{\lambda}_3 (p^* + \rho_o \ddot{\pi}^*) + \delta \bar{\lambda}_3^* (p + \rho_o \ddot{\pi}) \right] d\Gamma \Big\} dt \\
& - \frac{1}{2} \int_s \left[\rho_o \delta \pi^* \ddot{\eta} + \rho_o \ddot{\pi}^* \delta \bar{\eta} + \rho_o \delta \pi \ddot{\eta} + \rho_o \ddot{\pi} \delta \bar{\eta} + \rho_o g \delta \bar{\eta} \cdot \bar{\eta}^* + \rho_o g \bar{\eta} \cdot \delta \bar{\eta}^* \right] d\Gamma \\
& - \frac{1}{2} \int_s \left[\delta \bar{\eta} (\rho_o \ddot{\pi}^* + \rho_o g \bar{\eta}^*) + \delta \bar{\eta}^* (\rho_o \ddot{\pi} + \rho_o g \bar{\eta}) + \right. \\
& \left. + \rho_o \delta \pi (\ddot{\eta}^* - \nabla \ddot{\pi}^* \cdot \bar{n}) + \rho_o \delta \pi^* (\ddot{\eta} - \nabla \ddot{\pi} \cdot \bar{n}) \right] d\Gamma
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[\frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[\rho_0 \delta \pi \cdot (\dot{\bar{\lambda}}_1 + \nabla^2 \dot{\pi}^*) + \rho_0 \delta \pi^* \cdot (\dot{\bar{\lambda}}_1 + \nabla^2 \dot{\pi}) \right] d\Omega \right. \\
& - \frac{1}{2} \int_{\Gamma_s} \left[\delta \bar{\eta} \cdot \rho_0 \dot{\pi}^* + \dot{\bar{\eta}} \cdot \rho_0 \delta \pi^* + \delta \bar{\eta}^* \cdot \rho_0 \dot{\pi} + \dot{\bar{\eta}}^* \cdot \rho_0 \delta \pi \right] d\Gamma \\
& + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \left[\rho_0 \delta \pi \cdot (\dot{\bar{\lambda}}_2 + \nabla \dot{\pi}^* \cdot \bar{\mathbf{n}}) + \rho_0 \delta \pi^* \cdot (\dot{\bar{\lambda}}_2 + \nabla \dot{\pi} \cdot \bar{\mathbf{n}}) \right] d\Gamma \\
& + \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \left[\rho_0 \delta \pi \left(\dot{\bar{\lambda}}_3 - 2 \nabla \dot{\pi}^* \cdot \bar{\mathbf{n}} - S_m^* \left(\int (p^* / \rho_0) dt \right) \right) \right. \\
& \left. + \rho_0 \delta \pi^* \left(\dot{\bar{\lambda}}_3 - 2 \nabla \dot{\pi} \cdot \bar{\mathbf{n}} - S_m \left(\int (p / \rho_0) dt \right) \right) \right] dt
\end{aligned} \tag{3.36}$$

onde,

$$\begin{cases} \delta \bar{\mathbf{u}} = \delta \bar{\mathbf{u}}^* = 0 \\ \delta \mathbf{p} = \delta \mathbf{p}^* = 0 \\ \delta \pi = \delta \pi^* = 0 \\ \delta \dot{\pi} = \delta \dot{\pi}^* = 0 \end{cases}, \quad \text{para } t = t_0 \text{ e } t = t_1 \tag{3.37}$$

O variacional resultante é tecnicamente um princípio variacional restrito, feito em parte pelas formas variacionais desenvolvidas em Jeanpierre *et al* (1979), Combescure *et al* (1980), Gibert (1988), Abboud (1990), Morand e Ohayon (1995) e Felippa e Ohayon (1990). A variação do funcional \mathfrak{I} em (3.36) finalizada resulta nas seguintes equações de Euler-Lagrange:

$$(\delta \mathbf{u}, \delta \mathbf{u}^*) \quad \nabla \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}}^* + \bar{\mathbf{b}}^* - \rho_s \ddot{\bar{\mathbf{u}}}^* = 0 \quad ; \quad \nabla \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}} + \bar{\mathbf{b}} - \rho_s \ddot{\bar{\mathbf{u}}} = 0 \quad \text{em } \Omega_s \tag{3.38}$$

$$(\delta \mathbf{u}, \delta \mathbf{u}^*) \quad \bar{\mathbf{t}}^* - \bar{\boldsymbol{\sigma}}^* \cdot \bar{\mathbf{n}} = 0 \quad ; \quad \bar{\mathbf{t}} - \bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \bar{\mathbf{n}} = 0 \quad \text{em } \Gamma_\sigma \tag{3.39}$$

$$(\delta \pi, \delta \pi^*) \quad \bar{\lambda}_1^* + \nabla^2 \pi^* = 0 \quad ; \quad \bar{\lambda}_1 + \nabla^2 \pi = 0 \quad \text{em } \Omega_f \tag{3.40}$$

$$(\delta \mathbf{p}, \delta \mathbf{p}^*) \quad \bar{\lambda}_1^* - \frac{1}{\rho_0 c^2} \mathbf{p}^* = 0 \quad ; \quad \bar{\lambda}_1 - \frac{1}{\rho_0 c^2} \mathbf{p} = 0 \quad \text{em } \Omega_f \tag{3.41}$$

$$(\delta \bar{\lambda}_1, \delta \bar{\lambda}_1^*) \quad \mathbf{p}^* + \rho_0 \ddot{\pi}^* = 0 \quad ; \quad \mathbf{p} + \rho_0 \ddot{\pi} = 0 \quad \text{em } \Omega_f \tag{3.42}$$

$$(\delta \mathbf{u}, \delta \mathbf{u}^*) \quad \bar{\mathbf{n}} \mathbf{p}^* + \bar{\boldsymbol{\sigma}}^* \cdot \bar{\mathbf{n}} = 0 \quad ; \quad \bar{\mathbf{n}} \mathbf{p} + \bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \bar{\mathbf{n}} = 0 \quad \text{em } \Gamma_i \tag{3.43}$$

$$(\delta \pi, \delta \pi^*) \quad \bar{\lambda}_2^* + \nabla \pi^* \cdot \bar{\mathbf{n}} = 0 \quad ; \quad \bar{\lambda}_2 + \nabla \pi \cdot \bar{\mathbf{n}} = 0 \quad \text{em } \Gamma_i \tag{3.44}$$

$$(\delta \mathbf{p}, \delta \mathbf{p}^*) \quad \bar{\lambda}_2^* + \bar{\mathbf{u}}^* \cdot \bar{\mathbf{n}} = 0 \quad ; \quad \bar{\lambda}_2 + \bar{\mathbf{u}} \cdot \bar{\mathbf{n}} = 0 \quad \text{em } \Gamma_i \tag{3.45}$$

$$(\delta \bar{\lambda}_2, \delta \bar{\lambda}_2^*) \quad \mathbf{p}^* + \rho_0 \ddot{\pi}^* = 0 \quad ; \quad \mathbf{p} + \rho_0 \ddot{\pi} = 0 \quad \text{em } \Gamma_i \tag{3.46}$$

$$(\delta\pi, \delta\pi^*) \quad \bar{\lambda}_3 - 2\nabla\pi^* \cdot \bar{n} - S_m^*(\hat{p}^*/\rho_o) = 0 \quad ; \quad \bar{\lambda}_3 - 2\nabla\pi \cdot \bar{n} - S_m(\hat{p}/\rho_o) = 0 \quad \text{em } \Gamma_\infty \quad (3.47)$$

$$(\delta p, \delta p^*) \quad \bar{\lambda}_3 - S_m^*(\pi^*) = 0 \quad ; \quad \bar{\lambda}_3 - S_m(\pi) = 0 \quad \text{em } \Gamma_\infty \quad (3.48)$$

$$(\delta\bar{\lambda}_3, \delta\bar{\lambda}_3^*) \quad p^* + \rho_o \ddot{\pi}^* = 0 \quad ; \quad p + \rho_o \ddot{\pi} = 0 \quad \text{em } \Gamma_\infty \quad (3.49)$$

$$(\delta\eta, \delta\eta^*) \quad \rho_o \ddot{\pi}^* + \rho_o g \bar{\eta}^* = 0 \quad ; \quad \rho_o \ddot{\pi} + \rho_o g \bar{\eta} = 0 \quad \text{em } \Gamma_s \quad (3.50)$$

$$(\delta\pi, \delta\pi^*) \quad \nabla^2 \pi^* \cdot \bar{n} - \ddot{\eta}^* = 0 \quad ; \quad \nabla^2 \pi \cdot \bar{n} - \ddot{\eta} = 0 \quad \text{em } \Gamma_s \quad (3.51)$$

Dentre as expressões apresentadas nas Eqs.(3.38) a (3.51), as explicitadas na terceira coluna são as equações de Euler-Lagrange do sistema físico devido à variação dos termos adjuntos δp^* , $\delta \pi^*$, e $\delta \eta^*$. As da segunda coluna são as referentes ao sistema "espelho" derivadas pela variação das variáveis físicas δp , $\delta \pi$, e $\delta \eta$. As equações que interessam para a análise do problema são as obtidas pela variação das variáveis adjuntas $(\delta u^*, \delta p^*, \delta \pi^*)$ na terceira coluna.

Introduzida na Eq.(3.47), a notação " $\hat{}$ " sobre as variáveis de campo indica uma integração no tempo. Logo,

$$\hat{p} = \int_1^2 p \, dt \quad ; \quad \hat{\hat{p}} = \int_1^2 \int_1^2 p \, dt \, dt \quad (3.52)$$

Logo, como pôde ser visto acima, os multiplicadores de Lagrange podem ser identificados pela satisfação de nulidade das equações de Euler-Lagrange emanadas das variações de δp e δp^* , de $\delta \pi$ e $\delta \pi^*$, e de $\delta \eta$ e $\delta \eta^*$. Assim, o resultado do princípio variacional restrito (3.32) gera dois tipos possíveis de variacionais mistos: por acoplamento - de - massa e por acoplamento - de - rigidez. Porém, neste trabalho será tratado apenas da formulação do tipo acoplamento - de - massa.

Na seqüência do capítulo, o princípio misto do tipo acoplamento - de - massa é derivado no item 3.4.2. Sua forma fraca e as equações de Euler-Lagrange que governam o problema físico estão detalhadas. Para tanto, necessita-se da definição precisa dos apropriados espaços variacionais para a solução aproximada e para as funções peso. Estes espaços são definidos como:

Funções Aproximadas

$$\mathcal{U} = \left\{ \bar{u}(\cdot, t) \mid \bar{u}(\bar{x}, t) = \bar{\bar{u}}(\bar{x}, t), \bar{x} \in \Gamma_u, \text{ e } \bar{u}(\cdot, t) \in C^0(\Omega_s) \right\} \quad (3.53)$$

$$\mathcal{P} = \left\{ p(\cdot, t) \mid p(\cdot, t) \in L^2(\Omega_f) \right\} \quad (3.54)$$

$$\mathcal{F} = \left\{ f(\cdot, t) \mid f(\cdot, t) \in H^1(\Omega_f) \right\} \quad (3.55)$$

$$\mathcal{E} = \left\{ e(\cdot, t) \mid e(\cdot, t) \in L^2(\Omega_f) \right\} \quad (3.56)$$

Funções Peso

$$\mathcal{W} = \left\{ \bar{w}(\bar{x}) \mid \bar{w}(\bar{x}) = 0, \bar{x} \in \Gamma_u, \text{ e } \bar{w}(\bar{x}) \in C^0(\Omega_s) \right\} \quad (3.57)$$

$$\mathcal{R} = \left\{ r(\bar{x}) \mid r(\bar{x}) \in L^2(\Omega_f) \right\} \quad (3.58)$$

$$\mathcal{G} = \left\{ g(\bar{x}) \mid g(\bar{x}) \in H^1(\Omega_f) \right\} \quad (3.59)$$

$$\mathcal{Z} = \left\{ z(\cdot, t) \mid z(\cdot, t) \in L^2(\Omega_f) \right\} \quad (3.60)$$

onde,

- $C^K(\Omega)$ é o conjunto de funções contínuas e cujas derivadas até a ordem K existem e são contínuas. Logo, o conjunto $C^0(\Omega)$ possui continuidade zero.
- Define-se como espaço de Hilbert o conjunto de funções que possuam produto interno. No método dos elementos finitos, visa-se espaço de funções quadrado integráveis,

$$L^2(\Omega) = \left\{ u \in L^2 \mid \int u^2 dx < +\infty \right\}$$

- Defini-se como espaço de Sobolev o espaço onde a função e suas derivadas de ordem K são quadrado integráveis,

$$H^K(\Omega) = \left\{ u \in H^K \mid u \in L^2 \text{ e } \frac{\partial^i u}{\partial x^i} \in L^2, \text{ para } i = 1, 2, \dots, K \right\}$$

3.4.2 Funcional de acoplamento - de - massa \mathfrak{I}_1

Uma vez determinados o significado dos multiplicadores de Lagrange para princípio variacional (3.32) a partir das equações de Euler-Lagrange de (3.38) a (3.51), optou-se pelas relações entre (u, p, π) e $(\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \bar{\lambda}_3)$ e seus adjuntos que emanam das variações δp , e δp^* . A condição de radiação é expressa, neste trabalho, sob na forma da condição de Sommerfeld em (3.21) e (3.22).

Variante 1 - Funcional \mathfrak{I}_{1-1}

Seguindo esta premissa e fazendo uso das expressões (3.21a) e (3.22a), tem-se:

$$\bar{\lambda}_1 = p^* / \rho_0 c^2 \quad ; \quad \bar{\lambda}_1 = p / \rho_0 c^2 \quad \text{em } \Omega_f \quad (3.61)$$

$$\bar{\lambda}_2 = -\bar{u}^* \cdot \bar{n} \quad ; \quad \bar{\lambda}_2 = -\bar{u} \cdot \bar{n} \quad \text{em } \Gamma_i \quad (3.62)$$

$$\bar{\lambda}_3 = S_m^*(\pi^*) = \dot{\pi}^* / c \quad ; \quad \bar{\lambda}_3 = S_m(\phi) = -\dot{\pi} / c \quad \text{em } \Gamma_\infty \quad (3.63)$$

Ao substituir em (3.32) as expressões acima, o funcional do tipo acoplamento - de - massa \mathfrak{I}_{1-1} resultante é dado por,

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{1-1} = & \int_1^2 \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega_s} \rho_s (\dot{u} \cdot \dot{u}^*) d\Omega \right. \\ & - \frac{1}{2} \int_{\Omega_s} (\nabla \bar{u} : \bar{J}_1 : \nabla \bar{u}^*) d\Omega - \frac{1}{4} \int_{\Omega_s} (\nabla \dot{u} : \bar{J}_2 : \nabla \dot{u}^* - \nabla \bar{u} : \bar{J}_2 : \nabla \dot{u}^*) d\Omega \\ & + \frac{1}{2} \int_{\Omega_s} [\bar{b} \cdot \bar{u}^* + \bar{b}^* \cdot \bar{u}] d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_s} [\bar{t} \cdot \bar{u}^* + \bar{t}^* \cdot \bar{u}] d\Gamma \\ & - \frac{1}{2} \int_{\Omega_f} \rho_0 (\nabla \dot{\pi} \cdot \nabla \dot{\pi}^*) d\Omega - \frac{1}{2} \int_{\Omega_f} \frac{1}{\rho_0 c^2} (p p^*) d\Omega \\ & + \frac{1}{2} \int_{\Omega_f} \frac{1}{c^2} (\dot{p} \dot{\pi}^* + \dot{p}^* \dot{\pi}) d\Omega \\ & + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_s} [\rho_0 \dot{\pi}^* \dot{\eta} + \rho_0 \dot{\pi} \dot{\eta}^* - \rho_0 g \bar{\eta} \cdot \bar{\eta}^*] d\Gamma \\ & \left. + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_i} \rho_0 (\bar{\pi} \bar{u}^* + \bar{\pi}^* \bar{u}) \cdot \bar{n} d\Gamma \right\} dt \end{aligned} \quad (3.64)$$

$$\mathfrak{I}_{1-1} = \mathcal{I}_{1-1} + \int_1^2 \left\{ \frac{1}{4} \int_{\Gamma_\infty} \frac{\rho_0}{c^2} [\dot{\pi} \dot{\pi}^* - \dot{\pi}^* \dot{\pi}] d\Gamma \right\} dt \quad (3.65)$$

A variação do funcional \mathfrak{I}_{1-1} com respeito às variáveis adjuntas $(\delta u^*, \delta p^*, \delta \pi^*)$ conduz a forma fraca e as equações de Euler-Lagrange do problema físico. Estas são mostradas nos Quadro 3.1.

Quadro 3.1: Forma Fraca do Funcional \mathfrak{I}_{1-1} .

Encontrar $(\bar{u}, p, \pi, \bar{\eta}) \in \mathcal{U} \times \mathcal{P} \times \mathcal{F} \times \mathcal{E}$ para o intervalo $t \in \bar{I} = [t_1, t_2]$, tal que, $(\delta \bar{u}^*, \delta p^*, \delta \pi^*, \delta \bar{\eta}^*) \in \mathcal{W} \times \mathcal{R} \times \mathcal{G} \times \mathcal{J}$:

$$\begin{aligned}
 \delta \mathfrak{I}_{1-1} \Big|_{\delta \bar{u}^*} &= 0 = \int_{\Omega_t} (\nabla \delta \bar{u}^* : \bar{J}_1 : \nabla \bar{u}) d\Omega + \int_{\Omega_t} (\nabla \delta \bar{u}^* : \bar{J}_2 : \nabla \dot{\bar{u}}) d\Omega \\
 &\quad + \int_{\Omega_t} \rho_s (\delta \bar{u}^* \cdot \ddot{\bar{u}}) d\Omega - \int_{\Gamma_t} \rho_o (\delta \bar{u}^* \cdot \bar{\pi}) \cdot \bar{n} d\Gamma \\
 &\quad - \int_{\Omega_t} (\delta \bar{u}^* \cdot \bar{b}) d\Omega - \int_{\Gamma_t} (\delta \bar{u}^* \cdot \bar{t}) d\Gamma \\
 \delta \mathfrak{I}_{1-1} \Big|_{\delta p^*} &= 0 = \int_{\Omega_t} \frac{1}{\rho_o c^2} (\delta p^* \cdot p) d\Omega \\
 &\quad + \int_{\Omega_t} \frac{1}{c^2} (\delta p^* \cdot \bar{\pi}) d\Omega \\
 \delta \mathfrak{I}_{1-1} \Big|_{\delta \pi^*} &= 0 = - \int_{\Gamma_t} \rho_o (\delta \bar{u}^* \cdot \bar{\pi}) \cdot \bar{n} d\Gamma - \int_{\Omega_t} \rho_o (\nabla \delta \pi^* \cdot \nabla \bar{\pi}) d\Omega \\
 &\quad + \int_{\Omega_t} \frac{1}{c^2} (\delta \pi^* \cdot \ddot{p}) d\Omega - \int_{\Gamma_t} \frac{\rho_o}{c^2} (\delta \pi^* \cdot \bar{\pi}) d\Gamma - \frac{1}{2} \int_{\Gamma_t} \rho_o (\delta \pi^* \cdot \ddot{\eta}) d\Gamma \\
 \delta \mathfrak{I}_{1-1} \Big|_{\delta \bar{\eta}^*} &= 0 = - \frac{1}{2} \int_{\Gamma_t} \rho_o (\delta \bar{\eta}^* \cdot \bar{\pi}) d\Gamma - \frac{1}{2} \int_{\Gamma_t} \rho_o g (\delta \bar{\eta}^* \cdot \bar{\eta}) d\Gamma
 \end{aligned} \tag{3.66}$$

Equações de Euler-Lagrange:

$$(\delta \bar{u}^*) : \quad \nabla \cdot \bar{\sigma} + \bar{b} - \rho_s \ddot{\bar{u}} = 0 \quad \text{em } \Omega_s \tag{3.67}$$

$$(\delta \bar{u}^*) : \quad \bar{t} - \bar{\sigma} \cdot \bar{n} = 0 \quad \text{em } \Gamma_\sigma \tag{3.68}$$

$$(\delta \phi^*) : \quad p + \rho_o c^2 \nabla^2 \pi = 0 \quad \text{em } \Omega_f \tag{3.69}$$

$$(\delta p^*) : \quad p + \rho_o \bar{\pi} = 0 \quad \text{em } \Omega_f \tag{3.70}$$

$$(\delta \bar{u}^*) : \quad p \bar{n} + \bar{\sigma} \cdot \bar{n} = 0 \quad \text{em } \Gamma_i \tag{3.71}$$

$$(\delta \pi^*) : \quad \bar{u} \cdot \bar{n} - \nabla \pi \cdot \bar{n} = 0 \quad \text{em } \Gamma_i \tag{3.72}$$

$$(\delta \pi^*) : \quad \nabla \phi \cdot \bar{n} + \dot{\phi} / c^2 = 0 \quad \text{em } \Gamma_\infty \tag{3.73}$$

$$(\delta \bar{\eta}^*) : \quad \rho_o \bar{\pi} + \rho_o g \bar{\eta} = 0 \quad \text{em } \Gamma_s \tag{3.74}$$

$$(\delta \pi^*) : \quad \nabla^2 \bar{\pi} \cdot \bar{n} - \ddot{\bar{\eta}} = 0 \quad \text{em } \Gamma_s \tag{3.75}$$

3.5 EFEITOS DE INTERESSE

3.5.1 Cavitação

Quando a pressão absoluta de um fluido \tilde{p} fica abaixo da pressão de vapor p_v , os gases dissolvidos no fluido formam um conjunto distribuído de minúsculas bolhas conhecidas como região de cavitação. A expansão (rarefação) desta região de cavitação é mantida constante na pressão p_v até que \tilde{p} aumenta acima de p_v e a região cavitada entra em colapso. Para se levar em conta tais fenômenos, a equação de estado (3.14) deve ser modificada para:

$$p - \alpha c^2 \rho = 0 \quad (3.76)$$

onde o parâmetro α é uma função de pressão dada por:

$$\alpha = \begin{cases} 1 & \text{se } \tilde{p} = p + p_o > p_v \\ \beta & \text{se } \tilde{p} = p + p_o \leq p_v \end{cases} \quad (3.77)$$

A equação bilinear do estado é freqüentemente usada com $\beta = 0$, mas Bleich e Sandler (1970) estabelecem que β deveria ser não-nulo quando a região cavitada está em contato com a estrutura (problemas de interação fluido-estrutura em barragens).

O ingrediente essencial para o tratamento numérico da cavitação é uma formulação transiente que seja facilmente adaptável para problemas de análise não-linear e, por conseqüência a métodos iterativos. A formulação variacional transiente desenvolvida neste capítulo possui ambos os ingredientes. Quando acoplado a condição de radiação, a formulação é muito mais conveniente para análise do passo de tempo e esquemas iterativos. A consideração do domínio fluido Ω_f ser discretizado por elementos finitos provém o segundo ingrediente requerido. Implementações não-lineares nesta formulação poderiam seguir um tratamento similar aos tratados por Felippa e Deruntz (1984) e Fenves e Vargas-Loli (1988)

3.6 DISCRETIZAÇÃO PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Introduz-se a interpolação padrão dos elementos finitos para as incógnitas do sistema:

$$\begin{aligned}
 \bar{u}(\bar{x}, t) &= \bar{N}_u(\bar{x}) \cdot \bar{d}(t) && \in C^0(\Omega_s) \\
 p(\bar{x}, t) &= \bar{N}_p(\bar{x}) \cdot \bar{p}(t) && \in L^2(\Omega_f) \\
 \pi(\bar{x}, t) &= \bar{N}_\pi(\bar{x}) \cdot \bar{\pi}(t) && \in C^0(\Omega_f) \\
 \bar{\eta}(\bar{x}, t) &= \bar{N}_\eta(\bar{x}) \cdot \bar{z}(t) && \in L^2(\Omega_f)
 \end{aligned} \tag{3.78}$$

onde \bar{N}_u , \bar{N}_p , \bar{N}_π , e \bar{N}_η contém as funções de forma dos elementos finitos e \bar{d} , \bar{p} , $\bar{\pi}$, e \bar{z} são os vetores de deslocamento nodal da estrutura, pressão dinâmica do fluido, potencial de deslocamento do fluido e elevação da superfície livre. Neste trabalho, as funções de forma \bar{N}_u , \bar{N}_p e \bar{N}_π referem-se ao do elemento triangular linear T3, enquanto as funções de \bar{N}_η refere-se ao do elemento linear de superfície. A aproximação por elementos finitos para os campos adjuntos seguem as mesmas funções de forma daquelas usadas nos campos físicos.

3.6.1 Discretização do Domínio Sólido

Para a discretização do domínio sólido tem-se que a forma matricial mais geral do problema pode ser expressa em termos das coordenadas do sólido do elemento da seguinte forma:

$$\bar{u}(\bar{x}, t) = \bar{N}_u(\bar{x}) \cdot \bar{d}(t) = \begin{bmatrix} \bar{H}_x & \bar{H}_y & \bar{H}_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{d}_x \\ \bar{d}_y \\ \bar{d}_z \end{bmatrix} \tag{3.79}$$

onde \bar{d}_x , \bar{d}_y , \bar{d}_z são os vetores deslocamento do elemento sólido nas direções x, y e z, respectivamente, $\begin{bmatrix} \bar{H}_x & \bar{H}_y & \bar{H}_z \end{bmatrix}$ as funções de forma associadas aos nós do elemento que

podem ser expressas como $\bar{H}_x = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 & \dots & h_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$ sendo que h_i corresponde a função de

forma para o nó i e n o número de nós do elemento.

3.6.2 Discretização do Domínio Fluido

Na discretização das variáveis pertencentes ao domínio do fluido, efetua-se de forma análoga ao item anterior. Logo,

$$p(\bar{x}, t) = \bar{N}_p(\bar{x}) \cdot \bar{p}(t) = \begin{bmatrix} h_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & h_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & h_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \dots \\ p_n \end{bmatrix} \quad (3.80)$$

onde h_i é a função de interpolação da pressão \bar{p} . O procedimento é idêntico para as variáveis $\bar{\pi}$ e $\bar{\eta}$.

3.6.3 Montagem das matrizes elementares

Utiliza-se tanto para o sólido quanto para o fluido uma discretização em elementos triangulares lineares com funções de forma dadas por:

$$h_i = \frac{1}{2A} (a_i + b_i x + c_i y) \quad , \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.81)$$

onde $b_1 = y_2 - y_3$, $b_2 = y_3 - y_1$, $b_3 = y_1 - y_2$, $c_1 = x_3 - x_2$, $c_2 = x_1 - x_3$, e $c_3 = x_2 - x_1$.

Examinando o princípio variacional no Quadro 3.1, é conveniente introduzir a seguinte notação para as matrizes do problema para a discretização das formas fracas antes de iniciarmos a montagem das equações matriciais de elementos finitos:

$$\bar{K}_1 = \bar{K}_1^T = \sum_{e=1}^{nel} \int_{\Omega^e} (\nabla \bar{N}_u)^T : \bar{J}_1 : (\nabla \bar{N}_u) d\Omega^e \quad - \text{rigidez da estrutura} \quad (3.82)$$

$$\bar{K}_2 = \bar{K}_2^T = \sum_{e=1}^{nel} \int_{\Omega^e} (\nabla \bar{N}_u)^T : \bar{J}_2 : (\nabla \bar{N}_u) d\Omega^e \quad - \text{amortecimento da estrutura} \quad (3.83)$$

$$\bar{M} = \bar{M}^T = \sum_{e=1}^{nel} \int_{\Omega^e} \rho_o \bar{N}_u^T \bar{N}_u d\Omega^e \quad - \text{massa da estrutura} \quad (3.84)$$

$$\bar{f} = \sum_{e=1}^{nel} \left[\int_{\Omega^e} \bar{N}_u^T \cdot \bar{b} d\Omega + \int_{\Gamma_o} \bar{N}_u^T \cdot \bar{t} d\Gamma \right] \quad - \text{vetor de forças} \quad (3.85)$$

$$\bar{Q} = \bar{Q}^T = \sum_{e=1}^{nel} \int_{\Omega^e} \frac{1}{\rho_o c^2} \bar{N}_p^T \bar{N}_p d\Omega^e \quad - \text{massa do fluido} \quad (3.86)$$

$$\bar{E} = \bar{E}^T = \sum_{e=1}^{nel} \int_{\Omega^e} \rho_o (\nabla \bar{N}_p)^T (\nabla \bar{N}_p) d\Omega^e \quad - \text{rigidez do fluido} \quad (3.87)$$

$$\bar{H}_1 = \bar{H}_1^T = \sum_{e=1}^{nel} \int_{\Gamma_s} \rho_o g \bar{N}_\eta^T \bar{N}_\eta d\Omega^e \quad - \text{rigidez da superfície livre} \quad (3.88)$$

$$\bar{H}_2 = \bar{H}_2^T = \sum_{e=1}^{nel} \int_{\Omega^e} \rho_o \bar{N}_\pi^T \bar{N}_\eta d\Omega^e \quad - \text{matriz de acoplamento } \pi-\eta \quad (3.89)$$

$$\bar{C}_1 = \sum_{e=1}^{nel} \int_{\Gamma^e} -\rho_o \bar{N}_u^T \bar{n} \bar{N}_\phi d\Gamma^e \quad - \text{matriz de acoplamento } \bar{u}-\pi \quad (3.90)$$

$$\bar{D}_1 = \bar{D}_1^T = \sum_{e=1}^{nel} \int_{\Omega^e} \frac{1}{c^2} \bar{N}_p^T \bar{N}_\pi d\Omega^e \quad - \text{matriz de acoplamento } p-\pi \quad (3.91)$$

$$\bar{B} = \bar{B}^T = \sum_{e=1}^{nel} \int_{\Omega^e} \frac{1}{c} \bar{N}_\pi^T \bar{N}_\pi d\Omega^e \quad - \text{amortecimento por radiação} \quad (3.92)$$

onde Σ representa, neste caso, o operador de montagem do elemento local.

3.6.4 Sistemas de equação matricial do princípio de acoplamento - de - massa

O sistema de equações que corresponde ao estacionário de \mathfrak{S}_1 com respeito as variáveis adjuntas expresso no Quadros 3.1, toma a seguinte forma:

Princípio \mathfrak{S}_{1-1}

$$\begin{bmatrix} \bar{K}_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{Q} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{H}_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{d} \\ \bar{p} \\ \bar{\pi} \\ \bar{z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{K}_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\bar{d}} \\ \dot{\bar{p}} \\ \dot{\bar{\pi}} \\ \dot{\bar{z}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{M} & 0 & \bar{C}_1 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{D}_1 & 0 \\ \bar{C}_1^T & \bar{D}_1^T & -\bar{E} & \bar{H}_2 \\ 0 & 0 & \bar{H}_2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{\bar{d}} \\ \ddot{\bar{p}} \\ \ddot{\bar{\pi}} \\ \ddot{\bar{z}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\rho_o \bar{B} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dddot{\bar{d}} \\ \dddot{\bar{p}} \\ \dddot{\bar{\pi}} \\ \dddot{\bar{z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{f} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.93)$$

Como já observado no capítulo anterior, a matriz (3.93) possui acoplamento simétrico mas apresenta uma estrutura bastante esparsa. Surge ainda o problema do termo com derivada terceira no tempo. Neste trabalho não será tratado problemas dissipativos, ou seja, as matrizes K_2 e B são nulas, reduzindo o problema para:

Princípio \mathfrak{S}_{1-1}

$$\begin{bmatrix} \bar{K}_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{Q} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{H}_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{d} \\ \bar{p} \\ \bar{\pi} \\ \bar{z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{M} & 0 & \bar{C}_1 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{D}_1 & 0 \\ \bar{C}_1^T & \bar{D}_1^T & -\bar{E} & \bar{H}_2 \\ 0 & 0 & \bar{H}_2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{\bar{d}} \\ \ddot{\bar{p}} \\ \ddot{\bar{\pi}} \\ \ddot{\bar{z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{f} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.94)$$

A equação (3.94) corresponde ao sistema matricial acoplado fluido-estrutura transiente cujos métodos de solução indicados são Newmark, Wilson- θ , diferenças centrais (Bathe (1996)).

Quando o sistema (3.94) é submetido a uma função excitadora periódica, a resposta também se apresenta de forma periódica. Logo, a dependência do tempo pode ser eliminada do problema. Neste caso considera-se as seguintes funções,

$$\bar{d}(t) = \bar{D}(\omega) \cdot e^{i\omega t} \quad (3.95)$$

$$\bar{p}(t) = \bar{P}(\omega) \cdot e^{i\omega t} \quad (3.96)$$

$$\bar{\pi}(t) = \bar{\Pi}(\omega) \cdot e^{i\omega t} \quad (3.97)$$

$$\bar{\eta}(t) = \bar{N}(\omega) \cdot e^{i\omega t} \quad (3.98)$$

$$\bar{b}(t) = \bar{B}(\omega) \cdot e^{i\omega t} \quad (3.99)$$

$$\bar{i}(t) = \bar{T}(\omega) \cdot e^{i\omega t} \quad (3.100)$$

onde as variáveis harmônicas são explicitadas por maiúsculas. Logo, após algumas manipulações algébricas sobre o sistema matricial (3.94), vem:

Princípio \mathfrak{Z}_{1-1}

$$\left(\begin{bmatrix} \bar{K}_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{Q} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{H}_1 \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} \bar{M} & 0 & \bar{C}_1 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{D}_1 & 0 \\ \bar{C}_1^T & \bar{D}_1^T & -\bar{E} & \bar{H}_2 \\ 0 & 0 & \bar{H}_2^T & 0 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{Bmatrix} \bar{D} \\ \bar{P} \\ \bar{\Pi} \\ \bar{Z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{F} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.101)$$

O sistema matricial acoplado fluido-estrutura no domínio da frequência é explicitado pela Eq.(3.101), e para a solução desta a equação os métodos ortogonalizantes QZ (Wilkinson e Reinsch (1971), os métodos iterativos de busca por determinante e também a interação no subespaço (Bathe (1996) são indicados.

CAPÍTULO 4

ANÁLISE NUMÉRICA DO PROBLEMA FLUIDO-ESTRUTURA

4.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo serão feitos comentários sobre os métodos numéricos utilizados na solução do problema fluido-estrutura (3.94) e (3.101) apresentados no capítulo 3.

Inicia-se com um exame da solução de problemas no domínio da frequência que apresenta as maiores dificuldades na análise numérica do problema fluido-estrutura estudado. A problemática deve-se em grande parte à estrutura do sistema matricial acoplado cujas matrizes de massa e rigidez totais caracterizam-se por serem matrizes esparsas, mal-condicionadas e singulares. Logo, visto estas informações, efetuou-se a escolha mais viável para solução dos valores próprios.

Em seguida, procede-se a resolução de casos acoplados transientes para alguns aspectos da integração no tempo. Analisa-se os métodos no domínio do tempo comparando os métodos passo-a-passo e os de superposição modal. Tendo por base esta discussão, efetua-se a escolha da técnica de integração no tempo e apresenta-se o algoritmo utilizado.

Por fim, será discutida uma alternativa para contornar certos problemas de instabilidade numérica observados neste trabalho - balanceamento das matrizes *a posteriori* -. Esta técnica apresenta um forte direcionamento à experimentação numérica e dependente do "sentimento" do pesquisador. No entanto, calcada na observação das características numéricas do sistema matricial e no entendimento da formulação, este artifício mostrou-se fundamental na obtenção de soluções adequadas para problemas modais e transientes.

4.2 ANÁLISE NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA

Na análise no domínio da frequência encontra-se a solução de problemas de vibração livre. Por suas características particulares, tornou-se necessário um estudo anterior para estabelecer a melhor escolha de um algoritmo computacional. Características como esforço computacional, estabilidade numérica são determinantes na escolha dos diversos métodos de solução existentes. Tendo em vista estas questões e as dificuldades para a resolver problemas de interação fluido-estrutura, encontra-se na literatura diversos estudos sobre a solução de valores próprios aplicados a problemas acoplados.

Desde o trabalho pioneiro de Zienkiewicz e Newton (1969), tem sido estudadas técnicas para simetrizar a formulação acoplada (\bar{u}, p) . Daniel (1980) utiliza a síntese modal para possibilitar a aplicação da formulação assimétrica (\bar{u}, p) para grandes sistemas estruturais. Muller (1981) apresenta uma outra técnica de simetrização para a formulação de Newton. Contudo, estas propostas esbarram sempre na necessidade da inversão de matrizes, que envolve um a enorme esforço computacional. A alternativa mais promissora para formulações não-simétricas foi proposta por Sandberg (1995) onde utiliza os modos de vibração desacoplados dos dois domínios para compor a solução acoplada através de técnicas de subestruturação.

Esta preocupação constante pela simetria das matrizes é fundamentada em grande parte pelas seguintes explicações:

- Matrizes não-simétricas conduzem a um maior esforço computacional, ou seja, tempo de computação e espaço de armazenagem grandes, se comparadas a matrizes simétricas.
- Observa-se que matrizes não-simétricas e simétricas mal-condicionadas são mais sensíveis a instabilidades numéricas, Wilkinson e Reinsch (1971), ocasionando, por exemplo, o aparecimento de componentes imaginárias que não deveriam existir, Pinsky e Abboud (1989). Este problema foi observado o caso da cavidade fechada, mesmo para as frequências baixas. Uma alternativa para contornar este fenômeno é a introdução de um "shift" na matriz de rigidez.

Com o advento de formulações simétricas, essas questões mencionadas acima não deixaram de ser atuais. As formulações acopladas (\bar{u}, ϕ) de Everstine (1981) e (\bar{u}, ϕ, p_o) de Olson e Bathe (1985) suscitaram novas questões, como solução de problemas de valores próprios do segundo grau. A formulação (\bar{u}, p, π) de Morand e Ohayon (1979) e Jeanpierre *et al* (1979), que possui forma padrão $AX = \lambda BX$, apresenta as dificuldades já mencionadas como esparcidade, mal-condicionamento e singularidade de suas matrizes.

Uma alternativa promissora para a solução de problemas acoplados simétricos são os métodos iterativos. Dungar (1978) propõe o método da iteração inversa como uma alternativa para a solução de grandes problemas fluido-estrutura. Em se tratando de uma aplicação de massa adicional, o que reduz bastante a ordem do problema, é possível observar as vantagens reais dos métodos iterativos. A experiência de outros pesquisadores, Bathe e Wilson (1972), Papadrakakis (1984), Olson e Bathe (1985), com os métodos de iteração no subespaço, busca por determinante e de potência tem demonstrado a grande aplicabilidade destes algoritmos a problemas de interação fluido-estrutura.

Como visto no parágrafo anterior, a seleção de um algoritmo para a solução de problemas modais deve ser baseada em sua performance. Por causa do custo computacional e pela estabilidade numérica, a escolha de um método deve ser calcada nas principais vantagens oferecidas. Neste trabalho, o problema de vibração livre (3.101) possui as seguintes características:

- a) todas as matrizes são reais e simétricas;
- b) a matriz total de rigidez é singular, enquanto a total de massa possui determinante próximo do zero;
- c) as matrizes totais de massa e rigidez são muito esparsas, veja Figura 4.1;
- d) todos os autovalores são reais e positivos.

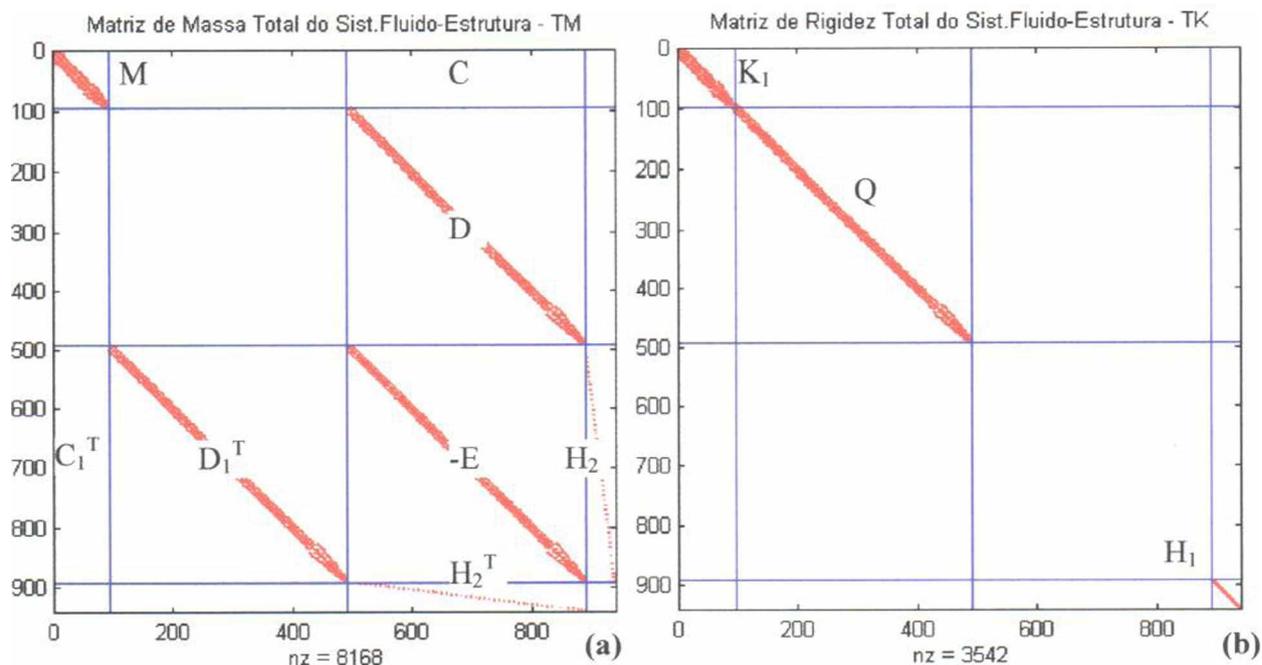


Figura 4.1 - Representação gráfica das matrizes totais (a) de massa e (b) de rigidez de um exemplo típico de problema acoplado fluido-estrutura.

Com estas características do sistema a resolver, a escolha do algoritmo de cálculo de valores próprios é direcionada ao método QZ. Como este algoritmo está implementado em ambiente Matlab, optou-se por sua utilização em razão do acesso e facilidade de uso. Outras escolhas, como por exemplo o método de iteração no subespaço ou busca por determinante, poderiam também ter sido utilizados mas demandariam um esforço adicional.

Problemas acoplados de grande escala, como o acoplamento entre barragens-reservatório, um grande sistema de tubulações pressurizadas, os internos de um reator nuclear, geram por consequência grandes sistemas matriciais. Normalmente, sua solução é possível pela utilização de algoritmos iterativos pois calculam apenas alguns autovalores e correspondentes autovetores. Entre estes métodos, os mais comuns são a busca por determinante e a iteração por sub-espaço. Já os algoritmos de transformações ortogonais, como Jacobi, Householder, QR, e QZ, são métodos clássicos que calculam todos os autovalores do sistema. Logo, estes métodos são caracterizados por custos computacionais elevados, necessidades de grandes espaços de memória, lentidão e por instabilidade numérica para a solução de problemas. Em geral, somente os primeiros modos de vibração

são necessários. Como, os problemas tratados neste trabalho restringem-se ainda a problemas pequeno porte, torna perfeitamente justificável a escolha do algoritmo QZ.

Os algoritmos QZ, QR e QL são derivados do método LR, e todos tem um princípio semelhante de funcionamento. O algoritmo LR se baseia na decomposição de uma matriz A, do sistema $AX = \lambda BX$, em uma matriz triangular superior R e numa inferior L:

$$A_s = L_s R_s \quad (4.1)$$

Se inverte a ordem da multiplicação, de forma que

$$A_{s+1} = R_s L_s \quad (4.2)$$

onde A_{s+1} é uma matriz similar a A_s . Pela repetição sucessiva das operações das Eqs.(4.1) e (4.2), a matriz A tende a uma matriz triangular superior onde os elementos da diagonal principal são os autovalores do problema.

Os algoritmos QR e QL substituem a transformação na Eq.(4.1) por uma que envolve uma matriz unitária elementar Q e outra triangular, superior (R) ou inferior (L). Enquanto, o método QZ é a extensão do QR para problemas de valores próprios generalizados complexos.

O método para a solução de problemas generalizados $(A - \lambda B)X=0$ é composto por quatro etapas. Na primeira, que consiste do algoritmo generalizado da redução de Householder para a forma de Hessenberg, A é reduzido para a forma superior de Hessenberg, enquanto B é transformado para a forma triangular superior ao mesmo tempo. No segundo passo, a generalização do algoritmo QR de duplo *shift* implícito de Francis reduz a matriz A à forma quase-triangular, enquanto a forma triangular de B é mantida. No terceiro estágio, a matriz A é efetivamente transformada à forma triangular e os autovalores são extraídos. Por fim, no quarto e último estágio obtém-se os autovetores das matrizes triangulares e por transformação reversa retornados as coordenadas originais. Explicações mais profundas do método encontram-se em Wilkinson e Reinsch (1971), Moler e Stewart (1973) e Barbosa (1998).

4.3 ANÁLISE TRANSIENTE

Estuda-se neste item o problema no domínio do tempo que pode ser colocado em sua forma mais genérica. Rescreve-se então a Eq.(3.94) da seguinte forma:

$$\bar{K}U + \bar{C}\dot{U} + \bar{M}\ddot{U} = \bar{R}(t), \quad (4.3)$$

onde \bar{M} , \bar{C} , \bar{K} , e \bar{R} são as matrizes de massa, amortecimento, rigidez e o vetor de carregamentos globais do problema. A partir da expressão (4.3), faz-se uma breve explanação sobre os métodos de integração no tempo comparando-os com o método de superposição modal onde será analisado a aplicabilidade de ambos. Em seguida, são feitos comentários sobre a escolha da técnica numérica mais adequada a solução de problemas transientes estudados neste trabalho. Apresenta-se por fim o algoritmo detalhado do método de integração no tempo utilizado.

4.3.1 Método de integração direta *versus* métodos de superposição modal

A solução de problemas transientes restringe-se a duas classes de métodos: métodos de superposição modal e por integração direta. O método de superposição modal compõe a resposta transiente da Eq.(4.3) para um instante t a partir da somatória dos primeiros modos de vibração. Já os métodos de integração direta efetuam o cálculo passo a passo da resposta em função dos tempos anteriores.

Uma das principais características da superposição modal permiti o cálculo da resposta no instante t qualquer sem a necessidade dos tempos intermediários, ao contrário dos métodos de integração direta que dada as limitações de memória dos computadores pode haver problemas de acumulo de erros numéricos. No entanto, a superposição é limitada pela necessidade do uso de algoritmos de valores próprios para a obtenção dos modos de vibração restringindo o uso a problemas lineares, além de apresentar um alto custo computacional. Ávila (1997) apresenta diversas propostas para a aplicação da superposição modal a problemas não-lineares, mas estes estudos ainda estão limitados a um certo grupo de aplicações e de especialistas na área.

Já os métodos de integração direta solucionam as equações (3.94) através de um processo passo a passo. Estes algoritmos baseiam-se em dois princípios. Primeiro, ao invés de satisfazer a Eq.(3.94) para qualquer instante t , procura-se solucionar a Eq.(3.94) para pequenos intervalos de tempo Δt . Desta forma, atinge-se um equilíbrio quase estático em pontos discretos no tempo, considerando-se efeitos de rigidez, inércia e amortecimento. Logo, algoritmos para solução de problemas estáticos podem ser utilizados no cálculo no

tempo. O segundo princípio assume que os deslocamentos, velocidades e acelerações sofrem variações no intervalo de tempo considerado e possibilita análises numéricas sobre a estabilidade, a precisão e o custo computacional.

Os métodos de integração direta mais difundidos são as diferenças finitas centrais, Houbolt, Wilson- θ , e Newmark. Os dois primeiros métodos são derivados de expressões para diferenças finitas no tempo e necessitam satisfazer um passo de integração mínimo para garantir a estabilidade numérica da solução. Na prática, isto resulta em mais passos por intervalo de tempo em comparação aos métodos incondicionalmente estáveis. Enquanto os dois últimos são retirados de um método linear de variação da aceleração e não apresentam passo de integração mínimo, ou seja, são incondicionalmente estáveis.

Como neste trabalho optou por estudar o comportamento dinâmico fluido-estrutura somente para os primeiros tempos da resposta transiente, decidiu-se trabalhar com os métodos de integração no tempo. Em particular, escolheu-se o método de Newmark, segundo Bathe (1996), por possuir boas características de precisão e estabilidade a problemas acoplados.

4.3.2 Integração Direta pelo Método de Newmark - MID - MNw

O esquema de integração no tempo proposto por Newmark pode ser entendido como uma expansão do método de aceleração linear. Usa-se as seguintes expressões:

$${}^{t+\Delta t}\dot{U} = {}^tU + [(1-\delta) {}^t\ddot{U} + \delta {}^{t+\Delta t}\ddot{U}] \Delta t \quad (4.4)$$

$${}^{t+\Delta t}U = {}^tU + {}^t\dot{U}\Delta t + \left[\left(\frac{1}{2} - \alpha \right) {}^t\ddot{U} + \alpha {}^{t+\Delta t}\ddot{U} \right] \Delta t^2 \quad (4.5)$$

onde α e δ são parâmetros para precisão e estabilidade do método. Quando $\delta = 1/2$ e $\alpha = 1/6$, as expressões (4.4) e (4.5) correspondem ao método de aceleração linear. Nas análises transientes estudadas no trabalho, usa-se o método de aceleração média constante, ou seja, $\delta = 1/2$ e $\alpha = 1/4$, por apresentar estabilidade incondicional.

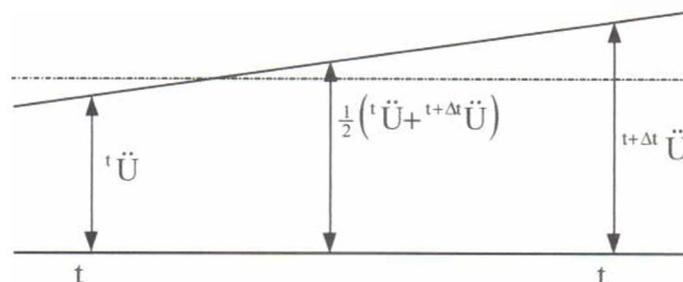


Figura 4.2 - Esquema de aceleração constante média do método de Newmark.

Em conjunto com as Eqs.(4.4) e (4.5) para a solução dos deslocamentos, velocidades e aceleração no tempo $t + \Delta t$, a equação de equilíbrio (4.3) no tempo $t + \Delta t$ também será considerada,

$$\bar{M} {}^{t+\Delta t} \ddot{U} + \bar{C} {}^{t+\Delta t} \dot{U} + \bar{K} {}^{t+\Delta t} U = {}^{t+\Delta t} \bar{R} \quad (4.6)$$

Manipulando a Eq.(4.5), apresentando ${}^{t+\Delta t} \ddot{U}$ em termos de ${}^{t+\Delta t} U$, ou seja,

$$\alpha {}^{t+\Delta t} \ddot{U} \Delta t^2 = {}^{t+\Delta t} U - \left[{}^t U + {}^t \dot{U} \Delta t + \left(\frac{1}{2} - \alpha \right) {}^t \ddot{U} \Delta t^2 \right]$$

logo,

$${}^{t+\Delta t} \ddot{U} = \frac{1}{\alpha \Delta t^2} {}^{t+\Delta t} U - \frac{1}{\alpha \Delta t^2} \left[{}^t U + {}^t \dot{U} \Delta t + \left(\frac{1}{2} - \alpha \right) {}^t \ddot{U} \Delta t^2 \right] \quad (4.7)$$

então, substituindo ${}^{t+\Delta t} \ddot{U}$ na Eq.(4.4), vêm,

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t} \dot{U} &= {}^t U + (1 - \delta) {}^t \ddot{U} \Delta t + \delta \Delta t \left\{ \frac{1}{\alpha \Delta t^2} {}^{t+\Delta t} U - \frac{1}{\alpha \Delta t^2} \left[{}^t U + {}^t \dot{U} \Delta t + \left(\frac{1}{2} - \alpha \right) {}^t \ddot{U} \Delta t^2 \right] \right\} \\ {}^{t+\Delta t} \dot{U} &= \frac{\delta}{\alpha \Delta t} {}^{t+\Delta t} U + \left[\frac{\Delta t}{2} \left(2 - \frac{\delta}{\alpha} \right) \right] {}^t \ddot{U} + \left[1 - \frac{\delta}{\alpha} \right] {}^t \dot{U} - \frac{\delta}{\alpha \Delta t} {}^t U \end{aligned} \quad (4.8)$$

De posse das Eqs.(4.7) e (4.8) em termos de ${}^{t+\Delta t} U$ e do deslocamento, velocidade e aceleração no tempo t somente, substitui-se estas duas relações na Eq.(4.6) permitindo a solução de ${}^{t+\Delta t} U$. Logo,

$$\begin{aligned} & \bar{M} \left\{ \frac{1}{\alpha \Delta t^2} {}^{t+\Delta t} U - \frac{1}{\alpha \Delta t^2} \left[{}^t U + {}^t \dot{U} \Delta t + \left(\frac{1}{2} - \alpha \right) {}^t \ddot{U} \Delta t^2 \right] \right\} + \\ & + \bar{C} \left\{ \frac{\delta}{\alpha \Delta t} {}^{t+\Delta t} U + \left[\frac{\Delta t}{2} \left(2 - \frac{\delta}{\alpha} \right) \right] {}^t \ddot{U} + \left[1 - \frac{\delta}{\alpha} \right] {}^t \dot{U} - \frac{\delta}{\alpha \Delta t} {}^t U \right\} + \bar{K} {}^{t+\Delta t} U = {}^{t+\Delta t} \bar{R} \\ & \left[\bar{M} \frac{1}{\alpha \Delta t^2} + \bar{C} \frac{\delta}{\alpha \Delta t} + \bar{K} \right] {}^{t+\Delta t} U = \\ & = {}^{t+\Delta t} \bar{R} + \bar{M} \left[\frac{1}{\alpha \Delta t^2} {}^t U + {}^t \dot{U} \Delta t + \left(\frac{1}{2\alpha} - 1 \right) {}^t \ddot{U} \right] + \bar{C} \left[\frac{\delta}{\alpha \Delta t} {}^t U + \left(\frac{\delta}{\alpha} - 1 \right) {}^t \dot{U} + \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\delta}{\alpha} - 2 \right) {}^t \ddot{U} \right] \end{aligned} \quad (4.9)$$

ou seja,

$$\bar{K}_{eq} {}^{t+\Delta t} \bar{U} = {}^{t+\Delta t} \bar{R} \quad (4.10)$$

Abaixo o algoritmo da solução pelo método de Newmark para a programação em computadores.

1º - Inicialização do Cálculo

1. Montar as matrizes de rigidez K , e de massa M e amortecimento C .
2. Fixar as condições iniciais de deslocamento ${}^0 \bar{U}$, velocidade ${}^0 \dot{\bar{U}}$, e aceleração ${}^0 \ddot{\bar{U}}$.
3. Selecione o passo de tempo Δt , e os parâmetros α e δ , e calcule as constantes de integração.

$$\begin{aligned} a_0 &= 1/(\alpha \Delta t^2); & a_1 &= \delta/(\alpha \Delta t); & a_2 &= 1/(\alpha \Delta t); & a_3 &= 1/(2\alpha) - 1 \\ a_4 &= \delta/\alpha - 1; & a_5 &= (\Delta t/2)(\delta/\alpha - 2); & a_6 &= \Delta t(1 - \delta); & a_7 &= \delta \Delta t \end{aligned}$$

4. Monte-se a matriz de rigidez efetiva. $\bar{K}_{eq} = \bar{K} + a_0 \bar{M} + a_1 \bar{C}$

5. Transformar a matriz \bar{K}_{eq} em:

$$\bar{K}_{eq} = \bar{L} \bar{D} \bar{L}^T$$

2º Para cada passo de tempo

1. Calcule o carregamento efetivo para o tempo $t+\Delta t$;

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t} \bar{R}_{eq} &= {}^{t+\Delta t} \bar{R} + \bar{M} \left[\frac{1}{\alpha \Delta t^2} {}^t U + {}^t \dot{U} \Delta t + \left(\frac{1}{2\alpha} - 1 \right) {}^t \ddot{U} \right] + \\ &+ \bar{C} \left[\frac{\delta}{\alpha \Delta t} {}^t \dot{U} + \left(\frac{\delta}{\alpha} - 1 \right) {}^t \ddot{U} + \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\delta}{\alpha} - 2 \right) {}^t \ddot{\ddot{U}} \right] \end{aligned}$$

2. Solução dos deslocamentos para o tempo $t+\Delta t$.

$$\bar{L} \bar{D} \bar{L}^T {}^{t+\Delta t} \bar{U} = {}^{t+\Delta t} \bar{R}$$

3. Caso deseje-se calcular a evolução da aceleração e da velocidade no instante τ .

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t} \ddot{U} &= \frac{1}{\alpha \Delta t^2} {}^{t+\Delta t} U - \frac{1}{\alpha \Delta t^2} \left[{}^t U + {}^t \dot{U} \Delta t + \left(\frac{1}{2} - \alpha \right) {}^t \ddot{U} \Delta t^2 \right], \text{ e} \\ {}^{t+\Delta t} \dot{U} &= \frac{\delta}{\alpha \Delta t} {}^{t+\Delta t} U + \left[\frac{\Delta t}{2} \left(2 - \frac{\delta}{\alpha} \right) \right] {}^t \ddot{U} + \left[1 - \frac{\delta}{\alpha} \right] {}^t \dot{U} - \frac{\delta}{\alpha \Delta t} {}^t U \end{aligned}$$

4.4 BALANCEAMENTO DAS MATRIZES DO SISTEMA ACOPLADO

Na análise de problemas de interação fluido-estrutura, questões como análise de erros numéricos, mal-condicionamento das matrizes, instabilidade numérica, são comuns em todas as formulações existentes na literatura. Na busca de uma melhor compreensão dos problemas, as obras de Cook *et al* (1989), Bathe(1996) apresentam algumas discussões interessantes sobre o assunto.

Segundo Bathe (1996), problemas com vários domínios que apresentam grandes diferenças de rigidez e/ou massa característica estão propensos a problemas de instabilidade numérica. Um exemplo dado é a análise transiente de problemas fluido-estrutura cujo fluido é mais flexível em comparação a rigidez da estrutura. Afirma-se que o uso dos mesmos operadores de integração no tempo não é efetivo para o estudo de problema acoplados e aconselha-se a utilização de diferentes operadores para integração no tempo. Uma das propostas para a análise de sistemas acoplados no domínio do tempo é a integração explícita no tempo da resposta do fluido usando o método das diferenças centrais condicionalmente estável e um método implícito incondicionalmente estável para a resposta do sólido, como por exemplo no método de Newmark. Neste trabalho, foi observado dificuldades na convergência da solução numérica no domínio do tempo e da frequência. Observou-se, em diversos ensaios estudados, a divergência de resultados fugindo de forma abrupta do comportamento dinâmico esperado.

Contudo, buscou-se como alternativa para estabilizar a solução do sistema acoplado através da adimensionalização da variável de pressão. Este procedimento causou o balanceamento dos coeficientes das matrizes tornando o sistema mais homogêneo. Ou seja, reproduzindo a Eq.(3.64) abaixo, observa-se que,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{J}_{t-1} = & \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega_s} \rho_s (\dot{\mathbf{u}} \cdot \dot{\mathbf{u}}^*) d\Omega - \frac{1}{2} \int_{\Omega_s} (\nabla \mathbf{u} : \bar{\mathbf{J}}_1 : \nabla \mathbf{u}^*) d\Omega \right. \\
 & - \frac{1}{4} \int_{\Omega_s} (\nabla \dot{\mathbf{u}} : \bar{\mathbf{J}}_2 : \nabla \mathbf{u}^* - \nabla \mathbf{u} : \bar{\mathbf{J}}_2 : \nabla \dot{\mathbf{u}}^*) d\Omega \\
 & + \frac{1}{2} \int_{\Omega_s} [\bar{\mathbf{b}} \cdot \dot{\mathbf{u}}^* + \bar{\mathbf{b}}^* \cdot \dot{\mathbf{u}}] d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_e} [\bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{u}^* + \bar{\mathbf{t}}^* \cdot \mathbf{u}] d\Gamma \\
 & - \frac{1}{2} \int_{\Omega_r} \rho_o (\nabla \dot{\pi} \cdot \nabla \dot{\pi}^*) d\Omega - \frac{1}{2} \int_{\Omega_r} \frac{1}{\rho_o c^2} (p \dot{p}^*) d\Omega \\
 & + \frac{1}{2} \int_{\Omega_r} \frac{1}{c^2} (\dot{p} \dot{\pi}^* + \dot{p}^* \dot{\pi}) d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega_s} [\rho_o \dot{\pi}^* \cdot \dot{\eta} + \rho_o \dot{\pi} \cdot \dot{\eta}^* - \rho_o \mathbf{g} \cdot \dot{\eta} \dot{\eta}^*] d\Gamma \\
 & \left. + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_i} \rho_o (\dot{\pi} \dot{\mathbf{u}}^* + \dot{\pi}^* \dot{\mathbf{u}}) \cdot \bar{\mathbf{n}} d\Gamma \right\} dt
 \end{aligned} \tag{ref.3-64}$$

existem grandes diferenças entre os pivôs nas matrizes de rigidez. Os termos de rigidez do sólido são proporcionais a $E/(1 - \nu^2)$, enquanto no domínio fluido os termos são da ordem de $1/(\rho_0 c^2)$. Numericamente, a matriz de rigidez do sistema acoplado possui pivôs variando entre ordens de grandeza de $1 \cdot 10^{11}$ para o sólido e $1 \cdot 10^{-09}$ para o fluido. Notando esta disparidade nos elementos da matriz de rigidez, buscou-se uma forma de balancear a matriz de rigidez K.

Para o balanceamento das matrizes do sistema acoplado, aplica-se a seguinte transformação de variável,

$$p = \rho_0 c^2 \cdot p' \quad (4.11)$$

Efetuada a análise dimensional da expressão acima, vem,

$$[p] = [\text{Pa}] = [\text{N} / \text{m}^2] = [\text{kg} / \text{m}^3] [\text{m}^2 / \text{s}^2] \cdot [\text{adm.}] = [\rho_0 c^2] \cdot [p'] \quad (4.12)$$

onde a nova variável p' é adimensional.

Logo, ao substituir no equilíbrio de quantidade de movimento (3.12), tem-se:

$$\rho_0 c^2 p' + \rho_0 \ddot{\pi} = 0 \quad (4.13)$$

Substituindo no princípio variacional acoplado (3-64), vem,

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{1-1} = & \int_0^t \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho_s (\dot{\mathbf{u}} \cdot \dot{\mathbf{u}}^*) d\Omega - \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{u} : \bar{\mathbf{J}}_1 : \nabla \mathbf{u}^*) d\Omega \right. \\ & - \frac{1}{4} \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{u} : \bar{\mathbf{J}}_2 : \nabla \mathbf{u}^* - \nabla \mathbf{u} : \bar{\mathbf{J}}_2 : \nabla \mathbf{u}^*) d\Omega \\ & + \frac{1}{2} \int_{\Omega} [\bar{\mathbf{b}} \cdot \mathbf{u}^* + \bar{\mathbf{b}}^* \cdot \mathbf{u}] d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} [\bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{u}^* + \bar{\mathbf{t}}^* \cdot \mathbf{u}] d\Gamma \\ & - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho_0 (\nabla \dot{\pi} \cdot \nabla \dot{\pi}^*) d\Omega - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho_0 c^2 (p' p'^*) d\Omega \\ & + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho_0 (\dot{p}' \dot{\pi}^* + \dot{p}'^* \dot{\pi}) d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega} [\rho_0 \dot{\pi}^* \cdot \dot{\eta} + \rho_0 \dot{\pi} \cdot \dot{\eta}^* - \rho_0 \mathbf{g} \cdot \bar{\eta} \bar{\eta}^*] d\Gamma \\ & \left. + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \rho_0 (\ddot{\pi} \mathbf{u}^* + \ddot{\pi}^* \mathbf{u}) \cdot \bar{\mathbf{n}} d\Gamma \right\} dt \end{aligned} \quad (4.14)$$

ou seja,

$$\begin{bmatrix} \bar{K}_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{Q}' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{H}_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \bar{d} \\ \bar{p}' \\ \bar{\pi} \\ \bar{z} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{M} & 0 & \bar{C}_1 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{D}'_1 & 0 \\ \bar{C}_1^T & \bar{D}'_1^T & -\bar{E} & \bar{H}_2 \\ 0 & 0 & \bar{H}_2^T & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \ddot{\bar{d}} \\ \ddot{\bar{p}}' \\ \ddot{\bar{\pi}} \\ \ddot{\bar{z}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{f} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.15)$$

Com relação a (3.64), o princípio variacional (4.14) apresenta duas modificações: uma na matriz de rigidez \bar{Q} e outra na matriz \bar{D}_1 de acoplamento p- π . O termo de rigidez do fluido \bar{Q}' está multiplicado agora por $\rho_o c^2$, ou seja, $\bar{Q}' = \frac{1}{2} \int_{\Omega_f} \rho_o c^2 (p' p'^*) d\Omega$. Desta forma, os termos da matriz \bar{Q}' possuem a mesma ordem de grandeza dos elementos da matriz de rigidez \bar{K}_1 .

Já na matriz $\bar{D}'_1 = \frac{1}{2} \int_{\Omega_f} \rho_o (\dot{p}' \dot{\pi}^* + \dot{p}'^* \dot{\pi}) d\Omega$, a mudança de variável (4.11) uniformizou os elementos da matriz de massa global \bar{M} do sistema acoplado. Todas as sub-matrizes de \bar{M} estão multiplicadas ou pela densidade do sólido ρ_s ou do fluido ρ_o que possuem a mesma ordem de grandeza.

O processo de balanceamento mostra-se uma boa alternativa para melhorar o condicionamento das matrizes globais e não influi nas frequências do sistema.

CAPÍTULO 5

RESULTADOS NUMÉRICOS

5.1 INTRODUÇÃO

Neste trabalho, são modelados problemas simples de interação fluido - estrutura em cavidades fluidas bidimensionais acopladas a sólidos. Estes exemplos buscam melhor ilustrar a aplicação da formulação mista tipo acoplamento - de - massa (u,p,π) e validar a implementação computacional. A escolha dos casos fundamentou-se possuímos soluções analíticas para validar os resultados.

Inicialmente, o problema é analisado sob a ótica unidimensional, ou seja, a estrutura que comporta-se como pistão, interage com uma cavidade longa fechada ou aberta - Casos 1A e 1B -. Este sistema acoplado é modelado como um problema massa-mola uma vez que a hipótese de ondas planas é válida. Logo, com o auxílio do método da matriz de transferência, Anexo A, são obtidas suas equações analíticas desacopladas e acopladas.

Em seguida, amplia-se o estudo para modelos bidimensionais. Serão analisados dois casos: casos 2 e 3. No caso 2, modela-se uma cavidade quadrada que apresenta acoplamento a estrutura numa face e superfície livre na face oposta. Neste caso, o sólido comporta-se como um pistão.

O caso 3 consiste no estudo preliminar de um sistema acoplado sólido-cavidade semi-infinita. O domínio fluido será tratado por uma cavidade retangular longa com fundo rígido, e superfície livre. O domínio sólido será estudado comportando-se como pistão e como viga. Os resultados obtidos nos casos 2 e 3 serão comparados com soluções analíticas apresentadas nos anexos B e C.

5.2 CASO 1 - CAVIDADE 1-D LONGA

Neste caso estuda-se o comportamento de cavidades longas para as condições de contorno abertas e fechadas. As soluções analíticas acopladas, usadas para validar os resultados numéricos, reproduzem de forma estendida e detalhada o desenvolvimento apresentado na publicação de Gibert (1988).

5.2.1 Esquema do problema

As Figura 5.1 e 5.2 apresentam, respectivamente, o esquema do Caso 1 e a representação das condições de contorno estudadas para o mesmo caso: **a** - condição perfeitamente aberta, **b** - condição perfeitamente fechada.

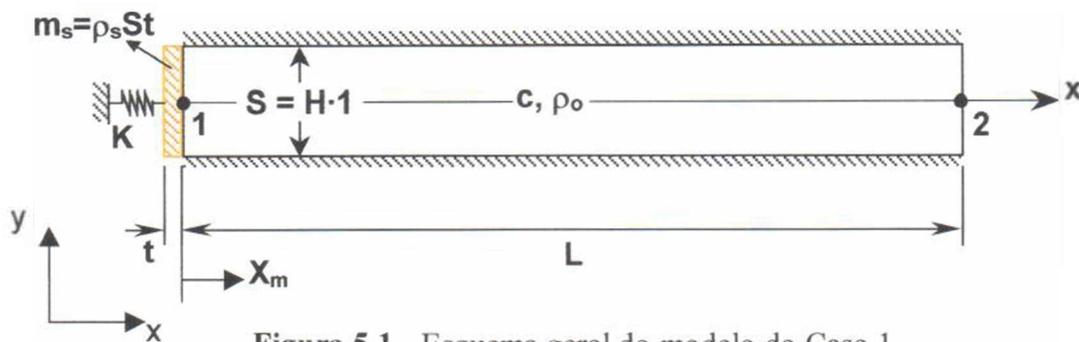


Figura 5.1 - Esquema geral do modelo do Caso 1.

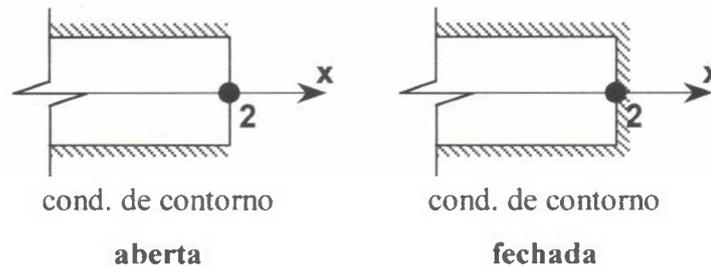


Figura 5.2 - Condições de contorno tratadas pelo Caso 1.

5.2.2 Formulação teórica do sistema estrutural 1D

O sistema estrutural será modelado como um sistema com um grau de liberdade massa-mola. Escrevendo a equação dinâmica da massa-mola acoplada a cavidade fluida, tem-se:

$$(K - \omega^2 m_s) X_s = -p_1 S \quad (5.1)$$

onde a Eq.(5.1) e o equilíbrio dinâmico no domínio da frequência do sistema acoplado massa - mola - cavidade fluida, m_s e k são a massa e rigidez do estrutura, p_1 é a pressão no ponto 1 (cabeça do pistão) e ω^2 a frequência circular do sistema massa - mola - cavidade. Logo, a expressão desacoplada do sistema estrutural é escrita sem considerar o termo $-p_1 S$ da expressão (5.1), ou seja,

$$(K - \omega^2 m_s) X_s = 0 \quad (5.2)$$

Logo, a frequência fundamental da estrutura é expressa por $\omega^2 = K/m_s$.

Obviamente, este modelo não leva em conta outros modos de vibração da estrutura senão o modo de movimento do pistão. Porém, como neste primeiro momento estuda-se o comportamento dinâmico unidimensional deste sistema fluido - estrutura, esta consideração é suficiente para se obter bons resultados a baixas frequências.

5.2.3 Formulação teórica da cavidade fluida 1D

Aplicando a matriz de transferência, Eq.(A.13), para a cavidade da Figura 5.1, obtém-se:

$$\begin{Bmatrix} p_2 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \lambda & \frac{c}{iS} \operatorname{sen} \lambda \\ -\frac{iS}{c} \operatorname{sen} \lambda & \cos \lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1 \\ q_1 \end{Bmatrix} \quad (5.3)$$

A condição de contorno fluido - estrutura para a cavidade fluida supõe que a partícula de fluido aderida a parede da estrutura apresente a mesma velocidade da partícula do sólido, ou seja,

$$v_{\text{fluido}} = v_{\text{sólido}} \Rightarrow \dot{X}_f = \dot{X}_s \quad (5.4)$$

Após multiplicar a Eq.(5.4) por S , e sabendo que $X_{r,r} = dX_f/dt$ e $q_1 = \rho_f S (dX_f/dt)$, tem-se:

$$q_1 = \rho_o S \dot{X}_s \quad (5.5)$$

e, transformando por Fourier, a equação acima toma a seguinte forma:

$$q_1 = i\omega \rho_o S X_s \quad (5.6)$$

onde esta expressão é a condição de IFE básica para problemas de acoplamento acústico no domínio da frequência. Substituindo em (5.3), o resultado é a matriz de transferência da cavidade fluida longa acoplada a uma estrutura,

$$\begin{Bmatrix} p_2 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \lambda & \frac{c}{iS} \operatorname{sen} \lambda \\ -\frac{iS}{c} \operatorname{sen} \lambda & \cos \lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1 \\ i\omega \rho_0 S X_s \end{Bmatrix} \quad (5.7)$$

onde as variáveis de pressão e vazão acústica no ponto 2 serão proporcionadas pelas condições de contorno, conforme Figura 5.2.

Já a expressão desacoplada da cavidade acústica é obtida supondo que o pistão seja rígido ($X_s = 0$), Figura 5.1. Por conseguinte, a Eq.(5.7) toma a seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} p_2 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \lambda & \frac{c}{iS} \operatorname{sen} \lambda \\ -\frac{iS}{c} \operatorname{sen} \lambda & \cos \lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.8)$$

Uma dedução mais detalhada da Eq.(5.8) encontra-se no Anexo A.

5.3 CASO 1A - CONDIÇÃO DE CONTORNO ABERTA

5.3.1 Solução Desacoplada

- Sólido

A expressão da solução desacoplada do sólido em termo de frequência é obtida da Eq.(5.2) definida da seguinte forma:

$$\omega_{\text{Pistão}}^2 = K/m_s \rightarrow \lambda_{\text{Pistão}}^2 = KL^2/(m_s c^2) \quad (5.9)$$

- Fluido

A solução em frequência da expressão (5.8) para a cavidade aberta ($p_2 = 0$) é:

$$\lambda_n = \frac{\omega_n L}{c} = \pi \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (5.10)$$

A dedução de (5.10) está detalhada no Anexo A.

5.3.2 Solução Acoplada

A condição de contorno aberta resulta da suposição da pressão p_2 ser a pressão

atmosférica, Figura 5.2,. Já que a variável p tratada neste trabalho representa a variações dinâmicas de pressão total \tilde{p} , este nível estático representa um valor nulo de pressão, ou seja, $p_2 = 0$. Substituindo-a na Eq.(5.7), tem-se:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\lambda & \frac{c}{iS} \operatorname{sen}\lambda \\ -\frac{iS}{c} \operatorname{sen}\lambda & \cos\lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1 \\ i\omega\rho_0 S X_s \end{Bmatrix} \quad (5.11)$$

Logo, a primeira linha deste sistema matricial resulta em,

$$p_1 = -\omega\rho_0 c \tan\lambda \cdot X_s \quad (5.12)$$

que substituindo na Eq.(5.1), tem a equação do sistema acoplado massa-mola cavidade fluida em função de X_s :

$$(K - \omega^2 m_s - \omega \cdot \rho_0 c S \tan\lambda) X_s = 0 \quad (5.13)$$

Nota-se que a presente expressão depende de diversas quantidades, entre elas a rigidez K , massa do sólido m_s , densidade do fluido ρ_0 , velocidade do som c , etc... Dada a diversidade de fatores que alteram a Eq.(5.13) dificultando o entendimento dos verdadeiros mecanismos fenomeneológicos do problema, faz-se necessário o uso de termos adimensionais para simplificar a expressão e facilitar o seu estudo. Para tanto, dividiu-se a Eq.(5.13) por $\rho_0 c^2$ e multiplicou-se a mesma por L/S . Logo,

$$\left(K \frac{1}{\rho_0 c^2} \frac{L}{S} - \omega^2 m_s \frac{1}{\rho_0 c^2} \frac{L}{S} - \omega \cdot \rho_0 c S \tan\lambda \frac{1}{\rho_0 c^2} \frac{L}{S} \right) X_s = 0 \quad (5.14)$$

ou seja,

$$(\alpha - \lambda^2 \cdot \mu - \lambda \cdot \tan\lambda) \cdot X_s = 0 \quad (5.15)$$

onde,

$$\alpha = \frac{K}{\rho_0 c^2 S L} - \left\{ \begin{array}{l} \text{razão entre a rigidez da mola e a do} \\ \text{volume fluido devido a compressibilidade} \end{array} \right. \quad (5.16a)$$

$$\mu = \frac{m_s}{\rho_0 S L} = \left\{ \begin{array}{l} \text{relação entre a massa da} \\ \text{estrutura e do volume fluido} \end{array} \right. \quad (5.16b)$$

$$\lambda = \frac{\omega L}{c} = \kappa L - \left\{ \begin{array}{l} \text{relação entre o comprimento de onda e a} \\ \text{frequência natural (frequência adimensional)} \end{array} \right. \quad (5.16c)$$

Para obter uma solução não-trivial da Eq.(5.15) ($X_s \neq 0$), deve-se obter as raízes da equação transcendental:

$$\lambda^2 \left(\mu + \frac{1}{\lambda} \tan \lambda \right) = \alpha \quad (5.17)$$

onde as raízes da Eq.(5.17) correspondem as frequências naturais do sistema acoplado, caso 1A. Com o intuito de desenvolver os gráficos dos campos de pressão e de vazão acústica ao longo da cavidade fluida, substituiu-se as frequências naturais do problema na expressão abaixo:

$$\begin{Bmatrix} p(x) \\ q(x) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\left(\lambda \frac{x}{L}\right) & \frac{c}{iS} \sin\left(\lambda \frac{x}{L}\right) \\ -\frac{iS}{c} \sin\left(\lambda \frac{x}{L}\right) & \cos\left(\lambda \frac{x}{L}\right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\omega \rho_0 c \tan \lambda \\ i\omega \rho_0 S \end{Bmatrix} \cdot X_s \quad (5.18)$$

Após algumas manipulações algébricas, obtém-se as expressões abaixo do campo de pressão e vazão acústica:

$$\begin{cases} \frac{p(x)}{\omega \rho_0 c X_s} = -\tan \lambda \cdot \cos\left(\lambda \frac{x}{L}\right) + \sin\left(\lambda \frac{x}{L}\right) \\ \frac{q(x)}{i\omega \rho_0 S X_s} = \tan \lambda \cdot \sin\left(\lambda \frac{x}{L}\right) + \cos\left(\lambda \frac{x}{L}\right) \end{cases} \quad (5.19)$$

onde $p(x)/(\omega \rho_0 c X_s)$ e $q(x)/(i\omega \rho_0 S X_s)$ são as expressões adimensionais dos modos próprios de pressão e vazão acústica.

5.3.3 Resultados no domínio da frequência do caso 1A

Neste item são analisados dois exemplos no domínio da frequência. Primeiramente, o Exemplo 1A-1 será resolvido através do uso da formulação analítica acoplada e desacoplada estudadas. E em seguida, usando por base as características geométricas e físicas do modelo do exemplo anterior, busca-se compreender os mecanismos fenomenológicos do caso 1A através de variações dos adimensionais α e μ .

EXEMPLO 1A-1 - Caso tipo

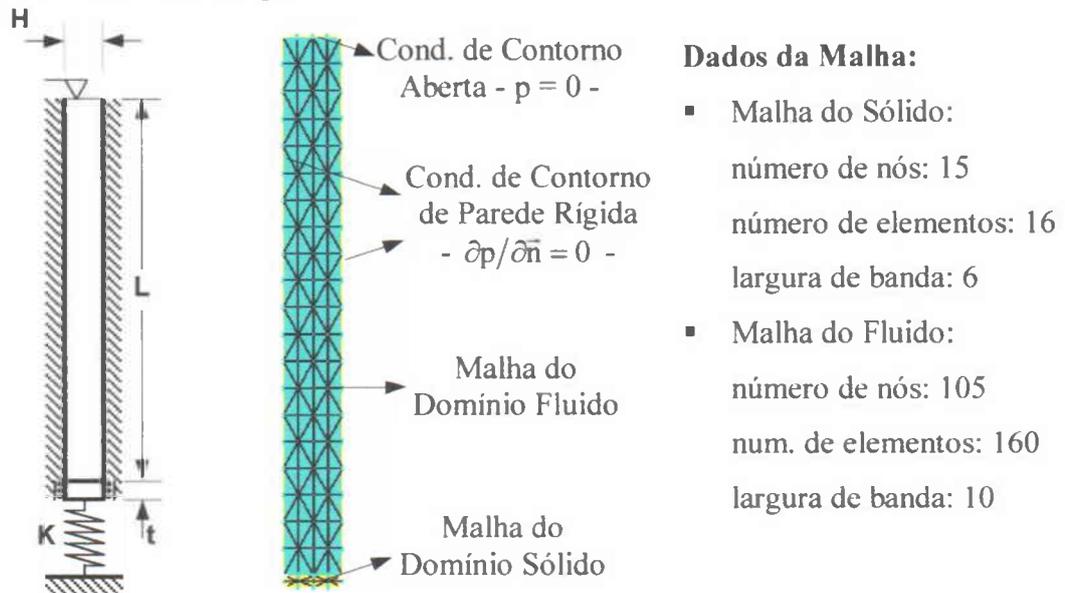


Figura 5.3 - Esquema do exemplo 1A-1, descrição das condições de contorno da malha em elementos finitos e das características da malha utilizada.

Dados do Problema:

- Domínio Sólido

$$E = 2,11 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2; \rho_s = 7800 \text{ kg/m}^3; \nu = 0,30; t = 0,10 \text{ m}; K = 80.000 \text{ N/m}^2$$

- Domínio Fluido

$$c = 1500 \text{ m/s}^2; \rho_o = 1000 \text{ kg/m}^3; L = 10,0 \text{ m}; H = 1,00 \text{ m}; S = 1,00 \times H = 1,00 \text{ m}^2$$

Calculando os valores adimensionais expressas em (5.16), tem-se:

$$\alpha = \frac{80.000}{1000 \cdot 1500^2 \cdot (1,00 \cdot 10,0)} = 3,55 \dots \cdot 10^{-4} \quad \& \quad \mu = \frac{7800 \cdot 0,10 \cdot 1,00}{1000 \cdot 10,00 \cdot 1,00} = 0,0780 \quad (5.20)$$

Tabela 5.1 - Frequências naturais desacopladas.

Solução Desacoplada	Estrutura	Fluido				
	$\omega_{\text{Pistão}}$	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
Numérica	10,128	235,65	708,30	1185,15	1668,90	2162,25
Analítica	10,128	235,62	706,86	1178,10	1649,34	2120,58
Erro (%)	0,00	0,013	0,20	0,60	1,19	1,97

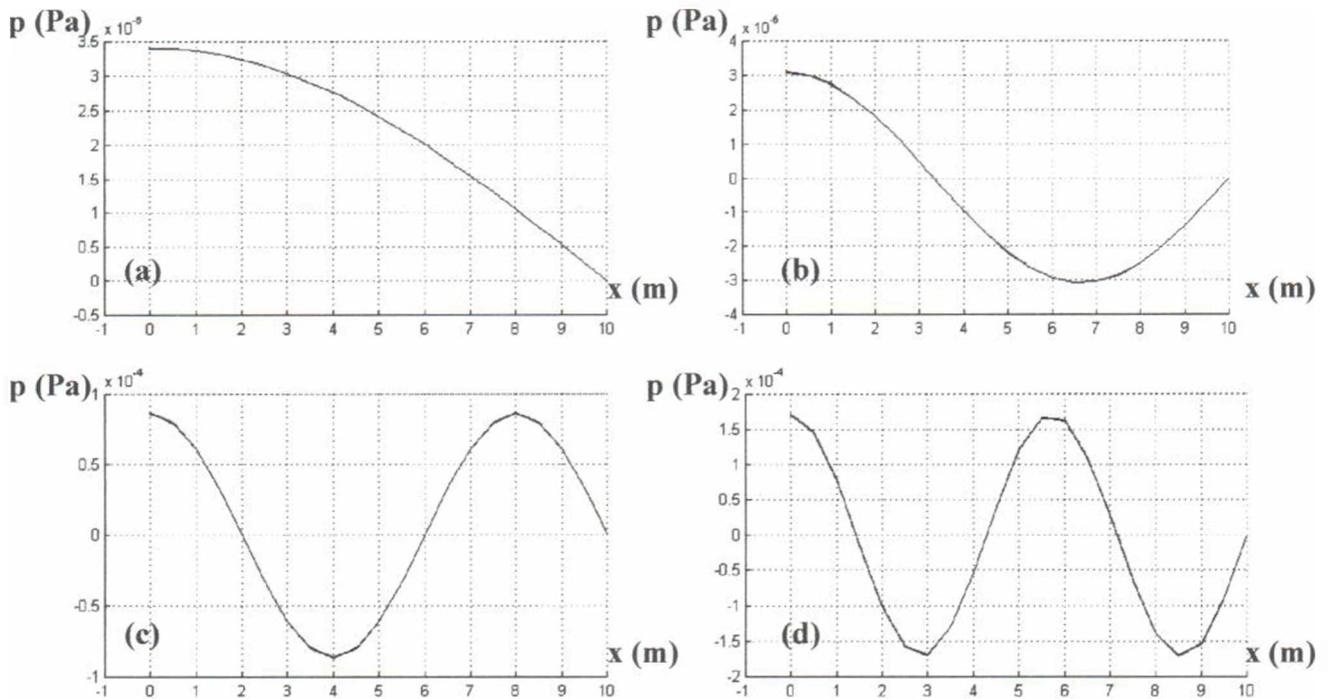


Figura 5.4 - Modos acústicos desacoplados: (a) 1°, (b) 2°, (c) 3° e (d) 4° modos numéricos.

Na Tabela 5.1, os resultados de frequência do problema desacoplado estão expressos em termos de frequência circular ω_n . A solução numérica apresentou um bom acordo com a analítica não tendo sido observada discrepância nos resultados superiores a 2%. Os modos acústicos da cavidade fluida, na Figura 5.4, seguem um comportamento cossenoidal em quartos de onda, conforme Anexo A. Comparando a frequência do pistão $\omega_{\text{Pistão}}$ com os resultados da cavidade acústica, observa-se que o sólido é mais flexível em relação a cavidade acústica.

Tabela 5.2 - Frequências naturais acopladas.

Solução Acoplada	Fluido-Estrutura					
	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6
Numérica	2,730	438,00	881,10	1333,35	1797,45	2275,80
Analítica	2,730	437,70	878,25	1323,30	1773,30	2227,35
Erro (%)	0,00	0,069	0,32	0,76	1,36	2,18

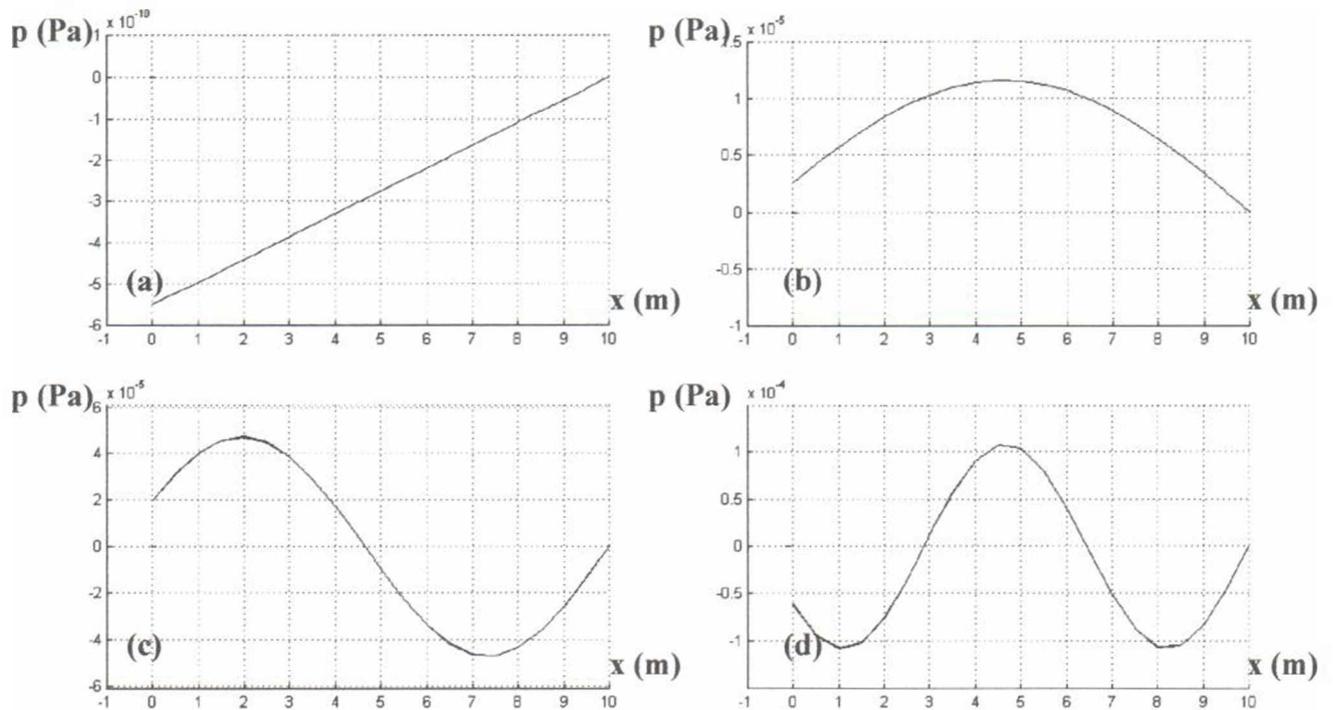


Figura 5.5 - Modos acústicos acoplados: (a) 1º, (b) 2º, (c) 3º e (d) 4º modos numéricos.

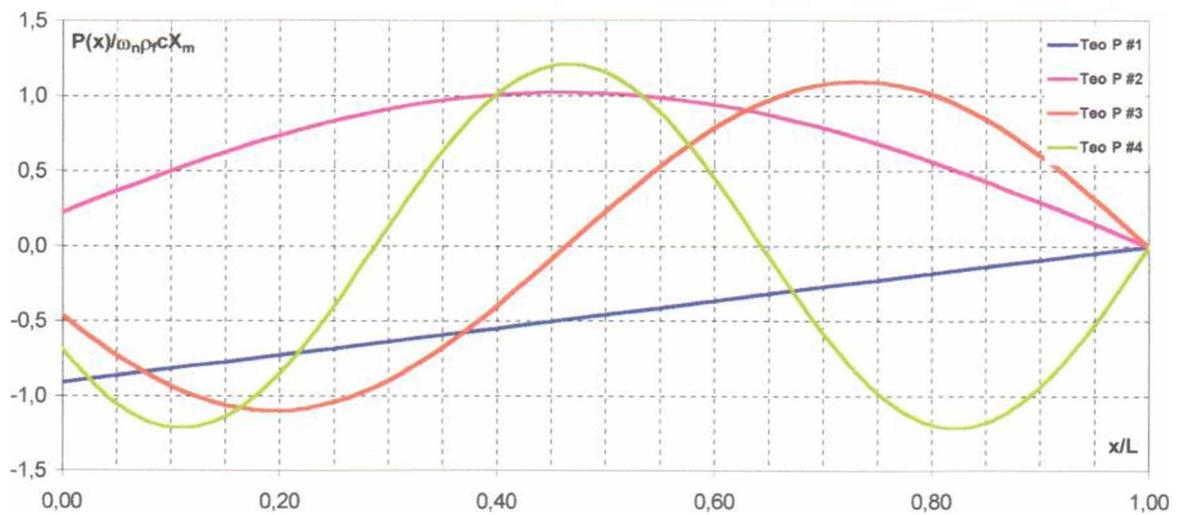


Figura 5.6 - Modos acústicos acoplados - Solução Analítica -.

Os modos acústicos e os resultados de frequência do problema acoplado encontram-se na Figura 5.5 e na Tabela 5.2. Para a discretização utilizada do exemplo 1A-01, conforme Figura 5.3, a discrepância entre o resultado numérico e a solução analítica foi inferior a 2,5%. Observa-se também que, devido a rigidez do pistão K ter sido muito baixa em comparação com a da cavidade fluida, o resultado acoplado caracteriza-se pelo primeiro modo incompressível (massa adicional), e pela semelhança os demais modos aos de uma cavidade aberta - aberta (cavidade com um fundo muito flexível).

Observa-se que razão entre a rigidez dos dois domínios é praticamente nula ($\alpha \cong 0$). As relações α e μ atestam que a contribuição de rigidez e de inércia do pistão ao sistema acoplado é pequena, e por conseqüente, a perturbação da estrutura quase não é percebida pela cavidade. Desta forma, com uma frequência fundamental de ressonância tão baixa, todas as partículas de fluido oscilam em uníssono ao movimento do pistão caracterizando um exemplo de massa adicional com frequência igual a $\omega_1 = [K/(\rho_s St + \rho_o SL)]^{1/2}$. Para os demais modos de vibração, o pistão é "invisível" a cavidade fluida como se não existisse.

EXEMPLO 1A-2 - Variação de parâmetros da solução acoplada do caso 1A

Para entender o comportamento do caso 1A, faz-se necessário efetuar uma sistemática análise do problema através de variações dos parâmetros adimensionais α e μ .

A partir dos dados do exemplo 1A-01, efetua-se a variação da espessura t , da constante de mola K, da densidade do fluido ρ_o e do comprimento L da cavidade. Varre-se o plano α - μ , possibilitando desta forma o estudo dos casos extremos. Nas Tabelas 5.3 a 5.6 confronta-se os resultados em frequência da solução numérica com a analítica (5.17), e as Figuras 5.7 a 5.10 os apresentam de forma gráfica.

Tabela 5.3 - Resultados da variação da espessura t do sólido.

t (m)	α	μ	λ_1 anal.	λ_2 anal.	λ_3 anal.	λ_4 anal.	λ_5 anal.	λ_6 anal.
0,05	0,000356	0,039	0,0185	3,024	6,051	9,084	12,125	15,174
0,10	0,000356	0,078	0,0182	2,918	5,855	8,822	11,822	14,849
0,20	0,000356	0,156	0,0175	2,738	5,568	8,500	11,504	14,552
0,50	0,000356	0,390	0,0160	2,391	5,173	8,158	11,220	14,137
1,00	0,000356	0,780	0,0141	2,116	4,965	8,013	11,110	14,227
t (m)	α	μ	λ_1 num.	λ_2 num.	λ_3 num.	λ_4 num.	λ_5 num.	λ_6 num.
0,05	0,000356	0,039	0,0185	3,0270	6,0731	9,1576	12,300	15,518
0,10	0,000356	0,078	0,0182	2,9203	5,8744	8,8891	11,983	15,172
0,20	0,000356	0,156	0,0175	2,7400	5,5847	8,5598	11,653	14,855
0,50	0,000356	0,390	0,0160	2,3923	5,1855	8,2104	11,357	14,601
1,00	0,000356	0,780	0,0141	2,1162	4,9756	8,0604	11,241	14,505

Dados: $K = 80000\text{N/m}$; $\rho_s = 7800\text{kg/m}^3$; $c = 1500\text{m/s}$; $\rho_o = 1000\text{kg/m}^3$; $L = H = 1,00\text{m}$; $t = \text{variável}$

Tabela 5.4 - Resultados da variação da rigidez de mola K.

K (N/m)	α	μ	λ_1 anal.	λ_2 anal.	λ_3 anal.	λ_4 anal.	λ_5 anal.	λ_6 anal.
$8,00 \cdot 10^4$	0,000356	0,078	0,01816	2,9179	5,8548	8,8221	11,8215	14,8494
$9,00 \cdot 10^5$	0,004	0,078	0,06088	2,9190	5,8553	8,8224	11,8217	14,8495
$9,00 \cdot 10^6$	0,04	0,078	0,19153	2,9299	5,8601	8,8250	11,8232	14,8505
$2,25 \cdot 10^8$	1,00	0,078	0,84249	3,2038	5,9913	8,8980	11,8669	14,8780
$9,00 \cdot 10^8$	4,00	0,078	1,25720	3,7911	6,4071	9,1545	12,0223	14,9746
K (N/m)	α	μ	λ_1 num.	λ_2 num.	λ_3 num.	λ_4 num.	λ_5 num.	λ_6 num.
$8,00 \cdot 10^4$	0,000356	0,078	0,01816	2,9203	5,8744	8,8891	11,9835	15,1720
$9,00 \cdot 10^5$	0,0040	0,078	0,06088	2,9214	5,8749	8,8894	11,9836	15,1721
$9,00 \cdot 10^6$	0,040	0,078	0,19153	2,9324	5,8797	8,8921	11,9852	15,1731
$2,25 \cdot 10^8$	1,0	0,078	0,84251	3,2064	6,0113	8,8988	12,0294	15,2012
$9,00 \cdot 10^8$	4,0	0,078	1,25732	3,7948	6,4285	9,2233	12,1861	15,2991

Dados: $K = \text{variável}$; $\rho_s = 7800\text{kg/m}^3$; $c = 1500\text{m/s}$; $\rho_o = 1000\text{kg/m}^3$; $L = H = 1,00\text{m}$; $t = 0,10\text{m}$

Tabela 5.5 - Resultados da variação densidade ρ_0 do fluido.

ρ_0 (kg/m ³)	α	μ	λ_1 anal.	λ_2 anal.	λ_3 anal.	λ_4 anal.	λ_5 anal.	λ_6 anal.
10000,00	0,04	0,0078	0,19793	3,1300	6,2409	9,3562	12,4726	15,5895
1000,0	0,40	0,0780	0,57619	3,0368	5,9086	8,8518	11,8393	14,8606
500,0	0,80	0,156	0,75524	2,9539	5,6466	8,5336	11,5203	14,5610
120,0	3,33	0,650	1,13751	2,6744	5,0736	8,0582	11,1386	14,2475
50,0	8,0	1,56	1,32433	2,5107	4,8783	7,9416	11,0560	14,1835
10,0	40,0	7,80	1,50366	2,3327	4,7473	7,8717	11,0077	14,1465
1,0	400,0	78,0	1,56333	2,2722	4,7159	7,8558	10,9968	14,1381
ρ_0 (kg/m ³)	α	μ	λ_1 num.	λ_2 num.	λ_3 num.	λ_4 num.	λ_5 num.	λ_6 num.
10000,0	0,04	0,0078	0,19793	3,1329	6,2646	9,4361	12,6628	15,9626
1000,0	0,40	0,0780	0,57602	3,0393	5,9283	8,9190	12,0015	15,1834
500,0	0,80	0,156	0,75525	2,9560	5,6636	8,5938	11,6696	14,8645
120,0	3,33	0,650	1,14085	2,6808	5,0866	8,1092	11,2738	14,5318
50,0	8,0	1,56	1,32446	2,5114	4,8894	7,9904	11,1883	14,4640
10,0	40,0	7,80	1,50395	2,3329	4,7577	7,9193	11,1383	14,4248
1,0	400,0	78,0	1,56369	2,2722	4,7261	7,9031	11,1270	14,4159

Dados: $K = 9,0 \cdot 10^7$ N/m²; $\rho_s = 7800$ kg/m³; $c = 1500$ m/s; $\rho_0 =$ variável; $L = H = 1,00$ m; $t = 0,1$ m

Tabela 5.6 - Resultados da variação do comprimento L da cavidade fluida.

L (m)	α	μ	λ_1 anal.	λ_2 anal.	λ_3 anal.	λ_4 anal.	λ_5 anal.	λ_6 anal.
0,50	0,0020	1,560	0,02795	1,8968	4,8440	7,9346	11,0535	14,1823
1,00	0,0040	0,780	0,04739	2,1160	4,9651	8,0127	11,1105	14,2270
10,0	0,040	0,0780	0,19153	2,9299	5,8601	8,8250	11,8232	14,8505
50,0	0,20	0,0156	0,42991	3,1557	6,2184	9,3018	12,3910	15,4832
100,0	0,40	0,0078	0,59146	3,2395	6,2976	9,3941	12,5010	15,6121
500,0	2,0	0,00156	1,07660	3,6397	6,5693	9,6154	12,7031	15,8095
1000,0	4,0	0,00078	1,26452	3,9338	6,8103	9,8055	12,8588	15,9421
L (m)	α	μ	λ_1 num.	λ_2 num.	λ_3 num.	λ_4 num.	λ_5 num.	λ_6 num.
0,50	0,0020	1,560	0,02795	1,8964	4,8490	7,9643	11,1398	14,3676
1,00	0,0040	0,780	0,04739	2,1163	4,9724	8,0465	11,2035	14,4242
10,0	0,040	0,0780	0,19153	2,9324	5,8797	8,8921	11,9852	15,1731
50,0	0,20	0,0156	0,42991	3,1562	6,2223	9,3149	12,4221	15,5439
100,0	4,0	0,0078	0,59146	3,2396	6,2986	9,3975	12,5089	15,6276
500,0	2,0	0,00156	1,07660	3,6398	6,5704	9,6190	12,7115	15,8257
1000,0	4,0	0,00078	1,26453	3,9340	6,8115	9,8092	12,8673	15,9585

Dados: $K = 9 \cdot 10^8$ N/m²; $\rho_s = 7800$ kg/m³; $c = 1500$ m/s; $\rho_0 = 1000$ kg/m³; $H = 1$ m; $t = 0,1$ m; $L =$ var.

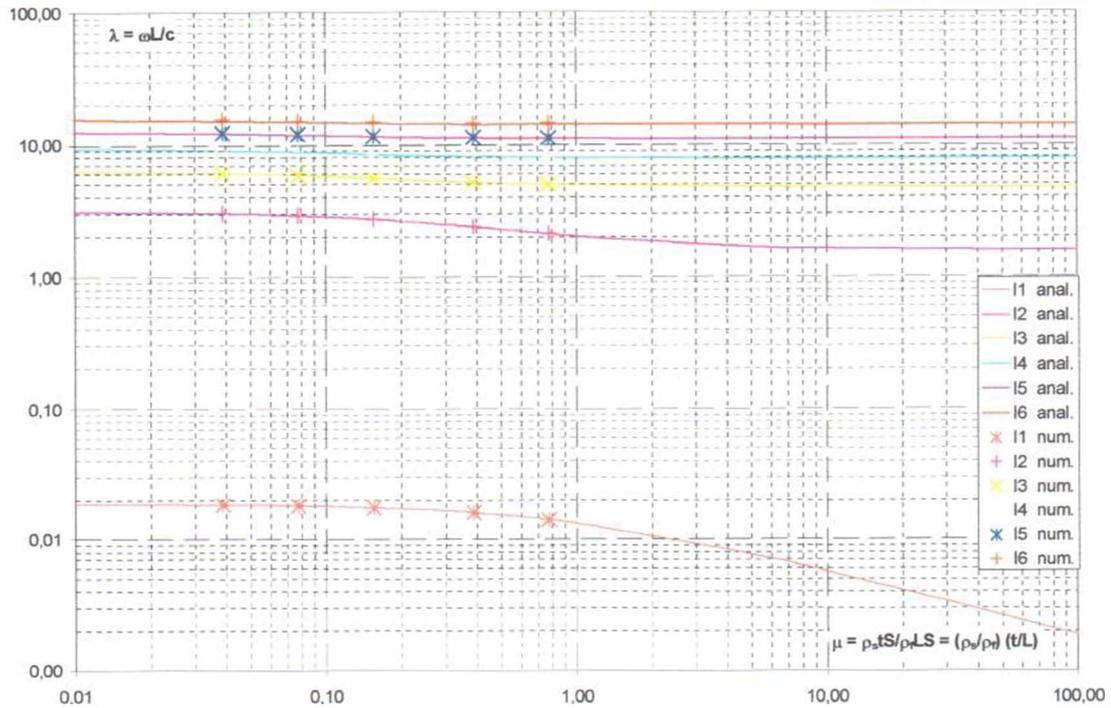


Figura 5.7 - Gráfico da variação de espessura t do sólido versus primeiras frequências adimensionais: - linha cheia - solução analítica e - marcas - resultado numérico.

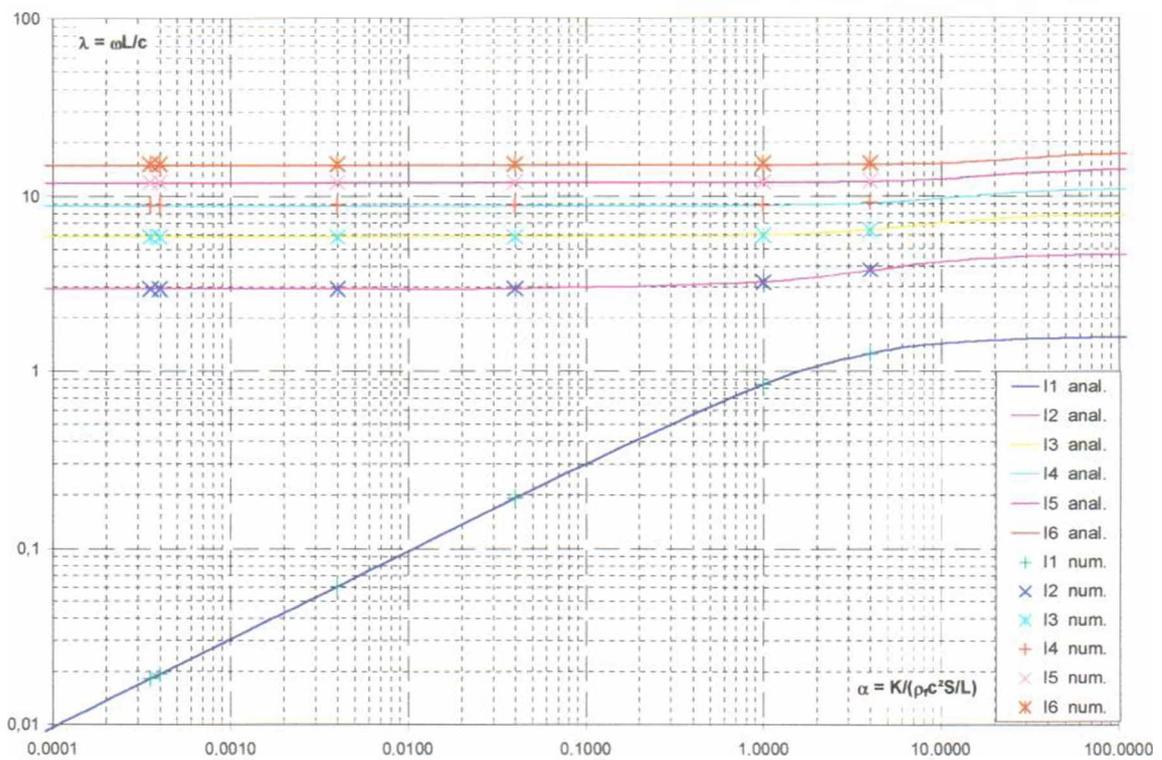


Figura 5.8 - Gráfico da variação da rigidez K do sólido versus primeiras frequências adimensionais: - linha cheia - solução analítica e - marcas - resultado numérico.

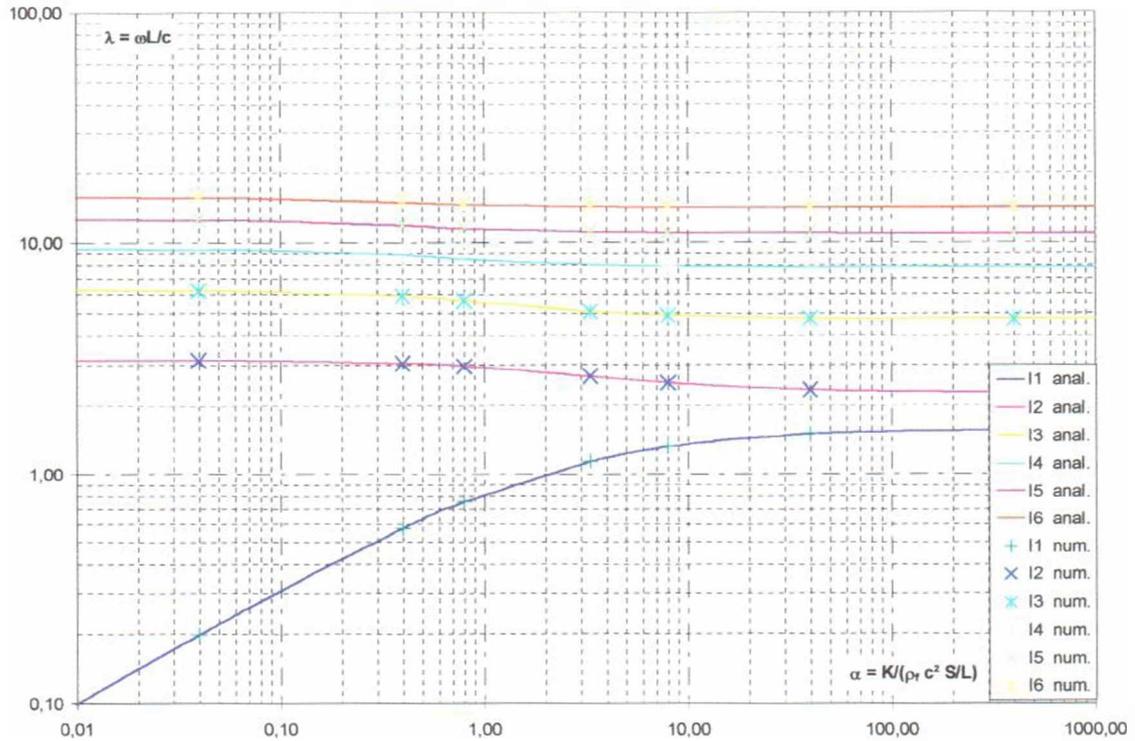


Figura 5.9 - Gráfico da variação da densidade ρ_0 do fluido *versus* primeiras frequências adimensionais: - **linha cheia** - solução analítica e - **marcas** - resultado numérico.

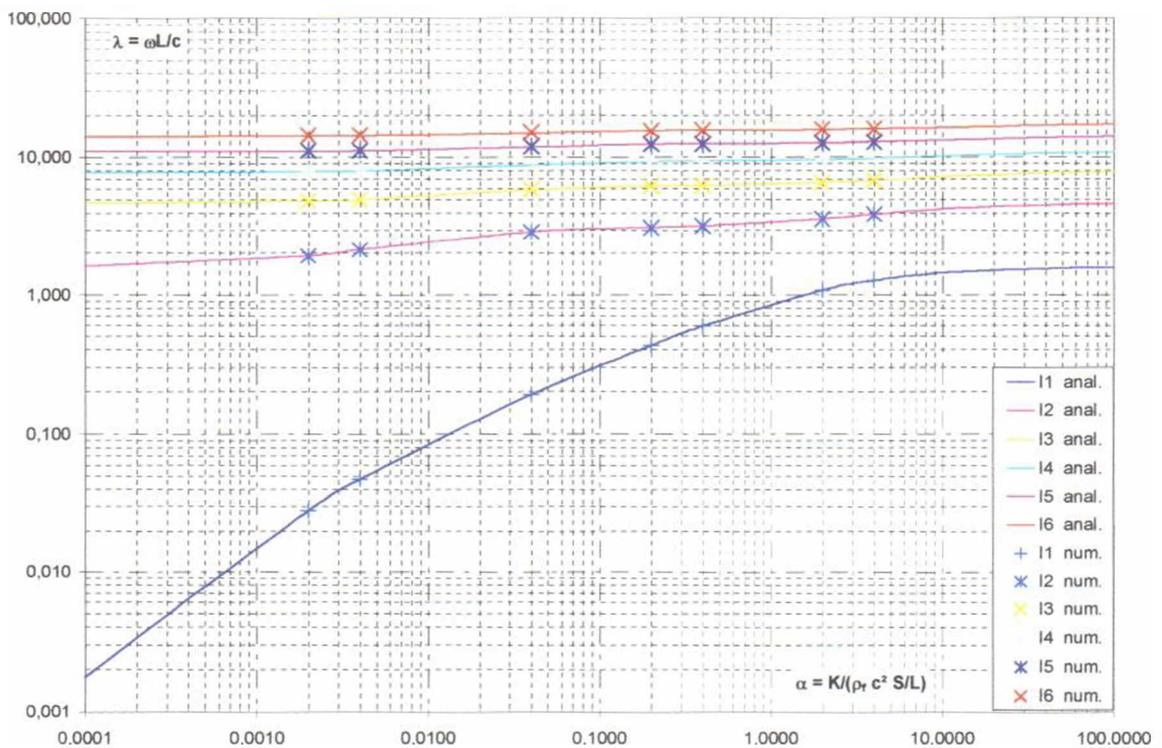


Figura 5.10- Gráfico da variação do comprimento L *versus* primeiras frequências adimensionais: - **linha cheia** - solução analítica e - **marcas** - resultado numérico.

Os resultados numéricos e a solução analítica (5.17) estão em bom acordo. Quando a rigidez da estrutura é desprezível se comparada ao do fluido ($\alpha \ll 1$), observa-se um comportamento típico fluido-estrutura com a presença do modo de massa adicional e de modos acústicos ligeiramente perturbados.

Analisando a Eq.(5.17), algumas observações interessantes podem ser feitas. Para $\alpha \ll 1$ e $\mu \lesssim 1$, a primeira frequência desta equação pode ser aproximada por $\lambda_1^2(\mu + 1) = \alpha \rightarrow \omega_1^2 = K(\rho_s St + \rho_o SL)$ e os modos superiores são obtidos pela equação transcendental $\mu + \tan \lambda/\lambda = 0$ que tende ao comportamento de uma cavidade aberto-aberta. Para $\mu \gg 1$, nota-se a presença de massa adicional, porém os modos acústicos passam a se comportar como os de uma cavidade fechado-aberta.

Quando a rigidez do sólido torna-se preponderante em relação a do fluido ($\alpha \gg 1$), a interação entre fluido e sólido deixa de existir e os resultados de frequência passam a ser os da estrutura seca e da cavidade fechado-aberta.

Os resultados encontram-se resumidos na Tabela 5.7.

Tabela 5.7 - Resumo das variações paramétricas do exemplo 1A-2.

	$\alpha \lll 1$	$\alpha \ggg 1$
$\mu \ggg 1$	<ul style="list-style-type: none"> • massa adicional • cavidade fechado-aberta 	Solução Desacoplada <ul style="list-style-type: none"> • sólido seco • cavidade fechado-aberta
$\mu \lesssim 1$	<ul style="list-style-type: none"> • massa adicional $\omega^2 = K/(\rho_s St + \rho_o SL)$ • cavidade aberta-aberta 	<ul style="list-style-type: none"> • cavidade fechado-aberta

5.3.4 Resposta transiente do caso 1A

A partir do exemplo padrão dado no exemplo 1A-1, aplica-se na face seca da estrutura um carregamento senoidal e uma carga impulsiva. As respostas transientes são avaliadas por intermédio de conceitos da dinâmica das estruturas e comparados com a literatura.

EXEMPLO 1A-3 - Carga impulsiva:

Na presente simulação, a carga impulsiva da Figura 5.11b é aplicada sob o pistão do exemplo padrão 1A-1 com um passo de integração de $\Delta = 0,05s$. A Figura 5.11a mostra o deslocamento do pistão e compara resultados obtidos por Barbosa (1997), conforme Figura 5.11c.

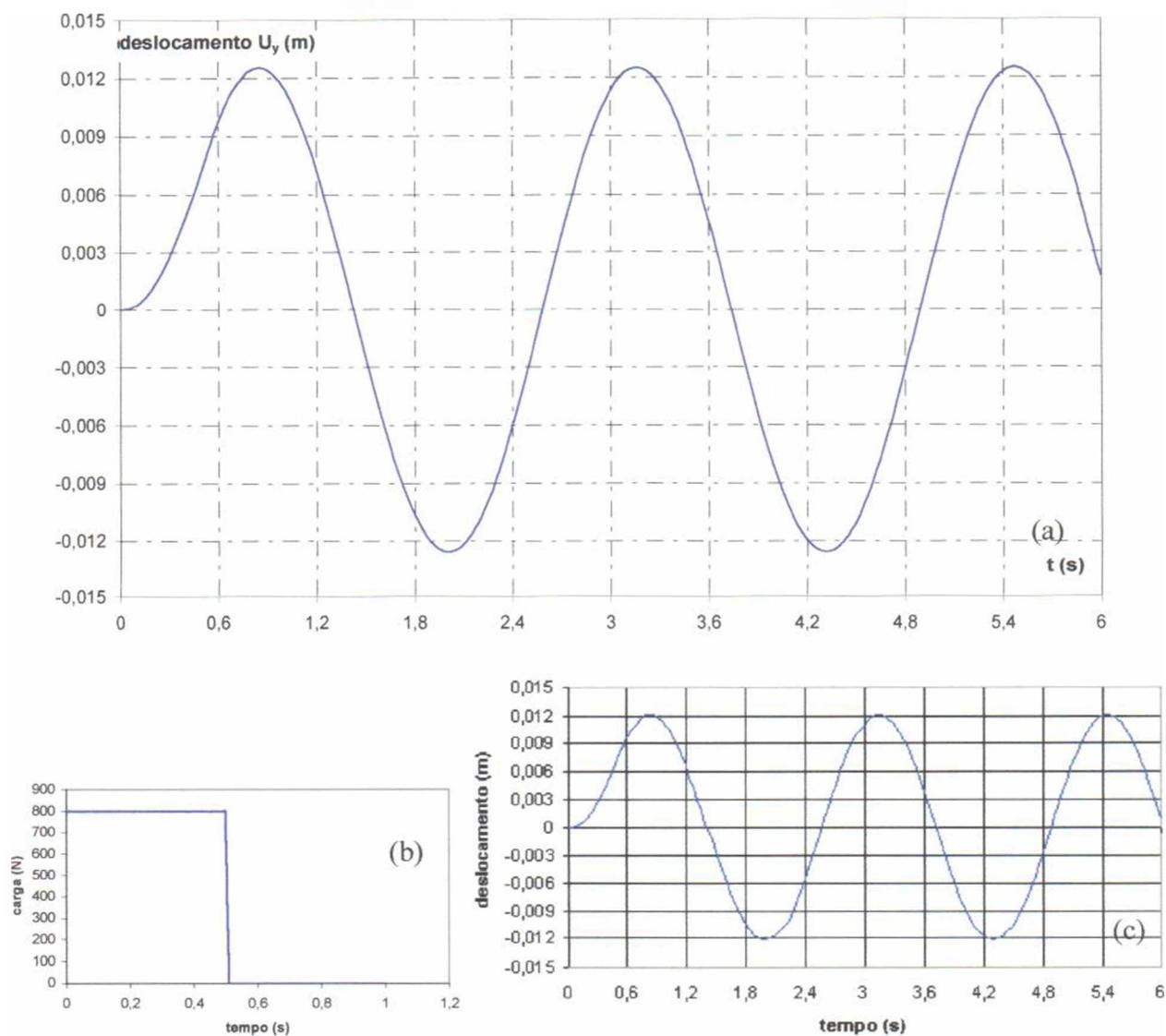


Figura 5.11 - Resposta transiente do sólido(a), carga impulsiva aplicada (b), e resultado da literatura (c), Barbosa (1998).

A Figura 5.12 apresenta a evolução das pressões ao longo do comprimento da cavidade fluida durante o intervalo de integração no tempo.

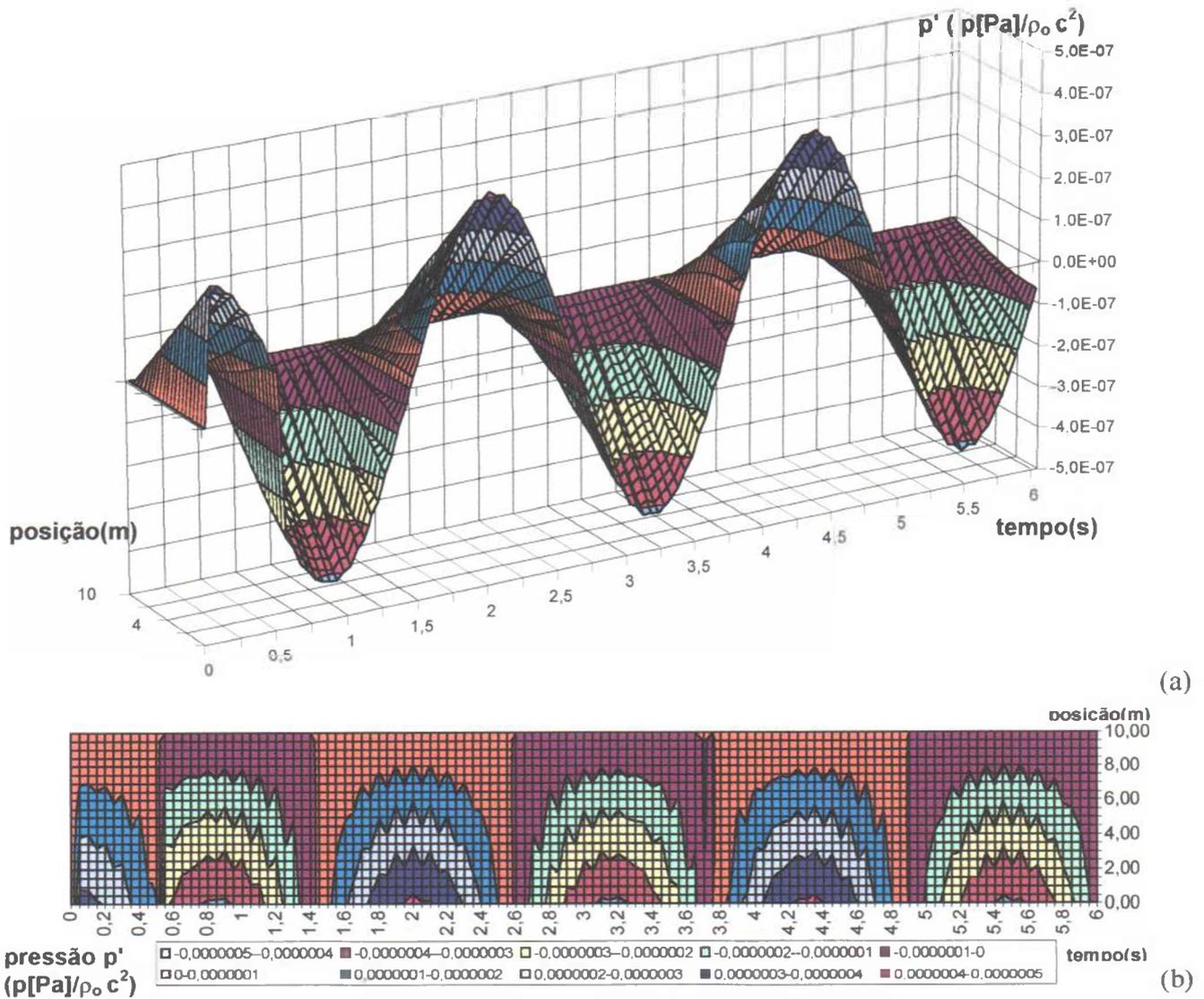


Figura 5.12 - Resposta transiente da cavidade a uma carga impulsiva:

(a) vista em perspectiva e (b) superior.

Na Figura 5.11, a resposta transiente obtida apresenta um bom acordo com o resultado obtido de Barbosa (1997). Após o período transitório durante a aplicação da carga impulsiva, nota-se que o movimento de vibração livre do pistão dá-se próximo a primeira frequência fundamental do sistema acoplado. Graficamente, tem-se $T_1 \cong 2,31\text{s}$, logo $\omega_1 \cong 2,72\text{rad/s}$ e $\lambda_1 = 0,01813$ que comparado ao resultado do exemplo 1A-1 ($\lambda_{1,\text{analítico}} = 0,0182$) observa-se uma discrepância de 0,4%. Esta diferença pode ser devida as imprecisões devido as estimativas de valores obtidas sobre um gráfico.

EXEMPLO 1A-4 - Carga senoidal

O sistema pistão - cavidade é submetido a uma carga senoidal de intensidade $F = 800\text{sen}(\pi t)$ com um passo de integração de $\Delta = 0,02\text{s}$. Os gráficos da Figura 5.13a e 5.13b representam o deslocamento do pistão no tempo comparadas a resultados da literatura, Figura 5.13c.

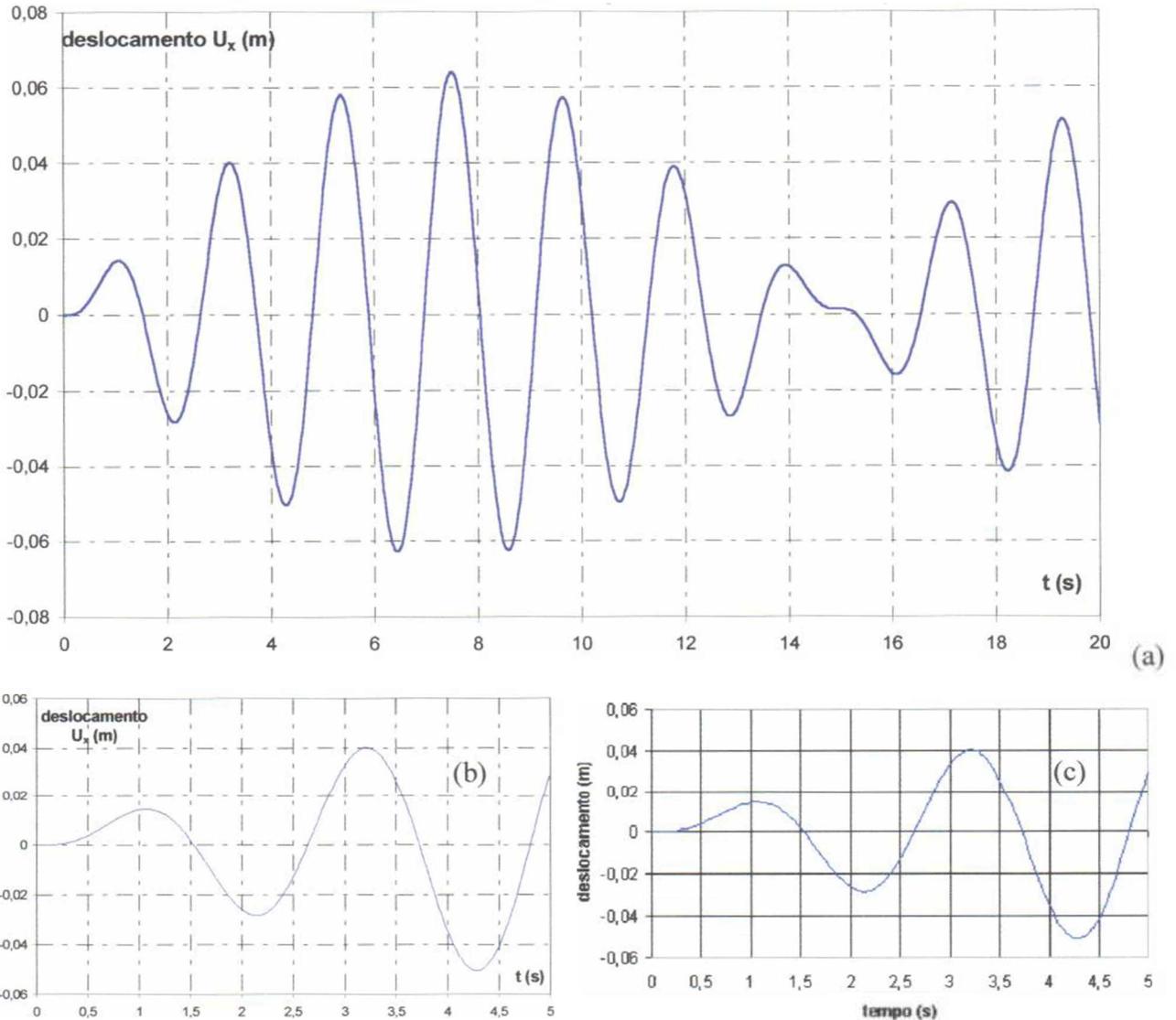


Figura 5.13 - Resposta transiente do sólido(a) excitado por carga senoidal $F = 800\text{sen}(\pi t)$, detalhe da resposta (b) e resultado da literatura (c), Barbosa (1998).

Esta segunda simulação conduziu o sistema acoplado a um regime de batimento. Sabendo que a primeira frequência fundamental do problema é $\omega_1 = 2,73 \text{ rad/s}$, ou seja, $\lambda_1 = 0,0182$, e a excitação possui frequência $\lambda = \omega L/c = \pi \cdot 10/1500 = 0,0209$, observa-se que os resultados estão bastante próximos em ambos os casos. Sabendo que a média entre

as frequências de excitação e natural corresponde a frequência do sistema dinâmico em batimento, tem-se $\lambda = (\lambda_1 + \lambda_{\text{excitação}}) \cong 0,0195$. Mede-se graficamente na Figura 5.13a um período de oscilação do pistão $T_{\text{gráfico}} = 2,17\text{s}$, ou seja, $\lambda_{\text{gráfico}} = 0,0193$. A discrepância entre os resultados de frequência é de 1,3%.

A Figura 5.14 mostra os primeiros instantes da resposta das pressões ao longo do comprimento da cavidade fluida.

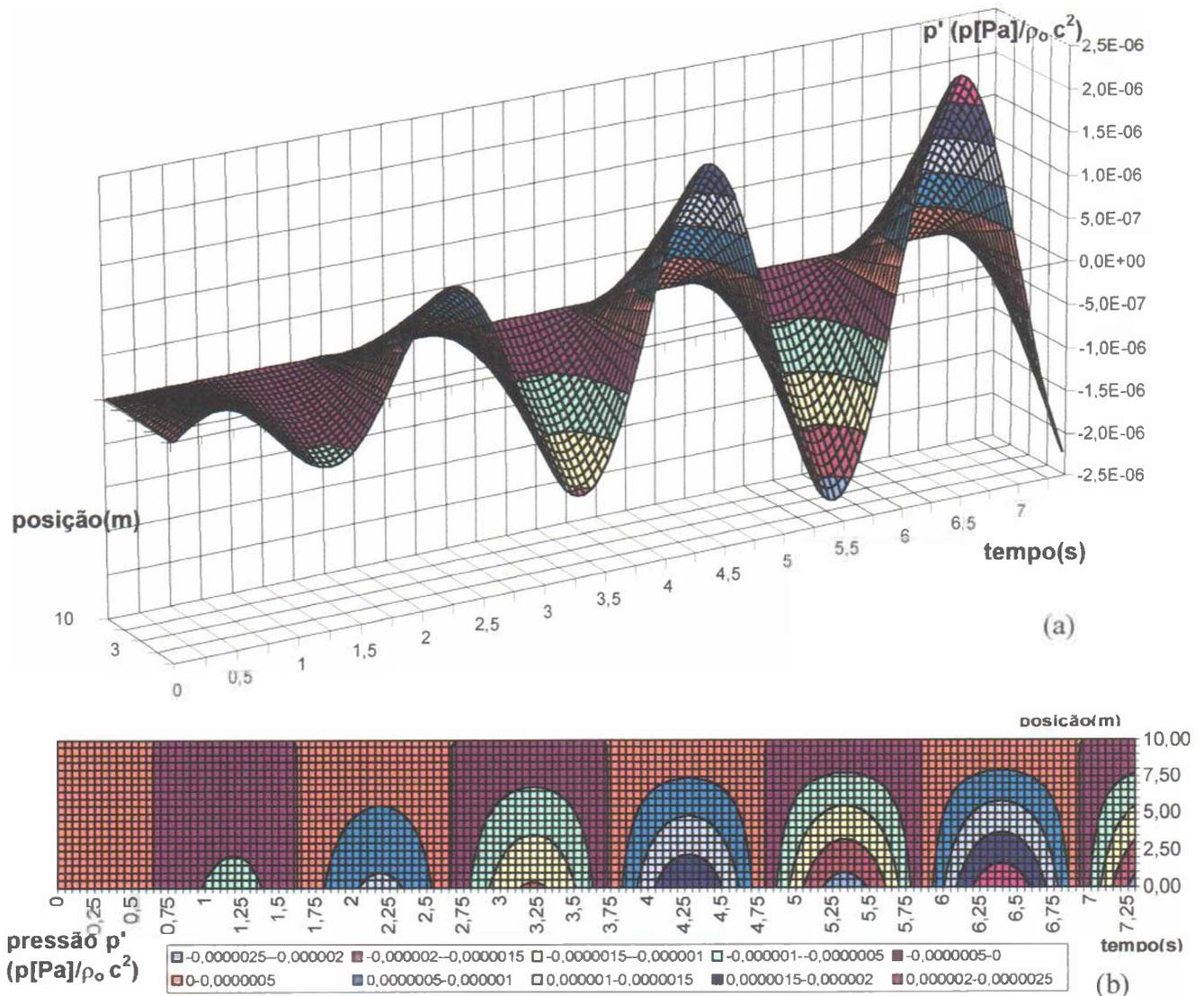


Figura 5.14 - Batimento na resposta transiente da cavidade: (a) vista em perspectiva e (b) superior.

5.4 CASO 1B - CAVIDADE FLUIDA UNIDIMENSIONAL FECHADA

5.4.1 Solução Desacoplada

- Sólido

Idêntica a expressão (5.9),

$$\omega_{\text{Pistão}}^2 = k/m_s \quad \rightarrow \quad \lambda_{\text{Pistão}}^2 = kL^2/(m_s c^2) \quad (5.21)$$

- Fluido

É obtida da expressão (5.8), fazendo $q_2 = q_1 = 0$, ou seja, a cavidade com as extremidades fechadas. Logo,

$$\lambda_n = \frac{\omega_n L}{c} = n\pi, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (5.22)$$

5.4.2 Solução Acoplada

Para a condição de contorno fechada, as paredes da cavidade na posição 2 na Figura 5.2, impedem por completo a variação da vazão acústica ($q_2 = 0$) que aplicado a expressão (5.2) vem,

$$\begin{Bmatrix} p_2 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \lambda & \frac{c}{iS} \sin \lambda \\ -\frac{iS}{c} \sin \lambda & \cos \lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1 \\ i\omega \rho_0 S X_s \end{Bmatrix} \quad (5.23)$$

Da segunda linha do sistema matricial (5.23), tira-se a seguinte identidade,

$$p_1 = \omega \rho_0 c \frac{1}{\tan \lambda} \cdot X_s \quad (5.24)$$

Substituindo (5.24) na Eq.(5.1), a equação harmônica do sistema acoplado massa-mola-cavidade fluida em função de X_s torna-se,

$$\left(k - \omega^2 m_s + \omega \cdot \rho_0 c S \frac{1}{\tan \lambda} \right) X_s = 0 \quad (5.25)$$

Dada a semelhança entre as expressões (5.13) e (5.25) exceto pela mudança de sinal e pela substituição de $\tan \lambda$ por $\cotan \lambda$ no terceiro termo da expressão acima, a adimensionalização segue os mesmos moldes do caso 1A. Logo, a expressão adimensional para o caso 1B é:

$$\left(\alpha - \lambda^2 \cdot \mu + \lambda \cdot \frac{1}{\tan \lambda} \right) \cdot X_s = 0 \quad (5.26)$$

A solução não-trivial da Eq.(5.26) é:

$$\lambda^2 \left(\mu - \frac{1}{\lambda \tan \lambda} \right) = \alpha \quad (5.27)$$

Os gráficos dos campos de pressão e de vazão acústica ao longo da cavidade fluida são obtidos pela substituição da frequência de ressonância de Eq.(5.27) no sistema matricial abaixo:

$$\begin{Bmatrix} p(x) \\ q(x) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\left(\lambda \frac{x}{L}\right) & \frac{c}{iS} \operatorname{sen}\left(\lambda \frac{x}{L}\right) \\ -\frac{iS}{c} \operatorname{sen}\left(\lambda \frac{x}{L}\right) & \cos\left(\lambda \frac{x}{L}\right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega \rho_0 c l / \tan \lambda \\ i \omega \rho_0 S \end{Bmatrix} \cdot X_s \quad (5.28)$$

Desenvolvendo as expressões (5.28), os campos de pressão e de vazão acústica são expressos como segue:

$$\begin{cases} \frac{p(x)}{\omega \rho_0 c X_s} = \frac{1}{\tan \lambda} \cdot \cos\left(\lambda \frac{x}{L}\right) + \operatorname{sen}\left(\lambda \frac{x}{L}\right) \\ \frac{q(x)}{i \omega \rho_0 S X_s} = -\frac{1}{\tan \lambda} \cdot \operatorname{sen}\left(\lambda \frac{x}{L}\right) + \cos\left(\lambda \frac{x}{L}\right) \end{cases} \quad (5.29)$$

onde $p(x)/(\omega \rho_0 c X_s)$ e $q(x)/(i \omega \rho_0 S X_s)$ são as expressões adimensionais dos campos de pressão e de vazão acústica.

5.4.3 Resultados numéricos - Solução de problemas de vibração livre

Seguindo os mesmos passos utilizados na análise do caso 1A, considere-se o exemplo 1B-1 aplicando-se o procedimento analítico do item anterior. E por meio de variações paramétricas dos adimensionais α e μ usando o exemplo 1B-1 tomando como base, estuda-se o comportamento fenomenológico do caso 1B.

EXEMPLO 1B-1 - Caso tipo

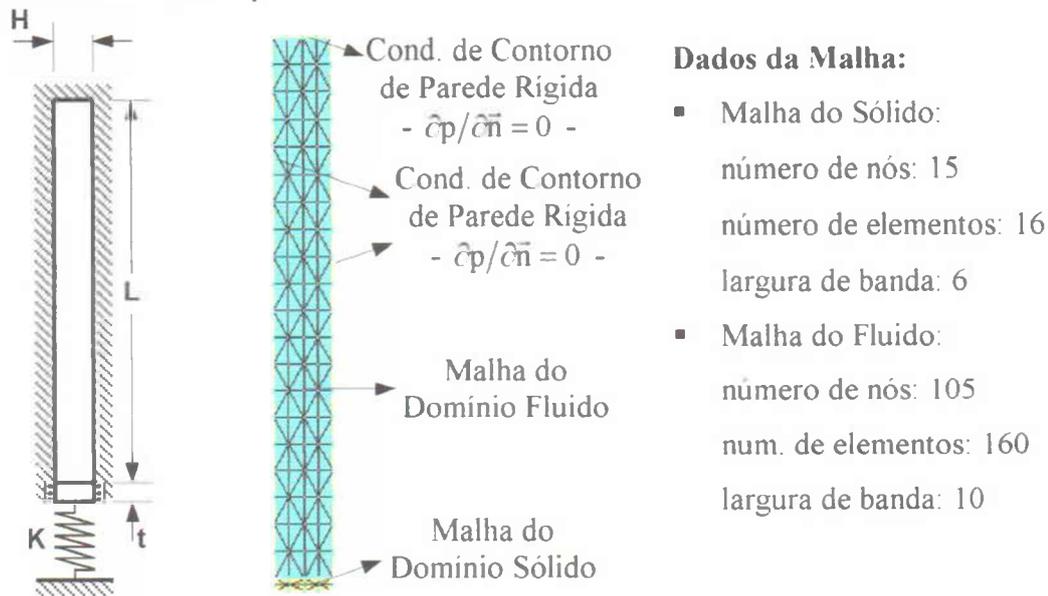


Figura 5.15 - Esquema do exemplo 1B-1, descrição das condições de contorno da malha em elementos finitos e das características da malha utilizada.

Dados do Problema:

- Domínio Sólido

$$E = 2,11 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2 \quad \rho_s = 7800 \text{ kg/m}^3 \quad \nu = 0,30$$

$$t = 0,10 \text{ m} \quad K = 80.000 \text{ N/m}^2 \quad S = 0,1 \times 1,00 \text{ m}^2$$

- Domínio Fluido

$$c = 1500 \text{ m/s}^2 \quad \rho_o = 1000 \text{ kg/m}^3 \quad L = 10,0 \text{ m}$$

Os valores adimensionais do presente exemplo, expressos em (5.30), é:

$$\alpha = \frac{80.000}{1000 \cdot 1500^2 \cdot (1,00/10,0)} = 3,55 \dots \cdot 10^{-4} \quad \& \quad \mu = \frac{7800 \cdot 0,10 \cdot 1,00}{1000 \cdot 10,00 \cdot 1,00} = 0,0780 \quad (5.30)$$

As frequências desacopladas do exemplo 1B-01 estão apresentadas na Tabela 5.8 em termos de ω_n , e os modos de vibração na Figura 5.16. Comparando os resultados numéricos com a solução analítica, observa-se que o resultado numérico é uma boa aproximação. O erro observado não foi superior a 2,5% para os seis primeiros modos de vibração. Os modos de pressão para o exemplo possuem a forma cossenoidal em meia onda (ver Anexo A).

Tabela 5.8 - Frequências naturais desacopladas.

Solução Desacoplada	Estrutura	Fluido				
	$\omega_{\text{Pistão}}$	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
Numérica	10,128	471,75	946,05	1426,05	1914,15	2413,50
Analítica	10,128	471,24	942,48	1413,72	1884,96	2356,19
Erro (%)	0,00	0,11	0,38	0,87	1,55	2,43

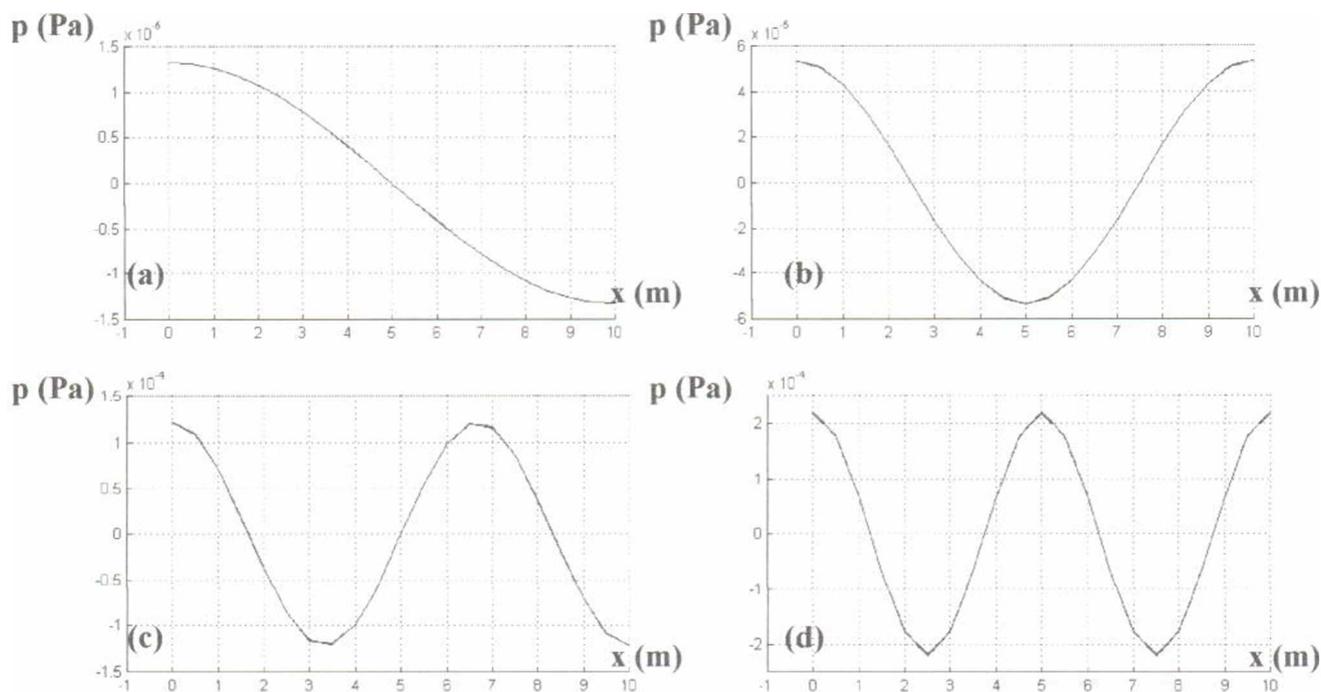


Figura 5.16 - Modos de pressão desacoplados: (a) 1º, (b) 2º, (c) 3º e (d) 4º modos numéricos.

Os resultados do exemplo 1B-1 para o caso acoplado encontra-se nas Figuras 5.17 e 5.18 e na Tabela 5.9. O erro numérico medido entre o resultado numérico e a solução analítica foi inferior a 3%, o que demonstra o bom acordo das primeiras frequências a discretização utilizada.

Tabela 5.9 - Frequências naturais acopladas.

Solução Acoplada	Fluido-Estrutura					
	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6
Numérica	218,70	658,65	1105,95	1563,75	2034,75	2520,90
Analítica	218,70	657,45	1100,10	1547,70	1999,80	2455,80
Erro (%)	0,00	0,18	0,53	1,04	1,75	2,65

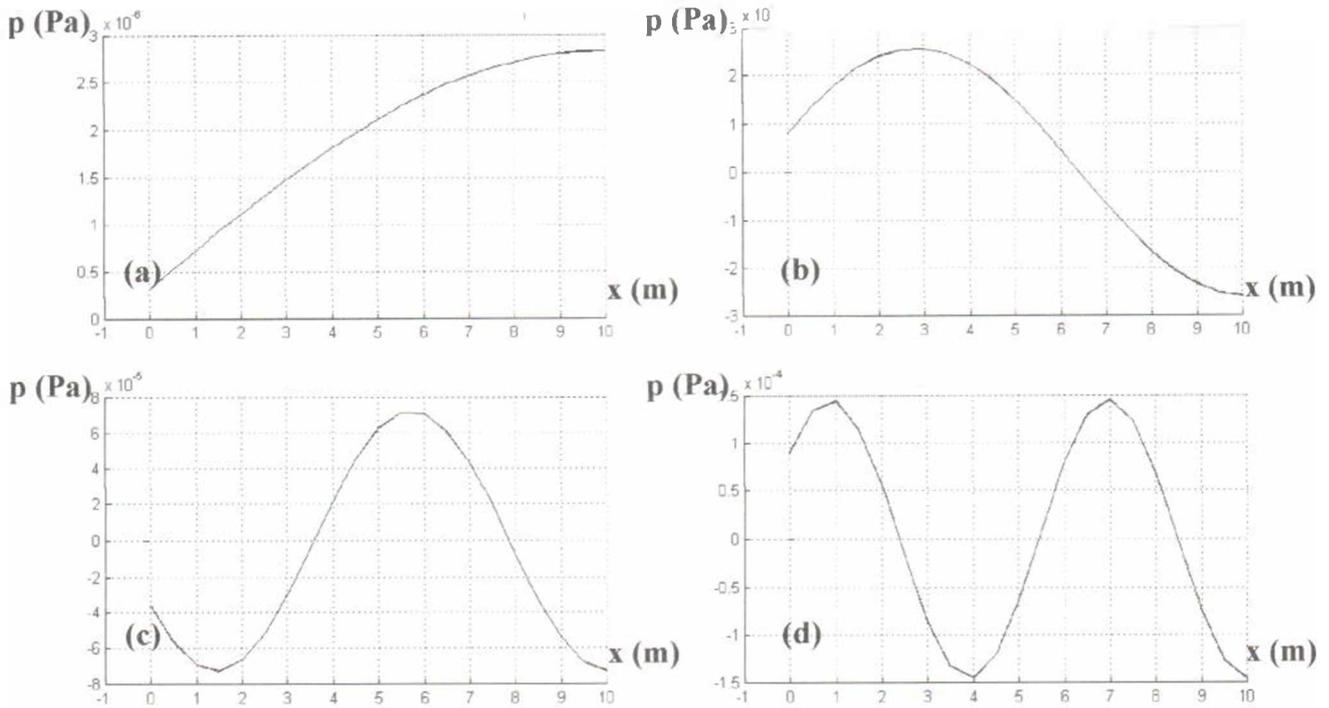


Figura 5.17 - Modos acústico acoplados. (a) 1°, (b) 2°, (c) 3° e (d) 4° modos numéricos.

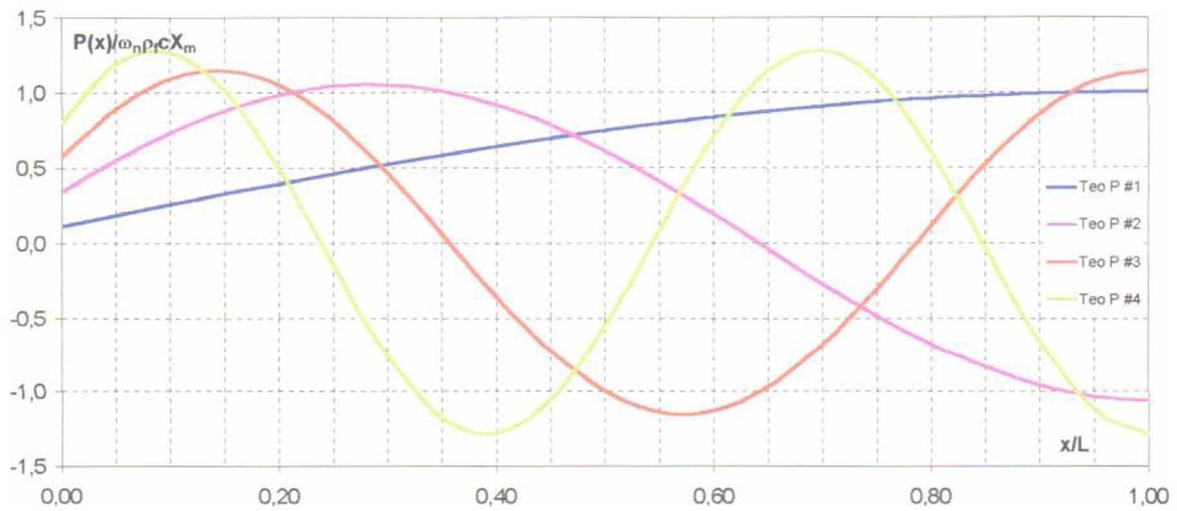


Figura 5.18 - Modos acústicos acoplados - Solução Analítica-

Buscando entender o comportamento dinâmico do caso 1B, pode-se simplificar o sistema acoplado pistão-cavidade fechada por um modelo massa-mola equivalente onde a rigidez é a composição em paralelo da constante de mola K do sólido e do termo de rigidez do fluido $\rho_0 c^2 A^2 / V = \rho_0 c^2 (S/L)$, e a massa é a soma da massa do sólido e da massa adicional do fluido. Medindo-se graficamente na Figura 5.17a, a parcela linear, ou seja, incompressível do primeiro modo de vibração estende-se por $L_a \cong 4,00\text{m}$. Desta forma, a

massa adicional $m_a = \rho_o SL \cong 1000,0 \cdot 1,00 \cdot 4,00$, e assim a frequência fundamental do modelo simplificado é $\omega_{eq}^2 = (K + \rho_o c^2 S/L) / (\rho_o SL_a + \rho_s S t) \cong 217 \text{ rad/s}$. Comparando a frequência ω_{eq} com seu correspondente numérico da Tabela 5.9, observa-se um erro de apenas 0,78%. Contudo, esta simplificação é possível apenas para a frequência fundamental, pois tanto a massa quanto a rigidez equivalentes da cavidade fluida são variáveis para os demais modos de vibração.

Com esta pequena explanação sobre a obtenção da frequência fundamental do sistema acoplado pistão-cavidade fechada, pode-se ilustrar a importância do entendimento dos mecanismos de fluido-estrutura em casos simples com o intuito de desenvolver a compreensão de modelos mais complexos.

Devido as características numéricas do algoritmo QZ, os primeiros modos acústicos para ambos os casos desacoplado e acoplado deste exemplo estão associados a um modo de pressão constante, com frequência numérica tendendo a zero, semelhante a um modo de corpo rígido. Este modo não foi apresentado no trabalho por acrescentar pouca informação a análise do exemplo. Observa-se ainda um resíduo imaginário nos resultados numéricos de frequência que foram desprezados por serem considerados um "ruído" numérico originado da não convergência da solução. Normalmente, problemas internos fluido-estrutura como este, sem condições de contorno do tipo $p = 0$, apresentam dificuldades de convergência dos resultados, conforme observado na seção 4.2.

EXEMPLO 1B-2 - Variação de parâmetros da solução acoplada do caso 1B

Tal como no 1A-2, a análise do caso 1B através da variação dos parâmetros α e μ é feita para compreender os mecanismos da interação fluido-estrutura. Para tanto, procede-se da mesma forma a variação da espessura t do sólido, da constante de mola K , da densidade ρ_o do fluido, e do comprimento L da cavidade. As Tabelas 5.10 a 5.13 e Figuras 5.19 a 5.22 mostram os resultados em frequência comparados com a solução analítica (5.27).

Tabela 5.10 - Resultados da variação da espessura t.

t (m)	α	μ	λ_1 anal.	λ_2 anal.	λ_3 anal.	λ_4 anal.	λ_5 anal.	λ_6 anal.
0,05	0,000356	0,039	1,5121	4,537	7,567	10,603	13,648	16,701
0,10	0,000356	0,078	1,4578	4,383	7,334	10,318	13,332	16,372
0,20	0,000356	0,156	1,3617	4,139	7,023	9,995	13,024	16,087
0,50	0,000356	0,390	1,1496	3,742	6,651	9,984	12,765	15,868
1,00	0,000356	0,780	0,9389	3,493	6,479	9,558	12,667	15,789
t (m)	α	μ	λ_1 num.	λ_2 num.	λ_3 num.	λ_4 num.	λ_5 num.	λ_6 num.
0,05	0,000356	0,039	1,5125	4,5464	7,6093	10,7202	13,8981	17,1620
0,10	0,000356	0,078	1,4581	4,3912	7,3728	10,4254	13,5651	16,8058
0,20	0,000356	0,156	1,3620	4,1459	7,0566	10,0924	13,2402	16,4973
0,50	0,000356	0,390	1,1497	3,7471	6,6790	9,7110	12,9668	16,2596
1,00	0,000356	0,780	0,9389	3,4966	6,5032	9,6405	12,8625	16,1715

Dados: $K = 80000\text{N/m}$; $\rho_s = 7800\text{kg/m}^3$; $c = 1500\text{m/s}$; $\rho_o = 1000\text{kg/m}^3$; $L = H = 1,00\text{m}$; $t = \text{variável}$

Tabela 5.11 - Resultados da variação da rigidez de mola K.

K (N/m)	α	μ	λ_1 anal.	λ_2 anal.	λ_3 anal.	λ_4 anal.	λ_5 anal.	λ_6 anal.
$8,00 \cdot 10^4$	0,000356	0,078	1,45781	4,3830	7,3344	10,3179	13,3322	16,3723
$9,00 \cdot 10^4$	0,00040	0,078	1,45784	4,3831	7,3344	10,3179	13,3322	16,3723
$9,00 \cdot 10^5$	0,0040	0,078	1,46010	4,3837	7,3347	10,3181	13,3323	16,3724
$9,00 \cdot 10^6$	0,040	0,078	1,48239	4,3906	7,3382	10,3202	13,3336	16,3732
$2,25 \cdot 10^8$	1,0	0,078	1,92468	4,5750	7,4349	10,3762	13,3681	16,3954
$1,13 \cdot 10^9$	5,0	0,078	2,61246	5,2165	7,8747	10,6490	13,5356	16,5014
$2,25 \cdot 10^9$	10,0	0,078	2,84659	5,6397	8,3534	11,0402	13,7990	16,6679
$1,13 \cdot 10^{10}$	50,0	0,078	3,07917	6,1531	9,2154	12,2565	15,2609	18,2037
K (N/m)	α	μ	λ_1 num.	λ_2 num.	λ_3 num.	λ_4 num.	λ_5 num.	λ_6 num.
$8,00 \cdot 10^4$	0,000356	0,078	1,4581	4,3912	7,3728	10,4254	13,5651	16,8058
$9,00 \cdot 10^4$	0,0004	0,078	1,4581	4,3912	7,3728	10,4254	13,5651	16,8058
$9,00 \cdot 10^5$	0,004	0,078	1,4604	4,3919	7,3732	10,4256	13,5652	16,8059
$9,00 \cdot 10^6$	0,04	0,078	1,4827	4,3988	7,3767	10,4276	13,5665	16,8067
$2,25 \cdot 10^8$	1,0	0,078	1,9251	4,5835	7,4739	10,4842	13,6015	16,8295
$9,00 \cdot 10^8$	4,0	0,078	2,5196	5,0943	7,8041	10,6848	13,7248	16,9081
$9,00 \cdot 10^9$	40,0	0,078	3,0664	6,1407	9,2277	12,3239	15,4112	18,4567

Dados: $K = \text{variável}$; $\rho_s = 7800\text{kg/m}^3$; $c = 1500\text{m/s}$; $\rho_o = 1000\text{kg/m}^3$; $L = H = 1,00\text{m}$; $t = 0,1\text{m}$

Tabela 5.12 - Resultados da variação da densidade ρ_0 do fluido.

ρ_0 (kg/m ³)	α	μ	λ_1 anal.	λ_2 anal.	λ_3 anal.	λ_4 anal.	λ_5 anal.	λ_6 anal.
10000,0	0,040	0,0078	1,58370	4,6844	7,7983	10,9143	14,0310	17,1481
1000,0	0,40	0,0780	1,67790	4,4597	7,3737	10,3407	13,3463	16,3814
500,0	0,80	0,1560	1,75207	4,2665	7,0734	10,0181	13,0356	16,0939
120,0	3,33	0,6500	1,96616	3,7223	6,5442	9,5930	12,6909	15,8070
50,0	8,00	1,560	2,08912	3,4559	6,3972	9,4962	12,6188	15,7495
10,0	40,0	7,80	2,21675	3,2202	6,3065	9,4392	12,5769	15,7163
1,0	400,0	78,0	2,25929	3,1500	6,2855	9,4262	12,5674	15,7088
ρ_0 (kg/m ³)	α	μ	λ_1 num.	λ_2 num.	λ_3 num.	λ_4 num.	λ_5 num.	λ_6 num.
10000,0	0,040	0,0078	1,5841	4,6944	7,8445	11,0415	14,3023	17,6459
1000,0	0,40	0,0780	1,6783	4,4681	7,4124	10,4484	13,5794	16,8151
500,0	0,80	0,1560	1,7524	4,2735	7,1074	10,1159	13,2528	16,5050
120,0	3,3	0,650	1,9664	3,7267	6,5712	9,6791	12,8914	16,1962
50,0	8,0	1,56	2,0893	3,4595	6,4226	9,5798	12,8159	16,1344
10,0	40,0	7,80	2,2168	3,2233	6,3309	9,5214	12,7720	16,0988
1,0	400,0	78,0	2,2593	3,1530	6,3097	9,5081	12,7621	16,0907

Dados: $K = 9,0 \cdot 10^7$ N/m²; $\rho_s = 7800$ kg/m³; $c = 1500$ m/s; $\rho_0 =$ variável; $L = H = 1,00$ m; $t = 0,1$ m

Tabela 5.13 - Resultados da variação do comprimento L da cavidade.

L (m)	α	μ	λ_1 anal.	λ_2 anal.	λ_3 anal.	λ_4 anal.	λ_5 anal.	λ_6 anal.
0,50	0,002	1,56	0,72513	3,3317	6,3833	9,4922	12,6171	15,7486
1,00	0,004	0,78	0,94060	3,4935	6,4786	9,5581	12,6672	15,7890
10,0	0,04	0,078	1,48239	4,3906	7,3382	10,3202	13,3336	16,3732
50,0	0,2	0,0156	1,66469	4,6821	7,7590	10,8459	13,9368	17,0301
100,0	0,4	0,0078	1,77875	4,7593	7,8438	10,9468	14,0562	17,1686
500,0	2,0	0,00156	2,28727	5,0805	8,0846	11,1561	14,2547	17,3666
1000,0	4,0	0,00078	2,56993	5,3516	8,2979	11,3272	14,3977	17,4906
L (m)	α	μ	λ_1 num.	λ_2 num.	λ_3 num.	λ_4 num.	λ_5 num.	λ_6 num.
0,50	0,002	1,56	0,7250	3,3324	6,3974	9,5455	12,7477	16,0056
1,00	0,004	0,78	0,9406	3,4956	6,4959	9,6167	12,8060	16,0585
10,0	0,04	0,078	1,4827	4,3988	7,3767	10,4276	13,5665	16,8067
50,0	0,2	0,0156	1,6648	4,6837	7,7666	10,8667	13,9810	17,1109
100,0	0,4	0,0078	1,7788	4,7597	7,8457	10,9521	14,0675	17,1892
500,0	2,0	0,00156	2,2873	5,0810	8,0867	11,1617	14,2665	17,3881
1000,0	4,0	0,00078	2,5700	5,3521	8,3001	11,3329	14,4097	17,5123

Dados: $K = 9 \cdot 10^6$ N/m; $\rho_s = 7800$ kg/m³; $c = 1500$ m/s; $\rho_0 = 1000$ kg/m³; $H = 1$ m; $t = 0,1$ m; $L =$ var.

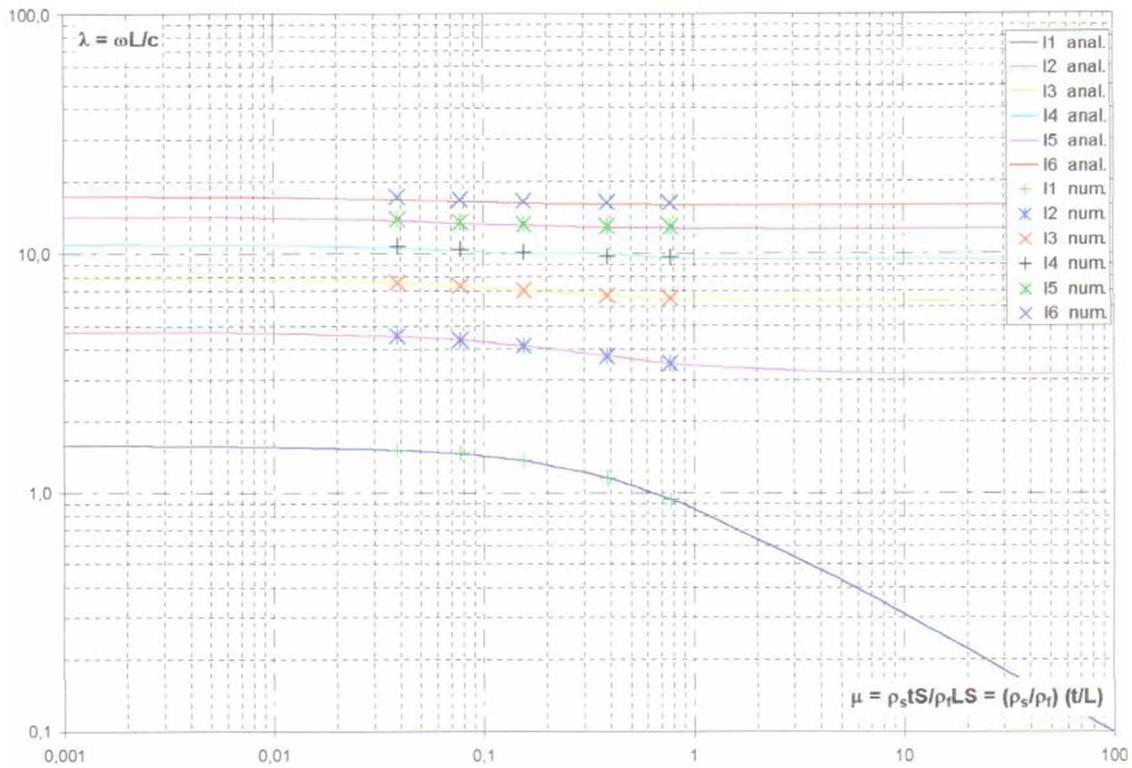


Figura 5.19 - Gráfico da variação de espessura t do sólido *versus* primeiras frequências adimensionais: - **linha cheia** - solução analítica e - **marcas** - resultado numérico.

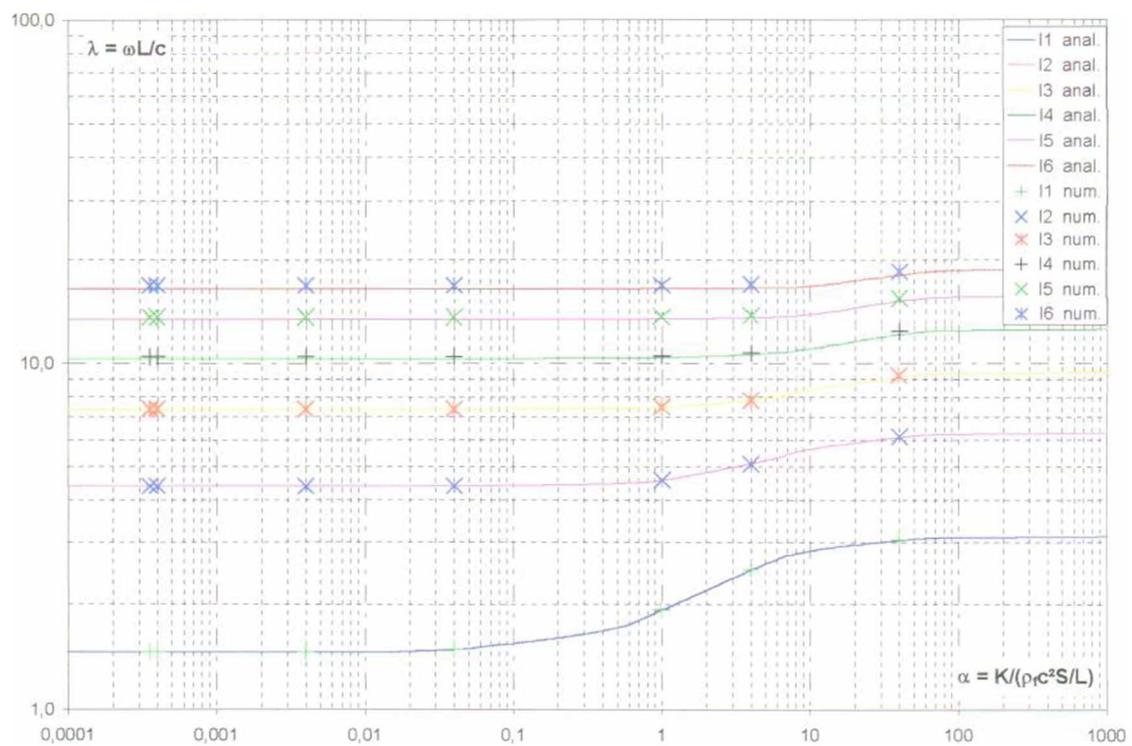


Figura 5.20 - Gráfico da variação da rigidez K do sólido *versus* primeiras frequências adimensionais: - **linha cheia** - solução analítica e - **marcas** - resultado numérico.

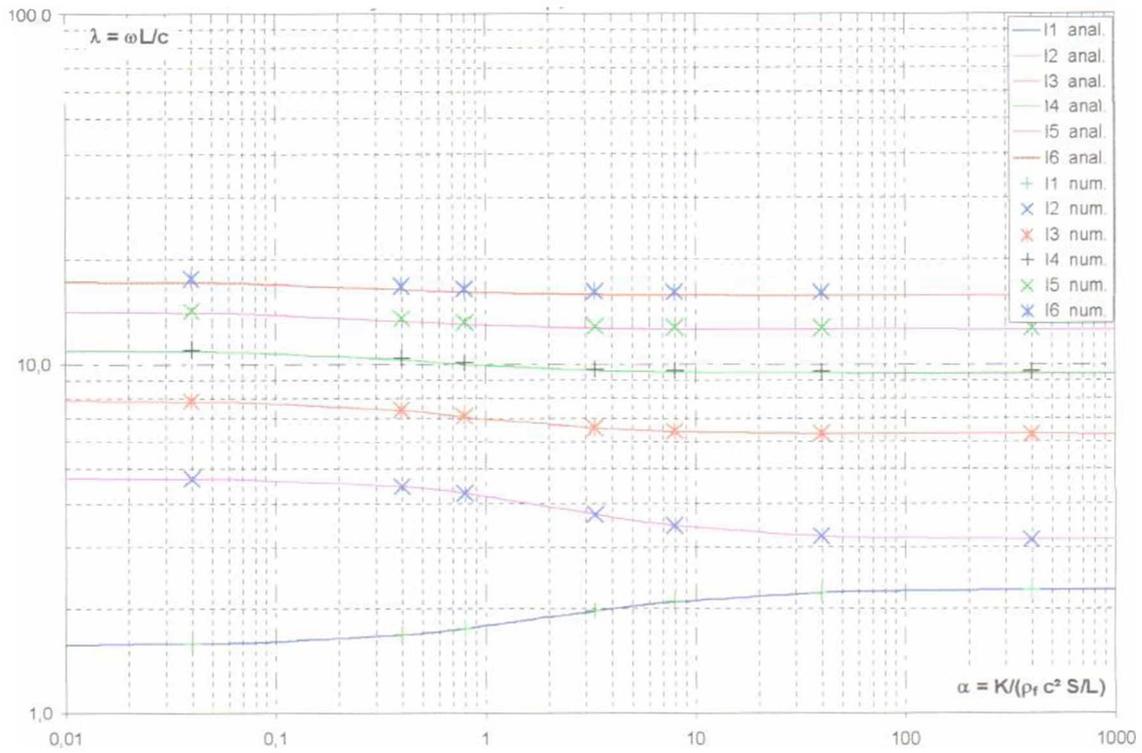


Figura 5.21 - Gráfico da variação da densidade ρ_o do fluido *versus* primeiras frequências adimensionais: - **linha cheia** - solução analítica e - **marcas** - resultado numérico.

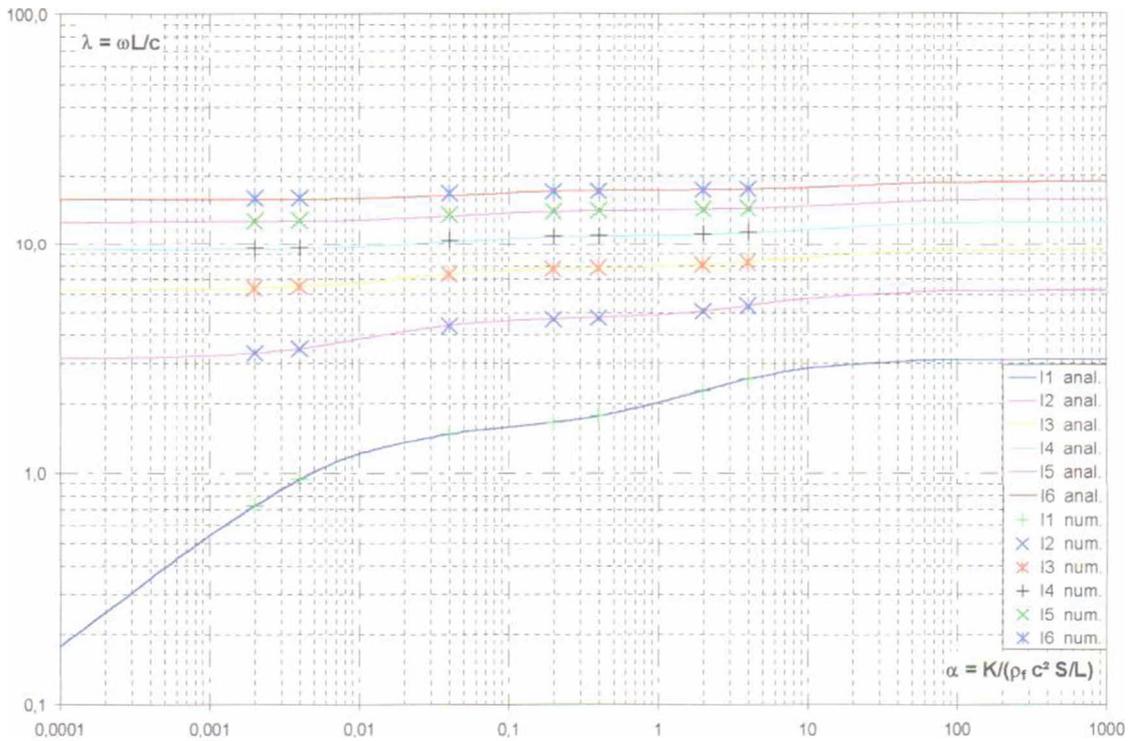


Figura 5.22 - Gráfico da variação do comprimento L *versus* primeiras frequências adimensionais: - **linha cheia** - solução analítica e - **marcas** - resultado numérico.

No caso 1B, as soluções numérica e analítica apresentam um bom acordo e nota-se interessantes resultados sobre os mecanismos da interação fluido-estrutura.

Quando $\alpha \ll 1$ ($K \ll K_{\text{fluido}} = \rho_o c^2 S/L$), o caso 1B encontra-se numa região onde a interação se faz presente. Para $\mu \gg 1$, o fluido acrescenta "rigidez" adicional à frequência fundamental $\lambda_1^2 = (K + \rho_o c^2 SL)/(\rho_s St)$ $(c/L)^2$ do sistema acoplado. Já para $\mu \ll 1$, o sólido passa a ser "invisível" ao fluido que comporta-se como uma cavidade aberto-fechado.

Os resultados encontram-se resumidos na Tabela 5.14.

Tabela 5.14 - Resumo das variações paramétricas do exemplo 1B-2.

	$\alpha \ll 1$	$\alpha \gg 1$
$\mu \gg 1$	<ul style="list-style-type: none"> • "rigidez" adicional $\omega^2 = (K + \rho_o c^2 S/L)/(\rho_s St)$ • cavidade fechado-fechado 	Solução Desacoplada <ul style="list-style-type: none"> • sólido seco • cavidade fechado-fechado
$\mu \ll 1$	<ul style="list-style-type: none"> • cavidade aberto-fechada 	Solução Desacoplada <ul style="list-style-type: none"> • sólido seco • cavidade fechado-fechado

5.4.4 Resultados transientes do caso 1B

A partir dos dados do exemplo padrão 1B-1, estuda-se o comportamento transiente do problema acoplado pistão-cavidade fechada submetido a uma carga impulsiva de curta duração e a um carregamento senoidal. Os resultados são analisados com base da dinâmica de estruturas.

EXEMPLO 1B-3 - Resposta transiente a uma carga impulsiva de curta duração

Utiliza-se neste exemplo transiente os mesmos dados das propriedades físicas e geométricas contidas no exemplo 1B-1. Sob o pistão, uma carga impulsiva quadrada de curta duração é aplicada. A integração no tempo é efetuada com um passo de integração de $\Delta t = 1/(\text{período da carga}) = 0,0005\text{s}$. Na Figura 5.23 apresenta-se o histórico no tempo do deslocamento do pistão para um longo período de cálculo e compara-se com os resultados obtidos na literatura.

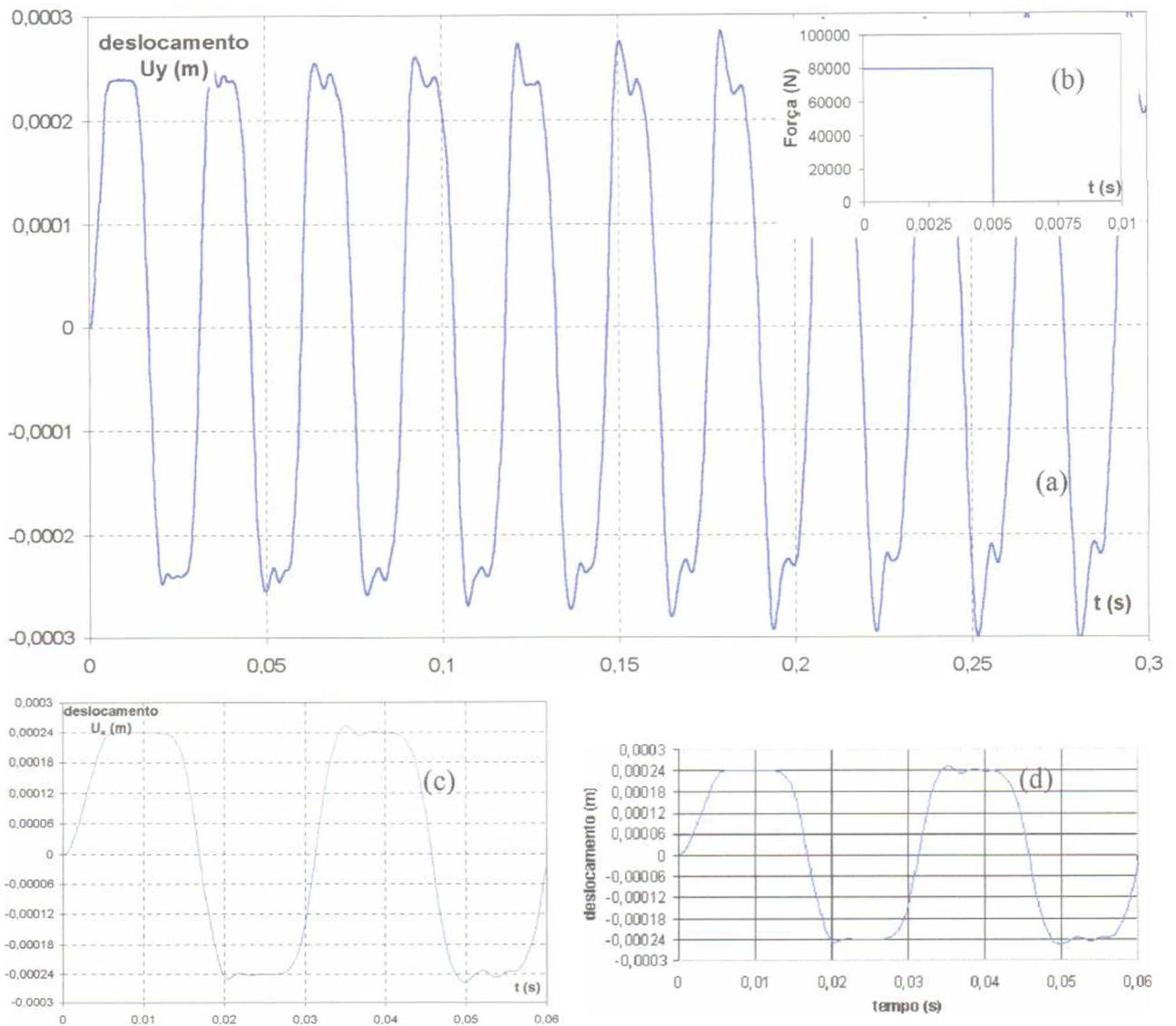


Figura 5.23 - Resposta transiente em deslocamento (a) a uma carga impulsiva de curta duração (b), detalhe da resposta (c) e Barbosa (1998)(d).

Neste exemplo, a onda de pressão decorrente da brusca carga impulsiva percorre toda a extensão da cavidade, refletindo-se na parede rígida para assim efetuar o caminho inverso. O período de propagação de uma onda de pressão numa cavidade aberto-fechada é $T = 4L/c \cong 0,027s$, logo $\omega = 232 \text{ rad/s}$ ou $\lambda = \omega L/c \cong \pi/2$. Sendo a influência pequena da estrutura no sistema acoplado conforme foi apreciado nos exemplos anteriores, observa-se uma discrepância entre os resultados da frequência fundamental ω_1 , Tabela 5.8, e ω é inferior a 7,2%.

Medindo graficamente o período da resposta no tempo do deslocamento, Figura 5.23, obtém-se $T \cong 0,029s$, ou seja, $\omega_{graf.} = 216 \text{ rad/s}$ ou $\lambda_{graf.} = 1,43$. Logo, a discrepância em relação a solução analítica, Tabela 5.8, foi inferior a 2%.

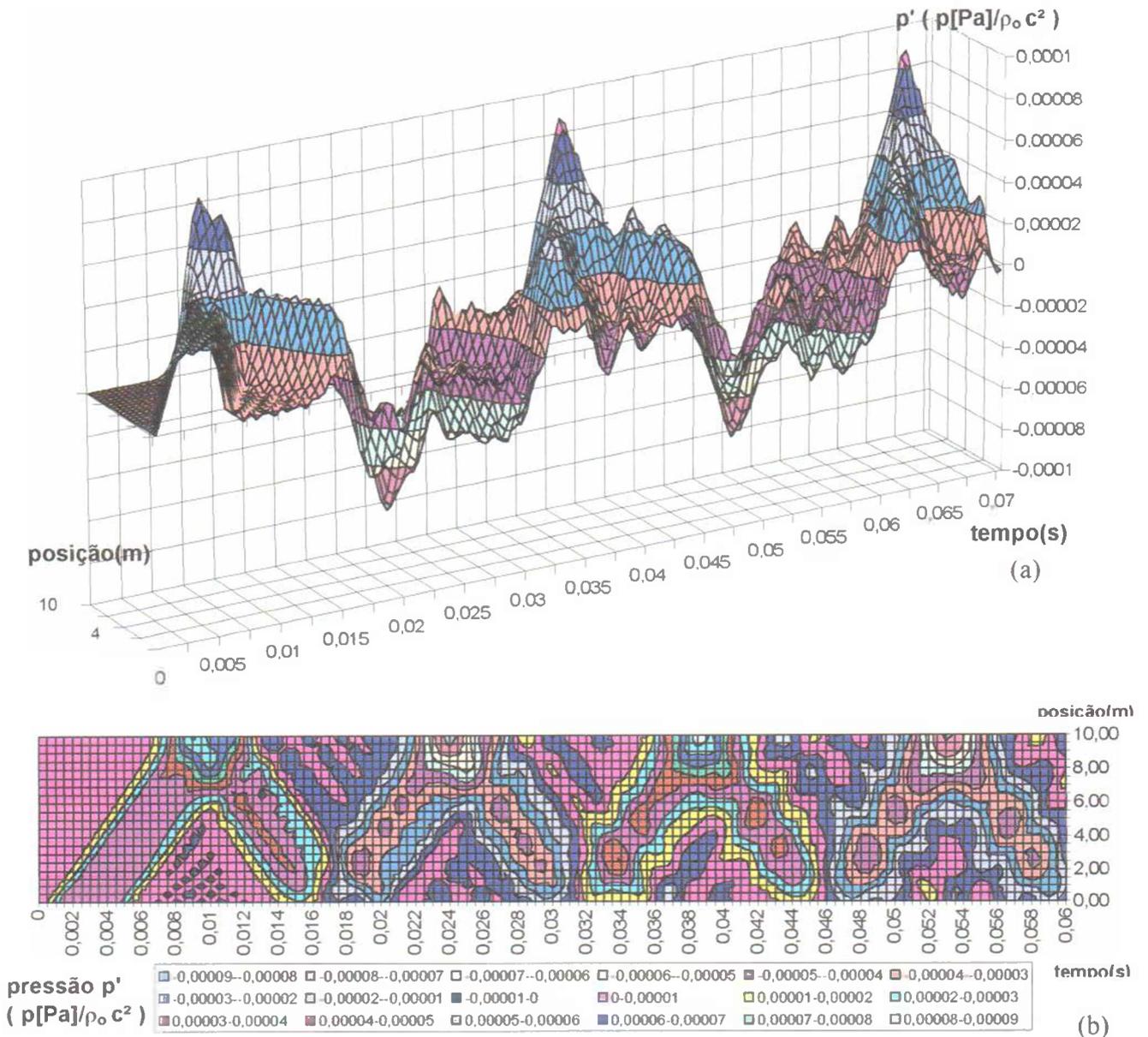


Figura 5.24 - Resposta transiente em pressão adimensional p' : vistas em perspectiva (a) e superior (b).

Nas Figuras 5.23 e 5.24, perturbações crescentes observadas na resposta do deslocamento e da pressão para longos períodos de simulação são oscilações espúrias presentes em problemas propagativos modelizados por elementos finitos não-estabilizados. Uma alternativa para solucionar estas instabilidades numéricas é a utilização de esquemas estabilizantes sobre a técnica dos elementos finitos, Puppim-Macedo (1999).

EXEMPLO 1B-4 - Resposta transiente a uma carga senoidal

O exemplo 1B-4 consiste na aplicação de uma carga senoidal de baixa frequência $F = 80.000 \text{ sen}(2\pi t)$. Na Figura 5.25, compara-se a resposta transiente do pistão com a literatura. Na Figura 5.26, apresenta-se a evolução da pressão adimensional p' ao longo do comprimento L da cavidade e a resposta senoidal na parede do fundo da cavidade fechada.

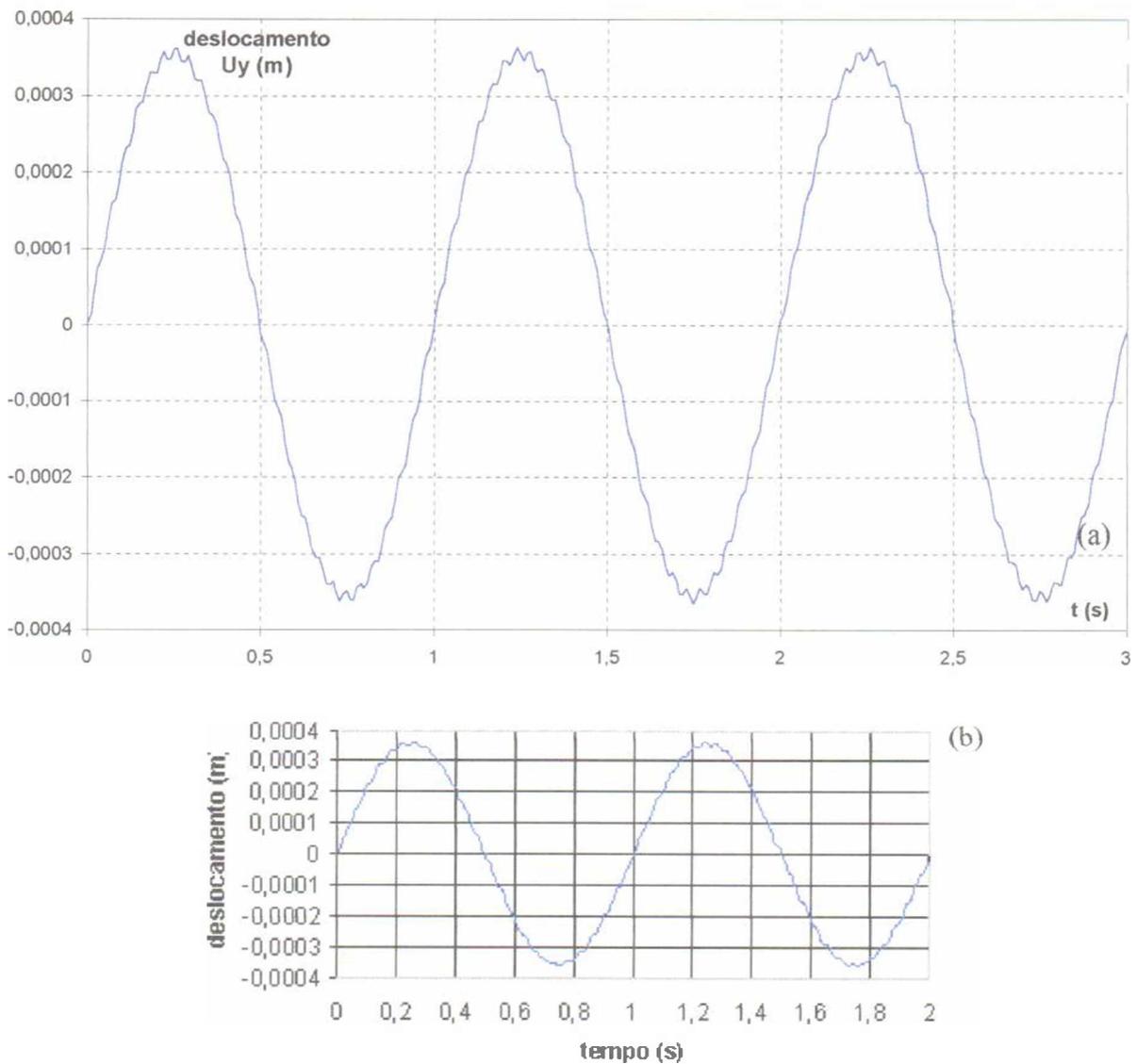


Figura 5.25 - Resposta transiente em deslocamento (a) a uma carga senoidal ($F = 80.000 \text{ sen}(2\pi t)$), e Barbosa (1998) (b).

No exemplo IB-04, a resposta transiente do sistema acoplado foi dominado pela força excitadora F . Devido a baixa frequência da excitação, o problema comportou-se como uma problema estático, ou seja, $u_{\text{pistão}} = F/(K + \rho_0 c^2 S/L) \cong 0,00035 \text{ m}$ em conformidade com o resultado da Figura 5.25. Nota-se ainda uma oscilação parasita na resposta do pistão que deve-se a frequência fundamental do sistema acoplado.

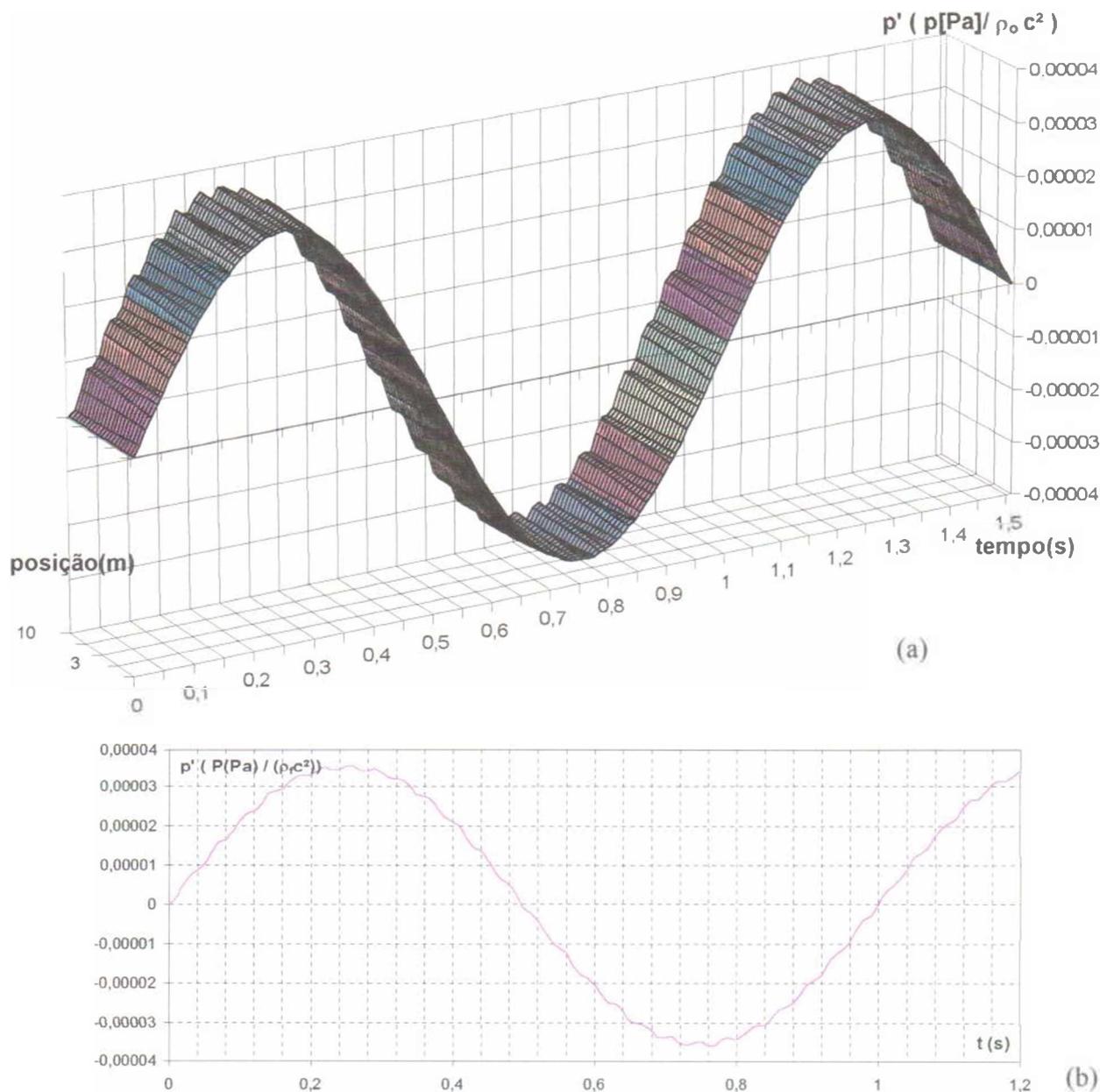


Figura 5.26 - Resposta transiente em pressão adimensional:

(a) vista em perspectiva e **(b)** na parede fechada.

5.5 CASO 2 - CAVIDADE ABERTA CURTA

O caso 2, descrito na Figura 5.27, representa o modelo físico de um pistão acoplado a uma cavidade bidimensional cujas dimensões têm mesma ordem de grandeza. Será estudado o comportamento dinâmico do problema com e sem o efeito da condição de superfície livre. Os resultados obtidos serão comparados com soluções analíticas dos Anexos B e C.

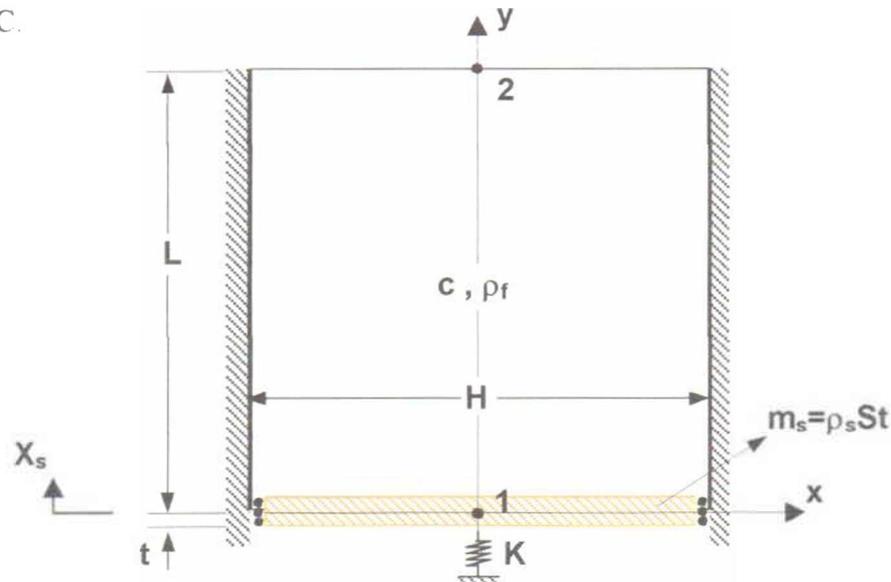


Figura 5.27 - Esquema geral do modelo do caso 2.

5.5.1 Solução desacoplada

▪ Fluido

A solução acústica para uma cavidade retangular bidimensional aberta na extremidade paralela ao fundo flexível, Figura 5.27, é dada por (ver Anexo C):

$$\lambda_{ij}^2 = (\pi L)^2 \cdot \left[\frac{n_x^2}{4H^2} + \frac{n_y^2}{L^2} \right], \text{ para } \begin{cases} n_x = (2i - 1) \\ n_y = j \end{cases} \quad (5-31)$$

onde i e $j = 0, 1, 2, 3, \dots$ e $\lambda = \omega L / c$. Já a solução da mesma cavidade fluida com efeito de superfície livre na extremidade aberta em 2 é dada por:

$$\lambda_i^2 = i \cdot (\pi g / c^2) \tanh(i \cdot \pi H / L) \quad (5-32)$$

onde $i = 1, 2, 3, \dots$ e g é a aceleração da gravidade.

5.5.2 Solução acoplada

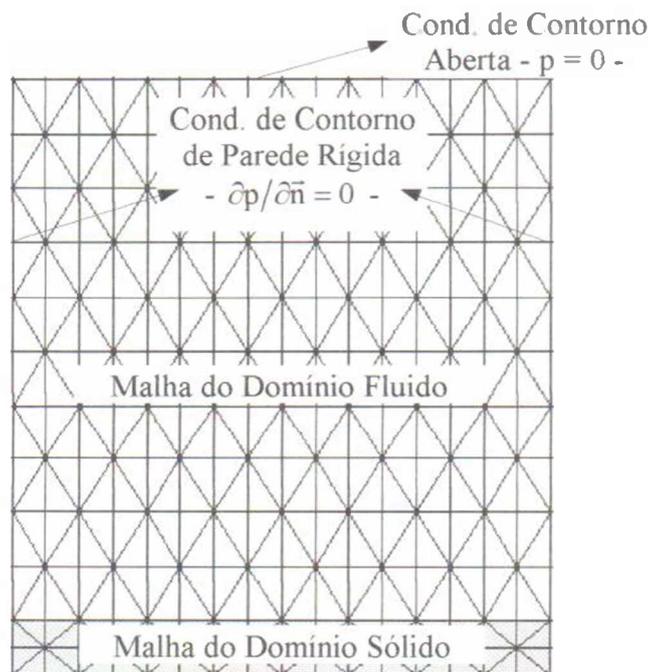
A solução bidimensional de uma cavidade acústica linear com condições de contorno constantes em todos os lados (Anexo C) é obtida através da composição dos modos longitudinais e transversais. No caso acoplado, quando o comportamento do sólido

assemelha-se a de um pistão rígido com deslocamento constante, os modos de vibração transversais não influenciam. Logo, a solução do caso 2 acoplado é obtida pela composição dos modos da cavidade 1D fechado-fechado na direção x , Eq.(A.18), com os do sistema acoplado pistão-cavidade aberta (5.17).

5.5.3 Resultados numéricos do caso 2 no domínio da frequência

Para entender a ação da condição de superfície livre em problemas fluido-estrutura, no caso 2 efetua-se dois exemplos numéricos. No primeiro, estuda-se uma cavidade quadrada $1 \times 1 \text{ m}^2$ com condição de contorno aberta ($p = 0$) na face paralela ao fundo flexível. No segundo, aplica-se a condição de superfície livre na face 2 da Figura 5.27. Os resultados numéricos são comparados com as soluções analíticas apresentadas acima.

EXEMPLO 2-1 - Caso 2 com condição de contorno aberta ($p = 0$)



Dados da Malha:

- Malha do Sólido:
 número de nós: 51
 elemento T3: 64
 largura de banda: 6
- Malha do Fluido:
 número de nós: 187
 elemento T3: 320
 largura de banda: 17

Figura 5.28 - Malha em elementos finitos do exemplo 2-1 com a descrição das condições de contorno.

Dados do Problema:

- Domínio Sólido
 $E = 2,11 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$; $\rho_s = 7800 \text{ kg/m}^3$; $\nu = 0,30$; $t = 0,10 \text{ m}$; $K = 80,000 \text{ N/m}^2$

▪ Domínio Fluido

$$c = 1500 \text{ m/s}^2; \rho_f = 1000 \text{ kg/m}^3; L = 1,00 \text{ m}; H = 1,00 \text{ m}; S = 1,00 \times H = 1,00 \text{ m}^2$$

Os adimensionais α e μ , expressões por (5.16), do exemplo são,

$$\alpha = \frac{80.000}{1000 \cdot 1500^2 \cdot (1,00/1,0)} = 3,55 \dots \cdot 10^{-5} \quad \& \quad \mu = \frac{7800 \cdot 0,10 \cdot 1,00}{1000 \cdot 1,00 \cdot 1,00} = 0,780 \quad (5.33)$$

A Tabela 5.15 mostra as frequências desacopladas e acopladas calculadas por via numérica e analítica. Na solução desacoplada, os resultados numéricos são comparados com a solução de (5.31). A solução analítica para o caso acoplado apresenta a solução no sentido longitudinal apenas; os modos transversais possuem soluções de frequência e forma modal idênticas a solução desacoplada. Com base na Tabela 5.15, o erro numérico foi inferior a 6% denotando o bom acordo dos resultados.

Os primeiros modos de vibração desacoplados e acoplados estão plotados nas Figuras 5.29 e 5.30.

Tabela 5.15 - Resultados em frequência do exemplo 2-1.

Modos Desacoplados					Modos Acoplados				
ω (rad/s)					ω (rad/s)				
Modo		Num.	Anal.	ϵ (%)	Modo		Num.	Anal.	ϵ (%)
Placa	-	10,128	10,128	0,00	Placa - Fluido	1	6,704	6,704	0,00
Fluido	1 - 10	2358,0	2356,5	0,06		2	3178,5	3174,0	0,14
	2 - 11	5287,5	5268,0	0,37		3*	5079,0	5268,0	-3,59
	3 - 20	7128,0	7068,0	0,85		4	7515,0	7447,5	0,91
	4 - 21	8611,5	8496,0	1,36		5*	8020,5	8496,0	-5,60
	5 - 12	9858,0	9715,5	1,47		6*	9688,5	9715,5	-0,28

* - modo transversal Eq.(5.31)

Pela observação conjunta dos modos e frequências próprias deste sistema pode-se concluir que a primeira frequência acoplada é devido ao efeito de massa adicional ($\alpha \ll 1$) (modos 1,2,4), conforme observado no exemplo 1A-1. Outra verificação é o não acoplamento dos modos transversais, haja vista que a condição de movimento da da estrutura induz apenas ondas planas no sistema.

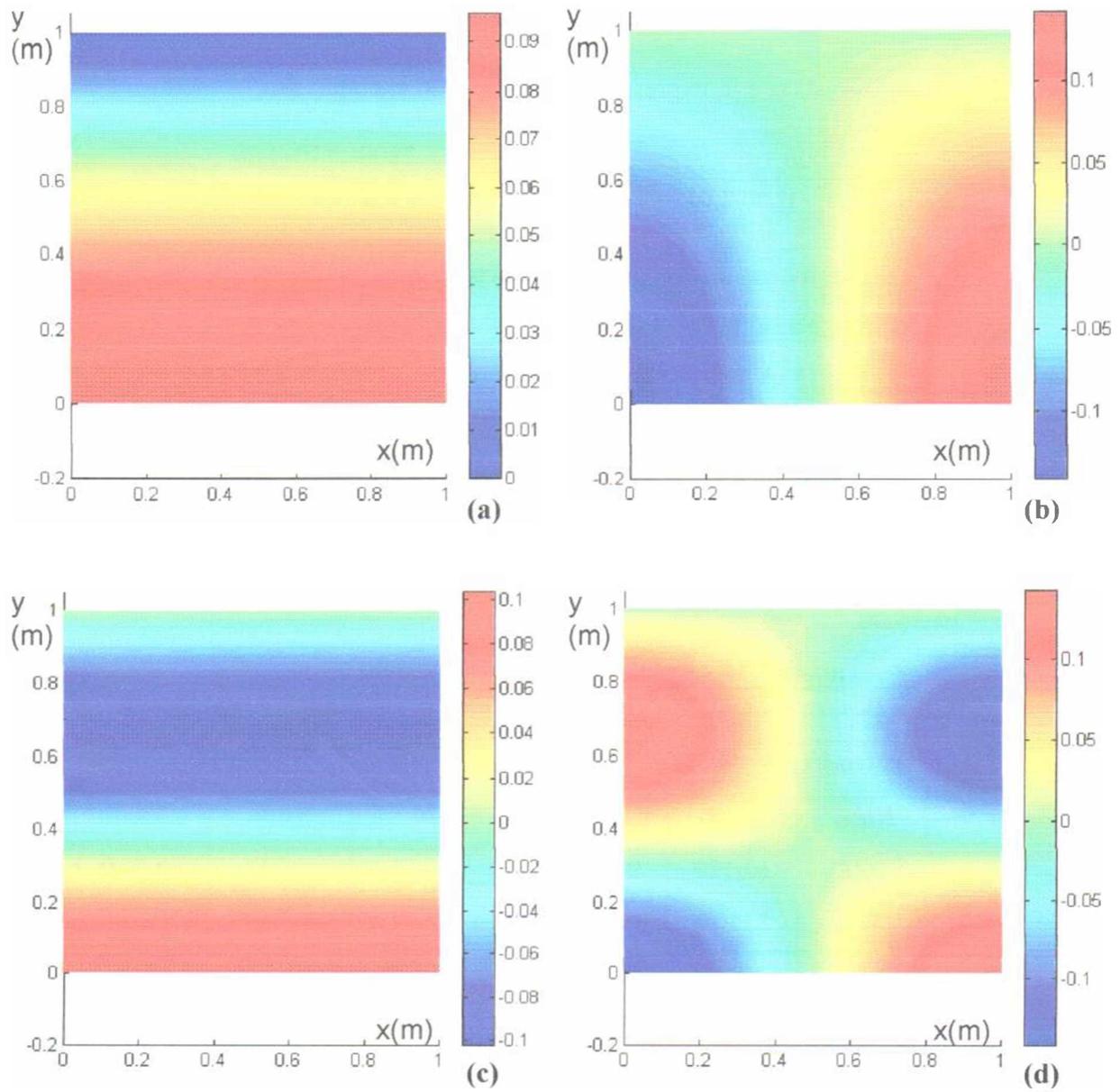


Figura 5.29 - Modos acústicos numéricos desacoplados:
 (a) modo 1-0, (b) modo 1-1, (c) modo 2-0, e (d) modo 2-1.

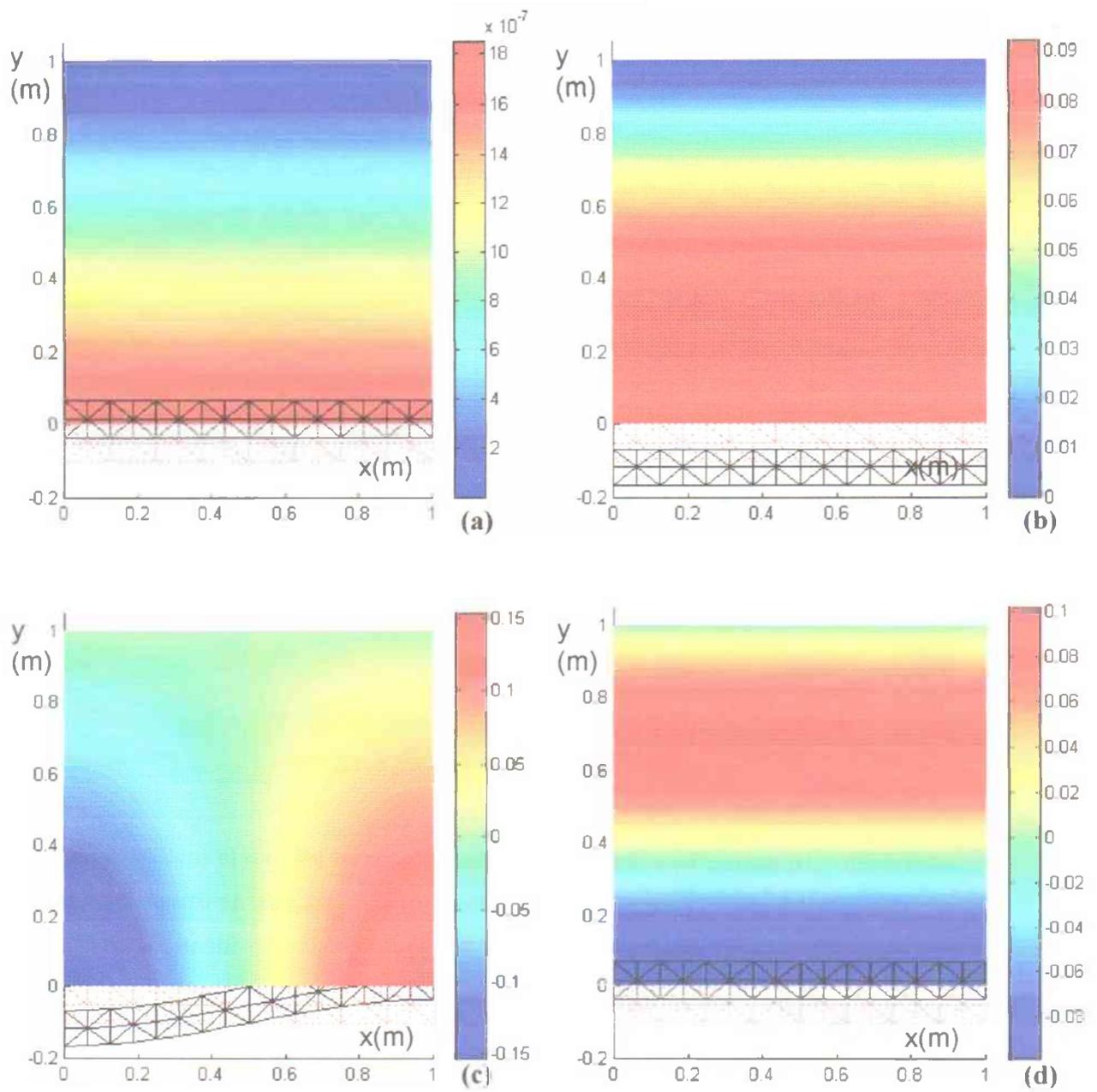


Figura 5.30 - Modos acústicos acoplados:
 (a) 1°, (b) 2°, (c) 3° e (d) 4° modos numéricos.

EXEMPLO 2-2 - Caso 2 com condição de superfície livre

Este exemplo possui os mesmos dados do exemplo 2-1, e aplica-se a condição de superfície livre na face 2, conforme Figura 5.31.

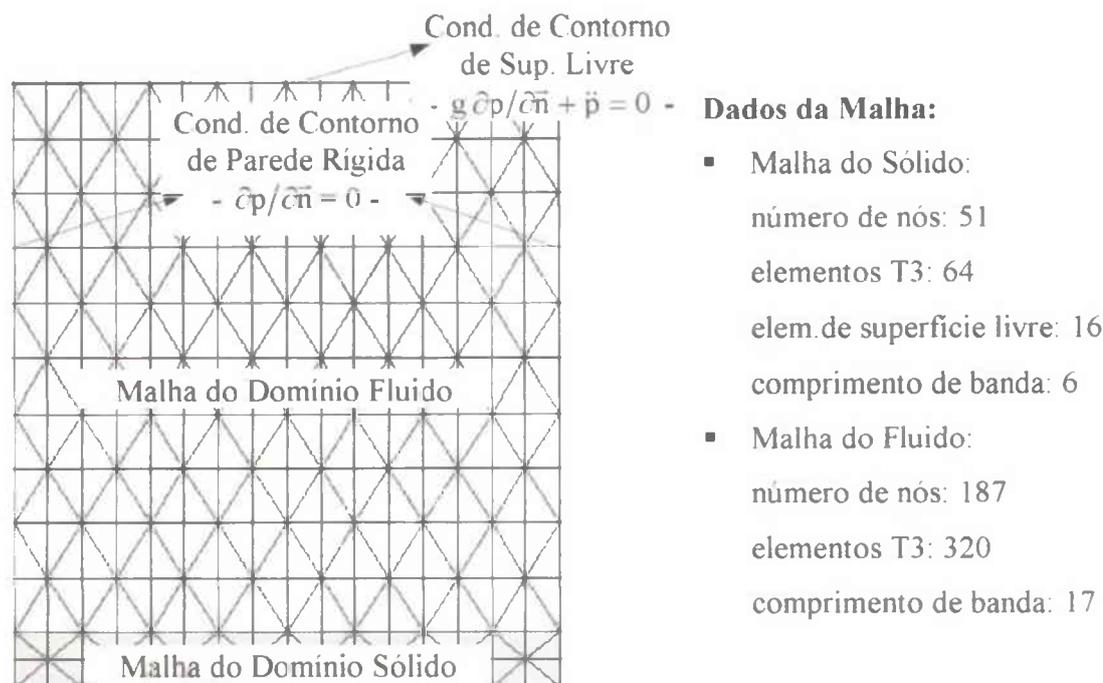


Figura 5.31 - Malha em elementos finitos do exemplo 2-2 com a descrição das condições de contorno.

A Tabela 5.16 resume os cálculos numéricos e analítico para os primeiros modos de vibração. Como exemplo 2-1, a solução analítica para os modos acústicos acoplados apresenta apenas a solução longitudinal, os modos transversais são idênticos a solução desacoplada. O mesmo se processa para os modos de superfície livre onde os resultados do caso acoplado são idênticos ao desacoplado.

Os primeiros modos de vibração desacoplados e acoplados estão plotados nas Figuras 5.32 a 5.35.

Analiticamente, a diferença entre os modos de superfície livre e acústicos tem origem em suas hipóteses iniciais. O fluido em problemas de superfície livre é incompressível e descrito pela equação de Laplace $\nabla^2 \phi = 0$. Enquanto que no problema acústico, o líquido apresenta compressibilidade e é governado pela expressão de Helmholtz.

Logo, a natureza distinta dos problemas supracitados obriga a separação dos resultados na fase de apresentação.

Tabela 5.16 - Resultados em frequência do exemplo 2-2.

Modos Desacoplados									
ω (rad/s)				ω (rad/s)					
Modo		Num.	Anal.	ϵ (%)	Modo		Num.	Anal.	ϵ (%)
Placa	-	10,128	10,128	0,00	Acústico	1 - 10	2358,0	2356,5	0,06
	Superfície Livre	1	5,628	5,541		1,57	2 - 11	5286,0	5268,0
2		8,114	7,851	3,34		3 - 20	7128,0	7068,0	0,85
3		10,317	9,615	7,30		4 - 21	8611,5	8496,0	1,36
4		12,494	11,102	12,54		5 - 12	9784,5	9715,5	0,71
5		14,751	12,411	18,85		6 - 30	12034,5	11781,0	2,15
Modos Acoplados com Superfície Livre									
ω (rad/s)				ω (rad/s)					
Modo		Num.	Anal.	ϵ (%)	Modo		Num.	Anal.	ϵ (%)
Placa - Sup. Livre	1	5,588	5,541	0,84	Placa - Acústico	1	7,103	6,704	5,95
	2	8,114	7,851	3,34		2	3178,5	3174,0	0,14
	3	10,317	9,615	7,30		3*	5079,0	5268,0	-3,59
	4	12,494	11,102	12,54		4	7515,0	7447,5	0,91
	5	14,751	12,411	18,85		5*	8020,5	8496,0	-5,60
	6	17,141	13,598	26,06		6*	9688,5	9715,5	-0,28

* - modo transversal Eq.(5.31)

Observa-se que os resultados acoplados e desacoplados apresentam um bom acordo com a solução analítica para o grau de refinamento da malha utilizada.

Para os modos de superfície livre, o acoplamento com o sólido não gerou alterações significativas, e os modos acústicos são praticamente idênticos ao do exemplo 2-1. Observa-se assim que a utilização da condição de superfície livre altera pouco os resultados de frequência do caso acoplado para o problema de vibração livre.

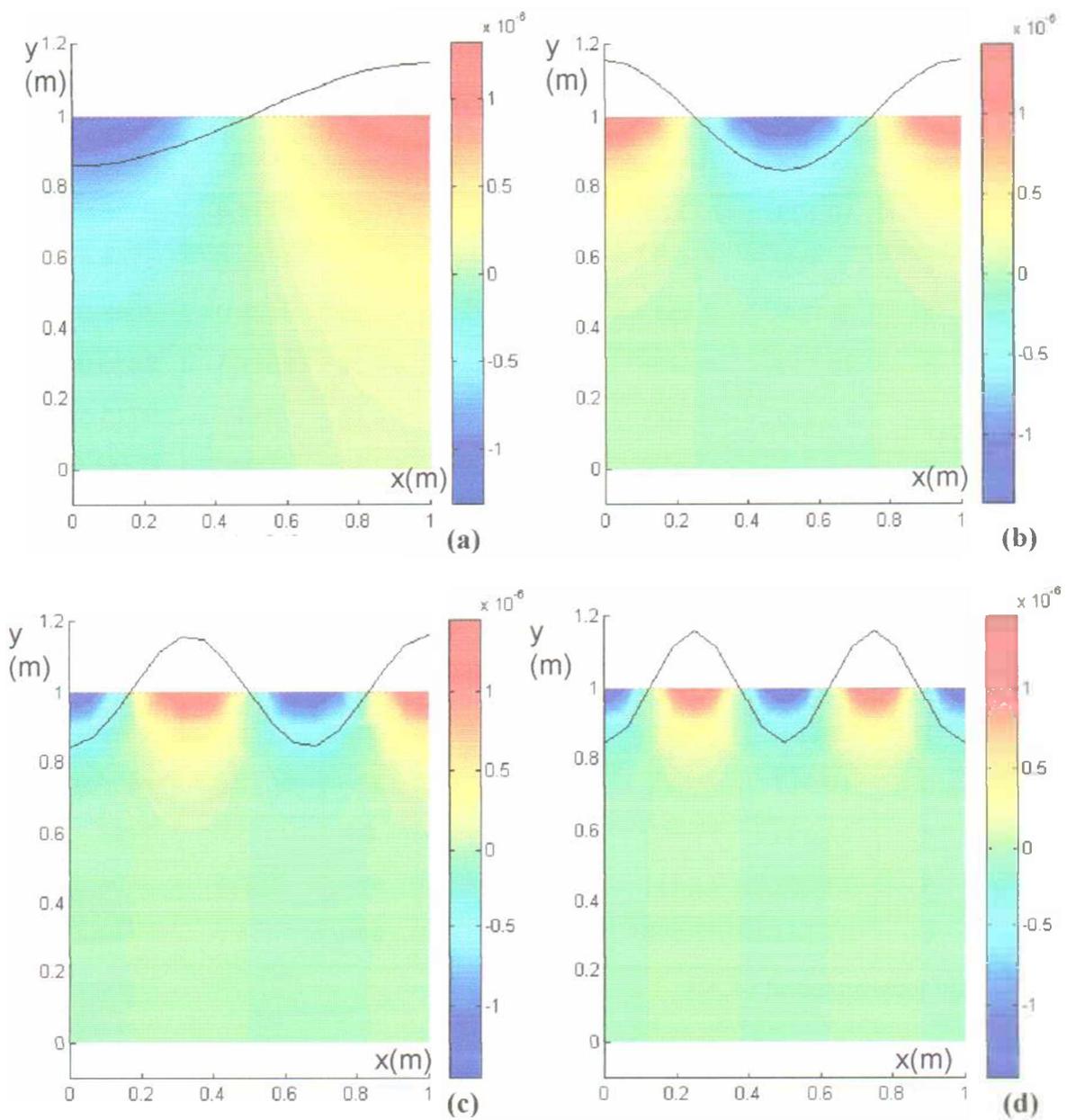


Figura 5.32 - Modos desacoplados de superfície livre:

(a) 1^o, (b) 2^o, (c) 3^o e (d) 4^o modos numéricos.

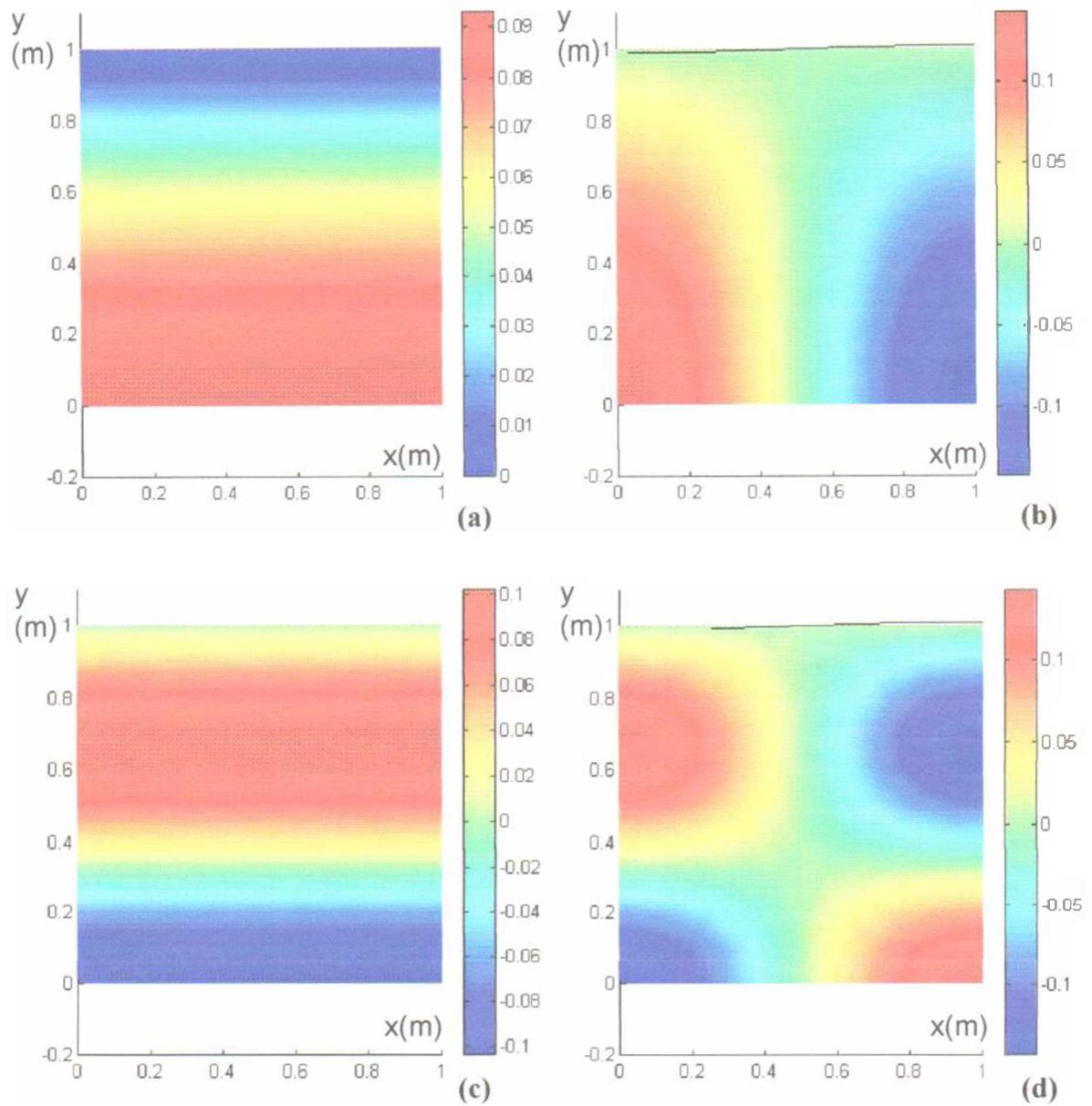


Figura 5.33 - Modos acústicos numéricos desacoplados com superfície livre:

(a) modo 1-0, (b) modo 1-1, (c) modo 2-0, e (d) modo 2-1.

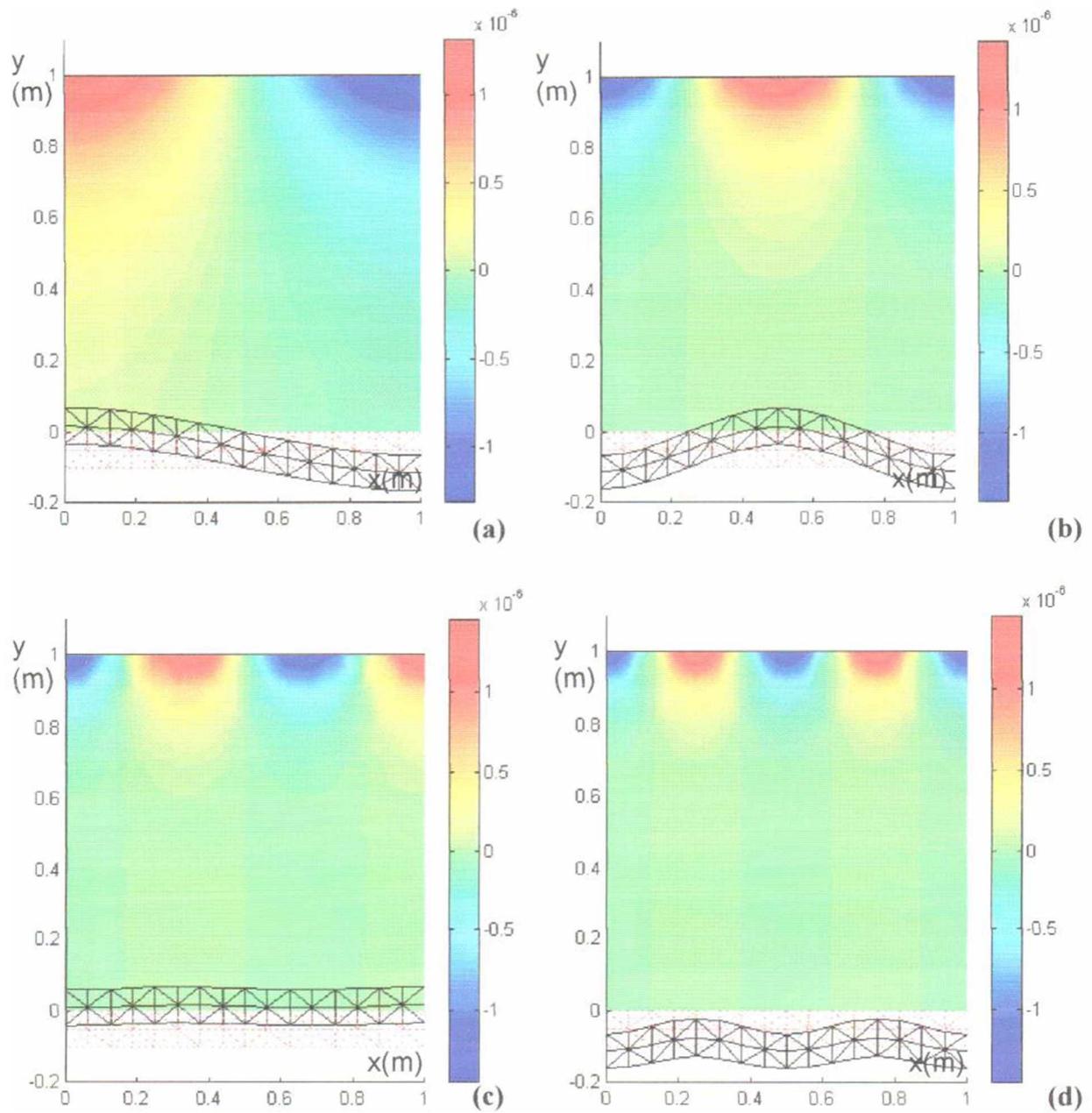


Figura 5.34 - Modos acoplados de superfície livre:
 (a) 1^o, (b) 2^o, (c) 3^o e (d) 4^o modos numéricos.

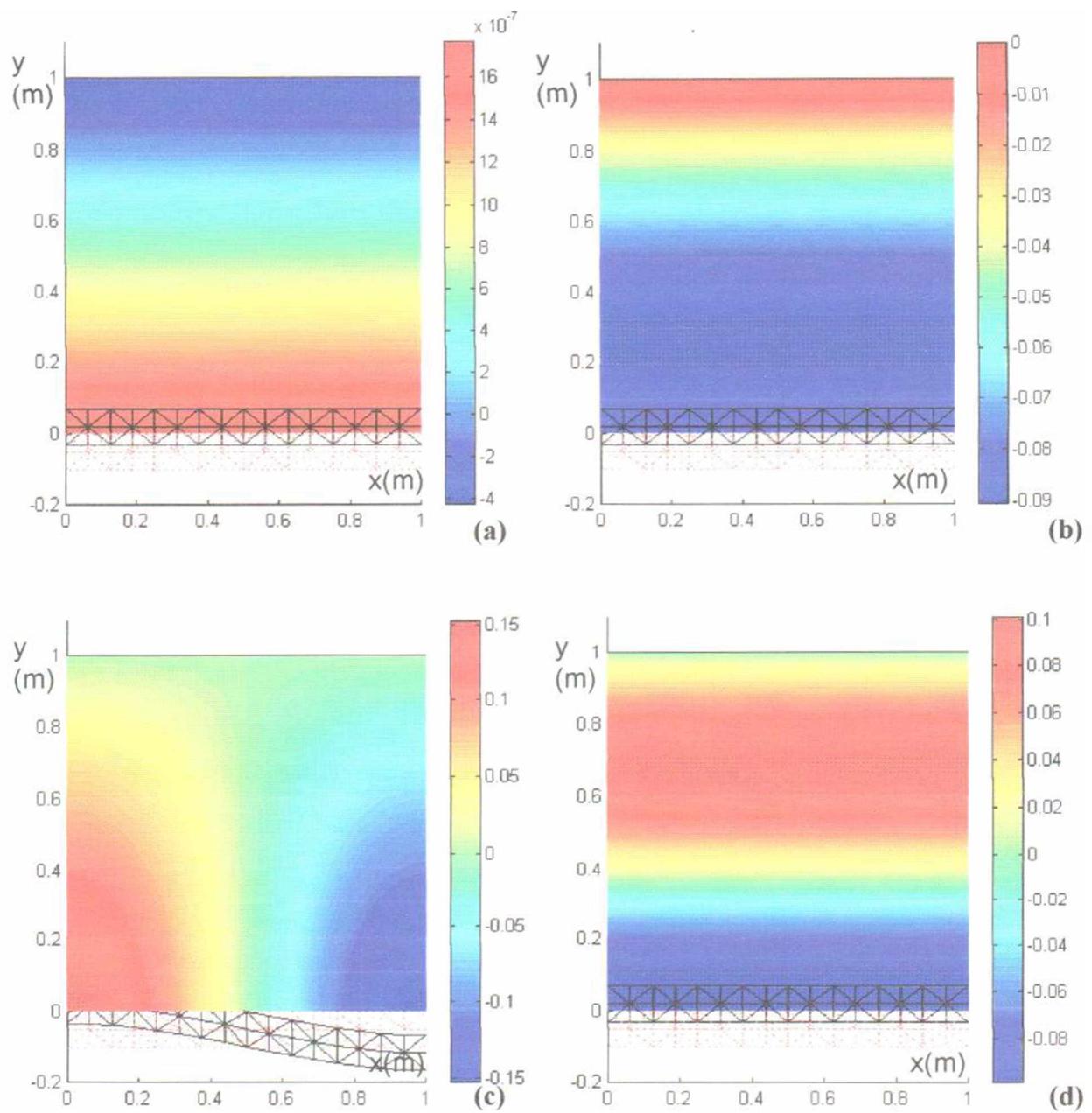


Figura 5.35 - Modos acústicos com superfície livre:
 (a) 1º, (b) 2º, (c) 3º e (d) 4º modos numéricos.

5.6 CASO 3 - CAVIDADE LONGA COM SUPERFÍCIE LIVRE

O caso 3 apresenta a análise do modelo de um sistema acoplado sólido-cavidade semi-infinita semelhante a um problema barragem-reservatório. Conforme Figura 5.36, o domínio fluido consiste numa cavidade retangular longa com fundo rígido e superfície livre e o sólido é engastado no apoio. A condição infinita da cavidade é modelada, neste caso, impondo pressão nula ($p = 0$) no contorno.

5.6.1 Esquema do Problema

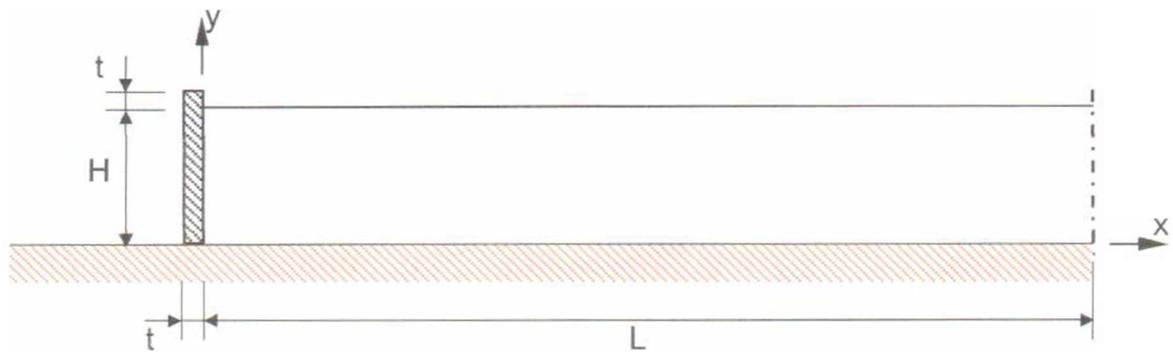


Figura 5.36 - Esquema geral do modelo físico para caso 3.

5.6.2 Solução Desacoplada

Para o exame do problema desacoplado do caso 3, são utilizadas analíticas baseadas nos estudos dos Anexos B e C.

- Sólido

O sólido é modelado como uma viga engastado-livre, as frequências de flexão são expressas por, Blevins (1979):

$$\omega_i = \frac{\xi_i^2}{L^2} \cdot \sqrt{EI/m} \quad , \text{ para } i = 1, 2, 3, \dots \quad (5-34)$$

onde E é o módulo de Young, $m = \rho_s S$ a massa por unidade comprimento, $I = t^3/12$ o momento de inércia da viga e ξ_i são parâmetros adimensionais ($= 1.875, 4.694, 7.855$ e 10.995). Enquanto as frequências devido ao movimento axial são calculadas por:

$$\omega_i = \frac{\xi_i}{L} \cdot \sqrt{E/\rho_s} \quad (5-35)$$

onde $\xi_i = (2i-1)\pi/2$ para $i = 1,2,3,\dots$

- **Cavidade Fluida**

A solução de uma cavidade retangular fechado-aberta em ambas as direções x e y é:

$$\omega_{ij}^2 = (\pi c)^2 \left[\frac{n_x^2}{4L^2} + \frac{n_y^2}{4H^2} \right], \text{ para } n_x = (2i-1) \text{ e } n_y = (2j-1) \quad (5-36)$$

onde i e $j = 0,1,2,3,\dots$, e c a velocidade do som no fluido

Aplicando a condição de superfície livre no contorno paralelo ao fundo rígido da cavidade, a solução em frequência de uma cavidade retangular fechado/aberto fechado/superfície livre é dada por:

$$\omega_{ij}^2 = (\pi g) \cdot \frac{n_x}{2L} \tanh\left(\pi H \frac{n_x}{2L}\right), \text{ para } n_x = (2i-1) \quad (5-37)$$

onde $i = 1,2,3,\dots$ e g é a aceleração da gravidade.

5.6.3 Resultados Numéricos do caso 3

As simulações numéricas do caso 3 consistem num total de três exemplos. Primeiramente, no exemplo 3-1 apresenta-se as características físicas e geométricas do modelo, e analisa-se seu comportamento dinâmico desacoplado comparando com as soluções analíticas tratadas acima. O exemplo 3-2 é o estudo da solução acoplada. São apresentados os resultados do problema de vibrações livres e de uma análise transiente. Por fim, no exemplo 3-3 transforma-se o sólido numa estrutura rígida apoiada em roletes comportando-se como um pistão. Analisa-se os modos de vibração acoplados obtidos comparando com o caso 3-2 e a resposta transiente para um carregamento senoidal.

EXEMPLO 3-1 - Solução Desacoplada

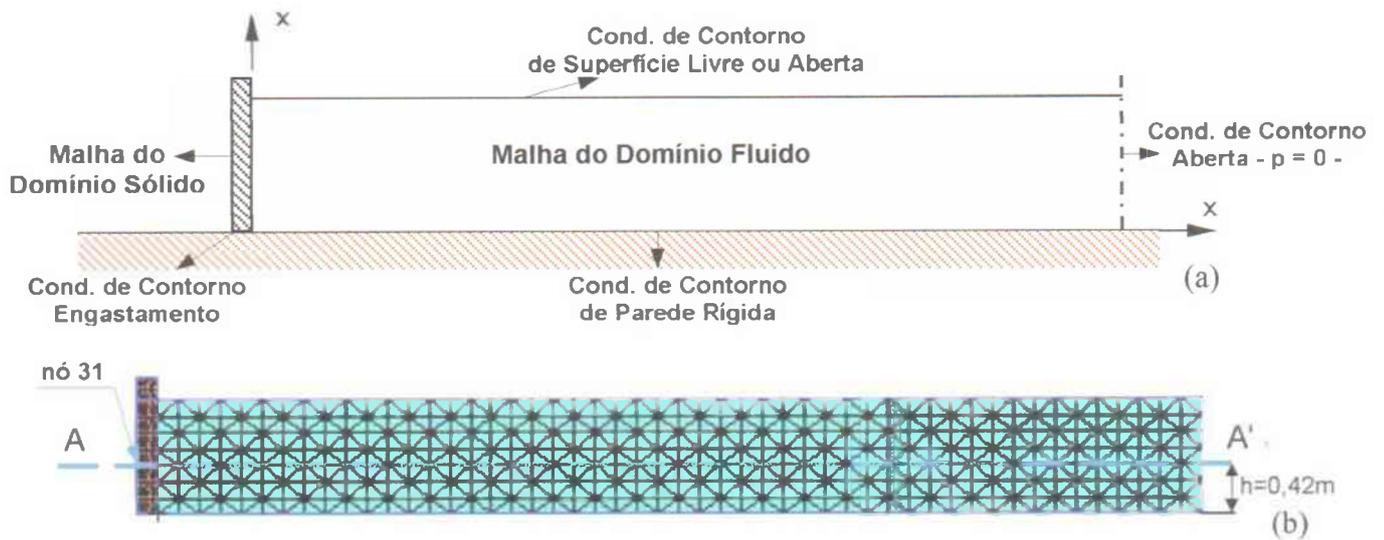


Figura 5.37 - Esquema do exemplo 3-1(a), e malha em elementos finitos (b).

Dados do Problema:

- | | |
|--|--|
| <ul style="list-style-type: none"> ▪ Malha do Fluido: <ul style="list-style-type: none"> num. de nós: 408 elementos T3: 700 elem. de sup. livre: 50 comprimento de banda: 17 ▪ Domínio Sólido <ul style="list-style-type: none"> $E = 2,11 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$; $t = 0,20\text{m}$ ▪ Domínio Fluido <ul style="list-style-type: none"> $c = 1500 \text{ m/s}^2$; $L = 10,00\text{m}$; | <ul style="list-style-type: none"> Malha do Sólido: <ul style="list-style-type: none"> num. de nós: 50 elementos T3: 72 comprimento de banda: 10 $\rho_s = 7800\text{kg/m}^3$; $\nu = 0,30$; $\rho_f = 1000\text{kg/m}^3$; $H = 1,00\text{m}$; $S = 1,00 \times H = 1,00\text{m}^2$ |
|--|--|

Para melhor compreender o comportamento dinâmico do sistema acoplado, o exemplo 3-1 avalia a solução desacoplada no domínio da frequência. A Tabela 5.17 resume os resultados de frequência desacoplada dos domínios sólido e fluido.

A solução analítica do sólido é obtida das Eqs.(5.34) e (5.35) para os modos de flexão e axial, respectivamente. O resultado numérico não apresentou boa concordância

para os modos flexionais. O erro numérico alto deve-se em parte ao elemento triangular linear que não representa bem a flexão, como por exemplo mostra os estudos de Zienkiewicz e Cheung (1967).

Ainda na Tabela 5.17, compara-se a influência do efeito de superfície livre nos modos acústicos. Os resultados numéricos são validados pela solução analítica (5.36). Nota-se que a condição de superfície livre não gera nenhuma perturbação significativa nos resultados de frequência da cavidade acústica.

Tabela 5.17 - Resultados em frequência do exemplo 3-1.

Modos Desacoplados									
ω_S - rad/s					ω_A - rad/s				
Modo	Num.	Anal.	$\epsilon(\%)$	Modo	Num.	Anal.	$\epsilon(\%)$		
Estrutura	1	928,22	733,12	26,61	Acústico	1 - 10	2372,05	2367,95	0,17
	2	5146,96	4594,70	12,02		2 - 20	2466,03	2459,94	0,25
	3*	6841,23	6808,20	0,48		3 - 30	2644,29	2634,30	0,38
	4	12710,67	12866,58	-1,21		4 - 40	2891,82	2876,10	0,55
	5*	20702,08	20424,61	1,36		5 - 50	3193,31	3169,93	0,74
	6	22051,76	25209,33	-12,52		6 - 60	3535,89	3502,73	0,95
ω_L - rad/s					ω_{A-L} - rad/s				
Modo	Num.	Anal.	$\epsilon(\%)$	Modo	Num.	Anal.	$\epsilon(\%)$		
Superfície Livre	1	0,4900	0,4900	0,00	Acústico com a cond. de Superfície Livre	1 - 10	2372,06	2367,95	0,17
	2	1,4258	1,4249	0,06		2 - 20	2466,04	2459,94	0,25
	3	2,2519	2,2478	0,18		3 - 30	2644,29	2634,30	0,38
	4	2,9494	2,9382	0,38		4 - 40	2891,83	2876,10	0,55
	5	3,5334	3,5099	0,67		5 - 50	3193,32	3169,93	0,74
	6	4,0307	3,9891	1,04		6 - 60	3535,89	3502,73	0,95

* - modo longitudinais Eq.(5.35)

Na Figura 5.38 plota-se os quatro primeiros modos de vibração do sólido. Já as Figuras 5.39 a 5.41 mostram os primeiros modos de superfície livre, acústicos e acústicos com influência da condição de superfície livre, respectivamente, para a cavidade.

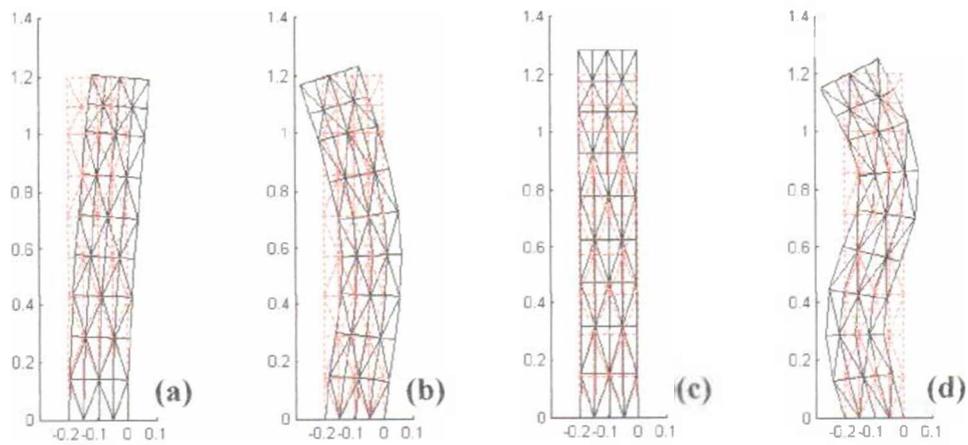


Figura 5.38 - Modos de deslocamento desacoplados:

(a) 1º, (b) 2º, (c) 3º e (d) 4º modos numéricos.

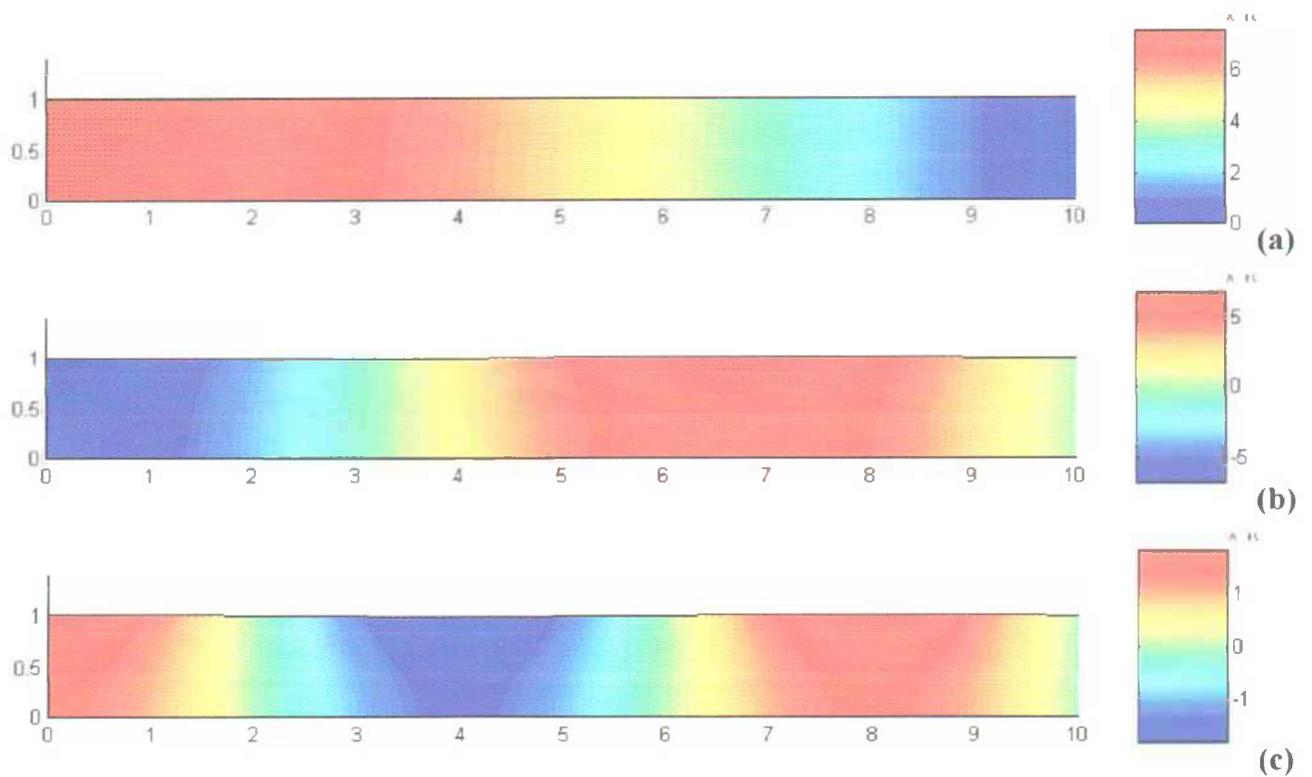


Figura 5.39 - Primeiros modos de superfície livre desacoplados:

(a) 1º, (b) 2º, (c) 3º modos numéricos.

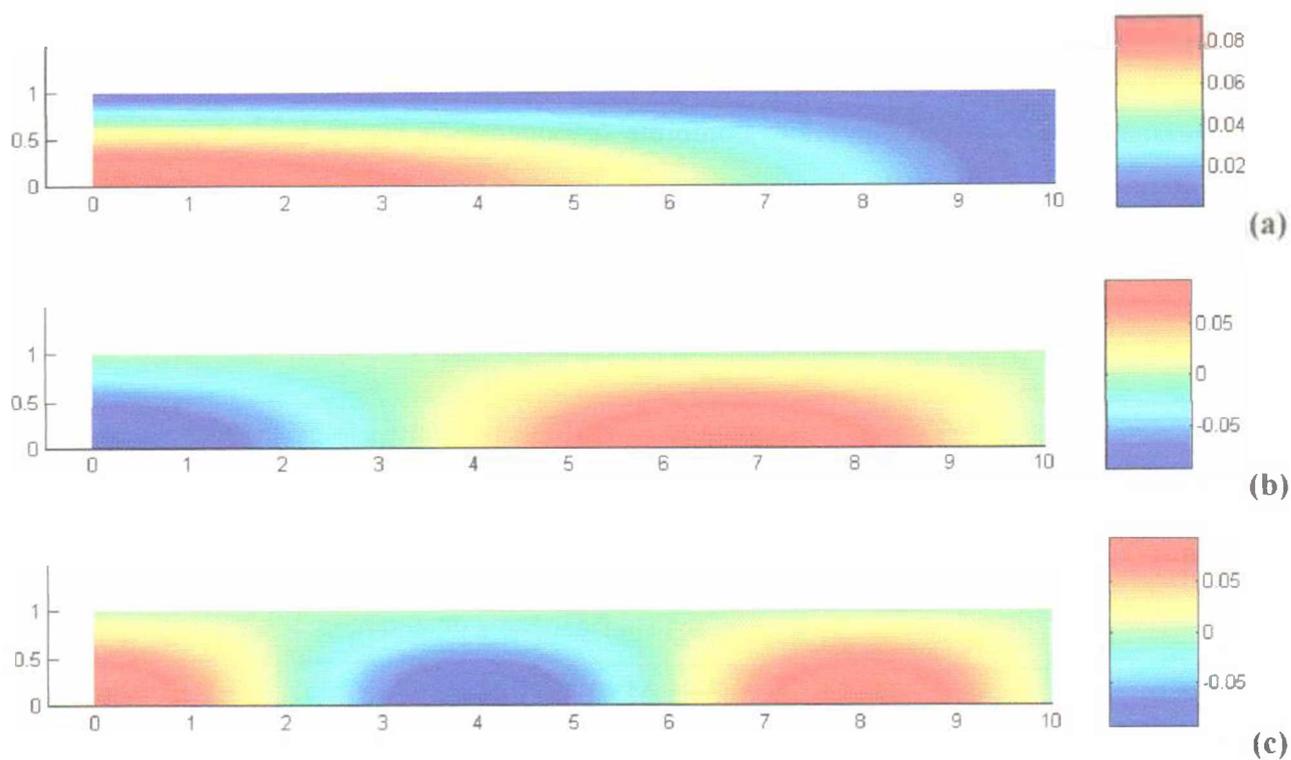


Figura 5.40 - Primeiros modos acústicos desacoplados:

(a) 1^o, (b) 2^o, (c) 3^o modos numéricos.

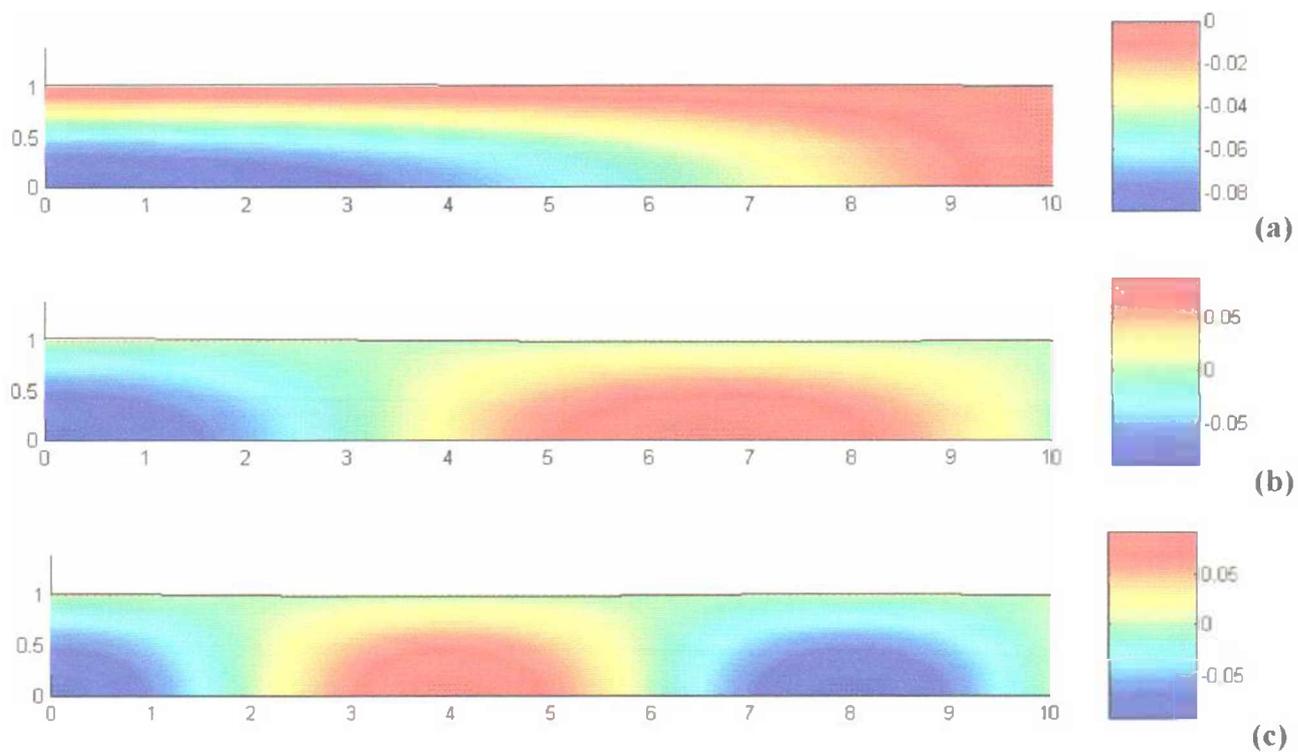


Figura 5.41 - Primeiros modos acústicos desacoplados com a influência

da superfície livre: (a) 1^o, (b) 2^o, (c) 3^o modos numéricos.

EXEMPLO 3-2 - Solução acoplada

Para entender o comportamento acoplado do caso 3, o exemplo 3-2 utiliza o modelo apresentado no exemplo anterior. Conforme o esquema da Figura 5.37, a condição de superfície livre é imposta na borda da cavidade fluida.

Neste estudo é feita duas simulações. A primeira, é a solução do problema de vibrações livres. A segunda, é a aplicação sobre a face seca do sólido de um carregamento senoidal onde se analisa o comportamento transiente do caso 3.

Os resultados de frequência apresentam-se na Tabela 5.18 e a Figura 5.42 mostra as primeiras formas modais do problema acoplado.

Tabela 5.18 - Resultados em frequência do exemplo 3-2.

Modos Acoplados							
ω_c - rad/s							
Sólido - Fluido	Modo	1	2	3	4	5	6
	Numérico	898,62	2370,57	2463,79	2640,55	2885,91	3184,41

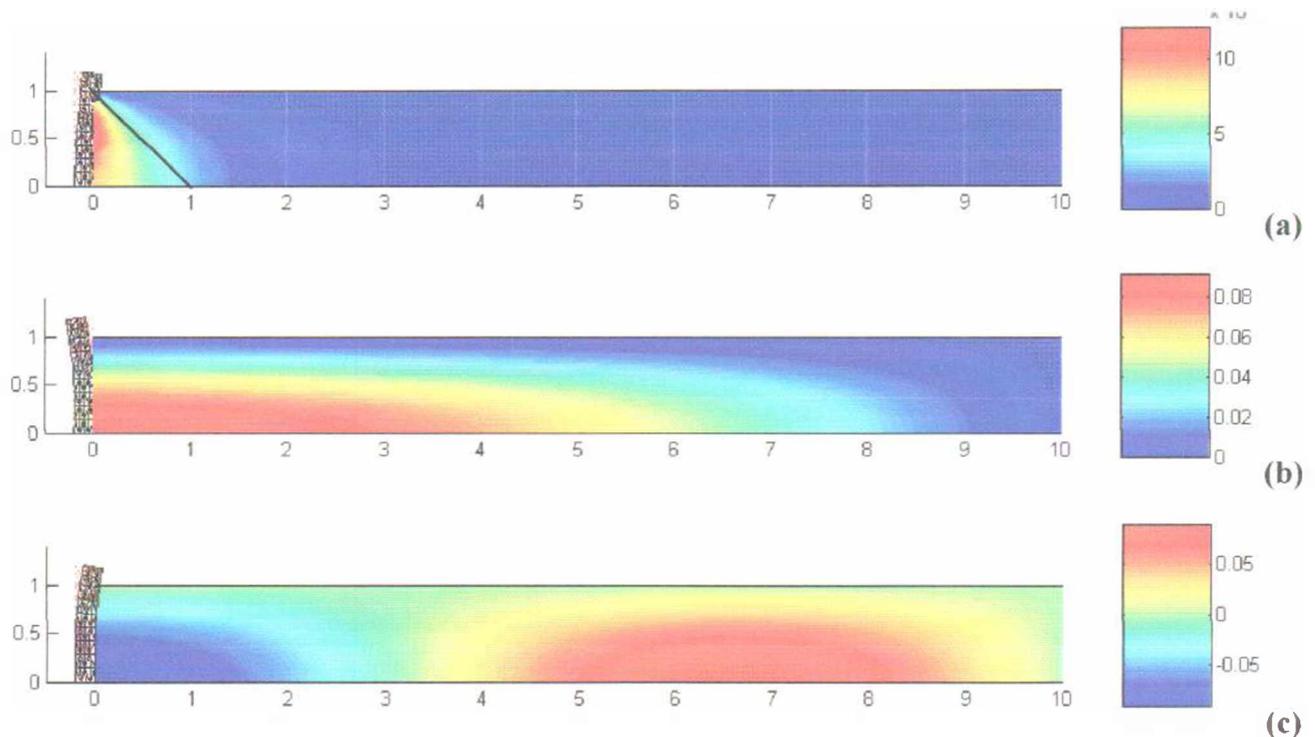


Figura 5.42 - Primeiras modos acústicos acoplados do exemplo 3-2 com a influência da condição de superfície livre: (a) 1°, (b) 2°, (c) 3° e (d) 4° modos numéricos.

Comparando com o resultado do exemplo 3-1, nota-se que os primeiros modos acústicos acoplados sofrem pouca alteração, com exceção do primeiro - modo de massa adicional -.

Para um entendimento maior dos resultados, transforma-se o sólido num sistema massa-mola equivalente de um grau de liberdade do tipo $[K_{eq} - \omega_{eq}^2(m_s + m_{adicional})] = 0$, sabendo que o efeito da compressibilidade não é importante para baixas frequências. Como o primeiro modo de vibração desacoplado do sólido $\omega_{s,1} \cong 928,22$ rad/s e a massa total do sólido é $m_s = \rho_s St(t+H) = 7800 \cdot 1,00 \cdot 0,20 \cdot 1,20 = 1872$ kg, a constante de mola $K_{eq} = \omega_{s,1}^2 \cdot m_s = 928,22^2 \cdot 1872 \cong 1,6129 \cdot 10^9$ N/m. E, aproximando-se a região perturbada do campo de pressão do primeiro modo acoplado por um triângulo de área $A = H \cdot L_{grat} / 2 \cong 1,00 \cdot 1,00 / 2 = 0,5$ m², conforme Figura 5.27a. Logo, a frequência fundamental é expressa por $\omega_{eq} = [K_{eq} / (\rho_s St \cdot (H+t) + \rho_s \cdot 1,00 \cdot A)]^{1/2} \cong 825$ rad/s.

Uma outra verificação diz respeito ao segundo modo de vibração. Segundo Pedroso *et al* (2000), a solução da frequência fundamental da cavidade semi-infinita desacoplada é denotada por $\omega_1 = 2\pi \cdot c / 4H = 2356$ rad/s. Confrontado ω_1 com a segunda frequência do exemplo C2H-02 da Tabela 5.14, nota-se dois fatos importantes. Primeiro, o resultado numérico mostra uma razoável aproximação para as primeiras frequências mesmo sem o uso da condição de radiação. Segundo, o acoplamento entre o sólido e o fluido não causou grandes alterações na resposta da cavidade fluida, haja vista que o sólido é bastante rígido ($\alpha = K_{eq} / (\rho_s c^2 S / L) = 1,6129 \cdot 10^9 / (1000 \cdot 1500^2 \cdot 1,00 / 10,00) \cong 7,17$).

Na segunda simulação aplica-se um carregamento senoidal do tipo $F \text{ sen}(0,8 \cdot \omega_{c,1} t)$ onde $F = 900$ N e a $\omega_{c,1} \cong 898,62$ rad/s é a frequência fundamental do exemplo C2H-02. Os gráficos da Figura 5.43 mostram a resposta do fluido em pressão adimensional p' (p [Pa] / $\rho_s c^2$) medidos ao longo do comprimento sobre a reta A-A', conforme Figura 5.37, e o histórico transiente do deslocamento u_x do nó 31 está plotado na Figura 5.44.

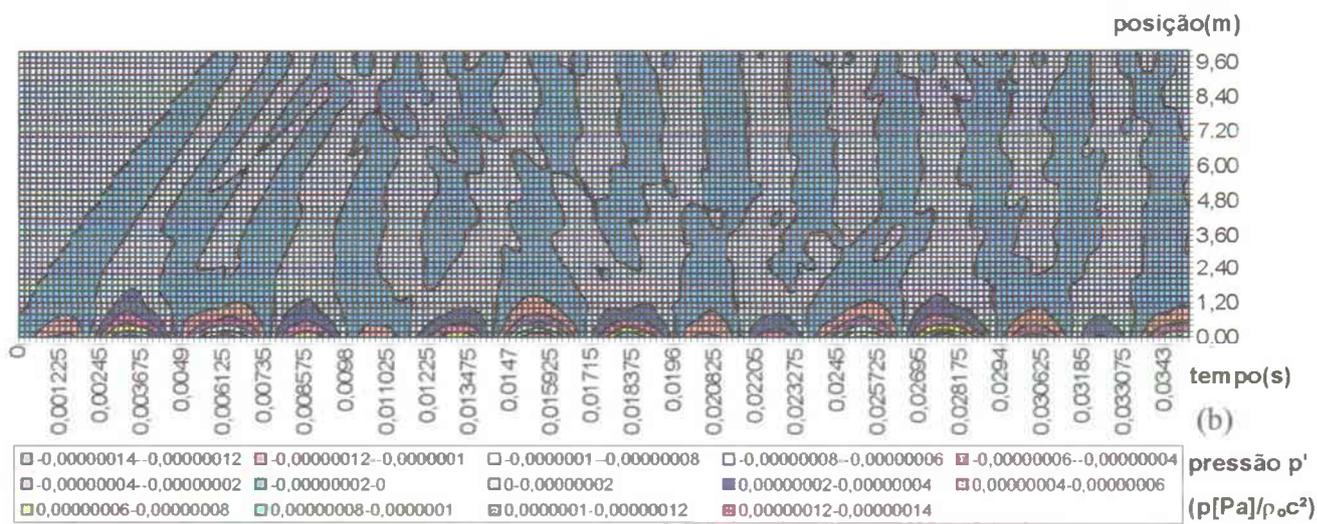
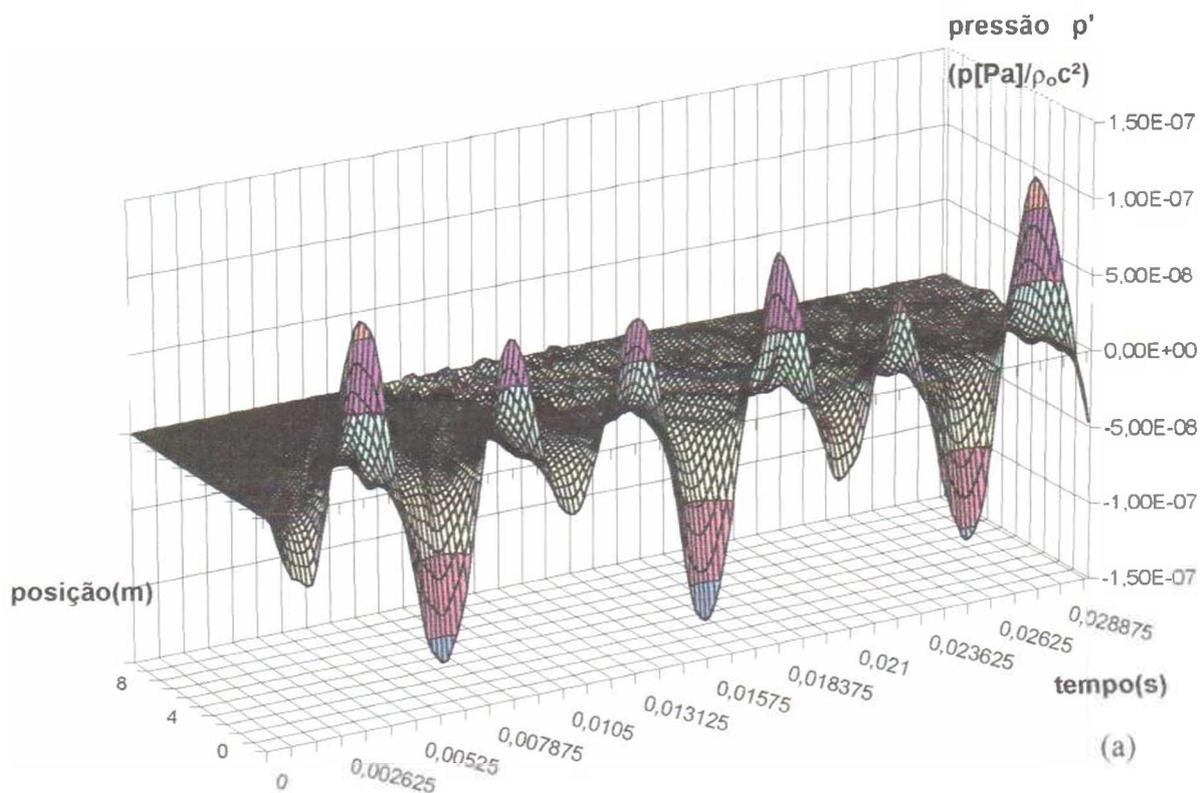


Figura 5.43 - Resposta transiente em pressão adimensional p' ao carregamento senoidal

$F \sin(0,8 \cdot \omega_{c,1} t)$: vistas em perspectiva (a) e superior (b).



Figura 5.44 - Resposta do deslocamento u_x no nó 31.

Da Figura 5.44, extrai-se graficamente o período de oscilação da resposta $T_{\text{graf.}} \cong 0,0098\text{s}$, logo $\omega_{\text{graf.}} \cong 635 \text{ rad/s}$. Ao comparar $\omega_{\text{graf.}}$ com a frequência fundamental do sistema acoplado $\omega_{C,1} = 898,68\text{rad/s}$, é calculado um erro de 29%. Esta discrepância é devido em parte pelo elemento triangular linear T3 que não representa bem a flexão, efeito já observado no problema desacoplado.

EXEMPLO 3-3 - Modelo acoplado equivalente

Considere o modelo do exemplo 3-1 com as mesmas características físicas e geométricas. No entanto, o sólido passa a ser visto como uma estrutura rígida e apoiado sobre roletes de forma a apresentar o movimento de pistão (Figura 5.45). A constante de mola $K_{\text{eq.}} = \omega_{S,1}^2 \cdot m_S \cong 1,6129 \cdot 10^9 \text{ N/m}$. Como no exemplo anterior, são feitas a análise dos problemas de vibrações livre e no tempo.

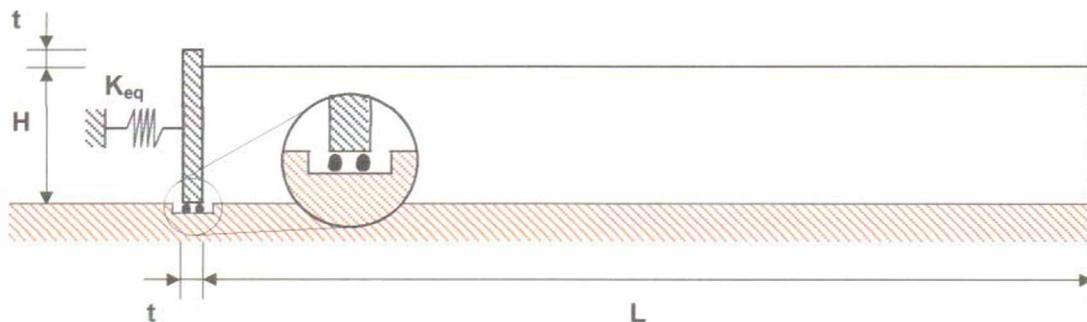


Figura 5.45 - Esquema do modelo acoplado equivalente.

A Tabela 5.19 apresenta as frequências acopladas e na Figura 5.46 estão representados os primeiros modos de vibração.

Tabela 5.19 - Resultados em frequência do exemplo 3-3.

Modos Acoplados							
$\omega_{C-eq.} - \text{rad/s}$							
Sólido - Fluido	Modo	1	2	3	4	5	6
		Numérico	813,86	2393,61	2499,28	2679,02	2924,33

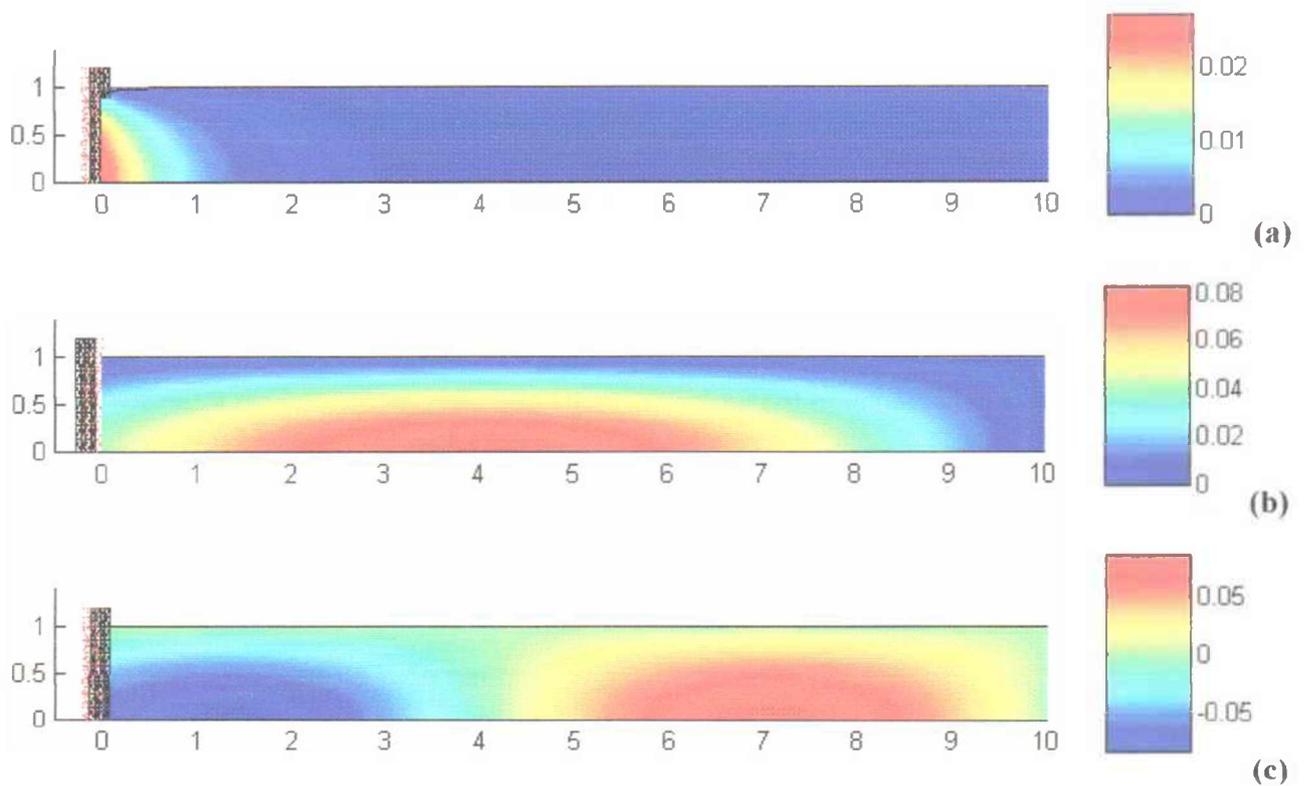


Figura 5.46 - Primeiras modos acústicos acoplados do exemplo 2H com influência da superfície livre: (a) 1º, (b) 2º e (c) 3º modos numéricos.

Comparando as frequência numéricas e formas modais, na Tabela 5.19 e Figura 5.46, respectivamente, com as do exemplo 3-2, nota-se uma boa concordância entre os resultados, e as diferenças são devidas a adoção de uma rigidez equivalente e o tipo de deslocamento na interface estrutura-reservatório-fundo. Estes aspectos diferenciam os dois casos.

As Figuras 5.47 e 5.48 mostram respectivamente, as respostas no tempo em pressão adimensional p' sobre a reta A-A' e o deslocamento u_x do nó 31 (Figura 5.37).

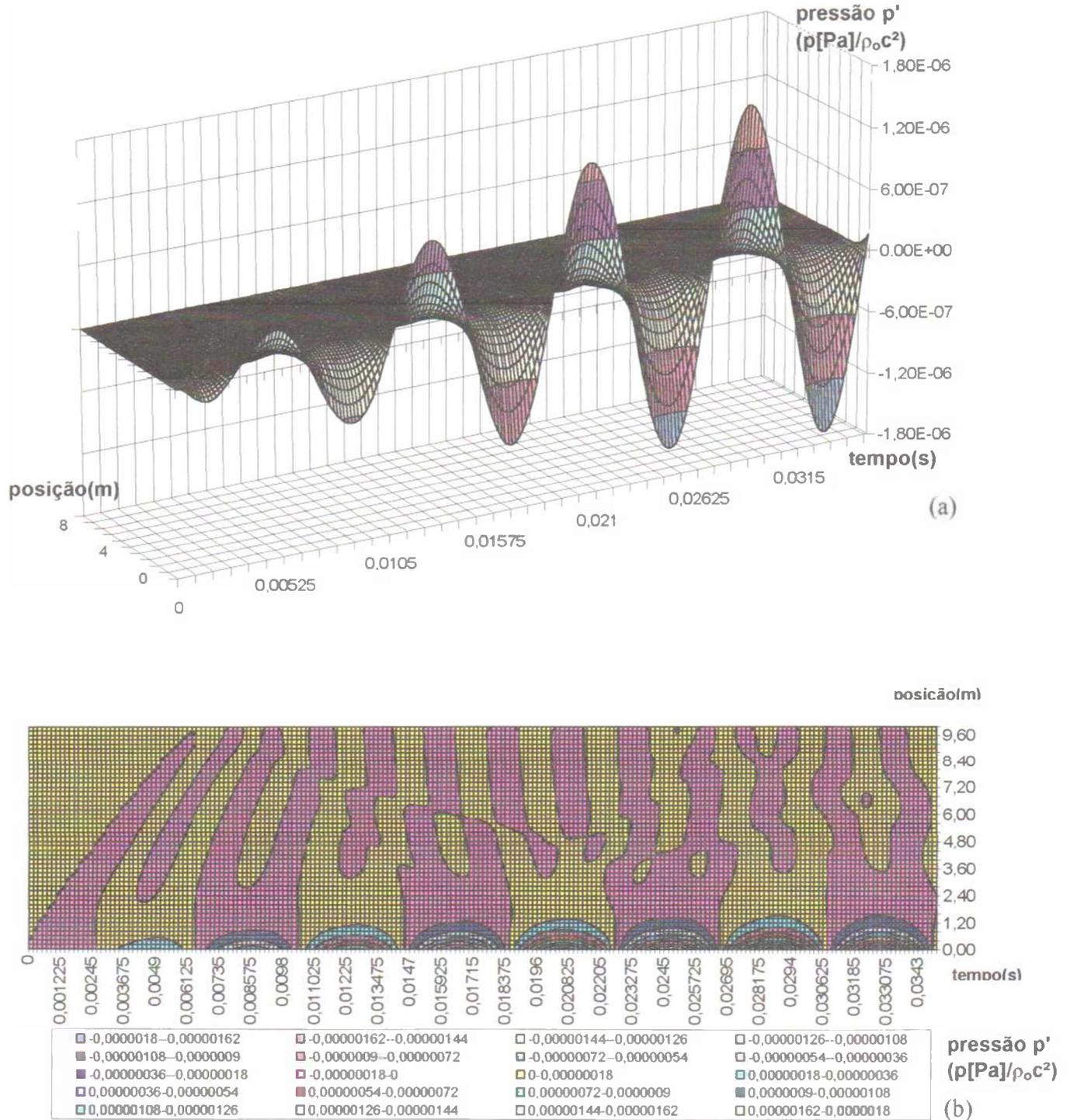


Figura 5.47 - Resposta transiente em pressão adimensional p' ao carregamento senoidal

$F \sin(0,8 \cdot \omega_{c,1} t)$: vistas em perspectiva (a) e superior (b).

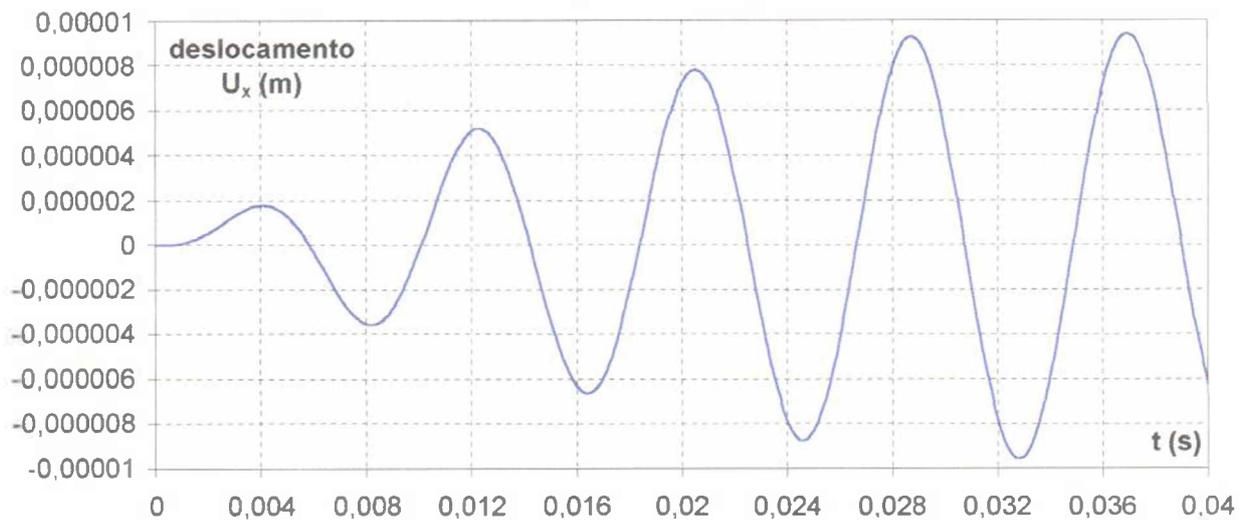


Figura 5.48 - Resposta do deslocamento u_x no nó 31 do exemplo 3-3.

Ao contrário do exemplo 3-2, a resposta no tempo mostra-se bem comportada. A partir da Figura 5.48, o período de oscilação $T_{\text{graf}} \cong 0,0083\text{s}$, ou seja, $\omega_{\text{graf}} \cong 757\text{rad/s}$. Este resultado aproxima-se bastante da frequência do carregamento $0,8 \cdot \omega_{C.1} = 718,9\text{ rad/s}$. Além disto, a resposta na ressonância mostra-se coerente com um problema excitado próximo da frequência fundamental.

Como o sólido apresenta um comportamento de pistão rígido, não necessitando fletir, o elemento finito T3 consegue capturar bem o movimento. Isto vem reafirmar a explicação dos problemas transientes do exemplo 3-2.

CAPÍTULO 6

CONCLUSÃO E SUGESTÕES

6.1 INTRODUÇÃO

Ao longo desta dissertação de mestrado, foi apresentado um estudo sobre o acoplamento fluido-estrutura. Este estudo baseou-se numa formulação variacional com uma descrição Lagrangeana para o sólido e Euleriana para o fluido e foi discretizada pelo método dos elementos finitos. Objetivou-se primordialmente construir um aparato conceitual e desenvolvimentos computacionais capazes de possibilitar se chegar a aplicações mais complexas futuramente.

Para tanto, procedeu-se uma revisão bibliográfica das principais formulações teóricas aplicadas à interação fluido-estrutura analisando suas vantagens e desvantagens. Dentre as vias possíveis, optou-se pela formulação mista do tipo acoplamento - de - massa $(\bar{u}, p, \phi, \bar{\eta})$ sendo que o fluido foi representado por variáveis de pressão, potencial de deslocamento e elevação da superfície livre, e o sólido foi descrito pelo deslocamento dos nós, conforme os trabalhos de Gibert (1988), Abboud (1990), Morand e Ohayon (1995). Esta escolha baseou-se nas características numéricas do problema, ou seja, pela simetria do sistema matricial e pelo desenvolvimento sistemático e geral baseado em princípios variacionais para sistemas dinâmicos com comportamento dissipativo. Porém, devido ao objetivo de sedimentar os conhecimentos conceituais e matemáticos da temática, neste trabalho estudou-se problemas conservativos.

Foi apresentado um capítulo enfocando os conceitos matemáticos com o objetivo de fundamentar o cálculo variacional e a apresentação do formalismo de Morse e Feshbach para a formulação de funcionais com amortecimento. Em anexo, foram tratados os rudimentos da equação da onda aplicada a problemas acústicos, e da equação de Laplace para a solução de problemas de superfície livre que serviram para a validação dos resultados numéricos.

Definida a formulação teórica do problema a ser analisado, iniciou-se um exame das técnicas numéricas para a solução do problema de interação fluido-estrutura. Graças as

propriedades de simetria das matrizes, algumas simplificações da formulação geral e a simplicidade dos problemas abordados, foi possível a solução em vibração livre do sistema acoplado pelo clássico algoritmo QZ. Devido a opção do trabalho de analisar os primeiros momentos da resposta transiente, foi escolhido o método de integração passo a passo, seguindo o esquema de Newmark. Estas opções buscaram evitar problemas de convergência da solução numérica. No entanto, afim de contornar as dificuldades de convergência dos resultados originadas da grande esparcidade e mal-condicionamento das matrizes optou-se pelo balanceamento do sistema matricial.

A análise dos resultados obtidos, permitiu estabelecer algumas considerações e sugestões para trabalhos futuros. Com a finalidade de facilitar a leitura deste capítulo, preferiu-se classificar as conclusões apresentadas em gerais e específicas e logo após serão detalhadas sugestões de continuidade.

6.2 CONCLUSÕES GERAIS

Enumera-se as seguintes conclusões referentes aos objetivos do trabalho:

- O desafio de construir os rudimentos conceituais e um conjunto de algoritmos numéricos capazes de dar sustentação a estudos mais profundos em trabalhos posteriores foi alcançado nesta dissertação. Todo o conjunto de assuntos tratados contribuiu com os primeiros passos nesta área, analisando suas principais características matemáticas e computacionais.
- Os algoritmos utilizados para a solução de problemas de vibrações livres e transientes mostraram-se uma boa escolha mesmo com sua limitação para problemas simples e de pequeno porte.
- Os resultados numéricos obtidos pelos códigos computacionais desenvolvidos apresentaram um bom acordo com a solução analítica e resultados da literatura.

6.3 CONCLUSÕES ESPECÍFICAS

As conclusões específicas referem-se aos meios através dos quais atingiram-se os objetivos desse trabalho, ou seja, são frutos da análise dos resultados numéricos obtidos. O estudo da solução computacional resultou nos seguintes itens:

- O caso 1A apresentou um bom acordo dos resultados numéricos tanto na solução no domínio do tempo quanto na integração no tempo. Observou-se o comportamento fluido-estrutura típico do modelo, com a presença do primeiro modo de massa adicional e dos demais modos acústicos, quando a rigidez do fluido supera a do sólido. Já para $\alpha \gg 1$, a estrutura é muito rígida e o sistema acoplado tende a um comportamento desacoplado para o sólido e o fluido.
- No caso 1B observou-se para a primeira frequência acoplada, o fenômeno de uma espécie de modo de "rigidez" adicional (semelhante a massa adicional), pois esta soma-se rigidez à estrutura. Este comportamento é notado para o sistema acoplado cujo sólido é muito flexível em comparação ao fluido, ou seja, $\alpha \ll 1$. A constante de mola K tende a um valor muito grande, e o sistema apresentou um comportamento desacoplado.
- A solução transiente para o caso 1B representou bem o comportamento. Porém, para um, observou-se o aparecimento e a participação de oscilações espúrias ao longo do tempo, característica comum aos problemas de dinâmica dos fluidos computacional modelizados por elementos finitos não-estabilizados.
- Os resultados do caso 2 apresentaram um bom acordo com as soluções analíticas. Como o sólido comporta-se como pistão para os primeiros modos, não houve acoplamento com os modos transversais da cavidade fluida. Notou-se que os modos acoplados sofreram pequena influência da condição de superfície livre. Somente no modo massa adicional foi observado a ação da condição de contorno.
- A solução desacoplada do caso 3 mostrou um bom acordo com as soluções analíticas apresentadas, a não ser pelos resultados em frequência do sólido. A não concordância deveu-se principalmente ao elemento triangular não representar bem a flexão para problemas semelhantes. Em seqüência, observou-se resultados ruins na simulação do modelo completo 3.2 devido ao mesmo problema. Confirmou-se esta dedução através da simulação 3.3, onde o sólido foi modelizado de forma a se comportar como um

pistão. Neste experimento computacional, a resposta transiente mostrou-se bem comportado representando, assim, a tendência esperada.

6.4 RECOMENDAÇÕES

Este trabalho consiste em um dos primeiros estudos de interação fluido-estrutura do Programa de Pós-graduação em Estruturas e Construção Civil da Universidade de Brasília. Tem por objetivo primordial fundamentar os conceitos nesta área de conhecimento permitindo, então, a evolução das pesquisas. Logo, recomenda-se como etapas posteriores os seguintes itens:

- Implementar elementos sólidos, tais como os elementos de estado plano de deformação quadrático ou de viga para permitir a simulação de elementos estruturais onde o efeito de flexão é predominante.
- Implementar elementos finitos estabilizados no domínio fluido e estudar vantagens de sua aplicação em problemas fluido-estrutura. Busca-se, desta forma, eliminar os problemas de oscilações espúrias observados neste trabalho.
- Estudar a influência de efeitos dissipativos em problemas de interação fluido-estrutura. Uma primeira linha de ataque consistiria na implementação da condição de radiação de Sommerfeld, com o fim de entender o comportamento de problemas fluido-estrutura externos. Em seguida, acrescentar à formulação termos correspondentes ao amortecimento interno nos modelos matemáticos estrutural e acústico.
- Modificar a estratégia de armazenamento das matrizes para permitir a simulação de problemas de maior porte. Em conjunto com esta modificação importa implementar novos algoritmos para a obtenção de alguns valores próprios e para a inversão sistemas lineares. Recomenda-se para a solução de problemas de vibração livre, os métodos de busca por determinante e iteração no subespaço, e para a solução de sistemas lineares o método de gradientes conjugados.
- Desenvolver rotinas de pré-processamento que permitam a geração automática de malhas, visto que uma considerável parte do tempo de pesquisa foi aplicada na preparação dos arquivos de entrada.
- Por último, estender o estudo para problemas tridimensionais. Esta etapa pressupõe as implementações anteriores.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Abboud, N.N. – A mixed finite element formulation for the transient and harmonic exterior fluid-structure interaction problem, Thesis of Ph.D., Stanford University, pp.333, August, (1990).

Abramson, H. N. – Hydroelasticity some problems and some solutions, Van Nortrand Reinhold, New York, (1981).

Ávila, S.M. – Análise dinâmica de estruturas elásticas e elastoplásticas com amortecimento não-proporcional. Dissertação de Mestrado em Estruturas - UnB-FT/EnC, E.DM 004A/97, agosto (1997).

Barbosa, A.N. – Uma formulação potencial simétrica para o cálculo estático e dinâmico de problemas de interação fluido-estrutura. Dissertação de Mestrado em Estruturas - UnB-FT/EnC, E.DM 008A/98, julho (1998).

Barbosa, A.N. e Pedroso, L.J. – Uma formulação potencial simétrica para o cálculo de interação fluido-estrutura, XVIII Congresso Ibero Latino-Americano de Métodos Numéricos em Engenharia, Brasília (1997).

Barbosa, A.N. e Pedroso, L.J. – A study for fluid-structure interaction based on the displacement and fluid velocity potential respectively in solid and fluid domain, Computational Mechanics - New trends and Applications, Proceedings of the 4th World Congress on Computational Mechanics, Buenos Aires, Argentina (1998).

Bathe, K.-J. – Finite Element Procedures - Prentice Hall, New York, (1996).

Bathe, K.J. e Hahn, W. – On transient analysis of fluid-structure system, Computers & Structures, 10, 383-391 (1978).

Bathe, K.J. e Wilson, E.L. – Large eigenvalue problems in dynamic analysis, Journal of Engineering Mechanics Division - ASCE, 6, 1471-1485, dezembro (1972).

Bathe, K.J., Nitikitipaboon, C. e Wang, X. – A mixed displacement-based finite element formulation for acoustic fluid-structure interaction, Computers & Structures, 56(2), 225-237 (1995).

Belytschko, T. – Fluid-structure interaction, Computers & Structures, 12, 459-469 (1980).

Belytschko, T. e Kennedy, J.M. – A fluid-structure finite element method for the analysis of reactor safety problems, Nuclear Engineering and Design, 38, 71-81 (1976).

Belytschko, T. e Mullen, R. – Two-dimensional fluid-structure impact computations with regularisation, Computational Methods Applied in Mechanics Engineering, 27, 139-154 (1981).

Belytschko, T. e Schumann, U. – Fluid-structure interactions in light water reactor systems, *Nuclear Engineering and Design*, 60, 173-195 (1980).

Bermúdez, A., Durán, R., Muschietti, M.A., Rodríguez, R. e Solomin, J. – Finite element vibration analysis of fluid-solid systems without spurious modes, *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 32(4), 1280-1295 (1995).

Bermúdez, A. e Rodríguez, R. – Finite element computation of the vibration modes of a fluid-solid system, *Computational Methods Applied on Mechanics Engineering*, 119, 355-370 (1994).

Bermúdez, A., Durán, R. e Rodríguez, R. – Finite element solution of incompressible fluid-structure vibration problems, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40, 1435-1448 (1997).

Bezerra, L.M. – Métodos matemáticos, Publicação interna, UnB-FT/EnC/PECC, Brasília, Brasil (1997).

Bleich, H.H. e Sandler, I.S. – Interaction between structures and bilinear fluids, *Int. J. Solids Struct.*, 6, 617-639 (1970).

Blevins, R.D. – Formulas for natural frequency and mode shapes, Van Nostrand Reinhold Comp., New York, NY (1979).

Casas, W.P. e Pavanello, R. – Análise de sensibilidade modal em sistemas acoplados fluido-estrutura, 9º Sibrat - Simpósio Brasileiro sobre Tubulações e Vasos de Pressão, 285-288, (1996).

Chen, H.C. e Taylor – Vibration analysis of fluid-solid systems using a finite element displacement formulation, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 29, 683-698 (1990).

Clough, R.W. e Penzien, J. – Dynamics of Structures, McGraw-Hill Inc., Singapore, 2ºed. (1993).

Combescure, A., Gibert, R.J., JeanPierre, F., Hoffmann, A., e Livolant, M. – Fluid-structure interaction: A general method used in the CEASEMT computer programs, *Computers & Structures*, No.12, 471-474 (1980).

Cook, R.D., Malkus, D.I. e Plesha, M.E. – Concepts and applications of finite element analysis, John Wiley & Sons Inc., New York, 3ºed. (1989).

Craggs, A. – The transient response of a coupled plate-acoustic system using plate and acoustic finite elements, *Journal of Sound and Vibration*, 15, 509-528, (1971).

Craggs, A. – An acoustic finite element for studying boundary flexibility and sound transmission between irregular enclosures, *Journal of Sound and Vibration*, 30(3), 343-357, (1973).

Daniel, W.J.T. – Modal methods in finite element fluid-structure eigenvalue problem, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 15, 1161-1175 (1980).

Dungar, R. – An efficient method of fluid-structure coupling in the dynamic analysis of structure, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 13, 93-107 (1978).

Everstine, C.G. – A symmetric potential formulation for fluid-structure interaction problems, *Journal of Sound and Vibration*, carta ao editor, 79, 157-160 (1981).

Felippa, C.A. e Deruntz, J.A. – Finite element analysis of shock-induced hull cavitation, *Computational Methods Applied on Mechanics Engineering*, 44, 297-337 (1984).

Felippa, C.A. e Ohayon, R. – Mixed variational formulation of finite element analysis of acoustoelastic/slosh fluid-structure interaction, *Journal of Fluid and Structure*, 4(1), 35-57 (1990).

Fenves, G. e Vargas-Loli, L.M. – Nonlinear dynamic analysis of fluid-structure systems, *Journal of Engineering Mechanics - ASCE*, 114(2), 219-240, (1988).

Flügge, W. – *Viscoelasticity*, Springer, Heidelberg, 2^o ed. revisada, (1975).

Galli, L. e Pavanello, R. – Formulação simétrica e modelagem por elementos finitos de problemas de interação fluido-estrutura, XII Congresso Brasileiro em Engenharia Mecânica, Brasília, DF (1993).

Gibert, R.J. – *Vibrations des structures - Interactions avec les fluides - Sources d'excitation aléatoires*, Ed. Eyrolles, Paris, França, (1988).

Gladwell, G.M.L e Zimmerman, G. – On energy and complementary energy formulations of acoustic and structural vibration problems, *Journal of Sound and Vibration*, 3, 233-241 (1966).

Gladwell, G.M.L. – A variational formulation of damped acousto-structural vibration problems, *Journal of Sound and Vibration*, 4(2), 172-186 (1966).

Gonçalves, P.B. e Ramos, N.R.S.S. – Free vibration analysis of cylindrical tanks partially filled with liquid, *Journal of Sound and Vibration*, 195(3), 429-444 (1996).

Hamdi, M.A., Ousset, Y. e Verchery, G. – A displacement method for the analysis of vibrations of coupled fluid-structure systems, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 13, 139-150 (1978).

JeanPierre, F., Gibert, R.J., Hoffmann, A., e Livolant, M. – Description of a general method to compute the fluid-structure interaction, *Transactions for the 5th International Conference on Structural Mechanics in Reactor Technology (5th SMiRT)*, Berlin, Germany, B4/1*, 13-17 August, (1979).

Lakis, A.A. e Neagu, S. – Free surface effects on the dynamics of cylindrical shells partially filled with liquid, *Journal of Sound and Vibration*, 207(2), 175-205 (1997).

Lamb, H. – Hydrodynamics, Cambridge University Press, 6ed., 1993.

Léger, P. e Tinawi, R. – Structural safety evaluation of gravity dam for hydrodynamics loadings, Notes de Cours Sur: La sécurité et l'intégrité structurale des barrages en béton, Chaire de barrage, University of Montreal, École Polytechnique, Civil Engineering Department, Structure Division, Montreal (2000).

Liu, W.K. e Uras, R.A. – Variational approach to fluid-structure interaction with sloshing, Nuclear Engineering and Design, vol.106, 62-85 (1988).

Malvern, L.E. – Introduction to the mechanics of a continuous medium, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, (1969).

Masson, J. e Souza, J. de M. – Método de energia com aplicações a problemas elásticos, CNPq-PUC/RJ - Interciência Livraria Ltda., (1976).

Moller, C.B. e Stewart, W. – An algorithm for generalised matrix eigenvalue problems, SIAM Journal of Numerical Analysis, 10(2), 241-256 (1973).

Morand, H. e Ohayon, R. – Substructure variational analysis of the vibrations of coupled fluid-structure, International Journal of Numerical Methods Engineering, 14(5), 741-755, (1979).

Morand, H.J.-P. e Ohayon, R. – Fluid structure interaction - Applied numerical methods, John Wiley & Sons e Masson Eds., Paris, França, (1995).

Morais, M.V.G.de e Pedroso, L.J. – A numerical approach for study on acoustic behaviour of cavities and ducts, CFD2K - 8e Conférence Annuelle de la Société Canadienne de CFD, Montreal (2000).

Morrison, J.R. e O'Brien, M.P., Johnson, J.W. e Shaaf, S.A. – The force exerted by surface wave on piles, Petroleum Transactions, 189, 149-154 (1950).

Morse, P.M. e Feshbach, H. – Methods of theoretical physics, McGraw-Hill, New York, (1953). (cf. capítulo 3 para o formalismo variacional e o capítulo 11 para exemplos numéricos)

Müller, W.C. – Simplified analysis of linear fluid-structure interaction, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 17, 113-121 (1981).

Olson, L.G. e Bathe, K.J. – A study of displacement-based fluid finite elements for calculating frequencies of fluid-structure systems, Nuclear Engineering and Design, 76(2), 137-151 (1983).

Olson, L.G. e Bathe, K.J. – Analysis of fluid-structure interactions. A direct symmetric coupled formulation based on the fluid velocity potential, Computers & Structures, 21(1/2), 21-32 (1985).

Papadrakakis, M. – Solution of the partial eigenproblem by iterative methods, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 20, 2283-2301 (1984).

Pavanello, R., Henry, R. – Modelagem do acoplamento dinâmico fluido-estrutura unidimensional pelo método dos elementos finitos, X Congresso Brasileiro em Engenharia Mecânica, Rio de Janeiro, RJ (1989).

Pedroso, L.J. – Interação Fluido-Estrutura (notas de aula e apostila interna do curso), versão preliminar, UnB-FT/EnC/GDFE (1998).

Pedroso, L.J. – Estudo do acoplamento fluido-estrutura baseado numa formulação potencial simétrica orientado a problemas em estruturas de reatores nucleares: modelagem numérica pelo MEF adaptado a análise do comportamento dinâmico de problemas complexos e grandes sistemas acoplados. Projeto de Estudos e Pesquisa, UnB-FT/EnC - CNPq Ref.Proc. nº 301516/88-0/EC/FV, (1998).

Pedroso, L.J. – Alguns aspectos da interação fluido-estrutura em estruturas off-shore, Dissertação de mestrado na COOPE/UFRJ, 338p., (1982).

Pedroso, L.J. – Analytical solutions for the study of the acoustic behaviour of cavities with rigid and flexible walls - An approach for dams-reservoir interaction - Part II. Relatório de estudos de pós-doutorado, University of Montreal, École Polytechnique, Civil Engineering Department, Structural Division (2000).

Pedroso, L.J. e Morais, M.V.G.de – Some cases of acoustical problems in fluid-structure interaction based on a 2D potential symmetric formulation, *Transactions of the 15th International Conference on Structural Mechanics in Reactor Technology (15th SMiRT)*, Aug. 15-20, Seul, Korea(1999).

Pedroso, L.J. e Morais, M.V.G.de – Exemplos de problemas acústicos de interação fluido-estrutura, *Computational Methods in Engineering'99 (XX Cilamce)*, São Paulo (1999).

Pedroso, J.L, Tinawi, R. e Léger, P. – On the prospects of computational fluid dynamics in concrete dam engineering. *CFD2K - 8^{me} Conférence annuelle de la Société canadienne de Computational Fluid Dynamic*, Montréal, juin 11-13 (2000).

Pinsky, P.M. e Abboud, N.N. – Two mixed variational principles for exterior fluid-structure interaction problems. *Computers & Structures*, **33**(3), 621-635, (1989).

Popov, E.P. – Introdução à mecânica dos sólidos. Ed. Edgard Blücher Ltda., São Paulo, Brasil, (1978).

Puppin-Macedo, A. – Finite element and domain decomposition methods for acoustic scattering problems, Thesis of Ph.D, Department of Aerospace Engineering Sciences, University of Colorado at Boulder, (1999).

Puppin-Macedo, A., Djellouli, R., Farhat, C., e Tezaur, R. – Finite element solution of two-dimensional acoustic scattering problems using arbitrarily shaped convex Artificial Boundaries, *Anais do XX CILAMCE (CD-Rom)*, São Paulo, SP, Brasil, (1999).

Rivard, W.C. e Torrey, M.D. – Fluid-structure response of a pressurized water reactor core barrel during blowdown, Los Alamos Science Laboratory, LA-7404, (1978).

Sandberg, G. – A new strategy for solving fluid-structure problems, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 38, 357-370 (1995).

Tabarrok, B. – Dual formulations for acoustic-structural vibrations, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 13, 197-201 (1973).

Wang, X. e Bathe, K.J. – Displacement/pressure based mixed finite element formulation for acoustic fluid-structure interaction problems, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40, 2001-2017 (1997).

Weinstock, R. – Calculus of variations with applications to physics and engineering, Dover Publications Inc., New York, (1974).

Wilkinson, J.H. e Reinsch, C. – Linear algebra, Springer-Verlag Comp. (1971).

Wilson, E.L. e Khalvati, M. – Finite elements for the dynamic analysis of fluid-solid systems, *Int. Journal for Numerical Methods in Engineering*, 19, 1657-1668 (1983).

Zavalla, P.A.G. e Pavanello, R. – Vibro-acoustic modelling in semi-infinite fluid medium using the finite element method with DtN map, *Anais do XX CILAMCE (CD-Rom)*, São Paulo, SP, Brasil, (1999).

Zienkiewicz, O.C. e Bettess, P. – Fluid-structure dynamic interaction and wave forces - a introduction to numerical treatment, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 13, 1-16 (1978).

Zienkiewicz, O.C. e Cheung, Y.K. – The finite element method in structural and continuum mechanics, McGraw-Hill Comp., London (1967).

Zienkiewicz, O.C., Naths, B. e Irons, B. – Natural frequencies of complex free or submerged structures by the finite element method, *Symposium on Vibration in Civil Engineering*, Butterworths, London, (1965).

Zienkiewicz, O.C. e Newton, R.E. – Coupled vibrations of a structure submerged in a compressible fluid, *Symposium on Finite Element Techniques*, Stuttgart (1969).

ANEXO A

SOLUÇÃO ANALÍTICA DA EQUAÇÃO DA ONDA PARA O CASO UNIDIMENSIONAL

A.1 INTRODUÇÃO

Neste anexo, será desenvolvido a solução analítica da equação da onda unidimensional com o objetivo central de fornecer uma ferramenta de comprovação das simulações numéricas efetuadas. Para tanto, será usado o conceito da matriz de transferência (Gibert (1988)) para possibilitar mais operacionalidade em tais soluções. Será efetuado ainda, uma aplicação da matriz de transferência para casos unidimensionais simples.

A.2 RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE ONDA 1-D

A equação de onda unidimensional homogênea no domínio da frequência é:

$$\frac{d^2 p}{dx^2} + \frac{1}{k^2} p = 0 \quad (\text{A.1})$$

onde $k = c/\omega$ é denominado o número de onda.

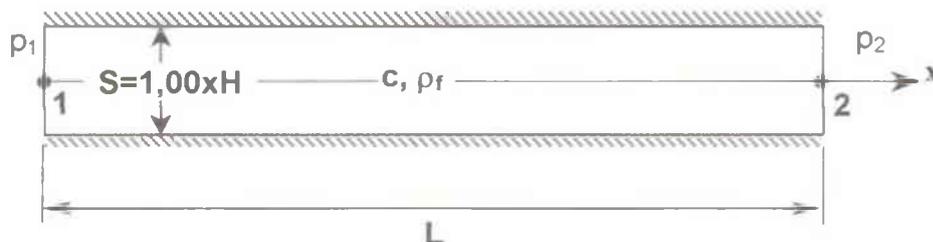


Figura A.1 - Esquema do conduto reto.

Definindo que a vazão mássica acústica q é expressa por:

$$q = \rho_f S V_f = \rho_f S X_f \quad (\text{A.2})$$

onde $V_f = V_f(x,t)$ e $X_f = X_f(x,t)$ são a velocidade e o deslocamento de uma partícula do fluido no domínio do tempo e S é seção transversal do conduto reto, conforme Figura A.1.

Efetando o equilíbrio dinâmico de forças de uma partícula de fluido Δx que tende a zero, tem-se,

$$\frac{dp}{dx} + \rho_f \ddot{X}_f = 0 \quad (\text{A.3})$$

Após algumas manipulações algébricas e substituindo (A.2) em (A.3), vêm,

$$\frac{dp}{dx} + \frac{\dot{q}}{S} = 0 \quad (\text{A.4})$$

A aplicação da transformada de Fourier na expressão acima resulta em:

$$\frac{dp}{dx} + \frac{i\omega}{S} q = 0 \quad (\text{A.5})$$

logo,

$$q = \frac{iS}{\omega} \frac{dp}{dx} \quad (\text{A.6})$$

Substituindo a Eq.(A.6) na expressão (A.1), encontra-se a relação inversa entre a pressão p e a vazão acústica q , ou seja,

$$\frac{dq}{dx} + \frac{i\omega S}{c^2} p = 0 \quad (\text{A.7})$$

Resolvendo a equação diferencial (A.1) obtém-se,

$$p(x, \omega) = A \operatorname{sen}\left(\frac{\omega}{c} x\right) + B \operatorname{cos}\left(\frac{\omega}{c} x\right) \quad (\text{A.8})$$

Através da expressão (A.6), a vazão acústica possui a presente forma:

$$q(x, \omega) = \frac{iS}{c} \left(A \operatorname{cos}\left(\frac{\omega}{c} x\right) - B \operatorname{sen}\left(\frac{\omega}{c} x\right) \right) \quad (\text{A.9})$$

Supondo um duto reto de seção constante S e comprimento L , conforme Figura A-1, busca-se expressar as Eqs. (A.8) e (A.9) em função de p_1 e q_1 para calcular p_2 e q_2 .

Logo para expressar as constantes A e B em função de p_1 e q_1 , nas Eqs.(A.8) e (A.9) faz-se $x = 0$,

$$p_1 = p(0, \omega) = B \text{ e } q_1 = q(0, \omega) = \frac{iS}{c} A \quad (\text{A.10})$$

logo,

$$B = p_1 \text{ e } A = \frac{c}{iS} q_1 \quad (\text{A.11})$$

Repetindo o processo aplicando $x = L$ nas Eqs. (A.8) e (A.9), encontra-se,

$$\begin{cases} p_2 = p(L, \omega) = p_1 \cos \lambda + \frac{c}{iS} q_1 \operatorname{sen} \lambda \\ q_2 = q(L, \omega) = -\frac{iS}{c} \operatorname{sen} \lambda + p_1 \cos \lambda \end{cases} \quad (\text{A.12})$$

onde $\lambda = \omega L/c$. Logo, a forma matricial é:

$$\begin{Bmatrix} p_2 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \lambda & \frac{c}{iS} \operatorname{sen} \lambda \\ -\frac{iS}{c} \operatorname{sen} \lambda & \cos \lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1 \\ q_1 \end{Bmatrix} \quad (\text{A.13})$$

ou seja,

$$\begin{Bmatrix} p_2 \\ q_2 \end{Bmatrix} = A \begin{Bmatrix} p_1 \\ q_1 \end{Bmatrix} \quad (\text{A.14})$$

onde, A é a **matriz de transferência**.

Nota: Considerando o tubo pequeno em comparação ao comprimento da onda acústica (c/ω), ou seja, $\lambda = \omega L/c \ll 1$, expande-se senos e cossenos por séries de potências desprezando os termos de segunda ordem, a Eq. (A.13) toma a seguinte forma,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\omega L}{iS} \\ -\frac{i\omega V}{c^2} & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.15})$$

A interpretação dos termos da matriz de transferência linearizada leva às seguintes conclusões: **(a)** o termo $i\omega V/c^2$ é o número característico da compressibilidade, onde V é o volume da cavidade fluida, enquanto que **(b)** $\omega L/iS$ corresponde a um número característico de inércia.

A.3 EXEMPLO 1: CASOS SIMPLES

A.3.1 Cavidade Fechado-Fechada

A condição de contorno fechada é modelizada como uma vazão acústica q nula, correspondendo a um nodo de vazão. Para uma cavidade fechada-fechada, as condições de contorno são $q_1 = 0$ e $q_2 = 0$, conforme a Figura A-1, e a matriz de transferência (A.13) possui a seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} p_2 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \lambda & \frac{c}{iS} \operatorname{sen} \lambda \\ -\frac{iS}{c} \operatorname{sen} \lambda & \cos \lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{A.16})$$

As equações do sistema matricial (A.16) são:

$$p_2 = \cos \lambda \cdot p_1 \quad \text{e} \quad 0 = -\frac{iS}{c} \operatorname{sen} \lambda \cdot p_1 \quad (\text{A.17})$$

Da Eq.(A.17), vem:

$$0 = -\frac{iS}{c} \underbrace{\operatorname{sen} \lambda}_{=0} \cdot p_1 \rightarrow \frac{\omega_n L}{c} = n\pi, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \Rightarrow \therefore \omega_n = \frac{n\pi c}{L} \quad (\text{A.18})$$

Com o intuito de obter os campos de pressão e vazão acústica ao longo do duto, tem-se que ao longo do duto a matriz de transferência (A.13) toma a forma:

$$\begin{Bmatrix} p(x) \\ q(x) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\lambda_n x/L) & \frac{c}{iS} \operatorname{sen}(\lambda_n x/L) \\ -\frac{iS}{c} \operatorname{sen}(\lambda_n x/L) & \cos(\lambda_n x/L) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \lambda_n = n\pi \quad \text{onde } n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (\text{A.19})$$

Logo,

$$p(x) = \cos(\lambda_n x/L) \cdot p_1 \quad \rightarrow \quad \therefore \frac{p(x)}{p_1} = \cos(\lambda_n x/L) \quad (\text{A.20a})$$

$$q(x) = -\frac{iS}{c} \operatorname{sen}(\lambda_n x/L) \cdot p_1 \quad \rightarrow \quad \therefore \frac{q(x)}{-iSp_1/c} = \operatorname{sen}(\lambda_n x/L) \quad (\text{A.20b})$$

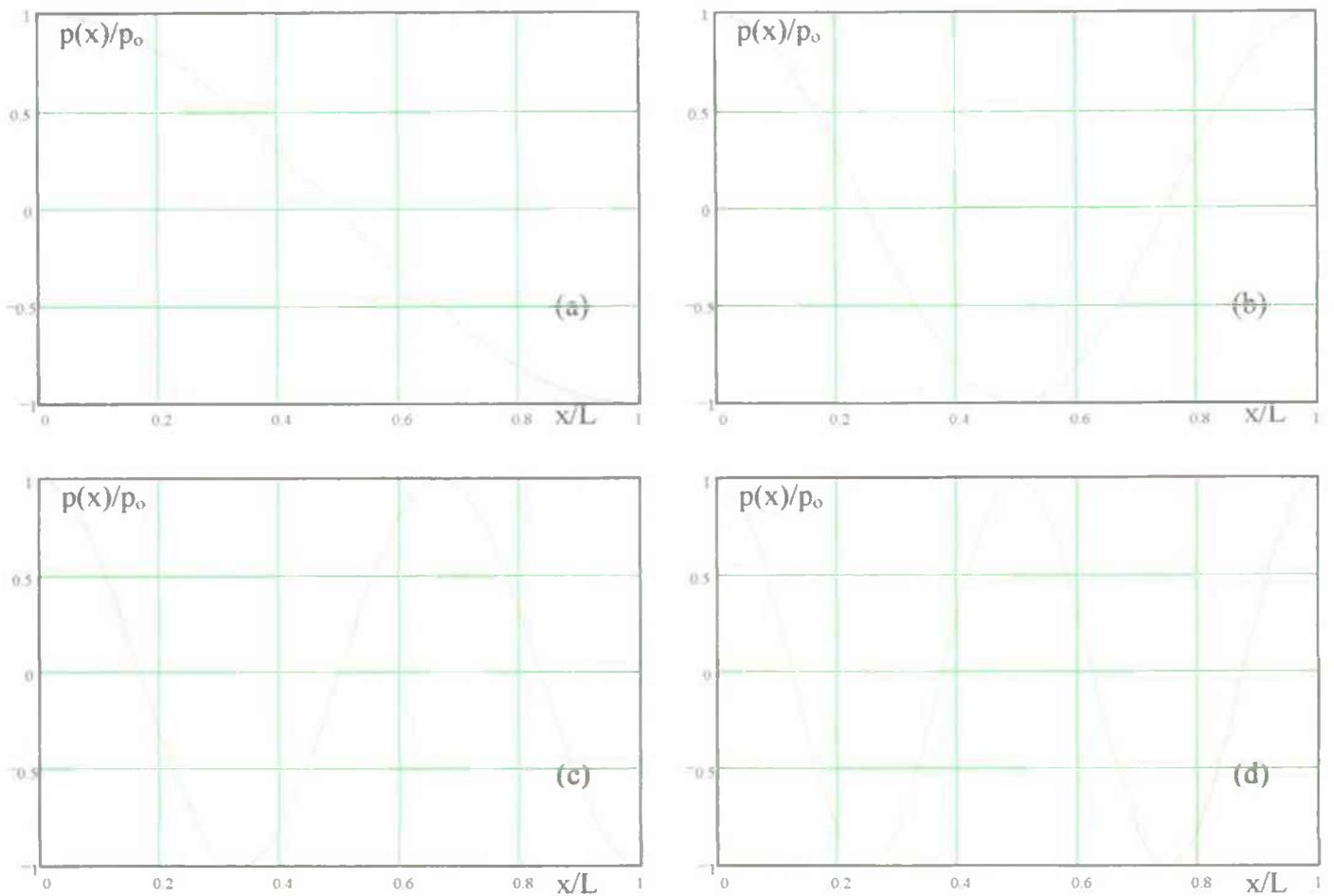


Figura A.2 - Modos de vibração da cavidade fechado-fechada: (a) 1º, (b) 2º, (c) 3º e (d) 4º modos.

A.3.2 Cavidade Aberto-Aberta

A condição de contorno aberta é modelizada como uma pressão acústica p nula na matriz de transferência (A.13) denominada nodo de pressão. Assim sendo, para a cavidade representada na Figura A-1, as condições de contorno são $p_1 = 0$ e $p_2 = 0$ e a matriz de transferência é expressa como,

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \lambda & \frac{c}{iS} \operatorname{sen} \lambda \\ -\frac{iS}{c} \operatorname{sen} \lambda & \cos \lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ q_1 \end{Bmatrix} \quad (\text{A.21})$$

ou seja,

$$0 = \frac{c}{iS} \operatorname{sen} \lambda \cdot q_1 \rightarrow \frac{\omega_n L}{c} = n\pi, \quad n = 1, 2, 3, \dots \Rightarrow \therefore \omega_n = \frac{n\pi c}{L} \quad (\text{A.22})$$

Para expressar o campo de pressão e vazão acústica ao longo do comprimento L da cavidade, aplica-se a expressão (A.22) na Eq.(A.13), ou seja,

$$\begin{Bmatrix} p(x) \\ q(x) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\lambda_n x/L) & \frac{c}{iS} \text{sen}(\lambda_n x/L) \\ -\frac{iS}{c} \text{sen}(\lambda_n x/L) & \cos(\lambda_n x/L) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ q_1 \end{Bmatrix}, \lambda_n = n\pi \text{ onde } n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{A.23})$$

Logo,

$$p(x) = \frac{c}{iS} \text{sen}(\lambda_n x/L) \cdot q_1 \quad \rightarrow \quad \therefore \frac{p(x)}{c q_1 / iS} = \text{sen}(\lambda_n x/L) \quad (\text{A.24a})$$

$$q(x) = \cos(\lambda_n x/L) \cdot q_1 \quad \rightarrow \quad \therefore \frac{q(x)}{q_1} = \cos(\lambda_n x/L) \quad (\text{A.24b})$$

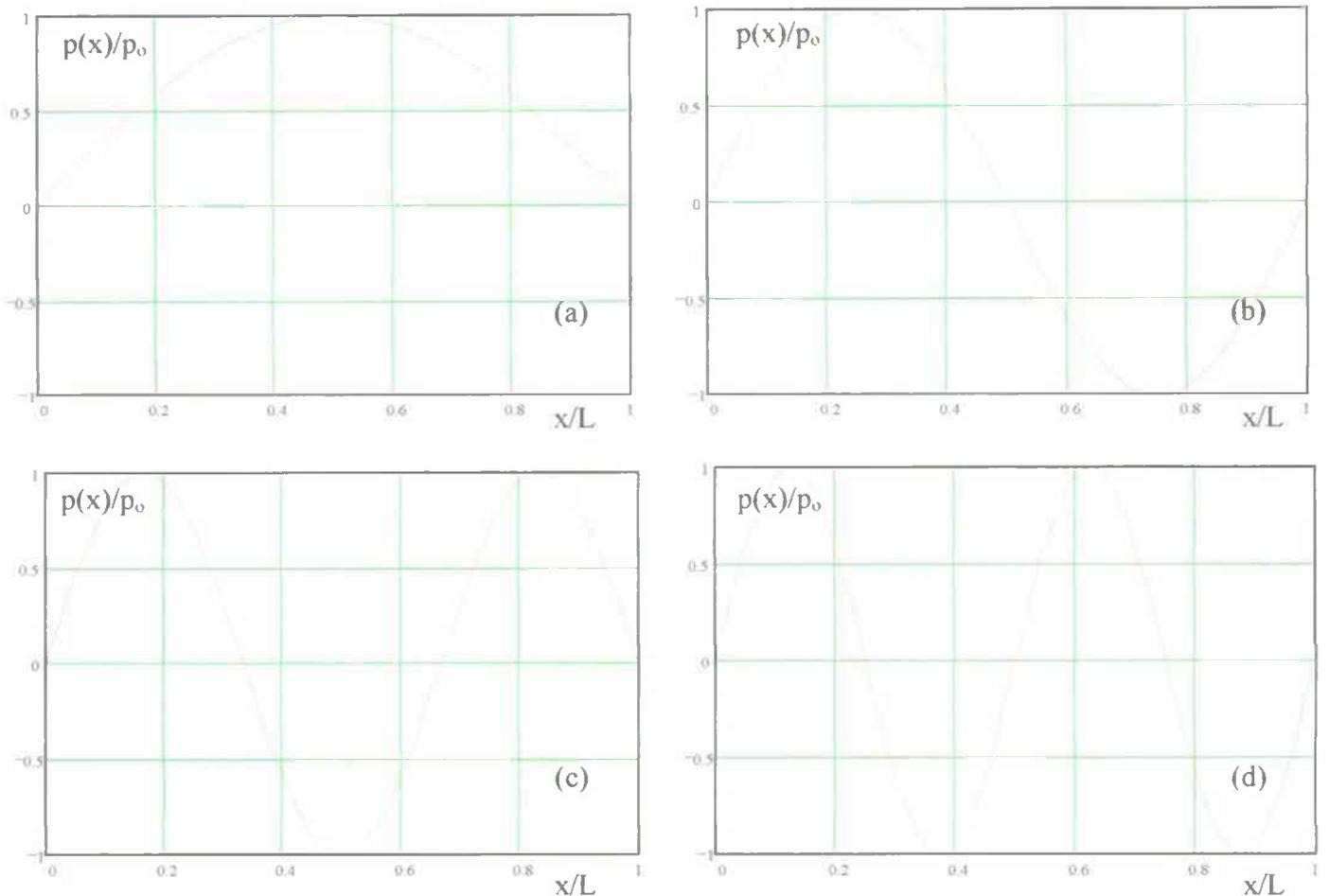


Figura A.3 - Modos de vibração da cavidade aberto-aberto: (a) 1°, (b) 2°, (c) 3° e (d) 4° modos.

A.3.3 Cavity Aberto-Fechada

Este caso utiliza-se dos conhecimentos assimilados nos itens A.3.1 e A.3.2 para resolver uma cavidade com as condições de contorno aberto e fechado. Logo, conforme Figura A-1, $p_1 = 0$, $q_2 = 0$ e a matriz de transferência é expressa da seguinte maneira,

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \lambda & \frac{c}{iS} \sin \lambda \\ -\frac{iS}{c} \sin \lambda & \cos \lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{A.25})$$

ou seja,

$$0 = \cos \lambda \cdot p_1 \rightarrow \frac{\omega_n L}{c} = \pi(n + \frac{1}{2}), \quad n = 1, 2, 3, \dots \Rightarrow \therefore \omega_n = \frac{c}{L} \pi(n + \frac{1}{2}) \quad (\text{A.26})$$

Seguindo o procedimento adotado nos itens anteriores, os campos de pressão e vazão acústica ao longo da cavidade são expressos da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} p(x) \\ q(x) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\lambda_n x/L) & \frac{c}{iS} \sin(\lambda_n x/L) \\ -\frac{iS}{c} \sin(\lambda_n x/L) & \cos(\lambda_n x/L) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \lambda_n = \pi(n + \frac{1}{2}) \quad \text{onde } n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{A.27})$$

logo,

$$p(x) = \cos(\lambda_n x/L) \cdot p_1 \quad \rightarrow \quad \therefore \frac{p(x)}{p_1} = \cos(\lambda_n x/L) \quad (\text{A.28a})$$

$$q(x) = -\frac{iS}{c} \sin(\lambda_n x/L) \cdot p_1 \quad \rightarrow \quad \therefore \frac{q(x)}{iS p_1 / c} = \sin(\lambda_n x/L) \quad (\text{A.28b})$$

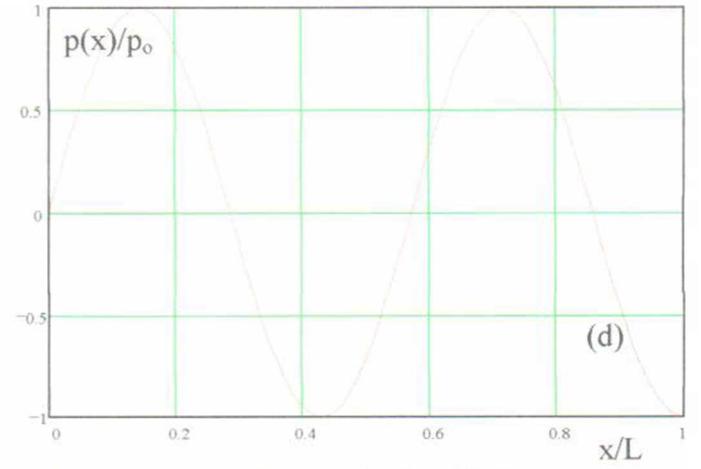
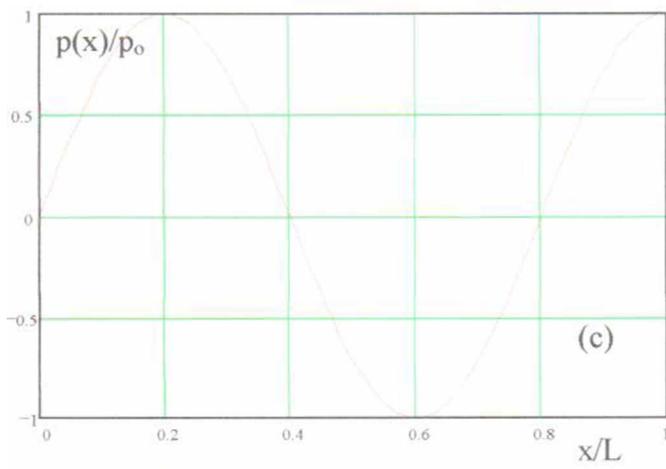
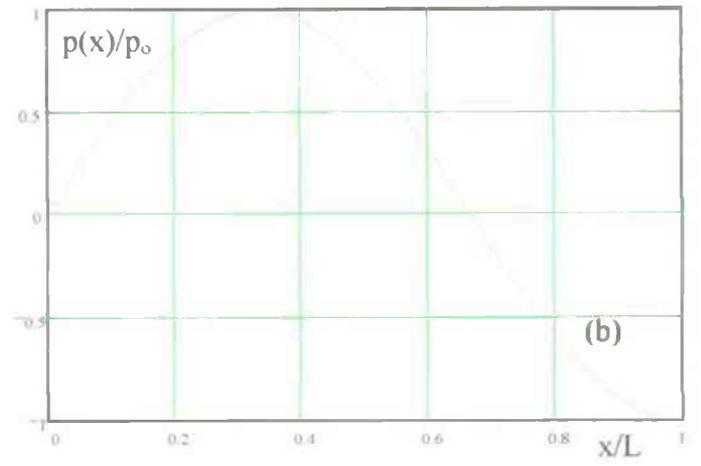
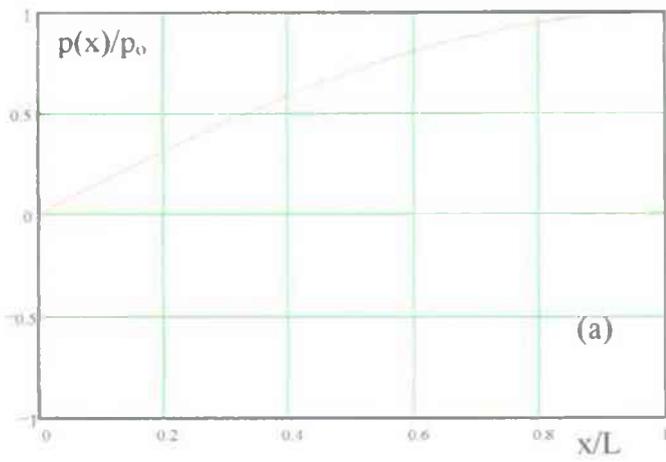


Figura A.4 - Modos de vibração da cavidade aberto-fechada: (a) 1°, (b) 2°, (c) 3° e (d) 4° modos.

ANEXO B

PROBLEMAS DE SUPERFÍCIE LIVRE

B.1 SOBRE PROBLEMAS DE SUPERFÍCIE LIVRE

A primeira vista, como resultado da observação, a superfície do mar parece ser um conjunto desordenado de elevações e vales. Isto denota um exemplo clássico de sistema caótico. Todavia, uma observação mais criteriosa que despreze os efeitos localizados e de pequena importância poderia enxergar uma certa regra neste fenômeno aparentemente sem ordem.

A busca de leis gerais que pudessem reger o comportamento do fenômeno de oscilação de superfícies fluidas livres e expressar o mais o realisticamente possível o problema, motivou dezenas de estudiosos a pesquisar este assunto. Na literatura encontram-se diversas propostas de teorias de ondas. Em geral, o fenômeno das ondas d'água é complexo e difícil de ser descrito matematicamente por causa de sua não-linearidade, seu caráter tridimensional e pelo aparente comportamento aleatório. Descrições mais precisas sobre as teorias de ondas podem ser encontradas em Abramson (1981), Pedroso (1982), Lamb (1993).

Neste anexo, será estudado o comportamento de problemas de ondas de superfície livre de um fluido sobre a influência da gravidade. Trata-se de um problema conservativo semelhante a sistemas dinâmicos pendulares ou massa-mola. Por esta analogia mecânica, percebe-se que a elevação da partícula fluida pode ser interpretada como uma rigidez.

Este anexo está baseado no trabalho de Pedroso (2000) que fez uma ampla revisão de diversas soluções analíticas voltadas para a aplicação em problemas de acoplamento barragem-reservatório.

B.2 HIPÓTESE SIMPLIFICADORAS

Dentre as hipóteses do problema, tem-se:

- a) O líquido é incompressível, inviscido, irrotacional e homogêneo;
- b) Os contornos são rígidos;

- c) Os efeitos não-lineares são desprezados ($\bar{\eta}/h$ e $\bar{\eta}/L \lll 1$ onde L é o comprimento de onda na direção x);
- d) Os efeitos de tensão superficial do líquido e da atmosfera exterior são desprezíveis; e
- e) O fundo é horizontal, fixo e impermeável, implicando na velocidade do fundo zero.

Efetuada um breve comentário sobre as hipóteses, tem-se:

- Estas hipóteses apresentam bons resultados para muitos casos práticos, envolvendo grandes cavidades;
- Para Reynolds $Re \geq 1000$, os efeitos da viscosidade ao nível dos contornos podem ser desprezíveis; e
- A condição de paredes flexíveis, problemas de interação fluido-estrutura, altera em muitos casos as frequências naturais e as formas modais.

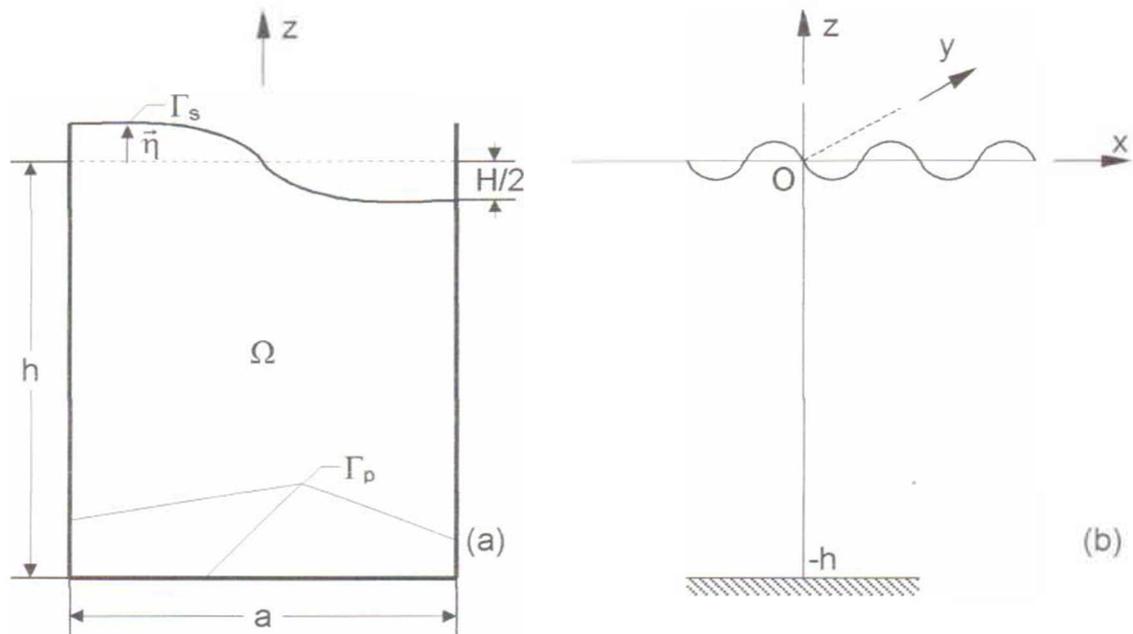


Figura B.1 - Esquemas de uma cavidade retangular com superfície livre (a), e das coordenadas para a análise da onda (b).

B.3 FORMULAÇÃO BÁSICA

Em conformidade com as hipóteses adotadas, a equação geral governante do problema de superfície livre é a equação de Laplace em função do potencial de velocidade ϕ ,

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad \text{em } \Omega_f \quad (\text{B.1})$$

onde,

$$\vec{v} = \nabla \phi \quad (\text{B.2})$$

e,
$$p = -\rho \dot{\phi} \quad (\text{B.3})$$

Apresenta as seguintes condições de contorno,

$$\frac{\partial \phi}{\partial \vec{n}} = \vec{v}_a = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial p}{\partial \vec{n}} = 0 \quad \text{em } \Gamma_p \quad (\text{B.4})$$

onde Γ_p representa os contornos rígidos, conforme a Figura B.1.

B.3.1 Sobre a superfície livre (Γ_s) em termos de pressão p :

Relação entre as pequenas flutuações de pressão e a altura da superfície livre é,

$$p = \rho_o g \bar{\eta} = \rho_o g Z \cdot \vec{n} \quad (\text{B.5})$$

e,

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho_o \ddot{Z} \cdot \vec{n} \quad (\text{B.6})$$

Derivando (B.5) em relação ao tempo e associando a (B.6), obtém-se:

$$g \frac{\partial p}{\partial z} + \ddot{p} = 0 \quad \text{em } \Gamma_s \quad (\text{B.7})$$

que representa a condição de contorno de superfície livre relacionando as duas condições anteriores.

B.3.2 Sobre a superfície livre (Γ_s) em termos de potencial de velocidade ϕ :

A equação de Bernoulli para o caso de pequenos movimentos assume a forma:

$$-\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{p}{\rho_o} + gz = f(t) \quad (\text{B.8})$$

Aplicando-a na superfície livre Γ_s , obtém-se:

$$\bar{\eta} = \frac{1}{g} \left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_{z=\eta} \quad (\text{B.9})$$

Nota-se que a função $f(t)$ ou qualquer outra constante pode ser incluída ao valor de $(\partial\phi/\partial t)$. Supondo que o movimento da superfície livre seja pequeno ($\bar{\eta} \rightarrow 0$), tudo será localizado em $z = 0$.

Com as considerações de pequenos movimentos e desprezando termos não-lineares de ordem superior, a velocidade da superfície livre é simplificada por,

$$\frac{\partial \bar{\eta}}{\partial t} = - \left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_{z=0} \quad (\text{B.10})$$

Derivando (B.9) em relação ao tempo e substituindo em (B.10), tem-se:

$$\left[\frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right]_{z=0} = 0 \quad (\text{B.11})$$

chamada de condição de Cauchy-Poisson para a superfície livre.

B.4 SOLUÇÃO DO PROBLEMA

A equação de Laplace $\nabla^2 \phi = 0$ pode ser resolvida por separação de variáveis, logo a solução ϕ é dada por um produto de funções:

$$\phi = F(x, y) \cdot G(z) \cdot f(t) \quad (\text{B.12})$$

Levando (B.12) em (B.1) e após algumas manipulações algébricas, vem:

$$\frac{1}{F(x, y)} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{1}{F(x, y)} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{1}{G(z)} \frac{\partial^2 G}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{B.13})$$

ou, de forma simplificada,

$$-\frac{\nabla^2 F}{F} = \frac{G''}{G} = m^2 \quad (\text{B.14})$$

onde m é uma constante real e positiva. Esta definição para m busca limitar às soluções com sentido físico. Logo, a Eq.(B.14) fica,

$$G'' - m^2 G = 0 \quad (\text{B.15a})$$

e,

$$\nabla^2 F + m^2 F = 0 \quad (\text{B.15b})$$

B.4.1 Movimento da onda ao longo de uma vertical z

Da expressão (B.15a), tem-se:

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} - m^2\right)G = 0 \quad (\text{B.16})$$

cuja solução é do tipo:

$$G = Ae^{mz} + Be^{-mz} \quad (\text{B.17})$$

onde as constante A e B são determinadas pelas condições de contorno (B.4), ou seja,

$$\left.\frac{\partial \phi}{\partial z}\right|_{z=-h} = 0 \Rightarrow \left.\frac{\partial G}{\partial z}\right|_{z=-h} = 0 \quad (\text{B.18})$$

Logo,

$$Ae^{-mh} = Be^{mh} = \frac{1}{2}E \quad (\text{B.19})$$

A fim de simplificar a expressão(B.17), multiplica-se seu lado direito por $e^{-mh} \cdot e^{mh}$,

$$G = Ae^{m(z+h)}e^{-mh} + Be^{-m(z+h)}e^{mh} \quad (\text{B.20})$$

e, aplicando (B.19) em (B.20), chega-se a:

$$G = \frac{1}{2}E[e^{m(z+h)} + e^{-m(z+h)}] = E \cdot \cosh[m(z+h)] \quad (\text{B.21})$$

Logo, a Eq.(B.12) torna-se:

$$\phi = E \cosh[m(z+h)] \cdot F(x,y) \cdot f(t) \quad (\text{B.22})$$

B.4.2 Introdução da condição de superfície livre

A solução em função do tempo é dada pela aplicação da condição de Cauchy-Poisson, ou seja, levando-se (B.22) em (B.11) tem-se:

$$\ddot{f}/f = -gm \tanh(mh) \quad (\text{B.23})$$

Se $\omega^2 = -gm \tanh(mh)$, a solução para a função $f(t)$ é dada pela equação diferencial $\ddot{f} + \omega^2 f = 0$, cuja solução pela equação característica resulta em $s = \pm i\omega$. Então,

$$f = Ce^{i\omega t} + De^{-i\omega t} \quad (\text{B.24})$$

onde C e D são constantes dependentes das condições de contorno, $\omega = 2\pi/T$ e T o período da onda.

Supondo $D = 0$ e aplicando B.24 na expressão (B.12), o potencial de velocidade ϕ apresenta a seguinte forma:

$$\phi = E^* \cosh [m(z+h)] \cdot F(x,y) \cdot e^{i\omega t} \quad (\text{B.25})$$

onde $E^* = E \cdot C$. Logo, nota-se a existência de um número discreto infinito de valores para ω_n e m_n que satisfaz a Eq.(B.23), reescrita como,

$$\omega_n^2 = m_n g \tanh(m_n h) \quad (\text{B.26})$$

Assim, a solução geral ϕ pode ser expressa,

$$\phi = \sum_{n=0}^{\infty} E_n^* \cosh [m_n (z+h)] \cdot F(x,y) \cdot e^{i\omega_n t + \theta} \quad (\text{B.27})$$

onde θ corresponde a uma defasagem. Como é conveniente apresentar E^* em função da amplitude da onda $A = H/2$, substituindo a Eq.(B.27) em (B.9) linearizada ($z = 0$) e considerando a parte real de η , vem:

$$\eta = -\frac{\omega E^*}{g} \cosh(mh) \cdot F(x,y) \cdot \text{sen}(\omega t) \quad (\text{B.28})$$

As expressões de ϕ e η mostram-se mais convenientes com a definição da constante A para a amplitude de η . Então:

$$\therefore E^* = -\frac{Ag}{\omega} \frac{1}{\cosh(mh)} \quad (\text{B.29})$$

Logo, substituindo (B.29) em (B.27),

$$\phi = -\frac{Ag}{\omega} \frac{\cosh m(z+h)}{\cosh(mh)} \cdot F(x,y) \cdot e^{i\omega t} \quad (\text{B.30})$$

Se a relação da Eq.(B.26) for substituída em (B.30), ainda é possível apresentar (B.30) com uma nova roupagem onde o seno hiperbólico estará no denominador. Em resumo, com a constante E da expressão (B.29), a função $G(z)$ está então definida.

B.4.3 Solução da equação da onda no plano (x-z)

A equação diferencial (B.15b) não apresenta uma solução geral possível, mas um certo conjunto de soluções dependentes das condições de contorno.

Seja, por exemplo, o movimento bidimensional da onda no plano x-z, então,

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial y} \right|_{y=z} = 0 \quad \Rightarrow \quad \left. \frac{\partial F}{\partial y} \right|_{y=z} = 0$$

e a expressão (B.15b) fica:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + m^2 \right) F = 0 \quad (\text{B.31})$$

cuja solução é:

$$F = A' e^{imx} + B' e^{-imx} \quad (\text{B.32})$$

Supondo $F = e^{-imx}$,

$$\phi = -\frac{Ag \cosh m(z+h)}{\omega \cosh(mh)} e^{i(\omega t - mx)} \quad (\text{B.33})$$

ou ainda,
$$\phi = -\frac{Ag \cosh m(z+h)}{\omega \cosh(mh)} \cdot \cos(\omega t - mx) \quad (\text{B.34})$$

A equação (B.34) é a função potencial de velocidade para uma onda progressiva na direção \overline{OX} . Se $F = e^{imx}$, o potencial ϕ corresponde a uma onda indo na direção oposta. Supondo agora uma solução do tipo:

$$F = \frac{1}{2} (e^{imx} + e^{-imx}) = \cos(mx) \quad (\text{B.35a})$$

ou,
$$F = \frac{1}{2i} (e^{imx} - e^{-imx}) = \text{sen}(mx) \quad (\text{B.35b})$$

Então,
$$\phi = -\frac{Ag \cosh m(z+h)}{\omega \cosh(mh)} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \cos(mx) \\ \text{sen}(mx) \end{array} \right\} \cos(\omega t) \quad (\text{B.36})$$

que é a função potencial de velocidade (FPV) para uma onda estacionária. Se A' for diferente de B' , uma onda parcialmente estacionária é obtida. Na prática, A' e B' são dados pelas condições de contorno no plano vertical, por exemplo, as de reflexão da onda, condição de Sommerfeld, condição de fluido-estrutura. Como um exemplo 2D de ondas irregulares, pode-se apresentar o caso das ondas no mar para o qual a FPV é dada como:

$$\phi = \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{Ag \cosh m_n(z+h)}{\omega_n \cosh(m_n h)} e^{i(\omega_n t - m_n x + \theta)} \quad (\text{B.37})$$

onde θ é uma defazagem qualquer.

B.4.4 Discussão sobre o parâmetro m

O sentido físico do parâmetro m pode ser percebido da seguinte forma; se ϕ e η são funções periódicas em relação ao espaço, então $m = 2\pi/L$ sendo L é o comprimento da onda. Ao aplicar esta definição na expressão (B.26), tem-se:

$$L = \frac{T^2 g}{2\pi} \tanh\left(2\pi \frac{h}{L}\right) \quad (\text{B.38})$$

Logo, a velocidade da onda pode ser calculada como:

$$c = \frac{L}{T} = \frac{gT}{2\pi} \tanh\left(2\pi \frac{h}{L}\right) \quad (\text{B.39})$$

ou ainda,

$$c = \frac{g}{\omega} \tanh\left(\frac{\omega h}{c}\right) \quad (\text{B.40})$$

- Para $\omega h/c < 1$ ou $h/L \lll 1$ - problema de águas rasas -, tem-se:

$$\sinh \frac{\omega h}{c} \approx \frac{\omega h}{c} \quad \cosh \frac{\omega h}{c} \approx 1 \quad \tanh \frac{\omega h}{c} \approx \frac{\omega h}{c}$$

Logo,

$$c = \sqrt{gh} \quad \text{e} \quad L = T\sqrt{gh} \quad (\text{B.41})$$

- Para $\omega h/c > 1$ ou $h/L > \text{ou} \cong 1$ - problema de profundas -, tem-se:

$$\sinh \frac{\omega h}{c} \approx \frac{e^{\omega h/c}}{2} \quad \cosh \frac{\omega h}{c} \approx \frac{e^{\omega h/c}}{2} \quad \tanh \frac{\omega h}{c} \approx 1$$

Logo,

$$c = g/\omega = gT/2\pi \quad \text{e} \quad L = gT^2/2\pi \quad (\text{B.42})$$

Uma discussão mais detalhada sobre os limites das águas rasas e profundas, assim como as expressões resultantes é tratado em Pedroso (1982).

Observa-se então, que a velocidade da onda cresce com a profundidade L até que um certo limite seja atingido. Como as frequências naturais destas ondas de superfície (*sloshing*) são proporcionais a velocidade de onda c, elas também crescem com a profundidade até que este limite seja atingido.

B.5 ONDAS DE SUPERFÍCIE LIVRE TRIDIMENSIONAIS NUMA CAVIDADE RETANGULAR

Seja a Eq.(B.15b) a expressão que governa o movimento tridimensional da onda, ou seja,

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + m^2 \right) F = 0$$

pode-se exprimir a equação acima da forma,

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + p^2 \right) \cdot F = 0 \quad (\text{B.43a})$$

e,

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + q^2 \right) \cdot F = 0 \quad (\text{B.43b})$$

onde p e q são constantes, tal que,

$$m^2 = p^2 + q^2 \quad (\text{B.44})$$

Através desta astúcia, o problema pode ser facilmente resolvido sob o ponto de vista matemático, e ao mesmo tempo introduz a idéia de um **espaço de frequências** onde p e q seriam uma espécie de vetores de frequência nas direções x e y. Com efeito, a Eq.(B.43) corresponde a uma espécie de equação da onda transformada por Fourier.

Seja pois uma cavidade retangular no plano x-y em $z = 0$, conforme a Figura B.2

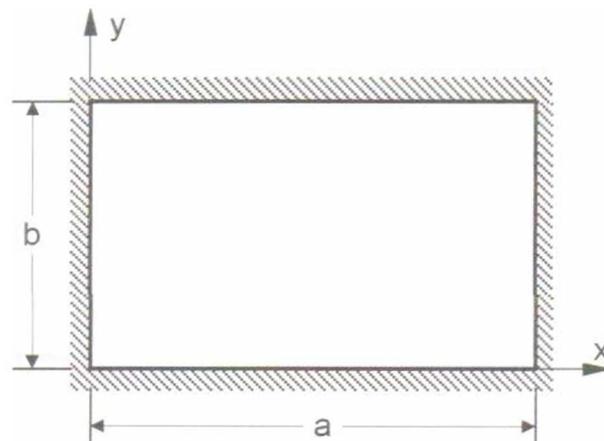


Figura B.2 - Corte horizontal da cavidade tridimensional no plano x-y.

As condições de contorno de parede rígida para a referida cavidade são:

$$\frac{\partial \phi}{\partial \vec{n}} = 0 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial \vec{n}} = 0, \text{ para } \begin{cases} x = 0, x = a \\ y = 0, y = b \end{cases} \quad (\text{B.45})$$

As soluções da Eq.(B.43), tanto em x quanto em y , são do tipo:

$$F = A_x \cos px + B_x \sin px \quad (\text{B.46a})$$

e,

$$F = A_y \cos py + B_y \sin py \quad (\text{B.46b})$$

onde A_x , A_y , B_x , e B_y são determinadas pelas condições de contorno na direção x . Este problema é idêntico ao caso de um tudo fechado-fechado, Anexo A. Logo,

- Para $x = 0$,

$$-pA_x \sin(p \cdot 0) + pB_x \cos(p \cdot 0) = 0 \Rightarrow \therefore B_x = 0 \quad (\text{B.47})$$

- Para $x = a$,

$$-pA_x \sin(p \cdot a) = 0 \rightarrow \sin(p \cdot a) = 0 \Rightarrow \therefore p = i\pi/a, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{B.48})$$

Desta forma,

$$\therefore F = A_x \cos(px) = A_x \cos \frac{i\pi x}{a}, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{B.49})$$

Na direção y expressa por (B.43b), tem-se um processo análogo, ou seja,

$$F = A_y \cos(py) = A_y \cos \frac{j\pi y}{a}, \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{B.50})$$

Desta forma, a solução para a equação de Laplace $\nabla^2 \phi$ é:

$$\phi = -\frac{Ag}{\omega} \frac{\cosh m(z+h)}{\cosh(mh)} \cdot \cos \frac{i\pi x}{a} \cos \frac{j\pi y}{b} \quad (\text{B.51})$$

onde

$$F = \cos \frac{i\pi x}{a} \cos \frac{j\pi y}{b} \quad (\text{B.52})$$

A solução geral torna-se:

$$\phi = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} - \frac{Ag \cosh m_n(z+h)}{\omega_n \cosh(m_n h)} \cdot \cos \frac{i\pi x}{a} \cos \frac{j\pi y}{b} \quad (\text{B.53})$$

onde

$$\omega_n^2 = m_n g \tanh(m_n h) \quad (\text{B.54})$$

e,

$$m_n^2 = p_i^2 + q_j^2 \quad (\text{B.55})$$

Discussões

É importante observar que, para o problema bidimensional (ondas no plano x-z) a equação de movimento (B.31) mostra que a curvatura $\partial^2 F / \partial x^2$ da superfície livre na direção x é proporcional a elevação de superfície livre. Similarmente para o caso tridimensional, a equação de movimento (B.15b) onde aparece as curvaturas nas direções x e y ($\partial^2 F / \partial x^2$ e $\partial^2 F / \partial y^2$), nota-se que a soma destas duas curvaturas é proporcional a elevação da superfície livre.

ANEXO C

PROBLEMAS ACÚSTICOS

C.1 PROBLEMA DE VALORES PRÓPRIOS PARA UMA CAVIDADE PRISMÁTICA

Este estudo corresponde a uma extensão dos estudos tratados no Anexo B, pois aplica a metodologia anterior para a solução do problema acústico tridimensional para outras condições de contorno. As deduções apresentadas estão calcadas no trabalho de Pedroso (2000).

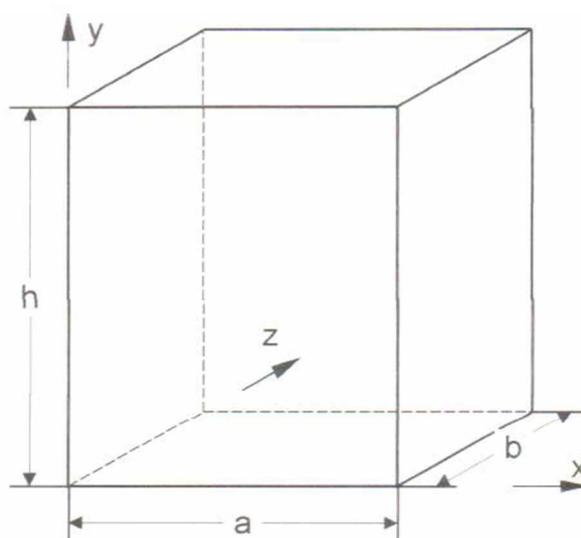


Figura C.1 - Cavidade prismática tridimensional.

C.1.1 Cavidade com paredes rígidas

Para a solução de problemas acústicos, é necessário solucionar a equação de Helmholtz,

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \ddot{\phi} = 0 \quad (\text{C.1})$$

com as seguintes condições de contorno,

$$\frac{\partial \phi}{\partial \vec{n}} = 0 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial \vec{n}} = 0, \text{ para } \begin{cases} x = 0, x = a \\ y = 0, y = b \\ z = 0, z = h \end{cases} \quad (\text{C.2})$$

O potencial de velocidade ϕ pode ser dado pelo produto das seguintes funções:

$$\phi = F(x, y, z) \cdot T(t) \quad (\text{C.3})$$

Aplicando a técnica de separação de variáveis, chega-se,

$$\frac{\nabla^2 F}{F} = \frac{1}{c^2} \frac{\ddot{T}}{T} = m^2 \quad (\text{C.4})$$

ou seja,
$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + m^2 \right) F = 0 \quad (\text{C.5a})$$

e,
$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 m^2 \right) T = 0 \quad (\text{C.5b})$$

Esta equação pode ser reproduzida pela adição membro a membro das equações,

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + p^2 \right) F = 0 \quad (\text{C.6a})$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + q^2 \right) F = 0 \quad (\text{C.6b})$$

e,
$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + r^2 \right) F = 0 \quad (\text{C.6c})$$

onde
$$m^2 = p^2 + q^2 + r^2 \quad (\text{C.7})$$

Como foi visto no anexo B, cada uma das equações (C.6) conduz ao mesmo tipo de solução quando resolvida individualmente e aplicada às condições de contorno (C.2). A solução das Eqs.(C.6) e (C.7) assemelha-se a resolução de uma equação de onda unidimensional para cada direção do espaço, transformada por Fourier, seguindo o mesmo procedimento do problema de valores próprios de um tubo fechado-fechado no Anexo A.

Logo,

$$F(x, y, z) = A \cos(px) \cos(qy) \cos(rz) \quad (\text{C.8})$$

ou ainda,

$$F(x, y, z) = A_{i,j,k} \cos\left(\frac{i\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{j\pi y}{b}\right) \cos\left(\frac{k\pi z}{h}\right) \quad (\text{C.9a})$$

onde

$$m^2 = \pi^2 \cdot \left(\frac{i^2}{a^2} + \frac{j^2}{b^2} + \frac{k^2}{h^2} \right) \quad (\text{C.9b})$$

Por outro lado, da Eq.(C.5b) transformada por Fourier obtém-se:

$$m^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \quad (\text{C.10})$$

Logo,

$$\omega_{ijk} = \pi c \cdot \sqrt{\frac{i^2}{a^2} + \frac{j^2}{b^2} + \frac{k^2}{h^2}}, \text{ para } \begin{cases} i = 0,1,2,3,\dots \\ j = 0,1,2,3,\dots \\ k = 0,1,2,3,\dots \end{cases} \quad (\text{C.11})$$

Enfim, a solução para o problema torna-se:

$$\phi = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} A_{i,j,k} \cos\left(\frac{i\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{j\pi y}{b}\right) \cos\left(\frac{k\pi z}{h}\right) \cdot e^{i\omega t} \quad (\text{C.12})$$

Como $p = \rho\phi$, as formas modais em termos de pressão são facilmente obtidas, assim como guardam o mesmo aspecto das formas modais em função de ϕ .

C.1.2 Cavidade aberta na direção z para $z = h$

Para a solução de uma cavidade aberta em $z = h$, a metodologia empregada é a mesma do item precedente. No entanto, precisa-se resolver a Eq.(C.6c) com novas condições de contorno, ou seja,

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + r^2 \right) F = 0 \quad (\text{C.13})$$

com, $\frac{\partial \phi}{\partial \bar{n}} = 0 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial \bar{n}} = 0$, para $z = 0$ (C.14a)

e, $\phi = 0 \Rightarrow F = 0$, para $z = h$ (C.14b)

A solução de (C.13) é do tipo da solução dada por,

$$F = A_z \cos rz + B_z \sen rz \quad (\text{C.15})$$

Aplicando as condições de contorno (C.14), chega-se a:

- Para $y = 0$,

$$F'(0) = -rA_z \sin(r \cdot 0) + rB_z \cos(r \cdot 0) = 0 \Rightarrow \therefore B_z = 0 \quad (\text{C.16})$$

▪ Para $z = h$,

$$F(h) = A_z \cos(rh) = 0 \rightarrow \cos(rh) = 0 \Rightarrow \therefore r = k\pi/2h, \quad k = 1, 3, 5, \dots \quad (\text{C.17})$$

Logo,

$$F = A_z \cos\left(\frac{k\pi}{2h} z\right), \quad k = 1, 3, 5, \dots \quad (\text{C.18})$$

A solução do problema toma a forma:

$$\phi = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} A_{i,j,k} \cos\left(\frac{i\pi}{a} z\right) \cos\left(\frac{j\pi}{b} y\right) \cos\left(\frac{k\pi}{2h} z\right) \cdot e^{i\omega t} \quad (\text{C.19})$$

e, a Eq.(C.11) torna-se:

$$\omega_{ijk} = \pi c \cdot \sqrt{\frac{i^2}{a^2} + \frac{j^2}{b^2} + \frac{k^2}{4h^2}}, \quad \text{para} \begin{cases} i = 0, 1, 2, 3, \dots \\ j = 0, 1, 2, 3, \dots \\ k = 0, 1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (\text{C.20})$$

C.1.3 Cavidade aberta nas extremidades $z = 0$ e $z = h$

Basicamente, este item é a repetição da solução da Eq.(C.13) agora com as condições de contorno aberta para $z = 0$ e $z = h$. De fato, reproduzindo o procedimento do item anterior, chega-se:

$$A_z = 0 \quad \text{e} \quad B_z \sin(rh) = 0 \rightarrow r = k\pi/h, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{C.21})$$

e,

$$F = B_z \sin\left(\frac{k\pi}{h} z\right), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{C.22})$$

Logo,

$$\phi = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} A_{i,j,k} \cos\left(\frac{i\pi}{a} z\right) \cos\left(\frac{j\pi}{b} y\right) \cos\left(\frac{k\pi}{h} z\right) \cdot e^{i\omega t} \quad (\text{C.23})$$

e,

$$\omega_{ijk} = \pi c \cdot \sqrt{\frac{i^2}{a^2} + \frac{j^2}{b^2} + \frac{k^2}{h^2}}, \quad \text{para} \begin{cases} i = 0, 1, 2, 3, \dots \\ j = 0, 1, 2, 3, \dots \\ k = 0, 1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (\text{C.24})$$